Nancy-Université
INPL

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.
Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur au même titre que sa version papier. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.
D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite entraîne une poursuite pénale.

Contact SCD INPL : scdinpl@inpl-nancy.fr

LIENS

Code de la propriété intellectuelle. Articles L 122.4
Code de la propriété intellectuelle. Articles L 335.2 – L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Nancy-Université
INPL

École doctorale IAEM Lorraine
DFD Automatique et Production Automatisée
Institut National Polytechnique de Lorraine

Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 6 novembre 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité Automatique et Traitement du signal

par

Rodolfo ORJUELA

Composition du jury

Président :	Ali Zolghadri	Professeur à l'Université de Bordeaux 1
Rapporteurs :	Gildas Besançon	Maître de conférences HDR à l'INPG
	Dominique Bonvin	Professeur à l'EPFL
Examinateurs :	Noureddine Manamanni	Professeur à l'Université de Reims
	Didier Maquin	Professeur à l'INPL (Directeur de thèse)
	Benoît Marx	Maître de conférences à l'INPL (Co-encadrant de thèse)
	José Ragot	Professeur à l'INPL (Co-directeur de thèse)

CRAN

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Nancy-Université – CNRS
2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy
Tél.+33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44

Mis en page avec la classe thloria.

à mon Angélique
avec tout mon
$\rho = 1 - sin\theta$

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés au *Centre de Recherche en Automatique de Nancy* (CRAN) au sein de l'équipe–projet *Représentation multimodèles–Applications au diagnostic des systèmes* (MUMODIA) rattachée au groupe thématique *Sûreté de fonctionnement et diagnostic des systèmes* (SURFDIAG). Ces recherches ont bénéficié du soutien financier du Conseil Régional de Lorraine.

J'ai vécu ces trois années de thèse comme une aventure passionnante. Ce temps dédié à la recherche m'a beaucoup apporté tant sur un plan scientifique que sur un plan humain. Je tiens à remercier, pour ces raisons, tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la bonne conduite de ma thèse.

Je souhaite exprimer ma plus sincère reconnaissance à Monsieur Didier Maquin et à Monsieur José Ragot qui m'ont offert la possibilité d'intégrer leur équipe de recherche. Mon estime à leur égard n'a fait que croître au fil du temps, de notre première rencontre à Paris jusqu'à présent. Je remercie également Monsieur Benoît Marx pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes recherches. Je tiens à faire part de toute ma gratitude à ce "trio" qui m'a accordé autant de confiance et de liberté. Durant ces trois années de collaboration, la matière de nos discussions a enrichi mon savoir scientifique. Leurs qualités de chercheur, leurs qualités humaines, leur regard bienveillant m'ont permis de mener à bon terme cette thèse.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner l'ensemble de ces recherches. Je remercie tout particulièrement Monsieur Dominique Bonvin et Monsieur Gildas Besançon pour tout le temps consacré à la lecture minutieuse de ce manuscrit de thèse. J'ai pu, à la lueur des commentaires pertinents figurant dans leurs rapports, envisager mon travail sous des angles nouveaux et entrevoir d'intéressantes perspectives de recherche. Je remercie aussi Monsieur Ali Zolghadri – que j'ai eu le plaisir de connaître dans le cadre de mon master recherche à Bordeaux – d'avoir accepté le double rôle d'examinateur et de président du jury. J'adresse enfin mes remerciements à Monsieur Noureddine Manamanni pour son examen attentif du présent mémoire.

Il m'est impossible d'omettre de saluer chaleureusement les "colocataires", de plus ou moins longue durée, de la très *mythique salle des machines 122 jaune* qui sont devenus bien plus que des collègues de travail. Leur bonhomie, leur entrain ont rendu mes journées de travail joyeuses et agréables.
Je remercie au passage Monsieur Gilles Mourot pour ses interventions chaque fois qu'EOMER, mon ordinateur, cherchait à se dérober à ses obligations. Je souhaite aussi remercier Madame Marjorie Schwartz et Madame Carole Courrier qui m'ont apporté, respectivement au début et à la fin de la thèse, une aide précieuse à l'heure de régler bien des formalités administratives.

Enfin, je ne remercierai jamais assez ma compagne, Angélique, qui a su peindre d'amour et de bonheur ma vie depuis que nos chemins se sont entremêlés dans *la ville rose*...

Table des matières

Notations **1**

Références personnelles **3**

Introduction générale

Chapitre 1
Introduction à l'approche multimodèle

1.1 Introduction 10
1.2 Sur le caractère linéaire ou non linéaire d'un système 13
1.2.1 Propriétés de linéarité d'un système 13
1.2.2 Tests de non-linéarité d'un système 14
1.2.3 Mesures de la non-linéarité d'un système 16
1.3 Modèles de systèmes à base de blocs structurés 16
1.3.1 Le modèle d'Hammerstein 17
1.3.2 Le modèle de Wiener 17
1.3.3 Modèle de type Hammerstein-Wiener 19
1.4 Modèles de systèmes par une approche multimodèle 21
1.5 Structures des multimodèles 26
1.5.1 Multimodèle de Takagi-Sugeno 27
1.5.2 Multimodèle découplé 30
1.5.3 Comparaison entre les multimodèles 34
1.5.4 Autres structures de multimodèles 35
1.6 Conclusion et discussion 37

Chapitre 2
Identification paramétrique d'un multimodèle découplé

2.1 Introduction 40

2.2 Bref état de l'art sur l'identification par multimodèle 42
2.3 Formulation du problème lié à l'identification 45
2.4 Critères d'estimation 47
2.4.1 Critère global 48
2.4.2 Critère local 49
2.4.3 Critère combiné 50
2.5 Procédure d'identification paramétrique 50
2.5.1 Estimation paramétrique avec un critère global 52
2.5.2 Estimation paramétrique avec un critère local 53
2.5.3 Calcul des fonctions de sensibilité 54
2.5.4 Procédure d'optimisation : algorithme 54
2.5.5 Comparaison entre les modélisations à partir d'une approche globale et d'une approche locale 56
2.5.6 A propos du phénomène de décrochage 61
2.6 Exemples d'identification 64
2.6.1 Système non linéaire mono-entrée/mono-sortie 64
2.6.2 Four à gaz de *Box et Jenkins* 67
2.7 Conclusion et discussion 70

Chapitre 3
Estimation d'état

3.1 Introduction 74
3.2 Rappel sur les structures des multimodèles 78
3.3 Stabilité des multimodèles 79
3.3.1 Stabilité du multimodèle de T.S. 79
3.3.2 Stabilité du multimodèle découplé 81
3.4 Estimation d'état basée sur un multimodèle découplé 82
3.4.1 Motivations et problématique 82
3.4.2 Synthèse de l'observateur 83
3.4.3 Amélioration des performances dynamiques de l'observateur 89
3.4.4 Réduction du conservatisme des conditions pour la synthèse de l'observateur à temps discret 98
3.5 Synthèse d'observateur avec un multimodèle découplé modifié 101
3.6 Observateur d'état pour un système comportant un retard sur la sortie 104
3.6.1 Formulation du problème 106

3.6.2 Synthèse de l'observateur . . . 107
3.7 Conclusion et contributions . . . 112

Chapitre 4
Estimation d'état robuste

4.1 Introduction . . . 116
4.2 Estimation d'état robuste vis-à-vis des perturbations . . . 117
4.2.1 Représentation multimodèle d'un système perturbé . . . 118
4.2.2 Synthèse d'un observateur à gain proportionnel . . . 119
4.2.3 Synthèse d'un observateur à gain proportionnel-intégral . . . 124
4.3 Estimation d'état robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques . . . 133
4.3.1 Représentation multimodèle d'un système incertain . . . 134
4.3.2 Conception d'un observateur à gain proportionnel . . . 135
4.3.3 Conception d'un observateur à gain proportionnel-intégral . . . 144
4.4 Estimation d'état robuste vis-à-vis des entrées inconnues . . . 152
4.4.1 Multimodèle découplé en présence d'entrées inconnues . . . 154
4.4.2 Structure de l'observateur à gain multi-intégral . . . 155
4.4.3 Définitions des erreurs d'estimation . . . 156
4.4.4 Discussion sur le découplage de l'entrée inconnue . . . 158
4.4.5 Formulation des problèmes . . . 159
4.4.6 Problème 1 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation . . . 159
4.4.7 Problème 2 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation en présence de perturbations . . . 160
4.4.8 Problème 3 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation en présence de perturbations et pour une $(q+1)^{\text{ème}}$ différence de l'entrée inconnue non nulle . . . 161
4.5 Conclusion et contributions . . . 169

Chapitre 5
Etude de cas : identification, estimation et diagnostic d'un bioréacteur

5.1 Introduction . . . 172
5.2 Présentation du modèle du bioréacteur . . . 172
5.3 Représentation multimodèle du bioréacteur dans le cas SIMO . . . 173
5.3.1 Première approche de modélisation . . . 174
5.3.2 Deuxième approche de modélisation . . . 176

5.4 Représentation multimodèle du taux de substrat carboné S dans le cas multi-entrées . . . 178
5.5 Reconstruction d'état à l'aide du multimodèle . . . 182
5.5.1 Reconstruction des sorties du bioréacteur à l'aide du multimodèle . . . 182
5.5.2 Estimation du substrat carboné dans le cas MISO . . . 183
5.5.3 Estimation de l'évolution de la biomasse . . . 184
5.6 Application de l'estimation d'état au diagnostic . . . 185
5.6.1 Génération des résidus à l'aide d'un banc d'observateurs . . . 186
5.6.2 Génération des résidus à l'aide d'un observateur multi-intégral . . . 189
5.7 Conclusion . . . 192

Chapitre 6
Perspectives

6.1 Introduction . . . 194
6.2 Nouvelles conditions de convergence exponentielle de l'erreur d'estimation . . . 194
6.3 Reconnaissance du mode actif . . . 200

Conclusion générale

Annexes

Annexe A
Calcul des fonctions de sensibilité pour le multimodèle modifié

Annexe B
Théorie de Lyapunov

Annexe C
Outils LMI

Index **219**

Bibliographie **221**

Table des figures

1.1 Système linéaire et système non linéaire . . . 13
1.2 Modèle de type Hammerstein . . . 17
1.3 Modèle de type Wiener . . . 17
1.4 Elément statique non linéaire (à gauche) et réponses indicielles de l'élément dynamique linéaire (à droite) . . . 18
1.5 Réponses du modèle de Wiener (à gauche) et du modèle d'Hammerstein (à droite) 19
1.6 Modèle de type Wiener-Hammerstein . . . 20
1.7 Fonctions gaussiennes ω_i (à gauche) et fonctions de pondération μ_i (à droite) dans le cas monovariable . . . 23
1.8 Fonctions gaussiennes ω_i (à gauche) et fonctions de pondération μ_i (à droite) dans le cas multivariable . . . 23
1.9 Système non linéaire et approximation multimodèle avec $L = 4$ (à gauche) et fonctions de pondération (à droite) . . . 25
1.10 Système non linéaire et approximation multimodèle avec $L = 2$ (à gauche) et fonctions de pondération (à droite) . . . 25
1.11 Architecture du multimodèle de T.S. . . . 27
1.12 Architecture du multimodèle découplé . . . 31
1.13 Multimodèles découplés à base de blocs Hammerstein (à droite) et Hammerstein-Wiener (à gauche) . . . 32
1.14 Architecture générale de commande utilisant N modèles et régulateurs . . . 33
1.15 Fonctions de pondération (à gauche) et réponses indicielles des sous-modèles (à droite) . . . 34
1.16 Comparaison entre les réponses indicielles du multimodèle de T.S. (à gauche) et celles du multimodèle découplé (à droite) . . . 35
1.17 Structure des sous-modèles issue d'une linéarisation de *vitesse* . . . 36
1.18 Architecture d'un multimodèle de T.S. en utilisant les sous-modèles de vitesse . 36
1.19 Architecture d'un multimodèle découplé en utilisant les sous-modèles de vitesse 37

2.1 Démarches classiques de modélisation . . . 40
2.2 Fonctions de pondération peu mélangées $\sigma = 0.1$. Fonctions gaussiennes $\omega_i(.)$ (à gauche) et fonctions de pondération $\mu_i(.)$ (à droite) . . . 47
2.3 Fonctions de pondération fortement mélangées $\sigma = 0.3$. Fonctions gaussiennes $\omega_i(.)$ (à gauche) et fonctions de pondération $\mu_i(.)$ (à droite) . . . 48
2.4 Entrée/sortie du système non linéaire (à gauche) et fonctions de pondération (à droite) . . . 57

2.5 Résultats de la procédure d'identification . . . 58
2.6 Entrée/sortie du système non linéaire (à gauche) et résultats de la procédure d'identification en présence d'un bruit de mesure (à droite) . . . 59
2.7 Signal d'entrée (à gauche) et fonctions de pondération (à droite) . . . 60
2.8 Sortie du modèle non linéaire et sortie du multimodèle découplé . . . 61
2.9 Architecture du multimodèle découplé modifié . . . 63
2.10 Sortie du modèle non linéaire et sortie du multimodèle découplé modifié . . . 64
2.11 Réponses temporelles du système à des échelons d'amplitudes variables (à gauche) et fonctions de pondération (à droite) . . . 65
2.12 Données pour l'identification (à gauche) et résultats de la validation du modèle (à droite) en l'absence d'un bruit de mesure . . . 66
2.13 Données pour l'identification (à gauche) et résultats de la validation du modèle (à droite) en présence d'un bruit de mesure . . . 67
2.14 Données d'entrée et de sortie du four (à gauche) et fonctions de pondération (à droite) . . . 67
2.15 Résultats de l'identification du modèle (à gauche) et de la validation (à droite) en l'absence d'un bruit de mesure . . . 68
2.16 Résultats de l'identification du modèle (à gauche) et de la validation (à droite) en présence d'un bruit de mesure . . . 69
2.17 Histogramme pour le jeu de données d'entrée du four . . . 69

3.1 Principe de l'estimation d'état . . . 74
3.2 Structure de l'observateur à gain proportionnel à temps continu . . . 84
3.3 Régions LMI pour l'observateur à temps continu (à gauche) et à temps discret (à droite) . . . 91
3.4 Réponses indicielles des sous-modèles sortie 1 (à gauche) et sortie 2 (à droite) . . . 93
3.5 Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 (à gauche) et du sous-modèle 2 (à droite) . . . 94
3.6 Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 3 . . . 94
3.7 Fonctions de pondération (à gauche) et comparaison entre les sorties (à droite) . . . 94
3.8 Transformation des sommets du polytope convexe . . . 97
3.9 Structure modifiée du multimodèle découplé . . . 102
3.10 Système à retard . . . 104
3.11 Erreurs d'estimation d'état . . . 112
3.12 Fonctions de pondération au cours du temps (à gauche) et comparaison entre la sortie et son estimée (à droite) . . . 112

4.1 Différentes sources de perturbations . . . 116
4.2 Structure de l'observateur PI à temps continu en considérant $M = 0$ . . . 125
4.3 Entrée et perturbations (à gauche), fonctions de pondération et sorties (à droite) 130
4.4 Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 (à gauche) et du sous-modèle 2 (à droite) . . . 131
4.5 Normes $\mathcal{L}_2$ . . . 132
4.6 Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 (à gauche) et du sous-modèle 2 (à droite) en présence d'une perturbation constante sur la sortie . . . 132

4.7 Réponses indicielles des sous-modèles nominaux et incertains. Sous-modèle 1 (à gauche) et sous-modèle 2 (à droite) . . . 149
4.8 Entrée, fonctions de pondération et sorties (à gauche). Incertitudes paramétriques $F_i(t)$, $S_i(t)$ et perturbation $w(t)$ (à droite) . . . 150
4.9 Evolution des états des sous-modèles et de leurs estimés . . . 151
4.10 Evolution des sorties du multimodèle et de leurs estimées . . . 151
4.11 Architecture de l'observateur MI à temps discret . . . 156
4.12 Entrée, sorties et fonctions de pondération du multimodèle . . . 164
4.13 Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 . . . 166
4.14 Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 2 . . . 166
4.15 Défauts η_a et η_s et leurs estimés . . . 166
4.16 Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 . . . 168
4.17 Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 2 . . . 168
4.18 Défauts η_a et η_s et leurs estimés . . . 168

5.1 Caractéristiques en régime statique du substrat carboné (à droite) et du taux de biomasse (à gauche) . . . 173
5.2 Représentation multimodèle du bioréacteur. Première approche de modélisation 175
5.3 Première approche de modélisation. Représentation multimodèle du substrat carboné, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite) 175
5.4 Première approche de modélisation. Représentation multimodèle du taux de biomasse, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite) 176
5.5 Deuxième approche de modélisation. Représentation multimodèle du substrat carboné, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite) 177
5.6 Deuxième approche de modélisation. Représentation multimodèle du taux de biomasse, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite) 177
5.7 Caractéristique en régime statique du taux de substrat carboné S . . . 178
5.8 Décomposition de l'espace de fonctionnement. Fonctions poids avant (à gauche) et après optimisation (à droite) . . . 179
5.9 Représentation multimodèle du taux de substrat carboné dans le cas multi-entrées. Résultats avec la séquence d'identification (à gauche) et avec la séquence de validation (à droite) . . . 180
5.10 Nouvelles fonctions poids avant (à gauche) et après optimisation (à droite) . . . 180
5.11 Représentation du multimodèle réduit du taux de substrat carboné dans le cas multi-entrées. Résultats avec la séquence d'identification (à gauche) et avec la séquence de validation (à droite) . . . 181
5.12 Comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à gauche) et comparaison entre le taux de biomasse et son estimé (à droite) . . . 183
5.13 Fonctions de pondération (à gauche) et comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à droite) . . . 184
5.14 Comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à gauche) et comparaison entre la biomasse et son estimée (à droite) . . . 185
5.15 Banc d'observateurs suivant un schéma DOS . . . 187
5.16 Évolution des résidus $r_{i,j}$ . . . 189
5.17 Résidus générés par l'observateur multi-intégral . . . 191

5.18 Comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à gauche) et comparaison entre la biomasse et son estimée (à droite) 191

6.1 Reconnaissance du mode actif lors d'un changement brusque sans bruit de mesure (à gauche) et avec bruit de mesure (à droite) 202
6.2 Reconnaissance du mode actif lors d'un changement progressif sans bruit de mesure (à gauche) et avec bruit de mesure (à droite) 202

Liste des tableaux

2.1 Récapitulatif des paramètres des sous-modèles 59

4.1 Niveaux d'atténuation obtenus pour les observateurs P et PI 150

5.1 Récapitulatif des paramètres du multimodèle du substrat carboné (à droite) et du multimodèle du taux de biomasse (à gauche) 175
5.2 Récapitulatif des paramètres des sous-modèles dans le cas MISO 179
5.3 Récapitulatif des paramètres des sous-modèles dans le cas MISO 181
5.4 Table des signatures théoriques 188

Notations

Matrices et vecteurs

$\mathrm{I}_n \quad (\mathrm{I})$	Matrice identité de dimension n (resp. de dimension appropriée)
G	Vecteur gradient
H	Matrice Hessienne
$P > 0$ ($P < 0$)	Matrice P symétrique, définie positive (resp. symétrique, négative)
P^T	Transposée d'une matrice P
P^{-1}	Inverse de la matrice P
$\lambda_{max}(P)\,(\lambda_{min}(P))$	Valeur propre minimale (resp. maximale) de P
$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (*) & M_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole $(*)$ représente M_{12}^T

Ensembles

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs

Acronymes

BMI	Inégalité matricielle bilinéaire (Bilinear Matrix Inequality)
LMI	Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality)
LTI	Linéaire à Temps Invariant
MDC	Multimodèle Découplé à temps Continu
MDD	Multimodèle Découplé à temps Discret
MIMO	Entrée multiple sortie multiple (Multiple Input Multiple Output)
MISO	Entrée multiple sortie simple (Multiple Input Single Output)
MSE	Moyenne quadratique de l'erreur (Mean Square error)
RSB	Rapport Signal sur Bruit
SISO	Entrée simple sortie simple (Single Input Single Output)
T.S.	Takagi-Sugeno
UIO	Observateur à entrées inconnues (Unknown Input Observer)
VAF	Variance-Accounted-For

Références personnelles

Revue internationale avec comité de lecture

1. Orjuela R., Marx B., Maquin D., Ragot J., "State estimation for nonlinear systems using decoupled multiple model". International Journal of Modelling Identification and Control, special issue on nonlinear observers, 59 - 67, Vol. 4, No. 1, 2008.

Conférences internationales avec comité de lecture

1. Orjuela R., Marx B., Maquin D., Ragot J., "State estimation of nonlinear discrete-time systems based on the decoupled multiple model approach". 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO 2007, Angers, France, 9-12 mai, 2007.
2. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "A decoupled multiple model approach for state estimation of nonlinear systems subject to delayed measurements". 3rd IFAC Advanced Fuzzy and Neural Network Workshop, Valenciennes, France, 29-30 octobre, 2007.
3. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Estimating the state and the unknown inputs of nonlinear systems using a multiple model approach". 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'08, Ajaccio, Corse, France, 25-27 juin, 2008.
4. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Design of robust H-inf observers for nonlinear systems using a multiple model". 17th IFAC World Congress, Séoul, Corée du Sud, 6-11 juillet, 2008.
5. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Proportional-integral observer design for nonlinear uncertain systems modelled by a multiple model approach". 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexique, 9-11 décembre, 2008.

Conférences nationales avec comité de lecture

1. Orjuela R., Maquin D., Ragot J., "Nonlinear system identification using uncoupled state multiple-model approach". 4th Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'20-06, Nancy, France, 16-17 novembre, 2006.
2. Orjuela R., Maquin D., Ragot J., "Identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle à états découplés". Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'06, Poitiers, France, 16-17 novembre, 2006.

3. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche multimodèle découplé". 2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2007, Reims, France, 9-11 juillet, 2007.
4. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Conception d'un observateur PI pour un multimodèle découplé". 8th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic control, STA'2007, Sousse, Tunisie, 5-7 novembre, 2007.
5. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "PI observer design for discrete-time decoupled multiple models". 5th Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'2007, Grenoble, France, 15-16 novembre, 2007.
6. Orjuela R., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Conception d'observateurs robustes pour des systèmes non linéaires incertains : une stratégie multimodèle". 5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucarest, Roumanie, 3-5 septembre, 2008.

Introduction générale

La complexité croissante des systèmes rencontrés dans l'industrie a sans aucun doute généré de nouveaux problèmes dont la résolution constitue autant de défis à relever par l'automaticien. La conduite de ces systèmes requiert, d'une part, des stratégies de commande de plus en plus sophistiquées de façon à améliorer et/ou à maximiser les performances du système et, d'autre part, l'intégration de modules de surveillance en mesure d'assurer un bon fonctionnement et la sécurité des opérateurs. Les solutions apportées à ces deux problèmes passent souvent par une phase de connaissance de l'état de fonctionnement du système par le biais d'une estimation entière ou partielle de ses variables d'état et éventuellement des grandeurs perturbatrices (défauts, entrées inconnues, etc.). En effet, de nombreuses techniques de synthèse de lois de commande sont conçues en supposant que l'état du système est accessible à la mesure. Or, sur un plan pratique, divers facteurs physiques, techniques ou économiques rendent particulièrement difficile voire impossible la mesure de la totalité des variables du système, d'où le besoin de procéder à une estimation des variables non mesurables. Dans le contexte de la surveillance, l'estimation de l'état du système est une source de redondance analytique. Elle permet de générer des symptômes de défaillance du système à partir d'un test de cohérence entre des signaux extraits du système qui renseignent sur son comportement réel et des signaux estimés qui traduisent le comportement attendu. Tout écart non permis entre ces signaux révèle la présence éventuelle de défauts affectant le fonctionnement du système, défauts qu'il convient ensuite d'estimer.

D'une façon générale, l'estimation de l'état d'un système s'opère par le biais d'un système dynamique auxiliaire, couramment appelé *estimateur d'état* ou *observateur*. Il est conçu sur la base d'un modèle capable de représenter avec précision le comportement réel du système. La complexité de ce modèle doit en outre demeurer admissible et ce, de façon à rendre la tâche de synthèse et de mise en œuvre de l'observateur la plus aisée possible (étude de sa stabilité et de la convergence de l'erreur d'estimation, minimisation du volume de calculs, etc.).

Les premières études relatives à l'estimation d'état ont été menées à partir de modèles de structure linéaire relativement peu complexes. Les outils théoriques de synthèse d'observateurs, basés sur ce genre de modèle, semblent avoir atteint une certaine maturité et de nombreuses techniques d'estimation d'état sont disponibles. Cependant, le recours à ces techniques peut présenter certaines limites dans nombre de situations pratiques. En effet, la caractérisation de nombreux systèmes physiques à l'aide de modèles linéaires s'accompagne généralement d'hypothèses simplificatrices, souvent restrictives qui conduisent par exemple à considérer de faibles variations du système autour d'un point de fonctionnement donné, réduisant de fait le domaine de validité du modèle. L'estimation d'état fournie par l'observateur conçu sur la base de telles hypothèses se révèle inefficace lorsque l'objectif est d'obtenir une estimation d'état valable dans

un large domaine de fonctionnement du système et non plus seulement au voisinage d'un point de fonctionnement donné, les performances du modèle se dégradant dès que le système s'en éloigne.

Afin de satisfaire cet objectif, la synthèse de l'observateur doit se faire sur la base de modèles plus complexes de nature non linéaire en mesure de représenter le comportement du système dans une large plage de fonctionnement. Cette approche, objet de développements constants depuis une trentaine d'années, est à l'origine de différentes techniques de synthèse d'observateurs (filtres de Kalman étendus, observateurs à grand gain, observateurs adaptatifs, etc.) pour des classes spécifiques de modèles non linéaires. Toutefois, en raison de la multiplicité de leurs structures et de leur complexité mathématique, les modèles non linéaires rendent la synthèse et la mise en œuvre de l'observateur plus difficiles et délicates que dans le cas des modèles linéaires. A ces difficultés se superpose en outre le problème épineux soulevé par l'obtention d'une représentation globale du comportement du système.

En effet, la mise en équations des lois de la conservation de la masse et de l'énergie qui gouvernent un système conduit en règle générale à un modèle de connaissance trop complexe, à la mise en œuvre délicate. Dans bon nombre de situations pratiques, le manque de connaissances *a priori* sur le système peut compromettre la réussite d'une démarche de modélisation phénoménologique. Dans ce cas de figure, le recours à des techniques de modélisation expérimentale élaborées à partir des mesures d'entrée/sortie recueillies sur le système s'impose. Dans le cadre de cette démarche de modélisation, la caractérisation appropriée du système est tributaire d'un choix judicieux de la structure du modèle. Ce choix est d'autant plus compliqué que le modèle obtenu doit pouvoir être exploité lors de la synthèse de l'observateur. Au problème posé par la synthèse de l'observateur vient donc se greffer le problème initial de l'identification paramétrique du modèle avec toutes les difficultés qu'il comporte.

Pour ces raisons, les phases de modélisation du système et de synthèse de l'observateur doivent être envisagées conjointement de manière à livrer une solution adaptée aux problèmes soulevés par l'estimation d'état et par le diagnostic. Il convient alors de proposer des techniques d'estimation d'état conçues à partir de modèles de représentation non linéaire, d'une part, assez généraux de façon à prendre en compte un nombre varié de situations de fonctionnement du système (haut degré de généralité pour l'identification) et, d'autre part, structurellement aptes à favoriser la synthèse de l'observateur. La problématique abordée dans cette thèse se situe précisément dans cet axe de recherche.

La stratégie d'estimation d'état proposée dans ce mémoire est basée sur une technique de modélisation globale connue sous le nom générique d'*approche multimodèle*. Son principe s'appuie sur la réduction de la complexité du système par le fractionnement de son espace de fonctionnement en un nombre fini de zones de fonctionnement. Un *sous-modèle* de structure simple et souvent linéaire peut alors servir à la description du comportement dynamique du système dans chaque zone. Le comportement global du système est ensuite représenté en considérant judicieusement la contribution relative de chaque sous-modèle au moyen d'une *fonction de pondération* associée à chaque zone de fonctionnement.

Les multimodèles sont reconnus pour leurs capacités à approcher les comportements dynamiques, aussi complexes soient-ils, d'une large gamme de systèmes. Ils se révèlent tout à fait adaptés à la modélisation de systèmes à partir de données expérimentales. Leur structure possède en outre des propriétés mathématiques très intéressantes d'un point de vue de l'automatique. En effet, les multimodèles facilitent l'extension de certains outils d'analyse développés dans le cadre des systèmes linéaires aux systèmes non linéaires et ce, sans avoir à effectuer d'analyse spécifique sur la non-linéarité du système.

Dans cette approche de modélisation, deux grandes familles de multimodèles sont recensées selon la structure mise à profit pour agréger les sous-modèles. La première, connue sous l'appellation de *multimodèle de Takagi-Sugeno*, est constituée de sous-modèles partageant un vecteur d'état unique. La seconde, connue sous l'appellation de *multimodèle découplé*, fait intervenir des sous-modèles découplés (c.-à-d. indépendants), chacun d'entre eux possédant son propre vecteur d'état.

L'intérêt suscité par le multimodèle de Takagi-Sugeno lors de la modélisation, de la commande ou de l'estimation d'état des systèmes non linéaires a largement été démontré. Toutefois d'un point de vue structurel, tous les sous-modèles constituant ce multimodèle ont la même dimension, un vecteur d'état unique étant employé. La complexité des sous-modèles est par conséquent constante quelle que soit la complexité du système dans les différentes zones de fonctionnement. Le multimodèle ainsi obtenu risque alors d'être sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée.

La structure du multimodèle découplé, quant à elle, introduit une certaine flexibilité dans l'étape de modélisation. Elle permet en effet d'introduire des sous-modèles dont les vecteurs d'état peuvent être de dimensions différentes et se démarque ainsi des structures de multimodèles classiquement utilisées. Dans un contexte d'identification, le multimodèle découplé offre alors des degrés de liberté supplémentaires dans la mesure où il rend possible la modélisation de systèmes complexes dont la structure peut varier en fonction du régime de fonctionnement. En effet, la dimension de chaque sous-modèle peut s'adapter à la complexité du système dans chaque zone de fonctionnement. Il paraît intéressant, pour ces raisons, d'exploiter la structure du multimodèle découplé lors de la synthèse d'un observateur. Les possibilités offertes par ce genre de multimodèle pour la reconstruction de l'état d'un système et pour son diagnostic semblent néanmoins peu exploitées au regard des travaux actuellement publiés. Les recherches engagées dans le cadre de ce mémoire visent donc à proposer des outils destinés à l'estimation d'état des systèmes et ce, de la phase de modélisation à l'aide d'un multimodèle découplé jusqu'à la phase de synthèse d'observateurs d'état robustes.

Organisation et contributions

Ce mémoire de thèse a été rédigé à l'image du multimodèle découplé composé de sous-modèles indépendants les uns des autres. En effet, sa rédaction traduit la volonté de rendre les chapitres indépendants les uns des autres tout en veillant à les insérer dans un ensemble cohérent et homogène.

L'organisation du mémoire reproduit les différentes étapes qui conduisent à la résolution de nombreux problèmes rencontrés dans les sciences de l'ingénieur, à savoir l'analyse et le choix d'une structure de modèle, l'identification paramétrique du système, le développement d'outils théoriques de synthèse puis leur mise en œuvre.

Le **premier chapitre** fait figure d'introduction à l'approche multimodèle. Il expose les concepts et les principes généraux sur lesquels elle repose et propose une définition précise de la terminologie classiquement utilisée. Il établit les différences entre les deux principales structures de multimodèles. Le **second chapitre** aborde le problème soulevé par l'identification des systèmes non linéaires à partir d'une structure multimodèle découplé. Loin d'être exhaustif, ce chapitre a néanmoins le mérite de fournir les éléments nécessaires à la représentation multimodèle d'un système à partir d'une démarche expérimentale d'identification de type boîte noire. Les **troisième et quatrième chapitres**, cœur du mémoire, sont dédiés au problème posé par l'estimation d'état d'un système à partir de sa représentation multimodèle. Le **troisième chapitre** propose une extension de l'observateur de Luenberger ou à gain proportionnel classiquement employé dans les problèmes d'estimation d'état. Le recours à la seconde méthode de Lyapunov conduit à l'obtention des conditions garantissant la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires. Dans le **quatrième chapitre**, ces résultats sont étendus à la synthèse des observateurs d'état "robustes" vis-à-vis des perturbations, des incertitudes paramétriques et des entrées inconnues susceptibles d'affecter le comportement dynamique du système. L'estimation d'état robuste aux perturbations et aux incertitudes paramétriques est initialement traitée en considérant un observateur à gain proportionnel. Le gain de cet observateur est obtenu de façon à atténuer l'impact de ces perturbations sur l'erreur d'estimation tout en imposant des performances dynamiques (vitesse de convergence, etc.). Cet observateur n'offre toutefois pas au concepteur tous les degrés de liberté nécessaires à l'obtention d'un compromis satisfaisant entre les performances dynamiques de l'observateur et le rejet des perturbations, un objectif dégradant généralement l'autre. Pour surmonter ces difficultés, il est fait appel à une structure particulière d'observateur dit à gain proportionnel-intégral en mesure de généraliser l'observateur à gain proportionnel standard et d'introduire des degrés de liberté supplémentaires dans la phase de synthèse. Quant au problème de l'estimation d'état robuste vis-à-vis des entrées inconnues, il est traité à l'aide d'un observateur particulier à entrées inconnues dit *observateur à gain multi-intégral*. Ce dernier rend possible l'estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues affectant son comportement. Ces estimations peuvent être directement mises à profit face aux problèmes posés par le diagnostic et la surveillance des systèmes. Soulignons que la conception des observateurs à gain proportionnel-intégral et à gain multi-intégral n'a, à notre connaissance, pas encore été abordée dans un cadre multimodèle. Enfin, le **cinquième chapitre** établit, à partir de quelques exemples académiques, un lien entre la démarche d'identification et celle de l'estimation d'état et montre dans quelle mesure ces résultats peuvent être exploités dans un contexte de diagnostic des systèmes non linéaires.

1

Introduction à l'approche multimodèle

Sommaire

1.1 Introduction 10
1.2 Sur le caractère linéaire ou non linéaire d'un système 13
1.2.1 Propriétés de linéarité d'un système 13
1.2.2 Tests de non-linéarité d'un système 14
1.2.3 Mesures de la non-linéarité d'un système 16
1.3 Modèles de systèmes à base de blocs structurés 16
1.3.1 Le modèle d'Hammerstein 17
1.3.2 Le modèle de Wiener 17
1.3.3 Modèle de type Hammerstein-Wiener 19
1.4 Modèles de systèmes par une approche multimodèle 21
1.5 Structures des multimodèles 26
1.5.1 Multimodèle de Takagi-Sugeno 27
1.5.2 Multimodèle découplé 30
1.5.3 Comparaison entre les multimodèles 34
1.5.4 Autres structures de multimodèles 35
1.6 Conclusion et discussion 37

1.1 Introduction

La caractérisation du comportement dynamique d'un système, par le biais d'un modèle mathématique, représente une étape fondamentale dans de nombreuses disciplines scientifiques telles que les sciences physiques et de la nature, les sciences sociales et économiques, les sciences de l'ingénieur, etc. Dans ce dernier contexte, le modèle mathématique joue un rôle central dans la conception (dimensionnement des composants, simulation numérique), l'étude (analyse des mécanismes inhérents au comportement du système) et la conduite (optimisation du comportement, commande et surveillance) d'un système existant ou à construire.

Le modèle mathématique d'un système est une image abstraite de la réalité qui se présente généralement sous la forme d'un ensemble de variables, de fonctions et/ou d'équations. Comme l'indiquent Edwards et Hamson dans l'introduction de leur ouvrage *Guide to mathematical modelling* [Edwards et Hamson, 2001] :

> " La réussite d'un modèle dépend généralement de la facilité avec laquelle il pourra être utilisé et de la précision de ses prédictions. Remarquons également que tout modèle possède un *domaine restreint de validité* et ne peut être exploité en dehors de ce domaine. " [1]

Leurs propos mettent clairement en évidence les trois aspects fondamentaux que tout modèle est censé revêtir, à savoir le domaine de validité, la précision et la simplicité.
Tout modèle possède un domaine restreint de validité fixé, à titre d'exemple, par les aspects physiques du système ou par les hypothèses de travail émises lors de la procédure de modélisation.
La précision implique que le modèle décrit le plus fidèlement possible les phénomènes et les interactions entre les différentes grandeurs caractéristiques du système ou à défaut son comportement entrée/sortie. Le modèle livre ainsi, dans son domaine de validité, des prédictions *a posteriori* exactes et exploitables ultérieurement.
Enfin, la simplicité conditionne le choix des outils théoriques permettant de répondre à des objectifs classiques en automatique tels que l'estimation des variables non directement mesurables ou la commande du système.
La simplicité et la précision du modèle sont toutefois deux objectifs de modélisation antagonistes, la simplicité du modèle dégradant en règle générale la précision des estimations et vice versa. Il s'avère alors nécessaire de parvenir, au cours de l'étape de modélisation, à un compromis entre ces deux aspects et ce, tout en garantissant le domaine de validité le plus large possible.

Ce compromis passe souvent par le choix de la structure de modèle la plus apte à représenter le comportement dynamique du système. Dans un contexte d'identification des systèmes, deux grandes familles de modèles peuvent être distinguées en fonction de leur type de structure, linéaire ou non linéaire.

L'identification des systèmes basée sur une structure linéaire à temps invariable (LTI) a atteint un certain degré de maturité et des outils performants d'identification ont été établis dans

[1] " Generally the success of a model depends on how easily it can be used and how accurate are its predictions. Note also that any model will have a *limited range of validity* and should not be applied outside this range. "

la littérature [Walter et Pronzato, 1994; Ljung, 1999; Mensler, 1999]. D'après Ljung [1999], la sortie $y(t)$ d'un modèle LTI à temps discret excité par une entrée $u(t)$ et perturbé par un bruit additif $w(t)$ peut être caractérisée d'une façon générale par un modèle de la forme

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}w(t) \quad , \tag{1.1}$$

où q^{-1} est l'opérateur retard et où $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$, $D(q^{-1})$, $F(q^{-1})$ sont des polynômes en q^{-1}. Il est possible de recenser, selon les polynômes choisis, environ 32 structures différentes de modèles, les plus répandues étant celles du modèle à réponse impulsionnelle finie (A=C=D=F=1), du modèle à erreur de sortie (A=C=D=1), du modèle ARX (F=C=D=1) et du modèle ARMAX (F=D=1). La structure mathématique des modèles LTI a favorisé l'émergence de nombreuses techniques d'identification, d'analyse et de commande qui ont permis de fonder les principes de l'automatique moderne. Ces outils théoriques simplifient considérablement la résolution de nombreux problèmes régulièrement rencontrés en automatique.

La majorité des systèmes physiques présente cependant des comportements bien plus complexes et donc difficiles à caractériser dans une large plage de fonctionnement par des modèles linéaires de la forme (1.1). En effet, l'hypothèse de linéarité du système n'y est vérifiée que très localement autour d'un point de fonctionnement donné. La modélisation correcte du comportement global de ces systèmes nécessite le recours à des modèles de représentation plus "sophistiqués" de nature non linéaire. La relation entrée/sortie d'un modèle non linéaire se présente sous la forme générale

$$y(t) \quad = \quad g(\varphi(t), \theta) + w(t) \quad , \tag{1.2}$$

où $g(.)$ est le modèle, θ le vecteur de paramètres du modèle et $\varphi(t)$ le vecteur de régression c.-à-d. le vecteur de variables expliquant le comportement du système. Le vecteur de régression fait intervenir les variables d'entrée du système et éventuellement de sortie du modèle ou du système à identifier. Sjöberg et al. [1995] proposent un classement, établi en fonction du vecteur de régression utilisé, des différentes familles de modèles non linéaires :

- Modèles NFIR, dans lesquels seul $u(t-k)$ est utilisé pour construire le vecteur de régression.
- Modèles NARX, dans lesquels $u(t-k)$ et $y(t-k)$ servent à construire le vecteur de régression.
- Modèles NOE, dans lesquels $u(t-k)$ et $\hat{y}(t-k)$ servent à construire le vecteur de régression, $\hat{y}(t)$ étant la sortie du modèle.
- Modèles NARMAX, dans lesquels $u(t-k)$, $y(t-k)$ et $\varepsilon(t-k)$ servent à construire le vecteur de régression avec $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$.

Il convient toutefois de remarquer que le choix du vecteur de régression ne détermine pas la structure interne du modèle, toute forme mathématique de $g(.)$ étant admissible comme modèle. Dès lors, l'extension aux systèmes non linéaires des structures proposées dans le cadre des systèmes linéaires est difficilement envisageable. Il n'existe évidemment pas de modèle unique apte à caractériser le comportement d'un système, différents modèles pouvant être employés en

fonction de la structure interne choisie. Afin de guider au mieux ce choix, outre les critères de simplicité et de précision requis, des critères supplémentaires tels que la *flexibilité*, la *généralité* (c.-à-d. la capacité à prendre en compte un nombre varié de situations différentes de modélisation) et la *transparence* (c.-à-d. la facilité à interpréter et/ou à analyser le modèle) doivent être pris en considération.

L'élaboration de modèles de représentation non linéaire destinés à la prévision, la commande ou la surveillance figure parmi les thèmes de recherche incontournables en automatique. On peut mentionner, parmi les différentes structures de modèles non linéaires couramment utilisées, les séries temporelles et de Volterra, les estimateurs à noyau, les modèles à blocs structurés, les réseaux de neurones, les modèles flous, les modèles par décomposition en ondelettes, l'approche multimodèle et des approches *hybrides* issues de la combinaison de différentes approches comme par exemple les modèles neuro-flous [Jang, 1993; Babuska et Verbruggen, 2003], les modèles flous d'Hammerstein [Abonyi et al., 2000] ou les réseaux de neurones de modèles de type Wiener et de type Hammerstein [Janczak, 2004] (une étude approfondie des structures de modèles et des techniques de modélisation est présentée dans [Sjöberg et al., 1995; Boukhris, 1998; Ljung, 1999; Gasso, 2000]).

Le choix d'un modèle non linéaire soulève donc un problème fondamental, chaque structure présentant à la fois un certain nombre d'avantages et d'inconvénients. Le modèle recherché doit, dans tous les cas, être suffisamment général de façon à représenter avec précision une large classe de systèmes. Sa structure doit de plus favoriser l'élaboration d'outils théoriques d'analyse et de synthèse destinés à faciliter son exploitation. Toutefois, la multitude de formes que peut revêtir un modèle non linéaire rend difficile la mise en place d'une théorie unique à la fois générale (c.-à-d. applicable à toutes les formes) et exhaustive (c.-à-d. en mesure d'exploiter de façon systématique n'importe quel modèle non linéaire).

Dans ce mémoire, on a opté pour une *approche multimodèle*. En effet, les multimodèles constituent un outil adapté à la modélisation des systèmes complexes. Ils sont également dotés d'une structure aux propriétés mathématiques particulièrement intéressantes du point de vue de l'automatique. Ils permettent donc de parvenir à un bon compromis entre complexité et simplicité. Le présent chapitre, divisé en quatre sections, introduit l'approche multimodèle. Il débute par un rappel succinct des tests permettant de conclure sur le caractère linéaire ou non linéaire d'un système. Cette étape de tests permet de justifier le choix du type de structure, linéaire ou non, utilisé lors de la phase d'identification. Après ces considérations générales, la deuxième section présente les modèles à blocs structurés, formes de multimodèle relativement élémentaires. L'approche multimodèle proprement dite fait l'objet des deux dernières sections. Une présentation des principes régissant l'approche multimodèle et de la terminologie à laquelle elle fait appel est proposée. Une attention particulière est accordée aux différentes structures de multimodèles. En effet, dans ce contexte de modélisation, l'agrégation des sous-modèles peut s'opérer de diverses façons donnant toutes lieu à différentes classes de multimodèles [Filev, 1991]. Deux grandes familles de multimodèles sont recensées selon l'utilisation d'un vecteur d'état unique (*multimodèle de Takagi-Sugeno*) ou de plusieurs vecteurs d'état (*multimodèle découplé*) dans les équations du multimodèle. Le lien entre l'approche multimodèle et d'autres techniques de modélisation de systèmes non linéaires est clairement mis en évidence.

1.2 Sur le caractère linéaire ou non linéaire d'un système

Dans un contexte d'identification, la détermination du caractère, linéaire ou non linéaire, du système à identifier constitue une étape fondamentale. Il est possible pour y parvenir de procéder à une série de tests sur les données d'entrée et de sortie mises à disposition pour l'identification. Cette information sur la nature du système peut aider le concepteur à choisir la famille de modèles, linéaire ou non linéaire, la plus apte à représenter son comportement dynamique.

Cette section se propose de rappeler quelques tests classiques permettant de déterminer la nature linéaire ou non d'un système.

1.2.1 Propriétés de linéarité d'un système

Un système présente un comportement linéaire s'il répond favorablement aux propriétés de *superposition* et *d'homogénéité* définies ci-dessous [Haber et Keviczky, 1999; Nowak, 2002].

Définition 1.1 (Superposition)**.** *Un système obéit au principe de superposition si les réponses du système à différentes excitations sont additives. Soit par exemple $y_1(t)$ la réponse du système à l'excitation $u_1(t)$ et $y_2(t)$ la réponse à l'excitation $u_2(t)$. La propriété de superposition est vérifiée si la réponse à l'entrée $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ est donnée par $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.*

Définition 1.2 (Homogénéité)**.** *Un système obéit au principe d'homogénéité si les réponses du système à différentes excitations sont proportionnelles. Soit par exemple, $u(t)$ et $cu(t)$ deux signaux d'excitation appliqués séparément au même système (où c est une constante). La propriété d'homogénéité est vérifiée si les sorties résultant de l'application de ces entrées sont données respectivement par $y(t)$ et $cy(t)$ quel que soit le facteur d'échelle c utilisé.*

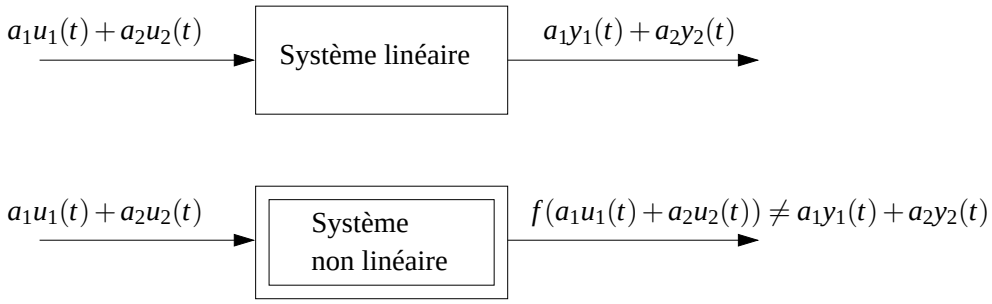

Figure 1.1 – Système linéaire et système non linéaire

La sortie $y(t)$ d'un système linéaire à une entrée $u(t)$ de la forme :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i(t) \tag{1.3}$$

doit vérifier, d'une façon générale, la condition :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i y_i(t) \quad , \tag{1.4}$$

où y_i est la sortie du système à une excitation particulière u_i, soit

$$y_i(t) = g(u_i(t)) \quad , \tag{1.5}$$

où $g(.)$ est le système à tester.

En conclusion, un système est dit linéaire s'il obéit conjointement aux propriétés 1.1 et 1.2 et par opposition un système est dit non linéaire s'il ne les respecte pas (voir figure 1.1).

1.2.2 Tests de non-linéarité d'un système

Haber et Keviczky [1999] proposent un recueil de tests non paramétriques dans les domaines temporels, fréquentiels ou spectraux. Ces tests délivrent un certain nombre d'indices permettant de conclure sur le caractère non linéaire d'un système.

Les relations entre les tests portant sur la non-linéarité et les indices associés sont les suivantes :

- Tous les tests sont définis de façon à obtenir un indice nul si le système est linéaire.
- Si l'indice associé au test est différent de zéro alors le système étudié est de nature non linéaire.
- Le fait que l'indice soit nul n'est pas une condition suffisante pour conclure sur la linéarité du système, sauf si au cours du test le système a été excité par tous les signaux admissibles en amplitude et en forme.
- Un test réalisé sur un système excité par un nombre fini de signaux peut fournir un indice renseignant sur la non-linéarité du système. Rien ne peut cependant être avancé sur la linéarité.
- Les tests et les indices ne sont valables que dans un domaine particulier de fonctionnement du système déterminé par les signaux d'entrée. En effet, le même test peut conduire à un indice différent si un autre domaine de fonctionnement est exploré.

Deux tests réalisés dans le domaine temporel sont rappelés ci-dessous [Billings et Voon, 1983; Thomson et al., 1996].

Test temporel basé sur la réponse indicielle

Considérons un niveau normal de fonctionnement (*normal operating level*) du système $[u_0(t), y_0(t)]$. Le test comprend deux phases. La première phase consiste à appliquer un changement constant au niveau du signal d'excitation soit $u_0(t) + \Delta u_1$, à enregistrer le signal ainsi obtenu $y_1(t)$ puis à ramener le système à son comportement nominal de départ. La seconde phase consiste à appliquer un deuxième signal d'excitation au système soit $u_0(t) + \Delta u_2$ et à enregistrer la nouvelle sortie du système $y_2(t)$. Remarquons que les changements Δu_1 et Δu_2 sont liés par la relation :

$$\Delta u_2 = \rho \Delta u_1 \quad , \tag{1.6}$$

où ρ est un facteur d'échelle. On calcule ensuite le rapport :

$$\delta(t) = \frac{y_2(t) - y_0}{y_1(t) - y_0} \quad . \tag{1.7}$$

Si $\delta(t)$ n'est pas constant ou égal à ρ alors le système peut être considéré comme non linéaire. Les changements de ρ doivent être positifs et négatifs de façon à explorer l'espace de fonctionnement du système. Un indice sur la non-linéarité du système est donné par :

$$\eta = \max_t \frac{|\delta(t) - \rho|}{|\rho|} \quad . \tag{1.8}$$

Ainsi, en considérant des signaux sans bruit, un système est non linéaire si $\eta > 0$ (linéaire si $\eta = 0$ dans la plage de fonctionnement donnée). Dans le cas contraire, il convient de reproduire le test plusieurs fois et d'en prendre la valeur moyenne si les signaux sont bruités.

Remarque 1.1. *Le fait que deux systèmes aient un indice similaire ne se traduit pas par des comportements dynamiques similaires. En effet, ce test est basé sur le comportement en régime statique du système, son comportement dynamique n'étant pas pris en considération.*

Remarque 1.2. *Ce test peut également être effectué à partir de l'analyse de la caractéristique entrée/sortie du système en régime statique. La relation établie entre les données d'entrée et de sortie doit être linéaire et de pente constante égale à ρ.*

Test utilisant les corrélations entre les sorties du système [Billings et Voon, 1983]

Il est supposé que l'entrée $u(t)$ et le bruit du système $w(t)$ sont décorrélés, de moyenne nulle et que tous les moments impairs de $u(t)$ et de $w(t)$ sont nuls. Tous les moments pairs de $u(t)$ sont supposés disponibles.

Le test consiste à appliquer un signal d'entrée de la forme $u(t) + b$, où b est un signal constant, et à enregistrer la sortie $y(t)$ du système. Le signal de sortie est ensuite centré :

$$y_c(t) = y(t) - \bar{y} \text{ où } \bar{y} = \sum_{t=1}^{N} y(t)/N \quad , \tag{1.9}$$

puis on calcule la fonction de corrélation :

$$\phi_{y_c, y_c^2}(\tau) = \mathrm{E}\left[y_c(t+\tau)(y_c(t))^2\right] \quad . \tag{1.10}$$

Le système est considéré linéaire, dans la plage de fonctionnement donnée, si et seulement si :

$$\phi_{y_c, y_c^2}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \quad . \tag{1.11}$$

Soulignons que le signal constant b est ajouté à l'entrée de façon à ce que tous les termes reflétant la non-linéarité du système soient mis à contribution dans le calcul de $\phi_{y_c, y_c^2}(\tau)$.

Par ailleurs, la contrainte sur les moments du signal d'entrée $u(t)$ peut être assurée par un choix approprié du signal d'entrée, en considérant par exemple un signal sinusoïdal, un signal de type gaussien, etc. Cette hypothèse peut être vérifiée en calculant $\mathrm{E}[u(t)u(t+\tau_1)u(t+\tau_2)]$ $\forall \tau_1, \tau_2$.

1.2.3 Mesures de la non-linéarité d'un système

Les tests proposés dans la section 1.2.2 se contentent de conclure sur le caractère linéaire ou non linéaire du système (oui/non). Cependant, la mesure du *degré de non-linéarité* du comportement entrée/sortie du système serait susceptible de livrer des informations bien plus intéressantes. A titre d'exemple, cette mesure pourrait justifier l'emploi d'une loi de commande de type non linéaire pour le système. En effet, si le système n'était que "faiblement non linéaire" alors la conception d'une loi de commande de type linéaire serait en mesure de fournir des performances dynamiques largement satisfaisantes.

De nombreux auteurs ont cherché à établir une telle mesure. Guay [1996] a conçu une méthodologie permettant de mesurer *le degré de courbure* de la caractéristique en régime statique d'un système non linéaire. Helbig et al. [2000] et plus récemment Schweickhardt [2006] ont proposé différentes mesures du degré de non-linéarité permettant de quantifier l'erreur d'approximation du meilleur modèle linéaire d'un système non linéaire.

Le problème soulevé par la mesure du degré de non-linéarité d'un système demeure néanmoins ouvert et ce, en dépit des nombreux efforts fournis.

1.3 Modèles de systèmes à base de blocs structurés

Un moyen relativement simple de représenter le comportement non linéaire d'un système repose sur l'utilisation de modèles à base de blocs structurés (*Block-oriented models*) [Narendra et Gallman, 1966]. Ces derniers sont élaborés grâce à la combinaison de deux blocs de base : un élément non linéaire statique et un élément linéaire dynamique.

La combinaison de ces deux blocs peut conduire à l'élaboration d'un grand nombre de structures de modèles. Parmi les différents modèles à base de blocs structurés, les modèles d'Hammerstein et de Wiener sont probablement les plus répandus. Ils se présentent sous la forme d'un modèle dynamique linéaire en cascade avec un élément statique de type non linéaire. Leur différence provient de l'ordre dans lequel ces deux blocs sont présentés (Pearson [1995] a établi une comparaison exhaustive entre ces deux modèles). La capacité de ces deux modèles structurellement simples à représenter des comportements non linéaires complexes est à l'origine du succès rencontré par cette technique de modélisation.

L'identification des systèmes non linéaires à l'aide de blocs structurés remonte au milieu des années 60 [Narendra et Gallman, 1966] et a été depuis largement abordée dans la littérature [Haber et Unbehauen, 1990; Mielcarek, 1990]. Bien que considérablement exploités pour la modélisation, la commande et le diagnostic, ces modèles font toujours l'objet de nombreux travaux de recherche.

1.3.1 Le modèle d'Hammerstein

Le modèle d'Hammerstein se compose d'un élément statique non linéaire suivi d'un élément dynamique linéaire. Sa structure est présentée sur la figure 1.2.

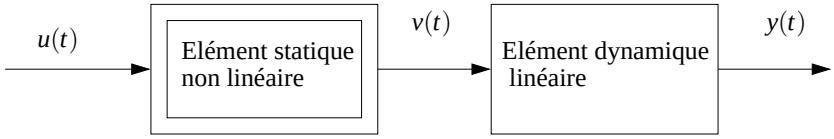

Figure 1.2 – Modèle de type Hammerstein

La représentation d'état du modèle de type Hammerstein est donnée par :

$$v(t) = f(u(t)) \ , \tag{1.12a}$$
$$x(t+1) = Ax(t) + Bv(t) \ , \tag{1.12b}$$
$$y(t) = Cx(t) + Dv(t) \ , \tag{1.12c}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^r$ le signal d'entrée du modèle, $v \in \mathbb{R}^m$ le signal d'entrée du bloc dynamique linéaire, $f(.) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ la fonction vectorielle caractérisant l'élément statique non linéaire et $y \in \mathbb{R}^p$ le signal de sortie du modèle. Il convient de remarquer que les seules grandeurs accessibles physiquement sont le signal d'entrée $u(t)$ et le signal de sortie $y(t)$. Le signal $v(t)$ est un signal fictif de modélisation et n'est pas accessible.

Les modèles d'Hammerstein se révèlent bien adaptés à la caractérisation, au moyen d'un modèle linéaire, du comportement dynamique d'un système dont l'actionneur présente un caractère non linéaire (saturations, zone morte, etc.).

1.3.2 Le modèle de Wiener

D'un point de vue structurel, le modèle de type Wiener est le pendant du modèle d'Hammerstein. Il s'obtient en inversant l'ordre des éléments de base. Sa structure est présentée sur la figure 1.3.

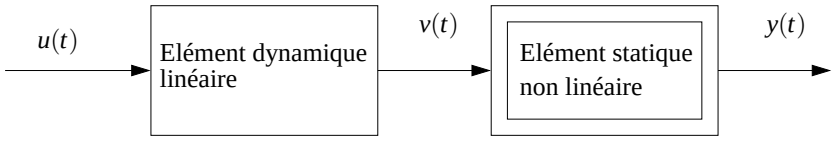

Figure 1.3 – Modèle de type Wiener

La représentation d'état du modèle de type Wiener est donnée par :

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \ , \tag{1.13a}$$
$$v(t) = Cx(t) + Du(t) \ , \tag{1.13b}$$
$$y(t) = f(v(t)) \ , \tag{1.13c}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le signal d'entrée du modèle, $v \in \mathbb{R}^r$ le signal de sortie du bloc dynamique linéaire, $f(.) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^p$ la fonction vectorielle caractérisant l'élément statique non

linéaire et $y \in \mathbb{R}^p$ le signal de sortie du modèle. Comme dans le cas du modèle d'Hammerstein, les seules grandeurs accessibles physiquement sont le signal d'entrée $u(t)$ et le signal de sortie $y(t)$.

Les modèles de Wiener se révèlent bien adaptés à la caractérisation, au moyen d'un modèle linéaire, du comportement dynamique d'un système dont le capteur présente un caractère non linéaire.

Exemple 1.1 (**Test de non-linéarité des modèles de Wiener et d'Hammerstein**)
Il est possible de faire appel au test temporel basé sur la réponse indicielle (c.f. section 1.2.2) afin de vérifier le comportement non linéaire des structures de Wiener et d'Hammerstein.

A cet effet, on considère des modèles de Wiener et d'Hammerstein élaborés à l'aide des deux mêmes blocs structurés. L'élément dynamique linéaire est donné par :

$$y(t+1) = 0.5y(t) + 0.5u(t) \tag{1.14}$$

et l'élément statique non linéaire par : $f(t) = 0.1 + \cos(4m(t))\exp(-0.75m(t))$.

La figure 1.4 présente la caractéristique de l'élément statique et les réponses indicielles de l'élément dynamique à des entrées constantes d'amplitudes différentes. Il est possible de constater que l'élément dynamique linéaire a un gain unitaire.

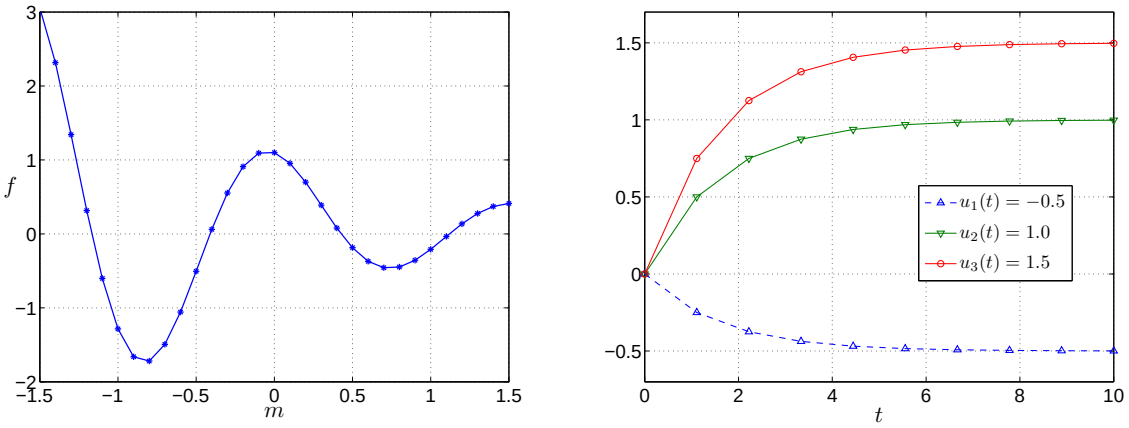

Figure 1.4 – Elément statique non linéaire (à gauche) et réponses indicielles de l'élément dynamique linéaire (à droite)

Les indices (1.8) calculés pour les modèles de Wiener et d'Hammerstein sont égaux à $\eta = 2.8$. *Il est ainsi possible de conclure positivement sur le caractère non linéaire des modèles d'Hammerstein et de Wiener dans leur domaine de fonctionnement. Il convient de remarquer que les indices associés à ces deux modèles sont identiques pour les valeurs numériques utilisées dans cet exemple et ce, malgré des comportements dynamiques largement différents (c.f. exemple 1.2).*

Il est important de souligner que les modèles d'Hammerstein et de Wiener, bien qu'ils soient construits à partir des mêmes blocs structurés, présentent des comportements différents. L'exemple suivant propose une comparaison entre ces deux modèles.

Exemple 1.2 (**Comparaison entre les modèles de Wiener et d'Hammerstein**)
On considère les modèles de Wiener et d'Hammerstein employés dans l'exemple 1.1.

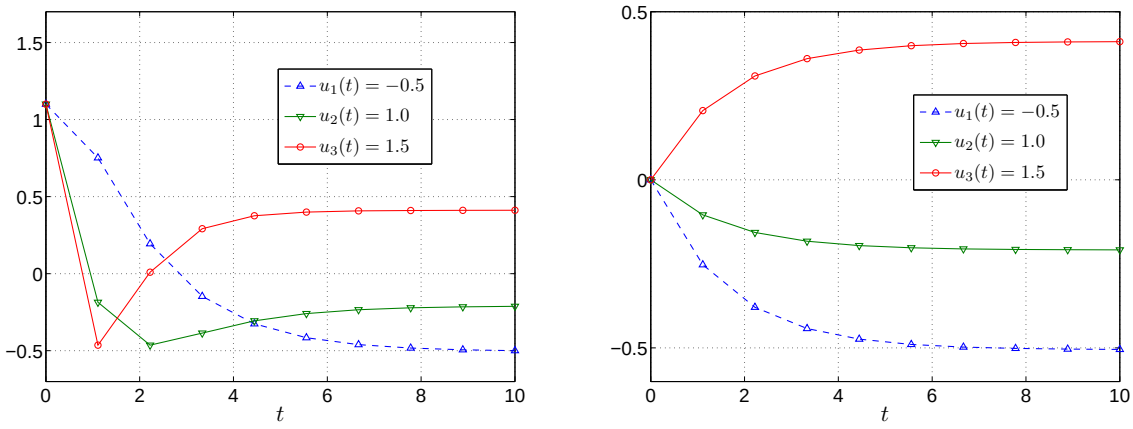

Figure 1.5 – Réponses du modèle de Wiener (à gauche) et du modèle d'Hammerstein (à droite)

Les réponses indicielles des modèles de Wiener et d'Hammerstein à différents échelons d'amplitudes variables sont illustrées sur la figure 1.5. Remarquons que la caractéristique entrée/sortie en régime statique des deux modèles est imposée directement par l'élément statique non linéaire, l'élément linéaire ayant un gain unitaire. Les deux modèles présentent ainsi le ***même comportement en régime statique*** *alors qu'ils exhibent des* ***comportements dynamiques très différents*** *(figure 1.5). En effet, le comportement dynamique du modèle d'Hammerstein est proche du comportement dynamique de l'élément linéaire, l'élément statique affectant seulement le gain du modèle. En revanche, le comportement dynamique du modèle de Wiener est fortement modifié par l'élément statique qui fait même apparaître des phénomènes oscillatoires.*

Par conséquent, l'interconnexion de ces deux blocs peut produire des comportements dynamiques très différents, le modèle de Wiener pouvant présenter un caractère non linéaire plus marqué que celui d'Hammerstein.

1.3.3 Modèle de type Hammerstein-Wiener

La combinaison de ces deux structures permet d'élaborer des modèles plus complexes. Ainsi, par exemple, le modèle de type Hammerstein-Wiener dont la représentation d'état est donnée

par :

$$
\begin{aligned}
v(t) &= f(u(t)) \ , && \text{(1.15a)}\\
x(t+1) &= Ax(t)+Bv(t) \ , && \text{(1.15b)}\\
s(t) &= Cx(t)+Du(t) \ , && \text{(1.15c)}\\
y(t) &= \tilde{f}(s(t)) && \text{(1.15d)}
\end{aligned}
$$

est obtenu en considérant un modèle d'Hammerstein suivi d'un modèle de Wiener. Un modèle de type Wiener-Hammerstein peut également être obtenu sur ce même principe mais en inversant l'ordre des modèles.

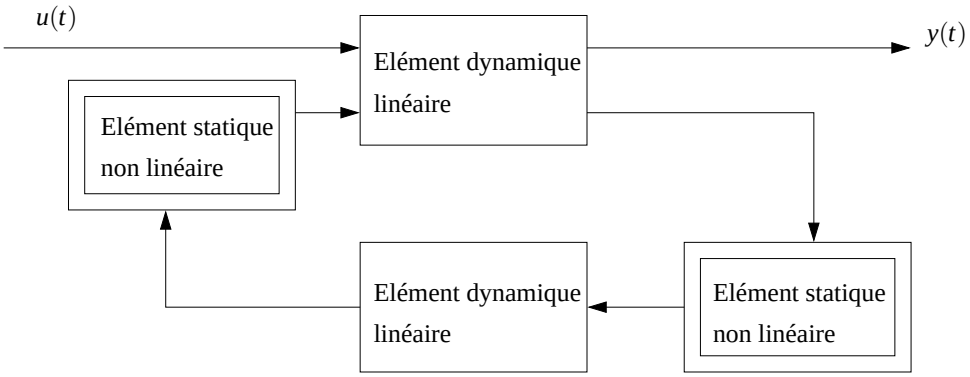

Figure 1.6 – Modèle de type Wiener-Hammerstein

Il est également possible d'imaginer d'autres combinaisons plus complexes en introduisant par exemple des boucles de rétroaction [Ragot et Mielcarek, 1992; Pottmann et Pearson, 1998; Pearson et Pottmann, 2000; Paduart et al., 2007] telles que celles illustrées sur la figure 1.6. Remarquons toutefois qu'en pratique ces formes très élaborées peuvent se révéler difficilement exploitables.

Commentaires sur les modèles à base de blocs structurés

Les modèles à base de blocs structurés revêtent de nombreux avantages. Leur structure relativement simple rend leur identification aisée et peu coûteuse en temps de calcul. De plus, l'intégration de connaissances *a priori* sur le comportement dynamique du système peut se faire de façon intuitive (saturations des actionneurs ou des capteurs). En revanche, ils peuvent s'avérer inefficaces à l'heure de décrire globalement le comportement dynamique d'un système fortement non linéaire. En effet, cette technique de modélisation s'appuie sur la recherche d'une transformation relativement rigide de la non-linéarité du système. De ce fait, le degré de flexibilité du modèle est inévitablement réduit et le comportement du système ne peut, en règle générale, être décrit que dans une plage de fonctionnement assez restreinte.

1.4 Modèles de systèmes par une approche multimodèle

La littérature propose un nombre important d'approches d'identification visant à accroître la flexibilité du modèle et ce, afin d'élargir la plage de fonctionnement du système à identifier. Ces différentes approches de modélisation, objet d'un développement croissant au cours des dernières années, se retrouvent sous diverses appellations dans des contextes plus ou moins connexes. On peut les regrouper sous le nom générique d'*approches multimodèles* [Murray-Smith et Johansen, 1997; Leith et Leithead, 1999, 2000; Gao et al., 2002]. Un tour d'horizon complet sur l'approche multimodèle et sur les approches connexes est présenté dans l'ouvrage de référence édité par Murray-Smith et Johansen [1997].

La philosophie de l'approche multimodèle repose sur la fragmentation d'un problème complexe en sous-problèmes plus simples à résoudre et dont les solutions individuelles conduisent à la résolution du problème d'origine. Cette méthodologie vise à remplacer la recherche d'un modèle unique $g(.)$ souvent difficile à obtenir par la recherche d'une famille de sous-modèles $g_i(t)$ et de fonctions de base (*basis functions*) $\mu_i(.)$:

$$g(\varphi(t),\theta) \quad = \quad \sum_{i=1}^{L} \mu_i(.) g_i(\varphi(t),\theta_i) \quad , \tag{1.16}$$

l'ensemble caractérisant le comportement global du système

$$y(t) \quad = \quad g(\varphi(t),\theta) \quad . \tag{1.17}$$

Un choix judicieux de la structure des sous-modèles $g_i(.)$ et des fonctions de base $\mu_i(.)$ permet en théorie d'approcher avec une précision imposée n'importe quel comportement non linéaire dans un large domaine de fonctionnement. Remarquons que ce type de stratégie de modélisation n'est pas propre au domaine de l'automatique. En effet, le principe du *diviser pour régner* sur lequel se fonde l'approche multimodèle est largement répandu dans divers domaines tels que la statistique, l'économétrie, etc. Mentionnons à titre d'exemple l'algorithme MARS (*Multivariate Adaptative Regression Splines*) [Friedman, 1991], une procédure de régression non paramétrique largement exploitée dans les domaines de la statistique.

L'approche multimodèle consiste, plus précisément, à réduire la complexité du système en décomposant son espace de fonctionnement en un nombre fini de *zones de fonctionnement*. Le comportement du système étant de moindre complexité dans chaque zone, un *sous-modèle* de structure simple peut alors être utilisé. Ainsi, en fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque sous-modèle est plus ou moins mise à contribution en vue d'approcher le comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle est quantifiée par une *fonction de pondération* associée à chaque zone de fonctionnement.

Il semble important, à ce niveau, de définir avec précision les principaux termes utilisés dans un contexte de modélisation multimodèle.

Zone de fonctionnement : domaine $\mathcal{D}_i$ issu du partitionnement de l'espace de fonctionnement $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ du système tel que $\mathcal{D} = \cup_i \mathcal{D}_i$. Le système présente un comportement dynamique relativement homogène dans chaque zone de fonctionnement.

Variable de décision ou d'indexation $\xi \in \mathbb{R}^j$: variable vectorielle connue, caractéristique du système et accessible par mesure en temps réel. Elle peut être par exemple une variable d'état mesurable et/ou un signal d'entrée du système.

Fonctions de pondération $\mu_i(\xi(t))$: fonctions $\mu_i(\xi(t)) : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^1$ dépendant des variables de décision. Elles sont associées aux différentes zones de fonctionnement et servent ainsi à quantifier graduellement l'appartenance du point de fonctionnement courant du système à une zone de fonctionnement donnée.

Les fonctions de pondération sont choisies de façon à vérifier les propriétés de somme convexe suivantes :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad \forall i = 1, \cdots, L, \quad \forall t \ . \tag{1.18}$$

Elles peuvent être construites soit à partir de fonctions à dérivées discontinues (p. ex. fonctions triangulaires ou trapézoïdales) soit à partir de fonctions à dérivées continues (p. ex. fonctions gaussiennes ou sigmoïdes). On opte ici pour des fonctions de pondération $\mu_i(.)$ construites à partir de fonctions gaussiennes. Ce choix permet d'obtenir, d'une part, des fonctions faciles à calculer dans le cas multivariable et, d'autre part, des fonctions continuement dérivables.

Elles sont obtenues, dans le cas monovariable, à partir de la loi $\omega_i(.) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-\frac{(\xi(t) - c_i)^2}{\sigma_i^2}\right) \tag{1.19}$$

dont les paramètres sont les centres c_i et les dispersions σ_i. Dans le cas multivariable, les fonctions de pondération sont calculées par la loi $\omega_i(.) : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\omega_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^{L} \exp\left(-\frac{\left(\xi_j(t) - c_{i,j}\right)^2}{\sigma_{i,j}^2}\right) \ , \tag{1.20}$$

où ξ_j sont les éléments du vecteur de décision ξ.

Les fonctions de pondération s'obtiennent enfin par normalisation des lois $\omega_i(\xi(t))$:

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{\omega_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi(t))} \ . \tag{1.21}$$

Il convient de remarquer qu'une dispersion commune $\sigma = \sigma_i$ ($\sigma_j = \sigma_{i,j}$ dans le cas multivariable) à toutes les fonctions de pondération évite les phénomènes dits de réactivation dans lesquels une même fonction de pondération est significativement différente de zéro en deux zones de fonctionnement distinctes [Gasso, 2000].

Exemple 1.3 (Exemple de fonctions de pondération)
La figure 1.7 illustre les fonctions gaussiennes $\omega_i(.)$ *et les fonctions de pondération* $\mu_i(.)$ *indexées par* $\xi \in [0,1]$ *avec* $L = 3$*, des centres* $c_1 = 0.15$*,* $c_2 = 0.5$*,* $c_3 = 0.85$ *et de dispersion* $\sigma = 0.15$*. La figure 1.8 illustre l'allure des fonctions gaussiennes dans le cas multivariable* $\mu_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *avec* $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ *avec* $L = 4$*.*

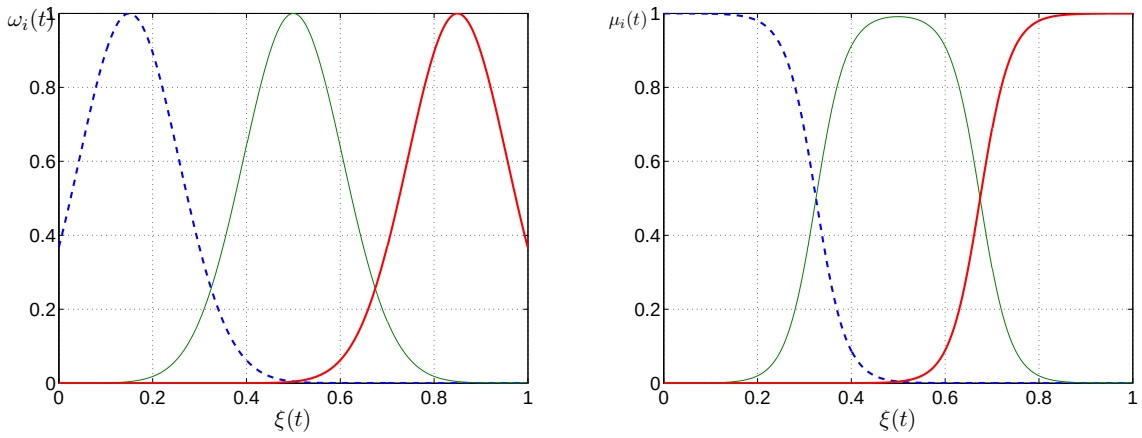

Figure 1.7 – Fonctions gaussiennes ω_i (à gauche) et fonctions de pondération μ_i (à droite) dans le cas monovariable

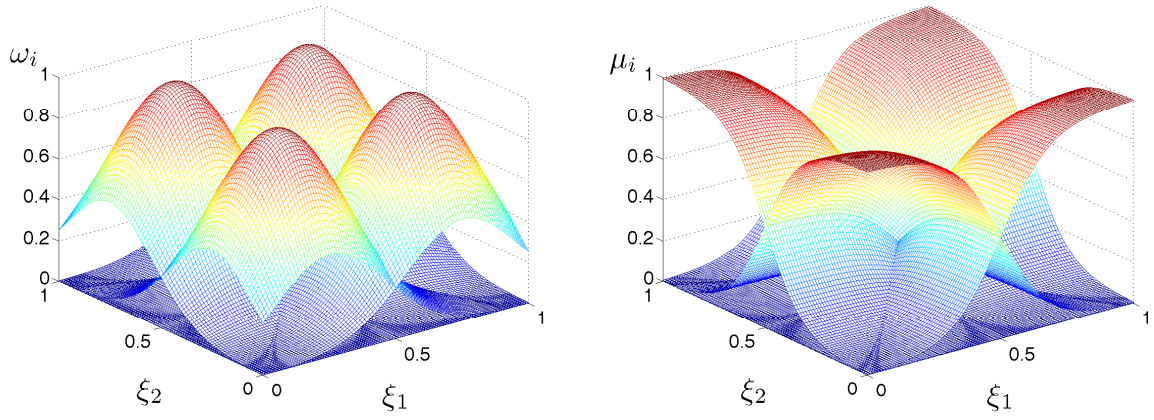

Figure 1.8 – Fonctions gaussiennes ω_i (à gauche) et fonctions de pondération μ_i (à droite) dans le cas multivariable

Sous-modèle : modèle de structure quelconque, généralement simple et linéaire et/ou affine, représentant le comportement du système dans une zone de fonctionnement bien spécifique.

Multimodèle : ensemble de sous-modèles agrégés par un mécanisme d'interpolation permettant de caractériser le comportement dynamique global d'un système. Un multimodèle se caractérise par le nombre de ses sous-modèles, par leur structure et par le choix des fonctions de pondération. A titre d'exemple, une structure de multimodèle se présente sous la forme :

$$y(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) \quad , \tag{1.22}$$

où L est le nombre de sous-modèles, $y(t)$ la sortie du multimodèle, $y_i(t)$ la sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $\xi(t)$ la variable de décision et $\mu_i(\xi(t))$ la fonction de pondération associée au $i^{\text{ème}}$ sous-modèle. Les fonctions de pondération permettent de déterminer la contribution relative de chaque sous-modèle selon la zone où évolue le système.

Il est d'ores et déjà possible d'entrevoir les trois phases nécessaires à l'obtention d'une représentation multimodèle :

1. le choix de la variable d'indexation ξ,
2. la décomposition de l'espace de fonctionnement en un nombre L de zones de fonctionnement,
3. la détermination de la structure et des paramètres de chaque sous-modèle.

Afin d'illustrer les différentes notions qui viennent d'être présentées, nous proposons un exemple simple d'approximation d'un système non linéaire statique. Cet exemple expose d'une façon intuitive la démarche de modélisation adoptée et montre les bonnes aptitudes de l'approche multimodèle à représenter un comportement non linéaire.

Exemple 1.4 (Représentation multimodèle d'un système non linéaire statique)
Soit à approcher le système non linéaire suivant :

$$y(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{20}\right)\cos(t) \quad , \qquad t \in [-5,5] \quad . \tag{1.23}$$

La variable caractéristique du système est t. Elle est naturellement choisie comme variable de décision.

L'espace de fonctionnement du système est dans un premier temps décomposé en 4 zones de fonctionnement. La figure 1.9 présente les fonctions de pondération associées à chacune de ces zones. Chaque zone de fonctionnement est ensuite caractérisée par un sous-modèle de la forme : $y_i = a_i t + b_i$. Le multimodèle est finalement donné par $\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) y_i(t)$. La figure 1.9 illustre la bonne adéquation entre le système non linéaire et le multimodèle obtenu.

Le nombre de zones de fonctionnement est maintenant réduit à $L = 2$. Cette réduction accroît la complexité du comportement du système dans chaque zone. Il est par conséquent nécessaire d'opter pour des sous-modèles de structure plus complexe, par exemple, $y_i = a_i t^2 + c_i t + b_i$. La

figure 1.10 illustre la bonne adéquation entre le système non linéaire et le multimodèle obtenu.

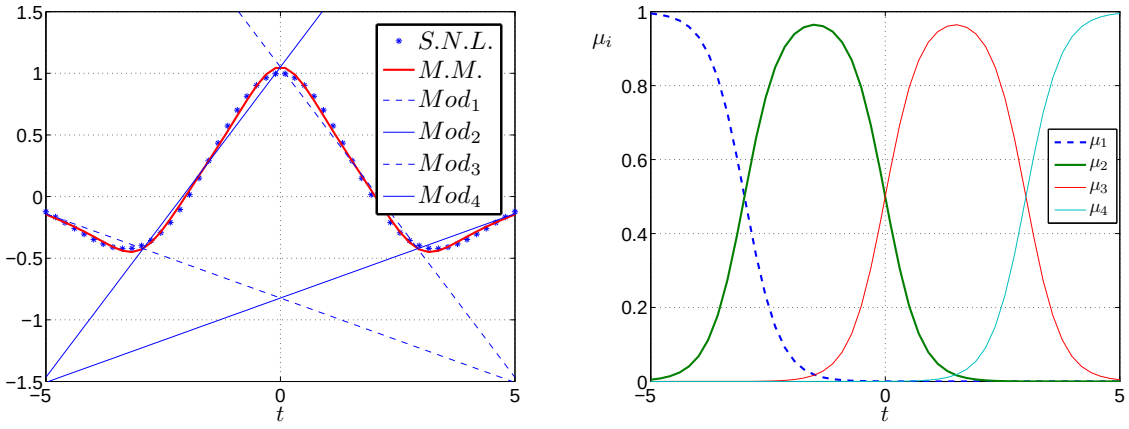

Figure 1.9 – Système non linéaire et approximation multimodèle avec $L = 4$ (à gauche) et fonctions de pondération (à droite)

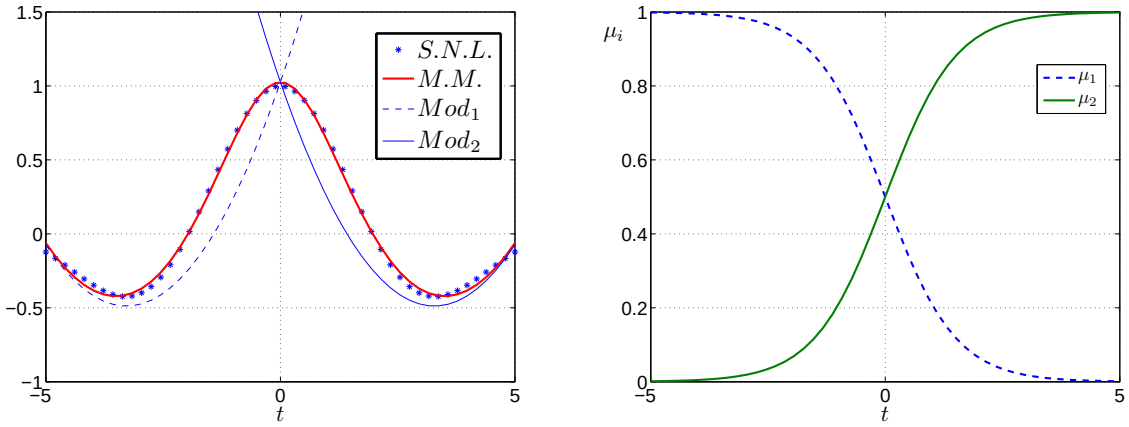

Figure 1.10 – Système non linéaire et approximation multimodèle avec $L = 2$ (à gauche) et fonctions de pondération (à droite)

La moyenne quadratique de l'erreur (Mean Square error MSE) donnée par :

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y(t) - \hat{y}(t))^2 \tag{1.24}$$

sert d'indice de comparaison des performances des deux multimodèles. Pour le premier multimodèle, la $MSE_1 = 0.00064975$ *et pour le deuxième, la* $MSE_2 = 0.00067852$*. Les deux multimodèles offrent donc des performances très similaires.*

Cet exemple simple montre l'aptitude des multimodèles à capturer les comportements non linéaires d'un système. Il met également en lumière un dilemme classiquement rencontré dans l'approche multimodèle, à savoir :

- *Est-il préférable de construire un multimodèle comportant un nombre important de sous-modèles de structure peu complexe ?*

ou

- *Est-il préférable de construire un multimodèle comportant un faible nombre de sous-modèles de structure relativement complexe ?*

La réponse dépend de la nature et du cahier des charges de modélisation du système.

Cette section a présenté les principes sur lesquels repose l'approche multimodèle. L'adoption d'une démarche similaire à celle exposée au cours de l'exemple 1.4 conduit à une représentation multimodèle d'un système dynamique non linéaire. Cette démarche plus complexe se heurte néanmoins à un certain nombre de difficultés, parmi lesquelles figure le choix du mécanisme d'interpolation des sous-modèles. Il s'avère alors nécessaire d'expliciter la façon dont les parties dynamiques des sous-modèles sont agrégées dans la structure du multimodèle. Dans le cas statique en effet, l'agrégation des sous-modèles s'effectue naturellement par la somme pondérée de la contribution des sous-modèles sous la forme $\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(.) y_i(t)$. Dans le cas dynamique en revanche, plusieurs façons d'agréger les sous-modèles, c.-à-d. plusieurs structures de multimodèles, peuvent être envisagées.

1.5 Structures des multimodèles

La représentation multimodèle d'un système non linéaire peut être obtenue à partir de différentes structures. Une représentation d'état des sous-modèles permet de les mettre facilement en évidence. Cette représentation d'état du multimodèle revêt l'avantage d'être compacte, simple et plus générale qu'une présentation sous la forme d'une équation de régression entrée/sortie. De surcroît, la synthèse d'une loi de commande ou la construction d'observateurs non linéaires requièrent souvent une telle description du système.

Deux grandes familles de multimodèles sont répertoriées selon que les sous-modèles sont *homogènes* dans le sens où ils partagent la même structure et le même espace d'état ou *hétérogènes*, c.-à-d. que leur structure et leur espace d'état diffèrent. Filev [1991] met en évidence, dans un contexte de modélisation floue directement transposable au cadre multimodèle, deux structures essentielles de multimodèles. Leur différence provient de la façon dont les sous-modèles sont combinés. La première structure, connue sous l'appellation de *multimodèle de Takagi-Sugeno*, est constituée de sous-modèles partageant un vecteur d'état unique (sous-modèles homogènes). Dans la seconde, connue sous l'appellation de *multimodèle découplé*, les sous-modèles possèdent chacun un vecteur d'état indépendant (sous-modèles hétérogènes).

1.5.1 Multimodèle de Takagi-Sugeno

La structure du multimodèle de Takagi-Sugeno (T.S.) ou à états couplés, initialement proposée dans un contexte de modélisation floue par Takagi et Sugeno [1985] dans les années 80, a été depuis largement popularisée dans un contexte multimodèle par les travaux de Johansen et Foss [1993]. Elle est certainement la structure la plus couramment utilisée dans le cadre de l'approche multimodèle. Le multimodèle de T.S. est connu sous différentes appellations : réseaux de modèles locaux à mélange de paramètres (*local model network by blending the parameters*), multimodèle à modèles locaux couplés ou à état couplé ou encore multimodèle à état unique, etc.

La représentation dans l'espace d'état de ce multimodèle est donnée par :

$$x_i(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \ , \tag{1.25a}$$

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) x_i(t+1) \ , \tag{1.25b}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \ , \tag{1.25c}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état commun aux sous-modèles, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie et $\xi(t)$ la variable d'indexation des fonctions de pondération $\mu_i(.)$. Les fonctions de pondération respectent les propriétés de somme convexe (1.18).

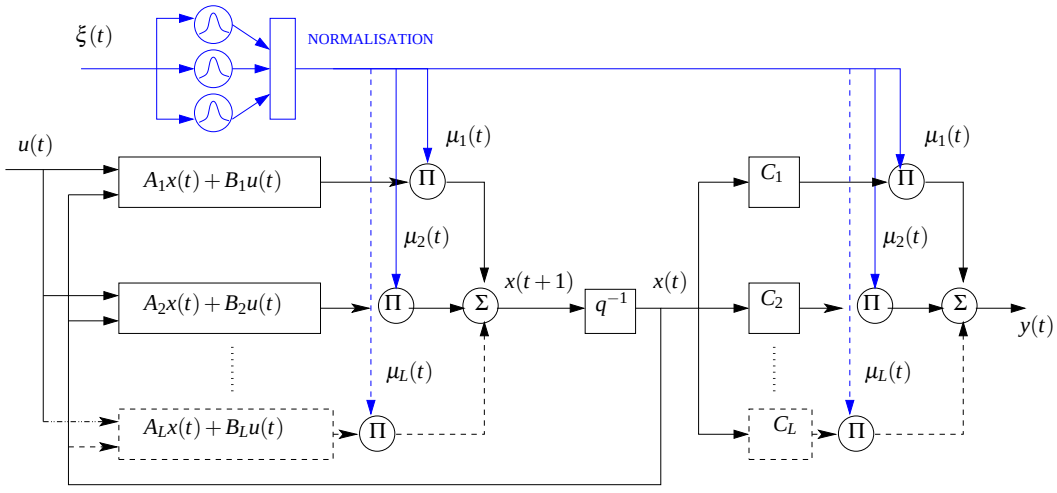

Figure 1.11 – Architecture du multimodèle de T.S.

Les variables d'état intermédiaires $x_i(t)$ ont été volontairement introduites dans (1.25) afin de mettre clairement en évidence, d'une part, la notion de sous-modèle et, d'autre part, le mécanisme d'interpolation utilisé dans la prise en compte de la contribution respective de chaque sous-modèle. En effet, d'après (1.25b), l'état global x couple tous les états x_i par le mélange des équations dynamiques des sous-modèles.

Il est cependant possible d'obtenir, en éliminant les états partiels x_i, la représentation d'état classique du multimodèle de T.S. (figure 1.11) :

$$x(t+1) = \tilde{A}(\xi(t))x(t) + \tilde{B}(\xi(t))u(t) \ , \tag{1.26a}$$
$$y(t) = \tilde{C}(\xi(t))x(t) \ , \tag{1.26b}$$

où

$$\tilde{A}(\xi(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t))A_i, \quad \tilde{B}(\xi(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t))B_i, \quad \tilde{C}(\xi(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t))C_i \ .$$

Il est aisé de constater que les fonctions de pondération $\mu_i(.)$ introduisent *un mélange des paramètres des sous-modèles* en fonction de la zone de fonctionnement où le système non linéaire évolue. La notion de sous-modèle est ainsi masquée par le fait que le multimodèle de T.S. est analogue à un système à paramètres variables dans le temps. Ce multimodèle est par conséquent composé de sous-modèles "virtuels" disposant de paramètres différents mais partageant le même vecteur d'état. Il faut noter que d'une façon générale le passage d'un multimodèle de T.S. sous la forme d'état à un multimodèle de régression ne donne pas lieu à une représentation équivalente. En effet, l'équivalence entre ces deux formes n'est garantie que s'il est fait appel à l'une des formes canoniques de la représentation d'état du multimodèle.

De nombreuses techniques de modélisation de systèmes non linéaires partagent la même structure (1.26). Le choix de la structure des sous-modèles et des fonctions de pondération est à l'origine de leurs différences. Il est possible de citer différents modèles basés sur cette structure.

Modèles affines par morceaux ou modèles PWA (*PieceWise Affine*)

Ce type de modèle est élaboré en considérant des sous-modèles de type linéaire et des fonctions de pondération de type booléen [Sontag, 1981]. Ce choix de fonctions de pondération provient d'un partitionnement de l'espace de fonctionnement en zones de fonctionnement complètement disjointes. Il en résulte une approximation discontinue du système non linéaire dans les phases de commutation. Cette discontinuité peut s'avérer indésirable dans certaines applications.

Réseaux de fonctions à base radiale (*Radial basis function networks*)

Il a été montré que, sous certaines restrictions, les réseaux de fonctions à base radiale sont équivalents au multimodèle de T.S. [Jang et Sun, 1993; Hunt et al., 1996]. En effet, l'équivalence entre les modèles est assurée si les fonctions de pondération utilisées sont de type gaussien et si les sous-modèles se réduisent à une constante w_i (sous-modèles d'ordre 0). Ce type de modèle possède en outre la propriété *d'approximation universelle*, n'importe quel système non linéaire pouvant être représenté par cette structure. Cette approche revêt néanmoins deux inconvénients principaux, à savoir le nombre important de sous-modèles nécessaires à l'obtention d'une approximation satisfaisante du système non linéaire et l'exploitation délicate du modèle obtenu.

Modèles flous de Takagi-Sugeno

Ce type de modèle, proposé par Takagi et Sugeno [1985] dans les années 80, a donné lieu à de nombreux développements. Il a en particulier permis d'envisager l'extension des outils classiques de l'automatique aux modèles flous. Ce type de modélisation repose sur des règles du type : **si** *prémisse* **alors** *conséquence*, où les prémisses sont obtenues à partir de propositions linguistiques permettant l'évaluation des pondérations $\mu_i(.)$ et où les conséquences sont le plus souvent des fonctions affines qui correspondent aux sous-modèles. Parmi les multiples intérêts offerts par ce modèle figure le fait qu'il permet d'introduire des connaissances *a priori* sur le système dans l'étape de modélisation de façon à fournir une partition floue initiale de son espace de fonctionnement. De plus, il a été montré qu'un modèle flou de Takagi-Sugeno peut caractériser de façon exacte (il ne s'agit pas d'une approximation) un modèle non linéaire dans un compact de l'espace des variables de prémisses [Tanaka et al., 1996]. Dans ce contexte bien particulier, le modèle obtenu peut être attaché à la réalité et exploité pour expliquer et analyser les phénomènes du système.

Multimodèles (*Local Model Networks*)

Largement popularisés depuis les travaux de Murray-Smith et Johansen [1997], les multimodèles représentent aujourd'hui un outil privilégié dans la modélisation de systèmes en présence de régimes de fonctionnement multiples. Le multimodèle et le modèle flou de Takagi-Sugeno recouvrent des notions très proches. En effet, si le nombre de règles est égal au nombre de sous-modèles alors ces deux approches sont identiques. Seuls le moyen employé pour obtenir les fonctions de pondération $\mu_i(.)$ et l'interprétation qu'on en donne les distinguent. Pour les modèles flous, le partitionnement de l'espace de fonctionnement du système fait souvent appel à la connaissance d'experts de manière à obtenir des propositions linguistiques conduisant à des sous-ensembles flous. Pour les multimodèles, le partitionnement de l'espace de fonctionnement du système est opéré à l'aide de techniques d'optimisation.

Modèles linéaires à paramètres variants (LPV)

De nombreux systèmes peuvent être décrits par des systèmes linéaires dont les paramètres varient au cours du temps (LPV) [Shamma et Cloutier, 1993]. Dans l'approche classique de modélisation LPV, les fonctions de pondération ne sont pas utilisées : ce sont les variables de décision $\xi(t)$ qui servent à décrire les conditions de fonctionnement du système. La variable $\xi(t)$ est une variable exogène ou endogène du système, accessible par mesure et variant dans un ensemble compact de bornes connues. Si $\xi(t)$ est un signal endogène au système, la sortie par exemple, on parle alors de systèmes quasi-LPV. En pratique cependant, les systèmes LPV et quasi-LPV sont analysés de façon similaire. La structure (1.25) est une forme particulière de modèle LPV où les fonctions de pondération délivrent les lois d'évolution des paramètres.

Modèles linéaires à incertitudes polytopiques

Dans ce contexte, les matrices représentant le système ne sont pas parfaitement connues mais varient dans un intervalle de bornes connues. Les différentes erreurs de modélisation du système sont représentées par un ensemble de matrices appelées matrices sommets. Le comportement

du système est finalement modélisé en considérant une combinaison barycentrique des matrices sommets. Les matrices décrivant le comportement nominal du système appartiennent ainsi à un polytope de matrices défini comme l'enveloppe convexe des matrices sommets. Le lien avec la structure (1.25) s'établit en considérant les matrices des sous-modèles comme les matrices sommets.

Remarquons que dans toutes ces approches, les dimensions des espaces d'état des sous-modèles sont identiques, un vecteur d'état unique étant utilisé. Le multimodèle de T.S. ne permet pas alors de prendre en compte les changements de structure, p. ex. des sauts dans l'état du système, susceptibles d'intervenir dans le système. En effet, l'ordre des sous-modèles, c.-à-d. le nombre d'états, est invariable quelle que soit la complexité du comportement dynamique du système dans les différentes zones de fonctionnement. Ainsi, la dimension des sous-modèles est imposée par le sous-modèle de plus grande dimension utilisé pour décrire le comportement dynamique du système. La dimension des sous-modèles peut être cependant réduite par l'ajout de zones de fonctionnement de façon à parvenir à une moindre complexité du système dans chacune des zones. Le multimodèle ainsi obtenu peut être alors sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée.

Une amélioration visant la prise en compte des changements structurels du système consiste à généraliser la structure du multimodèle de T.S. en considérant un multimodèle singulier :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) E_i x(t+1) = \tilde{A}(\xi(t))x(t) + \tilde{B}(\xi(t))u(t) \ , \tag{1.27a}$$

$$y(t) = \tilde{C}(\xi(t))x(t) \ , \tag{1.27b}$$

où les matrices $A(.)$, $B(.)$ et $C(.)$ ont été définies précédemment et où les matrices E_i ne sont pas nécessairement inversibles. Le recours aux matrices E_i permet de prendre en compte les couplages entre les dérivées de plusieurs variables d'état. Elles introduisent également des relations dynamiques et/ou statiques entre les variables d'état du système. Cette structure de multimodèle permet alors de considérer les changements dans le comportement dynamique du système selon son mode de fonctionnement. Néanmoins, la manipulation mathématique des multimodèles singuliers se révèle plus complexe.

1.5.2 Multimodèle découplé

L'agrégation des sous-modèles peut s'effectuer par le biais d'un deuxième mécanisme d'interpolation. Filev [1991] propose un multimodèle, issu de l'agrégation de sous-modèles, qui se présente sous la forme d'une structure à états découplés. Le multimodèle découplé apparaît dans la littérature sous différentes appellations : réseaux de modèles locaux à états locaux (*local-state local model network*), multimodèles locaux (*Multiple Local Model*), réseaux de modèles locaux par mélange des sorties (*local model network by blending the outputs*), multimodèles sans état commun (*Multiple model with non common state*), NFDFDS (*Neuro-Fuzzy and De-coupling Fault Diagnosis Scheme*).

La représentation dans l'espace d'état de ce multimodèle est donnée par (figure 1.12) :

$$x_i(t+1) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \ , \tag{1.28a}$$
$$y_i(t) = C_i x_i(t) \ , \tag{1.28b}$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) \ , \tag{1.28c}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle et où $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur de commande et le vecteur de sortie.

L'appellation "multimodèle découplé" provient du mécanisme d'interpolation mis en jeu lors de la prise en compte des contributions respectives des sous-modèles. Cette prise en compte s'effectue en effet à travers la somme pondérée des sorties des sous-modèles, sans mélange des paramètres. Chaque sous-modèle possède par conséquent un espace d'état qui lui est propre et dans lequel il évolue indépendamment en fonction de son état initial et du signal de commande appliqué.

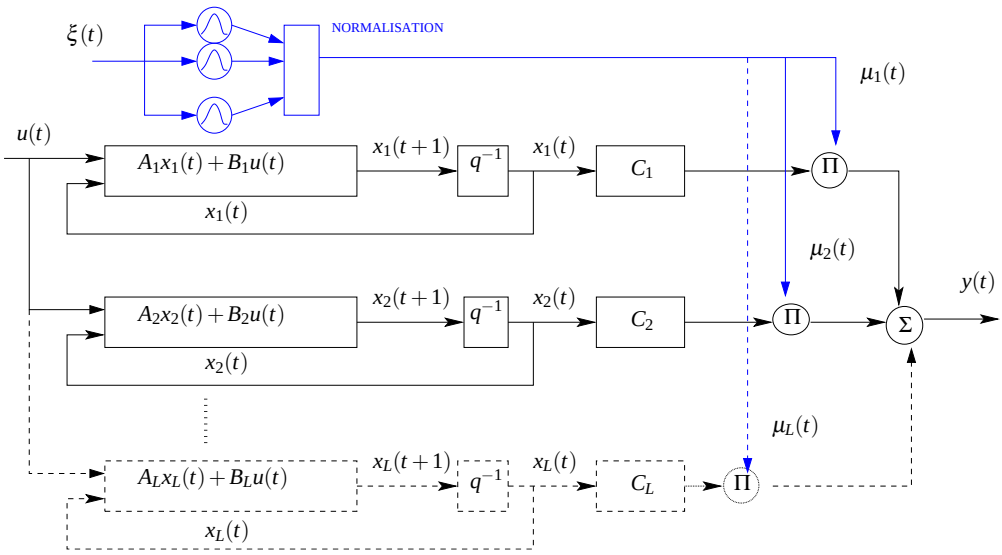

Figure 1.12 – Architecture du multimodèle découplé

Remarquons que contrairement au multimodèle de T.S., la notion de sous-modèle est ici clairement mise en évidence, la non-linéarité introduite par les fonctions poids ne se trouvant qu'au niveau de l'équation de sortie. De ce fait, ce multimodèle peut être perçu comme une classe particulière de modèles à blocs structurés. En effet, la structure du multimodèle se présente sous la forme d'un arrangement en parallèle de modèles de type Wiener où les éléments dynamiques linéaires sont les sous-modèles et les éléments statiques non linéaires sont les fonctions de pondération. La structure du multimodèle découplé peut être alors généralisée en faisant

appel à d'autres types de blocs structurés tels que les modèles de type Hammerstein-Wiener :

$$x_i(t+1) = A_i x_i(t) + B_i \mu_i(\xi(t)) u(t) \ , \tag{1.29a}$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \ , \tag{1.29b}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) \ . \tag{1.29c}$$

Dans ce cas, l'entrée de chaque sous-modèle est modifiée par une fonction de pondération et la sortie du multimodèle est obtenue par la somme pondérée des sorties des sous-modèles (figure 1.13).

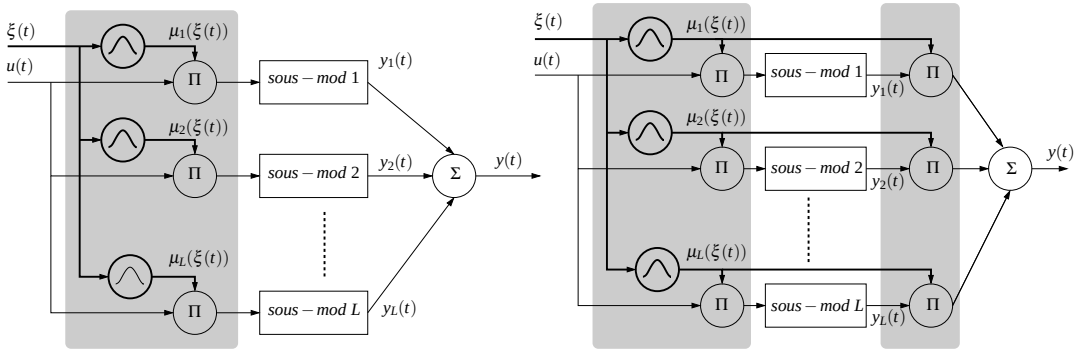

Figure 1.13 – Multimodèles découplés à base de blocs Hammerstein (à droite) et Hammerstein-Wiener (à gauche)

Il convient toutefois de souligner que les sorties $y_i(t)$ des sous-modèles sont des "signaux artificiels de modélisation" utilisés seulement pour décrire le comportement non linéaire du système réel. Ces signaux, inaccessibles à la mesure et dépourvus d'un quelconque sens physique, ne sont reliés au système réel que par leur somme pondérée.

La philosophie portée par cette approche vise la conservation d'un découplage entre les parties dynamiques des sous-modèles quelle que soit leur structure interne. Il est alors possible d'introduire d'une façon générale des sous-modèles à structures complètement différentes de type linéaire ou non linéaire comportant des nombres d'états différents, à condition toutefois que les dimensions des sorties soient compatibles.

La structure du multimodèle découplé revêt l'avantage de prendre en compte les changements structurels du système non linéaire occasionnés par son régime de fonctionnement. En effet, la dimension de chaque sous-modèle peut s'ajuster à la complexité du système dans la zone de fonctionnement à caractériser. Cette caractéristique accroît le degré de flexibilité et de généralité du multimodèle découplé. Cette structure de multimodèle se révèle par conséquent bien adaptée à la modélisation des systèmes complexes qui exhibent de fortes non-linéarités et subissent des changements structurels. De plus, dans un contexte d'identification, le nombre des paramètres à identifier peut être considérablement réduit en ajustant judicieusement les dimensions des sous-modèles. Cet ajustement épargne une description fine et uniforme de l'espace de

fonctionnement du système.

Cette structure de multimodèle peut être facilement reliée aux schémas classiquement employés dans une stratégie de commande adaptative par séquencement de gains (*gain scheduling strategy*) largement étudiée dans la littérature [Narendra et Balakrishnan, 1994, 1997; Narendra et George, 2002]. Dans cette stratégie de commande, un correcteur est synthétisé à partir d'un modèle linéaire du système autour d'un point de fonctionnement particulier (figure 1.14). L'objectif est de déterminer *en ligne* le modèle le plus apte à caractériser le comportement du système à un instant donné et de choisir le correcteur associé. Le contrôleur est sélectionné en considérant le sous-modèle qui présente l'indice de performance $J_i(t)$ le plus faible en fonction des erreurs $e_i = y(t) - y_i(t)$:

$$J_i(t) = \alpha e_i^2(t) + \beta \sum_{j=0}^{t} e^{-\lambda(t-j)} e_i^2(j) \quad , \quad \alpha \geq 0, \quad \beta, \lambda > 0 \quad ,$$

où j est l'indice du temps et où α et β sont des facteurs de pondération sur les mesures instantanées et précédentes. Le facteur d'oubli λ détermine la mémoire de l'indice de performance dans un environnement de commutation rapide et assure la bornitude de $J_i(t)$ pour une erreur e_i bornée. Le choix des pondérations α, β et λ détermine la vitesse de commutation entre les modèles. Un seul sous-modèle est alors pris en compte à chaque instant pour construire la sortie du multimodèle. Par conséquent, des transitions brusques entre les sous-modèles peuvent produire des discontinuités dans la sortie du multimodèle. Cette approche offre des résultats satisfaisants à condition toutefois de prendre en compte des variations très lentes d'un point de fonctionnement à un autre. Le rôle des fonctions de pondération, dans le cas du multimodèle découplé, est d'assurer un changement progressif entre les contributions des sous-modèles.

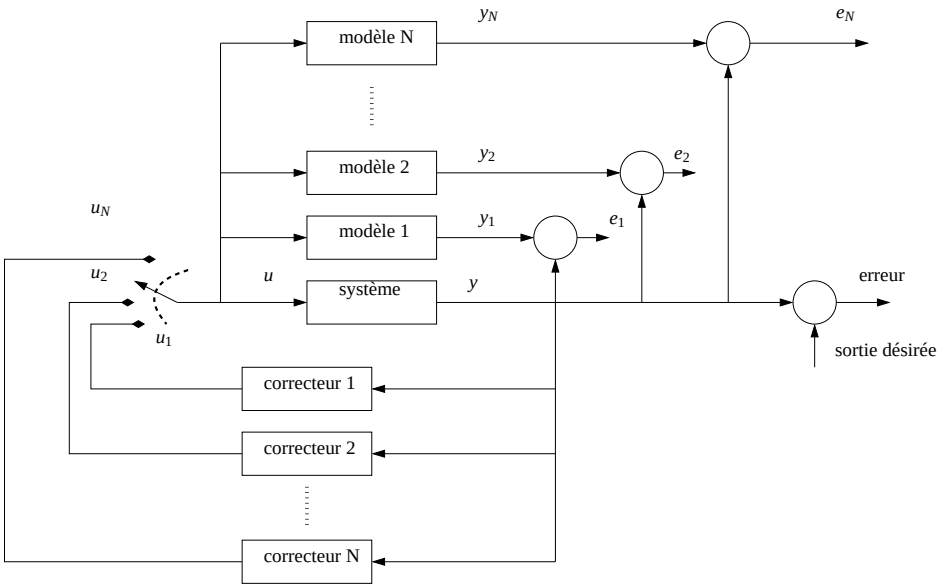

Figure 1.14 – Architecture générale de commande utilisant N modèles et régulateurs

1.5.3 Comparaison entre les multimodèles

Les structures du multimodèle de T.S. et du multimodèle découplé ont été présentées au cours des deux sections précédentes. La différence entre ces deux modèles provient de la façon dont les sous-modèles sont combinés. On souhaite comparer, à travers un exemple, les comportements dynamiques des deux multimodèles dans le cas discret. Gregorcic [2004] et Gregorcic et Lightbody [2008] ont établi ce même type de comparaison dans le cas continu.

Cet exemple fait intervenir un multimodèle de T.S. et un multimodèle découplé construits à partir des deux mêmes sous-modèles définis par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.9 \\ 0.7 & -0.5 \end{bmatrix} , \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -2.0 \end{bmatrix} , \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \end{bmatrix} ,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} , \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} , \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \end{bmatrix} .$$

La variable de décision $\xi \in [-0.5\ ,\ 0.5\ ]$ est un signal exogène. Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation de fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi(t)) \ , \tag{1.30}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2\right) \ , \tag{1.31}$$

de dispersion $\sigma = 0.4$ et de centres $c_1 = -0.5$ et $c_2 = 0.5$. Les allures des fonctions de pondération et les réponses indicielles des sous-modèles sont illustrées sur la figure 1.15. Il est possible de constater que le sous-modèle 1 présente un comportement oscillatoire alors que le sous-modèle 2 présente un comportement amorti sensiblement proche d'un modèle du premier ordre.

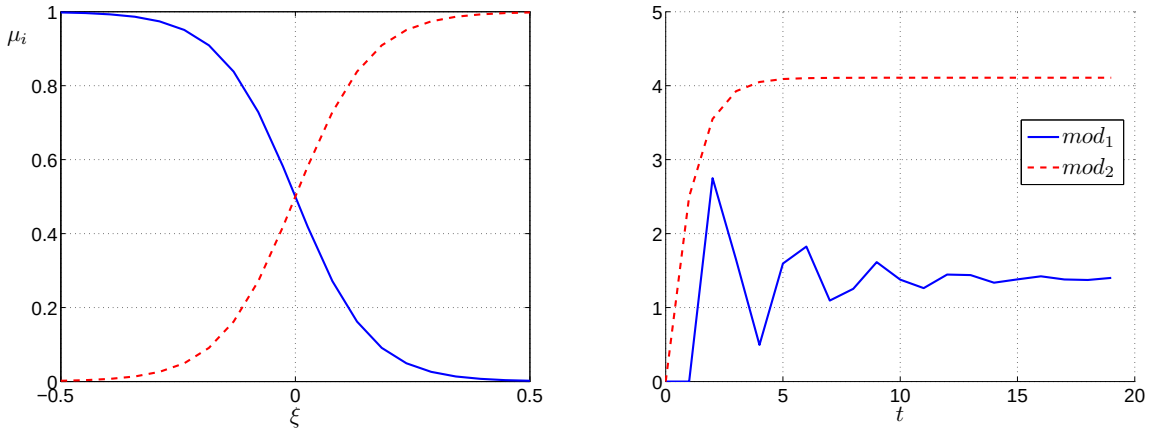

Figure 1.15 – Fonctions de pondération (à gauche) et réponses indicielles des sous-modèles (à droite)

Les réponses indicielles des deux multimodèles, pour différentes valeurs de la variable de décision $\xi(t)$, établies à partir de conditions initiales nulles sont illustrées sur la figure 1.16. Il

est possible de constater que les réponses des deux multimodèles sont similaires mais ne sont pas identiques, le passage entre les deux sous-modèles s'opérant différemment.

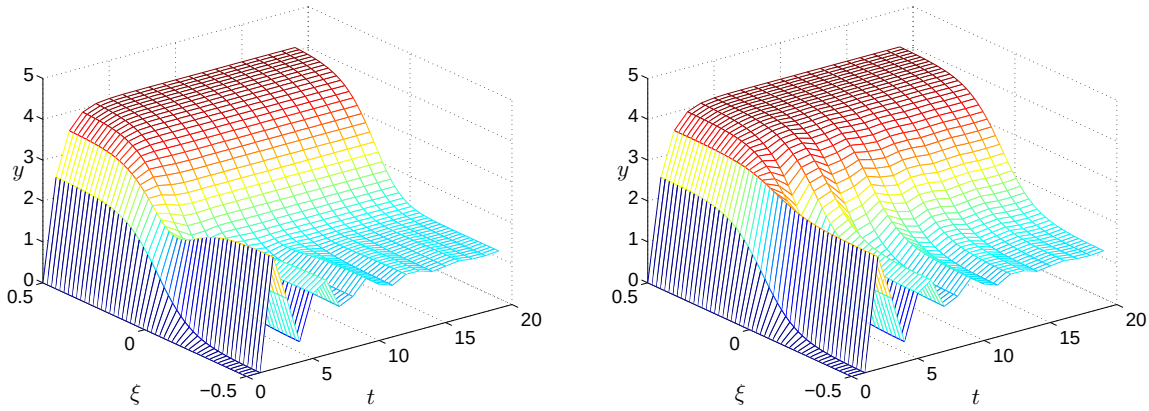

Figure 1.16 – Comparaison entre les réponses indicielles du multimodèle de T.S. (à gauche) et celles du multimodèle découplé (à droite)

La sortie du multimodèle de T.S. est construite en mélangeant les paramètres des sous-modèles. Les propriétés dynamiques de ce multimodèle (amortissement, gain, etc.) sont par conséquent directement affectées par la valeur prise par la variable de décision ξ au cours du temps. En effet, ces variations modifient les valeurs propres de la matrice d'évolution du multimodèle. Quant à la sortie du multimodèle découplé, elle est élaborée en combinant les sorties des sous-modèles. Les propriétés dynamiques des sous-modèles ne sont pas de ce fait affectées par les fonctions de pondération. Chaque structure de multimodèle peut ainsi présenter, selon le contexte d'utilisation, à la fois avantages et inconvénients.

1.5.4 Autres structures de multimodèles

Notre attention se porte ici sur deux classes de multimodèles qui représentent des extensions directes des structures abordées précédemment.

Toutefois, d'autres structures de multimodèles (p. ex. les multimodèles à structures récurrentes) peuvent être envisagées selon le type de vecteur de régression utilisé.

Multimodèle hiérarchisé ou hypermultimodèle

Un *hypermultimodèle* ou multimodèle hiérarchisé est un multimodèle de multimodèles. Ce type de structure vise à réduire la complexité du multimodèle global et à améliorer l'interprétation de chaque multimodèle. Il est ainsi possible de modéliser des systèmes de grande dimension à partir d'une décomposition en sous-systèmes modélisables à leur tour par un multimodèle. Pour de plus amples détails, le lecteur est invité à consulter [Wang, 1998; Sindelar, 2005].

Velocity-based multiple model networks

Si une forme analytique du modèle non linéaire d'un système est disponible, alors des linéarisations successives autour de différents points de fonctionnement du système peuvent conduire à l'obtention d'un multimodèle. En règle générale, les sous-modèles ainsi obtenus présentent une structure affine en l'état et en la commande avec un terme constant (*off-set*) supplémentaire provenant de la linéarisation du système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \alpha \quad . \tag{1.32}$$

Les sous-modèles affines (1.32) ne respectent pas la propriété de superposition propre aux modèles linéaires sans la constante α. Par conséquent, en fonction de la valeur prise par ce terme additionnel, des phénomènes indésirables sont susceptibles d'être introduits dans la dynamique du multimodèle. Par exemple, dans les régions transitoires entre les sous-modèles le terme constant α peut en particulier dominer le comportement dynamique du multimodèle (les termes A et B deviennent alors secondaires) [Johansen et al., 2000]. Afin de remédier à ce problème, Leith et Leithead [1999]; McLoone [2000]; McLoone et Irwin [2003] ont proposé une linéarisation basée sur la vitesse dite *velocity-based* en guise d'alternative à la linéarisation classiquement employée.

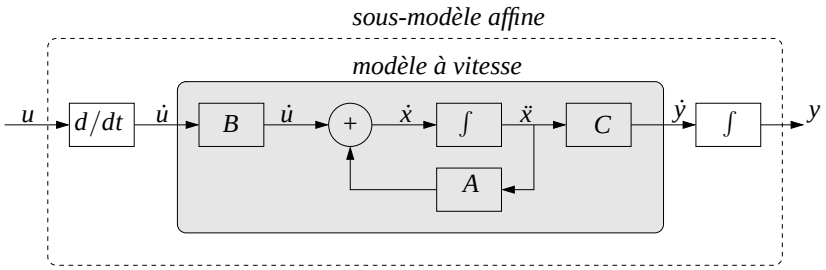

Figure 1.17 – Structure des sous-modèles issue d'une linéarisation de *vitesse*

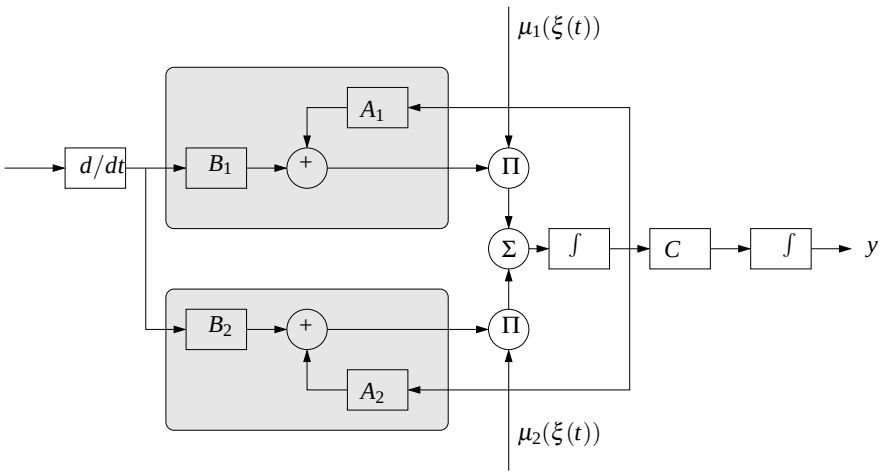

Figure 1.18 – Architecture d'un multimodèle de T.S. en utilisant les sous-modèles de vitesse

L'idée est de dériver l'équation du sous-modèle (1.32) afin de supprimer le terme constant α. La structure des sous-modèles obtenue par cette démarche est présentée sur la figure 1.17. Cette stratégie de linéarisation conduit à de nouvelles structures de multimodèles établies à partir des structures de T.S. (figure 1.18) ou découplées (figure 1.19).

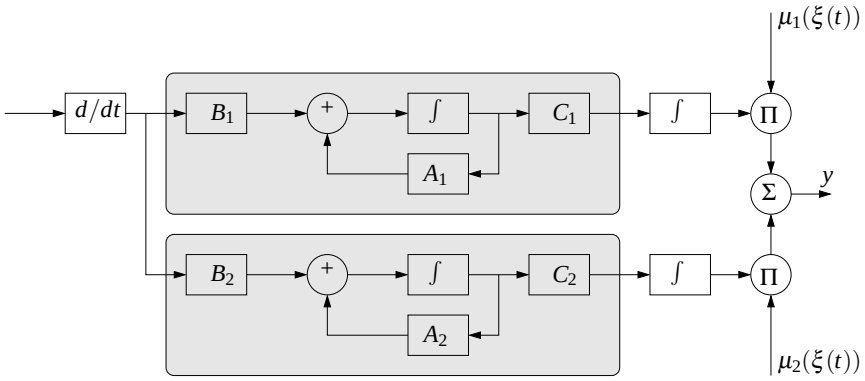

Figure 1.19 – Architecture d'un multimodèle découplé en utilisant les sous-modèles de vitesse

1.6 Conclusion et discussion

L'approche multimodèle épargne le recours à un modèle unique, complexe et bien souvent difficile à obtenir. Les multimodèles constituent un outil efficace, particulièrement bien adapté à la modélisation des systèmes non linéaires sur une large plage de fonctionnement. Ils permettent d'obtenir un modèle doté d'une structure mathématiquement attractive et capable d'appréhender avec précision la complexité du système. En effet, une large classe de systèmes peut être approchée avec une précision imposée en augmentant le nombre des sous-modèles et en optimisant les fonctions de pondération. Les multimodèles offrent ainsi un excellent compromis entre complexité, précision, généralité et flexibilité.

Soulignons par ailleurs qu'une exploitation aisée du multimodèle dépend d'un choix judicieux de la structure des fonctions de pondération et des sous-modèles. Des sous-modèles de structure linéaire et des fonctions de pondération respectant les propriétés de somme convexe permettent d'introduire des propriétés mathématiques dont les qualités seront exploitées au cours des prochains chapitres.

Ce premier chapitre a mis en avant deux structures de multimodèles, le multimodèle de T.S. et le multimodèle découplé. Dans la suite du mémoire, notre attention se portera exclusivement sur le multimodèle découplé qui revêt l'avantage de comporter des sous-modèles complètement indépendants dont les dimensions peuvent être différentes.

2

Identification paramétrique d'un multimodèle découplé

Sommaire

2.1 Introduction 40
2.2 Bref état de l'art sur l'identification par multimodèle 42
2.3 Formulation du problème lié à l'identification 45
2.4 Critères d'estimation 47
2.4.1 Critère global 48
2.4.2 Critère local 49
2.4.3 Critère combiné 50
2.5 Procédure d'identification paramétrique 50
2.5.1 Estimation paramétrique avec un critère global 52
2.5.2 Estimation paramétrique avec un critère local 53
2.5.3 Calcul des fonctions de sensibilité 54
2.5.4 Procédure d'optimisation : algorithme 54
2.5.5 Comparaison entre les modélisations à partir d'une approche globale et d'une approche locale 56
2.5.6 A propos du phénomène de décrochage 61
2.6 Exemples d'identification 64
2.6.1 Système non linéaire mono-entrée/mono-sortie 64
2.6.2 Four à gaz de *Box et Jenkins* 67
2.7 Conclusion et discussion 70

2.1 Introduction

La modélisation précise du comportement dynamique d'un système est une phase préliminaire qui permet de répondre à un certain nombre d'objectifs, à savoir la synthèse d'une loi de commande, la conception d'un observateur et/ou la mise en place d'une stratégie de diagnostic, etc. Cette phase peut être mise en œuvre à l'aide de différentes démarches de modélisation (voir figure 2.1) classées en fonction des connaissances disponibles sur le système et des finalités de son modèle.

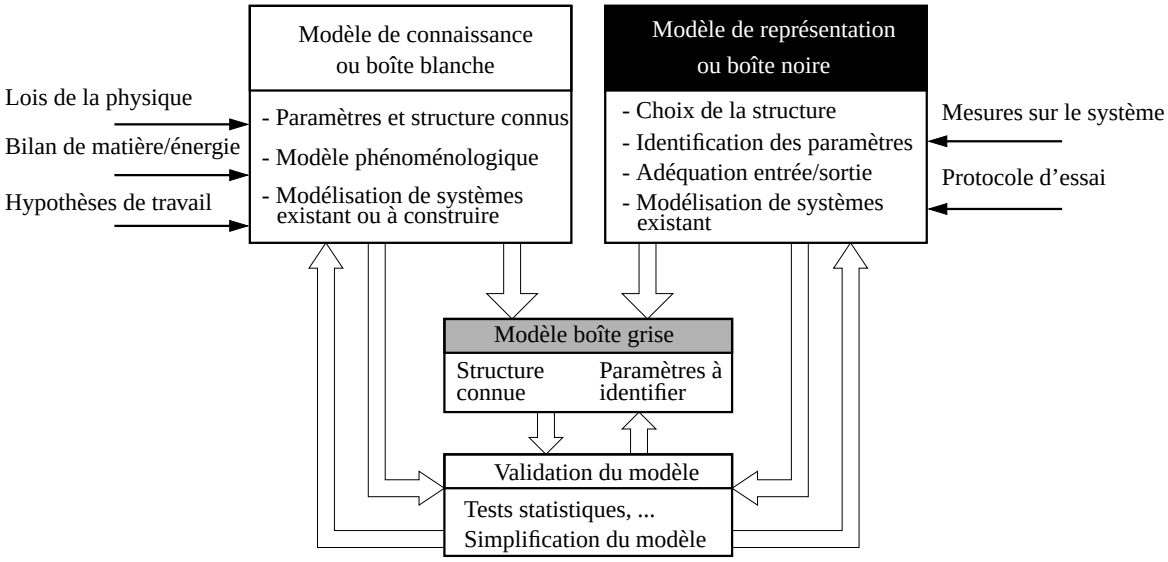

Figure 2.1 – Démarches classiques de modélisation

Une démarche théorique de modélisation, conduisant à un *modèle de connaissance* ou de type *boîte blanche*, permet d'obtenir un modèle dont les relations mathématiques et les paramètres sont pourvus d'un sens physique des phénomènes intervenant dans le système. Toutefois, l'adoption d'une telle démarche peut se révéler dans la pratique difficile voire impossible en raison notamment d'une complexité importante du système et/ou d'une connaissance insuffisante des phénomènes présents dans le système. Dans ce cas de figure, une modélisation expérimentale, donnant lieu à un *modèle de représentation* ou de type *boîte noire*, constitue une alternative privilégiée dans la mesure où elle permet d'établir un modèle à partir des données d'entrée et de sortie extraites du système. Dans ce contexte, le problème soulevé par la modélisation devient un problème d'identification, l'objectif étant d'obtenir la structure et les valeurs paramétriques d'un modèle capable de représenter (modèle de représentation) le plus fidèlement possible le comportement externe du système, c.-à-d. le comportement entrée/sortie du système, sans chercher à obtenir un modèle de connaissance capable de décrire son comportement interne (phénomènes internes, etc.).

D'un point de vue général, l'identification vise à déterminer, à partir d'une collection de

données d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ extraites du système :

$$u_1^k = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(k) \end{bmatrix} , \quad (2.1)$$

$$y_1^k = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(k) \end{bmatrix} , \quad (2.2)$$

une relation mathématique $g(.)$, donnant à chaque instant une estimation satisfaisante de la sortie du système en fonction des observations passées, c.-à-d. :

$$y(t) = g(\varphi(t), \theta) , \quad (2.3)$$

où $g(.)$ est le modèle du système, θ le vecteur de paramètres et $\varphi(t)$ le vecteur de régression. L'identification du système a pour objet l'obtention, pour une structure de modèle $g(.)$ donnée, d'un vecteur de paramètres θ conduisant à une bonne adéquation entre le comportement du système et les prédictions du modèle. Cette adéquation est souvent quantifiée au moyen d'un critère d'estimation, l'écart quadratique entre la sortie du système et celle estimée étant le plus courant.

Il n'existe pas de méthodologie systématique d'identification en mesure de livrer un modèle unique $g(.)$. Néanmoins, Ljung [1999] propose une démarche d'identification basée sur l'enchaînement itératif de quatre étapes : l'extraction des données, l'identification de la structure, l'identification des paramètres et enfin la validation du modèle. La détermination de la structure, linéaire ou non linéaire, du modèle soulève lors de l'identification un problème majeur.

Le recours aux modèles linéaires est à l'origine de nombreuses techniques d'identification. Un modèle linéaire est souvent élaboré en réduisant le domaine de fonctionnement du système autour d'un point de fonctionnement et en avançant des hypothèses de faibles déviations autour de ce point. Cette hypothèse de travail est tout à fait raisonnable dans un certain nombre de cas. Bien souvent cependant, l'hypothèse de linéarité n'est pas respectée, le caractère non linéaire du système ne pouvant pas toujours être négligé. Les modèles linéaires peuvent alors s'avérer inappropriés à la modélisation de tels systèmes dans la mesure où ils ne fournissent qu'une caractérisation locale du comportement global du système. Des améliorations peuvent néanmoins être envisagées, l'une d'elles consistant à réactualiser le modèle linéarisé lorsque le point de fonctionnement change (linéarisation statique), l'autre à obtenir, lorsque la trajectoire du système est connue, un modèle linéaire tangent à cette trajectoire, à condition toutefois de supposer qu'il s'en écarte peu (linéarisation dynamique).

Dans ce qui suit, on privilégie la recherche d'un modèle en mesure de donner une bonne caractérisation globale du comportement dynamique du système. Dans cette perspective, le recours à des modèles de représentation non linéaire aptes à caractériser les comportements du système dans une large plage de fonctionnement s'impose. Néanmoins, il s'avère souvent difficile d'obtenir un modèle unique, capable de rendre compte de la complexité globale du système, sous une forme mathématiquement exploitable.

Nous appréhendons le problème posé par l'identification à l'aide d'une approche globale de modélisation dite *multimodèle*. La méthodologie d'identification proposée [Orjuela et al., 2006a,b] est basée sur un multimodèle découplé. Contrairement aux structures multimodèles

classiques, la structure du multimodèle découplé permet d'introduire des sous-modèles possédant chacun un espace d'état de dimension différente. Il est ainsi possible de prendre en compte les changements structurels du système survenant dans chaque zone de fonctionnement.

L'identification *hors ligne* de systèmes non linéaires à temps discret basée sur un multimodèle découplé fait l'objet de ce chapitre. Ce dernier comporte cinq sections. La première section livre un état de l'art sur les différentes techniques d'identification dans un contexte de modélisation multimodèle. La mise en évidence du peu de travaux proposant une procédure d'estimation paramétrique basée sur la structure du multimodèle découplé justifie le développement d'une démarche d'identification. Le problème soulevé par l'identification paramétrique est formulé au cours de la deuxième section et différents critères d'estimation paramétrique (critère global, local ou mixte) sont exposés au cours de la troisième. La quatrième section aborde la procédure d'estimation proprement dite. Elle se base sur une technique itérative d'optimisation non linéaire d'un critère à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton. Un phénomène dit de *décrochage* qui diminue considérablement la qualité de l'approximation du multimodèle est mis en lumière et une solution est proposée. La fin de ce chapitre est consacrée à des exemples académiques d'identification illustrant les performances et les limites de la procédure d'estimation paramétrique proposée.

2.2 Bref état de l'art sur l'identification par multimodèle

Nombreux sont les travaux de recherche dédiés à l'identification des systèmes non linéaires par une approche multimodèle. En effet, il n'y a pas de méthodologie spécifique capable de conduire à une représentation multimodèle unique d'un système. Dans tous les cas, l'élaboration d'un multimodèle soulève trois problèmes majeurs, à savoir :

1. Le choix de la variable caractéristique (c.-à-d. la variable de décision ξ) du système permettant d'indexer les fonctions de pondération.
2. La décomposition de l'espace de fonctionnement du système en un nombre fini de zones de fonctionnement. Cette étape s'accompagne éventuellement d'une optimisation des fonctions poids associées à chaque zone.
3. La détermination de la structure du multimodèle et l'identification paramétrique de chaque sous-modèle.

Il convient de souligner que ces trois problèmes présentent un degré de complexité important défavorisant leur résolution simultanée. Toutefois, diverses stratégies de modélisation peuvent mener à leur résolution. Dans tous les cas, une étape fondamentale de *validation* du multimodèle doit être envisagée à la fin de la procédure d'identification de façon à vérifier, à l'aide de tests appropriés, les bonnes performances du modèle obtenu compte tenu du but de modélisation poursuivi.

Une première stratégie tente de résoudre les trois problèmes liés à l'identification de façon séquentielle. Dans un premier temps, l'espace de fonctionnement du système est partitionné à l'aide d'algorithmes de classification floue (*fuzzy clustering algorithms*) ou de *clustering* tels

que : l'algorithme de *C-means*, l'algorithme de *C-varieties*, l'algorithme de *Gath-Geva*, l'algorithme de *Gustafson-Kessel*. Nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages de Babuska [1998] et de Foulloy et al. [2003] qui proposent une présentation détaillée de ces algorithmes. Ces méthodes conduisent au partitionnement de l'espace de fonctionnement à partir d'une classification spatiale des données selon une certaine métrique. Les classes obtenues représentent des zones homogènes de fonctionnement du système souvent caractérisables au moyen d'un sous-modèle linéaire. Dans un deuxième temps, l'identification paramétrique des différents sous-modèles est accomplie. Toutefois, la résolution séquentielle de ces trois problèmes ne conduit pas toujours à une caractérisation satisfaisante du système, d'où le recours à une procédure itérative afin d'affiner le modèle.

Une deuxième stratégie de modélisation plus élaborée vise à automatiser la résolution des trois problèmes. L'idée est d'améliorer, au cours de la procédure d'identification, la précision du multimodèle à travers la minimisation d'un critère de performances basée sur une procédure itérative d'optimisation non linéaire. Cependant, l'identification simultanée des paramètres des fonctions poids et des sous-modèles se révèle dans la pratique difficile à mettre en oeuvre et très coûteuse en temps de calcul. Il peut être alors conseillé de rechercher une solution sous-optimale au problème afin de simplifier la procédure de calcul. A cet effet, les problèmes 2 et 3 ne sont pas résolus simultanément mais par le biais d'un algorithme à deux niveaux qui alterne leur résolution. Le nombre de sous-modèles de même que leur complexité sont automatiquement déterminés en fonction de la précision fournie par le multimodèle.

Deux approches de base, l'une *ascendante* et l'autre *descendante*, permettent de décomposer l'espace de fonctionnement du système suivant une certaine heuristique. Dans l'approche ascendante, un faible nombre de zones de fonctionnement (généralement une) est considéré et des zones supplémentaires sont ajoutées à chaque itération en fonction de l'erreur de modélisation évaluée à partir d'un critère d'optimisation (le multimodèle grandit). Dans l'approche descendante, l'espace de fonctionnement est partitionné en un grand nombre de zones de fonctionnement puis la complexité du multimodèle est réduite par l'élimination des sous-modèles superflus (le multimodèle se réduit).

Il est possible de distinguer, dans une démarche d'identification suivant une décomposition ascendante, les algorithmes ORBIT (*Operating Regime Based Modeling and Identification Toolkit*) et LOLIMOT (*Local Linear Model Trees*) proposés respectivement par Johansen et Foss [1995] et par Nelles [Nelles et al., 2000], [Nelles, 2001]. La différence entre ces deux algorithmes se situe au niveau de la stratégie mise en œuvre lors du partitionnement. McLoone [2000] établit une comparaison entre les algorithmes ORBIT et LOLIMOT. Il propose un algorithme *hybride* de ces deux approches. Son étude conclut que l'algorithme ORBIT effectue un partitionnement optimal de l'espace de fonctionnement du système et ce, en dépit d'un temps de calcul important. En revanche, l'algorithme LOLIMOT minimise le temps de calcul au risque de fournir un modèle sous-optimal. En règle générale l'algorithme ORBIT, bien que coûteux en temps de calcul, offre un modèle plus précis.

En ce qui concerne l'approche descendante, Boukhris [1998] puis Gasso [2000] ont livré une technique de décomposition de l'espace de fonctionnement du système non linéaire à tra-

vers une partition grille, c.-à-d. un maillage de l'espace de fonctionnement du système. L'algorithme est initialisé au moyen d'une partition très fine. Puis la complexité du multimodèle est réduite soit en éliminant les zones de fonctionnement où les sous-modèles sont peu explicatifs, soit en fusionnant les zones où les sous-modèles présentent des comportements redondants. L'algorithme proposé fait appel à une stratégie à deux niveaux qui bascule entre l'estimation des paramètres des sous-modèles et l'estimation des paramètres des fonctions de pondération.

Récemment, Thiaw et al. [2007] ont mis au point une stratégie d'identification des systèmes basée sur un multimodèle constitué de sous-modèles de structure polynomiale. Ce type de sous-modèle permet de mieux appréhender le comportement local du système dans chaque zone de fonctionnement. Ils proposent des architectures de multimodèles récurrentes, bien plus complexes que les implantations des architectures multimodèles non récurrentes classiquement utilisées. Les fonctions de pondération sont estimées à l'aide de l'un des algorithmes de *clustering* mentionnés au début de cette section.

Ces techniques de modélisation ont été largement développées afin d'identifier des systèmes non linéaires au moyen d'un multimodèle de T.S. Le lecteur peut consulter le premier chapitre de l'ouvrage de référence édité par Murray-Smith et Johansen [1997] qui propose un état de l'art sur la question avant 1997. Un état de l'art sur les travaux conduits dans ce domaine depuis 1997 est présenté dans [Verdult, 2002, chap. 14]. En revanche, peu de travaux mettent en œuvre une procédure d'identification basée sur une structure de multimodèle découplé. Ce multimodèle peut être obtenu par des linéarisations successives du modèle non linéaire autour de différents points de fonctionnement, à condition toutefois que le modèle mathématique du système soit disponible [Gawthrop, 1995; Gatzke et Doyle III, 1999]. Dans le cas contraire, il faut recourir à des techniques d'identification.

Gray et al. [1996] ont étudié l'estimation paramétrique d'un multimodèle découplé (*local model network*) en minimisant l'erreur entre les données extraites du système et la sortie du modèle. McLoone [2000] s'est penché sur la modélisation multimodèle à partir de sous-modèles obtenus par une linéarisation basée sur la vitesse (c.f. section 1.5.4). Ce type de multimodèle offre un choix de structures plus vaste qui permettent d'agréger les sous-modèles. Il a établi une comparaison entre les comportements dynamiques des différents multimodèles.

Venkat et al. [2003] ont conçu une méthodologie d'identification basée sur cette structure dans l'optique de mettre en place une loi de commande. L'espace de fonctionnement du système est décomposé au moyen d'une grille, établie à partir de l'analyse du comportement en régime statique du système. Le comportement du système étant supposé linéaire dans chacune des zones, une identification individuelle des sous-modèles peut être menée à partir des données d'entrée/sortie du système générées dans chaque zone et ce, au moyen de techniques classiques d'identification. De multiples campagnes d'essais sont nécessaires à l'obtention d'autant de jeux de données par zone de fonctionnement que de sous-modèles à identifier (chaque jeu de données étant propre à un sous-modèle et donc à un mode de fonctionnement).

Pekpe [2004] a fait appel à une nouvelle formulation des méthodes des sous-espaces pour identifier les systèmes non linéaires MIMO par une approche multimodèle. Il a proposé deux

méthodes d'estimation des paramètres des sous-modèles. La première utilise les projections matricielles afin de déterminer successivement les paramètres de Markov des sous-modèles. La seconde fait appel à la méthode des moindres carrés afin d'estimer simultanément tous les paramètres de Markov. Le fait que cette méthode d'identification n'ait pas recours aux algorithmes d'optimisation non linéaires simplifie considérablement sa mise en œuvre.

Vinsonneau et al. [2004, 2005] se sont intéressés à l'identification d'un système non linéaire à l'aide d'un multimodèle découplé à base de blocs Hammerstein (cf. section 1.5.2). Dans ce multimodèle, l'entrée des sous-modèles est pondérée par une fonction de pondération. Un algorithme à deux niveaux d'optimisation permet d'estimer les paramètres des sous-modèles et des fonctions de pondération.

2.3 Formulation du problème lié à l'identification

Cette section a pour finalité la formulation du problème soulevé par la caractérisation du comportement dynamique d'un système MISO à l'aide d'un multimodèle découplé. La représentation d'état du multimodèle découplé utilisée dans cette section se présente sous la forme :

$$x_i(t+1) = A_i(\theta_i)x_i(t) + B_i(\theta_i)u(t) + D_i(\theta_i) \ , \tag{2.4a}$$

$$y_i(t) = C_i(\theta_i)x_i(t) \ , \tag{2.4b}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t))y_i(t) \ , \tag{2.4c}$$

où les fonctions de pondération $\mu_i(.)$ respectent les propriétés de somme convexe suivantes :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \ , \qquad \forall i = 1, \cdots, L, \quad \forall t \ . \tag{2.5}$$

Le lecteur a pu remarquer que la structure du multimodèle (2.4) diffère légèrement de celle proposée au cours de la section 1.5.2. En effet, un terme additionnel $D_i(\theta_i)$ apparaît au niveau de l'équation dynamique (2.4a). Cette forme plus générale de multimodèle offre des degrés de liberté supplémentaires lors de la phase d'identification paramétrique. Soulignons par ailleurs qu'une représentation externe (entrées-sorties) du multimodèle (2.4) peut être également envisagée. La représentation d'état (2.4) revêt cependant l'avantage d'être compacte, simple et plus générale. De plus, elle s'avère dans la pratique très bien adaptée à la synthèse d'une loi de commande ou à la conception d'observateurs.

La résolution du problème lié à l'identification paramétrique d'un multimodèle impose trois tâches fondamentales : le choix de la variable de décision, la décomposition de l'espace de fonctionnement du système et l'identification de la structure et des paramètres des sous-modèles. L'objectif est d'obtenir un multimodèle *parcimonieux*, c'est-à-dire un multimodèle capable de fournir une bonne caractérisation du système avec un nombre minimal de paramètres.

Dans ce qui suit, le **signal de commande** du système $u(t)$ sert de **variable de décision** $\xi(t)$ car il conduit le système vers les différents modes de fonctionnement (c.à-d. que $\xi(t) = u(t)$). Ce choix arbitraire n'est pas unique. En effet, d'autres choix de variables de décision, par exemple la sortie du multimodèle ou l'entrée et la sortie du multimodèle peuvent être envisagés. Néanmoins, ces choix accroissent la complexité de la procédure d'estimation paramétrique, la structure du multimodèle pouvant devenir récurrente.

Afin de réduire la complexité globale du problème d'identification à traiter, le partitionnement de l'espace de fonctionnement du système sera supposé connu. Une stratégie simple mais raisonnable, visant à décomposer l'espace de fonctionnement du système, repose sur la distribution homogène des fonctions de pondération dans l'espace de fonctionnement. La caractéristique en régime statique du système, quand elle est disponible, constitue une information *a priori* sur le système utile au positionnement des différentes fonctions poids. De ce fait, les paramètres des fonctions de pondération $\mu_i(.)$ seront *a priori* supposés connus et le nombre des paramètres du multimodèle à identifier s'en trouvera par conséquent réduit, les paramètres des sous-modèles étant les seuls à identifier.

Pour les besoins de la procédure d'optimisation, les paramètres θ_i des sous-modèles à estimer sont regroupés dans un vecteur colonne θ. Il contient tous les paramètres du multimodèle à estimer. Le vecteur θ est représenté sous la forme d'un vecteur partitionné en *L blocs colonnes* θ_i, soit :

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1^T & \cdots & \theta_i^T & \cdots & \theta_L^T \end{bmatrix}^T \quad , \tag{2.6}$$

où chaque bloc colonne θ_i est relatif aux q_i paramètres inconnus d'un sous-modèle particulier i, soit :

$$\theta_i = \begin{bmatrix} \theta_{i,1} & \cdots & \theta_{i,q} & \cdots & \theta_{i,q_i} \end{bmatrix}^T , \tag{2.7}$$

où $\theta_{i,q}$ est un paramètre (scalaire) à estimer et où l'indice q_i indique le nombre maximum de paramètres appartenant au $i^{\text{ème}}$ sous-modèle.

Le problème lié à l'identification se pose alors dans les termes suivants :

> *les fonctions de pondération $\mu_i(.)$ étant fixées a priori, il s'agit, à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y_s(t)$ d'un système non linéaire MISO, d'identifier le vecteur de paramètres θ du multimodèle.*
> *L'identification pose donc un problème d'optimisation d'un critère J à partir des informations entrée/sortie extraites du système, c.-à-d. :*

$$\hat{\theta} \quad = \quad \arg\min_{\theta} \quad J(\theta) \ , \tag{2.8}$$

> *où $\hat{\theta}$ est l'estimé de θ au sens du minimum de $J(.)$.*

Il s'avère donc fondamental de définir le critère d'optimisation J permettant d'évaluer la précision du multimodèle et d'estimer ses paramètres.

2.4 Critères d'estimation

Les perspectives d'exploitation du modèle conditionnent le cahier des charges (les contraintes de modélisation) à satisfaire par le multimodèle. Tout multimodèle se doit avant tout d'assurer une bonne adéquation entrée/sortie du système (adéquation globale du multimodèle et du système) afin d'être capable de prédire correctement le comportement du système dans le domaine de validité donné. Cependant, il peut être également souhaitable que les sous-modèles fournissent une caractérisation du comportement du système dans chaque zone de fonctionnement (adéquation locale du multimodèle et du système).

Pour répondre à ces contraintes, plusieurs critères (global, local ou combiné) peuvent être utilisés lors de l'optimisation paramétrique du multimodèle. Auparavant, il convient d'introduire la notion de *recouvrement* attachée aux fonctions de pondération, cette notion jouant en effet un rôle important lors du choix du critère.

Les notions de fonctions de pondération à *fort recouvrement* ou *fortement mélangées* et de fonctions de pondération à *faible recouvrement* ou *peu mélangées* sont déterminées par le degré de dispersion σ associé aux fonctions gaussiennes employées dans la construction des fonctions de pondération. Par recouvrement, on entend une zone où au moins deux fonctions de pondération sont significativement non nulles en même temps. Une grande dispersion σ traduit un recouvrement important entre les zones de fonctionnement et vice versa.

Exemple 2.1 (**Notions de recouvrement des fonctions de pondération**)
Les figures 2.2 et 2.3 illustrent les notions de fort et de faible recouvrement.

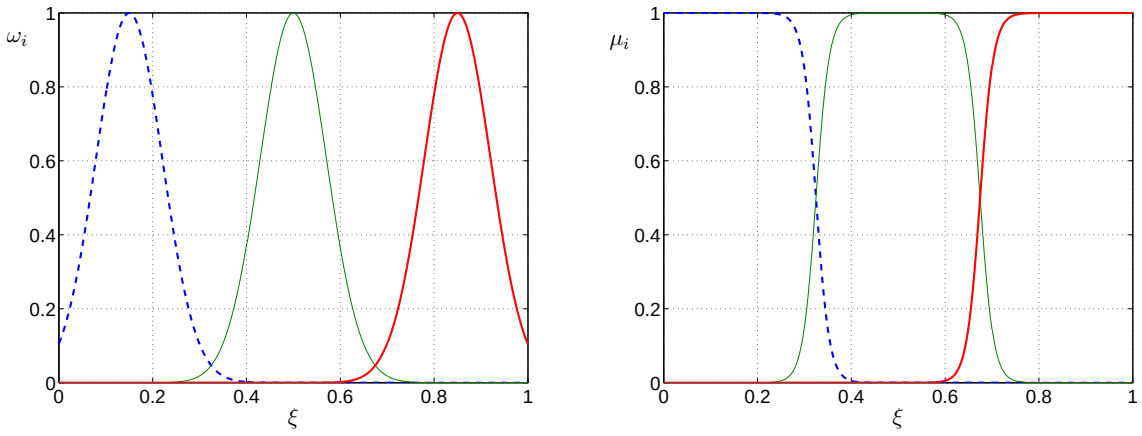

Figure 2.2 – Fonctions de pondération peu mélangées $\sigma = 0.1$. Fonctions gaussiennes $\omega_i(.)$ (à gauche) et fonctions de pondération $\mu_i(.)$ (à droite)

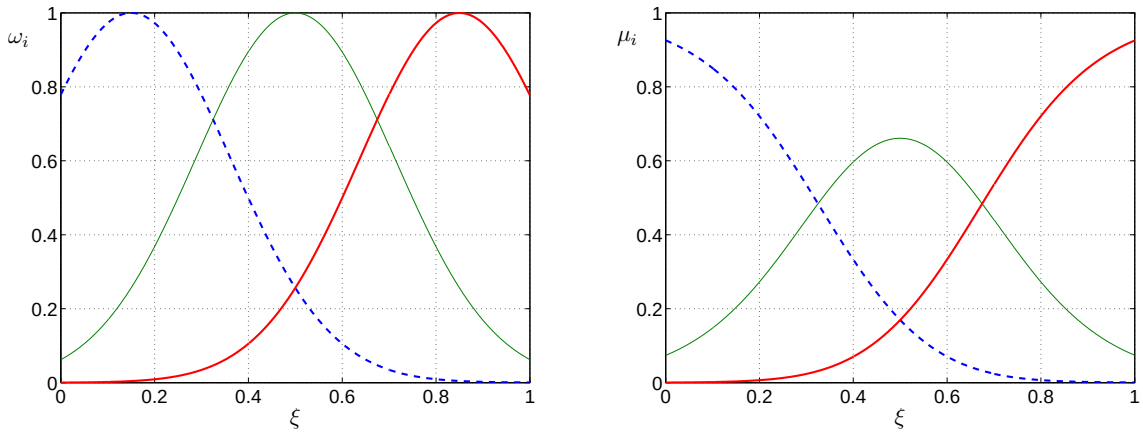

Figure 2.3 – Fonctions de pondération fortement mélangées $\sigma = 0.3$. Fonctions gaussiennes $\omega_i(.)$ (à gauche) et fonctions de pondération $\mu_i(.)$ (à droite)

En pratique, des fonctions de pondération peu mélangées indiquent que le domaine de fonctionnement du système a été partitionné en zones de fonctionnement relativement bien disjointes. Le cas limite, recouvrement nul, correspond au cas où les fonctions de pondération sont booléennes (zones de fonctionnement complètement disjointes). Des fonctions de pondération fortement mélangées impliquent en revanche que les zones de fonctionnement sont complètement ou partiellement superposées.

Il devient alors possible en fonction du recouvrement utilisé d'avancer des hypothèses sur le comportement local ou non du système dans chaque zone de fonctionnement. Il est évident que la notion de comportement local du système n'est valable qu'à condition d'utiliser un faible recouvrement.

Les critères classiquement utilisés pour l'optimisation paramétrique du multimodèle sont mentionnés ci-dessous.

2.4.1 Critère global

Le critère global est défini par :

$$J_G = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}(y(t) - y_s(t))^2 \quad , \tag{2.9}$$

où $y(t)$ est la sortie du multimodèle, $y_s(t)$ la sortie mesurée du système non linéaire et N le nombre de mesures. Ce critère favorise une bonne caractérisation du comportement global (entrées/sorties) du système par le multimodèle, sans chercher d'adéquation locale entre les comportements des sous-modèles et les comportements du système dans chaque zone de fonctionnement. On obtient ainsi *un multimodèle comportemental et/ou de prédiction*. La forme (2.9) peut être assortie de pondérations afin d'éventuellement privilégier le poids de certaines données.

2.4.2 Critère local

Pour chaque sous-modèle, un critère quadratique pondéré de la forme

$$J_{L,i} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t))(y_i(t) - y_s(t))^2 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \tag{2.10}$$

est défini. Le critère local prend en compte les sorties de tous les sous-modèles :

$$J_L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t))(y_i(t) - y_s(t))^2 \quad , \tag{2.11}$$

où $y_i(t)$ est la sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $y_s(t)$ la sortie mesurée du système non linéaire et N le nombre de mesures.

Ce critère favorise une bonne adéquation entre le comportement local des sous-modèles et le comportement local du système dans chaque zone de fonctionnement, à condition toutefois que les fonctions poids $\mu_i(.)$ soient *peu mélangées*. Il privilégie en effet les observations relevant fortement de la zone de fonctionnement associée à son sous-modèle. Les données appartenant à une zone de fonctionnement bien définie sont par conséquent utilisées pour l'identification des sous-modèles. Le critère local peut conduire à l'obtention *d'un multimodèle phénoménologique et/ou explicatif* car les sous-modèles obtenus sont susceptibles d'être interprétés, sous certaines conditions, comme des linéarisés tangents au système non linéaire. Il convient toutefois de remarquer que l'interprétation du comportement local du système par un multimodèle demeure délicate et requiert beaucoup de précautions [Shorten et al., 1999]. En règle générale, il est conseillé de considérer le multimodèle comme un modèle de représentation globale d'entrée/sortie du système. Notons que, contrairement au critère global, l'emploi d'un critère local conduit à une moins bonne caractérisation globale du système, un nombre plus élevé de sous-modèles étant souvent nécessaire.

D'autres variantes du critère local, suscitant un intérêt plus au moins mitigé, sont envisageables, par exemple :

$$J_L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=1}^{N} (y_i(t) - \mu_i(\xi(t))y_s(t))^2 \quad , \tag{2.12}$$

où les données extraites du système sont les seules à être assorties d'une pondération.

Remarque 2.1. *Soulignons que les sorties $\hat{y}_i$ des sous-modèles apparaissant dans le critère* (2.11) *sont indisponibles pour une structure multimodèle de T.S. En effet, dans cette structure les sorties des sous-modèles sont "virtuelles", la seule sortie disponible étant celle du multimodèle. L'estimation de tous les paramètres des sous-modèles à l'aide d'un critère local ne peut donc pas s'opérer par le biais du critère* (2.11) *mais par celui du critère* (2.10)*. En revanche, les sorties des sous-modèles sont disponibles pour le multimodèle découplé. L'optimisation paramétrique à partir du critère* (2.11) *ou du critère* (2.10) *devient ainsi possible.*

2.4.3 Critère combiné

Quant au critère combiné ou mixte défini par Yen et al. [1998] :

$$J_C \quad = \quad \alpha J_G + (1-\alpha) J_L \ , \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \ , \tag{2.13}$$

il représente un compromis entre les deux critères précédents déterminé en fonction de la valeur accordée au paramètre α. Il permet ainsi de tirer parti des avantages offerts par les critères global et local. Johansen et Babuska [2003] et Maertens et al. [2004] ont proposé un algorithme d'identification dit *multi-objectifs* basé sur le critère mixte :

$$J_C \quad = \quad J_G + \sum_{i=1}^{L} \beta_i J_{L,i} \ , \qquad \beta_i \geq 0 \ . \tag{2.14}$$

L'analyse de la sensibilité du critère (2.14) vis-à-vis des valeurs prises par les paramètres β_i leur a permis de mettre en évidence les conflits potentiels entre les objectifs d'identification locale et globale. Leur analyse livre des informations clés potentiellement exploitables par l'utilisateur pour remettre en question, valider ou modifier le modèle obtenu. Le choix de $\beta_i = 1 \forall i$ offre généralement un bon compromis entre les deux objectifs de modélisation. L'algorithme d'identification suggéré optimise, dans un premier temps, les paramètres des sous-modèles à partir d'un critère local et ajuste, dans un deuxième temps, le comportement global du multimodèle à partir du critère global. Il est alors possible de garantir l'adéquation locale des sous-modèles tout en assurant le caractère global du multimodèle.

2.5 Procédure d'identification paramétrique

Cette section est dédiée à l'identification paramétrique d'un multimodèle découplé. Notons que d'après les équations (2.4) du multimodèle, cette structure n'est pas linéaire par rapport aux paramètres des sous-modèles. L'absence de solution analytique au problème (2.8) contraint à faire appel à des techniques numériques d'optimisation non linéaires. Une solution à ce genre de problème peut être obtenue à l'aide d'un nombre considérable de méthodes d'optimisation (méthode du gradient, de Newton, de Gauss-Newton, de la spirale, etc.).

La technique retenue pour identifier le vecteur de paramètres θ du multimodèle est basée sur une procédure itérative de minimisation d'un critère J (global, local ou combiné) mise en œuvre au moyen de l'algorithme de Gauss-Newton. Cette méthode repose sur un développement du critère $J(.)$ limité au deuxième ordre. La mise à jour du vecteur de paramètres est obtenue à partir de la formule de récurrence suivante :

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \mathrm{H}(\theta)^{-1}\mathrm{G}(\theta) \ , \tag{2.15}$$

où $\theta(k)$ représente la valeur du vecteur de paramètres à une itération k particulière, $\theta(k+1)$ ce même vecteur à l'itération suivante, $\mathrm{H}(\theta) = \frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial\theta\partial\theta^{\mathrm{T}}}$ la matrice hessienne et $\mathrm{G}(\theta) = \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial\theta}$ le vecteur gradient à l'itération courante. Les calculs du vecteur gradient G et de la matrice hessienne H sont réalisés à partir du calcul des *fonctions de sensibilité* de la sortie du multimodèle par

rapport aux paramètres de chaque sous-modèle.

Cet algorithme présente une convergence rapide (contrairement à un algorithme du gradient) et ce, même quand le critère n'est pas quadratique en θ. De plus, le calcul de la matrice hessienne fournit des informations utiles sur l'incertitude avec laquelle les paramètres sont estimés. En revanche, l'une des principales difficultés de cette approche porte sur la sensibilité de l'algorithme au choix des paramètres initiaux $\theta(0)$. Il existe en effet un risque important de divergence si les paramètres initiaux sont loin de l'optimum. De plus, rien n'assure que l'algorithme converge vers un minimum global. Le succès de l'optimisation est donc tributaire d'un choix de paramètres initiaux judicieux. Dans les cas difficiles, il peut se révéler nécessaire de conduire la procédure d'estimation à partir de différents choix de paramètres initiaux $\theta(0)$ puis de sélectionner l'estimé qui permet d'obtenir la plus petite valeur du critère utilisé.

Quelques améliorations apportées à la procédure initiale d'identification contribuent à assurer la convergence de l'algorithme :

1. Un *coefficient de relaxation* variable $\Delta(k)$ est introduit au niveau de l'équation (2.15) :

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \Delta(k)\mathrm{H}(\theta)^{-1}\mathrm{G}(\theta) \quad , \tag{2.16}$$

   où $\Delta(k)$ est le pas qui minimise le critère dans la direction du vecteur $\mathrm{H}(\theta)^{-1}\mathrm{G}(\theta)$ à l'itération courante. Idéalement et pour un critère de type quadratique, $\Delta(k) = 1$. En pratique, on peut être amené à modifier sa valeur afin d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme. En effet, si $\mathrm{H}(\theta)$ est défini positif alors il existe toujours un $\Delta(k) \leq 1$ qui minimise le critère dans la direction du vecteur $\mathrm{H}(\theta)^{-1}\mathrm{G}(\theta)$.

2. L'algorithme de Marquardt [1963] permet de surmonter les problèmes liés à l'inversion de la matrice $\mathrm{H}(\theta)$ (problèmes provenant par exemple d'un mauvais conditionnement) lors de la mise à jour des paramètres. Cette méthode d'optimisation combine judicieusement les méthodes d'optimisation du gradient et de Gauss-Newton. Rappelons que l'algorithme du gradient est toujours stable mais très coûteux en temps de calcul. La méthode de Gauss-Newton présente un domaine de convergence plus réduit que celui de la méthode du gradient et requiert des calculs plus lourds à chaque itération. En revanche cet algorithme converge vers l'optimum en une seule itération dans le cas particulier où le critère est quadratique. La convergence est toutefois très rapide même si le critère n'est pas quadratique.

   L'algorithme de Levenberg-Marquardt remplace la relation de récurrence (2.16) par :

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \Delta(k)(\mathrm{H}(\theta) + \lambda(\mathrm{k})\mathrm{I})^{-1}\mathrm{G}(\theta) \quad , \tag{2.17}$$

   où $\lambda(k)$ est un scalaire (paramètre de régularisation). Si la valeur de $\lambda(k)$ est proche de zéro alors l'algorithme est proche de celui de Gauss-Newton. Si la valeur de $\lambda(k) >> 0$ tend vers l'infini alors l'algorithme est proche de celui du gradient. Cet algorithme tire donc à la fois profit de la stabilité de l'algorithme du gradient et de la rapidité de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton.

A chaque itération la valeur de $\lambda(k)$ est réglée, le plus souvent au moyen d'une heuristique basée sur l'évolution du critère. Si le critère a tendance à augmenter, la valeur de $\lambda(k)$ est augmentée de façon à obtenir une bonne direction de recherche. Si le critère décroît alors la valeur de $\lambda(k)$ est diminuée afin d'améliorer la vitesse de convergence.

3. Un filtrage passe-bas des nouveaux paramètres $\theta(k+1)$:

$$\theta(k+1) = p\theta(k+1) + (1-p)\theta(k) \quad \text{avec} \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{2.18}$$

est introduit afin de limiter d'éventuelles oscillations des paramètres qui pourraient conduire à une divergence de l'algorithme.

Les trois degrés de liberté, donnés par les paramètres Δ, λ et p, améliorent de façon significative la convergence de la procédure d'identification. Pour de plus amples informations au sujet de ces techniques d'identification, le lecteur peut consulter par exemple [Bard, 1974; Walter et Pronzato, 1994; Ljung, 1999].

2.5.1 Estimation paramétrique avec un critère global

Le critère global est défini par :

$$J_G = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)^2 \ , \tag{2.19}$$

où $\varepsilon(t)$ est l'erreur dite *globale*, erreur entre la sortie du multimodèle $y(t)$ et celle du système $y_s(t)$, donnée par :

$$\varepsilon(t) = y(t) - y_s(t) \ . \tag{2.20}$$

Le vecteur gradient G_G s'obtient en dérivant le critère global par rapport aux paramètres θ, soit :

$$\mathrm{G}_G = \frac{\partial J_G}{\partial \theta} = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t) \frac{\partial y(t)}{\partial \theta} \tag{2.21}$$

avec

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) \frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta} \ . \tag{2.22}$$

Les $\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}$ sont les fonctions dites *de sensibilité du premier ordre* de la $i^{\text{ème}}$ sortie par rapport aux paramètres inconnus du multimodèle (leur calcul est présenté dans la section 2.5.3).

La matrice hessienne H_G s'obtient en dérivant deux fois le critère global par rapport aux paramètres θ, soit :

$$\mathrm{H}_G = \frac{\partial^2 J_G}{\partial \theta \partial \theta^T} = \sum_{t=1}^{N} \underbrace{\varepsilon(t)}_{\to 0} \frac{\partial^2 y(t)}{\partial \theta \partial \theta^T} + \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial y(t)}{\partial \theta} \frac{\partial y(t)}{\partial \theta^T} \ . \tag{2.23}$$

Le calcul du hessien fait appel aux fonctions de sensibilité du premier et du deuxième ordre. La *méthode de Gauss-Newton* épargne le calcul explicite de la matrice H_G, réduisant ainsi le nombre de calculs à chaque itération. Il est en effet possible de négliger les dérivées du deuxième ordre dans l'expression (2.23) sous l'hypothèse que l'erreur $\varepsilon(t)$ tende vers zéro.

Le calcul de la matrice H_G se fait alors seulement à l'aide des fonctions de sensibilité du premier ordre déjà calculées pour obtenir le gradient. La *matrice approchée* du hessien est donnée par :

$$\mathrm{H}_G \approx \tilde{\mathrm{H}}_G = \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial y(t)}{\partial \theta} \frac{\partial y(t)}{\partial \theta^T} \quad . \tag{2.24}$$

L'estimation des paramètres des sous-modèles, à l'aide d'un critère global, s'opère alors par le biais des expressions (2.21) du vecteur gradient et (2.24) de la matrice hessienne approchée qui ne font intervenir que les fonctions de sensibilité du premier ordre.

2.5.2 Estimation paramétrique avec un critère local

Le critère local est de la forme :

$$J_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L} \sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t)) \varepsilon_i(t)^2 \quad , \tag{2.25}$$

où $\varepsilon_i(t)$ est l'erreur dite *locale*, erreur entre la sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle $y_i(t)$ et la sortie du système $y_s(t)$, donnée par :

$$\varepsilon_i(t) = y_i(t) - y_s(t) \quad . \tag{2.26}$$

Le vecteur gradient G_L est défini par :

$$\mathrm{G}_L = \frac{\partial J_L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t)) \varepsilon_i(t) \frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta} \quad . \tag{2.27}$$

Il convient de remarquer que les fonctions de sensibilité $\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}$ sont les mêmes que dans le cas d'un critère global (voir section 2.5.3). Comme dans le cas d'un critère global, la matrice hessienne H_L s'obtient en dérivant deux fois le critère local par rapport aux paramètres θ. La matrice hessienne approchée $\tilde{\mathrm{H}}_L$ finalement obtenue est donnée par :

$$\mathrm{H}_L \approx \tilde{\mathrm{H}}_L = \sum_{i=1}^{L} \sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t)) \frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta} \frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta^T} \tag{2.28}$$

sous l'hypothèse que localement l'erreur $\varepsilon_i(t)$ tende vers zéro (méthode de Gauss-Newton).

Remarque 2.2. *Si les fonctions poids sont à faible recouvrement, l'identification des paramètres des sous-modèles est alors largement simplifiée. En effet, l'estimation de chaque sous-modèle peut se faire indépendamment à l'aide du critère* (2.10) *défini par :*

$$J_{L,i} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t)) (y_i(t) - y_s(t))^2 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad .$$

Si les sous-modèles sont linéaires par rapport aux paramètres, les techniques itératives non linéaires utilisées pour réaliser l'estimation paramétrique peuvent être remplacées par des techniques de régression linéaires classiques (comme les moindres carrés) pour lesquelles une solution analytique existe.

2.5.3 Calcul des fonctions de sensibilité

Le calcul des fonctions de sensibilité du premier ordre nécessaires à l'obtention du gradient et du hessien peut s'effectuer à partir de l'équation du multimodèle. La démarche adoptée pour calculer les fonctions de sensibilité consiste à dériver les équations d'état du multimodèle (2.4) par rapport aux paramètres $\theta_{p,q}$ introduits en (2.7). Il convient alors de distinguer deux sortes de fonctions de sensibilité, à savoir les fonctions de sensibilité de la sortie de chaque sous-modèle par rapport à $\theta_{p,q}$ et les fonctions de sensibilité du vecteur d'état de chaque sous-modèle par rapport à $\theta_{p,q}$.

Les premières s'explicitent par dérivation partielle des équations de sortie des sous-modèles (2.4b) comme suit :

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta_{p,q}} = \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{p,q}} x_i(t) + C_i \frac{\partial x_i(t)}{\partial \theta_{p,q}} \quad , \qquad p = 1,2,\cdots,L, \quad q = 1,2,\cdots,q_p \quad . \tag{2.29}$$

La seconde classe de fonction de sensibilité est calculée par dérivation partielle de l'équation (2.4a) par rapport à chaque paramètre $\theta_{p,q}$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial x_i(t+1)}{\partial \theta_{p,q}} = \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{p,q}} x_i(t) + A_i \frac{\partial x_i(t)}{\partial \theta_{p,q}} + \frac{\partial B_i}{\partial \theta_{p,q}} u(t) + \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{p,q}} \quad . \tag{2.30}$$

2.5.4 Procédure d'optimisation : algorithme

La procédure d'optimisation des paramètres s'élabore en appliquant la relation de récurrence (2.17) et en utilisant soit les définitions du gradient et du hessien (2.21) et (2.24) pour un critère global, soit les définitions (2.27) et (2.28) pour un critère local. La procédure d'optimisation paramétrique requiert également le calcul des fonctions de sensibilité à chaque itération. L'algorithme non linéaire calcule à chaque itération les fonctions de sensibilité à partir des expressions (2.29) et (2.30) en supposant connus les paramètres du multimodèle. Il ajuste ensuite de façon récurrente les paramètres du multimodèle à partir du calcul des fonctions de sensibilité, d'où l'importance du choix judicieux du vecteur de paramètres initiaux $\theta(0)$.

Les étapes de la procédure d'optimisation énoncées précédemment sont résumées dans l'algorithme suivant.

Algorithme d'identification

1. Choisir le poids $0 \leq \alpha \leq 1$ dans le critère mixte J_C défini en (2.13)
2. Donner un vecteur de paramètres initiaux $\theta(0)$ et calculer $J_C(0)$
3. Initialisation : $k = 1$, choisir le coefficient de relaxation $\Delta(1) \approx 0$ et le paramètre de régulation $\lambda(1) >> 0$
4. Simuler le multimodèle à partir de (2.4)
5. Utiliser (2.29) et (2.30) afin d'obtenir les fonctions de sensibilité
6. Calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne soit par évaluation de (2.21) et de (2.24) pour un critère global, soit à partir de (2.27) et de (2.28) pour un critère local
7. Mettre à jour le vecteur de paramètres $\theta(k)$ par évaluation de (2.17)
8. Évaluer le critère $J_C(k)$. Si $J_C(k-1) < J_C(k)$ retourner à l'étape 7 en diminuant la valeur de $\Delta(k)$ et en augmentant celle de $\lambda(k)$
9. Si $J_C(k) < J_C(k-1)$ alors incrémenter k, augmenter la valeur de $\Delta(k+1)$ et diminuer celle de $\lambda(k+1)$. Réitérer à partir de l'étape 4 jusqu'à obtenir $J_C(k) < \varepsilon$ ou $k > k_{max}$

Remarque 2.3. *Une démarche d'identification consiste à procéder à une première estimation des paramètres du multimodèle en utilisant un faible recouvrement des fonctions poids. Ce premier jeu de paramètres sert dans une deuxième phase à initialiser l'algorithme d'optimisation non linéaire (étape 2) en prenant en compte le recouvrement souhaité des fonctions poids.*

Remarque 2.4. *Les expressions* (2.29) *et* (2.30) *relatives au calcul des fonctions de sensibilité sont des formes génériques susceptibles d'être simplifiées lors de la mise en œuvre de l'algorithme. En effet, le découplage entre les dynamiques des sous-modèles entraîne un découplage entre les fonctions de sensibilité des différents sous-modèles. Par conséquent,*

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta_p} = 0 \quad pour \quad p \neq i \qquad i = 1,2,\cdots,L, \quad p = 1,2,\cdots,L \tag{2.31}$$

du fait que les paramètres de chaque sous-modèle sont complètement indépendants des paramètres des autres sous-modèles.

Remarque 2.5. *La représentation d'état des sous-modèles n'est pas unique (non unicité de la représentation d'état). Il est en effet toujours possible, pour décrire le même comportement entrée/sortie du sous-modèle, de trouver une matrice T de changement de base conduisant à une représentation d'état différente. Les sous-modèles peuvent être alors sur-paramétrés. Il est préférable, pour les besoins de l'identification, d'opter pour une forme canonique (p. ex. de commande, d'observation ou de Jordan, etc.) de la représentation d'état des sous-modèles* (2.4). *Cette forme ne nuit en rien à la généralité du multimodèle et présente l'avantage de fournir une représentation d'état où les matrices ont un moins grand nombre de termes significatifs. Le multimodèle présente ainsi un nombre minimal de paramètres à identifier.*

2.5.5 Comparaison entre les modélisations à partir d'une approche globale et d'une approche locale

Le critère de comparaison s'appuie sur la ressemblance structurelle entre les vecteurs gradients G_G et G_L et entre les matrices hessiennes H_G et H_L obtenus dans chaque approche.

Comparaison des vecteurs G_G et G_L

On rappelle ci-dessous la forme du vecteur gradient G_G obtenu avec un critère global

$$G_G = \frac{\partial J_G}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t))\varepsilon(t)\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta} \tag{2.32}$$

et celle du vecteur gradient G_L obtenu avec un critère local

$$G_L = \frac{\partial J_L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{t=1}^{N} \mu_i(\xi(t))\varepsilon_i(t)\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta} \quad . \tag{2.33}$$

Il convient de remarquer que, dans les deux cas, il est fait appel aux mêmes fonctions de sensibilité $\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}$. La différence entre les gradients global et local provient de l'erreur utilisée. Une erreur globale $\varepsilon(t)$ est prise en compte dans le premier cas et une erreur locale $\varepsilon_i(t)$ dans le second. L'erreur globale donnée par (2.20) fait intervenir la sortie du multimodèle et celle du système, c'est-à-dire $\varepsilon(t) = y(t) - y_s(t)$. L'erreur locale donnée par (2.26) fait intervenir la sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle et celle du système, c'est-à-dire $\varepsilon_i(t) = y_i(t) - y_s(t)$. Ces deux erreurs deviennent identiques si les fonctions de pondération tendent vers le cas limite booléen.

Si les fonctions de pondération sont peu mélangées alors $\varepsilon_i(t) \approx \varepsilon(t)$. Il est possible de conclure que :

$$G_L \approx G_G \quad . \tag{2.34}$$

Comparaison des matrices H_G et H_L

En utilisant la $\frac{\partial y(t)}{\partial \theta}$ donnée par (2.22), l'expression de la matrice hessienne H_G (2.24) devient :

$$H_G \approx \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta}\frac{\partial y_j(t)}{\partial \theta^T} \quad . \tag{2.35}$$

Comme dans le cas précédent, si les fonctions de pondération μ_i sont peu mélangées alors :

$$\mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) \approx \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.36}$$

ce qui amène à conclure que :

$$H_L \approx H_G \quad . \tag{2.37}$$

En conclusion, si l'on choisit des fonctions de pondération $\mu_i(.)$ peu mélangées, la distinction entre critère global et critère local disparaît. Les deux approches d'identification livrent alors des résultats similaires (les vecteurs gradients et les matrices hessiennes sont sensiblement identiques). En revanche, si les fonctions de pondération sont fortement mélangées, on pourra opter pour le critère mixte (2.13) afin de pondérer l'importance donnée à l'interprétation des sous-modèles au regard de la qualité du modèle global. De plus, il est important d'accompagner le choix du critère global, local ou mixte d'un choix adéquat de fonctions de pondération (à faible ou à fort recouvrement).

Exemple 2.2 (Exemple d'identification 1)
Soit à approcher, par une structure multimodèle, le modèle non linéaire [Foulloy et al., 2003] :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= (0.6-0.1a(t))y(t)+a(t)u(t), \quad u(t)\in[-0.9,0.9] \ , \\ a(t) &= \frac{0.6-0.06y(t)}{1+0.2y(t)} \ . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Le partitionnement de l'espace de fonctionnement du système, en deux zones de fonctionnement, est effectué à partir de l'étude de son comportement en régime statique. Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation de fonctions de type gaussien (c.f. chapitre 1, équation (1.21)). Les paramètres des fonctions de pondération, $c_1 = -0.9$, $c_2 = 0.9$ et $\sigma = 0.7$, sont choisis de façon heuristique. Il convient de remarquer que ce choix n'est pas unique. Le comportement dynamique de ce système ainsi que les fonctions de pondération utilisées pour partitionner son espace de fonctionnement sont illustrés sur la figure 2.4.

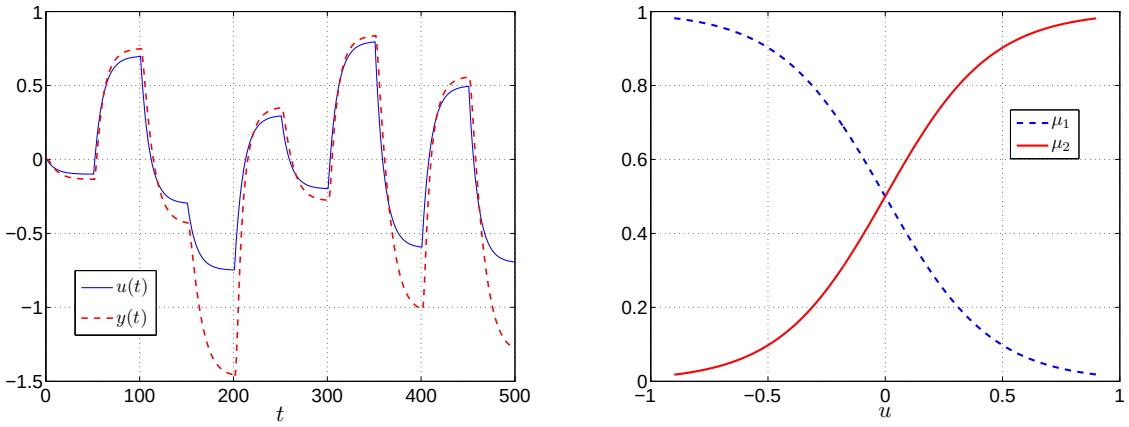

Figure 2.4 – Entrée/sortie du système non linéaire (à gauche) et fonctions de pondération (à droite)

Les sous-modèles se présentent sous la forme :

$$x_i(t+1) = a_i x_i(t) + b_i u(t) \ , \tag{2.39}$$

où les termes a_i et b_i sont des scalaires. Le vecteur de paramètres du multimodèle est alors donné par :

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \end{bmatrix}^T \quad . \tag{2.40}$$

Quatre fonctions de sensibilité doivent être calculées. Elles sont définies par :

$$\frac{\partial x_i(t+1)}{\partial a_i} = x_i(t) + a_i \frac{\partial x_i(t)}{\partial a_i} \quad et \quad \frac{\partial x_i(t+1)}{\partial b_i} = a_i \frac{\partial x_i(t)}{\partial b_i} + u(t), \;\; i = 1,2 \;\; . \tag{2.41}$$

La procédure d'identification est basée sur un critère global. L'estimation paramétrique s'effectue à partir de la relation (2.17) en considérant le vecteur gradient G_G et la matrice hessienne H_G définis respectivement par les relations (2.21) et (2.24).

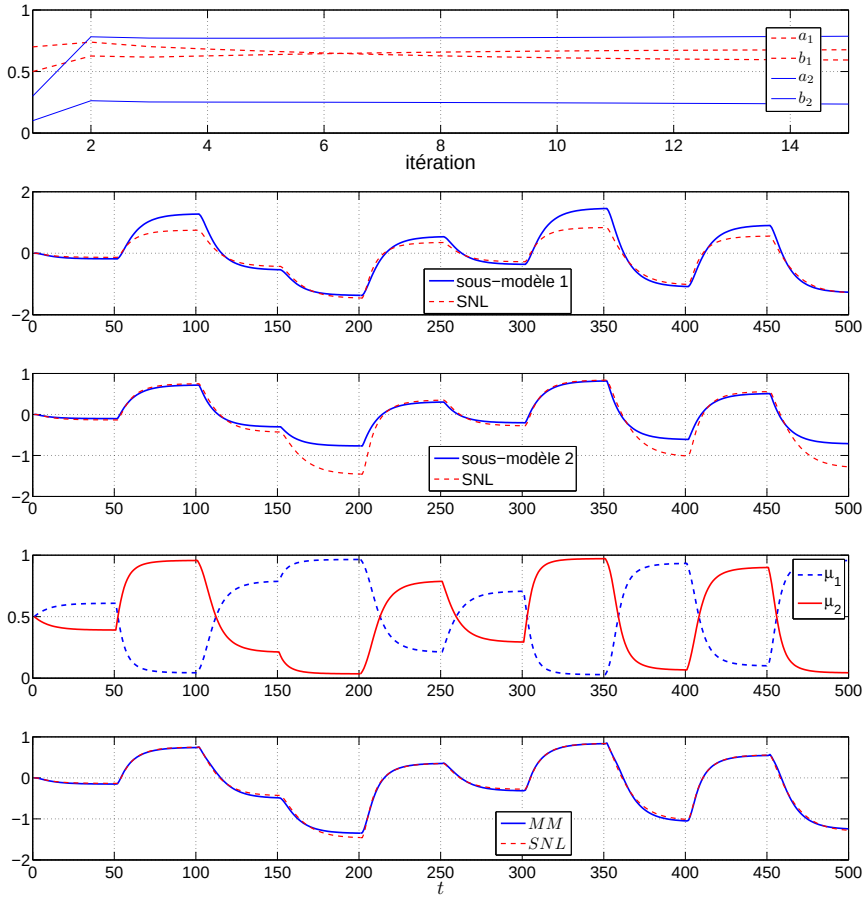

Figure 2.5 – Résultats de la procédure d'identification

Les résultats de la procédure d'identification sont présentés sur la figure 2.5. La partie supérieure de la figure 2.5 illustre l'évolution des quatre paramètres au cours de la séquence d'identification. Le nombre réduit de sous-modèles employés ainsi que la faible dimension du système non linéaire expliquent la rapide convergence des paramètres du multimodèle. Les

performances dynamiques des sous-modèles et du multimodèle sont présentées sur la partie inférieure de la figure 2.5. Il est possible d'apprécier la façon dont chaque sous-modèle est mis à contribution pour fournir l'approximation globale du système non linéaire. On note en particulier que le sous-modèle 1 contribue à l'approximation du système pour les entrées de fortes amplitudes, alors que le sous-modèle 2 y contribue de façon préférentielle pour les entrées de faibles amplitudes. Les sous-modèles ainsi identifiés donnent une bonne caractérisation locale du comportement du système. Le multimodèle livre également une bonne caractérisation globale du système.

Un bruit (ici, une séquence aléatoire suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à un) est maintenant additionné sur les données de sortie du système. Le rapport signal sur bruit (RSB) de la sortie par rapport au bruit additionné est égal à $16dB$*. Les données d'entrée et de sortie utilisées pour l'identification ainsi que les résultats obtenus à l'issue de la procédure d'identification sont illustrés sur la figure 2.6. Ces résultats montrent les bonnes capacités du multimodèle découplé à appréhender le comportement dynamique du système.*

Contexte de l'identification	a_1	b_1	a_2	b_2
En l'absence d'un bruit	0.6777	0.5917	0.2334	0.7887
En présence d'un bruit	0.6646	0.6232	0.2241	0.8053

Tableau 2.1 – Récapitulatif des paramètres des sous-modèles

Les paramètres des sous-modèles identifiés en l'absence et en présence du bruit de mesure sont présentés sur le tableau 2.1. Il est possible de constater que les paramètres des sous-modèles demeurent relativement proches dans ces deux contextes d'identification.

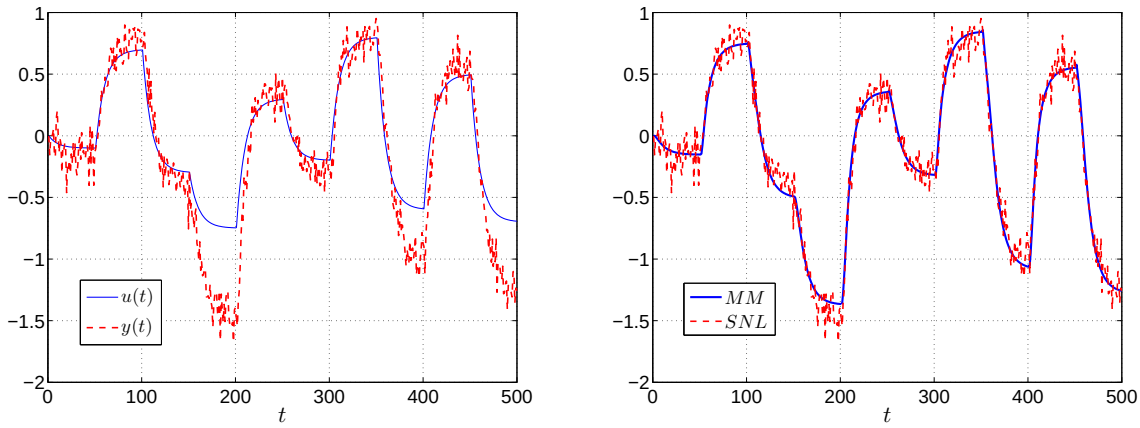

Figure 2.6 – Entrée/sortie du système non linéaire (à gauche) et résultats de la procédure d'identification en présence d'un bruit de mesure (à droite)

Exemple 2.3 (**Exemple d'identification 2, mise en évidence du *phénomène de décrochage***)
Soit à approcher, par une structure multimodèle, le modèle non linéaire :

$$x(t+1) \quad = \quad ax(t)+\sin(\gamma u(t))(\beta - u(t)) \quad ,u \in [0,1]$$

avec $a = 0.95$, $\gamma = 0.8\pi$ *et* $\beta = 1.5$. *L'entrée* $u(t)$ *du modèle est constituée par la concaténation de créneaux d'amplitudes variables.*

Un jeu de données entrée/sortie de 5000 points a servi à l'identification et un autre jeu de données entrée/sortie de même taille à la validation. Le multimodèle est constitué arbitrairement par $L = 6$ *sous-modèles (cette valeur pouvant être optimisée). Les fonctions de pondération* μ_i *sont de type gaussien et dépendent du signal d'entrée* $u(t)$. *Les centres sont donnés par* $c_1 = 0$, $c_2 = 0.2$, $c_3 = 0.4$, $c_4 = 0.6$, $c_5 = 0.8$, $c_6 = 1$ *et la dispersion par* $\sigma = 0.2$. *Le signal d'entrée et les fonctions de pondération sont illustrés sur la figure 2.7.*

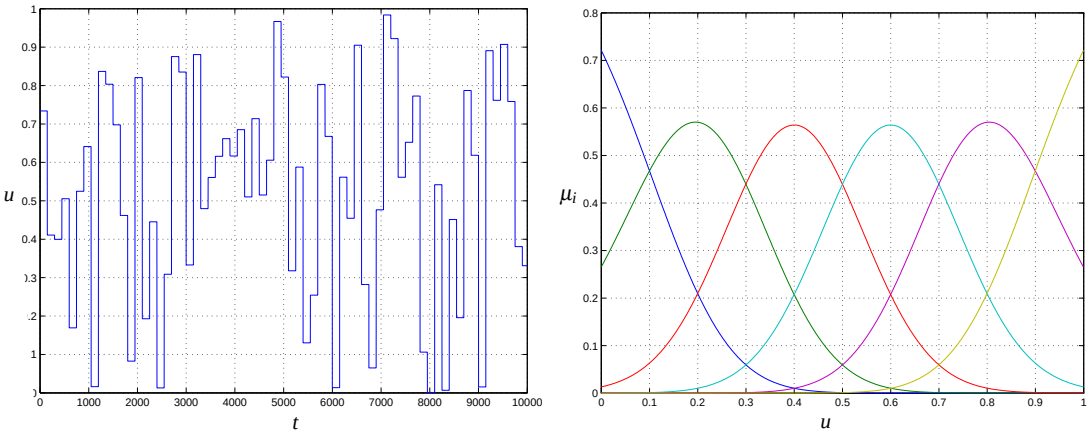

Figure 2.7 – Signal d'entrée (à gauche) et fonctions de pondération (à droite)

Les sous-modèles sont de la forme :

$$x_i(t+1) = a_i x_i(t) + b_i u(t) + d_i \quad , \tag{2.42}$$

où les paramètres a_i, b_i *et* d_i *sont de type scalaire. La procédure d'identification est basée sur un critère global. La figure 2.8 illustre le comportement dynamique du multimodèle identifié.*

Le comportement dynamique du modèle non linéaire (2.42) est mal approché par le multimodèle identifié. L'apparition de "pics", dans certaines zones de commutation du signal de commande, détériore considérablement la qualité de l'approximation. Ces "pics" sont une conséquence du phénomène dit de décrochage. La section suivante présente quelques éléments à l'origine de ce phénomène ainsi qu'une solution pour y remédier.

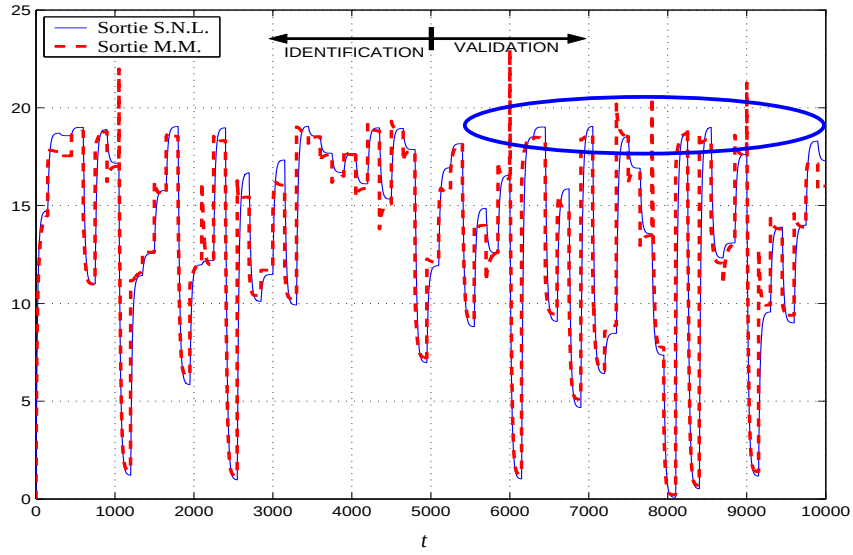

Figure 2.8 – Sortie du modèle non linéaire et sortie du multimodèle découplé

2.5.6 A propos du phénomène de décrochage

Le problème lié au phénomène de *décrochage* est propre au multimodèle découplé et ne se pose pas pour le multimodèle de T.S. En effet, dans un multimodèle découplé chaque sous-modèle évolue indépendamment des autres. Par conséquent, un changement brusque de la valeur de la variable d'indexation $\xi(t)$ peut entraîner un saut instantané de la sortie d'un sous-modèle vers une autre. Or, rien n'est en mesure d'assurer que la sortie de chaque sous-modèle est proche des autres lorsqu'elle est précipitamment mise à contribution. L'écart entre les sorties dans les phases de transition est à l'origine du phénomène de décrochage qui se traduit quelquefois par des discontinuités ou des variations très brutales de la sortie du modèle.

Un *décrochage* survient à un instant donné si les sorties des sous-modèles mises à contribution sont éloignées les unes des autres. Si les sorties des sous-modèles sont proches au moment où elles sont mises à contribution le décrochage diminue voire disparaît complètement si elles sont identiques. Le problème du décrochage peut être alors considéré comme un problème de conditions initiales sur les sorties des sous-modèles quand elles sont mises à contribution.

Par ailleurs, ce phénomène est plus ou moins marqué selon la structure de multimodèle découplé employée : fonctions de pondération agissant sur l'entrée (multimodèle à base de blocs Hammerstein), la sortie (multimodèle à base de blocs Wiener) ou simultanément sur ces deux signaux (multimodèle à base de blocs Hammerstein-Wiener). Considérons à titre d'exemple un multimodèle construit à partir de blocs Hammerstein. Le signal d'entrée y est nul pour tous les sous-modèles non pris en compte. Les sorties de tous les sous-modèles pour lesquels $\mu_i(.) \approx 0$ tendent de ce fait vers zéro excepté pour les sous-modèles actuellement "actifs". Dans ce cas de figure, l'écart entre les sorties des différents sous-modèles peut être important contribuant ainsi

à augmenter le phénomène de décrochage.

Dans tous les cas, le décrochage perturbe la procédure d'identification et détériore la qualité de l'approximation obtenue. La procédure d'identification est en effet tenue d'ajuster les paramètres du multimodèle qui reproduisent le mieux le comportement du système tout en cherchant à éliminer le phénomène de décrochage. Elle a donc tendance à estimer des sous-modèles présentant de faibles variations de la sortie en vue de parvenir à une diminution efficace du phénomène de décrochage. Le décrochage a un impact défavorable sur l'estimation paramétrique et détériore l'approximation du système dans les zones de décrochage.

Toutefois, ce phénomène ne se produit pas systématiquement et dépend conjointement des dynamiques propres aux sous-modèles, du mécanisme d'interpolation (choix de la variable de décision et de la structure du multimodèle) et du placement des fonctions poids. Une première solution visant à limiter et/ou éliminer le phénomène de décrochage consiste simultanément à :

- mélanger fortement les fonctions de pondération,
- augmenter le nombre des sous-modèles.

Cette première stratégie introduit inévitablement des contraintes supplémentaires dans la procédure d'identification et peut souvent s'avérer inefficace.

Nous proposons une deuxième solution qui consiste à modifier la structure du multimodèle grâce à l'ajout de trois filtres passe-bas (F_1, F_2 et F_3). Ils agissent respectivement sur le signal de commande, la variable de décision $\xi(t)$ et la sortie du multimodèle (figure 2.9). L'objectif est de prendre progressivement en compte la contribution de chaque sous-modèle et d'adoucir ainsi les transitions entre les sorties des sous-modèles. Le filtrage de la variable de décision $\xi(t)$ permet en particulier d'assurer la continuité des fonctions poids et ce, même si le signal de décision présente des discontinuités.

La structure du multimodèle découplé modifié est alors donnée par :

$$\hat{u}(t) = F_2(q^{-1})u(t) \ , \tag{2.43a}$$

$$\tilde{u}(t) = F_1(q^{-1})u(t) \ , \tag{2.43b}$$

$$x_i(t+1) = A_i(\theta_i)x_i(t) + B_i(\theta_i)\tilde{u}(t) + D_i(\theta_i) \ , \tag{2.43c}$$

$$y_i(t) = C_i(\theta_i)x_i(t) \ , \tag{2.43d}$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t))y_i(t) \qquad \text{avec} \qquad \xi(t) = \hat{u}(t) \ , \tag{2.43e}$$

$$y(t) = F_3(q^{-1})\tilde{y}(t) \ , \tag{2.43f}$$

où $y(t)$ est la nouvelle sortie du multimodèle. Les trois filtres sont notés $F_1(q^{-1})$, $F_2(q^{-1})$ et $F_3(q^{-1})$ où $F_i(q^{-1})$ est un rapport entre deux polynômes en q^{-1}. Ces trois filtres font alors partie du modèle du système et l'estimation de ces paramètres doit être introduite dans la procédure d'identification.

Le nouveau vecteur θ contenant les paramètres du multimodèle à estimer est défini par :

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1^T & \dots & \theta_i^T & \dots & \theta_L^T & \theta_{F_1}^T & \theta_{F_2}^T & \theta_{F_3}^T \end{bmatrix}^T \quad , \tag{2.44}$$

où chaque bloc colonne θ_i est relatif aux paramètres inconnus du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle et où θ_{F_1}, θ_{F_2} et θ_{F_3} sont les vecteurs contenant les paramètres relatifs aux trois filtres :

$$\theta_{F_i} = \begin{bmatrix} \theta_{F_i,1} & \dots & \theta_{F_i,q} & \dots & \theta_{F_i,q_{F_i}} \end{bmatrix}^T, \quad i = 1,2,3 \ . \tag{2.45}$$

La procédure d'estimation paramétrique du multimodèle découplé modifié est obtenue en suivant une démarche tout à fait similaire à celle exposée au cours des sections précédentes (le calcul des fonctions de sensibilité est présenté en annexe A).

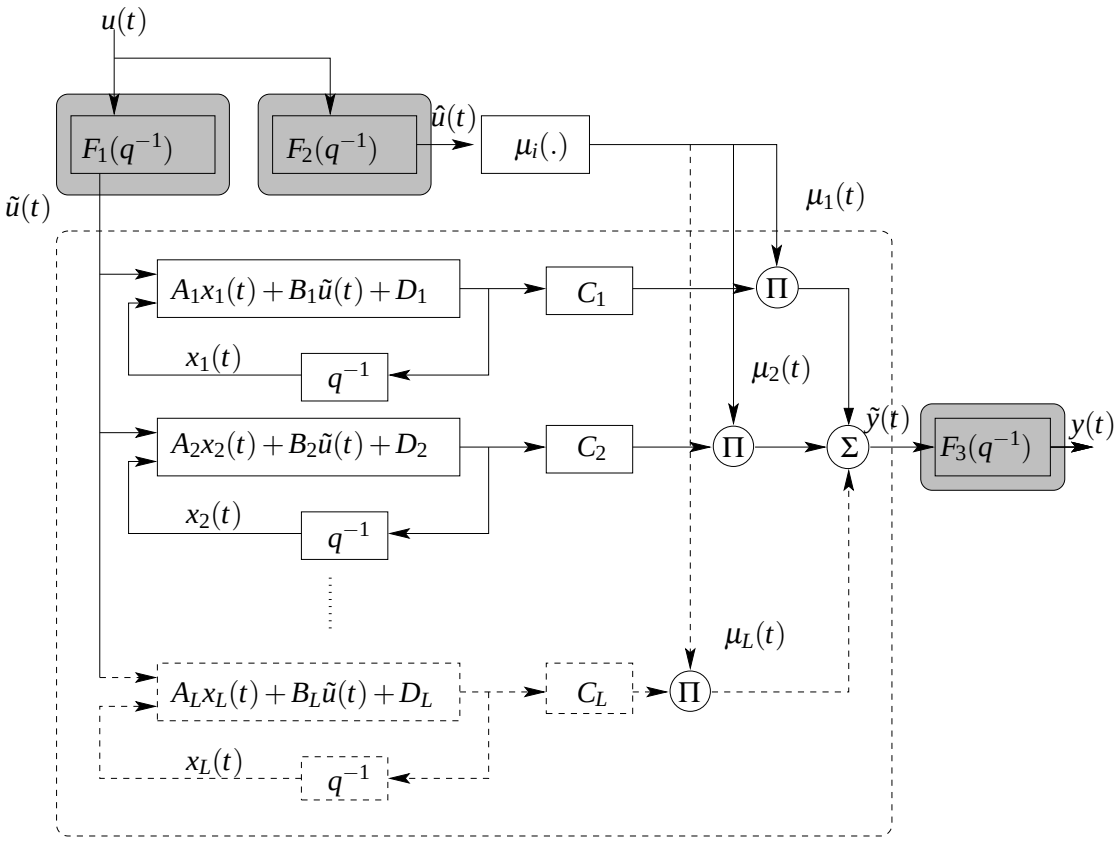

Figure 2.9 – Architecture du multimodèle découplé modifié

Exemple 2.4 (Exemple d'identification 2, suite et fin)
On opte ici pour un multimodèle découplé modifié. Les filtres F_1, F_2 et F_3 du premier ordre utilisés sont donnés par :

$$\tilde{u}(t+1) = \alpha_1 \tilde{u}(t) + (1-\alpha_1)u(t+1) \ , \tag{2.46}$$
$$\hat{u}(t+1) = \alpha_2 \hat{u}(t) + (1-\alpha_2)u(t+1) \ , \tag{2.47}$$
$$y(t+1) = \alpha_3 y(t) + (1-\alpha_3)\tilde{y}(t+1) \ . \tag{2.48}$$

Le calcul des nouvelles fonctions de sensibilité s'effectue comme dans la section 2.5.1 en prenant en considération les nouveaux paramètres α_1, α_2 et α_3 des filtres passe-bas.

La figure 2.10 illustre le comportement dynamique du multimodèle identifié après introduction des trois filtres passe-bas. Une bonne adéquation entre les données du modèle non linéaire et celles du multimodèle est constatée, le phénomène de décrochage étant rejeté.

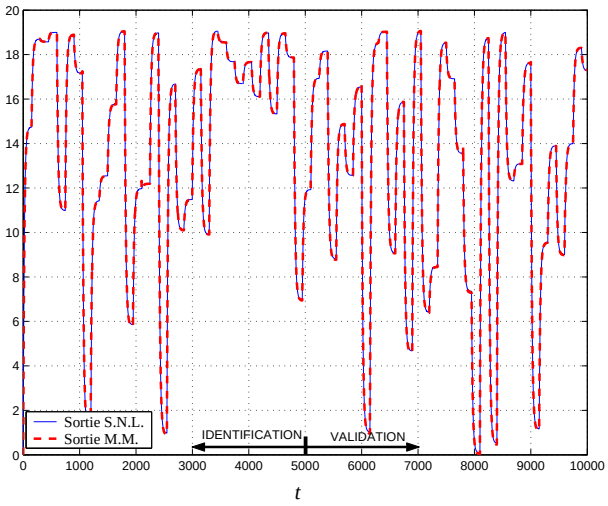

Figure 2.10 – Sortie du modèle non linéaire et sortie du multimodèle découplé modifié

2.6 Exemples d'identification

Les deux exemples académiques d'identification figurant dans cette section permettent d'évaluer à la fois les performances et les limites de la procédure d'estimation paramétrique proposée.

2.6.1 Système non linéaire mono-entrée/mono-sortie

On souhaite obtenir une représentation multimodèle d'un système non linéaire décrit par :

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \frac{y(t)y(t-1)y(t-2)u(t-1)\,(y(t-2)-1)+u(t)}{1+y^2(t-1)+y^2(t-2)} \quad , \\ y(0) &= y(1)=y(2)=0 \quad . \end{aligned} \tag{2.49}$$

Cet exemple a été proposé par Narendra et Parthasarathy [1990] dans un contexte de modélisation par réseaux de neurones. Boukhris [1998] et plus récemment Verdult [2002] ont fait appel à ce même exemple pour montrer les capacités d'approximation d'un multimodèle de T.S.

L'observation de la réponse du système à des échelons d'amplitudes variables (voir figure 2.11, à gauche) permet de vérifier le caractère non linéaire du système. Un partitionnement

homogène de l'espace de fonctionnement du système en quatre zones est effectué à l'aide des fonctions de pondération de centres $c_1 = -1$, $c_2 = -0.33$, $c_3 = 0.33$ et $c_4 = 1$ et de dispersion $\sigma = 0.4$ (voir figure 2.11, à droite).

Un jeu de données de 800 échantillons est utilisé pour l'identification. L'entrée $u(t)$ du système est constituée par la concaténation de créneaux d'amplitudes (appartenant à $[-1,1]$) et de durées variables. La validation du modèle est réalisée en considérant l'entrée suivante :

$$\begin{cases} u(t) = \sin(\frac{2\pi}{250}t) & 1 \leq t \leq 500 \\ u(t) = 0.8\sin(\frac{2\pi}{250}t) + 0.2\sin(\frac{2\pi}{25}t) & t > 500 \end{cases} . \tag{2.50}$$

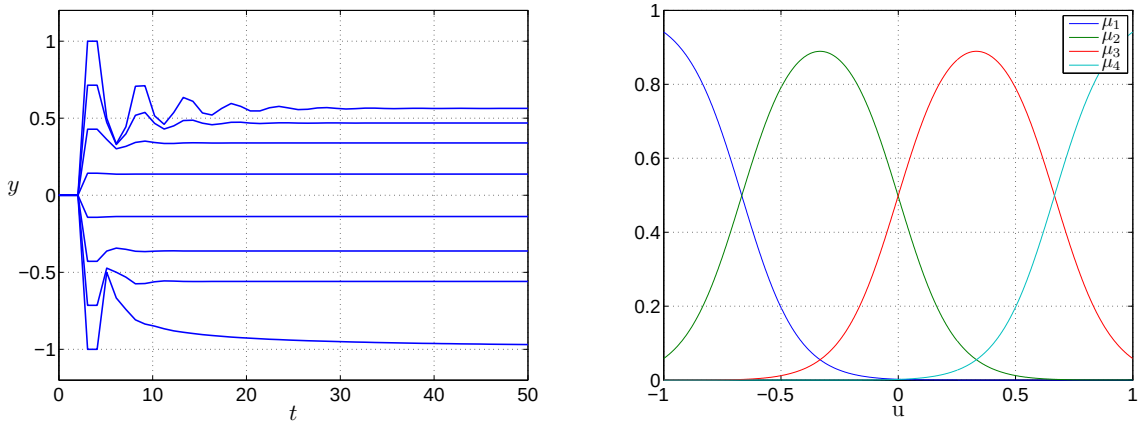

Figure 2.11 – Réponses temporelles du système à des échelons d'amplitudes variables (à gauche) et fonctions de pondération (à droite)

Deux indices de performance sont proposés afin d'évaluer la qualité du modèle. Le premier indice, déjà défini en (1.24), est la moyenne quadratique de l'erreur (Mean Square Error MSE) donnée par :

$$\text{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_s(t) - y(t))^2 \quad . \tag{2.51}$$

Le second est la VAF (variance-accounted-for) donnée en pourcentage. L'évaluation de la VAF permet, dans le cas général, de comparer deux matrices. En effet, une VAF égale à 100% est obtenue si les deux matrices Y et $\hat{Y}$ sont identiques. Dans le cas contraire, la VAF varie entre 0% et 100%. Dans un contexte d'identification, la VAF sert à comparer la séquence des données de sortie de validation du système $y_{s,1}^N$ aux données de sortie fournies par le modèle y_1^N. La VAF est définie par :

$$\text{VAF} = \max\left\{1 - \frac{\text{var}(y_{s,1}^N - y_1^N)}{\text{var}(y_1^N)}, 0\right\} \times 100\% \quad , \tag{2.52}$$

où var dénote la variance d'un signal quasi-stationnaire. Dans le cas idéal, c'est-à-dire avec un modèle exact du système et un jeu de conditions initiales parfaitement connu, les séquences $y_{s,1}^N$

et y_1^N sont identiques et la VAF est de 100%.

Le multimodèle de T.S. composé de sept sous-modèles du troisième ordre proposé par Boukhris [1998] fournit un indice de performance MSE $= 0.0003$. Nie [1995] obtient un meilleur indice de performance MSE $= 0.00028$ avec un modèle neuro-flou comportant 34 règles. Enfin, Verdult [2002] introduit une procédure d'optimisation des fonctions de pondération et des paramètres d'un multimodèle de T.S. constitué de quatre sous-modèles du troisième ordre. Il obtient un VAF $= 99.9\%$ et un MSE $= 0.0002$. Plus récemment, Wen et al. [2007] ont proposé une classe particulière de modèle affine par morceaux dite BPWARX (*Piecewise-Affine Basis Function AutoRegressive eXogenous models*) pour l'identification de type boîte noire d'un système non linéaire. Ils obtiennent une VAF $= 97.9\%$ avec un modèle comportant une dizaine de sous-modèles dont le vecteur de régression est $\phi(t) = \left[1, y(t-1), y(t-2), y(t-3), u(t-1), u(t-2)\right]^T$.

Le multimodèle découplé proposé comporte quatre sous-modèles du second ordre et un filtre passe-bas du premier ordre filtrant la variable de décision. L'identification paramétrique est effectuée en considérant tout d'abord des données de mesure (c.-à-d. de sortie) non bruitées puis bruitées.

Identification à partir de données de mesure non bruitées

Les données utilisées pour l'identification et les résultats obtenus lors de la validation du modèle sont présentés sur la figure 2.12. La bonne adéquation entre la sortie du système (séquence de validation) et celle du multimodèle est clairement mise en évidence. Les indices de performance obtenus sont VAF $= 99.7446\%$ et MSE $= 0.00067$. Ces performances sont tout à fait comparables à celles obtenues par les auteurs mentionnés précédemment alors qu'un nombre inférieur de paramètres a été utilisé.

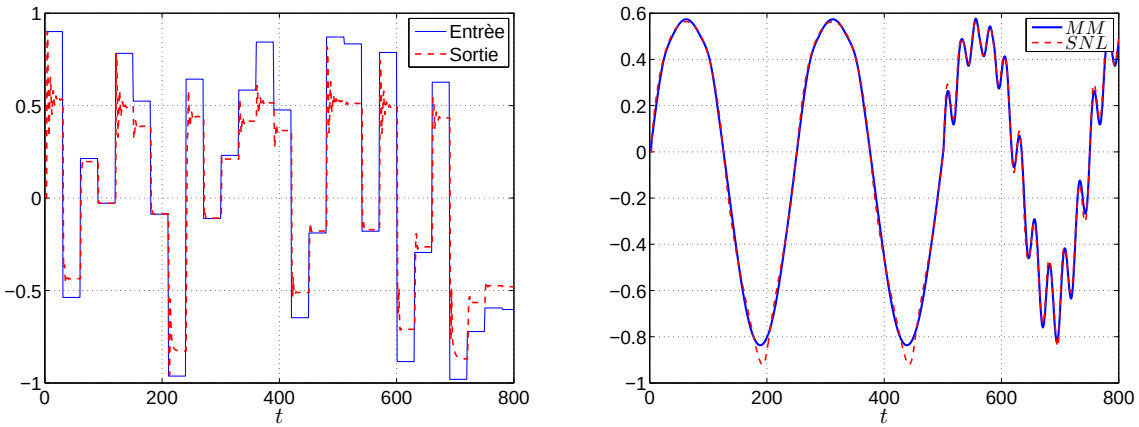

Figure 2.12 – Données pour l'identification (à gauche) et résultats de la validation du modèle (à droite) en l'absence d'un bruit de mesure

Identification à partir de données de mesure bruitées

Un bruit de mesure sur les données de sortie du système est maintenant additionné. Le bruit correspond à une séquence aléatoire suivant une loi normale de moyenne nulle, de variance égale à un. Le rapport signal sur bruit (RSB) de la sortie par rapport au bruit additionné est égal à $17dB$ (l'amplitude du bruit correspond à 10% de l'amplitude maximale du signal de sortie). La figure 2.13 illustre les données utilisées pour l'identification et les résultats obtenus lors de la validation. Les indices de performance obtenus sont VAF $= 97.6545\%$ et MSE $= 0.0053$.

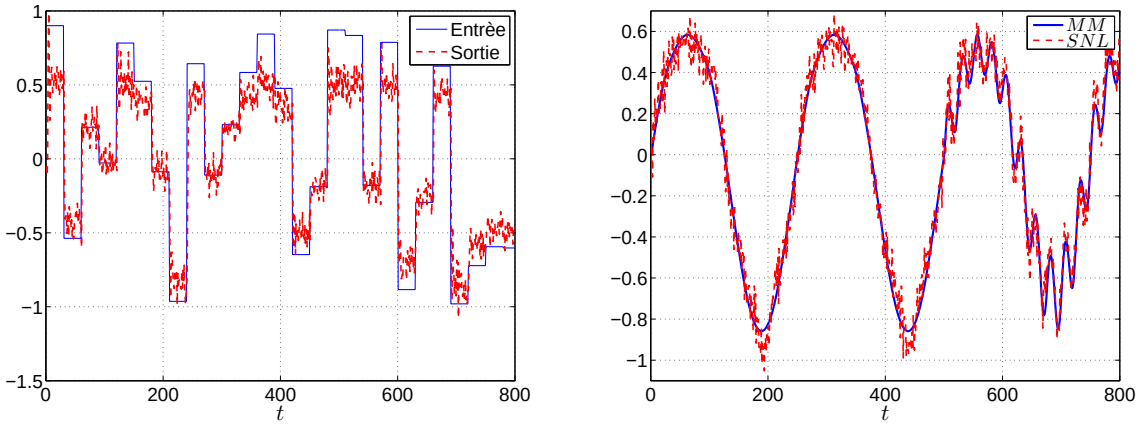

Figure 2.13 – Données pour l'identification (à gauche) et résultats de la validation du modèle (à droite) en présence d'un bruit de mesure

2.6.2 Four à gaz de *Box et Jenkins*

Ce deuxième exemple d'identification utilise les données du four à gaz de type SISO proposées par Box et Jenkins [1976].

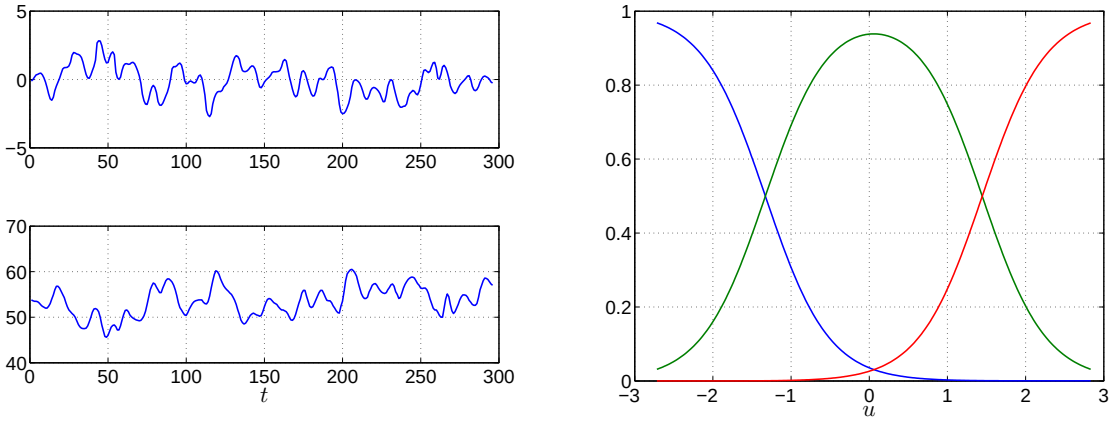

Figure 2.14 – Données d'entrée et de sortie du four (à gauche) et fonctions de pondération (à droite)

Dans ce four à gaz, de l'air et du méthane ont été combinés de façon à obtenir un mélange de gaz contenant du CO_2. L'entrée du four correspond au débit du méthane et la sortie à la concentration en pourcentage de CO_2 (figure 2.14). Le jeu des données d'entrée/sortie du four est constitué de 296 points. L'identification du multimodèle est réalisée avec un jeu de données de 150 points. Les 146 points restant servent à la validation du multimodèle.

Le multimodèle à structure modifiée (c.f. section 2.5.6) se compose de trois sous-modèles et de trois filtres passe-bas du premier ordre. Un partitionnement homogène de l'espace de fonctionnement du système en trois zones est réalisé à l'aide des fonctions de pondération de centres $c_1 = -2.7160$, $c_2 = 0.0590$ et $c_3 = 2.8340$ et de dispersion $\sigma = 1.7$ (voir figure 2.14), ce choix n'étant pas unique.

Identification à partir de données de mesure non bruitées

La figure 2.15 illustre les résultats obtenus pour l'identification et la validation du multimodèle. Les indices de performance obtenus lors de l'identification sont VAF = 98.8073% et MSE = 0.1329. Les indices de performance obtenus lors de la validation sont VAF = 77.0981% et MSE = 0.2065. Le multimodèle identifié parvient à représenter globalement le comportement dynamique du système. Il y a cependant des régions où l'adéquation entre le multimodèle et le système n'est pas satisfaisante. On notera que dans l'intervalle de temps 260 – 296 l'identification étant mauvaise, le multimodèle devra y être mieux adapté (voir figure 2.15 (à droite)). Toutefois, la précision du multimodèle peut être améliorée en augmentant par exemple l'ordre des sous-modèles ou en considérant une autre décomposition de l'espace de fonctionnement du système.

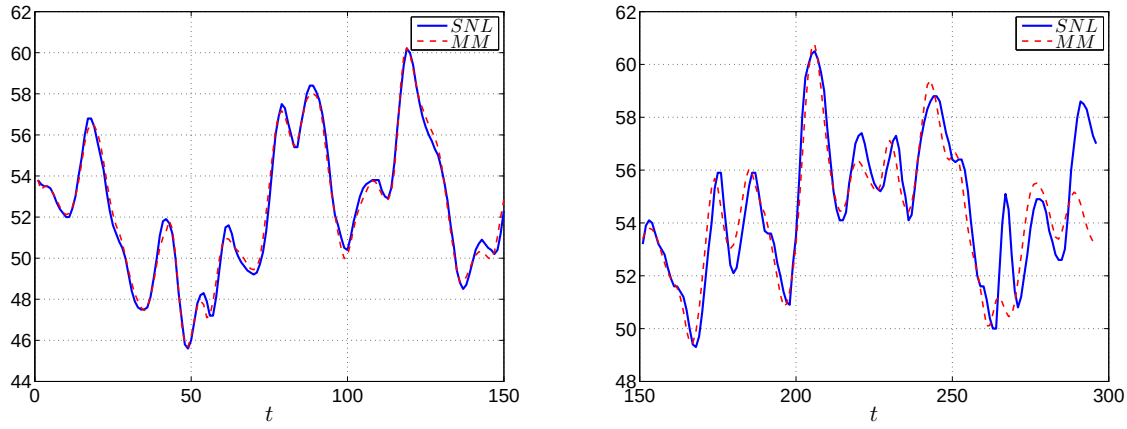

Figure 2.15 – Résultats de l'identification du modèle (à gauche) et de la validation (à droite) en l'absence d'un bruit de mesure

Identification à partir de données de mesure bruitées

Un bruit de mesure sur les données de sortie du système est maintenant ajouté. Le bruit correspond à une séquence aléatoire suivant une loi normale de moyenne nulle, de variance égale à

un. Le rapport signal sur bruit (RSB) de la sortie par rapport au bruit additionné est égal à $25dB$.

La figure 2.16 permet de comparer, pour les données d'identification et de validation, la sortie du système et celle du multimodèle identifié. Les indices de performance obtenus lors de l'identification sont VAF = 91.4417% et MSE = 1.0731. Les indices de performance obtenus lors de la validation sont VAF = 69.0093% et MSE = 2.8210. Ces résultats illustrent les bonnes propriétés d'adéquation du multimodèle identifié en présence d'un bruit de mesure.

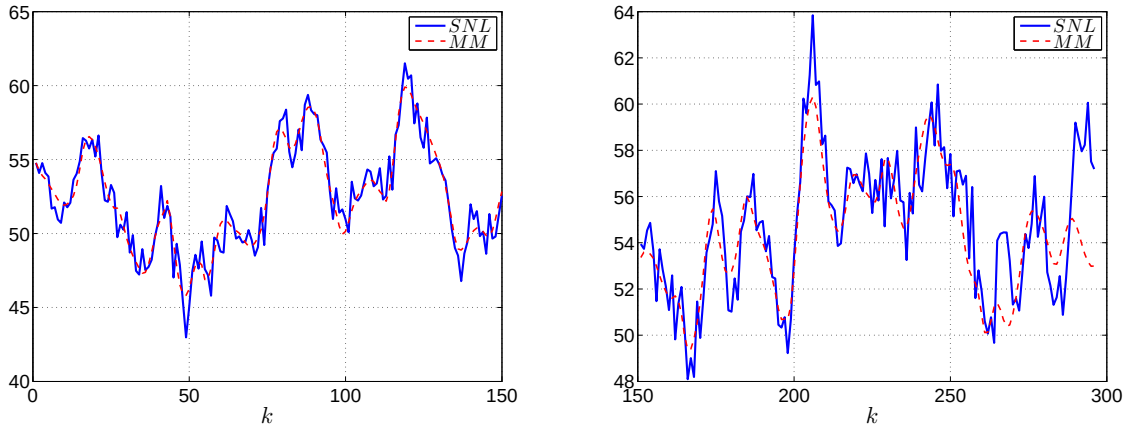

Figure 2.16 – Résultats de l'identification du modèle (à gauche) et de la validation (à droite) en présence d'un bruit de mesure

Commentaires

Deux facteurs rendent l'identification difficile, à savoir un nombre relativement réduit de données et un signal d'entrée relativement peu riche. Ce dernier aspect est illustré à l'aide de l'histogramme pour le jeu de données d'entrée du système (figure 2.17).

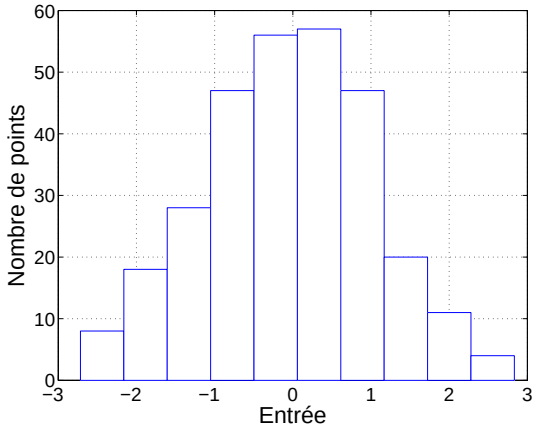

Figure 2.17 – Histogramme pour le jeu de données d'entrée du four

Il est aisé de constater, d'après l'histogramme, que le signal de commande n'excite pas uniformément les trois zones de fonctionnement du système définies par les fonctions de pondération. En effet, un grand nombre de points se situent dans l'intervalle $[-1,1]$ qui correspond à la zone de fonctionnement où le deuxième sous-modèle est le principal contributeur car $\mu_2 \approx 1$.

Cet exemple pointe l'importance de disposer d'un signal d'entrée suffisamment riche, c'est-à-dire capable d'exciter les différentes zones de fonctionnement du système de manière à fournir assez de données pour l'identification des paramètres des sous-modèles.

2.7 Conclusion et discussion

A travers ce second chapitre, nous avons abordé le problème de l'identification des systèmes non linéaires sous l'angle d'une approche multimodèle. Notre attention s'est portée sur le multimodèle découplé par opposition aux approches multimodèles classiquement utilisées.

Comme il a déjà été mentionné, le multimodèle découplé rend possible l'utilisation de sous-modèles hétérogènes, c'est-à-dire de sous-modèles de dimensions et de structures différentes. Cet aspect constitue un point intéressant dans une perspective d'identification. En effet, l'utilisation des sous-modèles hétérogènes introduit un degré de flexibilité dans la phase d'identification dans la mesure où la complexité de chaque sous-modèle peut s'adapter à la complexité du système dans chaque zone de fonctionnement. Il devient alors possible d'effectuer une décomposition non régulière de l'espace de fonctionnement. Cette caractéristique peut favoriser une description précise du comportement non linéaire du système avec un nombre relativement réduit de paramètres. La structure du multimodèle découplé peut alors être mise à profit, dans un contexte de modélisation de type boîte noire, afin de traiter le problème dit de *curse of dimensionality* dans lequel le nombre de paramètres du multimodèle nécessaire à l'obtention d'une représentation précise du système augmente très rapidement avec la dimension du système. Le multimodèle découplé possède donc une structure appropriée à la modélisation des systèmes complexes de nature non linéaire dont la structure peut varier dans l'espace de fonctionnement.

Dans ce chapitre, une procédure d'identification paramétrique hors ligne d'un multimodèle découplé a été mise en œuvre. Un algorithme itératif d'optimisation non linéaire de différents critères (local, global ou mixte) a permis d'estimer les paramètres des sous-modèles. Un phénomène de décrochage susceptible, dans certaines situations, de diminuer la qualité de l'approximation du multimodèle a été mis en évidence et une solution suggérée afin d'y remédier en grande partie. Différents exemples académiques d'identification ont permis d'illustrer les bonnes aptitudes du multimodèle découplé à capturer le comportement non linéaire d'un système.

Ce chapitre pose un certain nombre de bases et ouvre d'intéressantes perspectives dans le domaine de l'identification des systèmes non linéaires à l'aide d'un multimodèle découplé. Parmi les points pouvant constituer l'objet de travaux ultérieurs, on peut mentionner la recherche de la dimension du multimodèle, c'est-à-dire la détermination du nombre et de la dimension des sous-modèles, un problème loin d'être évident à résoudre. Un indice sur la dimension de chaque sous-

modèle peut toutefois être obtenu en réalisant d'abord une identification paramétrique basée sur un critère local. Ce critère permet en effet d'obtenir une solution analytique au problème posé par l'identification de chaque sous-modèle. L'introduction d'une fonction coût, par exemple le critère d'information dit d'Akaike qui tienne compte simultanément des performances du modèle et de sa complexité, peut servir à la détermination de la structure du multimodèle la plus parcimonieuse.

Il est également possible d'envisager une procédure d'optimisation des fonctions de pondération $\mu(.)$ afin d'obtenir un partitionnement optimal de l'espace de fonctionnement du système. Une extension des algorithmes dits à deux niveaux basculant entre l'estimation paramétrique des sous-modèles et l'estimation paramétrique des fonctions poids représente une voie qui mérite d'être explorée.

Enfin, l'étape fondamentale de validation du modèle doit être étudiée en profondeur afin de fournir au concepteur des indices sur la qualité et sur la complexité de la structure du modèle obtenu. Dans cette perspective de validation, il peut être particulièrement approprié d'étudier l'applicabilité des tests de corrélation des résidus introduits par Billings et Voon [1986].

3

Estimation d'état

Sommaire

3.1 Introduction 74
3.2 Rappel sur les structures des multimodèles 78
3.3 Stabilité des multimodèles 79
3.3.1 Stabilité du multimodèle de T.S. 79
3.3.2 Stabilité du multimodèle découplé 81
3.4 Estimation d'état basée sur un multimodèle découplé 82
3.4.1 Motivations et problématique 82
3.4.2 Synthèse de l'observateur 83
3.4.3 Amélioration des performances dynamiques de l'observateur 89
3.4.3.1 Discussion sur le placement des valeurs propres 95
3.4.3.2 Solution particulière pour le placement des valeurs propres 96
3.4.4 Réduction du conservatisme des conditions pour la synthèse de l'observateur à temps discret 98
3.5 Synthèse d'observateur avec un multimodèle découplé modifié 101
3.6 Observateur d'état pour un système comportant un retard sur la sortie . 104
3.6.1 Formulation du problème 106
3.6.2 Synthèse de l'observateur 107
3.7 Conclusion et contributions 112

3.1 Introduction

Les comportements dynamiques de nombreux systèmes physiques peuvent être décrits à l'aide d'un modèle mathématique qui fait intervenir un ensemble d'équations différentielles mettant en relation un nombre fini de variables internes, appelées également variables d'état. L'évolution temporelle du système est donc caractérisée par l'évolution de ses variables d'état qui dépend des signaux d'excitation appliqués et des conditions initiales.

Cette représentation d'état du système se prête particulièrement bien à la synthèse de nombreuses lois de commande (commande par retour d'état, par exemple). La mise en œuvre de ces techniques de commande requiert la connaissance de l'évolution de l'ensemble des variables d'état. Or, sur un plan pratique, les variables d'état ne correspondent pas toujours aux mesures du système soit parce qu'elles sont dépourvues de tout sens physique, soit parce que leur mesure directe est soumise à des contraintes d'ordre technique, technologique ou économique (instrumentation difficile du système, capteur indisponible ou très onéreux,...). Pour ces raisons, l'état complet du système peut être difficile voire tout simplement impossible à mesurer. La valeur d'une ou de plusieurs variable(s) d'état du système doit donc être en règle générale estimée ou reconstruite par le biais d'un *observateur* dit également *capteur logiciel*. L'estimation de l'état du système joue également un rôle central dans un contexte de surveillance et de diagnostic de systèmes. Elle sert en effet à générer des symptômes de défaillance du système établis à partir de la comparaison entre les signaux estimés et ceux mesurés. La reconstruction des variables d'état d'un système constitue donc un problème fondamental dans les sciences de l'ingénieur.

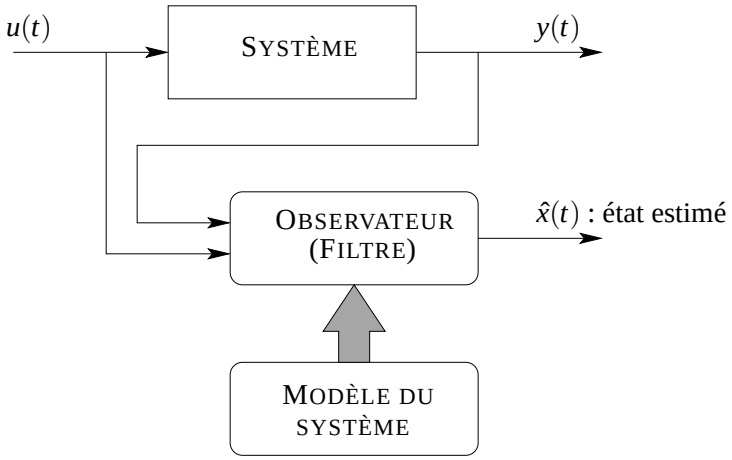

Figure 3.1 – Principe de l'estimation d'état

La reconstruction d'état se propose de fournir l'estimation des variables d'état à partir des grandeurs connues, c.-à-d. l'entrée et la sortie du système. Une solution au problème de l'estimation de l'état des systèmes, basée sur la connaissance d'un modèle mathématique LTI du système, a été apportée par Kalman [1960] et par Luenberger [1971] au cours des années soixante. L'estimation des différentes variables d'intérêt est accomplie grâce au filtre de Kalman dans le cas stochastique ou grâce à l'observateur de Luenberger, dit également observateur à gain proportionnel, dans le cas déterministe. Un observateur (ou filtre) est un système dynamique

qui fournit en sortie une estimation de l'état du processus à partir des entrées, des sorties et du modèle du système et ce, au moyen d'une correction proportionnelle à l'écart entre la sortie mesurée et celle estimée. Le gain de correction pour l'observateur de Luenberger est obtenu en imposant une vitesse de convergence de l'erreur d'estimation. Quant au filtre de Kalman, il exploite les propriétés statistiques du système et du bruit en vue d'obtenir le gain de correction optimal minimisant la variance de l'erreur d'estimation. La reconstruction d'état pour les systèmes caractérisés par un modèle LTI semble avoir atteint une certaine maturité et nombreux sont les algorithmes de synthèse disponibles.

Les systèmes physiques présentent cependant des comportements dynamiques complexes faisant intervenir des lois non linéaires. Ces comportements ne peuvent être représentés que très localement à l'aide d'un modèle LTI. Cette représentation locale permet de trouver, à l'appui des résultats proposés pour les modèles LTI, une solution satisfaisante au problème d'estimation d'état à condition toutefois que la plage de variation du système soit assez étroite. Ce cas de figure est couramment rencontré quand, par exemple, le système est inséré dans une boucle de régulation destinée à maintenir son fonctionnement autour d'un point de fonctionnement donné. Dans nombre de situations pratiques cependant, le système doit être exploité dans un domaine de fonctionnement plus large. Dans un contexte de diagnostic par exemple, il est conseillé de réaliser l'estimation d'état à partir d'un modèle capable de reproduire le comportement du système dans une large plage de fonctionnement et ce, afin de prendre en compte les changements dans les modes de fonctionnement du système. Dans ce cas de figure, le recours à des modèles de représentation non linéaire s'impose dans la mesure où les modèles LTI ne sont pas aptes à caractériser correctement le comportement global du système.

La reconstruction de l'état des systèmes représentés par un modèle non linéaire soulève un problème difficile à résoudre dans le cas général. En effet, à la différence des modèles LTI où une représentation unifiée peut être employée, les modèles non linéaires peuvent se présenter sous une multitude de structures faisant intervenir d'une façon différente les termes non linéaires. De plus, la notion d'observabilité (c.-à-d. la capacité à reconstruire l'état à partir des mesures) dans le cadre des modèles de représentation non linéaire ne renvoie pas à un concept global unique et dépend fortement du signal d'excitation appliqué au système. Par conséquent, il semble difficile d'établir une théorie générale en mesure de synthétiser un observateur basé sur un modèle non linéaire non spécifié.

Cependant, différentes approches, conduisant à une estimation d'état pour des classes spécifiques de modèles non linéaires, ont été proposées dans la littérature (le lecteur peut consulter le récent ouvrage de Besançon [2007] et le premier chapitre de la thèse de Cherrier [2006] pour un état de l'art sur l'estimation d'état des systèmes non linéaires). La plupart de ces approches sont des prolongements des concepts introduits par Kalman ou par Luenberger. Les plus classiques et les plus répandues sont sans aucun doute *le filtre de Kalman étendu* et *l'observateur de Luenberger étendu*. Dans le cadre de ces approches, l'estimation de l'état du système est réalisée à partir d'une linéarisation à chaque instant du modèle non linéaire le long des trajectoires estimées. Cette approche n'est valable que pour des modèles localement différentiables et la convergence de l'erreur d'estimation n'est garantie que localement (la convergence peut dépendre par exemple de l'état initial), la fonction non linéaire étant linéarisée autour de l'esti-

mation courante. D'autres *techniques dites par transformation* permettent d'obtenir un système linéaire auxiliaire, issu d'une transformation (changement de coordonnées) de l'état non linéaire du système. Il est ainsi possible, à l'aide des techniques classiques, de concevoir un observateur dans le nouveau repère du système. Une transformation inverse conduit ensuite à l'obtention d'un observateur non linéaire pour le système non linéaire de départ. Le principal inconvénient de cette approche est dû aux conditions restrictives d'existence d'une transformation appropriée. Les *observateurs à grand gain* sont applicables aux systèmes qui ne peuvent pas être linéarisés par un changement de coordonnées, à condition toutefois que le système soit globalement lipschitzien. Ces observateurs présentent une structure proche de celle de l'observateur de Luenberger. Comme l'indique très bien son nom, cet observateur utilise un grand gain qui augmente conformément aux *constantes de Lipschitz* du système. Ce gain permet de compenser les effets de la partie non linéaire du système sur l'erreur d'estimation. La littérature offre diverses techniques de synthèse de l'observateur à grand gain (voir [Gauthier et al., 1992; Raghavan et Hedrick, 1994; Rajamani, 1998]). Les *observateurs à gain adaptatif* proposés par Busvelle et Gauthier [2005], en combinant l'observateur de type grand gain [Gauthier et al., 1992] au filtre de Kalman étendu, permettent de tirer profit des avantages propres à chaque structure. Ce type d'observateur présente un comportement initial de type grand gain dont la convergence globale est prouvée ainsi qu'un comportement asymptotique proche de celui du filtre de Kalman étendu doté de remarquables propriétés de robustesse. Plus récemment, des méthodes dites algébriques appliquées à l'estimation d'état rapide en boucle fermée ont livré dans cette direction des résultats encourageants [Fliess et al., 2008].

L'ensemble de ces méthodes nécessitent la connaissance précise, sur toute la plage de fonctionnement, d'un modèle mathématique non linéaire du système. Or, l'obtention d'un tel modèle est loin d'être aisée en raison notamment de la nature complexe des systèmes non linéaires. Il faut bien souvent faire appel à des techniques d'identification de type boîte noire pour représenter mathématiquement les comportements dynamiques du système. Le choix de la structure interne du modèle constitue la clef de voûte de ces techniques d'identification. En effet, la structure du modèle doit, d'une part, être assez générale de façon à prendre en compte un nombre varié de situations de modélisation et doit, d'autre part, se révéler apte à favoriser une exploitation ultérieure. Les multimodèles permettent de parvenir à un excellent compromis entre ces deux aspects.

Dans ce contexte de modélisation, les sous-modèles peuvent être agrégés de multiples façons, donnant toutes lieu à différentes classes de multimodèles [Filev, 1991]. Deux grandes familles de multimodèles sont recensées selon que les sous-modèles sont *homogènes*, c'est-à-dire qu'ils partagent le même espace d'état (*multimodèle de Takagi-Sugeno*) ou *hétérogènes*, c'est-à-dire que leur structure et leur espace d'état diffèrent (*multimodèle découplé*).

La structure du multimodèle de Takagi-Sugeno a été initialement proposée, dans un contexte de modélisation floue, par Takagi et Sugeno [1985] dans les années 80 et a été depuis largement popularisée, dans un contexte multimodèle, par les travaux de Johansen et Foss [1993]. L'étude de la stabilité et de la stabilisation (étroitement liée à l'estimation d'état) des multimodèles de Takagi-Sugeno a fait l'objet de nombreux travaux de recherche (voir [Tanaka et Sugeno, 1990; Blanco et al., 2001; Chadli, 2002; Guerra et al., 2006] et leur bibliographie). Ces travaux s'ins-

crivent principalement dans le cadre de la recherche d'une loi de commande stabilisante qui doit disposer de tout le vecteur d'état (pas toujours accessible). C'est ce besoin en particulier qui est à l'origine de l'étude de la reconstruction d'état, aujourd'hui largement développée. L'estimation d'état du multimodèle s'effectue en général par le biais d'un *multiobservateur* de type proportionnel (extension de l'observateur proportionnel des systèmes linéaires aux multimodèles). Cependant, d'autres types de multiobservateurs ont également été développés (par exemple, à entrées inconnues [Akhenak, 2004; Rodrigues, 2005] et à modes glissants [Palm et Bergstern, 2000]). Dans la perspective d'une stratégie de surveillance des systèmes représentés par un multimodèle de Takagi-Sugeno, il a été fait appel aux multiobservateurs en vue de générer des signaux indicateurs de défauts [Lopez-Toribio et al., 2000; Akhenak, 2004; Rodrigues, 2005].

Soulignons que d'un point de vue structurel, tous les sous-modèles de ce multimodèle ont la même dimension car un seul vecteur d'état apparaît dans les équations du multimodèle. La complexité des sous-modèles est par conséquent invariable quelle que soit la complexité du fonctionnement à décrire. Le multimodèle ainsi obtenu peut être alors sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée.

La structure du multimodèle découplé [Filev, 1991] introduit une certaine flexibilité dans l'étape de modélisation dans la mesure où la dimension des sous-modèles (leur nombre d'états) peut être adaptée à la complexité du système dans chaque zone de fonctionnement. Ce multimodèle s'adapte donc particulièrement bien à la modélisation des systèmes complexes présentant des non-linéarités et des changements de structure engendrés par leur mode de fonctionnement. Il a déjà été exploité dans le cadre de l'identification (cf. chapitre 2) et/ou de la commande de systèmes non linéaires [Gawthrop, 1995; Gatzke et Doyle III, 1999; Gregorcic et Lightbody, 2000; Gregorcic, 2004]. Dans un contexte de surveillance, Kanev et Verhaegen [2006] se sont intéressés à la détection du changement de régime de fonctionnement du système. Dans cette approche, chaque sous-modèle sert à représenter un mode défaillant du système. La surveillance consiste à déterminer le mode actif du système.

Les possibilités offertes par le multimodèle découplé pour reconstruire l'état d'un système semblent peu exploitées au regard des travaux actuellement publiés. Les récents articles d'Uppal et al. [2003]; Uppal et Patton [2005]; Uppal et al. [2006] sont, à notre connaissance, les seules références relatives à l'estimation d'état dans un contexte de surveillance. Dans ce chapitre, notre attention se portera donc sur l'estimation d'état de systèmes représentés par un multimodèle découplé. Le chapitre comprend cinq sections. Après un bref rappel des structures du multimodèle de Takagi-Sugeno et du multimodèle découplé, l'analyse de leur stabilité est réalisée au cours de la deuxième section. La troisième section, dédiée à l'estimation d'état proprement dite, propose une extension de l'observateur à gain proportionnel classiquement utilisé pour la reconstruction d'état. La convergence de l'erreur d'estimation d'état est analysée à l'aide de la méthode de Lyapunov. Le gain de l'observateur est obtenu par la résolution d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Cette section expose également un moyen d'introduire, au cours de la synthèse de l'observateur, des spécifications temporelles de la dynamique de l'erreur d'estimation. La structure du multimodèle découplé modifié, considérée lors de la synthèse de

l'observateur, permet d'établir dans la quatrième section un lien entre la synthèse des observateurs et le phénomène de décrochage (c.f. section 2.5.6). Enfin, le recours de plus en plus fréquent aux calculateurs délocalisés du système et la transmission des données par réseaux informatiques à l'origine d'inévitables délais d'attente font des systèmes à retard une thématique de recherche d'actualité qui mérite d'être brièvement abordée dans la dernière section du présent chapitre.

3.2 Rappel sur les structures des multimodèles

Dans le cadre de la représentation multimodèle, le comportement dynamique d'un système est appréhendé au moyen d'un ensemble de sous-modèles agrégés par un mécanisme d'interpolation.

On rappelle ci-dessous les expressions mathématiques des structures du multimodèle de Takagi-Sugeno et du multimodèle découplé. Pour ce faire, on introduit l'opérateur δ qui permet d'obtenir une notation unifiée des multimodèles à temps continu et à temps discret.

Définition 3.1 (Opérateur δ)**.** *L'opérateur δ dénote la dérivée par rapport au temps pour les systèmes à temps continu, soit $\delta(x(t)) = \dot{x}(t), t \in \mathbb{R}_+$ et l'opérateur d'avancement pour les systèmes à temps discret, soit $\delta(x(t)) = x(t+1), t \in \mathbb{N}$.*

- La représentation dans l'espace d'état du multimodèle de Takagi-Sugeno (T.S.) est donnée par :

$$\delta(x(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) + \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) B_i u(t) \ , \tag{3.1a}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \ , \tag{3.1b}$$

  où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du multimodèle, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie du multimodèle. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont constantes et supposées connues.

- La représentation d'état du multimodèle découplé est donnée par :

$$\delta(x_i(t)) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \ , \tag{3.2a}$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \ , \tag{3.2b}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) \ , \tag{3.2c}$$

  où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, où $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie du multimodèle. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i\times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p\times n_i}$ sont constantes et supposées connues. Par la suite, MDC et MDD désigneront respectivement le multimodèle découplé à temps continu et le multimodèle découplé à temps discret.

Dans les deux cas, $\xi(t)$ est une variable caractéristique du système, appelée également variable de décision, accessible par mesure en temps réel. Elle peut, par exemple, correspondre aux variables d'état mesurables ou aux signaux d'entrée ou de sortie. La variable de décision sert à indexer les fonctions de pondération $\mu_i(\xi(t))$ qui définissent les différentes zones de fonctionnement et assurent la transition entre les sous-modèles. Les zones de fonctionnement ne sont pas *a priori* disjointes et sont par conséquent susceptibles de présenter des recouvrements. Les fonctions de pondération admettent de ce fait des valeurs intermédiaires dans l'intervalle 0 et 1. Elles respectent de plus les propriétés de somme convexe suivantes :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \qquad \forall i = 1, \cdots, L, \ \ \forall t \ . \tag{3.3}$$

Dans un souci de simplicité, on omettra dorénavant de faire apparaître la dépendance de la variable de décision dans les fonctions de pondération. On notera simplement $\mu(t)$ au lieu de $\mu(\xi(t))$.

3.3 Stabilité des multimodèles

L'étude de la stabilité revêt une importance fondamentale lors de l'analyse des systèmes non linéaires représentés par un multimodèle. Elle ne peut pas être *a priori* menée de la même façon que dans le cadre des systèmes représentés par un modèle linéaire à temps invariant LTI, la prise en considération du mélange (la combinaison) entre les différents sous-modèles s'avérant capitale.

La méthode de Lyapunov [Liapounoff, 1907] permet de conclure sur la stabilité du multimodèle sans avoir à résoudre explicitement les équations d'état le long de ses trajectoires. Cette méthode est la formalisation mathématique d'un constat fondamental en physique, à savoir que si l'énergie totale d'un système de nature linéaire ou non est dissipée de façon continue alors le système devra au final atteindre un point d'équilibre. La méthode de Lyapunov offre la possibilité, par extension du concept de dissipation d'énergie, d'examiner la stabilité d'un système linéaire ou non par l'analyse de la décroissance d'une fonction scalaire et ce, sans passer par une solution explicite des équations du système (c.f. annexe B).

Ce paragraphe a pour objet l'étude de la stabilité du multimodèle découplé. Un rappel succinct des conditions les plus élémentaires en mesure de garantir la stabilité du multimodèle de T.S. est proposé. Puis sont établies les conditions assurant la stabilité du multimodèle découplé.

3.3.1 Stabilité du multimodèle de T.S.

La stabilité d'un multimodèle de T.S. est assurée si les conditions, sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires [Boyd et al., 1994], des théorèmes suivants sont satisfaites [Tanaka et al., 1998].

Théorème 3.1 (Stabilité du multimodèle de T.S. à temps continu)**.** *Le multimodèle de T.S.* (3.1) *à temps continu est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive P telle que les LMI suivantes soient vérifiées :*

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad , \qquad i = 1, \cdots, L \quad . \tag{3.4}$$

Théorème 3.2 (Stabilité du multimodèle de T.S. à temps discret)**.** *Le multimodèle de T.S.* (3.1) *à temps discret est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive P telle que les LMI suivantes soient vérifiées :*

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad , \qquad i = 1, \cdots, L \quad . \tag{3.5}$$

Ces théorèmes sont obtenus grâce à la seconde méthode de Lyapunov sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique de la forme $V(t) = x^T(t)Px(t)$. D'après ces théorèmes, la stabilité du multimodèle est liée, d'une part, à la stabilité de tous les sous-modèles et, d'autre part, à l'existence d'une matrice de Lyapunov P commune à tous les sous-modèles. Remarquons que la première condition n'implique en aucun cas la seconde. La recherche analytique de la matrice P satisfaisant ces conditions soulève un problème dont la résolution s'avère difficile et ce, même dans les cas à faible dimension. Il existe toutefois des algorithmes d'optimisation convexe efficaces en mesure de résoudre numériquement ce type de problème [Boyd et al., 1994].

Il convient cependant de souligner que les conditions des théorèmes 3.1 et 3.2 ne sont que suffisantes. Une recherche infructueuse de la matrice P n'implique pas l'instabilité du multimodèle. En effet, de nombreux exemples montrent qu'un multimodèle de T.S. peut être stable alors qu'il comporte des sous-modèles instables et vice versa. La stabilité du multimodèle est alors établie à la condition de trouver une solution aux LMI. Dans le cas contraire, aucune conclusion ne peut être avancée. Par ailleurs, la recherche d'une matrice P commune à tous les sous-modèles constitue une source inévitable de conservatisme des solutions. Autrement dit, le multimodèle possède un comportement stable mais aucune solution permettant de conclure sur sa stabilité n'est trouvée. De nouvelles fonctions de Lyapunov, ayant pour objet la réduction de ces sources de conservatisme, ont ainsi été proposées dans la littérature (c.f. [Morère, 2001; Chadli, 2002; Tanaka et al., 2003]). Une approche récente, visant à obtenir des conditions moins conservatives, considère une décroissance non uniforme de la fonction de Lyapunov [Kruszewski, 2006].

3.3.2 Stabilité du multimodèle découplé

Ce paragraphe a pour propos l'étude de la stabilité du multimodèle découplé. L'introduction d'un vecteur d'état augmenté de la forme :

$$x(t) \quad = \quad \left[x_1^T(t)\cdots x_i^T(t)\cdots x_L^T(t)\right]^T \in \mathbb{R}^n, \quad n=\sum_{i=1}^{L} n_i \tag{3.6}$$

permet de réécrire les relations (3.2) décrivant le multimodèle découplé sous une forme plus compacte :

$$\delta(x(t)) \quad = \quad \tilde{A}x(t)+\tilde{B}u(t) \ , \tag{3.7a}$$
$$y(t) \quad = \quad \tilde{C}(t)x(t) \ , \tag{3.7b}$$

où les matrices partitionnées par blocs $\tilde{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ et $\tilde{C}\in\mathbb{R}^{p\times n}$ sont définies par :

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \ \tilde{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \ \tilde{C}(t)=\begin{bmatrix} \mu_1(t)C_1^T \\ \vdots \\ \mu_i(t)C_i^T \\ \vdots \\ \mu_L(t)C_L^T \end{bmatrix}^T \ . \tag{3.8}$$

Les conditions assurant la stabilité du multimodèle (3.7) peuvent aisément être obtenues à partir de l'étude des valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$. En effet, d'après (3.8) la matrice $\tilde{A}$ est une matrice bloc diagonale à paramètres constants. Par conséquent, toutes ses valeurs propres se situent dans le demi-plan gauche du plan complexe (ou à l'intérieur du cercle unité dans le cas discret) si et seulement si toutes les valeurs propres de toutes les matrices A_i sont dans le demi-plan gauche du plan complexe (ou à l'intérieur du cercle unité dans le cas discret). Les théorèmes suivants livrent les conditions nécessaires et suffisantes à la vérification de la stabilité du multimodèle découplé.

Théorème 3.3 (Stabilité du MDC)**.** *Le multimodèle découplé* (3.2) *à temps continu est stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$ se situent dans le demi-plan gauche du plan complexe, c.-à-d. s'il existe une matrice $P=P^T>0$ telle que :*

$$\tilde{A}^TP+P\tilde{A}<0 \ , \qquad i=1,\cdots,L \ . \tag{3.9}$$

Théorème 3.4 (Stabilité du MDD)**.** *Le multimodèle découplé* (3.2) *à temps discret est stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$ se situent à l'intérieur du cercle unité, c.-à-d. s'il existe une matrice $P=P^T>0$ telle que :*

$$\tilde{A}^TP\tilde{A}+P<0 \ , \qquad i=1,\cdots,L \ . \tag{3.10}$$

Remarque 3.1. *La condition proposée dans le théorème 3.3 est vérifiée s'il existe des matrices* $P_i = P_i^T > 0$ *telles que :*

$$A_i^T P_i + P_i A_i < 0 \quad , \qquad i = 1, \cdots, L \quad . \tag{3.11}$$

La condition proposée dans le théorème 3.4 est vérifiée s'il existe des matrices $P_i = P_i^T > 0$ *telles que :*

$$A_i^T P_i A_i + P_i < 0 \quad , \qquad i = 1, \cdots, L \quad . \tag{3.12}$$

En conclusion, le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables. Dans quelques cas triviaux, le multimodèle découplé présente une sortie stable (stabilité externe) alors que les sous-modèles sont instables (instabilité interne). La sortie du multimodèle peut être stable, par exemple :

- quand les sous-modèles instables ne sont jamais mis à contribution,
- quand la contribution de plusieurs sous-modèles instables est compensée par addition de leur effet.

La stabilité du multimodèle découplé peut être établie sans avoir à faire appel à un quelconque algorithme d'optimisation, les outils disponibles pour les systèmes linéaires pouvant être directement employés. En contrepartie, seul le recours à des sous-modèles stables garantit la stabilité du multimodèle découplé.

3.4 Estimation d'état basée sur un multimodèle découplé

Cette section aborde la conception d'un observateur d'état pour un système représenté par un multimodèle découplé. Il est supposé en effet qu'un multimodèle découplé, décrivant avec exactitude le comportement dynamique d'un système non linéaire dans une plage de fonctionnement donnée, est disponible. Les paramètres du multimodèle peuvent être estimés, à partir des données d'entrée/sortie du système, au moyen d'une approche de type boîte noire et de techniques d'identification appropriées (cf. chapitre 2).

3.4.1 Motivations et problématique

Dans ses récents travaux, Uppal [Uppal et al., 2003; Uppal et Patton, 2005; Uppal et al., 2006] ébauche les premiers éléments d'une analyse de la convergence de l'erreur d'estimation de la sortie du multimodèle découplé. L'idée consiste à supposer que la sortie estimée $\hat{y}(t)$ par l'observateur approche dans un certain voisinage ε la sortie $y(t)$ du processus, soit :

$$\lim_{t \to \infty} |y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon \quad , \quad \varepsilon < \infty \quad . \tag{3.13}$$

Il est également supposé qu'un observateur, associé à chaque sous-modèle, fournit une estimation $\hat{y}^i(t)$ de la sortie $y_m^i(t)$ de chaque sous-modèle dans un voisinage ε_i, c'est-à-dire que

$$\left.\begin{array}{ccc} \lim\limits_{t \to \infty} \left|y_m^1(t) - \hat{y}^1(t)\right| < \varepsilon_1 \ , & \varepsilon_1 < \infty \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ \lim\limits_{t \to \infty} \left|y_m^L(t) - \hat{y}^L(t)\right| < \varepsilon_L \ , & \varepsilon_L < \infty \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

sachant que la sortie estimée s'écrit $\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\hat{y}^i(t)$, alors

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \left| y_m^i(t) - \hat{y}^i(t) \right| < \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\varepsilon_i \ , \quad \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\varepsilon_i < \infty \ , \tag{3.15}$$

soit encore

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \left| y_m^i(t) - \hat{y}^i(t) \right| < \varepsilon \ , \quad \varepsilon < \infty \text{ avec } \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\varepsilon_i \ . \tag{3.16}$$

Ainsi, si la sortie du multimodèle découplé $y_m(t)$ caractérise correctement la sortie du système $y(t)$, on peut s'attendre à ce que la sortie $\hat{y}(t)$ estimée par l'observateur approche dans un voisinage ε la sortie du système $y(t)$.

Cette démarche bien qu'intellectuellement valable n'en demeure pas moins très intuitive. De plus, elle présente encore bien des points obscurs non éclaircis par les auteurs et susceptibles d'être approfondis. D'après Uppal en effet, un observateur associé à chaque sous-modèle permet d'obtenir une estimation de la sortie du système. La conception de ces observateurs est opérée individuellement, compte tenu du découplage des sous-modèles, de façon à réduire la complexité de la procédure de synthèse. Cette démarche pose néanmoins deux questions essentielles, à savoir :

- La synthèse individuelle des observateurs peut-elle garantir d'une façon générale la convergence globale vers zéro de l'erreur d'estimation ?
- Comment garantir rigoureusement la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation ?

Ce chapitre se propose d'apporter des éléments de réponse à ces interrogations.

3.4.2 Synthèse de l'observateur

L'estimation de l'évolution des variables d'état du système est réalisée à l'aide d'un observateur. L'observateur proposé dans cette section s'inspire de l'observateur à gain proportionnel classiquement utilisé dans le cadre des systèmes linéaires. Il reconstruit l'état du système à partir des entrées, des sorties et du multimodèle du système. L'estimation d'état est corrigée par une action proportionnelle à l'écart entre la sortie mesurée et celle estimée par l'observateur.

L'observateur proposé se présente sous la forme suivante :

$$\delta(\hat{x}_i(t)) = A_i\hat{x}_i(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t)) \ , \tag{3.17a}$$

$$\hat{y}_i(t) = C_i\hat{x}_i(t) \ , \tag{3.17b}$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\hat{y}_i(t) \ , \tag{3.17c}$$

où $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ est l'estimation du vecteur d'état du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $y(t)$ la sortie mesurée sur le système, $\hat{y}(t)$ la sortie reconstruite par l'observateur et $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$ le gain du $i^{\text{ème}}$ observateur à

déterminer. Il est supposé ici que le comportement dynamique du système est décrit avec exactitude par un un multimodèle découplé dont les paramètres sont connus.

Remarquons par ailleurs que les sorties $y_i(t)$ des sous-modèles ne sont pas mesurables et ne peuvent en aucun cas être exploitées pour piloter un observateur. Elles doivent être considérées comme des "signaux artificiels de modélisation" utilisés seulement dans le but de décrire le comportement non linéaire du système. La structure de l'observateur est présentée sur la figure 3.2.

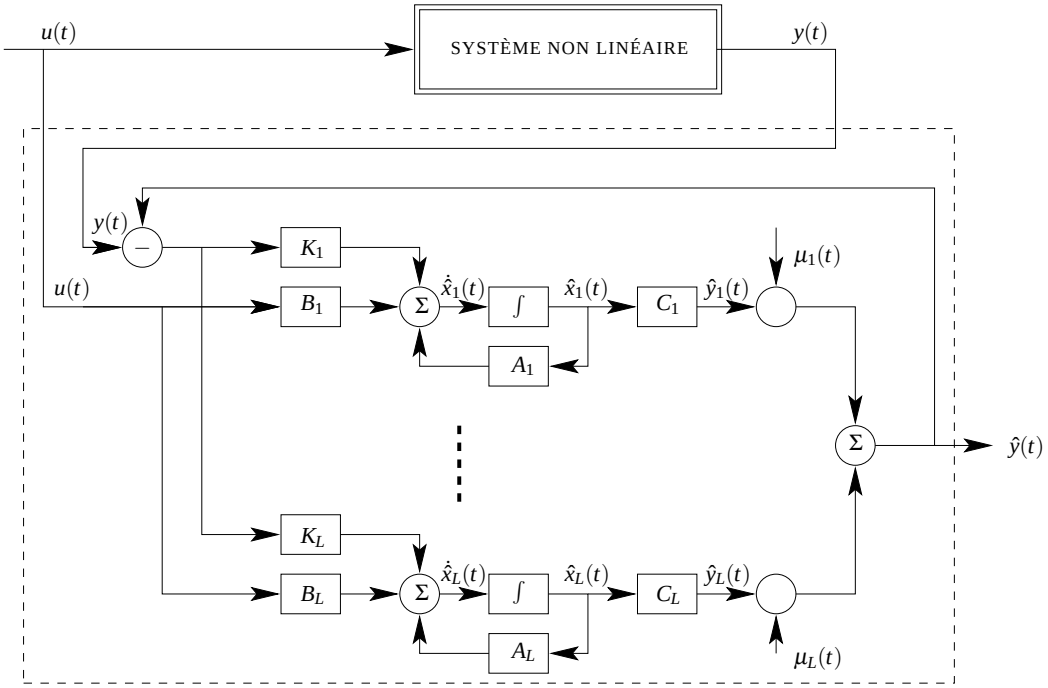

Figure 3.2 – Structure de l'observateur à gain proportionnel à temps continu

Les équations (3.17) de l'observateur peuvent s'écrire sous une forme plus condensée en introduisant les matrices augmentées $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}(t)$ du multimodèle définies par (3.8) :

$$\delta(\hat{x}(t)) = A_{obs}(t)\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}y(t) \ , \tag{3.18a}$$

$$\hat{y}(t) = \tilde{C}(t)\hat{x}(t) \ , \tag{3.18b}$$

avec

$$A_{obs}(t) = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t) \tag{3.19}$$

et

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1^T & \cdots & K_i^T & \cdots & K_L^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}, \ n = \sum_{i=1}^{L} n_i \ . \tag{3.20}$$

Le problème lié à la synthèse de l'observateur se pose alors dans les termes suivants :

> *il s'agit d'ajuster les gains K_i des observateurs de telle sorte que l'erreur d'estimation d'état donnée par*

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.21}$$

tende vers zéro pour une combinaison arbitraire des sorties des sous-modèles et ce, quel que soit l'état initial du système et de l'observateur $(x(0)$ *et* $\hat{x}(0))$.

Remarque 3.2. *Le lecteur peut remarquer que la matrice à paramètres variables dans le temps* $\tilde{C}(t)$ *admet, compte tenu des propriétés* (3.3) *des fonctions de pondération, la réécriture suivante :*

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\tilde{C}_i \ , \tag{3.22}$$

où chaque $\tilde{C}_i$ *est une matrice bloc à paramètres constants de la forme :*

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ , \tag{3.23}$$

c.-à-d. que tous ses blocs sont nuls excepté le $i^{ème}$ *bloc qui est égal à* C_i.

Remarque 3.3. *Il est alors possible, à l'appui de la remarque précédente et des propriétés* (3.3) *des fonctions de pondération, de mettre la matrice* $A_{obs}(t)$ *sous la forme suivante :*

$$A_{obs}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\phi_i \ , \tag{3.24}$$

$$\phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \ . \tag{3.25}$$

Il est possible, en appliquant l'opérateur $\delta(.)$ à l'équation (3.21) puis en utilisant les formes augmentées (3.7) du multimodèle et (3.18) de l'observateur, d'expliciter la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.21) par :

$$\delta(e(t)) = A_{obs}(t)e(t) \ . \tag{3.26}$$

La convergence de l'état estimé vers $x(t)$ est assurée si le système (3.26) générateur de l'erreur d'estimation est stable. Or garantir cette stabilité n'est pas chose aisée compte tenu du fait que la matrice $A_{obs}(t)$ est à paramètres variables au cours du temps.

Exemple 3.1 (Exemple introductif et problématique)
Considérons un multimodèle et un observateur comportant deux sous-modèles stables. La matrice $A_{obs}(t)$ *s'écrit :*

$$A_{obs}(t) = \begin{bmatrix} A_1 - \mu_1(t)K_1C_1 & \mu_2(t)K_1C_2 \\ \mu_1(t)K_2C_1 & A_2 - \mu_2(t)K_2C_2 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

ou encore

$$A_{obs}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(t)\phi_i = \mu_1(t) \begin{bmatrix} A_1 - K_1C_1 & 0 \\ K_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} + \mu_2(t) \begin{bmatrix} A_1 & K_1C_2 \\ 0 & A_2 - K_2C_2 \end{bmatrix} \ . \tag{3.28}$$

La synthèse individuelle de chaque observateur assure que les éléments diagonaux de la matrice (3.27) *sont stables. Cependant, rien ne garantit la stabilité du système* (3.26) *pour un mélange arbitraire entre les matrices* ϕ_i *dans* (3.28)*. En effet, la combinaison convexe des matrices* ϕ_i*, due au mélange des sorties des sous-modèles, peut conduire à un comportement instable du système* (3.26) *alors que les matrices* ϕ_i *présentent un comportement stable. Cette problématique est couramment rencontrée dans l'approche multimodèle (en général dans une approche LPV) et illustre clairement l'une des principales difficultés soulevée par cette approche.*
La réponse à la question : la somme convexe d'un ensemble de matrices stables donne-t-elle toujours lieu à une matrice stable ? est NON [Liberzon et Morse, 1999; Davrazos et Koussoulas, 2001].

Cet exemple met clairement en évidence que, compte tenu des formes augmentées (3.7) du multimodèle et (3.18) de l'observateur, la synthèse individuelle des observateurs ne peut pas garantir la convergence de l'erreur d'estimation dans le cas général. La synthèse de l'observateur doit donc s'opérer à travers la prise en compte du mélange entre les sorties des sous-modèles.
Toutefois, la recherche d'une solution explicite à l'équation (3.26) régissant la dynamique de l'erreur d'estimation s'avère difficile compte tenu des variations temporelles de la matrice $A_{obs}(t)$. Afin de surmonter ces difficultés, notre analyse est réalisée dans le domaine temporel à l'aide de la seconde méthode de Lyapunov qui rend possible l'étude de la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation et de la convergence exponentielle également appelée $\alpha-$stabilité de l'observateur. Cette dernière notion permet de quantifier et de garantir une certaine vitesse de convergence de l'erreur d'estimation et d'imposer ainsi des performances dynamiques à l'observateur. La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est alors une notion plus exigeante qui englobe la convergence asymptotique. Ces raisons motivent l'étude de la convergence exponentielle.

D'après la théorie de Lyapunov, la stabilité exponentielle est garantie s'il existe une fonction candidate de Lyapunov $V(t) > 0$ telle que

$$\exists\, \alpha > 0 : \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0 \tag{3.29}$$

dans le cas continu et

$$\exists\, \alpha > 0 : \Delta V(t) + 2\alpha V(t) < 0 \tag{3.30}$$

dans le cas discret où $\Delta V(t) = V(t+1) - V(t)$. Dans les deux cas, α est le *taux de décroissance* qui sert à quantifier la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation.

Pour obtenir des conditions garantissant la convergence de l'erreur d'estimation (3.21) vers zéro, la fonction de Lyapunov quadratique suivante est considérée :

$$V(t) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T \ . \tag{3.31}$$

Analysons la convergence de l'erreur d'estimation pour l'observateur à temps continu (l'analyse pour l'observateur à temps discret s'effectue de façon similaire). Remarquons que la solution de (3.29) est donnée par :

$$V(t) \leq V(0) \exp(-2\alpha t), \ \ \forall t \geq 0 \ , \tag{3.32}$$

ce qui assure une décroissance exponentielle de la fonction de Lyapunov. Compte tenu de $\lambda_{min}(P)\|e(t)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{max}(P)\|e(t)\|^2$ alors l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro, selon la formule

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\| \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \exp(-\alpha t) \quad \forall t \geq 0 \ . \tag{3.33}$$

L'erreur d'estimation est ainsi comprise dans une enveloppe décroissant comme une exponentielle. Des conditions satisfaisant l'inégalité (3.29) doivent ainsi être obtenues afin de garantir la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation. Considérons d'abord la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov (3.31) donnée par :

$$\dot{V}(t) \quad = \quad \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \tag{3.34}$$

qui devient par l'introduction de l'équation (3.26) régissant la dynamique de l'erreur d'estimation :

$$\dot{V}(t) = e^T(t)\left(A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t)\right)e(t) \ . \tag{3.35}$$

En utilisant la fonction de Lyapunov (3.31) et sa dérivée donnée par (3.35), l'inégalité (3.29) assurant la convergence exponentielle devient :

$$e^T(t)\left\{A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) + 2\alpha P\right\}e(t) < 0 \tag{3.36}$$

qui est une forme quadratique en $e(t)$. La négativité de cette inégalité est également satisfaite par :

$$A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) + 2\alpha P < 0 \tag{3.37}$$

qui s'écrit en utilisant la définition (3.24) de $A_{obs}(t)$:

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\phi_i^T P + P\sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\phi_i + 2\alpha P < 0 \ . \tag{3.38}$$

Compte tenu des propriétés (3.3) des fonctions de pondération, l'inégalité (3.38) est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\phi_i^T P + P\sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\phi_i + \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)2\alpha P < 0 \tag{3.39}$$

qui est également satisfaite par l'inégalité suivante :

$$\phi_i^T P + P\phi_i + 2\alpha P < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{3.40}$$

soit finalement en remplaçant ϕ_i par sa définition (3.25) :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - (\tilde{K}\tilde{C}_i)^T P - P\tilde{K}\tilde{C}_i + 2\alpha P < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ . \tag{3.41}$$

Il convient de souligner que l'inégalité précédente est non linéaire par rapport aux variables $\tilde{K}$, P et α. Il n'est donc pas possible de calculer une solution en faisant directement appel aux méthodes classiques de résolution des LMI. Cependant, en posant $G = P\tilde{K}$ et pour une valeur de α donnée, l'inégalité matricielle (3.41) s'écrit :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i + 2\alpha P < 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \tag{3.42}$$

qui est bien une LMI en P et G. Il est possible enfin, en regroupant les termes en P apparaissant dans (3.42), d'énoncer le théorème suivant dont les *conditions suffisantes* assurent la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation.

Théorème 3.5 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps continu* (3.7) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.18)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMI suivantes :*

$$(\tilde{A} + \alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}} \mathrm{P} + \mathrm{P}(\tilde{\mathrm{A}} + \alpha \mathrm{I}) - (\mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}})^{\mathrm{T}} - \mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}} < 0 \quad , \qquad \mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{L} \quad , \tag{3.43}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ *pour un taux de décroissance* $\alpha > 0$ *donné. Le gain de l'observateur est donné par* $\tilde{K} = P^{-1}G$.

L'analyse de la convergence de l'erreur d'estimation pour l'observateur à temps discret peut être menée en suivant une démarche similaire à celle venant d'être présentée et ce, afin de satisfaire l'inégalité (3.30). Le théorème suivant propose des *conditions suffisantes* assurant la convergence de l'erreur d'estimation dans le cas discret.

Théorème 3.6 (MDD)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps discret* (3.7) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.18)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} (1-2\alpha)P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0 \quad , \qquad i = 1, \cdots, L \quad , \tag{3.44}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ *pour un taux de décroissance* $0 < \alpha < 0.5$ *donné. Le gain de l'observateur est donné par* $\tilde{K} = P^{-1}G$.

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation fait l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 3.1 (Convergence asymptotique)**.** *La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est obtenue en considérant un taux de décroissance nul* ($\alpha = 0$) *dans les théorèmes 3.5 et 3.6, c'est-à-dire en assurant simplement* $\dot{V}(t) < 0$ *ou* $\Delta V(t) < 0$ *selon le cas considéré.*

Remarque 3.4. *Une solution satisfaisant les conditions LMI des théorèmes 3.5 et 3.6 peut par exemple être obtenue au moyen d'algorithmes d'optimisation convexe sous contraintes. Pour y*

parvenir, nous nous servirons de l'interface de prototypage rapide YALMIP [2] *[Löfberg, 2004] couplée au solver SeDuMi (Self-Dual-Minimisation package)* [3] *[Sturm, 1999].*

3.4.3 Amélioration des performances dynamiques de l'observateur

Le calcul du gain de l'observateur à l'aide des théorèmes 3.5 ou 3.6 assure une convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'estimation. Il peut être cependant conseillé d'introduire, lors de la conception de l'observateur, d'autres performances dynamiques de l'erreur de reconstruction d'état, par exemple un degré d'amortissement ou de dépassement, une rapidité du transitoire, une vitesse de convergence, etc.

Ces spécifications temporelles sont étroitement liées au positionnement dans le plan complexe des valeurs propres [4] de la matrice $A_{obs}(t)$ régissant la dynamique de l'erreur d'estimation. Pour les systèmes linéaires à temps invariant, ces caractéristiques temporelles peuvent être obtenues en faisant appel aux techniques de placement de pôles. Ces techniques s'avèrent en revanche inadaptées dans notre situation. En effet, la matrice $A_{obs}(t)$ est variable dans le temps en fonction du mélange entre les sorties des sous-modèles. Il est ainsi nécessaire d'introduire des spécifications temporelles lors de la conception de l'observateur dans un formalisme LMI adapté au nôtre.

Une approche générale permettant de caractériser l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région déterminée du plan complexe en termes de LMI est proposée par [Chilali, 1996; Chilali et al., 1999]. Ce formalisme peut être considéré comme une généralisation de l'inégalité de Lyapunov,

$$\exists P = P^T > 0 : \quad PA + A^T P < 0 \tag{3.45}$$

classiquement utilisée pour tester la stabilité d'un système LTI à temps continu, à une multitude de régions convexes. La stabilité d'un système LTI à temps continu est effectivement garantie si les valeurs propres de la matrice d'état A du système se situent dans le demi-plan ouvert de gauche du plan complexe. L'inégalité matricielle (3.45) permet alors de tester l'appartenance des valeurs propres de la matrice A à cette région spécifique du plan complexe. La généralisation du placement des valeurs propres d'une matrice à d'autres régions du plan complexe est effectuée en introduisant la notion de $\mathcal{D}$*-stabilité* d'une matrice.

Définition 3.2 (Région LMI)**.** *Un sous-ensemble $\mathcal{D}$ du plan complexe est une région LMI s'il existe des matrices symétriques et définies positives $\alpha \in \mathbb{R}^{p\times p}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{p\times p}$ telles que*

$$\mathcal{D} \quad = \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \quad | \quad \alpha + z\beta + \overline{z}\beta^T < 0 \right\} \quad , \tag{3.46}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

[2] Disponible sur *http ://control.ee.ethz.ch/ joloef/yalmip.php*

[3] Disponible sur *http ://sedumi.mcmaster.ca/*

[4] Par abus de langage, on parlera des valeurs propres d'une matrice à paramètres variables dans le temps pour se référer aux valeurs propres de cette matrice évaluées à chaque instant pour toutes les trajectoires admissibles des paramètres.

Une région LMI est une région du plan complexe caractérisée par une LMI en fonction de z et $\bar{z}$ ou de $a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$. De plus, une région LMI est un ensemble convexe.

Définition 3.3 ($\mathcal{D}$-stabilité)**.** *Une matrice réelle A est dite $\mathcal{D}$-stable si ses valeurs propres sont contenues à l'intérieur d'une région $\mathcal{D}$ du plan complexe définie par une LMI.*

Lemme 3.1 ([Chilali, 1996])**.** *La matrice A est $\mathcal{D}$-stable si et seulement si*

$$\exists P = P^T > 0 \quad \textit{telle que} \quad \alpha \otimes P + \beta \otimes AP + \beta^T PA^T < 0 \ , \tag{3.47}$$

où $\otimes$ dénote le produit de Kronecker.

Cette approche est particulièrement bien adaptée au formalisme LMI utilisé lors de la synthèse de l'observateur. En effet, des régions dans le plan complexe, telles qu'une bande, un disque ou encore un secteur conique peuvent être définies en termes de LMI.

Par exemple, la matrice A est $\mathcal{D}$-stable dans la région $\mathcal{D}$ définie par un disque de rayon r et de centre $(q,0)$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique et définie positive P satisfaisant la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} -rP & -qP + PA \\ -qp + A^T P & -rP \end{bmatrix} < 0 \ , \quad P = P^T > 0 \ . \tag{3.48}$$

Un autre résultat remarquable, issu des travaux de Chilali [1996], établit que toute intersection de régions LMI est également définie par une région LMI. D'un point de vue pratique, ce résultat garantit que le placement des valeurs propres d'une matrice A dans une région $\mathcal{D}$ définie par l'intersection entre deux régions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, soit $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2$, est assuré s'il existe une solution simultanée aux LMI associées à chaque région $\mathcal{D}_i$. L'ensemble de ces résultats peut être mis à profit dans l'optique d'une amélioration des performances dynamiques de l'observateur.

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation, étudiée dans la section précédente, permet de garantir une certaine vitesse de décroissance de la fonction de Lyapunov et de forcer ainsi la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation. La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation revient, en termes de $\mathcal{D}$-stabilité, à placer les valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ dans une zone spécifique du plan complexe. Ainsi par exemple, pour l'observateur à temps continu, les valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ sont placées à gauche d'une droite verticale coupant l'axe réel à $-\alpha$ dans le plan complexe (la partie réelle des valeurs propres de l'observateur est inférieure à $-\alpha$), autrement dit dans la région $\mathcal{D} := z \in \mathbb{C}, \Re e(z) < -\alpha$. Alors que dans le cas discret, les valeurs propres sont placées à l'intérieur d'un disque centré à l'origine et de rayon α, autrement dit dans la région $\mathcal{D} := z \in \mathbb{C}, |z| < \alpha$. Cependant, des dynamiques de l'erreur d'estimation à fortes oscillations sont susceptibles d'apparaître dans la mesure où ces conditions n'imposent aucune contrainte sur le placement de la partie imaginaire des valeurs propres de l'observateur.

Il est alors souhaitable de garantir une certaine bornitude de la partie imaginaire des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ de façon à éviter des comportements oscillatoires et assurer un

bon amortissement de l'erreur d'estimation. Le placement des valeurs propres de l'observateur dans une autre région $\mathcal{D}$ du plan complexe doit donc être envisagé afin de prendre en compte les performances dynamiques de l'observateur. Les résultats proposés par les théorèmes 3.5 et 3.6, permettant la synthèse de l'observateur, peuvent être modifiés de façon à assurer le placement des valeurs propres dans les régions illustrées sur la figure 3.3. Dans les deux cas, la région LMI (3.48) définie par un disque de rayon r et de centre $(q,0)$ est mise à profit.

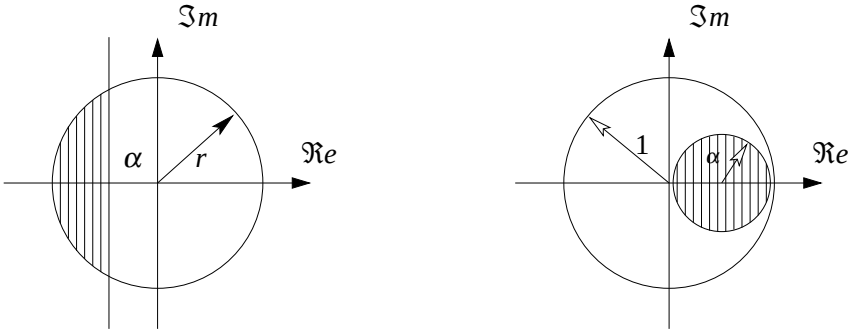

Figure 3.3 – Régions LMI pour l'observateur à temps continu (à gauche) et à temps discret (à droite)

Pour l'observateur à temps continu, la région $\mathcal{D}(\alpha,r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r, \Re e(z) < -\alpha\}$, définie par l'intersection entre un disque (centré à l'origine, de rayon r) et le demi-plan complexe à gauche d'une droite d'abscisse $-\alpha$, permet d'imposer une vitesse de convergence et de borner la partie imaginaire des valeurs propres.
La $\mathcal{D}$-stabilité de la matrice $A_{obs}(t)$ à gauche de la droite d'abscisse $-\alpha$, est directement garantie à partir des conditions LMI du théorème 3.5. La $\mathcal{D}$-stabilité de la matrice $A_{obs}(t)$ dans la zone définie par le disque est obtenue en remplaçant A par $A_{obs}(t)$ dans (3.48) puis en utilisant les propriétés (3.3) des fonctions de pondération et en opérant enfin un changement de variable de la forme $G = P\tilde{K}$. L'intersection entre les deux régions est imposée en satisfaisant simultanément les deux inégalités comme suit :

Théorème 3.7 (MDC)**.** *Les valeurs propres du système* (3.26) *à temps continu générant l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle découplé* (3.7) *et l'observateur* (3.18) *sont placées dans la région* $\mathcal{D}(\alpha,r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r, \Re e(z) < -\alpha\}$ *du plan complexe s'il existe une matrice symétrique et définie positive* P *et une matrice* G *vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_i \\ \tilde{A}^T P - (G\tilde{C}_i)^T & -rP \end{bmatrix} < 0 \ , \tag{3.49}$$

$$(\tilde{A} + \alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}} \mathrm{P} + \mathrm{P}(\tilde{\mathrm{A}} + \alpha \mathrm{I}) - (\mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}})^{\mathrm{T}} - \mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{3.50}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ *pour deux scalaires positifs* α *et* r *donnés. Le gain de l'observateur est donné par* $\tilde{K} = P^{-1}G$.

Il convient de placer, pour l'observateur à temps discret, la partie réelle des valeurs propres

de l'observateur dans la partie positive du cercle unité et de limiter leur partie imaginaire. Les conditions LMI du théorème 3.6 peuvent être aisément modifiées en utilisant la région LMI (3.48) comme suit :

Théorème 3.8 (MDD). *Les valeurs propres du système* (3.26) *à temps discret générant l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle découplé* (3.7) *et l'observateur* (3.18) *sont placées dans le disque de rayon α et de centre $(q,0)$ du plan complexe s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} -\alpha P & -qP + P\tilde{A} - G\tilde{C}_i \\ -qp + \tilde{A}^T P - (G\tilde{C}_i)^T & -\alpha P \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{3.51}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ pour deux scalaires positifs α et q donnés. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

Remarque 3.5. *Le choix du centre q et du rayon α doit se faire de sorte que les valeurs propres de l'observateur appartiennent au cercle unité tout en limitant leurs parties réelle et imaginaire. Opter pour un centre $q = 0.5$ et un rayon $\alpha = 0.5$ s'avère particulièrement judicieux.*

Exemple 3.2 (**Exemple d'estimation d'état**)
Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé à temps continu constitué de $L = 3$ sous-modèles. Les valeurs numériques des matrices A_i, B_i et C_i sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.7 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.7 & 2.0 \\ 0.4 & -0.5 & 0.6 \\ -1.0 & 0.9 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.8 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}^T, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}^T,$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 \\ -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.9 \\ -0.7 & -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.6 \\ -0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$ sont toutes dans le demi-plan gauche du plan complexe :

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -0.71 & -0.18 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} -0.16 \pm 1.08i & -0.71 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = -0.2 \pm 0.2i.$$

Le multimodèle est donc stable. Les réponses indicielles des trois sous-modèles sont présentées sur la figure (3.4)*. Les comportements dynamiques des trois sous-modèles diffèrent sensiblement (très amorti, peu amorti et oscillatoire). L'agrégation de ces trois sous-modèles conduit par conséquent à un comportement dynamique non linéaire du multimodèle.*

La variable d'indexation $\xi(t)$ est ici le signal de commande $u(t) \in [-1, 1]$ filtré à l'aide d'un filtre passe-bas de gain unitaire et de constante de temps égale à 0.4. Les fonctions de

pondération sont obtenues par la normalisation des fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t))/\sum_{j=1}^{L}\omega_j(\xi(t)) \ , \tag{3.52}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t)-c_i)^2/\sigma^2\right) \ , \tag{3.53}$$

de dispersion $\sigma = 0.4$ *et de centres* $c_1 = -0.7$, $c_2 = 0.0$ *et* $c_3 = 0.7$.

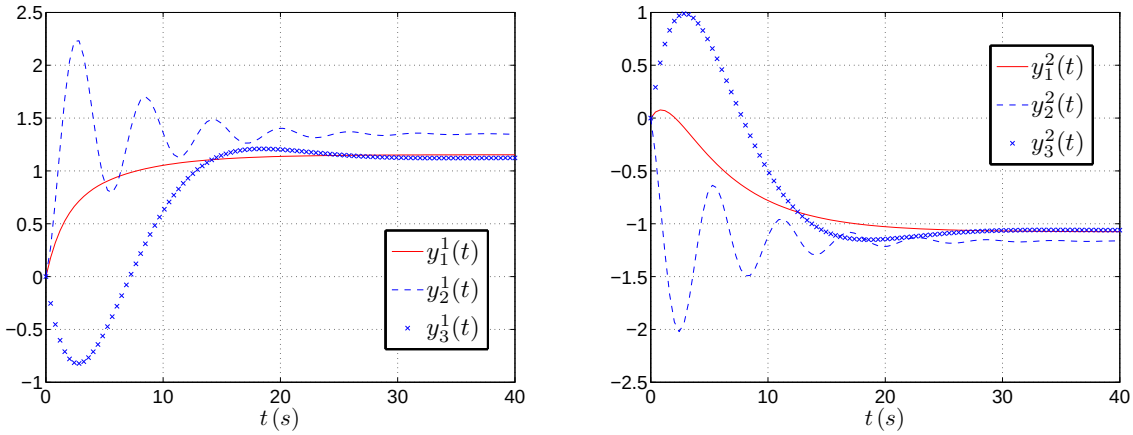

Figure 3.4 – Réponses indicielles des sous-modèles sortie 1 (à gauche) et sortie 2 (à droite)

Une solution, satisfaisant le théorème 3.7 pour un taux de décroissance $\alpha = 0.15$ *et un rayon* $r = 1.1$, *est donnée par :*

$$P = \begin{bmatrix} 3.698 & 2.307 & 0.057 & -0.169 & -0.230 & -0.333 & 0.508 \\ 2.307 & 15.774 & -0.480 & 1.215 & 0.631 & -0.378 & 1.129 \\ 0.057 & -0.480 & 3.619 & -4.125 & -1.667 & 0.001 & 0.112 \\ -0.169 & 1.215 & -4.125 & 7.187 & 4.722 & -0.046 & 0.144 \\ -0.230 & 0.631 & -1.667 & 4.722 & 6.375 & -0.006 & 0.167 \\ -0.333 & -0.378 & 0.001 & -0.046 & -0.006 & 1.343 & -2.355 \\ 0.508 & 1.129 & 0.112 & 0.144 & 0.167 & -2.355 & 10.090 \end{bmatrix} \ , \tag{3.54}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.203 & 0.043 & -0.368 & -0.297 & 0.022 & -0.239 & -0.113 \\ 0.196 & 0.042 & -0.366 & -0.284 & 0.052 & -0.192 & -0.095 \end{bmatrix}^T \ . \tag{3.55}$$

Remarquons que les valeurs propres de la matrices P sont données par :

$$\lambda_P = \begin{bmatrix} 0.115 & 0.178 & 0.481 & 0.649 & 1.836 & 2.369 & 2.725 \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

et que la matrice P est alors bien définie positive.

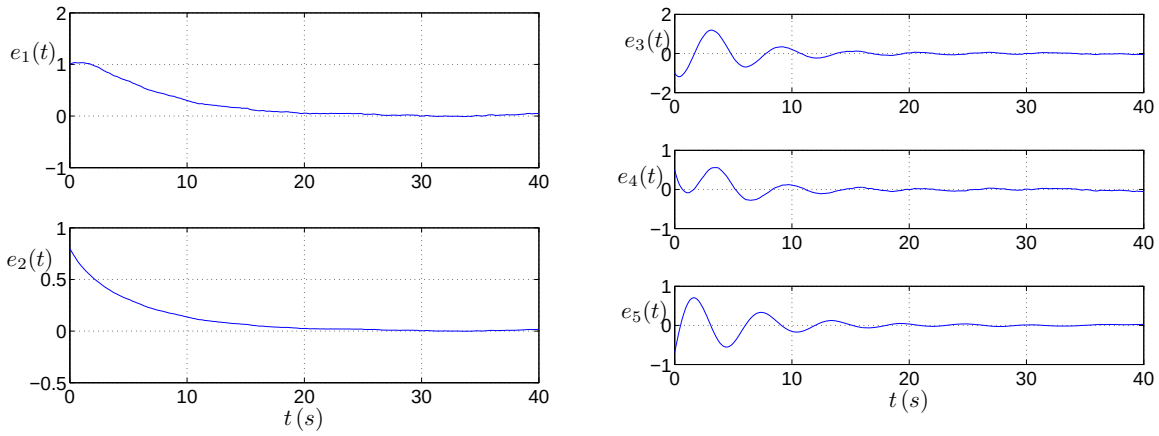

Figure 3.5 – Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 (à gauche) et du sous-modèle 2 (à droite)

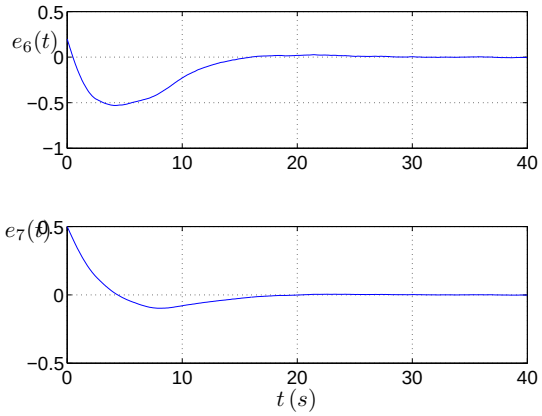

Figure 3.6 – Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 3

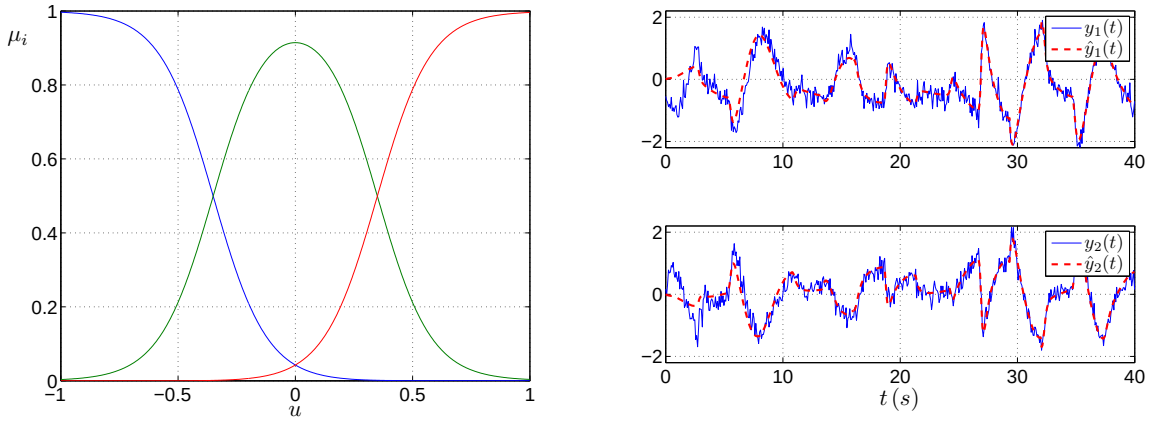

Figure 3.7 – Fonctions de pondération (à gauche) et comparaison entre les sorties (à droite)

Un bruit de mesure, de moyenne nulle et de dispersion égale à un, est ajouté lors des simulations. Les erreurs d'estimation d'état pour chaque sous-modèle sont illustrées sur les fi-

gures 3.5 et 3.6. Sur ces figures, les composantes du vecteur de l'erreur d'estimation d'état $e(t)$ sont notées e_i. Il est possible de constater la bonne estimation des états des sous-modèles. L'erreur au voisinage de l'origine du temps provient de la différence entre les conditions initiales $x(0) = \begin{bmatrix}1.0 & 0.8 & -1.0 & 0.5 & -0.7 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}^T$ du multimodèle et celles de l'observateur égales à zéro. La figure 3.7 présente une comparaison entre les sorties du multimodèle et celles estimées par l'observateur.

3.4.3.1 Discussion sur le placement des valeurs propres

Les paragraphes précédents ont présenté une méthodologie de synthèse d'observateurs à gain proportionnel avec un placement des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$. La stratégie de synthèse de l'observateur repose sur l'introduction d'un vecteur d'état augmenté contenant les états des sous-modèles. Il permet d'écrire les équations du multimodèle et de l'observateur sous une forme augmentée plus compacte. La synthèse du gain de l'observateur est réalisée à travers la résolution d'un ensemble de LMI faisant intervenir les formes augmentées ainsi obtenues.

Il est important de souligner que les paires $(\tilde{A}, \tilde{C}_i)$, issues des formes augmentées du multimodèle et de l'observateur, apparaissant dans les conditions LMI proposées dans les théorèmes 3.7 et/ou 3.8 ne respectent pas le critère d'observabilité classiquement employé pour les systèmes LTI. Il suffit en effet, à partir du critère de Kalman, de calculer la matrice dite d'observabilité pour chaque paire $(\tilde{A}, \tilde{C}_i)$:

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} \tilde{C}_i \\ \tilde{C}_i\tilde{A} \\ \tilde{C}_i\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}_i\tilde{A}^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

pour s'apercevoir qu'elle ne peut pas être de plein rang. En effet, si l'on considère par exemple la paire $(\tilde{A}, \tilde{C}_1)$ alors la matrice d'observabilité est donnée par :

$$\text{rang}(\mathcal{O}_1) = \text{rang} \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1A_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1A_1^L & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \neq n \ . \tag{3.58}$$

On constate immédiatement que le rang$(\mathcal{O}_1) <$ n. Cette perte de rang provient du fait que la matrice $\tilde{A}$ est bloc diagonale et que les matrices $\tilde{C}_i$ possèdent des éléments nuls.

La perte du rang des matrices $\mathcal{O}_i$ (rang$(\mathcal{O}_i) <$ n) nuit au placement des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ proposées par les conditions des théorèmes 3.7 et/ou 3.8. En effet, la perte du rang des matrices $\mathcal{O}_i$ induit une diminution du domaine dans lequel les valeurs propres de l'observateur peuvent être placées. Il s'avère en particulier impossible de fixer une vitesse de

convergence quelconque à l'erreur d'estimation en ayant recours aux théorèmes précédents, le taux de décroissance α ne pouvant pas être supérieur au taux de décroissance le plus faible des sous-modèles.

Le fait de considérer simultanément toutes les dynamiques des sous-modèles par le biais des formes augmentées $\tilde{A}$ et $\tilde{C}_i$ permet la prise en compte du mélange entre les sous-modèles. En revanche, le vecteur d'état augmenté x, en introduisant un faux couplage entre les dynamiques des sous-modèles, rend difficile le placement des valeurs propres des sous-modèles.

En effet, dans le multimodèle découplé, chaque sous-modèle possède un espace d'état qui lui est propre et à l'intérieur duquel il évolue. Il est ainsi impossible de reconstruire, du point de vue du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, l'état de tous les sous-modèles (impossible de reconstruire tout le vecteur d'état augmenté x) à partir de l'observation des entrées et des sorties du multimodèle. Du point de vue du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle en effet, les dynamiques des autres sous-modèles sont parfaitement inconnues (découplage). Pour le $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, les modes associés aux autres sous-modèles sont des modes inobservables en raison du découplage entre les dynamiques, d'où la non-observabilité de la paire $(\tilde{A}, \tilde{C}_i)$.

Par ailleurs, les notions d'observabilité et d'identifiabilité sont étroitement liées. Du point de vue de l'identification, le constat précédent implique que les seuls paramètres identifiables sont évidemment ceux des sous-modèles actifs. Sur un plan pratique, cela signifie qu'il est seulement possible d'estimer les paramètres des modes du système réellement excités.

Une première solution à ce problème est proposée au cours du paragraphe suivant et une seconde solution au cours du chapitre 6.

3.4.3.2 Solution particulière pour le placement des valeurs propres

Ce paragraphe propose une solution permettant d'éviter la perte d'observabilité mentionnée dans la section précédente. Notre solution s'appuie sur une nouvelle écriture de la matrice $\tilde{C}(t)$ à partir d'une connaissance *a priori* des bornes de variation des fonctions de pondération. Rappelons qu'au cours des sections précédentes la matrice

$$\tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t)C_1 & \dots & \mu_i(t)C_i & \dots & \mu_L(t)C_L \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

a été réécrite sous la forme d'une combinaison convexe des matrices (voir remarque 3.2) :

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\tilde{C}_i \ , \tag{3.60}$$

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{3.61}$$

L'idée contenue dans cette approche conduit à ne considérer, au cours de la procédure de synthèse de l'observateur, que les sommets du polytope convexe (c.-à-d. les matrices $\tilde{C}_i$). Cependant, si tous les sous-modèles sont constamment mis à contribution dans la construction de la sortie du multimodèle alors les fonctions de pondération ne sont jamais ni nulles ni égales à un

(fonctions de pondération fortement mélangées) :

$$1 > \overline{\mu}_i \geq \mu_i(t) \geq \underline{\mu}_i > 0 \quad . \tag{3.62}$$

Autrement dit, le partitionnement de l'espace de fonctionnement du système a été effectué de façon à ce que les zones de fonctionnement soient fortement recouvertes.
Il est possible, en exploitant la connaissance *a priori* des bornes des fonctions de pondération, de contourner partiellement les difficultés mentionnées plus haut. En effet, considérer les sommets du polytope convexe lors de la conception de l'observateur, sachant que par construction ils ne vont jamais être atteints, n'est pas judicieux.

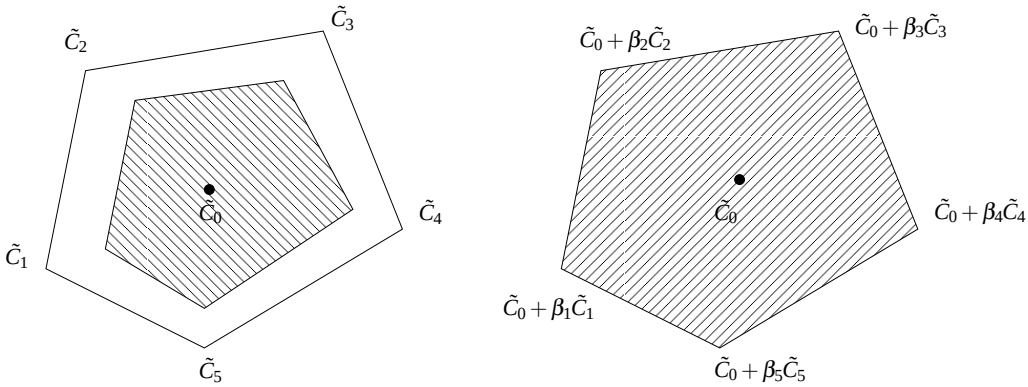

Figure 3.8 – Transformation des sommets du polytope convexe

L'idée consiste à remplacer les sommets d'origine du polytope convexe par de nouveaux sommets qui seront réellement atteints par le multimodèle (voir figure 3.8). La démarche proposée est basée sur l'introduction de nouvelles fonctions de pondération construites à partir d'une mise à l'échelle des fonctions de départ. Ces nouvelles fonctions $\tilde{\mu}_i(.)$ varient effectivement dans l'intervalle $[0,1]$ et sont définies par

$$\tilde{\mu}_i(t) = (\mu_i(t) - \underline{\mu}_i)/(\overline{\mu}_i - \underline{\mu}_i) \quad . \tag{3.63}$$

Toutefois, $\tilde{\mu}_i(t) = \mu_i(t)$ si les bornes $\underline{\mu}_i$ et $\overline{\mu}_i$ vérifient $\underline{\mu}_i = 0$ et $\overline{\mu}_i = 1$.

A partir des nouvelles fonctions de pondération (3.63), la matrice $\tilde{C}(t)$ donnée par (3.60) peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{C}(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{L} \underline{\mu}_i \tilde{C}_i + \sum_{i=1}^{L} \tilde{\mu}_i(t)(\overline{\mu}_i - \underline{\mu}_i)\tilde{C}_i \quad . \tag{3.64}$$

Le premier terme de droite dans (3.64) est constant. En introduisant les changements de variables suivants

$$\tilde{C}_0 \quad = \quad \sum_{i=1}^{L} \underline{\mu}_i \tilde{C}_i \quad , \tag{3.65}$$

$$\beta_i \quad = \quad (\overline{\mu}_i - \underline{\mu}_i) \quad , \tag{3.66}$$

la matrice $\tilde{C}(t)$ devient

$$\tilde{C}(t) \quad = \quad \tilde{C}_0 + \sum_{i=1}^{L} \tilde{\mu}_i(t)\beta_i\tilde{C}_i \ , \tag{3.67}$$

soit encore

$$\tilde{C}(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{L} \tilde{\mu}_i(t)(\tilde{C}_0 + \beta_i\tilde{C}_i) \ . \tag{3.68}$$

La matrice $\tilde{C}_0$ peut être considérée comme le barycentre du polytope convexe.

Grâce à cette écriture, la paire $(\tilde{A}, \tilde{C}_0 + \beta_i\tilde{C}_i)$ devient observable et un placement effectif des valeurs propres de l'observateur dans un domaine plus large est alors possible. Toutefois, les valeurs numériques des matrices $\tilde{C}_0 + \beta_i\tilde{C}_i$ peuvent conduire à un très grand gain de l'observateur. En effet, la paire $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_0 + \beta_i\tilde{C}_i)$ peut être *faiblement observable*.

Remarque 3.6. *Un changement de variable de la forme $\tilde{C}_i = \tilde{C}_0 + \beta_i\tilde{C}_i$ dans les théorèmes présentés précédemment permet de prendre en compte cette nouvelle écriture.*

Exemple 3.3 (Changement de variable)
Considérons les conditions de convergence asymptotique de l'erreur d'estimation dans le cas continu proposées par le théorème 3.5 :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i < 0 \ , \qquad i = 1, \cdots, L \ . \tag{3.69}$$

Elles deviennent compte tenu de la remarque 3.6 :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - (G\tilde{C}_0)^T - G\tilde{C}_0 - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i < 0 \ , \qquad i = 1, \cdots, L \tag{3.70}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \beta_i C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Il est possible de constater que si $\underline{\mu}_i \neq 0$ alors la paire $(\tilde{A}, \tilde{C}_0)$, commune à toutes les LMI, devient observable à condition toutefois que les paires (A_i, C_i) relatives à chaque sous-modèle le soient aussi.

Remarque 3.7. *Dans un souci de simplicité, on ne considérera dans la suite du mémoire que les matrices $\tilde{C}_i$. Tous les résultats obtenus pourront être facilement étendus en considérant la remarque 3.6.*

3.4.4 Réduction du conservatisme des conditions pour la synthèse de l'observateur à temps discret

La preuve de la convergence de l'erreur d'estimation passe par la recherche d'une matrice P commune à tous les sous-modèles. La recherche d'une telle matrice constitue une source inévitable de conservatisme des solutions, en particulier quand le multimodèle comporte un grand

nombre de sous-modèles.

Une première stratégie menant à la réduction du conservatisme s'appuie sur la connaissance *a priori* du nombre maximal des sous-modèles actifs à un même instant. Il est ainsi possible de réduire le couplage entre les LMI à résoudre et par conséquent le pessimisme de la solution. Cependant, ces conditions ne peuvent être employées que si les fonctions poids sont à support borné.

Un autre moyen de réduire le pessimisme de la solution consiste à remplacer la fonction de Lyapunov quadratique par d'autres fonctions candidates de Lyapunov, en particulier par des fonctions dites *non quadratiques*. Il est possible de distinguer parmi ces fonctions, les fonctions dites polyquadratiques définies par :

$$V(t) \quad = \quad e^T(t) \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) P_i e(t) = e^T(t) P(t) e(t) \quad , \tag{3.71}$$

avec $P_i = P_i^T$ et $P_i > 0$. Les fonctions de Lyapunov polyquadratiques font partie de la famille des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. La recherche d'une matrice unique commune est alors remplacée par la recherche d'un ensemble de matrices. L'introduction de degrés de liberté supplémentaires induit une diminution du conservatisme de la solution. En effet, toutes les solutions considérant une matrice P unique sont contenues dans celles obtenues avec P_i, il suffit de fixer $P_i = P$ pour $i = 1, \cdots, L$.

Ce type de fonction a été utilisé à l'origine dans l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des systèmes incertains polytopiques [de Oliveira et al., 1999; Daafouz et Bernussou, 2001] et par extension dans l'analyse des multimodèles de T.S. [Jadbabaie, 1999; Morère, 2001; Chadli, 2002; Tanaka et al., 2003]. Il convient toutefois de pointer la différence entre les résultats obtenus avec ce genre de fonctions dans le cas discret et dans le cas continu. En effet, pour les systèmes à temps continu l'utilisation des fonctions (3.71) fait malheureusement intervenir la vitesse de variation des fonctions de pondération. Une hypothèse sur la borne des dérivées des fonctions poids doit être ajoutée afin de pouvoir obtenir des conditions de stabilité ou de stabilisation. L'intégration de cette contrainte peut, dans le cas continu, limiter l'intérêt des résultats. En effet, plus la vitesse de variation est rapide et plus les conditions deviennent conservatives. Très récemment, Rhee et Won [2006] ont proposé une classe particulière de fonctions polyquadratiques qui ne fait pas intervenir les bornes des dérivées dans la recherche des conditions de stabilité du multimodèle de T.S. Néanmoins, cette nouvelle fonction est restreinte aux variables de décision dépendant de l'état du système.

Les résultats obtenus dans le domaine discret sont plus encourageants que ceux obtenus dans le domaine continu. Les travaux de Oliveira et al. [1999], pour les systèmes incertains avec paramètres invariants dans le temps situés dans un domaine polytopique, ont effectivement montré que le recours aux fonctions polyquadratiques permet d'introduire des degrés de liberté supplémentaires dans la preuve de la stabilité. Sur la base de ces résultats, Daafouz et Bernussou [2001] et Morère [2001] ont proposé respectivement pour des systèmes incertains polytopiques et pour les multimodèles de T.S. des conditions de stabilité et de stabilisation aboutissant à une

relaxation des conditions obtenues à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique classique. Kruszewski [2006] a récemment présenté une approche originale, utile à l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des modèles de T.S., qui considère des fonctions de Lyapunov non uniformément décroissantes entre deux échantillons. La variation des fonctions de Lyapunov est prise en compte sur un nombre fini k d'échantillons, c.-à-d. $\Delta V(t) = V(t+k) - V(t)$. Cette approche générale englobe les résultats classiques obtenus par les fonctions de Lyapunov quadratiques ou non quadratiques. La relaxation du pessimisme fournie par cette approche est payée par une augmentation exponentiellement croissante du nombre de LMI à résoudre en fonction du nombre k d'échantillons pris en considération.

Cette section présente une analyse de la convergence de l'erreur d'estimation à l'aide de la fonction (3.71) pour l'observateur à temps discret, l'objectif étant de réduire le conservatisme des solutions proposées dans les sections précédentes. Notre objectif n'est pas de proposer de nouvelles techniques de réduction du conservatisme mais de transposer au multimodèle découplé les résultats déjà établis dans la littérature. La démarche adoptée ici est tout à fait similaire à celle appliquée dans les sections précédentes.

En utilisant la différence $\Delta V(t) = V(t+1) - V(t)$ de la fonction (3.71), puis en introduisant la dynamique de l'erreur d'estimation définie par (3.26) alors l'inégalité suivante assurant la convergence de l'erreur est obtenue :

$$A_{obs}^T(t) P(t+1) A_{obs}(t) - P(t) \quad < \quad 0 \quad . \tag{3.72}$$

Elle devient en introduisant la définition (3.19) de $A_{obs}(t)$ puis en utilisant le complément de Schur (c.f. annexe C) :

$$\begin{bmatrix} P(t) & \Phi_i^T P(t+1) \\ P(t+1)\Phi_i & P(t+1) \end{bmatrix} > 0 \quad . \tag{3.73}$$

Une fois $P(t)$ et $P(t+1)$ remplacés par leur expression donnée en (3.71) et compte tenu des propriétés des fonctions de pondération, l'inégalité énoncée ci-dessus devient :

$$\sum_{j=1}^{L} \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \mu_j(t+1) \begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \tag{3.74}$$

également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \forall i, j = 1, \cdots, L \tag{3.75}$$

ou encore, étant donné la définition (3.25) de Φ_i, si :

$$\begin{bmatrix} P_i & (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i)^T P_j \\ P_j (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i) & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \forall i, j = 1, \cdots, L \quad . \tag{3.76}$$

L'inégalité matricielle ainsi obtenue est non linéaire en $\tilde{K}$, P_i et P_j. Il convient de remarquer qu'à la différence du cas quadratique, un changement de variable de la forme $G = P_j \tilde{K}$ ne

permet pas de linéariser l'inégalité matricielle précédente. Il est toutefois possible de montrer [Guerra et Vermeiren, 2004], au moyen de la propriété proposée dans [de Oliveira et al., 1999], que l'égalité (3.75) peut également s'écrire :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M+M^T-P_j \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \forall i,j=1,\cdots,L \quad , \tag{3.77}$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer. Remarquons que l'inégalité (3.75) se déduit en multipliant (3.77) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} \mathrm{I} & -\Phi_i^T \end{bmatrix}$ et par $\begin{bmatrix} \mathrm{I} & -\Phi_i^T \end{bmatrix}^T$. Cette intéressante transformation aboutit à une LMI en P_i, P_j, M et G par le biais du changement de variable $G = M\tilde{K}$. Le théorème suivant propose des *conditions suffisantes* assurant la convergence de l'erreur d'estimation dans le cas discret.

Théorème 3.9 (MDD). *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps discret* (3.7) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.18)*, converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices P_i et P_j symétriques et définies positives, une matrice G et une matrice M telles que :*

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A}-G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A}-G\tilde{C}_i & M+M^T-P_j \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \forall i,j=1,\cdots,L \quad , \tag{3.78}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = M^{-1}G$.

Remarque 3.8. *Les conditions proposées par le théorème 3.6 avec $\alpha = 0$ sont un cas particulier des conditions du théorème 3.9. En effet, en considérant $P_i = P_j = M = P$ alors le théorème 3.6 est obtenu. Il est ainsi légitime d'attendre une diminution du conservatisme de la solution obtenue.*

3.5 Synthèse d'observateur avec un multimodèle découplé modifié

Le multimodèle découplé peut présenter un phénomène indésirable dit de décrochage. Ce phénomène a été mis en évidence lors de l'identification paramétrique du multimodèle. Il se caractérise par des discontinuités de la sortie du multimodèle dans les phases de transition entre les sous-modèles.

Afin d'éliminer le phénomène de décrochage, trois filtres agissant respectivement sur le signal de commande, la variable de décision $\xi(t)$ et la sortie du multimodèle ont été ajoutés à la structure du multimodèle (cf. section 2.5.6). Les paramètres de ces filtres sont supposés connus car ils sont inclus dans l'étape d'identification du multimodèle.

Au cours des sections précédentes, cette structure modifiée de multimodèle n'a pas été prise en considération lors de la synthèse de l'observateur. Remarquons que l'omission du filtrage de

la variable de décision $\xi(t)$ et du signal de commande simplifie l'analyse de la convergence de l'erreur d'estimation sans porter atteinte à la généralité des résultats obtenus. En effet, la convergence de l'erreur d'estimation est indépendante de la dynamique de la variable de décision et de l'évolution temporelle du signal de commande. Tous les résultats demeurent ainsi valables. Le filtrage de la sortie peut être en revanche très intéressant lors de la conception de l'observateur.

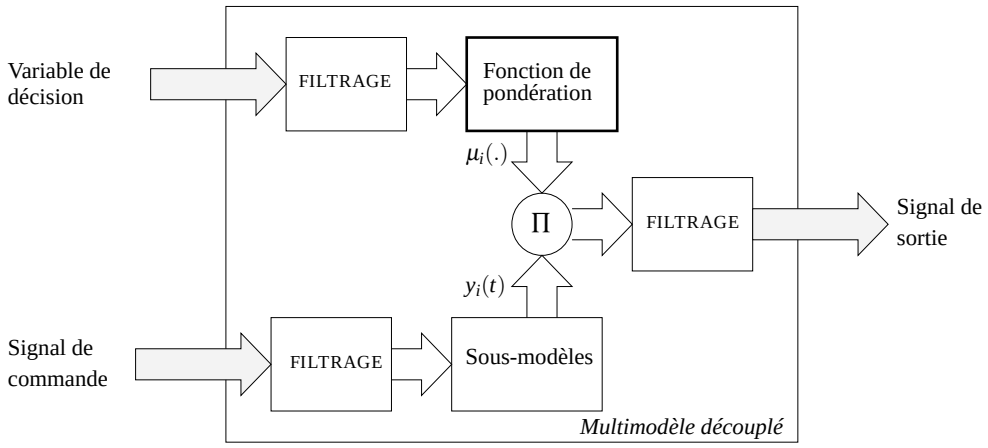

Figure 3.9 – Structure modifiée du multimodèle découplé

La représentation d'état du multimodèle découplé modifié, en considérant le filtrage de la sortie, est donnée par :

$$\text{Multimodèle} \qquad \begin{cases} \delta(x_i(t)) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \ , \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \ , \\ \tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) \ , \end{cases} \tag{3.79a}$$

$$\text{Filtrage de la sortie} \qquad \begin{cases} \delta(\tilde{y}_f(t)) = A_f \tilde{y}_f(t) + B_f \tilde{y}(t) \ , \\ y(t) = C_f \tilde{y}_f(t) \ , \end{cases} \tag{3.79b}$$

où la sortie du multimodèle est maintenant $y(t)$, le signal $\tilde{y}(t)$ n'étant pas accessible par mesure directe. Dans (3.79b), les vecteurs et les matrices sont de dimensions appropriées.

Au moyen du vecteur d'état augmenté x_a, les équations (3.79) peuvent s'écrire sous la forme plus compacte :

$$\delta(x_a(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) A_a^i x_a(t) + B_a u(t) \ , \tag{3.80a}$$

$$y(t) = C_a x_a(t) \ , \tag{3.80b}$$

avec

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{y}_f(t) \end{bmatrix}, \quad A_a^i = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ B_f \tilde{C}_i & A_f \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} 0 & C_f \end{bmatrix} \ , \tag{3.81}$$

où le vecteur d'état augmenté $x(t) \in \mathbb{R}^n$ a déjà été défini en (3.6) et les matrices partitionnées par blocs $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $\tilde{C}_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$ ont été définies respectivement en (3.8) et en (3.23).

L'observateur proposé se présente sous la forme suivante :

$$\delta(\hat{x}_a(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) A_a^i \hat{x}_a(t) + B_a u(t) + \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) K_a^i (y(t) - \hat{y}(t)) \ , \tag{3.82a}$$

$$\hat{y}(t) = C_a \hat{x}(t) \ , \tag{3.82b}$$

où les K_a^i sont les nouveaux gains à déterminer de façon à assurer la convergence de l'erreur d'estimation $e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$. La recherche d'un gain de l'observateur unique est remplacée par la recherche d'un ensemble de gains. Par conséquent, des degrés de liberté supplémentaires sont introduits dans la procédure de synthèse de l'observateur. En effet, l'observateur à gain unique est un cas particulier de (3.82) en considérant $K_a^i = K_a$.

Les structures modifiées (3.80) et (3.82) du multimodèle et de l'observateur offrent, d'un point de vue de la synthèse de l'observateur, plusieurs avantages. En effet, il est possible de constater que

- la présence des fonctions de pondération sur l'équation de sortie est déplacée sur l'équation dynamique du système ;
- des degrés de liberté supplémentaires sont introduits dans la conception de l'observateur, sans pour autant augmenter le nombre de LMI à satisfaire.

En contrepartie, la dimension des nouvelles matrices à manipuler est inévitablement augmentée.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état $e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$ est régie par :

$$\delta(e_a(t)) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \left\{ A_a^i - K_a^i C_a \right\} \ . \tag{3.83}$$

Des conditions suffisantes garantissant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$ sont proposées par les théorèmes suivants.

Théorème 3.10 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé modifié à temps continu* (3.80) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.82)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et des matrices G_i vérifiant les LMI suivantes :*

$$(A_a^i + \alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}} \mathrm{P} + \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{a}^\mathrm{i} + \alpha \mathrm{I}) - (\mathrm{G_i C_a})^{\mathrm{T}} - \mathrm{G_i C_a} < 0 \ , \ \mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{L} \tag{3.84}$$

pour un scalaire positif α donné. Le gain de l'observateur est donné par $K_a^i = P^{-1} G_i$.

Théorème 3.11 (MDD). *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé modifié à temps discret* (3.80) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.82)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et des matrices G_i vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} (1-2\alpha)P & (A_a^i)^T P - C_a^T G_i^T \\ PA_a^i - G_i C_a & P \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \tag{3.85}$$

pour un scalaire positif $0 < \alpha < 0.5$ donné. Le gain de l'observateur est donné par $K_a^i = P^{-1} G_i$.

Il convient de remarquer que le phénomène de décrochage ne se produit pas systématiquement. Il dépend conjointement des dynamiques propres aux sous-modèles et du mécanisme d'interpolation déterminé à partir du choix de la variable de décision et du partitionnement de l'espace de fonctionnement du système (c.-à-d. le placement des fonctions poids). L'introduction des filtres mentionnés n'est, par conséquent, pas toujours nécessaire. Il est cependant possible d'inclure ces filtres dans la structure de l'observateur afin de conserver les avantages offerts par cette approche. Dans ce contexte, les filtres du signal de commande et de la sortie du multimodèle peuvent être interprétés physiquement comme les modèles associés aux actionneurs et aux capteurs du système à caractériser. Précisons par ailleurs que Xie et al. [2005] ont proposé récemment une approche similaire à la nôtre (introduction artificielle des filtres) destinée à réduire le conservatisme des conditions de stabilité d'un multimodèle de T.S.

3.6 Observateur d'état pour un système comportant un retard sur la sortie

Des processus à dynamiques fortement non linéaires soumis à des retards sur les mesures sont naturellement rencontrés dans les sciences de l'ingénieur. En effet, tout système de mesure possède intrinsèquement un retard plus au moins négligeable dû par exemple au temps nécessaire à la transmission des données entre les capteurs du système et le poste de contrôle.

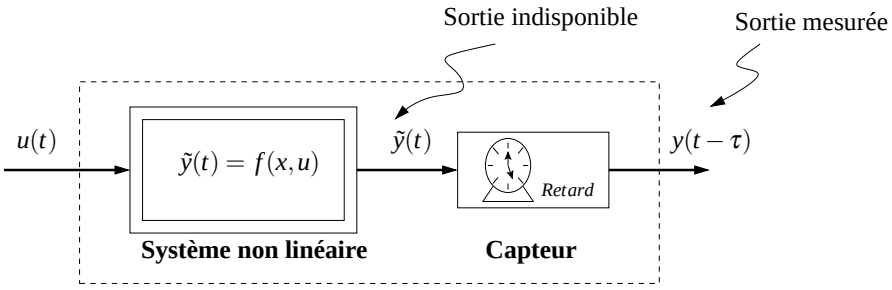

Figure 3.10 – Système à retard

En pratique, le retard sur les mesures est souvent négligé afin de réduire la complexité du modèle et de faciliter les étapes d'analyse, de synthèse d'une loi de commande ou d'une stratégie de diagnostic du système en question. Il est cependant bien connu que le retard peut avoir des conséquences néfastes (déstabilisation de la boucle de commande, informations ignorées, etc.) susceptibles de mettre en danger la sécurité de l'opérateur et/ou le bon fonctionnement du système.

Un retard sur les mesures doit alors être considéré comme un paramètre, au même titre que le gain ou la constante de temps, servant à définir le comportement dynamique du système. Différents modèles de retard peuvent être considérés, le plus simple étant constant. Cependant, dans la mesure où ce modèle simplifié convient difficilement dans la plupart des situations pratiques, le recours à d'autres modèles de retard variable dans le temps (majorés par un réel connu ou appartenant à un intervalle ou encore dont la vitesse de variation est connue) s'impose.

L'étude des systèmes à retard (analyse de la stabilité, commande, estimation d'état) représente un domaine de recherche extrêmement actif, en témoigne le grand nombre de travaux déjà publiés (publications, articles, ouvrages). D'une façon générale, l'analyse des effets du retard sur la stabilité des systèmes est abordée soit à partir des méthodes fréquentielles soit à partir d'une généralisation de la deuxième méthode de Lyapunov, cette dernière méthode s'avérant particulièrement bien adaptée à l'étude des systèmes non linéaires (voir [Bliman, 2001] pour une étude comparative entre ces approches). La principale difficulté rencontrée avec la méthode de Lyapunov provient du fait que les dérivées de la fonction candidate ne dépendent pas de l'état présent mais de tout l'état passé du système (système à dimension infinie). Ainsi, l'application de ce formalisme aux systèmes retardés a été envisagée sous deux angles distincts. Dans la première approche, dite de *Lyapunov-Krasovskii*, la fonction classique de Lyapunov est remplacée par des *fonctionnelles*. Le problème de dérivation est ainsi remplacé par la recherche d'une fonctionnelle adaptée. La seconde approche, dite de *Lyapunov-Razumikhin*, fait appel à des fonctions de Lyapunov classiques et introduit une procédure permettant de borner ses dérivées (voir Kharitonov [1999] et Richard [2003] pour de plus amples informations à propos de ces deux approches). Ces approches conduisent à l'obtention de conditions suffisant à garantir la stabilité du système sous une forme LMI. L'approche de Lyapunov-Krasovskii a été largement mise à profit lors de la synthèse d'une loi de commande ou de la conception d'un observateur d'état. L'élaboration d'un observateur d'état pour des *systèmes linéaires* comportant des retards sur les entrées, l'état et les mesures a fait l'objet de nombreux travaux de recherche.

La reconstruction d'état en présence de retards dans une perspective de surveillance a également fait l'objet de multiples recherches. L'observateur conçu à cet effet sert par exemple à générer au bon moment des symptômes de défaillance du système. Dans ce contexte, Yang et Saif [1998] ont réalisé la synthèse d'un observateur à entrées inconnues pour un système linéaire comportant un retard constant dans son équation d'état. Cet observateur reconstruit l'état du système et les entrées inconnues affectant le système. Il peut être mis à profit dans le cadre de la détection et de la localisation de défauts d'actionneur et de capteur. Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation sont obtenues à l'aide de l'approche de Lyapunov-Razumikhin. A l'appui des approches de Lyapunov-Razumikhin et de Lyapunov-Krasovskii, Sename [2001] a proposé des procédures de synthèse d'observateurs à entrées inconnues et

des lois de commandes par retour d'état. Il a également mis en avant les notions d'observabilité pour les systèmes linéaires à retard multiple constant dans les équations d'état et de sortie. La synthèse d'observateurs, dans le domaine fréquentiel, pour des systèmes LTI comportant des entrées inconnues et de multiples retards constants dans l'état, est proposée dans [Zhong et al., 2003]. Fridman et al. [2003] ont conçu un observateur robuste, en termes de performance H_∞, pour des systèmes linéaires incertains comportant des retards constants sur l'état. Leur démarche s'appuie sur une transformation structurelle du système original en un système singulier en mesure de réduire le conservatisme de la solution obtenue. Il y a peu, You et al. [2006] ont développé une procédure de synthèse d'un observateur pour la détection robuste de défauts d'un système linéaire comportant des incertitudes. En réponse au problème posé par l'estimation de l'état des systèmes non linéaires comportant des retards sur les mesures, Germani et al. [2002] et Kazantzis et Wright [2005] ont proposé une solution basée sur un principe similaire. L'idée développée consiste à synthétiser une chaîne d'observateurs, chaque observateur étant chargé de reconstruire l'état du système à un instant retardé bien défini et inférieur à la taille du retard du système.

En ce qui concerne les multimodèles, le multimodèle de type Takagi-Sugeno a été utilisé pour décrire le comportement dynamique d'un système non linéaire retardé. Cao et Frank [2001] ont conçu une loi de commande stabilisante au moyen d'un observateur d'état en considérant des retards connus et constants sur l'état et la sortie. L'analyse de la stabilité du multimodèle de Takagi-Sugeno comportant des retards connus sur l'état a été abordée dans Er et Lin [2002]. Jiang et al. [2005] ont élaboré une loi de commande stabilisante en considérant un retard constant mais inconnu dans les équations d'évolution d'état des modèles locaux. L'approche est intéressante dans la mesure où l'observateur d'état proposé fait appel à une estimation en ligne du retard inconnu, la valeur exacte du retard n'étant pas nécessaire.

Cette section aborde l'étude de l'estimation d'état d'un multimodèle découplé dont les mesures sont affectées par un retard variable.

3.6.1 Formulation du problème

On souhaite reconstruire l'état d'un système non linéaire *comportant un retard variable mais connu* dans l'équation de sortie. Le système non linéaire est décrit par un multimodèle découplé de la forme suivante :

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \ , \tag{3.86a}$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \ , \tag{3.86b}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t-\tau(t))) y_i(t-\tau(t)) \ . \tag{3.86c}$$

On rappelle que $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de mesures. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$ sont constantes et supposées connues. Par la suite, afin d'alléger l'écriture, $x(t-\tau(t))$ sera abrégée sous la forme $x(\nabla)$ où $\tau(t) > 0$ est un

retard variable supposé connu qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max} \\ \dot{\tau}(t) \ \leq \ \gamma \ \leq \ 1 \end{cases} . \tag{3.87}$$

Le vecteur d'état augmenté

$$x(t) \ = \ \begin{bmatrix} x_1^T(t) & \cdots & x_i^T(t) & \cdots & x_L^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n, \qquad n = \sum_{i=1}^{L} n_i \tag{3.88}$$

permet d'obtenir la forme augmentée suivante :

$$\dot{x}(t) \ = \ \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \ , \tag{3.89a}$$
$$y(t) \ = \ \tilde{C}(\nabla)x(\nabla) \ , \tag{3.89b}$$

où les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont données par (3.8). La matrice à paramètres variables dans le temps $\tilde{C}(\nabla)$ prend la forme :

$$\tilde{C}(\nabla) \ = \ \begin{bmatrix} \mu_1(\nabla)C_1 & \cdots & \mu_i(\nabla)C_i & \cdots & \mu_L(\nabla)C_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} \ . \tag{3.90}$$

La reconstruction de l'état du multimodèle découplé (3.86) est effectuée, compte tenu de la forme augmentée (3.89) du multimodèle, à l'aide d'un observateur à gain proportionnel de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) \ = \ \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}(y(t) - \hat{y}(t)) \ , \tag{3.91a}$$
$$\hat{y}(t) \ = \ \tilde{C}(\nabla)\hat{x}(\nabla) \tag{3.91b}$$

avec

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & K_i & \cdots & K_L \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times p} \ , \tag{3.92}$$

où les $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$ sont les gains à déterminer associés à chaque sous-modèle.

3.6.2 Synthèse de l'observateur

La synthèse de l'observateur consiste à chercher des matrices K_i telles que l'erreur d'estimation donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.93}$$

tende vers zéro quelles que soient les conditions initiales de $e(0)$ et pour un mélange arbitraire entre les sorties des sous-modèles. La dynamique de l'erreur d'estimation est fixée par :

$$\dot{e}(t) \ = \ \tilde{A}e(t) - \tilde{K}\tilde{C}(\nabla)e(\nabla) \ , \tag{3.94}$$

équation qui s'obtient en dérivant (3.93) puis en remplaçant $\dot{x}(t)$ et $\dot{\hat{x}}(t)$ respectivement par les équations (3.89a) et (3.91a).

Le théorème suivant sera d'une grande utilité à l'heure d'obtenir des conditions garantissant la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation.

Théorème 3.12 (Théorème de Newton-Leibniz)**.** *La dérivée par rapport au temps d'une fonction $F(t)$ définie par*

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx \tag{3.95}$$

est donnée par

$$\frac{dF(t)}{dt} = G(t) \ , \tag{3.96}$$

où

$$G(t) = \frac{db(t)}{dt} f(b(t),t) - \frac{da(t)}{dt} f(a(t),t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{df(x,t)}{dt} dx \ . \tag{3.97}$$

La convergence de l'erreur d'estimation est analysée à l'aide de la seconde méthode de Lyapunov et par le biais d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui permet d'obtenir des conditions suffisantes indépendantes de la taille du retard sous une forme LMI. On impose une convergence exponentielle de l'erreur d'estimation afin d'imposer des performances dynamiques à l'observateur.

L'analyse de la convergence exponentielle de l'observateur est réalisée en introduisant la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii proposée dans [Mondié et Kharitonov, 2005] :

$$V(t) \ = \ e^T(t)Pe(t) + \int_{-\tau(t)}^{0} e^T(t+\theta)e^{2\alpha\theta}Qe(t+\theta)d\theta \ , \tag{3.98}$$

où P et Q sont des matrices symétriques et définies positives et $\alpha > 0$. On reconnaît dans le premier terme de droite de (3.98) la fonction de Lyapunov classiquement utilisée pour les systèmes sans retard. Le deuxième terme de droite est ajouté afin d'éviter la présence de dérivées de la fonction (3.98) dépendant du passé du système. La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est assurée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $V(t) > 0$,
2. $\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0$.

La première condition est garantie par la construction de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (3.98) puisque $P > 0$ et $Q > 0$. Il est ainsi nécessaire d'obtenir des conditions garantissant la deuxième condition.

La dérivée par rapport au temps de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (3.98) peut être calculée en effectuant le changement de variable $u = t + \theta$ dans (3.98) puis en utilisant le

théorème (3.12). La dérivée de (3.98) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{e}^T(t)Pe(t)+e^T(t)P\dot{e}(t)+e^T(t)Qe(t)-(1-\dot{\tau}(t))e^{-2\alpha\tau(t)}e^T(\nabla)Qe(\nabla) \\ &- 2\alpha\int_{-\tau(t)}^{0} e^T(t+\theta)e^{2\alpha\theta}Qe(t+\theta)d\theta\end{aligned} \tag{3.99}$$

qui peut être majorée, compte tenu des hypothèses (3.87) sur le retard ($\dot{\tau}(t)\leq\gamma$ et $\tau(t)\leq\tau_{max}$), de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \dot{e}^T(t)Pe(t)+e^T(t)P\dot{e}(t)+e^T(t)Qe(t)-(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}}e^T(\nabla)Qe(\nabla) \\ &- 2\alpha\int_{-\tau(t)}^{0} e^T(t+\theta)e^{2\alpha\theta}Qe(t+\theta)d\theta \ .\end{aligned} \tag{3.100}$$

En introduisant l'équation (3.94) régissant la dynamique de l'erreur, l'expression (3.100) devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = \begin{bmatrix}e(t)\\e(\nabla)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP+P\tilde{A}+Q & -P\tilde{K}\tilde{C}(\nabla)\\ -(\tilde{K}\tilde{C}(\nabla))^TP & -(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}}Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t)\\e(\nabla)\end{bmatrix} \\ -2\alpha\int_{-\tau(t)}^{0} e^T(t+\theta)e^{2\alpha\theta}Qe(t+\theta)d\theta \ .\end{aligned} \tag{3.101}$$

Remarquons par ailleurs que la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (3.98) admet l'écriture suivante :

$$V(t) = \begin{bmatrix}e(t)\\e(\nabla)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t)\\e(\nabla)\end{bmatrix} + \int_{-\tau(t)}^{0} e^T(t+\theta)e^{2\alpha\theta}Qe(t+\theta)d\theta \ , \tag{3.102}$$

par conséquent, l'expression $\dot{V}+2\alpha V$ s'écrit :

$$\dot{V}+2\alpha V \leq \begin{bmatrix}e(t)\\e(\nabla)\end{bmatrix}^T\left\{\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP+P\tilde{A}+Q & -P\tilde{K}\tilde{C}(\nabla)\\ -(\tilde{K}\tilde{C}(\nabla))^TP & -(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}}Q\end{bmatrix}+2\alpha\begin{bmatrix}P & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}e(t)\\e(\nabla)\end{bmatrix} \tag{3.103}$$

dont le membre de droite est une forme quadratique en $\begin{bmatrix}e(t) & e(\nabla)\end{bmatrix}^T$. La négativité de l'expression $\dot{V}(t)+2\alpha V$ est par conséquent garantie si et seulement si :

$$\begin{bmatrix}(\tilde{A}+\alpha\mathrm{I})^TP+P(\tilde{A}+\alpha\mathrm{I})+Q & -P\tilde{K}\tilde{C}(\nabla)\\ -(\tilde{K}\tilde{C}(\nabla))^TP & -(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}}Q\end{bmatrix} < 0 \ . \tag{3.104}$$

Il convient de remarquer que la matrice $\tilde{C}(\nabla)$ admet la réécriture suivante :

$$\tilde{C}(\nabla) = \sum_{i=1}^{L}\mu_i(\nabla)\tilde{C}_i \ , \tag{3.105}$$

où $\tilde{C}_i$ est une matrice bloc de la forme :

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{3.106}$$

En considérant (3.105) et compte tenu des propriétés des fonctions de pondération, l'inégalité matricielle (3.104) peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\nabla) \begin{bmatrix} (\tilde{A}+\alpha \mathrm{I})^T P + P(\tilde{A}+\alpha \mathrm{I}) + Q & -P\tilde{K}\tilde{C}_i \\ -(\tilde{K}\tilde{C}_i)^T P & -(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}} Q \end{bmatrix} < 0 \ , \tag{3.107}$$

inégalité satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} (A+\alpha \mathrm{I})^T P + P(A+\alpha \mathrm{I}) + Q & -P\tilde{K}\tilde{C}_i \\ -(\tilde{K}\tilde{C}_i)^T P & -(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}} Q \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ . \tag{3.108}$$

Enfin, le théorème suivant propose des *conditions suffisantes* assurant la convergence de l'erreur d'estimation sous la forme de LMI en posant $G = P\tilde{K}$.

Théorème 3.13 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé* (3.89) *comportant un retard variable* $\tau(t)$ *défini par* (3.87) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.91)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe des matrices symétriques et définies positives P et Q et une matrice G vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A}+\alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}} \mathrm{P} + \mathrm{P}(\tilde{\mathrm{A}}+\alpha \mathrm{I}) + \mathrm{Q} & -G\tilde{C}_i \\ -(G\tilde{C}_i)^T & -(1-\gamma)e^{-2\alpha\tau_{max}} Q \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{3.109}$$

où $\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ *pour un scalaire positif* $\alpha > 0$ *donné. Le gain de l'observateur est donné par* $K = P^{-1}G$.

Selon Mondié et Kharitonov [2005], l'erreur d'estimation converge exponentiellement par la formule suivante :

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} e^{-\alpha t} \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|e(\theta)\| \ , \tag{3.110}$$

où

$$\beta_1 = \lambda_{\min}(P) \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(Q) \ . \tag{3.111}$$

Remarquons que si un taux de décroissance $\alpha = 0$ et un retard constant (c.-à-d. $\dot{\tau}(t) = \gamma = 0$) sont considérés alors l'influence de la taille du retard disparaît dans les conditions (3.109). Les conditions proposées dans le théorème (3.13) sont de ce fait dites *indépendantes de la taille du retard*.

Exemple 3.4 (Exemple d'estimation d'état avec un retard sur la sortie)
Il s'agit d'estimer l'état d'un système à temps continu décrit par un multimodèle découplé à temps continu constitué de $L = 2$ sous-modèles. Les valeurs numériques des matrices A_i, B_i et C_i sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0.6 \\ -0.3 & -0.9 & 0 \\ -1.3 & 0.6 & -0.8 \end{bmatrix} , \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.6 \\ 0.3 & -1 \end{bmatrix} ,$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}^T , \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}^T ,$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} , \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} .$$

Les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$ sont toutes dans le demi-plan gauche du plan complexe :

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -1.33 \pm 0.71i & -1.03 \end{bmatrix} \quad et \quad \lambda_2 = -0.6 \pm 0.14i \ .$$

Le multimodèle est donc stable.

Le retard appliqué aux sorties du système est de la forme $\tau(t) = 0.5 + 0.45\sin(0.5t)$ et la borne supérieure de sa dérivée est donnée par $\gamma = 0.225$.

La variable d'indexation $\xi(t)$ est ici le signal de commande $u(t)$ filtré. Le filtre utilisé est du premier ordre de gain unitaire et sa constante de temps est égale à un. Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation des fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi(t)) \ , \tag{3.112}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2 \right) \ , \tag{3.113}$$

de dispersion $\sigma = 0.4$ et de centres $c_1 = 0.3$ et $c_2 = 0.7$. Remarquons que les fonctions de pondération associées aux deux sous-modèles (figure 3.12 (à gauche)) ne sont jamais nulles ou égales à un. Par conséquent, les deux sous-modèles sont constamment mis à contribution pour former la sortie du multimodèle.

Pour un taux de décroissance $\alpha = 0.2$, une solution satisfaisant le théorème 3.13 est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 7.9354 & 0.5915 & 1.9666 & 0.2228 & 0.9195 \\ 0.5915 & 5.6426 & 3.7632 & 0.3097 & 0.2559 \\ 1.9666 & 3.7632 & 3.1279 & 0.3969 & 0.4209 \\ 0.2228 & 0.3097 & 0.3969 & 8.0705 & -3.5953 \\ 0.9195 & 0.2559 & 0.4209 & -3.5953 & 3.1692 \end{bmatrix} , \tag{3.114}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4.3413 & 3.4651 & 2.1656 & -0.2392 & -0.1030 \\ 3.4651 & 2.7821 & 1.7325 & -0.1915 & -0.0825 \\ 2.1656 & 1.7325 & 1.0928 & -0.1197 & -0.0516 \\ -0.2392 & -0.1915 & -0.1197 & 2.1253 & 0.9087 \\ -0.1030 & -0.0825 & -0.0516 & 0.9087 & 0.4004 \end{bmatrix} , \tag{3.115}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.9333 & 0.9017 & -1.5429 & 0.1059 & 0.1568 \end{bmatrix}^T \ . \tag{3.116}$$

Un bruit de mesure est ajouté sur la sortie lors de la simulation du système. Il est possible de constater sur les figures 3.11 et 3.12 la bonne estimation des états des sous-modèles et de la sortie du multimodèle fournie par l'observateur proposé. L'erreur à l'origine du temps provient de la différence entre les conditions initiales $x(0) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.5 & -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}^T$ *du multimodèle et celles de l'observateur égales à zéro.*

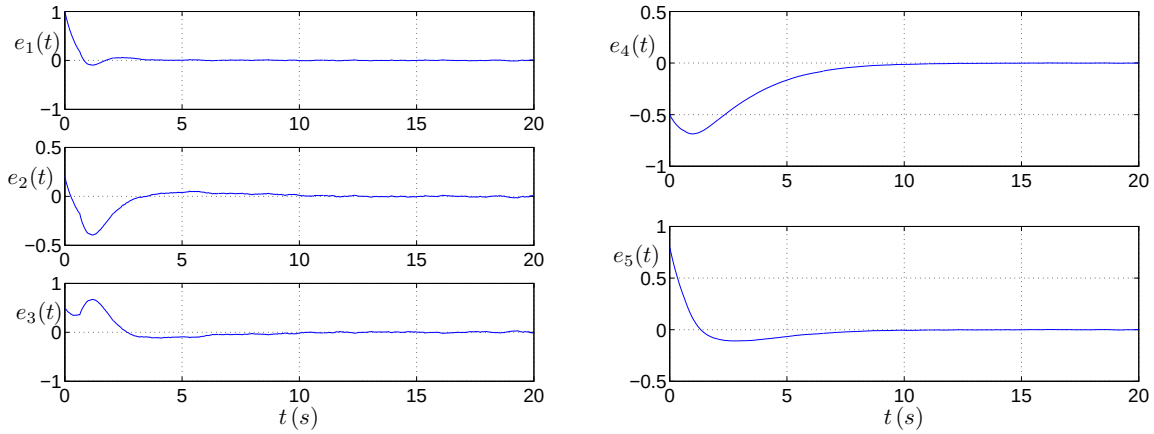

Figure 3.11 – Erreurs d'estimation d'état

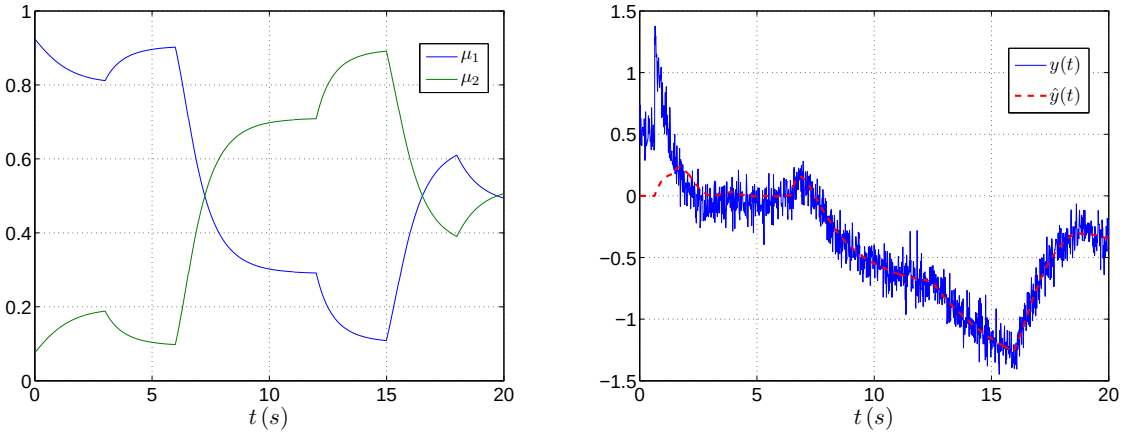

Figure 3.12 – Fonctions de pondération au cours du temps (à gauche) et comparaison entre la sortie et son estimée (à droite)

3.7 Conclusion et contributions

Ce chapitre a abordé la synthèse d'observateurs d'état, à temps continu et à temps discret, des systèmes non linéaires parfaitement représentés par un multimodèle découplé. La structure

de ce multimodèle, contrairement aux approches multimodèles classiques, offre aux observateurs proposés la possibilité de comporter des sous-modèles de dimensions différentes. Dans le multimodèle découplé, chaque sous-modèle possède en effet un espace d'état complètement indépendant (découplage) de celui des autres sous-modèles.

Ce découplage présente un intérêt dans un contexte de modélisation (c.f. chapitre 2). En revanche, il ne simplifie pas *a priori* le problème posé par la synthèse des observateurs. En effet, il est illusoire de croire que la convergence de l'erreur d'estimation peut être assurée par la synthèse individuelle d'un observateur pour chaque sous-modèle. La combinaison entre les sorties des sous-modèles doit être prise en compte dans la phase de synthèse de l'observateur afin de fournir une preuve rigoureuse de la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation.

Le travail présenté dans ce chapitre contribue à enrichir les méthodes d'estimation d'état à base de multimodèles et plus précisément les méthodes dédiées au multimodèle découplé, encore peu étudié dans la littérature. Ce travail livre une preuve théorique, sous la forme de LMI, de la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation d'état. Cet aspect constitue un point original qui permet de se démarquer notablement d'autres travaux relatifs à l'estimation d'état des systèmes représentés par cette classe de multimodèle.

Enfin, remarquons que l'exploitation du multimodèle découplé en vue de la synthèse des observateurs n'est *a priori* pas plus simple que celle basée sur le multimodèle de Takagi-Sugeno. Le fait que la taille de la matrice commune P à rechercher augmente avec le nombre des sous-modèles peut conduire à des conditions plus difficiles à vérifier d'un point de vue numérique (conservatisme de la solution). Toutefois, la structure particulière des matrices augmentées du multimodèle est susceptible de favoriser l'obtention d'une telle matrice. Cet aspect constitue un point méritant d'être approfondi.

4

Estimation d'état robuste

Sommaire

4.1 Introduction 116
4.2 Estimation d'état robuste vis-à-vis des perturbations 117
4.2.1 Représentation multimodèle d'un système perturbé 118
4.2.2 Synthèse d'un observateur à gain proportionnel 119
4.2.3 Synthèse d'un observateur à gain proportionnel-intégral 124
4.3 Estimation d'état robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques 133
4.3.1 Représentation multimodèle d'un système incertain 134
4.3.2 Conception d'un observateur à gain proportionnel 135
4.3.2.1 Synthèse de l'observateur robuste 136
4.3.2.2 Deuxième forme de synthèse de l'observateur robuste . . . 141
4.3.3 Conception d'un observateur à gain proportionnel-intégral 144
4.4 Estimation d'état robuste vis-à-vis des entrées inconnues 152
4.4.1 Multimodèle découplé en présence d'entrées inconnues 154
4.4.2 Structure de l'observateur à gain multi-intégral 155
4.4.3 Définitions des erreurs d'estimation 156
4.4.4 Discussion sur le découplage de l'entrée inconnue 158
4.4.5 Formulation des problèmes 159
4.4.6 Problème 1 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation . . . 159
4.4.7 Problème 2 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation en présence de perturbations 160
4.4.8 Problème 3 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation en présence de perturbations et pour une $(q+1)^{\text{ème}}$ différence de l'entrée inconnue non nulle 161
4.5 Conclusion et contributions 169

4.1 Introduction

La conception d'observateurs d'état de systèmes non linéaires représentés par un multimodèle à structure découplée a fait l'objet du chapitre précédent. Il convient cependant de souligner que la qualité de l'estimation d'état fournie par ces observateurs dépend fortement de la qualité des mesures et de la précision du modèle. Or, il est illusoire de croire qu'un modèle mathématique, aussi raffiné soit-il, puisse reproduire parfaitement le comportement dynamique d'un système. Un modèle n'est qu'une représentation abstraite de la réalité livrant une description imparfaite du comportement du système. Tout modèle comporte naturellement des imprécisions de modélisation. De surcroît, un système est loin d'être une entité complètement isolée de son environnement. Les signaux de commande ne sont pas les seules grandeurs permettant d'agir sur le système. L'environnement interagit directement ou indirectement avec le système affectant ainsi son comportement ou les mesures utilisées pour l'estimation. Ces différentes sources de perturbations, nuisibles à l'estimation d'état et difficiles à maîtriser, doivent être prises en compte lors de la synthèse de l'observateur afin de rendre l'estimation d'état robuste.

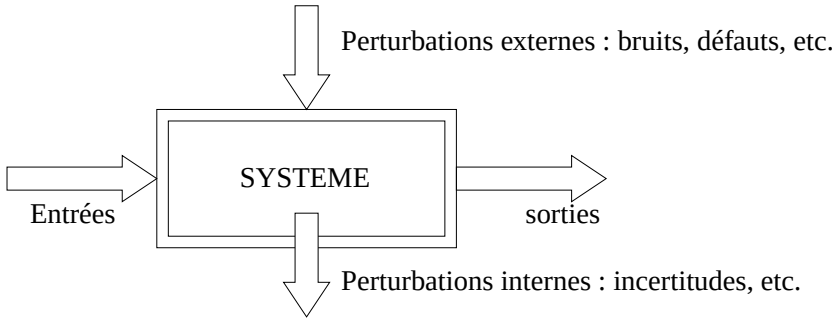

Figure 4.1 – Différentes sources de perturbations

La notion de robustesse, dans un contexte d'estimation d'état à base de modèle, fait en principe référence à l'insensibilité de l'estimation d'état vis-à-vis des perturbations internes ou externes au système. Une perturbation renvoie à une notion extrêmement générale qui englobe un certain nombre de concepts. Une perturbation peut être considérée d'une façon générale comme un phénomène difficilement maîtrisable ayant une action sur le système [Isermann, 2006]. Les bruits de mesure constituent un exemple classique de perturbation externe. Bien qu'un modèle mathématique puisse être associé aux bruits (lois de distribution, etc.), leur influence n'en demeure pas moins difficilement maîtrisable. Les erreurs de modélisation commises lors de la phase de modélisation sont sans doute un exemple de perturbation interne. En effet, certains comportements du système ne sont pas modélisés soit dans un souci de simplicité soit parce qu'ils sont difficiles, voire impossibles, à caractériser. Il s'avère donc nécessaire de quantifier les imprécisions de modélisation de façon à apporter une certaine information sur la méconnaissance du système.

Le problème soulevé par l'estimation d'état robuste est fondamental en automatique et a été beaucoup étudié pour des systèmes caractérisés par un modèle de type linéaire en recourant, par exemple, à la théorie pour la commande robuste [Weinmann, 1991; Xie et Souza, 1992;

Xie et al., 1992; Oustaloup, 1994; Colmenares, 1996]. L'extension de ces techniques à l'estimation d'état de systèmes représentés par des modèles à paramètres variables dans le temps a été étudiée par Bara [2001]. Akhenak [2004] et Rodrigues [2005] ont abordé simultanément le problème d'estimation d'état robuste pour les systèmes non linéaires caractérisés par un multimodèle de T.S.

Ce chapitre est consacré aux synthèses robustes d'observateurs à gain proportionnel, à gain proportionnel-intégral et à gain multi-intégral basées sur la représentation multimodèle d'un système non linéaire. Ce chapitre comporte trois sections. La première est dédiée au problème d'estimation d'état d'un système représenté par un multimodèle découplé et sujet à des perturbations sur les équations d'état et de sortie. L'estimation d'état robuste est accomplie à l'aide d'un observateur à gain proportionnel et d'un observateur à gain proportionnel-intégral. Ce dernier type d'observateur, contrairement à l'observateur à gain proportionnel, présente l'avantage d'introduire des degrés supplémentaires de liberté permettant d'améliorer le degré de robustesse de l'estimation sans dégrader ses performances dynamiques. La conception de ce type d'observateur n'a pas encore, à notre connaissance, fait l'objet d'une étude dans un contexte multimodèle. La prise en compte des incertitudes paramétriques lors de la synthèse des observateurs à gain proportionnel et à gain proportionnel-intégral est étudiée dans la deuxième section. Enfin, la troisième section aborde la conception d'*un observateur à entrées inconnues* dit à gain multi-integral. Cet observateur parvient à fournir une estimation de l'évolution de l'état du système et ce, en dépit de la présence d'*entrées inconnues* (c.-à-d. de signaux non accessibles à la mesure) agissant sur le système. Son utilisation, dans un contexte de surveillance ou de reconfiguration des systèmes, permet de générer des indicateurs de défauts insensibles aux entrées inconnues mais sensibles aux défauts.

4.2 Estimation d'état robuste vis-à-vis des perturbations

L'estimation d'état fait appel à des mesures extraites du système destinées à prendre en compte l'évolution courante du système et ce, afin de parvenir à estimer l'évolution de ses variables internes. Cependant, les informations délivrées au bout de la chaîne de mesure sont en règle générale affectées par des phénomènes externes au système (bruits dans les dispositifs de mesure, erreurs de transmission, etc.) et leur utilisation peut conduire à une estimation biaisée de l'état du système.

L'estimation d'état ne peut pas, dans ces conditions, être parfaitement accomplie. Autrement dit, la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation ne peut pas être assurée. En revanche, il est possible de quantifier l'impact des perturbations sur l'erreur d'estimation et de garantir ainsi une borne supérieure de la reconstruction. A cet effet, différentes normes de signaux peuvent être utilisées afin d'évaluer la grandeur de l'erreur de reconstruction.

La norme $\mathcal{H}_\infty$ est classiquement employée pour aborder ce type de problème rencontré dans le cadre des systèmes linéaires à paramètres invariants dans le temps. En revanche, pour les multimodèles et en règle générale pour les systèmes à paramètres variants dans le temps, la notion de fonction de transfert est inexistante et la notion de norme $\mathcal{H}_\infty$ devient hors contexte.

Pour cette classe de systèmes, il est fait appel à la norme $\mathcal{L}_2$ induite, une extension directe de la norme $\mathcal{H}_\infty$ [Weinmann, 1991; Van der Schaft, 1992]. Au même titre que la norme $\mathcal{H}_\infty$, la norme $\mathcal{L}_2$ permet de quantifier, dans le cadre des systèmes à paramètres variables dans le temps, le plus grand apport entre l'énergie de la sortie et celle de l'entrée pour toutes les trajectoires paramétriques admissibles du système [Bara, 2001].

Définition 4.1 (Norme $\mathcal{L}_2$ d'un signal)**.** *La norme $\mathcal{L}_2$ d'un signal $s(t)$ de carré intégrable est notée et définie par :*

$$\|s(t)\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} s(t)^T s(t) dt \right)^{1/2} \tag{4.1}$$

en temps continu et par

$$\|s(t)\|_2 = \left(\sum_0^{+\infty} s(t)^T s(t) \right)^{1/2} \tag{4.2}$$

en temps discret.

Définition 4.2 (Norme $\mathcal{L}_2$ induite d'un système)**.** *La norme $\mathcal{L}_2$ induite d'un système est définie par*

$$\sup_{\|w(t)\|_2^2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2^2}{\|u(t)\|_2^2} \ , \tag{4.3}$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie à énergie bornée, au sens de la norme $\|.\|_2$, du système considéré. Cette norme est une mesure du plus grand taux d'amplification énergétique de $u(t)$ sur $y(t)$.

4.2.1 Représentation multimodèle d'un système perturbé

La représentation d'état du multimodèle découplé considérée dans cette section est donnée par :

$$\delta(x_i(t)) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + E_i w(t) \ , \tag{4.4a}$$
$$y_i(t) = C_i x_i(t) \ , \tag{4.4b}$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) + W_c w(t) \ , \tag{4.4c}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de mesure. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$ et $W_c \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont constantes et supposées connues. Les matrices E_i et W_c sont introduites afin de prendre en considération l'influence d'une perturbation $w \in \mathbb{R}^r$ (par exemple un bruit d'état ou de mesure), à énergie bornée, affectant respectivement la dynamique et la sortie du système.

Remarque 4.1. *Le fait de considérer le même signal $w(t)$ dans l'équation dynamique (4.4a) et dans l'équation de sortie (4.4c) n'est pas restrictif, le choix des matrices E_i et W_c étant totalement libre. Il est possible, en considérant $E_i = \begin{bmatrix}\tilde{E}_i & 0\end{bmatrix}$ et $W_c = \begin{bmatrix}0 & \tilde{W}_c\end{bmatrix}$ avec $w(t) = \begin{bmatrix}w_a(t) & w_c(t)\end{bmatrix}^T$, de dissocier les effets de $w_a(t)$ sur la dynamique du système et ceux de $w_c(t)$ sur la sortie.*

Hypothèse 4.1. *Le signal de perturbation est borné en énergie au sens de la norme $\mathcal{L}_2$, c'est-à-dire que la $\|w(t)\|_2^2 < \infty$.*

Le multimodèle découplé (4.4) admet la forme augmentée suivante :

$$\begin{aligned} \delta(x(t)) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{E}w(t) \ , & \text{(4.5a)} \\ y(t) &= \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \ , & \text{(4.5b)} \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état augmenté de dimension $n = \sum_{i=1}^{L} n_i$ et les matrices $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\tilde{C}(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ sont des formes augmentées dont les éléments correspondent aux paramètres des sous-modèles. Les matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}(t)$ sont définies par (3.8) et la matrice $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ par

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix}E_1^T & \cdots & E_i^T & \cdots & E_L^T\end{bmatrix}^T \ . \quad \text{(4.6)}$$

4.2.2 Synthèse d'un observateur à gain proportionnel

L'observateur se présente sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{aligned} \delta(\hat{x}(t)) &= \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}(y(t) - \hat{y}(t)) \ , & \text{(4.7a)} \\ \hat{y}(t) &= \tilde{C}(t)\hat{x}(t) \ , & \text{(4.7b)} \end{aligned}$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie reconstruite par l'observateur et $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ le gain de l'observateur à déterminer.

L'erreur d'estimation d'état est définie par

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad \text{(4.8)}$$

et sa dynamique, obtenue par l'agrégation des équations (4.4) et (4.7), par :

$$\delta(e(t)) = A_{obs}(t)e(t) + (\tilde{E} - \tilde{K}W_c)w(t) \ , \quad \text{(4.9)}$$

où la matrice d'évolution $A_{obs}(t)$ est de la forme

$$A_{obs}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\phi_i \quad \text{(4.10)}$$

avec

$$\phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \quad \text{et} \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix}0 & \cdots & C_i & \cdots & 0\end{bmatrix} \ . \quad \text{(4.11)}$$

La présence de $w(t)$ dans (4.9) empêche l'erreur d'estimation de converger vers zéro. En effet, d'après (4.9), la perturbation $w(t)$ agit directement sur l'erreur d'estimation à travers la matrice $\tilde{E} - \tilde{K}W_c$. Le gain $\tilde{K}$ de l'observateur règle directement l'impact de $w(t)$ sur l'erreur d'estimation.

Le problème relatif à la synthèse de l'observateur se pose alors dans les termes suivants :

> *il s'agit d'ajuster le gain $\tilde{K}$ de l'observateur (4.7) de façon à atténuer l'influence de la perturbation $w(t)$ sur l'erreur d'estimation d'état $e(t)$ et donc de reconstruire l'état avec une certaine précision quelles que soient les conditions initiales du système et de l'observateur.*

La perturbation $w(t)$ doit être alors prise en compte lors de la procédure de synthèse de l'observateur. A cet effet, un *signal objectif*

$$v(t) \quad = \quad He(t) \quad , \tag{4.12}$$

dépendant seulement de l'erreur d'estimation d'état $e(t)$, est considéré. La matrice H est de dimension appropriée et fixée par le concepteur. Les objectifs de synthèse de l'observateur sont traduits par les contraintes de performance suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad w(t) = 0 \quad , \tag{4.13a}$$

$$\|v(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \quad \text{pour} \quad w(t) \neq 0 \text{ et } e(0) = 0 \quad . \tag{4.13b}$$

La première contrainte garantit la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro si aucune perturbation n'agit sur le système. La seconde assure la précision de la reconstruction en présence d'une perturbation sur le système. En effet, γ est un scalaire positif à déterminer qui indique le niveau d'atténuation entre $w(t)$ et le signal objectif $v(t)$. La précision de la reconstruction est ainsi fixée au moyen de la valeur de γ qui doit être alors minimisée.

Remarque 4.2. *L'exigence (4.13b) cherche à minimiser la norme $\mathcal{L}_2$ induite du système générateur de l'erreur d'estimation d'état défini par (4.9) et par (4.12). Autrement dit, le but est de minimiser la norme $\mathcal{L}_2$ entre la perturbation $w(t)$ et le signal objectif $v(t)$.*

Remarque 4.3. *La matrice H qui apparaît dans (4.12) introduit des degrés supplémentaires de liberté lors de la synthèse de l'observateur. En effet, le choix de cette matrice permet d'atténuer l'impact des perturbations sur une partie ou sur la totalité des composantes du vecteur $e(t)$ lors de la synthèse de l'observateur. Différents observateurs peuvent ainsi être conçus, chaque observateur étant dédié à l'estimation d'une partie du vecteur d'état sous les contraintes (4.13). Cette démarche permet en règle générale d'atteindre un niveau d'atténuation plus faible pour chacun des observateurs dédiés que celui obtenu avec un seul observateur.*

Le gain $\tilde{K}$ de l'observateur doit être ajusté de sorte que les exigences (4.13) soient satisfaites. Il s'avère également important de garantir des performances dynamiques de l'erreur d'estimation (vitesse de convergence, etc.) dans la phase de conception de l'observateur. La synthèse de l'observateur sous ces contraintes est établie en faisant appel à la théorie de Lyapunov.

Synthèse de l'observateur à temps continu

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation, en considérant une perturbation nulle ($w(t) = 0$), a été abordée au cours du chapitre précédent (c.f. section 3.4.2). Les conditions garantissant la convergence exponentielle de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$ ont été établies à l'aide d'une fonction quadratique de Lyapunov :

$$V(t) = e^T(t)Pe(t) \quad , \quad P > 0 \quad P = P^T \tag{4.14}$$

telle que la condition suivante soit satisfaite

$$\exists\, \alpha > 0 : \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0 \quad , \tag{4.15}$$

où α est le taux de décroissance. Dans cette section, cette condition est modifiée comme suit

$$\exists\, \alpha > 0 : \dot{V}(t) < -2\alpha V(t) - v^T(t)v(t) + \gamma^2 w^T(t)w(t) \tag{4.16}$$

afin de satisfaire les performances dynamiques (4.13) tout en garantissant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation. En effet, remarquons que l'intégration de la condition (4.16) est donnée par

$$\int_0^\infty (\dot{V}(t) + 2\alpha V(t))dt \quad < \quad -\int_0^\infty v^T(t)v(t)dt + \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \tag{4.17}$$

et compte tenu de la positivité de la fonction de Lyapunov, $V(\infty) > 0$ et $V(0) = 0$, le terme de gauche de cette inégalité devient positif, ce qui implique

$$\|v(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \quad . \tag{4.18}$$

Par conséquent, l'exigence (4.13b) sur le niveau d'atténuation entre la perturbation $w(t)$ et le signal objectif $v(t)$ est assurée si la condition (4.16) est vérifiée. On reconnaît par ailleurs dans (4.16) la condition déjà employée afin de garantir la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation si $w(t) = 0$ et donc de satisfaire l'exigence (4.13a).

La synthèse de l'observateur consiste donc à établir des conditions satisfaisant (4.16). La dérivée de $V(t)$ le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation (4.8) est donnée par

$$\dot{V}(t) \quad = \quad \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \tag{4.19}$$

qui s'écrit en remplaçant $\dot{e}(t)$ par son expression (4.9) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \quad &= \quad e^T(t)\left(A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t)\right)e(t) + w^T(t)(\tilde{E} - \tilde{K}W_c)^T Pe(t) \\ &+ \quad e^T(t)P(\tilde{E} - \tilde{K}W_c)w(t) \quad . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Un vecteur augmenté de la forme

$$\psi(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} e^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}^T \tag{4.21}$$

permet d'écrire l'équation (4.20) sous la forme compacte suivante

$$\dot{V}(t) = \psi(t)^T \Omega(t) \psi(t) \ , \tag{4.22}$$

où

$$\Omega(t) \ = \ \begin{bmatrix} A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) & P(\tilde{E} - \tilde{K}W_c) \\ (\tilde{E} - \tilde{K}W_c)^T P & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{4.23}$$

Ainsi, compte tenu de la forme (4.22) de $\dot{V}(t)$, la condition (4.16) devient :

$$\psi^T(t) \left\{ \Omega(t) + \begin{bmatrix} H^T H + 2\alpha P & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \mathrm{I} \end{bmatrix} \right\} \psi(t) < 0 \tag{4.24}$$

qui est une forme quadratique en $\psi(t)$. La négativité de (4.24) est alors garantie par la négativité de l'expression à l'intérieur des crochets. De ce fait, en introduisant les définitions (4.10) de $A_{obs}(t)$ et (4.23) de $\Omega(t)$, l'inégalité (4.24) est satisfaite si :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \begin{bmatrix} (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i)^T P + P(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i) + H^T H + 2\alpha P & P(\tilde{E} - \tilde{K}W_c) \\ (\tilde{E} - \tilde{K}W_c)^T P & -\gamma^2 \mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ . \tag{4.25}$$

En posant $G = P\tilde{K}$ et $\overline{\gamma} = \gamma^2$, il est possible de linéariser (4.25). Enfin, compte tenu des propriétés de somme convexe des fonctions poids, on peut proposer une solution au problème (4.13) sous la forme du théorème suivant.

Théorème 4.1 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps continu* (4.4) *et l'observateur à gain proportionnel* (4.7)*, sous l'hypothèse 4.1, satisfait aux exigences* (4.13) *et tend exponentiellement vers zéro (lorsque* $w(t) = 0$*) s'il existe deux matrices* $P = P^T > 0$ *et G de dimensions appropriées et un scalaire* $\overline{\gamma} > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P\tilde{A} - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i + H^T H + 2\alpha P & P\tilde{E} - GW_c \\ \tilde{E}^T P - (GW_c)^T & -\overline{\gamma}\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \tag{4.26}$$

pour une matrice H et un $\alpha > 0$ *donné. Le gain de l'observateur est donné par* $\tilde{K} = P^{-1}G$ *et le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $w(t)$ *vers* $v(t)$ *est donné par* $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$*.*

Remarquons que la négativité de l'inégalité (4.26) implique la négativité du bloc (1,1). Par conséquent, s'il existe une solution satisfaisant les conditions du théorème 4.1 alors l'inégalité

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i + 2\alpha P < 0 \ , \quad i = 1 \ , \cdots, L \tag{4.27}$$

est satisfaite. La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation, dans le cas où aucune perturbation n'est considérée, est ainsi assurée (c.f. théorème 3.5).

Synthèse de l'observateur à temps discret

La conception de l'observateur à temps discret suit une démarche de synthèse tout à fait semblable à celle appliquée à l'observateur à temps continu. L'erreur d'estimation doit tendre exponentiellement vers zéro si aucune perturbation n'agit sur le système et doit, dans le cas contraire, garantir les exigences de performances (4.13).
A cette fin, nous considérons la fonction de Lyapunov (4.14) telle que :

$$\exists\, \alpha > 0 : \Delta V(t) < -2\alpha V(t) - v^T(t)v(t) + \gamma^2 w^T(t)w(t) \ , \tag{4.28}$$

où la variation $\Delta V(t)$ de la fonction de Lyapunov est donnée par $\Delta V(t) = V(t+1) - V(t)$, $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ étant respectivement le taux de décroissance de l'erreur d'estimation et le niveau d'atténuation de la perturbation. En utilisant l'expression (4.14) de $V(t)$ dans (4.28) puis en remplaçant $e(t+1)$ et $v(t)$ respectivement par (4.9) et (4.12), il vient que (4.28) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} A_{obs}^T(t)PA_{obs}(t) - (1-2\alpha)P + H^TH & A_{obs}^T(t)P(\tilde{E} - \tilde{K}W_c) \\ (\tilde{E} - \tilde{K}W_c)^T PA_{obs}(t) & (\tilde{E} - \tilde{K}W_c)^T P(\tilde{E} - \tilde{K}W_c) - \gamma^2 \mathrm{I} \end{bmatrix} \ < \ 0 \ , \tag{4.29}$$

inégalité qui présente de multiples produits croisés entre P et $\tilde{K}$. Il est toutefois possible de linéariser (4.29) en appliquant le complément de Schur puis en remplaçant $A_{obs}(t)$ par son expression (4.10) et en posant enfin $G = P\tilde{K}$ et $\overline{\gamma} = \gamma^2$. Enfin, compte tenu des propriétés de somme convexe des fonctions poids, on peut proposer une solution au problème (4.13) en temps discret sous la forme du théorème suivant.

Théorème 4.2 (MDD). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps discret* (4.4) *et l'observateur à gain proportionnel* (4.7)*, sous l'hypothèse 4.1, satisfait les exigences* (4.13) *et tend exponentiellement vers zéro (lorsque* $w(t) = 0$*) s'il existe deux matrices* $P = P^T > 0$ *et* G *de dimensions appropriées et un scalaire* $\overline{\gamma} > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \min \overline{\gamma} & \textit{sous les contraintes} & \\ \begin{bmatrix} H^TH - (1-2\alpha)P & 0 & \tilde{A}^TP - \tilde{C}_i^TG^T \\ 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & \tilde{E}^TP - W_c^TG^T \\ (*) & (*) & -P \end{bmatrix} & < & 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \end{array} \tag{4.30}$$

pour une matrice H *et un* $0 < \alpha < 0.5$ *donné. Le gain de l'observateur est donné par* $\tilde{K} = P^{-1}G$ *et le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $w(t)$ *vers* $v(t)$ *est donné par* $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$*.*

Commentaires sur la synthèse d'un observateur à gain proportionnel

Les synthèses à temps continu et à temps discret d'un observateur robuste à gain proportionnel ont été abordées au cours des deux paragraphes précédents. Toutefois, les synthèses de cet observateur doivent être réalisées moyennant un compromis entre deux objectifs antagonistes.

En effet, nous cherchons, d'une part, une dynamique rapide de l'erreur d'estimation ajustée par le biais d'un gain important de l'observateur et, d'autre part, un niveau d'atténuation des perturbations ajusté par le biais d'un gain faible. Or, pour atteindre ces deux objectifs, n'est disponible qu'un seul degré de liberté (le gain de l'observateur $\tilde{K}$). Afin de surmonter cette difficulté, la synthèse d'un observateur à gain proportionnel-intégral est étudiée dans la section suivante.

4.2.3 Synthèse d'un observateur à gain proportionnel-intégral

Le principe de reconstruction de l'observateur à gain proportionnel, proposé au cours des sections précédentes, repose sur une correction de l'estimation d'état à partir de l'erreur d'estimation entre les sorties mesurées et les sorties estimées. Cette correction s'effectue par le biais d'une action proportionnelle à l'écart de l'erreur de reconstruction des sorties. Elle peut néanmoins s'avérer insuffisante et son action inefficace par exemple quand le modèle du système en question est mal connu ou quand des perturbations agissent sur le système. En effet, un seul degré de liberté est disponible pour garantir à la fois les performances dynamiques et les performances de robustesse de l'erreur d'estimation.

Afin de surmonter ces difficultés, une action intégrale permettant d'effectuer une correction proportionnelle à l'écart de l'intégrale des sorties mesurées et des sorties estimées peut être ajoutée en vue d'introduire un degré de liberté supplémentaire lors de la synthèse de l'observateur [Beale et Shafai, 1989; Weinmann, 1991]. L'observateur ainsi obtenu, dit à gain proportionnel-intégral (PI), permet d'améliorer considérablement l'estimation d'état dans la mesure où deux degrés de liberté sont désormais disponibles pour régler les performances de l'observateur.

Busawon et Kabore [2001] ont montré qu'un tel observateur possède la capacité d'atténuer les effets des perturbations (p. ex. les erreurs de mesure) ou de certaines erreurs de modélisation sur l'erreur d'estimation. Hua et Guan [2005] ont proposé une démarche de synthèse d'un observateur PI dans un contexte de synchronisation d'un *système chaotique de Chua*. La synchronisation est entendue comme la synthèse d'un récepteur (c.-à-d. d'un observateur) chargé de synchroniser (c.-à-d. d'estimer) l'état de l'émetteur dans un temps fini. La synthèse du récepteur, réalisée à l'aide de la seconde méthode de Lyapunov, permet d'introduire des performances de robustesse vis-à-vis des perturbations affectant la communication. Dans un contexte similaire, Johnson et Busawon [2006] ont récemment mis à profit les capacités de robustesse offertes par l'observateur PI afin de procéder à la synchronisation d'un *oscillateur de Duffing* comportant un bruit dans le message à transmettre.

En revanche, la conception des observateurs PI pour les multimodèles ne semble pas encore avoir été abordée dans la littérature.

Structure de l'observateur PI

L'observateur PI fait non seulement appel à l'écart de l'erreur d'estimation mais aussi à l'intégrale de cet écart. Un signal $z(t)$, issu de l'intégration de la sortie du multimodèle, est alors

introduit de façon à ajouter l'action intégrale dans l'équation de l'observateur. Dans le cas général, il est possible d'introduire un degré de liberté supplémentaire en remplaçant l'intégration pure par un filtrage de la sortie. En considérant la variable additionnelle $z(t)$, le multimodèle découplé sous sa forme augmentée (4.5) devient :

$$\delta(x(t)) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{E}w(t) \ , \tag{4.31a}$$
$$\delta(z(t)) = Mz(t) + \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \ , \tag{4.31b}$$
$$y(t) = \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \ , \tag{4.31c}$$

où les matrices $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ sont les matrices partitionnées par blocs définies respectivement en (3.8) et en (4.6). La matrice $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ dite *d'effet de décoloration* permet de régler la réponse transitoire du signal $z(t)$. Il est possible de constater que l'équation (4.31b) régissant l'évolution de la variable $z(t)$ ne modifie en rien les équations originales du multimodèle. Cette équation est volontairement introduite dans les équations du multimodèle de façon à rendre aisée la synthèse de l'observateur PI.

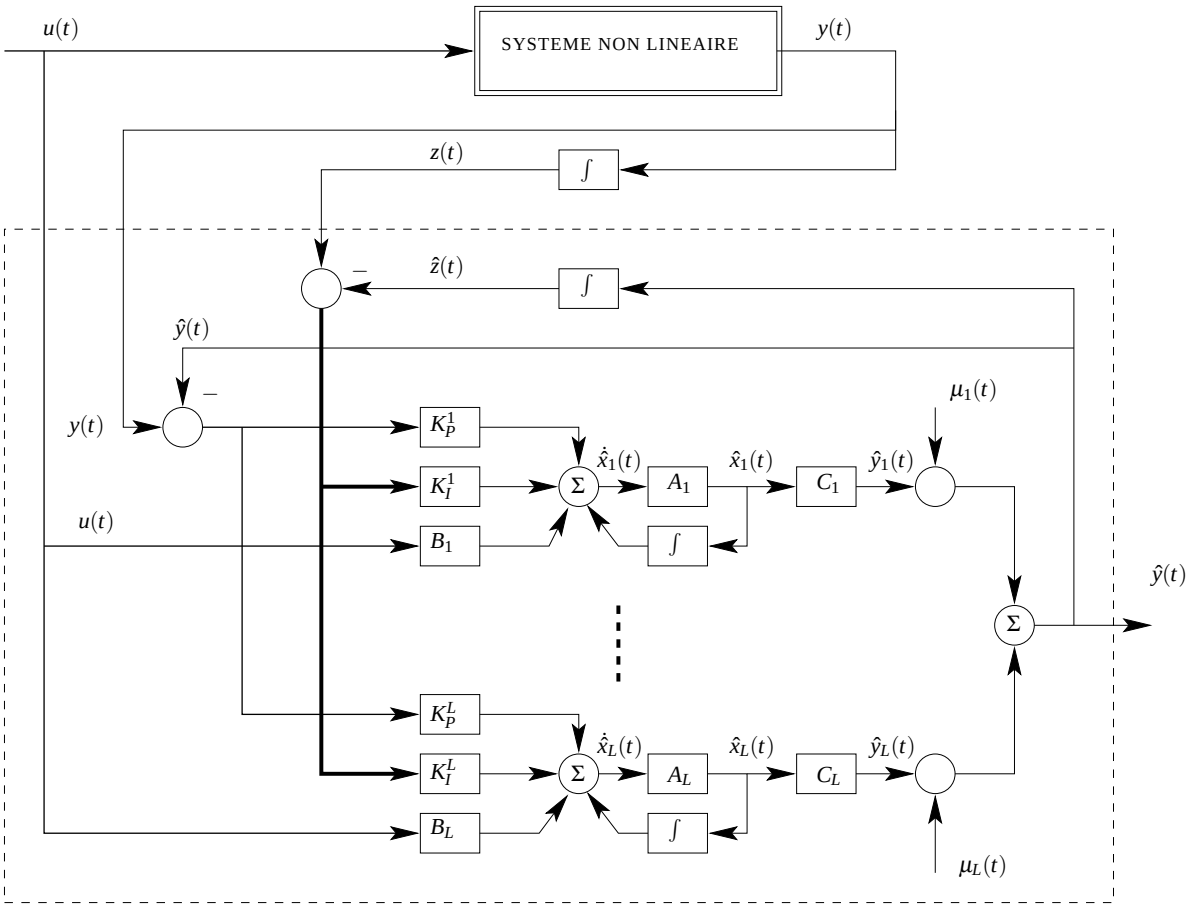

Figure 4.2 – Structure de l'observateur PI à temps continu en considérant $M = 0$

Remarque 4.4. *Si $M = 0$ alors le signal additionnel $z(t)$ est une action intégrale pure définie dans le cas continu par $z(t) = \int_0^t y(\xi)d\xi$ et par $z(t) = \sum_{k=0}^{t} y(k)$ dans le cas discret.*

Les nouvelles équations (4.31) du multimodèle peuvent se mettre sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned} \delta(x_a(t)) &= \tilde{A}_a(t)x_a(t)+\overline{C}_1\tilde{B}u(t)+\tilde{E}_a w(t) \ , && (4.32a)\\ y(t) &= \tilde{C}(t)\overline{C}_1^T x_a(t)+W_c w(t) \ , && (4.32b)\\ z(t) &= \overline{C}_2^T x_a(t) \ , && (4.32c) \end{aligned}$$

avec $x_a(t)\in\mathbb{R}^{(n+p)}$, $\tilde{A}_a\in\mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $\tilde{E}_a\in\mathbb{R}^{(n+p)\times r}$, $\overline{C}_1\in\mathbb{R}^{(n+p)\times n}$ et $\overline{C}_2\in\mathbb{R}^{(n+p)\times p}$ définies par

$$x_a(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix} \ , \ \tilde{A}_a(t)=\begin{bmatrix}\tilde{A} & 0_{(n\times p)}\\ \tilde{C}(t) & M\end{bmatrix}, \tilde{E}_a=\begin{bmatrix}\tilde{E}\\ W_c\end{bmatrix}, \overline{C}_1=\begin{bmatrix}\mathrm{I}_n\\ 0_{(p\times n)}\end{bmatrix}, \overline{C}_2=\begin{bmatrix}0_{(n\times p)}\\ \mathrm{I}_p\end{bmatrix} . \tag{4.33}$$

La reconstruction de l'état du multimodèle découplé (4.32) est opérée à l'aide d'un observateur PI de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta(\hat{x}_a)(t) &= \tilde{A}_a(t)\hat{x}_a(t)+\overline{C}_1\tilde{B}u(t)+K_P(y(t)-\hat{y}(t))+K_I(z(t)-\hat{z}(t)) \ , && (4.34a)\\ \hat{y}(t) &= \tilde{C}(t)\overline{C}_1^T\hat{x}_a(t) \ , && (4.34b)\\ \hat{z}(t) &= \overline{C}_2^T\hat{x}_a(t) \ , && (4.34c) \end{aligned}$$

où $\hat{x}_a\in\mathbb{R}^{(n+p)}$ est l'estimation du vecteur d'état augmenté x_a et $\hat{y}(t)$ la sortie reconstruite par l'observateur. L'appellation "observateur proportionnel-intégral" sous laquelle apparaît cet observateur tire son origine de la nature de la correction apportée par les gains $K_P\in\mathbb{R}^{(n+p)\times p}$ et $K_I\in\mathbb{R}^{(n+p)\times p}$. En effet, le gain K_P assure une correction proportionnelle à l'erreur d'estimation de la sortie $y(t)-\hat{y}(t)$. Quant au gain K_I, il assure une correction proportionnelle à l'écart entre l'intégrale de la sortie $y(t)$ et celle de la sortie estimée $\hat{y}(t)$.

Conception de l'observateur PI robuste

L'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$e_a(t)=x_a(t)-\hat{x}_a(t) \tag{4.35}$$

et sa dynamique, obtenue par l'agrégation des équations (4.32) et (4.34), par :

$$\delta(e_a(t)) = \tilde{A}_{obs}(t)e_a(t)+(\tilde{E}_a-K_P W_c)w(t) \ . \tag{4.36}$$

La matrice d'évolution $\tilde{A}_{obs}(t)$ peut être explicitée, en faisant appel aux propriétés de somme convexe des fonctions de pondération, par

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{obs}(t) &= \tilde{A}_a(t)-K_P\tilde{C}(t)\overline{C}_1^T-K_I\overline{C}_2^T \ , && (4.37)\\ &= \sum_{i=1}^{L}\mu_i(t)\Phi_i && (4.38) \end{aligned}$$

avec

$$\Phi_i = \bar{A}_i - K_P\tilde{C}_i\bar{C}_1^T - K_I\bar{C}_2^T \quad \text{et} \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ \tilde{C}_i & M \end{bmatrix} . \tag{4.39}$$

Grâce à son action intégrale, l'observateur PI (4.34) introduit un degré de liberté supplémentaire lors de sa conception. En effet, d'après (4.36), la perturbation $w(t)$ agit directement sur la dynamique de l'erreur d'estimation à travers la matrice $\tilde{E}_a - K_P W_c$. Une action sur le gain K_P de l'observateur est donc en mesure d'atténuer l'impact de $w(t)$ sur l'erreur d'estimation. Quant aux performances dynamiques de l'observateur, elles peuvent à leur tour être ajustées grâce à un choix approprié du gain K_I. Deux degrés de liberté sont alors disponibles pour parvenir à un compromis entre l'atténuation de l'effet des perturbations et les performances dynamiques de l'observateur. Toutefois, un découplage parfait entre la perturbation $w(t)$ et l'erreur d'estimation $e_a(t)$ peut uniquement être obtenu si la condition $\tilde{E}_a = K_P W_c$ est vérifiée. Dans la pratique, cette condition s'avère à la fois restrictive et difficile à satisfaire. En effet,

$$\tilde{E}_a \;=\; K_p W_c \tag{4.40}$$

et compte tenu de (4.33), alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} \\ W_c \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} K_{P1} \\ \mathrm{I_r} \end{bmatrix} W_c \;, \tag{4.41}$$

$$\tilde{E} \;=\; K_{P1} W_c \;, \tag{4.42}$$

$$K_{P1} \;=\; \tilde{E} W_c^T (W_c W_c^T)^{-1} \;. \tag{4.43}$$

Cette condition est satisfaite à condition que W_c soit de plein rang ligne. Autrement dit, il faut que le nombre de sorties du système soit égal au nombre de perturbations agissant sur le système. Par conséquent, un découplage parfait de la perturbation ne peut pas être facilement accompli.

La synthèse de l'observateur PI consiste à chercher les matrices K_P et K_I telles que l'erreur d'estimation $e_a(t)$ définie par (4.35) satisfasse les exigences (4.13). Il convient toutefois de remarquer que le signal objectif est maintenant donné par

$$v(t) \;=\; H e_a(t) \;. \tag{4.44}$$

Une démarche similaire à celle adoptée lors de la conception de l'observateur P peut être appliquée en vue de parvenir aux conditions en mesure d'assurer les performances dynamiques (4.13) sous la forme des théorèmes suivants.

Théorème 4.3 (MDC). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps continu* (4.32) *et l'observateur à gain proportionnel-intégral* (4.34)*, sous l'hypothèse 4.1, satisfait aux exigences* (4.13) *et tend exponentiellement vers zéro (lorsque* $w(t) = 0$*) s'il existe trois matrices* $P = P^T > 0$*,* G_P *et* G_I *de dimensions appropriées et un scalaire* $\bar{\gamma} > 0$*, solutions du*

problème d'optimisation convexe suivant :

$$\begin{array}{c} \min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_i + \Gamma_i^T + H^T H + 2\alpha P & P\tilde{E}_a - G_P W_c \\ \tilde{E}_a^T P - (G_P W_c)^T & -\overline{\gamma}\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad , \end{array} \tag{4.45}$$

où

$$\Gamma_i \quad = \quad P\overline{A}_i - G_P \tilde{C}_i \overline{C}_1^T - G_I \overline{C}_2^T \tag{4.46}$$

pour une matrice M, une matrice H et un $\alpha > 0$ donné. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P^{-1}G_P$ et $K_I = P^{-1}G_I$. De plus, le gain $\mathcal{L}_2$ de $w(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Théorème 4.4 (MDD). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps discret (4.32) et l'observateur à gain proportionnel-intégral (4.34), sous l'hypothèse 4.1, satisfait les exigences (4.13) et tend exponentiellement vers zéro (lorsque $w(t) = 0$) s'il existe trois matrices $P = P^T > 0$, G_P et G_I de dimensions appropriées et un scalaire $\overline{\gamma} > 0$, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{array}{c} \min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} H^T H - (1-2\alpha)P & 0 & \Gamma_i^T \\ 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & \tilde{E}_a^T P - W_c^T G_P^T \\ (*) & (*) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad , \end{array} \tag{4.47}$$

où

$$\Gamma_i \quad = \quad P\overline{A}_i - G_P \tilde{C}_i \overline{C}_1^T - G_I \overline{C}_2^T \tag{4.48}$$

pour une matrice M, une matrice H et un $0 < \alpha < 0.5$ donné. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P^{-1}G_P$ et $K_I = P^{-1}G_I$. De plus, le gain $\mathcal{L}_2$ de $w(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Remarque 4.5. *La résolution des conditions proposées par les théorèmes 4.3 et 4.4 peut éventuellement s'accompagner d'une recherche de la matrice d'effet de décoloration M. Cependant, en raison du produit $P\overline{A}_i$ ces conditions ne se présentent pas sous une forme LMI. Il est toutefois possible d'obtenir des conditions de type LMI en considérant une matrice bloc diagonale $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ et en introduisant un changement de variable approprié de la forme $N = P_2 M$.*

Les deux corollaires suivants accompagnent les théorèmes 4.3 et 4.4. Ils proposent des conditions assurant la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation quand aucune perturbation n'est prise en compte.

Corollaire 4.1 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps continu* (4.32) *et l'observateur PI* (4.34)*, converge exponentiellement vers zéro (lorsque* $w(t)=0$*) s'il existe une matrice symétrique et définie positive P, des matrices* G_P *et* G_I *vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{aligned}(\bar{A}_i+\alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}}\mathrm{P} \quad &+ \quad P(\bar{A}_i+\alpha \mathrm{I}) \\ &- \quad (G_P\tilde{C}_i\bar{C}_1^T+G_I\bar{C}_2^T)^T-(G_P\tilde{C}_i\bar{C}_1^T+G_I\bar{C}_2^T)<0 \ , \quad i=1,\cdots,L \end{aligned} \tag{4.49}$$

pour une matrice M et un scalaire positif α *donné. Les gains de l'observateur PI sont donnés par* $K_P = P^{-1}G_P$ *et* $K_I = P^{-1}G_I$*.*

Corollaire 4.2 (MDD)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps discret* (4.32) *et l'observateur PI* (4.34)*, converge exponentiellement vers zéro (lorsque* $w(t)=0$*) s'il existe une matrice symétrique et définie positive P, des matrices* G_P *et* G_I *vérifiant les LMI suivantes :*

$$\begin{bmatrix} (1-2\alpha)P & (P\bar{A}_i-G_P\tilde{C}_i\bar{C}_1^T-G_I\bar{C}_2^T)^T \\ P\bar{A}_i-G_P\tilde{C}_i\bar{C}_1^T-G_I\bar{C}_2^T & P \end{bmatrix} > 0 \ , \quad i=1,\cdots,L \tag{4.50}$$

pour une matrice M et un scalaire positif $0<\alpha<0.5$ *donné. Les gains de l'observateur PI sont donnés par* $K_P = P^{-1}G_P$ *et* $K_I = P^{-1}G_I$*.*

Exemple 4.1 (**Exemple de synthèse des observateurs P et PI robustes**)
Il s'agit d'estimer l'état d'un système à temps continu représenté par un multimodèle découplé constitué de $L=2$ *sous-modèles. Les valeurs numériques des matrices du multimodèle sont :*

$$A_1=\begin{bmatrix}-2.0 & 0.5 & 0.6\\ -0.3 & -0.9 & -0.5\\ -1.0 & 0.6 & -0.8\end{bmatrix} \ , \qquad A_2=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.4\\ 0.1 & -1.0\end{bmatrix} \ ,$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1.0 & -0.8 & 0.5\end{bmatrix}^T \ , \qquad B_2=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.8\end{bmatrix} \ ,$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0.9 & -0.8 & -0.5\\ -0.4 & 0.6 & 0.7\end{bmatrix} \ , \qquad C_2=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.6\\ 0.4 & -0.7\end{bmatrix} \ ,$$

$$W_c=\begin{bmatrix}0.4 & 0\\ 0 & -0.3\end{bmatrix} \ , \qquad E_i=0 \ , \ M=0 \ .$$

La perturbation $w(t)$ *considérée est un bruit aléatoire normalement distribué de moyenne nulle et de dispersion égale à un.*

La variable d'indexation ξ *est ici le signal de commande* $u(t)\in[0,1]$*. Les fonctions de*

pondération sont obtenues par la normalisation des fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t))/\sum_{j=1}^{L}\omega_j(\xi(t)) \ , \tag{4.51}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t)-c_i)^2/\sigma^2\right) \ , \tag{4.52}$$

de dispersion $\sigma = 0.5$ *et de centres* $c_1 = 0.25$ *et* $c_2 = 0.75$*. L'entrée, les fonctions de pondération et les sorties du multimodèle sont illustrées sur la figure 4.3.*

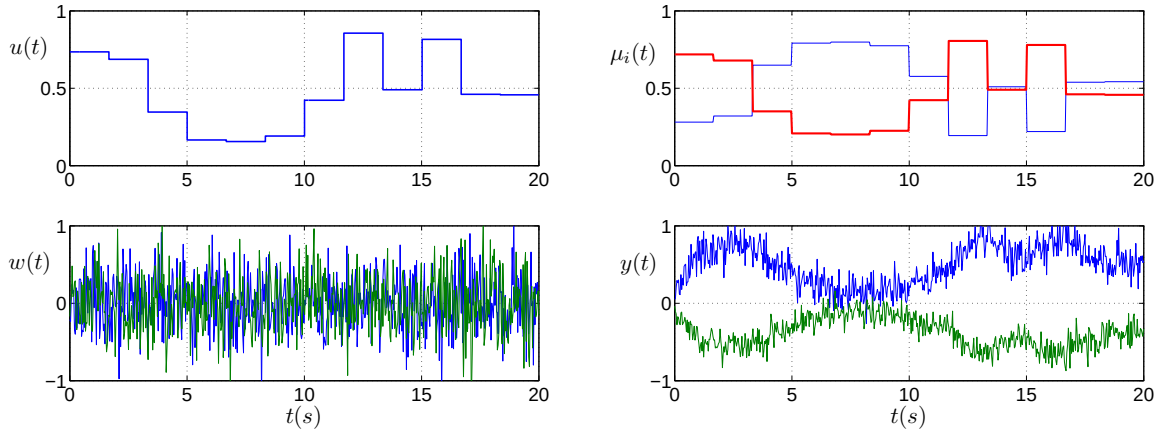

Figure 4.3 – Entrée et perturbations (à gauche), fonctions de pondération et sorties (à droite)

Une solution vérifiant les conditions du théorème 4.1 est donnée par :

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.1899 & -0.0310 & 0.0892 & -0.0310 & -0.0136 \\ 0.2180 & 0.1091 & 0.2130 & -0.0143 & -0.0259 \end{bmatrix}^T ,$$

$$P = \begin{bmatrix} 3.3411 & -0.1514 & -2.6919 & 0.1249 & -0.0673 \\ -0.1514 & 3.9049 & -1.0080 & -0.2499 & 0.5107 \\ -2.6919 & -1.0080 & 5.4666 & 0.1282 & -0.2462 \\ 0.1249 & -0.2499 & 0.1282 & 11.4864 & -10.1873 \\ -0.0673 & 0.5107 & -0.2462 & -10.1873 & 25.6765 \end{bmatrix}$$

pour une matrice $H = \mathrm{I}_5$*, un niveau d'atténuation minimal* $\gamma = 1.414$ *et un taux de décroissance* $\alpha = 0.8$*.*

Une solution vérifiant les conditions du théorème 4.3 est :

$$K_P = \begin{bmatrix} 0.0030 & -0.0244 & -0.0101 & -0.0106 & -0.0007 & 0.9875 & -0.0125 \\ 0.0109 & 0.0366 & 0.0227 & 0.0094 & -0.0029 & 0.0166 & 1.0166 \end{bmatrix}^T ,$$

$$K_I = \begin{bmatrix} 0.0933 & 0.7077 & 0.1432 & 0.0064 & 0.0256 & 3.4754 & 0.0422 \\ 0.0954 & 0.6210 & 0.1449 & 0.0051 & 0.0219 & -0.3819 & 3.5098 \end{bmatrix}^T,$$

$$P = \begin{bmatrix} 4.9917 & -0.5801 & -3.4225 & 0.0553 & 0.0023 & 0.1411 & 0.1411 \\ -0.5801 & 5.0509 & -0.9333 & -0.1397 & 0.1482 & -1.1309 & -1.1309 \\ -3.4225 & -0.9333 & 7.2125 & 0.0651 & -0.1731 & 0.2211 & 0.2211 \\ 0.0553 & -0.1397 & 0.0651 & 8.2562 & -6.9466 & 0.0698 & 0.0698 \\ 0.0023 & 0.1482 & -0.1731 & -6.9466 & 19.8995 & -0.1963 & -0.1963 \\ 0.1411 & -1.1309 & 0.2211 & 0.0698 & -0.1963 & 1.6524 & 0.3681 \\ 0.1411 & -1.1309 & 0.2211 & 0.0698 & -0.1963 & 0.3681 & 1.6524 \end{bmatrix}$$

pour une matrice $H = \mathrm{I}_7$, *un niveau d'atténuation minimal* $\gamma = 0.333$ *et un taux de décroissance* $\alpha = 0.8$.

Remarquons que le même taux de décroissance α *est imposé dans la synthèse des deux observateurs. Il convient de souligner le fort contraste entre les niveaux d'atténuation* α *obtenus avec les observateurs P et PI. Comme attendu, l'observateur PI permet d'atteindre un niveau d'atténuation plus faible que l'observateur P tout en garantissant les mêmes performances dynamiques de l'erreur d'estimation.*

L'estimation de l'état du multimodèle découplé fournie par les observateurs P et PI est illustrée sur la figure 4.4. Sur cette figure, les composantes du vecteur de l'erreur d'estimation d'état $e_x(t)$ *sont notées* e_i. *Les conditions initiales du multimodèle sont égales à :* $x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$ *et les conditions initiales de l'observateur sont nulles. Dans les deux cas, l'erreur d'estimation converge vers zéro avec une vitesse similaire (même taux de décroissance de l'erreur d'estimation).*

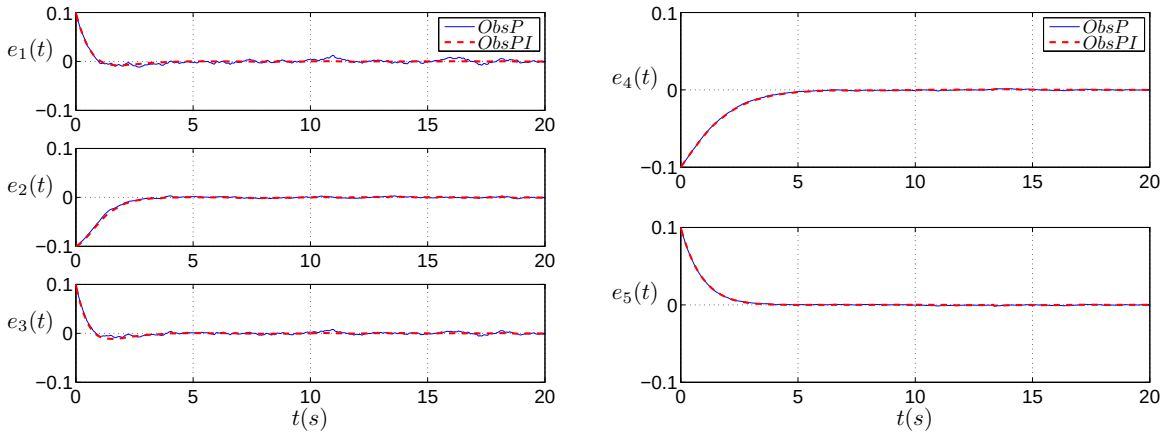

Figure 4.4 – Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 (à gauche) et du sous-modèle 2 (à droite)

La figure 4.5, à gauche, représente la norme $\mathcal{L}_2$ *des signaux* $v(t)$ *et* $\gamma^2 w(t)$ *obtenue pour chaque observateur en considérant une erreur d'estimation nulle à* $t = 0$. *L'examen de cette figure fait apparaître clairement que la condition* $\|v(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2$, *imposée lors de la synthèse de l'observateur, est vérifiée dans les deux cas. Par conséquent, les performances robustes*

(4.13) *sont bien satisfaites pour les deux observateurs proposés. Une comparaison des signaux* $\nu(t)$ *obtenus avec chaque observateur est présentée sur la figure 4.5 située à droite. Il apparaît, d'après cette figure, que la norme* $\mathcal{L}_2$ *du signal* $\nu_{PI}(t)$ *est inférieure à celle du signal* $\nu_P(t)$*. Les résultats théoriques sont ainsi vérifiés.*

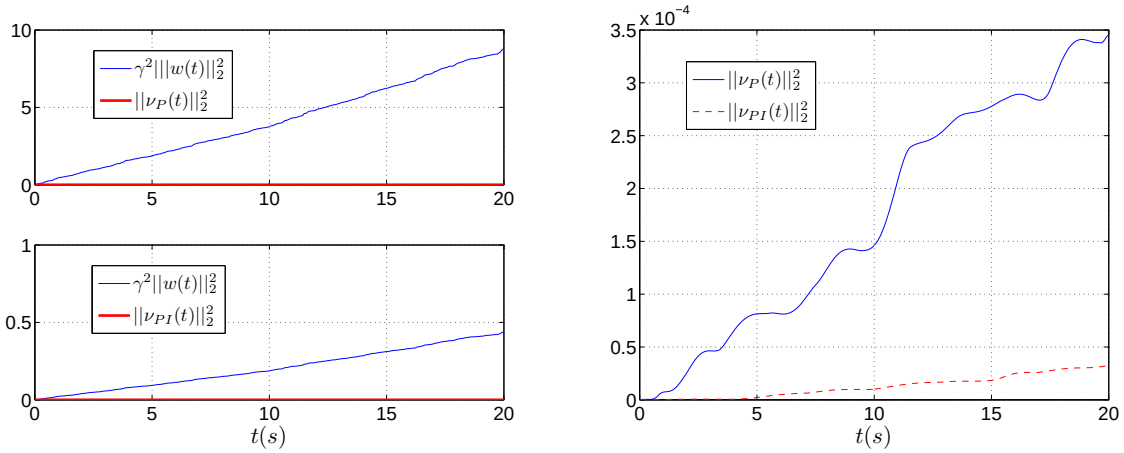

Figure 4.5 – Normes $\mathcal{L}_2$

Une perturbation constante d'amplitude 0.5 *est maintenant ajoutée sur la sortie* $y_1(t)$ *à* $t = 10$*s. Cette perturbation peut par exemple être occasionnée par un défaut de capteur. L'estimation de l'état du multimodèle découplé livrée par les observateurs P et PI est illustrée sur la figure 4.6. Il y apparaît clairement que l'observateur PI fournit une meilleure estimation d'état en présence de la perturbation introduite.*

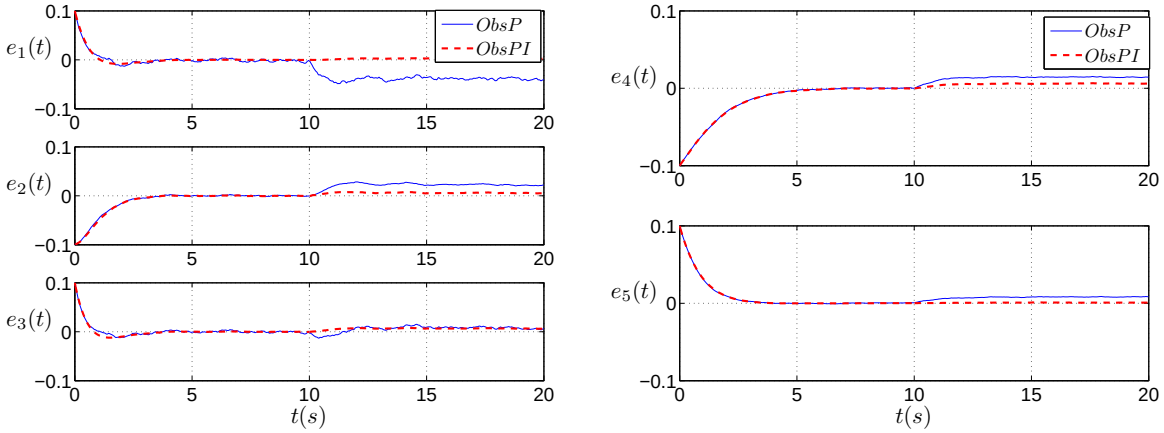

Figure 4.6 – Erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1 (à gauche) et du sous-modèle 2 (à droite) en présence d'une perturbation constante sur la sortie

4.3 Estimation d'état robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques

Le problème posé par la reconstruction d'état d'un système représenté par un multimodèle découplé et soumis à des perturbations a été abordé au cours de la section précédente. Les solutions proposées sont basées sur une représentation précise du comportement du système. Il convient cependant de souligner qu'un modèle comporte toujours des erreurs de modélisation susceptibles d'affecter l'estimation d'état. Ces imprécisions de modélisation doivent être quantifiées lors de la phase de modélisation de manière à fournir une information sur la méconnaissance du système.

Les imprécisions de modélisation d'un système autonome représenté par un modèle linéaire peuvent être traduites sous la forme :

$$\delta(x(t)) = (A+\Delta)x(t) \quad , \tag{4.53}$$

où la matrice A représente le modèle nominal du système et Δ les incertitudes du système. Divers types d'incertitudes peuvent être considérés en fonction des hypothèses émises sur la façon dont les incertitudes Δ agissent sur les paramètres nominaux du système. Elles sont cataloguées sous l'appellation d'*incertitudes structurées* ou d'*incertitudes non structurées*. Les incertitudes non structurées sont utilisées lorsque le mode d'action des incertitudes sur les paramètres nominaux n'est pas bien établi. Quant aux incertitudes structurées, elles requièrent une connaissance précise de la structure des incertitudes. Ces deux familles d'incertitudes apparaissent dans la littérature sous plusieurs formes, les plus rencontrées étant [Dubuisson, 1990, chap. 3] :

- les incertitudes non structurées modélisées par des variations paramétriques contenues dans Δ et dont seule une majoration de type norme est connue $\|\Delta\| \leq \alpha$;
- les incertitudes stochastiques permettant de prendre en compte des incertitudes modélisées par $\Delta = \sum_{i}^{L} p_i G_i b_i$ où b_i est par exemple un bruit blanc ;
- les incertitudes structurées à dépendance affine $\Delta = \sum_{i}^{L} p_i A_i$ où les paramètres p_i sont de type intervalle ;
- les incertitudes structurées bornées en norme $\Delta = DF(t)E$ où D et E sont des matrices constantes et où $F^T(t)F(t) \leq \mathrm{I}$.

Cette dernière forme d'incertitude sera la seule considérée dans la suite de cette section. Dans un contexte de synthèse d'une loi de commande, Petersen [1987] est l'un des premiers à avoir livré des résultats sur la stabilité par retour d'état d'un système linéaire comportant une incertitude de cette forme sur la matrice d'évolution. Cette forme de structure est souvent rencontrée dans la littérature et nombreux sont les articles portant sur la commande et par extension sur l'estimation d'état des systèmes dont les incertitudes sont bornées en norme.

4.3.1 Représentation multimodèle d'un système incertain

La représentation d'un système non linéaire sous la forme d'un multimodèle découplé incertain est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta(x_i(t)) &= (A_i + \Delta A_i(t))x_i(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + E_i w(t) \ , & (4.54a) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \ , & (4.54b) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) + W_c w(t) \ , & (4.54c) \end{aligned}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle et où $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $w \in \mathbb{R}^r$ sont respectivement l'entrée, la sortie et la perturbation du système. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$ et $W_c \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont des matrices constantes connues caractérisant le comportement nominal de chaque sous-modèle et l'influence des perturbations sur le système.

Les imprécisions de la modélisation du système sont représentées par des incertitudes structurées bornées en norme :

$$\begin{aligned} \Delta A_i(t) &= M_i F_i(t) N_i \ , & (4.55a) \\ \Delta B_i(t) &= H_i S_i(t) D_i \ , & (4.55b) \end{aligned}$$

où M_i, N_i, H_i et D_i sont des matrices connues, constantes et de dimensions appropriées. Les fonctions matricielles $F_i(t)$ et $S_i(t)$ sont inconnues, avec des éléments de Lebesgue mesurables, et satisfont :

$$\begin{aligned} F_i^T(t)F_i(t) \leq \mathrm{I} \ , \qquad \forall \mathrm{t} \geq 0 \ , & (4.56) \\ S_i^T(t)S_i(t) \leq \mathrm{I} \ , \qquad \forall \mathrm{t} \geq 0 \ . & (4.57) \end{aligned}$$

Remarque 4.6. *Les incertitudes bornées en norme définissent, dans l'espace paramétrique des éléments $(A_i + \Delta A_i, B_i + \Delta B_i)$, un hyper-ellipsoïde représentant le domaine d'incertitude paramétrique et dont le centre est la matrice nominale [Oustaloup, 1994, chap. 9]. On trouvera plusieurs arguments en faveur de l'utilisation de cette forme d'incertitudes dans [Khargonekar et al., 1990] et les références qui s'y rapportent.*

Exemple 4.2 (Exemple de système avec incertitudes bornées en norme)
Considérons un système linéaire autonome de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \ . \qquad (4.58)$$

Les différents éléments de la matrice A comportent des incertitudes. Par exemple, l'élément $(1,1)$ comporte une incertitude de 10% de la valeur nominale et l'élément $(2,2)$ une incertitude de 40% de la valeur nominale. Les deux autres termes comportent une incertitude de 20% de leurs valeurs nominales. Supposons que les incertitudes affectant les différents termes de la

matrice A agissent indépendamment les unes des autres. Le système incertain peut alors être représenté sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) = \begin{bmatrix} -1+0.1\rho_1 & 1+0.2\rho_2 \\ -1+0.2\rho_3 & -1+0.4\rho_4 \end{bmatrix} x(t) \ , \qquad \|\rho_i\| \leq 1 \tag{4.59}$$

soit encore

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + M\rho N \ , \ \|\rho\| \leq 1 \tag{4.60}$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \rho = diag\left\{\rho_1 \ \cdots \ \rho_4\right\} \ et \ N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \ . \tag{4.61}$$

Remarquons toutefois que cette représentation n'est pas unique. D'autres choix de matrices M, ρ et N peuvent être envisagés, par exemple si

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

alors

$$M = 0.5 \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 \end{bmatrix} \ et \ N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

compte tenu du fait que $\|\rho\| \leq 2$.

4.3.2 Conception d'un observateur à gain proportionnel

Les équations (4.54) du multimodèle peuvent s'écrire sous la forme compacte :

$$\delta(x(t)) = (\tilde{A}+\Delta\tilde{A}(t))x(t)+(\tilde{B}+\Delta\tilde{B}(t))u(t)+\tilde{E}w(t) \ , \tag{4.64a}$$
$$y(t) = \tilde{C}(t)x(t)+W_c w(t) \ , \tag{4.64b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état augmenté et où $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{E}$ ont déjà été définies dans les sections précédentes par (3.8) et par (4.6). Les incertitudes paramétriques sont données par :

$$\Delta\tilde{A}(t) = \tilde{M}\tilde{F}(t)\tilde{N} \ , \tag{4.65a}$$
$$\Delta\tilde{B}(t) = \tilde{H}\tilde{S}(t)\tilde{D} \ , \tag{4.65b}$$

où les matrices constantes $\tilde{M}$, $\tilde{N}$, $\tilde{H}$ et $\tilde{D}$ sont des formes augmentées données par

$$\tilde{M} = diag\left\{M_1 \ \cdots \ M_i \ \cdots \ M_L\right\} \ , \tag{4.66}$$
$$\tilde{N} = diag\left\{N_1 \ \cdots \ N_i \ ,\cdots \ N_L\right\} \ , \tag{4.67}$$
$$\tilde{H} = diag\left\{H_1 \ \cdots \ H_i \ \cdots \ H_L\right\} \ , \tag{4.68}$$
$$\tilde{D} = \left[D_1^T \ \cdots \ D_i^T \ \cdots \ D_L^T\right]^T \ . \tag{4.69}$$

Les fonctions matricielles $\tilde{F}(t)$ et $\tilde{S}(t)$ sont définies par

$$\tilde{F}(t) = diag\left\{F_1(t) \quad \cdots \quad F_i(t) \quad \cdots \quad F_L(t)\right\} \ , \tag{4.70}$$

$$\tilde{S}(t) = diag\left\{S_1(t) \quad \cdots \quad S_i(t) \quad \cdots \quad S_L(t)\right\} \tag{4.71}$$

et sont bornées en norme par $\tilde{F}^T(t)\tilde{F}(t) \leq \mathrm{I}$ et $\tilde{S}^T(t)\tilde{S}(t) \leq \mathrm{I}$.

La reconstruction des variables d'état du multimodèle découplé (4.64) est effectuée à l'aide d'un observateur de la forme suivante :

$$\delta(\hat{x}(t)) = \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}(y(t) - \hat{y}(t)) \ , \tag{4.72a}$$

$$\hat{y}(t) = \tilde{C}(t)\hat{x}(t) \ , \tag{4.72b}$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie reconstruite par l'observateur et $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ le gain de l'observateur à déterminer.

4.3.2.1 Synthèse de l'observateur robuste

La dynamique de l'erreur d'estimation :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{4.73}$$

est obtenue par l'agrégation des équations (4.64) et (4.72) :

$$\delta(e_a(t)) = A_{obs}(t)e_a(t) + \Phi(t)\bar{w}(t) \tag{4.74}$$

avec

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \ , \qquad \bar{w}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \ , \tag{4.75a}$$

$$A_{obs}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t) & \Delta\tilde{A}(t) \\ 0 & \tilde{A} + \Delta\tilde{A}(t) \end{bmatrix} \ , \qquad \Phi(t) = \begin{bmatrix} \tilde{E} - \tilde{K}W_c & \Delta\tilde{B}(t) \\ \tilde{E} & \tilde{B} + \Delta\tilde{B}(t) \end{bmatrix} \ . \tag{4.75b}$$

Remarque 4.7. *D'après la structure de la matrice d'évolution $A_{obs}(t)$, le système (4.74) générateur de l'erreur d'estimation $e_a(t)$ est stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *le multimodèle découplé (4.64) est stable pour des incertitudes $\Delta\tilde{A}(t)$ admissibles,*
- *le gain de l'observateur $\tilde{K}$ est ajusté de façon à assurer la stabilité de $\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t)$.*

La convergence de l'erreur d'estimation est étudiée à travers la prise en compte de la dépendance entre l'erreur d'estimation et les signaux exogènes (l'entrée et les perturbations) au système. Il est possible de remarquer que l'impact de la perturbation $w(t)$ sur l'erreur d'estimation d'état $e(t)$ peut être modifié en ajustant le gain $\tilde{K}$ de l'observateur. Ce gain de l'observateur doit cependant être également ajusté de façon à atténuer l'impact des paramètres incertains sans pour autant dégrader les performances dynamiques.

Le problème lié à la synthèse de l'observateur se pose alors dans les termes suivants :

il s'agit d'ajuster le gain $\tilde{K}$ de façon à garantir une reconstruction de l'état du multimodèle avec une certaine précision en présence des incertitudes paramétriques, des perturbations et quelles que soient les conditions initiales du système et de l'observateur.

Autrement dit, le gain $\tilde{K}$ doit limiter l'influence de la perturbation $\bar{w}(t)$ sur l'erreur d'estimation. A cet effet, le *signal objectif* suivant, dépendant seulement de l'erreur d'estimation $e(t)$, est introduit :

$$v(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} e_a(t) \quad , \tag{4.76}$$

où H est une matrice de dimension appropriée. Le choix de cette matrice permet d'atténuer l'impact des perturbations sur une partie ou sur la totalité des composantes du vecteur d'erreur $e_a(t)$ (c.f. remarque 4.3). Les exigences robustes de l'erreur d'estimation sont formulées par les conditions suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{w}(t) = 0 \quad , \tag{4.77a}$$

$$\|v(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|\bar{w}(t)\|_2^2 \quad \text{pour} \quad \bar{w}(t) \neq 0 \text{ et } e_a(0) = 0 \quad , \tag{4.77b}$$

où γ, le gain $\mathcal{L}_2$ entre $\bar{w}(t)$ et $e_a(t)$, est à minimiser. La convergence de l'erreur d'estimation est étudiée sous les deux hypothèses suivantes.

Hypothèse 4.2. *Le multimodèle découplé* (4.64) *est stable pour des incertitudes $\Delta\tilde{A}(t)$ admissibles.*

Hypothèse 4.3. *L'entrée et la perturbation sont des signaux à énergie bornée au sens de la norme $\mathcal{L}_2$, soit $\|u(t)\|_2^2 < \infty$ et $\|w(t)\|_2^2 < \infty$.*

La première hypothèse découle directement de la remarque 4.7 relative à la stabilité de la matrice d'évolution $A_{obs}(t)$.

Étudions la conception de l'observateur robuste à temps continu. On rappelle ci-dessous le lemme dont le rôle lors de la phase de conception de l'observateur est particulièrement important.

Lemme 4.1. *Soit X et Y deux matrices réelles de taille appropriée et $F(t)$ une fonction matricielle bornée en norme, c.-à-d. $F^T(t)F(t) \leq I$. L'inégalité suivante est toujours vraie pour toute matrice $Q > 0$:*

$$XF(t)Y + Y^T F^T(t) X^T \leq XQ^{-1}X^T + Y^T Q Y \quad .$$

L'étude de la convergence de l'erreur d'estimation (4.73) s'effectue en considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e^T(t) P_1 e(t) + x^T(t) P_2 x(t) \quad , \tag{4.78}$$

où $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$.

Les objectifs de synthèse (4.77) sont garantis s'il existe une fonction de Lyapunov (4.78) satisfaisant la condition :

$$\dot{V}(t) < -v^T(t)v(t) + \gamma^2 \bar{w}^T(t)\bar{w}(t) \ . \tag{4.79}$$

La dérivée de la fonction de $V(t)$ le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation $e_a(t)$ a pour expression :

$$\dot{V}(t) = \Omega(t)^T \begin{bmatrix} A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) & P\Phi(t) \\ \Phi^T(t)P & 0 \end{bmatrix} \Omega(t) \ , \tag{4.80}$$

$$P = diag\left\{P_1 \quad P_2\right\} \ , \tag{4.81}$$

$$\Omega(t) = \left[e_a(t) \quad \bar{w}(t)\right]^T \ . \tag{4.82}$$

Cette équation est directement obtenue en dérivant $V(t)$ puis en substituant $\dot{e}_a(t)$ par son expression (4.74). La condition (4.79) peut s'écrire en remplaçant $\dot{V}(t)$ par (4.80) et compte tenu de (4.76) :

$$\Omega^T(t) \begin{bmatrix} A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) + \begin{bmatrix} H^TH & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P\Phi(t) \\ \Phi^T(t)P & -\gamma^2 \mathrm{I} \end{bmatrix} \Omega(t) < 0 \tag{4.83}$$

qui est une forme quadratique en $\Omega(t)$. En introduisant les définitions (4.75) de $A_{obs}(t)$ et de Φ, l'inégalité (4.83) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} \Gamma(t) + \Gamma^T(t) + H^TH & P_1\Delta\tilde{A}(t) & \Psi & P_1\Delta\tilde{B}(t) \\ (*) & X_1 + X_2(t) & P_2\tilde{E} & P_2(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}(t)) \\ (*) & (*) & -\gamma^2\mathrm{I} & 0 \\ (*) & (*) & 0 & -\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \tag{4.84}$$

où

$$\Gamma(t) = P_1(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t)) = P_1 \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i) \ , \tag{4.85}$$

$$\Psi = P_1(\tilde{E} - \tilde{K}W_c) \ , \tag{4.86}$$

$$X_1 = \tilde{A}^T P_2 + P_2\tilde{A} \ , \tag{4.87}$$

$$X_2(t) = \Delta\tilde{A}^T(t)P_2 + P_2\Delta\tilde{A}(t) \tag{4.88}$$

et $\tilde{C}_i$ est définie en (4.11).

Il est maintenant possible de dissocier les paramètres nominaux des paramètres incertains dans l'inégalité (4.84) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Gamma(t) + \Gamma^T(t) + H^TH & 0 & \Psi & 0 \\ 0 & X_1 & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} \\ (*) & 0 & -\gamma^2\mathrm{I} & 0 \\ 0 & (*) & 0 & -\gamma^2\mathrm{I} \end{bmatrix} + Z(t) + Z^T(t) < 0 \ , \tag{4.89}$$

où

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & P_1\Delta\tilde{A}(t) & 0 & P_1\Delta\tilde{B}(t) \\ 0 & P_2\Delta\tilde{A}(t) & 0 & P_2\Delta\tilde{B}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.90}$$

En remplaçant $\Delta\tilde{A}(t)$ et $\Delta\tilde{B}(t)$ par leurs expressions respectives (4.65a) et (4.65b) alors $Z(t) + Z^T(t)$ peut s'expliciter sous la forme :

$$Z(t) + Z^T(t) \quad = \quad \tilde{X}F(t)\tilde{Y} + \tilde{Y}^T F^T(t)\tilde{X}^T \quad , \tag{4.91}$$

où

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} P_1\tilde{M} & P_1\tilde{H} \\ P_2\tilde{M} & P_2\tilde{H} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F(t) = \begin{bmatrix} \tilde{F}(t) & 0 \\ 0 & \tilde{S}(t) \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{D} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.92}$$

La dépendance des termes inconnus $\tilde{F}(t)$ et $\tilde{S}(t)$ dans l'expression (4.91) peut être aisément supprimée en faisant appel au lemme 4.1. On obtient de cette façon, en posant $Q = diag\left\{\tau_1 \mathrm{I} \quad \tau_2 \mathrm{I}\right\}$, la majoration suivante

$$Z(t) + Z^T(t) \quad \leq \quad \tilde{X} \begin{bmatrix} \tau_1\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix}^{-1} \tilde{X}^T + \tilde{Y}^T \begin{bmatrix} \tau_1\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix} \tilde{Y} \quad . \tag{4.93}$$

L'inégalité (4.89) devient en introduisant la majoration (4.93) de $Z + Z^T$:

$$\begin{bmatrix} \Gamma(t) + \Gamma^T(t) + H^T H & 0 & \Psi & 0 \\ 0 & \Lambda & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} \\ (*) & (*) & -\gamma^2\mathrm{I} & 0 \\ 0 & (*) & 0 & \vartheta \end{bmatrix} + \tilde{X} \begin{bmatrix} \tau_1\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix}^{-1} \tilde{X}^T < 0 \quad , \tag{4.94}$$

où

$$\Lambda \quad = \quad X_1 + \tau_1 \tilde{N}^T \tilde{N} \quad , \tag{4.95}$$

$$\vartheta \quad = \quad -\gamma^2\mathrm{I} + \tau_2 \tilde{D}^T \tilde{D} \quad . \tag{4.96}$$

L'inégalité (4.94) n'est pas linéaire en P_1 et P_2. En effet, les produits entre les matrices $\tilde{X}^T$ et $\tilde{X}$ introduisent des produits croisés entre les matrices P_1 et P_2. La présence de ces produits peut être évitée en appliquant le complément de Schur (c.f. annexe C). L'inégalité (4.94) se met enfin sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Gamma(t) + \Gamma^T(t) + H^T H & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M} & P_1\tilde{H} \\ 0 & \Lambda & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M} & P_2\tilde{H} \\ (*) & (*) & -\gamma^2\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (*) & 0 & \vartheta & 0 & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & -\tau_1\mathrm{I} & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & -\tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \quad . \tag{4.97}$$

Une solution au problème (4.77) sous la forme du théorème suivant peut être enfin donnée, compte tenu des propriétés de somme convexe des fonctions de pondération $\mu_i(t)$, en remplaçant X_1 par sa définition (4.87) dans (4.95) et en posant $G = P_1\tilde{K}$ et $\overline{\gamma} = \gamma^2$.

Théorème 4.5 (MDC). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps continu* (4.54) *et l'observateur à gain proportionnel* (4.72)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe trois matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et G de dimensions appropriées et des scalaires $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i + \Gamma_i^T + H^T H & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M} & P_1\tilde{H} \\ 0 & \Lambda & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M} & P_2\tilde{H} \\ (*) & (*) & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (*) & 0 & \vartheta & 0 & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & -\tau_1\mathrm{I} & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & -\tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{4.98}$$

où

$$\Gamma_i = P_1\tilde{A} - G\tilde{C}_i \ , \tag{4.99}$$

$$\Psi = P_1\tilde{E} - GW_c \ , \tag{4.100}$$

$$\Lambda = P_2\tilde{A} + \tilde{A}^T P_2 + \tau_1 \tilde{N}^T \tilde{N} \ , \tag{4.101}$$

$$\vartheta = -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2 \tilde{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathrm{D}} \tag{4.102}$$

pour une matrice H donnée. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P_1^{-1}G$ et le gain $\mathcal{L}_2$ de $\overline{w}(t)$ vers $v(t)$ par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Remarque 4.8. *La stabilité de l'observateur* (4.72)*, en considérant le modèle nominal sans perturbation, est assurée par la négativité du bloc $(1,1)$ dans l'inégalité matricielle* (4.98)*.*

Théorème 4.6 (MDD). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps discret* (4.54) *et l'observateur à gain proportionnel* (4.72)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe trois matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et G de dimensions appropriées et des scalaires $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$, solutions du problème d'optimisation*

convexe suivant :

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} H^T H - P_1 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & \Psi^T & \tilde{E}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & 0 \\ (*) & 0 & (*) & 0 & -P_1 & 0 & P_1\tilde{M} & P_1\tilde{H} \\ 0 & (*) & (*) & (*) & 0 & -P_2 & P_2\tilde{M} & P_2\tilde{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & -\tau_1\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & 0 & -\tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad , \quad (4.103)$$

où

$$\Gamma_i = P_1\tilde{A} - G\tilde{C}_i \quad , \quad (4.104)$$

$$\Psi = P_1\tilde{E} - GW_c \quad , \quad (4.105)$$

$$\Lambda = \tau_1\tilde{N}^T\tilde{N} - P_2 \quad , \quad (4.106)$$

$$\vartheta = -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2\tilde{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}} \quad (4.107)$$

pour une matrice H donnée. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P_1^{-1}G$ et le gain $\mathcal{L}_2$ de $\overline{w}(t)$ vers $v(t)$ par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Une source de conservatisme dans la solution proposée provient des formes augmentées des incertitudes $\Delta\tilde{A}(t)$ et $\Delta\tilde{B}(t)$, données respectivement par (4.65a) et par (4.65b), introduites lors de la synthèse de l'observateur. En effet, toutes les incertitudes des sous-modèles sont prises en compte simultanément dans la condition LMI (4.98). Il peut être alors difficile d'atteindre un faible niveau d'atténuation γ. Afin de contourner cette source de conservatisme, on propose de modifier le modèle (4.55) des incertitudes paramétriques.

4.3.2.2 Deuxième forme de synthèse de l'observateur robuste

Les imprécisions de la modélisation du système sont représentées dans cette section par des incertitudes structurées bornées en norme de la forme :

$$\Delta A_i(t) = \mu_i(t) M_i F_i(t) N_i \quad , \quad (4.108a)$$

$$\Delta B_i(t) = \mu_i(t) H_i S_i(t) D_i \quad . \quad (4.108b)$$

Le raisonnement qui s'appuie sur l'idée d'introduire une pondération $\mu_i(t)$ consiste à négliger éventuellement les incertitudes des sous-modèles non mis à contribution dans la sortie du multimodèle. La forme augmentée du multimodèle proposée dans la section 4.3.2 reste inchangée

excepté pour les matrices $\Delta\tilde{A}(t)$ et $\Delta\tilde{B}(t)$ qui deviennent :

$$\Delta\tilde{A}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\Delta\tilde{A}_i(t) \ , \tag{4.109a}$$

$$\Delta\tilde{B}(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\Delta\tilde{B}_i(t) \ , \tag{4.109b}$$

où

$$\Delta\tilde{A}_i(t) = \tilde{M}_i\tilde{F}_i(t)\tilde{N}_i \ , \tag{4.110}$$

$$\Delta\tilde{B}_i(t) = \tilde{H}_i\tilde{S}_i(t)D_i \ , \tag{4.111}$$

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & M_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ , \tag{4.112}$$

$$\tilde{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & N_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ , \tag{4.113}$$

$$\tilde{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & H_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{4.114}$$

Une démarche de synthèse similaire à celle exposée précédemment, appliquée en considérant le nouveau modèle (4.108) des incertitudes, conduit à l'obtention des conditions d'existence d'un observateur robuste. On cherche à satisfaire les mêmes exigences robustes (4.77). Tous les calculs se déroulent d'une façon identique jusqu'à l'obtention de l'inégalité (4.89). A ce niveau, les nouvelles formes des incertitudes $\Delta\tilde{A}(t)$ et $\Delta\tilde{B}(t)$ interviennent dans la majoration du terme $Z(t)+Z^T(t)$. En remplaçant $\Delta\tilde{A}(t)$ et $\Delta\tilde{B}(t)$ respectivement par (4.108b) et (4.108a) alors l'expression de $Z(t)+Z^T(t)$ s'écrit :

$$Z(t)+Z^T(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \left(\tilde{X}_iF_i(t)\tilde{Y}_i+\tilde{Y}_i^TF_i^T(t)\tilde{X}_i^T\right) \ , \tag{4.115}$$

où

$$\tilde{X}_i = \begin{bmatrix} P_1\tilde{M}_i & P_1\tilde{H}_i \\ P_2\tilde{M}_i & P_2\tilde{H}_i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad F_i(t) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_i(t) & 0 \\ 0 & \tilde{S}_i(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_i \end{bmatrix} \ . \tag{4.116}$$

En faisant appel au lemme 4.1, la majoration suivante peut être obtenue

$$Z(t)+Z^T(t) \leq \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) \left(\tilde{X}_i \begin{bmatrix} \tau_1^i\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \tau_2^i\mathrm{I} \end{bmatrix}^{-1} \tilde{X}_i^T + \tilde{Y}_i^T \begin{bmatrix} \tau_1^i\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \tau_2^i\mathrm{I} \end{bmatrix} \tilde{Y}_i \right) \ , \tag{4.117}$$

en considérant $Q_i = diag\left\{\tau_1^i\mathrm{I} \quad \tau_2^i\mathrm{I}\right\}$.

Enfin, une solution au problème (4.77), basée sur le modèle des incertitudes (4.108), peut être apportée sous la forme du théorème 4.7. Ce théorème est obtenu en prenant en compte les propriétés de somme convexe des fonctions de pondération $\mu_i(t)$, en posant $G = P_1\tilde{K}$ et $\overline{\gamma} = \gamma^2$ et en appliquant le complément de Schur.

Théorème 4.7 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps continu* (4.54) *dont les incertitudes sont données par* (4.108) *et l'observateur à gain proportionnel* (4.72)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe trois matrices* $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ *et* G *de dimensions appropriées et des scalaires* $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1^i > 0$ *et* $\tau_2^i > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i + \Gamma_i^T + H^T H & 0 & \Psi & 0 & P_1\tilde{M}_i & P_1\tilde{H}_i \\ 0 & \Lambda_i & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M}_i & P_2\tilde{H}_i \\ (*) & (*) & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (*) & 0 & \vartheta_i & 0 & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & -\tau_1^i\mathrm{I} & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & -\tau_2^i\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{4.118}$$

où

$$\Gamma_i = P_1\tilde{A} - G\tilde{C}_i \ , \tag{4.119}$$
$$\Psi = P_1\tilde{E} - GW_c \ , \tag{4.120}$$
$$\Lambda_i = P_2\tilde{A} + \tilde{A}^T P_2 + \tau_1^i \tilde{N}_i^T \tilde{N}_i \ , \tag{4.121}$$
$$\vartheta_i = -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2^i \mathrm{D_i^T D_i} \tag{4.122}$$

pour une matrice H *donnée. Le gain de l'observateur est donné par* $\tilde{K} = P_1^{-1}G$ *et le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $\overline{w}(t)$ *vers* $v(t)$ *est donné par* $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$*.*

Théorème 4.8 (MDD)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps discret* (4.54) *dont les incertitudes sont données par* (4.108) *et l'observateur à gain proportionnel* (4.72)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe trois matrices* $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ *et* G *de dimensions appropriées et des scalaires* $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1^i > 0$ *et* $\tau_2^i > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} H^T H - P_1 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_i & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & \Psi^T & \tilde{E}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_i & 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & 0 \\ (*) & 0 & (*) & 0 & -P_1 & 0 & P_1\tilde{M}_i & P_1\tilde{H}_i \\ 0 & (*) & (*) & (*) & 0 & -P_2 & P_2\tilde{M}_i & P_2\tilde{H}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & -\tau_1^i\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & 0 & -\tau_2^i\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{4.123}$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma_i &= P_1\tilde{A} - G\tilde{C}_i \ , && (4.124)\\
\Psi &= P_1\tilde{E} - GW_c \ , && (4.125)\\
\Lambda_i &= \tau_1^i \tilde{N}_i^T \tilde{N}_i - P_2 \ , && (4.126)\\
\vartheta_i &= -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2^i \mathrm{D}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathrm{D}_\mathrm{i} && (4.127)
\end{aligned}$$

pour une matrice H donnée. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P_1^{-1}G$ *et le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $\overline{w}(t)$ *vers* $v(t)$ *par* $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

4.3.3 Conception d'un observateur à gain proportionnel-intégral

La démarche conduisant à la synthèse d'un observateur P, exposée précédemment, peut facilement être étendue à la synthèse d'un observateur PI. Comme il a été montré dans la section 4.2.3, l'observateur PI présente d'excellentes propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations. Il est tout à fait possible d'imaginer qu'il présente également d'intéressantes propriétés de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

La synthèse de l'observateur est basée sur la forme augmentée (4.64) du multimodèle découplé déjà utilisée lors de la synthèse de l'observateur à gain proportionnel (section 4.3.2). Un signal supplémentaire $z(t)$, issu de l'intégration de la sortie du multimodèle, doit cependant être pris en compte. Le multimodèle découplé se présente alors sous la forme augmentée suivante

$$\begin{aligned}
\delta(x(t)) &= (\tilde{A} + \Delta\tilde{A}(t))x(t) + (\tilde{B} + \Delta\tilde{B}(t))u(t) + \tilde{E}w \ , && (4.128a)\\
\delta(z(t)) &= Mz(t) + \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \ , && (4.128b)\\
y(t) &= \tilde{C}(t)x(t) + W_c w(t) \ . && (4.128c)
\end{aligned}$$

En fonction du modèle des incertitudes, les matrices $\Delta\tilde{A}(t)$ et $\Delta\tilde{B}(t)$ sont données soit par (4.55) soit par (4.108). Dans les deux cas, les équations du multimodèle (4.128) peuvent se mettre sous la forme compacte :

$$\begin{aligned}
\delta(x_a(t)) &= (\tilde{A}_a(t) + \overline{C}_1\Delta\tilde{A}(t)\overline{C}_1^T)x_a(t) + \overline{C}_1(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}(t))u(t) + \tilde{E}_a w(t) \ , && (4.129a)\\
y(t) &= \tilde{C}(t)\overline{C}_1^T x_a(t) + W_c w(t) \ , && (4.129b)\\
z(t) &= \overline{C}_2^T x_a(t) \ , && (4.129c)
\end{aligned}$$

avec $x_a(t) \in \mathbb{R}^{(n+p)}$, $\tilde{A}_a \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$, $\tilde{E}_a \in \mathbb{R}^{(n+p)\times r}$, $\overline{C}_1 \in \mathbb{R}^{(n+p)\times n}$ et $\overline{C}_2 \in \mathbb{R}^{(n+p)\times p}$ donnés par

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \ , \qquad \overline{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n \\ 0_{(p\times n)} \end{bmatrix} \ , \qquad \overline{C}_2 = \begin{bmatrix} 0_{(n\times p)} \\ \mathrm{I}_p \end{bmatrix} \ , \qquad (4.130a)$$

$$\tilde{E}_a = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ W_c \end{bmatrix} \ , \qquad \tilde{A}_a(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\overline{A}_i \ , \qquad \overline{A}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0_{(n\times p)} \\ \tilde{C}_i & M \end{bmatrix} \ . \qquad (4.130b)$$

L'estimation d'état du multimodèle (4.129) est élaborée à l'aide d'un observateur PI de la forme

$$\begin{aligned}
\delta(\hat{x}_a(t)) &= \tilde{A}_a(t)\hat{x}_a(t) + \overline{C}_1\tilde{B}u(t) + K_P(y(t)-\hat{y}(t)) + K_I(z(t)-\hat{z}(t)) \ , && \text{(4.131a)}\\
\hat{y}(t) &= \tilde{C}(t)\overline{C}_1^T\hat{x}_a(t) \ , && \text{(4.131b)}\\
\hat{z}(t) &= \overline{C}_2^T\hat{x}_a(t) \ . && \text{(4.131c)}
\end{aligned}$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \tag{4.132}$$

et sa dynamique par

$$\begin{aligned}
\dot{e}_a(t) &= (\tilde{A}_a(t) - K_P\tilde{C}(t)\overline{C}_1^T - K_I\overline{C}_2^T)e_a(t) + \overline{C}_1\Delta\tilde{A}(t)x(t)\\
&+ \overline{C}_1\Delta\tilde{B}(t)u(t) + (\tilde{E}_a - K_PW)w(t) \ . && \text{(4.133)}
\end{aligned}$$

En concaténant l'équation (4.133) et l'équation d'état (4.128a) du multimodèle, il vient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_{obs}(t)\varepsilon(t) + \Phi(t)\overline{w}(t) \ , \tag{4.134}$$

où

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \begin{bmatrix} e_a^T(t) & x^T(t)\end{bmatrix}^T \ , && \text{(4.135)}\\
\overline{w}(t) &= \begin{bmatrix} w^T(t) & u^T(t)\end{bmatrix}^T \ , && \text{(4.136)}\\
A_{obs}(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_a(t) - K_PC(t)\overline{C}_1^T - K_I\overline{C}_2^T & \overline{C}_1\Delta\tilde{A}(t) \\ 0 & \tilde{A}+\Delta\tilde{A}(t)\end{bmatrix} , && \text{(4.137)}\\
\Phi(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{E}_a - K_PW & \overline{C}_1\Delta\tilde{B}(t) \\ \tilde{E} & \tilde{B}+\Delta\tilde{B}(t)\end{bmatrix} \ . && \text{(4.138)}
\end{aligned}$$

Il est possible de remarquer, d'après (4.134) et (4.138), que l'impact de la perturbation $w(t)$ sur l'erreur d'estimation $e_a(t)$ peut être modifié en ajustant le gain K_P de l'observateur. Le gain K_I de l'observateur peut être mis à profit afin de garantir les performances dynamiques de l'observateur. On entrevoit dès lors clairement tout l'intérêt que l'action intégrale de l'observateur peut susciter.

Le recours à la méthode Lyapunov mène à l'obtention de conditions capables d'assurer les exigences dynamiques (4.77) de l'erreur d'estimation $e_a(t)$. Il convient toutefois de remarquer que le signal objectif est maintenant donné par

$$v(t) = \begin{bmatrix} H & 0\end{bmatrix}\varepsilon(t) \ . \tag{4.139}$$

Une démarche similaire à celle adoptée pour la synthèse de l'observateur P conduit aux théorèmes suivants. Les théorèmes 4.9 et 4.10 présentent des conditions suffisantes garantissant la convergence de l'erreur d'estimation quand le modèle des incertitudes est donné par (4.55).

Théorème 4.9 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps continu* (4.129) *et l'observateur à gain proportionnel-intégral* (4.131)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe quatre matrices* $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, G_P *et* G_I *de dimensions appropriées et des scalaires* $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1 > 0$ *et* $\tau_2 > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i + \Gamma_i^T + H^T H & 0 & \Psi & 0 & P_1\overline{C}_1\tilde{M} & P_1\overline{C}_1\tilde{H} \\ 0 & \Lambda & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M} & P_2\tilde{H} \\ (*) & (*) & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (*) & 0 & \vartheta & 0 & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & -\tau_1\mathrm{I} & 0 \\ (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & -\tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \tag{4.140}$$

où

$$\Gamma_i = P_1\overline{A}_i - G_P\tilde{C}_1\overline{C}_1^T - G_I\overline{C}_2^T \ , \tag{4.141}$$

$$\Psi = P_1\tilde{E}_a - G_P W_c \ , \tag{4.142}$$

$$\Lambda = P_2\tilde{A} + \tilde{A}^T P_2 + \tau_1\tilde{N}^T\tilde{N} \ , \tag{4.143}$$

$$\vartheta = -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2\tilde{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}} \tag{4.144}$$

pour des matrices M et H données. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P_1^{-1}G_P$ *et* $K_I = P_1^{-1}G_I$*. Le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $\overline{w}(t)$ *vers* $\nu(t)$ *est donné par* $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$*.*

Théorème 4.10 (MDD)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps discret* (4.129) *et l'observateur à gain proportionnel-intégral* (4.131)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe quatre matrices* $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, G_P *et* G_I *de dimensions appropriées et des scalaires* $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1 > 0$ *et* $\tau_2 > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} H^T H - P_1 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & \Psi^T & \tilde{E}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & 0 \\ (*) & 0 & (*) & 0 & -P_1 & 0 & P_1\overline{C}_1\tilde{M} & P_1\overline{C}_1\tilde{H} \\ 0 & (*) & (*) & (*) & 0 & -P_2 & P_2\tilde{M} & P_2\tilde{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & -\tau_1\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & 0 & -\tau_2\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, i = 1, \cdots, L \ , \tag{4.145}$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma_i &= P_1\overline{A}_i - G_P\tilde{C}_1\overline{C}_1^T - G_I\overline{C}_2^T \ , && (4.146)\\
\Psi &= P_1\tilde{E}_a - G_P W_c \ , && (4.147)\\
\Lambda &= \tau_1\tilde{N}^T\tilde{N} - P_2 \ , && (4.148)\\
\vartheta &= -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2\tilde{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{D}} && (4.149)
\end{aligned}$$

pour des matrices M et H données. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P_1^{-1}G_P$ et $K_I = P_1^{-1}G_I$. Le gain $\mathcal{L}_2$ de $\overline{w}(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Les deux théorèmes suivants proposent des conditions suffisantes en mesure de garantir la convergence de l'erreur d'estimation quand les incertitudes sont pondérées par les fonctions poids (modèle des incertitudes donné par (4.109)).

Théorème 4.11 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps continu* (4.129) *dont les incertitudes sont données par* (4.109) *et l'observateur à gain proportionnel-intégral* (4.131)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe quatre matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, G_P et G_I de dimensions appropriées et des scalaires $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1^i > 0$ et $\tau_2^i > 0$, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix}
\Gamma_i + \Gamma_i^T + H^T H & 0 & \Psi & 0 & P_1\overline{C}_1\tilde{M}_i & P_1\overline{C}_1\tilde{H}_i \\
0 & \Lambda_i & P_2\tilde{E} & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M}_i & P_2\tilde{H}_i \\
(*) & (*) & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\
0 & (*) & 0 & \vartheta_i & 0 & 0 \\
(*) & (*) & 0 & 0 & -\tau_1^i\mathrm{I} & 0 \\
(*) & (*) & 0 & 0 & 0 & -\tau_2^i\mathrm{I}
\end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \qquad (4.150)$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma_i &= P_1\overline{A}_i - G_P\tilde{C}_1\overline{C}_1^T - G_I\overline{C}_2^T \ , && (4.151)\\
\Psi &= P_1\tilde{E}_a - G_P W_c \ , && (4.152)\\
\Lambda_i &= P_2\tilde{A} + \tilde{A}^T P_2 + \tau_1^i\tilde{N}_i^T\tilde{N}_i \ , && (4.153)\\
\vartheta_i &= -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2^{\mathrm{i}}\mathrm{D}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_{\mathrm{i}} && (4.154)
\end{aligned}$$

pour des matrices M et H données. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P_1^{-1}G_P$ et $K_I = P_1^{-1}G_I$. Le gain $\mathcal{L}_2$ de $\overline{w}(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Théorème 4.12 (MDD)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle incertain à temps discret* (4.129) *dont les incertitudes sont données par* (4.109) *et l'observateur à gain proportionnel-intégral* (4.131)*, sous les hypothèses 4.2 et 4.3, satisfait les exigences* (4.77) *s'il existe quatre*

matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, G_P et G_I de dimensions appropriées et des scalaires $\overline{\gamma} > 0$, $\tau_1^i > 0$ et $\tau_2^i > 0$, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes}$$

$$\begin{bmatrix} H^TH - P_1 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_i & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}^TP_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & 0 & \Psi^T & \tilde{E}^TP_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & \tilde{B}^TP_2 & 0 & 0 \\ (*) & 0 & (*) & 0 & -P_1 & 0 & P_1\overline{C}_1\tilde{M}_i & P_1\overline{C}_1\tilde{H}_i \\ 0 & (*) & (*) & (*) & 0 & -P_2 & P_2\tilde{M}_i & P_2\tilde{H}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & -\tau_1^i\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & 0 & -\tau_2^i\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \; i = 1, \cdots, L \quad , \quad (4.155)$$

où

$$\Gamma_i = P_1\overline{A}_i - G_P\tilde{C}_1\overline{C}_1^T - G_I\overline{C}_2^T \quad , \quad (4.156)$$

$$\Psi = P_1\tilde{E}_a - G_PW_c \quad , \quad (4.157)$$

$$\Lambda_i = \tau_1^i\tilde{N}_i^T\tilde{N}_i - P_2 \quad , \quad (4.158)$$

$$\vartheta_i = -\overline{\gamma}\mathrm{I} + \tau_2^i\mathrm{D_i^T}\mathrm{D_i} \quad (4.159)$$

pour des matrices M et H données. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P_1^{-1}G_P$ et $K_I = P_1^{-1}G_I$. Le gain $\mathcal{L}_2$ de $\overline{w}(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Exemple 4.3 (Exemple de synthèse d'un observateur PI robuste aux incertitudes)
Il s'agit d'estimer l'état d'un système à temps continu décrit par un multimodèle découplé incertain constitué de $L = 2$ sous-modèles. Les valeurs numériques des différentes matrices du multimodèle sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 & 0.2 \\ -0.3 & -0.4 & 0.1 \\ -0.1 & 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \quad , \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}^T \quad , \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}^T \quad ,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \quad , \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T \quad , \qquad M_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}^T \quad ,$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad , \qquad N_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}^T \quad , \qquad H_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}^T \quad ,$$

$$D_1 = -0.2 \quad , \qquad D_2 = -0.3 \quad ,$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T \ , \qquad E_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}^T \ ,$$
$$W = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \ , \qquad H = \mathrm{I}_7 \ , \ \mathrm{M} = 0 \ .$$

Remarquons qu'en présence des incertitudes ΔA_i, les gains des transferts de l'entrée vers les deux sorties du premier sous-modèle varient dans les intervalles $G_1^1 = \begin{bmatrix} -0.80 & -1.18 \end{bmatrix}$ et $G_1^2 = \begin{bmatrix} 1.31 & 1.69 \end{bmatrix}$. Quant aux variations du deuxième sous-modèle, elles se situent dans les intervalles $G_2^1 = \begin{bmatrix} -1.17 & -0.78 \end{bmatrix}$ et $G_2^2 = \begin{bmatrix} 1.41 & 1.13 \end{bmatrix}$. La figure 4.7 illustre les variations sur les sorties entraînées par les incertitudes ΔA_i prises en compte.

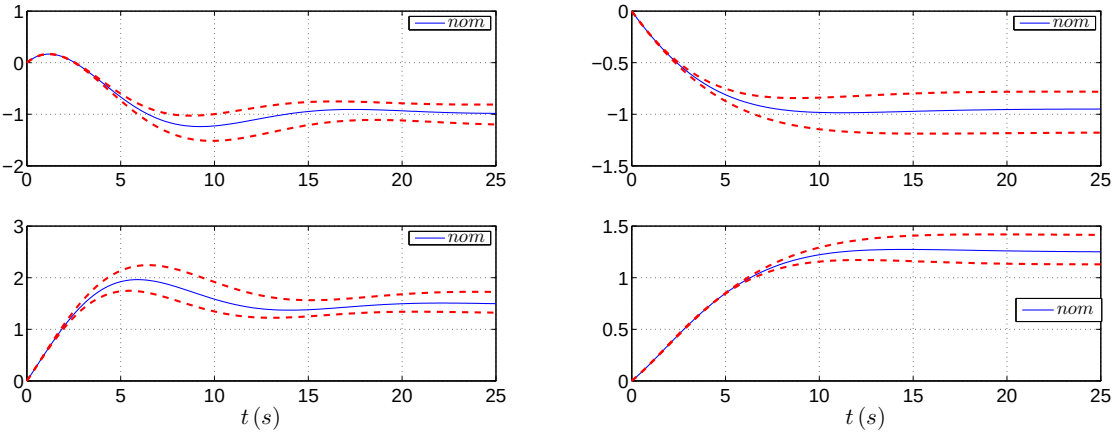

Figure 4.7 – Réponses indicielles des sous-modèles nominaux et incertains. Sous-modèle 1 (à gauche) et sous-modèle 2 (à droite)

La perturbation $w(t)$ considérée est un bruit aléatoire normalement distribué de moyenne nulle et de dispersion égale à un. La variable d'indexation ξ est ici le signal de commande $u(t)$. Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation des fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi(t)) \ , \tag{4.160}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2\right) \tag{4.161}$$

de dispersion $\sigma = 0.6$ et de centres $c_1 = -0.3$ et $c_2 = 0.3$. L'entrée, les fonctions de pondération et les sorties du multimodèle sont illustrées sur la figure 4.8. Sur cette même figure sont tracées la perturbation $w(t)$ et les fonctions $F_i(t)$, $S_i(t)$ au cours du temps. Remarquons que pour $0 < t < 120$ aucune incertitude n'est prise en compte. Il est ainsi possible de vérifier la convergence de l'erreur d'estimation pour le système nominal. La forme sinusoïdale du signal d'entrée et des incertitudes a été choisie de façon à explorer, d'une part, tout l'espace de fonctionnement du système et, d'autre part, tout le domaine de variation des incertitudes.

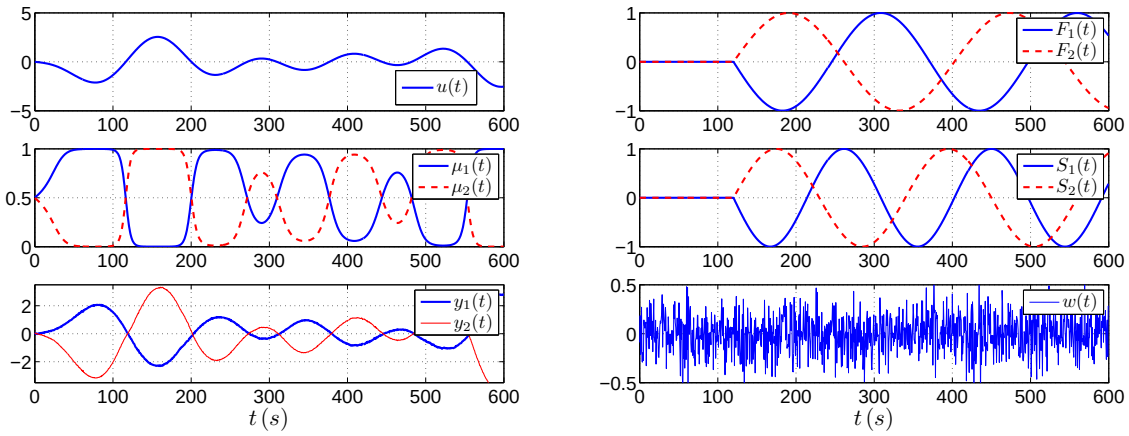

Figure 4.8 – Entrée, fonctions de pondération et sorties (à gauche). Incertitudes paramétriques $F_i(t)$, $S_i(t)$ et perturbation $w(t)$ (à droite)

Plusieurs observateurs de type P et de type PI ont été synthétisés à partir des conditions proposées par les théorèmes 4.5, 4.7, 4.9 et 4.11. Le tableau 4.1 présente les différents niveaux d'atténuation obtenus pour chaque observateur. Comme prévu, le niveau le plus faible est obtenu avec l'observateur PI synthétisé à partir des conditions proposées par le théorème 4.11.

Théorème	Niveaux d'atténuation γ
Théorème 4.5 Obs. P. Incertitudes (4.55)	1.5797
Théorème 4.7 Obs. P. Incertitudes (4.108)	0.9867
Théorème 4.9 Obs. PI. Incertitudes (4.55)	1.5797
Théorème 4.11 Obs. PI. Incertitudes (4.108)	0.9079

Tableau 4.1 – Niveaux d'atténuation obtenus pour les observateurs P et PI

Une solution satisfaisant les conditions proposées par le théorème 4.11 est donnée par :

$$K_P = \begin{bmatrix} -1.94 & 1.45 & 1.03 & -1.06 & 3.29 & 0.63 & 0.83 \\ -1.58 & 1.52 & 1.27 & -0.70 & 3.11 & -0.28 & 1.76 \end{bmatrix}^T, \tag{4.162}$$

$$K_I = \begin{bmatrix} -0.30 & -0.21 & 0.23 & -0.00 & 0.34 & 2.78 & 3.74 \\ -1.94 & 0.12 & 0.09 & -0.02 & -0.19 & -3.25 & 1.84 \end{bmatrix}^T \tag{4.163}$$

avec un niveau d'atténuation minimal donné par $\gamma = 0.9079$ *et* $\tau_1^1 = 0.48$, $\tau_2^1 = 0.96$, $\tau_1^2 = 4.42$, $\tau_2^2 = 2.78$.

La figure 4.9 compare les états des sous-modèles à leurs estimés. Elle illustre également l'évolution des états nominaux des sous-modèles. Il est possible de constater l'influence des incertitudes prises en compte, en particulier pour l'état $x_4(t)$. *L'observateur proposé fournit une très bonne estimation des états des sous-modèles en présence des incertitudes. Les conditions initiales du multimodèle prises en compte lors de la simulation sont* $x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$

et celles de l'observateur sont nulles.

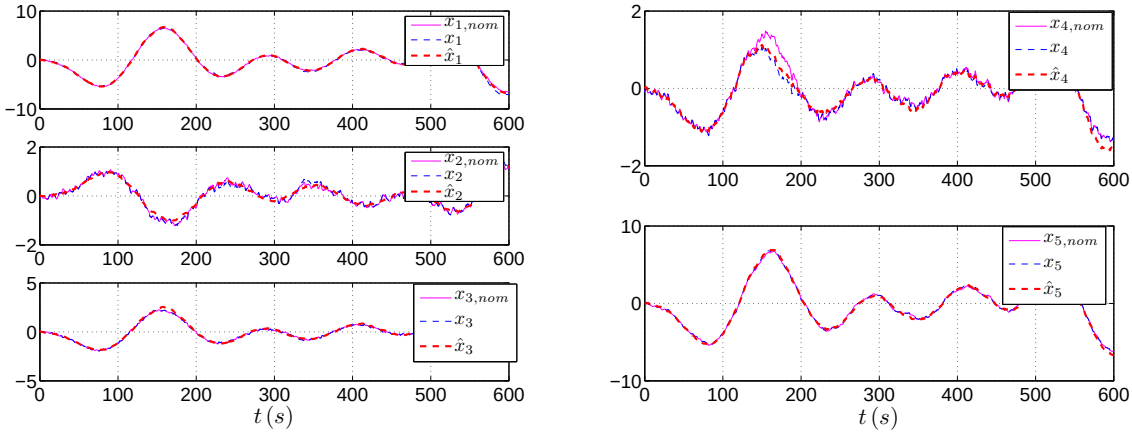

Figure 4.9 – Evolution des états des sous-modèles et de leurs estimés

La figure 4.10 établit une comparaison entre les sorties nominales, incertaines du multimodèle et leurs estimées. Il est possible d'apprécier sur ces figures la bonne capacité de l'observateur à reconstruire les sorties du multimodèle.

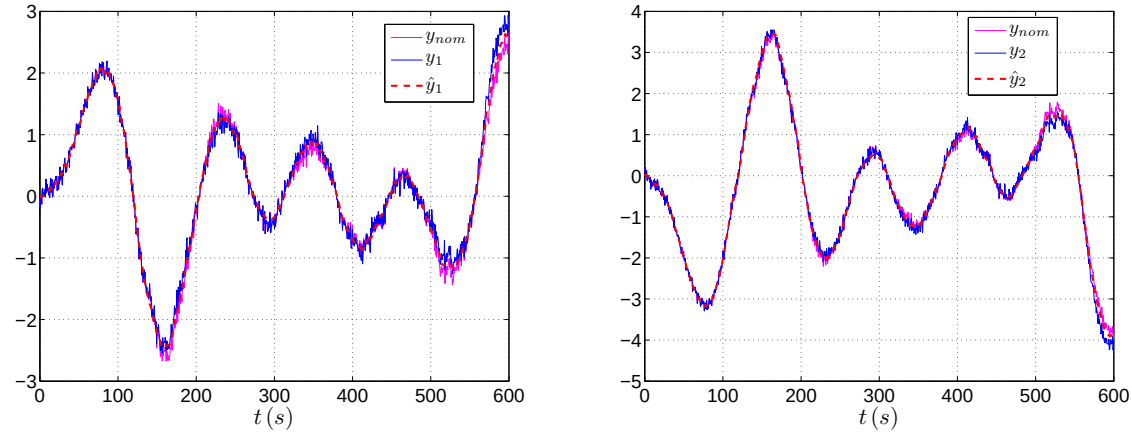

Figure 4.10 – Evolution des sorties du multimodèle et de leurs estimées

Notons par ailleurs que l'interaction entre les sous-modèles est susceptible de générer des phénomènes dits de compensation dans l'estimation d'état. Par exemple, si la sortie du multimodèle 1 est la seule prise en compte (c.-à-d. $\mu_1(t) \approx 1$) alors l'estimation d'état du sous-modèle 2 est naturellement dégradée. Cependant, l'estimation de la sortie du multimodèle n'est pas affectée par cette mauvaise estimation. On ne cherche en effet à estimer avec précision que les états des sous-modèles qui contribuent activement à l'élaboration de la sortie du multimodèle.

4.4 Estimation d'état robuste vis-à-vis des entrées inconnues

Dans ce paragraphe, un multimodèle découplé dont une partie des entrées est inconnue est considéré. Une entrée inconnue (*unknown input* UI) est en mesure de modéliser un signal mesurable ou non qui agit sur le système. Les entrées inconnues peuvent représenter une partie du signal de commande non accessible à la mesure ou bien un défaut dans un contexte de diagnostic. Elles sont également en mesure de modéliser d'une certaine façon les incertitudes paramétriques sous forme additive survenant lors de la phase de modélisation.

Ces entrées inconnues, si elles ne sont pas prises en compte lors de la synthèse, peuvent considérablement dégrader l'estimation d'état fournie par l'un des observateurs proposés au cours des sections précédentes. L'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues soulève donc un problème important, largement étudié depuis une trentaine d'années. D'un point de vue pratique, cette estimation peut avoir de nombreuses applications. Elle peut servir dans un contexte de diagnostic à la génération de signaux indicateurs de défauts, indicateurs sensibles aux défauts et insensibles aux perturbations. Dans une optique de commande tolérante aux défauts, l'estimation des entrées inconnues peut être mise à profit afin de générer un nouveau signal de commande capable de reconfigurer le système.

Un observateur dit à entrées inconnues (*Unknown Input Observer* UIO) est un moyen de fournir une estimation de l'état du système et ce, en dépit de la présence d'entrées inconnues agissant sur le système. Ces observateurs ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche et sont parfaitement définis pour les systèmes linéaires. Ils font appel au même principe de reconstruction que celui utilisé par l'observateur de Luenberger avec cependant des conditions structurelles supplémentaires. Deux catégories principales d'observateurs à entrées inconnues sont fréquemment rencontrées.

La synthèse de la première catégorie porte sur la recherche d'un opérateur de projection ou d'une transformation matricielle permettant de procéder à une élimination ou à un découplage entre l'entrée inconnue et l'erreur d'estimation (voir [Yang et Wilde, 1988; Hou et Muller, 1992; Gaddouna et al., 1994; Darouach et al., 1994; Corless et Tu, 1998; Hui et Zak, 2005] et les références qui s'y rapportent). Remarquons qu'à ce stade, l'estimation des entrées inconnues n'est pas prise en compte. Cependant, l'estimation d'état ainsi réalisée peut servir à l'estimation des entrées inconnues. Toutefois, les dérivées temporelles des sorties du système sont souvent nécessaires à l'obtention d'une telle estimation [Hou et Patton, 1998]. Or, la sortie d'un système est inévitablement entachée de bruits de mesure. La dérivation sur un tel signal peut par conséquent s'avérer délicate et doit être évitée. L'extension de ce type d'observateur à des systèmes non linéaires caractérisés par un multimodèle de T.S. a été abordée simultanément par Akhenak [2004] et Rodrigues [2005].

La stratégie de synthèse de la seconde catégorie d'observateurs diffère de la première dans la mesure où le découplage des entrées inconnues sur l'erreur d'estimation n'est pas recherché. Au contraire, l'erreur d'estimation des entrées inconnues est directement prise en compte lors de la reconstruction des variables d'état. Cette approche permet par conséquent d'opérer une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système. Dans cette section, nous

nous pencherons sur cette dernière catégorie d'observateurs à entrées inconnues.

L'observateur à gain proportionnel-intégral (PI) proposé dans cette section appartient à cette seconde famille d'observateurs à entrées inconnues. Il est important de remarquer à ce niveau et ce, afin de lever toute ambiguïté, que la structure de l'observateur PI à entrées inconnues n'est pas la même que celle de l'observateur PI exploité au cours des sections précédentes. Il a été prêté à ces observateurs une appellation similaire en raison de l'action intégrale introduite dans la structure de l'observateur. Leur différence provient cependant de la façon dont cette action intégrale est mise à profit. Dans cette section, l'action intégrale est destinée à fournir une estimation des entrées inconnues agissant sur le système.

Les premiers travaux portant sur la synthèse d'observateurs PI pour les systèmes LTI mono-entrée mono-sortie datent de la fin des années 70 et sont attribués à Wojciechowski [1978]. Ils ont par la suite été étendus par Kaczorek [1978] et par Shafai et Carroll [1985] aux systèmes linéaires multivariables variants dans le temps afin de réduire la sensibilité de l'observateur vis-à-vis des faibles variations paramétriques. La synthèse des observateurs PI, basée sur un modèle linéaire, a été largement utilisée en vue d'obtenir une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues quand ces dernières sont caractérisées par un signal de basse fréquence (constant ou variant lentement au cours du temps) [Söffker et al., 1995; Shafai et al., 2002; Xiong et Saif, 2003; Marx et al., 2003; Söffker, 2005]. La question de la synthèse des observateurs P ou PI, d'ordre plein ou réduit pour les systèmes linéaires, a été abordée dans [O'Reilly, 1983; Beale et Shafai, 1989; Weinmann, 1991]. Par la suite, Gaddouna [1995] et Schreier [1997] ont analysé les conditions d'existence des gains proportionnels et intégraux des observateurs PI d'ordre complet et d'ordre réduit. La paramétrisation et les conditions d'existence d'un observateur PI généralisé à une classe plus générale de systèmes linéaires, sous la forme de systèmes singuliers, ont été proposées dans [Marx et al., 2003; Wu et Duan, 2006; Duan et Wu, 2006]. Plus récemment et dans un autre contexte, l'extension de la conception de l'observateur PI à une classe de systèmes non linéaires respectant des contraintes de secteur borné a été présentée par Jung et al. [2007].

Van Schrick et Baspinar [1999] ont établi, dans une optique de diagnostic des systèmes, une comparaison entre l'observateur à entrées inconnues (première catégorie) et l'observateur PI (seconde catégorie). Ils ont également montré que l'observateur PI pouvait être utilisé au même titre que l'observateur à entrées inconnues pour générer des signaux robustes indicateurs de défauts. Remarquons toutefois que la principale limite de l'observateur PI provient du type d'entrées inconnues qu'il est en mesure de reconstruire (constantes ou variant lentement au cours du temps).

Le principe de l'observateur PI, généralisé par Jiang et al. [2000], a donné lieu à un observateur dit multi-integral (MI). La structure de l'observateur est modifiée en remplaçant la seule action intégrale par une chaîne d'actions intégrales. Grâce à ces actions intégrales additionnelles, l'observateur MI devient capable de prendre en compte des formes plus générales d'entrées inconnues. Il s'avère particulièrement bien adapté à l'estimation d'entrées inconnues de forme polynomiale, un signal constant étant une forme particulière de polynôme de degré zéro. Ibrir [2004] a proposé différentes structures capables d'introduire ces actions intégrales

dans la structure de l'observateur MI. Il a également proposé une extension de l'observateur MI aux systèmes non linéaires lipschitziens. La synthèse d'un observateur MI pour un système sous une représentation généralisée d'état (système singulier) a été présentée dans [Gao et Ho, 2004; Koenig, 2005]. Récemment, Gao et Ding [2005] ont étudié la synthèse d'observateurs dits à action *proportionnelle, multi-intégrale et dérivée* dans le but de concevoir une stratégie de commande tolérante aux défauts.

Remarquons que les travaux relatifs à la synthèse d'observateurs PI ou MI ont, pour la plupart, été réalisés sur la base de modèles LTI à temps continu. A notre connaissance, seuls Chang [2006] et Gao et Ding [2007] se sont intéressés à la conception d'observateurs PI à temps discret. Quant à la synthèse d'observateurs MI, elle ne semble avoir été abordée ni dans un contexte de modèles LTI à temps discret ni dans un contexte multimodèle. Ce constat nous a conduit à effectuer l'analyse et la synthèse d'observateurs MI à partir d'un multimodèle découplé à temps discret. Précisons toutefois que cette section n'omet pas de proposer des résultats de synthèse pour l'observateur MI à temps continu.

4.4.1 Multimodèle découplé en présence d'entrées inconnues

La structure du multimodèle découplé, utilisée dans les sections précédentes, est modifiée comme suit de façon à prendre en compte les entrées inconnues et les perturbations susceptibles d'agir sur le système :

$$\begin{aligned} \delta(x_i(t)) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) + D_i \eta(t) + E_i w(t) \ , && \text{(4.164a)} \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + V_i \eta(t) \ , && \text{(4.164b)} \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t)) y_i(t) + W_c w(t) \ , && \text{(4.164c)} \end{aligned}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état et la sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, où $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée, $\eta \in \mathbb{R}^l$ l'entrée inconnue, $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie et $w \in \mathbb{R}^r$ une perturbation. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$, $V_i \in \mathbb{R}^{p \times l}$ et $W_c \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont connues.

Les entrées inconnues $\eta(t)$ sont considérées ici comme les signaux à estimer (par exemple un défaut) et $w(t)$ comme une perturbation (p. ex. bruits, erreurs de modélisation) à atténuer. Par ailleurs, le modèle de l'entrée inconnue $\eta(t)$ considéré dans notre étude prend la forme polynomiale suivante :

$$\eta(t) = Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + \cdots + Q_q t^q \ . \qquad \text{(4.165)}$$

Il est important de remarquer que la seule information disponible sur l'entrée inconnue est le degré du polynôme, les coefficients Q_i du polynôme étant supposés inconnus. Dans un contexte de diagnostic, un modèle polynomial permet de prendre en compte une grande variété de défauts (c.-à-d. signal constant, rampe, etc.) affectant le système.

Remarque 4.9. *Le choix d'une matrice commune $V = V_i$ permet de modéliser l'incidence des entrées inconnues sur la sortie du système. Cette entrée inconnue affecte en effet la sortie glo-*

bale du système et non les sorties des sous-modèles. Si des matrices V_i sont prises en compte alors les entrées inconnues traduisent par exemple des perturbations internes au système.

Remarque 4.10. *La même entrée inconnue apparaît dans l'équation dynamique et dans l'équation de sortie du multimodèle. Cependant, des entrées inconnues affectant l'entrée et la sortie du système peuvent être prises en compte à partir d'un choix judicieux des structures des matrices D_i, V_i et $\eta(t)$, par exemple, $D_i = [\bar{D}_i \quad 0]$, $V_i = [0 \quad \bar{V}]$ et $\eta(t) = [\eta_a(t) \quad \eta_s(t)]^T$.*

4.4.2 Structure de l'observateur à gain multi-intégral

Les équations (4.164) du multimodèle découplé peuvent s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned} \delta(x(t)) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}\eta(t) + \tilde{E}w(t) \ , & \text{(4.166a)} \\ y(t) &= \tilde{C}(t)x(t) + \tilde{V}(t)\eta(t) + W_c w(t) \ , & \text{(4.166b)} \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état augmenté et où $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{E}$ ont déjà été définies dans les sections précédentes par (3.8) et par (4.6). Les matrices $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n\times l}$ et $\tilde{V}(t) \in \mathbb{R}^{p\times l}$ sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \left[{D_1}^T \cdots {D_i}^T \cdots {D_L}^T\right]^T \ , & \text{(4.167a)} \\ \tilde{V}(t) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) V_i \ . & \text{(4.167b)} \end{aligned}$$

L'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du multimodèle (4.166) est effectuée à l'aide d'un observateur d'état de la forme :

$$\begin{aligned} \delta(\hat{x}(t)) &= \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}\hat{\eta}_0(t) + K_p(y(t) - \hat{y}(t)) \ , & \text{(4.168a)} \\ \hat{y}(t) &= \tilde{C}(t)\hat{x}(t) + \tilde{V}(t)\hat{\eta}_0(t) \ , & \text{(4.168b)} \end{aligned}$$

couplé à un observateur Multi-Intégral :

$$\begin{aligned} \delta(\hat{\eta}_i(t)) &= \hat{\eta}_i(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t)) + \hat{\eta}_{i+1}(t), \ \ i = 0, \cdots, q-1 \ , & \text{(4.169a)} \\ \delta(\hat{\eta}_q(t)) &= \hat{\eta}_q(t) + K_q(y(t) - \hat{y}(t)) \ , & \text{(4.169b)} \end{aligned}$$

où $\hat{x}$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$, $\hat{\eta}_0(t)$ l'estimation de l'entrée inconnue $\eta(t)$ et où $\tilde{K}_p \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $\tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{l\times p}$ sont les gains de l'observateur à déterminer.

La structure des observateurs (4.168) et (4.169) est illustrée sur la figure 4.11 . Sur cette figure, l'opérateur retard est noté z^{-1}. L'utilisation de ces multiples actions intégrales est à l'origine de l'appellation "multi-intégral". Il est possible de constater la structure récurrente de l'observateur proposé. En effet, l'entrée du $(i-1)^{\text{ème}}$ bloc est à la fois l'erreur d'estimation de la sortie $y(t) - \hat{y}(t)$ et la sortie du $i^{\text{ème}}$ bloc. La mise en œuvre de cette chaîne d'actions intégrales fournit une estimation de l'entrée inconnue.

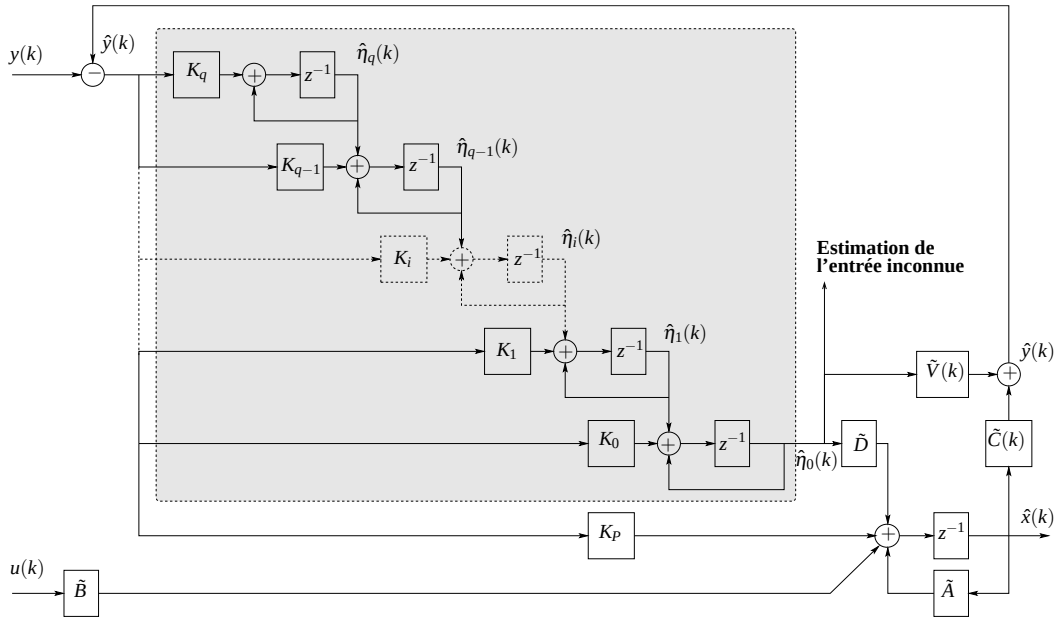

Figure 4.11 – Architecture de l'observateur MI à temps discret

4.4.3 Définitions des erreurs d'estimation

Cette section établit les erreurs d'estimation de l'état et des entrées inconnues afin de permettre par la suite l'étude de la convergence de $\hat{x}(t)$ et $\hat{\eta}_0(t)$ respectivement vers $x(t)$ et $\eta(t)$. Remarquons que dans la suite de la section, notre attention se portera exclusivement sur la synthèse de l'observateur multi-intégral à temps discret, d'où le besoin d'introduire l'*opérateur différence* nécessaire à la définition des erreurs d'estimation à temps discret.

Définition 4.3 (Opérateur différence)**.** *La différence première d'une fonction $\varphi(t)$ est une fonction définie par :*

$$\Delta\varphi(t) \triangleq \varphi(t+1) - \varphi(t) \ . \tag{4.170}$$

La $q^{ème}$ différence est obtenue à l'aide de l'opérateur :

$$\Delta^{(q)}\varphi(t) = \Delta(\Delta^{(q-1)}\varphi(t)) \ . \tag{4.171}$$

Par exemple, la différence seconde d'une fonction $\varphi(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}\varphi(t) &= \Delta(\varphi(t+1) - \varphi(t)) \ , \\ \Delta^{(2)}\varphi(t) &= \varphi(k+2) - 2\varphi(k-1) + \varphi(t) \ . \end{aligned}$$

Remarque 4.11. *L'opérateur différence à temps continu est simplement donné par les dérivées successives de la fonction $\varphi(t)$.*

Les erreurs d'estimation de l'état et des entrées inconnues sont définies par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \ , \tag{4.172}$$

$$\varepsilon_i(t) = \Delta^{(i)}\eta(t) - \hat{\eta}_i(t), \quad i = 0, \cdots, q \ , \tag{4.173}$$

où $\Delta^{(0)}\eta(t) = \eta(t)$. D'après ces définitions, il est aisé de constater que l'architecture de l'observateur (4.168) et (4.169) fournit de par sa structure interne une estimation simultanée de l'état, de l'entrée inconnue et de ses q^{èmes} différences successives (les q^{èmes} dérivées successives de l'entrée inconnue en temps continu).

Les expressions caractérisant la dynamique des erreurs d'estimation doivent être déterminées. La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$e(t+1) = (\tilde{A} - K_p\tilde{C}(t))e(t) + (\tilde{D} - K_p\tilde{V}(t))\varepsilon_0(t) + (\tilde{E} - K_pW_c)w(t) \quad . \tag{4.174}$$

Cette équation est obtenue à l'aide des équations (4.166) du multimodèle, (4.168) de l'observateur d'état, (4.172) et (4.173) de l'erreur d'estimation d'état et de l'entrée inconnue en considérant $i = 0$. Il est possible de remarquer que l'erreur d'estimation d'état est directement affectée par l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue $\varepsilon_0(t)$ et par les perturbations du système $w(t)$.

Quant aux équations déterminant la dynamique des erreurs d'estimation $\varepsilon_i(t)$ pour $0 \leq i < q$, elles sont obtenues à l'aide de (4.173) et de (4.169a) :

$$\varepsilon_i(t+1) \;=\; \varepsilon_i(t) + \varepsilon_{i+1}(t) - K_i\tilde{C}(t)e(t) - K_i\tilde{V}(t)\varepsilon_0(t) - K_iW_cw(t), \quad i = 0,\cdots,q-1 \quad . \tag{4.175}$$

Enfin la dynamique de $\varepsilon_q(t)$ est donnée par :

$$\varepsilon_q(t+1) = \varepsilon_q(t) - K_q\tilde{C}(t)e(t) - K_q\tilde{V}(t)\varepsilon_0(t) - K_qW_cw(t) + \Delta^{(q+1)}\eta(t) \quad . \tag{4.176}$$

Ecrivons sous une forme compacte les équations régissant les dynamiques de l'erreur d'estimation d'état, de l'erreur des entrées inconnues et de ses différences successives en utilisant un vecteur augmenté de la forme :

$$\Sigma(t) \;=\; \begin{bmatrix} e^T(t) & \varepsilon_0^T(t) & \ldots & \varepsilon_i^T(t) & \ldots & \varepsilon_q^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^s, s = n + l(q+1) \quad . \tag{4.177}$$

Il vient finalement

$$\Sigma(t+1) \;=\; (\Lambda - K_a\Gamma(t))\Sigma(t) + (E_a - K_aW_c)w(t) + \Phi\Delta^{(q+1)}\eta(t) \quad , \tag{4.178}$$

où $\Lambda \in \mathbb{R}^{s\times s}$, $K_a \in \mathbb{R}^{s\times p}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{s\times l}$, $E_a \in \mathbb{R}^{s\times r}$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^{p\times s}$ sont données par

$$\Lambda \;=\; \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{D} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_l & \mathrm{I}_l & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_l & \mathrm{I}_l & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_l & \mathrm{I}_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_l \end{bmatrix}, K_a = \begin{bmatrix} K_p \\ K_0 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ K_q \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{I}_l \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.179}$$

$$\Gamma(t) \;=\; \begin{bmatrix} \tilde{C}(t) & \tilde{V}(t) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

A l'aide de la définition (4.11) de $\tilde{C}(t)$ et de la définition (4.167b) de $\tilde{V}(t)$, la matrice variant dans le temps $\Gamma(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\Omega_i \ , \tag{4.180}$$

où

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \tilde{C}_i & V_i & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \ . \tag{4.181}$$

Enfin, en prenant en compte la nouvelle forme de $\Gamma(t)$, l'équation (4.178) régissant la dynamique de l'erreur d'estimation Σ devient :

$$\Sigma(t+1) = \Psi(t)\Sigma(t) + (E_a - K_a W_c)w(t) + \Phi\Delta^{(q+1)}\eta(t) \ , \tag{4.182}$$

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)(\Lambda - K_a\Omega_i) \ . \tag{4.183}$$

La synthèse de l'observateur consiste donc à déterminer le gain augmenté $K \in \mathbb{R}^{s\times p}$ en mesure de garantir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation $\Sigma(t)$ vers zéro. La structure de l'observateur MI, contrairement aux structures classiques des observateurs à entrées inconnues, permet d'inclure directement dans la chaîne d'estimation l'évolution des entrées inconnues. Il convient de constater que la dynamique de l'erreur d'estimation $\Sigma(t)$ régie par l'équation (4.182) prend la même forme que celle de l'observateur à gain proportionnel déjà synthétisé au cours des sections précédentes. Ce constat met en évidence l'un des avantages de cet observateur.

4.4.4 Discussion sur le découplage de l'entrée inconnue

D'après (4.182), l'erreur d'estimation d'état est *complètement découplée* de l'entrée inconnue (c.-à-d. l'influence de l'entrée inconnue sur l'erreur d'estimation $\Sigma(t)$ disparaît) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

1. l'entrée inconnue $\eta(t)$ est un polynôme de degré q en la variable t,
2. le nombre d'actions intégrales pris en compte est supérieur ou égal à $q+1$.

La première condition permet d'assurer que $\Phi\Delta^{(f)}\eta(t) = 0$ pour $f > q+1$ (la $f^{\text{ème}}$ dérivée de $\eta(t)$ en temps continu est nulle $\eta^{(f)}(t) = 0$). Par conséquent, l'influence de la (q+1)^{ème} différence de $\eta(t)$ sur $\Sigma(t)$ disparaît complètement dans (4.182).

La deuxième condition fixe le nombre minimum d'actions intégrales à prendre en compte pour faire apparaître le terme $\Delta^{(q+1)}\eta(t)$ dans (4.182). Ce nombre dépend donc du degré du polynôme pris en compte pour modéliser l'entrée inconnue. Par exemple, une seule action intégrale est nécessaire pour une entrée inconnue constante. En effet, un polynôme de degré zéro $\eta(t) = S_0$ vérifie $\Delta\eta(t) = 0$. Pour une entrée inconnue de type rampe (polynôme d'ordre un) deux actions intégrales sont nécessaires car $\eta(t) = S_1 k + S_0$ vérifie $\Delta^{(2)}\eta(t) = 0$, et ainsi de suite.

4.4.5 Formulation des problèmes

L'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système au moyen de l'observateur MI soulève les trois problèmes énoncés ci-dessous :

1. **Problème 1. Découplage d'entrées inconnues polynomiales.** Obtenir des conditions d'existence de l'observateur MI permettant d'assurer la convergence simultanée de l'erreur d'estimation d'état et de l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue vers zéro, en considérant un découplage parfait de l'entrée inconnue (c.-à-d. $\Delta^{(q+1)}\eta(t) = 0$) et une perturbation nulle (c.-à-d. $w(t) = 0$).
2. **Problème 2. Découplage d'entrées inconnues polynomiales et robustesse aux perturbations.** Obtenir des conditions d'existence de l'observateur MI permettant d'assurer la reconstruction simultanée de l'état et de l'entrée inconnue avec une certaine précision malgré la présence d'une perturbation affectant le système (c.-à-d. $w(t) \neq 0$). Ce problème revient à effectuer une conception robuste de l'observateur vis-à-vis des perturbations.
3. **Problème 3. Découplage d'entrées inconnues non polynomiales et robustesse aux perturbations.** Obtenir des conditions d'existence de l'observateur MI permettant d'assurer la reconstruction simultanée de l'état et de l'entrée inconnue avec une certaine précision malgré la présence d'une perturbation affectant le système et quand le modèle de l'entrée inconnue ne prend pas une forme polynomiale exacte (c.-à-d. $\Delta^{(q+1)}\eta(t) \neq 0$).

4.4.6 Problème 1 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation

Les conditions assurant la convergence de l'erreur quand aucune perturbation n'agit sur le système sont établies sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.4. *Aucune perturbation n'affecte le système* $w(t) = 0$ *et* $\Delta^{(q+1)}\eta(t) = 0$ *(*$\eta^{(q+1)}(t) = 0$ *en temps continu).*

Il est possible de noter que l'équation (4.182) régissant la dynamique de l'erreur d'estimation $\Sigma(t)$, sous l'hypothèse (4.4), prend une forme similaire à celle de l'erreur d'estimation obtenue au cours de la section 3.4.2 pour un observateur à gain proportionnel. En effet, l'observateur à gain proportionnel traité dans la section 3.4.2 est une forme particulière de l'observateur MI.

L'extension des théorèmes 3.5 et 3.6 permet de proposer une solution au problème 1 sous la forme des théorèmes suivants.

Théorème 4.13 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps continu* (4.166) *et l'observateur MI* (4.168)–(4.169)*, sous l'hypothèse 4.4, tend asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices* $P = P^T > 0$ *et* M *de dimensions appropriées, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\Lambda^T P + P\Lambda - (M\Omega_i)^T - M\Omega_i < 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad , \tag{4.184}$$

où Λ *et* Ω_i *sont définis en* (4.179) *et* (4.181). *Le gain de l'observateur est donné par* $K_a = P^{-1}M$.

Théorème 4.14 (MDD). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps discret* (4.166) *et l'observateur MI* (4.168)–(4.169), *sous l'hypothèse 4.4, tend asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices* $P = P^T > 0$ *et* M *de dimensions appropriées, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{bmatrix} P & \Lambda^T P - \Omega_i^T M^T \\ P\Lambda - M\Omega_i & P \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad , \tag{4.185}$$

où Λ *et* Ω_i *sont définis en* (4.179) *et* (4.181). *Le gain de l'observateur est donné par* $K_a = P^{-1}M$.

4.4.7 Problème 2 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation en présence de perturbations

Dans cette section, une perturbation agissant sur le système est considérée. L'entrée inconnue demeure néanmoins de forme polynomiale. L'étude est réalisée sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.5. *La perturbation* $w(t)$ *affectant le système est bornée en énergie au sens de la norme* $\mathcal{L}_2$, *c.-à-d.* $\|w(t)\|_2^2 < \infty$ *ou* $\sum_{k=0}^{\infty} w^2(k) < \infty$.

Hypothèse 4.6. *La (q+1)*^{ème} *différence de l'entrée inconnue est nulle, c.-à-d. que* $\Delta^{(q+1)}\eta(t) = 0$ *(en temps continu, la dérivée de* η *à l'ordre* $q+1$ *est nulle, c.-à-d. que* $\eta^{(q+1)}(t) = 0$*).*

La synthèse vise à ajuster le gain K_a de l'observateur de façon à garantir une reconstruction de l'état du multimodèle avec une certaine précision et ce, malgré la présence de perturbations. Un signal objectif

$$\nu(t) = H\Sigma(t) \tag{4.186}$$

est introduit à cet effet de façon à garantir les exigences suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} \Sigma(t) = 0 \quad \text{pour} \quad w(t) = 0 \quad , \tag{4.187a}$$

$$\|\nu(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \quad \text{pour} \quad w(t) \neq 0 \text{ et } \Sigma(0) = 0 \quad , \tag{4.187b}$$

où γ est le gain $\mathcal{L}_2$ de $w(t)$ vers $\nu(t)$ et H une matrice de dimension appropriée. Enfin, la matrice H dans (4.186) permet une prise en compte partielle ou totale des composantes de l'erreur $\Sigma(t)$ lors de la synthèse de l'observateur.

Le problème de la synthèse de l'observateur MI peut être abordé sous un angle similaire à celui du problème de la synthèse d'un observateur à gain proportionnel en présence de perturbations (c.f. section 4.2). L'extension des théorèmes 4.1 et 4.2 permet de proposer une solution au problème 2 sous la forme des théorèmes suivants.

Théorème 4.15 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps continu* (4.166) *et l'observateur MI* (4.168)–(4.169)*, sous les hypothèses 4.5 et 4.6, satisfait les exigences* (4.187) *et tend asymptotiquement vers zéro (lorsque* $w(t)=0$*) s'il existe deux matrices* $P=P^T>0$ *et* M *de dimensions appropriées et un scalaire* $\overline{\gamma}>0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{array}{c} \min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} \Lambda^T P + P\Lambda - (M\Omega_i)^T - M\Omega_i + H^T H & PE_a - MW_c \\ E_a^T P - (MW_c)^T & -\overline{\gamma}\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i=1,\cdots,L \end{array} \tag{4.188}$$

pour une matrice H *donnée. Le gain de l'observateur est donné par* $K_a = P^{-1}M$ *et le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $w(t)$ *vers* $v(t)$ *est donné par* $\gamma=\sqrt{\overline{\gamma}}$*.*

Théorème 4.16 (MDD)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps discret* (4.166) *et l'observateur MI* (4.168)–(4.169)*, sous les hypothèses 4.5 et 4.6, satisfait les exigences* (4.187) *et tend asymptotiquement vers zéro (lorsque* $w(t)=0$*) s'il existe deux matrices* $P=P^T>0$ *et* M *de dimensions appropriées et un scalaire* $\overline{\gamma}>0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{array}{c} \min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} H^T H - P & 0 & (P\Lambda - M\Omega_i)^T \\ 0 & -\overline{\gamma}\mathrm{I} & (PE_a - MW_c)^T \\ (*) & (*) & -P \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i=1,\cdots,L \end{array} \tag{4.189}$$

pour une matrice H *donnée. Le gain de l'observateur est donné par* $K_a = P^{-1}M$ *et le gain* $\mathcal{L}_2$ *de* $w(t)$ *vers* $v(t)$ *est donné par* $\gamma=\sqrt{\overline{\gamma}}$*.*

4.4.8 Problème 3 : conditions de convergence de l'erreur d'estimation en présence de perturbations et pour une $(q+1)^{\text{ème}}$ différence de l'entrée inconnue non nulle

Dans cette section, une perturbation agissant sur le système est considérée. De plus, le découplage complet entre l'entrée inconnue et l'erreur d'estimation $\Sigma(t)$ n'est pas parfaitement accompli (l'hypothèse 4.6 n'est pas vérifiée). En effet, la $(q+1)^{\text{ème}}$ différence de l'entrée inconnue n'est pas nulle mais bornée par une fonction inconnue $\Delta^{(q+1)}\eta(t)\leq\delta(t)$. Remarquons

que la solution à ce problème peut être également mise à profit afin de réduire le nombre d'actions intégrales. L'étude est réalisée sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.7. *L'entrée inconnue satisfait* $\Delta^{(q+1)}\eta(t) = \sigma(t)$ *avec* $\|\sigma(t)\|_2^2 < \infty$ *(en temps continu* $\eta^{(q+1)}(t) = \sigma(t)$*).*

L'équation caractérisant l'erreur d'estimation (4.182) peut être réécrite comme suit :

$$\Sigma(t+1) \quad = \quad \Psi(t)\Sigma(t) + \Pi\theta(t) \quad , \tag{4.190}$$

où

$$\Pi = \begin{bmatrix} E_a - K_a W_c & \Phi \end{bmatrix} \text{ et } \theta(t) = \begin{bmatrix} w^T(t) & \sigma^T(t) \end{bmatrix}^T \quad . \tag{4.191}$$

La fonction inconnue $\sigma(t)$ est alors incluse dans le vecteur caractérisant les perturbations du système. La conception de l'observateur revient alors à obtenir un gain de l'observateur K_a tel que le signal objectif $v(t)$ à atténuer et défini par

$$v(t) = H\Sigma(t) \quad , \tag{4.192}$$

satisfasse les exigences

$$\lim_{k\to\infty} \Sigma(t) = 0 \quad \text{for} \quad w(t) = 0 \quad , \tag{4.193a}$$

$$\|v(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|\theta(t)\|_{2,Q}^2 \quad \text{for} \quad \theta(t) \neq 0 \text{ and } \Sigma(0) = 0 \quad , \tag{4.193b}$$

où γ est le gain $\mathcal{L}_2$ de $\theta(t)$ vers $v(t)$. Remarquons que la norme $\mathcal{L}_2$ pondérée par Q est définie par $\|\theta(t)\|_{2,Q}^2 = \sum_0^\infty \theta^T(t) Q \theta(t)$ avec $Q > 0$. Cette norme est utilisée afin de pondérer l'importance relative donnée à $w(t)$ et $\sigma(t)$.
Ce problème peut être traité de la même manière que le problème précédent, c'est-à-dire en considérant $\theta(t)$ au lieu de $w(t)$. Une solution au problème 3 est donnée sous la forme des théorèmes suivants.

Théorème 4.17 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps continu* (4.166) *et l'observateur MI* (4.168)–(4.169)*, sous les hypothèses 4.6 et 4.7, satisfait les exigences* (4.193) *et tend asymptotiquement vers zéro (lorsque* $\theta(t) = 0$*) s'il existe deux matrices* $P = P^T > 0$ *et* M *de dimensions appropriées et un scalaire* $\bar{\gamma} > 0$*, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{gathered} \min \bar{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} \Lambda^T P + P\Lambda - (M\Omega_i)^T - M\Omega_i + H^T H & \tilde{\Pi} \\ \tilde{\Pi}^T & -\bar{\gamma} Q \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad i = 1, \cdots, L \quad , \end{gathered} \tag{4.194}$$

où

$$\tilde{\Pi} \quad = \quad \begin{bmatrix} PE_a - MW_c & P\Phi \end{bmatrix}$$

pour des matrices H et $Q>0$ données. Le gain de l'observateur est donné par $K_a = P^{-1}M$ et le gain $\mathcal{L}_2$ de $w(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Théorème 4.18 (MDD). *L'erreur d'estimation entre le multimodèle découplé à temps discret (4.166) et l'observateur MI (4.168)–(4.169), sous les hypothèses 4.6 et 4.7, satisfait les exigences (4.193) et tend asymptotiquement vers zéro (lorsque $\theta(t)=0$) s'il existe deux matrices $P=P^T>0$ et M de dimensions appropriées et un scalaire $\overline{\gamma}>0$, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\begin{array}{c} \min \overline{\gamma} \quad \textit{sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} H^T H - P & 0 & (P\Lambda - M\Omega_i)^T \\ 0 & -\overline{\gamma} Q & \tilde{\Pi}^T \\ (*) & (*) & -P \end{bmatrix} < 0 \ , \quad i = 1, \cdots, L \ , \end{array} \tag{4.195}$$

où

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} PE_a - MW_c & P\Phi \end{bmatrix}$$

pour des matrices H et $Q>0$ données. Le gain de l'observateur est donné par $K_a = P^{-1}M$ et le gain $\mathcal{L}_2$ de $w(t)$ vers $v(t)$ est donné par $\gamma = \sqrt{\overline{\gamma}}$.

Exemple 4.4 (**Exemple de synthèse d'un observateur MI : Problème 2**)
Il s'agit d'estimer l'état d'un système à temps discret décrit par un multimodèle découplé de la forme (4.164) constitué de $L=2$ sous-modèles de dimensions différentes. Le multimodèle comporte deux sorties mesurées et deux entrées inconnues. Les valeurs numériques des matrices du multimodèle sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.7 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} , \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & -0.4 & -0.1 \\ -0.2 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix} ,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \end{bmatrix}^T , \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^T ,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix} , \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.5 \\ -0.6 & -0.2 & -0.4 \end{bmatrix} ,$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 \end{bmatrix} , \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 \end{bmatrix} ,$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} , \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} ,$$

$$V_1 = V_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad , \qquad W_c = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} \quad .$$

La période d'échantillonnage est $T_s = 0.01$. *Afin d'alléger l'écriture,* tTs *sera simplement noté* t. *La variable d'indexation* $\xi(t)$ *est ici le signal de commande* $u(t) \in [0,1]$. *Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation des fonctions de type gaussien :*

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^{L} \omega_j(\xi(t)) \quad , \tag{4.196}$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2\right) \quad , \tag{4.197}$$

de dispersion $\sigma = 0.4$ *et de centres* $c_1 = 0.25$ *et* $c_2 = 0.75$.

La perturbation prend la forme

$$w(t) = \begin{bmatrix} 0.04\sin(40t) \\ 0.035\sin(60t) \end{bmatrix} \tag{4.198}$$

et l'entrée inconnue prend la forme

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_a(t) \\ \eta_s(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{4.199}$$

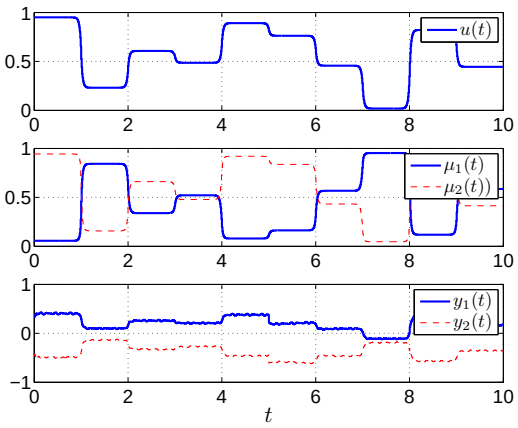

Figure 4.12 – Entrée, sorties et fonctions de pondération du multimodèle

Dans cet exemple, les entrées inconnues servent à modéliser les défauts affectant le système, d'où la structure des matrices D_i, V_i *et* $\eta(t)$ *permettant la prise en compte des défauts* $\eta_a(t)$ *et* $\eta_s(t)$ *agissant respectivement sur l'équation dynamique (p. ex. une défaillance d'un composant interne du système) et sur l'équation statique (p. ex. un défaut de capteur) des sous-modèles. Remarquons par ailleurs que les valeurs propres des matrices* A_i *des sous-modèles sont données par*

$$\lambda_1 = \left[-0.2 \pm 0.43i\right] \quad et \quad \lambda_2 = \left[-0.83 \quad -0.16 \quad 0.50\right] \quad .$$

Les dynamique des sous-modèles sont différentes et le comportement du multimodèle peut être qualifié de non linéaire. Sur la figure 4.12 sont illustrées les évolutions temporelles de l'entrée, des sorties et des fonctions de pondération quand aucun défaut n'agit sur le système. Il est possible de voir que la prise en compte des contributions des deux sous-modèles intervient constamment dans l'élaboration de la sortie du multimodèle.

Les défauts $\eta_a(t)$ et $\eta_s(t)$ considérés sont de la forme

$$\eta_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq 5, \\ 0.1333t - 0.6665 & si \quad 5 \leq t \leq 6.5, \\ 0.2 & si\ non, \end{cases} \tag{4.200}$$

$$\eta_s(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq 5, \\ -0.35 & si \quad 5 \leq t \leq 8, \\ -0.15 & si\ non. \end{cases} \tag{4.201}$$

Le défaut η_a est un signal polynomial par morceaux de degré maximum égal à un. Le défaut η_s est un signal constant par morceaux. Compte tenu des formes des défauts, un découplage complet de l'entrée inconnue peut être réalisé par le biais de deux actions intégrales.

Remarque 4.12. *Le signal objectif $z(t)$ à minimiser est l'erreur d'estimation des états des sous-modèles $H = [\mathrm{I}_5 \quad 0_{(5\times4)}]$. L'impact de la perturbation sur l'erreur d'estimation des entrées inconnues n'est pas pris en considération lors de la synthèse de l'observateur.*

Le gain de l'observateur est obtenu en cherchant une solution satisfaisant les conditions du théorème 4.16. Les conditions de ce théorème sont vérifiées par :

$$K_a = \begin{bmatrix} -0.286 & 0.420 & 0.076 & 0.373 & 0.912 & 2.143 & 1.007 & 0.084 & 0.321 \\ -0.455 & -0.332 & -0.698 & -0.484 & -1.414 & -2.937 & 1.211 & -0.031 & 0.203 \end{bmatrix}^T,$$

pour un niveau d'atténuation minimal égal à $\gamma = 3.1623$.

Les erreurs d'estimation de l'état obtenues avec l'observateur MI ainsi synthétisé sont illustrées sur les figures 4.13 et 4.14. La figure 4.15 illustre l'estimation des entrées inconnues fournie par l'observateur MI. Remarquons que lors de la simulation, les conditions initiales du multimodèle diffèrent de celles de l'observateur.

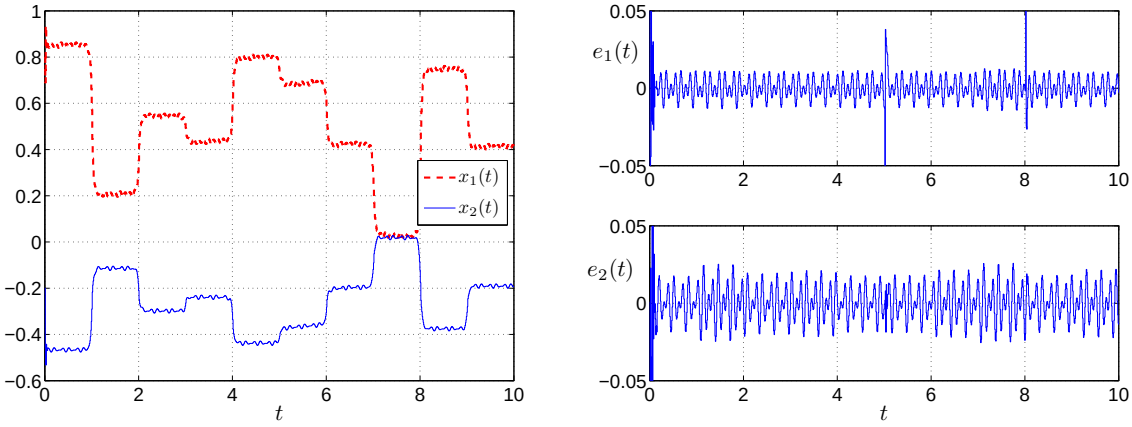

Figure 4.13 – Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1

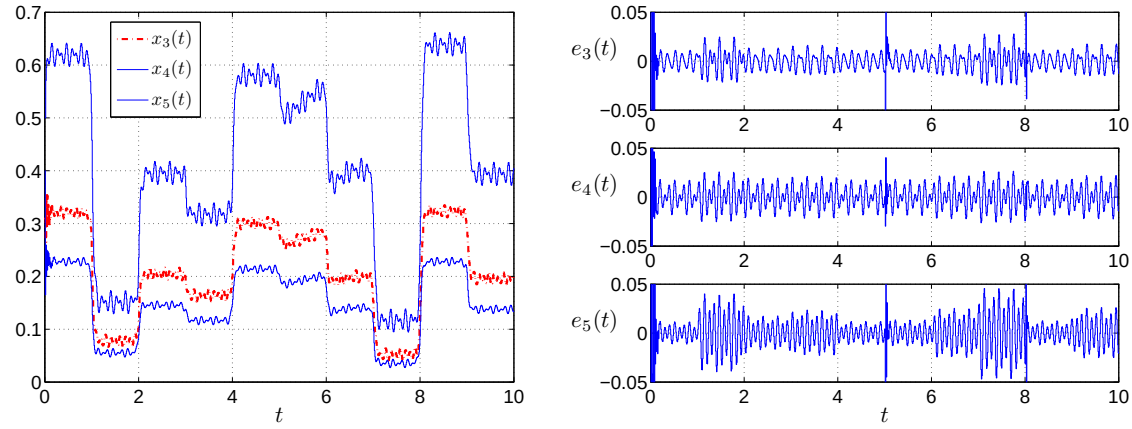

Figure 4.14 – Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 2

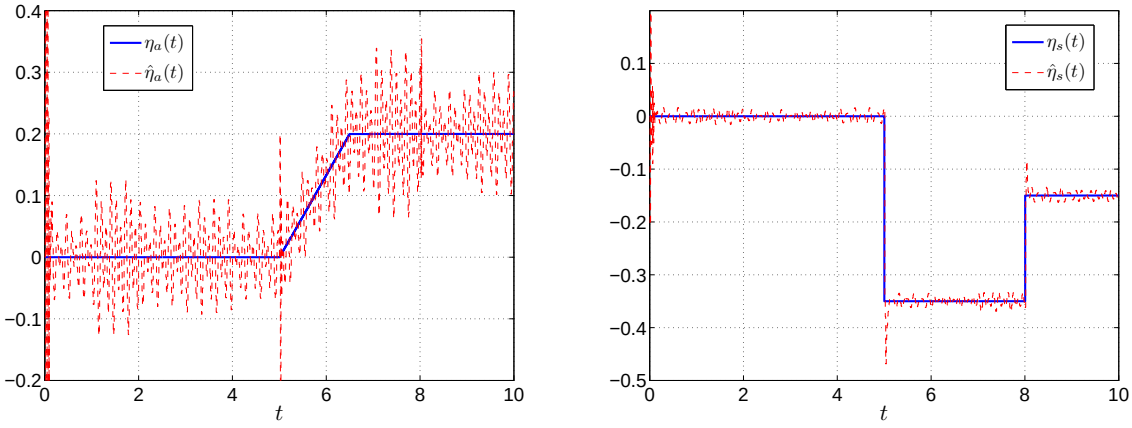

Figure 4.15 – Défauts η_a et η_s et leurs estimés

Ces figures permettent d'apprécier la bonne qualité de l'estimation fournie par l'observateur MI proposé, les erreurs d'estimation d'état des sous-modèles étant admissibles compte tenu

de l'amplitude des états des sous-modèles. L'examen de ces figures révèle que l'erreur d'estimation de l'état n'est que localement affectée par les entrées inconnues, en particulier quand se produit un changement brusque des entrées inconnues, par exemple à $t = 5$ et $t = 8$. En effet, à ces instants, l'hypothèse $\Delta^{(2)}\eta(t) = 0$ n'est pas vérifiée.

Il est possible de constater d'après la figure 4.15 l'importance de l'influence de la perturbation sur l'estimation de $\eta_a(t)$. D'une part, rappelons que le niveau d'atténuation entre la perturbation $w(t)$ et l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue n'a pas été pris en compte lors de la synthèse de l'observateur (c.f. remarque 4.12). D'autre part, constatons que d'après la figure 4.14 les états du deuxième sous-modèle sont plus sensibles à la perturbation $w(t)$. Ceci explique en partie le niveau du bruit dans l'estimation de $\eta_a(t)$. Toutefois, cette estimation peut être améliorée en considérant un ensemble d'observateurs dédiés à l'estimation des états et des entrées inconnues. Il est également possible d'inclure une étape de post-filtrage afin de réduire l'influence du bruit sur cette estimation.

Il est particulièrement intéressant d'observer, dans une optique de diagnostic, que l'estimation des entrées inconnues est possible même si les défauts apparaissent simultanément. Les estimations des entrées inconnues peuvent être alors directement utilisées en tant que signaux indicateurs de défauts (c.f. section 5.6.2).

Exemple 4.5 (Exemple de synthèse d'un observateur MI : Problème 3)
On considère dans cet exemple le même multimodèle que celui utilisé dans l'exemple 4.4. En revanche, les entrées inconnues $\eta_a(t)$ et $\eta_s(t)$ sont maintenant données par

$$\eta_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq 2, \\ -0.1250t + 0.25 + 0.2\cos(4t) & si\ non, \end{cases} \tag{4.202}$$

$$\eta_s(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq 2.5, \\ 0.2 + 0.1\sin(3t) & si \quad 2.5 \leq t \leq 7.5, \\ 0 & si\ non. \end{cases} \tag{4.203}$$

L'observateur MI est composé de deux actions intégrales. Cependant, le découplage des entrées inconnues ne peut pas être réalisé et ce, en raison des formes non polynomiales prises en compte.

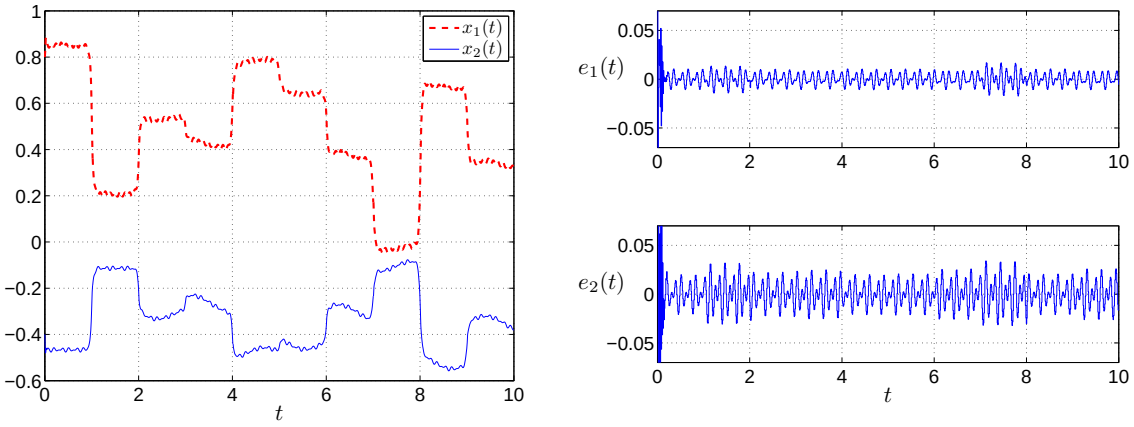

Figure 4.16 – Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 1

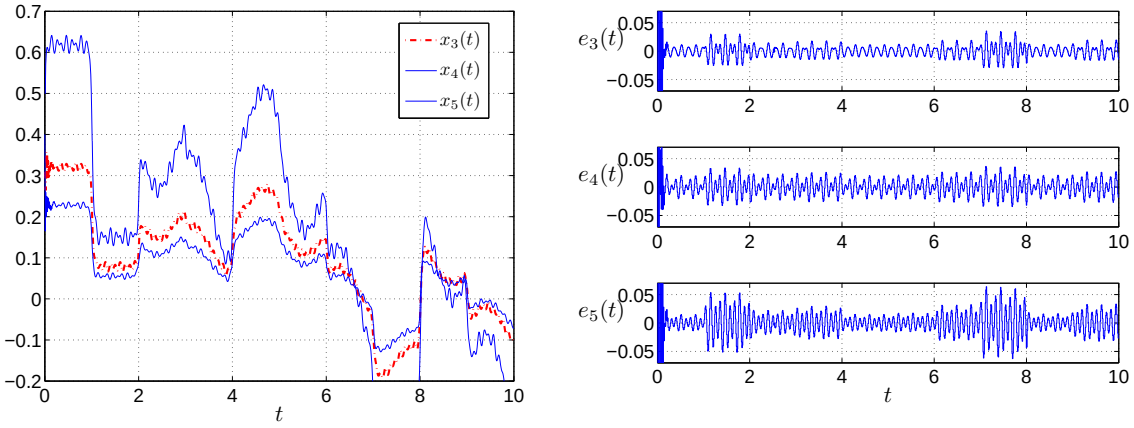

Figure 4.17 – Etats et erreurs d'estimation d'état du sous-modèle 2

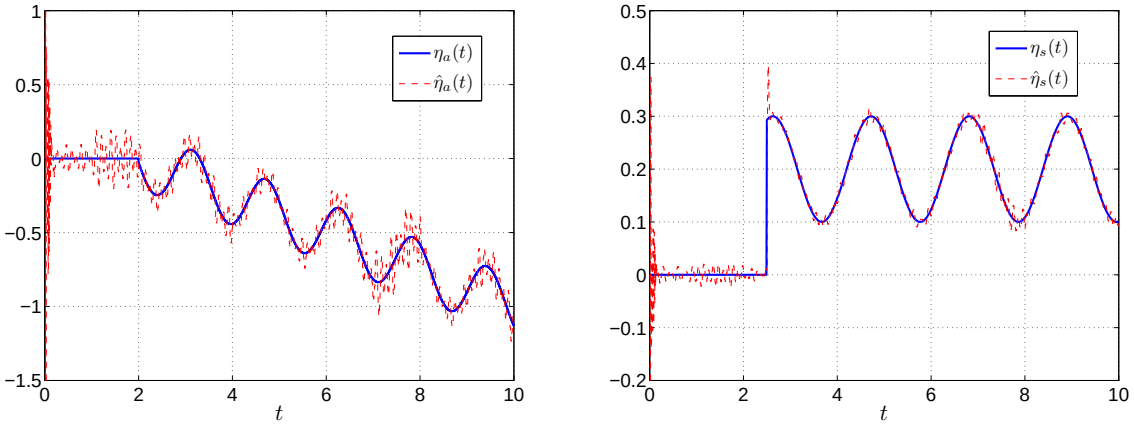

Figure 4.18 – Défauts η_a et η_s et leurs estimés

Le signal objectif $z(t)$ que l'on cherche à atténuer est l'erreur d'estimation des états des sous-modèles, ainsi $H = [\mathrm{I}_5 \quad 0_{(5\times 4)}]$ et la matrice $Q = I_{(4)}$. Une solution satisfaisant les condi-

tions du théorème 4.18 est donnée par :

$$K_a = \begin{bmatrix} 0.308 & 0.566 & 0.675 & 0.6485 & 1.659 & 4.686 & 1.108 & 0.757 & 0.475 \\ -0.265 & -0.423 & -0.556 & -0.502 & -1.322 & -3.595 & 1.439 & -0.536 & 0.393 \end{bmatrix}^T,$$

pour un niveau d'atténuation minimal égal à $\gamma = 5.4772$.

Les erreurs d'estimation des états des sous-modèles obtenues dans ce cas de figure sont illustrées sur les figures 4.16 et 4.17. Les erreurs d'estimation demeurent globalement bornées et proches de zéro. La figure 4.18 propose une comparaison entre les entrées inconnues et leurs estimées. Il est possible d'apprécier la qualité de l'estimation obtenue et ce, en dépit d'un découplage imparfait de l'entrée inconnue.

4.5 Conclusion et contributions

Nous avons abordé dans ce chapitre le problème relatif à l'estimation d'état robuste d'un système représenté par un multimodèle découplé. Il est entendu par robustesse la capacité de l'observateur à assurer une reconstruction d'état avec un certain degré de précision et ce, en dépit par exemple de la présence de perturbations, d'imprécisions de modélisation ou d'entrées inconnues.

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la reconstruction de l'état d'un système soumis à des perturbations ou comportant des incertitudes de modélisation. Des conditions suffisantes conduisant à la synthèse d'un observateur à gain proportionnel (P) ont dans un premier temps été établies à l'aide de la théorie de Lyapunov et sous forme LMI.

Le gain de cet observateur doit être calculé de façon à atténuer l'impact des perturbations et des incertitudes paramétriques sur l'erreur d'estimation tout en garantissant les *bonnes* performances dynamiques de l'observateur. Ces deux objectifs antagonistes de synthèse se révèlent difficiles à atteindre à l'aide de l'observateur P dans la mesure où ce dernier n'offre au concepteur qu'un seul degré de liberté pour régler le niveau d'atténuation et les performances dynamiques. Une autre sorte d'observateur, dit à gain proportionnel-intégral, a donc dans un deuxième temps été introduite. L'observateur PI introduit, grâce à son action intégrale, un degré de liberté supplémentaire susceptible d'être mis à profit lors de la synthèse pour obtenir un niveau d'atténuation intéressant et sans dégrader pour autant les performances dynamiques de l'observateur.

La seconde partie du chapitre a été dédiée au problème de l'estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues influençant sa dynamique. A cet effet, un observateur à gain multi-intégral a été présenté et ses conditions d'existence, sous la forme de LMI, proposées. Ce type d'observateur utilise une chaîne d'actions intégrales qui permet d'estimer les entrées inconnues sous forme polynomiale. Il présente dans un contexte de diagnostic de systèmes un

indéniable intérêt dans la mesure où il permet de générer, par exemple, des résidus robustes capables de fournir des signaux indicateurs de défauts.

5

Etude de cas : identification, estimation et diagnostic d'un bioréacteur

Sommaire

5.1 Introduction 172
5.2 Présentation du modèle du bioréacteur 172
5.3 Représentation multimodèle du bioréacteur dans le cas SIMO 173
5.3.1 Première approche de modélisation 174
5.3.2 Deuxième approche de modélisation 176
5.4 Représentation multimodèle du taux de substrat carboné S dans le cas multi-entrées 178
5.5 Reconstruction d'état à l'aide du multimodèle 182
5.5.1 Reconstruction des sorties du bioréacteur à l'aide du multimodèle . . 182
5.5.2 Estimation du substrat carboné dans le cas MISO 183
5.5.3 Estimation de l'évolution de la biomasse 184
5.6 Application de l'estimation d'état au diagnostic 185
5.6.1 Génération des résidus à l'aide d'un banc d'observateurs 186
5.6.2 Génération des résidus à l'aide d'un observateur multi-intégral 189
5.7 Conclusion 192

5.1 Introduction

Le premier chapitre de ce mémoire a exposé les principes fondamentaux de l'approche multimodèle. Il a mis en avant deux structures fondamentales de multimodèles, à savoir le multimodèle de T.S. et le multimodèle découplé. Notre intérêt s'est précisément porté sur ce dernier, encore peu étudié dans un contexte d'estimation d'état. Le second chapitre a proposé une procédure d'identification paramétrique de type boîte noire visant à caractériser le comportement dynamique d'un système à l'aide d'un multimodèle découplé. La capacité de ce multimodèle à appréhender des comportements de nature non linéaire a été mise en évidence. Les troisième et quatrième chapitres ont abordé le problème soulevé par l'estimation d'état d'un système en explorant les possibilités offertes par le multimodèle découplé. Une première stratégie d'estimation d'état basée sur l'extension de l'observateur de Luenberger a été mise en œuvre au cours du troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre, cette stratégie a été améliorée puis étendue à des observateurs à gain proportionnel-intégral et à gain multi-intégral de façon à obtenir une estimation robuste vis-à-vis des perturbations (bruits, incertitudes et entrées inconnues) susceptibles d'affecter le comportement du système.

L'objectif du présent chapitre est d'illustrer, à travers un exemple académique, la mise en œuvre des techniques d'identification et d'estimation d'état présentées au cours des chapitres précédents. Dans cette optique, il est fait appel au modèle simplifié d'un bioréacteur, un procédé largement répandu dans divers secteurs industriels connexes au génie chimique. En raison de leur nature non linéaire, les bioréacteurs constituent d'excellents *benchmarks* particulièrement bien adaptés à l'évaluation des techniques d'automatique non linéaire. Ce chapitre permet donc d'évaluer les performances et les limites de l'approche proposée de la phase d'identification jusqu'à la phase de mise en œuvre d'une stratégie de diagnostic à base d'observateurs, en passant par la synthèse d'observateurs P, PI et MI.

5.2 Présentation du modèle du bioréacteur

Le terme bioréacteur désigne un récipient dans lequel se déroule une réaction bio-chimique. Une bioréaction fait en principe intervenir trois sortes de variables : la biomasse (p. ex. les micro-organismes), le substrat (p. ex. les sources de carbone dans l'alimentation) et les produits de la biomasse (p. ex. les enzymes).

Le comportement dynamique d'un bioréacteur continu homogène (infiniment mélangé) et limité par un seul substrat, réaction de type $S(t) \rightarrow X(t)$, peut être décrit à l'aide du modèle non linéaire suivant [Guillaume et Rouchon, 1997; Lamnabhi-Lagarrigue et Rouchon, 2002; Dunn et al., 2005] :

$$\dot{S}(t) = D(t)(S_{in}(t) - S(t)) - kr(t) \ , \tag{5.1a}$$

$$\dot{X}(t) = -D(t)X(t) + r(t) \ , \tag{5.1b}$$

où $S(t)$ et $X(t)$ sont respectivement le taux de concentration du substrat carboné et celui de la biomasse, où $D(t) > 0$ est le taux de dilution, k un coefficient de rendement, $S_{in}(t)$ le taux de

concentration d'alimentation en substrat et $r(t)$ la vitesse de réaction (c.-à-d. la production de biomasse par unité de volume). La vitesse de réaction $r(t)$ peut être caractérisée par l'expression

$$r(t) \quad = \quad \frac{\mu_{max} S(t)}{K_s + S(t)} X(t) \ , \tag{5.2}$$

où μ_{max} et K_s sont deux constantes qui représentent respectivement la vitesse spécifique maximum de croissance et une constante de saturation.
Les paramètres utilisés lors de la simulation sont les suivants :

$$\mu_{max} = 0.33\,\mathrm{h}^{-1}, \ \ K_s = 5 g l^{-1}, \ \ k = 20 \ . \tag{5.3}$$

Le taux de concentration d'alimentation en substrat est considéré constant $S_{in} = 20\,\mathrm{gl}^{-1}$ et le taux de dilution variable dans la plage $D \in \begin{bmatrix} 0.0 & 0.22 \end{bmatrix}\ \mathrm{h}^{-1}$.

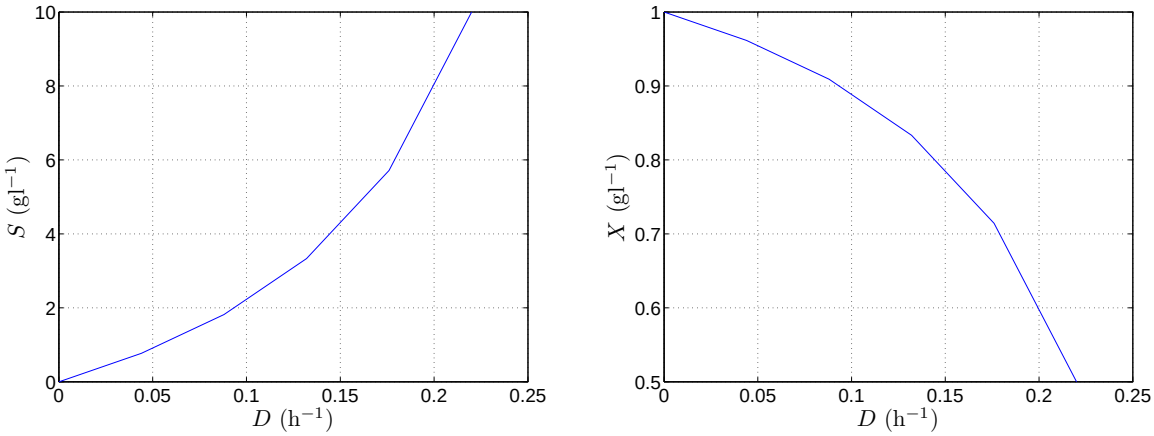

Figure 5.1 – Caractéristiques en régime statique du substrat carboné (à droite) et du taux de biomasse (à gauche)

Le test de non-linéarité du système proposé au cours de la section 1.2.2 peut s'effectuer directement en exploitant les caractéristiques en régime statique du bioréacteur illustrées sur la figure 5.1. Les indices obtenus en évaluant la relation (1.8) sont donnés par

$$\eta_X = 0.7686 \ \text{ et } \ \eta_S = 0.7686 \ . \tag{5.4}$$

Il est possible de conclure sur le caractère non linéaire du bioréacteur dans la plage de fonctionnement considérée, ces indices étant différents de zéro. Remarquons par ailleurs que les conditions initiales du taux de concentration de biomasse doivent être différentes de zéro puisqu'il ne peut y avoir de réaction spontanée dans le bioréacteur, un état d'équilibre du système étant atteint si $X(0) = 0$.

5.3 Représentation multimodèle du bioréacteur dans le cas SIMO

Notre premier objectif est de représenter le comportement dynamique du bioréacteur (5.1) par un multimodèle découplé. Cette représentation multimodèle peut entraîner par exemple une ré-

duction de la complexité du modèle de départ, favorisant ainsi la mise en place d'un algorithme d'estimation d'état.

Deux séquences de pseudo-mesures (c.-à-d. de mesures générées par simulation) du taux de substrat carboné $S(t)$ et du taux de biomasse $X(t)$ sont disponibles pour les besoins de l'identification et de la validation du modèle. Chaque séquence de données comporte 2400 points et correspond à un enregistrement de 3000 heures. Elles sont générées en considérant un taux de dilution (signal d'excitation) composé de créneaux d'amplitudes variables comprises dans l'intervalle de variation admissible.

Deux stratégies de modélisation peuvent être envisagées pour aboutir à une représentation multimodèle. Dans la première, les outils d'identification proposés au cours du chapitre 2, bien que développés dans un contexte MISO, sont directement mis à profit pour l'identification d'un système de type SIMO. Pour ce faire, un multimodèle différent pour chaque sortie du système est élaboré. La seconde stratégie de modélisation consiste à étendre les outils d'identification proposés au cours du chapitre 2 au cas SIMO afin d'obtenir un seul multimodèle capable de fournir une caractérisation du taux de biomasse et du taux de substrat carboné. Ces deux approches de modélisation seront traitées dans la suite de cette section.

Remarque 5.1. *L'identification paramétrique du multimodèle sera effectuée dans cette section en l'absence d'un bruit de mesure. Ce choix est motivé par le souci de montrer clairement l'adéquation entre la sortie du système et celle du multimodèle, objectif difficilement atteint lorsque un bruit de mesure apparaît sur les mesures du système. En effet, un bruit de mesure peut masquer l'écart existant entre les mesures du système et la sortie du multimodèle. Toutefois et comme il a été montré au cours du chapitre 2 dédié à l'identification, les résultats présentés dans cette section peuvent être facilement étendus au cas où un bruit de mesure affecte le système.*

5.3.1 Première approche de modélisation

On cherche à caractériser chaque sortie du système par un multimodèle différent comme le montre la figure 5.2. Cette stratégie indépendante d'identification permet de réduire le nombre de paramètres à identifier lors de la procédure d'optimisation de chaque multimodèle. Cette simplification peut néanmoins entraîner une non prise en compte des couplages entre les variables internes et les sorties du système.

Chacun des deux multimodèles ($j = 1,2$) comporte 3 sous-modèles ($i = 1,2,3$) du premier ordre :

$$y_j^i(k+1) \;=\; a_j^i y_j^i(k) + b_j^i D(k) + d_j^i \;, \qquad j = 1,2 \quad i = 1,2,3 \tag{5.5}$$

plus un filtre du premier ordre :

$$\xi_j(k+1) \;=\; \alpha_j \xi_j(k) + (1-\alpha_j) D(k) \;, \qquad j = 1,2 \tag{5.6}$$

associé à la variable de décision, ici $D(k)$.

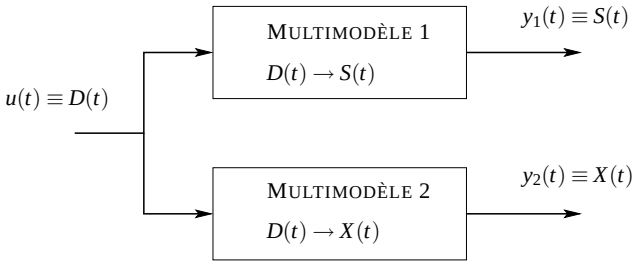

Figure 5.2 – Représentation multimodèle du bioréacteur. Première approche de modélisation

Les fonctions de pondération sont obtenues par normalisation des fonctions de type gaussien. Pour les deux multimodèles, les centres des fonctions de pondération sont fixés à $C_1 = 0.0$, $C_2 = 0.105$ et $C_3 = 0.21$ (distribution homogène sur l'espace de fonctionnement du système). Quant aux dispersions, elles sont introduites dans la procédure d'estimation paramétrique du multimodèle et sont données par $\sigma_1 = 0.0855$ et par $\sigma_2 = 0.1875$. Les paramètres identifiés des deux multimodèles sont présentés dans le tableau 5.1.

	a_1^i	b_1^i	d_1^i
1	-0.3094	13.9792	0.1049
2	0.3396	20.0000	-0.0478
3	0.7351	22.2398	-2.2780

$\alpha_1 = 0.8459$

	a_2^i	b_2^i	d_2^i
1	-0.1171	-4.9556	0.9792
2	0.0136	4.6640	1.2265
3	0.3898	-3.7646	0.5088

$\alpha_2 = 0.8116$

Tableau 5.1 – Récapitulatif des paramètres du multimodèle du substrat carboné (à droite) et du multimodèle du taux de biomasse (à gauche)

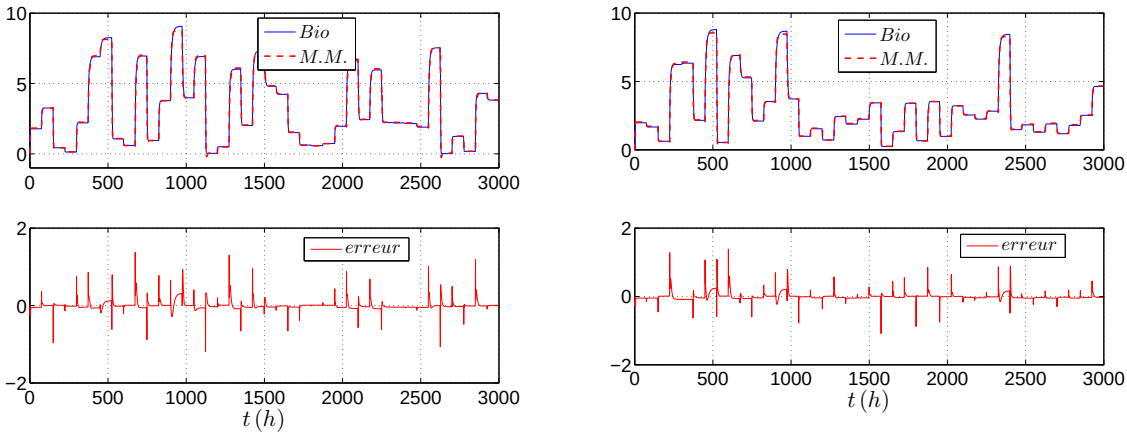

Figure 5.3 – Première approche de modélisation. Représentation multimodèle du substrat carboné, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite)

D'après les figures 5.3 et 5.4, les deux multimodèles identifiés parviennent à capturer globalement le comportement non linéaire du bioréacteur. L'adéquation entre les sorties du système

et celles des multimodèles peut être quantifiée au moyen des indices de performance MSE et VAF définis par (2.51) et par (2.52). Les valeurs obtenues pour la séquence d'identification sont $\text{MSE}_1 = 0.0163$ et $\text{VAF}_1 = 99.7506\%$ pour le premier multimodèle. Pour le deuxième multimodèle, ces indices sont $\text{MSE}_2 = 4.3980 \times 10^{-5}$ et $\text{VAF}_2 = 99.7313\%$. Les indices obtenus pour la séquence de validation sont $\text{MSE}_1 = 0.0137$, $\text{VAF}_1 = 99.7129\%$ et $\text{MSE}_2 = 3.9073 \times 10^{-5}$, $\text{VAF}_2 = 99.6714\%$. Il convient cependant de remarquer qu'un écart entre le comportement du système et celui du multimodèle apparaît dans les régimes transitoires. En effet, le multimodèle ne parvient pas à suivre parfaitement le comportement transitoire du système. Toutefois, les valeurs numériques des indices permettent de confirmer la qualité du modèle obtenu.

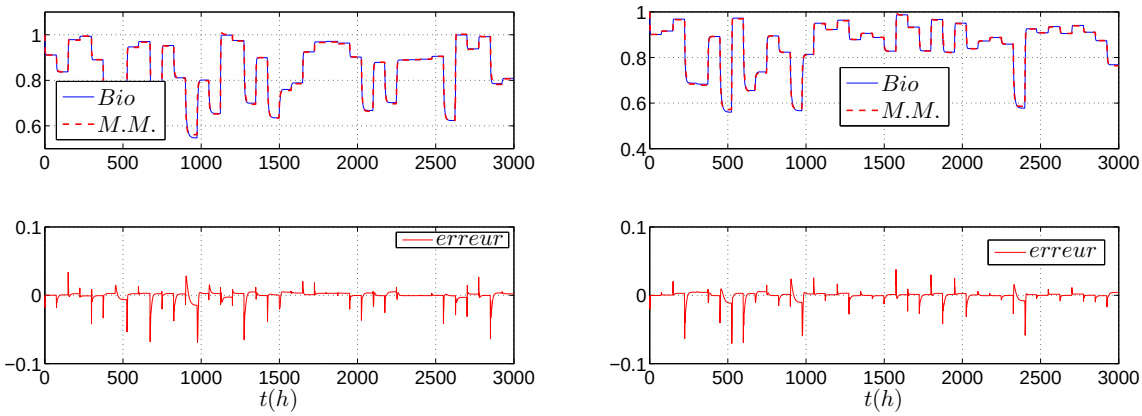

Figure 5.4 – Première approche de modélisation. Représentation multimodèle du taux de biomasse, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite)

5.3.2 Deuxième approche de modélisation

L'objectif de cette deuxième approche de modélisation est de caractériser les deux sorties du système à l'aide d'un seul multimodèle. La démarche d'identification du multimodèle dans le cas SIMO est tout à fait semblable à celle du cas SISO. Cependant, les calculs du vecteur gradient et de la matrice hessienne deviennent plus complexes dans la mesure où il est nécessaire de procéder au calcul des fonctions de sensibilité de chaque sortie par rapport aux paramètres des sous-modèles (calcul de la matrice jacobienne).

Le multimodèle est composé de deux sous-modèles comportant chacun deux états. Les valeurs numériques des matrices A_i, B_i, D_i et C_i sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7827 & -0.0951 \\ -0.2039 & 0.1831 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4.2981 \\ 31.9569 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 7.0251 \\ 20.4594 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.2234 & 0 \\ 0 & 0.1048 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.4732 & -0.1090 \\ -0.7485 & 0.2807 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 62.5997 \\ 71.1842 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -3.4264 \\ 12.3769 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.7524 & 0 \\ 0 & -0.0305 \end{bmatrix}.$$

Un filtre passe-bas, de la forme (5.6), est également utilisé pour filtrer la variable de décision. La constante de temps de ce filtre est $\alpha = 0.6764$. Enfin, les centres et la dispersion des fonctions poids sont donnés respectivement par $c_1 = 0.02$, $c_2 = 0.20$ et $\sigma = 0.247$.

D'après les figures 5.5 et 5.6, le multimodèle identifié parvient à capturer globalement le comportement non linéaire du bioréacteur. Les indices de performance MSE et VAF obtenus pour la séquence d'identification sont $\text{MSE}_S = 0.0177$, $\text{VAF}_S = 99.45\%$ et $\text{MSE}_X = 5.14 \times 10^{-4}$, $\text{VAF}_X = 93.61\%$. Pour la séquence de validation, ils sont donnés par $\text{MSE}_S = 0.0173$, $\text{VAF}_S = 99.4871\%$ et $\text{MSE}_X = 5.86 \times 10^{-4}$, $\text{VAF}_X = 93.0483\%$. Ces indices montrent que la caractérisation obtenue avec ce multimodèle est relativement moins bonne que celle obtenue avec le multimodèle issu de la première approche. Il subsiste en effet des zones, en particulier pour les valeurs de l'entrée proches de 0.22, qui ne sont pas correctement modélisées. Toutefois, ce multimodèle comporte seulement deux sous-modèles qui doivent représenter les couplages entre les variables internes.

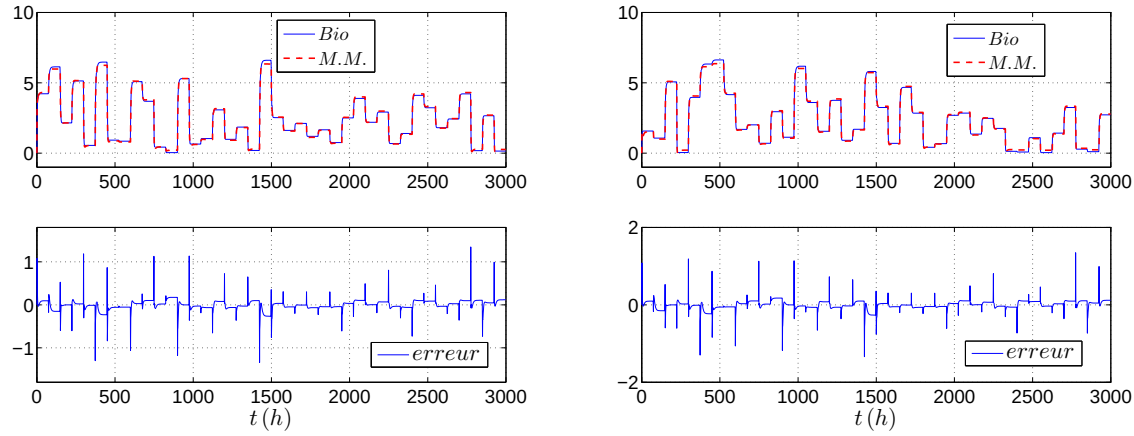

Figure 5.5 – Deuxième approche de modélisation. Représentation multimodèle du substrat carboné, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite)

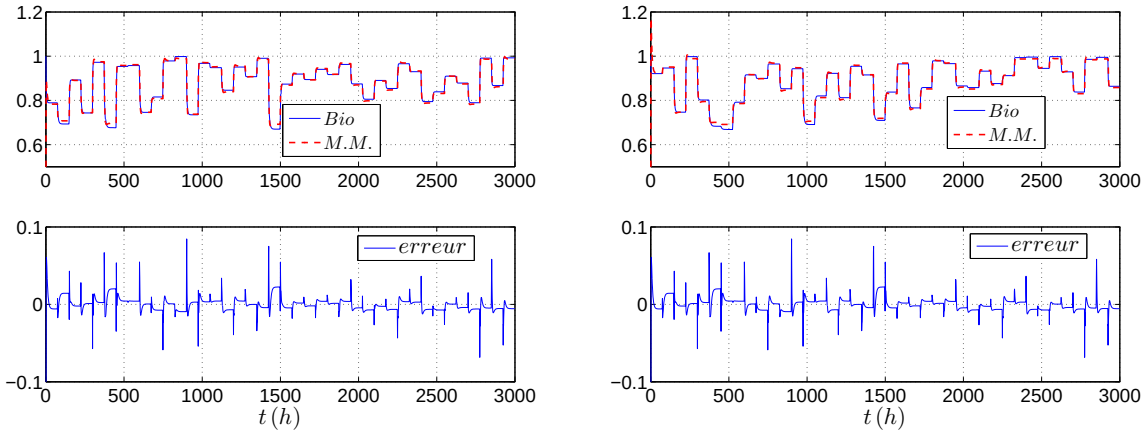

Figure 5.6 – Deuxième approche de modélisation. Représentation multimodèle du taux de biomasse, séquence d'identification (à gauche) et séquence de validation (à droite)

5.4 Représentation multimodèle du taux de substrat carboné S dans le cas multi-entrées

Le bioréacteur, décrit par les expressions (5.1) avec la même plage de variation du taux de dilution $D \in \begin{bmatrix} 0.0 & 0.22 \end{bmatrix}$ h^{-1}, est considéré dans cette section. Toutefois, le taux de concentration d'alimentation en substrat S_{in} n'est plus constant mais varie dans l'intervalle $S_{in} \in \begin{bmatrix} 10 & 20 \end{bmatrix}$ gl^{-1}. Les entrées du bioréacteur sont alors le taux de dilution D et le taux de concentration d'alimentation en substrat S_{in}. La caractéristique en régime statique du taux de substrat carboné S dans la plage de variation des entrées est illustrée sur la figure 5.7.

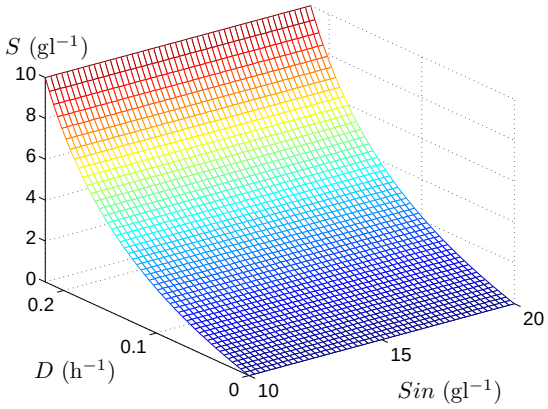

Figure 5.7 – Caractéristique en régime statique du taux de substrat carboné S

Cette section a pour objectif la modélisation du taux de substrat carboné S à partir de la première approche de modélisation. Deux séquences de pseudo-mesures du taux de substrat carboné $S(t)$ sont disponibles pour les besoins de l'identification et de la validation du modèle. Chaque séquence de données comporte 2100 points et correspond à un enregistrement de 3500 heures. Elles sont générées en considérant un taux de dilution et un taux de concentration d'alimentation en substrat composés de créneaux d'amplitudes variables.

Les variables de décision ξ_1 et ξ_2 des fonctions de pondération sont les signaux d'entrée du bioréacteur filtrés :

$$\xi_1(k+1) = \alpha_1\xi_1(k) + (1-\alpha_1)D(k) \ , \tag{5.7}$$

$$\xi_2(k+1) = \alpha_2\xi_2(k) + (1-\alpha_2)S_{in}(k) \ . \tag{5.8}$$

L'espace de fonctionnement du système est partitionné de façon homogène en quatre zones (voir figure 5.8). Les fonctions de pondération associées à chaque zone de fonctionnement sont obtenues par évaluation des expressions (1.20) et (1.21) en considérant les centres $c_{1,1} = c_{2,1} = -0.1$, $c_{1,2} = c_{3,2} = 13$, $c_{2,2} = c_{4,2} = 17$ et $c_{3,1} = c_{4,1} = 0.32$. Quant aux valeurs des dispersions, elles sont initialement fixées à $\sigma_1 = 0.15$ et $\sigma_2 = 2$ puis introduites dans la procédure d'optimisation. Les valeurs finalement obtenues sont données par $\sigma_1 = 0.24$ et $\sigma_2 = 5.48$. Les fonctions de pondération avant et après optimisation sont présentées sur la figure 5.8.

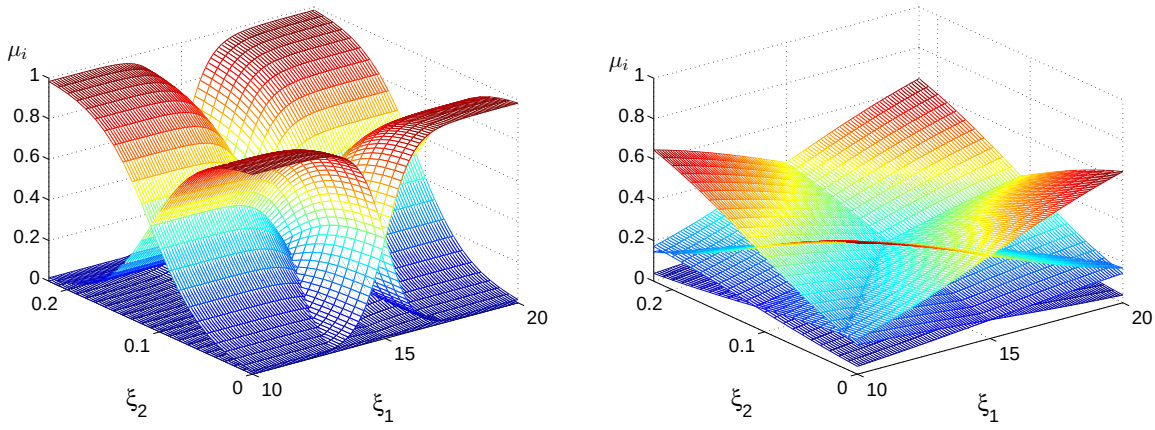

Figure 5.8 – Décomposition de l'espace de fonctionnement. Fonctions poids avant (à gauche) et après optimisation (à droite)

Les sous-modèles, sous une forme canonique d'observation, sont donnés par :

$$x_i(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & a_0^i \\ 1 & a_1^i \end{bmatrix} x_i(k) + \begin{bmatrix} b_0^i & d_0^i \\ b_1^i & d_1^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(k) \\ S_{in}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c^i \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad i = 1, \cdots, 4 \quad , \tag{5.9a}$$

$$y_i(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_i(k) \quad . \tag{5.9b}$$

Il y a donc un total de trente deux paramètres à estimer. Les paramètres issus de la procédure d'optimisation sont présentés dans le tableau 5.2.

	a_0^i	a_1^i	b_0^i	b_1^i	d_0^i	d_1^i	c^i
1	-0.6862	1.5847	-0.6813	0.6869	-0.0042	-0.0289	0.2828
2	-0.4790	1.4456	-28.5062	31.9049	0.3969	-0.4039	0.4016
3	-0.8143	1.8070	-5.9241	6.2393	-0.0511	0.0520	-0.0106
4	-0.7490	1.7300	-16.6615	19.9321	-0.3644	0.3622	-0.5745

$\alpha_1 = 0.9 \qquad \alpha_2 = 0.25$

Tableau 5.2 – Récapitulatif des paramètres des sous-modèles dans le cas MISO

La figure 5.9 établit, à partir des séquences d'identification et de validation, une comparaison entre la réponse du multimodèle et celle du bioréacteur. Les indices de performance obtenus pour ces deux séquences sont donnés respectivement par $\text{MSE}_{id} = 0.0078$, $\text{VAF}_{id} = 99.8120\%$ et par $\text{MSE}_{val} = 0.0446$, $\text{VAF}_{val} = 99.3765\%$. On remarquera, pour la séquence de validation, une zone dans l'intervalle de temps 600–700 où l'identification est moins bonne et pour laquelle le multimodèle devrait être mieux adapté. Cette zone correspond en particulier à de très fortes variations des signaux d'entrée à l'origine de brusques changements dans les modes de fonctionnement du système.

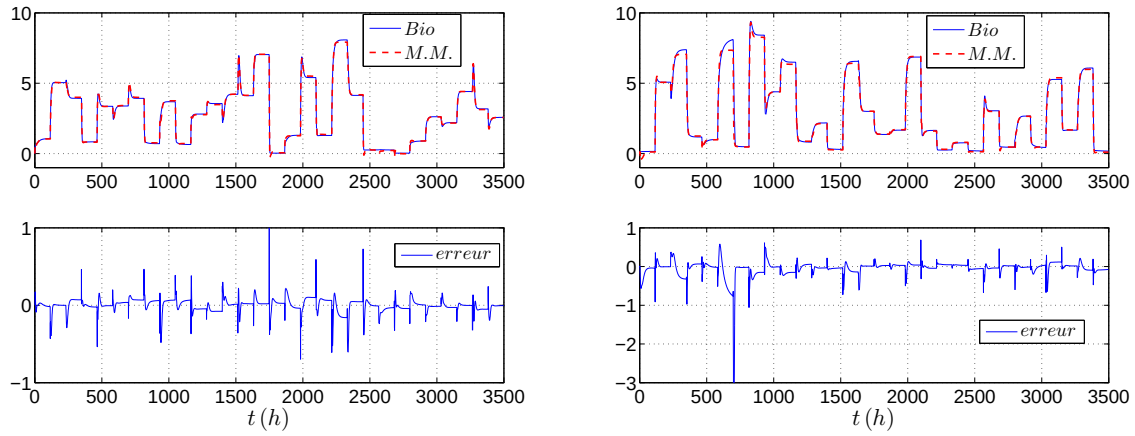

Figure 5.9 – Représentation multimodèle du taux de substrat carboné dans le cas multi-entrées. Résultats avec la séquence d'identification (à gauche) et avec la séquence de validation (à droite)

Vers une réduction de la complexité du multimodèle

La représentation multimodèle du taux de substrat carboné obtenue dans la section précédente a été élaborée en considérant deux variables de décision. Or, un examen de la caractéristique en régime d'équilibre du taux de substrat carboné (figure 5.7) permet de constater que le taux de dilution D est en réalité la seule variable caractéristique du système. En effet, le taux de concentration en alimentation S_{in} n'introduit pas de non-linéarité dans le comportement dynamique du substrat carboné. Ce constat invite à envisager une étape de simplification du multimodèle.

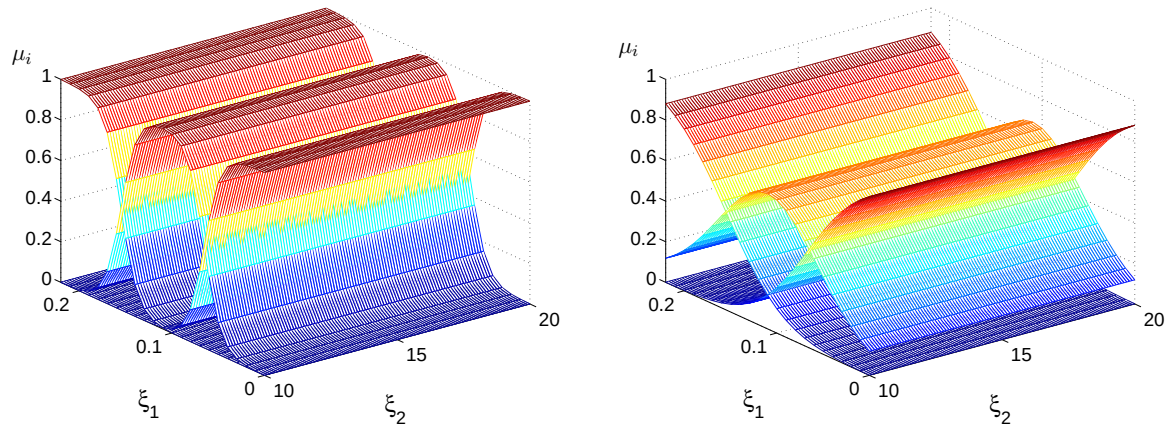

Figure 5.10 – Nouvelles fonctions poids avant (à gauche) et après optimisation (à droite)

Un nouveau partitionnement de l'espace de fonctionnement du système en trois régions est effectué en ne considérant que le taux de dilution filtré comme variable de décision du multimodèle. La valeur de la dispersion σ des fonctions de pondération est initialement fixée à $\sigma = 0.04$ puis optimisée pour parvenir à sa valeur finale donnée par $\sigma = 0.0764$. Les nouvelles fonctions

de pondération ainsi obtenues sont présentées sur la figure 5.10.

Il convient de remarquer que les paramètres du multimodèle sont identifiés à partir de la même séquence d'identification que celle employée au cours de la section précédente. Les paramètres du multimodèle sont présentés dans le tableau 5.3.

	a_0^i	a_1^i	b_0^i	b_1^i	d_0^i	d_1^i	c^i
1	0.4078	0.5454	-8.4304	8.7937	-0.0052	0.0056	-0.0107
2	-0.6242	1.6004	-8.4320	8.9126	-0.0456	0.0460	0.0167
3	-0.7446	1.7265	-7.8230	9.1282	-0.2291	0.2290	-0.1073

$\alpha_1 = 0.8$

Tableau 5.3 – Récapitulatif des paramètres des sous-modèles dans le cas MISO

La figure 5.11 présente une comparaison entre la réponse du multimodèle et celle du bioréacteur. Le multimodèle parvient bien à capturer le comportement non linéaire du taux de substrat carboné. Toutefois, il est possible de constater que les performances du nouveau multimodèle sont moins bonnes que celles obtenues précédemment. En effet, les indices de performance obtenus pour ces deux séquences sont donnés respectivement par $\text{MSE}_{id} = 0.0144$, $\text{VAF}_{id} = 99.6532\%$ et par $\text{MSE}_{val} = 0.0809$, $\text{VAF}_{val} = 98.8119\%$. En revanche, une réduction du nombre des paramètres à identifier (23 paramètres au lieu de 32) a pu être réalisée tout en assurant un recouvrement judicieux de l'espace de fonctionnement du système. Un compromis entre la précision et la complexité du multimodèle doit être établi en fonction des objectifs de modélisation initialement proposés. Cet exemple illustre le délicat problème posé par le choix des variables caractéristiques du système à modéliser.

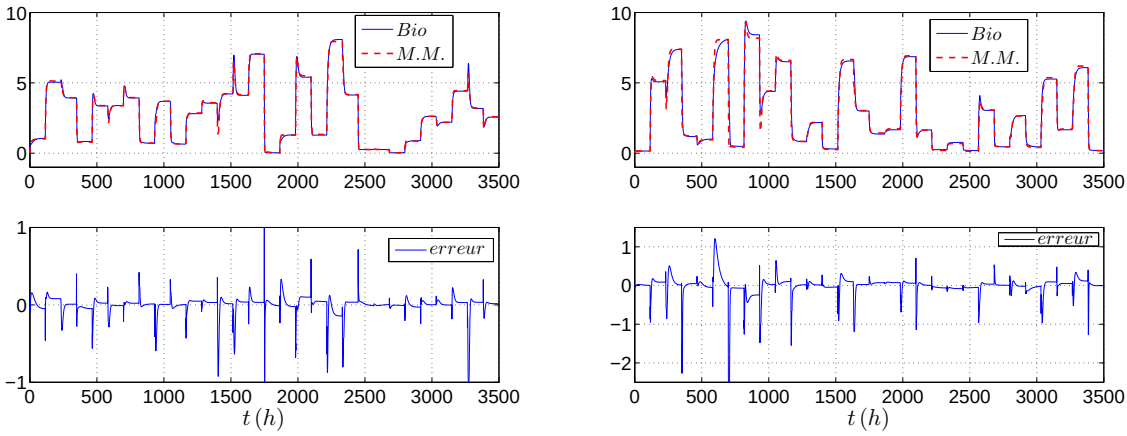

Figure 5.11 – Représentation du multimodèle réduit du taux de substrat carboné dans le cas multi-entrées. Résultats avec la séquence d'identification (à gauche) et avec la séquence de validation (à droite)

Conclusion partielle sur la modélisation

Le problème de la modélisation d'un système, ici d'un bioréacteur, par un multimodèle découplé vient d'être abordé. Deux stratégies de modélisation ont été mises en œuvre afin de parvenir à la représentation multimodèle du bioréacteur. Les résultats montrent la capacité du multimodèle découplé à approcher le comportement de nature non linéaire du bioréacteur. La représentation multimodèle du système ainsi obtenue peut s'avérer plus aisée à manipuler que le modèle non linéaire proposé au départ.

Il a été souligné l'importance que revêt une partition judicieuse de l'espace de fonctionnement du système. En effet, la qualité et la complexité du multimodèle dépendent fortement du nombre et de la dimension des sous-modèles pris en compte mais également du partitionnement de l'espace de fonctionnement du système. L'enjeu est de parvenir à un compromis entre qualité et complexité du multimodèle.

5.5 Reconstruction d'état à l'aide du multimodèle

Les représentations multimodèles obtenues au cours des sections précédentes peuvent être à présent exploitées en vue d'effectuer l'estimation de l'état du système. Il est important de remarquer à ce niveau que les états des sous-modèles identifiés ne représentent en aucun cas les variables internes du système. Aucun sens physique ne doit donc être donné à leur évolution dans la mesure où ils ne constituent que des variables intermédiaires permettant d'aboutir à une caractérisation multimodèle des grandeurs du système accessibles à la mesure et de reproduire le comportement entrée-sortie du système réel.

5.5.1 Reconstruction des sorties du bioréacteur à l'aide du multimodèle

Dans cette section, le multimodèle établi à l'aide de la première approche (section 5.3.1) est utilisé afin d'obtenir une estimation des deux sorties du système. A cet effet, deux observateurs à gain proportionnel sont conçus en résolvant les conditions LMI proposées par le théorème 4.2. Ces conditions permettent de prendre en compte l'effet d'une perturbation sur le système lors de la synthèse de l'observateur. La perturbation considérée prend la forme d'un bruit aléatoirement distribué suivant une loi normale de moyenne nulle et de dispersion égale à un.

Les conditions du théorème 4.2 sont vérifiées, pour un taux de décroissance $\alpha_1 = 0.1$ et pour un niveau d'atténuation $\gamma_1 = 0.2723$, par :

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.2946 \\ 0.4452 \\ 0.4977 \end{bmatrix} , \quad P_1 = \begin{bmatrix} 11.6834 & -5.1545 & -2.9611 \\ -5.1545 & 15.4455 & -4.3996 \\ -2.9611 & -4.3996 & 15.0002 \end{bmatrix} , \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} ,$$
$$W_{c,1} = 0.15 , \quad H = \mathrm{I}_3$$

pour l'observateur destiné à l'estimation du substrat carboné.

Pour l'observateur destiné à l'estimation du taux de biomasse, les conditions du théorème 4.2 sont vérifiées par :

$$\tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.0896 \\ 0.0126 \\ 0.3141 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 21.4216 & -8.0401 & -5.6452 \\ -8.0401 & 22.4276 & -6.7961 \\ -5.6452 & -6.7961 & 17.8934 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{E} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$
$$W_{c,2} = 0.015 \ , \qquad H = \mathrm{I}_3$$

pour un taux de décroissance $\alpha_2 = 0.35$ et pour un niveau d'atténuation $\gamma_2 = 0.5259$.

La figure 5.12 illustre les évolutions temporelles du substrat carboné $S(t)$, du taux de biomasse $X(t)$ et celles de leurs estimés $\hat{S}(t)$ et $\hat{X}(t)$. Il est possible de constater que l'erreur d'estimation de ces deux grandeurs demeure bornée et proche de zéro.

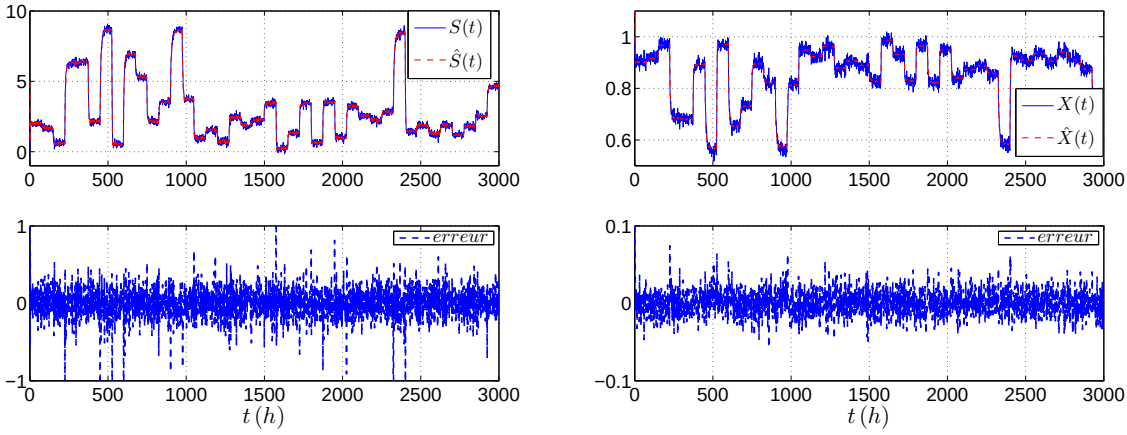

Figure 5.12 – Comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à gauche) et comparaison entre le taux de biomasse et son estimé (à droite)

5.5.2 Estimation du substrat carboné dans le cas MISO

Cette section fait appel au multimodèle, établi au cours de la section 5.4, qui caractérise le comportement dynamique du substrat carboné en fonction du taux de dilution et du taux de concentration d'alimentation en substrat.

La reconstruction du substrat carboné est réalisée à l'aide d'un observateur à gain proportionnel-intégral. Il est synthétisé à partir des conditions proposées par le théorème 4.4. Les gains de l'observateur obtenu, pour un taux de décroissance $\alpha = 0.05$ et pour un niveau d'atténuation $\gamma = 0.2883$, sont donnés par :

$$K_P = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 & -0.14 & 0.17 & -0.88 & 2.08 & -0.44 & 0.49 & 99.99 \end{bmatrix}^T \times 10^{-2} \ ,$$
$$K_I = \begin{bmatrix} -5.12 & 22.45 & -2.48 & 17.91 & 42.55 & -29.25 & 0.89 & 15.98 & -1.17 \end{bmatrix}^T \times 10^{-2} \ .$$

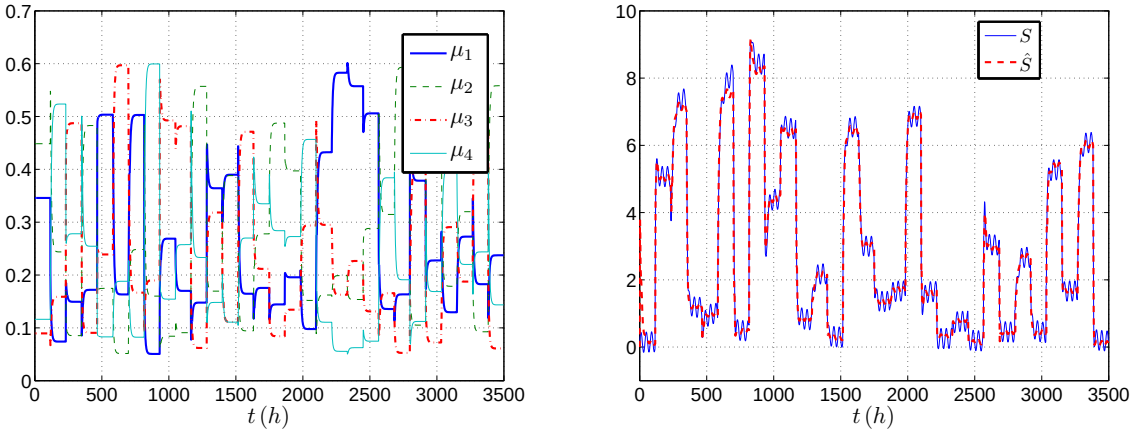

Figure 5.13 – Fonctions de pondération (à gauche) et comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à droite)

Une perturbation de la forme $w(t) = 3\sin(0.05\pi t)$ est ajoutée sur les mesures du substrat carboné $S(t)$ (l'influence de cette perturbation sur la sortie est caractérisée par $W_c = 0.1$). La figure 5.13 présente l'évolution des fonctions de pondération et l'estimé du substrat carboné. Il est possible de constater que les contributions respectives des quatre sous-modèles sont constamment prises en compte et que l'observateur proposé atténue correctement les effets de la perturbation.

5.5.3 Estimation de l'évolution de la biomasse

Dans cette section, il est supposé que le taux en substrat carboné est la seule grandeur accessible à la mesure. On cherche à obtenir une estimation de l'évolution du taux de biomasse à l'aide d'un observateur PI. La synthèse de l'observateur PI est basée sur le multimodèle établi au cours de la section 5.3.2 (deuxième approche de modélisation) en ne considérant que la première ligne des matrices C_i.

Les conditions proposées par le théorème 4.4 sont satisfaites, pour un taux de décroissance $\alpha = 0.16$ et un niveau d'atténuation $\gamma = 0.0275$, par :

$$K_P = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.99 \\ 0.99 \\ 0.99 \\ 0.99 \end{bmatrix}, \quad K_I = \begin{bmatrix} -0.034 \\ -0.069 \\ -0.069 \\ -0.140 \\ 0.003 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 56.04 & -8.03 & -43.22 & 8.36 & -0.63 \\ -8.03 & 3.60 & 5.79 & -1.48 & -0.21 \\ -43.22 & 5.79 & 53.65 & -7.49 & -0.42 \\ 8.36 & -1.48 & -7.49 & 3.76 & -0.19 \\ -0.63 & -0.21 & -0.42 & -0.19 & 2.78 \end{bmatrix}.$$

Un bruit aléatoirement distribué suivant une loi normale de moyenne nulle et de dispersion égale à un est ajouté sur la mesure du taux en substrat carboné. Sur la figure 5.14, sont illustrées les évolutions temporelles du taux du substrat carboné, du taux de biomasse et celles de leurs estimés.

L'observateur PI proposé fournit une bonne estimation du taux en substrat carboné (le signal mesuré). L'estimation d'état ainsi obtenue est utilisée afin de reconstruire le taux de biomasse (le signal non mesuré). Il est cependant possible de constater que dans l'intervalle de temps 350–550 l'estimation est dégradée en raison d'une mauvaise caractérisation du multimodèle pour les taux de dilution proches de $0.22\,\mathrm{h}^{-1}$. Une meilleure adéquation du multimodèle dans cette zone de fonctionnement pourrait améliorer l'estimation du taux de biomasse. Il serait possible par ailleurs d'introduire une étape de post-filtrage de l'estimation du taux de biomasse de façon à parvenir à une estimation moins bruitée.

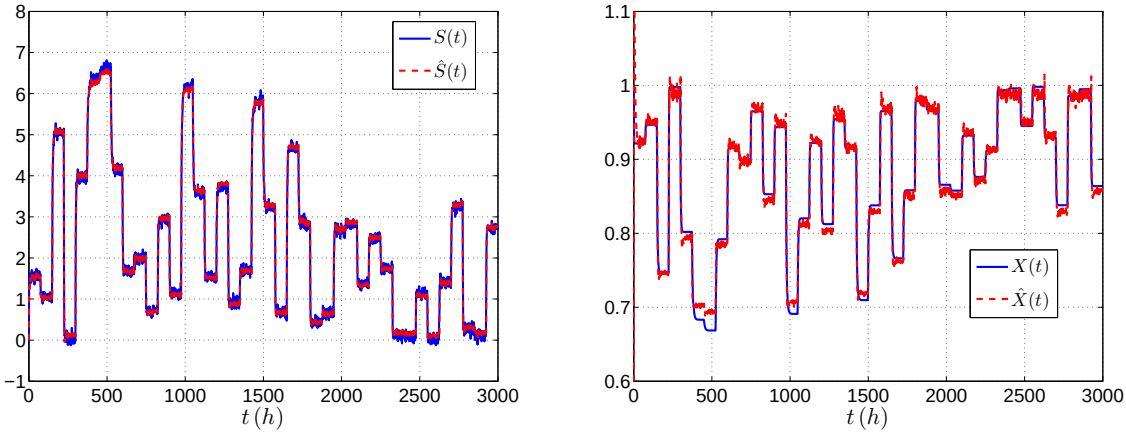

Figure 5.14 – Comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à gauche) et comparaison entre la biomasse et son estimée (à droite)

5.6 Application de l'estimation d'état au diagnostic

Le diagnostic et la surveillance des systèmes non linéaires à base d'observateurs sont un des champs applicatifs directs des algorithmes d'estimation d'état proposés dans ce mémoire de thèse.

La surveillance d'un système est souvent confiée à un *module de diagnostic*. Il exploite toute information livrée par les mesures du système et/ou par le comportement attendu du système fourni par un modèle en vue de détecter tout comportement anormal du système dû, par exemple, à l'apparition soudaine d'un *défaut*. Le terme défaut désigne tout écart non permis de la valeur acceptable ou nominale d'au moins un composant (paramètre ou propriété) caractéristique du système [Isermann, 2006].

Un module de diagnostic peut être considéré comme un dispositif performant de détection des défauts. Il est tenu d'accomplir trois tâches principales : la détection, l'isolation et l'identification du défaut. La tâche de détection du défaut, comme son nom l'indique, consiste à déterminer le plus rapidement possible l'instant d'apparition d'un défaut et son intervalle de durée. Pour ce faire, des *symptômes* ou des *indicateurs de défauts* du système sont générés grâce au principe dit de *redondance*. A l'issue de l'étape de détection vient l'étape de localisation ou

d'isolation qui détermine à partir de l'analyse des indicateurs de défauts l'origine et la nature du défaut. Enfin, l'étape d'identification cherche à estimer l'évolution du défaut afin d'expliquer au mieux le comportement du système. Une étape additionnelle de *reconfiguration* peut être envisagée dans le but d'introduire une stratégie de rectification du comportement du système destinée à réduire l'impact du défaut sur le fonctionnement du système.

Dans une stratégie de surveillance des systèmes, le principe de redondance revêt une importance fondamentale. La redondance est la capacité à disposer de deux ou de plusieurs moyens de détermination d'une grandeur caractéristique du système (variable, paramètre, signal). L'incohérence entre les différentes déterminations est révélatrice d'un dysfonctionnement du système. De nombreuses méthodes et techniques de diagnostic, faisant appel à différentes formes de redondance (matérielle ou analytique), ont été développées. Parmi elles, figurent les techniques d'estimation d'état à base d'observateurs d'état qui permettent d'obtenir une redondance analytique du système.

Dans ce contexte, le diagnostic du système est opéré en testant la cohérence entre les signaux de sortie mesurés et les signaux de sortie estimés à l'aide d'un observateur. La comparaison entre les mesures et leurs estimées donne naissance à un indicateur de défaut appelé également *résidu*. Un résidu est, en théorie, nul dans des conditions normales de fonctionnement, les sorties du système et celles estimées par l'observateur devant coïncider. En effet, étant donné que l'observateur utilise les mêmes signaux d'entrée que ceux appliqués au système, il est en mesure de fournir les mêmes signaux de sortie à condition toutefois que le modèle employé reproduise avec précision le comportement du système à surveiller. Les multimodèles, dans la mesure où ils sont capables de prendre en compte les changements dans le mode de fonctionnement du système et de reproduire son comportement avec précision dans une large plage de fonctionnement, présentent un intérêt certain dans un contexte de diagnostic.

L'objectif des sections suivantes est de présenter deux moyens de génération de résidus d'un système non linéaire caractérisé par un multimodèle découplé.

5.6.1 Génération des résidus à l'aide d'un banc d'observateurs

La génération des résidus, c.-à-d. des indicateurs de défauts, est une étape fondamentale dans la conception d'un module de diagnostic à base de modèle. La génération des résidus à base d'observateurs consiste tout d'abord à reconstruire les sorties du système à partir des mesures et du modèle du système puis à comparer les signaux mesurés à leurs estimés et enfin à utiliser l'erreur d'estimation comme résidu.

En théorie, un résidu doit être nul en l'absence de défaut et significativement différent de zéro dans le cas contraire. En pratique cependant, cette condition n'est pas tout à fait satisfaite car les signaux mesurés sont entachés de bruits et affectés par des perturbations. Il est alors nécessaire d'introduire des seuils de détection afin d'éviter de fausses alarmes. Ces seuils peuvent être fixés par l'utilisateur à partir d'une étude statistique des résidus et en prenant en compte les incertitudes de modélisation.

Une structuration des résidus permet d'accomplir correctement les tâches de localisation et d'isolation des défauts. La structuration consiste à construire les résidus de façon à ce que chacun soit sensible à un sous-ensemble connu de défauts et insensible aux autres (sensibles à un seul défaut, tous sauf un, etc.). Du choix des sous-ensembles dépend la bonne conduite de la tâche de localisation. Un moyen de parvenir à cette structuration consiste à remplacer l'utilisation d'un seul observateur par l'utilisation d'un ensemble d'observateurs (un banc d'observateurs), chacun d'entre eux n'étant piloté que par une partie des informations disponibles. Différents bancs d'observateurs ont été proposés dans la littérature selon le type de défauts à isoler (les principes du banc d'observateurs n'étant pas développés ici, le lecteur peut consulter [Frank, 1990]).

Une structuration des résidus, en vue de détecter les défauts de capteur, peut se faire à l'aide d'observateurs dédiés (*Dedicated Observer Scheme* DOS) pour lesquels le $i^{\text{ème}}$ observateur est piloté par la $i^{\text{ème}}$ sortie du système et toutes les entrées. La figure 5.15 illustre l'architecture du banc d'observateurs suivant un schéma DOS.

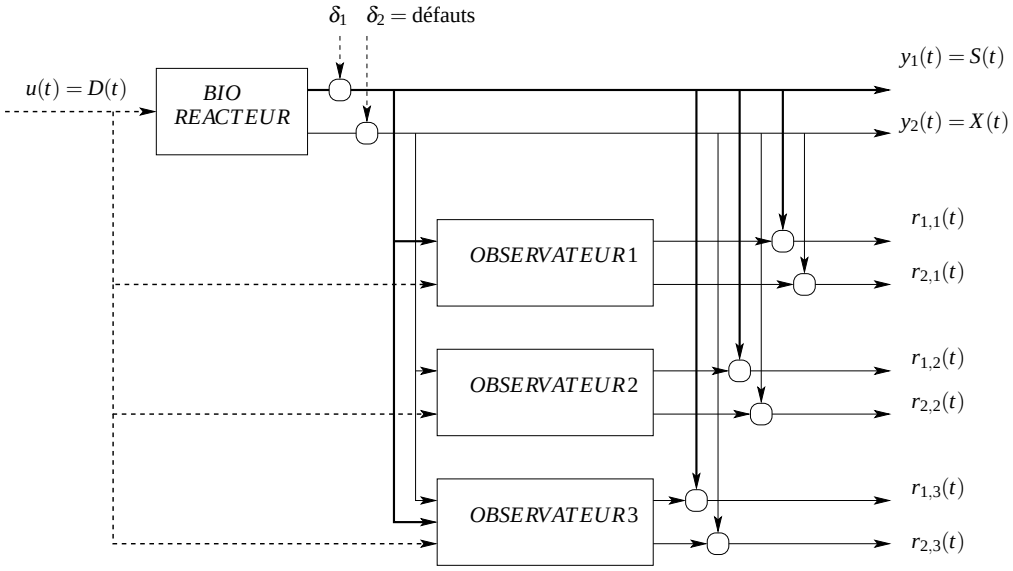

Figure 5.15 – Banc d'observateurs suivant un schéma DOS

Pour le diagnostic des défauts de capteur du bioréacteur, l'observateur 1 est piloté par la sortie y_1, l'observateur 2 par la sortie y_2 et l'observateur 3 par le vecteur complet de sortie $y = [y_1 \quad y_2]^T$. On notera par la suite $r_{i,j}$ le signal indicateur de défaut (résidu) calculé à partir de la différence entre la $i^{\text{ème}}$ sortie du système et la $i^{\text{ème}}$ sortie estimée avec l'observateur j.

La phase de localisation ou d'isolation d'un défaut est réalisée par le biais d'une analyse de l'évolution des différents résidus basée sur une logique de décision. Une table des signatures théoriques (tableau 5.4) est dressée afin de caractériser l'évolution des résidus $r_{i,j}$ en présence d'un défaut δ_i affectant le système. Sur la table des signatures théoriques proposée, un "1" traduit qu'il est certain que le défaut δ_i affecte le résidu $r_{i,j}$, un "0" qu'il est certain que le défaut δ_i n'affecte pas le résidu $r_{i,j}$ et un " ?" qu'il est impossible de se prononcer. Cette table des

signatures, associée à une logique de décision, permet de prendre la meilleure décision.

La table des signatures est élaborée à partir des considérations suivantes :

1. L'observateur 1 reconstruit la sortie du multimodèle en utilisant seulement la sortie y_1 et toutes les entrées du système. Si cette sortie présente un défaut alors il y a une mauvaise estimation de l'état et les résidus $r_{i,1}$ peuvent être affectés. Il convient cependant de souligner qu'il est difficile de prédire l'évolution de l'estimation d'état en présence d'un défaut sur la sortie y_1 en raison de la non-linéarité de l'observateur. En effet, des phénomènes dits de compensation peuvent apparaître et les défauts s'en trouver masqués (les résidus $r_{i,1}$ pouvant rester nuls). Par conséquent, il est dangereux de se prononcer affirmativement sur l'absence de défaut sur la sortie y_1 en analysant la nullité des résidus (un " ?" apparaît sur la table des signatures).
2. Si la sortie y_1 ne présente pas de défaut alors l'estimation d'état est correctement effectuée. Par conséquent, en présence d'un défaut sur la sortie y_2 le résidu $r_{2,1}$ est éloigné de zéro (sensibilité au défaut δ_2) alors que le résidu $r_{1,1}$ demeure insensible à ce même défaut. Il est alors possible de tirer une conclusion positive sur la présence d'un défaut δ_2 si les résidus $r_{i,1}$ présentent simultanément la signature : $r_{1,1} = 0$ et $r_{2,1} = 1$.

Une démarche similaire est adoptée afin d'élaborer les signatures de l'observateur 2. Finalement, l'observateur 3 génère une mauvaise estimation d'état en présence d'un défaut de capteur δ_i sur n'importe quelle sortie. La signature de cet observateur est difficile à déterminer car l'évolution des résidus $r_{i,3}$ est difficile à établir. Les résidus obtenus avec cet observateur servent donc à confirmer (et non à prendre) une décision. Il convient de remarquer que si un défaut apparaît simultanément sur les deux sorties alors il est possible de les détecter mais non de les localiser.

	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	$r_{1,3}$	$r_{2,3}$
δ_1	?	?	1	0	?	?
δ_2	0	1	?	?	?	?

Tableau 5.4 – Table des signatures théoriques

Comme illustré sur la figure 5.15, le banc d'observateurs comporte trois observateurs P conçus à partir du multimodèle établi au cours de la section 5.3.2. Les gains des trois observateurs sont respectivement donnés par :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.335 \\ 0.335 \\ 0.336 \\ 0.329 \end{bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 4.769 \\ 4.958 \\ 5.026 \\ 4.855 \end{bmatrix}, \qquad K_3 = \begin{bmatrix} 0.409 & -1.109 \\ 0.163 & 2.578 \\ 0.354 & -0.252 \\ 0.141 & 2.839 \end{bmatrix}.$$

Un défaut est injecté sur chacune des sorties du bioréacteur. Le défaut injecté sur la sortie $y_2(t)$ intervient à $t = 625$ et disparaît à $t = 1240$. Un autre défaut apparaît sur la sortie $y_1(t)$ à $t = 1880$ et disparaît à $t = 2380$. Dans les deux cas, ils sont constitués d'un créneau d'amplitude constante égale à 10% de l'amplitude maximale de chaque sortie. La figure 5.16 illustre

l'évolution des résidus générés par le banc d'observateurs.

La détection et la localisation des défauts de capteur sont effectuées grâce à l'analyse de la configuration des résidus $r_{i,1}$ et $r_{i,2}$. En l'absence d'un défaut les résidus sont statiquement nuls. Entre les instants $625 \leq t \leq 1240$, les résidus $r_{1,1}$ et $r_{2,1}$ correspondent à la configuration d'un défaut sur la sortie y_2. Cette information est confirmée par les résidus générés avec les deux autres observateurs. En appliquant un raisonnement similaire à la configuration des résidus $r_{1,2}$ et $r_{2,2}$, il est possible de conclure qu'un défaut sur la sortie y_1 apparaît entre les instants $1880 \leq t \leq 2380$. Les résidus évoluent conformément à la table des signatures qui permet d'accomplir correctement les tâches de détection et d'isolation des défauts de capteur du bioréacteur. Toutefois, cette stratégie de diagnostic ne permet pas d'envisager la tâche d'identification du défaut, c.-à-d. l'estimation de l'évolution des défauts. Afin de répondre à cet objectif, un observateur multi-intégral peut alors être utilisé.

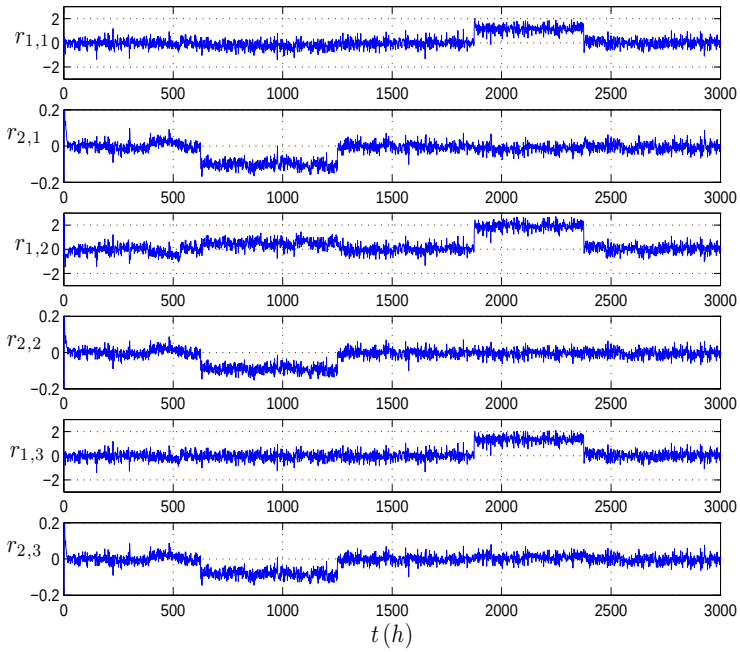

Figure 5.16 – Évolution des résidus $r_{i,j}$

5.6.2 Génération des résidus à l'aide d'un observateur multi-intégral

Un banc d'observateurs suivant un schéma DOS a permis d'obtenir une structuration des résidus et de procéder à la détection et à la localisation des défauts de capteur affectant le bioréacteur.

Un autre moyen de générer des résidus consiste à synthétiser un observateur à entrées inconnues (c.f. section 4.4), les défauts de capteur pouvant être considérés comme des entrées inconnues du système que l'on cherche à reconstruire. Le recours à un observateur à entrées

inconnues basé sur un principe multi-intégral permet une structuration des résidus sans faire appel à un banc d'observateurs. En effet, l'observateur multi-intégral permet une estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues. Il est alors possible d'utiliser directement l'estimation des entrées inconnues comme signal indicateur de défauts car en l'absence de défaut (après convergence vers zéro du transitoire correspondant aux conditions initiales) leur estimation est nulle et vice versa. Les défauts de capteurs agissant sur la mesure de $S(t)$ et $X(t)$ sont notés respectivement $\eta_1(t)$ et $\eta_2(t)$.

L'observateur multi-intégral est conçu à partir des conditions LMI exposées dans le théorème 4.16. Il est ainsi possible de prendre en compte les effets d'un bruit sur l'erreur d'estimation. Le bruit affecte seulement les sorties du système. Les matrices W_c et $\tilde{E}$ permettant de caractériser l'influence de ce bruit respectivement sur les mesures et sur l'état du multimodèle sont données par :

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.01 \end{bmatrix}^T \quad , \quad \tilde{E} = 0_{(4\times 1)} \ . \tag{5.10}$$

Les matrices V et $\tilde{D}$ permettant de caractériser l'influence des défauts respectivement sur les mesures et sur l'état du multimodèle sont données par :

$$V = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{D} = 0_{(4\times 2)} \ . \tag{5.11}$$

Les défauts n'affectent que les sorties du système.

L'observateur multi-intégral synthétisé comporte deux actions intégrales. Les conditions du théorème 4.16 sont satisfaites par

$$K_a = \begin{bmatrix} -0.0077 & 0.0030 & 0.0076 & -0.0102 & 1.3521 & -0.0019 & 0.4013 & -0.0023 \\ 0.0010 & 0.0011 & -0.0012 & -0.0013 & -0.0040 & 1.5207 & -0.0030 & 0.5295 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.98 & 0.07 & -0.16 & -0.01 & 0.15 & -0.01 & -0.25 & 0.00 \\ 0.07 & 1.67 & 0.00 & 0.01 & -0.02 & 0.05 & 0.01 & -0.08 \\ -0.16 & 0.00 & 3.50 & 0.04 & 0.36 & 0.00 & -0.88 & -0.01 \\ -0.01 & 0.01 & 0.04 & 1.19 & -0.17 & -0.02 & 0.09 & 0.02 \\ 0.15 & -0.02 & 0.36 & -0.17 & 1.89 & -0.00 & -1.45 & -0.00 \\ -0.01 & 0.05 & 0.00 & -0.02 & -0.00 & 2.33 & 0.00 & -1.50 \\ -0.25 & 0.01 & -0.88 & 0.09 & -1.45 & 0.00 & 3.44 & 0.01 \\ 0.00 & -0.08 & -0.01 & 0.02 & -0.00 & -1.50 & 0.01 & 2.82 \end{bmatrix}$$

pour un niveau d'atténuation de $\gamma = 0.60$. Ce niveau d'atténuation est obtenu en considérant une matrice $H = [0_{(4\times 2)}\, \mathrm{I}_{(2\times 2)}\, 0_{(2\times 2)}]$. La minimisation de l'influence du bruit ne porte que sur l'erreur d'estimation des entrées inconnues, c'est-à-dire sur les résidus.

Sur la figure 5.17 sont tracés les défauts injectés, de formes et de durées différentes, sur les sorties du bioréacteur et leurs estimées. Ces derniers peuvent être considérés, dans une procédure de diagnostic, comme des indicateurs de défauts (c.-à-d. des résidus). Il convient de remarquer que les résidus obtenus évoluent conformément aux évolutions des défauts de capteur injectés et ce, en dépit d'une apparition simultanée des deux défauts à $t = 620$ (localisation

possible des défauts simultanés). La tâche de surveillance (détection, localisation et identification) peut être alors menée à partir d'une logique de décision simple basée sur l'évolution de ces résidus.

Les sorties du bioréacteur et leurs estimées sont illustrées sur la figure 5.18. Il est possible d'apprécier sur cette figure la bonne qualité de la reconstruction obtenue en dépit des défauts affectant les sorties du système. La robustesse de l'observateur proposé est ainsi mise en évidence.

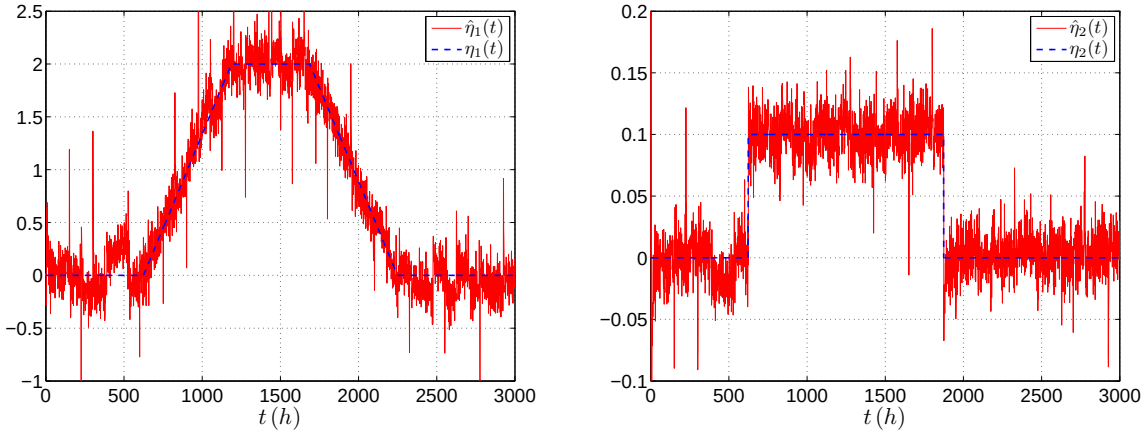

Figure 5.17 – Résidus générés par l'observateur multi-intégral

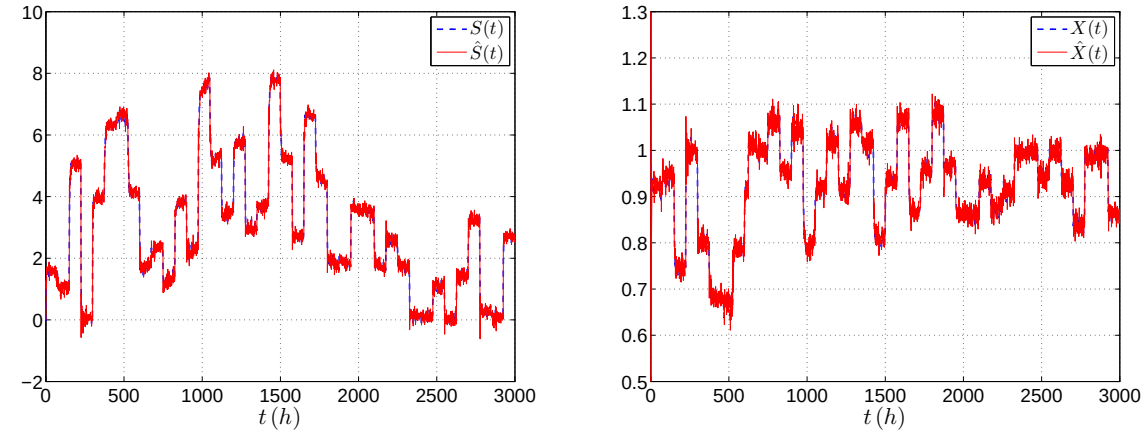

Figure 5.18 – Comparaison entre le substrat carboné et son estimé (à gauche) et comparaison entre la biomasse et son estimée (à droite)

Conclusion partielle et discussion

Dans cette section, il a été montré dans quelle mesure les outils d'estimation d'état proposés peuvent répondre aux besoins de la surveillance d'un système. Deux stratégies de génération de résidus ont été proposées : la première basée sur un banc d'observateurs et la deuxième sur un

observateur multi-intégral.

Il convient toutefois de remarquer que l'utilisation des multimodèles, peu importe leur structure, peut présenter certaines limites dans un contexte de détection des défauts de capteur ou d'actionneur dans la mesure où les entrées et/ou les sorties mesurables du système interviennent directement dans les fonctions d'activation. Il s'avère alors impossible de supprimer l'une des entrées ou l'une des sorties lors de l'élaboration des bancs d'observateurs. Il faut par conséquent élaborer des multimodèles différents en fonction des défauts de capteur ou d'actionneur à traiter. Pour répondre à ce problème, le recours à des multimodèles dont les fonctions d'activation dépendent de l'évolution d'une grandeur interne du modèle (variables de décision non mesurables) peut être envisagé. Toutefois, la manipulation mathématique de cette classe de multimodèles se révèle bien plus complexe dans la mesure où l'observateur doit effectuer une estimation des variables de décision (voir Ichalal et al. [2008a,b]).

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les différentes méthodes d'identification paramétrique et d'estimation d'état proposées au cours des chapitres 2, 3 et 4 ont été mises en œuvre à travers l'exemple d'un bioréacteur.

Différentes approches de modélisation ont permis, dans un premier temps, de caractériser par un multimodèle découplé le comportement non linéaire du bioréacteur. Dans un deuxième temps, des observateurs d'état ont été conçus à partir des modèles ainsi obtenus. L'exploitation de ces algorithmes d'estimation d'état dans un contexte de surveillance des défauts de capteur du bioréacteur a été illustrée. La faisabilité de ces méthodes a pu être mise en évidence et les difficultés potentielles ont été signalées. Les résultats encourageants font de ce champ applicatif une voie intéressante à explorer. Il est possible par exemple, sur la base des outils développés, d'envisager l'analyse de la génération des résidus et la mise en place d'une logique de détection à partir d'un seuil fixé, par exemple, par le niveau minimal d'atténuation garanti par l'observateur dans le cas d'entrées inconnues bornées.

Comparer l'estimation d'état obtenue avec l'approche proposée aux estimations d'état obtenues avec les techniques classiquement utilisées pour les bioréacteurs semble également une perspective intéressante. Il convient néanmoins de préciser que la principale difficulté d'une telle comparaison réside dans la définition de critères d'évaluation appropriés capables de prendre en compte à la fois la qualité de l'estimation d'état et la perte de précision éventuellement introduite lors de l'identification paramétrique du multimodèle.

6
Perspectives

Sommaire

6.1 Introduction 194
6.2 Nouvelles conditions de convergence exponentielle de l'erreur d'estimation 194
6.3 Reconnaissance du mode actif 200

6.1 Introduction

Les perspectives ouvertes par les travaux présentés dans ce mémoire de thèse sont nombreuses. Le placement des valeurs propres de l'observateur dans une région du plan complexe (c.f. section 3.4.3.1) soulève sans aucun doute un problème délicat et doit faire l'objet d'une attention particulière. Une nouvelle écriture de la forme augmentée du multimodèle en mesure de répondre à ces difficultés est proposée dans ce chapitre.

Bien que dépassant le strict cadre des techniques d'estimation d'état, une solution au problème de l'estimation du mode actif du système est également proposée. En effet, de nombreux systèmes peuvent être caractérisés par plusieurs régimes de fonctionnement. Il convient alors de déterminer les changements de mode quand ils ne sont pas complètement maîtrisables afin de connaître le régime de fonctionnement dans lequel le système évolue.

6.2 Nouvelles conditions de convergence exponentielle de l'erreur d'estimation

Le problème lié au placement des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ définissant la dynamique de l'erreur d'estimation, abordé au cours de la section 3.4.3.1, trouve son origine dans la forme augmentée du multimodèle. Plus précisément, ce problème provient de la forme particulière adoptée par les matrices augmentées $\tilde{A}$ et $\tilde{C}_i$, définies en (3.8) et (3.23), qui interviennent dans les conditions LMI proposées. En effet, la paire $(\tilde{A},\tilde{C}_i)$ ne satisfait pas la propriété d'observabilité en raison de la forme particulière des matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{C}_i$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix} \qquad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} .$$

La perte de la propriété d'observabilité nuit au placement des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$. Afin de pallier ces difficultés, de nouvelles conditions de convergence de l'erreur d'estimation sont établies dans cette section.

L'idée repose sur une nouvelle écriture des matrices augmentées associées au multimodèle découplé. Pour ce faire, on introduit une nouvelle matrice $\tilde{C}_0$ de la forme :

$$\tilde{C}_0 = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\tilde{C}_i \ , \tag{6.1}$$

$$= \frac{1}{L}\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_L \end{bmatrix} \ . \tag{6.2}$$

En posant

$$\tilde{C}_i = \tilde{C}_i + \tilde{C}_0 - \tilde{C}_0 \ , \tag{6.3}$$

$$= \bar{C}_i + \tilde{C}_0 \ , \tag{6.4}$$

la matrice $A_{obs}(t)$ régissant la dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit

$$A_{obs}(t) = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(t) \ , \tag{6.5}$$

$$= \tilde{A} - \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\tilde{K}\tilde{C}_i \ , \tag{6.6}$$

$$= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_0 - \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)\tilde{K}\bar{C}_i \ , \tag{6.7}$$

où $\bar{C}_i = \tilde{C}_i - \tilde{C}_0$. Tous calculs faits, la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est assurée si :

$$PA_{obs}(t) + A_{obs}^T(t)P + 2\alpha P < 0 \ , \tag{6.8}$$

soit encore compte tenu de la nouvelle définition (6.7) de $A_{obs}(t)$

$$P\tilde{A} - G\tilde{C}_0 - \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)G\bar{C}_i + \tilde{A}^T P - (G\tilde{C}_0)^T - \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t)(G\bar{C}_i)^T + 2\alpha P < 0 \ , \tag{6.9}$$

où $G = P\tilde{K}$. Inégalité qui peut s'expliciter comme suit :

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - G\tilde{C}_0 - (G\tilde{C}_0)^T - \bar{G}\Delta(t)\bar{\bar{C}} - (\bar{G}\Delta(t)\bar{\bar{C}})^T + 2\alpha P < 0 \ , \tag{6.10}$$

où

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} G \cdots G \cdots G \end{bmatrix} \ , \quad \Delta(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t)\mathrm{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2(t)\mathrm{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_L(t)\mathrm{I} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \vdots \\ \bar{C}_L \end{bmatrix} \ . \tag{6.11}$$

Remarquons tout d'abord que $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq \mathrm{I}$ dans (6.10). Il devient alors possible de faire appel au lemme 4.1, utilisé lors de la synthèse de l'observateur robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques, afin de majorer les fonctions de pondération apparaissant dans $\Delta(t)$. Il découle alors que

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - G\tilde{C}_0 - (G\tilde{C}_0)^T + 2\alpha P + \bar{G}Q^{-1}\bar{G}^T + \bar{\bar{C}}^T Q\bar{\bar{C}} \leq 0 \tag{6.12}$$

implique (6.10). Il est possible d'énoncer le théorème suivant en appliquant deux fois le complément de Schur sur (6.12).

Théorème 6.1 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps continu* (3.7) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.18)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe deux matrices symétriques et définies positives P et Q et une matrice G vérifiant la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix} P(\tilde{A} + \alpha\mathrm{I}) + (\tilde{A} + \alpha\mathrm{I})^{\mathrm{T}}\mathrm{P} - \mathrm{G}\tilde{C}_0 - (\mathrm{G}\tilde{C}_0)^{\mathrm{T}} & \bar{G} & \bar{\bar{C}}^T Q \\ \bar{G}^T & -Q & 0 \\ Q\bar{\bar{C}} & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{6.13}$$

pour un taux de décroissance $\alpha > 0$ donné. Le gain de l'observateur est donné par $K = P^{-1}G$.

Il convient de remarquer que la paire $(\tilde{A},\tilde{C}_0)$ intervenant dans le placement des valeurs propres, bloc $(1,1)$ dans (6.13), est maintenant observable à condition toutefois que les paires (A_i,C_i) associées à chaque sous-modèle le soient aussi. On entrevoit alors clairement l'intérêt de l'introduction de la matrice $\tilde{C}_0$. En effet, le fait que la matrice $\tilde{C}_0$ soit de rang supérieur au rang de la matrice $\tilde{C}_i$ permet d'introduire des degrés supplémentaires de liberté particulièrement utiles au placement des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$. Un placement des valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ dans une zone plus large du plan complexe devient dans ces conditions possible et permet par exemple d'assurer une dynamique supérieure à celle du système.

Extension au placement des valeurs propres dans une région

La démarche exposée précédemment peut être aisément généralisée au placement des valeurs propres dans une autre région du plan complexe. Il est par exemple possible de placer les valeurs propres de la matrice $A_{obs}(t)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon r. Tous calculs faits, la matrice $A_{obs}(t)$ est $\mathcal{D}$-stable dans la région $\mathcal{D}$ définie par un disque de rayon r et de centre $(0,0)$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique et définie positive P satisfaisant la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} -rP & PA_{obs}(t) \\ A_{obs}^T(t)P & -rP \end{bmatrix} < 0 \ , \quad P = P^T > 0 \tag{6.14}$$

qui compte tenu de la nouvelle définition de $A_{obs}(t)$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_0 \\ (*) & -rP \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{G}\Delta(t)\bar{\bar{C}} \\ (*) & 0 \end{bmatrix} < 0 \ , \quad P = P^T > 0 \tag{6.15}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_0 \\ (*) & -rP \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{G} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 0 & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\bar{C}}^T \end{bmatrix} \Delta^T \begin{bmatrix} \bar{G}^T & 0 \end{bmatrix} < 0 \ . \tag{6.16}$$

A l'aide du lemme 4.1, on montre que (6.17) implique (6.16) :

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_0 \\ (*) & -rP \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{G} \\ 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} \bar{G}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\bar{C}}^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 0 & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} < 0 \ . \tag{6.17}$$

Puis en appliquant deux fois le complément de Schur, on obtient le théorème suivant.

Théorème 6.2 (MDC)**.** *Les valeurs propres du système (3.26) à temps continu générant l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle découplé (3.7) et l'observateur (3.18) sont placées dans la région $\mathcal{D}(r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ du plan complexe s'il existe deux matrices symétriques et définies positives P et Q et une matrice G vérifiant la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_0 & \bar{G} & 0 \\ (*) & -rP & 0 & \bar{\bar{C}}^T Q \\ (*) & (*) & -Q & 0 \\ (*) & (*) & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{6.18}$$

pour un scalaire positif r donné. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

Exemple 6.1 (Exemple d'estimation d'état)
Dans l'exemple 3.2, un observateur P a été conçu à partir des conditions LMI proposées par le théorème 3.7. Les valeurs propres de l'observateur sont placées dans un cercle centré à l'origine du plan complexe et de rayon $r = 1.1$ pour un taux de décroissance de l'erreur d'estimation $\alpha = 0.15$. Dans cet exemple, les performances dynamiques de l'erreur d'estimation ne peuvent être améliorées dans la mesure où aucune solution capable de satisfaire l'ensemble des LMI n'est trouvée pour un taux de décroissance $\alpha > 0.15$ et/ou un rayon $r < 1.1$.

Il s'agit, à travers cet exemple, de montrer dans quelle mesure les conditions proposées précédemment permettent d'améliorer les performances dynamiques de l'erreur d'estimation lors de la synthèse de l'observateur. Une solution satisfaisant simultanément les conditions des théorèmes 6.1 et 6.2, pour un taux de décroissance $\alpha = 0.19$ et un rayon $r = 0.9$, est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.293 & -0.423 & 0.003 & -0.058 & -0.054 & 0.030 & -0.148 \\ -0.423 & 1.527 & 0.095 & -0.288 & -0.127 & 0.198 & -0.416 \\ 0.003 & 0.095 & 0.467 & -1.006 & -0.328 & 0.005 & 0.149 \\ -0.058 & -0.288 & -1.006 & 2.471 & 0.986 & 0.024 & -0.154 \\ -0.054 & -0.127 & -0.328 & 0.986 & 0.758 & 0.054 & 0.041 \\ 0.030 & 0.198 & 0.005 & 0.024 & 0.054 & 0.378 & -0.770 \\ -0.148 & -0.416 & 0.149 & -0.154 & 0.041 & -0.770 & 3.141 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.275 & -0.467 & 0.984 & -0.631 & 0.821 & -0.684 \\ -0.467 & 1.347 & -0.619 & 1.209 & -0.696 & 1.148 \\ 0.984 & -0.619 & 1.176 & -0.449 & 0.919 & -0.713 \\ -0.631 & 1.209 & -0.449 & 1.382 & -0.701 & 1.113 \\ 0.821 & -0.696 & 0.919 & -0.701 & 1.339 & -0.385 \\ -0.684 & 1.148 & -0.713 & 1.113 & -0.385 & 1.443 \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.093 & -0.018 & 0.054 & 0.213 & -0.643 & -0.070 & -0.033 \\ -0.178 & -0.152 & -0.697 & -0.529 & 0.765 & 0.247 & 0.066 \end{bmatrix}^T. \quad (6.21)$$

Comparées aux conditions d'existence 3.7 de l'observateur proposé dans l'exemple 3.2, les nouvelles conditions d'existence de l'observateur permettent :

1. *d'améliorer la dynamique de l'observateur (taux de décroissance de l'erreur supérieur),*
2. *d'obtenir un degré d'amortissement plus faible (un rayon plus faible).*

Il convient de remarquer que des taux supérieurs de décroissance de l'erreur peuvent être obtenus. Néanmoins, un taux de décroissance trop important entraîne inévitablement un grand gain de l'observateur et accroît la sensibilité de l'erreur d'estimation aux bruits.

Autre condition de convergence basée sur le même principe

Il est possible de décliner la démarche de synthèse proposée dans la section précédente en vue d'obtenir de nouvelles conditions de synthèse.

Par exemple, une autre condition peut être obtenue en multipliant à droite et à gauche l'inégalité (6.9) par deux vecteurs x_1 et x_2 puis en appliquant le changement de variables suivant :

$$p_i = \mu_i(t) C_i x_1 \qquad \text{et} \qquad q_i = \mu_i(t) C_i x_2 \ . \tag{6.22}$$

L'inégalité (6.9) devient compte tenu du changement de variables :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \\ \vdots \\ p_L \\ q_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & -G & 0 & -G & 0 & \dots & -G & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & -G & 0 & -G & \dots & 0 & -G \\ -G^T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -G^T & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G^T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -G^T & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G^T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -G^T & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \\ \vdots \\ p_L \\ q_L \end{bmatrix} < 0 \,, \tag{6.23}$$

avec

$$\Gamma = P(\tilde{A} + \alpha \mathrm{I}) + (\tilde{\mathrm{A}} + \alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}} \mathrm{P} - \mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_0 - (\mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_0)^{\mathrm{T}} \ . \tag{6.24}$$

Maintenant les conditions $\mu_i^T(t)\mu_i(t) \leq 1$ peuvent être remplacées par les conditions d'existence de e_1^i, e_2^i et e_3^i telles que

$$\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1^i \mathrm{I} & e_3^i \mathrm{I} \\ e_3^i \mathrm{I} & e_2^i \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i(t)\bar{C}_i x_1 \\ \mu_i(t) C_i x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1^i \mathrm{I} & e_3^i \mathrm{I} \\ e_3^i \mathrm{I} & e_2^i \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_i(t)\bar{C}_i x_1 \\ \mu_i(t) C_i x_2 \end{bmatrix} \ , \tag{6.25}$$

$$\leq \begin{bmatrix} \bar{C}_i x_1 \\ C_i x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1^i \mathrm{I} & e_3^i \mathrm{I} \\ e_3^i \mathrm{I} & e_2^i \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_i x_1 \\ C_i x_2 \end{bmatrix} \ . \tag{6.26}$$

La contrainte $\mu_i^T(t)\mu_i(t) \leq 1$ pour $i = 1, \cdots, L$ peut être à présent ajoutée dans (6.23) en faisant appel à la S-procédure (voir l'annexe C). En appliquant la S-procédure sur (6.23) et (6.26), il vient que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \\ \vdots \\ p_L \\ q_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Phi & -G & 0 & -G & 0 & \dots & -G & 0 \\ \Phi & \Gamma_2 & 0 & -G & 0 & -G & \dots & 0 & -G \\ -G^T & 0 & -e_1^1 \mathrm{I} & -e_3^1 \mathrm{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -G^T & -e_3^i \mathrm{I} & -e_2^i \mathrm{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -G^T & 0 & 0 & 0 & -e_1^2 \mathrm{I} & -e_3^2 \mathrm{I} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -G^T & 0 & 0 & -e_1^2 \mathrm{I} & -e_3^2 \mathrm{I} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e_1^L \mathrm{I} & -e_3^L \mathrm{I} \\ 0 & -G^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e_1^L \mathrm{I} & -e_3^L \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \\ \vdots \\ p_L \\ q_L \end{bmatrix} < 0 \,, \tag{6.27}$$

avec

$$\Phi = \sum_{1}^{L} e_3^i \bar{C}_i^T \bar{C}_i \ , \tag{6.28a}$$

$$\Gamma_1 = P(\tilde{A}+\alpha \mathrm{I}) + (\tilde{\mathrm{A}}+\alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}}\mathrm{P} - \mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_0 - (\mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_0)^{\mathrm{T}} + \sum_{1}^{\mathrm{L}} \mathrm{e}_1^{\mathrm{i}} \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}} \ , \tag{6.28b}$$

$$\Gamma_2 = P(\tilde{A}+\alpha \mathrm{I}) + (\tilde{\mathrm{A}}+\alpha \mathrm{I})^{\mathrm{T}}\mathrm{P} - \mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_0 - (\mathrm{G}\tilde{\mathrm{C}}_0)^{\mathrm{T}} + \sum_{1}^{\mathrm{L}} \mathrm{e}_2^{\mathrm{i}} \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}} \ . \tag{6.28c}$$

Théorème 6.3 (MDC)**.** *L'erreur d'estimation d'état, entre le multimodèle découplé à temps continu* (3.7) *et l'observateur à gain proportionnel* (3.18)*, converge exponentiellement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive P, une matrice G et des scalaires* e_1^i, e_2^i, e_3^i *pour* $i = 1...L$ *et un scalaire positif* α *vérifiant la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix}
\Gamma_1 & \Phi & -G & 0 & -G & 0 & \dots & -G & 0 \\
\Phi & \Gamma_2 & 0 & -G & 0 & -G & \dots & 0 & -G \\
-G^T & 0 & -e_1^1\mathrm{I} & -e_3^1\mathrm{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -G^T & -e_3^i\mathrm{I} & -e_2^i\mathrm{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-G^T & 0 & 0 & 0 & -e_1^2\mathrm{I} & -e_3^2\mathrm{I} & \dots & 0 & 0 \\
0 & -G^T & 0 & 0 & -e_1^2\mathrm{I} & -e_3^2\mathrm{I} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-G^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e_1^L\mathrm{I} & -e_3^L\mathrm{I} \\
0 & -G^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e_1^L\mathrm{I} & -e_3^L\mathrm{I}
\end{bmatrix} < 0 \ , \tag{6.29}$$

où Φ, Γ_1 *et* Γ_2 *sont définies en* (6.28)*. Le gain de l'observateur est donné par* $K = P^{-1}G$*.*

Commentaires et conclusion partielle

Les nouvelles écritures semblent apporter une solution au problème du placement des valeurs propres de l'observateur dans une région du plan complexe plus large. Une étude du conservatisme des solutions obtenues à partir des conditions proposées par les théorèmes 6.1 et 6.3 ouvre une perspective intéressante permettant d'évaluer l'intérêt de chaque condition. Il pourrait s'avérer particulièrement pertinent d'évaluer dans quelle mesure ces conditions introduisent des degrés de liberté supplémentaires.

Il est par ailleurs possible d'envisager d'autres stratégies de synthèse en mesure d'assurer la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation. A titre d'exemple, l'idée qui consiste à concevoir un observateur pour chaque sous-modèle à l'aide d'outils standards en considérant l'apport des autres sous-modèles comme une perturbation à atténuer ou une entrée inconnue à découpler semble une voie à explorer.

6.3 Reconnaissance du mode actif

Dans le cadre de la représentation multimodèle destinée au diagnostic des systèmes, deux tendances ressortent : la première où chaque sous-modèle représente le comportement du système dans une zone de fonctionnement et la seconde où chaque sous-modèle représente un mode défaillant du système.

Dans ce dernier contexte, la stratégie de diagnostic consiste à déterminer précisément le passage d'un sous-modèle vers un autre et ce, afin de connaître l'instant où le système abandonne son comportement normal. Sur un plan pratique, cela revient donc à estimer l'évolution temporelle des fonctions poids en supposant que l'ensemble des modes (sous-modèles) de fonctionnement du système est parfaitement répertorié et modélisé.

Bon nombre de travaux réalisés dans le cadre de systèmes à commutation comportant un vecteur d'état unique portent sur ce problème (voir par exemple la thèse de Domlan [2006]). Or, un comportement défaillant du système peut entraîner une modification de la dimension de ses vecteurs d'état. Il semble alors intéressant de recourir à un multimodèle découplé pour modéliser ce type de comportement. Une solution à ce problème en temps discret a été récemment proposée par Kanev et Verhaegen [2006]. Leur approche consiste à considérer un horizon d'observation fini $[k, k+h]$ et à obtenir une matrice de projection afin d'éliminer les états inconnus de chaque sous-modèle et de ne conserver que les relations entre l'entrée et la sortie du multimodèle.

Nous adoptons une démarche différente qui semble en mesure d'apporter une solution relativement simple et satisfaisante à ce problème. Considérons un multimodèle MISO pour lequel la sortie globale est donnée par

$$y(t) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(t) y_i(t) \ , \tag{6.30}$$

où $\mu_i(t)$ sont les fonctions de pondération qui respectent les propriétés de somme convexe et $y_i(t)$ les sorties des sous-modèles. Les différents modes de fonctionnement du système sont bien répertoriés et leurs modèles parfaitement connus. De ce fait, les sorties des sous-modèles peuvent être obtenues par simulation de leur modèle en utilisant le signal d'entrée appliqué au système. L'équation (6.30) peut alors s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) & \cdots & \mu_L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_L(t) \end{bmatrix} = \theta^T(t)\varphi(t) \ , \tag{6.31}$$

où $\theta \in \mathbb{R}^L$ est le vecteur contenant les paramètres inconnus (les fonctions poids) et $\varphi \in \mathbb{R}^L$ le vecteur régresseur. Il est alors possible d'obtenir une estimation des fonctions poids à l'aide par exemple de l'algorithme des moindres carrés. Il convient toutefois de remarquer que l'estimation doit se faire *en ligne* en faisant appel à un algorithme de moindres carrés récursifs. Les différentes versions de cet algorithme rencontrées dans la littérature lui confèrent différentes

propriétés de stabilité. La version la plus classique étant :

$$e(t) = y(k) - \hat{\theta}(k-1)^T \varphi(k) \ , \tag{6.32a}$$

$$F(k) = \lambda^{-1} \left\{ F(k-1) - \frac{F(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)F(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)F(k-1)\varphi(k)} \right\} \ , \tag{6.32b}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{F(k)\varphi(k)e(t)}{\lambda + \varphi^T(k)F(k-1)\varphi(k)} \ , \tag{6.32c}$$

où $F(k)$ est une matrice symétrique et définie positive avec $F(0) = F_0 = F_0^T > 0$ et $0.9 < \lambda \leq 1$ un facteur d'oubli qui permet d'accorder plus ou moins d'importance aux mesures récentes et passées.

Cet algorithme des moindres carrés récursifs est optimal au sens de la minimisation de l'écart quadratique entre les mesures et le modèle. De ce fait, aucune contrainte n'est introduite lors de la phase d'optimisation. Toutefois, les estimées des fonctions de pondération doivent respecter les propriétés de somme convexe :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \quad \forall i = 1, \cdots, L, \quad \forall k \ . \tag{6.33}$$

Il est possible de constater que, compte tenu des propriétés des fonctions poids, seulement $L-1$ paramètres doivent être estimés. En effet, une fonction de pondération peut être obtenue à partir des $L-1$ autres estimations des fonctions poids : $\mu_1(t) = 1 - \mu_2(t) \cdots - \mu_L(t)$. Il est également possible de remplacer la recherche directe des paramètres θ par la recherche d'une fonction $f(\theta)$ en mesure de garantir la recherche des fonctions poids dans l'intervalle $[0\,1]$.

Exemple 6.2 (Exemple de reconnaissance du mode actif)
Soit un système à temps discret comportant un mode de fonctionnement normal décrit par

$$A_n = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 0.8 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

et un mode défaillant décrit par

$$A_n = 0.1\,, \quad B_n = 5.0\,, \quad C_n = 2.0\,. \tag{6.35}$$

Il s'agit alors d'obtenir une estimation du mode actif du système. Il convient de remarquer que seul un paramètre doit être estimé. En effet, compte tenu des propriétés de somme convexe des fonctions poids alors $\mu_1(t) = 1 - \mu_2(t)$. Il suffit d'estimer par exemple $\mu_2(t)$ pour obtenir une estimée de $\mu_1(t)$.

Les figures 6.1 et 6.2 illustrent la reconnaissance du mode actif dans deux situations différentes. Dans la première situation, le changement entre les deux modes de fonctionnement est opéré brusquement (commutation entre les modes). Dans la seconde, le passage entre les modes se fait progressivement. Il est possible de constater qu'en l'absence d'un bruit de mesure la reconnaissance du mode actif est bien effectuée dans les deux situations. En revanche, si un bruit est présent sur la sortie du système l'estimation du mode actif est plus ou moins dégradée

selon le facteur d'oubli utilisé. En effet, un facteur d'oubli proche de 1 permet d'obtenir une estimation plus robuste au bruit, en dépit cependant d'une adaptation plus lente du paramètre à estimer. Un compromis entre la sensibilité au bruit et le suivi du paramètre à estimer doit donc être établi.

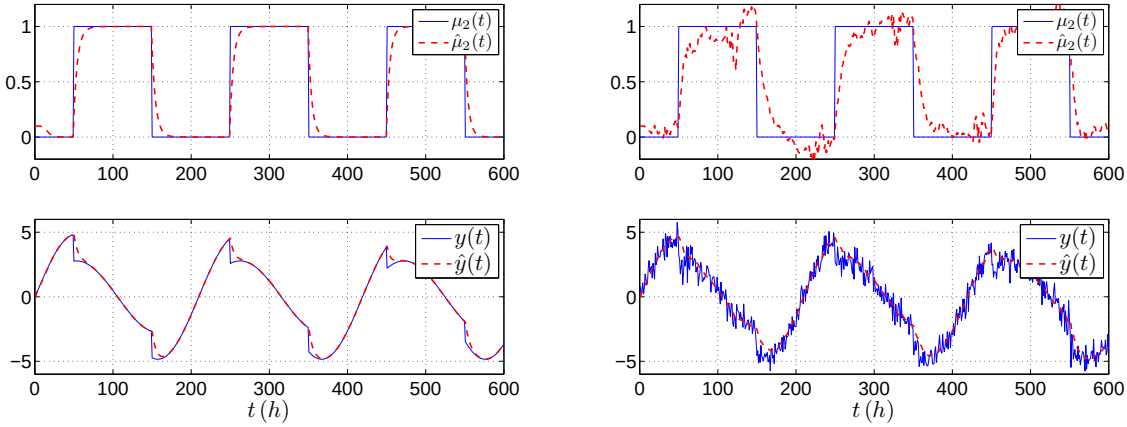

Figure 6.1 – Reconnaissance du mode actif lors d'un changement brusque sans bruit de mesure (à gauche) et avec bruit de mesure (à droite)

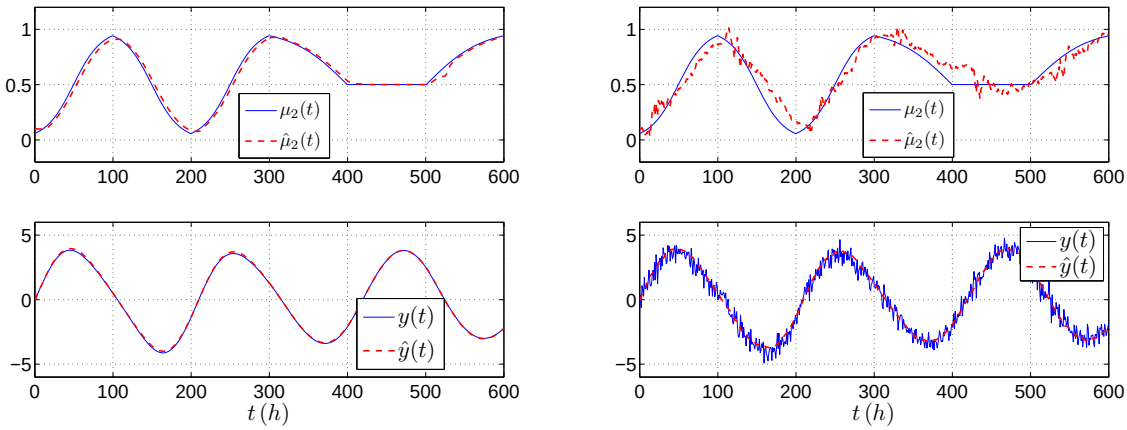

Figure 6.2 – Reconnaissance du mode actif lors d'un changement progressif sans bruit de mesure (à gauche) et avec bruit de mesure (à droite)

Commentaires et conclusion partielle

La recherche du mode actif d'un système pose un problème délicat. Elle ouvre néanmoins d'intéressantes perspectives dans un contexte de surveillance des systèmes. En effet, le recours au multimodèle découplé revêt dans ce contexte deux avantages principaux :

1. les modes du système peuvent comporter un nombre d'états différents,

2. le multimodèle est linéaire par rapport aux paramètres à estimer (les fonctions poids).

Grâce à ce deuxième avantage, l'algorithme des moindres carrés récursifs peut servir à estimer l'évolution des fonctions poids associées aux différents modes de fonctionnement du système.

Par la suite, l'étude de la reconnaissance du mode actif à l'aide d'un multimodèle découplé est susceptible de porter sur l'analyse de la sensibilité de l'algorithme vis-à-vis des bruits de mesure et des incertitudes paramétriques du système. Le recours au filtre de Kalman peut être une solution en mesure de fournir une estimation des fonctions poids. L'estimation simultanée de l'état et des fonctions poids constitue également une piste à explorer à l'aide, par exemple, des techniques dites des sous-espaces.

Conclusion générale

Les résultats proposés à l'issue de ce travail de recherche apportent une contribution aux méthodes d'estimation d'état et à leur application au diagnostic des systèmes (*a priori* non linéaires) représentés par des multimodèles. Dans ce contexte de modélisation, pleinement reconnu aujourd'hui, deux structures essentielles de multimodèles peuvent être distinguées selon que les sous-modèles partagent ou non le même vecteur d'état. La première structure, à savoir le multimodèle de Takagi-Sugeno, a été à l'origine de nombreux développements dans divers domaines de l'automatique tels que l'identification, la commande ou l'estimation d'état. En revanche, peu d'études théoriques portant sur l'estimation d'état à partir de la seconde structure de multimodèle, à savoir le multimodèle découplé, semblent avoir été menées. Ce constat nous a conduit à privilégier l'étude de ce multimodèle dans le cadre de la synthèse d'observateurs d'état. Le principal intérêt d'un observateur élaboré à partir d'un multimodèle découplé réside dans le fait qu'il permet, contrairement à un observateur conçu à partir d'un modèle de Takagi-Sugeno, le recours à un vecteur d'état de dimension différente pour chaque sous-modèle. Il devient ainsi possible d'adapter, lors de la phase d'identification, la complexité de chaque sous-modèle à la complexité du comportement dynamique du système dans ses différentes zones de fonctionnement. L'introduction d'un tel degré de flexibilité favorise la généralité du multimodèle découplé, en particulier lors de la modélisation de systèmes dont la structure peut comporter des changements.

Avant de nous pencher sur le problème posé par l'estimation d'état, nous avons présenté au cours du premier chapitre les principes de l'approche multimodèle et les deux structures de multimodèles classiquement utilisées. Le second chapitre a exposé **une approche paramétrique d'identification de type boîte noire** basée sur le multimodèle découplé [Orjuela et al., 2006a,b]. Un phénomène dit de "décrochage" susceptible de nuire à la qualité de l'approximation du multimodèle a été mis en évidence. Son origine a été établie et une solution, basée sur l'introduction de trois filtres passe-bas dans la structure du multimodèle, a été suggérée afin de l'éliminer.

La principale contribution de ce travail de recherche apparaît au cours des troisième et quatrième chapitres, tous deux portant sur la **synthèse d'observateurs d'état** d'un système représenté par un multimodèle découplé. L'approche proposée est intéressante en ce sens qu'elle se démarque, par l'utilisation de cette structure, des approches multimodèles employées jusqu'à présent. Le travail réalisé fournit une preuve théorique de la convergence de l'erreur d'estimation d'état pour des observateurs à temps continu et à temps discret. Cet aspect constitue un point original qui permet de se démarquer d'autres travaux relatifs à l'estimation d'état des systèmes représentés par un multimodèle découplé.

Au cours du troisième chapitre, le problème lié à l'estimation d'état a été initialement abordé en considérant un **observateur à gain proportionnel** dont les conditions d'existence, dans le cas continu [Orjuela et al., 2007c, 2008e] et dans le cas discret [Orjuela et al., 2007e], ont été proposées sous la forme d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles. Une extension de cette approche aux multimodèles comportant un retard sur la sortie a également été proposée [Orjuela et al., 2007b].

Ces résultats ont été, dans le quatrième chapitre, généralisés dans un contexte d'**estimation d'état robuste** vis-à-vis des perturbations [Orjuela et al., 2008b], des incertitudes paramétriques [Orjuela et al., 2008a] et des entrées inconnues. Toutefois, il a été constaté que le réglage du gain de l'observateur à gain proportionnel réalisé de manière à obtenir un bon niveau d'atténuation des perturbations sans dégrader les performances dynamiques de l'observateur pouvait s'avérer délicat. Afin de surmonter cette difficulté, le recours à un **observateur à gain proportionnel-intégral** a été suggéré [Orjuela et al., 2007a,d, 2008d]. Cette forme d'observateur se révèle intéressante dans la mesure où elle offre au concepteur des degrés de liberté supplémentaires permettant de parvenir à un bon compromis entre les performances et le niveau d'atténuation de l'observateur. Enfin, le problème soulevé par l'**estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues** a été abordé au moyen d'un **observateur multi-intégral**, une généralisation de l'observateur PI proposé dans [Orjuela et al., 2008c]. Il permet d'apporter une solution à ce problème lorsque les entrées inconnues prennent une forme polynomiale (échelon, rampe, etc.). Par ailleurs, la synthèse de ce type d'observateur ne semble pas avoir été proposée dans un contexte multimodèle.

Dans le dernier chapitre, l'exemple académique d'un bioréacteur a permis d'illustrer la mise en pratique des résultats obtenus, depuis la phase d'identification jusqu'à la phase de diagnostic à base d'observateurs.

Les résultats proposés dans cette thèse ouvrent de multiples perspectives :

- ◇ Le problème de l'identification paramétrique des systèmes non linéaires demeure un domaine à explorer à l'appui de la structure multimodèle proposée. L'analyse du partitionnement optimal de l'espace de fonctionnement du système et l'obtention des dimensions des sous-modèles pourraient constituer deux points importants à approfondir.
- ◇ Une réécriture du multimodèle découplé permettrait de surmonter le problème lié au placement des valeurs propres de l'observateur dans un domaine du plan complexe plus large. Ce placement serait par exemple en mesure d'améliorer la dynamique de l'observateur vis-à-vis de celle du système. La nouvelle écriture présentée dans le chapitre 6 semblerait en ce sens offrir d'intéressantes perspectives.
- ◇ Les résultats obtenus dans un contexte de diagnostic des systèmes mériteraient d'être davantage exploités. L'étude en particulier de la sensibilité de la reconstruction de l'état vis-à-vis des incertitudes paramétriques, des perturbations et des défauts permettrait d'indiquer les défauts auxquels les résidus générés seraient sensibles.
- ◇ La conception de l'observateur à gain multi-intégral, proposée dans la section 4.4, pourrait être modifiée en remplaçant les actions intégrales pures par des filtres de structures

plus générales. Ces extensions favoriseraient sans doute la prise en compte de nouvelles formes d’entrées inconnues plus générales que les formes polynomiales déjà utilisées.

Annexes

A

Calcul des fonctions de sensibilité pour le multimodèle modifié

La structure modifiée du multimodèle, illustrée sur la figure 2.9, est donnée par :

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t) &= F_2(q^{-1})u(t) \ , && \text{(A.1a)}\\
\tilde{u}(t) &= F_1(q^{-1})u(t) \ , && \text{(A.1b)}\\
x_i(t+1) &= A_i(\theta_i)x_i(t) + B_i(\theta_i)\tilde{u}(t) + D_i(\theta_i) \ , && \text{(A.1c)}\\
y_i(t) &= C_i(\theta_i)x_i(t) \ , && \text{(A.1d)}\\
\tilde{y}(t) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(t))y_i(t) \qquad \text{avec} \quad \xi(t) = \hat{u}(t) \ , && \text{(A.1e)}\\
y(t) &= F_3(q^{-1})\tilde{y}(t) \ , && \text{(A.1f)}
\end{aligned}$$

où $y(t)$ est la nouvelle sortie du multimodèle. Les trois filtres sont donnés, dans le cas SISO, respectivement par :

$$F_1 = \frac{A_{F_1}(q^{-1})}{B_{F_1}(q^{-1})}, \quad F_2 = \frac{A_{F_2}(q^{-1})}{B_{F_2}(q^{-1})} \quad \text{et} \quad F_3 = \frac{A_{F_3}(q^{-1})}{B_{F_3}(q^{-1})} \ , \tag{A.2}$$

où q^{-1} est l'opérateur retard et A_{F_1}, B_{F_1}, A_{F_2}, B_{F_2}, A_{F_3} et B_{F_3} sont des polynômes en q^{-1}. Remarquons que la représentation entrée/sortie des trois filtres peut être facilement remplacée par une représentation d'état. Les filtres F_1, F_2 et F_3 seront désignés respectivement par *filtre de l'entrée*, *filtre de la variable de décision* et *filtre de la sortie*.

Le nouveau vecteur θ contenant les paramètres du multimodèle à estimer est défini par :

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \theta & \theta_{F_1} & \theta_{F_2} & \theta_{F_3} \end{bmatrix}^T \ , \tag{A.3}$$

où θ, défini en (2.6), est le vecteur contenant les paramètres des sous-modèles et θ_{F_1}, θ_{F_2} et θ_{F_3} sont les vecteurs contenant les paramètres scalaires $\theta_{F_i,q}$ relatifs aux trois filtres :

$$\theta_{F_i} = \begin{bmatrix} \theta_{F_i,1} & \cdots & \theta_{F_i,q} & \cdots & \theta_{F_i,q_{F_i}} \end{bmatrix}^T , \quad i = 1,2,3 \ . \tag{A.4}$$

Dans un souci de simplicité, une représentation multimodèle SISO est considérée. Les fonctions de sensibilité sont calculées à partir du critère global défini par :

$$J_G = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (y(t) - y_s(t))^2 \ . \tag{A.5}$$

Remarquons que tous les résultats peuvent être facilement généralisés au cas multivariable et au critère local ou mixte.

Calcul des fonctions de sensibilité

Le vecteur gradient G_G s'obtient en dérivant le critère global par rapport aux paramètres θ, soit :

$$\mathrm{G}_G = \frac{\partial J_G}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(t) \frac{\partial y(t)}{\partial \theta} \ , \tag{A.6}$$

avec

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \theta} = \frac{\partial F_3(q^{-1})}{\partial \theta} \tilde{y}(t) + F_3(q^{-1}) \frac{\partial \tilde{y}(t)}{\partial \theta} \ . \tag{A.7}$$

Le découplage entre les différents paramètres du multimodèle permet de distinguer quatre grandes familles de fonctions de sensibilité. Les trois premières concernent les fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres des trois filtres. La quatrième concerne les fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres des sous-modèles.

Le calcul du premier terme de gauche de (A.7) peut alors se faire indépendamment du calcul du deuxième terme. En effet, les paramètres θ_{F_3} du filtre F_3 sont complètement découplés des autres paramètres du multimodèle.

Calcul des fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres du filtre F_3

Cette section ne porte que sur le calcul du premier terme de gauche de (A.7) par rapport à θ_{F_3} (le calcul du deuxième terme de gauche de (A.7) fera l'objet des sections suivantes). Il est possible en effet de dissocier le calcul de ces fonctions de sensibilité du calcul des autres fonctions de sensibilité compte tenu du découplage entre les paramètres θ_{F_3} du filtre F_3 et les autres paramètres du multimodèle.

La fonction de sensibilité du filtre F_3 par rapport aux paramètres inconnus θ_{F_3} est donnée par :

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \theta_{F_3}} = \frac{\partial F_3(q^{-1})}{\partial \theta_{F_3}} \tilde{y}(t) \ . \tag{A.8}$$

Le calcul de $\frac{\partial F_3(q^{-1})}{\partial \theta_{F_3}}$ s'obtient par dérivation partielle des équations décrivant le comportement dynamique du filtre F_3.

Calcul des fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres du filtre F_2

On ne s'intéresse ici qu'au calcul du deuxième terme de gauche de (A.7) en considérant le nouveau vecteur de paramètres :

$$\tilde{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \theta & \theta_{F_1} & \theta_{F_2} \end{bmatrix}^T \quad . \tag{A.9}$$

Les fonctions de sensibilité de la sortie du multimodèle $y(t)$ par rapport aux paramètres $\tilde{\theta}_1$ sont données par :

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \tilde{\theta}_1} = F_3(q^{-1}) \frac{\partial \tilde{y}(t)}{\partial \tilde{\theta}_1} \quad , \tag{A.10}$$

$$= F_3(q^{-1}) \sum_{i=1}^{L} \frac{\partial \mu_i(\hat{u}(t))}{\partial \tilde{\theta}_1} y_i(t) + F_3(q^{-1}) \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\hat{u}(t)) \frac{\partial y_i(t)}{\partial \tilde{\theta}_1} \quad . \tag{A.11}$$

Il est également possible, afin de réduire la complexité des calculs, de dissocier le calcul des fonctions de sensibilité relatives au filtre de la variable de décision F_2 du calcul de celles relatives aux autres paramètres du multimodèle. En ne considérant que les paramètres θ_{F_2} associés au filtre F_2, l'expression (A.11) devient alors :

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \theta_{F_2}} = F_3(q^{-1}) \sum_{i=1}^{L} \frac{\partial \mu_i(\hat{u}(t))}{\partial \theta_{F_2}} y_i(t) \quad . \tag{A.12}$$

Si les fonctions de pondération $\mu_i(.)$ sont obtenues à partir de :

$$\mu_i(\hat{u}(t)) = \omega_i(\hat{u}(t)) / \sum_{j=1}^{L} \omega_j(\hat{u}(t)) \quad , \tag{A.13}$$

$$\omega_i(\hat{u}(t)) = \exp\left(-(\hat{u}(t) - c_i)^2 / \sigma^2 \right) \tag{A.14}$$

alors les fonctions de sensibilité $\frac{\partial \mu_i(\hat{u}(t))}{\partial \theta_{F_2}}$ dans (A.12) peuvent s'expliciter comme suit :

$$\frac{\partial \mu_i(\hat{u}(t))}{\partial \theta_{F_2,q}} = \frac{\partial \omega_i(\hat{u}(t))}{\partial \theta_{F_2,q}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{L} \omega_j(\hat{u}(t))} - \frac{\omega_i(\hat{u}(t))}{\{\sum_{j=1}^{L} \omega_j(\hat{u}(t))\}^2} \sum_{j=1}^{L} \frac{\partial \omega_j(\hat{u}(t))}{\partial \theta_{F_2,q}}, i = 1, \cdots, L \quad , \tag{A.15}$$

où

$$\frac{\partial \omega_i(\hat{u}(t))}{\partial \theta_{F_2,q}} = -2 \left(\frac{\hat{u}(t) - c_i}{\sigma^2} \right) \omega_i(\hat{u}(t)) \frac{\partial \hat{u}(t)}{\partial \theta_{F_2,q}} \quad . \tag{A.16}$$

Le calcul de $\frac{\partial \hat{u}(t)}{\partial \theta_{F_2,q}}$ s'obtient par dérivation partielle des équations décrivant le comportement dynamique du filtre F_2.

Calcul des fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres du filtre F_1

On ne s'intéresse ici qu'au calcul du deuxième terme de gauche de (A.11) en considérant le nouveau vecteur de paramètres :

$$\tilde{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \theta & \theta_{F_1} \end{bmatrix}^T \quad . \tag{A.17}$$

Les fonctions de sensibilité de la sortie du multimodèle $y(t)$ par rapport aux paramètres $\tilde{\theta}_2$ sont données par :

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \tilde{\theta}_2} \quad = \quad F_3(q^{-1}) \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\hat{u}(t)) \frac{\partial y_i(t)}{\partial \tilde{\theta}_2} \quad . \tag{A.18}$$

Les fonctions de sensibilité $\frac{\partial y_i(t)}{\partial \tilde{\theta}_2}$ dans (A.18) peuvent être dissociées en appliquant le même principe de découplage. Les fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres θ_{F_1} du filtre F_1 sont données par

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta_{F_1,q}} = C_i(\theta_i) \frac{\partial x_i(t)}{\partial \theta_{F_1,q}} \quad , \tag{A.19}$$

avec

$$\frac{\partial x_i(t+1)}{\partial \theta_{F_1,q}} = A_i \frac{\partial x_i(t)}{\partial \theta_{F_1,q}} + Bi \frac{\partial \tilde{u}(t)}{\partial \theta_{F_1,q}} \quad . \tag{A.20}$$

Le calcul de $\frac{\partial \tilde{u}(t)}{\partial \theta_{F_1,q}}$ s'obtient par dérivation partielle des équations décrivant le comportement dynamique du filtre F_1.

Calcul des fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres des sous-modèles

Les fonctions de sensibilité par rapport aux paramètres θ des sous-modèles sont données par

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial \theta_{p,q}} = \frac{\partial C_i}{\partial \theta_{p,q}} x_i(t) + C_i \frac{\partial x_i(t)}{\partial \theta_{p,q}} \quad , \qquad p = 1, \cdots, L, \quad q = 1, \cdots, q_p \quad , \tag{A.21}$$

avec

$$\frac{\partial x_i(t+1)}{\partial \theta_{p,q}} = \frac{\partial A_i}{\partial \theta_{p,q}} x_i(t) + A_i \frac{\partial \hat{x}_i(t)}{\partial \theta_{p,q}} + \frac{\partial B_i}{\partial \theta_{p,q}} \tilde{u}(t) + \frac{\partial D_i}{\partial \theta_{p,q}} \quad . \tag{A.22}$$

B

Théorie de Lyapunov

Cette annexe s'inspire de la présentation proposée par Chadli [2002].

Soit un système non linéaire autonome décrit par

$$\dot{x}(t) \quad = \quad f(x(t)) \ , \tag{B.1}$$

avec $f(x(t)) \in \mathcal{C}^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ce système est dit en équilibre autour de x_0 si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps ; x_0 est alors appelé point d'équilibre.

Si $f(x_0) = 0, \forall t$ alors x_0 est appelé point d'équilibre du système.

Différentes définitions de la stabilité du système (B.1) peuvent être établies. Ces définitions utilisent la notion de fonctions de classe κ et κ_∞. Une fonction continue $\alpha(r) : [0,a) \rightarrow [0,\infty)$ est dite de classe κ si elle est strictement croissante et nulle à l'origine $\alpha(0) = 0$. Si $a = \infty$ et $lim_{r\rightarrow\infty}\alpha(r) = \infty$ alors la fonction α est dite de classe κ_∞.

Soit une fonction scalaire $V(x(t)) \in C^1$ telle que

$$\alpha_1(x(t)) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(x(t)), \quad \forall \|x\| < d \tag{B.2}$$

où $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$ sont des fonctions de classe κ définies sur $[0,d), d \in \mathbb{R}^+$.

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$, $\|x\| < d$ alors le point d'équilibre $(x_0 = 0)$ du système (B.1) est localement stable (il est globalement stable si, de plus, $d = \infty$ et les fonctions $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$ sont des fonctions de classe κ_∞).
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\|x\| < d$ avec $\alpha_0(.)$ fonction de classe κ définie sur $[0,d)$, alors le point d'équilibre du système (B.1) est localement asymptotiquement stable.

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\|x\|$ $(d = \infty)$ et les fonctions $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$ sont des fonctions de classe κ_∞ alors le point d'équilibre du système (B.1) est globalement asymptotiquement stable.
- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\|x\|$ $(d = \infty)$ et les fonctions $\alpha_1(.)$ et $\alpha_2(.)$ sont des fonctions de classe κ_∞ de la forme

$$\alpha_1(\|x\|) = a\|x\|^p, \alpha_2(\|x\|) = b\|x\|^p, \alpha_3(\|x\|) = c\|x\|^p, \tag{B.3}$$

  telles que $a, b, c \geq 0$, $p \geq 1$, alors le point d'équilibre du système (B.1) est globalement exponentiellement stable.

C
Outils LMI

Outils LMI

Les méthodes LMI reposent sur la formulation d'un problème donné sous la forme d'un problème d'optimisation avec un objectif linéaire et des contraintes sous la forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMI). Une contrainte LMI en un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ est de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \geq 0 \ , \tag{C.1}$$

où les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $i = 1, \cdots, m$, sont données.

Complément de Schur

Soient trois matrices $R(x) = R^T(x)$, $Q(x) = Q^T(x)$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x. Les LMI suivantes sont équivalentes :

1. $\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$,
2. $R(x) > 0$, $Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0$,
3. $Q(x) > 0$, $R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0$.

S-procédure

Cette procédure permet d'approcher un ensemble de contraintes convexes ou non par une contrainte convexe.

Lemme C.1 (S-procédure)**.** *Soient $g_0, \cdots, g_p$ des fonctions quadratiques dépendantes des variables $\xi \in \mathbb{R}^m$:*

$$g_i(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix}^T F_i \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix}, \ i = 0, \cdots, p \ , \tag{C.2}$$

où $F_i = F_i^T$. *La condition suivante en* $g_0, \cdots, g_p$

$$g_0(\xi) \geq 0, \ \textit{pour tout} \ \ \xi \ \ \textit{tel que} \ \ g_i(\xi) \geq 0 \ \ , i = 0, \cdots, p \ \ , \tag{C.3}$$

est vérifiée s'il existe des scalaires $\tau_i \geq 0$, $i = 0, \cdots, p$, *tels que*

$$F(\tau) = F_0 + \sum_{i=1}^{p} \tau_i F_i \geq 0 \ \ . \tag{C.4}$$

Si $p = 1$ *alors la réciproque est également vraie étant donné qu'il y a un* ξ_0 *tel que* $g_1(\xi_0) > 0$.

Index

Bioréacteur
Défauts de capteur, 188, 190
Equations, 172
Représentation multimodèle, 174, 176, 181

Diagnostic
Banc d'observateurs, 187
Détection des défauts, 185
Résidus, 188, 190

Entrées inconnues
Découplage, 158
Multimodèle découplé, 154
Observateur multi-intégral, 155

Erreur d'estimation
Convergence, 86, 108
Définition, 84
Equation dynamique, 85, 107, 119, 126, 136, 145
Performances dynamiques, 90

Fonctions de Lyapunov
Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, 108
Polyquadratique, 99
Quadratique, 86

Identification
Algorithme, 54
Critères d'optimisation, 48–50
Fonctions de sensibilité, 54, 212
Formulation du problème, 46
Matrice hessienne, 53
Vecteur gradient, 52, 53

Incertitudes
Bornées en norme, 134
Exemple, 133
Formes, 133
Multimodèle incertain, 134
Synthèse d'observateur, 136

Multimodèle
Terminologie, 21
Comparaison des multimodèles, 34
Modèle découplé, 31
Modèle découplé modifié, 62, 102
Modèle de Takagi-Sugeno, 27
Principe, 21

Observateur
à gain multi-intégral, 153, 155
à gain proportionnel, 83, 128
à gain proportionnel-intégral, 126, 144

Phénomène de décrochage
Définition, 61
Modèle découplé modifié, 62
Solutions, 62

Stabilité
Multimodèle découplé, 81
multimodèle de T.S., 80

Bibliographie

Abonyi, J., Babuska, R., Botto, M., Szeifert, F., et Nagy, L. (2000). Identification and control of nonlinear systems using fuzzy Hammerstein models. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 39(11) :4302–4314.

Akhenak, A. (2004). *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Babuska, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*. Kluwer Academic Publishers, London.

Babuska, R. et Verbruggen, H. (2003). Neuro-fuzzy methods for nonlinear system identification. *Annual Reviews in Control*, 27(1) :73–85.

Bara, G. I. (2001). *Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.

Bard, Y. (1974). *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, New York.

Beale, S. et Shafai, B. (1989). Robust control system design with a proportional integral observer. *International Journal of Control*, 50(1) :97–111.

Besançon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Applications*. Springer, Berlin.

Billings, S. et Voon, W. (1983). Structure detection and model validity test in the identification of nonlinear systems. *IEE Proceedings D : Control Theory and Applications*, 130(4) :193–199.

Billings, S. et Voon, W. (1986). Correlation based model validity tests for non-linear models. *International Journal of Control*, 44(1) :235 – 244.

Blanco, Y., Perruquetti, W., et Borne, P. (2001). Stability and stabilization of nonlinear systems and Takagi-Sugeno's fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, 7(3) :221–240.

Bliman, P. (2001). LMI characterization of the strong delay-independent stability of linear delay systems via quadratic Lyapunov-Krasovskii functionals. *Systems and Control Letters*, 43(4) :263–274.

Boukhris, A. (1998). *Identification des systèmes non linéaires par une approche multimodèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.

Box, G. et Jenkins, G. (1976). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics 15, Philadelphie.

Busawon, K. et Kabore, P. (2001). Disturbance attenuation using proportional integral observers. *International Journal of Control*, 74(74) :618–627.

Busvelle, E. et Gauthier, J. (2005). Observation and identification tools for nonlinear systems : application to a fluid catalytic cracker. *International Journal of Control*, 78(3) :208 –234.

Cao, Y.-Y. et Frank, P. (2001). Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(2) :213–229.

Chadli, M. (2002). *Stabilité et commande des systèmes décrits par des multimodèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Chang, J. (2006). Applying discrete-time proportional integral observers for state and disturbance estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(5) :814–818.

Cherrier, E. (2006). *Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Chilali, M. (1996). *Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère*. Thèse de doctorat, Université Paris-IX Dauphine, France.

Chilali, M., Gahinet, P., et Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2257–2270.

Colmenares, W. (1996). *Sur la robustesse des systèmes linéaires incertains : approche quadratique, retour de sortie*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, France.

Corless, M. et Tu, J. (1998). State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 34(6) :757–764.

Daafouz, J. et Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*, 43(5) :355–359.

Darouach, M., Zasadzinski, M., et Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3) :606–609.

Davrazos, G. et Koussoulas, N. T. (2001). A review of stability results for switched and hybrid systems. In *8th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Rio, Greece.

de Oliveira, M. C., Bernussou, J., et Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, 37(4) :261–265.

Domlan, E. (2006). *Diagnostic des systèmes à changement de régime de fonctionnement*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Duan, G. et Wu, A. (2006). Robust fault detection in linear systems based on PI observers. *International Journal of Systems Science*, 37(12) :809–816.

Dubuisson, B. (1990). *Diagnostic et reconnaissance des formes*. Hermes, Paris.

Dunn, I., Heinzle, E., Ingham, J., et Penosil, J. (2005). *Biological Reaction Engineering : Dynamic Modelling Fundamentals with Simulation Examples*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, second, completely revised edition.

Edwards, D. et Hamson, M. (2001). *Guide to mathematical modelling*, chapter 1, page 3. 2nd edition.

Er, M. J. et Lin, D. H. (2002). A new approach for stabilizing nonlinear systems with time delays. *International Journal of Intelligent Systems*, 17(3) :289–302.

Filev, D. (1991). Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) :281–290.

Fliess, M., Join, C., et Sira-Ramírez, H. (2008). Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 4(1) :12–27.

Foulloy, L., Galichet, S., et Titli, A. (2003). *Commande Floue*, volume 2. Hermes Science, Paris.

Frank, P. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy – A survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459–474.

Fridman, E., Shaked, U., et Xie, L. (2003). Robust H_∞ filtering of linear systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1) :159–165.

Friedman, J. (1991). Multivariate adaptative regression splines (with discussion). *The Annals of Statistics*, 19(1) :1–67.

Gaddouna, B. (1995). *Contrinution au diagnostic des systèmes linéaires invariants à entrées inconnues : Application à un processus hydraulique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Gaddouna, B., Maquin, D., et Ragot, J. (1994). Fault detection observers for systems with unknown inputs. In *2th IFAC Sympsieum on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS*, Espoo, Finland.

Gao, R., O'Dwyer, A., McLoone, S., et Coyle, E. (2002). Multiple model networks in non-linear systems model for control – A revieew. In *Wismarer Automatisierungs Symposium mit International Beteiligung*, Hansestadt Wismar.

Gao, Z. et Ding, S. X. (2005). PMID observer design for unknown input generalized dynamical systems. In *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic.

Gao, Z. et Ding, S. X. (2007). Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems. *Automatica*, 43(5) :912–920.

Gao, Z. et Ho, D. (2004). Proportional multiple-integral observer design for descriptor systems with measurement output disturbances. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 151(3) :279–288.

Gasso, K. (2000). *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Gatzke, E. P. et Doyle III, F. J. (1999). Multiple model approach for CSTR control. In *14th IFAC World Congress*, pages 343–348, Beijing, République Populaire de Chine.

Gauthier, J., Hammouri, H., et Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :875–880.

Gawthrop, P. (1995). Continuous-time local state local model networks. In *1995 IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 852–857, Vancouver, British Columbia.

Germani, A., Manes, C., et Pepe, P. (2002). A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1) :96–101.

Gray, G., Murray-Smith, D., Li, Y., et Sharman, K. (1996). Nonlinear system modelling using output error estimation of a local model network. Technical Report CSC-96005, Centre for Systems and Control, Faculty of Engineering at Glasgow University, Glasgow, Scotland.

Gregorcic, G. (2004). *Data-based model of nonlinear systems for control*. Thèse de doctorat, University College Cork, Irlande.

Gregorcic, G. et Lightbody, G. (2000). Control of highly nonlinear processes using self-tuning control and multiple/local model approaches. In *2000 IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, INES 2000*, pages 167–171, Portoroz, Slovenie.

Gregorcic, G. et Lightbody, G. (2008). Nonlinear system identification : From multiple-model networks to gaussian processes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, In Press, Corrected Proof :doi :10.1016/j.engappai.2007.11.004.

Guay, M. (1996). *Measurement of nonlinearity in chemical process control*. Thèse de doctorat, Queen's University at Kingston, Canada.

Guerra, T. M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., et Tirmant, H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1248–1259.

Guerra, T. M. et Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5) :823–829.

Guillaume, D. et Rouchon, P. (1997). Estimation d'état et des paramètres cinétiques pour une classe de bioréacteurs. In *Colloque de Recherche Doctorale Automatique, Génie informatique, Image et Signal, AGIS'97*, Angers, France.

Haber, R. et Keviczky, L. (1999). *Nonlinear system identification – input-output modeling approach*, volume 2 : Nonlinear system structure identification. Kluwer Academic Publishers, London.

Haber, R. et Unbehauen, H. (1990). Structure identification of nonlinear dynamic systems–A survey on input/output approaches. *Automatica*, 26(4) :651–677.

Helbig, A., Marquardt, W., et Allgower, F. (2000). Nonlinearity measures : definition, computation and applications. *Journal of Process Control*, 10(2-3) :113–123.

Hou, M. et Muller, P. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :871–875.

Hou, M. et Patton, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34(6) :789–794.

Hua, C. et Guan, X. (2005). Synchronization of chaotic systems based on PI observer design. *Physics Letters A*, 334(5-6) :382–389.

Hui, S. et Zak, . S. (2005). Observer design for systems with unknown inputs. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 15(4) :431–446.

Hunt, K., Haas, R., et Murray-Smith, R. (1996). Extending the functional equivalence of Radial Basis Function networks and fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(3) :776–781.

Ibrir, S. (2004). Robust state estimation with q-integral observer. In *American Control Conference, ACC*, pages 3466–3471, Boston, Etats Unis d'Amérique.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008a). Design of observers for takagi-sugeno systems with immeasurable premise variables : an L_2 approach. In *17th IFAC World Congress*, Séoul, Corée du Sud.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008b). Diagnostic des systèmes non linéaires par approche multimodèle. In *Workshop Surveillance, Sûreté et Sécurité des Grands Systèmes, 3SGS'08*, Troyes, France.

Isermann, R. (2006). *Fault-Diagnosis Systems. An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Jadbabaie, A. (1999). A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems. In *14th IFAC World congress*, Beijing, République Populaire de Chine.

Janczak, A. (2004). *Identification of Nonlinear Systems using Neural networks and polynomial models*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Jang, J.-S. (1993). ANFIS : Adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 23(3) :665–685.

Jang, J.-S. et Sun, C.-T. (1993). Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4(1) :156–159.

Jiang, G., Wang, S., et Song, W. (2000). Design of observer with integrators for linear systems with unknown input disturbances. *IEE Electronics Letters*, 36(13) :1168–1169.

Jiang, X., Xu, W., et Han, Q.-L. (2005). Observer-based fuzzy control design with adaptation to delay parameter for time-delay systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 152(3) :637–649.

Johansen, T. A. et Babuska, R. (2003). On multi-objective identification of Takagi-Sugeno fuzzy model parameters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(6) :847–860.

Johansen, T. A. et Foss, A. B. (1993). Constructing NARMAX using ARMAX models. *International Journal of Control*, 58(5) :1125–1153.

Johansen, T. A. et Foss, B. A. (1995). Identification of non-linear system structure and parameters using regime decomposition. *Automatica*, 31(2) :321–326.

Johansen, T. A., Shorten, R., et Murray-Smith, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3) :297–313.

Johnson, P. et Busawon, K. (2006). Chaotic synchronisation for secure communication using pi-observers. In *First IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems*, Reims, France.

Jung, J., Huh, K., et Shim, T. (2007). Dissipative proportional integral observer for a class of uncertain nonlinear systems. In *American Control Conference, ACC*, New York City, Etats Unis d'Amérique.

Kaczorek, T. (1978). Desing of proportional-integral observers for linear time-varying systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 26(10).

Kalman, R. (1960). A new approch to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82 (series D) :35–45.

Kanev, S. et Verhaegen, M. (2006). Multiple model weight estimation for models with no common state. In *6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS*, pages 637–642, Beijing, République Populaire de Chine.

Kazantzis, N. et Wright, R. (2005). Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements. *Systems and Control Letters*, 54(9) :877–886.

Khargonekar, P., Petersen, I. A., et Zhou, K. (1990). Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and h_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3) :356–361.

Kharitonov, V. L. (1999). Robust stability analysis of time delay systems : A survey. *Annual Reviews in Control*, 23 :185–196.

Koenig, D. (2005). Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems : application to state and fault estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :212–217.

Kruszewski, A. (2006). *Lois de commande pour une classe de modèles nonlinéairezss sous la forme Takagi-Sugeno : mise sous forme LMI*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France.

Lamnabhi-Lagarrigue, F. et Rouchon, P. (2002). *Systèmes non linéaires*, volume 2. Hermes Science, Paris.

Leith, D. J. et Leithead, W. E. (1999). Analytic framework for blended multiple model systems using linear local models. *International Journal of Control*, 72(7) :605–619.

Leith, D. J. et Leithead, W. E. (2000). Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73(11) :1001–1025.

Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Computer Aided Control Systems Design, CACSD*, pages 284– 289, Taipei, Taiwan.

Liapounoff, A. (1907). Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 9 :203–474. (traduction en français du mémoire Russe).

Liberzon, D. et Morse, S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5) :59–70.

Ljung, L. (1999). *System identification : Theory for the User*. Prentice Hall PTR, London, 2 edition.

Lopez-Toribio, C., Patton, R., et Daley, S. (2000). Takagi-Sugeno fuzzy fault-tolerant control of an induction motor. *Neural Computing and Applications*, 9(1) :19–28.

Luenberger, D. G. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :596–602.

Maertens, K., Johansen, T. A., et Babuska, R. (2004). Engine load prediction in off-road vehicles using multi-objective nonlinear identification. *Control Engineering Practice*, 12(5) :615–624.

Marquardt, D. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11(2) :431–441.

Marx, B., Koenig, D., et Georges, D. (2003). Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC*, Maui, Hawaii, Etats Unis d'Amérique.

McLoone, S. (2000). *Nonlinear identification using local model networks*. Thèse de doctorat, Queen's University Belfast.

McLoone, S. et Irwin, G. (2003). On velocity-based local model networks for nonlinear identification. *Asian Journal of Control*, 5(2) :309–315.

Mensler, M. (1999). *Analyse et étude comparative de méthodes d'identification des systèmes à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle.* Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, France.

Mielcarek, D. (1990). *Etude et développement de méthodes d'identification multi-variable – Application à un procédé chimique.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Mondié, S. et Kharitonov, V. L. (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems : An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :268–273.

Morère, Y. (2001). *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France.

Murray-Smith, R. et Johansen, T. (1997). *Multiple model Approaches to Modelling and Control*. Taylor & Francis, London.

Narendra, K. et Balakrishnan, J. (1994). Improving trasient reponse of adaptive contol systems using multiple model and switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9) :1861–1866.

Narendra, K. et Balakrishnan, J. (1997). Adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(2) :171–187.

Narendra, K. et Gallman, P. (1966). An iterative method for the identification of nonlinear systems using a Hammerstein model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(3) :546–550.

Narendra, K. et George, K. (2002). Adaptive control of simple nonlinear systems using multiple models. In *American Control Conference,ACC*, Anchorage, Alaska, Etats Unis d'Amérique.

Narendra, K. et Parthasarathy, K. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1(1) :4–27.

Nelles, O. (2001). *Nonlinear System Identification.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Nelles, O., Fink, A., et Isermann, R. (2000). Local linear model trees (LOLIMOT) Toolbox for Nonlinear System Identification. In *12th IFAC Symposium on System Identification*, Santa Barbara, Etats Unis d'Amérique.

Nie, J. (1995). Constructing fuzzy model by self-organizing counterpropagation network. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 25(6) :963–970.

Nowak, R. (2002). Nonlinear system identification. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 21(1) :109–122.

O'Reilly, J. (1983). *Observers for Linear Systems*. Academic Press, Londres.

Orjuela, R., Maquin, D., et Ragot, J. (2006a). Identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle à états découplés. In *Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'06*, Poitiers, France.

Orjuela, R., Maquin, D., et Ragot, J. (2006b). Nonlinear system identification using uncoupled state multiple-model approach. In *Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'2006*, Nancy, France.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2007a). Conception d'un observateur PI pour un multimodèle découplé. In *8th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic control, STA'2007*, Sousse, Tunisia.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2007b). A decoupled multiple model approach for state estimation of nonlinear systems subject to delayed measurements. In *3rd IFAC Advanced Fuzzy and Neural Network Workshop, AFNC*, Valenciennes, France.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2007c). Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche multimodèle découplé. In *2èmes Journées Doctorales–Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS*, Reims, France.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2007d). PI observer design for discrete-time decoupled multiple models. In *5th Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'2007*, Grenoble, France.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2007e). State estimation of nonlinear discrete-time systems based on the decoupled multiple model approach. In *4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO 2007*, Angers, France.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2008a). Conception d'observateurs robustes pour des systèmes non linéaires incertains : une stratégie multimodèle. In *5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bucarest, Roumanie.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2008b). Design of robust h-inf observers for nonlinear systems using a multiple model. In *17th IFAC World Congress*, Séoul, Corée du Sud.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2008c). Estimating the state and the unknown inputs of nonlinear systems using a multiple model approach. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'08*, Ajaccio, Corse, France,.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2008d). Proportional-integral observer design for nonlinear uncertain systems modelled by a multiple model approach. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexique.

Orjuela, R., Marx, B., Maquin, D., et Ragot, J. (2008e). State estimation for nonlinear systems using a decoupled multiple mode. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 4(1) :59–67.

Oustaloup, A. (1994). *La robustesse, analyse et synthèse de commandes robustes*. Hermes, Paris. (Coordonnateur).

Paduart, J., Schoukens, J., et Gommé, L. (2007). On the equivalence between some Block Oriented nonlinear models and nonlinear polynomial state space models. In *Instrumentation and Measurements Technology Conference- IMTC 2007*, Warsaw, Poland.

Palm, R. et Bergstern, P. (2000). Sliding mode observer for a Takagi-Sugeno fuzzy system. In *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, pages 665–670, San Antonio, Etats Unis d'Amérique.

Pearson, R. (1995). Nonlinear input/output modelling. *Journal of Process Control*, 5(4) :197–211.

Pearson, R. et Pottmann, M. (2000). Gray-box identification of block-oriented nonlinear models. *Journal of Process Control*, 10(4) :301–315.

Pekpe, K. (2004). *Identification par les techniques des sous-espaces – application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Petersen, I. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear system. *Systems and Control Letters*, 8(4) :351–357.

Pottmann, M. et Pearson, R. (1998). Block-oriented NARMAX models with output multiplicities. *American Institute of Chemical Engineers, AIChE Journal*, 44(1) :131–140.

Raghavan, S. et Hedrick, J. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2) :515–528.

Ragot, J. et Mielcarek, D. (1992). Recursive identification of multivariable interconnected systems. *International Journal of Systems Science*, 23(6) :987–1000.

Rajamani, R. (1998). Observer for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401.

Rhee, B. et Won, S. (2006). A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1211–1228.

Richard, J.-P. (2003). Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10) :1667–1694.

Rodrigues, M. (2005). *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, France.

Schreier, G. (1997). *Estimation d'état de systèmes linéaires et de systèmes non linéaires*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Schweickhardt, T. (2006). *Nonlinearity Assessment and Linear Control of Nonlinear Systems*. Thèse de doctorat, Stuttgart University.

Sename, O. (2001). New trends in design of observers for time-delay systems. *Kybernetika*, 37(4) :427–458.

Söffker, D. (2005). *Vibration control of Nonlinear Mechanism and Structures, Solid Mechanics and its Applications*, volume 130, chapter New results of the development and application of robust observers to elastic mechanical structure, pages 319–330. Springer, Dordrecht NL, berlin edition.

Söffker, D., Yu, T., et Müller, P. (1995). State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer. *International Journal of Systems Science*, 26(9) :1571–1582.

Shafai, B. et Carroll, R. L. (1985). Design of proportional-integral observer for linear time-varying multivariable systems. In *24th IEEE Conference on Decision and Control, CDC*, Boston, Etats Unis d'Amérique.

Shafai, B., Pi, C., et Nork, S. (2002). Simultaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral observers. In *American Control Conference, ACC*, Anchorage, Alaska, Etats Unis d'Amérique.

Shamma, J. S. et Cloutier, J. R. (1993). Gain-sheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(2) :256–263.

Shorten, R., Murray-Smith, R., Bjorgan, R., et Gollee, H. (1999). On the interpretation of local model in blended multiple model structures. *International Journal of Control*, 72(7/8) :620–628.

Sindelar, R. (2005). Hierarchical fuzzy systems. In *16th IFAC World Congress*, Prague.

Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H., et Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview. *Automatica*, 31(12) :1691–1724.

Sontag, E. (1981). Nonlinear regulation : The piecewise linear approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :346–358.

Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1) :625–653.

Takagi, T. et Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to model and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 :116–132.

Tanaka, K., Hori, T., et Wang, H. (2003). A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4) :582–589.

Tanaka, K., Ikeda, T., et Wang, H. (1996). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, Hinf control theory, and Linear Matrix Inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :1–13.

Tanaka, K., Ikeda, T., et Wang, H. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :250–265.

Tanaka, K. et Sugeno, M. (1990). Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method. In *International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS*, pages 133–136, Toronto, Canada.

Thiaw, L., Madani, K., Malti, R., et Sow, G. (2007). Implementation of recurrent multi-models for system identification. In *4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO*, pages 314–321, Angers, France.

Thomson, M., Schooling, S., et Soufian, M. (1996). The practical application of a nonlinear identification methodology. *Control Engineering Practice*, 4(3) :295–306.

Uppal, F. et Patton, R. (2005). Neuro-fuzzy uncertainty de-coupling : a multiple-model paradigm for fault detection and isolation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 19(4) :281–304.

Uppal, F. J., Patton, R. J., et Witczak, M. (2003). A hybrid neuro-fuzzy and de-coupling approach aplied to the DAMADICS benchmark problem. In *5th IFAC Sympsieum on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS*, Washington, D.C, Etats Unis d'Amérique.

Uppal, F. J., Patton, R. J., et Witczak, M. (2006). A neuro-fuzzy multiple-model observer approach to robust fault diagnosis based on the DAMADICS benchmark problem. *Control Engineering Practice*, 14(6) :699–717.

Van der Schaft, A. (1992). L_2-gain analysis of nonlinear systems andnonlinear state-feedback h_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :770–784.

Van Schrick, D. et Baspinar, C. (1999). Some aspects on the Proportional-Integral observer in the field of system supervision. In *14th IFAC Word Congress*, pages 539–544, Beijing, P. R. China.

Venkat, A. N., Vijaysai, P., et Gudi, R. D. (2003). Identification of complex nonlinear processes based on fuzzy decomposition of the steady state space. *Journal of Process Control*, 13(6) :473–488.

Verdult, V. (2002). *Nonlinear system Identification : A state space approach*. Thèse de doctorat, University of Twente, Hollande.

Vinsonneau, B., Goodall, D., et Burnham, K. (2004). An error-in-variable approach to multiple-model identification. In *Workshop on Advanced Control and Diagnosis, IAR/ACD'2004*, Karlsruhe, Allemagne.

Vinsonneau, B., Goodall, D., et Burnham, K. (2005). Extended global total least square approach to multiple-model identification. In *16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque.

Walter, E. et Pronzato, L. (1994). *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. MASSON, Paris.

Wang, L. (1998). Universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 93(2) :223–230.

Weinmann, A. (1991). *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag Wien New York, Vienne.

Wen, C., Wang, S., Jin, X., et Ma, X. (2007). Identification of dynamic systems using piecewise-affine basis function models. *Automatica*, 43(10) :1824–1831.

Wojciechowski, B. (1978). *Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input single-output time-invariant continuous systems*. Thèse de doctorat, Technical University of Gliwice, Pologne.

Wu, A. et Duan, G. (2006). Design of generalized PI observers for descriptor linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I : Regular Papers*, 53(12) :2828–2837.

Xie, L., Fu, M., et Souza, C. (1992). H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parametric uncertainty via output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191.

Xie, L. et Souza, C. (1992). Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191.

Xie, W., Wu, H., et Zhao, X. (2005). *Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, chapter Relaxed LMIs observer-based controller design via improved T-S fuzzy model structure, pages 930–941. Springer, Berlin.

Xiong, Y. et Saif, M. (2003). Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39(8) :1389–1398.

Yang, F. et Wilde, R. (1988). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7) :677–681.

Yang, H. et Saif, M. (1998). Observer design and fault diagnosis for state-retarded dynamical systems. *Automatica*, 34(2) :217–227.

Yen, J., Wang, L., et W., G. C. (1998). Improving the interpretability of Takagi-Sugeno fuzzy models by combining global learning and local learning. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4) :530–537.

You, F., Tian, Z., et Shi, S. (2006). Robust fault diagnosis for linear time-delay systems with uncertainty. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 10(4) :339–345.

Zhong, M., Ding, S., Lam, J., et Zhang, C. (2003). Fault detection filter desing for LTI system with time delay. In *42nd IEEE Conferece on Decision and Control, CDC*, Maui, Hawaii, Etats Unis d'Amérique.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Dominique BONVIN, Professeur, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse

Monsieur Gildas BESANCON, Professeur, INPG, ENSIEG, St Martin d'Hères

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur ORJUELA OSORIO Rodolfo

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **« Automatique et traitement du Signal »**

Fait à Vandoeuvre, le 24 octobre 2008
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

Résumé : Nombreux sont les problèmes classiquement rencontrés dans les sciences de l'ingénieur dont la résolution fait appel à l'estimation d'état d'un système par le biais d'un observateur. La synthèse d'un observateur n'est envisageable qu'à la condition de disposer d'un modèle à la fois exploitable et représentatif du comportement dynamique du système. Or, la modélisation du système et la synthèse de l'observateur deviennent des tâches difficiles à accomplir dès lors que le comportement dynamique du système doit être représenté par un modèle de nature non linéaire. Face à ces difficultés, *l'approche multimodèle* peut être mise à profit.
Les travaux présentés dans cette thèse portent sur les problèmes soulevés par l'identification, l'estimation d'état et le diagnostic de systèmes non linéaires représentés à l'aide d'un *multimodèle découplé*. Ce dernier, composé de sous-modèles qui peuvent être de dimensions différentes, est doté d'un haut degré de généralité et de flexibilité et s'adapte particulièrement bien à la modélisation des systèmes complexes à structure variable. Cette caractéristique le démarque des approches multimodèles plus conventionnelles qui ont recours à des sous-modèles de même dimension.
Après une brève introduction à l'approche multimodèle, le problème de l'estimation paramétrique du multimodèle découplé est abordé. Puis sont présentés des algorithmes de synthèse d'observateurs d'état robustes vis-à-vis des perturbations, des incertitudes paramétriques et des entrées inconnues affectant le système. Ces algorithmes sont élaborés à partir de trois types d'observateurs dits à gain proportionnel, à gain proportionnel-intégral et à gain multi-intégral. Enfin, les différentes phases d'identification, de synthèse d'observateurs et de génération d'indicateurs de défauts sont illustrées au moyen d'un exemple académique de diagnostic du fonctionnement d'un bioréacteur.

Mots-clés : Systèmes non linéaires, approche multimodèle, multimodèle découplé, estimation d'état robuste, observateurs d'état, entrées inconnues, identification paramétrique, diagnostic

Abstract: The state estimation of a system, with the help of an observer, is largely used in many practical situations in order to cope with many classic problems arising in control engineering. The observer design needs an exploitable model able to give an accurate description of the dynamic behaviour of the system. However, system modelling and observer design can not easily be accomplished when the dynamic behaviour of the system must be described by non linear models. The *multiple model approach* can be used to tackle these difficulties.
This thesis deals with black box modelling, state estimation and fault diagnosis of nonlinear systems represented by a *decoupled multiple model*. This kind of multiple model provides a high degree of generality and flexibility in the modelling stage. Indeed, the decoupled multiple model is composed of submodels which dimensions can be different. Thus, this feature is a significant difference between the decoupled multiple model and the classical used multiple model where all the submodels have the same dimension.
After a brief introduction to the multiple model approach, the parametric identification problem of a decoupled multiple model is explored. Algorithms for robust observers synthesis with respect to perturbations, modelling uncertainties and unknown inputs are afterwards presented. These algorithms are based on three kinds of observers called proportional, proportional-integral and multiple-integral. Lastly, identification, observers synthesis and fault sensitivity signals generation are illustrated via a simulation example of a bioreactor.

Keywords: Non linear systems, multiple model approach, decoupled multiple model, robust state estimation, observers, unknown inputs, black box modelling, faults diagnosis