



HAL
open science

Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés

Samer Riachy

► **To cite this version:**

Samer Riachy. Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Lille, 2008. Français. NNT: . tel-00370270

HAL Id: tel-00370270

<https://theses.hal.science/tel-00370270>

Submitted on 24 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 00000

THÈSE

présentée par

Samer RIACHY

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LILLE
Discipline AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

Titre de la thèse :

*Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes
mécaniques sous-actionnés*

À soutenir le 01 décembre 2008 devant le jury constitué de

Mme. B.d'Andréa Novel	Professeur Mines Paris-tech	Présidente
M. C. Canudas DE Wit	DR CNRS GIPSA-lab	Rapporteur
M. A. Glumineau	Professeur EC-Nantes	Rapporteur
M. E. Delaleau	Professeur ENIB	Examineur
M. W. Perruquetti	Professeur EC-Lille	Examineur
M. J-P. Richard	Professeur EC-Lille	Directeur
M. T. Floquet	CR CNRS LAGIS	Directeur

Remerciements

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au LAGIS et l'INRIA Lille-Nord Europe sous la direction de Monsieur Jean-Pierre RICHARD, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et de Monsieur Thierry FLOQUET, Chargé de Recherche au CNRS.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur Jean-Pierre RICHARD et Monsieur Thierry FLOQUET de m'avoir accepté dans leur équipe, de leur enthousiasme envers mon travail, de leur disponibilité. Les judicieux conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long de ces trois années de thèse m'ont permis de progresser dans mes études et d'achever ce travail dans les meilleures conditions.

Je suis très honoré que Monsieur Carlos CANUDAS DE WITT, Directeur de Recherche au CNRS au GIPSA-lab et Monsieur Alain GLUMINEAU, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes aient accepté de rapporter mon travail.

Je tiens aussi à assurer de ma reconnaissance Madame Brigitte D'ANDRÉA NOVEL, Professeur à L'Ecole des Mines de Paris, qui a accepté de juger mon travail.

Je suis aussi très reconnaissant à Monsieur Emmanuel DELALEAU, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest et Monsieur Wilfrid PERRUQUETTI, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, pour avoir accepté d'examiner mon travail.

C'est avec sympathie que je souhaite témoigner ma reconnaissance à Monsieur Yuri ORLOV, Professeur au CICESE Research Center, à Monsieur Mamadou MBOUP, Enseignant Chercheur à l'Université René Descartes - Paris V, et à Mademoiselle Yara BACHALANY Doctorante à l'Université des Sciences et Technologies de Lille pour les nombreuses discussions et collaborations que nous avons eu tout au long de mon doctorat.

J'aimerais exprimer aussi toute ma gratitude envers tous les membres du LAGIS et l'INRIA Lille-Nord Europe pour leur sympathie. Ils ont rendu très agréables ces trois années.

Bien sûr je souhaite aussi remercier les doctorants qui sont devenus plus que des collègues de travail, mes amis et ma famille.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction	5
1 Introduction aux systèmes mécaniques sous-actionnés	7
1.1 Modélisation mathématique des systèmes mécaniques	7
1.2 Systèmes mécaniques complètement actionnés	8
1.3 Systèmes mécaniques sous-actionnés, non holonomie	9
1.4 Quelques exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés	9
1.4.1 Le pendubot	10
1.4.2 L’acrobot	11
1.4.3 Le pendule de Furuta	12
1.4.4 Le pendule à roue inertielle	12
1.4.5 Le pendule (inversé) sur chariot	13
1.4.5.1 Modèle simplifié du pendule sur chariot	15
1.4.5.2 Modèle du pendule sur chariot en présence des frotte- ments et des perturbations	16
2 Commande de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène discontinue	21
2.1 Introduction	21
2.2 Commande quasi-homogène discontinue	23
2.3 Stabilisation robuste d’un manipulateur à un degré de liberté	28
2.4 Stabilisation locale des systèmes mécaniques sous-actionnés par com- mande quasi-homogène	29
2.4.1 Forme normale et stabilisation locale des systèmes mécaniques sous-actionnés	29
2.5 Stabilisation orbitale des systèmes mécaniques sous-actionnés par com- mande quasi-homogène	32
2.5.1 L’oscillateur de Van der Pol Modifié	33
2.5.2 Position du problème de la stabilisation orbitale	35
2.5.3 Conception du contrôleur	36
2.5.4 Synthèse du contrôleur par mode glissant du second ordre	37

3	Application au pendule inversé : simulations et expérimentations	41
3.1	Description du banc d'essai	41
3.2	Commande d'un moteur linéaire	43
3.2.1	Simulations	44
3.2.2	Expérimentations	46
3.3	Stabilisation locale d'un pendule inversé par commande quasi-homogène	52
3.3.1	Conception de la commande	53
3.3.2	Etude de la stabilité de la dynamique des zéros	54
3.3.3	Simulations numériques et expérimentations	55
3.4	Stabilisation orbitale du pendule inversé	57
3.4.1	Approche par passivité	57
3.4.1.1	Simulations	60
3.4.1.2	Résultats expérimentaux	62
3.4.2	Synthèse d'une stabilisation orbitale à l'aide d'un contrôleur quasi-homogène	64
3.4.2.1	Conception de la commande	65
3.4.2.2	Simulations numériques	67
3.5	Application au balancement et stabilisation du système pendule-chariot	68
3.5.1	Synthèse du contrôleur orbital	68
3.5.2	Expérimentations	69
4	Quelques contributions aux techniques algébriques	73
4.1	Introduction	73
4.2	Dérivation numérique : Rappels	74
4.3	Implémentation	76
4.4	Commande du pendule inversé avec estimation algébrique des vitesses : Résultats expérimentaux	78
4.5	Une méthode algébrique pour l'estimation des dérivées partielles d'un signal multidimensionnel	81
4.5.1	Introduction	81
4.5.2	Estimateurs basés sur un développement de Taylor vectoriel	85
4.5.2.1	Exemples introductifs	87
4.5.2.2	Une formule générale pour estimer $I_{x_i y_j}$	89
4.5.2.3	Un autre estimateur de I_{xy}	89
4.5.3	Simulations numériques	90
4.6	Conclusion	93
A	Systèmes homogènes à commutation	99
A.1	Rappel sur les inclusions différentielles	99
A.2	Inclusion différentielle homogène	102
A.3	Stabilité en temps fini des systèmes homogène à commutation	103

B Commande par modes glissants	107
B.1 Introduction	107
B.2 Etat de l'art	108
B.2.1 Commande par modes glissants d'ordre un	108
B.2.1.1 Généralités	108
B.2.1.2 Exemple illustratif	110
B.2.1.3 Le phénomène de réticence	111
B.2.2 Commande par modes glissants d'ordre supérieur	112
B.2.2.1 Concepts de base	112
B.2.2.2 Algorithmes par modes glissants d'ordre deux	114
B.2.2.3 Algorithmes par modes glissants d'ordre quelconque	115
Bibliographie	124
Table des figures	125

Introduction

Ce travail de doctorat a été préparé au sein de l'équipe SyNeR (Systèmes Non linéaires et à Retards) du Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS, UMR CNRS 8146) et de l'équipe-projet ALIEN (ALgèbre pour l'Identification et l'Estimation Numérique) de L'INRIA. Une grande partie de mon travail de recherche s'inscrit dans le cadre du projet ROBOCOOP, soutenu par le Conseil Régional Nord-Pas de Calais et l'Union Européenne et qui concerne le développement de robots autonomes et collaboratifs. Notre travail sera présenté en deux grandes parties : l'une concerne les aspects de commande de systèmes sous actionnés. Ce travail nous a amené à utiliser des techniques d'estimation (typiquement, obtenir la vitesse ou l'accélération d'un système mécanique à partir de la mesure de position). Parmi ces techniques, les techniques "algébriques" ont attiré notre attention et ont conduit à la seconde partie du mémoire. Il s'agit de généraliser ces techniques au cas de dérivation multidimensionnelle (dérivées partielles).

1^{re} partie : Le contrôle des systèmes mécaniques est un domaine de recherche très actif, du fait de leur forte présence dans la vie quotidienne. Bien que leur étude en tant qu'objets dynamiques ait débuté avec Newton, Euler et Lagrange au *XVI^e* et *XVII^e* siècles, la *commande* (au sens d'une structure rétroactive) des systèmes mécaniques industriels a vu le jour 150 ans plus tard avec l'invention du régulateur de Watt, permettant d'asservir la vitesse de rotation des machines à vapeur. Durant le siècle dernier, des applications scientifiques, industrielles et militaires ont motivé l'analyse rigoureuse et la conception de contrôle des systèmes mécaniques. Ces questions, d'origine pratique, ont vite révélé d'intéressants problèmes théoriques.

L'étude des systèmes mécaniques sous-actionnés est beaucoup plus récente. On peut citer le pendule inversé, le pendubot, comme exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés. Inspirés principalement de la structure du corps humain, les systèmes sous-actionnés admettent des degrés de liberté plus nombreux que les actionneurs. Le manque d'actionneur complique la tâche de commande de ce genre de systèmes : à notre connaissance, à part la commande par retour d'état basé sur un linéarisé du système, il existe peu de stratégies de commande conçues à la base des équations non linéaires assurant la stabilisation autour du point d'équilibre instable. Une première contribution de cette thèse est l'élaboration de lois de commande directement basées sur les équations non linéaires, qui conduisent à la garantie d'un domaine d'attraction quantifiable, ce qui n'est pas possible en général par le biais de modèles linéarisés par approximation (on sait que dans ce cas, seuls des résultats qualitatifs sont obtenus).

La commande de tels systèmes, lorsqu'on veut la mettre en pratique, se trouve confrontée à la présence inévitable de perturbations, notamment celles issues des phénomènes de frottements. Les forces de frottement ont des dynamiques compliquées souvent mal modélisées. Pour commander des systèmes perturbés mal modélisés, des techniques de commande à structure variables (par modes glissants) sont efficaces à condition que les perturbations et frottements vérifient une condition dite de recouvrement (*matching condition* en anglais).

Si on s'intéresse à la commande des systèmes sous-actionnés, la tâche est plus difficile : en effet, la présence de frottements sur les parties non actionnées ne satisfait pas cette condition de recouvrement. On proposera ici une commande à structure variable dite quasi-homogène, permettant de rejeter les perturbations satisfaisant la condition de recouvrement sur une sortie fictive permettant de découpler le système par rapport aux entrées de commande. Il s'agit ensuite de trouver une lois de commande forçant cette sortie à zéro tout en garantissant la stabilité de la dynamique des zéros.

On montre sur l'exemple du pendule inversé que la méthodologie proposée permet, via des paramètres de commande à régler, de diminuer l'effet des perturbations et frottements ne satisfaisant pas la condition de recouvrement. A notre connaissance ce problème n'avait pas été traité dans la littérature.

2^{ieme} partie : La deuxième partie de cette thèse parle de techniques de différenciations qui sont de nature algébrique. On rappellera les concepts de base de ces nouvelles techniques rapides de dérivation. On présentera tout d'abord des résultats expérimentaux de la commande d'un pendule inversé avec estimation algébrique des vitesses connaissant les positions respectives. Ensuite, nous proposerons une extension multidimensionnelle de ces techniques de dérivation, *i.e.* des techniques d'estimation des dérivées partielles d'une fonction multidimensionnelle. Ces techniques peuvent être appliquées en traitement d'image par exemple, ce que nous laisserons au titre de perspectives.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans ce chapitre, on présente les systèmes mécaniques sous-actionnés et on rappelle les concepts permettant de concevoir un modèle mathématique décrivant les dynamiques.

1.1 Modélisation mathématique des systèmes mécaniques

Afin de pouvoir modéliser un système mécanique par des équations mathématiques, on commence par choisir un ensemble de coordonnées permettant de le décrire. Ces coordonnées sont généralement nommées coordonnées généralisées. Cette dénomination provient de l'époque où l'utilisation des coordonnées cartésiennes était la plus naturelle. L'intérêt du choix des coordonnées généralisées réside dans la simplification de la démarche de la modélisation puis de l'analyse de ces systèmes. Une fois les coordonnées généralisées choisies, on peut procéder de deux manières :

- Soit on fait une étude des forces agissant sur le système, et on applique la seconde loi de la dynamique de Newton, disant que la somme des forces appliquées est égale à la masse multipliée par l'accélération.
- Soit on étudie les différentes énergies échangées par le système, puis on exprime le lagrangien avant d'appliquer la formule d'Euler-Lagrange.

Cette deuxième méthode, en général plus simple à mettre en œuvre, est décrite dans ce qui suit.

Considérons un système mécanique composé de corps solides non déformables. Deux types d'énergie interviennent : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le lagrangien est la somme (au signe près) de ces deux quantités. Plus concrètement, si q représente le vecteur des coordonnées généralisées de dimension n , E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle, le lagrangien (l'énergie mécanique globale) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - E_p(q), \quad (1.1)$$

où $M(q)$ est la matrice d'inertie, définie positive.

Les équations différentielles décrivant la dynamique d'un système mécanique sont obtenues par application de l'équation d'Euler-Lagrange donnée par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F(q)u, \quad (1.2)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des forces externes et $F(q) = (f_1(q), \dots, f_m(q))$ est la matrice correspondante, qui répartit les forces sur le système. Les équations du mouvement dérivent de (1.2) et sont données par :

$$\sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)u, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

où, e_k est la base standard de \mathbb{R}^n , $g_k(q) = \partial_{q_k} E_p(q)$, m_{kj} sont les éléments de matrice d'inertie et $\Gamma_{ij}^k(q)$ sont les symboles de Christoffel définis par :

$$\Gamma_{ij}^k(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right). \quad (1.4)$$

L'écriture de la formule précédente sous une forme vectorielle donne :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u, \quad (1.5)$$

où $M(q)$ est la matrice d'inertie et $C(q, \dot{q})$ est une matrice composée des éléments :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i(q)\dot{q}_k. \quad (1.6)$$

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ contient deux types d'éléments. Ceux qui font intervenir les produits $\dot{q}_i\dot{q}_j$ pour $i = j$ sont appelés forces centrifuges. Ceux qui correspondent aux indices $i \neq j$ sont les forces de Coriolis. Le vecteur $G(q)$ représente les forces de gravité. Une propriété intéressante des systèmes mécaniques est que la matrice $S_0 = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ est antisymétrique. Cette propriété est utilisée par exemple pour démontrer la passivité de ces systèmes (voir [LF98]).

1.2 Systèmes mécaniques complètement actionnés

Considérons le système (1.5). Ce système mécanique est dit complètement actionné si le nombre des entrées de commande est égal au nombre de degrés de liberté : $\text{rang } B(q) = m = n$ ou, autrement dit, $B(q)$ est une matrice carrée inversible. Par conséquent, les systèmes mécaniques complètement actionnés sont linéarisables par retour d'état statique (*i.e.* ils n'admettent pas une dynamique des zéros [Isi95]). Ceci peut être montré en appliquant le contrôle suivant :

$$u = B(q)^{-1}(M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)). \quad (1.7)$$

On obtient un double intégrateur $\ddot{q} = v$ et on peut appliquer les concepts de l'automatique linéaire classique. Ceci signifie que le contrôle des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans perturbation ne pose pas de défis en termes de contrôle.

Dans la suite, on introduit les systèmes mécaniques sous-actionnés et on montre que la linéarisation par bouclage statique n'est plus possible pour toute la dynamique du système.

1.3 Systèmes mécaniques sous-actionnés, non holonomie

Un système mécanique est dit sous-actionné s'il admet moins d'actionneurs que de degrés de liberté, soit : $\text{rang } B(q) = m < n$. Cette restriction empêche une linéarisation par bouclage statique de la dynamique complète du système.

Supposons par exemple que $B(q) = (0, I_m)^T$. Alors, les $(n - m)$ premières équations de (1.5) peuvent chacune être exprimées par des équations différentielles du second ordre de la forme :

$$\varphi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0. \quad (1.8)$$

Cette égalité contient les forces de Coriolis, centrifuge et de gravité. En tenant compte de (1.5), la forme générale des équations dynamiques des systèmes sous-actionnés peut être donnée par :

$$M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = 0 \quad (1.9)$$

$$M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = B(q)u. \quad (1.10)$$

Dans [SP95], les auteurs ont montré que la partie actionnée du système (de dimension m) peut être linéarisée. Cette procédure, appelée linéarisation partielle par bouclage statique, simplifie les dynamiques, facilite la manipulation des équations et la synthèse des lois de commande. En appliquant :

$$u = B^{-1}(q) \left(\left(M_{22}(q) - \frac{M_{12}(q)M_{21}(q)}{M_{11}(q)} \right) v - \frac{M_{21}(q)}{M_{11}(q)} C_1(q, \dot{q}) - \frac{M_{21}(q)}{M_{11}(q)} G_1(q) + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) \right) \quad (1.11)$$

à (1.10), on obtient :

$$\begin{aligned} M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) &= 0 \\ \ddot{q}_2 &= v. \end{aligned}$$

1.4 Quelques exemples de systèmes mécaniques sous-actionnés

Dans ce mémoire, nous ne considérerons que des systèmes mécaniques sous-actionnés ayant deux degrés de liberté dont, évidemment, l'un est actionné et l'autre pas. On ne s'intéresse pas aux systèmes ayant plus que deux degrés de liberté comme par exemple le robot marcheur [CAA⁺03] et le robot $2k\pi$ [LMR98]. Le pendule inversé, le pendubot, l'acrobot, le pendule de Furuta et le pendule à roue inertielle en sont des exemples. Nous présenterons brièvement dans cette section chacun de ces systèmes, puis nous présenterons plus en détail le système pendule-chariot (ou pendule inversé) qui nous

servira d'exemple d'application des lois de commande qui seront développées dans la suite du mémoire. Notons que ces lois de commande peuvent aussi être appliquées aux autres systèmes.

Afin de faciliter la modélisation de ces systèmes, on considèrera que les pendules admettent des masses ponctuelles localisées à leurs extrémités, c'est-à-dire qu'on supposera que l'on s'est déjà ramené à un système où les tiges ont des masses nulles. Ceci conduit à des équations plus compactes et facilite l'étude des propriétés structurelles par la suite. La seule exception sera le pendule inversé pour lequel on élaborera un modèle plus réaliste tenant en compte des différentes forces de frottement et de perturbation, ainsi que des propriétés géométriques et statiques (centre de gravité, moments d'inertie...) de la tige du pendule. Cette démarche complète vise à synthétiser des contrôleurs qui, après validation en simulation, seront implémentés sur un pendule inversé réel.

1.4.1 Le pendubot

Le pendubot, représenté dans la figure 1.1, est constitué de deux tiges qui peuvent tourner autour de leurs axes respectifs. La tige 1, de masse m_1 et de longueur l_1 , est actionnée par un couple de contrôle τ tandis que la tige 2, de masse m_2 et de longueur l_2 , est en rotation libre autour de la tige 1.

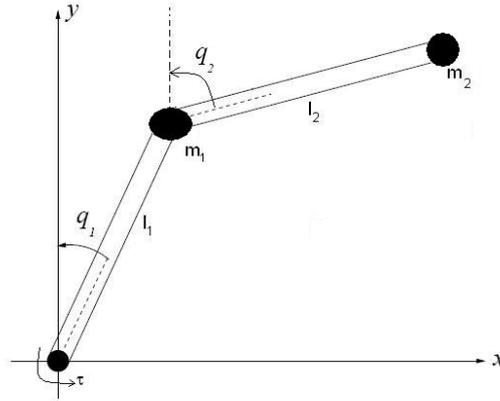


FIGURE 1.1 – Le pendubot en coordonnées généralisées.

A vitesse nulle, le pendubot admet une infinité de points d'équilibre instables donnés par $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = q_2 = 0, q_1 = cte$ correspondant à la position haute de la tige 2 pour toute position de la première tige, et une infinité de points d'équilibre stables donnés par $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0, q_2 = \pi$, correspondant à la position basse de la tige numéro 2. Le lagrangien et les équations dynamiques du mouvement sont donnés par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{q}_2^2 + 2m_2l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) + m_1gl_1(\cos q_1 - 1) + m_2g(l_1(\cos q_1 - 1) + l_2(\cos q_2 - 1)) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
 m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_2 \sin q_2 &= 0 \\
 (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 &= \tau.
 \end{aligned}$$

En examinant l'équation précédente, il est facile de retrouver les matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, $G(q)$ de (1.5).

1.4.2 L'acrobot

L'acrobot est similaire au pendubot [Spo95] à la différence que c'est l'articulation joignant les 2 tiges qui est actionnée par un couple τ (voir figure 1.2). Le lagrangien est donné par (1.12) et les équations dynamiques du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned}
 m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_2 \sin q_2 &= \tau \\
 (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 &= 0,
 \end{aligned}$$

où m_1 , l_1 , m_2 , et l_2 sont respectivement les masses et longueurs des tiges 1 et 2, τ est le couple de commande.

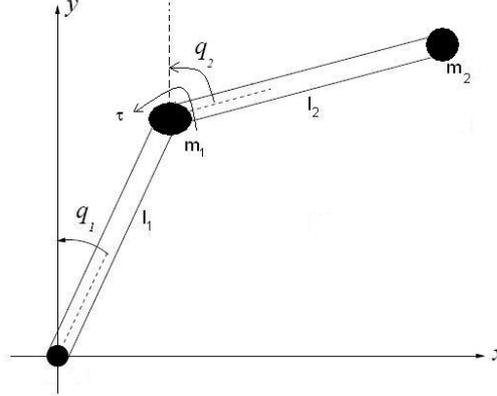


FIGURE 1.2 – L'acrobot en coordonnées généralisées.

L'acrobot admet aussi une infinité de points d'équilibre stables et instables. L'ensemble des points d'équilibre instables correspond aux positions où la verticale passant par le centre de gravité (ce dernier étant dans le demi-plan supérieur) du système global passe aussi par l'axe de rotation de la tige 1. Les positions d'équilibres stables sont identiques aux points instables, la seule différence étant que le centre de gravité est dans le demi-plan inférieur. Un simple calcul des moments d'ordre 1 des 2 masses ponctuelles m_1 et m_2 par rapport à l'axe de rotation de la tige numéro 1 donne $m_1 l_1 \sin(q_1) = m_2 l_2 \sin(q_2)$, correspondant aux points d'équilibres.

1.4.3 Le pendule de Furuta

Le pendule de Furuta a été conçu par K. Furuta [FYKN92] pour contrer le handicap de la course limitée (en translation horizontale) du pendule inversé classique. Le bras actionné en rotation dans le plan horizontal permet une course infinie (voir figure 1.3), ce qui facilite la conception du contrôle. A l'autre extrémité du bras vient s'ajouter un pendule libre en rotation dans le plan vertical orthogonal au bras. Le lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J_p\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(J_b + J_p \sin^2 q_2)\dot{q}_1^2 - m_p l r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 - m_p g r (\cos q_2 - 1) \quad (1.13)$$

Les équations dynamiques du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} -m_p l r \cos q_2 \ddot{q}_1 + J_p \ddot{q}_2 - J_p \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_1^2 - m_p g r \sin q_2 &= 0 \\ (J_b + J_p \sin^2 q_2) \ddot{q}_1 - m_p l r \cos q_2 \ddot{q}_2 + 2J_p \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_2 + m_p l r \sin q_2 \dot{q}_2^2 &= \tau, \end{aligned}$$

où J_p et J_b représentent les moments d'inertie du pendule et du bras respectivement, m_p la masse du pendule, l et r les longueurs respectives du bras et du pendule. Les positions d'équilibre stable (instables) correspondent à $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, $q_2 = \pi$).

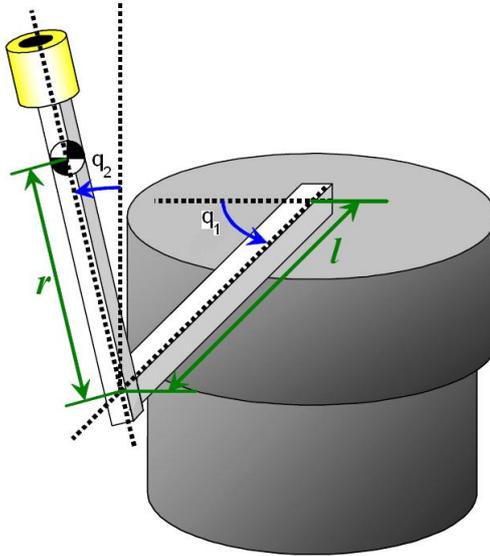


FIGURE 1.3 – Le pendule de Furuta en coordonnées généralisés.

1.4.4 Le pendule à roue inertielle

Le pendule à roue inertielle, représenté sur la figure 1.4, est constitué d'un pendule libre en rotation autour d'un axe lié au sol, l'autre extrémité du pendule étant reliée à un disque actionné qui ne peut que tourner. Le lagrangien est donné par :

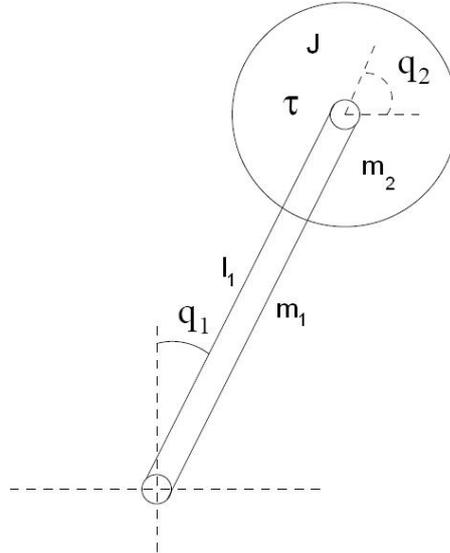


FIGURE 1.4 – Le pendule à roue inertielle en coordonnées généralisées.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_2^2 + (m_1 + m_2)gl(\cos q_1 - 1).$$

La dynamique est décrite par :

$$\begin{aligned} [(m_1 + m_2)l^2 + J]\ddot{q}_1 + J\ddot{q}_2 - (m_1 + m_2)gl \sin q_1 &= 0 \\ J\ddot{q}_1 + J\ddot{q}_2 &= \tau, \end{aligned}$$

où m_1 , m_2 , l , et J représentent respectivement la masse du pendule, la masse du disque, la longueur du pendule et l'inertie du disque. Les points d'équilibre stables (respectivement, instables) correspondent à $q_1 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ (respectivement, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, $q_1 = \pi$).

1.4.5 Le pendule (inversé) sur chariot

Nous présentons ici le pendule inversé sur chariot (également appelé système chariot-pendule ou *cart-pendulum system*), en rentrant plus dans les détails que pour les systèmes précédents. En effet, ce système nous servira de banc d'essai pour simuler et implémenter les lois de commande qui seront développées dans le chapitre suivant. On présentera deux modèles : le premier est simplifié et servira à l'étude des propriétés structurelles du système puis à l'élaboration des lois de commande. Le second modèle est plus réaliste et servira en simulation numérique, pour bien choisir les paramètres des contrôleurs qui seront par la suite implantés sur le pendule inversé réel que nous avons développé au LAGIS.

Le pendule inversé est un système classique très intéressant et largement étudié dans la communauté automatique, vu sa nature non linéaire et instable. Il a toujours

constitué un défi intéressant pour le contrôle et a servi à la compréhension des notions de l'automatique comme à l'élaboration des lois de commande. Par ailleurs, son principe se retrouve dans plusieurs applications de véhicules légers (par exemple le Segway ou le B2).

Mais qu'est-ce qu'un pendule inversé ?

Souvenez vous quand vous étiez petit et que vous essayiez de tenir en équilibre une tige sur votre doigt. Vous deviez en permanence ajuster la position de votre main pour stabiliser la tige. Le pendule inversé fait la même chose, la seule différence étant que son support (le chariot) se translate dans une seule direction, alors que le doigt se déplace dans toutes les directions.

Depuis 1950, les pendules inversés sont des plates-formes d'expérimentation classiques dans les laboratoires d'automatique. Ils ont été utilisés pour illustrer des idées de commande linéaire comme la stabilisation des systèmes instables (voir par exemple [MSW81] et [MFU90]). Vu leur nature non linéaire, les pendules sont aussi utilisés pour illustrer des idées émergeant du contrôle non linéaire. Des exemples typiques sont la stabilisation par retour de sortie, la commande par passivité [FGHP95], les techniques *backstepping* et *forwarding* [KKK94], la commande robuste à structure variable [ROF⁺07] [SFO⁺07]. Plusieurs études de cas ("*task oriented controls*") ont concerné le balancement de bas en haut et le rattrapage [FYK92] [YNSF94] [Spo95] [SP95] [CH95] [YISF95] [WDL95] [LF98].

Le pendule inversé que nous considérons est composé de deux éléments Fig.1.5 :

- un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage,
- un pendule pesant solidaire du chariot et libre en rotation.

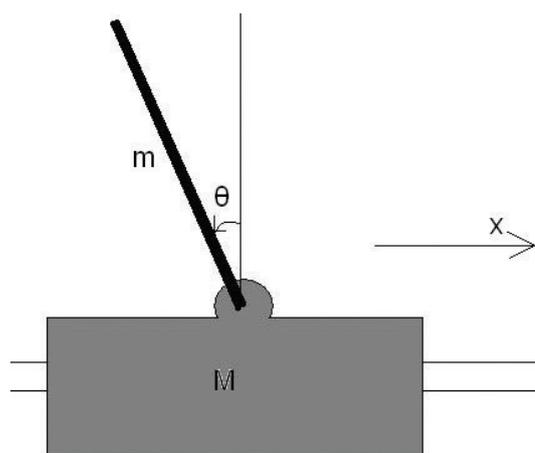


FIGURE 1.5 – Le pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ .

1.4.5.1 Modèle simplifié du pendule sur chariot

Afin de pouvoir écrire les équations dynamiques régissant le mouvement du pendule inversé, on considère les coordonnées généralisés $q_1 = x$ et $q_2 = \theta$, où x représente la position mesurée du chariot sur son rail et θ la position angulaire de la tige, également mesurée. L'énergie mécanique globale (1.1) est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} + mgl(\cos \theta - 1). \quad (1.14)$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange (1.2), on obtient les équations dynamiques suivantes :

$$(M + m)\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = \tau, \quad (1.15)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml \cos \theta \ddot{x} - mgl \sin \theta = 0. \quad (1.16)$$

Dans les équations précédentes, M et m sont respectivement les masses du chariot et du pendule, l est la distance du centre de gravité du pendule à son axe de rotation, g est la constante de gravitation, τ est l'entrée de commande (par exemple, dans la plate-forme que nous avons développée, τ est la force exercée par un moteur linéaire).

La matrice d'inertie $M(q)$ est donnée par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

La matrice des effets centrifuge et de Coriolis $C(q, \dot{q})$ est donnée par :

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

La matrice de pesanteur $G(q)$ est donnée par :

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Enfin, le vecteur d'entrée est donné par :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Rappelons que la matrice d'inertie est définie positive, donc inversible. Par inversion, on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(-mgl \cos \theta + ml^2 \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \\ \dot{\theta} \\ \frac{((M+m)g - ml \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{D} \\ 0 \\ -\frac{\cos \theta}{D} \end{bmatrix} \tau, \quad (1.20)$$

avec $D = l(M + m \sin^2 \theta) > 0$.

Ce système admet une infinité de points d'équilibre caractérisés par $\dot{x} = \dot{\theta} = 0$, $\theta = \{0, \pi\}$ modulo 2π et ceci pour tout x . Les points d'équilibre correspondant à $\theta = 0$ modulo 2π , où 0 est la position verticale haute du pendule, sont instables; ceux correspondants à $\theta = \pi$ modulo 2π sont stables.

Le système linéarisé tangent autour de la position d'équilibre instable est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \tau.$$

Cette forme sera utilisée dans le chapitre 3 pour concevoir un retour d'état statique afin de pouvoir stabiliser le système à sa position d'équilibre instable. Ce retour d'état servira de référence pour évaluer les performances d'un contrôleur par modes glissants du second ordre construit à partir des équations non linéaires (1.20).

1.4.5.2 Modèle du pendule sur chariot en présence des frottements et des perturbations

Dans cette partie, on présente une modélisation plus détaillée du pendule sur chariot. Dans la section précédente, on a considéré que la masse du pendule était concentrée au bout de la tige, c'est-à-dire que la tige du pendule était de masse nulle. Ceci a donné une forme plus compacte qui simplifiera les manipulations des équations puis l'exploration de propriétés structurelles du système. Par contre, si on s'intéresse à la modélisation dans le but de pouvoir synthétiser un contrôle puis l'appliquer à un pendule inversé réel, il faut, dans la mesure du possible, tenir compte de tous les détails de la mécanique du système réel.

Pour cela, on considère dans cette section que la tige du pendule a une masse non négligeable. Un deuxième obstacle inévitable en pratique est la présence de forces de frottement et de perturbations. On considère la présence des forces de frottement et des perturbations sur l'axe de translation du chariot ainsi que sur l'axe de rotation du pendule.

Notons qu'à notre connaissance, cette prise en compte des forces de frottement et des perturbations sur la rotation du pendule n'a pas été traitée dans la littérature. Ceci constitue une des contributions de cette thèse. Notons également que les frottements et les perturbations sur la rotation de la tige ne satisfont pas la condition de recouvrement ('*matching condition*') classiquement souhaitée en commande grand gain (voir annexe).

On considère que le pendule est constitué d'une tige de masse m_t et d'une masse ponctuelle m_p attachée à l'extrémité de la tige (voir figure 1.6).

Dans la suite de la modélisation, on aura besoin des coordonnées du centre de gravité de la tige ainsi que de son moment d'inertie. Le moment d'inertie J_O d'un corps solide (voir figure 1.7) par rapport à un point O est donné par :

$$J_O = \int_V r^2 dm, \quad (1.21)$$

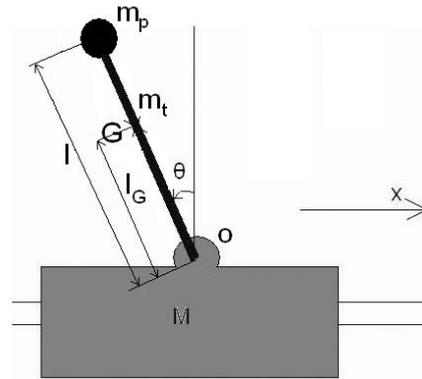


FIGURE 1.6 – Schéma plus réaliste du pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ .

où r , dm et V sont représentés dans la figure 1.7.

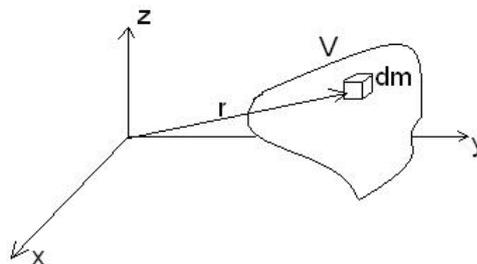


FIGURE 1.7 – Un corps solide en coordonnées cartésiennes.

En appliquant (1.21) au pendule de la figure 1.6 et en tenant compte des symétries du pendule, le moment d'inertie du pendule par rapport à son centre de gravité G est donné par :

$$J_G = J_{G\text{-tige}} + J_{G\text{-masseponctuelle}} = \frac{m_t l^2}{12} + m_p l^2,$$

où l est la longueur de la tige.

La distance entre le centre de gravité G du pendule et l'axe de rotation O est donnée par :

$$l_G = \frac{m_t \frac{l}{2} + m_p l}{M},$$

où M est la masse totale du pendule :

$$M = m_t + m_p.$$

Nous sommes maintenant prêts à écrire l'expression du lagrangien :

$$E = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(J_G + ml_G^2)\dot{\theta}^2 + ml_G \cos \theta \dot{\theta} \dot{x} + mgl_G(\cos \theta - 1)$$

où $m = m_p$.

En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange (1.2), on obtient les équations dynamiques :

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml_G\dot{\theta}^2 \sin \theta - ml_G\ddot{\theta} \cos \theta &= \tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t), \\ (J_G + ml_G^2)\ddot{\theta} - ml_G\ddot{x} \cos \theta - mgl_G \sin \theta &= -\varphi(\dot{\theta}) + \omega_2(t). \end{aligned}$$

Dans ces équations, τ est l'entrée de commande (la force exercée par le moteur), $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ sont des termes incertains bornés tenant compte des dynamiques mal modélisées ainsi que des perturbations externes. $\psi(\dot{x})$ et $\varphi(\dot{\theta})$ sont respectivement les efforts de frottement (de Coulomb et visqueux) du chariot et du pendule et sont modélisés comme suit :

$$\psi(\dot{x}) = \psi_{Dahl}(\dot{x}) + \psi_v \dot{x}, \quad (1.22)$$

et

$$\varphi(\dot{\theta}) = \varphi_{Dahl}(\dot{\theta}) + \varphi_v \dot{\theta}.$$

où ψ_v et φ_v sont les coefficients de frottement visqueux. Dans ce qui suit, le développement du contrôleur requiert que les perturbations inconnues et les efforts de frottement soient différentiables. Ainsi, il est supposé que l'évolution du frottement de Coulomb est décrit par le modèle de Dahl suivant :

$$\dot{\psi}_{Dahl}(\dot{x}) = \sigma_x \left[\dot{x} - \frac{\psi_{Dahl}(\dot{x})}{\psi_c} |\dot{x}| \right],$$

et

$$\dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}) = \sigma_\theta \left[\dot{\theta} - \frac{\varphi_{Dahl}(\dot{\theta})}{\varphi_c} |\dot{\theta}| \right].$$

où σ_x et σ_θ sont les coefficients de rigidité, alors que ψ_c et φ_c représentent respectivement la force de frottement de Coulomb sur le chariot (moteur linéaire) et le couple de frottement de Coulomb sur le pendule (axe de rotation). Les équations peuvent être mises sous une forme générale inspirée de (1.5) et donnée par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = B(q)u, \quad (1.23)$$

avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M + m & -ml_G \cos \theta \\ -ml_G \cos \theta & J_G + ml_G^2 \end{bmatrix};$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & ml_G \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl_G \sin \theta \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \psi(\dot{x}) - \omega_1(t) \\ \varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t) \end{bmatrix}.$$

Après quelques manipulations mathématiques, la représentation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{(m^2 g l_G^2 \cos \theta - m l_G J_G \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(m(M+m)g l_G - m^2 l_G^2 \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J_G}{D} \\ 0 \\ \frac{m l_G \cos \theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t)) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m l_G \cos \theta}{D} \\ 0 \\ \frac{(M+m)}{D} \end{bmatrix} (\varphi(\dot{\theta}) - \omega_2(t))$$

avec $D = J_G(M + m) - m^2 l_G^2 \cos^2 \theta > 0$. En examinant (1.24), on peut déduire que $\varphi(\dot{\theta})$ et $\omega_2(t)$ sont des frottements et des perturbations ne satisfaisant les conditions de recouvrement (*non-matching* en anglais, voir annexe), c'est-à-dire qu'elles n'agissent pas dans les mêmes directions que les entrées de commande. On verra qu'un bon réglage des paramètres du contrôleur permet de diminuer leurs effets, même si la convergence asymptotique n'est pas obtenue.

Remarque 1.4.1. *Le pendule à roue inertielle et l'acrobot sont, parmi les exemples qu'on a cités, les seuls à avoir une matrice de commandabilité admettant un rang constant.*

Chapitre 2

Commande de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène discontinue

2.1 Introduction

La commande des systèmes mécaniques sous-actionnés constitue un domaine passionnant pour les automaticiens, présentant plusieurs types de problèmes, et pouvant chacun faire appel à des techniques de contrôles différentes [dN88], [Ane03], [OS01]. A titre d'exemple on peut citer :

- La stabilisation locale en un point d'équilibre. Elle consiste à stabiliser la partie non actionnée en sa position d'équilibre instable, et la partie actionnée en une position finale désirée partant de conditions initiales suffisamment proche de l'équilibre désirée.
- La stabilisation orbitale où le système en boucle fermée auto-génère une orbite périodique.
- La stabilisation globale qui consiste à amener la partie non actionnée de n'importe quelles conditions initiales à la position d'équilibre instable et la partie actionnée à une position finale désirée.
- La poursuite de trajectoire qui consiste, par exemple, à maintenir la partie non actionnée proche de la position d'équilibre instable et à forcer la partie actionnée à suivre une trajectoire donnée. On peut imaginer que le pendule inversé fait le rôle d'un serveur. Il (le pendule) a pour mission de se déplacer d'un point A à un point B tout en maintenant un plateau (posé au bout de la tige) en équilibre.

Lorsqu'on parle de stabilisation locale, on pense habituellement à une linéarisation du système autour de l'équilibre désiré suivie de la synthèse d'un retour d'état statique linéaire. Cette démarche a deux désavantages :

- La commande synthétisée à la base des équations linéarisées a un domaine d'attraction restreint.
- La présence inévitable des forces de frottements engendre si on utilise un retour

d'état statique linéaire, des cycles limites se traduisant par des oscillations du système autour de la position d'équilibre désirée.

Une des contributions de cette thèse est la construction d'un contrôleur local, sur la base des équations non linéaires, admettant un domaine d'attraction beaucoup plus grand que le linéarisé. On verra que dans le cas du pendule inversé, le domaine d'attraction du contrôleur construit est le demi-plan supérieur si on ne considère pas des limitations sur la course du chariot. Une deuxième contribution est la prise en compte des efforts de frottements et des perturbations sur les parties actionnées et non actionnées du système. A notre connaissance, le fait de considérer des frottements et des perturbations sur la partie non actionnée n'a pas été (ou très peu) traité dans la littérature. On montre que la loi de commande développée est insensible aux frottements agissant sur la partie actionnée. En plus, on montre sur l'exemple du pendule inversé qu'un bon choix des paramètres du contrôleur non linéaire entraîne une diminution des effets des perturbations agissant sur la partie non-actionnée et, en conséquence, des cycles limites.

La stabilisation orbitale est un problème intéressant pour certaines classes de systèmes sous-actionnés comme par exemple les robots marcheurs [CAA⁺03]. Le fait de forcer le système en boucle fermée à générer une orbite périodique peut servir par exemple à reproduire la marche humaine. Dans [SF01], la stabilisation orbitale a été largement discutée d'un point de vue théorique et appliqué. Dans [LF98], [SF01] et [SPLE00], la stabilisation d'un pendule inversé sur son orbite homocline (qui sera détaillée ultérieurement) a été faite dans le but d'amener le pendule suffisamment proche de sa position d'équilibre instable pour ensuite commuter vers un contrôleur assurant la stabilité localement. On peut montrer (voir [SPLE00]) qu'il n'existe pas de contrôleur continu et indépendant du temps qui stabilise globalement certains systèmes sous actionnés comme par exemple le pendule inversé, le pendubot ou le pendule de Furuta. Il paraît donc raisonnable de penser aux stratégies hybrides. L'idée est donc de concevoir un contrôleur assurant la génération d'un mouvement périodique en boucle fermée telle que la position d'équilibre instable désirée deviennent un point ω -limit du système bouclé. Autrement, la partie non actionnée du système oscille sur l'orbite homocline.

Il est essentiel de noter qu'en présence de frottement sur la partie non actionnée, il est impossible d'atteindre l'orbite homocline. D'autre part, la stabilisation orbitale des systèmes sous-actionnés à 2 degrés de liberté n'a pas d'intérêt en elle-même si ce n'est de se rapprocher du point d'équilibre instable et d'entrer dans le domaine d'attraction d'un contrôleur local. Vue la présence inévitable des forces de frottements, on propose ici un contrôleur robuste aux frottements et assurant la génération d'un mouvement périodique du système en boucle fermée. Nos deux outils principaux sont une modification de l'oscillateur de Van der Pol (qui servira de générateur de la trajectoire de référence qui est un mouvement harmonique) et une commande non linéaire dite quasi-homogène (assurant une poursuite robuste de la trajectoire de référence). Il sera dédié à forcer les états du système à entrer dans le domaine d'attraction d'un contrôleur local.

Afin d'assurer la robustesse déjà discutée, tant pour le contrôleur local qu'orbital, les contrôleurs utilisés sont basés sur des techniques dites par modes glissants. On introduit la commande quasi-homogène du second ordre qui constitue un algorithme par modes glissants du second ordre. On discute de la stabilité en temps fini et de la robustesse.

tesse de cette technique de commande dans la première partie de ce chapitre. Dans la deuxième partie, cette technique sera utilisée pour la stabilisation locale des systèmes sous-actionnés. Dans la troisième partie, la commande quasi-homogène sera utilisée pour résoudre le problème de la stabilisation orbitale des systèmes sous-actionnés.

2.2 Commande quasi-homogène discontinue

La commande quasi-homogène fait partie des commandes par modes glissants, plus précisément les modes glissants du second ordre. Pour une brève introduction aux modes glissants voir annexe 2. La commande quasi-homogène possède donc les avantages des modes glissants. Citons à titre d'exemple la robustesse de la commande vis-à-vis des perturbations satisfaisant la condition de recouvrement (voir annexe 2) ainsi que la propriété de convergence en temps fini sur une surface de glissement prédéfinie. Toutefois, la commande quasi-homogène appliquée à un système de degré relatif $\rho \geq 2$ souffre également du problème essentiel des modes glissants qui est la réticence, se traduisant par des commutations à haute fréquence de la commande lorsqu'on atteint la surface de glissement (phénomène pouvant être très nuisible aux actionneurs).

Dans la suite, on définit la commande quasi-homogène et on donne un exemple d'un système quasi-homogène du second ordre. On présente une étude sur la stabilité en temps fini des systèmes quasi-homogènes et en particulier celle du système (quasi-homogène) du second ordre. Ensuite, on étudie la robustesse vis-à-vis des perturbations satisfaisant la condition de recouvrement. Enfin, on l'applique à la commande d'un manipulateur mécanique actionné (bras de robot, moteur..) et dans les sections suivantes à la commande des systèmes mécaniques sous-actionnés.

Définition 2.2.1. *Un système d'équations différentielles est dit quasi-homogène si et seulement si il peut être représenté comme une combinaison d'une fonction de l'état homogène discontinue et d'une partie linéaire.*

Exemple : Soit le système donné par

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -a \operatorname{sign}(s_1) - b \operatorname{sign}(s_2) - hs_1 - ps_2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

où a , b , h , p sont des constantes positives. Pour tout $\alpha > 0$, on a $-a \operatorname{sign}(\alpha s_1) - b \operatorname{sign}(\alpha s_2) = -a \operatorname{sign}(s_1) - b \operatorname{sign}(s_2)$, d'où la dénomination quasi-homogène. On verra dans la suite que pour un certain choix des paramètres a , b , h , et p la solution $(s_1(t), s_2(t))$ de (2.1) converge vers $(0, 0)$ en un temps fini. Le second membre de (2.1) contient des fonctions *signes*, donc discontinues. La solution des équations différentielles à second membre discontinu est définie au sens de Filippov c'est-à-dire dans le cadre des inclusions différentielles. Un bref rappel sur les inclusions différentielles peut être trouvé en annexe 1 où sont donnés les définitions et concepts de solution d'équations différentielles continues par morceaux, des définitions sur les inclusions différentielles homogènes (dont (2.1) est un exemple), et une étude sur la stabilité en temps fini des inclusions différentielles homogènes.

Pour aborder l'étude de la stabilité en temps fini des systèmes quasi-homogènes, on rappelle un résultat de [Orl05]. On considère les systèmes non autonomes à commutations modélisés par :

$$\dot{x} = \varphi(x, t) + \psi(x, t), \quad (2.2)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $t \in \mathbb{R}$ est le temps, la fonction $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_n(x, t))^T$ est continue par morceau. Puisque notre objectif est de commander des systèmes mécaniques où la présence de perturbations est inévitable, on représente les perturbations par une fonction vectorielle ψ continue par morceaux dont les composantes ψ_1, \dots, ψ_n sont localement uniformément bornées dans une boule B_δ centrée à l'origine et de rayon δ i.e.,

$$|\psi_i(x, t)| \leq M_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

pour tout $(x, t) \in B_\delta \times \mathbb{R}$ et $M_i \geq 0$, fixé à priori.

Théorème 2.2.2. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *Le terme de droite de l'équation différentielle incertaine (2.2) consiste en une fonction φ continue par morceau, localement homogène de degré négatif q par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) et d'une fonction ψ , continue par morceau, dont les composantes ψ_i , $i = 1, \dots, n$ sont localement équi-uniformément bornées par des constantes $M_i \geq 0$;*
- *$M_i = 0$ quand $q + r_i > 0$;*
- *$x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement équi-uniformément asymptotiquement stable de (2.2) en présence de fonctions ψ_i satisfaisant (2.3).*

Alors, l'équation différentielle incertaine (2.2), (2.3) est globalement équi-uniformément stable en temps fini.

Pour les définitions de fonctions continues par morceaux, de stabilité équi-uniforme, et la preuve du théorème précédent on renvoie à l'annexe 1.

Dans cette thèse, on ne s'intéressera qu'aux systèmes homogènes à commutations du second ordre. Dans la suite, on considère tout d'abord le système (2.1) sans la partie continue c'est-à-dire pour $h = p = 0$, et on étudie la stabilité en temps fini en fonction du choix des paramètres a et b . Ensuite, on considère (2.1) en rajoutant des perturbations, et on montre que par un choix adéquat des paramètres a , b , h et p , on peut assurer une stabilité en temps fini. On termine cette section par une description qualitative de la trajectoire d'un système quasi-homogène du second ordre dans le plan de phase.

On considère le système du second ordre à commutation de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 \\ \dot{s}_2 &= -a \operatorname{sign}(s_1) - b \operatorname{sign}(s_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vue la présence des fonctions signes, les solutions de ce système sont définies au sens de Filippov [Fil88]. D'après la définition A.1.1, ces solutions sont indépendantes de la valeur de la fonction sur les lignes de commutations $s_1 = 0$ et $s_2 = 0$. Pour cela il n'est pas nécessaire de spécifier (2.4) en $s_1 = 0$ et $s_2 = 0$.

Théorème 2.2.3. *Supposons que les paramètres du système à commutation (2.4) satisfont la condition*

$$a > b > 0. \quad (2.5)$$

Alors le système (2.4) est globalement uniformément stable en temps fini autour de l'origine.

Preuve. Montrons tout d'abord que le système (2.4) est globalement uniformément asymptotiquement stable. Pour cela, considérons la fonction $V(s_1, s_2) = a|s_1| + \frac{1}{2}s_2^2$, qui est continue, radialement non bornée, et définie positive. La dérivée temporelle $\dot{V}(s_1(t), s_2(t))$ calculée le long des trajectoires du système (2.4) est donnée par

$$\dot{V}(s_1(t), s_2(t)) = -b|s_2(t)|, \quad (2.6)$$

partout à l'exception de l'axe vertical $s_1 = 0$ où la fonction $V(s_1, s_2)$ n'est pas dérivable.

Vue la structure du système, il est évident qu'aucun mouvement n'apparaît sur les axes $s_1 = 0$ et $s_2 = 0$ sauf sur leur intersection $s_1 = s_2 = 0$. En effet, si $s_1(t) = 0$ pour une trajectoire de (2.4), alors on a $\dot{s}_1(t) = s_2(t) = 0$ sur la trajectoire. D'autre part, si $s_2(t) = 0$ pour une trajectoire de (2.4) et en tenant compte de (2.5), la seconde équation de (2.4) ne sera plus satisfaite pour $s_1(t) \neq 0$. Ceci montre que l'origine du plan de phase (s_1, s_2) est le seul point d'équilibre du système (2.4). Alors, en appliquant la version étendue ([AOA00], [SP94]) du principe d'invariance de Krasovskii-LaSalle [Kra63a], [Kra63b], [LaS60] au système à commutation (2.4), il s'avère que ce système est globalement uniformément asymptotiquement stable.

En outre, il est trivial de vérifier que le membre de droite de (2.4) est globalement homogène de degré $q = -1$ par rapport à la dilatation $(2, 1)$. Alors, en appliquant le théorème 2.2.2, on montre que le système (2.4) est globalement uniformément stable en temps fini autour de l'origine. \square

Remarque 2.2.4. *Il est intéressant de mentionner que si les paramètres vérifient :*

$$b \geq a > 0 \quad (2.7)$$

alors le système (2.4) perd la propriété de stabilité asymptotique. L'axe $s_1 = 0$ constitue dans ce cas un ensemble d'équilibre du système.

On considère maintenant le système à commutation du second ordre (2.1) en rajoutant des perturbations variant dans le temps

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -a \operatorname{sign}(s_1) - b \operatorname{sign}(s_2) - hs_1 - ps_2 + \omega(s_1, s_2, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où h et p sont des paramètres de gain linéaire et $\omega(s_1, s_2, t)$ est une perturbation non linéaire continue par morceaux uniformément bornée telle que :

$$|\omega(s_1, s_2, t)| \leq M. \quad (2.9)$$

La stabilité équi-uniforme globale en temps fini de ce système peut être montrée en utilisant le théorème 2.2.2 applicable à la version perturbée (2.8), (2.9) car la version nominale (2.4) est constitué d'un terme de droite globalement homogène de degré $q = -1$ par rapport à la dilatation $r = (2, 1)$. Alors $q + r_2 = 0$ (condition 2 du théorème 2.2.2).

Théorème 2.2.5. *Supposons que la condition (2.9) est satisfaite. Si, en plus, la borne M est suffisamment petite et vérifie*

$$0 < M < b < a - M, \quad (2.10)$$

et, que

$$h \geq 0, \quad p \geq 0, \quad (2.11)$$

alors le système perturbé (2.8), (2.9) est globalement équi-uniformément stable en temps fini.

Preuve. Pour montrer la stabilité uniforme globale en temps fini du système perturbé (2.8), on introduit la fonction de Lyapunov

$$\tilde{V}(s_1, s_2) = a|s_1| + \frac{1}{2}(s_2^2 + hs_1^2). \quad (2.12)$$

De façon similaire à (2.6), la dérivée temporelle de $\tilde{V}(s_1, s_2)$ le long des trajectoires du système perturbé est semi définie négative partout :

$$\dot{\tilde{V}}(s_1(t), s_2(t)) = -b|s_2(t)| - ps_2^2(t) + s_2(t)\omega(s_1(t), s_2(t), t) \leq -(b - M)|s_2(t)|, \quad (2.13)$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 2.2.3, c'est-à-dire en appliquant une version étendue [AOA00] du principe d'invariance de Krasovskii-LaSalle [Kra63a], [LaS60] au système perturbé (2.8) (voir encore [Orl03] pour une extension du principe d'invariance aux systèmes non autonomes à commutation), on montre que ce système est globalement uniformément asymptotiquement stable.

De par la propriété de stabilité asymptotique uniforme globale du système, toutes les trajectoires de (2.8) sont orientées vers une boule de rayon arbitrairement petit B_R en un temps fini, uniformément en les conditions initiales appartenant à un ensemble compact. Choisissons R suffisamment petit afin de satisfaire les inégalités

$$0 < M - (h + p)R < b < a - M - (h + p)R, \quad (2.14)$$

comme dans (2.10). Alors, à l'intérieur de B_R , le système (2.8) est représenté sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -a \operatorname{sign}(s_1) - b \operatorname{sign}(s_2) + \omega_1(s_1, s_2, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

où le terme non linéaire $\omega_1(s_1, s_2, t) = \omega(s_1, s_2, t) - hs_1 - ps_2$ est uniformément borné

$$|\omega_1(s_1, s_2, t)| \leq M_1 \quad (2.16)$$

et

$$M_1 = M - (h + p)R > 0. \tag{2.17}$$

La stabilité globale uniforme en temps fini de (2.15) sous les conditions (2.14), (2.16), et, en conséquence, celle de (2.8), sont obtenues en appliquant le théorème 2.2.2 au système (2.15). En effet, dû à (2.14), (2.16), les paramètres de (2.15) satisfont les mêmes conditions (2.9), (2.10) (bien sûr avec un $M = M_1$) qui ont été imposées sur (2.8). Il est donc aussi globalement uniformément asymptotiquement stable. De plus, le membre de droite de la version non perturbé (2.4) du système (2.15) est globalement homogène de degré $q = -1$ par rapport à la dilatation $r = (2, 1)$. La condition $q + r_2 \leq 0$ requise pour le théorème 2.2.2 est donc satisfaite et le théorème 2.2.2 devient applicable au système incertain (2.15). Le théorème 2.2.5 est donc montré. \square

Le comportement qualitatif du système (2.8) est montré dans la figure 2.1. Dû à (2.10), les vecteurs vitesse de (2.8) sont orientés vers la même région dans les lignes de commutations

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}, \tag{2.18}$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y < 0\}, \tag{2.19}$$

$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = 0\}, \tag{2.20}$$

$$S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}, \tag{2.21}$$

indépendamment de la présence des perturbations (2.9) affectant le système. Alors, les

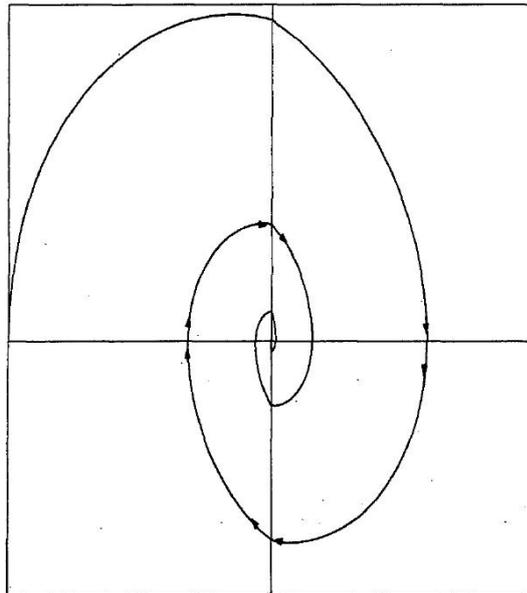


FIGURE 2.1 – Plan de phase d'un système à commutation du 2^{nd} ordre.

trajectoires du système perturbé (2.8) et, en particulier, de la version non perturbée

(2.4) s'enroulent autour de l'origine $s_1 = s_2 = 0$, tout en se rapprochant de celle-ci en un temps fini. Alors, les systèmes (2.4) et (2.8) exhibent un phénomène de réticence s'exprimant par une infinité de commutation sur un intervalle de temps fini. A partir d'un certain temps, il apparaît un mode glissant du second ordre (voir [BFU00], [FL96], [FL02], [Lev93], [Lev00] pour des résultats avancés sur les modes glissants du second ordre).

2.3 Stabilisation robuste d'un manipulateur à un degré de liberté

La commande quasi-homogène, définie dans 2.2.1, est tout d'abord illustrée sur un manipulateur à un degré de liberté opérant dans des conditions incertaines, avant d'étendre son application aux systèmes sous-actionnés. Les dynamiques du manipulateur sont données par

$$\ddot{y} = \omega(y, \dot{y}, t) + u \quad (2.22)$$

où y est la position, \dot{y} est la vitesse, u est la commande et $\omega(y, \dot{y}, t)$ est une fonction non linéaire continue par morceaux qui contient toutes les forces agissant sur le système (frottement visqueux et de Coulomb, poids, etc.). Le manipulateur opère dans des conditions incertaines ce qui implique que la non-linéarité $\omega(y, \dot{y}, t)$ est mal connue. Ce terme, qui peut être déstabilisant, peut être considéré comme étant la somme d'un terme nominal connu *a priori* $\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$ et d'un terme incertain $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ qui sera rejeté par la commande :

$$\omega(y, \dot{y}, t) = \omega^{nom}(y, \dot{y}, t) + \omega^{un}(y, \dot{y}, t). \quad (2.23)$$

On suppose que $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ est borné, i.e. l'inégalité :

$$|\omega^{un}(y, \dot{y}, t)| \leq N \quad (2.24)$$

est vérifiée pour tout $t \geq 0$ et tout $(y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^2$, où $N > 0$ est une constante connue *a priori*. De plus, on suppose que les fonctions $\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$ et $\omega^{un}(y, \dot{y}, t)$ sont continues par morceau.

En appliquant le théorème précédent, la loi de commande

$$u = -\omega^{nom}(y, \dot{y}, t) - a \operatorname{sign}(y) - b \operatorname{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}, \quad (2.25)$$

$$N < b < a - N, \quad h, p \geq 0 \quad (2.26)$$

où $\operatorname{sign}(\cdot)$ est la fonction signe, stabilise le système incertain (2.22)-(2.24) en temps fini. La commande (2.25)-(2.26) est constituée de la compensation non linéaire $-\omega^{nom}(y, \dot{y}, t)$, d'un gain linéaire $-hy - p\dot{y}$, et d'une partie discontinue $\varphi(y, \dot{y}) = -a \operatorname{sign}(y) - b \operatorname{sign}(\dot{y})$ vérifiant $\varphi(cy, c\dot{y}) = \varphi(y, \dot{y})$ pour tout $c > 0$.

2.4 Stabilisation locale des systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène

Cette partie est principalement tirée de [ROF⁺07], [RFR07b].

Dans cette section, la synthèse d'une commande quasi-homogène est développée pour la stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés dont le modèle dynamique est de la forme :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[B\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - F(\dot{q})]. \quad (2.27)$$

Dans cette équation, $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de position des articulations, $\tau \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ est la force de commande, \dot{q} et \ddot{q} sont respectivement les vecteurs de vitesse et d'accélération, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'inertie, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ représente les forces centrifuge et de Coriolis, $G(q)$ le poids, $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ les forces de frottements et B est la matrice d'entrée supposée de rang m . On suppose tout d'abord que $F(\dot{q})$ vérifie la condition de recouvrement du théorème B.2.2 c'est-à-dire $F(\dot{q}) \in \text{Vect}(B)$

La structure particulière des systèmes sous actionnés en deux doubles intégrateurs dont un seul est influencé par la commande motive la recherche d'un changement de coordonnée non linéaire transformant le système (2.27) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \\ \ddot{\xi} &= f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + u. \end{aligned}$$

Si ce changement de coordonnées existe, il s'agit ensuite de concevoir un contrôleur stabilisant le sous système $(\xi, \dot{\xi})$ où le contrôle apparaît tout en assurant que la dynamique des zéros $(\eta, \dot{\eta})$ correspondante à $\xi = \dot{\xi} = 0$ soit asymptotiquement stable. Nous commençons par introduire les formes normales pour les systèmes mécaniques sous-actionnés.

2.4.1 Forme normale et stabilisation locale des systèmes mécaniques sous-actionnés

La complexité de contrôler des systèmes mécaniques sous-actionnés est en grande partie due au fait que l'entrée de commande u apparaît dans la partie actionnée du système ainsi que dans la partie non actionnée. On va trouver via un changement de coordonnées, deux nouvelles variables d'état telle que la commande u apparaît explicitement sur une seule variable d'état.

Supposons donc que le système (2.27) puisse être représenté localement, par l'intermédiaire d'un changement de coordonnées non linéaire, sous une forme normale similaire à¹ :

$$\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \quad (2.28)$$

$$\ddot{\xi} = f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + u. \quad (2.29)$$

1. Dans [OS01], il est donné une condition suffisante pour aboutir à cette forme pour certaines classes de systèmes

Si le système (2.28) est localement à minimum de phase pour $\xi = \dot{\xi} = 0$ et $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est suffisamment dérivable, alors (2.28), (2.29) peut être localement stabilisé par une commande quasi-homogène similaire à (2.8). η et ξ sont supposés mesurables, car fonction de q et \dot{q} . On formule tout d'abord les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.4.1. *Les fonctions $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ et $f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ sont continues par morceaux et $g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est continue par rapport à $(\xi, \dot{\xi})$ localement autour de $(\xi, \dot{\xi}) = 0$ pour tout $(\eta, \dot{\eta})$.*

Hypothèse 2.4.2. *Le système $\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ est stable du point de vue entrée-état (rappelons que les entrées de ce sous-système sont $\xi, \dot{\xi}$).*

Hypothèse 2.4.3. *Le système*

$$\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, 0, 0) \quad (2.30)$$

a une position d'équilibre en 0, localement asymptotiquement stable.

Comme dans le cas du manipulateur (2.22), (2.23) le système (2.29) opère dans un milieu incertain. Le terme

$$f(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) = f^{nom}(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) + f^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) \quad (2.31)$$

probablement déstabilisant, est décomposé en une composante nominale f^{nom} , connue *a priori*, et un terme borné mal connu f^b dont les composantes f_j^b , $j = 1, \dots, m$ sont globalement bornées

$$|f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})| \leq N_j \quad (2.32)$$

par des constantes connues *a priori* $N_j > 0$. De plus, les deux fonctions f^{nom} et f^b sont supposées continues par morceaux. La commande quasi-homogène suivante est proposée

$$u(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) = -f^{nom}(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi}) - \alpha \text{sign } \xi - \beta \text{sign } \dot{\xi} - H\xi - P\dot{\xi} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} H &= \text{diag}\{h_j\}, \quad P = \text{diag}\{p_j\}, \\ \alpha &= \text{diag}\{\alpha_j\}, \quad \beta = \text{diag}\{\beta_j\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} N_j &< \beta_j < \alpha_j - N_j \\ h_j, p_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.34)$$

pour stabiliser localement le système incertain (2.29), (2.31), (2.32) dont les états $(\eta, \dot{\eta}, \xi, \dot{\xi})$ sont supposés mesurables. La notation *diag* représente une matrice diagonale de dimension appropriée. Pour tout vecteur *sign* ξ où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$, *sign* $\xi = (\text{sign } \xi_1, \dots, \text{sign } \xi_m)^T$.

Dans la suite, on montre que la commande proposée (2.33), (2.34) assure la convergence du système incertain (2.29) vers la dynamique équivalente $\xi = \dot{\xi} = 0$ en temps fini avec les propriétés désirées du système bouclé.

Théorème 2.4.4. *Supposons les hypothèses 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3 satisfaites et la condition (2.34) vérifiée. Alors le système bouclé (2.28), (2.29), (2.33) est localement asymptotiquement stable, uniformément vis-à-vis des perturbations (2.31), (2.32).*

Preuve. Le système en boucle fermée (2.28), (2.29), (2.33) est représenté comme suit

$$\ddot{\eta} = g(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) \quad (2.35)$$

$$\dot{\xi}_j = \zeta_j,$$

$$\dot{\zeta}_j = f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) - \alpha_j \text{sign} \xi_j - \beta_j \text{sign} \zeta_j - h_j \xi_j - p_j \zeta_j, j = 1, \dots, m. \quad (2.36)$$

L'hypothèse 2.4.1 permet d'utiliser les résultats de la théorie de Filippov sur les systèmes à second membre discontinu. Pour des raisons de concision, on ne fera ici référence qu'au Théorème 8 de son ouvrage de référence [Fil88, p. 85]. Ce Théorème est applicable au système (2.35)-(2.36). Par conséquent, le système admet une solution locale en présence de perturbations globalement bornées (2.32). Montrons que toute solution de (2.35), (2.36) est globalement continue à droite.

Tout d'abord, pour $j \in (1, \dots, m)$, aucun mouvement n'apparaît sur les axes $\xi_j = 0$ and $\zeta_j = 0$ sauf sur leur intersection $\xi_j = \zeta_j = 0$. En effet, si $\xi_j(t) = 0$ pour une trajectoire de (2.35)-(2.36), alors (2.35) donne $\zeta_j(t) = 0$ sur la trajectoire. D'autre part, si $\zeta_j(t) = 0$ pour une trajectoire de (2.35)-(2.36) et en tenant compte de (2.34), la seconde équation de (2.36) ne sera plus satisfaite pour $\xi_j \neq 0$.

Ensuite, calculons le long des trajectoires de (2.36) la dérivée temporelle de la fonction candidate de Lyapunov

$$V_j(\xi_j, \zeta_j) = \alpha_j |\xi_j| + \frac{1}{2}(h_j \xi_j^2 + \zeta_j^2), j = 1, \dots, m. \quad (2.37)$$

En tenant compte de (2.32), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(\xi_j, \zeta_j) &= \alpha_j \zeta_j \text{sign} \xi_j + h_j \xi_j \zeta_j + \zeta_j \{ f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) - \alpha_j \text{sign} \xi_j - \beta_j \text{sign} \zeta_j - h_j \xi_j - p_j \zeta_j \} \\ &= -[\beta_j - f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta) \text{sign} \zeta_j] \times |\zeta_j| - p_j \zeta_j^2 \leq -(\beta_j - N_j) |\zeta_j|. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cette inégalité est vérifiée partout à l'exception de l'axe $\xi_j = 0$ où la fonction $V_j(\xi_j, \zeta_j)$ n'est pas dérivable. Puisque le régime de glissement n'apparaît pas sur $\xi_j = 0$ mais sur l'intersection de $\xi_j = \zeta_j = 0$ où $\dot{V}_j(\xi_j, \zeta_j) = 0$, l'inégalité (2.38) est toujours satisfaite $\forall t$.

En vertu de (2.34), la solution du sous-système (2.36) satisfaisant (2.32) est uniformément bornée par rapport à t . En tenant compte de l'hypothèse 2.4.2, on s'assure que toutes les solutions possibles du système incertain (2.32), (2.35), (2.36) restent bornées sur tout intervalle de temps fini, et d'après la propriété B du théorème 9 de [Fil88, p.86], ces solutions sont globalement continues à droite.

On remarque, grâce à la bornitude globale de $f_j^b(\eta, \dot{\eta}, \xi, \zeta)$, $j = 1, \dots, m$, et en vertu de (2.34), que le sous-système (2.36) est globalement stable en temps fini, uniformément en les perturbations admissibles (2.32). Donc, à partir d'un certain temps fini, le système bouclé (2.32), (2.35), (2.36) évolue sur la dynamique équivalente $\xi = \zeta = 0$ où le comportement est décrit par la dynamique des zéros (2.30).

Enfin pour compléter la démonstration, il reste à noter, d'après l'hypothèse 2.4.3, que la dynamique équivalente (2.30) est localement asymptotiquement stable. Celle-ci, couplée à la stabilité en temps fini locale uniforme de (2.36), assure que le système asservit (2.35), (2.36) est localement asymptotiquement uniformément stable. La preuve du théorème est alors complète. \square

2.5 Stabilisation orbitale des systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène

Cette partie est principalement tirée de [SFO⁺07], [SRF⁺07].

Motivé par des applications où le mode opératoire naturel est oscillatoire périodique, la stabilisation orbitale des systèmes mécaniques a fait l'objet d'intéressants travaux dans la dernière décennie (voir par exemple, [SPCdW05] et les références associées). Pour cette classe de systèmes, le paradigme de stabilisation orbitale [CdWEU02] diffère de la formulation classique du suivi de sortie, où la trajectoire de référence à suivre est connue *a priori*. L'objectif de la stabilisation orbitale (le robot Rabbit par exemple [CAA⁺03]), est que le système bouclé auto-génère une orbite périodique similaire à celle produite par un oscillateur non linéaire. Une 2^{ième} propriété du système bouclé est qu'il soit capable de passer d'une orbite à une autre par simple modification des paramètres du contrôleur.

Une approche intéressante pour résoudre le problème de la stabilisation orbitale a été proposée par Shiriaev *et. al.* dans [SPLE00, SF01]. Cette approche utilise la propriété de passivité (vérifiée pour tout système mécanique) qui consiste à choisir une fonction de stockage V non négative ainsi qu'un contrôle forçant V à converger vers zéro. Le mouvement orbital périodique correspond à $V = 0$ qui constitue un ensemble invariant. L'ensemble invariant $V = 0$ doit être proprement choisi de sorte qu'un contrôle assurant la convergence des trajectoires dans cet ensemble résolve le problème de la convergence des trajectoires de l'état sur l'orbite désirée. Une orbite particulière est l'orbite homocline, dont l'instant de changement de direction (changement du signe de la vitesse) s'effectue en une position infiniment proche de l'équilibre instable du système (évidemment à vitesse quasiment nulle). Une fois atteinte, l'orbite homocline assure que les trajectoires du système entrent dans le bassin d'attraction d'un contrôleur local quel que soit son domaine d'attraction. Les deux inconvénients principaux de cette approche sont :

- La non robustesse vis-à-vis des forces de frottements et des perturbations.
- Le temps relativement long de convergence du système en boucle fermée sur l'orbite de référence.

On montre que la synthèse quasi-homogène, développée dans les sections précédentes est applicable aux systèmes sous-actionnés pour concevoir un contrôle par modes glissants du second ordre capable d'amener le système sur l'orbite de référence en un temps fini, même en présence de forces de frottement ou de perturbations exogènes.

Une modification de l'oscillateur de Van der Pol, proposée dans [OAA04], est introduite dans la synthèse du contrôleur comme générateur de l'orbite de référence. La

modification proposée possède un cycle limite stable, gouverné par l'équation linéaire de l'oscillateur harmonique. Elle constitue alors un générateur asymptotique d'un mouvement harmonique (mouvement sinusoïdale), contrairement à l'oscillateur de Van der Pol standard exhibant un cycle limite non-sinusoïdale.

Partant du fait que les systèmes mécaniques ont des limites physiques sur les courses et vitesses admissibles (états), notre idée est de faire une poursuite de trajectoire. La trajectoire de référence doit satisfaire les contraintes sur les courses et vitesses. Ces conditions sont satisfaites par l'introduction d'une modification de l'oscillateur de van der pol. Cette modification admet un cycle limite parfaitement sinusoïdale. La commande quasi-homogène assure une stabilité en temps fini sur l'orbite de référence. Le contrôleur construit admet plusieurs paramètres dont un réglage précis assure la convergence sur une orbite périodique convenable (Dans le sens où les états se rapprochent suffisamment de la position d'équilibre instable désirée).

Contrairement aux oscillateurs linéaires, dont l'amplitude depend des conditions initiales, l'amplitude ainsi que la fréquence du cycle limite sinusoïdale générée par l'oscillateur de Van der Pol modifié, peuvent être modifiées en ligne par un simple changement des paramètres de l'oscillateur. Pour cette raison, cette modification de l'oscillateur de Van der Pol paraît bien adaptée pour adresser la question de la stabilisation orbitale.

Dans cette section, on introduit le générateur asymptotique du mouvement harmonique qui est une modification de l'oscillateur de Van der Pol. Ensuite, on synthétise un contrôle assurant la poursuite de la trajectoire de référence. Enfin, on montre que la dynamique équivalente (le mouvement orbital résultant) de la partie non actionnée du système admet des oscillations d'amplitudes bornées. L'analyse de la dynamique équivalente est difficile vu sa non linéarité. On ne montre pas théoriquement la convergence des trajectoires dans le domaine d'attraction du contrôleur local (2.33), mais des simulations successives nous permettent un réglage adéquat des paramètres de la trajectoire de référence ainsi que de la commande quasi-homogène afin d'assurer de bonnes performances du système en boucle fermée. Ceci sera soutenu par des expérimentations.

2.5.1 L'oscillateur de Van der Pol Modifié

L'oscillateur de Van der Pol est donnée par l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$\ddot{z} + \varepsilon[(z - z_0)^2 - \rho^2]\dot{z} + \mu^2(z - z_0) = 0, \quad (2.39)$$

où ε , ρ , μ sont des paramètres positifs. Cette équation est un cas particulier de l'équation du circuit (voir par exemple [Kha02])

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\dot{v} + \mu^2 v = 0, \quad (2.40)$$

où la fonction $h(v)$, caractérise l'élément résistif et satisfait les conditions

$$\begin{aligned}
h(0) &= 0, \\
h'(0) &< 0, \\
\lim_{v \rightarrow -\infty} h(v) &= -\infty, \\
\lim_{v \rightarrow \infty} h(v) &= \infty.
\end{aligned}$$

L'équation de Van der Pol constitue un exemple bien connu dans la theory d'oscillations non linéaire. Elle possède une solution périodique qui attire toutes les solutions à l'exception de celles initialisées au point d'équilibre $(z, \dot{z}) = (z_0, 0)$. Cette solution périodique est nommé cycle limite stable [Kha02]. Le paramètre ρ contrôle l'amplitude du cycle limite, le paramètre μ la fréquence du cycle limite, le paramètre ε la vitesse du transitoire, et enfin le paramètre z_0 est pour l'offset de z (voir [WK00] pour plus de details).

On propose une modification de l'équation de Van der Pol [OAA04] donnée par

$$\ddot{z} + \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \mu^2 z = 0. \quad (2.41)$$

Contrairement à (2.39), cette nouvelle forme n'admet pas d'offset sur la variable z (le paramètre $z_0 = 0$). En plus, le terme $\frac{\varepsilon}{\mu^2} \dot{z}^3$ est ajouté. A noter que cette nouvelle forme n'est pas un cas particulier de (2.40).

Pour démontrer que cette modification possède aussi un cycle limite stable, on propose la fonction candidate de Lyapunov suivante

$$V(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2\mu^2} \dot{z}^2, \quad (2.42)$$

dont la dérivée le long des trajectoires de (2.41) est donnée par

$$\dot{V}(z, \dot{z}) = z\dot{z} + \frac{1}{\mu^2} \dot{z}\ddot{z} = \frac{\varepsilon}{\mu^2} [\rho^2 - (z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2})] \dot{z}^2. \quad (2.43)$$

Il s'ensuit que

$$\dot{V}(z, \dot{z}) \begin{cases} > 0 & \text{si } (z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2}) < \rho^2 \text{ et } \dot{z} \neq 0 \\ < 0 & \text{si } (z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2}) > \rho^2 \text{ et } \dot{z} \neq 0 \\ = 0 & \text{si } [\rho^2 - (z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2})] \dot{z} = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

sur les trajectoires de l'équation (2.41). Puisque l'origine $z = \dot{z} = 0$ est le seul point d'équilibre de (2.41), le critère de Poincaré-Bendixon [Kha02], p. 61, est applicable. En appliquant ce critère, on déduit l'existence d'une orbite périodique pour l'équation (2.41). Il est intéressant de noter que, contrairement à (2.39), le cycle limite de (2.41) possède une forme analytique. Cette forme est déduite de (2.42) et (2.44).

En effet, en appliquant le principe d'invariance [Kha02] section 4.2 à (2.44), on conclut que la solution périodique de (2.41) doit osciller dans l'ensemble $\{(z, \dot{z}) : \dot{V}(z, \dot{z}) = 0\}$ i.e.,

$$[\rho^2 - (z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2})]\dot{z} = 0. \quad (2.45)$$

Puisque l'origine est le point d'équilibre unique de (2.42), toutes les trajectoires de (2.42) passe par $\dot{z} = 0$ partout à l'exception de l'origine. Donc, le plus grand ensemble invariant de (2.45) coïncide avec l'ellipse

$$z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} = \rho^2. \quad (2.46)$$

On peut donc voir plus clairement que le paramètre ρ contrôle l'amplitude du cycle limite et que μ contrôle la fréquence.

En tenant compte de (2.44), l'amplitude d'une trajectoire de (2.41) initialisée à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de (2.46) doit augmenter (resp. diminuer) en fonction du temps. Le portrait de phase de (2.46) est dessiné dans la figure 2.2 en prenant $\varepsilon = 0.1$, $\rho^2 = 10$, et $\mu^2 = 1$.

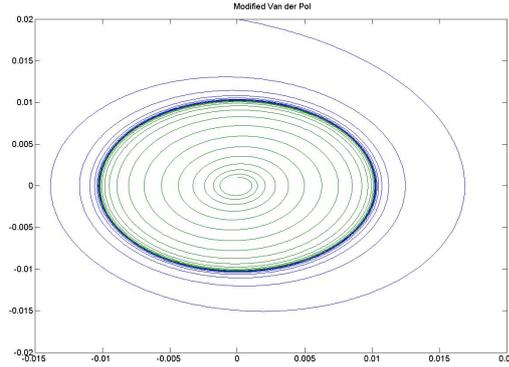


FIGURE 2.2 – Oscillateur de Van der Pol Modifié

2.5.2 Position du problème de la stabilisation orbitale

Les équations dynamiques (1.9), (1.10) peuvent être mises sous la forme

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) + f_1 = 0 \quad (2.47)$$

$$m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) + f_2 = \tau \quad (2.48)$$

où f_1 et f_2 représentent les différentes forces perturbatrices. Elles sont supposées continues par morceaux et satisfont.

$$|f_i| \leq N_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.49)$$

pout tout t .

L'objectif est de concevoir un contrôleur qui permet au système de suivre une trajectoire $z(t)$ qui est générée par l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41) tout en atténuant les effets des forces perturbatrices (2.49), i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [z(t) + x(t)] = 0, \quad (2.50)$$

Maintenant, on présente quelques arguments pour renforcer notre idée sur le choix de la modification de l'oscillateur de Van der Pol en tant que modèle de référence. Premièrement, on montre que l'oscillateur modifié (2.41) possède un cycle limite stable de la forme :

$$z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2} = \rho^2 \quad (2.51)$$

sachant que le paramètre ρ module l'amplitude du cycle limite et ν sa fréquence. En substituant l'équation de l'orbite (2.51) dans (2.41) on remarque que le cycle limite de l'oscillateur modifié (2.41) est généré par l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{z} + \mu^2 z = 0, \quad (2.52)$$

initialisé en (2.51).

En résumé, l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41) constitue un *générateur non linéaire de mouvement harmonique asymptotique* qui exhibe un mouvement sinusoïdale naturel (2.52) sur son cycle limite (2.51). Contrairement à l'oscillateur linéaire (2.52), dont l'amplitude dépend des conditions initiales, l'amplitude et la fréquence du signal sinusoïdale obtenu peuvent être changées librement en jouant sur les paramètres ρ et ν du générateur harmonique asymptotique (2.41).

2.5.3 Conception du contrôleur

Afin de présenter une stratégie de contrôle qui permet d'accomplir les contraintes présentées ci-dessus, on commence par faire une linéarisation partielle sur les équations du système (2.47), (2.48) dans le but de réduire les dynamiques. Pour ce faire, appliquons la commande

$$\tau = \left(m_{21}(q) - \frac{m_{11}(q)m_{22}(q)}{m_{12}(q)} \right) u + \frac{m_{22}h_1(q, \dot{q}) - m_{12}h_2(q, \dot{q})}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)}. \quad (2.53)$$

On obtient

$$\ddot{q}_1 = u + \frac{m_{22}(q)f_1 - m_{12}(q)f_2}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)} \quad (2.54)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m_{12}(q)} \left[-m_{11}(q) \left(u + \frac{m_{22}(q)f_1 - m_{12}(q)f_2}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)} \right) - h_1(q, \dot{q}) - f_1 \right] \quad (2.55)$$

La stratégie de contrôle est maintenant formalisée. L'entrée de commande (2.53) est composée d'une boucle interne assurant la linéarisation partielle du système, et d'une boucle externe u qui sera synthétisée par la suite. Considérons la sortie

$$y(t) = z(t) + q_1(t), \quad (2.56)$$

qui combine la variable d'état actionnée $q_1(t)$ du système et la variable de référence $z(t)$ gouvernée par l'équation de Van der Pol modifiée (2.41). L'objectif est de ramener la sortie du système (2.56) est ramenée sur la surface $y = 0$ par le contrôleur u de la boucle externe en un temps fini et s'y maintenir malgré la présence de forces perturbatrices $f_1(\dot{q}_1)$ et $f_2(\dot{q}_2)$ affectant le système.

2.5.4 Synthèse du contrôleur par mode glissant du second ordre

En tenant compte de (2.41), (2.54), (2.56), la dynamique de la sortie est donnée par

$$\ddot{y} = u + \frac{m_{22}(q)f_1 - m_{12}(q)f_2}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)} - \varepsilon\left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\mu^2}\right) - \rho^2\right]\dot{z} - \mu^2 z \quad (2.57)$$

On propose le contrôleur suivant

$$u = \varepsilon\left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\nu^2}\right) - \rho^2\right]\dot{z} + \nu^2 z - \alpha \text{sign}(y) - \beta \text{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y} \quad (2.58)$$

avec les paramètres :

$$h, p \geq 0, \quad \alpha - \beta > \frac{\|m_{22}(q)\|N_1 + \|m_{12}(q)\|N_2}{\|m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)\|}. \quad (2.59)$$

Le système en boucle fermée (2.57), (2.58) est transformé en

$$\ddot{y} = \frac{m_{22}(q)f_1 - m_{12}(q)f_2}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)} - \alpha \text{sign}(y) - \beta \text{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y} \quad (2.60)$$

avec un second membre continu par morceaux.

Pour faire la liaison avec la synthèse quasi-homogène des chapitres précédent, le contrôleur ci-dessus est composé du compensateur de trajectoire non linéaire

$$u_c = \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\nu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \nu^2 z, \quad (2.61)$$

de la partie homogène commutante

$$u_h = -\alpha \text{sign}(y) - \beta \text{sign}(\dot{y}), \quad (2.62)$$

et, enfin, d'une partie linéaire

$$u_l = -hy - p\dot{y} \quad (2.63)$$

pour accélérer la convergence. Ce dernier terme se réduit à zéro lorsque $y = \dot{y} = 0$. En vue du Théorème 2.2.5 de la section 2.2 [ROF⁺07], le système quasi-homogène (2.60) avec le jeu de paramètres (2.59) est stable en temps fini en présence de forces de frottement et des perturbations exogènes uniformément bornées satisfaisant (2.49). L'objectif de stabilisation orbitale est donc achevé et le résultat suivant est obtenu.

Théorème 2.5.1. *Supposons que l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41) avec ε, ν, ρ des paramètres positifs est un modèle de trajectoire de référence pour le système mécanique sous-actionné (2.47), (2.48) et soit (2.56) la sortie du système. Alors, la synthèse quasi-homogène (2.53), (2.58), (2.59) conduit le système sur la surface de glissement $y = 0$ en un temps fini, même en présence de forces perturbatrices admissibles (2.49). Ensuite, la partie actionnée $q_1(t)$ du système suit la sortie $-z(t)$ générée par l'oscillateur modifié et donnée par l'équation (2.41) tandis que la partie non-actionnée du système $q_2(t)$ est gouvernée sur un intervalle de temps fini par la dynamique des zéros donnée par l'équation*

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m_{12}(q)} [-m_{11}(q)q_1 - h_1(q, \dot{q}_1) - f_1]. \quad (2.64)$$

Preuve. D'après le théorème 8 de [Fil88, p. 85], le système en boucle fermée (2.54), (2.55), (2.58) admet une solution locale pour toutes les conditions initiales et même en présence des perturbations admissibles (2.49). Démontrons que toute solution de ce système est globalement continue à droite.

Dû à (2.49), l'amplitude de la perturbation

$$W(t) = \frac{m_{22}(q)f_1 - m_{12}(q)f_2}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)}$$

qui apparaît dans le membre de droite de (2.60) est majorée comme suit :

$$|W(t)| \leq \frac{\|m_{22}(q)\|N_1 + \|m_{12}(q)\|N_2}{\|m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)\|}. \quad (2.65)$$

Puisque cette estimation, couplée à (2.59), garantit que

$$\alpha - \beta > |W(t)|, \quad (2.66)$$

le théorème 2.2.5 devient applicable au système quasi-homogène (2.59), (2.60). En appliquant ce théorème, le système (2.60), sous réserve que (2.59) soit vérifiée, est stable en temps fini, uniformément en les perturbations admissibles (2.49). En utilisant maintenant (2.56), il s'ensuit qu'une solution arbitraire $q_1(t) = y(t) - z(t)$ de (2.54) est globalement continue à droite et uniformément bornée en t .

En outre, du fait de la bornitude uniforme de $y(t)$, le signal de contrôle (2.58) est également uniformément borné. Alors, toute solution $q_2(t)$ de (2.55) est aussi globalement continue à droite.

Donc, à partir d'un certain temps fini, le système mécanique sous-actionné évolue selon un mode glissant du second ordre sur la surface de glissement $y = 0$. Pour compléter la preuve, il reste à déterminer la dynamique du système en mode glissant. Pour cela, appliquons la méthode de la commande équivalente [UGS99] et substituons dans (2.55) la solution unique u_{eq} de l'équation algébrique

$$u + \frac{m_{22}(q)f_1 - m_{12}(q)f_2}{m_{12}(q)m_{21}(q) - m_{11}(q)m_{22}(q)} - \varepsilon[(q_1^2 + \frac{\dot{q}_1^2}{\mu^2}) - \rho^2]\dot{q}_1 - \mu^2 q_1 = 0$$

par rapport à u (i.e., la commande équivalente u_{eq} assurant l'égalité $\ddot{y} = 0$). La dynamique du système évoluant sur cette surface est alors donnée par

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m_{12}(q)} \left[-m_{11}(q) \left[\varepsilon \left[\left(q_1^2 + \frac{\dot{q}_1^2}{\mu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{q}_1 + \mu^2 q_1 \right] - h_1(q, \dot{q}_1) - f_1 \right], \quad (2.67)$$

où $q_1(t)$ est la trajectoire de référence qui est gouvernée par l'équation de l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41). Notons que pour les orbites $q_1(t)$ initialisées sur le cycle limite (2.51) de l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41), la dynamique équivalente (2.67) se réduit à

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m_{12}(q)} [-m_{11}(q)q_1 - h_1(q, \dot{q}_1) - f_1].$$

L'équation en régime glissant (2.67) sur la surface $y = 0$ est alors validée pour la partie non-actionnée du système $q_2(t)$, sur un intervalle de temps fini. \square

En analysant la preuve du théorème 2.5.1, on peut conclure que la variable actionnée $q_1(t)$ reste bornée indépendamment de la présence de perturbation d'amplitude admissible affectant le système en boucle fermée. Pour des raisons pratiques la variable d'état non-actionnée $q_2(t)$ doit rester bornée en présence de perturbations d'amplitude suffisamment petite. Pour cette raison, la dynamique des zéros (2.64) doit satisfaire la propriété de stabilité entrée-état localement en f_1 (pour une analyse détaillée de la bornitude entrée-état voir par exemple [Isi99, LMS02, SK91]). Ce sujet ne sera pas traité en détail dans ce chapitre, par contre des simulations numériques et expérimentations montrent l'utilité de notre approche.

Chapitre 3

Application au pendule inversé : simulations et expérimentations

Les concepts théoriques présentés dans le chapitre précédent vont maintenant être validés sur des applications par le biais de simulations numériques et d'expérimentations. Le banc d'essai est un pendule inversé installé au LAGIS constitué d'un moteur linéaire en translation suivant un axe de guidage et d'un pendule pesant libre en rotation. Une description détaillée du banc d'essai est présentée dans la section 3.1. La suite du chapitre est organisée de la même manière que le précédent, une partie sur la commande du moteur linéaire (sans tenir compte du pendule) qui correspond à la première partie du chapitre précédent. Ensuite, une partie sur la commande quasi-homogène pour assurer la stabilité locale du pendule inversé. Enfin, la dernière partie concerne une validation expérimentale de l'approche de stabilisation orbitale correspondant à la section 2.5 du chapitre 2 et d'une comparaison des performances de la commande quasi-homogène avec l'approche par passivité [SF01].

3.1 Description du banc d'essai

Les expérimentations ont été réalisées sur un banc d'essai développé au sein du LAGIS. Celui-ci est constitué d'un moteur linéaire en translation sur un rail de guidage et d'un pendule pesant libre en rotation autour de son axe qui est solidaire du moteur linéaire. Un codeur incrémental donnant la position du moteur sur son rail dont la précision est de 4×10^{-6} mètres. L'axe de rotation du pendule est solidaire d'un codeur incrémental en rotation fournissant la position angulaire du pendule. Ce codeur a une résolution de $\frac{2\pi}{5000}$ rad. Les vitesses linéaire du moteur et angulaire du pendule, nécessaires à la loi de commande, sont obtenues par des techniques de dérivation numériques. Le traitement des données issues capteurs se fait par l'intermédiaire d'une carte dSpace 1104 reliée à un ordinateur. La carte dSpace se charge aussi du calcul de la commande. Cette dernière est envoyée par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance au moteur linéaire. La période d'échantillonnage de la carte dSpace peut descendre jusqu'à 0.0001 seconde, mais dans les expériences réalisées, on utilise un échantillonnage de

0.001 seconde.

Le schéma synoptique du banc d'essai est présenté dans la figure 3.1, et une vue globale du banc est donnée figure 3.2.

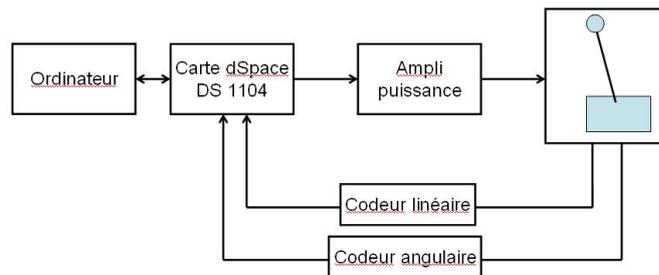


FIGURE 3.1 – Schéma synoptique du moteur linéaire.

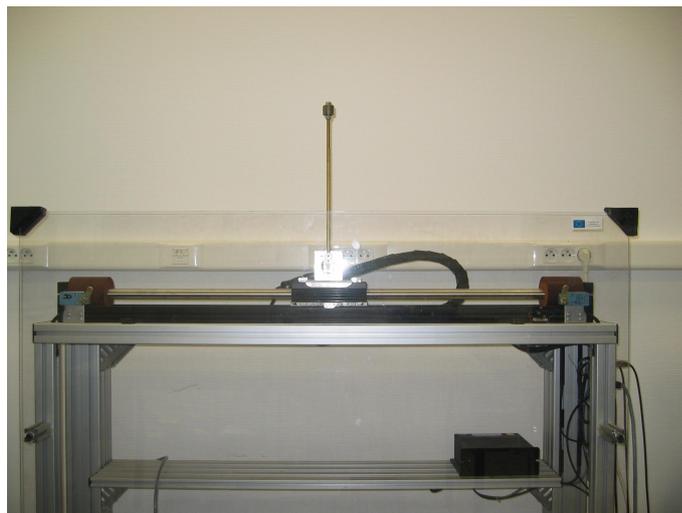


FIGURE 3.2 – Photo du banc d'essai.

Les caractéristiques physiques et géométriques du pendule inversé sont données dans le tableau suivant :

où M est la masse du chariot, m est la masse de la tige du pendule, l est la longueur de la tige du pendule. ψ_v, φ_v , sont respectivement les paramètres de frottement visqueux sur le chariot et le pendule. ψ_c, φ_c sont respectivement les paramètres de frottement de Coulomb sur le chariot et le pendule. Des techniques de moindres carrés permettent d'identifier des valeurs acceptables du frottement et des paramètres du système.

Après cette description du banc d'essai, commençons par la commande du moteur linéaire du pendule (le pendule agit comme une perturbation).

TABLE 3.1 – Paramètres du pendule inversé.

Notation	Valeur	Unités
M	3.4	kg
m	0.147	kg
l	0.175	m
ψ_v	8.5	$N \cdot s/m$
φ_v	0.0015	$N \cdot m \cdot s/rad$
ψ_c	6.5	N
φ_c	0.00115	$N \cdot m$

3.2 Commande d'un moteur linéaire

On considère le moteur linéaire du pendule inversé schématisé dans la figure 3.3.

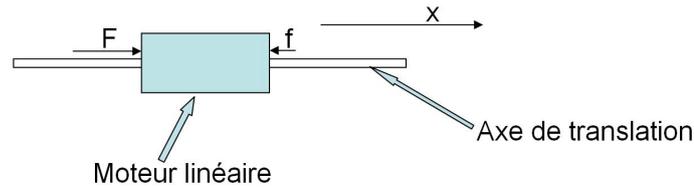


FIGURE 3.3 – Schéma d'un moteur linéaire.

Le modèle dynamique est donné par :

$$F - f = M\ddot{x} \tag{3.1}$$

où x est la position du moteur sur son rail de guidage, F est la force de commande résultante des interactions électromagnétiques dans les enroulements du moteur et f regroupe les forces de frottement et les perturbations agissant sur le système (inertie du pendule, bruits des capteurs...).

Notons qu'on ne modélise pas précisément les interactions électromagnétiques et les forces de frottements étant donné qu'on a juste besoin d'une borne supérieure de ces dynamiques non modélisées. Cette borne supérieure existe pour les systèmes physiques (les forces de frottements d'un système mécanique sont bornées...).

On pose $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ la position et vitesse respective du moteur linéaire. La représentation d'état est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} (F - f) \tag{3.2}$$

Les valeurs numériques des paramètres du système sont donnée dans le tableau 3.1. La partie électromagnétique est modélisée par un gain linéaire i.e. $F = \alpha\tau$ avec

$\alpha = 25.3$. On commence par présenter des simulations numériques, elles seront suivies par des expérimentations.

3.2.1 Simulations

Afin de montrer la robustesse de la commande quasi-homogène vis-à-vis des incertitudes et des frottements, et de comparer ces performances avec celles d'un retour d'état statique linéaire, des simulations numériques ont été faites. Les figures 3.4 et 3.6 représentent les positions respectives du moteur linéaire commandé par un retour d'état statique linéaire et un retour quasi-homogène discontinu. Le retour d'état linéaire est un contrôleur linéaire quadratique avec des matrices de gain $Q = \text{diag}(100, 100)$ et $R = 1$, ce qui donne un gain de commande $K = [10 \ 10.13]$. Pour le contrôleur quasi-homogène (2.25), on utilise $\alpha = 1$ et $\beta = 0.5$. On remarque l'absence d'erreur statique dans le cas du contrôle quasi-homogène et la convergence en temps fini (0.6 secondes). Sur la figure 3.7, on peut observer la réticence du contrôle quasi-homogène, due aux fonctions signes.

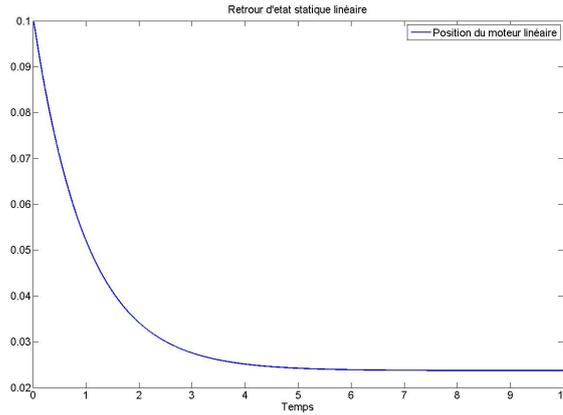


FIGURE 3.4 – Stabilisation en zéro du moteur linéaire par un retour d'état statique linéaire.

Pour pouvoir accélérer la convergence et diminuer l'erreur statique résultant de la commande par retour d'état statique linéaire, on peut ajouter une action intégrale en utilisant l'intégrale de la position comme variable d'état. Pour cela on introduit la variable x_I telle que $\dot{x}_I = x$ et on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} (F - f) \quad (3.3)$$

On calcule une commande linéaire quadratique avec les matrices de gain $Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ et $R = 1$. On obtient le gain de commande $K = [1 \ 1.85 \ 1.22]$. En bouclant le système obtenu par ce retour d'état, on voit apparaître des oscillations

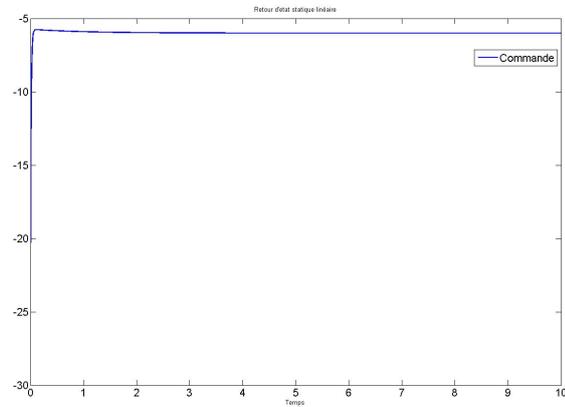


FIGURE 3.5 – Commande correspondante au retour d'état statique linéaire.

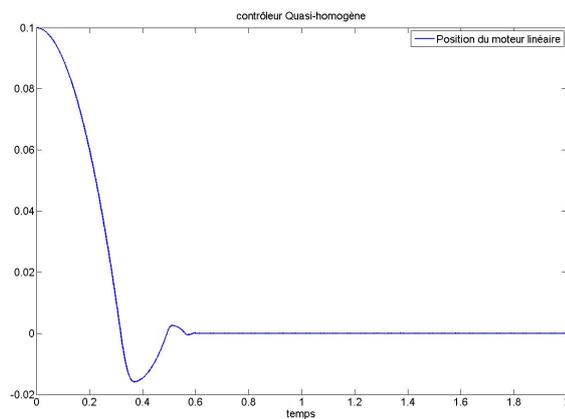


FIGURE 3.6 – Stabilisation en zéro du moteur linéaire par un retour quasi-homogène discontinu.

(phénomène normal en présence de frottement discontinu, voir figure 3.8) autour de la position finale désirée (zéro), qu'on appelle aussi des cycles limites. La commande correspondante est représentée dans la figure 3.9.

Il est à noter que les commutations à haute fréquence et de grande amplitude du contrôle quasi-homogène sont dues aux fonctions signes. En pratique, on peut remplacer les fonctions signes par des approximations continues comme par exemple la fonction arctangente.

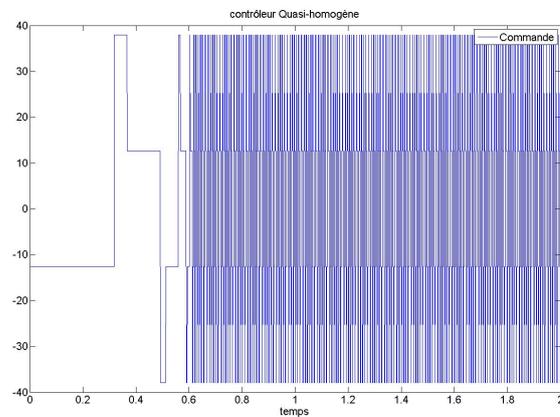


FIGURE 3.7 – Commande correspondant au retour quasi-homogène discontinu.

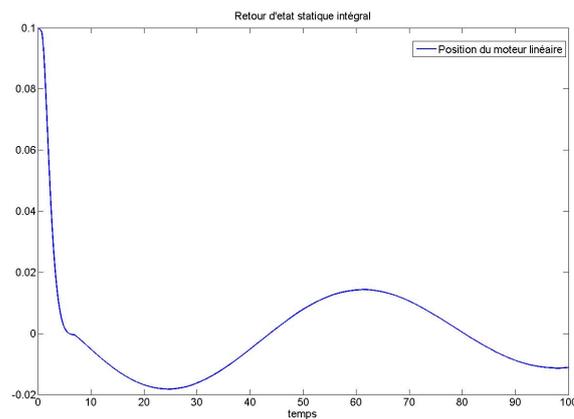


FIGURE 3.8 – Stabilisation en zéro du moteur linéaire par un retour d'état statique intégral sur le système étendu.

3.2.2 Expérimentations

L'efficacité du contrôle quasi-homogène et sa robustesse vis-à-vis des perturbations, ont été validées par des tests expérimentaux. Le moteur linéaire est représenté dans la figure 3.2. Le pendule attaché au moteur dans la figure 3.2 est libre en rotation autour de son axe et est considéré comme une perturbation.

La stabilisation en une position désirée est considérée dans un premier temps. Des consignes de positions de ± 0.1 mètres à des intervalles de temps de 2.5 secondes sont données au moteur. Le résultat est représenté dans la figure 3.10. On obtient une bonne précision en positionnement de l'ordre de 0.3 mm, ainsi qu'on peut le voir sur la figure

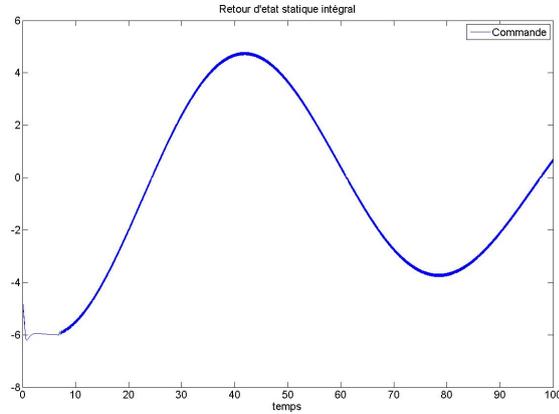


FIGURE 3.9 – Commande correspondant au retour d'état statique linéaire sur le système étendu.

3.11. La commande appliquée est représentée dans les figures 3.12 3.13.

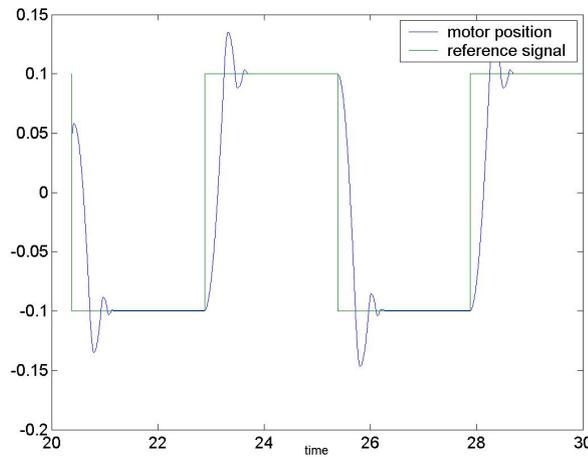


FIGURE 3.10 – Expérimentation (positionnement du moteur linéaire) $x(m)$.

On considère maintenant le problème de la poursuite d'une trajectoire sinusoïdale $x_{ref} = 0.1 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$. En posant $e = x_{ref} - x$, la dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$\ddot{e} = -0.1 \left(\frac{2\pi}{5}t\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) - \frac{1}{M}(F - f) \quad (3.4)$$

Le problème de poursuite de trajectoire se réduit donc au problème de stabilisation

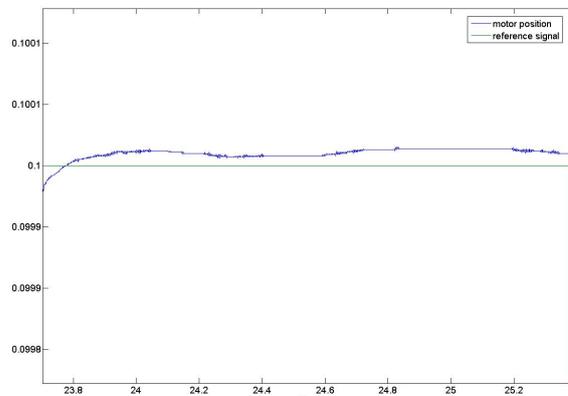


FIGURE 3.11 – Zoom de la figure 3.10.

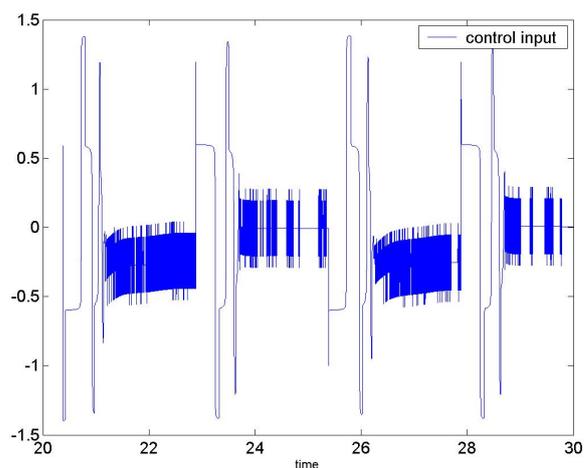


FIGURE 3.12 – Entrée de commande (Volts).

de la dynamique de l'erreur en zéro. Un contrôle quasi-homogène de la forme $u = -\alpha \text{sign}(e) - \beta \text{sign}(\dot{e})$ est appliqué. La position expérimentale du moteur linéaire est représentée dans la figure 3.14. Notons que la commande est désactivé aux instants 22.5, 26.5, 28, 33 secondes pour montrer que le contrôle est capable de forcer le moteur à rejoindre sa trajectoire de référence. Les profils de la vitesse de référence et du moteur linéaire sont représentés dans la figure 3.15. La commande appliquée est donnée dans la figure 3.16.

On considère maintenant le problème de trajectoire "rest-to-rest", c'est-à-dire partir d'une position initiale avec vitesse nulle et arriver en une position finale à vitesse nulle en

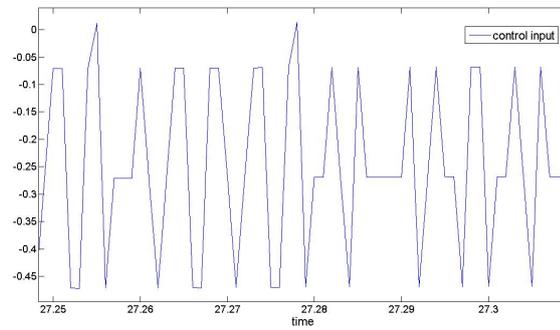


FIGURE 3.13 – Un zoom de la figure 3.12

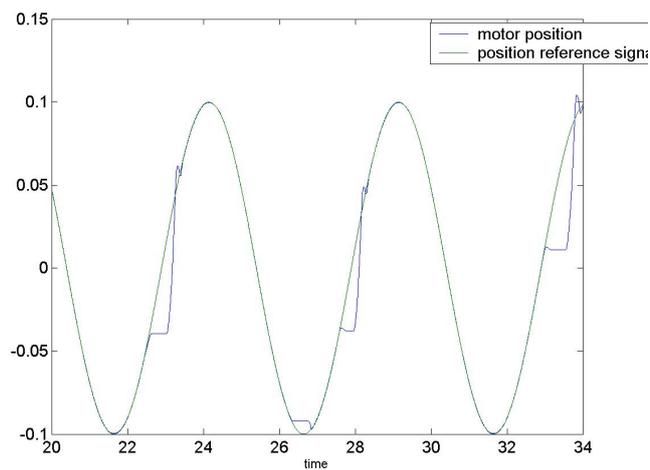


FIGURE 3.14 – Poursuite d'une sinusoïde par commande quasi-homogène : position $x(m)$.

un temps imposé. On choisit comme trajectoire de référence un polynôme du troisième ordre de la forme :

$$x_{ref}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d. \quad (3.5)$$

On choisit de déplacer le moteur de la position 0 à la position 0.1 m en une seconde. On impose donc à (3.5) les conditions suivantes

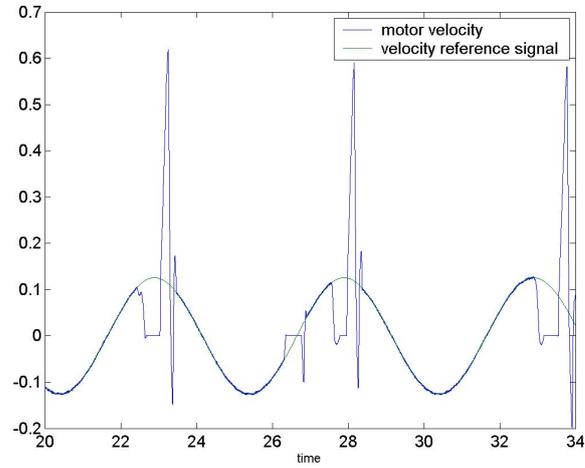


FIGURE 3.15 – Poursuite d’une sinusoïde par commande quasi-homogène : vitesse $\dot{x}(m/sec)$.

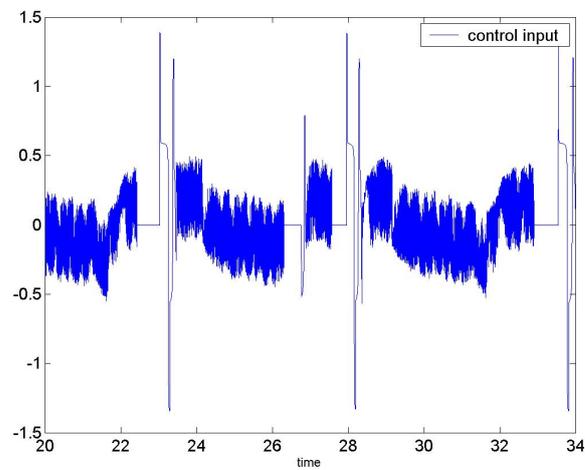


FIGURE 3.16 – Entrée de commande correspondant à l’expérience de poursuite d’une sinusoïde (Volts).

$$x_{ref}(0) = 0, \quad (3.6)$$

$$x_{ref}(1) = 0.1, \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_{ref}(0) = 0, \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_{ref}(1) = 0. \quad (3.9)$$

Ceci donne $x_{ref}(t) = -0.2t^3 + 0.3t^2$.

Les résultats expérimentaux de poursuite de trajectoire en position, en vitesse, ainsi que l'entrée de commande sont représentés dans les figures 3.17, 3.18 et 3.19, respectivement. Il est clair que la position et vitesse du moteur suivent bien les références. Dans la figure 3.19 on voit apparaître la réticence.

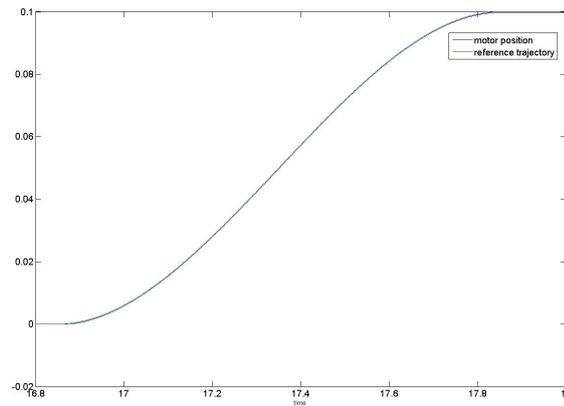


FIGURE 3.17 – Poursuite d'une trajectoire polynômiale par commande quasi-homogène : position $x[m]$.

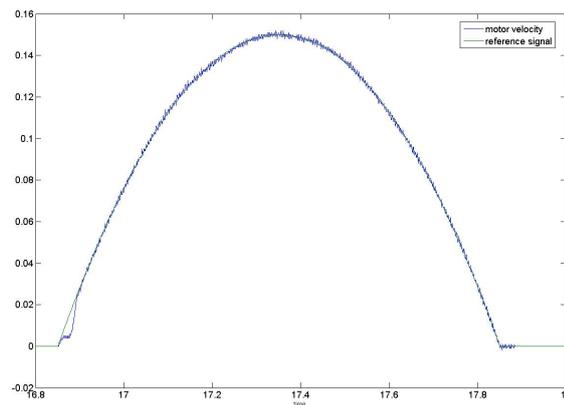


FIGURE 3.18 – Poursuite d'une trajectoire polynômiale par commande quasi-homogène : vitesse $\dot{x}[m/s]$.

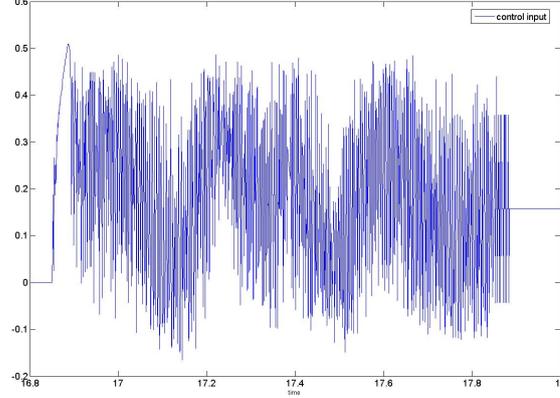


FIGURE 3.19 – Entrée de commande correspondant à l'expérience de poursuite d'une trajectoire polynômiale (Volts).

3.3 Stabilisation locale d'un pendule inversé par commande quasi-homogène

Cette section est principalement tirée de [ROF⁺07] [RFR07b] [RFR07a] [RFR06] [Ria07].

Dans cette section la commande quasi-homogène est utilisée pour stabiliser localement le pendule inversé autour de sa position d'équilibre instable tout en forçant le chariot à converger en une position finale désirée. Rappelons tout d'abord les équations du pendule inversé de la section 1.4.5.2

$$(M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - ml\ddot{\theta} \cos \theta = \tau - \psi(\dot{x}) + \omega_1(t), \quad (3.10)$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = -\varphi(\dot{\theta}) + \omega_2(t). \quad (3.11)$$

Comme il en a été discuté au chapitre 2, l'idée est de trouver un difféomorphisme transformant le système en une forme normale (2.29). Pour cela, on propose le changement de coordonnées :

$$\eta = x - \frac{4}{3}l\varrho(\theta), \quad (3.12)$$

avec

$$\varrho(\theta) = \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right), \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}. \quad (3.13)$$

Alors, le système (3.10), (3.11) est transformé en 2 chaînes d'intégrateurs où l'entrée de

commande n'agit que sur la seconde :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ -\left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta}\right) \tan \theta \\ \dot{\theta} \\ \frac{3 \sin \theta ((M+m)g - ml \cos \theta \dot{\theta}^2)}{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3 \cos \theta}{D} \end{bmatrix} (\tau - \psi + \omega_1) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml \cos \theta} \\ 0 \\ \frac{3(M+m)}{mlD} \end{bmatrix} (\varphi - \omega_2) \quad (3.14)$$

On voit que les termes ne satisfaisant pas la condition de recouvrement φ et ω_2 influencent le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ de la forme normale (3.14). Ces termes n'ont pas été traités dans la partie théorique (chapitre 2, section 2.4), on verra par la suite que le réglage des paramètres du contrôleur permet d'atténuer leurs effets.

3.3.1 Conception de la commande

Une sortie fictive ξ est choisie afin que le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ avec $\varphi = \omega_2 = 0$ soit à minimum de phase par rapport à cette sortie. Nous allons montrer qu'on peut choisir ξ telle que :

$$\xi = \tan \theta - \lambda_1 \eta - \lambda_2 \dot{\eta}, \quad (3.15)$$

avec λ_1 et $\lambda_2 > 0$.

En tenant compte de (3.12), (3.13) et (3.15), les variables d'état θ et x convergent vers l'origine lorsque η , $\dot{\eta}$ et ξ tendent vers zéro. Donc, si on génère un régime de glissement sur $\xi = 0$, l'hypothèse que le sous-système $(\eta, \dot{\eta})$ est à minimum de phase implique la stabilisation asymptotique de x et θ . Le problème revient alors à la construction d'une commande à structure variable garantissant la convergence en temps fini de ξ vers zéro. En dérivant deux fois ξ , on obtient :

$$\ddot{\xi} = \mu + p + u, \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu(\theta, \dot{\theta}) &= 2 \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta}^2 + \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{8l\lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta}{3 \cos \theta} - \frac{\lambda_2 \varphi_v}{ml \cos \theta} \right] \\ &\quad \left[\frac{3[(M+m)g - ml \cos \theta \dot{\theta}^2] \sin \theta - 3 \cos \theta \psi(x) - 3 \frac{M+m}{ml} \varphi(\dot{\theta})}{D} \right] \\ &\quad + \lambda_1 \left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta} \right) \tan \theta + \lambda_2 \left(g + \frac{4}{3}l \frac{\dot{\theta}^2 (1 + \sin^2 \theta)}{\cos \theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \\ &\quad - \left(\frac{\lambda_1}{ml \cos \theta} + \frac{\lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta}{ml \cos \theta} \right) \varphi(\dot{\theta}) - \frac{\lambda_2}{ml \cos \theta} \dot{\varphi}_{Dahl}(\dot{\theta}), \\ u &= \left[\frac{3ml + 8ml^2 \lambda_2 \dot{\theta} \sin \theta - 3\lambda_2 \cos \theta \varphi_v}{mlD \cos \theta} \right] \tau, \end{aligned} \quad (3.17)$$

et le terme incertain

$$(ml \cos \theta) p = \left[\frac{ml}{\cos \theta} + \frac{8ml^2 \lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta}{3} - \lambda_2 \varphi_v \right] \left[\frac{3 \cos \theta}{D} \omega_1 + \frac{3(M+m)}{mlD} \omega_2 \right] + (\lambda_1 + \lambda_2 \dot{\theta} \tan \theta) \omega_2 + \lambda_2 \dot{\omega}_2.$$

Étant données les contraintes physiques du système, le gain λ_2 est choisi suffisamment petit pour assurer que $3ml + 8ml^2 \lambda_2 \dot{\theta} \sin \theta - 3\lambda_2 \cos \theta \varphi_v \neq 0$ dans (3.17). La dynamique du sous système $(\eta, \dot{\eta})$ est donnée par

$$\ddot{\eta} = - \left(g + \frac{4}{3} l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta} \right) (\xi + \lambda_1 \eta + \lambda_2 \dot{\eta}) + \frac{1}{ml \cos \theta} (\varphi - \omega_2). \quad (3.18)$$

Notons que (3.16), (3.18) est une forme régulière similaire à (2.28), (2.29) lorsque $\varphi = \omega_2 = 0$. Puisque (3.16) est similaire à (2.15), on propose la loi de commande u suivante :

$$u = -\mu \left(\theta, \dot{\theta} \right) - \alpha_1 \text{sign}(\xi) - \beta_1 \text{sign}(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi},$$

ce qui donne :

$$\tau = \frac{mlD \cos \theta \left(-\mu \left(\theta, \dot{\theta} \right) - \alpha_1 \text{sign}(\xi) - \beta_1 \text{sign}(\dot{\xi}) - h\xi - p\dot{\xi} \right)}{\left[3ml + 8ml^2 \lambda_2 \dot{\theta} \sin \theta - 3\lambda_2 \cos \theta \varphi_v \right]}. \quad (3.19)$$

Supposons que $\omega_1, \omega_2, \dot{\omega}_2$ et $\dot{\theta}$ sont bornés. Alors p est une perturbation satisfaisant la condition de recouvrement (théorème B.2.2), uniformément bornée par Δ , i.e. $|p| < \Delta$ pour tout t, θ et $\dot{\theta}$. En posant

$$\Delta < \beta_1 < \alpha_1 - \Delta \quad \text{et} \quad h, p \geq 0, \quad (3.20)$$

le contrôleur quasi-homogène (3.19), (3.20) assure la stabilité uniforme en temps fini du système $(\xi, \dot{\xi})$. La dynamique équivalente sur la surface $\xi = 0$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1 \rho & -\lambda_2 \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml \cos \theta} \end{bmatrix} (\varphi - \omega_2). \quad (3.21)$$

avec $\rho = \left(g + \frac{4}{3} l \frac{\dot{\theta}^2}{\cos \theta} \right) > 0, \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il reste à étudier la stabilité asymptotique de (3.21), lorsque $\varphi = \omega_2 = 0$.

3.3.2 Etude de la stabilité de la dynamique des zéros

Notons qu'il existe un changement de base :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix},$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}, \kappa > 0,$$

qui transforme le système (3.21) avec $\varphi = \omega_2 = 0$ sous la forme

$$\dot{\Omega} = \begin{bmatrix} -\kappa & 1 \\ \kappa\sigma & \delta \end{bmatrix} \Omega, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-\kappa^2 + \lambda_2\rho\kappa - \lambda_1\rho}{\kappa} \\ \delta &= \kappa - \lambda_2\rho. \end{aligned}$$

Soit $V(\Omega) = |\Omega| = \begin{bmatrix} |\Omega_1| \\ |\Omega_2| \end{bmatrix}$ une candidate comme fonction de Lyapunov vectorielle [BDPR03], [GGB76]. La dérivée de Dini à droite de $V(\Omega)$ donne $D^+V(\Omega) \leq \Gamma V(\Omega)$, avec $\Gamma = \begin{bmatrix} -\kappa & |1| \\ |\kappa\sigma| & \delta \end{bmatrix}$. Si

$$\lambda_2^2 > \frac{4\lambda_1}{\rho}, \quad (3.23)$$

il existe alors $\kappa > 0$ tel que $\kappa^2 - \lambda_2\rho\kappa + \lambda_1\rho < 0$ et on obtient :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\kappa & 1 \\ \kappa\sigma & \delta \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Notons que les termes non constants dans (3.24) apparaissent dans la dernière ligne seulement et que Γ est une matrice de Metzler ($-M$ matrice). Cela permet d'appliquer la théorie de stabilité linéaire (voir [BDPR03], [GGB76]). Par conséquent, sous la condition (3.23), $\Omega = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable du système non linéaire (3.22). Enfin, en tenant compte du frottement du pendule $\varphi(\dot{\theta})$ ainsi que des perturbations $\omega_2(t)$, il est évident qu'on perd la stabilité asymptotique, mais il est prouvé dans la théorie de stabilité linéaire que le système linéaire perturbé (3.21) converge dans une boule autour de l'origine. On obtient ainsi une stabilité pratique. Le rayon de cette boule peut être diminué en ajustant les paramètres λ_1 and λ_2 . Ceci sera soutenu par des résultats expérimentaux.

3.3.3 Simulations numériques et expérimentations

Pour illustrer l'efficacité de la commande proposée, des simulations numériques et des expérimentations ont été faites sur le banc d'essai du pendule inversé.

Les simulations ont été faites sans frottements et sans perturbations non-matching, avec les conditions initiales suivantes : $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})^T(0) = (0.2\text{m}, 1\text{m s}^{-1}, 0.8\text{rd}, 2\text{rd s}^{-1})$. La condition initiale de θ est $\theta(0) = 0.8\text{rd} = 45.8^\circ$ pour illustrer le grand domaine d'attraction du contrôleur. Les résultats sont présentés dans les figures 3.20 et 3.21. Comme

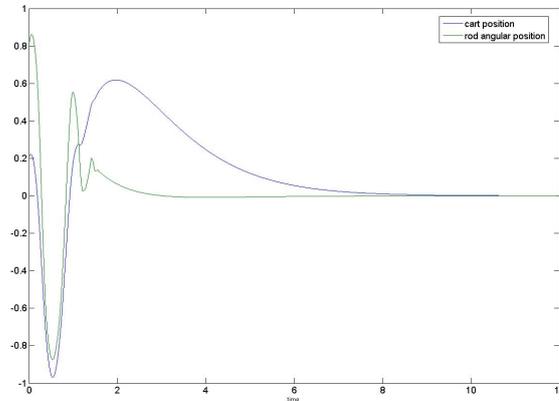
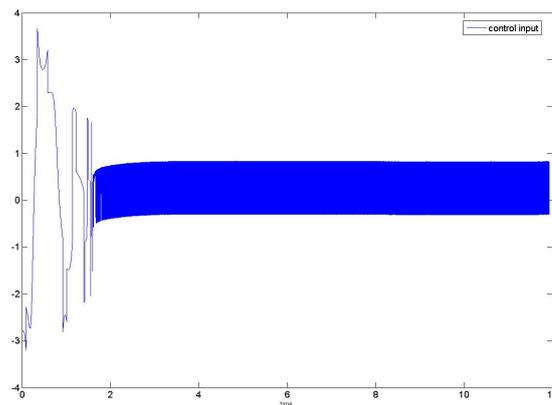
FIGURE 3.20 – Simulation numérique sans frottement non-matching, $x[m]$ et $\theta[rd]$ 

FIGURE 3.21 – Entrée de commande (Volts).

il était prévu théoriquement, le chariot ainsi que le pendule sont asymptotiquement stabilisés.

Ensuite, des essais expérimentaux ont été faits sur le pendule inversé réel, ayant des frottements (non-matching) sur le pendule et des frottements (matching) sur le chariot. Pour mettre en évidence la robustesse du contrôleur, une perturbation a été manuellement appliquée au pendule pendant l'intervalle de temps allant de 6 à 10 secondes. En réglant les paramètres $\lambda_1 = 0.2$ et $\lambda_2 = 0.25$, de bonnes performances d'un point de vue stabilité et robustesse ont été obtenues (voir Fig. 3.22, 3.23 et 3.24). On remarque qu'entre 6 et 10 secondes, l'amplitude de la commande est moins importante. Ceci est dû à la force manuelle appliquée. Ce qu'on voit donc sur le schéma est la résultante

de la commande et de la perturbation manuelle. Enfin, à titre comparatif, un résultat expérimental pour un essai de stabilisation par retour d'état statique est présenté (Fig. 3.25). On voit bien l'apparition de cycles limites de grande amplitude.

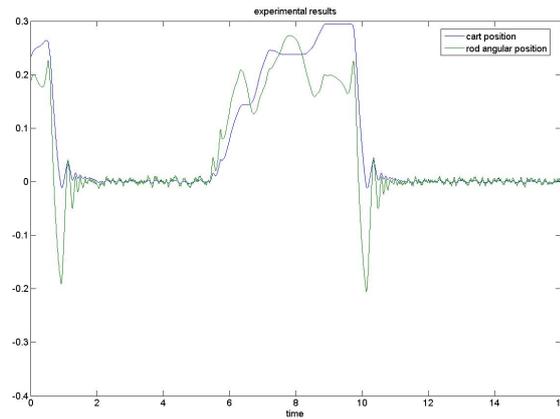


FIGURE 3.22 – Résultat expérimental (MGSO) $x[m]$ et $\theta[rd]$.

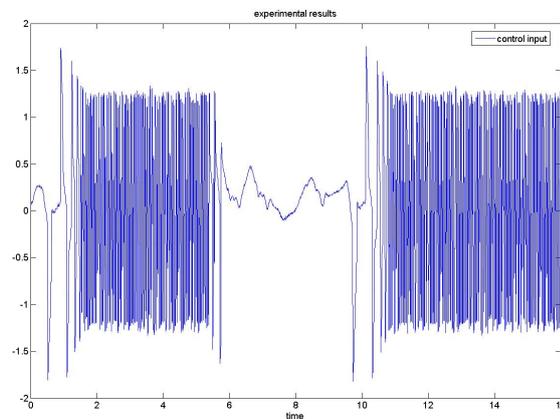


FIGURE 3.23 – Résultat expérimental (MGSO), entrée de commande (volts).

3.4 Stabilisation orbitale du pendule inversé

3.4.1 Approche par passivité

Considérons le problème de la stabilisation orbitale du pendule inverse sur son orbite homocline, c'est-à-dire que le chariot est immobile en une position désirée et que le

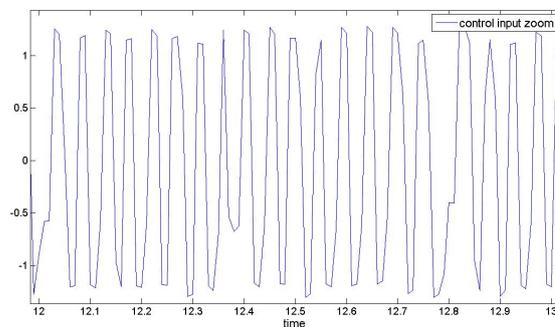
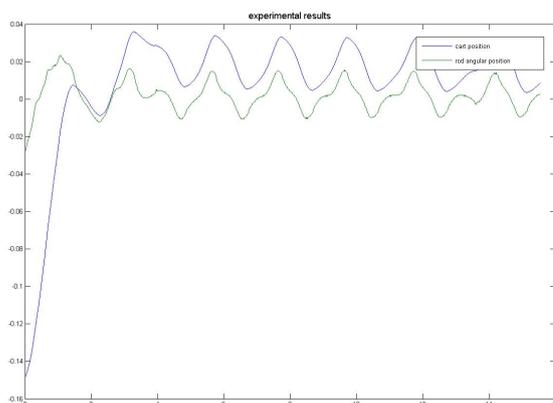


FIGURE 3.24 – Un zoom de la figure 3.23

FIGURE 3.25 – Résultat expérimental : Commande par retour d'état statique, $x(m)$ et $\theta(rad)$

pendule effectue des oscillations entre $0^+ \rightarrow \pi \rightarrow 0^- \rightarrow \pi \rightarrow 0^+$ où 0 est la position d'équilibre instable et π la position d'équilibre stable. En d'autres termes, il s'agit de ramener les dynamiques d'un pendule inversé à celles d'un pendule simple.

Reprenons les équations dynamiques du pendule inversé

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = \tau - f_x \quad (3.25)$$

$$ml\ddot{x} \cos \theta + ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = f_\theta, \quad (3.26)$$

où f_x et f_θ sont les efforts de frottement sur le chariot et la tige respectivement.

L'énergie mécanique (globale) du système est donnée par

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (3.27)$$

où les trois premiers termes du membre de droite représentent l'énergie cinétique et le dernier l'énergie potentielle.

Il est intéressant de noter que la variation de l'énergie mécanique

$$\dot{E} = \dot{x}(\tau - f_x) + \dot{\theta}f_\theta, \quad (3.28)$$

est égale à la différence entre le travail de la commande et le travail des forces de frottements.

Dans le cas idéal sans frottement, afin de stabiliser le pendule inversé sur son orbite homocline, ce qui revient à réduire sa dynamique à celle d'un simple pendule, la fonction de Lyapunov suivante a été choisie dans [SPLE00], [SF01] et [LFB00]

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} E(q, \dot{q})^2 + \frac{k_v}{2} \dot{x}^2 + \frac{k_x}{2} x^2. \quad (3.29)$$

Notons que s'il existe un contrôle forçant V à zéro, on obtient $E = x = \dot{x} = 0$. En remplaçant dans (3.27), on obtient $\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta$ qui correspond à la dynamique d'un pendule simple. La dérivée temporelle de V est donnée par

$$\dot{V} = k_E E \dot{E} + k_v \dot{x} \ddot{x} + k_x x \dot{x}, \quad (3.30)$$

Afin de rendre \dot{V} négative, on peut choisir le contrôle suivant ([SPLE00], [SF01] et [LFB00])

$$\tau = \frac{-k_{dx} \dot{x} - k_x x - k_v \frac{ml^2 \sin \theta \dot{\theta}^2 - mgl \sin \theta \cos \theta}{D}}{k_E E + \frac{k_v l}{D}}, \quad (3.31)$$

ce qui donne

$$\dot{V} = -k_{dx} \dot{x}^2. \quad (3.32)$$

Il a été montré dans [SPLE00], [SF01] et [LFB00], en utilisant le principe d'invariance de LaSalle qu'en appliquant (3.31) $V \rightarrow 0$ asymptotiquement. On conclut que le contrôleur choisi réduit les dynamiques d'un pendule inversé à celles d'un pendule simple non actionné.

Par contre, on voit bien que le contrôle choisi n'assure pas la négativité de la fonction \dot{V} en présence de frottement puisque :

$$\dot{V} = -k_{dx} \dot{x}^2 - k_E E \dot{x} f_x + k_E E \dot{\theta} f_\theta - \frac{k_v l \dot{x}}{D} f_x - \frac{k_v \dot{x} \cos \theta}{D} f_\theta \quad (3.33)$$

Notons qu'en présence de frottement sur la rotation de la tige, il est impossible de converger sur l'orbite homocline (on ne peut pas assurer $\dot{V} \leq 0$). De façon intuitive, on peut remarquer que le contrôle est incapable d'agir sur la tige du pendule lorsque celle-ci est à la position horizontale (la matrice de commandabilité n'est pas de rang plein en cette position) alors que les frottements f_θ continueront d'agir.

Lorsqu'on s'intéresse à la construction d'une commande globale du pendule inversé, le but de la stabilisation orbitale est d'amener le pendule suffisamment proche de la position d'équilibre instable afin que les états entrent dans le domaine d'attraction du contrôleur local. On peut dans ce cas parler d'une orbite dite quasi homocline qui

se traduit par des oscillations du pendule, en présence de frottement, se rapprochant suffisamment de la position instable désirée.

On propose donc une modification de la fonction V en rajoutant un terme $E_0 = \int_{\Omega} f_{\theta} \dot{\theta} d\theta$ où Ω est une courbe fermée. Cette intégrale est difficile à calculer et Ω n'est pas bien définie, mais puisqu'on est dans un contexte pratique, des simulations successives permettent de déterminer facilement une valeur acceptable de E_0 .

Soit donc la fonction

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} (E(q, \dot{q}) - E_0)^2 + \frac{k_v}{2} \dot{x}^2 + \frac{k_x}{2} x^2, \quad (3.34)$$

lorsque V s'approche de 0 (mais ne tend pas vers 0) E s'approche de $E_0 > 0$. Ce E_0 "compense" donc les frottements afin d'aboutir à des oscillations d'amplitude suffisamment grandes.

3.4.1.1 Simulations

Afin de valider les concepts présentés, des simulations numériques ont été faites. Le modèle non linéaire (3.25)-(3.26) du pendule inversé a été simulé.

La première simulation, représentée dans la figure 3.26, montre la stabilisation de

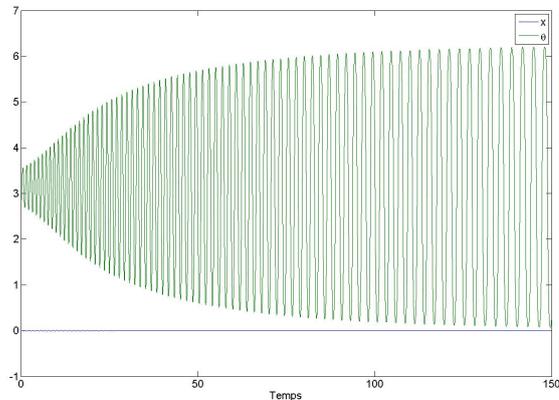


FIGURE 3.26 – Stabilisation de l'orbite homocline du pendule inversé : absence de frottement $\theta[rd]$ (3.31)

l'orbite homocline du pendule inversé en l'absence de frottements et en utilisant le contrôle (3.31). On voit bien que le pendule s'approche suffisamment de 0 (modulo 2π) qui correspond à la position d'équilibre instable. L'inconvénient majeur de cette stratégie est le temps de convergence. On rajoute ensuite des perturbations et des frottements au modèle simulé et on voit dans la figure 3.27 que le pendule n'atteint pas son orbite homocline. De plus, l'amplitude des oscillations est insuffisante pour que les trajectoires du système entrent dans le domaine d'attraction du contrôleur local si ce dernier est

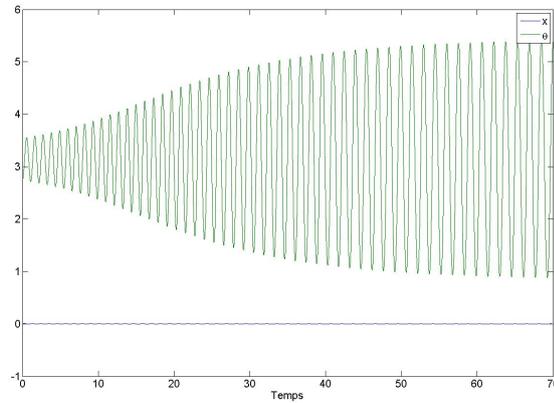


FIGURE 3.27 – Tentative de stabilisation de l’orbite homocline en présence de frottement sec sur la tige $\theta[rd]$

un retour d’état statique linéaire basé sur les équations linéarisées. Il est important de mentionner que même si le contrôle local admet un domaine d’attraction plus grand (par exemple comme dans le cas du contrôle quasi-homogène développé dans le chapitre précédent), la course limité du chariot empêche l’implémentation du contrôleur (3.31). Pour remédier à ce problème, on introduit un biais E_0 sur l’énergie globale E (3.34). Le résultat est présenté dans la figure (3.28) On voit bien que l’amplitude des oscillations

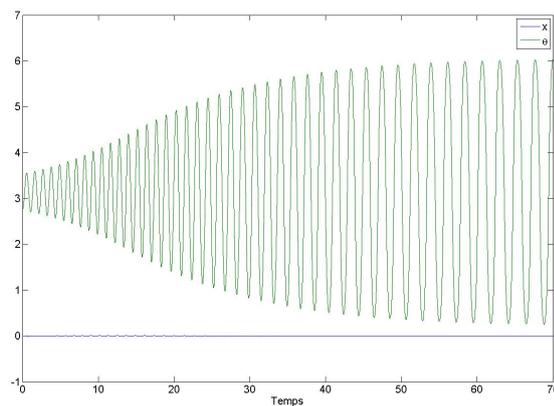


FIGURE 3.28 – Tentative de stabilisation de l’orbite homocline en présence de frottement sec sur la tige et en rajoutant un biais E_0 $\theta[rd]$

est plus grande que dans la figure (3.27). La probabilité que les trajectoires du système entrent dans le domaine d’attraction du contrôleur local est alors plus grande.

Enfin, on a effectué une simulation où les conditions initiales sont choisies de sorte que le système perturbé (présence de frottement) démarre sur l'orbite homocline (du système idéal). On remarque que les oscillations du pendule diminuent avec le temps et atteignent une certaine amplitude (voir figure 3.29).

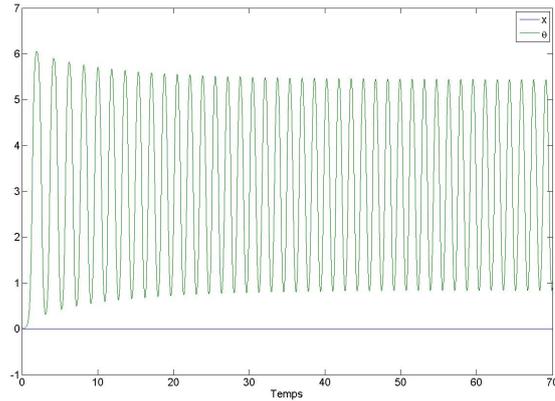


FIGURE 3.29 – Tentative de stabilisation de l'orbite homocline en présence de frottement sec, le système démarre sur son orbite homocline $\theta[rd]$

3.4.1.2 Résultats expérimentaux

Les concepts discutés et simulés précédemment sont aussi soutenus par des résultats expérimentaux sur le pendule inversé. Les résultats du système bouclé par le contrôle (3.31) sont présentés dans les figures 3.30, 3.31 et 3.32.

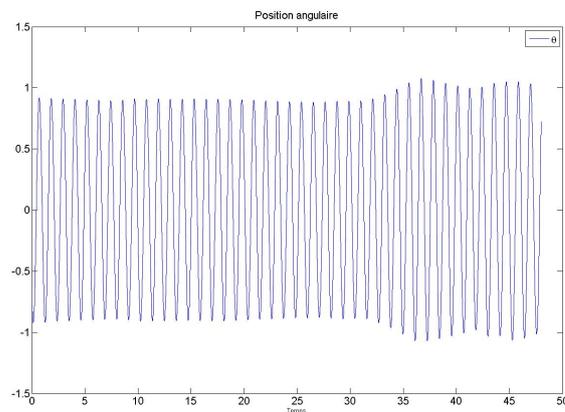
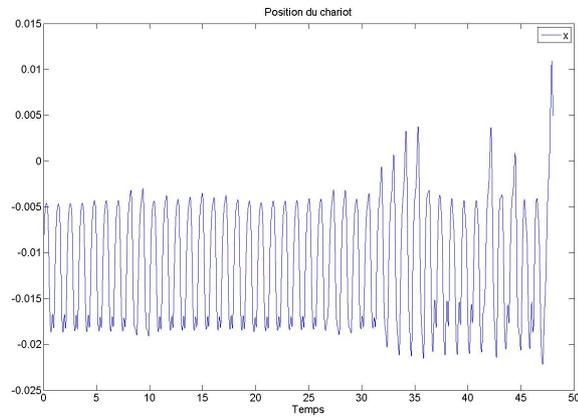
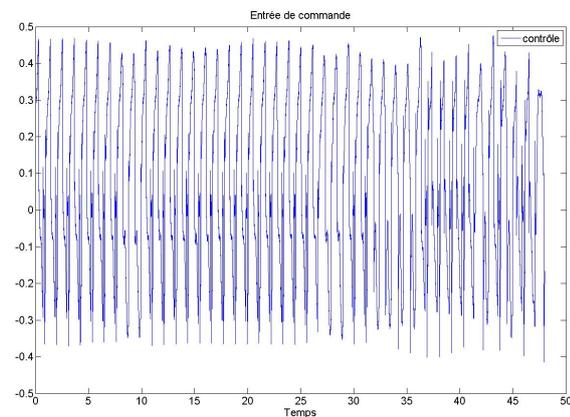
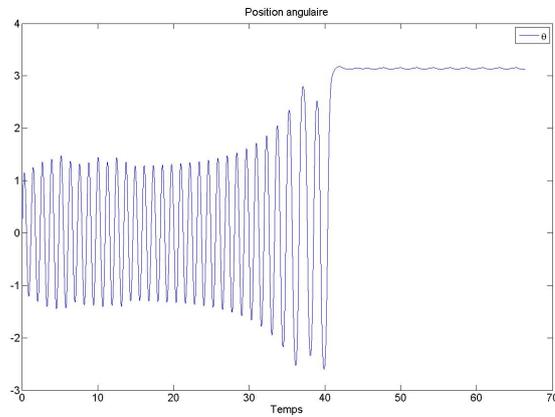
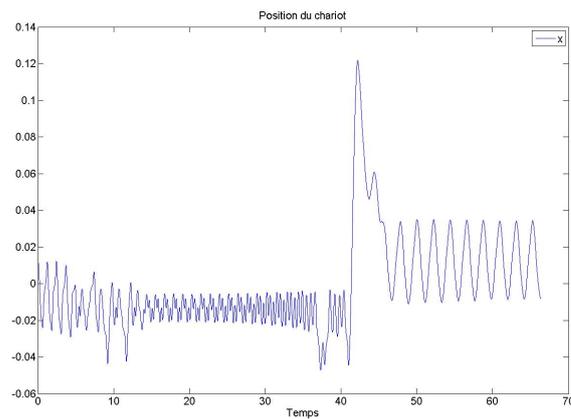


FIGURE 3.30 – Résultat expérimental, $\theta [rd]$

FIGURE 3.31 – Résultat expérimental, x [m]FIGURE 3.32 – Résultat expérimental, entrée de commande τ (Volts)

Étant donnée la présence inévitable des perturbations et des frottements sur le système réel, le contrôle est incapable d'amener la tige suffisamment proche de la position d'équilibre instable. Afin de pallier ce problème, on rajoute dans la boucle de commande le paramètre E_0 . Les résultats sont présentés dans les figures 3.33, 3.34 et 3.35. On remarque que l'amplitude des oscillations devient acceptable. Notons enfin que le contrôle local utilisé est un retour d'état statique linéaire faisant apparaître des cycles limites en présence de frottement sur l'axe de rotation du pendule (dans l'intervalle allant de 45 à 70 secondes des figures 3.33 et 3.34).

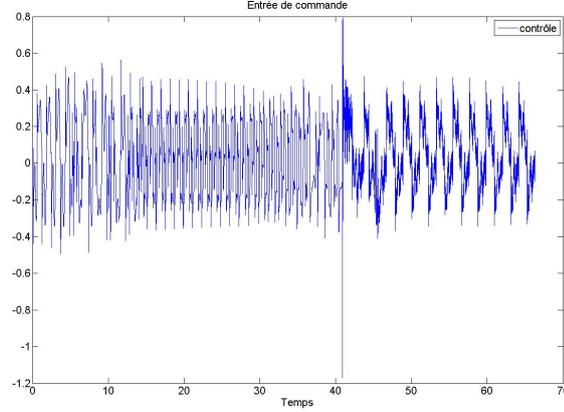
FIGURE 3.33 – Résultat expérimental, θ [rd]FIGURE 3.34 – Résultat expérimental, x [m]

3.4.2 Synthèse d'une stabilisation orbitale à l'aide d'un contrôleur quasi-homogène

Cette partie est principalement tirée de [SFO⁺07] [SRF⁺07].

La stabilisation orbitale par commande quasi-homogène discutée dans le chapitre 2 est illustrée sur le pendule inversé. La stabilisation orbitale de ce genre de système incorpore toutes les caractéristiques essentielles du traitement théorique formant une base pour l'extension à d'autres systèmes sous-actionnés.

L'efficacité de cette synthèse de stabilisation orbitale sera illustrée par des simulations numériques ainsi que des expérimentations sur le pendule inversé. La stabilisation orbitale est appliquée au problème de balancement du système pendule-chariot afin de


 FIGURE 3.35 – Résultat expérimental, entrée de commande τ [V]

pouvoir amener le pendule de la position verticale descendante stable vers la position verticale ascendante instable et de le stabiliser en cette position tout en stabilisant le chariot en une position finale désirée.

Le contrôleur assurant le balancement est composé d'une boucle interne assurant une linéarisation partielle du pendule inversé et d'une boucle externe qui fournit suffisamment d'énergie au système pour se rapprocher de son orbite homocline qui correspond à un niveau d'énergie égale à celui de la position verticale ascendante (d'équilibre instable). Une fois que le système atteint son orbite homocline, le contrôleur assurant le balancement est déconnecté et le système décrit son orbite homocline.

3.4.2.1 Conception de la commande

Reprenons les équations dynamiques du pendule inversé

$$(M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - ml\ddot{\theta} \cos \theta = \tau + w_1(t) - \psi(\dot{x}), \quad (3.35)$$

L'objectif est de concevoir un contrôleur qui permette au système de suivre une trajectoire $z(t)$ générée par l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41) tout en atténuant l'effet des forces de frottement ainsi que des variables exogènes (2.49), i.e :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [z(t) + x(t)] = 0. \quad (3.37)$$

Comme il a été indiqué dans la partie théorique du chapitre précédent, on commence par faire une linéarisation partielle dans le but de réduire les dynamiques. Pour cela, on réécrit (3.36) sous la forme

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4ml^2} [ml \cos \theta \ddot{x} + mgl \sin \theta + w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})]. \quad (3.38)$$

Substituons maintenant l'équation (3.38) dans (3.35), ce qui mène à

$$[(m+M) - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta] \ddot{x} = \tau + w_1(t) - \psi(\dot{x}) - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}mg \cos \theta \sin \theta + \frac{3}{4l}[w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] \cos \theta. \quad (3.39)$$

Finalement, posons

$$J = (m+M) - \frac{3}{4}m \cos^2 \theta = \frac{1}{4}m + M + \frac{3}{4}m \sin^2 \theta > 0$$

et

$$\tau = Ju + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - \frac{3}{4}mg \cos \theta \sin \theta \quad (3.40)$$

où u est la nouvelle entrée de commande. La linéarisation désirée est obtenue :

$$\ddot{x} = u + \frac{3 \cos \theta}{4lJ}[w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{1}{J}[w_1(t) - \psi(\dot{x})] \quad (3.41)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4l} \left\{ u \cos \theta + \frac{3m \cos^2 \theta + 4J}{4mlJ}[w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{\cos \theta}{J}[w_1(t) - \psi(\dot{x})] + g \sin \theta \right\} \quad (3.42)$$

Soit maintenant la sortie :

$$y(t) = z(t) + x(t), \quad (3.43)$$

que l'on désire forcer à zéro. En dérivant deux fois y , on obtient :

$$\ddot{y} = u + \frac{3 \cos \theta}{4lJ}[w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + \frac{1}{J}[w_1(t) - \psi(\dot{x})] - \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\nu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} - \nu^2 z \quad (3.44)$$

On définit le contrôle :

$$u = \frac{3\varphi_v \cos \theta}{4lJ} \dot{\theta} + \frac{\psi_v}{J} \dot{x} + \varepsilon \left[\left(z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\nu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{z} + \nu^2 z - \alpha \text{sign}(y) - \beta \text{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}, \quad (3.45)$$

avec les paramètres :

$$h, p \geq 0, \quad \alpha - \beta > \frac{3(\varphi_c + N_2)}{4lJ} + \frac{\psi_c + N_1}{J}. \quad (3.46)$$

Le système en boucle fermée (3.44), (3.45) est transformé en

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{3 \cos \theta}{4lJ}[w_2(t) - \varphi_c \text{sign}(\dot{\theta})] + \frac{1}{J}[w_1(t) - \psi_c \text{sign}(\dot{x})] \\ &\quad - \alpha \text{sign}(y) - \beta \text{sign}(\dot{y}) - hy - p\dot{y}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

D'après le Théorème 2.2.5 du chapitre précédent, le système quasi-homogène (3.47) avec le jeux de paramètres (3.46) est stable en temps fini en présence de forces de frottement et de perturbations exogènes uniformément bornées satisfaisant $|\omega_1| < N_1$, $|\omega_2| < N_2$. L'objectif de commande, c'est-à-dire la poursuite de la trajectoire générée par l'oscillateur, est donc atteint. La dynamique équivalente est donnée par

$$\frac{4}{3} l \ddot{\theta} = \cos \theta \left\{ \varepsilon \left[\left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\nu^2} \right) - \rho^2 \right] \dot{x} + \nu^2 x \right\} + \frac{1}{ml}[w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})] + g \sin \theta \quad (3.48)$$

Notons que pour les orbites $x(t)$ initialisées sur le cycle limite (2.51) de l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41), la dynamique équivalente (2.67) se réduit à

$$\frac{4}{3} l \ddot{\theta} = \cos \theta \nu^2 x + g \sin \theta + \frac{1}{ml} [w_2(t) - \varphi(\dot{\theta})].$$

Dans ce qui suit, la validité et les performances de la synthèse proposée sont mises en évidence par des simulations numériques et des expérimentations sur le banc d'essai du pendule inversé.

3.4.2.2 Simulations numériques

Les conditions initiales choisies pour le pendule inversé et l'oscillateur de Van der Pol modifié sont les suivantes : $x(0) = -0.3 \text{ m}$, $\theta(0) = 3.14 \text{ rad}$, et $z(0) = 0.3 \text{ rad}$. Les vitesses initiales sont choisies égales à zéro. Les paramètres de la trajectoire de référence sont $\rho = 0.2$ et $\varepsilon = 2$. Pour montrer la capacité du contrôleur à déplacer le pendule d'une orbite à une autre, on modifie les paramètres du modèle de référence, à un instant $t_0 \approx 25 \text{ s}$, où la fréquence ν du modèle de référence passe de la valeur $\nu = 0.8\pi \text{ s}^{-1}$ à $\nu = 1.3\pi \text{ s}^{-1}$.

Les résultats de simulation sont présentés dans la figure 3.36. Cette figure montre que le système pendule-chariot bouclé par le retour (3.45) et perturbé par les entrées exogènes $w_1(t) \equiv 0.5 \text{ N}$, $w_2(t) \equiv 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}$, génère un mouvement quasi-périodique borné. Comme il a été montré dans la partie théorique, le transfert orbital est achevé par un simple changement de la valeur de la fréquence ν du modèle de référence. En examinant la figure 3.36, on conclut à bonnes performances du contrôleur.

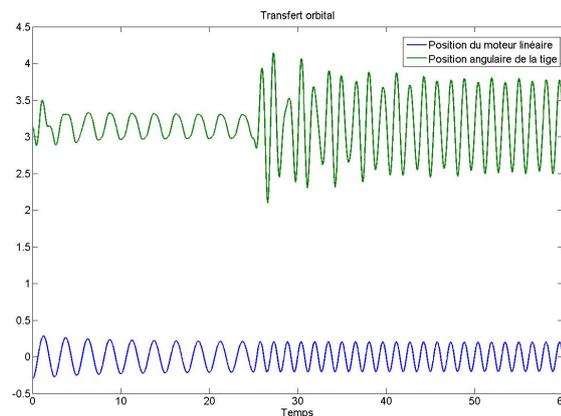


FIGURE 3.36 – Passage d'une orbite à une autre $x [m]$ et $\theta [rd]$.

3.5 Application au balancement et stabilisation du système pendule-chariot

Le problème de stabilisation globale du pendule inversé consiste en une phase de balancement suivie d'une phase de stabilisation locale. Plus concrètement, il s'agit de ramener le pendule de sa position verticale descendante vers sa position verticale ascendante et le maintenir en cette position. Par nature, le pendule inversé n'est pas commandable une fois que le pendule passe l'horizontale. En conséquence une commande continue lisse n'existe pas pour assurer la stabilisation globale du pendule inversé, ce qui confirme l'intérêt de commandes de nature hybride. Un contrôleur est tout d'abord synthétisé pour assurer la stabilisation orbitale du pendule et atteindre l'orbite homocline dont le niveau d'énergie est égale à celui du pendule en sa position d'équilibre instable. Une fois que l'orbite homocline est atteinte, au moment où la vitesse du chariot est infiniment petite, le contrôleur de stabilisation orbitale est débranché et le système suit son homocline. Enfin, le contrôleur assurant la stabilisation locale est mis en route, une fois que le mouvement homocline entre dans le bassin d'attraction de ce dernier.

3.5.1 Synthèse du contrôleur orbital

Par un choix minutieux des paramètres ε , ρ , ν , la synthèse de stabilisation orbitale (2.41), (3.40), (3.45) devient applicable au pendule inversé afin de le ramener de sa position d'équilibre stable vers sa position d'équilibre instable. Pour appliquer la méthode avec succès, l'énergie donnée au système doit être bien calculée. En effet, vue la présence de frottements, l'orbite homocline ne pourra pas être atteinte (car les frottements ne peuvent pas être compensés en particulier à la position horizontale du pendule). Il faut donc donner suffisamment d'énergie pour atteindre le bassin d'attraction du contrôleur locale et vaincre les frottements. Le niveau d'énergie à fournir dans le cas d'un système idéal sans frottement est telle que l'énergie totale

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 - ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (3.49)$$

du système en boucle fermée augmente d'une valeur initiale négative

$$E_{min} = -2mgl, \quad (3.50)$$

pour arriver à zéro

$$E_0 = 0, \quad (3.51)$$

au moment où la vitesse du chariot devient suffisamment petite. Ainsi synchronisée, le système non commandé et sans frottement atteint son orbite homocline qui, par la suite, convergera à la position d'équilibre désirée ayant le même niveau d'énergie (3.51).

Afin de prendre en considération les efforts de frottement, dont la présence est inévitable dans les systèmes réels et dont l'effet se traduit dans le cas de la stabilisation orbitale par la dissipation d'une certaine quantité de l'énergie cédée au système, un

surplus d'énergie est donnée au système de telle sorte que l'énergie mécanique globale devienne positive :

$$E_0 = \delta > 0. \quad (3.52)$$

avec un certain δ , déterminé expérimentalement. Une fois ce niveau d'énergie atteint, le système non forcé génère une orbite qui converge vers le point d'équilibre instable désirée. Cette orbite est nommée *quasi-homocline*.

Donc, le réglage du niveau d'énergie δ et des paramètres de la trajectoire de référence ε , ρ , ν est crucial pour le succès du balancement. Des valeurs acceptables de ces paramètres sont trouvés par des simulations numériques successives. Le paramètre ρ , responsable de l'amplitude du cycle limite et en conséquence de l'amplitude des oscillations du chariot, est simplement choisi légèrement inférieur à la course admissible du chariot (limitation de construction de la course du chariot). Les paramètres ε et ν sont choisis de façon à assurer respectivement un taux de convergence raisonnable de l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41) et un niveau d'énergie désiré (3.52) du système en une position du chariot où la vitesse est quasi-nulle (un ε plus grand implique une convergence plus rapide ; un ν plus grand implique un cycle limite plus énergétique et donc une énergie plus grande du chariot se déplaçant sur le cycle limite). Ces paramètres sont itérativement réglés afin d'atteindre une orbite quasi-homocline. Le contrôleur est désactivé lorsque l'orbite quasi-homocline est atteinte. Le système se déplace alors sur celle-ci jusqu'à arriver suffisamment près de la position instable désirée.

En désactivant le contrôleur de stabilisation orbitale, une fois le système est synchronisé sur l'orbite homocline, suivie d'une activation adéquate du contrôle locale une fois que le pendule entre dans son bassin d'attraction accomplit la synthèse d'un contrôle globale pour le pendule inversé asymptotiquement stable autour de la position d'équilibre instable. Ce contrôle global est expérimenté sur le pendule inversé et présente une alternative aux approches énergétiques présentées dans [AF00, LFB00] pour la stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés.

3.5.2 Expérimentations

Les valeurs numériques utilisées pour les gains du contrôle (3.45) sont les suivantes : $\alpha = 3 \text{ N}\cdot\text{m}$, $\beta = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$, $h = 0$, $p = 0$. Avec ce choix des paramètres, la condition (3.46) est satisfaite et le suivi de l'oscillateur de Van der Pol modifié (2.41) est alors garanti. Les paramètres de référence sont réglés à $\varepsilon = 40 \text{ [rad]}^{-2}\text{s}^{-1}$, $\rho = 0.5 \text{ rad}$, $\nu = 1 \text{ s}^{-1}$. En tenant compte du choix des paramètres précédent, le niveau d'énergie désirée prend la valeur $\delta = 0.8 \text{ N}\cdot\text{m}$. Une fois cette énergie du système atteinte, simultanément avec $\|x\| = \rho$, $\dot{x} = 0$, le contrôleur de stabilisation orbitale est désactivé et le pendule non forcé est amené en haut sur sa trajectoire quasi-homocline.

Les conditions initiales de la position du chariot, de l'angle du pendule et du modèle de référence choisies pour l'expérience sont : $x(0) = -0.3 \text{ m}$, $\theta(0) = \pi \text{ rad}$ (position verticale descendante) et $z(0) = 0.3 \text{ m}$, tandis que toutes les vitesses sont choisies égales à zéro.

Le contrôleur hybride a été implémenté pour balancer le pendule et le faire parvenir près de la position d'équilibre instable alors que le chariot est stabilisé autour d'une position finale désirée. Des résultats expérimentaux du mouvement résultant du système bouclé sont présentés dans la figure 3.37.

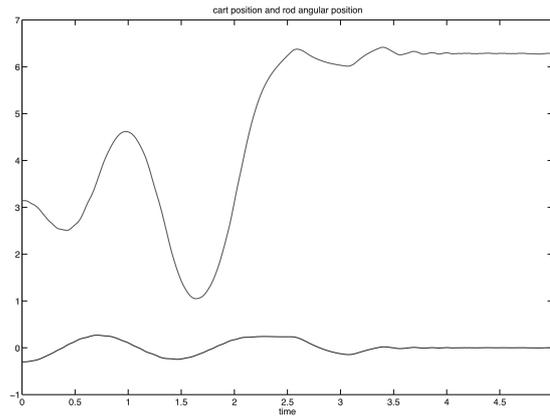


FIGURE 3.37 – Stabilisation globale du pendule inversé : résultat expérimental $x(m)$ et $\theta(rad)$.

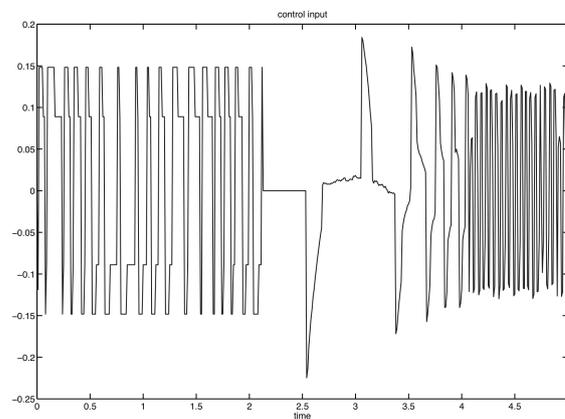


FIGURE 3.38 – Commande correspondant à la stabilisation globale du pendule inversé (Volts).

L'étape entre la désactivation du contrôle orbital et l'activation du contrôle local a lieu entre 2 et 3 secondes. Notons que le contrôle est égal à zéro dans cet intervalle (voir figure 3.38) et que la vitesse du chariot est quasiment nulle (figure 3.37). Donc, comme on l'a déjà mentionné, le pendule suit l'orbite quasi-homocline et arrive près

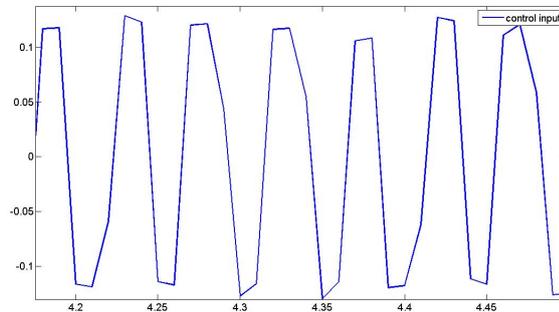


FIGURE 3.39 – Un zoom de la figure 3.38

de sa position d'équilibre instable. A ce moment le contrôleur local est activé. Nous avons vu que ce contrôleur, conçu sur la base des équations dynamiques non linéaires, a certaines propriétés de robustesse ainsi qu'un large domaine d'attraction. La condition de commutation a été choisie telle que le pendule fasse un angle de moins de 10° avec la position instable. Ceci est dû au fait que la course du chariot est assez courte.

Pour avoir une idée de la performance du contrôle développé, les résultats expérimentaux peuvent être comparés à l'approche par passivité de la section 3.4.1, où la commutation du contrôleur assurant le balancement au contrôleur local s'effectue après plus d'une quarantaine de secondes (voir figure 3.33). Dans notre approche, un temps de seulement 2.5 secondes est nécessaire pour mettre le pendule sur le niveau d'énergie désiré, et donc la stabilisation globale est plus rapide.

Chapitre 4

Quelques contributions aux techniques algébriques

4.1 Introduction

La dérivation numérique, ou l'estimation des dérivées d'un signal temporel bruité est un problème ancien dans les domaines de l'analyse numérique, du traitement du signal et de l'automatique. Depuis longtemps, ce problème a attiré l'attention vu son importance dans les domaines de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Différentes approches ont été présentées. Citons à titre d'exemple les observateurs [Chi02], [DK99], [Ibr03]. Le lecteur peut aussi consulter [Ibr04] et [Lev93] [FBP03a] [SMD⁺06] pour d'autres approches de dérivations par modes glissants. En traitement du signal, on utilise couramment les filtres digitaux conçus dans le domaine fréquentiel [RM87]. Une approche intéressante publiée dans [AA95] consiste à inverser la fonction de transfert (qui est à minimum de phase) d'un intégrateur proprement conçu afin d'obtenir un différentiateur. Toutes ces approches sont candidates de l'approche classique basée sur les moindres-carrés qui, après une étape de régularisation (voir [DMPD96], [ID04]), donne des résultats efficaces hors-ligne.

La dérivation numérique et l'estimation paramétrique ont été revisitées par l'intermédiaire de l'algèbre différentielle dans [FSR03] (voir aussi [FMMSR03] et [MJF07]). Des applications en commande tolérante aux fautes, traitement du signal, traitement d'image ainsi qu'en commande non linéaire peuvent être trouvés dans [FSR05], [FJMSR04], [FJMSR05], [FJMS05], [FSR04]. Afin de présenter l'idée de base de cette méthode, nous commençons par un exemple introductif.

Considérons un polynôme du premier degré $p_1(t) = a_0 + a_1 t$, $t \geq 0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Supposons que $p_1(t)$ est connu (mesurable) et que l'on désire estimer a_0 et a_1 . Réécrivons cette équation dans le domaine opérationnel $P_1 = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2}$. Multiplions par s^2 , on obtient

$$s^2 P_1 = a_0 s + a_1. \quad (4.1)$$

Si on dérive une fois (4.1) par rapport à s , on obtient :

$$s^2 \frac{dP_1}{ds} + 2sP_1 = a_0. \quad (4.2)$$

Les coefficients a_0, a_1 sont obtenus à partir du système triangulaire (4.1), (4.2). Notons que la multiplication par s dans le domaine fréquentiel correspond à une dérivation par rapport au temps dans le domaine temporel. Ceci n'est pas désirable en présence de bruit de mesure. Pour pallier ce problème, on divise par s suffisamment de fois, ce qui correspond dans le domaine temporel à une intégration sur une fenêtre de temps. Donc la multiplication de (4.1), (4.2) par s^{-n} , $n \geq 2$ correspond à des intégrations itérées (d'ordre n) qui jouent le rôle de filtre passe-bas servant à atténuer l'effet du bruit de mesure. D'habitude, une fenêtre de temps courte est suffisante pour obtenir des valeurs précises de a_0 et a_1 . On obtient ainsi une estimation débruitée de ce signal avec a_0 et une estimation de la dérivée de P_1 via a_1 .

L'extension de cette procédure à des polynômes de degré plus élevé est simple. Pour estimer les dérivées d'une fonction $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, on prend un développement de Taylor tronqué à un certain ordre et on applique des calculs similaires à ceux précédemment présentés. En utilisant des fenêtres temporelles glissantes, on peut estimer les dérivées de façon efficace. Notons que cette méthode devient de plus en plus mal conditionnée pour des ordres de troncature élevés [MJF07]. Des techniques d'éliminations, dont les concepts de base seront présentés dans la section 4.2, ont été présentés dans [MJF07] afin d'obtenir des estimateurs individuels (sans résoudre un système linéaire triangulaire).

La section 4.3 présente des techniques d'implémentation sur calculateur numérique des algorithmes qui sont développés dans la section 4.2. Des résultats expérimentaux de la commande du pendule inversé, utilisant des algorithmes de dérivation algébrique dans la boucle, seront présentés dans la section 4.4. Enfin, une extension des techniques algébriques pour l'estimation des dérivées partielles d'un champ scalaire ou vectoriel seront présentés dans la section 4.5.

4.2 Dérivation numérique : Rappels

Dans cette section, on rappelle les concepts présentés dans [MJF07]. Soit $y(t) = x(t) + n(t)$ une observation bruitée sur un intervalle de temps fini d'un signal $x(t)$, dont les dérivées sont à estimer. Le signal $x(t)$ est supposé analytique. Il est bien connu que tout signal analytique peut être représenté par son développement de Taylor en zéro :

$$x(t) = \sum_{i \geq 0} x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}.$$

Sur un intervalle fini de temps, une troncature de la série de Taylor à l'ordre N est utilisée pour modéliser le signal :

$$x_N(t) = \sum_{i \geq 0}^N x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

Les estimations des dérivées successives requièrent quelques manipulations mathématiques, comme des dérivations temporelles et des intégrations par parties sur (4.3), qui correspondent dans le domaine opérationnel à des multiplications par s et des dérivations par rapport à s . Pour une présentation compacte, les calculs sont effectués dans le domaine opérationnel en appliquant la transformation de Laplace à (4.3), ce qui donne

$$s^{N+1}\hat{x}_N(s) = s^N x(0) + s^{N-1}\dot{x}(0) + \dots + x^{(N)}(0),$$

où $\hat{x}_N(s)$ est l'analogie dans le domaine opérationnel de $x_N(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Afin de pouvoir synthétiser des estimateurs individuels de la dérivée n^e (voir [MJF07] pour une étude détaillée sur les estimateurs simultanés et individuels), un opérateur différentiel doit être proprement choisi pour annihiler les coefficients restant $x^{(j)}(0)$, $j \in \{0, \dots, N\} - \{n\}$. Il existe plusieurs opérateurs différentiels satisfaisant cette condition. Le plus simple est :

$$\Theta_\kappa^{N,n} = \frac{d^{n+\kappa}}{ds^{n+\kappa}} \frac{1}{s} \frac{d^{N-n}}{ds^{N-n}} \quad \kappa \in \mathbb{N}^+.$$

Il donne l'estimateur suivant pour $x^{(n)}(0)$:

$$\frac{x^{(n)}(0)}{s^{\nu+n+\kappa+1}} = \frac{(-1)^{n+\kappa}}{(n+\kappa)!(N-n)!} \frac{1}{s^\nu} \Theta_\kappa^{N,n}(s^{N+1}x),$$

qui est strictement propre pour $\nu = N + 1 + \mu$, $\mu \geq 0$. Une famille d'estimateurs propres paramétrés par κ, μ et N est obtenue. Si on revient au domaine temporel, on obtient

$$\tilde{x}_N^{(n)}(0) = \frac{(\nu+n+\kappa)!(-1)^{n+\kappa}}{(n+\kappa)!(N-n)!T^{\nu+n+\kappa}} \int_0^T \Pi(\tau)\hat{x}(\tau)d\tau, \quad (4.4)$$

avec :

$$\Pi(\tau) = \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N-n}{i} \frac{(N+1)!}{(n+i+1)!} \sum_{j=0}^{N+\kappa} \binom{n+\kappa}{j} \frac{(n+1)!}{(1+j-\kappa)!} \frac{(T-\tau)^{\nu+\kappa-j-2}(-\tau)^{i+j}}{(\nu+\kappa-j-2)!}.$$

A titre d'exemple, on peut obtenir, après normalisation de l'intégrale à l'intervalle $[0, 1]$, les estimateurs suivants

$$\dot{\tilde{x}}_2(0) = \frac{-30}{T} \int_0^1 (3 - 32\tau + 90\tau^2 - 96\tau^3 + 35\tau^4)y(T\tau)d\tau,$$

pour $n = 1$, $N = 2$, $\mu = 5$, $\kappa = 1$,

$$\ddot{\tilde{x}}_3(0) = \frac{336}{T^2} \int_0^1 (4 - 75\tau + 360\tau^2 - 700\tau^3 + 600\tau^4 - 189\tau^5)y(T\tau)d\tau$$

pour $n = 2$, $N = 3$, $\mu = 6$, $\kappa = 1$.

4.3 Implémentation

Un point clé pour le succès des algorithmes de dérivation est l'implémentation numérique. Les systèmes physiques sont généralement commandés par l'intermédiaire de cartes temps réel reliées à un ordinateur fonctionnant en discret. Il s'agit donc de discrétiser les intégrales (4.4) et de les estimer numériquement. Il apparaît que les méthodes les plus basiques des trapèzes ou de Simpson sont bien adaptées à notre problème. On présente dans cette section quelques conseils pratiques pour l'implémentation sur un ordinateur.

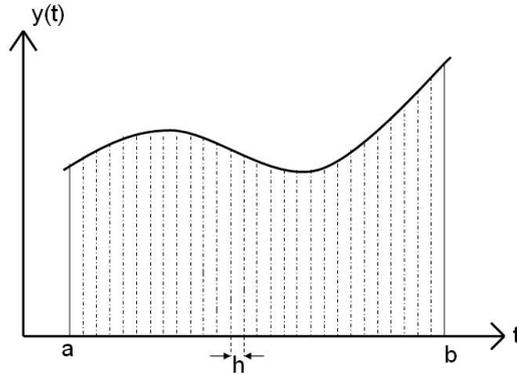


FIGURE 4.1 – Discretisation de l'intégrale.

Considérons une fonction $y(t)$ suffisamment lisse de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (voir figure 4.1). Pour intégrer cette fonction, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales telles que $t_k = a + kh$, $k \in [0, n]$, $y_k = y(t_k)$ et $h = \frac{b-a}{n}$. Ensuite, il s'agit de trouver un polynôme passant par les n points (t_k, y_k) dont l'intégration formelle est facile à mener.

Soit l'intégrale $Y = \int_a^b y(t) dt$. L'idée est donc de modéliser la fonction $y(t)$ par un polynôme dont l'intégration formelle est facile. Il existe plusieurs façon de procéder. On peut, par exemple, considérer un polynôme $p(t)$ de degré $n - 1$ de la forme :

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j \quad (4.5)$$

et dire que ce polynôme doit passer par les n points (t_i, y_i) . Il doit donc vérifier les n équations à n inconnues en a_0, \dots, a_{n-1}

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & t_0^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & t_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Enfin, une estimation de l'intégrale désirée est donnée par :

$$Y \simeq \int_a^b \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{j+1} (b^{j+1} - a^{j+1}). \quad (4.7)$$

Notons que l'inversion d'une matrice de grande taille n'est pas désirable en présence de bruit de mesure (problème de conditionnement).

Pour ne pas compliquer les calculs, on peut approximer la fonction $y(t)$ par une ligne brisée passant par les points (t_i, y_i) , comme indiqué dans la figure 4.2.

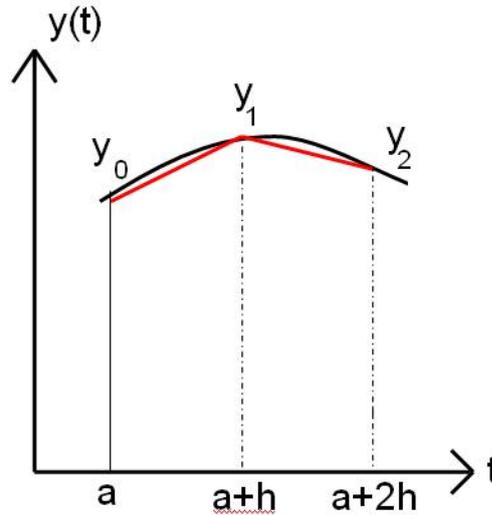


FIGURE 4.2 – Méthode des trapèzes.

On peut donc écrire

$$Y \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+h} y(\tau) d\tau, \quad t_0 = a, \quad t_n = b = t_{n-1} + h. \quad (4.8)$$

En approximant l'intégrale entre deux échantillons par une droite (voir figure 4.2), on obtient

$$\int_{t_i}^{t_i+h} y(\tau) d\tau \simeq h \frac{y(t_i) + y(t_i + h)}{2}, \quad (4.9)$$

$$Y \simeq h \left(\frac{a}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y(t_i) + \frac{b}{2} \right). \quad (4.10)$$

Cette façon d'approximer l'intégrale est la méthode des trapèzes.

On peut aussi approximer la fonction par des paraboles (méthode de Simpson), c'est-à-dire qu'on fait passer par trois échantillons successifs une parabole comme il est montré dans la figure 4.3 et qu'on calcule formellement la surface engendrée par la parabole. En examinant la figure 4.3, on peut facilement déduire que l'aire engendrée par la parabole (en bleue) est donnée par $\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3h}$. En sommant sur tout l'intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$Y = \frac{1}{3h} (y_0 + \sum_{j=1}^{n-2} (4y_j + 2y_{j+1}) + y_n). \quad (4.11)$$

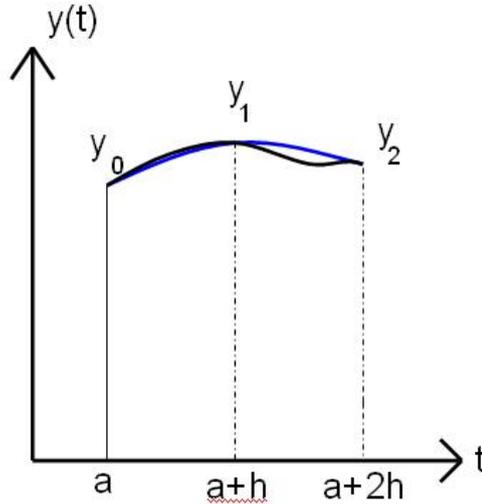


FIGURE 4.3 – Méthode de Simpson.

Résumons ; il s'agit donc de multiplier le vecteur contenant les échantillons de la fonction $[y_0, y_1, \dots, y_n]^T$ par un vecteur de constante élément par élément et ensuite faire la somme des éléments du vecteur résultant. Le vecteur de constante est, dans le cas de la méthode des trapèzes, égal à $[1/2, 1, 1, \dots, 1, 1, 1/2]^T$. Il est égal à $[1, 4, 2, 4, 2, \dots, 2, 4, 2, 4, 1]^T$ dans le cas de la méthode de Simpson.

Revenons à nos dérivateurs algébriques, ils sont généralement constitués d'un polynôme multiplié par le signal de la forme :

$$y^{(n)}(0) = K \int_0^1 \mathcal{P}(\tau) y(T\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

En discrétisant le polynôme $\mathcal{P}(\tau)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ suivant la période d'échantillonnage du signal $y(T\tau)$, on obtient un vecteur $[\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(1)]^T$ qu'il faut multiplier (élément par élément) par le vecteur des échantillons du signal et le vecteur de constantes correspondant à la méthode d'intégration, et ensuite faire la somme du vecteur résultant. La multiplication de $[\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(1)]^T$ par le vecteur de constante peut être faite hors-ligne ce qui économise le calcul à faire en ligne. Par conséquent, pour calculer une dérivée, il faut faire n multiplications suivi de n sommations ce qui est parfaitement réalisable en temps réel d'où l'intérêt de cette approche algébrique.

4.4 Commande du pendule inversé avec estimation algébrique des vitesses : Résultats expérimentaux

Dans cette section, on s'intéresse à la commande du pendule inversé en utilisant la dérivée algébrique dans la boucle de commande. Comme il a été mentionné dans le

chapitre précédent, le pendule inversé est équipé de codeurs incrémentaux pour mesurer la position linéaire du chariot ainsi que la position angulaire du pendule. Dans les expérimentations réalisées au chapitre précédent, des algorithmes de différences finies ont été utilisés pour estimer les vitesses linéaire et angulaire. Notons que les différences finies sont des cas particuliers (basées sur un développement de Taylor au premier ordre) de la dérivée algébrique. Le signal donné par les codeurs est lisse, la quantification constituant le seul bruit (voir figure 4.4). Les différences finies suffisent pour donner des estimations acceptables des vitesses. Ceci nous permet de vérifier que les dérivateurs algébriques sont efficaces puisqu'on a une référence (les différences finies) avec laquelle on peut les comparer.

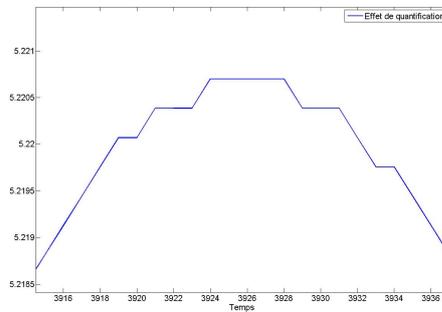


FIGURE 4.4 – L'effet de Quantification.

L'algorithme de dérivation utilisé est

$$\dot{y}(0) = \frac{4}{T} \int_0^1 (3 - 16\tau + 15\tau^2)y(T\tau)d\tau. \quad (4.13)$$

Il est obtenu en posant dans (4.4) : $N = 2$, $n = 1$, $\kappa = 0$, $\mu = 1$. Pour expliquer ce choix, on rappelle qu'il a été montré dans [MJF07] que les algorithmes de dérivée (4.4) n^e utilisant un développement de Taylor à l'ordre $N = n$ induisent un retard d'estimation. Ce retard est indésirable dans les applications en temps réel. Il est important de signaler que, si on admet la présence d'un retard dans l'estimation des dérivés (pour les applications hors ligne), on peut obtenir des résultats plus robustes par rapport aux bruits de mesure, (ceci est aussi montré dans [MJF07]). Le choix $\kappa = 0$ et $\mu = 1$ donne le polynôme $\mathcal{P}(\tau)$ de degré minimum.

Les différences finies étant des cas particuliers de la dérivée algébrique au premier ordre, elles induisent donc des retards d'estimation. Ceci peut être observé dans la figure 4.5 où la vitesse angulaire de la tige est estimée par (4.13) et par les différences finies dans un test en boucle ouverte. Notons que la courbe en vert (différences finies) est en retard par rapport à la courbe en bleue (méthode algébrique).

On propose de tester l'algorithme dans une boucle de commande globale du pendule inversé, c'est-à-dire une phase de balancement utilisant l'oscillateur de Van der Pol

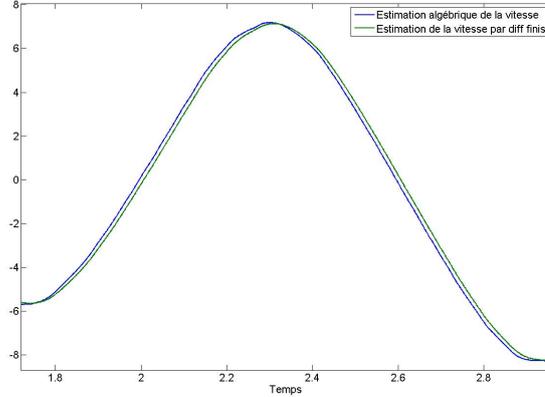


FIGURE 4.5 – Le retard d’estimation des différences finies.

modifié et la commande quasi-homogène (section 3.4.2), suivie d’une commande locale constituée d’un retour d’état statique linéaire. La commande locale est synthétisée par la minimisation d’un critère quadratique $\mathcal{J} = \int_0^\infty (X^T Q X + u R u) dt$, où $X = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$ est le vecteur d’état, $Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ et $R = 1$ sont des matrices de gain. En utilisant les paramètres réels du pendule inversé (voir la section 3.1) et un linéarisé des équations (3.10), (3.11) autour de la position d’équilibre instable, on obtient le gain de retour :

$$K = [-3.1623 \quad -4.8599 \quad 22.7221 \quad 4.981]. \quad (4.14)$$

On réalise plusieurs essais avec différentes tailles de fenêtres glissantes 10, 12, 18, 20, 30, et 40 échantillons par fenêtre.

Pendant la phase de balancement (poursuite du Van der Pol modifié), on a obtenu des résultats acceptables pour toutes les tailles de fenêtres. Les résultats sont très proches. Dans la figure 4.6, on montre la position et la vitesse de référence générée par l’oscillateur de Van der Pol, ainsi que les résultats expérimentaux de la position et la vitesse réelle du chariot pour la dérivée algébrique et les différences finies.

Les résultats expérimentaux de la commande globale (retour d’état + balancement) pour différentes tailles de fenêtres sont présentées dans les figures 4.7 et 4.8. On remarque que pour les tailles de fenêtres de 10, 12, et 20 échantillons des oscillations à haute fréquence apparaissent une fois que la tige est proche de la position instable (aux instants 2.5, 2.5, et 3.5 secondes, respectivement). Ce phénomène disparaît pour les tailles de fenêtres 18, 30, et 40. On conclut que la dérivée algébrique donne de résultats acceptable en poursuite de trajectoire et en stabilisation autour d’un point d’équilibre.

Enfin, il faut mentionner que les oscillations à haute fréquence n’apparaissent pas si on utilise les différences finies. Ceci est mentionner dans la figure 4.9 où la commande globale du pendule inversé est réalisée en utilisant les différences finies pour estimer les vitesses avec des fenêtres d’estimation de 10 et 12 échantillons respectivement.

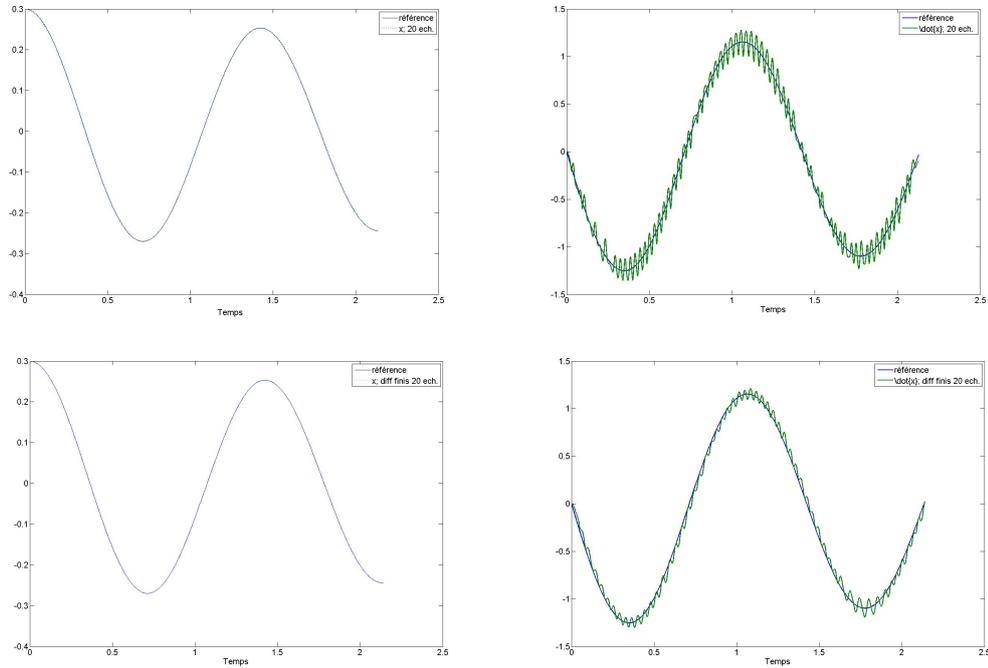


FIGURE 4.6 – Position et vitesse de référence et réelle ; comparaison de la dérivée algébrique avec les différences finis.

4.5 Une méthode algébrique pour l'estimation des dérivées partielles d'un signal multidimensionnel

Cette partie est principalement tirée de [RBMR08]

4.5.1 Introduction

La théorie classique des champ [Sop76] est une branche des mathématiques, bien adaptée à la description de nombreux phénomènes distribués comme par exemple l'écoulement fluide, le transfert de chaleur. Elle est aussi utilisée en économétrie [NHM88] et en optimisation convexe [BV].

Les ingrédients de base de la théorie classique des champs sont les opérateurs comme le gradient, la matrice jacobienne, le laplacien, la matrice hessienne, la divergence, etc. En examinant ces opérateurs, on remarque qu'ils sont constitués de combinaisons des dérivées partielles du champ (scalaire ou vectoriel) par rapport à ses coordonnées.

D'un point de vue théorique, ces opérateurs servent à donner des descriptions qualitatives des champs. Mais, si on s'intéresse à l'aspect quantitatif, il faut faire des simulations numériques. Un problème essentiel en simulation numérique est le dilemme précision (robustesse aux bruits)/ rapidité.

A titre d'exemple, considérons le problème de la détection du contour d'une image.

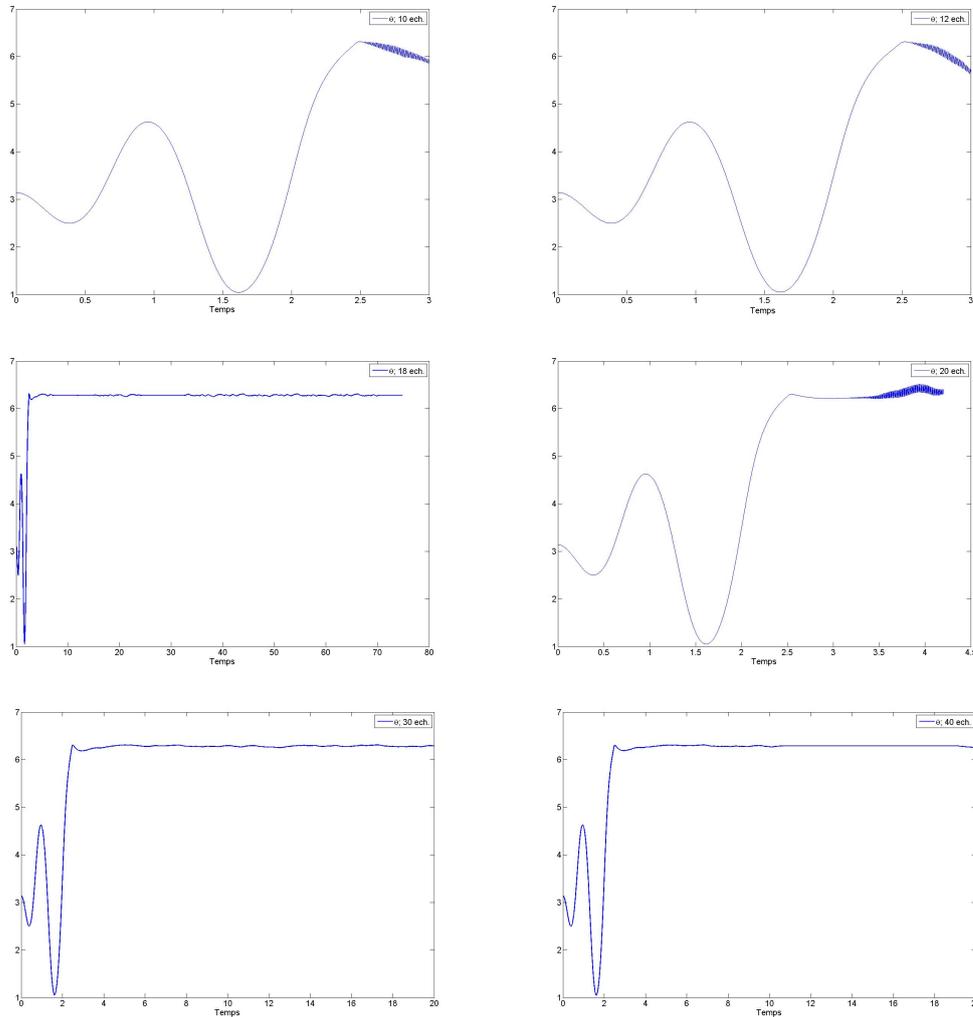


FIGURE 4.7 – Positions angulaires de la tige qui correspondent à différentes tailles de la fenêtre d'intégration.

Grosso modo, une image est un champ scalaire bidimensionnel (x, y) , et le problème de détection des contours peut être résolu en calculant le laplacien en tous les pixels de l'image. Le laplacien est donné par :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

L'estimation du laplacien se réduit donc à l'estimation des dérivées partielles du second ordre par rapport à x et y . D'habitude, ces quantités sont estimées en utilisant des techniques de différences finies très sensibles aux bruits. Dans cette section, on propose une technique pour synthétiser des estimateurs robustes aux bruits.

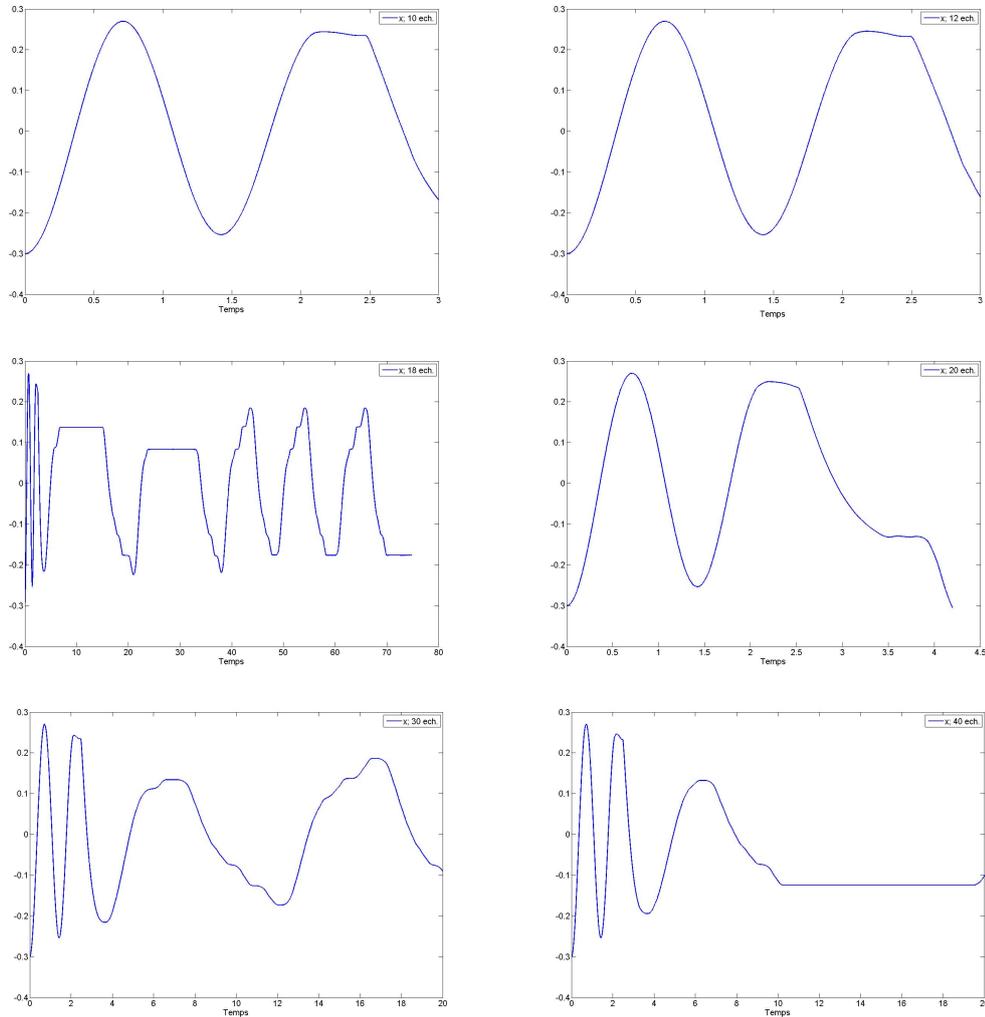


FIGURE 4.8 – Positions linéaires du moteur qui correspondent à différentes tailles de la fenêtre d'intégration.

Des techniques algébriques de dérivation et d'estimation rapide et robuste au bruit introduites dans [FSR03], et orientées vers le calcul des dérivées dans [FJMS05], [FJMSR04], [FJMSR05], [Mbo], [MJF07]. Des résultats avancés de ces techniques algébriques peuvent être trouvés dans [MJF07], dont les concepts de bases ont été rappelés dans la sous-section 4.2.

Dans [FJMS05], l'estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel a été considérée. L'estimateur développé dans [FJMS05] est basé sur un développement de Taylor bidimensionnel à l'ordre 2, et constitué d'une combinaison linéaire du signal et de son intégrale (à l'ordre 1, i.e. non itéré). Cependant, l'utilisation du signal sans intégration introduit des perturbations en présence de bruit. Dans cette section, on présente des

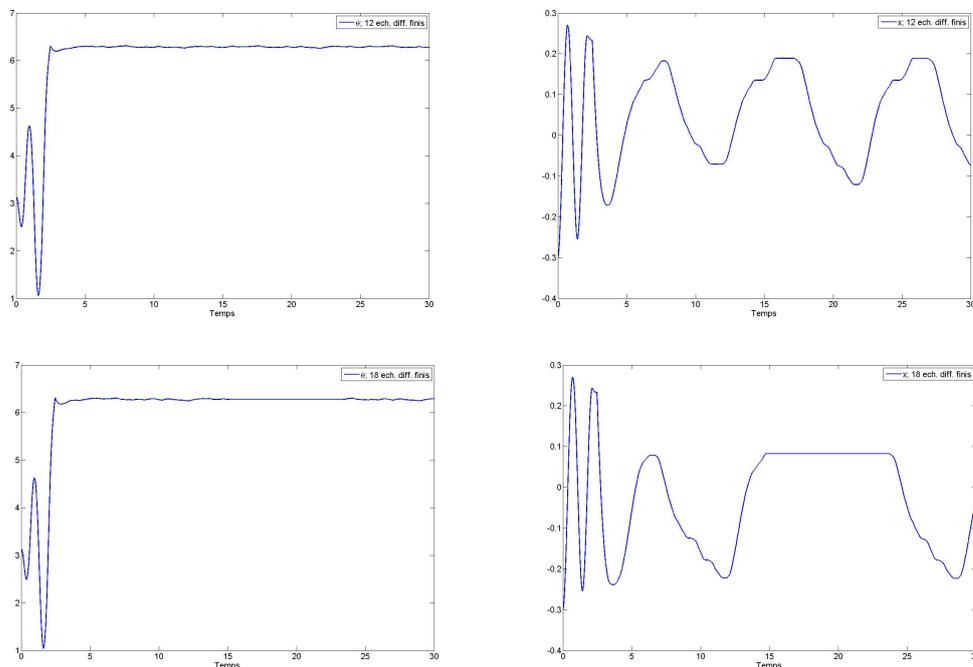


FIGURE 4.9 – Résultats expérimentaux pour les différences finies.

estimateurs plus généraux basés sur un développement de Taylor multidimensionnel à un ordre N quelconque. On verra par la suite que les estimateurs synthétisés sont constitués d'intégrales itérées du signal multidimensionnel.

Un champs suffisamment lisse peut être localement modélisé par un développement de Taylor à l'ordre N . Considérons une troncature à l'ordre N d'une fonction \mathcal{C}^r , $r \geq 2$, $f(\mathbf{x}) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble compact U , avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$:

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{G}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} + \dots, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{G} = [I_{x_1} \quad \dots \quad I_{x_n}],$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I_{x_1^2} & I_{x_1 x_2} & \dots & I_{x_1 x_n} \\ I_{x_2 x_1} & I_{x_2^2} & \dots & I_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{x_n x_1} & I_{x_n x_2} & \dots & I_{x_n^2} \end{bmatrix}.$$

I_{x_i} , $I_{x_i^2}$ $i = 1 \dots n$ sont les dérivées partielles de $f(\mathbf{x})$ par rapport à x_i . D'une part, on peut les considérer comme des estimations de la 1^{re} et 2^e dérivée d'un signal monodimensionnel bruité. Alors la technique d'estimation de dérivée présentée dans 4.2 peut

être utilisée. D'autre part, un développement vectoriel de Taylor peut être utilisé pour calculer ces quantités. La sous-section 4.5.2.1 contient quelques exemples.

Des formes génériques peuvent être calculées résultant en familles d'estimateurs. On donne un exemple pour l'estimation de la dérivée croisée (les termes non diagonaux de la matrice hessienne). Ceci sera présenté dans la sous section 4.5.2.2.

Dans la sous-section 4.5.3, on présente des simulations pour le calcul des dérivées partielles d'un signal académique et les estimateurs algébriques sont comparés avec des techniques de différences finies.

4.5.2 Estimateurs basés sur un développement de Taylor vectoriel

Considérons le développement de Taylor vectoriel à l'ordre N (4.15) modélisant localement le champ scalaire $f(\mathbf{x})$. Notons que ce développement dans (4.15) peut être exprimé sous la forme plus générale :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^N \left\{ \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^i f(\mathbf{x}) \right\}_{\mathbf{x}=0}, \quad (4.16)$$

avec

$$\left(\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}} \right) f(\mathbf{x}) := I_{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}} := I_{\prod_{l=1}^n x_l^{i_l}},$$

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_l = i.$$

La transformée de Laplace multivariable est un opérateur linéaire sur un champ scalaire $f(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$, le transformant en un champ scalaire $\hat{f}(\mathbf{s})$, avec $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)^T \in \mathbb{C}^n$, définie comme suit :

$$\hat{f}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \exp^{-\mathbf{s}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (4.17)$$

Les transformées de Laplace directe et inverse utilisées dans la suite sont données dans les deux propositions suivantes :

Proposition 4.5.1. *L'équivalent opérationnel de $\prod_{i=1}^k x_i^{n_i}$ est donné par la transformation de Laplace suivante*

$$\mathcal{L} \left(\prod_{i=1}^k x_i^{n_i} \right) = \prod_{i=1}^k \frac{n_i!}{s_i^{n_i+1}}. \quad (4.18)$$

Preuve. Pour établir cette formule, on commence par $k = 2$. Ceci donne :

$$\mathcal{L} \left(\frac{x^n y^m}{n! m!} \right) = \frac{1}{s^{n+1}} \frac{1}{p^{m+1}}.$$

Soit $G(x, y) = \frac{x^n y^m}{n! m!}$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-py} \int_0^\infty e^{-sx} G(x, y) dx dy \\
&= \int_0^\infty e^{-py} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} dx dy \\
&= \int_0^\infty e^{-py} \frac{y^m}{m!} \int_0^\infty e^{-sx} \frac{x^n}{n!} dx dy \\
&= \int_0^\infty e^{-py} \frac{y^m}{m!} \frac{1}{s^{n+1}} dy \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-py} \frac{y^m}{m!} dy \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \frac{1}{p^{m+1}}.
\end{aligned}$$

La formule générale (4.18) est déduite par récurrence sur x_i . \square

Proposition 4.5.2. *La transformation inverse de Laplace de $\frac{1}{\prod_{i=1}^k s_i^{n_i}} \frac{\partial^{a_1+\dots+a_k} I}{\prod_{i=1}^k \partial s_i^{a_i}}$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^k s_i^{n_i}} \frac{\partial^{a_1+\dots+a_k} I}{\prod_{i=1}^k \partial s_i^{a_i}} \right) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^k (n_i - 1)!} \int_0^{X_1} \dots \int_0^{X_k} \\
&\prod_{i=1}^k (X_i - x_i)^{n_i-1} \prod_{i=1}^k (-x_i)^{a_i} I(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_k \dots dx_1.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Preuve. Pour démontrer cette transformation, on commence par $k = 2$, ce qui donne :

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^n} \frac{1}{p^m} \frac{\partial^{a+b} I}{\partial s^a \partial p^b} \right)$$

Soit $G = \frac{\partial^b I}{\partial p^b}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s^n p^m} \frac{\partial^a G}{\partial s^a} = \frac{1}{p^m} \frac{1}{s^n} \frac{\partial^a G}{\partial s^a} \\
&= \frac{1}{p^m} \int^{(n)} (-x)^a G dx = \int^{(n)} (-x)^a \frac{1}{p^m} \frac{\partial^b I}{\partial p^b} dx \\
&= \int^{(n)} (-x)^a \int^{(m)} (-y)^b I dy dx \\
&= \int^{(n)} \int^{(m)} (-x)^a (-y)^b I dy dx \\
&= \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_0^X \int_0^Y (X-x)^{n-1} (Y-y)^{m-1} (-x)^a (-y)^b I dy dx.
\end{aligned}$$

La formule générale (4.19) est facilement déduite par récurrence sur x_i . \square

On suit les mêmes lignes de raisonnement que dans la sous-section 4.2. L'idée est d'essayer d'exprimer les dérivées partielles désirées (à estimer) en fonction d'intégrales itérées des quantités observées. Le calcul est bien plus compliqué que dans le cas monodimensionnel. On commence par quelques exemples pour montrer comment on procède, puis on présente une forme générale pour le calcul des termes non diagonaux de la matrice hessienne.

4.5.2.1 Exemples introductifs

Considérons un champ scalaire dépendant de deux variables $z = f(x, y)$. Sa troncature de Taylor (pour $N = 2$) autour de $(0, 0)$ est donnée par

$$f_2(x, y) = I(0, 0) + I_x(0, 0)x + I_y(0, 0)y + \frac{1}{2}I_{x^2}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2}I_{y^2}(0, 0)y^2 + I_{xy}(0, 0)xy.$$

Dans le domaine opérationnel, et en supprimant les arguments $(0, 0)$ de l'équation précédente, on obtient

$$I(s, p) = \frac{I}{sp} + \frac{I_x}{s^2p} + \frac{I_y}{sp^2} + \frac{I_{x^2}}{s^3p} + \frac{I_{y^2}}{sp^3} + \frac{I_{xy}}{s^2p^2} \quad (4.20)$$

Estimation de la dérivée 1^{re} utilisant un développement de Taylor bidimensionnel Pour calculer I_x , on essaye de manipuler (4.20) afin d'isoler I_x . On commence par multiplier (4.20) par s^3p^3 puis on dérive deux fois par rapport à p et une fois par rapport à s . Ensuite on multiplie par $\frac{1}{sp}$ et on dérive une fois par rapport à s . Le terme à droite de l'égalité dans (4.20) se réduit alors à $\frac{-2I_x}{s^2p}$. En appliquant les mêmes opérations au membre de gauche de l'égalité (4.20) on obtient :

$$18I(s, p) + 30s \frac{\partial I(s, p)}{\partial s} + 18p \frac{\partial I(s, p)}{\partial p} + 30sp \frac{\partial^2 I(s, p)}{\partial s \partial p} + 3p^2 \frac{\partial^2 I(s, p)}{\partial p^2} + 5sp^2 \frac{\partial^3 I(s, p)}{\partial s \partial^2 p} + 6s^2 \frac{\partial^2 I(s, p)}{\partial s^2} + 6s^2p \frac{\partial^3 I(s, p)}{\partial s^2 \partial p} + s^2p^2 \frac{\partial^4 I(s, p)}{\partial s^2 \partial p^2} = -2 \frac{I_x}{s^2p}$$

Notons que multiplier par s (ou p) correspond à dériver par rapport à x (ou y) dans le domaine temporel, ce qui est indésirable. Pour cette raison, multiplions (4.21) par $\frac{1}{s^3p^3}$,

puis appliquons la transformée inverse (4.19). La forme suivant est obtenue

$$\begin{aligned}
& \frac{18}{4} \int_0^X \int_0^Y (X-x)^2(Y-y)^2 I(x,y) dx dy + \\
& \frac{30}{2} \int_0^X \int_0^Y (X-x)(Y-y)^2(-x) I(x,y) dx dy + \\
& \frac{18}{2} \int_0^X \int_0^Y (X-x)^2(Y-y)(-y) I(x,y) dx dy + \\
& 30 \int_0^X \int_0^Y (X-x)(Y-y)(-x)(-y) I(x,y) dx dy + \\
& \frac{3}{2} \int_0^X \int_0^Y (X-x)^2(-y)^2 I(x,y) dx dy + \\
& 5 \int_0^X \int_0^Y (X-x)(-x)(-y)^2 I(x,y) dx dy + \\
& \frac{6}{2} \int_0^X \int_0^Y (Y-y)^2(-x)^2 I(x,y) dx dy + \\
& 6 \int_0^X \int_0^Y (Y-y)(-x)^2(-y) I(x,y) dx dy + \\
& \int_0^X \int_0^Y (-x)^2(-y)^2 I(x,y) dx dy + \\
& = -2I_x \frac{X^4 Y^3}{4! 3!}.
\end{aligned}$$

Après un changement de variable approprié pour normaliser l'intégrale dans l'intervalle $[0, 1]$, la forme finale est obtenue

$$\begin{aligned}
I_x = & \frac{-36}{X} \int_0^1 \int_0^1 (-48x - 36y - 160xy^2 \\
& -180x^2y + 9 + 30y^2 + 45x^2 + 150x^2y^2 \\
& +192xy) I(Xx, Yy) dx dy.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Estimation de I_{x^2} , et I_{xy} en utilisant un développement de Taylor bidimensionnel De façon similaire à l'exemple précédent, afin de calculer un estimateur pour I_{x^2} , on essaye de manipuler (4.20) pour isoler I_{x^2} . Une manière de faire est d'appliquer $\frac{1}{s^3 p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} s^3 p^3$. La forme finale est obtenue après normalisation de l'intégrale dans l'intervalle $[0, 1]$ et est donnée par :

$$\begin{aligned}
I_{x^2} = & \frac{180}{X^2} \int_0^1 \int_0^1 (-18x - 12y - 60xy^2 \\
& -72x^2y + 3 + 10y^2 + 18x^2 + 60x^2y^2 \\
& +72xy) I(Xx, Yy) dx dy.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

En appliquant $\frac{1}{s^3 p^3} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{s p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial s} s^3 p^3$ à (4.20), on obtient :

$$I_{xy} = \frac{144}{XY} \int_0^1 \int_0^1 (-240x^2y - 48y - 48x - 240xy^2 + 9 + 45y^2 + 45x^2 + 225x^2y^2 + 256xy) I(Xx, Yy) dx dy. \quad (4.23)$$

Notons que (4.23) est symétrique en x et y .

4.5.2.2 Une formule générale pour estimer $I_{x_i y_j}$

L'équivalent de (4.16) dans le domaine opérationnel est donné par la transformation de Laplace (4.17) :

$$\hat{f}_N(S) = \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{1}{n!} \frac{n!}{\prod_{i=1}^k s_i^{n+1}} \left[\sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=n-i_1}^n \sum_{i_3=n-i_2}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=n-i_{k-2}}^n \prod_{f=0}^k s_f^{i_f} I_{\prod_{f=0}^k x_f^{n-i_f}} \right] \right\} \quad (4.24)$$

avec $i_k = kN - \sum_{l=1}^{k-1} i_l$.

Pour estimer $I_{x_i x_j}$ $\{i, j\} = 1, \dots, n$, on multiplie par l'opérateur différentiel

$$\Xi_{\kappa_1, \kappa_2}^{N, n, i, j} = \Omega \prod_{l \in \{1, \dots, n\} - \{i, j\}} \left(\frac{\partial^N}{\partial s_l^N} \right),$$

avec

$$\Omega = \frac{\partial^{\kappa_1+1}}{\partial s^{\kappa_1+1}} \frac{\partial^{\kappa_2+1}}{\partial s^{\kappa_2+1}} \frac{1}{s_i s_j} \frac{\partial^{N-1}}{\partial s_i^{N-1}} \frac{\partial^{N-1}}{\partial s_j^{N-1}}.$$

Ceci donne l'estimateur suivant de $I_{x_i x_j}$ $\{i, j\} = 1, \dots, n$

$$\frac{I_{x_i x_j}}{s_i^{\kappa_1+2} s_j^{\kappa_2+2} \prod_{l=1}^n s_l^{i_l}} = \alpha \frac{1}{\prod_{l=1}^n s_l^{i_l}} \Xi_{\kappa_1, \kappa_2}^{N, n, i, j} \prod_{l=1}^n (s_l^{N+1}) f(S),$$

avec

$$\alpha = \frac{(-1)^{\kappa_1 + \kappa_2 + 2}}{(\kappa_1 + 1)! (\kappa_2 + 1)! (N!)^{n-2} [(N-1)!]^2}.$$

Des formes générales pour I_{x_i} et $I_{x_i^2}$ similaires à (4.16) peuvent aussi être données.

4.5.2.3 Un autre estimateur de I_{xy}

Considérons les quatre développements de Taylor suivants

$$f_2(x, y) = I(0, 0) + I_x(0, 0)x + I_y(0, 0)y + \frac{1}{2}I_{x^2}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2}I_{y^2}(0, 0)y^2 + I_{xy}(0, 0)xy \cdots \quad (4.25)$$

$$f_2(-x, -y) = I(0, 0) - I_x(0, 0)x - I_y(0, 0)y + \frac{1}{2}I_{x^2}(0, 0)^2 + \frac{1}{2}I_{y^2}(0, 0)y^2 + I_{xy}(0, 0)xy \cdots \quad (4.26)$$

$$f_2(x, -y) = I(0, 0) + I_x(0, 0)x - I_y(0, 0)y + \frac{1}{2}I_{x^2}(0, 0)^2 + \frac{1}{2}I_{y^2}(0, 0)y^2 - I_{xy}(0, 0)xy \cdots \quad (4.27)$$

$$f_2(-x, y) = I(0, 0) - I_x(0, 0)x + I_y(0, 0)y + \frac{1}{2}I_{x^2}(0, 0)^2 + \frac{1}{2}I_{y^2}(0, 0)y^2 - I_{xy}(0, 0)xy \cdots \quad (4.28)$$

En manipulant les quatre équations (4.25)-(4.28), une estimation de I_{xy} peut être obtenue par

$$I_{xy} = \frac{9}{4XY} \int_0^1 \int_0^1 (16 - 20y - 20x + 25xy)I(Xx, Yy) dx dy \quad (4.29)$$

avec

$$I(Xx, Yy) = f(Xx, Yy) - f(-Xx, Yy) - f(Xx, -Yy) + f(-Xx, -Yy).$$

4.5.3 Simulations numériques

Afin de montrer l'efficacité de notre approche, on a réalisé des simulations numériques sur une fonction bidimensionnelle donnée par $f(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3) \cos(2x + 1 - e^y)$. Le résultat obtenu est comparé avec des techniques de différences finies [AS65]. Un pas d'échantillonnage de (0.001×0.001) est utilisé. Les estimations sont calculées sur une surface élémentaire (non infinitésimale) $[0, X] \times [0, Y]$ avec $X = Y = 0.06$ (pour les simulations sans bruits). Cette surface est constituée de $7 \times 7 = 49$ échantillons.

Les dérivées sont calculées en un point (x_i, y_i) avec $y_i = 2$ et x_i allant de -2 à 7 . En effet, en chaque point de la ligne $(-2 \leq x_i \leq 7, y_i = 2)$, la surface élémentaire nécessaire pour le calcul est prise autour du point particulier (x_i, y_i) .

Les résultats de simulation sont représentés dans la figure (4.11). La dérivée partielle du second ordre (4.22) est dessinée en ligne jaune épaisse, alors que le résultat des différences finies ([AS65] section 25.3.23) est dessinée en ligne rouge mince dans la figure (4.11). Il est à remarquer que les différences finies ne suivent pas bien les concavités au contraire de la dérivée algébrique.

Ensuite, on rajoute à la surface un bruit $n(x, y)$. Le niveau du bruit est mesuré par le rapport signal sur bruit donné en dB , i.e., $SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i,j} |f(x_i, y_j)|^2}{\sum_{i,j} |n(x_i, y_j)|^2} \right)$. Dans les simulations qui suivent, le rapport signal sur bruit SNR est pris égal à $25 dB$. La figure (4.12) montre une coupe de la surface bruitée dans le plan $x_i = 2$ pour y_i allant de -1 à 3 .

Une comparaison entre la dérivée algébrique et les techniques de différences finies pour estimer la dérivée première est présentée dans les figures (4.13) et (4.14). La surface

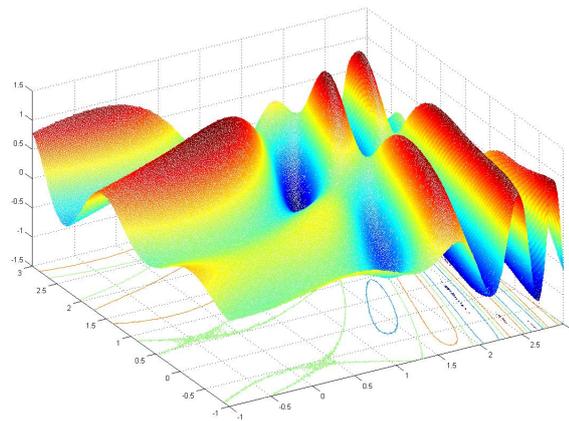


FIGURE 4.10 – Représentation 3-D de $f(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3)\cos(2x + 1 - e^y)$

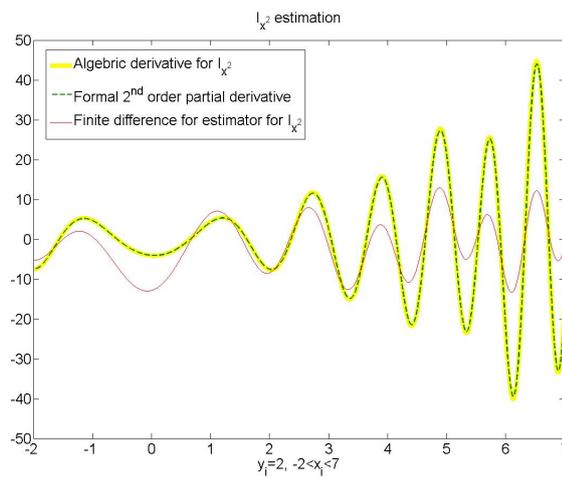


FIGURE 4.11 – Estimation de I_{x^2}

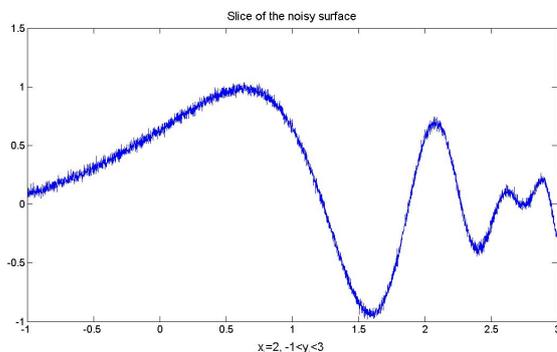


FIGURE 4.12 – Une coupe de la surface bruitée en $x_i = 2$ et $-1 \leq y_i \leq 3$, 25 dB

élémentaire utilisée dans les simulations est constituée de 80×80 échantillons. Notons que les mêmes dimensions de surface (80×80) sont utilisées dans les 2 cas. La dérivée algébrique montre une plus grande robustesse vis-à-vis du bruit. Notons que l'estimation dans (4.13) est sujette à un retard. En suivant le même raisonnement que dans [MJF07], une explication par l'intermédiaire des polynômes de Jacobi peut être donnée.

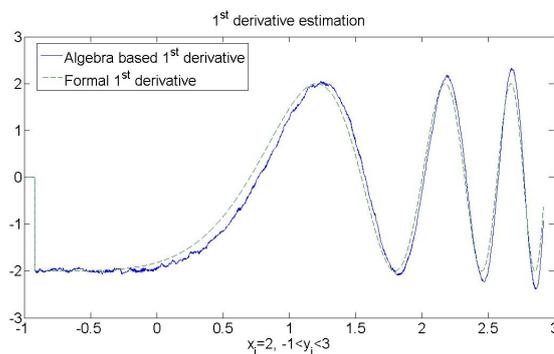


FIGURE 4.13 – Estimation algébrique de la dérivée 1^{ère} I_x

On considère maintenant l'estimation des dérivées du second ordre de la surface bruitée I_{x^2} et I_{xy} . Les estimations obtenues pour un bruit ayant un rapport $SNR = 25$ dB pour la dérivée algébrique ainsi que les différences finies n'ont pas été satisfaisantes. Ceci nous a amenés à considérer un rapport signal à bruit plus grand. En prenant un $SNR = 35$ dB, on obtient les résultats donnés dans les figures (4.15), (4.16) et (4.17). La figure (4.16) montre une estimation de I_{xy} . Des surfaces formées de 150×150 échantillons sont utilisées. Les différences finies en tiret rouge dont la formule est donnée dans [AS65] (section 25.3.26) montre une plus grande robustesse vis-à-vis du bruit en comparaison avec la dérivée algébrique en ligne bleue, mais une performance moindre quand la courbure du signal augmente. Dans la figure (4.17), une estimation de I_{x^2} est dessinée en ligne bleue et comparée avec les différences finies tirées de [AS65] section 25.3.24 (en rouge) et 25.3.25 (en ligne bleue claire pointillée). La dérivée formelle du second ordre

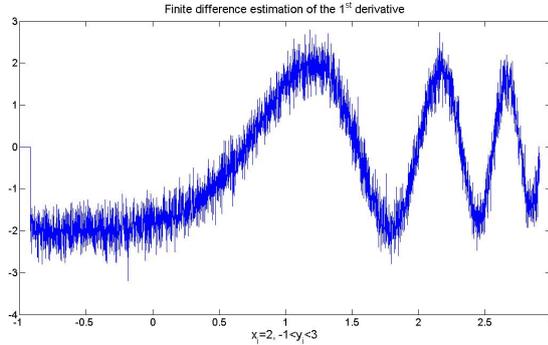


FIGURE 4.14 – Estimation de la dérivée 1^{ère} I_x par les différences finies

est en vert. Une surface carrée de 80×80 échantillons est utilisée en simulations. Notons que la dérivation algébrique est plus performante. On espère améliorer cette estimation par l'injection de retard dans l'estimation comme il a été fait dans [MJF07].

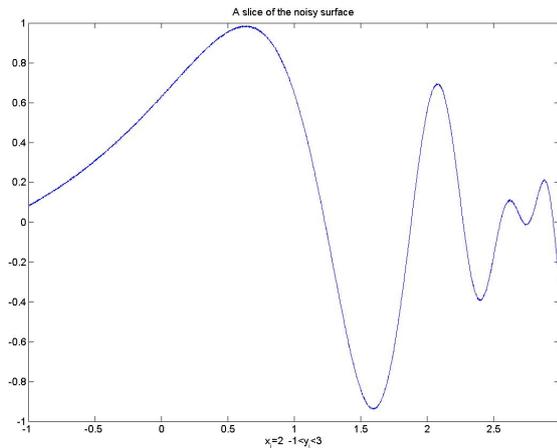
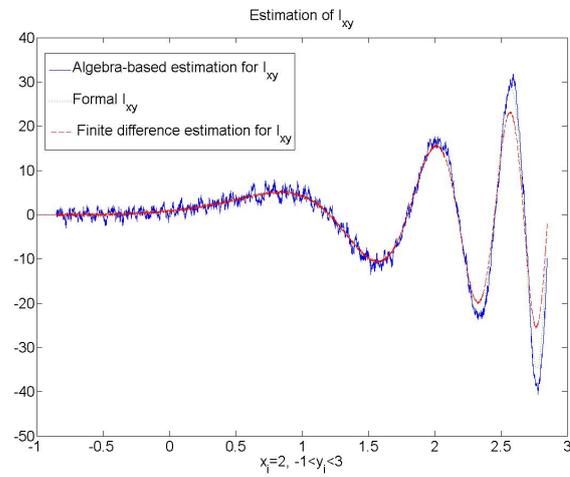
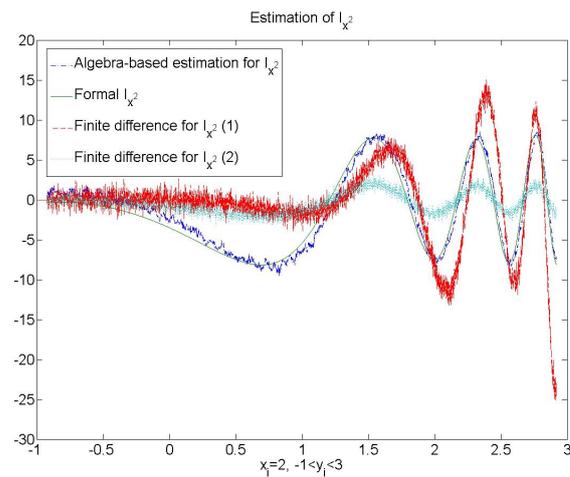
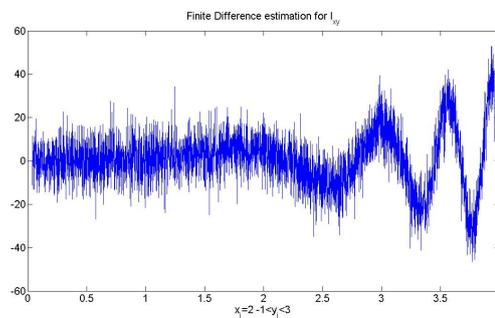


FIGURE 4.15 – Une coupe de la surface bruitée en $x_i = 2$ et $-1 \leq y_i \leq 3$, 35 dB

Finalement, l'estimateur donné par (4.29) est testé sur le signal bruité avec un niveau de bruit donné par $SNR = 25$ dB. Les simulations montrent une meilleure performance en comparaison à celles données par (4.23) (voir figures (4.18) et (4.19)). La surface élémentaire utilisée pour effectuer les calculs est de 80×80 échantillons.

4.6 Conclusion

Dans cette section, on a présenté une extension de la technique algébrique au cas des signaux multidimensionnels. En se basant sur un développement de Taylor vectoriel ainsi que la transformation de Laplace multivariable, des estimateurs ont été synthétisés.

FIGURE 4.16 – Estimation de I_{xy} FIGURE 4.17 – Estimation de la dérivée seconde, I_{x^2} FIGURE 4.18 – Estimation de I_{xy} par les différences finies avec $SNR = 25 \text{ dB}$

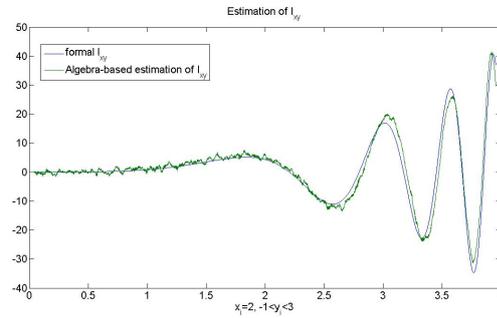


FIGURE 4.19 – Estimation algébrique de I_{xy} , $SNR = 25 \text{ dB}$

Ces estimateurs sont constitués d'intégrales du signal. On a présenté une comparaison avec les techniques de différences finies. Il a été montré dans [MJF07] que l'introduction d'un retard dans les estimateurs améliore considérablement la qualité des estimations et sa robustesse vis-à-vis du bruit. Un raisonnement similaire peut être fait pour les estimateurs multidimensionnels.

Conclusion

La synthèse d'une commande quasi-homogène a été développée pour la stabilisation asymptotique de systèmes mécaniques sous-actionnés, opérant dans un milieu incertain, ici lié à la présence de frottements mal modélisés. La synthèse proposée présente une alternative intéressante des modes glissants standard. Bien que le contrôleur quasi-homogène génère des modes de Zénon, *i.e.* une infinité de commutations sur un intervalle de temps fini, ils n'aboutissent cependant pas à la génération de modes glissants standards sur les surfaces de commutation. Des modes glissants du second ordre apparaissent sur les intersections des surfaces de commutations.

Pour stabiliser de tels systèmes autour d'une position d'équilibre instable, une sortie fictive du système doit être choisie de telle sorte que la dynamique équivalente correspondante est localement asymptotiquement stable. Ensuite, les performances désirées du système bouclé sont assurées par l'application d'une commande quasi-homogène annulant la sortie fictive et assurant la convergence des trajectoires du système vers la dynamique équivalente.

La stabilisation orbitale du pendule inversé a été revisitée. La synthèse quasi-homogène nous a permis de concevoir un contrôleur par modes glissants du second ordre capable de conduire la partie actionnée du système sur une surface de glissement constitué d'une modification de l'oscillateur de Van der Pol en un temps fini et le maintenir sur cette surface même en présence de perturbations. En conséquence, la partie non actionnée effectue un mouvement orbital périodique.

La stratégie de stabilisation orbitale a été appliquée au balancement et stabilisation d'un pendule inversé. Elle a été utilisée dans le but de ramener le pendule inversé de sa position d'équilibre initialement stable (en bas) vers sa position d'équilibre initialement instable (en haut). Un choix adéquat des paramètres de la commande est nécessaire pour obtenir les performances désirées.

Les performances de la commande proposée ont été illustrées par des simulations numériques ainsi que des essais expérimentaux pour le balancement et la stabilisation d'un pendule inversé, que nous avons réalisé pendant ce travail de thèse.

Enfin, nous avons utilisé des techniques algébriques de différenciations récentes, pour constater leur bonne efficacité dans le cas du pendule, puis nous avons généralisés ces techniques au problème des fonctions multivariées. Des simulations numériques sur un exemple académique sont prometteurs pour des applications en traitement d'images.

Annexe A

Systèmes homogènes à commutation

Cette partie est principalement tirée de [Orl05].

A.1 Rappel sur les inclusions différentielles

On considère les systèmes non autonomes à commutation modélisés par :

$$\dot{x} = \varphi(x, t) \tag{A.1}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ est le vecteur d'état, $t \in \mathbb{R}$ est le temps, la fonction $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_n(x, t))^T$ est continue par morceaux. On rappelle que la fonction $\varphi(x, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue par morceaux si et seulement si \mathbb{R}^{n+1} consiste en un nombre fini de domaines $\mathbb{G}_j \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1, \dots, N$ d'intérieurs disjoints dont la frontière $\mathcal{N} = \cup_{j=1}^N \partial \mathbb{G}_j$ est de mesure nulle. $\varphi(x, t)$ est continue dans chaque \mathbb{G}_j , et pour tout $j = 1, \dots, N$, elle admet une limite finie $\varphi^j(x, t)$ quand l'argument $(x^*, t^*) \in \mathbb{G}_j$ se rapproche de la frontière $(x, t) \in \partial \mathbb{G}_j$.

Le système scalaire $\dot{x} = -\text{sign}(x)$ est un exemple de système à commutation admettant un régime de glissement sur la surface de commutation $x = 0$ [Utk92]. Le corps des nombres réels \mathbb{R} est donc partagé en 2 sous-ensemble disjoints $G_1 = \mathbb{R}^+$ et $G_2 = \mathbb{R}^-$. Un deuxième exemple d'un système à commutation, l'équation du second ordre $\ddot{x} = -a\text{sign}(x) - b\text{sign}(\dot{x})$ où $a > b > 0$, exhibe un mode glissant dans un voisinage de l'origine $(x, \dot{x}) = 0$. On verra que ce système est stable en un temps fini et que plus quand les trajectoires arrivent en zéro l'état du système commute à une fréquence infinie. Ce phénomène de commutation à haute fréquence appelé réticence (chattering en anglais) est caractéristique de certaines classes de systèmes à structure variable (les modes glissants).

Dans ce qui suit, une définition des solutions de l'équation différentielle (A.1) ayant un second membre continu par morceau est donné dans le cadre des inclusions différentielles (voir Filippov [Fil88]).

Définition A.1.1. *Considérons l'équation différentielle (A.1). Pour tout point $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, soit $\Phi(x, t)$ l'ensemble fermé convexe contenant toutes les valeurs limites de $\varphi(x^*, t)$ pour $(x^*, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{N}$, $x^* \rightarrow x$, $t = \text{const}$. Une fonction absolument continue $x(\cdot)$, définie sur un intervalle $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^n$, est dite solution de (A.1) si l'inclusion différentielle*

$$\dot{x} \in \Phi(x, t) \quad (\text{A.2})$$

est satisfaite presque partout sur \mathcal{I} .

D'après le théorème 8 de [Fil88], p. 85, le système (A.1) admet une solution pour toutes les conditions initiales $x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$. Cette solution est localement définie sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$, cependant, elle n'est pas unique.

Les inclusions différentielles constituent un cadre théorique bien adapté à l'étude de la commande par modes glissants en automatique. Rappelons que l'avantage essentiel des modes glissants est la robustesse vis-à-vis des perturbations, il est donc naturel de considérer une version perturbée de l'inclusion différentielle (A.2). Pour cela considérons une version perturbée de (A.1) :

$$\dot{x} = \varphi(x, t) + \psi(x, t), \quad (\text{A.3})$$

où ψ est une fonction continue par morceaux dont les composantes ψ_1, \dots, ψ_n sont localement uniformément bornées dans une boule B_δ centrée à l'origine et de rayon δ ; i.e.,

$$|\psi_i(x, t)| \leq M_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.4})$$

pour tout $(x, t) \in B_\delta \times \mathbb{R}$ et $M_i \geq 0$, fixé a priori. Un concept de solution d'une telle équation différentielle est introduit comme suit :

Définition A.1.2. *Une fonction $x(\cdot)$ absolument continue, définie sur un intervalle $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^n$, est dite solution de l'équation différentielle avec incertitudes (A.3) satisfaisant (A.4) si et seulement si elle est solution de (A.3) sur l'intervalle \mathcal{I} dans le sens de la définition A.1.1.*

Il est intéressant de noter que le système incertain (A.3), (A.4) peut être représenté par une inclusion différentielle de la forme

$$\dot{x} \in \Phi(x, t) + \Psi, \quad (\text{A.5})$$

où $\Phi(x, t)$ est le même ensemble définie dans A.1.1, Ψ est le produit cartésien des intervalles $\Psi_i = [-M_i, M_i]$, $i = 1, \dots, n$, et l'ensemble

$$\Phi(x, t) + \Psi = \{\phi + \psi : \phi \in \Phi, \psi \in \Psi\}.$$

Notons que si $\varphi(x, t) = \varphi(x)$ est indépendante du temps, le système incertain $\dot{x} = \varphi(x) + \psi(x, t)$ est gouverné par l'inclusion différentielle $\dot{x} \in \Phi(x) + \Psi$, en dépit de la présence de termes incertains temps variant $\psi(x, t)$.

La stabilité d'un système à commutation (A.3)-(A.4) est introduite via la stabilité de l'inclusion différentielle correspondante, alors que la stabilité de cette dernière est définie comme suit.

Supposons que $x = 0$ est un point d'équilibre de l'inclusion différentielle (A.2), et soit $x(\cdot, t_0, x^0)$ une solution $x(\cdot)$ de (A.2) ayant comme condition initiale $x(t_0) = x^0$.

Définition A.1.3. *Le point d'équilibre $x = 0$ de l'inclusion différentielle (A.2) est stable (resp. uniformément stable) si et seulement si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, il existe un certain $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$, dépendant de ϵ et pouvant dépendre de t_0 (resp. indépendante de t_0) telle que toute solution $x(\cdot, t_0, x^0)$ de (A.2), avec les conditions initiales $x(t_0) = x^0 \in \mathbb{B}_\delta$, boule centrée à l'origine et de rayon δ , existe pour tout $t \geq t_0$ et satisfait l'inégalité*

$$\|x(t, t_0, x^0)\| < \epsilon, \quad t_0 \leq t < \infty.$$

Définition A.1.4. *Le point d'équilibre $x = 0$ de l'inclusion différentielle (A.2) est (uniformément) asymptotiquement stable s'il est (uniformément) stable et pour toute solution initialisée dans une boule \mathbb{B}_δ , la trajectoire correspondante converge vers l'origine c'est-à-dire*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, x^0)\| = 0$$

(uniformément en t_0 et x^0). En plus, si la convergence est assurée pour (A.2) indépendamment des conditions initiales, (resp. si en plus elle est uniforme en t_0 et $x^0 \in \mathbb{B}_\delta$ pour tout $\delta > 0$), le point d'équilibre est dit globalement (uniformément) asymptotiquement stable.

Définition A.1.5. *Le point d'équilibre $x = 0$ de l'inclusion différentielle (A.2) est dit globalement (uniformément) stable en temps fini si, en plus de la stabilité asymptotique globale (uniforme), la relation suivante est satisfaite*

$$x(t, t_0, x^0) = 0$$

pour toute solution $x(\cdot, t_0, x^0)$ de (A.2) et tout $t \geq t_0 + T(t_0, x^0)$ où le temps d'établissement

$$T(t_0, x^0) = \sup_{x(\cdot, t_0, x^0)} \inf\{T \geq 0 : x(t, t_0, x^0) = 0 \text{ pour tout } t \geq t_0 + T\} \quad (\text{A.6})$$

est telle que

$$T(t_0, x^0) < \infty \text{ pour tout } t_0 \in \mathbb{R} \text{ and } x^0 \in \mathbb{R}^n$$

(resp. $\mathcal{T}(B_\delta) = \sup_{t_0 \in \mathbb{R}, x^0 \in \mathbb{B}_\delta} T(t_0, x^0) < \infty$ pour tout $\delta > 0$).

Considérons maintenant le système incertain (A.3)-(A.4). Afin de mettre l'accent sur le fait que le système perturbé requiert non seulement la stabilité uniforme vis-à-vis des conditions initiales mais aussi des perturbations, le système correspondant est qualifié d'équi-uniformément stable.

Définition A.1.6. Le point d'équilibre $x = 0$ du système incertain (A.3) (A.4) est dit *équi-uniformément stable* si et seulement si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, il existe un certain $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, dépendant de ϵ et ne dépendant pas de t_0 et ψ telle que toute solution $x_\psi(\cdot, t_0, x^0)$ de (A.3) (A.4) avec les conditions initiales $x^0 \in \mathbb{B}_\delta$ existe pour $t \geq t_0$ et satisfait l'inégalité

$$\|x_\psi(t, t_0, x^0)\| < \epsilon, \forall t \in [t_0, \infty).$$

Définition A.1.7. Le point d'équilibre $x = 0$ du système incertain (A.3)-(A.4) est dit *équi-uniformément asymptotiquement stable* s'il est équi-uniformément stable et pour toute solution initialisée dans une boule \mathbb{B}_δ , la trajectoire correspondante converge vers l'origine c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_\psi(t, t_0, x^0)\| = 0,$$

uniformément en t_0 x_0 et toute solution $x_\psi(\cdot, t_0, x^0)$. En plus, si la convergence est assurée $\forall \delta$, le point d'équilibre est dit *globalement équi-uniformément asymptotiquement stable*.

Définition A.1.8. Le point d'équilibre $x = 0$ du système incertain (A.3) (A.4) est dit *globalement équi-uniformément stable en temps fini* si, en plus de la stabilité asymptotique globale équi-uniforme, la relation

$$x_\psi(t, t_0, x^0) = 0$$

est satisfaite pour toute solution $x_\psi(\cdot, t_0, x^0)$ et tout $t \geq t_0 + T(t_0, x^0)$ où le temps d'établissement

$$T(t_0, x^0) = \sup_{x_\psi(\cdot, t_0, x^0)} \inf\{T \geq 0 : x_\psi(t, t_0, x^0) = 0 \text{ pour tout } t \geq t_0 + T\} \quad (\text{A.7})$$

est telle que

$$T(\mathbb{B}_\delta) = \sup_{t_0 \in \mathbb{R}, x^0 \in \mathbb{B}_\delta} T(t_0, x^0) < \infty \text{ pour tout } \delta > 0.$$

A.2 Inclusion différentielle homogène

Le concept d'homogénéité, étudié dans [Han67], [Zub64] et [Ros92] pour les champs de vecteur continuellement différentiables ou continus, est généralisé aux inclusions différentielles et, particulièrement, aux systèmes non autonomes à commutation.

Définition A.2.1. L'inclusion différentielle (A.2) (l'équation différentielle (A.1) ou le système incertain (A.3) (A.4)) est *localement homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) où $r_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ s'il existe $c_0 = cte > 0$ appelée sous-estimation du paramètre d'homogénéité et une boule $\mathbb{B}_\delta \in \mathbb{R}^n$ appelée boule d'homogénéité, telle que toute solution $x(\cdot)$ de (A.2) (resp. de l'équation différentielle (A.1) ou du système incertain (A.3), (A.4)) évoluant dans la boule \mathbb{B}_δ , génère un ensemble de solutions $x^c(t)$ paramétrisées par un certain $c > c_0$ et dont les composantes vérifient*

$$x_i^c(t) = c^{r_i} x_i(c^q t). \quad (\text{A.8})$$

Définition A.2.2. Une fonction continue par morceaux $\varphi(x, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) où $r_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ s'il existe une constante $c_0 > 0$ et une boule $\mathbb{B}_\delta \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\varphi_i(c^{r_1}x_1, \dots, c^{r_n}x_n, c^{-q}t) = c^{q+r_i}\varphi_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (\text{A.9})$$

pour tout $c > c_0$ et presque tout $(x, t) \in \mathbb{B}_\delta \times \mathbb{R}$.

Les Définitions A.2.1 et A.2.2 sont compatibles dans le sens où l'homogénéité de la fonction φ induit celle de l'inclusion différentielle correspondante (A.2) générée par cette fonction d'après la définition A.2.1.

Le concept d'homogénéité globale de (A.2) et de (A.1) est introduit formellement en posant $c_0 = 0$ et $\delta = \infty$ dans les définitions précédentes.

Lemme A.2.3. Soit φ une fonction continue par morceaux localement homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) . Alors l'équation différentielle correspondante (A.1) est localement homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) .

Lemme A.2.4. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. La fonction φ est continue par morceaux localement homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) ;
2. les composantes ψ_i , $i = 1, \dots, n$, d'une fonction ψ continue par morceaux, sont localement uniformément bornées par des constantes $M_i \geq 0$;
3. $M_i = 0$ pour $q + r_i > 0$.

Alors l'équation différentielle incertaine (A.3), (A.4) est localement homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) .

Dans ce qui suit, on étudie la stabilité globale en temps fini des systèmes homogènes à commutations.

A.3 Stabilité en temps fini des systèmes homogène à commutation

Dans cette partie, on s'intéresse à l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires et non autonomes à commutation. Étant asymptotiquement stables et homogènes de degré négatif, on montre que ses systèmes atteignent leur point d'équilibre en un temps fini.

La stabilité en temps fini des systèmes homogènes est bien connue pour les champs vectoriels continus [BB00], [HHX01].

Un champs vectoriel continu autonome indépendant du temps globalement homogène $\phi(x)$ de degré négatif q est globalement stable en temps fini s'il est globalement asymptotiquement stable. La preuve de ce fait est donnée dans [HHX01] et est basée sur le résultat de [Ros92] énonçant qu'un système autonome continu homogène, s'il est

asymptotiquement stable, possède une fonction de Lyapunov homogène. Puisque pour les systèmes régis par des inclusions différentielles, l'existence d'une fonction de Lyapunov n'est plus garantie, la stabilité globale en temps fini de ces systèmes est montrée différemment.

Théorème A.3.1. *Supposons que l'inclusion différentielle (A.2) est localement homogène de degré $q < 0$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) et soit $x = 0$ un point d'équilibre de (A.2) globalement uniformément asymptotiquement stable. Alors l'inclusion différentielle (A.2) est globalement uniformément stable en temps fini. En plus, une surestimation du temps d'établissement (A.6) est donnée par :*

$$T(t_0, x^0) \leq \tau(x^0, E_R) + \frac{1}{1 - 2^q} (\delta R^{-1})^q s(\delta) \quad (\text{A.10})$$

avec $\tau(x^0, E_R)$, $s(\delta)$ et E_R sont donnés par

$$\tau(x^0, E_R) = \sup_{x(\cdot, t_0, x^0)} \inf \{ T \geq 0 : x(t, t_0, x^0) \in E_R \forall t_0 \in \mathbb{R}, t \geq t_0 + T \} \quad (\text{A.11})$$

$$s(\delta) = \sup_{x^0 \in E_\delta} \tau(x^0, E_{\frac{1}{2}\delta}), \quad (\text{A.12})$$

$$E_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{R^{r_i}} \right)^2} \leq 1 \right\}, \quad (\text{A.13})$$

Preuve. Puisque (A.2) est globalement uniformément asymptotiquement stable, toutes les trajectoires de l'inclusion différentielle sont dirigées vers un ellipsoïde arbitrairement petit (A.13). Alors la condition

$$x(t) \in E_R \text{ pour } t \geq t_0 + \tau(x^0, E_R) \quad (\text{A.14})$$

est satisfaite pour toute solution $x(\cdot)$ de (A.2) avec $x(t_0) = x^0$, où l'ellipsoïde E_R est choisi suffisamment petit pour être contenu dans une boule d'homogénéité.

De plus, étant donné un $\delta \geq c_0 R$ fixé a priori où $c_0 > 0$ est une sous-estimation du paramètre d'homogénéité, il existe un $s(\delta) > 0$ tel que, pour tout instant initial \tilde{t}_0 et toutes les solutions $\tilde{x}(\cdot)$ avec $\tilde{x}(\tilde{t}_0) \in E_\delta$, on a que $\tilde{x}(t) \in E_{\frac{1}{2}\delta}$ pour $t \geq \tilde{t}_0 + s(\delta)$. Puisque la fonction $x^c(\cdot)$, dont les composantes (A.8) sont données pour $c = \delta R^{-1} \geq c_0$, est une solution de (A.2), et, en plus, $x^c(\tilde{t}_0) \in E_\delta$ en $\tilde{t}_0 = c^{-q}(t_0 + \tau(x^0, E_R))$, on conclut que

$$x^c(t) \in E_{\frac{1}{2}\delta} \text{ pour } t \geq c^{-q}(t_0 + \tau(x^0, E_R)) + s(\delta). \quad (\text{A.15})$$

Cette dernière relation, réécrite en $x(t)$ en tenant compte de (A.8) avec $c = \delta R^{-1}$, est exprimé par :

$$x(t) \in E_{\frac{1}{2}R} \text{ pour } t \geq t_1 = t_0 + \tau(x^0, E_R) + (\delta R^{-1})^q s(\delta). \quad (\text{A.16})$$

Ensuite, en procédant de même pour calculer une solution pour (A.8) avec $x(t_1) \in E_{\frac{1}{2}R}$, on obtient

$$x(t) \in E_{\frac{1}{4}R} \text{ pour } t \geq t_2 = t_1 + 2^q(\delta R^{-1})^q s(\delta). \quad (\text{A.17})$$

De façon générale, les relations suivantes sont obtenues :

$$x(t) \in E_{2^{-(i+1)}R} \text{ pour } t \geq t_{i+1} = t_i + 2^{qi}(\delta R^{-1})^q s(\delta), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.18})$$

en itérant sur i . Puisque $\lambda = 2^q < 1$ et en vertu de $q < 0$, les instants t_k , $k = 1, 2, \dots$ convergent vers une limite donnée par :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \tau(x^0, E_R) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i (\delta R^{-1})^q s(\delta) \quad (\text{A.19})$$

$$= t_0 + \tau(x^0, E_R) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} (\delta R^{-1})^q s(\delta) \quad (\text{A.20})$$

$$= t_0 + \tau(x^0, E_R) + \frac{1}{1 - \lambda} (\delta R^{-1})^q s(\delta) < \infty. \quad (\text{A.21})$$

Alors, la relation (A.18) implique que

$$x(t) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{2^{-i}R} = \{0\} \forall t \geq t_0 + \tau(x^0, E_R) + \frac{1}{1 - 2^q} (\delta R^{-1})^q s(\delta), \quad (\text{A.22})$$

ce qui permet d'établir la propriété de la convergence en temps fini de l'inclusion différentielle localement homogène (A.2), ainsi qu'une surestimation du temps d'établissement (A.10). \square

Un corollaire important du théorème A.3.1 est obtenu si l'inclusion différentielle (A.2) est générée par une équation différentielle incertaine (A.3), avec φ et ψ des fonctions continues par morceaux. De plus, φ est localement homogène et ψ est localement uniformément bornée.

Théorème A.3.2. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Le terme de droite d'une équation différentielle incertaine (A.3) consiste en une fonction φ continue par morceaux localement homogène de degré négatif q par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) et d'une fonction ψ continue par morceau dont les composantes ψ_i , $i = 1, \dots, n$ sont localement équi-uniformément bornées par des constantes $M_i \geq 0$;*
2. *$M_i = 0$ quand $q + r_i > 0$;*
3. *$x = 0$ est un point d'équilibre globalement équi-uniformément asymptotiquement stable de (A.3) en présence de fonctions ψ satisfaisant (A.4).*

Alors, l'équation différentielle incertaine (A.3) (A.4) est globalement équi-uniformément stable en temps fini. En plus, le temps d'établissement (A.7) est estimé par (A.10).

Preuve. Le lemme A.2.4 couplé aux conditions (1) et (2) du théorème garantissent que le système (A.3), (A.4) est localement homogène de degré $q < 0$ par rapport à la dilatation (r_1, \dots, r_n) . En tenant compte de la condition (3) du théorème, le théorème A.3.1 devient applicable et on conclut à la stabilité asymptotique équi-uniforme en temps fini de (A.3), (A.4) ainsi qu'à une estimation du temps d'établissement. \square

Annexe B

Commande par modes glissants

Cette partie est principalement tirée de [Flo00].

B.1 Introduction

La commande par modes glissants est une des techniques de commandes les plus connues efficaces et robustes en automatique (voir par exemple [FB07], [FBP03b], [DFKP08b], [DFKP08a], [NFP08], [LPG06], [TPGDL08] pour des applications en robotique et machines électriques). Des propriétés intéressantes des contrôleurs par modes glissants sont illustrées dans [OAC03], [OAAA03] où des études expérimentales sur des systèmes mécaniques présentant des frottements secs, un servo-moteur et des robots à trois degré de liberté, sont présentées. Les commandes par modes glissants (CMG) sont réalisées de manière à contraindre les trajectoires du système à rester dans le voisinage d'une surface de commutation après un temps fini. Il y a deux principaux avantages à une telle approche. Tout d'abord, le comportement dynamique résultant peut être déterminé par le choix d'une surface adéquate. Ensuite, la réponse du système en boucle fermée présente de bonnes propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations, ce qui fait de cette méthode une candidate sérieuse dans la perspective de l'élaboration de commandes robustes. Cependant, la plupart des algorithmes de CMG d'ordre arbitraire souffrent de l'absence de conditions suffisantes de convergence constructives. La tâche de réglage des paramètres de la loi de commande s'avère alors difficile lorsqu'il s'agit d'atteindre des performances bien spécifiques pour le système bouclé. Ce handicap fait que ces techniques perdent de leur pertinence. Ainsi, la recherche d'algorithmes garantissant un régime glissant d'ordre quelconque et proposant un réglage simple des paramètres de la loi de commande en vue d'atteindre les performances désirées, présente un réel intérêt. Cette partie est consacré dans un premier temps à une présentation générale des concepts de base de la CMG d'ordre supérieur. Son principe, ses propriétés de robustesse ainsi que le phénomène de chattering et les solutions pour l'éliminer y sont présentés.

B.2 Etat de l'art

Dans un souci de clarté et pour éviter d'alourdir les notations, les développements théoriques se feront sur la classe des systèmes non linéaires, continus, mono-entrée et affines en la commande c'est-à-dire $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Tous les résultats exposés ci-après peuvent néanmoins être généralisées à des systèmes de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ et au cas des systèmes multivariables.

Les modes glissants pour les systèmes non linéaires ont été largement étudiés depuis leur introduction (voir les ouvrages [Utk92], [ES98], [PB02]). Dans cette section, une présentation générale et succincte de la CMG d'ordre un et d'ordre supérieur est donnée.

B.2.1 Commande par modes glissants d'ordre un

B.2.1.1 Généralités

Le principe de la CMG est, à l'aide d'une commande discontinue, de contraindre le système à atteindre une surface donnée pour ensuite y rester. La synthèse d'une CMG se déroule en deux temps :

- une surface est déterminée en fonction des objectifs de commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé,
- une commande discontinue est synthétisée de manière à contraindre les trajectoires d'état du système à atteindre et, ensuite, à rester sur cette surface en dépit d'incertitudes, de variations de paramètres.

Soit le système non linéaire, affine en la commande, défini par :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u + p(x, t) \quad (\text{B.1})$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{X}$ représente l'état du système avec \mathbb{X} un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $u \in \mathcal{U}$ est l'entrée de commande qui est une fonction éventuellement discontinue, bornée, dépendante de l'état et du temps, avec \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R} . Les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables. Le vecteur $p(x, t) \in \mathbb{R}^n$ représente les incertitudes et perturbations du système qui peuvent être discontinues (frottement de Coulomb par exemple).

Soit $s(x, t) : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable et considérée comme une sortie fictive du système (4.2.1) telle que son annulation permette de satisfaire l'objectif de commande. La fonction $s(x, t)$ est appelée *variable de glissement*. L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : s(x, t) = 0\}$$

représente alors une sous-variété de \mathcal{X} de dimension $(n-1)$ appelée *surface de glissement*.

Définition B.2.1. [Utk92] On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur \mathcal{S} s'il existe un temps fini T_{eta} tel que la solution de (4.2.1) satisfasse $s(x, t) = 0$ pour tout $t \geq T_{eta}$.

Quand les trajectoires du système (4.2.1) évoluent sur la surface de glissement \mathcal{S} , sa dynamique est dite immergée dans l'état d'un système autonome de dimension $n - 1$. Ce système, appelé *système réduit*, a une dynamique déterminée par la surface de

glissement. Une condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant d'ordre un est que le système (4.2.1) soit de degré relatif égal à un par rapport à la variable de glissement [Utk92] (le degré relatif d'un système est le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie, par rapport au temps, pour faire apparaître l'entrée de manière explicite [Isi95]). Une fois la surface de glissement choisie, la seconde étape consiste à construire une commande u de façon à ce que les trajectoires d'état du système soient amenées vers cette surface et soient ensuite maintenues dans un voisinage de celle-ci malgré la présence d'incertitudes et de perturbations sur le système. En d'autres termes, la commande doit rendre la surface de glissement localement attractive (i.e. au voisinage de la surface de glissement, les trajectoires du système de part et d'autre de la surface doivent tendre vers cette dernière). Une condition nécessaire et suffisante, appelée *condition d'attractivité*, pour qu'une variable de glissement $s(x, t)$ tende vers 0 est [Itk76] :

$$s\dot{s} < 0 \quad (\text{B.2})$$

Cependant, l'inégalité (B.2) n'est pas suffisante pour assurer une convergence en temps fini vers la surface et donc, un fonctionnement en régime glissant. Elle est généralement remplacée par la condition suivante, appelée *condition de η -attractivité* :

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \eta > 0$$

La méthode dite de la commande équivalente [Utkin, 1992] est un moyen de décrire le comportement du système lorsqu'il est restreint à la surface $\{s = 0\}$. Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface :

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial x}(f(x) + g(x)u^{eq}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où u^{eq} , appelé *commande équivalente*, est associée au système nominal, i.e. sans incertitude; elle est déterminée de façon unique par les conditions d'invariance (B.3), c'est-à-dire :

$$u^{eq} = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x)$$

Cependant, cette commande ne force pas les trajectoires du système à atteindre la surface de glissement. Ainsi, la commande u est la somme de la commande équivalente et d'une composante discontinue assurant un régime glissant et l'insensibilité du système vis-à-vis des incertitudes et des perturbations, i.e.

$$u = u^{eq} - G \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \text{sign}(s)$$

où $G > 0$ est une constante positive et sign est la fonction signe usuelle.

Nous ne pouvons finir cette partie sans ajouter que les modes glissants présentent des propriétés de robustesse intéressantes vis-à-vis de certaines perturbations. Si celles-ci vérifient une certaine condition, elles n'affectent pas le système quand il atteint le régime de glissement, comme l'indique le théorème suivant :

Théorème B.2.2. [Utk92] *Un régime glissant sur \mathcal{S} , du système perturbé (B.1), est indépendant du signal de perturbation $p(x,t)$, si et seulement si, celui-ci est borné et vérifie*

$$p(x,t) \in Vect\{g(x)\}. \quad (\text{B.4})$$

La condition (B.4) est appelée *condition de recouvrement* ou dans la dénomination internationale "matching condition" [Dra69].

Remarque B.2.3. *La commande u du système (4.2.1) étant une fonction discontinue en x , l'équation différentielle engendrée n'a de sens que dans la théorie des inclusions différentielles [Fil88], [AC84].*

B.2.1.2 Exemple illustratif

Afin d'illustrer les différentes étapes de la synthèse d'une CMG d'ordre un et ses propriétés, considérons l'exemple d'un double intégrateur perturbé :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + p(x_1) \end{aligned}$$

où $p(x_1) = a \sin(10x_1)$ est une perturbation bornée. L'objectif de commande est de contraindre les variables d'état (x_1, x_2) à atteindre l'origine. On définit la variable de glissement suivante (si l'on veut par exemple que le comportement du double intégrateur soit analogue à un système du premier ordre de constante de temps $\frac{1}{\lambda}$) :

$$s = \lambda x_1 + x_2, \quad \lambda > 0$$

Après le choix de la variable de glissement, une commande discontinue est synthétisée de façon à rendre la surface $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : s = 0\}$ invariante et attractive. En définissant u par :

$$u = -\lambda x_2 - G \text{sign}(s), \quad G \geq a + \eta, \eta > 0$$

un régime glissant prend place sur \mathcal{S} en un temps fini étant donné que

$$s\dot{s} = s(\lambda x_2 + u + p) = s(-G \text{sign}(s) + p) \leq -\eta|s|$$

La figure B.1 (a) montre les deux comportements successifs du système : tout d'abord, le système décrit dans le plan de phase, une trajectoire parabolique tant que la surface de glissement n'est pas atteinte (phase de convergence). Ensuite, il décrit un régime glissant en évoluant le long de \mathcal{S} (phase de glissement) jusqu'à l'origine du plan de phase. La figure B.1(b) montre que le régime glissant prend place à partir de $T_{eta} = 2.2s$. A partir de cet instant, la commande commute à très haute fréquence et la dynamique du système bouclé se réduit à :

$$\dot{x}_1 = x_2 = -\lambda x_1$$

On peut remarquer qu'une fois le régime glissant établi sur \mathcal{S} , le système perturbé a un comportement dynamique identique à celui du double intégrateur sans perturbation

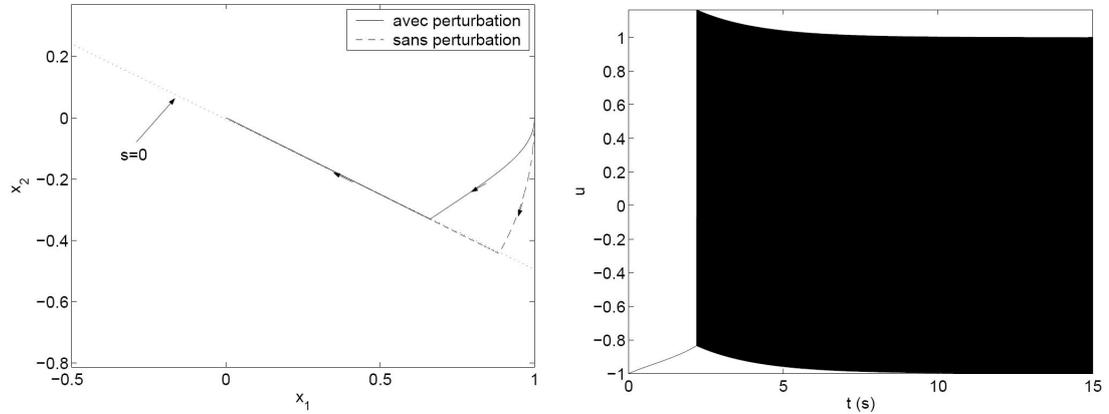


FIGURE B.1 – Commande par mode glissant du 1^{er} ordre, plan de phase (gauche) et contrôle (droite).

en régime glissant. Le régime glissant jouit, ainsi, de la propriété d'insensibilité vis-à-vis des perturbations intervenant dans la même direction que u . Le système reste cependant sensible à de telles perturbations pendant le régime transitoire, i.e. avant que \mathcal{S} soit atteinte. Afin d'assurer l'insensibilité aux perturbations pendant toute la réponse du système, l'élimination de la phase de convergence vers \mathcal{S} est nécessaire [US96].

B.2.1.3 Le phénomène de réticence

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Évidemment, pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible. Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement, appelé réticence ou "chattering" en anglais. Celui-ci se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement (voir les figures B.1(b) et B.2). Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les retards de commutation au niveau de la commande et la présence de dynamiques parasites en série avec les systèmes commandés [YUz99].

Ce phénomène constitue un désavantage non négligeable car, même s'il est possible de le filtrer en sortie du processus, il est susceptible d'exciter les modes à haute fréquence qui n'ont pas été pris en compte dans le modèle du système. Il peut être si pénalisant que l'utilisation d'une CMG d'ordre un peut, dans certaines applications, être à proscrire, vu que son utilisation peut dégrader les performances et même conduire à l'instabilité [Hec91]. La réticence implique également d'importantes sollicitations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leur usure rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique.

De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. L'une des solutions envisagées consiste à remplacer la fonction signe par une

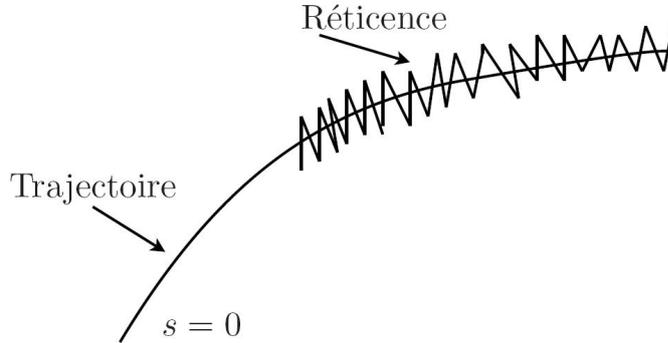


FIGURE B.2 – Le phénomène de réticence

approximation continue, de type grand gain, dans un voisinage de la surface [SS83], telle que la fonction saturation ou une fonction sigmoïde (par exemple $\tanh(\frac{x}{\epsilon})$, $\frac{2}{\pi} \arctan(\frac{x}{\epsilon})$, \dots). Le régime glissant qui en résulte n'est plus confiné dans \mathcal{S} , mais dans un proche voisinage de celui-ci [CdWP02]. Bien que cela permette d'atténuer le phénomène de réticence, la précision par rapport à l'objectif fixé, la robustesse de la commande et le temps de réponse s'en trouvent dépréciés. La technique des modes glissants d'ordre supérieur permet de passer outre ce phénomène indésirable et aussi de pallier la condition sur le degré relatif, rencontrée par la CMG d'ordre un.

B.2.2 Commande par modes glissants d'ordre supérieur

Dans le milieu des années 80, une nouvelle technique de glissement, caractérisée par une commande discontinue agissant sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement, a été proposée dans [EKL86].

B.2.2.1 Concepts de base

Considérons un système non linéaire incertain dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)u \\ s &= s(x, t) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ représente l'état du système. La commande $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ est une fonction discontinue et bornée dépendante de l'état et du temps. f et g sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables mais connus de façon incertaine.

Le problème posé est toujours de contraindre les trajectoires du système à évoluer sur la surface de glissement $s(x, t) = 0$, qui est ici une fonction à valeur réelle, suffisamment différentiable telle que ses $(\rho - 1)$ premières dérivées par rapport au temps ne soient fonctions que de l'état x (ce qui signifie qu'elles ne contiennent aucune discontinuité). Nous présentons ici brièvement la théorie des modes glissants d'ordre supérieur. Plus de précisions peuvent être trouvées dans [EKL86], [Lev93], [BFLU99], [Flo00], [FL02].

Définition B.2.4. Soit le système non linéaire (B.5) et la variable de glissement $s(x, t)$ associée. L'ensemble (ou surface) de glissement d'ordre ρ par rapport à $s(x, t)$ est défini par :

$$\mathcal{S}_\rho = \{x \in \mathcal{X} : s = \dot{s} = \dots = s^{(\rho-1)} = 0\} \quad (\text{B.6})$$

Définition B.2.5. [Lev93] Supposons que l'ensemble de glissement \mathcal{S}_ρ d'ordre ρ soit non vide et qu'il définisse localement un ensemble intégral au sens de Filippov. Alors, la dynamique satisfaisant (B.6) est appelée mode glissant d'ordre ρ par rapport à la variable de glissement s .

Définition B.2.6. [Lev93] On dit que la loi de commande u est un algorithme glissant idéal d'ordre ρ par rapport à \mathcal{S}_ρ si elle génère une solution au sens de Filippov sur \mathcal{S}_ρ , i.e.

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(\rho-1)} = 0$$

Un régime glissant d'ordre un peut exister sur la surface $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : s = 0\}$ si et seulement si le système (B.5) est de degré relatif un par rapport à la variable de glissement. La commande par modes glissants d'ordre supérieur permet de relâcher cette condition. Si le système est de degré relatif $\rho > 1$ par rapport à la variable de glissement, une CMG d'ordre ρ permettra d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface en forçant les trajectoires d'état du système à être confinées au bout d'un temps fini dans l'ensemble de glissement d'ordre ρ . Dans les définitions précédentes, il est supposé que l'ensemble de glissement d'ordre ρ est atteint exactement. Un tel régime glissant est qualifié d'idéal car les organes de commande doivent commuter à une fréquence infinie. Toutefois, ce n'est pas le cas en pratique du fait des imperfections de ces derniers. Par conséquent, le régime glissant ne prend place que dans un proche voisinage de la surface considérée. Ce comportement est qualifié de régime glissant réel. Il en résulte qu'un algorithme d'ordre ρ permettra, si la méthode d'intégration est à pas variable majoré par τ , d'obtenir la précision de convergence suivante [FL02] :

$$|s| = \mathcal{O}(\tau^\rho), |\dot{s}| = \mathcal{O}(\tau^{(\rho-1)}), \dots, |s^{(\rho-1)}| = \mathcal{O}(\tau)$$

Ainsi, obtenir une bonne précision de convergence d'un mode glissant requiert non seulement de maintenir la fonction contrainte à zéro, mais également ses dérivées successives. Ceci donne un argument supplémentaire aux modes glissants d'ordre supérieur. En effet, le développement précédent nous indique que pour un mode glissant classique, la précision de la convergence est de l'ordre de τ , alors qu'elle est de τ^ρ pour un mode glissant d'ordre ρ .

Les algorithmes de commande par modes glissants d'ordre supérieur sont pour la plupart connus pour le cas $\rho = 2$. Certains travaux ont néanmoins permis de construire des commandes garantissant un régime glissant d'ordre quelconque en temps fini [MY97], [Lev01] et [Lev05a]. Cependant, dans la majorité des cas, la nécessité de connaître avec précision les conditions initiales du système ou le réglage délicat des paramètres de la loi de commande leur confère généralement une difficulté de mise en oeuvre pour les applications réelles.

B.2.2.2 Algorithmes par modes glissants d'ordre deux

Considérons le système non linéaire (B.5). Le but est de générer un régime glissant d'ordre deux par rapport à la variable de glissement s , c'est-à-dire de contraindre les trajectoires du système à atteindre et se maintenir en temps fini dans l'ensemble de glissement \mathcal{S}_2 voir figure (B.3) :

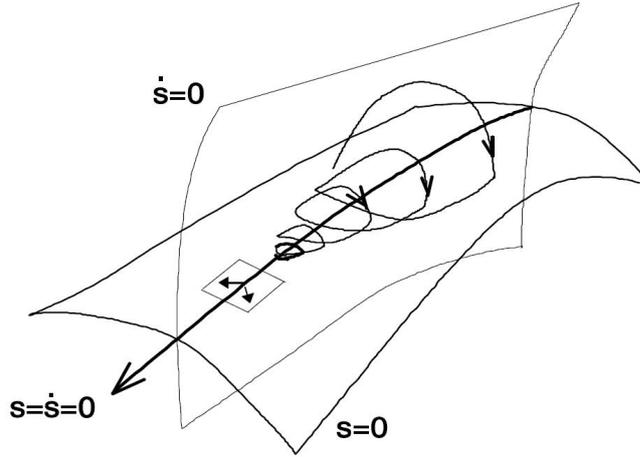


FIGURE B.3 – Trajectoire d'un mode glissant du second ordre.

$$\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathcal{X} : s = \dot{s} = 0\} \quad (\text{B.7})$$

Ceci est réalisé par une commande agissant sur la dérivée seconde de la variable de glissement qui, de manière générale, peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{s} = \phi(x, t) + \varphi(x, t)v$$

avec

- $v = \dot{u}$ dans le cas où le système (B.5) est de degré relatif $\rho = 1$ par rapport à s ,
- $v = u$ dans le cas où le système (B.5) est de degré relatif $\rho = 2$ par rapport à s .

Afin de réaliser des algorithmes par modes glissants d'ordre deux, il est nécessaire de vérifier l'hypothèse de travail suivante pour valider l'atteignabilité de la surface de glissement et la bornitude de la variable \ddot{s} [BFLU99] :

Hypothèse B.2.7. *Les fonctions incertaines $\varphi(x, t)$ et $\phi(x, t)$ sont bornées. Plus particulièrement, il existe quatre constantes positives S_0 , C_0 , K_m et K_M telles que, dans un voisinage $|s(x, t)| < S_0$, les inégalités suivantes soient vérifiées :*

$$|\phi(x, t)| < C_0 \text{ et } 0 < K_m \leq \varphi(x, t) \leq K_M$$

Notons que cette hypothèse est relativement peu restrictive puisque, si les fonctions ϕ et φ sont continues sur un compact où la fonction φ ne s'annule pas, elle est automatiquement vérifiée. On pourra donc se ramener à un compact afin d'appliquer les algorithmes suivants. En effet, il est facile de synthétiser une commande ralliant ce compact en temps fini si ce dernier n'est pas un ensemble singulier de l'équation différentielle.

Différents algorithmes menant au comportement désiré peuvent être trouvés dans la littérature : "twisting", "super-twisting", "sub-optimal" [BFLU99], "algorithme quasi-homogène" [Orl03].

B.2.2.3 Algorithmes par modes glissants d'ordre quelconque

Contrairement aux modes glissants d'ordre deux, il existe très peu de résultats sur les algorithmes de commande par modes glissants d'ordre quelconque. Récemment, de nouveaux algorithmes apparaissent. L'algorithme de CMG proposé dans [MY97] est, à notre connaissance, le premier travail proposant une solution à ce problème. Il est basé sur les propriétés de convergence en temps fini des équations différentielles non linéaires. Cependant, il souffre d'un problème de singularité autour de l'origine. Plusieurs algorithmes proches de celui proposé dans [MY97], ont été développés dans [Lev01], [Lev03], [Lev05a]. Bien qu'ils permettent de pallier le problème de singularité autour de l'origine, un problème se pose sur le choix des gains de commande. L'algorithme est peu constructif par manque de conditions nécessaires et/ou suffisantes relatives aux paramètres de la loi de commande, rendant le réglage de cette dernière empirique, souvent difficile et fastidieux. Enfin, d'autres algorithmes de commande par modes glissants d'ordre supérieur ont été récemment introduits dans [Lev05b], [LPG07], [PGL08] [DFKP08a]. Le premier algorithme est basé, d'une part, sur la commande linéaire quadratique sur un horizon de temps fini avec contraintes sur l'état final et, d'autre part, sur la commande par modes glissants d'ordre un. Quant au second, il est basé sur la minimisation d'un critère quadratique et sur le concept de CMGI. Bien que ces algorithmes soient généraux, la connaissance précise et a priori des conditions initiales du système peu restreindre l'applicabilité de cette approche.

Bibliographie

- [AA95] M. A. Al-Alaoui. A class of second-order integrators and low-pass differentiators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 42 :220–223, 1995.
- [AC84] J. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [AF00] K. J. Astrom and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36 :287–295, 2000.
- [Ane03] N.P.I. Aneke. *Control of underactuated systems*. Thèse de doctorat, Eindhoven, 2003.
- [AOA00] J. Alvarez, Y. Orlov, and L. Acho. An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a coulomb friction oscillator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 74 :687–690, 2000.
- [AS65] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 1965.
- [BB00] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Finite time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Optimization and Control*, 38, 3 :751–766, 2000.
- [BDPR03] P. Borne, M. Dambrine, W. Perruquetti, and J. P. Richard. *Vector Lyapunov functions nonlinear, time-varying, ordinary and functional differential equations*. In *Advances in Stability Theory at the End of the 20th Century*, A.A. Martynyuk, Taylor and Francis, 2003.
- [BFLU99] G. Bartolini, A. Ferrera, A. Levant, and E. Usai. *On second order sliding mode controllers*. Lecture notes in control and information sciences, 1999.
- [BFU00] G. Bartolini, A. Ferrera, and E. Usai. Chattering avoidance by second-order sliding mode. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-43 :241–246, 2000.
- [BV] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. available at http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf.
- [CAA⁺03] C. Chevallerau, G. Abba, Y. Aoustin, F. Plestan, E. Westervelt, C. Canudas-de Wit, and J.W. Grizzle. Rabbit : A testbed for advance control theory. *IEEE Control Systems Magazine*, issue 10 :57–79, 2003.

- [CdWEU02] C. Canudas-de Wit, B. Espiau, and C. Urrea. *Orbital Stabilization of Under-actuated Mechanical Systems*. Preprints 15th Triennial World Congress, IFAC SPain, 2002.
- [CdWP02] C. Canudas-de Wit and W. Perruquetti. *Smoothing strategies for high-gain control*. Preprints IFAC Latin-American Conference on Automatic Control, Mexico, 2002.
- [CH95] C. C. Chung and J. Hauser. Nonlinear control of a swinging pendulum. *Automatica*, 31 (6) :851–862, 1995.
- [Chi02] Y. Chitour. Time-varying high-gain observers for numerical differentiation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1565–1569, 2002.
- [DFKP08a] M. Defoort, T. Floquet, A. Kökösy, and W. Perruquetti. A novel higher order sliding mode control scheme. *Systems Control Letters*, accepted, 2008.
- [DFKP08b] M. Defoort, T. Floquet, A. Kökösy, and W. Perruquetti. Sliding mode formation control for cooperative autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, accepted, 2008.
- [DK99] A.M. Dabroom and H.K. Khalil. Discrete-time implementation of high-gain observers for numerical differentiation. *International Journal of Control*, 72 :1523–1537, 1999.
- [DMPD96] T.E. Duncan, P. Mandl, and B. Pasik-Duncan. Numerical differentiation and parameter estimation in higher order stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 41 :522–532, 1996.
- [dN88] B. d’Andrea Novel. *Commande non linéaire des robots*. Hermès, 1988.
- [Dra69] B. Drazenovic. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5(3) :287–295, 1969.
- [EKL86] S.V. Emelyanov, S.V. Korovin, and L.V. Levantovsky. Higher order sliding modes in the binary control system. *Soviet Physics*, 31 :291–293, 1986.
- [ES98] C. Edwards and S.K. Spurgeon. *Sliding Modes Control : Theory and Applications*. Taylor and Francis, London, 1998.
- [FB07] T. Floquet and J. P. Barbot. Super twisting algorithm based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 38 :803–815, 2007.
- [FBP03a] T. Floquet, J. P. Barbot, and W. Perruquetti. Higher order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed system. *Automatica*, 39 :1077–1083, 2003.
- [FBP03b] T. Floquet, J.P. Barbot, and W. Perruquetti. Observateurs par modes glissants d’ordre deux pour la machine asynchrone. *e-Sta, Revue électronique Sciences et Technologies de l’Automatique*, [http ://www.see.asso.fr/esta](http://www.see.asso.fr/esta), 0, 2003.

- [FGHP95] A. L. Fradkov, P. Y. Guzenko, D. J. Hill, and A. Y. Pogromsky. Speed gradient control and passivity of nonlinear oscillators. *In Preprints of IFAC symposium on control of nonlinear systems*, Lake Tahoe :655–659, 1995.
- [Fil88] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, New York, 1988.
- [FJMS05] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and A. Sedoglavic. Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec application aux images et aux vidéos. *Actes 20^e Col. GRETSI*, Louvain-la-neuve :available at <http://hal.inria.fr/inria-00001116>, 2005.
- [FJMSR04] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and H. Sira-Ramírez. Compression différentielle de transitoires bruités. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, vol.339 :821–826, 2004.
- [FJMSR05] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and H. Sira-Ramírez. Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures. *Actes 20^e Col. GRETSI*, Louvain-la-neuve :available at <http://hal.inria.fr/inria-00001115>, 2005.
- [FL96] L. Fridman and A. Levant. Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory. *Robust Control via variable structure and Lyapunov techniques (eds.)*, *Lecture notes in control and information science*, Berlin, Springer, 217 :107–133, 1996.
- [FL02] L. Fridman and A. Levant. *Higher order sliding modes, dans Sliding mode control in engineering*. editors : Perruquetti, W. et Barbot, J. P. Marcel-Dekker, New York, 2002.
- [Flo00] T. Floquet. *Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2000.
- [FMMSR03] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, and H. Sira-Ramírez. Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples. *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, Lagares, México, 2003.
- [FSR03] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM : COCV*, 9 :151–168, 2003.
- [FSR04] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. Control via state estimations of some nonlinear systems. *Preprints Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS*, Stuttgart, 2004.
- [FSR05] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. *Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems*, *In : Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*. Springer, 2005.
- [FYK92] K. Furuta, M. Yamakita, and S. Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Journal of Systems and Control Engineering*, 206 :263–269, 1992.

- [FYKN92] K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, and M. Nishimura. A new inverted pendulum apparatus for education. *Advances in control education*, Pergamon, 1992.
- [GGB76] Lj. Grujić, J.C. Gentina, and P. Borne. General aggregation of large-scale systems by vector lyapunov functions and vector norms. *International Journal of Control*, 24 :529–550, 1976.
- [Han67] W. Hanh. *Stability of motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Hec91] B. Heck. Sliding mode control for singular perturbed systems. *International Journal of Control*, 53 :985–1001, 1991.
- [HHX01] Y. Hong, J. Huang, and Y. Xu. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE transactions on Automatic Control*, 46 :305–309, 2001.
- [Ibr03] S. Ibrir. Online exact differentiation and notion of asymptotic algebraic observers. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48 :2055–2060, 2003.
- [Ibr04] S. Ibrir. Linear time-derivatives trackers. *Automatica*, 40 :397–405, 2004.
- [ID04] S. Ibrir and S. Diop. A numerical procedure for filtering and efficient high-order signal differentiation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer science*, 14 :201–208, 2004.
- [Isi95] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995.
- [Isi99] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems II*. Springer-Verlag, London, 1999.
- [Itk76] U. Itkiss. *Control systems of Variable Structure*. Wiley, New York, 1976.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [KKK94] M. Krstich, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotović. Passivity and parametric robustness of a new class of adaptive systems. *Automatica*, 30 :1703–1716, 1994.
- [Kra63a] N. N. Krasovskii. *Problems of the theory of stability of motion*. Fizmatgiz (in Russian) ; English translation, Stanford University Press, Moscow, 1963.
- [Kra63b] N. N. Krasovskii. *Stability of motion, Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*. Stanford University Press, CA, 1963.
- [LaS60] J. P. LaSalle. Some extensions of lyapunov's second method. *IRE Transaction on Circuit Theory*, CT-7 :520–527, 1960.
- [Lev93] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58 :1247–1263, 1993.
- [Lev00] A. Levant. Variable measurement step in 2-sliding control. *Kybernetika*, 36 :77–93, 2000.
- [Lev01] A. Levant. Universal siso sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49 :1447–1451, 2001.

- [Lev03] A. Levant. Higher order sliding modes, differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76 :924–941, 2003.
- [Lev05a] A. Levant. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :1812–1816, 2005.
- [Lev05b] A. Levant. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :1812–1816, 2005.
- [LF98] R. Lozano and I. Fantoni. *Passivity based control of the inverted pendulums*. In Normand-Cyrot, *Perspectives in control*, New York, Springer, 1998.
- [LFB00] R. Lozano, I. Fantoni, and D. J. Block. Stabilization of the cart pendulum around its homoclinic orbit. *Systems and Control Letters*, 40 :197–204, 2000.
- [LMR98] Y. Lenoir, P. Martin, and P. Rouchon. $2k\pi$ the juggling robot. *Conference on Decision and Control.*, Tampa, Florida :1995–2000, 1998.
- [LMS02] D. Liberzon, A.S. Morse, and E. Sontag. Output-input stability and minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :422–436, 2002.
- [LPG06] A. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. Practical higher order sliding mode control : optimal control based approach and application to electromechanical systems. *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, Springer, vol. 334., Editeurs : C. Edwards, E. Fossas et L. Fridman, 2006.
- [LPG07] A. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica*, 43 :531–537, 2007.
- [Mbo] M. Mboup. Parameter estimation via differential algebra and operational calculus. *available at <http://hal.inria.fr>*.
- [MFU90] H. Meier, Z. Farwig, and H. Unbehauen. Discrete computer control of a triple-inverted pendulum. *Optical Control Applications and Methods*, 11 :157–171, 1990.
- [MJF07] M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control. *15th Mediterranean conference on control and automation*, june 27-29, 2007.
- [MSW81] W. Maletinsky, M. F. Senning, and F. Wiederkehr. Observer based control of a double pendulum. *Preprints IFAC world congress*, pages 3383–3387, 1981.
- [MY97] Z. Man and X. Yu. Terminal sliding mode control of mimo linear systems. *IEEE Transactions on circuit and systems*, 44 :1065–1070, 1997.
- [NFP08] F. Nollet, T. Floquet, and W. Perruquetti. Observer-based second order sliding mode control laws for stepper motors. *Control Engineering Practice*, 16 :429–443, 2008.

- [NHM88] Neudecker, Heinz, and Magnus. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley and Sons, ISBN 978-0-471-91516-4, New York, 1988.
- [OAA04] Y. Orlov, L. Acho, and L. Aguilar. Quasihomogeneity approach to the pendubot stabilization around periodic orbits. *Preprints of the 2nd IFAC Symposium on Systems, Structure and Control*, Oaxaca-Mexico, 2004.
- [OAAA03] Y. Orlov, J. Alvarez, L. Acho, and L. Aguilar. Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control. *International Journal of Control*, 76 :1446–1452, 2003.
- [OAC03] Y. Orlov, L. Aguilar, and J.C. Cadiou. Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors. *International Journal of Control*, 76 :959–967, 2003.
- [Orl03] Y. Orlov. Extended invariance principle for nonautonomous switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 :1448–1452, 2003.
- [Orl05] Y. Orlov. Finite time stability of homogeneous switched systems. *SIAM Journal on Optimization and Control*, 43 :1253–1271, 2005.
- [OS01] R. Olfati-Saber. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. PhD thesis, PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [PB02] W. Perruquetti and J. P. Barbot. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [PGL08] F. Plestan, A. Glumineau, and S. Laghrouche. A new algorithm for high order sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control, Special issue : Advances in Higher Order Sliding Mode Control*, 18 4-5 :441–453, 2008.
- [RBMR08] S. Riachy, Y. Bachalany, M. Mboup, and J. P. Richard. An algebraic method for multi-dimensional derivative estimation. *IEEE 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio France :june 25–27, 2008.
- [RFR06] S. Riachy, T. Floquet, and J. P. Richard. Stabilisation of the cart-pendulum system via quasi-homogeneous switched control. *9th International Workshop on Variable Structure Systems*, Alghro, Italy :June 5–7, 2006.
- [RFR07a] S. Riachy, T. Floquet, and J. P. Richard. Nonlinear control for linear motors with friction-application to an inverted pendulum system. *6th international symposium on Linear Drives for Industrial Application*, Lille, France :Sept 16–19, 2007.
- [RFR07b] S. Riachy, T. Floquet, and J. P. Richard. Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène. *e-STA, Revue électronique Science et Technologies de l'Automatique*, 4, 2007.

- [Ria07] S. Riachy. Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène. *Journée JD-JN-MACS*, Reims, France, 2007.
- [RM87] R. A. Roberts and C.T. Mullis. *Digital signal processing*. Addison-Wesley, 1987.
- [ROF⁺07] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban, and J. P. Richard. Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems i : Local stabilization with application to an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18, issue 4-5 :529–543, 2007.
- [Ros92] L. Rosier. Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems and Control Letters*, 19 :467–473, 1992.
- [SF01] A. Shiriaev and A. Fradkov. Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11 :215–240, 2001.
- [SFO⁺07] R. Santiesteban, T. Floquet, Y. Orlov, S. Riachy, and J. P. Richard. Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems ii : Orbital stabilization of an inverted pendulum with application to swing up/balancing control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18, issue 4-5 :544–556, 2007.
- [SK91] H.J. Sussman and P.V. Kokotović. The peaking phenomenon and the global stabilization on nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 :424–440, 1991.
- [SMD⁺06] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemaï, J. P. Barbot, and T. Floquet. Exact differentiation and sliding mode observers for switched lagrangian systems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods Applications*, 65 :1050–1069, 2006.
- [Sop76] D. E. Soper. *Classical field theory*. Wiley-Interscience publication, April 1976.
- [SP94] D. Shevitz and B. Paden. Lyapuniv stability theory of nonsmooth systems. *IEEE, Transaction on Automatic Control*, 39 :1910–1914, 1994.
- [SP95] M. W. Spong and L. Praly. Energy based control of underactuated mechanical systems using switching and saturation. *In Morse, Preprints of the Block Island workshop on control using logic-based switching*, Rhode Island :86–95, 1995.
- [SPCdW05] A. Shiriaev, J. W. Perram, and C. Canudas-de Wit. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :1146–1176, 2005.
- [SPLE00] A. Shiriaev, A. Pogromsky, H. Ludvigsen, and O. Egeland. On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10 :283–300, 2000.

- [Spo95] M. W. Spong. The singup control problem of the acrobot. *IEEE Control Systems Magazine*, 15 (1) :49–55, 1995.
- [SRF⁺07] R. Santiesteban, S. Riachy, T. Floquet, Y. Orlov, and J. P. Richard. Controller synthesis for the cart-pendulum system using second order sliding modes. *European Control Conference*, Kos, Greece :July 2–5, 2007.
- [SS83] J. Slotine and S. Sastry. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator. *International Journal of Control*, 38(2) :421–434, 1983.
- [TPGDL08] D. Traore, F. Plestan, A. Glumineau, and J. De Leon. High order sliding mode control of a sensorless induction motor. *Preprints 17th IFAC World Congress*, pages Seoul, Korea, July 6–11, 2008.
- [UGS99] V.I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding modes in Electromechanical systems*. Taylor and Francis, London, 1999.
- [US96] V.I. Utkin and J. Shi. *Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions*. Kobe, Japan, 1996.
- [Utk92] V. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [WDL95] Q. Wei, W.P. Dayawansa, and W. S. Levine. Nonlinear control for an inverted pendulum having restricted travel. *Automatica*, 31 :841–850, 1995.
- [WK00] H. H. Wang and M. Kristic. Extremum seeking for limit cycle minimization. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(12) :2432–2437, 2000.
- [YISF95] M. Yamakita, M. Iwashiro, Y. Sugahara, and K. Furuta. Robust swing up control of double pendulum. *In American control conference*, pages 290–295, 1995.
- [YNSF94] M. Yamakita, K. Nonaka, Y. Sugahara, and K. Furuta. Robust state transfer control of double pendulum. *In IFAC symposium on advances in control education*, Boston :223–226, 1994.
- [YUz99] K. Young, V. Utkin, and O. Özgüner. A control engineer’s guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7 :328–342, 1999.
- [Zub64] V.I. Zubov. *Methods of A.M. Lyapunov and their applications*. Leiden : Noordhoff, 1964.

Table des figures

1.1	Le pendubot en coordonnées généralisés.	10
1.2	L'acrobot en coordonnées généralisés.	11
1.3	Le pendule de Furuta en coordonnées généralisés.	12
1.4	Le pendule à roue inertielle en coordonnées généralisées.	13
1.5	Le pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ	14
1.6	Schéma plus réaliste du pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ	17
1.7	Un corps solide en coordonnées cartésiennes.	17
2.1	Plan de phase d'un système à commutation du 2^{nd} ordre.	27
2.2	Oscillateur de Van der Pol Modifié	35
3.1	Schéma synoptique du moteur linéaire.	42
3.2	Photo du banc d'essai.	42
3.3	Schéma d'un moteur linéaire.	43
3.4	Stabilisation en zéro du moteur linéaire par un retour d'état statique linéaire.	44
3.5	Commande correspondante au retour d'état statique linéaire.	45
3.6	Stabilisation en zéro du moteur linéaire par un retour quasi-homogène discontinu.	45
3.7	Commande correspondant au retour quasi-homogène discontinu.	46
3.8	Stabilisation en zéro du moteur linéaire par un retour d'état statique linéaire sur le système étendu.	46
3.9	Commande correspondante au retour d'état statique linéaire sur le système étendu.	47
3.10	Expérimentation (positionnement du moteur linéaire) $x(m)$	47
3.11	Zoom de la figure 3.10.	48
3.12	Entrée de commande (Volts).	48
3.13	Un zoom de la figure 3.12	49
3.14	Poursuite d'une sinusoïde par commande quasi-homogène : position $x(m)$	49
3.15	Poursuite d'une sinusoïde par commande quasi-homogène : vitesse $\dot{x}(m/sec)$	50
3.16	Entrée de commande correspondant à l'expérience de poursuite d'une sinusoïde (Volts).	50
3.17	Poursuite d'une trajectoire polynômiale par commande quasi-homogène : position $x[m]$	51

3.18	Poursuite d'une trajectoire polynômiale par commande quasi-homogène : vitesse $\dot{x}[m/s]$	51
3.19	Entrée de commande correspondant à l'expérience de poursuite d'une trajectoire polynômiale (Volts).	52
3.20	Simulation numérique sans frottement non-matching, $x[m]$ et $\theta[rd]$	56
3.21	Entrée de commande (Volts).	56
3.22	Résultat expérimental (MGSO) $x[m]$ et $\theta[rd]$	57
3.23	Résultat expérimental (MGSO), entrée de commande (volts).	57
3.24	Un zoom de la figure 3.23	58
3.25	Résultat expérimental : Commande par retour d'état statique, $x(m)$ et $\theta(rad)$	58
3.26	Stabilisation de l'orbite homocline du pendule inversé : absence de frottement $\theta[rd]$ (3.31)	60
3.27	Tentative de stabilisation de l'orbite homocline en présence de frottement sec sur la tige $\theta[rd]$	61
3.28	Tentative de stabilisation de l'orbite homocline en présence de frottement sec sur la tige et en rajoutant un biais $E_0 \theta[rd]$	61
3.29	Tentative de stabilisation de l'orbite homocline en présence de frottement sec, le système démarre sur son orbite homocline $\theta[rd]$	62
3.30	Résultat expérimental, $\theta [rd]$	62
3.31	Résultat expérimental, $x [m]$	63
3.32	Résultat expérimental, entrée de commande τ (Volts)	63
3.33	Résultat expérimental, $\theta [rd]$	64
3.34	Résultat expérimental, $x [m]$	64
3.35	Résultat expérimental, entrée de commande $\tau [V]$	65
3.36	Passage d'une orbite à une autre $x [m]$ et $\theta [rd]$	67
3.37	Stabilisation globale du pendule inversé : résultat expérimental $x(m)$ et $\theta(rad)$	70
3.38	Commande correspondant à la stabilisation globale du pendule inversé (Volts).	70
3.39	Un zoom de la figure 3.38	71
4.1	Discretisation de l'intégrale.	76
4.2	Méthode des trapèzes.	77
4.3	Méthode de Simpson.	78
4.4	L'effet de Quantification.	79
4.5	Le retard d'estimation des différences finies.	80
4.6	Position et vitesse de référence et réelle ; comparaison de la dérivée algébrique avec les différences finis.	81
4.7	Positions angulaires de la tige qui correspondent à différentes tailles de la fenêtre d'intégration.	82
4.8	Positions linéaires du moteur qui correspondent à différentes tailles de la fenêtre d'intégration.	83
4.9	Résultats expérimentaux pour les différences finies.	84

4.10	Représentation 3-D de $f(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3)\cos(2x + 1 - e^y)$. . .	91
4.11	Estimation de I_{x^2}	91
4.12	Une coupe de la surface bruitée en $x_i = 2$ et $-1 \leq y_i \leq 3$, 25 dB	92
4.13	Estimation algébrique de la dérivée 1 ^{ere} I_x	92
4.14	Estimation de la dérivée 1 ^{ere} I_x par les différences finies	93
4.15	Une coupe de la surface bruitée en $x_i = 2$ et $-1 \leq y_i \leq 3$, 35 dB	93
4.16	Estimation de I_{xy}	94
4.17	Estimation de la dérivée seconde, I_{x^2}	94
4.18	Estimation de I_{xy} par les différences finies avec $SNR = 25$ dB	94
4.19	Estimation algébrique de I_{xy} , $SNR = 25$ dB	95
B.1	Commande par mode glissant du 1 ^{er} ordre, plan de phase (gauche) et contrôle (droite).	111
B.2	Le phénomène de réticence	112
B.3	Trajectoire d'un mode glissant du second ordre.	114

Résumé

J'ai bien bossé ...

Abstract

I worked well too.