Nancy-Université
Université Henri Poincaré

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

Toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➢ Contact SCD Nancy 1 : theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Benoît Claudon

Déformation de variétés kählériennes compactes : invariance de la Γ-dimension et extension de sections pluricanoniques

soutenue publiquement le 6 décembre 2007

Membres du Jury :

Rapporteurs :	**Jean-Pierre Demailly**	Professeur, Grenoble
	Claire Voisin	DR CNRS, Paris
Examinateurs :	**Daniel Barlet**	Professeur, Nancy
	Frédéric Campana	Professeur, Nancy (Directeur de thèse)
	Jón Ingólfur Magnússon	Professeur, Reykjavík
	Mihai Păun	Professeur, Nancy

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à exprimer ma plus profonde gratitude à Frédéric Campana qui m'a accompagné durant ces trois années. Sa grande disponibilité par rapport à mes questions les plus variées (qu'elles soient de nature mathématique ou non) ainsi que l'étendue de ses connaissances m'ont permis d'appréhender progressivement l'activité de chercheur cependant que sa conception de la géométrie complexe a largement influencé le présent mémoire. Tout au long de ces années, j'ai été très sensible à la grande liberté qu'il m'a octroyée pour mener à bien mon travail et à la confiance qu'il m'a régulièrement témoignée (même dans les moments les plus difficiles). Enfin, pour toutes ces conversations plus enrichissantes et divertissantes les unes que les autres, je le remercie sincèrement.

Sur le chemin menant de mon bureau à celui de mon directeur se trouve celui de Mihai Păun : mes arrêts y furent fréquents. L'intérêt qu'il a toujours porté à mon travail, l'attention avec laquelle il écoutait (et répondait à) mes diverses interrogations et sa bonne humeur ont été une source intarissable de motivation depuis son arrivée à l'Institut. Est-il nécessaire de préciser à quel point la troisième partie (au moins) de ce mémoire a été inspirée par ses travaux dont il m'a généreusement fait profiter ?

Claire Voisin et Jean-Pierre Demailly m'ont fait l'immense honneur de rapporter sur ce mémoire. C'est avec plaisir que je leur adresse mes remerciements pour ce travail : leurs remarques et suggestions ont dans une large mesure participé à l'amélioration de cette thèse. Jean-Pierre Demailly a eu de plus la lourde tâche de m'initier à la géométrie kählérienne lors de mon D.E.A. à Grenoble : qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

C'est une grande joie pour moi que de compter Daniel Barlet et Jón Magnússon parmi mon jury de thèse. Les conversations que j'ai pu avoir avec l'un et l'autre m'ont beaucoup apporté (tant sur le plan de la géométrie analytique que de la littérature islandaise).

Philippe Eyssidieux a suivi ma progression ; il a également su m'avertir lorsque je faisais fausse route et je lui en suis très reconnaissant.

Il me semble également important de souligner ici la qualité des conditions de travail offertes par l'I.E.C.N. ainsi que celle du travail fourni par les secrétaires (en particulier Chantal et Patricia).

La liste des personnes avec lesquelles j'ai pu interagir à l'Institut serait bien longue pour cette simple page ; permettez moi de n'en citer qu'une partie. Aux collègues de l'équipe (Vincent, Matei, Alain, Piotr, ...), aux autres doctorants (Pierre, Stéphane M., Lucas, Julien R., Simon, François, Aurélien, Julien C.,...), aux volleyeurs du lundi (Oussama, Julien M., Stéphane G.) et aux habitués du repas de midi qui ont participé à toutes ces conversations improbables (Régine et d'autres déjà nommés) : un grand merci (mention spéciale à Vincent qui est dans l'intersection de trois de ces catégories).

Mes amis, que je les aie rencontrés à Nancy, Lyon ou ailleurs, ont eu, ont et auront toujours une place importante dans ma vie. Parmi eux, Aurélien supporte mes interrogations et enthousiasmes mathématiques depuis de très nombreuses années : j'espère que cela durera encore longtemps.

A en juger par les innombrables moments de bonheur partagés avec eux, je dois bien admettre que mes parents, ma soeur et mon frère (pourtant plus portés sur les disciplines littéraires) tolèrent mon activité mathématique. Merci à eux ainsi qu'à ma (bientôt) belle-famille pour tout ce qu'ils m'apportent.

Il y a maintenant un peu plus de 7 ans, Marie est entrée dans ma vie ; pour mon plus grand bonheur, elle semble vouloir y rester. Pour tous ces instants vécus, partagés et que de simples mots ne sauraient décrire... *Marie, merci.*

Table des matières

Conventions et Notations **9**

I Γ-réduction : aspects géométriques et analytiques **11**

1 Introduction aux parties I et II **12**
1.1 Résultats principaux 12
1.2 Contenu 16

2 Généralités sur la Γ-réduction **18**
2.1 Revêtement universel et conjecture de Shafarevich 18
2.2 Γ-réduction des variétés kählériennes compactes 20
2.3 Propriétés et exemples 23
2.4 Γ-dimension et fibrations 26
2.4.1 Un résultat d'additivité 26
2.4.2 Cas des submersions en tores 28
2.5 Caractérisation de $\gamma d(X) = 1$ 31

3 Γ-réduction et théorie de la classification **34**
3.1 Quotient rationnel 34
3.2 Fibration d'Albanese 37
3.3 Fibration d'Iitaka-Moishezon 40

4 Applications des techniques L^2 à l'étude de la Γ-réduction **43**
4.1 Rappels de théorie de Hodge L^2 43
4.2 Théorème de comparaison : positivité de Ω^1_X et Γ-dimension . . . 45
4.2.1 Un exemple : la simple connexité des variétés de Fano . . 45
4.2.2 Théorème de comparaison 47
4.3 Formes holomorphes L^2 et Γ-réduction 49
4.3.1 Cas des formes de degré 1 49
4.3.2 Formes de degré 2 ou plus 50
4.3.3 Formes canoniques L^2 53

II Γ-réduction des variétés kählériennes compactes de dimension 3 **57**

5 Structures orbifoldes **58**
5.1 Notion de base orbifolde 58
5.2 Fibré canonique orbifolde et dimension de Kodaira 60

5.3 Groupes fondamentaux orbifoldes 62
5.4 Courbes orbifoldes 64

6 Surfaces orbifoldes (non de type général) 66
6.1 Surfaces orbifoldes réglées 67
6.2 Surfaces orbifoldes à fibré canonique trivial 68
6.3 Surfaces orbifoldes elliptiques 69

7 Γ-réduction en dimension 3 73
7.1 Variétés de dimension 3 de type π_1-général 75
7.2 Γ-réduction non de type général 78
7.3 Majoration du volume des fibres de certaines applications 80

8 Invariance par déformation 84
8.1 Conjecture générale et cas des surfaces 84
8.2 Semi-continuité de la Γ-dimension 85
8.3 Invariance par déformation : cas de la dimension 3 88

9 Γ-réduction des orbifoldes kählériennes 94
9.1 Revêtement universel d'une orbifolde lisse 94
9.2 Notion de métriques kählériennes orbifoldes 99
9.3 Construction de la $\widetilde{\Gamma}$-réduction 101
9.4 Orbifoldes de petite Γ-dimension 106

III Extensions de formes pluricanoniques : la méthode One-Tower 108

10 Introduction à la partie III 109
10.1 Invariance des plurigenres 109
10.2 Cadre général de la méthode One-Tower 111
10.3 Résultat principal 113

11 Métriques singulières et idéaux multiplicateurs 116
11.1 Courbure des métriques singulières 116
11.2 Notions de positivité 117
11.3 Idéaux multiplicateurs 119

12 Extensions de formes pluricanoniques 122
12.1 Cas d'une famille projective 122
12.1.1 Procédé inductif 123
12.1.2 Extraction de racines et conclusion 126
12.2 Cas projectif 128
12.3 Invariance des plurigenres L^2 131
12.3.1 Préliminaires 133
12.3.2 Démonstration du théorème 12.3.1 135
12.4 Formes pluricanoniques L^2 et Γ-réduction 139
12.4.1 Un premier résultat d'extension 140
12.4.2 Procédé inductif et fin de la démonstration 144
12.5 Discussion autour des problèmes d'extensions 146
12.5.1 Interpolation des différents énoncés 146

12.5.2 Un contre-exemple 147

Appendice **150**

A Deux lemmes de théorie des groupes **150**

B π_1-orbifolde d'une fibration **153**
B.1 Démonstration de la proposition 5.3.1 : 153
B.2 Démonstration de la proposition 5.3.3 : 154
B.3 Démonstration de la proposition 6.0.3 : 155

C Formule de l'indice L^2 **157**
C.1 Enoncé du théorème et schéma de la démonstration 158
C.2 Dimension de Von Neumann 160
C.2.1 Cas de $l^2(G)$ 160
C.2.2 Opérateurs à G-trace sur $L^2(\widetilde{X})$ 161
C.3 Equation de la chaleur 163
C.3.1 Noyau de la chaleur 163
C.3.2 Existence du développement asymptotique 165
C.4 Formules de McKean-Singer 168

Bibliographie **171**

Déformation de variétés kählériennes compactes : invariance de la Γ-dimension et extensions de formes pluricanoniques

L'objectif de ce travail est double : d'une part investiguer les propriétés de la Γ-réduction (ou réduction de Shafarevich) des variétés kählériennes compactes et, d'autre part, présenter une méthode générale d'extension de formes pluricanoniques (à coefficients éventuels dans un fibré en droites vérifiant certaines conditions de positivité).

Concernant la première question (qui occupe les parties I et II), nous étudions en particulier les propriétés d'invariance de la Γ-dimension dans les familles de variétés kählériennes de dimension 3. A l'aide de théorèmes de structure précis, nous sommes en mesure de démontrer cette invariance lorsque la famille n'est pas de type général. Dans ce dernier cas, seul un énoncé conditionnel est établi, reposant sur des conjectures concernant les surfaces rationnelles orbifoldes. Ces considérations nous amènent également à étendre les notions de Γ-réduction et Γ-dimension au cadre des orbifoldes lisses.

Dans la troisième et dernière partie, nous exposons une méthode générale d'extension de formes pluricanoniques. Bien qu'ayant été introduite dans le cas des familles projectives (en lien avec l'invariance des plurigenres), cette méthode est ici également mise en oeuvre dans d'autres contextes (famille de revêtements et fibres de la Γ-réduction).

Les outils utilisés dans le présent travail sont ceux de la théorie de la classification associés aux techniques analytiques (fonctions quasi-psh, métriques singulières et idéaux multiplicateurs, invariants L^2). Donnons maintenant un aperçu des sujets abordés et des résultats de ces différentes parties (les chapitres 1 et 10 fournissent des précisions supplémentaires sur le contenu des parties en question).

Parties I et II : Γ-réduction des variétés et orbifoldes kählériennes compactes

En partie motivée par la conjecture de Shafarevich qui prédit que le revêtement universel d'une variété projective admet toujours une fibration propre sur un espace de Stein, l'étude de ces revêtements s'est également révélée une approche féconde du point de vue de la théorie de la classification. Ainsi, les travaux de M. Gromov puis de F. campana et J. Kollár ont abouti à l'introduction du nouvel invariant suivant :

Définition.
Soit X une variété kählérienne compacte de revêtement universel $\widetilde{X}$. L'entier

$$\gamma d(X) = \min\big(\mathrm{codim}_{\widetilde{X}}(Z_t)\big)$$

(où le minimum est étendu à toutes les familles génériquement couvrantes $(Z_t)_t$ de cycles compacts de $\widetilde{X}$) est un invariant birationnel de X et est appelé la Γ*-dimension de* X*.*

La question du comportement de cet invariant dans les familles de variétés s'est alors posée immédiatement et, dans [Kol95], J. Kollár propose la conjecture suivante.

Conjecture.
La Γ*-dimension est un invariant de déformation.*

Comme la résolution de cette conjecture dans sa plus grande généralité semble pour l'instant hors d'atteinte, nous nous penchons ici sur la situation en petite dimension. Pour les familles de courbes, la Γ-dimension est clairement un invariant de déformation et ce fait persiste pour les familles de surfaces kählériennes : un résultat de Y.-T. Siu [Siu87] montre en effet que la Γ-dimension d'une surface est un invariant de son groupe fondamental. Comme cette caractérisation topologique de la Γ-dimension est mise en défaut dès la dimension 3, il semble intéressant d'étudier ce premier cas non trivial.

En utilisant les résultats de [CZ05], nous avons pu montrer l'invariance par déformation lorsque la famille n'est pas de type général.

Théorème.
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ *une famille de variétés kählériennes de dimension 3 de fibre centrale* $\mathcal{X}_0 = X$*. Si* X *n'est pas de type général, on a alors :*

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = \gamma d(X).$$

De plus, sous réserve de la validité de deux résultats concernant les groupes fondamentaux de certaines surfaces rationnelles orbifoldes, nous montrons que la condition $\gamma d(X) = 3$ (de telles variétés sont dites de type π_1-général) est stable par petite déformation.

Théorème (énoncé conditionnel).
Si $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ *est une famille de variétés kählériennes de dimension 3 dont la fibre centrale vérifie* $\gamma d(X) = 3$*, les fibres voisines sont aussi de type* π_1*-général :*

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = 3.$$

L'étude menée pour aboutir à ces résultats nous pousse naturellement à étendre la notion de Γ-dimension à la catégorie orbifolde introduite dans [Cam04b]. Rappelons la définition de ces objets.

Définition.
Une orbifolde lisse est un couple (X/Δ) *où* X *est une variété complexe lisse et* Δ *un* $\mathbb{Q}$*-diviseur sur* X *de la forme :*

$$\Delta = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{m_j}) D_j$$

où les m_j sont des entiers.

Les orbifoldes sont des objets géométriques à part entière. Ainsi, il leur est naturellement associé un fibré canonique, des faisceaux de formes différentielles, un groupe fondamental et une théorie galoisienne des revêtements. En particulier, une orbifolde lisse est dotée d'un revêtement universel

$$\pi_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \longrightarrow (X/\Delta),$$

l'application π_Δ ramifiant en au plus Δ et $\widetilde{X}_\Delta$ pouvant avoir des singularités quotients. En introduisant la notion de métrique kählérienne orbifolde et en adaptant les techniques de [Cam94], nous montrons que l'espace $\widetilde{X}_\Delta$ admet une réduction de Remmert biméromorphe.

Théorème.
Si (X/Δ) est une orbifolde kählérienne compacte lisse et si $\widetilde{X}_\Delta$ désigne son revêtement universel, il existe sur $\widetilde{X}_\Delta$ une fibration presque-holomorphe propre :

$$\tilde{\gamma}_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X}_\Delta)$$

dont les fibres générales sont les sous-variétés analytiques compactes irréductibles maximales de $\widetilde{X}_\Delta$; cette fibration est unique à équivalence birationnelle près.

Partie III : Extensions de formes pluricanoniques

Dans l'étude de la géométrie birationnelle des variétés projectives (ou plus généralement kählériennes compactes), les plurigenres constituent une famille d'invariants fournissant de nombreux renseignements sur la structure de ces variétés. La question de l'invariance par déformation est longtemps restée un problème ouvert malgré de nombreuses tentatives pour le résoudre. Les théorèmes de cohérence des images directes de Grauert permettent ainsi de le ramener à un problème d'extension : étant donné

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$$

une famille de variétés, 0 un point de B et $s \in H^0(\mathcal{X}_b, mK_{\mathcal{X}_b})$, peut-on trouver une section de $mK_{\mathcal{X}}$ qui prolonge s (au moins au-dessus d'un voisinage de 0 dans B) ?

Dans les articles [Siu98] et [Siu02], Y.-T. Siu démontre l'invariance par déformation projective des plurigenres, répondant donc par l'affirmative à la question ci-dessus. Le résultat d'extension démontré par ce dernier concerne en réalité des sections pluricanoniques à coefficients dans un fibré en droites L (moyennant certaines conditions de positivité sur L).

Théorème [Siu02].
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective de fibre centrale X, (L, h) un fibré en droites pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ et $m \geq 1$ un entier. Si l'idéal multiplicateur de la rectriction de h à X est trivial, toute section bornée de $mK_X + L_{|X}$ s'étend en

une section de $mK_{\mathcal{X}} + L$. En particulier, le cas du fibré L trivial montre que les plurigenres sont constants dans la famille :

$$\forall\, m \geq 1,\, \forall\, t \in \mathbb{D},\, p_m(\mathcal{X}_t) = p_m(X).$$

La stratégie employée pour étendre ces sections a depuis été améliorée par M. Păun ; la méthode qu'il emploie lui a permis de rendre la démonstration de l'invariance des plurigenres plus naturelle et d'étendre les résultats de [Siu02].

Théorème [Pău07].
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective, (L, h) un fibré en droites sur $\mathcal{X}$ et $m \geq 1$ un entier. On note h_X la restriction de h à la fibre centrale. Toute section

$$s \in H^0(X, (mK_X + L_{|X}) \otimes \mathcal{I}(h_X))$$

admet un prolongement à $\mathcal{X}$ tout entier.

En adaptant la méthode développée dans [Pău07], nous avons pu obtenir le résultat d'extension suivant.

Théorème [Cla05].
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective, (L, h) un fibré en droites sur $\mathcal{X}$ et $m \geq 1$ un entier. Si $\mathcal{I}(h_X) = \mathcal{O}_X$, l'application de restriction

$$H^0(\mathcal{X}, m(K_{\mathcal{X}} + L)) \longrightarrow H^0(X, m(K_X + L_{|X}))$$

est surjective.

Ainsi, dans cette troisième partie, nous nous proposons de montrer la souplesse de cette méthode en exposant tout d'abord la démonstration du théorème ci-dessus puis en indiquant comment la rendre opérante dans différentes situations. En lien avec les deux premières parties, le résultat suivant pourrait par exemple se révéler utile dans l'étude de la géométrie du revêtement universel d'une variété projective.

Théorème.
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective et $\tilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{D}$ la famille des revêtements universels associée. Si $m \geq 1$ est un entier, toute section $s \in H^0(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}})$ vérifiant

$$\int_{\widetilde{X}} (s \wedge \overline{s})^{1/m} < +\infty$$

s'étend en une section σ de $mK_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ holomorphe sur un voisinage de la fibre centrale $\widetilde{\mathcal{X}}_0$, méromorphe avec des pôles d'ordre au plus $m-1$ (le long d'un diviseur ample fixé) et satisfaisant de plus à l'estimation

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}} (\sigma \wedge \overline{\sigma})^{1/m} \leq C_0 \int_{\widetilde{X}} (s \wedge \overline{s})^{1/m}$$

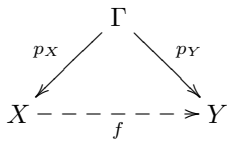
où C_0 est une constante explicite[1].

[1] $C_0 = 8\pi e\sqrt{2 + 1/e}$ convient.

Conventions et notations

Toutes les variétés envisagées sont lisses et connexes. Une application holomorphe surjective $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés complexes compactes est appelée une fibration si la fibre générale (et donc toute fibre) est connexe. De façon équivalente, f est une fibration si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. De plus, on dira qu'une propriété (définie sur une variété complexe X) est vérifiée par le point général si l'ensemble des points qui ne vérifient pas cette propriété est contenu dans une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques stricts de X. En particulier, on parlera de la fibre générale d'une fibration $f : X \longrightarrow Y$ (le type différentiable de cette fibre est donc fixé).

Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe entre variétés complexes compactes et notons $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ les deux projections naturelles de $X \times Y$. Par définition, il existe un sous-ensemble analytique (fermé) $\Gamma \subset X \times Y$ (la clôture du graphe de f) tel que la restriction de p_X à Γ soit une modification propre et tel que l'on ait le diagramme :



Définition
L'image de f est par définition $p_Y(\Gamma)$; f est dite surjective (respectivement connexe) si $p_Y(\Gamma) = Y$ (respectivement si p_Y l'est).

On définit le lieu d'indétermination de f comme étant l'ensemble des points $x \in X$ tel que $p_X^{-1}(x) \cap \Gamma$ n'est pas réduit à un singleton et on le note I_f. Son image par f est $f(I_f) = p_Y(p_X^{-1}(I_f))$. L'application f est dite presque-holomorphe si $f(I_f) \subsetneq Y$.

En particulier, une application presque-holomorphe propre et surjective $f : X \dashrightarrow Y$ se restreint donc en une application holomorphe propre et surjective $f_{|U} : U \longrightarrow V$ entre deux ouverts de Zariski U et V de X et Y (quitte à rétrécir U et V, on peut même supposer f localement topologiquement triviale au dessus de V). De plus, si $y \in V$ (et si f est connexe), la fibre $f^{-1}(y)$ ne rencontre pas I_f. Pour une application presque-holomorphe, la notion de fibre générale est donc parfaitement bien définie et correspond à la notion usuelle.

La notation $\mathcal{C}(X)$ désigne l'espace (réduit) des cycles compacts de la variété X. Pour les notions topologiques concernant l'espace des cycles, on se référera à

[Bar75]. Quand l'espace X est muni d'une application holomorphe $\phi : X \longrightarrow S$ vers une variété S, on notera $\mathcal{C}(X/S)$ l'espace des cycles relatifs, c'est-à-dire contenus dans une fibre de ϕ : c'est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathcal{C}(X)$ et l'application naturelle $\phi_* : \mathcal{C}(X/S) \longrightarrow S$ est holomorphe.

Si X est une variété compacte et L un fibré en droite sur X,

$$\kappa(X, L) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log(h^0(X, mL))}{\log(m)}$$

désignera la dimension de Kodaira (ou canonique) de L, alors que

$$a_X : X \longrightarrow A(X),\ a(X) = \mathrm{degtr}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X)) \text{ et } q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X)$$

désigneront respectivement la réduction algébrique, la dimension algébrique et l'irrégularité de X. Si X est de plus supposée kählérienne, on considérera sa variété d'Albanese :

$$\mathrm{Alb}(X) = H^0(X, \Omega^1_X)^* / H_1(X, \mathbb{Z})$$

ainsi que le morphisme correspondant :

$$\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X).$$

L'image de l'application α_X est une sous-variété irréductible de $\mathrm{Alb}(X)$ dont la dimension est notée :

$$\alpha d(X) = \dim(\alpha_X(X)).$$

On pourra consulter [Uen75] pour plus de détails sur ces notions.

Première partie

Γ-réduction : aspects géométriques et analytiques

Chapitre 1

Introduction aux parties I et II

1.1 Résultats principaux

La conjecture de Shafarevich prédit que le revêtement universel d'une variété projective lisse doit avoir une structure très particulière :

Conjecture 1.1.1 (I.R. Shafarevich, 1974)
Soit X une variété projective lisse et $\widetilde{X}$ son revêtement universel. La variété complexe $\widetilde{X}$ est holomorphiquement convexe ; en particulier, $\widetilde{X}$ admet une application propre

$$\tilde{\gamma} : \widetilde{X} \longrightarrow Y$$

sur Y un espace de Stein (éventuellement singulier).

En particulier, les fibres de l'application $\tilde{\gamma}$ (appelée réduction de Remmert de $\widetilde{X}$) sont les sous-variétés compactes maximales (pour l'inclusion) de $\widetilde{X}$.

A défaut de pouvoir produire la moindre fonction holomorphe non-constante sur $\widetilde{X}$, on peut cependant construire une réduction de Remmert biméromorphe dans la catégorie kählérienne.

Théorème 1.1.1 ([Cam94])
Soit X une variété kählérienne compacte. Son revêtement universel $\widetilde{X}$ admet alors une application méromorphe, presque-holomorphe, propre et à fibres connexes

$$\gamma_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X})$$

universelle dans le sens suivant : si $\widetilde{Z}$ est une sous-variété irréductible compacte passant par un point général $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, alors $\widetilde{Z}$ est entièrement contenue dans la fibre en $\tilde{x}$

$$\widetilde{Z} \subset \gamma_{\widetilde{X}}^{-1}(\gamma_{\widetilde{X}}(\tilde{x})).$$

De façon équivalente, il existe sur X une unique fibration presque-holomorphe (à équivalence birationnelle près)

$$\gamma_X : X \dashrightarrow \Gamma(X)$$

vérifiant la propriété universelle suivante. Si Z est une sous-variété irréductible passant par un point général $x \in X$, de normalisée $\hat{Z} \longrightarrow Z$ et satisfaisant à la condition

$$\left|\mathrm{Im}(\pi_1(\hat{Z}) \longrightarrow \pi_1(X)\right| < +\infty$$

alors Z est contenue dans la fibre en x

$$Z \subset \gamma_X^{-1}(\gamma_X(x)).$$

Définition 1.1.1
L'application γ_X (resp. $\gamma_{\widetilde{X}}$) s'appelle la Γ-réduction de X (resp. de $\widetilde{X}$).
L'invariant numérique $\gamma d(X) = \dim(\Gamma(X)) = \dim(\Gamma(\widetilde{X}))$ est appelé la Γ-dimension de X. En plus d'être un invariant biméromorphe de X, $\gamma d(X)$ est invariant sous les revêtements étales finis de X.

Remarque 1.1.1
Une telle réduction est également construite dans [Kol93b] dans la situation algébrique. Elle y est appelée "application de Shafarevich" et notée :

$$sh_X : X \dashrightarrow Sh(X).$$

Initiée par M. Gromov dans [Gro91] à l'aide de techniques L^2 puis reprise par F. Campana ([Cam94] et [Cam95a]) et J. Kollár ([Kol93b] et [Kol95]), l'étude des sous-variétés compactes du revêtement universel $\widetilde{X}$ d'une variété kählérienne compacte X s'est révélée une approche fructueuse pour décrire certains invariants géométriques de X. En particulier, les méthodes hilbertiennes permettent de déduire certaines propriétés algébro-géométriques de X à partir d'invariants L^2 de son revêtement universel (et réciproquement).

Les fibres générales de l'application $\gamma_{\widetilde{X}}$ sont donc les sous-variétés compactes maximales de $\widetilde{X}$ (une fois retiré le lieu d'indétermination de $\gamma_{\widetilde{X}}$) ; celles de γ_X étant les sous-variétés (maximales) de X dont le groupe fondamental est fini dans $\pi_1(X)$. On pourra noter qu'il est en général impossible de contrôler les invariants classiques des fibres de γ_X en fonction de ceux de l'espace ambiant X (voir le paragraphe 2.4).

A partir de la dimension 3 (voir ci-dessous pour le cas particulier des courbes et des surfaces), la Γ-dimension n'est plus (seulement) un invariant topologique et se pose donc le problème de l'invariance par déformation de cette quantité[1]. En effet, comme dans une déformation le type topologique est fixé, l'étude du comportement de l'invariant $\gamma d(X)$ au cours d'une déformation permet de mesurer à quel point ce dernier est lié à la structure complexe de X. Plus précisément, on dispose de la conjecture suivante :

Conjecture 8.1.1
La Γ-dimension est invariante dans une déformation de variétés kählériennes.

Dans le sens le plus large, une famille de variétés kählériennes compactes est une famille

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$$

[1] problème posé par J. Kollár dans [Kol95].

dans laquelle toutes les fibres sont kählériennes (on pourrait également se restreindre au cas où l'espace total de la déformation $\mathcal{X}$ est déjà muni d'une métrique kählérienne, situation correspondant à l'existence d'une polarisation globale).

Comme annoncé ci-dessus, revenons sur le cas des courbes et des surfaces. Si la conjecture 8.1.1 ci-dessus est trivialement vraie dans le cas des familles de courbes, il est néanmoins intéressant de noter que ce fait persiste pour les familles de surfaces kählériennes.

Proposition 8.1.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ une famille de surfaces kählériennes au dessus d'une base B (connexe). La fonction

$$b\,(\in B) \mapsto \gamma d(\mathcal{X}_b)$$

est alors constante sur B. En d'autres termes, la Γ-dimension est invariante au cours d'une déformation de surfaces kählériennes.

Ceci résulte d'une caractérisation topologique de la propriété $\gamma d(X) \leq 1$, elle-même conséquence d'un théorème de Y.-T. Siu (théorème 2.5.1). En revanche, dès la dimension supérieure, la Γ-dimension d'une variété n'est plus seulement un invariant de son groupe fondamental. Il semble donc raisonnable de commencer par étudier la conjecture 8.1.1 ci-dessus en petite dimension. Dans le cas d'une famille dont les fibres (de dimension 3) ne sont pas de type général, on peut conclure quant au problème de l'invariance par déformation :

Théorème 8.3.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ une déformation de variétés kählériennes de dimension 3 non de type général au dessus d'une base connexe. L'invariant

$$b(\in B) \mapsto \gamma d(\mathcal{X}_b)$$

est alors constant au cours de la déformation.

Comme il en a été fait mention ci-dessus, la propriété $\gamma d(X) \leq 1$ ne dépend que de la topologie de X et on doit donc étudier la dichotomie :

$$\gamma d(X) = 2 \text{ ou } \gamma d(X) = 3.$$

Or, il s'avère que l'on dispose d'une caractérisation en termes d'invariants plus classiques des variétés kählériennes compactes[2] vérifiant $\gamma d(X) = 3$.

Théorème 7.1.1
Soit X une variété kählérienne compacte de dimension 3 et de type π_1-général. On a alors $\kappa(X) \geq 0$ et de plus, à revêtement étale fini près, X est biméromorphe

1. *soit à $\mathrm{Alb}(X) \times_{\mathrm{Alb}(J(X))} J(X)$*
2. *soit à une submersion en surfaces abéliennes sur une courbe de genre au moins 2.*

[2]ces variétés sont dites de type π_1-général pour des raisons qui apparaîtront clairement au chapitre 4.

En particulier, à revêtement étale fini près, la fibration d'Iitaka-Moishezon[3] $J_X : X \longrightarrow J(X)$ *de* X *est (biméromorphe à) une submersion en tores et* $J(X)$ *est de type général et de type* π_1*-général.*

En admettant deux énoncés sur les groupes fondamentaux des surfaces orbifoldes[4], on peut renforcer l'énoncé ci-dessus :

Corollaire 8.3.1 (sous réserve des conjectures 6.1.1 et 6.2.1)
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ *une déformation de variétés kählériennes de dimension 3 dont la fibre centrale* $X = \mathcal{X}_0$ *vérifie* $\gamma d(X) = 3$*. Quitte à restreindre le disque* $\mathbb{D}$*, on a alors :*

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = \gamma d(X) = 3.$$

Pour clore cette étude sur la Γ-réduction, on montre que cette dernière existe également dans la catégorie des orbifoldes kählériennes lisses. En effet, d'après [Nam87], on associe à une telle orbifolde (X/Δ) un groupe fondamental $\pi_1(X/\Delta)$ dont les sous-groupes correspondent à des revêtements de X ramifiant en au plus Δ (toutes ces constructions sont rappelées dans le chapitre 9). Le revêtement correspondant au sous-groupe trivial est naturellement appelé le revêtement universel de (X/Δ). Si $\pi_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \longrightarrow (X/\Delta)$ désigne ce dernier, nous montrons qu'il existe sur $\widetilde{X}_\Delta$ une unique fibration presque-holomorphe propre qui contracte les sous-variétés compactes maximales de $\widetilde{X}_\Delta$.

Théorème 9.3.3
Soit (X/Δ) *une orbifolde kählérienne lisse de revêtement universel* $\widetilde{X}_\Delta$*. Il existe alors une unique fibration presque-holomorphe propre*

$$\tilde{\gamma}_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X}_\Delta)$$

vérifiant la propriété suivante :
pour $x \in \widetilde{X}_\Delta$ *général, toute sous-variété irréductible compacte de* $\widetilde{X}_\Delta$ *contenant* x *est contenue dans la fibre de* $\tilde{\gamma}_\Delta$ *passant par* x*.*

Comme dans le cas absolu (c'est-à-dire lorsque $\Delta = \emptyset$), on note

$$\gamma d(X/\Delta) := \dim(\Gamma(\widetilde{X}_\Delta))$$

et cet entier est appelé la Γ-dimension de l'orbifolde (X/Δ).

La catégorie orbifolde se dégageant comme étant celle dans laquelle la théorie de la classification trouve son cadre naturel, les énoncés valables pour les variétés kählériennes compactes doivent se transposer *mutatis mutandis* sur les orbifoldes (lisses). Le théorème 9.3.3 constitue donc une parfaite illustration de ce principe général. Un autre exemple de ceci est donné par la caractérisation de la condition $\gamma d \leq 1$:

Théorème 9.4.1
Soit (X/Δ) *une orbifolde kählérienne compacte lisse. La* Γ*-dimension de* (X/Δ)

[3] voir le chapitre 3 pour les notions utilisées.

[4] ces conjectures peuvent se mettre sous la forme suivante : une surface orbifolde (S/Δ) avec S rationnelle et $\kappa(S/\Delta) \leq 0$ a un groupe fondamental orbifolde presque abélien.

vaut 1 si et seulement si son groupe fondamental $\pi_1(X/\Delta)$ est commensurable[5] *au groupe fondamental d'une courbe de genre $g \geq 1$.*

1.2 Contenu

Le chapitre 2 introduit la conjecture de Shafarevich et la construction de la Γ-réduction. Les premières propriétés de la Γ-réduction y sont établies et les cas des courbes et des surfaces détaillés suivant la classification. Le comportement de la Γ-dimension par rapport aux fibrations étant très difficile à décrire dans la plus grande généralité, le cas des submersions en tores est isolé et étudié en détail (via le lemme 2.4.1). Le théorème de Y.-T. Siu 2.5.1 sur les morphismes vers les courbes est enfin rappelé avec pour conséquence la caractérisation de la condition $\gamma d(X) = 1$ (cf. proposition 2.5.1).

Le chapitre 3 a pour vocation de décrire la place de la Γ-réduction dans la théorie de la classification. Faute d'idées précises sur ce que devraient être les liens entre Γ-réduction et réduction du coeur (voir [Cam04b]), on se limitera à comparer la Γ-réduction avec la fibration d'Albanese, le quotient rationnel et la fibration d'Iitaka-Moishezon.

Le chapitre 4 est consacré à la mise en place des techniques L^2 sur la variété non-compacte $\widetilde{X}$. Après un bref rappel de théorie de Hodge L^2, la théorie analytique sera mise à profit pour comparer les propriétés de positivité de $\Omega^1_{\widetilde{X}}$ et $\gamma d(X)$ et pour décrire les relations existantes entre formes holomorphes L^2 sur $\widetilde{X}$ et Γ-réduction de X. Les outils principalement usités sont au nombre de trois : théorèmes d'annulation en cohomologie L^2, séries de Poincaré et théorème de l'indice L^2 d'Atiyah.

Le chapitre 5 introduit la notion de structure orbifolde en suivant les lignes de [Cam04b]. La notion de base orbifolde d'une fibration (nette) permet, entre autres, d'obtenir une version "fibres multiples" de la suite exacte d'homotopie associée à une fibration localement topologiquement triviale. On étudie alors naturellement le cas des surfaces orbifoldes dans le chapitre 6 avec pour objectif de décrire les groupes fondamentaux orbifoldes des surfaces non de type général.

Le chapitre 7 synthétise alors ces différents résultats pour décrire la structure de la Γ-réduction en dimension 3. La fin du chapitre est consacrée à quelques énoncés concernant le comportement du volume dans les fibrations de type général (théorèmes 7.3.1 et 7.3.3).

Le comportement de la Γ-dimension au cours d'une déformation est étudié au chapitre 8. Après y avoir établi quelques résultats généraux (notamment l'existence d'une valeur générique pour la Γ-dimension, qui est aussi le maximum des valeurs apparaissant dans la famille), on s'intéresse au cas des familles de variétés kählériennes de dimension 3. Les résultats du chapitre 7 permettent de dégager certaines situations pour lesquelles on peut obtenir l'invariance par déformation de la Γ-dimension.

Enfin, le chapitre 9 a pour ambition de donner un cadre commun aux différents résultats énoncés dans les chapitres précédents et, pour ce faire, de montrer que la Γ-réduction s'inscrit naturellement dans le cadre orbifolde. Les notions suivantes sont ainsi étudiées dans leur version orbifolde : groupes fondamentaux, revêtements universels et métriques kählériennes. Cette étude est alors mise à

[5] voir la définition 2.5.1.

profit pour construire la Γ-réduction du revêtement d'une orbifolde kählérienne compacte (lisse).

Chapitre 2

Généralités sur la Γ-réduction

2.1 Revêtement universel et conjecture de Shafarevich

Dans [Sha74], Shafarevich propose la conjecture suivante pour décrire le revêtement universel des variétés projectives lisses :

Conjecture 2.1.1 (I.R. Shafarevich, 1974)
Si X est une variété projective lisse, son revêtement universel $\widetilde{X}$ est holomorphiquement convexe.

On rappelle la définition suivante :

Définition 2.1.1
Une variété complexe Y est dite holomorphiquement convexe si pour toute suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dans Y qui tend vers l'infini (i.e. qui sort de tout compact), il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(X)$ vérifiant :

$$\limsup_{n\to+\infty} |f(y_n)| = +\infty.$$

Pour formuler la conjecture 2.1.1, Shafarevich s'appuie sur l'uniformisation des courbes (obtenue par Poincaré) :

Si C est une courbe complexe simplement connexe,
alors C est biholomorphe à $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$.

Les variétés compactes et celles de Stein sont des exemples de variétés complexes holomorphiquement convexes (elles sont en quelque sorte les deux exemples extrêmes de cette catégorie). Dans le cas des courbes, ces deux types apparaissent de façon bien distincte ; en dimension supérieure, les variétés holomorphiquement convexes sont une combinaison de ces deux types comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 (R. Remmert, 1956)
Soit X une variété complexe. Alors, X est holomorphiquement convexe si et seulement si elle admet une application holomorphe $f : X \longrightarrow Y$ propre, à fibres connexes sur un espace de Stein Y.

Remarque 2.1.1
Une telle application est clairement unique et est souvent appelée la réduction de Remmert de X.

On pourra trouver la démonstration du théorème 2.1.1 dans [KK83, th. 57.11, p. 270]. Donnons en tout de même une idée. La relation d'équivalence :

$$x \sim y \Longleftrightarrow \forall\, f \in \mathcal{O}(X),\ f(x) = f(y)$$

est propre sur X (car X est holomorphiquement convexe) et le quotient

$$Y = X/\sim$$

est donc un espace complexe dont les fonctions holomorphes séparent les points ; la projection $\pi : X \longrightarrow Y$ étant propre, l'espace Y est donc également holomorphiquement convexe et donc de Stein. En considérant la factorisation de Stein de $\pi : X \longrightarrow Y$, on montre aisément que les fibres de π sont connexes. □

En ce qui concerne le statut de la conjecture de Shafarevich, il est bon de reconnaître que peu de choses sont déjà établies et il semble que sa résolution soit hors de portée des techniques dont nous disposons pour l'instant (pour certains auteurs, il semble même qu'il faille en affaiblir l'énoncé pour la rendre plausible). Ainsi, même dans le cas des surfaces, la conjecture 2.1.1 est loin d'être établie : le cas des surfaces de type général semble en effet contenir une grande partie (sinon la totalité) de la difficulté du problème. Pour les surfaces S vérifiant $\kappa(S) < 2$, on peut décrire de façon assez précise la topologie de S et on sait dans ce cas montrer que le revêtement universel de S vérifie la conjecture de Shafarevich (le cas des surfaces elliptiques ayant été obtenu par Gurjar et Shastri [GS85]). Il existe cependant des situations dans lesquelles nous disposons de résultats positifs concernant la conjecture 2.1.1, notamment lorsque le groupe fondamental est nilpotent[1] ou linéaire. L. Katzarkov et P. Eyssidieux ont ainsi pu montrer la conjecture de Shafarevich dans les situations mentionnées en s'appuyant respectivement sur la théorie de Hodge mixte et sur la théorie de Hodge non-abélienne (applications harmoniques) développée par C. Simpson.

Théorème 2.1.2 ([Kat97])
Soit X une variété projective lisse. Si le groupe fondamental de X est presque nilpotent, le revêtement universel de X est holomorphiquement convexe.

Théorème 2.1.3 ([Eys04])
Soit X une variété projective lisse et $n \geq 1$ un entier. Si on dénote par $\widetilde{X}_n$ le revêtement de X correspondant à l'intersection des noyaux des représentations réductives de $\pi_1(X) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{X}_n$ est holomorphiquement convexe. En particulier, la conjecture 2.1.1 est vraie si $\pi_1(X)$ est un groupe linéaire réductif[2].

Remarque 2.1.2
On pourra également trouver une démonstration (reposant sur l'existence des variétés d'Albanese supérieures) du théorème 2.1.2 dans [Ler99].

[1] voir le chapitre 3, section 3.2.

[2] un groupe linéaire algébrique (en caractéristique nulle) est dit réductif si toutes ses représentations linéaires sont complétement réductibles. Un groupe linéaire de type fini est dit réductif si sa clôture de Zariski l'est.

2.2 Γ-réduction des variétés kählériennes compactes

La conjecture de Shafarevich prédit donc l'existence d'une réduction de Remmert pour le revêtement universel $\widetilde{X}$ d'une variété projective lisse X. Les fibres de cette application (si elle existe !) $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ sont donc des sous-ensembles analytiques compacts de $\widetilde{X}$ et déterminent donc une composante irréductible de l'espace des cycles (compacts) $\mathcal{C}(\widetilde{X})$ de $\widetilde{X}$ (voir [Bar75] pour les notations se rapportant à l'espace des cycles). Or, bien que la théorie des fonctions sur $\widetilde{X}$ nous soit parfaitement inconnue, il s'avère que l'espace $\mathcal{C}(\widetilde{X})$ possède des propriétés bien comprises (propriétés partagées par la classe plus large des variétés kählériennes). C'est cette observation qui a permis à F. Campana de construire une réduction de Remmert en un sens birationnel :

Théorème 2.2.1 ([Cam94])
Soit X une variété kählérienne compacte de revêtement universel $\widetilde{X}$. Il existe alors une fibration méromorphe (presque-holomorphe), propre et connexe

$$\tilde{\gamma} : \widetilde{X} \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X})$$

qui vérifie de plus : si Z est un sous-ensemble analytique compact de $\widetilde{X}$ qui passe par un point général $x \in \widetilde{X}$, alors Z est contenu dans la fibre en x :

$$Z \subset \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{\gamma}(x)).$$

L'application $\tilde{\gamma}$ contracte donc les sous-ensembles analytiques compacts du revêtement universel de X (au moins ceux contenus dans le lieu où $\tilde{\gamma}$ est bien définie). La conjecture 2.1.1 revient donc à dire que l'application $\tilde{\gamma}$ est holomorphe, que le point général est en fait quelconque et surtout que l'espace $\Gamma(\widetilde{X})$ est de Stein (sur un modèle adéquat de $\tilde{\gamma}$).

La propriété universelle verifiée par $\tilde{\gamma}$ montre immédiatement que cette fibration est unique à biméromorphisme près ; ceci permet de poser :

Définition 2.2.1
La fibration $\tilde{\gamma} : \widetilde{X} \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X})$ s'appelle la Γ-réduction de $\widetilde{X}$ et on note :

$$\gamma d(X) := \dim(\Gamma(\widetilde{X}))$$

L'entier $\gamma d(X)$ est appelé Γ-dimension de X ; c'est un invariant birationnel de X qui vérifie $0 \leq \gamma d(X) \leq \dim(X)$.

Cette construction nous donne une description explicite du mécanisme de la Γ-réduction sur $\widetilde{X}$ le revêtement universel de X. Il est cependant commode de disposer d'une description similaire directement sur l'espace X. Celle-ci est obtenue de manière naturelle en considérant l'action du groupe fondamental de X sur $\widetilde{X}$. En effet, $\pi_1(X)$ agit sur $\widetilde{X}$ (par automorphismes) et sur $\mathcal{C}(\widetilde{X})$; on a donc une action déduite sur $\Gamma(\widetilde{X})$ et l'application $\tilde{\gamma} : \widetilde{X} \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X})$ est bien entendu $\pi_1(X)$-équivariante pour ces actions. Par passage au quotient, on obtient ainsi :

$$\gamma : \widetilde{X}/\pi_1(X) = X \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X})/\pi_1(X).$$

On pose $\Gamma(X) = \Gamma(\widetilde{X})/\pi_1(X)$ et on a donc une application canoniquement associée à X :

$$\gamma_X : X \dashrightarrow \Gamma(X)$$

qui est presque-holomorphe et à fibres connexes, obtenue indépendamment dans le cas projectif par J. Kollár [Kol93a] (dans [Kol93a], elle prend le nom d'application de Shafarevich). Pour caractériser les fibres de γ_X, on utilise la propriété suivante :

Lemme 2.2.1
Si Z est une sous-variété (connexe) de X et $p_X : \widetilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement universel de X, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *Im$(\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X))$ est finie (le morphisme $\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X)$ étant celui induit par l'injection $Z \hookrightarrow X$),*

(ii) *les composantes connexes de $p_X^{-1}(Z)$ sont compactes (et induisent des revêtements finis de Z).*

Comme dans la suite on sera souvent amené à considérer les morphismes $\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X)$ pour une sous-variété Z de X, on adopte la notation :

$$\pi_1(Z)_X := \mathrm{Im}(\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X)) \text{ pour } Z \text{ lisse}$$

Plus généralement, si Z est seulement supposée irréductible, l'image du morphisme induit par la normalisation

$$\nu_Z : \hat{Z} \longrightarrow Z$$

de Z est notée de même $\pi_1(\hat{Z})_X$. On en déduit la caractérisation de la Γ-réduction définie directement sur X :

Définition 2.2.2
L'application $\gamma_X : X \dashrightarrow \Gamma(X)$ est appelée la Γ-réduction de X et elle est caractérisée par la propriété suivante : si Z est un sous-ensemble analytique (irréductible) de X qui passe par un point général $x \in X$ et qui vérifie

$$\left|\pi_1(\hat{Z})_X\right| < +\infty,$$

il est alors contenu dans la fibre en x :

$$Z \subset \gamma_X^{-1}(\gamma_X(x)).$$

La fibre générale F de γ_X est donc une sous-variété lisse et connexe maximale vérifiant :

$$\pi_1(F)_X \text{ est un groupe fini.}$$

Avant toute chose, il est naturel de se demander si la Γ-réduction d'une variété kählérienne compacte X constitue un réel substitut au quotient de Remmert (potentiel) du revêtement universel $\widetilde{X}$ de X ; la question de M. Nori (extraite de [Nor83]) montre que l'existence de la Γ-réduction ne permet pas de répondre à certaines interrogations concernant la topologie des surfaces projectives :

Question 2.2.1 (M. Nori)
Soit S une surface algébrique et C une courbe tracée sur S dont on note C_i les composantes irréductibles. On considère

$$N = \langle\langle\, \pi_1(\hat{C}_i)_S \,\rangle\rangle$$

le sous-groupe normal de $\pi_1(S)$ engendré par les images des groupes fondamentaux des normalisées des C_i. Si $C^2 > 0$, N est-il d'indice fini dans $\pi_1(S)$? En particulier, si il existe une courbe rationnelle irréductible C sur S vérifiant $C^2 > 0$, cela implique-t-il la finitude de $\pi_1(S)$?

Proposition 2.2.1
La conjecture de Shafarevich 2.1.1 permet d'affirmer que la réponse à la question de Nori 2.2.1 est positive.

Démonstration de la proposition 2.2.1 :

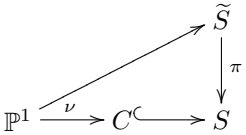
Traitons le cas particulier d'une courbe rationnelle avec $C^2 > 0$ et considérons à cet effet $\pi : \widetilde{S} \longrightarrow S$ le revêtement universel de S et $\widetilde{C} = \pi^{-1}(C)$. Comme $C^2 > 0$, le théorème de Lefschetz montre que le morphisme $\pi_1(C) \longrightarrow \pi_1(S)$ (induit de l'injection $C \hookrightarrow S$) est surjectif. De façon équivalente, $\widetilde{C}$ est connexe. Comme C est rationnelle, sa normalisée $\hat{C}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Si on note

$$\widetilde{C} = \sum_i \widetilde{C}_i$$

les composantes irréductibles de $\widetilde{C}$, on peut relever le morphisme

$$\mathbb{P}^1 \simeq \hat{C} \longrightarrow C \hookrightarrow S$$

en un morphisme



dont l'image est $\widetilde{C}_i$ (et ce pour tout i) : en particulier, chaque $\widetilde{C}_i$ est compact. Or, la conjecture de Shafarevich 2.1.1 assure que $\widetilde{S}$ est holomorphiquement convexe ce qui, entre autres choses, interdit l'existence de chaînes connexes infinies de sous-variétés compactes dans $\widetilde{S}$. Ceci entraîne que $\widetilde{C} = \sum_i \widetilde{C}_i$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles et donc que $\widetilde{C}$ est compacte. Le revêtement π est ainsi de degré fini et $\pi_1(S)$ est fini. □

Remarque 2.2.1
Dans la démonstration ci-dessus, on comprend également mieux la nécessité de considérer le morphisme

$$\pi_1(\hat{Z}) \longrightarrow \pi_1(X)$$

induit par la normalisation de la sous-variété irréductible Z dans la définition 2.2.2. En effet, comme on vient de le constater, l'image réciproque (sur le revêtement universel) d'une sous-variété irréductible ne l'est plus nécessairement. En revanche, la finitude de l'image du morphisme ci-dessus assure déjà la compacité de toutes les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(Z)$.

Comme il en a été fait mention plus haut, R. Gurjar et A. Shastri ont montré que les surfaces non de type général vérifient la conjecture de Shafarevich 2.1.1 ; le résultat suivant constitue en quelque sorte la meilleure réponse que l'on peut apporter pour le moment à la question 2.2.1 : il est dû à R. Gurjar mais on trouvera dans [Cam94, th. 5.14, p. 277] une démonstration élémentaire s'appuyant sur l'existence de la Γ-réduction :

Théorème 2.2.2 ([Gur87])
Soit S une surface projective et C une courbe rationnelle irréductible sur S vérifiant $C^2 > 0$. Si $\pi_1(S)$ est infini, alors S est de type général et de type π_1-général (voir la définition 4.2.2 pour cette notion).

2.3 Propriétés et exemples

On donne ici quelques propriétés immédiates de la Γ-réduction et de la Γ-dimension. Tout d'abord, rappelons que l'invariant birationnel $\gamma d(X)$ vérifie : $0 \leq \gamma d(X) \leq \dim(X)$; les deux cas extrêmes sont intéressants :

1. $\boldsymbol{\gamma d(X) = 0}$: ceci signifie que $\widetilde{X}$ est compact ($\Gamma(\widetilde{X})$ est un point). Au niveau du groupe fondamental, on obtient la caractérisation suivante :

$$\gamma d(X) = 0 \Longleftrightarrow \pi_1(X) \text{ est fini.}$$

2. $\boldsymbol{\gamma d(X) = \dim(X)}$: si $x \in \widetilde{X}$ est un point général alors $\{x\}$ est le seul sous-ensemble analytique compact connexe passant par x. On dira alors que X est de type π_1-général (voir la définition 4.2.2). En particulier, si $\widetilde{X}$ est Stein, $\gamma d(X) = \dim(X)$; un tore complexe est donc de type π_1-général.

Citons maintenant les résultats suivants :

Proposition 2.3.1

1. *la Γ-dimension est invariante par revêtement étale fini (si $X' \longrightarrow X$ est un revêtement étale fini de X, alors $\gamma d(X') = \gamma d(X)$).*
2. *la Γ-dimension est additive : $\gamma d(X \times Y) = \gamma d(X) + \gamma d(Y)$.*
3. *la Γ-dimension est croissante : si $X \dashrightarrow Y$ est une application méromorphe surjective, alors $\gamma d(X) \geq \gamma d(Y)$.*
4. *la Γ-réduction est fonctorielle au sens biméromorphe : si $f : X \dashrightarrow Y$ est une application méromorphe surjective, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\dashrightarrow} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_X} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_Y} \\ \Gamma(X) & \overset{\gamma_f}{\twoheadrightarrow} & \Gamma(Y) \end{array}$$

   dans lequel la flèche induite γ_f est également surjective.
5. *si f est une fibration, on a $\gamma d(X) \geq \gamma d(Y) + \dim(\gamma_X(X_y))$ où X_y désigne la fibre générale de f (voir la démonstration du lemme 2.4.1 plus loin).*

Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes permet de construire de nombreux exemples :

Proposition 2.3.2
Soit X une variété projective lisse et soit $Y \subset X$ une hypersurface ample (lisse et connexe) avec $\dim(Y) \geq 2$. *Si* $\gamma d(X) < \dim(X)$ *alors* $\gamma d(Y) = \gamma d(X)$.

Démonstration :
Soit $\gamma : X \longrightarrow T$ un modèle lisse de la Γ-réduction de X (quitte à modifier X). Notons $I_\gamma \subset X$ le lieu d'indétermination de la Γ-réduction et $S = \gamma(I_\gamma) \subset T$ son image par γ : S est donc une réunion (au plus) dénombrable de sous-ensembles analytiques stricts de T et pour $t \notin S$, la fibre $\gamma^{-1}(t) = X_t$ est lisse et vérifie $\pi_1(X_t)_X$ est fini. Comme Y est ample, il s'envoie nécessairement surjectivement sur T (c'est là que l'on utilise l'hypothèse $\dim(T) < \dim(X)$) : en particulier, Y n'est pas contenu dans I_γ et $Y \cap I_\gamma$ est une réunion (au plus) dénombrable de sous-ensembles analytiques stricts de Y. Un point $x \notin Y \cap I_\gamma$ est donc à la fois général dans X et dans Y.

D'autre part, le théorème de Lefschetz fournit l'isomorphisme :

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X) \tag{2.1}$$

induit par l'injection de Y dans X. Donc, si $t \notin S$, l'image de

$$\pi_1(X_t \cap Y) \longrightarrow \pi_1(Y)$$

est contenue dans celle de

$$\pi_1(X_t) \longrightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y),$$

elle est donc finie. Ceci signifie que les fibres de $\gamma_{|Y} : Y \longrightarrow T$ sont contenues dans celles de la Γ-réduction de Y :

$$\gamma d(X) = \dim(T) \geq \gamma d(Y).$$

Mais réciproquement, si $Z \subset Y$ est une fibre générale de la Γ-réduction de Y, Z passe également par un point général de X avec la remarque ci-dessus. Or, l'image de $\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est finie par définition de Z et l'isomorphisme (2.1) montre ainsi que l'image de $\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X)$ est également finie. On en déduit donc que Z est contenue dans une fibre de γ d'où l'autre inégalité :

$$\gamma d(Y) \geq \dim(T) = \gamma d(X).$$

Finalement, on a bien $\gamma d(X) = \gamma d(Y)$. □

Afin d'illustrer notre propos, décrivons maintenant de façon assez précise la situation dans le cas des courbes et des surfaces :

Cas des courbes :

l'uniformisation des courbes complexes rend la situation particulièrement simple.

- $\mathbb{P}^1$ est simplement connexe donc $\gamma d(\mathbb{P}^1) = 0$.
- Si C est une courbe de genre $g(C) \geq 1$, son revêtement universel est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$ donc en particulier est Stein ; on en déduit que $\gamma d(C) = 1$.

Cas des surfaces :

On donne les valeurs possibles de $\gamma d(S)$ (pour S minimale) en suivant la classification de Kodaira-Enriques-Shafarevich des surfaces.

$\boldsymbol{\kappa(S) = -\infty}$ **:** S est alors biméromorphe à $\mathbb{P}^1 \times C$ et on a $\gamma d(S) = \gamma d(C)$; en particulier $\gamma d(S) < 2$.

$\boldsymbol{\kappa(S) = 0}$ **:** S est alors revêtue par une surface $K3$ (simplement connexe) ou par un tore de dimension 2. On en déduit que $\gamma d(S) = 0$ dans le premier cas et $\gamma d(S) = 2$ dans le second.

$\boldsymbol{\kappa(S) = 1}$ **:** La surface S admet donc une fibration elliptique sur une courbe C ; notons E la fibre générale. Quitte à considérer un revêtement étale fini de S (théorème 5.4.1), on peut supposer que l'application $S \longrightarrow C$ est sans fibre multiple (au sens classique). On peut alors décrire l'invariant $\gamma d(S)$ de la façon suivante :

1. Si $S \longrightarrow C$ admet au moins une fibre (dont la réduction est) singulière, alors le morphisme $\pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(C)$ est un isomorphisme (voir [FM94]) et $\gamma d(S) = \gamma d(C)$.
2. Sinon, toutes les fibres de $S \longrightarrow C$ sont lisses et $\pi_1(E)_S$ est infini (voir [FM94]). On a donc : $\gamma d(S) = 1 + \gamma d(C)$.

$\boldsymbol{\kappa(S) = 2}$ **:** Dans cette situation, l'absence de théorème de structure ne nous permet pas de donner une description précise de la Γ-réduction. Contentons nous de donner des exemples pour les 3 valeurs possibles de $\gamma d(S)$. Tout d'abord les hypersurfaces de degré au moins 5 de $\mathbb{P}^3$ sont simplement connexes (théorème de Lefschetz), de type général et on a $\gamma d(S) = 0$ pour une telle surface. A l'opposé, les quotients de la boule unité de $\mathbb{C}^2$ par des réseaux de $SU(1,2)$ vérifient $\gamma d(S) = 2$. La proposition 2.3.2 nous permet de construire un exemple de surface S avec $\gamma d(S) = 1$. Si C est une courbe de genre $g \geq 1$, une hypersurface suffisamment ample de $\mathbb{P}^2 \times C$ convient.

$\kappa(S)$	$q(S)$	Structure de S	$\gamma d(S)$
$-\infty$	0	rationnelle	0
	>0	réglée sur une courbe de genre $g \geq 1$	1
0	0	Enriques-$K3$	0
	1,2	bielliptique ou tore	2
1	$\neq 1 + p_g(S)$	proprement elliptique	0,1
	$= 1 + p_g(S)$		0,1 ou 2
2	≥ 0	type général	0,1 ou 2

TAB. 2.1 – Cas des surfaces

Remarque 2.3.1
Notons une fois de plus que, lorsque $\kappa(S) \leq 1$, on dispose non-seulement d'une description précise de l'invariant grossier $\gamma d(S)$ mais également du revêtement universel $\widetilde{S}$ de S et de son quotient de Remmert $\tilde{\gamma} : \widetilde{S} \longrightarrow \Gamma(\widetilde{S})$ (qui existe puisque $\widetilde{S}$ est holomorphiquement convexe d'après [GS85]).

2.4 Γ-dimension et fibrations

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration (application holomorphe surjective à fibres connexes) entre variétés kählériennes compactes, on sait que $\gamma d(X) \geq \gamma d(Y)$ mais, même si la fibre générale F vérifie $\gamma d(F) > 0$, l'inégalité précédente peut être en fait une égalité. La proposition 2.3.2 permet en effet de construire des exemples montrant qu'il est difficile d'obtenir un contrôle quelconque sur les fibres de la Γ-réduction. A cet effet, considérons Y une variété projective de type π_1-général et choisissons X une hypersurface suffisamment ample dans $\mathbb{P}^2 \times Y$. Le théorème de Lefschetz (proposition 2.3.2) montre que la restriction de la deuxième projection à X est bien la Γ-réduction de X :

$$\gamma_X \simeq pr_{2|X} : X \longrightarrow Y$$

Or, si X est de degré d sur $\mathbb{P}^2$, la fibre générale F de γ_X est une courbe de genre $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$: en particulier, celle-ci vérifie $\gamma d(F) > 0$ pour $d \geq 3$ alors que $\gamma d(X) = \gamma d(Y)$. On peut également remarquer que le genre de F peut être rendu arbitrairement grand.

2.4.1 Un résultat d'additivité

Le comportement de la Γ-dimension par rapport aux fibrations doit donc dépendre de la topologie de la fibre générale relativement à celle de l'espace ambiant X. Le lemme suivant décrit justement une situation dans laquelle la Γ-dimension vérifie une propriété de sur-additivité :

Lemme 2.4.1
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration entre variétés kählériennes compactes ; on note X_g la fibre générale de f et on suppose que le morphisme $\pi_1(X_g) \longrightarrow \pi_1(X)$ déduit de l'inclusion est injectif. On a alors :

$$\gamma d(X) \geq \gamma d(X_g) + \gamma d(Y).$$

En particulier, X est de type π_1-général si X_g et Y le sont.

Remarque 2.4.1
Sauf dans le cas (mentionné ci-dessus) où X_g et Y sont de type π_1-général, l'inégalité sera stricte en général. Considérons en effet la variété $\tilde{X} = E \times E$ où E est une courbe elliptique et formons le quotient $X = \tilde{X}/\imath$ par l'involution $\imath$ agissant par une translation d'ordre 2 sur le premier facteur et par $x \mapsto -x$ sur

le deuxième facteur. La surface X a une structure de surface elliptique $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ et vérifie $\gamma d(X) = 2$ car $\tilde{X} \longrightarrow X$ est étale. En utilisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array} ,$$

on constate que le groupe fondamental de la fibre de $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ s'injecte dans celui de X : on est donc bien dans la situation du lemme 2.4.1 avec une inégalité stricte.

Démonstration :

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \gamma_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_Y} \\ \Gamma(X) & \xrightarrow{\gamma_f} & \Gamma(Y) \end{array}$$

L'image $\gamma_X(X_g)$ de X_g par γ_X est contenue dans une fibre de

$$\gamma_f : \Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(Y)$$

d'où :

$$\dim(\gamma_X(X_g)) \leq \dim(\Gamma(X)) - \dim(\Gamma(Y)) = \gamma d(X) - \gamma d(Y). \qquad (2.2)$$

Notons Γ la fibre générale de la Γ-réduction de X et considérons l'application $X_g \longrightarrow \gamma_X(X_g)$. La fibre de cette application est $\Gamma \cap X_g$ et comme $\pi_1(X_g)$ apparaît comme un sous-groupe de $\pi_1(X)$, on constate que l'image de $\pi_1(\Gamma \cap X_g)$ dans $\pi_1(X_g)$ doit donc être finie. Pour s'en convaincre, on peut parcourir le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\Gamma \cap X_g) & \longrightarrow & \pi_1(X_g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\Gamma) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{array}$$

en se rappelant la propriété vérifiée par Γ. Donc $\Gamma \cap X_g$ est contenue dans la fibre de la Γ-réduction de X_g et l'application $X_g \longrightarrow \gamma_X(X_g)$ se factorise sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} X_g & \longrightarrow & \gamma_X(X_g) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Gamma(X_g) & \end{array}$$

et on en déduit que $\dim(\gamma_X(X_g)) \geq \gamma d(X_g)$. Ceci combiné avec l'inégalité (2.2) fournit la sur-additivité annoncée :

$$\gamma d(X) \geq \gamma d(X_g) + \gamma d(Y).$$

□

Dans le cas d'un morphisme en courbes, on peut affaiblir l'hypothèse sur le morphisme $\pi_1(X_g) \longrightarrow \pi_1(X)$:

Lemme 2.4.2
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration en courbes et si l'image du morphisme $\pi_1(X_g) \longrightarrow \pi_1(X)$ est infinie, alors :

$$\gamma d(X) \geq 1 + \gamma d(Y).$$

Démonstration :
En effet, en reprenant les notations de la démonstration précédente, on doit montrer que $\dim(\gamma_X(X_g)) = 1$. Mais $\dim(\gamma_X(X_g)) = 0$ signifie exactement que X_g est contenue dans la fibre Γ et on devrait avoir $\pi_1(X_g)_X$ fini ; ce qui est manifestement contraire à l'hypothèse faite dans l'énoncé. On a donc bien $\dim(\gamma_X(X_g)) = 1$ et

$$\gamma d(X) \geq 1 + \gamma d(Y).$$

□

Question 2.4.1
Dans les situations des lemmes 2.4.1 et 2.4.2, la fibration f est-elle submersive sur un modèle biméromorphe bien choisi (et après revêtement étale fini) ?

2.4.2 Cas des submersions en tores

Il nous reste maintenant à dégager des situations dans lesquelles le groupe fondamental de la fibre X_g s'injecte dans celui de l'espace ambiant X. Le théorème suivant montre que sous l'hypothèse d'abélianité du groupe fondamental de X_g (et en l'absence de torsion), ce dernier s'injecte dans celui de l'espace ambiant lorsque la fibration f est submersive ; en particulier, lorsque f est une submersion en tores.

Théorème 2.4.1
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une submersion holomorphe propre (connexe) avec X kählerienne (X et Y ne sont plus nécessairement supposées compactes). Si F désigne la fibre de f, on suppose que $\pi_1(F)$ est abélien sans torsion ; le morphisme

$$i_* : \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X)$$

est alors injectif.
En particulier, si f est une submersion en tores, le groupe fondamental de la fibre s'injecte dans celui de X.

Remarque 2.4.2
Signalons ici un résultat de J. Kollár [Kol93b, th ; 6.3, p. 198] qui est une sorte de réciproque au théorème 2.4.1 ci-dessus : si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration (entre variétés projectives) dont la fibre générale F est revêtue par une variété abélienne et si $i_* : \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X)$ est injectif, alors (à revêtement étale fini et transformation birationnelle près) f est une submersion.

Corollaire 2.4.1
Si X kählerienne compacte admet une submersion en tores sur une variété de type π_1-général, alors X est de type π_1-général.

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, remarquons que le résultat ne subsiste plus en dehors de la catégorie kählérienne comme le montre l'exemple des surfaces de Hopf (non kählérien) : une telle surface S admet une submersion elliptique sur $\mathbb{P}^1$ et est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ donc a pour groupe fondamental $\pi_1(S) = \mathbb{Z}$. Si E désigne une fibre de $S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, on ne peut donc en aucun cas avoir $\pi_1(E) \hookrightarrow \pi_1(S)$.

Démonstration du théorème 2.4.1 :

On se ramène tout d'abord au cas où la base est simplement connexe. Si $\pi : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ est le revêtement universel de Y, le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_f = X \times_Y \widetilde{Y} & \longrightarrow & \widetilde{Y} \\ {\scriptstyle \pi_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

définit donc une submersion holomorphe propre $g : \widetilde{X}_f \longrightarrow \widetilde{Y}$. De plus, l'application $\pi_f : \widetilde{X}_f \longrightarrow X$ est un revêtement étale. La suite exacte d'homotopie associée à g s'écrit :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\widetilde{X}_f) \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

où K désigne simplement le noyau de $\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{X}_f)$. La suite (2.3) est donc une suite exacte de groupe abélien qui se dualise en :

$$0 \longrightarrow H^1(\widetilde{X}_f, \mathbb{C}) \xrightarrow{i^*} H^1(F, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}). \tag{2.4}$$

Or, comme $\widetilde{Y}$ est simplement connexe, la monodromie de la fibration g est triviale et, comme $\widetilde{X}_f$ est kählérienne, on peut appliquer le théorème de dégénérescence de la suite spectrale de Blanchard [Bla56] (voir également [Voi02, p. 376-382] pour une exposition remarquablement limpide de ce résultat) : le morphisme de restriction

$$H^1(\widetilde{X}_f, \mathbb{C}) \xrightarrow{i^*} H^1(F, \mathbb{C})$$

est surjectif et la flèche

$$H^1(F, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$$

est donc identiquement nulle. Comme K est un sous-groupe d'un groupe abélien sans torsion, ceci est équivalent au fait que K soit réduit à zéro. On a donc un isomorphisme de groupes :

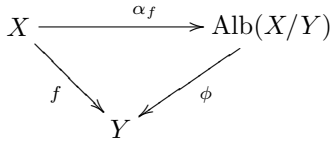
$$i_* : \pi_1(F) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\widetilde{X}_f).$$

Pour conclure, rappelons que le revêtement $\pi_f : \widetilde{X}_f \longrightarrow X$ est étale ; le morphisme induit au niveau du groupe fondamental

$$\pi_1(F) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\widetilde{X}_f) \xrightarrow{\pi_{f*}} \pi_1(X)$$

est donc injectif. □

Revenons au cas où l'espace total X est une variété kählérienne compacte mais supposons toujours que la fibre F de la submersion f a un groupe fondamental abélien sans torsion. On peut alors considérer l'application d'Albanese relative de f (qui est une submersion en tores) et comparer les morphismes induits au niveau des groupes fondamentaux. En effet, dans le diagramme



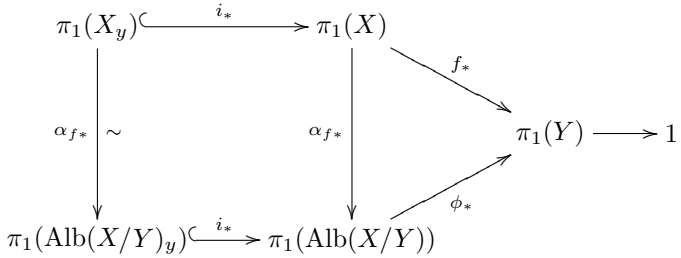
ϕ est une submersion en tores et pour tout $y \in Y$, la restriction de α_f à la fibre $X_y = f^{-1}(y)$

$$\alpha_{f|X_y} : X_y \longrightarrow \mathrm{Alb}(X/Y)_y$$

est l'application d'Albanese de X_y. Si $\pi_1(X_y)$ est abélien sans-torsion, on a un isomorphisme de groupes (proposition 3.2.1)

$$\alpha_{f*} : \pi_1(X_y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Alb}(X_y))$$

et, du diagramme



on déduit donc :

Corollaire 2.4.2
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une submersion (avec X kählérienne compacte) dont la fibre a un groupe fondamental abélien sans-torsion, l'application d'Albanese relative donne un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux :

$$\alpha_{f*} : \pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Alb}(X/Y)).$$

Remarque 2.4.3
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une submersion en tores T avec X projective, on peut obtenir une démonstration du théorème 2.4.1 sans recours à la théorie de Hodge. En considérant des sections hyperplanes de X, on peut construire une multisection de f, c'est-à-dire une sous-variété (lisse) M de X qui coupe toutes les fibres de f en un nombre fini de points (disons d points). En tenant compte de la structure de groupe des fibres, on aimerait alors poser :

$$\forall\, y \in Y,\ s(y) = \sum_{t \in M \cap f^{-1}(y)} t.$$

Il faut prendre garde au fait que cette structure de groupe n'est bien définie qu'une fois une origine fixée. La section s n'est donc définie qu'à un point de d-torsion près dans les fibres. Comme la d-torsion d'un tore est finie, s est bien définie sur un revêtement étale fini Y' de Y. Si on construit le produit fibré $X' = X \times_Y Y'$, l'application $X' \longrightarrow Y'$ est maintenant munie d'une section et, en particulier, cela assure la surjectivité du morphisme

$$\pi_2(X') \longrightarrow \pi_2(Y')$$

qui est équivalente à l'injectivité de

$$\pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(X').$$

Pour terminer cette discussion sur les familles de tores, on se propose de montrer que, lorsque la base de la fibration est déja simplement connexe, l'espace total n'a d'autre choix que de se scinder :

Proposition 2.4.1
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une submersion en tores avec X kählérienne compacte et Y simplement connexe, X est alors isomorphe au produit $Alb(X) \times Y$.

Démonstration :
La démonstration du théorème 2.4.1 fournit l'isomorphisme suivant donné par l'opération de restriction :

$$i^* : H^1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

et on a donc en particulier $q(X) = q(T)$. Ceci combiné avec la propriété universelle de l'application d'Albanese 3.2.1 montre que l'application composée :

$$T \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb(X)}$$

induit un isomorphisme au niveau du H^1 (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) ; comme un tore est déterminé par sa structure de Hodge entière et comme $i^* \circ \alpha_X^*$ est un morphisme de structure de Hodge, on en déduit que T est isomorphe à $\mathrm{Alb}(X)$ et il s'ensuit que

$$X \cong \mathrm{Alb}(X) \times Y.$$

□

2.5 Caractérisation de $\gamma d(X) = 1$

Commençons par rappeler que la propriété $\gamma d(X) = 0$ caractérise les variétés dont le groupe fondamental est fini. Il est toutefois remarquable que la propriété $\gamma d(X) = 1$ ne dépende également que du groupe fondamental de X :

Proposition 2.5.1
Soit X une variété kählérienne compacte ; alors $\gamma d(X) = 1$ si et seulement si $\pi_1(X)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe de genre $g \geq 1$.

Rappelons la définition :

Définition 2.5.1
Deux groupes G et H sont dits commensurables s'il existe $G_1 \subset G$ (resp. $H_1 \subset H$) un sous-groupe d'indice fini dans G (resp. dans H) avec G_1 et H_1 isomorphes.

La relation $G \equiv H$ d'être commensurable pour deux groupes G et H est bien entendu une relation d'équivalence.

Pour une surface, on est donc face à la trichotomie suivante :

1. $\gamma d(X) = 0$ si et seulement si $\pi_1(X)$ est fini,
2. $\gamma d(X) = 1$ si et seulement si $\pi_1(X)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe de genre $g \geq 1$,
3. $\gamma d(X) = 2$ si et seulement si $\pi_1(X)$ n'est commensurable à aucun groupe fondamental de courbe.

Corollaire 2.5.1
Si X est une surface kählérienne compacte, l'invariant $\gamma d(X)$ ne dépend que du groupe fondamental de X.

Ceci n'est bien entendu plus vrai en dimension supérieure. Considérons en effet l'exemple suivant : on désigne par A une variété abélienne de dimension 4 et on note X_1 une section hyperplane (lisse) de A et Y une surface intersection complète de A (par exemple $Y = A \cap H_1 \cap H_2$ avec H_1, H_2 deux diviseurs amples suffisamment généraux). Dans $\mathbb{P}^2 \times Y$, on choisit une section hyperplane lisse notée X_2. L'utilisation répétée du théorème de Lefschetz montre que :

$$\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2) \cong \pi_1(A) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 8}.$$

De plus, le lemme 3.2.1 montre que $\gamma d(X_1) = 3$ et $\gamma d(Y) = 2$; la proposition 2.3.2 s'applique et donne $\gamma d(X_2) = 2$. Les 3-variétés X_1 et X_2 ont donc des groupes fondamentaux isomorphes et pourtant elles vérifient $\gamma d(X_1) \neq \gamma d(X_2)$. Remarquons pour finir qu'en choisissant des diviseurs suffisamment amples, on peut même imposer $\kappa(X_1) = \kappa(X_2) = 3$.

La démonstration de la proposition 2.5.1 s'appuie sur le résultat suivant dû à Y.-T. Siu :

Théorème 2.5.1 ([Siu87])
Soit X une variété kählérienne compacte et g un entier ≥ 2. Alors $\pi_1(X)$ admet pour quotient le groupe de surface $\pi_1(C_g)$ si et seulement si X admet une fibration sur une courbe (compacte) de genre $g' \geq g$.
Si de plus $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(C_g)$ est un morphisme surjectif avec $g = g(X)$, il existe alors une fibration de X sur une courbe de genre g qui induit ρ.

Dans le théorème précédent, C_g désigne bien entendu une courbe de genre g ; d'autre part, le nombre $g(X)$ (*genre* de X) est défini comme suit :
un sous-espace vectoriel U de $H^1(X, \mathbb{R})$ est dit isotrope si il est annulé par le produit extérieur $\Lambda^2 H^1(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{R})$, c'est-à-dire si $\alpha \wedge \beta = 0$ pour tout $(\alpha, \beta) \in H^1(X, \mathbb{R})$. On pose alors :

$$g(X) = \max \left\{ \dim(U) | U \subset H^1(X, \mathbb{R}),\, U \text{ isotrope} \right\}.$$

L'invariant $g(X)$ est en fait un invariant du groupe fondamental de X. On pourra consulter [ABC$^+$96, chap. 2] pour une présentation simple du résultat de Siu.

Démonstration de la proposition 2.5.1 :

Tout d'abord, si $\gamma d(X) = 1$ quitte à choisir un modèle lisse de γ_X, on obtient donc une fibration de X sur une courbe C dont la fibre générale F vérifie : $\pi_1(F)_X$ est fini. Quitte à considérer un revêtement étale fini de X, on peut supposer que la fibration γ_X est π_1-exacte (cf théorème 5.4.1) :

$$1 \longrightarrow \pi_1(F)_X \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\gamma_{X*}} \pi_1(C) \longrightarrow 1 \ .$$

Comme $\pi_1(X)$ est infini, on en déduit que $g(C) \geq 1$. En appliquant le lemme A.0.2 de l'appendice, on en déduit que $\pi_1(X)$ est lui-même commensurable à un groupe de surface.

Réciproquement, si $\pi_1(X)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe C de genre $g \geq 1$, cela signifie qu'il existe des revêtements étales finis $\hat{X}$ et $\hat{C}$ de X et C avec $\pi_1(\hat{X}) \simeq \pi_1(\hat{C})$. Si $g(\hat{C}) = 1$, on vérifie facilement que l'application d'Albanese de $\hat{X}$ est surjective (vers une courbe elliptique) et qu'elle réalise un isomorphisme au niveau du groupe fondamental ; on a donc : $\gamma d(X) = \gamma d(\hat{X}) = 1$. Si maintenant $g(\hat{C}) \geq 2$, on peut appliquer la deuxième partie du théorème 2.5.1 ; en effet, comme le genre est un invariant du groupe fondamental, on a bien $g(\hat{X}) = g(\hat{C})$ et on en déduit donc l'existence d'une fibration $f : \hat{X} \longrightarrow \hat{C}$ qui induit l'isomorphisme ci-dessus. La fibre générale $\hat{F}$ de f vérifie ainsi : $\pi_1(\hat{F})_{\hat{X}} = 1$ (*i.e.* f est bien la Γ-réduction de $\hat{X}$) et $\gamma d(X) = \gamma d(\hat{X}) = 1$. Dans tous les cas, on a bien $\gamma d(X) = 1$. $\square$

Chapitre 3

Γ-réduction et théorie de la classification

Dans ce chapitre, on souhaite comparer la Γ-réduction aux fibrations canoniques de la théorie de la classification des variétés kählériennes compactes : quotient rationnel, fibration d'Albanese et d'Iitaka-Moishezon. On pourra également consulter le chapitre 5 où les définitions du coeur et des variétés spéciales sont rappelées. Malheureusement, faute d'idées sur ce que devraient être les relations entre le coeur et la Γ-réduction, nous n'avons pas incorporé de discussion sur ce sujet dans ce chapitre.

3.1 Quotient rationnel

On rappelle tout d'abord les définitions et les résultats essentiels relatifs à cette réduction.

Définition 3.1.1
Une variété kählérienne compacte X est dite uniréglée si il existe une famille couvrante de courbes rationnelles. Elle est rationnellement connexe lorsque deux points généraux peuvent être joints par une courbe rationnelle.

Une variété rationnellement connexe X est algébriquement connexe (*i.e.* deux points généraux sont contenus dans un même sous-espace de X qui est algébrique). Par [Cam81] (corollaire des théorèmes 5 et 6, p. 212), on en déduit que X est une variété de Moishezon et donc projective (par un théorème de B. Moishezon).
Le lien profond entre variétés uniréglées et variétés rationnellement connexes est exprimé dans le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 ([Cam92],[KMM92])
Soit X une variété kählérienne compacte uniréglée. Il existe alors une unique (à équivalence birationnelle près) fibration méromorphe presque-holomorphe

$$r_X : X \dashrightarrow R(X)$$

vérifiant :

1. *la fibre générale de r_X est rationnellement connexe,*
2. *la fibre générale de r_X contient toute courbe rationnelle qui la rencontre.*

Définition 3.1.2
La fibration $r_X : X \dashrightarrow R(X)$ s'appelle le quotient rationnel de X (également appelée fibration MRC[1] dans [KMM92]). Si X n'est pas uniréglée, on pose $R(X) = X$ et $r_X = id_X$.

Comme $R(X)$ est le quotient géométrique de X par la relation d'équivalence engendrée par la famille des courbes rationnelles de X, on est en droit d'attendre qu'il ne soit plus recouvert par des courbes rationnelles. Bien qu'exact, cet énoncé est difficile ; c'est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 3.1.2 ([GHS03])
Si $f : X \longrightarrow B$ est un morphisme sur une courbe lisse B dont la fibre générale est rationnellement connexe, il admet une section.

Corollaire 3.1.1
La base du quotient rationnel $R(X)$ d'une variété kählérienne compacte n'est pas uniréglée.
Si X est de plus projective, le quotient rationnel $r_X : X \dashrightarrow R(X)$ n'a pas de fibre multiple en codimension 1. En particulier, on a l'isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux :

$$r_{X*} : \pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(R(X)).$$

Démonstration du corollaire 3.1.1 :
Si $R(X)$ est encore uniréglée, on considère une courbe rationnelle C passant par un point général de $R(X)$. La famille $r_X^{-1}(C) \longrightarrow C$ admet alors une section, c'est-à-dire une courbe rationnelle dans X qui coupe la fibre générale de r_X sans y être entièrement contenue. Ceci contredit manifestement la propriété 2 ci-dessus dans le théorème 3.1.1. Dans la situation d'une variété projective X, son quotient rationnel l'est également. On peut alors considérer une courbe C passant par le point générique : comme la restriction de r_X à C admet une section, cela signifie que chaque fibre au dessus de C a une composante réduite. La fibration r_X n'a donc pas de fibre multiple en codimension 1.
En ce qui concerne l'énoncé pour les groupes fondamentaux, on peut appliquer la proposition 5.3.3 plus loin (ou [Nor83]) car les fibres multiples de r_X n'apparaissent qu'en codimension 2 (dans le cas projectif). On a donc une suite exacte de groupes :

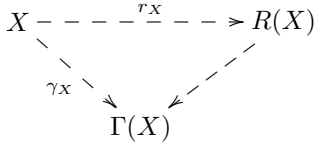
$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(R(X)) \longrightarrow 1,$$

où F désigne la fibre générale de r_X. Celle-ci étant rationnellement connexe, elle est en particulier simplement connexe et l'isomorphisme $\pi_1(X) \simeq \pi_1(R(X))$ découle directement de la suite ci-dessus. □

Comme on vient à l'instant de le rappeler, la fibre générale du quotient rationnel de X est rationnellement connexe donc simplement connexe. *A fortiori*, si F désigne cette fibre, F est contenue dans la fibre de la Γ-réduction de X.

[1] maximalement rationnellement connexe

Proposition 3.1.1
Si X est une variété kählérienne compacte, on a alors un diagramme (au sens biméromorphe) :



dans lequel les applications sont surjectives. Si on note $rd(X) = \dim(R(X))$, on a donc :

$$\gamma d(X) \leq rd(X),$$

avec égalité si et seulement si les fibrations r_X et γ_X sont birationnellement équivalentes.

Remarque 3.1.1
En plus d'être un invariant birationnel, $rd(X)$ est invariant sous les revêtements étales finis de X.

Corollaire 3.1.2
Une variété kählérienne compacte X uniréglée vérifie :

$$\gamma d(X) < \dim(X).$$

Pour les surfaces vérifiant $\kappa(S) = -\infty$ (c'est à dire les surfaces uniréglées), la Γ-réduction et le quotient rationnel coincident mais en général il n'en est rien ; par exemple, si $X = \mathbb{P}^1 \times S$ avec S une surface $K3$, le quotient rationnel est la projection sur le deuxième facteur alors que la Γ-réduction de X est l'application constante.

Au moins conjecturalement, on dispose d'une description numérique de la classe des variétés uniréglées :

Conjecture 3.1.1 (Conjecture d'uniréglage)
Une variété kählérienne compacte X est uniréglée si et seulement si

$$\kappa(X) = -\infty$$

Le sens direct de l'équivalence ci-dessus est immédiat. D'autre part, la description du cône pseudo-effectif d'une variété projective [BDPP04] nous incite à reformuler la conjecture 3.1.1 de la manière suivante :

Conjecture 3.1.2 (Conjecture d'Abondance)
Soit X une variété kählérienne compacte. Si K_X est pseudo-effectif, alors $\kappa(X) \geq 0$. Si K_X est nef, mK_X est alors engendré par ses sections globales pour m assez grand. En particulier, K_X est hermitien semi-positif.

Remarque 3.1.2
On pourra également consulter [BDPP04, 3.8, p. 12] pour une formulation plus générale de la conjecture d'Abondance (en termes de dimension numérique du fibré canonique).

En combinant ceci avec le corollaire 3.1.2, on obtient alors :

Corollaire-Conjecture 3.1.1
Si X est une variété kählérienne compacte de type π_1-général, on a $\kappa(X) \geq 0$.

On discutera plus loin du statut de cet énoncé en petite dimension.

3.2 Fibration d'Albanese

Nous voulons donner ici un bref aperçu du lien étroit qui lie l'application d'Albanese d'une variété kählérienne compacte X et son groupe fondamental. Avant toute chose, précisons ce que l'on entend par fibration d'Albanese. Si X est une variété kählérienne compacte, on peut considérer son morphisme d'Albanese :

$$\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

dont l'image $\alpha_X(X)$ est une sous-variété irréductible du tore $\mathrm{Alb}(X)$. On appelle fibration d'Albanese un modèle lisse de la factorisation de Stein de

$$\alpha_X : X \longrightarrow \alpha_X(X)$$

(quitte évidemment à modifier X) ; en particulier, une telle application est bien définie à équivalence birationnelle près et ses fibres sont connexes. On pourra la noter :

$$\alpha s_X : X \longrightarrow \alpha s(X)$$

Rappelons tout d'abord la propriété universelle du morphisme d'Albanese :

Proposition 3.2.1 (voir [Uen75])
Si $\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ est le morphisme d'Albanese de X (kähler compacte), alors on a un isomorphisme :

$$\alpha_X^* : H^1(\mathrm{Alb}(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Z}).$$

En exploitant la relation entre homologie et homotopie en degré 1, on obtient en particulier :

Corollaire 3.2.1
Si le groupe fondamental de X est abélien, alors on a :

$$(\alpha_X)_* : \pi_1(X)/\mathit{Tor} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Alb}(X)).$$

L'application d'Albanese capture en fait bien plus que l'information sur l'abélianisé du groupe fondamental : en utilisant la formalité des variétés kählériennes compactes [DGMS75], on peut montrer que celle-ci reflète la partie nilpotente de $\pi_1(X)$.

Définition 3.2.1
Soit G un groupe de type fini. On définit sa suite centrale descendante par :

$$C^1(G) = G \quad \textit{et} \quad C^{n+1}(G) = [G, C^n(G)].$$

Le groupe G est dit nilpotent *de classe n si $C^{n+1}(G) = 1$ et $C^n(G) \neq 1$.*

Définition 3.2.2
Si G est un groupe (de type fini), $G'_n = G/C^{n+1}(G)$ est alors un groupe nilpotent de classe au plus n. Sa torsion est alors un sous-groupe caractéristique et on note $G_n = G'_n/\,Tor(G'_n)$. G_n est le plus grand quotient nilpotent sans torsion de classe au plus n de G. De même, on note G^n le noyau de la projection naturelle $G \longrightarrow G_n$ et on pose :

$$G^\infty = \cap_{n\geq 1} G^n \quad et \quad G^{nilp} = G/G^\infty.$$

G^{nilp} s'appelle la complétion nilpotente (modulo torsion) de G.

Théorème 3.2.1 ([Cam95b])
Soit X une variété kählérienne compacte et $\alpha s_X : X \longrightarrow \alpha s(X)$ sa fibration d'Albanese. Si $\pi_1^{nilp}(X)$ désigne la complétion nilpotente de $\pi_1(X)$ (de même pour $\alpha s(X)$), on a un isomorphisme :

$$f_* : \pi_1^{nilp}(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{nilp}(\alpha s(X)).$$

En particulier, si $\pi_1(X)$ est nilpotent sans torsion, alors

$$f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\alpha s(X))$$

est un isomorphisme.

Bien que ce résultat soit une conséquence assez directe de la formalité des variétés kählériennes compactes, la démonstration de [Cam95b] procède de manière élémentaire et indépendante.

Pour décrire les relations entre la fibration d'Albanese et la Γ-réduction, conservons les notations du théorème 3.2.1. La variété $\alpha s(X)$ admet donc une application finie (surjective) sur une sous-variété d'un tore complexe. Le lemme suivant montre qu'une telle variété est de type π_1-général.

Lemme 3.2.1
Soit Y une sous-variété irréductible d'un tore complexe T ; si $\hat{Y}$ désigne une désingularisation de Y alors $\hat{Y}$ est de type π_1-général.

Démonstration :
On note $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow T$ le revêtement universel de T et on considère $\widetilde{Y}$ une composante irréductible de $p^{-1}(Y)$. Si $u : \hat{Y} \longrightarrow Y$ est une désingularisation de Y (donc u est une modification propre), on alors le diagramme suivant :

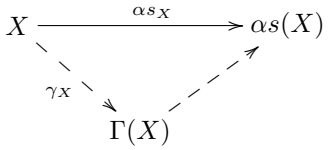
$$\begin{array}{ccccc} \overline{Y} & \xrightarrow{\overline{u}} & \widetilde{Y} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \hat{Y} & \xrightarrow{u} & Y & \hookrightarrow & T \end{array}$$

où $\overline{Y}$ est le produit fibré : $\overline{Y} = \widetilde{Y} \times_Y \hat{Y}$. Comme $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ est étale, $\overline{p} : \overline{Y} \longrightarrow Y$ est encore un revêtement étale et de même, $\overline{u} : \overline{Y} \longrightarrow \widetilde{Y}$ est encore une modification propre. $\widetilde{Y}$ étant un sous-ensemble analytique fermé de $\mathbb{C}^n$, c'est un espace de Stein et $\overline{Y}$ est donc modification propre d'un espace de

Stein. Le revêtement universel de $\hat{Y}$ étant en particulier un revêtement de $\overline{Y}$, il ne contient génériquement aucun sous-ensemble analytique compact connexe de dimension positive. $\hat{Y}$ est donc bien de type π_1-général. □

Le lemme 3.2.1 montre donc que $\alpha s(X)$ est de type π_1-général. Par fonctorialité de la Γ-réduction, on en déduit :

Proposition 3.2.2
Si X est une variété kählérienne compacte, il existe un diagramme :



qui se traduit entre autre par l'inégalité suivante :

$$\gamma d(X) \geq \alpha d(X),$$

avec égalité si et seulement si αs_X et γ_X sont birationnellement équivalentes.

Si on pense à la fibration d'Albanese comme à une version abélienne de la Γ-réduction, il est tout à fait naturel que $\Gamma(X)$ domine $\alpha s(X)$. On rappelle que la notation $\alpha d(X)$ désigne la dimension de la variété $\alpha s(X)$. Une remarque s'impose ici : $\alpha d(X)$ est un invariant birationnel mais, contrairement à $\gamma d(X)$ et $rd(X)$, cette quantité n'est pas invariante par revêtement étale fini (une surface bi-elliptique a pour dimension d'Albanese 1 mais est revêtue par une surface abélienne). Pour obtenir des résultats significatifs, on doit donc s'autoriser des revêtements étales finis. En notant

$$\widetilde{\alpha d}(X) = \max_{X' \longrightarrow X} (\alpha d(X'))$$

où le maximum est étendu aux revêtement étales finis de X, l'inégalité de la proposition 3.2.2 se réécrit :

$$\gamma d(X) \geq \widetilde{\alpha d}(X)$$

pour toute variété kählérienne compacte X. L'entier $\widetilde{\alpha d}(X)$ est maintenant (par construction) invariant sous les revêtements étales finis de X.

Enfin, le théorème 3.2.1 montre que le cas d'égalité est atteint pour les variétés à groupe fondamental nilpotent :

Corollaire 3.2.2
Soit X une variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental est nilpotent sans torsion. La Γ-réduction de X est alors donnée par la factorisation de Stein de l'application d'Albanese ; en particulier :

$$\gamma d(X) = \alpha d(X).$$

Si $\pi_1(X)$ est seulement presque-nilpotent, on a donc $\gamma d(X) = \widetilde{\alpha d}(X)$.

On verra au prochain chapitre (théorème 4.3.2) une autre situation dans laquelle la Γ-réduction de X est équivalente à la fibration d'Albanese.

3.3 Fibration d'Iitaka-Moishezon

Cette discussion est essentiellement conjecturale : on montre quelles pourraient être les relations entre Γ-réduction et fibration d'Iitaka au vu des conjectures standard de la théorie de la classification.

Si le quotient rationnel offre une description de ce que devrait être la classe des variétés avec $\kappa = -\infty$, la fibration d'Iitaka-Moishezon fournit une décomposition d'une variété X vérifiant $\kappa(X) \geq 0$. Dans ce cas, c'est la sous-classe des variétés avec $\kappa = 0$ qui joue un rôle privilégié (voir [Laz04a, th. 2.1.33, p. 133]).

Théorème 3.3.1 (S. Iitaka-B. Moishezon, 1970)
Soit X une variété kählérienne compacte vérifiant $\kappa(X) > 0$. Il existe alors une application méromorphe[2] *:*

$$J_X : X \dashrightarrow J(X)$$

unique à équivalence birationnelle près et satisfaisant :

1. *la fibre générale F de J_X est connexe et vérifie $\kappa(F) = 0$,*
2. $\dim(J(X)) = \kappa(X)$.

La fibration J_X est, de plus, équivalente à l'application donnée par le système linéaire mK_X pour m suffisamment grand et suffisamment divisible.

Dans le cas des variétés de type π_1-général, la fibration d'Iitaka-Moishezon doit avoir une structure très particulière.

Conjecture 3.3.1 ([Kol93b] pour le cas projectif, [CZ05])
Soit X une variété kählérienne compacte. Si X est de type π_1-général, X admet un revêtement étale fini $X' \longrightarrow X$ dont la fibration d'Iitaka $J_{X'}$ (sur un modèle biméromorphe adéquat de X') est une submersion en tores et dont la base est de type général et de type π_1-général.

Remarque 3.3.1
D'après le lemme 3.2.1, si X est une sous-variété d'un tore, elle est de type π_1-général. Or, la réduction d'Ueno [Uen75, th. 10.9, p. 120] affirme qu'une telle variété est un fibré (analytique) en tores sur une variété de type général, elle-même contenue dans une variété abélienne (donc de type π_1-général en appliquant à nouveau le lemme 3.2.1). La conjecture 3.3.1 est donc vérifiée pour les sous-variétés des tores complexes.

Proposition 3.3.1
La conjecture d'abondance 3.1.2 implique la conjecture 3.3.1 pour une variété X avec K_X nef.

Démonstration :
Soit donc X une variété kählérienne compacte de type π_1-général avec K_X nef. Traitons d'abord le cas $\kappa(X) = 0$: la conjecture d'abondance montre que dans ce cas, le fibré canonique est de torsion. En particulier, $c_1(X) = 0$ et le théorème de décomposition de Bogomolov-Yau (voir cependant [Bea83]) montre que X admet un revêtement étale fini qui est un produit d'un tore par des

[2] est-elle toujours presque-holomorphe ?

variétés simplement connexes (facteurs de type Calabi-Yau ou hyperkählériens). Comme X est supposée de type π_1-général, ces facteurs doivent être réduits à un point et X est revêtue par un tore.
Si X est de type général, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc

$$0 < \kappa(X) < \dim(X).$$

La fibre générale F de J_X (qui est holomorphe puisque K_X est globalement engendré) vérifie $\kappa(F) = 0$ et, comme $K_F = K_{X|F}$, son fibré canonique est également nef. On est ramené au cas précédent et F est donc revêtue par un tore complexe. On peut alors appliquer [Kol93a] théorème 6.3, p. 198 et proposition 5. 9, p. 196. □
On verra plus loin que la conjecture 3.3.1 est vérifiée en petite dimension.

Le théorème de comparaison 4.2.2 (que nous démontrerons dans le chapitre suivant) donne également une majoration de la Γ-dimension en termes de l'invariant κ^+. Cette dimension de Kodaira "augmentée" admet la description conjecturale suivante ([Cam95a]) :

$$\kappa^+(X) = \begin{cases} \kappa(X) & \text{si } \kappa(X) \geq 0, \\ \kappa(R(X)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

A titre d'exemple, une variété X avec $c_1(X) = 0$ vérifie $\kappa^+(X) = 0$ (on pourra consulter le chapitre 4 pour une définition précise de l'invariant κ^+).

Théorème 4.2.2
Soit X une variété kählérienne compacte avec $\kappa^+(X) \geq 0$ et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$. L'inégalité suivante est alors satisfaite :

$$\gamma d(X) \leq \kappa^+(X).$$

En particulier, une variété vérifiant $\kappa^+(X) = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$ a un groupe fondamental fini.

On déduit ainsi du théorème de comparaison 4.2.2 et de la description ci-dessus la conjecture suivante :

Corollaire-Conjecture 3.3.1 *Si une variété kählérienne compacte X vérifie $\kappa(X) \geq 0$ et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, on a alors :*

$$\gamma d(X) \leq \kappa(X).$$

Comme la fibration d'Iitaka-Moishezon distingue la classe des variétés avec $\kappa(X) = 0$, il semble intéressant d'isoler leur étude. On a vu ci-dessus que la conjecture d'abondance ramène l'étude de ces variétés à celles ayant un fibré canonique de torsion, c'est-à-dire aux variétés X vérifiant $c_1(X) = 0$. Le théorème de décomposition de Bogomolov-Beauville montre qu'une telle variété possède un revêtement étale fini qui est un produit d'un tore T par des facteurs Calabi-Yau et hyperkählériens (tous simplement connexes) :

$$T \times C_1 \times \cdots \times C_m \times H_1 \times \cdots \times H_k \longrightarrow X$$

et, avec les notations introduites, on a donc : $\gamma d(X) = \dim(T)$. Les facteurs Calabi-Yau et hyperkählériens étant de dimension au moins 2, la conjecture suivante semble raisonnable :

Conjecture 3.3.2
Soit X une variété kählérienne compacte vérifiant $\kappa(X) = 0$. La Γ-dimension de X vérifie alors

$$\gamma d(X) \neq \dim(X) - 1$$

Sous réserve de conjectures classiques ($C^+_{n,m}$ et conjecture d'abélianité), on peut montrer que cet énoncé est valide. En effet, si X est une variété avec $\kappa(X) = 0$, il est classiquement conjecturé que son groupe fondamental est presque-abélien (cf. la conjecture 5.2.1 au chapitre 5). La Γ-réduction de X est alors donnée par l'application d'Albanese (corollaire 3.2.2), quitte à remplacer X par un de ses revêtements étales finis adéquats. L'application

$$\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

est alors surjective, à fibres connexes (de dimension 1 si $\gamma d(X) = \dim(X) - 1$) et sans fibre multiple en codimension 1 (cf par exemple [Cam04b, prop. 5.3, p. 576]). En particulier, elle induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux :

$$(\alpha_X)_* : \pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Alb}(X)).$$

La conjecture $C^+_{n,m}$ montre alors que la fibre générale de α_X est une courbe elliptique et que cette fibration est isotriviale. Il existe donc un changement de base fini $f : Y \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ tel que le produit fibré $X \times_{\mathrm{Alb}(X)} Y$ soit biméromorphe à un produit. Si E désigne la fibre générale de α_X, on constate alors sans peine que le morphisme $\pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(X)$ a un noyau fini donc nul (car $\pi_1(E)$ est sans torsion). Ceci contredit de manière flagrante le fait que α_X soit birationnelle à la Γ-réduction de X.$\square$

Chapitre 4

Applications des techniques L^2 à l'étude de la Γ-réduction

On va montrer dans ce chapitre que l'utilisation des techniques analytiques (en particulier les méthodes hilbertiennes) est bien adaptée à l'étude de la Γ-réduction (définie sur le revêtement universel). L'introduction de ces techniques remonte à l'article fondateur de M. Gromov [Gro91] dans lequel il apporte un regard nouveau sur la théorie L^2 : théorèmes de Hodge-de Rahm L^2, de Lefschetz difficile, version "tordue" de la formule de l'indice L^2 et séries de Poincaré sont mis à contribution pour une étude systématique de la structure du revêtement universel et du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte.

4.1 Rappels de théorie de Hodge L^2

On souhaite donner ici quelques brefs éléments de rappel concernant la théorie de Hodge des variétés non-compactes. La théorie de Hodge des variétés compactes étant elle-même une théorie L^2, elle s'adapte de façon naturelle au cadre plus général des variétés (riemanniennes) complètes. On rappelle que la complétude est nécessaire pour bénéficier de la densité des espaces de formes à support compact.

Soit donc $(\widetilde{X}, \tilde{\omega})$ une variété kählérienne complète. On note $\mathcal{A}^j_{(2)}(\widetilde{X})$ (le complété séparé de) l'espace des j-formes qui sont L^2 pour la métrique $\tilde{\omega}$. Si $*$ désigne l'opérateur de Hodge, on a donc :

$$\mathcal{A}^j_{(2)}(\widetilde{X}) = \left\{ \beta \,\text{forme de degré } j \mid \int_{\widetilde{X}} \beta \wedge *\beta < +\infty \right\}.$$

Le laplacien attaché à la métrique $\tilde{\omega}$ permet de définir l'espace :

$$\mathcal{H}^j_{(2)}(\widetilde{X}) = \left\{ \beta \in \mathcal{A}^j_{(2)}(\widetilde{X}) | \Delta\beta = 0 \right\}.$$

Dans la définition précédente, le laplacien est calculé (a priori) au sens des courants mais il est bien connu que l'espace $\mathcal{H}^j_{(2)}(\widetilde{X})$ est constitué de formes lisses (ellipticité du laplacien). Par complétude, on peut intégrer par parties

(lemme de Gaffney) et on obtient :

$$\mathcal{H}^j_{(2)}(\widetilde{X}) = \left\{\beta \in \mathcal{A}^j_{(2)}(\widetilde{X}) | d\beta = 0 \,\text{et}\, d^*\beta = 0\right\},$$

où d^* désigne l'adjoint formel (pour $\tilde{\omega}$) de la différentielle extérieure.

Théorème 4.1.1 (Hodge-de Rham)
On a la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathcal{A}^j_{(2)}(\widetilde{X}) = \mathcal{H}^j_{(2)}(\widetilde{X}) \oplus \overline{d\mathcal{A}^{j-1}_{(2)}(\widetilde{X})} \oplus \overline{d^*\mathcal{A}^{j+1}_{(2)}(\widetilde{X})}.$$

La cohomologie (réduite) :

$$H^j_{(2)}(\widetilde{X}, \mathbb{C}) = \left\{\beta \in \mathcal{A}^j_{(2)}(\widetilde{X}) | d\beta = 0\right\} / \overline{d\mathcal{A}^{j-1}_{(2)}(\widetilde{X})}$$

est donc isométriquement isomorphe à l'espace des formes harmoniques :

$$H^j_{(2)}(\widetilde{X}, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^j_{(2)}(\widetilde{X}).$$

L'identité kählérienne :

$$\Delta = 2\Delta'' = 2(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2$$

montre de plus que le laplacien préserve la décomposition d'une forme en somme de formes de type (p, q).

Corollaire 4.1.1

$$\mathcal{H}^j_{(2)}(\widetilde{X}) = \bigoplus_{p+q=j} \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\widetilde{X})$$

où $\mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\widetilde{X})$ désigne l'espace des formes harmoniques de type (p, q).

Il est à noter que l'espace $\mathcal{H}^{j,0}_{(2)}(\widetilde{X})$ revêt une importance particulière ; en effet, ce dernier est constitué des formes β de type $(j, 0)$ vérifiant $\Delta''\beta = 0$ ou encore $\overline{\partial}\beta = 0$ (la condition $\overline{\partial}^*\beta = 0$ est vide pour raison de type). On a donc l'identification :

$$\forall\, 0 \leq j \leq n, \quad \mathcal{H}^{j,0}_{(2)}(\widetilde{X}) = H^0_{(2)}(X, \Omega^j_{\widetilde{X}}).$$

Tout cet arsenal L^2 s'applique bien entendu en particulier lorsque $\widetilde{X}$ est le revêtement universel d'une variété kählérienne compacte : en effet, si $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ est le revêtement universel d'une variété kählérienne compacte X et si ω est une métrique kählérienne sur X, on peut munir $\widetilde{X}$ de la métrique naturelle $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ pour en faire une variété kählérienne complète $(\widetilde{X}, \tilde{\omega})$. Les constructions ci-dessus s'appliquent donc à $\widetilde{X}$ mais on peut constater le fait suivant : les espaces de cohomologie $H^j_{(2)}(\widetilde{X}, \mathbb{C})$ ne dépendent pas du choix de ω. En effet, deux métriques sur X sont équivalentes (par compacité de X) et donc leurs relèvements à $\widetilde{X}$ le sont encore : les espaces de formes L^2 sont donc

les mêmes ainsi que les groupes de cohomologie associés.
En particulier, les groupes :

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^j_{\widetilde{X}}) \text{ et } H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}})$$

ne dépendent pas du choix d'une métrique sur V (ils sont donc intrinsèquement attachés à X). Il s'avère même que ce sont des invariants birationnels (voir par exemple [Kol95, cor. 11.4, p.130] :

Proposition 4.1.1
Les espaces de sections L^2 :

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^j_{\widetilde{X}}) \text{ et } H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}) \text{ (pour } m \geq 1)$$

sont des invariants birationnels de X.

4.2 Théorème de comparaison : positivité de Ω^1_X et Γ-dimension

On va dans cette section donner une nouvelle illustration d'un principe général de la théorie de la classification des variétés kählériennes compactes : les propriétés de positivité (ou de négativité) du fibré cotangent Ω^1_X influencent la géométrie de la variété X. En l'occurence, cette influence se manifeste à travers la "taille" du groupe fondamental.

4.2.1 Un exemple : la simple connexité des variétés de Fano

Les techniques L^2 permettent d'obtenir très rapidement une démonstration du fait bien connu suivant :

Fait : *les variétés de Fano sont simplement connexes.*

Démonstration :
Soit donc une variété de Fano ($-K_X$ est un fibré ample). La remarque suivante (due à S. Kobayashi) montre que toute la difficulté est de savoir que le groupe fondamental de X est fini. En effet, si on sait cela, le revêtement universel $\widetilde{X}$ de X est alors une variété compacte qui est donc encore Fano. Le théorème d'annulation de Kodaira appliqué à $-K_X$ et $-K_{\widetilde{X}}$ montre que :

$$\chi(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) = 1.$$

Or, si d désigne le degré du revêtement $\widetilde{X} \longrightarrow X$, on a également :

$$\chi(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = d\chi(X, \mathcal{O}_X).$$

On en déduit donc que $d = 1$, ce qui est équivalent à la simple connexité de X.
Comme les théorèmes d'annulation classiques sur X ont (avec les mêmes démonstrations) leurs analogues L^2 sur $\widetilde{X}$ (voir par exemple [CD01, th. 4.3, p.276]), on a donc :

$$\forall j \geq 1,\ H^j(X, \mathcal{O}_X) = H^j_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0.$$

Le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah (dont on pourra trouver les grandes lignes de la démonstration dans l'annexe C) se résume alors à :

$$h^0(X, \mathcal{O}_X) = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}).$$

En particulier, on a donc :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 1.$$

Le lemme suivant montre que $\widetilde{X}$ est en fait compact (le groupe fondamental de X est donc fini) :

Lemme 4.2.1
Si $\widetilde{X}$ est non-compacte, alors $h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0$.

Démonstration :
Par sous-harmonicité, une fonction holomorphe L^2 tend vers 0 à l'infini ; le principe du maximum montre qu'elle est alors constante et donc nulle. □
□

Remarque 4.2.1
Cette démonstration a le mérite d'éviter tout recours non seulement au difficile théorème de Yau[1] *mais également à l'existence de courbes rationnelles sur les variétés de Fano (reposant sur des arguments de caractéristique $p > 0$).*

1. *La solution de la conjecture de Calabi-Yau montre en particulier que les variétés de Fano sont exactement les variétés (kählériennes) à courbure de Ricci positive. Une fois ceci établi, le théorème de Myers montre que le groupe fondamental de X est fini.*
2. *La connexité rationnelle des variétés de Fano est établie conjointement dans [Cam92] et [KMM92]. Un argument de géométrie analytique (reposant sur l'existence de l'espace des cycles) montre ensuite que les variétés rationnellement connexes sont simplement connexes (voir [Cam91b]).*

Ces arguments sont donc remplacés ci-dessus par le théorème de l'indice L^2.

Remarque 4.2.2
Hormis le théorème de l'indice L^2, l'ingrédient essentiel de la démonstration ci-dessus est le théorème d'annulation de Kodaira. En remplaçant celui-ci par le théorème de Kawamata-Viehweg, S. Takayama a montré la simple connexité pour une classe de variétés un peu plus large :

Théorème 4.2.1 ([Tak00])
Si X est une variété projective (non nécessairement lisse) munie d'un $\mathbb{Q}$-diviseur Δ tel que :

(i) *la paire (X, Δ) est Kawamata-log-terminale*[2]*,*

(ii) $-(K_X + \Delta)$ *est* nef *et* big,

alors X est simplement connexe.

[1] existence de métrique kählérienne à courbure de Ricci donnée dans la classe $c_1(X)$.
[2] voir le chapitre 6 pour la définition d'une paire *klt*.

4.2.2 Théorème de comparaison

La démarche ci-dessus se généralise pour obtenir le théorème de comparaison qui établit un lien entre la positivité du fibré cotangent Ω^1_X d'une variété X et sa Γ-dimension $\gamma d(X)$. L'énoncé de ce résultat requiert néanmoins l'introduction d'un nouvel invariant numérique (birationnel) :
Si $\mathcal{F} \subset \Omega^p_X$ est sous-faisceau cohérent de rang r, la saturation de $\Lambda^r\mathcal{F}$ dans $\Lambda^r\Omega^p_X$ est alors un fibré en droite noté $\mathrm{Det}(\mathcal{F})$ (pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 5, paragraphe 6 de [Kob87]).

Définition 4.2.1
On définit :

$$\kappa^+(X) = max\big(\kappa(X, Det(\mathcal{F}))\big)$$

où le maximum est étendu aux sous-faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ de Ω^p_X, l'exposant p vérifiant $1 \leq p \leq \dim(X)$.

Le théorème de comparaison [Cam95a, th. 4.1] peut maintenant s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 4.2.2 ([Cam95a])
Soit X une variété kählérienne compacte.
(i) *Si $\kappa^+(X) = -\infty$, alors X est simplement connexe ; en particulier :*

$$\gamma d(X) = 0.$$

(ii) *Si $\kappa^+(X) \geq 0$ et si $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, alors on a l'inégalité :*

$$\kappa^+(X) \geq \gamma d(X).$$

Cet énoncé montre que la Γ-dimension se comporte un peu à la manière d'une dimension de Kodaira ; ceci explique la terminologie suivante :

Définition 4.2.2
Une variété X de dimension (strictement) positive vérifiant $\gamma d(X) = \dim(X)$ est dite de type π_1-général. Mentionnons également que J. Kollár a introduit une terminologie différente dans [Kol93b] : une variété vérifiant $\gamma d(X) = \dim(X)$ est dite à groupe fondamental génériquement large.

Concernant le théorème 4.2.2, plusieurs remarques s'imposent :

(i) On dispose des inégalités suivantes :

$$\dim(X) \geq a(X) \geq \kappa^+(X) \geq \kappa(X).$$

Si maintenant X est une variété de type π_1-général vérifiant de plus $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, le théorème 4.2.2 fournit :

$$\dim(X) \geq a(X) \geq \kappa^+(X) \geq \gamma d(X) = \dim(X).$$

Dans cette situation, on a ainsi $a(X) = \dim(X)$ et X est une variété de Moishezon ; comme X est également kählérienne, X est nécessairement projective (par un théorème dû à B. Moishezon). Ce résultat spectaculaire, dû à M. Gromov

[Gro91, cor. 3.2.C', p. 288], a inspiré le théorème 4.2.2 ainsi que la construction de la Γ-réduction.

(ii) La condition $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$ ne peut en aucun cas être omise comme le montre l'exemple des tores : pour un tore, on a $\gamma d(X) = \dim(X)$ et $\kappa^+(X) = 0$.

De même, l'invariant $\kappa^+(X)$ invite à la discussion suivante :

(iii) Considérons l'énoncé suivant (conjecture émise dans [Cam95a]) :

$$\kappa^+(X) = -\infty \Leftrightarrow X \; RC, \tag{4.1}$$

dont on sait qu'une implication est vraie : les variétés rationnellement connexes (RC) vérifient $\kappa^+(X) = -\infty$. Remarquons alors la dichotomie suivante : soit l'énoncé (4.1) est vrai et ceci constitue une avancée substantielle dans la théorie de la classification, auquel cas le théorème 4.2.2 ci-dessus n'apporte rien de nouveau (simple connexité des variétés RC). Sinon, la classe $\kappa^+(X) = -\infty$ est strictement plus grande que la classe RC et le théorème 4.2.2 est alors une réelle amélioration des résultats déjà existants.

(iv) Si $\kappa(X) \geq 0$, on a également $\kappa^+(X) \geq \kappa(X) \geq 0$ et les conjectures standard du programme des modèles minimaux entrainent dans cette situation l'égalité

$$\kappa^+(X) = \kappa(X).$$

D'autre part, remarquons que dans le cas $\kappa(X) = -\infty$, l'invariant $\kappa^+(X)$ peut prendre toutes les valeurs suivantes :

$$\kappa^+(X) \in \{-\infty, 0, 1, \cdots, \dim(X) - 1\}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer des produits $\mathbb{P}^k \times Y$ avec Y de type général. Dans [Cam95a], on trouve la description conjecturale suivante de l'invariant κ^+ :

$$\kappa^+(X) = \begin{cases} \kappa(X) & \text{si } \kappa(X) \geq 0 \\ \kappa(R(X)) & \text{si } \kappa(X) = -\infty \text{ et } \dim(R(X)) > 0 \\ -\infty & \text{si (et seulement si) } X \text{ est rationnellement connexe} \end{cases}$$

Donnons une idée de la

Démonstration du théorème 4.2.2 :

Si $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah [Ati76] implique :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim_{\pi_1(X)}(H^p_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})) = \chi_{(2)}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = \chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$$

où $n = \dim(X)$ et $\widetilde{X}$ désigne le revêtement universel de X. Ainsi, il existe un indice p pour lequel

$$H^p_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \neq 0.$$

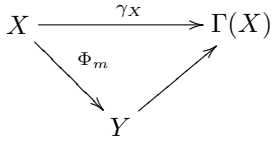
Par la théorie de Hodge, ceci peut se reformuler de la manière suivante : il existe sur $\widetilde{X}$ une p-forme holomorphe L^2 non nulle ($p > 0$ si $\widetilde{X}$ est non-compacte par

le lemme 4.2.1). Notons β cette p-forme et $\widetilde{\mathcal{F}}$ le sous-faisceau de $\Omega^p_{\widetilde{X}}$ engendré par tous les translatés de β (*i.e.* par les p-formes holomorphes $g^*\beta$ lorsque g décrit $\pi_1(X)$). Le faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ est $\pi_1(X)$-invariant : $\widetilde{\mathcal{F}}$ est donc l'image réciproque d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X ($\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de Ω^p_X).

En considérant les séries de Poincaré associées à $\widetilde{\mathcal{F}}$ (introduites dans [Gro91, paragraphe 3]), on peut montrer que la Γ-réduction de X se factorise alors par l'application rationnelle

$$\Phi_m : X \longrightarrow Y$$

associée au système linéaire $|m\mathrm{Det}(\mathcal{F})|$ (pour $m \gg 1$). On a donc :



d'où

$$\gamma d(X) = \dim(\Gamma(X)) \leq \dim(Y) = \kappa(X, \mathrm{Det}(\mathcal{F})) \leq \kappa^+(X),$$

ce qui est essentiellement le théorème 4.2.2 ci-dessus.

Pour obtenir la simple connexité dans le cas $\kappa^+(X) = -\infty$, il suffit de remarquer que, dans ce cas, on a :

$$\forall\, 1 \leq p \leq n,\ h^0(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}) = 0$$

pour tout revêtement étale fini $\overline{X}$ de X. En particulier $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ et la discussion ci-dessus montre que $\gamma d(X) > 0$ est exclue. $\widetilde{X}$ est donc compact et, comme $\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = \chi(\mathcal{O}_X) = 1$, on a $\widetilde{X} = X$, *i.e.* $\pi_1(X) = \{1\}$. □

4.3 Formes holomorphes L^2 et Γ-réduction

On montre sur quelques résultats bien connus que l'existence de formes holomorphes L^2 sur le revêtement universel d'une variété X n'est pas sans lien avec la Γ-réduction de X.

4.3.1 Cas des formes de degré 1

On a vu ci-dessus que la non-annulation :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \neq 0$$

caractérise (de façon certes triviale) les variétés X dont le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est fini, c'est-à-dire vérifiant $\gamma d(X) = 0$. L'énoncé suivant est un analogue en degré 1 :

Théorème 4.3.1 ([Gro89])
Soit X une variété kählérienne compacte (de groupe fondamental infini) vérifiant :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}) \neq 0.$$

*$\widetilde{X}$ admet alors une application **propre** connexe $f : \widetilde{X} \longrightarrow S$ vers une surface de Riemann. L'application f est compatible avec l'action de $\pi_1(X)$ sur $\widetilde{X}$ et celle de $Aut(S)$ sur S. De plus, elle induit un isomorphisme :*

$$f^* : H^0_{(2)}(S, \Omega^1_S) \xrightarrow{\sim} H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}).$$

En particulier, on a : $\gamma d(X) = 1$ et $\pi_1(X)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe de genre $g \geq 2$.

Démonstration :

Soit β une 1-forme holomorphe L^2 non-nulle. Par théorie de Hodge, celle-ci est en particulier fermée donc exacte. Il existe ainsi sur $\widetilde{X}$ une fonction holomorphe f (non-constante) vérifiant :

$$df = \beta.$$

La formule suivante (dans laquelle $\tilde{\omega}$ désigne la métrique induite sur $\widetilde{X}$ par une métrique kählérienne ω sur X)

$$\int_{\mathbb{C}} \mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}}(f^{-1}(z)) d\lambda(z) = \|df\|^2_{L^2} < +\infty$$

montre que le volume $\mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}}(f^{-1}(z))$ est fini pour presque tout $z \in \mathbb{C}$. Mais comme $\tilde{\omega}$ est fermée, le volume est constant sur les fibres : $\mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}}(f^{-1}(z))$ est fini pour tout $z \in \mathbb{C}$. Un argument classique de géométrie bornée montre qu'un sous-ensemble analytique de $\widetilde{X}$ de volume fini est en fait compact. On peut ainsi considérer la factorisation de Stein de f (notée encore f par abus de notation) :

$$f : \widetilde{X} \longrightarrow S.$$

Comme les fibres de f sont compactes et connexes, toute fonction holomorphe g est nécessairement constante sur ces fibres : cela signifie que l'application ainsi construite ne dépend pas du choix de f ni de celui de β et permet de conclure quant aux dernières assertions du théorème 4.3.1. □

Il convient de noter que la réciproque de ce théorème est fausse : $\gamma d(X) = 1$ n'implique pas l'existence de 1-forme holomorphe L^2 sur le revêtement universel de X. Il suffit en effet de considérer le cas des courbes elliptiques : elles sont revêtues pas $\mathbb{C}$ qui n'admet aucune forme holomorphe L^2.

En revanche, si la base orbifolde[3] de la Γ-réduction de X est une courbe de type général, on a bien entendu $h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^1_{\widetilde{X}}) \neq 0$.

4.3.2 Formes de degré 2 ou plus

On ne sait traiter le cas des formes de degré supérieur qu'en ajoutant une hypothèse (forte) sur les 1-formes holomorphes de X. On obtient alors un résultat de type Green-Lazarsfeld :

Théorème 4.3.2 ([JZ00])
Soit X une variété kählérienne compacte et supposons qu'il existe sur X des 1-formes holomorphes $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ génériquement linéairement indépendantes. On a alors :

[3] voir le chapitre 5 pour les notions introduites.

(i) *pour tout* $k < p$, $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^k_{\widetilde{X}}) = 0$.

(ii) *Si* $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^p_{\widetilde{X}}) \neq 0$, *il existe une application (quasi-holomorphe) propre connexe*

$$f : \widetilde{X} \longrightarrow Y$$

avec $\dim(Y) = p$ *telle que toute p-forme* L^2 *de* $\widetilde{X}$ *soit induite de* Y *par* f. *En particulier,* $\gamma d(X) = p$ *et la* Γ*-réduction de* X *coincide avec la fibration d'Albanese de* X *:*

$$\gamma_X \cong \alpha s_X.$$

Remarque 4.3.1
Les hypothèses initiales du théorème 4.3.2 (l'existence de 1-formes holomorphes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$*) entrainent de toute façon :*

$$\gamma d(X) \geq p.$$

En effet, le fait que les formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *soient génériquement indépendantes assure que l'application d'Albanese de* X *a une image de dimension au moins* p *:*

$$\alpha d(X) \geq p.$$

Comme la Γ*-réduction domine la fibration d'Albanese (proposition 3.2.2), on a l'inégalité* $\gamma d(X) \geq \alpha d(X) \geq p$.

L'ingrédient essentiel de la démonstration de ce résultat est le lemme suivant :

Lemme 4.3.1
Soit α *une 1-forme holomorphe sur une variété kählérienne compacte* X. *Si* $\tilde{\alpha}$ *désigne le relèvement de* α *au revêtement universel* $\widetilde{X}$, *le cup-produit par* $\tilde{\alpha}$ *est alors trivial sur la cohomologie* L^2 *de* $\widetilde{X}$ *:*

$$\forall\, \beta \in H^j_{(2)}(X, \mathbb{C}),\ \tilde{\alpha} \wedge \beta = 0 \text{ dans } H^{j+1}_{(2)}(X, \mathbb{C}).$$

Tenant pour acquis ce lemme, démontrons le théorème 4.3.2 :

Démonstration du théorème 4.3.2 :
Traitons d'abord le cas (i) : soit donc β une k-forme holomorphe L^2 avec $k < p$. Le lemme 4.3.1 nous montre que :

$$\forall 1 \leq i \leq p,\ \tilde{\alpha_i} \wedge \beta = 0$$

comme forme (et non seulement comme classe). Comme $k < p$ et comme les α_i sont linéairement indépendantes au point générique de X, on en déduit facilement que

$$\beta = \sum_{|I|=k} \tilde{f}_I \tilde{\alpha_I},$$

où les $\tilde{f}_I$ sont des fonctions holomorphes L^2 (I désigne ici un multi-indice de longueur k). Le lemme 4.2.1 montre alors que $\beta = 0$.

Soit maintenant β une p-forme holomorphe L^2 non-nulle (cas (ii)) ; la discussion menée ci-dessus nous montre que β est génériquement de la forme :

$$\beta = h\tilde{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\alpha_p},$$

où h est une fonction holomorphe. En particulier, $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^p_{\widetilde{X}})$ engendre un sous-faisceau de rang 1 de $\Omega^p_{\widetilde{X}}$ noté $\widetilde{L}$ (quitte à modifier X, on peut supposer que $\widetilde{L}$ est un fibré en droite). Ce dernier est clairement invariant par l'action de $\pi_1(X)$. Le faisceau $\widetilde{L}$ est donc l'image réciproque d'un sous-faisceau L de rang 1 de Ω^p_X. La discussion menée lors de la démonstration du théorème de comparaison 4.2.2 nous montre que la Γ-réduction de X se factorise par l'application donnée par les sections de mL (pour $m >> 1$) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma_X} & \Gamma(X) \\ & \searrow^{\Phi_{mL}} \quad \nearrow & \\ & Y_m & \end{array}$$

et $\dim(Y_m) = \kappa(X, L)$. Or, L étant un sous-faisceau de rang 1 de Ω^p_X, le lemme de Castelnuovo-De Franchis généralisé (voir par exemple [Bog80]) donne : $\kappa(X, L) \leq p$. On a donc bien $\gamma d(X) \leq p$. Ceci combiné à la remarque 4.3.1 donne :

$$\gamma d(X) = p \quad \text{et} \quad \gamma_X \cong \alpha s_X.$$

L'assertion concernant les p-formes holomorphes L^2 de $\widetilde{X}$ est claire. □

Démonstration du lemme 4.3.1 :

Soit β une j-forme L^2 fermée sur $\widetilde{X}$. Comme $\tilde{\alpha}$ est une 1-forme fermée sur $\widetilde{X}$, elle est exacte :

$$\tilde{\alpha} = df.$$

Comme $\tilde{\alpha}$ provient de X (compacte), la fonction f a une dérivée bornée : elle est donc lipschitzienne. Comme β est fermée, on a $\alpha \wedge \beta = d(f\beta)$ mais cela ne suffit pas pour avoir l'annulation ; en effet, $f\beta$ n'est plus nécessairement L^2. On utilise alors la complétude de $(\widetilde{X}, \tilde{\omega})$: si on choisit un point base $x_0 \in \widetilde{X}$, il existe des fonctions C^∞ $\phi_r : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $(r > 0)$ vérifiant :

1. pour tout $x \in \widetilde{X}$, $0 \leq \phi_r(x) \leq 1$.
2. ϕ_r est à support dans la boule de centre x_0 de rayon $2r$ et elle vaut identiquement 1 sur la boule de rayon r.
3. $|d\phi_r(x)|_{\tilde{\omega}} \leq \frac{C}{r}$ pour tout $x \in \widetilde{X}$.

Les formes $\phi_r f\beta$ sont maintenant à support compact donc L^2. On va montrer que $d(\phi_r f\beta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{\alpha} \wedge \beta$ dans L^2, ce qui montre exactement que cette classe est nulle en cohomologie réduite L^2.

Pour cela notons que :

$$d(\phi_r f\beta) = f d\phi_r \wedge \beta + \phi_r \tilde{\alpha} \wedge \beta.$$

Il n'est pas difficile de constater que le deuxième terme $\phi_r \tilde{\alpha} \wedge \beta$ tend vers $\tilde{\alpha} \wedge \beta$ dans L^2. Pour traiter le terme restant, il suffit de remarquer que comme f est lipschitzienne et comme les fonctions ϕ_r vérifient le point 3 ci-dessus, on a donc :

$$|f d\phi_r| \leq C$$

et ainsi :

$$\|fd\phi_r \wedge \beta\|^2_{L^2} \leq C^2 \|\beta\|^2_{L^2}.$$

De plus, $fd\phi_r \wedge \beta$ tend vers 0 (quand r tend vers $+\infty$) ponctuellement : les fonctions ϕ_r sont des fonctions "plateaux" et leur dérivée est donc nulle sur la boule de centre x_0 et de rayon r. Par convergence dominée, on en déduit que

$$\|fd\phi_r \wedge \beta\|_{L^2} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ceci conclut la démonstration du lemme 4.3.1. □

4.3.3 Formes canoniques L^2

La théorie des séries de Poincaré telle qu'elle est exposée dans [Gro91, part. 3] permet de caractériser les variétés de type général parmi celles de type π_1-général *via* l'existence de formes pluricanoniques L^2.

Théorème 4.3.3 (cor. 3.2.B, p. 287 [Gro91])
Soit X une variété complexe compacte dont le revêtement universel ne contient génériquement aucun sous-ensemble analytique compact de dimension positive. On a alors :

$$\kappa(X) = \dim(X) \Longleftrightarrow \exists\, m \geq 1,\ h^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}) > 0.$$

En d'autres termes, X est de type général si et seulement si il existe une forme pluricanonique L^2 (non nulle) sur $\widetilde{X}$.

D'après le corollaire 12.4.2 que nous démontrerons dans la troisième partie, on peut prendre n'importe quel entier $m \geq 2$; il est alors naturel de se demander si on peut choisir $m = 1$ dans l'énoncé ci-dessus. L'exemple ci-dessous, extrait de [EL97], montre qu'une variété de type général et de type π_1-général n'admet pas toujours de forme canonique L^2 sur son revêtement universel.
Soit en effet $\pi : C \longrightarrow E$ un revêtement double (ramifié) d'une courbe elliptique E avec C de genre $g \geq 2$. Si on note τ l'involution qui échange les deux feuillets, on pose alors

$$Y = C \times C \times C / < \tau \times \tau \times \tau > \text{ et } A = E \times E \times E$$

et on note X une désingularisation de Y : elle est projective de type général. De plus, l'application naturelle $X \longrightarrow Y \longrightarrow A$ montre que X est génériquement fini sur A (qui est aussi la variété d'Albanese de X). On a donc $\alpha d(X) = 3$ et X est également de type π_1-général. On peut alors appliquer le théorème 4.3.2 :

$$\text{pour } i \in \{0,1,2\},\ H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^i_{\widetilde{X}}) = 0$$

et le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah montre que

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) = \chi_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) = \chi(X, K_X) = 0$$

(cette dernière égalité étant établie dans [EL97, ex. 1.13, p. 250]).

Question 4.3.1
A quelle(s) condition(s) une variété de type général et de type π_1-général vérifie-t-elle

$$H_2^0(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) \neq 0\,?$$

Dans [Gro91], M. Gromov a isolé une classe de variétés répondant à la question 4.3.1.

Définition 4.3.1
Une variété kählérienne compacte X est dite kähler-hyperbolique si elle peut être munie d'une métrique kählérienne ω qui est de plus $\tilde{d}$-bornée, c'est-à-dire que le relèvement $\widetilde{\omega}$ de ω au revêtement universel $\widetilde{X}$ de X vérifie

$$\widetilde{\omega} = d\eta$$

avec η une 1-forme bornée sur $\widetilde{X}$ (pour $\widetilde{\omega}$).

Illustrons cette définition par quelques exemples : une variété X dont le revêtement universel $\widetilde{X}$ est un domaine borné symétrique de $\mathbb{C}^n$ est kähler-hyperbolique, de même, toute variété kählérienne homotopiquement équivalente à une variété de courbure sectionnelle négative est kähler-hyperbolique (par exemple, la surface de Mostow-Siu [MS80]) ; toute sous-variété d'une variété kähler-hyperbolique l'est encore. On peut citer un dernier exemple ne relevant pas *a priori* des catégories ci-dessus : les surfaces de Kodaira (surfaces admettant une submersion sur une courbe dont les modules des fibres varient) sont kähler-hyperboliques mais leurs revêtements universels ne sont pas des domaines bornés symétriques de $\mathbb{C}^2$. En effet, si S est une telle surface, son revêtement universel $\widetilde{S}$ n'est biholomorphe ni à la boule unité de $\mathbb{C}^2$ ni au bi-disque (par un calcul direct, on a $c_1^2/c_2 \neq 2$ et 3). Or, ce sont les deux seuls domaines bornés symétriques de dimension 2 (à isomorphismes près). On peut en revanche remarquer que $\widetilde{S}$ est biholomorphe à un ouvert borné de $\mathbb{C}^2$ (en appliquant par exemple [Gri71, lem. 6.2]) dont le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\widetilde{S})$ est discret (d'après un théorème de A. Nadel [Nad90, th. 0.2, p.194]).

Proposition 4.3.1
Une variété kähler-hyperbolique est de type π_1-général. En fait, si X est kähler-hyperbolique, $\widetilde{X}$ n'admet aucun sous-ensemble analytique compact.

Démonstration :
Si $Z \subset \widetilde{X}$ est un sous-ensemble analytique compact de dimension $p > 0$, on a

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{\omega}}(Z) = \int_Z \widetilde{\omega}^p = 0$$

puisque $\widetilde{\omega}$ est exacte. $\widetilde{X}$ ne possède donc pas de sous-ensemble analytique compact de dimension positive. □

Dans [Gro91], M. Gromov montre que la cohomologie L^2 de $\widetilde{X}$ est réduite à sa partie de dimension n :

Proposition 4.3.2 (th. 2.5, p. 283 [Gro91])
Si X est kähler-hyperbolique, les espaces de cohomologie L^2 de $\widetilde{X}$ vérifient :

$$\mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\widetilde{X}) \neq 0 \Longleftrightarrow p+q = \dim(X).$$

L'annulation pour $p+q \neq \dim(X)$ repose sur le théorème de Lefschetz difficile ; en revanche, la non-annulation pour $p+q = \dim(X)$ est obtenue en utilisant une version "tordue" du théorème de l'indice L^2. En particulier, comme

$$\mathcal{H}^{n,0}_{(2)}(\widetilde{X}) \simeq H^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}),$$

le fait d'être kähler-hyperbolique est bien une condition suffisante à l'existence de formes canoniques L^2 sur le revêtement universel (et apporte donc une réponse partielle à la question 4.3.1).

Finalement, on peut résumer les propriétés des variétés kähler-hyperboliques dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 (M. Gromov)
Soit X une variété kähler-hyperbolique. On a alors

1. *$\widetilde{X}$ ne porte aucun sous-ensemble analytique compact (en particulier, X est de type π_1-général) mais admet au moins une forme canonique L^2.*
2. *X est projective avec K_X ample.*

Remarque 4.3.2
La conjecture de Shafarevich 2.1.1 prédit donc, en particulier, que le revêtement universel d'une variété kähler-hyperbolique doit être Stein.

Démonstration :
Le point 1 résulte des propositions 4.3.1 et 4.3.2. D'autre part, l'utilisation des séries de Poincaré associées à une forme canonique L^2 montre que le fibré canonique est *big* : X est de type général donc en particulier projective. Si K_X n'était pas *nef*, il existerait (d'après les travaux de S. Mori) une courbe rationnelle sur X ce qui est exclu puisque une telle courbe se relèverait sur $\widetilde{X}$. Le fibré canonique est ainsi *big* et *nef* et mK_X est donc globalement engendré pour m assez grand. A nouveau, si l'application pluricanonique Φ_{mK_X} n'est pas un plongement (pour $m >> 1$), on en déduit l'existence d'une courbe rationnelle (on pourra consulter [Kol95, p. 147-148] pour ce dernier argument). □

En petite dimension, on peut apporter des réponses plus précises à la question 4.3.1 ; cela résulte du théorème de l'indice L^2 d'Atiyah et des annulations adéquates de certains termes apparaissant dans les indices en question.

Proposition 4.3.3
Soit S une surface de type général et de type π_1-général. Le revêtement universel de S porte alors une forme canonique L^2 :

$$H^0_{(2)}(\widetilde{S}, K_{\widetilde{S}}) \neq 0.$$

Démonstration :

Comme l'énoncé est birationnel, on peut supposer la surface S minimale. Soit donc S une surface minimale de type général. La formule de Noether et l'inégalité de Miyaoka-Yau donnent :

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{c_1(S)^2 + c_2(S)}{12} \geq \frac{1}{9} c_1(S)^2 > 0.$$

D'autre part, comme $\gamma d(S) = 2$, on sait (lemme 4.2.1 et théorème 4.3.1) que :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}) = h^1_{(2)}(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}) = 0.$$

Le théorème de l'indice L^2 s'écrit alors :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{S}, K_{\widetilde{S}}) = h^2_{(2)}(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}) = \chi^{(2)}(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}) = \chi(S, \mathcal{O}_S) > 0.$$

□

Proposition 4.3.4

Soit X une variété de dimension 3 avec K_X big *et* nef *et vérifiant $\gamma d(X) \geq 2$. Le revêtement universel de X porte alors une forme canonique L^2 :*

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) \neq 0.$$

Démonstration :

La démonstration est identique à celle ci-dessus. Cette fois, la caractéristique d'Euler de $\mathcal{O}_X$ est donnée par :

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \frac{1}{24} c_1(X) c_2(X).$$

A nouveau, l'inégalité de Miyaoka nous donne la majoration :

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) \leq -\frac{1}{72} c_1(X)^3 = -\frac{1}{72} \mathrm{Vol}(X) < 0.$$

Les annulations :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = h^1_{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0,$$

combinées au théorème de l'indice L^2 donnent :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, \Omega^2_{\widetilde{X}}) - h^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) = \chi^{(2)}(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) < 0.$$

Finalement, on a bien :

$$h^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) > 0.$$

□

Deuxième partie

Γ-réduction des variétés kählériennes compactes de dimension 3

Chapitre 5

Structures orbifoldes

Rappelons que la motivation principale de cette deuxième partie est de décrire la Γ-réduction des variétés kählériennes compactes de dimension 3 de façon aussi précise que possible. Or, comme la proposition 2.5.1 traite le cas des variétés vérifiant $\gamma d(X) \leq 1$ et comme la condition $\gamma d(X) = 3$ correspond à $\gamma_X = \mathrm{id}_X$, il nous reste à comprendre la situation $\gamma d(X) = 2$: la Γ-réduction est donc une application $X \longrightarrow S$ de X vers une surface. Comme les fibres de cette application sont les sous-variétés de X dont le groupe fondamental devient (presque) trivial dans celui de X, on est en droit de s'attendre à ce que la surface S capture l'essentiel de l'information sur $\pi_1(X)$. Comme il est maintenant bien connu, la considération des fibres multiples de $X \longrightarrow S$ est indispensable pour bénéficier d'une information précise sur la structure de la fibration.

5.1 Notion de base orbifolde

On considère une fibration $f : X \longrightarrow Y$ entre variétés complexes compactes. Suivant [Cam04b], on peut définir les diviseurs de multiplicités de f : on note $|\Delta|$ la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 du lieu des points de Y au dessus desquels f n'est pas submersive. Si D est une des composantes de $|\Delta|$, on a :

$$f^*(D) = \sum_k m_k(f, D) D_k + R,$$

où R est un diviseur f-exceptionnel (c'est à dire $f(R)$ est de codimension au moins 2 dans Y) et D_k les composantes irréductibles de $f^*(D)$ qui s'envoient surjectivement sur D. Si Δ_j désigne une composante irréductible de $|\Delta|$, on pose alors :

$$m_j = \inf_k \{m_k(f, \Delta_j)\} \quad \text{et} \quad m_j^* = \operatorname*{pgcd}_k \{m_k(f, \Delta_j)\}$$

m_j^* est la multiplicité classique de f le long de Δ_j ; bien entendu, m_j^* divise m_j. Finalement, les $\mathbb{Q}$-diviseurs de multiplicités (classique et non-classique) sont :

$$\Delta^*(f) = \sum_j (1 - \frac{1}{m_j^*})\Delta_j \quad \text{et} \quad \Delta(f) = \sum_j (1 - \frac{1}{m_j})\Delta_j$$

Définition 5.1.1
Le couple $(Y/\Delta(f))$ s'appelle la base orbifolde de la fibration f (resp. $(Y/\Delta^*(f))$ est la base orbifolde au sens classique de f).

Comme on ne souhaite pas nécessairement se rappeler que la donnée (Y/Δ) provient d'une fibration, on pose plus généralement :

Définition 5.1.2
Une orbifolde (kählérienne) est la donnée d'un couple (Z/Δ) où Z est une variété kählérienne compacte et Δ un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur Z de la forme :

$$\Delta = \sum_{j\in J}(1-\frac{1}{n_j})\Delta_j \quad \textit{avec } n_j \textit{ des entiers } \geq 2.$$

Il est maintenant nécessaire d'étendre la définition des diviseurs de multiplicités de f au cadre orbifolde ; c'est-à-dire quand l'espace total X est lui-même muni d'une structure orbifolde (X/H) avec $H = \sum_{j\in J}(1-\frac{1}{n_j})H_j$:
on reprend les notations ci-dessus et si D' est un diviseur premier de X, on note $m(D', H)$ la multiplicité de D' dans H : si $D' = H_j$ alors $m(D', H) = n_j$ et $m(D', H) = 1$ si D' n'est pas une composante irréductible du support de H. Pour D un diviseur premier de Y, la décomposition :

$$f^*(D) = \sum_k m_k(f, D)D'_k + R$$

(avec R f-exceptionnel) nous permet de définir des multiplicités tenant compte de la présence de H :

$$m_H(D) = \inf_k(m_k(f, D)m(D'_k, H)) \quad m^*_H(D) = \mathrm{pgcd}_k(m_k(f, D)m(D'_k, H))$$

et donc de poser :

$$\Delta(f, H) = \sum_{D\subset Y}(1-\frac{1}{m_H(D)})D \quad \text{et} \quad \Delta^*(f, H) = \sum_{D\subset Y}(1-\frac{1}{m^*_H(D)})D,$$

les sommes ne portant que sur un nombre fini de diviseurs premiers de Y.

Définition 5.1.3
$(Y/\Delta(f, H))$ est la base orbifolde de la fibration

$$f : (X/H) \longrightarrow Y$$

(resp. $(Y/\Delta^*(f, H))$ est la base orbifolde au sens classique).

Une mise en garde est ici nécessaire : si (X/H) est déjà la base orbifolde d'une application $g : Z \longrightarrow X$ (*i.e.* si $H = \Delta(g)$), alors il existe sur Y deux structures orbifoldes : $(Y/\Delta(f, H))$ et $(Y/\Delta(f \circ g))$. En général, ces deux structures sont différentes ; on pourra se reporter à [Cam04b, prop. 1.30, p. 523] (et plus généralement la section 1.6, ibid) pour une étude comparée de ces deux structures orbifoldes.

5.2 Fibré canonique orbifolde et dimension de Kodaira

Soit (X/Δ) une orbifolde (kählérienne) ; on souhaite définir une notion adéquate de fibré canonique et de dimension de Kodaira prenant en considération la présence du diviseur Δ.

Définition 5.2.1
Le fibré canonique de l'orbifolde (X/Δ) est le $\mathbb{Q}$-diviseur :

$$K_{(X/\Delta)} = K_X + \Delta.$$

On pose alors naturellement :

$$\kappa(X/\Delta) = \kappa(X, K_{(X/\Delta)}) = \kappa(X, K_X + \Delta).$$

L'invariant $\kappa(X/\Delta)$ est parfaitement défini puisque, Δ étant un $\mathbb{Q}$-diviseur, $m(K_X+\Delta)$ est à coefficients entiers pour m suffisamment divisible. Remarquons de plus que

$$\kappa(X/\Delta) \geq \kappa(X) \quad \text{(effectivité de } \Delta)$$

et que $\kappa(X/\Delta)$ est un invariant birationnel :

Proposition 5.2.1
si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme birationnel entre variétés lisses munies de diviseurs orbifoldes Δ' et Δ et si $f_*(\Delta') = \Delta$ alors $\kappa(X'/\Delta') = \kappa(X/\Delta)$.

On peut également définir une dimension de Kodaira pour une fibration $f : X \longrightarrow Y$ qui tienne compte des fibres multiples. La fibration f munit en effet Y d'une structure orbifolde $(Y/\Delta(f))$ et on peut alors considérer sa dimension de Kodaira : $\kappa(Y/\Delta(f))$. Pour obtenir un invariant birationnel, il faut cependant raffiner quelque peu cette première idée comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.2.2 (théorème 1.8, p. 511 [Cam04b])
Considérons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

dans lequel u et v sont des modifications propres, alors on a :

$$\kappa(Y/\Delta(f \circ u)) = \kappa(Y/\Delta(f)) \quad et \quad \kappa(Y'/\Delta(f')) \leq \kappa(Y/\Delta(f)).$$

Modifier X ne change donc pas la valeur de $(Y/\Delta(f))$ mais modifier la base peut faire chuter la dimension de Kodaira de la base orbifolde. On pourra consulter [Cam04b] (exemple 1.11, p. 512) : l'inégalité dans la proposition ci-dessus peut être stricte. On est donc conduit à envisager la définition suivante :

Définition 5.2.2
Si $f : X \longrightarrow Y$ une fibration, on pose :

$$\kappa(f) = inf_{f' \sim f}(\kappa(Y'/\Delta(f'))).$$

La notation $f' \sim f$ signifie que l'on considère les modèles biméromorphes de f (comme dans la proposition ci-dessus). Avec cette définition, $\kappa(f)$ est clairement un invariant birationnel.

Définition 5.2.3
Une fibration $f : X \longrightarrow Y$ avec $\dim(Y) > 0$ *est dite de type général si*

$$\kappa(f) = \dim(Y).$$

En adaptant les techniques de Y. Kawamata et E.Viehweg, on peut montrer que la dimension de Kodaira est additive dans les fibrations de type général :

Théorème 5.2.1 (corollaire 4.7, p. 566 [Cam04b])
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration de type général et de fibre générale F, on a alors :

$$\kappa(X) = \kappa(F) + \dim(Y).$$

Le théorème d'additivité orbifolde est en fait bien plus général puisque l'espace total X de la fibration peut également être muni d'une structure orbifolde (X/H) mais, dans ce contexte, il faut faire des hypothèses plus fortes sur la fibration f elle-même (et pas seulement sur un des ces représentants). En effet, le fait d'avoir à considérer un modèle biméromorphe de $f : (X/H) \longrightarrow Y$ peut changer la valeur de $\kappa(X/H)$ et l'énoncé ci-dessus n'est donc pas transposable immédiatement (voir cependant [Cam04b, th. 4.2, p. 565] pour un énoncé précis).

Pour finir, rappelons quelques éléments à propos de la classe des variétés spéciales introduites dans [Cam04b].

Définition 5.2.4
Une variété kählérienne compacte X est dite spéciale *si elle n'admet aucune fibration de type général.*

Le théorème d'additivité orbifolde 5.2.1 montre que les variétés X vérifiant $\kappa(X) = 0$ sont spéciales. De même, les variétés rationnellement connexes sont spéciales [Cam04b, th. 3.22, p. 549].
Dans la théorie de la classification, les variétés spéciales sont en quelque sorte à l'opposé du type général mais il s'avère que la combinaison (orbifolde) de ces deux classes suffit à décrire la classe des variétés kählériennes compactes. En effet, la réduction du coeur décompose une variété kählérienne compacte en sa partie spéciale et sa partie de type général (au sens orbifolde) :

Théorème 5.2.2 ([Cam04b])
Soit X une variété kählérienne compacte non-spéciale. Il existe une unique fibration (à équivalence birationnelle près)

$$c_X : X \longrightarrow C(X)$$

vérifiant :

1. *les fibres (générales) de c_X sont spéciales,*
2. *c_X est de type général.*

La fibration c_X s'appelle le coeur *de X.*

Au niveau du groupe fondamental, la classe des variétés spéciales revêt une importance particulière (au moins conjecturalement).

Conjecture 5.2.1 (Conjecture d'abélianité)
Si X est une variété spéciale, $\pi_1(X)$ est presque-abélien.

Pour plus de détails sur les variétés spéciales, on renvoie de façon systématique à [Cam04b].

5.3 Groupes fondamentaux orbifoldes

On va montrer que les multiplicités classiques sont particulièrement bien adaptées à l'étude des groupes fondamentaux. En effet, si F désigne la fibre générique (lisse) de f, la fibration $f : X \longrightarrow Y$ donne naissance à une suite :

$$\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \longrightarrow 1$$

(où $i : F \hookrightarrow X$ est l'injection de F dans X) qui est exacte en Y : la fibre F de f étant connexe, le morphisme $f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est surjectif. Mais celle-ci n'est en général pas exacte en X. Cependant, $\pi_1(F)_X = \mathrm{Im}(\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X))$ est toujours un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ contenu dans le noyau de f_*. En particulier, on a un morphisme surjectif :

$$f_* : \pi_1(X)/\pi_1(F)_X \twoheadrightarrow \pi_1(Y).$$

Comme on souhaite tenir compte de la base orbifolde de f, on définit[1] :

$$\pi_1(Y/\Delta^*(f)) = \pi_1(Y \setminus |\Delta|)/\langle\!\langle \gamma_j^{m_j^*} \rangle\!\rangle$$

où γ_j désigne un petit lacet autour de D_j et $\langle\!\langle \gamma_j^{m_j^*} \rangle\!\rangle$ le sous-groupe normal de $\pi_1(Y \setminus |\Delta|)$ engendré par les γ_j. Il est à noter qu'on a toujours un morphisme surjectif (application directe du théorème de Van Kampen) :

$$\pi_1(Y/\Delta^*(f)) \twoheadrightarrow \pi_1(Y).$$

Remarque 5.3.1
La définition de $\pi_1(Y/\Delta^*(f))$ ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix des lacets γ_j (en fait $\langle\!\langle \gamma_j^{m_j^*} \rangle\!\rangle$ ne dépend pas du choix des γ_j).

La structure orbifolde est un premier palliatif du défaut de surjectivité du morphisme f_* ci-dessus comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.3.1
Il existe un morphisme surjectif naturel :

$$f^* : \pi_1(Y/\Delta^*(f)) \longrightarrow \pi_1(X)/\pi_1(F)_X.$$

[1] à isomorphisme près, ce groupe est indépendant du point base.

La démonstration de cette proposition est reportée en appendice (annexe B). Au cours de celle-ci, on constate que ce sont les diviseurs f-exceptionnels qui nous empêchent de définir une application $f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y/\Delta^*(f))$. Pour éviter ces phénomènes gênants, on est donc amené à considérer des représentants particuliers d'une fibration donnée :

Définition 5.3.1 (voir section 1.1.3, p. 507 [Cam04b])
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration holomorphe ; f est dite nette *si il existe une modification propre $u : X \longrightarrow X'$ (avec X' lisse) telle que tout diviseur (sur X) f-exceptionnel soit également u-exceptionnel.*

La proposition suivante montre que toute fibration admet un représentant net.

Proposition 5.3.2 (lemme 1.3, p. 507 [Cam04b])
Si $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ est une fibration holomorphe alors il existe une fibration nette $f : X \longrightarrow Y$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X_0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ Y & \xrightarrow{v} & Y_0 \end{array}$$

dans lequel u et v sont des applications holomorphes biméromorphes.

On peut par exemple obtenir f par applatissement et désingularisation (théorèmes d'Hironaka et Raynaud). Dans le cas des fibrations nettes, le résultat 5.3.1 est renforcé de manière significative :

Proposition 5.3.3
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration nette, le morphisme f^* est en fait un isomorphisme ; on a donc une suite exacte :

$$\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y/\Delta^*(f)) \longrightarrow 1.$$

Comme la propriété vérifiée par les fibres de la Γ-réduction est justement la finitude du groupe $\pi_1(F)_X$, on en déduit :

Corollaire 5.3.1
Si X est une variété kählérienne compacte et $\gamma : X \longrightarrow \Gamma(X)$ un modèle net de la Γ-réduction de X de diviseur de multiplicités (classiques) Δ^*, le morphisme

$$\gamma_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\Gamma(X)/\Delta^*)$$

est surjectif et de noyau fini.

Question 5.3.1
L'application γ_* ci-dessus devient-elle un isomorphisme de groupes pour un revêtement étale fini adéquat de X ?

Là encore, on renvoie le lecteur à l'appendice (annexe B) pour la démonstration de la proposition 5.3.3. La signification de cette proposition est la suivante : $\pi_1(Y/\Delta^*(f))$ n'est pas un invariant birationnel de la fibration f ; par contre, une fois que l'on a rendu la fibration f nette (en éclatant suffisamment X et Y), la quantité $\pi_1(Y/\Delta^*(f))$ se "stabilise" pour devenir isomorphe à $\pi_1(X)/\pi_1(F)_X$.

Ce dernier énoncé (et en particulier le corollaire 5.3.1) doit nous convaincre (si ce n'était pas déjà fait) de la nécessité de prendre en compte la structure orbifolde sur la base Y d'une fibration (au sens classique pour les problèmes concernant les groupes fondamentaux). Il y a cependant une contre-partie (et non des moindres) au fait de considérer ces groupes fondamentaux orbifoldes : ils sont en général très difficiles à calculer (on pourra consulter [Nam87] pour quelques exemples significatifs).

5.4 Courbes orbifoldes

A titre d'exemple, considérons la situation des courbes. Une courbe orbifolde est un couple (C/Δ) où Δ est un ensemble de points $\delta_j \in C$ avec multiplicités $m_j \geq 2$. Notons N le cardinal de Δ. On peut décrire simplement la dimension de Kodaira d'une telle orbifolde : en effet, le calcul de $\kappa(C/\Delta)$ se ramène à celui du degré de $K_{(C/\Delta)}$. Ce dernier est donné par :

$$\deg(K_{(C/\Delta)}) = \deg(K_C + \Delta) = 2g - 2 + \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}).$$

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \kappa(C/\Delta) = -\infty & \Longleftrightarrow & \deg(K_{(C/\Delta)}) < 0 \\ \kappa(C/\Delta) = 0 & \Longleftrightarrow & \deg(K_{(C/\Delta)}) = 0 \\ \kappa(C/\Delta) = 1 & \Longleftrightarrow & \deg(K_{(C/\Delta)}) > 0 \end{array} \right.$$

Le cas elliptique est assez simple à décrire. Si (C/Δ) est une courbe orbifolde vérifiant $\kappa(C/\Delta) = 0$, on est alors dans l'une des situations suivantes :

(i) C est elle-même elliptique et $\Delta = \emptyset$,

(ii) $C \cong \mathbb{P}^1$ et il n'y a que quatre structures orbifoldes sur $\mathbb{P}^1$: $\Delta = (2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$ et $(2,2,2,2)$ (la notation signifiant que l'on ne s'intéresse qu'aux multiplicités des points du support de Δ).

De même, les courbes rationnelles orbifoldes sont décrites par les structures suivantes (la courbe sous-jacente est nécessairement une courbe rationnelle au sens usuel) :

(i) $(\mathbb{P}^1, \Delta)$ avec $N \leq 2$,

(ii) $(\mathbb{P}^1, (2,2,m))$ pour tout entier $m \geq 2$,

(iii) $(\mathbb{P}^1, (2,3,n))$ avec $n = 3$, 4 ou 5.

Pour décrire les groupes fondamentaux des courbes orbifoldes, on utilisera le résultat suivant (bien évidemment propre à la dimension 1) :

Proposition 5.4.1 (prop. 1.2.12, p. 26 [Nam87])
Soit (C/Δ) une courbe orbifolde avec soit $g(C) \geq 1$ soit $C \simeq \mathbb{P}^1$ et $|\Delta| \geq 3$; il existe alors un revêtement galoisien fini $\widetilde{C} \longrightarrow C$ qui ramifie exactement le long de Δ.

Si $(\mathbb{P}^1/\Delta)$ est une courbe orbifolde avec $N \leq 2$, le groupe fondamental $\pi_1(C/\Delta)$ est soit trivial soit fini cyclique. Dans les autres cas, on peut appliquer la proposition 5.4.1 et on a donc :

Proposition 5.4.2
Soit (C/Δ) une courbe orbifolde.

1. *Si $\kappa(C/\Delta) = -\infty$ alors $\pi_1(C/\Delta)$ est fini*[2].
2. *Si $\kappa(C/\Delta) = 0$ alors $\pi_1(C/\Delta)$ est commensurable au groupe $\mathbb{Z}^{\oplus 2}$.*
3. *Si $\kappa(C/\Delta) = 1$ alors $\pi_1(C/\Delta)$ est commensurable à un groupe $\pi_1(C_g)$ où C_g désigne une courbe de genre $g \geq 2$.*

L'énoncé 5.4.1 combiné avec la proposition 5.3.3 (une fibration sur une courbe n'a pas de diviseur exceptionnel donc est nécessairement nette) donne le résultat suivant :

Théorème 5.4.1 (théorème A.C.5, p. 690 [Cam98])
Si $f : X \longrightarrow C$ est une fibration sur une courbe, alors il existe un revêtement fini $\pi : X' \longrightarrow X$ de X tel que la factorisation de Stein de $f \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & \overline{C} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

donne une suite exacte :

$$\pi_1(F') \longrightarrow \pi_1(X') \longrightarrow \pi_1(C') \longrightarrow 1$$

(où F' désigne la fibre générale de f').

Il semble assez difficile de généraliser ceci en dimension supérieure ; toutefois, la construction d'un contre-exemple (*i.e.* une fibration $f : X \longrightarrow Y$ qu'on ne pourrait pas rendre exacte au niveau des groupes fondamentaux par des revêtements étales finis) constituerait un résultat intéressant (il nous a été impossible d'en produire un). Ceci est à mettre en parallèle avec la question 5.3.1.

[2] $\pi_1(C/\Delta)$ est en fait isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, A_4, S_4 ou A_5.

Chapitre 6

Surfaces orbifoldes (non de type général)

Dès la dimension 2, la situation devient beaucoup plus complexe. Les singularités introduites par le biais du diviseur orbifolde étant en grande partie responsables de cette complexité, on introduit la classe suivante :

Définition 6.0.1
Une surface orbifolde (S/Δ) *est dite* klt *si elle satisfait aux conditions suivantes :*

1. S *est normale avec* $K_S + \Delta$ $\mathbb{Q}$*-Cartier,*
2. *si* $f : X \longrightarrow S$ *est une log-résolution*[1] *de* (S/Δ) *de diviseurs exceptionnels* E_j*, on a alors :*

$$K_X + f_*^{-1}(\Delta) = f^*(K_X + \Delta) + \sum_j a_j E_j$$

avec $a_j > -1$.

Si le diviseur Δ est déjà à croisements normaux (et si la surface S est lisse), la surface (S/Δ) est alors clairement *klt*.

Pour les surfaces orbifoldes *klt*, le théorème d'additivité 5.2.1 prend alors la forme suivante :

Théorème 6.0.2 (section 3.8 [Cam04b])
Soit (S/Δ) *une surface orbifolde klt et* $f : S \longrightarrow C$ *une fibration (de fibre* F*) sur une courbe de diviseur de multiplicités* $D_f = \Delta(f, \Delta)$*. Si* $\kappa(C/D_f) = 1$ *alors :*

$$\kappa(S/\Delta) = \kappa(F/\Delta) + 1.$$

Corollaire 6.0.1 (proposition 3.41, p. 560 [Cam04b])
Si (S/Δ) *est une surface orbifolde klt avec* $\kappa(S/\Delta) = 0$*, alors pour toute fibration* $f : S \longrightarrow C$ *vers une courbe, on a :*

$$\kappa(C/D_f) \leq 0.$$

[1] f est une application holomorphe birationnelle avec X lisse et le diviseur $Exc(f) + f^*(\Delta)$ est à croisements normaux.

Désormais, toutes les surfaces orbifoldes considérées seront *klt*. Pour décrire le groupe fondamental d'une telle surface, on aura besoin de l'analogue orbifolde de la proposition 5.3.3 :

Proposition 6.0.3
Si (S/Δ) est une surface orbifolde et si $f : (S/\Delta) \longrightarrow C$ est une fibration sur une courbe avec pour diviseur de multiplicités $D^* = \Delta^*(f, \Delta)$, on a alors une suite exacte :

$$\pi_1(F/\Delta) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S/\Delta) \xrightarrow{f_*} \pi_1(C/D^*) \longrightarrow 1 \ ,$$

où (F/Δ) désigne la restriction de la structure orbifolde à la fibre générale F.

La démonstration est une adaptation directe de celles des propositions précédentes au cadre orbifolde : il faut vérifier que tous les morphismes sont bien compatibles entre eux. Voir l'appendice (annexe B) pour plus de détails.

Nous allons maintenant essayer de décrire aussi précisément que possible la structure du groupe fondamental des surfaces orbifoldes (non de type général).

6.1 Surfaces orbifoldes réglées

On traite ici le cas d'une surface orbifolde (S/Δ) vérifiant $\kappa(S/\Delta) = -\infty$. Si $q(S) > 0$, S est alors réglée sur une courbe de genre strictement positif :

$$r : S \longrightarrow C.$$

Comme (S/Δ) est *klt*, on peut par exemple appliquer le progamme des modèles minimaux à (S/Δ) (voir par exemple [FM92]) pour constater que la fibre générale F de r a donc une structure orbifolde (F/Δ) avec $\kappa(F/\Delta) = -\infty$. La suite exacte orbifolde donne :

$$\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta) \longrightarrow \pi_1(C/D^*) \longrightarrow 1,$$

où D^* est le diviseur des multiplicités classiques de f. Or, d'après la proposition 5.4.2, $\pi_1(F/\Delta)$ est fini et, en appliquant le lemme A.0.2 de l'appendice, on en déduit que $\pi_1(S/\Delta)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe.

Si $q(S) = 0$, S est nécessairement rationnelle. En effet, comme

$$\kappa(S) \leq \kappa(S/\Delta) = -\infty,$$

on a $p_2(S) = 0$; le critère de Castelnuovo (critère (3.4), p. 252 [BHPVdV04]) nous permet alors d'affirmer que S est rationnelle. La conjecture suivante prédit la finitude du groupe fondamental $\pi_1(S/\Delta)$ dans cette situation.

Conjecture 6.1.1
Si (S/Δ) est une surface orbifolde klt avec S rationnelle et $-(K_S + \Delta)$ ample, alors $\pi_1(S/\Delta)$ est fini.

Finalement, en combinant cet énoncé **conjectural** avec la discussion ci-dessus, on obtient :

Proposition 6.1.1
Si (S/Δ) est une surface orbifolde klt vérifiant $\kappa(S/\Delta) = -\infty$, son groupe fondamental est

1. *ou bien commensurable à celui d'une courbe,*
2. *ou bien $\pi_1(S/\Delta) \cong \pi_1(S'/\Delta')$ où (S'/Δ') est une surface orbifolde klt avec S rationnelle et $-(K_{S'} + \Delta')$ ample, auquel cas la conjecture 6.1.1 prévoit que ce groupe est fini.*

6.2 Surfaces orbifoldes à fibré canonique trivial

Etudions maintenant le cas d'une orbifolde avec $\kappa(S/\Delta) = 0$. Une telle orbifolde est spéciale au sens de [Cam04b] et il est conjecturé [Cam04b, conj. 7.3, p. 596] que le groupe fondamental d'une telle orbifolde doit être presque-abélien (*i.e.* doit admettre un sous-groupe abélien d'indice fini). Nous allons maintenant montrer que cette conjecture se ramène (dans les cas des surfaces) à la conjecture 6.2.1 ci-dessous.

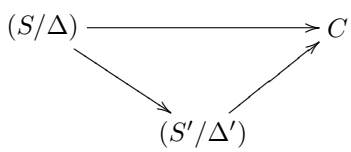
Pour cela remarquons que $\kappa(S) \leq \kappa(S/\Delta) = 0$. On a donc $\kappa(S) = -\infty$ ou $\kappa(S) = 0$:

(1) Le cas $\kappa(S) = 0$ est traité dans [Cam04a] (corollaire 6.7, p. 347). Donnons un aperçu de la démonstration : à revêtement étale fini près, le modèle minimal de S est un tore ou une surface $K3$ et comme $\kappa(S) = \kappa(S/\Delta) = 0$, le diviseur Δ est exceptionnel et la contraction de ce diviseur est une orbifolde riemannienne S' dont la première classe de Chern est nulle. En adaptant les techniques usuelles au cadre orbifolde, on peut montrer que S' admet une métrique (orbifolde) Ricci plate ce qui implique qu'elle admet un revêtement (orbifolde) fini qui est soit une surface $K3$ simplement connexe soit un tore. En particulier, $\pi_1(S/\Delta)$ est soit fini soit presque-abélien de rang 4.

(2) Dans le cas $\kappa(S) = -\infty$, on a le lemme suivant :

Lemme 6.2.1
Si (S/Δ) est une surface orbifolde avec $\kappa(S/\Delta) = 0$ et si S est réglée sur une courbe C de genre $g \geq 1$, alors $\pi_1(S/\Delta)$ est presque-abélien de rang 2 ou 4 et on a $g = 1$.

Démonstration :
On peut commencer par choisir un modèle minimal (*klt*) de la paire (S/Δ) (cf. [FM92]) et ainsi



Comme $\kappa(S'/\Delta') = \kappa(S/\Delta) = 0$ et comme $K_{(S'/\Delta')}$ est nef, il est numériquement trivial :

$$K_{S'} + \Delta' \equiv 0.$$

Notons alors F la fibre générale du réglage $S \longrightarrow C$ et D le diviseur orbifolde de $(S/\Delta) \longrightarrow C$. Le corollaire 6.0.1 implique que l'on a nécessairement :

$$\kappa(C/D) \leq 0.$$

Compte tenu du fait que $0 \leq \kappa(C) \leq \kappa(C/D) \leq 0$, on en déduit que C est nécessairement elliptique et que $D = \emptyset$: il n'y a donc pas de fibre multiple au sens des multiplicités *inf* et, *a fortiori*, au sens des multiplicités *pgcd* non plus. La suite exacte déduite de 6.0.3 s'écrit donc :

$$\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1.$$

Si F' désigne la fibre de $S' \longrightarrow C$, l'intersection de F' avec $K_{(S'/\Delta')}$ donne :

$$\deg((K_{S'} + \Delta')_{|F'}) = 0$$

et ainsi $\kappa(F/\Delta) = \kappa(F'/\Delta') = 0$: (F/Δ) est une courbe elliptique orbifolde.
Si l'image de $\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta)$ est finie, on peut appliquer le lemme A.0.1 et en déduire que $\pi_1(S/\Delta)$ est presque-abélien de rang 2.
Sinon, on est en mesure d'appliquer le théorème 6.3.1 de la section suivante : $\pi_1(S/\Delta)$ est donc commensurable à $\pi_1(F/\Delta) \times \mathbb{Z}^2$. Comme $\pi_1(F/\Delta)$ est lui-même presque-abélien de rang 2, on en déduit que $\pi_1(S/\Delta)$ est presque abélien de rang 4. □

En conclusion, la conjecture d'abélianité pour les surfaces orbifoldes vérifiant $\kappa(S/\Delta) = 0$ se réduit à la conjecture suivante

Conjecture 6.2.1
Si (S/Δ) est une orbifolde klt avec S rationnelle et $\kappa(S/\Delta) = 0$, alors $\pi_1(S/\Delta)$ est presque-abélien.

Proposition 6.2.1
Une surface orbifolde klt (S/Δ) avec $\kappa(S/\Delta) = 0$ a un groupe fondamental presque-abélien, sauf éventuellement si S est rationnelle (auquel cas la conjecture 6.2.1 affirme que $\pi_1(S/\Delta)$ est encore presque-abélien).

6.3 Surfaces orbifoldes elliptiques

On se propose ici de démontrer l'énoncé suivant :

Théorème 6.3.1
Soit (S/Δ) une surface orbifolde admettant une structure elliptique sur une courbe C c'est-à-dire une application holomorphe connexe $f : S \longrightarrow C$ dont la fibre générale F est une courbe vérifiant $\kappa(F/\Delta) = 0$. Supposons de plus que l'image du morphisme $\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta)$ soit infinie.
La fibration f est alors isotriviale.

La terminologie *isotriviale* est ici à prendre au sens suivant : les fibres orbifoldes génériques (F/Δ_F) lisses de $(S/\Delta) \longrightarrow C$ sont 2 à 2 isomorphes.

Définition 6.3.1
Deux courbes orbifoldes (C/D) et (C'/D') sont dites isomorphes si il existe un isomorphisme $\varphi : C \longrightarrow C'$ entre C et C' échangeant les points de D et D' et tel que la multiplicité de $\varphi(p)$ dans D' soit la même que celle de p dans D (pour tout $p \in |D|$).

Démonstration du théorème 6.3.1 :

Commençons par la remarque suivante : la propriété

$$|\mathrm{Im}(\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta))| = +\infty$$

est invariante par changement de base. En effet, si $C' \longrightarrow C$ est un revêtement (ramifié) de C, on en déduit une fibration :

$$\begin{array}{ccccc} S' & \xrightarrow{g} & S \times_C C' & \longrightarrow & S \\ & \searrow^{f'} & \downarrow & & \downarrow f \\ & & C' & \longrightarrow & C \end{array}$$

où g est une désingularisation du produit fibré et au niveau des groupes fondamentaux :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(F'/\Delta') & \longrightarrow & \pi_1(S'/\Delta') & \longrightarrow & \pi_1(C'/D') & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \pi_1(F/\Delta) & \longrightarrow & \pi_1(S/\Delta) & \longrightarrow & \pi_1(C/D) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où D et D' sont les diviseurs de multiplicités classiques de f et f' (pour ne pas alourdir les notations, l'exposant $*$ est momentanément abandonné). Comme F et F' sont les fibres générales de ces deux applications, $\pi_1(F'/\Delta') \longrightarrow \pi_1(F/\Delta)$ est injectif d'image d'indice fini. Un parcours rapide du diagramme montre alors que l'image de $\pi_1(F'/\Delta') \longrightarrow \pi_1(S'/\Delta')$ est infinie.

Traitons d'abord le cas classique où le diviseur Δ est vide. S est donc une surface elliptique dont le groupe fondamental de la fibre s'envoie de manière infinie dans $\pi_1(S)$ (en particulier $\gamma d(S) = 1 + \gamma d(C)$ d'après 2.4.2). Les arguments combinés de [FM94, th. 2.3, p. 158] et [BHPVdV04, III 18.2 et 18.3, p. 132] montrent que la fibration $S \longrightarrow C$ est isotriviale : en effet, la présence de fibres singulières dans la fibration $S \longrightarrow C$ entraînerait un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux (grâce à [FM94, th. 2.3, p. 158]) :

$$\pi_1(S) \xrightarrow{\sim} \pi_1(C)$$

ce qui est exclu par hypothèse. On a donc $\chi_{top}(S) = 0$ et les fibres de $S \longrightarrow C$ sont au plus elliptiques multiples lisses. Les propositions [BHPVdV04, III 18.2 et 18.3, p. 132] s'appliquent et montrent que la fibration est effectivement isotriviale.

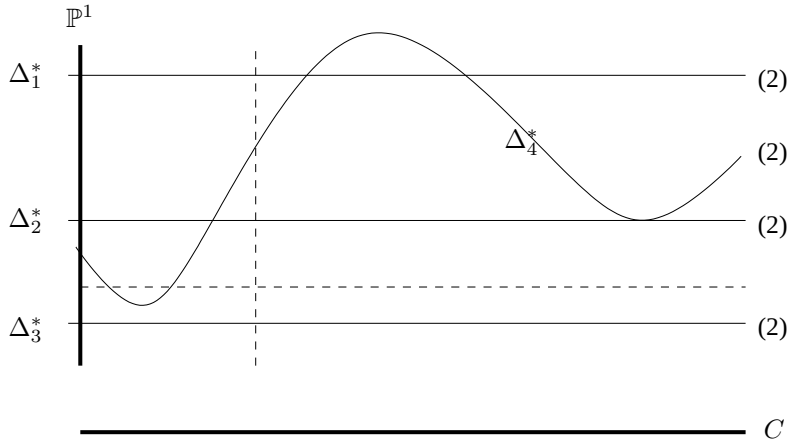
Si $\Delta \neq \emptyset$, la fibre générale (orbifolde) de $(S/\Delta) \longrightarrow C$ est de la forme $(\mathbb{P}^1, \Delta)$ et l'hypothèse $\kappa(\mathbb{P}^1, \Delta) = 0$ ne laisse la place qu'aux quatre possibilités suivantes (voir le chapitre 5) :

$$(\mathbb{P}^1, \Delta) = (\mathbb{P}^1/(2,3,6)),\ (\mathbb{P}^1/(2,4,4)),\ (\mathbb{P}^1/(3,3,3)) \text{ ou } (\mathbb{P}^1/(2,2,2,2)).$$

Si on oublie la structure orbifolde, S est alors (à transformation birationnelle près) géométriquement réglée sur C. On peut alors appliquer le Branched Covering Trick [BHPVdV04, th. 18.2, p. 56] aux composantes de Δ : un changement de base fini permet de se ramener au cas où les composantes irréductibles de Δ sont des sections de $S \longrightarrow C$. On a vu ci-dessus qu'un tel changement de base préserve l'hypothèse

$$\mathrm{Im}(\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta)) = +\infty.$$

Sur les fibres lisses F de $(S/\Delta) \longrightarrow C$ (les droites du réglage qui rencontrent Δ transversalement), on peut alors faire agir des homographies pour fixer 3 des points de $F \cap |\Delta|$ (par exemple en les envoyant sur 0, 1 et ∞). A transformation birationnelle près de S, on peut donc supposer que les 3 premières sections sont constantes : cela correspond exactement à l'isotrivialité dans les cas $(\mathbb{P}^1/(2,3,6))$, $(\mathbb{P}^1/(2,4,4))$ et $(\mathbb{P}^1/(3,3,3))$. Dans le dernier cas $(\mathbb{P}^1/(2,2,2,2))$, notons $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les 3 sections constantes et Δ_4 la composante restante :



Comme S est biméromorphe au produit $\mathbb{P}^1 \times C$, on a :

$$\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \times \mathrm{Pic}(C) \simeq \mathbb{Z} \times \mathrm{Pic}(C)$$

et $\mathrm{Pic}(C)$ est lui même une extension :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}(C) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

l'application $\mathrm{Pic}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}$ étant donnée par le degré. Or, les composantes Δ_i (pour $i = 1, 2, 3$) ont un degré nul sur $\mathbb{P}^1$ et elles sont de degré 1 sur C. Δ_4 est également de degré 1 sur C mais, *a priori*, elle a un certain degré d sur $\mathbb{P}^1$ (*a posteriori*, on aura $d = 0$). Le degré total de $|\Delta|$ (le support de Δ) dans $\mathrm{Pic}(S)$ est donc : $4 + d$. Si d est pair, le degré total de $|\Delta|$ est pair. Sinon, on pose $\Delta^+ = \Delta + \frac{1}{2}R$ où R est une fibre du réglage $S \longrightarrow C$. Le degré total de $|\Delta^+|$ est alors $4 + d + 1$ et devient donc pair. Adoptons également la notation Δ^+ dans le cas où d est pair. Comme $\mathrm{Pic}^0(C)$ est un groupe divisible (c'est une variété abélienne), on a donc :

$$\left|\Delta^+\right| \equiv 0[2] \quad \text{dans } \mathrm{Pic}(S).$$

On peut alors construire un revêtement double de S ramifié le long de $|\Delta^+|$ en appliquant par exemple [BHPVdV04, lemme 17.1, p. 55]. Si on note $S^+ \longrightarrow S$ ce revêtement, considérons $S^+ \longrightarrow C^+$ la factorisation de Stein de $S^+ \longrightarrow C$. La fibre générale E de $S^+ \longrightarrow C^+$ est alors un revêtement de $\mathbb{P}^1$ qui ramifie à l'ordre 2 au dessus de 4 points : E est donc une courbe elliptique. De plus, comme Δ^+ et Δ diffèrent au plus par une droite du réglage, leur restriction à la fibre générale F de $S \longrightarrow C$ est la même et on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(E) & \twoheadrightarrow & \pi_1(S^+) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(F/\Delta^+) & \twoheadrightarrow & \pi_1(S/\Delta^+) \\
\| & & \downarrow \\
\pi_1(F/\Delta) & \twoheadrightarrow & \pi_1(S/\Delta)
\end{array}$$

qui montre que l'image de $\pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(S^+)$ est nécessairement infinie. On peut alors appliquer la discussion faite au début de cette démonstration pour conclure à l'isotrivialité de $S^+ \longrightarrow C^+$. En redescendant à S, on en déduit que les fibres orbifoldes lisses (F/Δ) sont toutes isomorphes : ceci n'est possible que si la composante Δ_4 est constante. L'application $(S/\Delta) \longrightarrow C$ est donc isotriviale dans le sens fort suivant : à revêtement étale (au sens orbifolde) et à tranformation biméromorphe près, l'orbifolde (S/Δ) est un produit $(\mathbb{P}^1/\Delta) \times C$. □

Chapitre 7

Γ-réduction en dimension 3

Suite à l'analyse faite ci-dessus, nous pouvons décrire la Γ-réduction des variétés kählériennes compactes de dimension 3 et la relier aux fibrations classiques de la théorie de la classification (voir chapitre 3). Cependant, pour pouvoir traiter tous les cas, on s'appuiera sur les conjectures 6.1.1 et 6.2.1 que nous rappelons ici :

Conjecture 6.1.1 *Si (S/Δ) est une surface orbifolde klt avec S rationnelle et $-(K_S + \Delta)$ ample, alors $\pi_1(S/\Delta)$ est fini.*

Conjecture 6.2.1 *Si (S/Δ) est une surface orbifolde klt avec S rationnelle et $\kappa(S/\Delta) = 0$, alors $\pi_1(S/\Delta)$ est presque-abélien.*

On peut alors résumer la structure de la Γ-réduction en dimension 3 par le théorème suivant.

Théorème 7.0.2
Soit X une variété kählérienne compacte de dimension 3. ***Sous réserve de la validité des conjectures 6.1.1 et 6.2.1****, la Γ-réduction de X est alors donnée, à revêtement étale fini et transformation birationnelle près, par la liste suivante :*

1. *si $\gamma d(X) \leq 1$, on a : $\gamma_X \cong \alpha s_X$;*
2. *si $\gamma d(X) = 2$ et si γ_X n'est pas de type général au sens des multiplicités classiques*[1]*, on a également $\gamma_X \cong \alpha s_X$ (si la base $\Gamma(X)$ de la Γ-réduction n'est pas une surface rationnelle, la conclusion $\gamma_X \cong \alpha s_X$ est vérifiée inconditionnellement) ;*
3. *si $\gamma d(X) = 2$ et si γ_X est de type général (au sens classique et, a fortiori au sens des multiplicités inf), alors :*
   - *(i) si $\kappa(X) = 3$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de X telle que les fibres de γ_X sont des courbes de genre majoré par*[2] *$C\mathrm{Vol}(X)$;*
   - *(ii) si $\kappa(X) = 2$, $\gamma_X \cong J_X$;*
   - *(ii′) si $\kappa(X) = 2$ et si X n'est pas projective, $\gamma_X \cong J_X \cong a_X$;*

[1] c'est uniquement dans cette situation que l'on fait usage des conjectures sus-mentionnées
[2] le volume de X est ici celui de son diviseur canonique (voir la définition 7.3.1).

(*iii*) *si* $\kappa(X) < 2$, *alors* $\kappa(X) = -\infty$ *et* $\gamma_X \cong r_X$ *(en particulier* X *est uniréglée) ;*

4. *si* $\gamma d(X) = 3$ *(dans ce cas* $\gamma_X = id_X$*), alors* $\kappa(X) \geq 0$ *et* $J_X : X \longrightarrow J(X)$ *est une submersion en tores sur* $J(X)$ *de type général et de type* π_1*-général.*

Dans l'énoncé du théorème 7.0.2, on rappelle que la notation a_X désigne la réduction algébrique de X (voir [Uen75] pour plus de détails).

En ce qui concerne les différentes assertions de 7.0.2, précisons ce qui peut l'être dans l'immédiat. Le point 1 est clair : si $\gamma d(X) = 1$, après revêtement étale fini (cf proposition 5.4.1), la base $\Gamma(X)$ de la Γ-réduction de X est une courbe de genre au moins 1 qui doit alors être (isomorphe à) l'image de X par son application d'Albanese. Le point 2 va résulter de l'étude des surfaces orbifoldes (non de type général) faite dans le chapitre précédent. Hormis (*i*) (voir ci-dessous pour les notions utilisées), le point 3 se réduit quant à lui à l'additivité orbifolde 5.2.1 comme nous allons le constater dans un instant. Le point 4 répond par l'affirmative à la conjecture 3.3.1 dans le cas de la dimension 3.

Démonstration des points 3-(*ii*) et 3-(*iii*) :

On se place donc dans la situation où $\gamma_X : X \longrightarrow \Gamma(X)$ est une fibration sur une surface et telle que l'orbifolde $(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X))$ soit de type général. Comme $\Delta(\gamma_X) \geq \Delta^*(\gamma_X)$, on a

$$\kappa(\Gamma(X)/\Delta(\gamma_X)) \geq \kappa(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X))$$

et la fibration γ_X est de type général (on aura pris soin de choisir un modèle suffisamment préparé, par exemple net). Le théorème d'additivité orbifolde 5.2.1 s'applique et, si F désigne la fibre générale de γ_X, on a donc :

$$\kappa(X) = \kappa(F) + \dim(\Gamma(X)) = \kappa(F) + 2.$$

Si $\kappa(X) = 3$, on en déduit $\kappa(F) = 1$ et F est une courbe de genre au moins 2.
Si $\kappa(X) = 2$, on a donc

$$\kappa(F) = 0 \text{ et } \dim(\Gamma(X)) = \kappa(X)$$

et cette propriété caractérise la fibration d'Iitaka-Moishezon de X. Si de plus X est non-projective, on a

$$2 \geq a(X) \geq \kappa(X) = 2$$

donc $a(X) = 2$. Les fibres de la réduction algébrique (ici des courbes) sont spéciales (voir [Cam04b, th. 2.39, p. 540]) : ce sont donc des courbes rationnelles ou elliptiques. Le cas rationnel est immédiatement exclu car $\kappa(X) = 2$ et les fibres de a_X sont donc elliptiques. A nouveau, on constate que ce sont les fibres de J_X.
Si $\kappa(X) < 2$, l'égalité ci-dessus montre que $\kappa(X) = \kappa(F) = -\infty$ et F est donc une courbe rationnelle. La variété X est alors uniréglée et, comme le quotient rationnel r_X domine la Γ-réduction, on en déduit que ces deux fibrations sont équivalentes. □

Signalons également le phénomène suivant propre à la petite dimension :

Proposition 7.0.1
Soit X une variété kählérienne compacte de dimension 3 avec $\kappa(X) \leq 0$. L'invariant $\gamma d(X)$ ne dépend alors que du groupe fondamental de X : si X' est une variété kählérienne compacte de dimension 3 avec $\kappa(X') = \kappa(X)$ et dont le groupe fondamental $\pi_1(X')$ est commensurable à celui de X, alors $\gamma d(X') = \gamma d(X)$.

Démonstration :
En effet, si $\kappa(X) = -\infty$, le théorème 7.0.2 (point 4) montre que

$$\gamma d(X) = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

De plus, en appliquant [CP00, th. 8.1] dans le cas $\kappa(X) = 0$, on constate que

$$\gamma d(X) = 0, 1 \text{ ou } 3.$$

(en fait, par [CP00], la conjecture 3.3.2 est vraie en dimension 3). Comme la proposition 2.5.1 assure que $\gamma d(X) \leq 1$ est une propriété du groupe fondamental, ceci conclut la démonstration. □

7.1 Variétés de dimension 3 de type π_1-général

On apporte ici quelques éclaircissements sur le point 4 du théorème 7.0.2. Notons tout de même que la démonstration de ce point constitue essentiellement le contenu de [CZ05]. Plus précisément :

Théorème 7.1.1 ([CZ05])
Soit X une variété kählérienne compacte de dimension 3 et de type π_1-général. On a alors $\kappa(X) \geq 0$ et de plus, à revêtement étale fini près, X est biméromorphe

1. *soit à $\mathrm{Alb}(X) \times_{\mathrm{Alb}(J(X))} J(X)$,*
2. *soit à une submersion en surfaces abéliennes sur une courbe de genre au moins 2.*

En particulier, toujours à revêtement étale fini près, la fibration d'Iitaka-Moishezon $J_X : X \longrightarrow J(X)$ de X est (biméromorphe à) une submersion en tores et $J(X)$ est de type général et de type π_1-général.

Dans la situation $\kappa(X) = 0$, le théorème ci-dessus affirme que X admet un revêtement étale fini qui est biméromorphe à un tore.

Pour exclure le cas $\kappa(X) = -\infty$, on peut par exemple s'appuyer sur la

Proposition 7.1.1 ([CP00])
Une variété kählérienne compacte X de dimension 3 vérifiant $\kappa(X) = -\infty$ est soit uniréglée soit simple.

Dans le cas projectif, on sait évidemment que X est uniréglée d'après les travaux de Y. Kawamata, Y. Miyaoka, S. Mori et V. Shokurov sur la conjecture d'abondance en dimension 3. Rappelons qu'une variété complexe compacte X est dite simple si les seuls sous-ensembles analytiques qui passent par un point général $x \in X$ sont $\{x\}$ et X.

Proposition 7.1.2
Une variété kählérienne compacte X de dimension 3 vérifiant $\kappa(X) = -\infty$ est soit uniréglée, soit de groupe fondamental fini (et dans ce cas $\gamma d(X) = 0$).

Démonstration :
Dans le cas où X est simple, on sait que $a(X) = 0$ et $q(X) = 0$ ou $\dim(X)$. Dans le cas $q(X) = 3$, X est biméromorphe à un tore (voir [Uen75, cor. 13.7, p. 159]) ce qui contredit $\kappa(X) = -\infty$. Le théorème 2.8 de [Cam94] (qui est une conséquence assez directe du théorème de comparaison 4.2.2) s'applique et montre $\pi_1(X)$ est fini (de cardinal au plus 3). □

Comme corollaire immédiat de cette proposition, on obtient la positivité de $\kappa(X)$ pour une variété X (de dimension 3) de type π_1-général.

L'analyse menée dans [CZ05] permet également d'obtenir une réponse positive à la conjecture d'Iitaka en dimension 3.

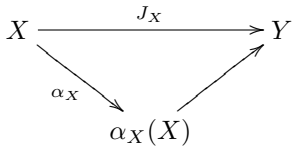
Théorème 7.1.2
Une variété kählérienne compacte X de dimension 3 dont le revêtement universel est isomorphe à $\mathbb{C}^3$ est revêtue par un tore.

Démonstration :
En effet, une telle variété est spéciale d'après [Cam04b, th. 8.2, p. 598] (variante orbifolde du théorème de Kobayashi-Ochiai). Or, le théorème 7.1.1 affirme en particulier que la base de J_X est de type général ; la variété X étant spéciale, on a nécessairement $\dim(J(X)) = 0$ et X est donc (à revêtement étale fini près) biméromorphe à un tore. En utilisant le fait que le revêtement universel de X est $\mathbb{C}^3$, on montre alors facilement que $\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ ne peut pas avoir de fibre de dimension positive et que l'application d'Albanese de X est donc un isomorphisme (voir par exemple [Cam04b, lemme 7.12, p. 598]). □

Comme de coutume, le théorème 7.1.1 n'apporte rien lorsque $\kappa(X) = 3$. En revanche, si $\kappa(X) = 1$ ou 2, on peut décrire de façon exhaustive l'application d'Albanese de X. On commence par remplacer X par un revêtement étale fini adéquat (fourni ci-dessus) ; le diagramme (dans lequel Y remplace $J(X)$ pour alléger les notations)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J_X} & Y \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ \mathrm{Alb}(X) & \xrightarrow[\alpha_J]{} & \mathrm{Alb}(Y) \end{array} \tag{7.1}$$

est alors cartésien (dans la catégorie birationnelle). Si $\dim(Y) = \kappa(X) = 1$, le diagramme 7.1 se factorise de la façon suivante :



avec $\alpha_X(X) \longrightarrow Y$ à fibres connexes. Si $\alpha d(X) = \dim(\alpha_X(X)) = 1$, on a donc $\alpha_X(X) \cong Y$. Si $\alpha d(X) = 2$, la surface $S = \alpha_X(X)$ est alors elliptique *via* l'application $S \longrightarrow Y$. Comme S est de type π_1-général, cette fibration est isotriviale (c'est même un fibré localement analytiquement trivial de fibre elliptique). Pour $y \in Y$, on a alors une application $X_y \longrightarrow S_y$ induite entre les fibres de $X \longrightarrow Y$ et $S \longrightarrow Y$. Comme c'est une application entre tores, ses fibres sont en particulier lisses. Toutes les fibres de $X \longrightarrow S$ sont donc des courbes elliptiques lisses. On peut résumer ceci dans la

Proposition 7.1.3
Soit X kählérienne compacte de dimension 3 vérifiant $\gamma d(X) = 3$ et $\kappa(X) = 1$. Quitte à remplacer X par un revêtement étale fini, $J(X)$ est une courbe de genre au moins 2 (en particulier $\alpha d(X) > 0$) et la fibration d'Albanese αs_X de X est alors décrite par l'une des situations suivantes :

(i) *Si $\alpha d(X) = 1$, αs_X est une submersion en 2-tores sur une courbe lisse de genre ≥ 2.*

(ii) *Si $\alpha d(X) = 2$, αs_X est une fibration elliptique isotriviale sur une surface de type π_1-général et de dimension de Kodaira 1.*

(iii) *Si $\alpha d(X) = 3$, X est génériquement finie sur son image par α_X ($\alpha s_X = id_X$).*

On aura en fait besoin dans la suite de la précision suivante :

Proposition 7.1.4
Soit X kählérienne compacte de dimension 3 vérifiant $\gamma d(X) = 3$ et $\kappa(X) = 1$. A revêtement étale fini près, X admet une submersion en tores sur une courbe

$$J : X \longrightarrow C$$

vérifiant $g(C) = g(X)$ (voir le chapitre 2 pour la définition et les propriétés du genre) et, si T désigne la fibre de J,

$$1 \longrightarrow \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow 1.$$

Démonstration :
On considère le revêtement fourni par le théorème 7.1.1 : la fibration d'Iitaka-Moishezon est alors une submersion sur une courbe C de genre $g(C)$ au moins 2. Comme $g(X) \geq 2$, on peut alors considérer une fibration $f : X \longrightarrow C'$ avec $g(C') = g(X)$ (il en existe d'après le théorème 2.5.1). La dimension de Kodaira de la fibre F de f vérifie alors

$$\kappa(X) = \kappa(F) + 1$$

et on déduit donc que $\kappa(F) = 0$. La fibration f est donc la fibration d'Iitaka-Moishezon de X et on en conclut que $C = C'$. La suite exacte d'homotopie de la fibration J donne directement la décomposition

$$1 \longrightarrow \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow 1$$

car $\pi_2(C) = 0$ (on peut se passer ici du théorème 2.4.1). □

Dans la situation $\dim(Y) = \kappa(X) = 2$, la submersion $J_X : X \longrightarrow Y$ est isotriviale et, quitte à remplacer X et Y par des revêtements étales finis adéquats, on peut supposer que $q(X) = q(Y) + 1$ (et donc $\alpha d(X) = \alpha d(Y) + 1$). Si $q(Y) = 0$, X est alors biméromorphe au produit $Y \times \mathrm{Alb}(X)$. Sinon, on a :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ \alpha_X(X) & \longrightarrow & \alpha_Y(Y) \end{array}$$

Si $\alpha d(Y) = 1$, les fibres (qui sont connexes) de $\alpha_Y : Y \longrightarrow \alpha_Y(Y)$ sont nécessairement des courbes de genre au moins 2 (car Y est de type général). Comme X s'identifie au produit fibré $\alpha_X(X) \times_{\alpha_Y(Y)} Y$ (théorème 7.1.1, les fibres de $\alpha_X : X \longrightarrow \alpha_X(X)$ sont également des courbes de genre au moins 2. De la même façon que ci-dessus, on a :

Proposition 7.1.5
Soit X kählérienne compacte de dimension 3 vérifiant $\gamma d(X) = 3$ et $\kappa(X) = 2$. La structure de X est donnée (à revêtement étale fini près) par l'un des points ci-dessous :

(i) *si $\tilde{q}(X) = 1$, X est (à revêtement étale fini près) biméromorphe au produit d'une courbe elliptique E et d'une surface S de type général et de type π_1-général (l'application d'Albanese du revêtement en question est isotriviale). En particulier, on a un scindage du groupe fondamental de X :*

$$\pi_1(X) = \pi_1(S) \times \pi_1(E)$$

avec $\tilde{q}(S) = 0$.

(ii) *si $\widetilde{\alpha d}(X) = 2$, αs_X est alors une fibration sur une surface de type π_1-général avec pour fibre générale une courbe de genre ≥ 2.*

(iii) *si $\widetilde{\alpha d}(X) = 3$, X est alors génériquement fini sur son image par α_X.*

7.2 Γ-réduction non de type général

On démontre ici le point 2 du théorème 7.0.2 concernant les variétés X (de dimension 3) avec $\gamma d(X) = 2$ et dont la Γ-réduction n'est pas de type général au sens des multiplicités classiques.

Proposition 7.2.1 (sous réserve des conjectures 6.1.1 et 6.2.1)
Soit X une variété kählérienne de dimension 3 vérifiant $\gamma d(X) = 2$ et soit

$$\gamma_X : X \longrightarrow \Gamma(X)$$

sa Γ-réduction avec $\Delta^*(\gamma_X)$ le diviseur des multiplicités (au sens classique) de γ_X ; on a alors :

$$\kappa(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X)) \geq 0.$$

Si on suppose de plus que $(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X))$ n'est pas de type général, il existe alors un revêtement étale fini $\widetilde{X} \longrightarrow X$ dont la Γ-réduction est biméromorphe à la fibration d'Albanese de $\widetilde{X}$:

$$\alpha s_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \longrightarrow \alpha s(\widetilde{X}).$$

Pour démontrer la proposition 7.2.1, on va tout d'abord montrer l'assertion concernant la positivité de la dimension de Kodaira de l'orbifolde $(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X))$ (étape au cours de laquelle interviendra la conjecture 6.1.1). Pour traiter la deuxième partie de l'énoncé, on distingue deux cas selon les valeurs de $\kappa(S/\Delta)$: $\kappa(S/\Delta) = 0$ ou $\kappa(S/\Delta) = 1$. Dans le premier cas, le groupe fondamental de X doit être presque-abélien (conjecture 6.2.1) ; dans le deuxième cas, la structure elliptique de $(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X))$ suffit pour assurer $\widetilde{\alpha d}(X) = 2$.

Pour alléger les notations, on adopte les conventions suivantes :

$$\gamma_X \ : \ X \longrightarrow S$$

désignera un modèle holomorphe net de γ_X et on posera $\Delta = \Delta^*(\gamma_X)$. Le fait que la Γ-réduction de X ne soit pas de type général s'écrira alors simplement :

$$\kappa(S/\Delta) \leq 1.$$

Si $\Gamma \subset X$ désigne la fibre générale de γ_X, la proposition 5.3.3 assure que la suite d'homotopie orbifolde

$$1 \longrightarrow \pi_1(\Gamma)_X \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta) \longrightarrow 1 \tag{7.2}$$

est exacte. On rappelle ici que la propriété fondamentale de γ_X est justement la finitude de $\pi_1(\Gamma)_X$.

Démonstration :

étape 1 : positivité de $\kappa(S/\Delta)$

Si $\kappa(S/\Delta) = -\infty$, la proposition 6.1.1 montre alors que $\pi_1(S/\Delta)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe (en admettant la conjecture 6.1.1). Le lemme A.0.2 de l'appendice combiné à la suite exacte (7.2) montre que $\pi_1(X)$ lui-même doit alors être commensurable au groupe fondamental d'une courbe, *i.e.* $\gamma d(X) = 1$. Cette contradiction montre que $\kappa(S/\Delta) \geq 0$ et, comme on a supposé $\kappa(S/\Delta) \leq 1$, seules les possibilités $\kappa(S/\Delta) = 0$ et $\kappa(S/\Delta) = 1$ restent à envisager.

étape 2 : cas $\kappa(S/\Delta) = 0$

Dans cette situation, la proposition 6.2.1 montre (en admettant la conjecture 6.2.1) que $\pi_1(S/\Delta)$ est presque-abélien ; par l'intermédiaire du lemme A.0.1 de l'appendice, on en déduit que $\pi_1(X)$ est également presque-abélien. Le corollaire 3.2.2 (dans sa version abélienne qui est autrement plus simple) montre que la Γ-réduction est alors donnée par la fibration d'Albanese (au moins pour un revêtement étale fini) de X.

étape 3 : cas $\kappa(S/\Delta) = 1$

Comme $\kappa(S/\Delta) = 1$, la fibration d'Iitaka-Moishezon associée à $K_{(S/\Delta)}$ confère à (S/Δ) une structure de surface elliptique au sens orbifolde $(S/\Delta) \longrightarrow C$: la fibre générale F de cette application intersecte transversalement les composantes horizontales de Δ et la restriction de Δ à F est une courbe orbifolde (F/Δ) avec $\kappa(F/\Delta) = 0$. De plus, l'image du morphisme $\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta)$ est nécessairement infinie : si ce n'était pas le cas, la suite exacte orbifolde (fournie par la proposition 6.0.3)

$$\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta) \longrightarrow \pi_1(C/D) \longrightarrow 1$$

combinée avec (7.2) et le lemme A.0.2 montrerait que $\pi_1(X)$ serait commensurable au groupe fondamental d'une courbe, ce qui encore une fois est contraire à l'hypothèse $\gamma d(X) = 2$ (D désigne ci-dessus le diviseur des multiplicités de $(S/\Delta) \longrightarrow C$).

On en donc en position pour appliquer le théorème 6.3.1 : la fibration elliptique $(S/\Delta) \longrightarrow C$ est isotriviale. Il existe donc un revêtement (ramifié) C' de C tel que le produit fibré $S' = S \times_C \overline{C}$ donne un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S' & \longrightarrow & (S/\Delta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C' & \longrightarrow & C \end{array}$$

dans lequel $S' \longrightarrow (S/\Delta)$ est étale (*i.e.* ramifie le long de Δ) et la fibration elliptique $S' \longrightarrow C'$ est biméromophe à un produit. En particulier, $\alpha d(S') = 2$. Si on construit le revêtement étale X' correspondant pour X, on aura donc $\alpha d(X') \geq \alpha d(S') = 2$ et finalement : $\gamma d(X') = \alpha d(X') = 2$. La proposition 3.2.2 montre que la Γ-réduction de X' est effectivement biméromorphe à la fibration d'Albanese de X'. Ceci conclut la démonstration de la proposition 7.2.1. □

On peut également donner l'énoncé inconditionnel suivant :

Proposition 7.2.2
Soit X une variété kählérienne compacte de dimension 3 vérifiant $\gamma d(X) = 2$. On suppose de plus qu'une (au moins) des hypothèses ci-dessous est satisfaite :

1. $\kappa(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X)) = 1$
2. *$\Gamma(X)$ n'est pas une surface rationnelle et $(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X))$ n'est pas de type général.*

La fibration γ_X est alors équivalente (à revêtement étale fini près) à la fibration d'Albanese de X.

7.3 Majoration du volume des fibres de certaines applications

Pour compléter la démonstration du théorème 7.0.2, il nous reste à montrer le point 3-(i) apparaissant dans l'énoncé. Celui-ci stipule que l'on peut majorer le genre des fibres de la Γ-réduction de X lorsque X est de type général et γ_X elle-même est de type général par un terme de la forme $C\mathrm{Vol}(X)$ où C est une constante universelle indépendante de X. Ceci n'a en fait absolument rien à voir avec la Γ-réduction et s'applique dans une situation bien plus générale.

Après quelques brefs rappels sur la notion de volume, on va présenter deux résultats de majoration du volume des fibres d'une application, le premier dans le cas classique, le second s'inscrivant dans le cadre orbifolde.

Définition 7.3.1
Le volume d'une variété kählérienne compacte Z de dimension n est défini par :

$$\mathrm{Vol}(Z) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{h^0(Z, mK_Z)}{m^n/n!}.$$

On a donc $\mathrm{Vol}(Z) > 0$ *si et seulement si* Z *est projective de type général.*

D'après l'invariance des plurigenres [Siu02], le volume est invariant lors d'une déformation projective (en fait [Siu98] suffit pour l'énoncé ci-dessous).

Théorème 7.3.1
Soit n *un entier positif. Il existe alors une constante* $C_n > 0$ *ne dépendant que de* n *telle que :*
pour toute variété X *de type général avec* $\dim(X) = n$ *et toute fibration (nécessairement) presque-holomorphe* $f : X \dashrightarrow Y$ *sur une variété* Y *de type général, le volume de la fibre générale* F *de* f *vérifie la majoration suivante :*

$$\mathrm{Vol}(F) \leq C_n \, Vol(X).$$

La remarque faite avant l'énoncé du théorème 7.3.1 montre que le fait de parler du volume de la fibre générale a bien un sens. On peut également remarquer qu'une fibration méromorphe vers une variété de type général est automatiquement presque-holomorphe (il suffit en fait que le fibré canonique de la base soit pseudo-effectif).

Démonstration :
Si d désigne la dimension de Y, l'inégalité de [Kaw07] s'écrit alors

$$\frac{d!(n-d)!}{n!}\mathrm{Vol}(X) \geq \mathrm{Vol}(Y)\mathrm{Vol}(F).$$

Or, on sait d'après [Tak06] qu'il existe une constante universelle $v_d > 0$ telle que $\mathrm{Vol}(Y) \geq v_d$. En posant

$$C_n = \max_{1 \leq d \leq n-1} \left(\frac{d!(n-d)!}{v_d n!} \right),$$

on obtient bien une majoration de la forme

$$\mathrm{Vol}(F) \leq C_n \mathrm{Vol}(X).$$

□

La démonstration de l'inégalité de [Kaw07] repose sur la semi-positivité des images directes (dûe à E. Viehweg). En remplaçant ces résultats de semi-positivité par leurs homologues orbifoldes, on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 7.3.1
Soit $f : X \longrightarrow Y$ *une fibration de fibre générale* F *et* Δ *le diviseur de multiplicités de* f*. Si* X *et* f *sont de type général, on a alors :*

$$\frac{\mathrm{Vol}(X)}{n!} \geq \frac{\mathrm{Vol}(Y/\Delta)}{d!} \frac{\mathrm{Vol}(F)}{(n-d)!}$$

avec $n = \dim(X)$ *et* $d = \dim(Y)$.

Démonstration :
On fixe H et L des diviseurs amples sur Y et F ainsi que des entiers $m_1 > m_0$ tels que :

– $m_0 K_{(Y/\Delta)}$ et $m_1 K_{(Y/\Delta)}$ soient entiers et $m_0 K_{(Y/\Delta)} - H$ effectif,
– $m_1 K_F - L \geq 0$ et $\mathrm{Vol}(L/m_1) > \mathrm{Vol}(F) - \epsilon$.

On peut réaliser un tel choix quitte à modifier X grâce au théorème d'approximation de Fujita [Fuj94]. On décompose alors le fibré $kmm_1 K_X$ (pour des valeurs de m et k que l'on fixera dans la suite) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} kmm_1 K_X = {} & kmm_1 K_{X|(Y/\Delta)} + km(m_1 - m_0) f^* K_{(Y/\Delta)} \\ & + kmf^*(m_0 K_{(Y/\Delta)} - H) + kmf^* H. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de projection et le fait que $m_0 K_{(Y/\Delta)} - H$ est effectif, on obtient l'inégalité

$$p_{kmm_1}(X) \geq p_{k(m_1 - m_0)m}(Y) h^0(Y, S^m S^k(f_*(m_1 K_{X|(Y/\Delta)}) \otimes \mathcal{O}_Y(H))). \quad (7.3)$$

Or, d'après [Cam04b, th. 4.11, p. 567], le faisceau $\mathcal{F} = f_*(m_1 K_{X|(Y/\Delta)})$ est faiblement positif et il existe donc un entier k tel que $S^k(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(H))$ soit engendré par ses sections globales au point générique de Y. La dimension de l'espace des sections globales est donc au moins égale au rang de la fibre du faisceau en un point générique de Y et on a donc pour m assez grand :

$$\begin{aligned} h^0(Y, S^m S^k(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(H))) &\geq rang\, S^m S^k(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(H)) \\ &\geq \dim(S^m S^k H^0(F, m_1 K_F)) \\ &\geq \dim(S^m S^k H^0(F, L)) \\ &\geq h^0(F, kmL). \end{aligned} \quad (7.4)$$

En reportant (7.4) dans (7.3) et en utilisant le fait que le volume de L/m_1 approche celui de F, on en déduit :

$$h^0(X, kmm_1 K_X) \geq (\mathrm{Vol}(Y/\Delta) - \epsilon) \frac{(k(m_1 - m_0)m)^d}{d!} (\mathrm{Vol}(F) - 2\epsilon) \frac{(km_1 m)^{n-d}}{(n-d)!}.$$

En choisissant m_1 assez grand, cette inégalité devient :

$$h^0(X, kmm_1 K_X) \geq (\mathrm{Vol}(Y/\Delta) - 2\epsilon)(\mathrm{Vol}(F) - 2\epsilon) \frac{(km_1 m)^n}{d!(n-d)!}.$$

qui, en passant à la limite, donne la minoration annoncée sur le volume de X. □

Dans le cas du théorème 7.0.2, on dispose d'une fibration sur une orbifolde de type général. Comme la minoration du volume dans le cas orbifolde n'est connue qu'en dimension 2, on doit se restreindre à cette situation.

Théorème 7.3.2 ([AM04])
Il existe une constante $\epsilon_0 > 0$ telle que toute surface orbifolde klt (S/Δ) de type général vérifie :

$$\mathrm{Vol}(S/\Delta) \geq \epsilon_0.$$

Rappelons (voir définition 5.2.3) qu'une fibration est de type général si sa base orbifolde (au sens des multiplicités *inf*) est de type général (au moins pour un bon modèle de la dite fibration).

Théorème 7.3.3
Soit n un entier positif. Il existe alors une constante $C'_n > 0$ ne dépendant que de n telle que :
pour toute variété (lisse) X de type général avec $\dim(X) = n$ et toute fibration (nécessairement) presque-holomorphe $f : X \dashrightarrow S$ de type général vers une surface, le volume de la fibre générale F de f vérifie la majoration suivante :

$$\mathrm{Vol}(F) \leq C'_n \mathit{Vol}(X).$$

Là encore, par [Cam04b, th. 2.22, p. 534], une fibration de type général est automatiquement presque-holomorphe.

Démonstration :
La démonstration du théorème 7.3.1 s'applique *mutatis mutandis* : la proposition 7.3.1 ci-dessus joue le rôle de l'inégalité sur les volumes de [Kaw07] et la minoration universelle du volume des variétés de type général ([Tak06]) est remplacée par le théorème 7.3.2 ci-dessus. □

Remarquons que dans le cas des courbes, le volume est donné par

$$\mathrm{Vol}(C) = 2g(C) - 2$$

ce qui explique la majoration du point 3-(i) de l'énoncé du théorème 7.0.2.

Chapitre 8

Invariance par déformation

8.1 Conjecture générale et cas des surfaces

Pour une variété kählérienne compacte X, la Γ-réduction mesure en quelque sorte l'interaction entre la topologie et la structure complexe de X. Si on considère une déformation (*i.e.* submersion propre et connexe) kählérienne de la variété X, le type topologique est fixé alors qu'au contraire la structure complexe varie (en général). La question de l'invariance par déformation de la Γ-dimension est posée dans [Kol95, 18.4, p. 184] et étudiée dans [dOKR02] (notament la propriété d'être de type π_1-général[1]). Il est alors naturel de conjecturer :

Conjecture 8.1.1
La Γ-dimension est invariante par déformation (de variétés kählériennes).

Rappelons quelques définitions dont nous aurons besoin par la suite (dans ces définitions, les termes *famille* et *déformation* sont strictement interchangeables) :

Définition 8.1.1
Une famille de variétés kählériennes est un triplet $(\mathcal{X}, B, \pi)$ dans lequel $\mathcal{X}$ et B sont des variétés complexes et

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$$

une submersion holomorphe propre dont les fibres sont des variétés kählériennes connexes (et compactes par propreté de π).

Définition 8.1.2
Une famille $(\mathcal{X}, B, \pi)$ est dite projective *si il existe un fibré en droites hermitien (A, h) (avec h lisse) sur $\mathcal{X}$ dont la forme de courbure est strictement positive sur toutes les fibres de la famille (on dit aussi que $\mathcal{X}$ est polarisée par A).*

En particulier, si B est Stein et si φ est une fonction d'exhaustion strictement-*psh* sur B, on peut toujours se ramener au cas où la forme de courbure de h est

[1] l'article [dOKR02] étudie notament la situation où une fibre de la famille a un revêtement universel Stein. Le volume des sous-variétés compactes apparaissant éventuellement dans les revêtements universels des fibres voisines y est examiné en détails.

strictement positive **sur $\mathcal{X}$** (et pas seulement dans les directions verticales) en remplaçant h par

$$e^{-\pi^*(\chi\circ\varphi)}h$$

où $\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante adéquate.

La conjecture 8.1.1 est évidemment vérifiée pour les courbes mais, fait remarquable, le théorème de Siu 2.5.1 sur les morphismes vers les courbes permet de démontrer à peu de frais un énoncé similaire pour le cas des surfaces.

Proposition 8.1.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ une famille de surfaces kählériennes au dessus d'une base B (connexe). La fonction

$$b\,(\in B) \mapsto \gamma d(\mathcal{X}_b)$$

est alors constante sur B. En d'autres termes, la Γ-dimension est invariante au cours d'une déformation de surfaces kählériennes.

En fait, on peut énoncer un principe général :

Lemme 8.1.1
Si $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ est une déformation de variétés kählériennes au dessus de B (connexe) et si on a $\gamma d(\mathcal{X}_0) \geq 2$ pour un point $0 \in B$, on peut alors affirmer :

$$\forall\, b \in B,\ \gamma d(\mathcal{X}_b) \geq 2.$$

Démonstration du lemme 8.1.1 et de la proposition 8.1.1 :
La proposition 2.5.1 montre en effet que la propriété $\gamma d \leq 1$ ne dépend que du groupe fondamental, qui est fixé dans une déformation (une famille de variétés complexes est toujours localement topologiquement triviale d'après le lemme d'Ehresmann). Ainsi, si on a $\gamma d(\mathcal{X}_b) \leq 1$ pour un point $b \in B$, on en déduit que $\gamma d(\mathcal{X}_b) \leq 1$ pour tout point b dans B. Ceci montre le lemme 8.1.1.

Pour les déformations de surfaces, la proposition 2.5.1 ou plus particulièrement son corollaire 2.5.1 montre que la Γ-dimension est un invariant du groupe fondamental. On conclut alors comme ci-dessus. □

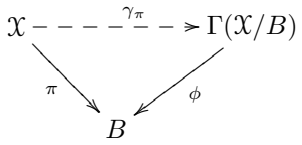
Le reste du chapitre est dévolu à l'étude du comportement de la Γ-dimension au cours d'une déformation. Après avoir rappelé quelques propriétés de la Γ-réduction pour les familles kählériennes, les résultats du chapitre précédent seront mis à profit pour étudier l'invariance par déformation dans le cas des familles de variétés de dimension 3.

8.2 Semi-continuité de la Γ-dimension

Rappelons tout d'abord que la construction de la Γ-réduction peut se faire en famille mais seulement génériquement :

Proposition 8.2.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ une famille de variétés kählériennes compactes. Il existe alors

un espace complexe normal $\Gamma(\mathcal{X}/B)$ *et un diagramme :*



dans lequel ϕ *est surjectif et telle que pour* $b \in B$ *général, la restriction de* γ_π *à* $\mathcal{X}_b$ *:*

$$\gamma_{\pi|\mathcal{X}_b} : \mathcal{X}_b \dashrightarrow \Gamma(\mathcal{X}/B)$$

soit la Γ*-réduction de* $\mathcal{X}_b$*.*

Démonstration :
On applique les théorèmes 2.2 et 2.7 de [Cam04c]. □

Comme la plupart des énoncés qui suivent sont de nature locale sur la base de la famille, rappelons que cette structure locale est assez simple : on dispose d'une métrique "relativement kählérienne".

Proposition 8.2.2
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ *une famille de variétés kählériennes compactes et* b *un point de* B*. Il existe alors un voisinage (que l'on peut supposer contractile)* U *de* b *dans* B *et* ω *une métrique hermitienne sur* $X = \mathcal{X}_U = \pi^{-1}(U)$ *qui se restreint en une métrique kählérienne sur chaque fibre de la famille* $\pi : X \longrightarrow U$ *(i.e.* $d\omega_{|X_u} = 0$ *pour tout* $u \in U$*).*

Démonstration :
On peut facilement s'en convaincre en examinant la démonstration du théorème de Kodaira-Spencer sur les petites déformations des variétés kählériennes, par exemple celle proposée dans [Voi02, th. 9.23, p. 222]. On y construit la métrique pour montrer que les fibres voisines de $\mathcal{X}_b$ sont kählériennes. □

Dans cette situation, les propriétés de compacité relative des cycles de [Lie78] restent valables comme le montre la proposition suivante.

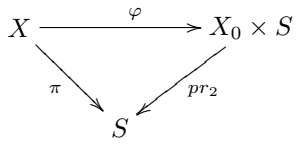
Proposition 8.2.3
Si $\pi : X \longrightarrow U$ *est une famille de variétés kählériennes compactes comme ci-dessus (*U *est contractile et* X *est muni d'une métrique* ω *qui se restreint en une métrique kählérienne sur chaque fibre), les composantes irréductibles de* $\mathcal{C}(X/U)$ *sont alors* U*-propres pour la projection*

$$\pi_* : \mathcal{C}(X/U) \longrightarrow U.$$

Rappelons que sans l'hypothèse contractile, la propriété de compacité relative ci-dessus est mise en défaut comme le montre l'exemple de A. Fujiki [Fuj79]. Nous redonnons la démonstration de cette proposition faute de références dans la littérature existante.

Démonstration :

Comme U est contractile, le lemme d'Ehresmann (voir [Voi02, prop. 9.3, p. 209]) montre alors que la fibration est topologiquement triviale :



où φ est un difféomorphisme. En particulier, les algèbres de cohomologie $H^\bullet(X_u)$ (pour $u \in U$) sont canoniquement isomorphes à $H^\bullet(X)$. Si ω_u désigne la restriction de ω à la fibre X_u, ω_u définit une classe dans $H^2(X_u)$ (car elle est d-fermée) et donc elle définit également une classe $[\omega_u] \in H^2(X)$.

Soit maintenant $(C_t)_{t\in T}$ une famille analytique de n-cycles (relatifs) paramétrée par un espace irréductible T et supposons que

$$\forall\, t \in T,\ u(t) = \pi_*(C_t) \in K,$$

avec K un compact de U. Le volume est alors donné par :

$$\mathrm{Vol}_\omega(C_t) = \int_{C_t} \omega^n = \int_{C_t} (\omega_{u(t)})^n = [C_t] \wedge [\omega_{u(t)}]^n$$

où le produit d'intersection est calculé (par exemple) dans $H^\bullet(X)$. Mais lorsque u décrit K, $[\omega_u]$ décrit une partie bornée de $H^2(X)$ (par compacité de K) et il est bien connu que dans, une famille irréductible, la classe d'homologie est fixée : on en déduit que le volume de la famille $\mathrm{Vol}_\omega(C_t)$ est borné. D'autre part, les supports des cycles C_t sont contenus dans le compact $\pi^{-1}(K)$. On peut alors appliquer [Lie78] et conclure que la famille $(C_t)_{t\in T}$ est contenue dans un compact de $\mathcal{C}(X)$; comme $\mathcal{C}(X/U)$ est fermé dans $\mathcal{C}(X)$, $(C_t)_{t\in T}$ est contenue dans un compact de $\mathcal{C}(X/U)$ et cela montre la propreté de π_* en restriction aux composantes irréductibles. □

On peut maintenant préciser la valeur générale de la Γ-réduction au cours d'une déformation ; la propriété de propreté ci-dessus nous permet en effet d'affirmer :

Théorème 8.2.1

Si $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ est une famille de variétés kählériennes compactes et si d désigne la valeur générique la Γ-dimension de la famille π, alors

$$d = \max_{b\in B} \left(\gamma d(\mathcal{X}_b)\right).$$

Démonstration :

Notons n la dimension relative de $\mathcal{X}$ sur B et fixons b un point de B et U un voisinage contractile (par exemple un polydisque) de b comme dans la proposition 8.2.2. On notera encore $\mathcal{X}$ la restriction de la famille π au dessus de U. Comme l'espace $\mathcal{C}_{n-d}(\mathcal{X}/U)$ n'a qu'un nombre au plus dénombrable de composantes irréductibles, il en existe une que l'on notera $\mathfrak{C}$ qui contient les fibres de $\gamma_{\mathcal{X}_u}$ pour u général dans U. Or, d'après la proposition 8.2.3, l'application

$$\pi_* : \mathfrak{C} \longrightarrow U$$

est propre donc en particulier fermée. D'autre part, $\pi_*(\mathfrak{C})$ contient le sous-ensemble dense des points généraux ci-dessus ; on en déduit donc que π_* est surjective. Au dessus du point b, $\mathfrak{C}_b = \pi_*^{-1}(b)$ est un sous-ensemble analytique de $\mathcal{C}_{n-d}(\mathcal{X}_b)$ dont une composante irréductible au moins doit être couvrante (pour $\mathcal{X}_b$). Les (composantes irréductibles des) cycles $(Z_t)_{t\in T}$ de dimension $n-d$ paramétrés par cette composante irréductible vérifient donc

$$\mathrm{Im}(\pi_1(\hat{Z}_t) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{X}_b)) < +\infty.$$

Si on admet le fait ci-dessus, on en déduit immédiatement (par définition de l'invariant γd) :

$$\forall\, b \in B,\ \gamma d(\mathcal{X}_b) \leq d.$$

On va en fait montrer que les composantes irréductibles des images réciproques (dans $\widetilde{\mathcal{X}_b}$) des cycles $(Z_t)_{t\in T}$ sont compactes (ce qui est équivalent à l'assertion ci-dessus). Si on se place au dessus d'un voisinage compact K de b, le volume des cycles de $\mathfrak{C}_K = \pi_*^{-1}(K)$ par rapport à la métrique ω de la proposition 8.2.2 est uniformément majoré :

$$\forall\, Z \in \mathfrak{C}_K,\ \mathrm{Vol}_\omega(Z) \leq M$$

par une constante $M > 0$. Pour les cycles Z qui sont les fibres des Γ-réduction de $\mathcal{X}_u$ ($u \in K$ général et $u \neq b$), on a donc également :

$$\mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}}(\tilde{Z}^j) \leq NM$$

où $\tilde{\omega}$ est l'image réciproque de ω sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ (le revêtement universel de $\mathcal{X}$), $\tilde{Z}^j$ une composante irréductible de l'image réciproque de Z dans $\widetilde{\mathcal{X}}$ et N le cardinal de

$$\mathrm{Im}(\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{X})) < +\infty$$

(ce groupe ne dépend pas de Z et u généraux et la valeur de N est donc bien définie). En passant à la limite, on en déduit que les sous-variétés $\tilde{Z}_t^{\,j}$ ($t \in T$) de $\widetilde{\mathcal{X}_b}$ ont un volume fini. Or, dans une variété à géométrie bornée (comme c'est le cas de $\widetilde{\mathcal{X}}$), un sous-ensemble analytique irréductible de volume fini est automatiquement compact (voir par exemple [Gro91, p. 288-289]) et les composantes irréductibles $\tilde{Z}_t^{\,j}$ des cycles $(Z_t)_{t\in T}$ sont compactes. □

8.3 Invariance par déformation : cas de la dimension 3

On a vu ci-dessus (proposition 8.1.1) que la Γ-dimension est invariante au cours d'une déformation de surfaces kählériennes compactes. En revanche, à partir de la dimension 3, la Γ-dimension n'est plus seulement un invariant du groupe fondamental et la question de l'invariance par déformation se pose donc pleinement. En s'appuyant sur le théorème de structure 7.0.2, nous allons établir une réponse partielle à l'invariance de la Γ-dimension en dimension 3.

Notations :
Jusqu'à la fin de cette section, on notera $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille de variétés kählériennes de dimension 3 dont on désignera les fibres par la notation

$$X_t = \pi^{-1}(t) \text{ pour } t \in \mathbb{D} \text{ et } X = X_0 = \pi^{-1}(0).$$

Comme on sait déjà que la propriété $\gamma d(X) \leq 1$ se déforme (proposition 2.5.1), on est ramené à étudier la dichotomie suivante : si $\gamma d(X) = 2$ ou 3, il faut montrer que, pour t dans un voisinage de zéro, $\gamma d(\mathcal{X}_t) = \gamma d(X)$. Pour ce faire, on va procéder au cas par cas en étudiant les différentes situations possibles.

Il sera également commode de pouvoir se ramener à une famille projective ; pour ce faire, on appliquera les résultats de [KM92, section 12.5, p. 659-663] sous la forme suivante :

Théorème 8.3.1 ([KM92]) *Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ une famille de variétés kählériennes de dimension 3. Si $\kappa(\mathcal{X}_0) = 3$ pour au moins un point $0 \in B$, on a*

$$\forall\, b \in B,\ \kappa(\mathcal{X}_b) = 3$$

et la famille $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ est biméromorphe (au dessus de B) à une famille projective.

Le premier résultat ci-dessous montre que si les fibres de la famille ne sont pas de type général, la Γ-dimension est constante dans la déformation.

Proposition 8.3.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une déformation de variétés kählériennes de dimension 3 dont la fibre centrale X vérifie :

$$\gamma d(X) \geq 2 \text{ et } \kappa(X) \leq 2.$$

On a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = \gamma d(X).$$

Démonstration :
Pour commencer, étudions la situation correspondant au type π_1-général : $\gamma d(X) = 3$. Le théorème 7.0.2 assure que $\kappa(X) \geq 0$ et il nous fournit de plus un revêtement étale fini de X dont la fibration d'Iitaka-Moishezon a une structure très précise. Ce revêtement correspondant à un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(X) \simeq \pi_1(\mathcal{X})$ (car $\mathbb{D}$ est contractile), on peut remplacer $\mathcal{X}$ par le revêtement étale fini induit par ce sous-groupe et ainsi supposer que X possède les propriétés indiquées dans les propositions 7.1.4 et 7.1.5.

si $\gamma d(X) = 3$ et $\kappa(X) = 0$: on va montrer que pour tout $t \in \mathbb{D}$, l'application d'Albanese de X_t est surjective sur un tore de dimension 3 (ceci suffit à assurer $\gamma d(X_t) = 3$). Comme la base est contractile, la déformation est topologiquement triviale ; d'autre part, d'après [Cat91, prop. 1.4, p. 267] (voir aussi [ABC$^+$96, prop. 2.4, p. 23]), la dimension de l'image du morphisme d'Albanese $\alpha d(X_t)$ est un invariant d'homotopie. On en déduit donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \alpha d(X_t) = \alpha d(X) = 3. \tag{8.1}$$

Enfin, la constance des nombres de Hodge (ici la constance du b_1 suffit) montre :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ q(X_t) = q(X) = 3. \tag{8.2}$$

Les égalités (8.1) et (8.2) entrainent alors que

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \alpha_{X_t} : X_t \longrightarrow \mathrm{Alb}(X_t)$$

est surjective et génériquement finie. On en déduit immédiatement $\gamma d(X_t) = 3$.

si $\gamma d(X) = 3$ et $\kappa(X) = 1$: d'après la proposition 7.1.4, la fibration d'Iitaka-Moishezon de X est une submersion $J : X \longrightarrow C$ sur une courbe avec $g(X) = g(C)$. On va alors déformer ce morphisme J en utilisant une version relative du lemme de Castelnuovo-de Franchis. Soit en effet

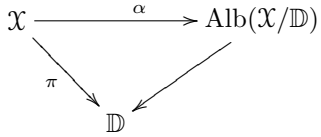
$$V = J^*(H^1(C, \mathbb{C})) \subset H^1(X, \mathbb{C})$$

le sous-espace isotrope correspondant à la fibration J. Comme la déformation est topologiquement triviale, le sous-espace V s'identifie à un sous-espace isotrope de $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$. En restriction à chaque X_t, on obtient donc un sous-espace isotrope $V_t \subset H^1(X_t, \mathbb{C})$ de dimension

$$\dim(V_t) = \dim(V) = g(X) = g(X_t)$$

(la dernière égalité provient du fait que g est un invariant topologique). Le lemme de Castelnuovo-de Franchis (voir [ABC$^+$96, th. 2.7, p.24]) montre que l'application J se déforme en une fibration $J_t : X_t \longrightarrow C_t$ dont les fibres sont encore des tores dont le groupe fondamental s'injecte dans celui de X_t (car c'est le cas pour X). Le lemme 2.4.1 s'applique et montre que $\gamma d(X_t) = 3$.

si $\gamma d(X) = 3$ et $\kappa(X) = 2$: on va ici utiliser la description de l'application d'Albanese de X donnée par la proposition 7.1.5 et considérer l'application d'Albanese relative :



1. Si $q(X) = 1$, la fibration d'Albanese est isotriviale sur une courbe elliptique E avec pour fibre une surface S de type π_1-général avec $q(S) = 0$ et on a

   $$\pi_1(X) = \pi_1(S) \times \pi_1(E). \tag{8.3}$$

   Pour $t \in \mathbb{D}$, on a donc également $q(X_t) = 1$ (constance du b_1) et l'application d'Albanese de X_t

   $$\alpha_{X_t} : X_t \longrightarrow E_t$$

   est donc surjective à fibre connexe sur une courbe elliptique E_t. Le morphisme induit au niveau des groupes fondamentaux

   $$\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_t) \longrightarrow \pi_1(E_t) \simeq \pi_1(E)$$

est nécessairement la projection sur le deuxième facteur dans la décomposition (8.3) ci-dessus car $q(S) = 0$. Comme l'application d'Albanese varie en famille, on en déduit que la fibre S_t de α_{X_t} est une surface de type π_1-général dont le groupe fondamental est un facteur de $\pi_1(X_t)$. En appliquant le lemme 2.4.1, on en déduit que $\gamma d(X_t) = 3$ pour tout $t \in \mathbb{D}$.

2. Si $\alpha d(X) = 2$, $X \longrightarrow \alpha_X(X)$ est un morphisme dont la fibre générale F vérifie $|\pi_1(F)_X| = +\infty$ car X est de type π_1-général. L'application $X_t \longrightarrow \mathrm{Alb}(X_t)$ est donc un morphisme sur une surface Y_t contenue dans un tore (vérifiant donc $\gamma d(Y_t) = 2$ d'après 3.2.1) dont la fibre générale F_t (une courbe de genre positif) vérifie $|\pi_1(F_t)_{X_t}| = +\infty$. La conclusion s'obtient en appliquant le lemme 2.4.2.
3. Si $\alpha d(X) = 3$, en utilisant le fait que αd est invariant au cours de la déformation, on obtient :

$$\gamma d(X_t) \geq \alpha d(X_t) = \alpha d(X) = 3.$$

Finalement, dans tous les cas, on a bien :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(\mathcal{X}_t) = 3.$$

Reste maintenant à étudier le cas $\boldsymbol{\gamma d(X) = 2}$ **et** $\boldsymbol{\kappa(X) \leq 2}$. Le théorème 8.3.1 permet dans cette situation d'affirmer :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \kappa(X_t) \leq 2.$$

Si la Γ-dimension n'est pas préservée dans la déformation, le théorème 8.2.1 montre que, pour t général dans le disque $\mathbb{D}$, la fibre au-dessus de t vérifie :

$$\kappa(X_t) \leq 2 \text{ et } \gamma d(X_t) = 3.$$

Mais l'étude menée ci-dessus montre que les structures particulières dont sont dotées ces fibres X_t se déforment au dessus de $\mathbb{D}$ tout entier ; en particulier, on aurait $\gamma d(X) = 3$ ce qui est évidemment absurde. On en déduit que la Γ-dimension ne souffre d'aucune discontinuité.

Comme la liste ci-dessus est exhaustive, on a finalement montré :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(X_t) = \gamma d(X).$$

□

Pour étudier la situation où la fibre centrale est de type général et de type π_1-général, on peut tout d'abord appliquer le théorème 8.3.1 et se ramener au cas d'une famille projective dans laquelle toutes les fibres sont de type général :

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D} \text{ avec } \gamma d(X) = 3 \text{ et } \forall\, t \in \mathbb{D},\ \kappa(X_t) = 3.$$

On sait alors (théorème 8.2.1) que, pour t général dans $\mathbb{D}$, X_t vérifie $\gamma d(X_t) = 3$. Si la Γ-dimension n'est pas constante au voisinage de $0 \in \mathbb{D}$, il existe $(t_k)_{k\geq 1}$ une suite de points de $\mathbb{D}$ convergeant vers 0 telle que $\forall k \geq 1$, $\gamma d(X_k) = 2$ (pour alléger les notations, on a posé : $X_k = X_{t_k}$). On va étudier cette situation selon la structure orbifolde des fibrations :

$$\gamma_k : X_k \longrightarrow \Gamma(X_k).$$

Proposition 8.3.2
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective de variétés de type général de dimension 3 dont la fibre centrale vérifie $\gamma d(X) = 3$.

1. *si il existe une suite $(t_k)_{k\geq 1}$ comme ci-dessus, la base orbifolde de la Γ-réduction de X_k vérifie alors (pour k assez grand) :*

$$\kappa(\Gamma(X_k)/\Delta^*(\gamma_k)) \leq 0.$$

2. ***sous réserve de la validité des conjectures 6.1.1 et 6.2.1**, la situation ci-dessus ne peut se produire et la Γ-dimension est constante au voisinage de 0 :*

$$\gamma d(\mathcal{X}_t) = 3 \text{ pour } t \text{ dans un voisinage de } 0.$$

Démonstration :
Remarquons tout d'abord que la possibilité :

$$\kappa(\Gamma(X_k)/\Delta^*(\gamma_k)) = 1$$

est exclue. En effet, d'après le théorème 7.0.2, cette hypothèse entraine que la Γ-réduction de X_k est donnée (après revêtement étale fini et transformation birationnelle adéquats) par l'application d'Albanese α_{X_k}. Or, en considérant l'application d'Albanese de la famille $\mathcal{X}$, on en déduirait que la fibre centrale vérifierait $\gamma d(X) = 2$.

Supposons donc que les fibres X_k aient une Γ-réduction de type général :

$$\kappa(\Gamma(X_k)/\Delta^*(\gamma_k)) = 2.$$

A nouveau, le théorème 7.0.2 s'applique et nous assure l'existence d'une constante universelle (numérique) $C > 0$ telle que :

$$\forall k \geq 1,\ g_k \leq C\mathrm{Vol}(X_k),$$

où g_k désigne le genre de la fibre générale de γ_k. Or, d'après [Siu02], le volume est constant dans la famille (supposée projective) et le genre des fibres générales des applications γ_k est donc majoré par une constante indépendante de k. Comme le volume des fibres de γ_k est borné et comme celles-ci restent dans un compact $\pi^{-1}(K)$ (où K est par exemple un disque fermé contenant les points t_k), ces courbes sont donc contenues dans un compact de $\mathcal{C}_1(\mathcal{X}/\mathbb{D})$ ([Lie78]) ; en particulier, elles ne rencontrent qu'un nombre fini de composantes irréductibles de $\mathcal{C}_1(\mathcal{X}/\mathbb{D})$. Quitte à extraire une sous suite de $(t_k)_k$, on peut donc trouver une composante irréductible $\mathfrak{C}$ de $\mathcal{C}_1(\mathcal{X}/\mathbb{D})$ qui contient les fibres des applications γ_k. On peut alors reprendre les arguments donnés au cours de la démonstration du théorème 8.2.1. En effet, en passant à la limite, on peut déformer les fibres des applications γ_k en une famille de courbes de X. Une composante irréductible de cette famille doit encore être couvrante sur X et on conclut comme dans la démonstration du théorème 8.2.1 : les courbes de cette famille doivent être contenues dans les fibres de la Γ-réduction de X et ainsi $\gamma d(X) \leq 2$. Comme on a supposé $\gamma d(X) = 3$, on en déduit bien que :

$$\text{pour } k \text{ assez grand, } \kappa(\Gamma(X_k)/\Delta^*(\gamma_k)) \leq 0.$$

Si maintenant on suppose démontrées les conclusions des conjectures 6.1.1 et 6.2.1, on sait (théorème 7.0.2) que, sous l'hypothèse

$$\kappa(\Gamma(X_k)/\Delta^*(\gamma_k)) \leq 0,$$

la Γ-réduction des X_k est donnée (après revêtement étale fini et transformation birationnelle) par l'application d'Albanese. A nouveau, ceci entrainerait en particulier $\gamma d(X) = 2$ et on en déduit donc qu'une telle suite de points $(t_k)_{k\geq 1}$ ne peut exister :

$$\gamma d(X_t) = 3 \text{ pour tout } t \text{ dans un voisinage de } 0.$$

□

Corollaire 8.3.1 (sous réserve des conjectures 6.1.1 et 6.2.1)
Si $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ est une déformation de variétés kählériennes de dimension 3, alors

$$\{b \in B |\, \gamma d(\mathcal{X}_b) = 3\}$$

est un ouvert de B.

En se ramenant à l'application d'Albanese (comme nous l'avons déjà fait de nombreuses fois ci-dessus), on peut déformer les fibres de la Γ-réduction de X :

Proposition 8.3.3 (sous réserve des conjectures 6.1.1 et 6.2.1)
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une déformation de variétés kählériennes de dimension 3. Si la fibre centrale vérifie $\gamma d(X) = 2$ et si sa Γ-réduction n'est pas de type général, on a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(X_t) = 2.$$

De même, en utilisant la proposition 7.2.2, on obtient l'énoncé inconditionnel suivant.

Proposition 8.3.4
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une déformation de variétés kählériennes de dimension 3 dont la fibre centrale vérifie $\gamma d(X) = 2$. Si la Γ-réduction de X vérifie l'une des deux conditions suivantes

1. *$\kappa(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X)) = 1$,*
2. *$\Gamma(X)$ n'est pas une surface rationnelle et $\kappa(\Gamma(X)/\Delta^*(\gamma_X)) \leq 1$,*

on a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{D},\ \gamma d(X_t) = 2.$$

Chapitre 9

Γ-réduction des orbifoldes kählériennes

Afin d'unifier les différents points de vue qui ont été adoptés dans les chapitres précédents, nous allons montrer que la Γ-réduction existe également dans la catégorie des orbifoldes kählériennes (lisses). Pour cela, nous allons rappeler la construction du revêtement universel d'une orbifolde lisse (résultats exposés dans [Nam87]) et discuter la notion de métriques kählériennes orbifoldes. Suivant les arguments de [Cam94], cela nous permettra de contruire la $\widetilde{\Gamma}$-réduction du revêtement universel d'une orbifolde (X/Δ).

9.1 Revêtement universel d'une orbifolde lisse

On considère ici une orbifolde (X/Δ) avec

$$\Delta = \sum_{j\in J}(1-\frac{1}{m_j})D_j.$$

On se limitera aux orbifoldes dites lisses.

Définition 9.1.1
Une orbifolde (X/Δ) est dite lisse *si la variété sous-jacente X est lisse et si le support de Δ est un diviseur à croisements normaux.*
Si $(z_1,\cdots,z_n)$ désigne un système de coordonnées locales (défini sur un polydisque $\mathbb{D}^n$) dans lequel Δ a pour équation (virtuelle)

$$\prod_{j=1}^{r} z_j^{1-1/m_j} = 0,$$

on appelera uniformisation locale le morphisme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n & \xrightarrow{\pi} & X \\ (z_1,\cdots,z_n) & \mapsto & (z_1^{m_1},\cdots,z_r^{m_r},z_{r+1},\cdots,z_n)\end{array}\right.$$

Remarque 9.1.1
Dans la situation purement logarithmique correspondant à $m_j=+\infty$, on doit poser $z_j^{m_j}=e^{z_j}$.

On adoptera également les notations suivantes : X^* désignera l'ouvert de Zariski

$$X^* = X \backslash \mathrm{Supp}(\Delta).$$

Si, de plus, γ_j désigne un lacet dans X^* autour du diviseur D_j, on notera K le sous-groupe *normal* de $\pi_1(X^*)$ engendré par les classes d'homotopies des lacets $\gamma_j^{m_j}$. Rappelons enfin (voir le chapitre 5) que le groupe fondamental de (X/Δ) est défini par :

$$\pi_1(X/\Delta) = \pi_1(X^*)/K.$$

Définition 9.1.2
Un revêtement ***ramifié en au plus Δ*** *de X est une application holomorphe $\pi : Y \longrightarrow X$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Y normal et connexe, π à fibres discrètes,*
2. *π définit (par restriction) un revêtement étale de X^*,*
3. *au dessus de D_j, π ramifie à l'ordre n_j, diviseur de m_j, et ce pour tout j,*
4. *tout point $x \in X$ admet un voisinage connexe V tel que toute composante connexe U de $\pi^{-1}(V)$ rencontre la fibre $\pi^{-1}(x)$ en un unique point et la restriction $\pi_{|U} : U \longrightarrow V$ est propre (et donc finie).*

On dit que π ramifie ***exactement en Δ*** *si $n_j = m_j$ pour tout $j \in J$.*

Les uniformisations locales de la définition 9.1.1 sont donc des revêtements ramifiés locaux et la question de la globalisation est résolue par le théorème suivant.

Théorème 9.1.1 (th. 1.3.8, p. 35 [Nam87])
Il existe une bijection naturelle entre les sous-groupes G de $\pi_1(X^*)$ contenant le sous-groupe K et les revêtements ramifiés en au plus Δ de X (à isomorphisme près). Cette bijection associe à un revêtement ramifié $\pi : Y \longrightarrow X$ le sous-groupe $\pi_1(Y^*) \hookrightarrow \pi_1(X^*)$ obtenu par restriction au dessus de X^* (le point 3 de la définition 9.1.2 assure la condition $K \subset \pi_1(Y^*)$) et, réciproquement, à un sous-groupe G, elle associe la complétion au dessus de Δ du revêtement de X^* induit par G.
Si G est d'indice fini (respectivement normal), le revêtement correspondant sera fini (respectivement galoisien).

Remarque 9.1.2
Pour obtenir une théorie similaire à celle des revêtements étales, il suffit de considérer le groupe G/K : on obtient alors une bijection entre les revêtements ramifiés en au plus Δ et les sous-groupes de $\pi_1(X/\Delta)$.

Démonstration :
Soit G un sous-groupe de $\pi_1(X^*)$ contenant K et soit $\pi : Y^* \longrightarrow X^*$ le revêtement étale correspondant. Il faut montrer que le revêtement π peut être complété au dessus du support de Δ. Soit donc $x \in X$ un point de $\mathrm{Supp}(\Delta)$ et $(z_1, \cdots, z_n)$ des coordonnées locales adaptées à Δ définies sur un voisinage ouvert V. Plus précisément, V est isomorphe à un polydisque $\mathbb{D}^n$ et, dans ce système de coordonnées, Δ a pour équation

$$\prod_{j=1}^{r} z_j^{1-1/m_j} = 0.$$

Comme $V^* = V \backslash \mathrm{Supp}(\Delta) \simeq (\mathbb{D}^*)^r \times \mathbb{D}^{n-r}$, le groupe fondamental local en x est :

$$\pi_1(V/\Delta) = \pi_1(v^*)/\langle\!\langle\, \gamma_j^{m_j} \,\rangle\!\rangle \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}.$$

Il est en particulier fini et, si U^* désigne une composante connexe de $\pi^{-1}(V^*)$, l'application

$$\pi_{|U^*} : U^* \longrightarrow V^*$$

est un revêtement étale propre (car fini) et c'est donc un quotient intermédiaire du revêtement

$$p : (z_1, \cdots, z_n) \mapsto (z_1^{m_1}, \cdots, z_r^{m_r}, z_{r+1}, \cdots, z_n).$$

Il existe donc un groupe fini H (quotient de $\pi_1(V/\Delta)$) et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}^*)^r \times \mathbb{D}^{n-r} & \longrightarrow & U^* = (\mathbb{D}^*)^r \times \mathbb{D}^{n-r}/H \\ & {\scriptstyle p} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi} & \\ & V^* & \end{array}$$

L'action de H se prolonge de manière naturelle à $\mathbb{D}^n$ et, si on pose $U = \mathbb{D}^n/H$, on obtient une nouvelle application (encore notée π) :

$$\pi : U \longrightarrow V$$

qui ramifie au plus en Δ. Comme le prolongement construit est unique à isomorphisme de revêtements ramifiés près (voir [Nam87, prop. 1.1.5, p.5]), on peut recoller Y^* et les espaces complexes U construits ci-dessus et on note Y l'espace complexe ainsi obtenu. Comme Y n'a que des singularités quotients, Y est bien normal. De plus, par construction, l'application $\pi : Y \longrightarrow X$ ramifie au plus en Δ.

Il est alors clair que l'opération consistant à considérer le sous-groupe $\pi_1(Y^*)$ de $\pi_1(X^*)$ est bien l'inverse de la construction ci-dessus. □

Par construction, les revêtements ramifiés des orbifoldes lisses ont au plus des singularités quotients : ce sont donc des V-variétés au sens de Satake[1] (introduites dans [Sat56]). Les objets géométriques (métriques, fibrés, formes différentielles,...) considérés sur ces V-variétés sont naturellement définis sur le lieu lisse et doivent se prolonger en des objets invariants (et lisses) dans les uniformisations locales.

Si on souhaite obtenir des revêtements qui ramifient exactement en Δ, on doit imposer des conditions topologiques sur la paire (X/Δ).

Définition 9.1.3
Si γ_j désigne toujours des lacets élémentaires autour des diviseurs D_j, on note d_j l'ordre de γ_j dans le quotient $\pi_1(X/\Delta)$ (d_j divise donc m_j). On pose alors

$$\Delta_{reg} = \sum_{j \in J} (1 - \frac{1}{d_j}) D_j$$

[1] ou encore des orbifoldes au sens de Thurston ; pour des raisons évidentes, nous n'utiliserons pas cette terminologie.

et on l'appelle la ***régularisation*** *de* Δ. *Si* $\Delta_{reg} = \Delta$ *(i.e. si* $d_j = m_j$ *pour tout* $j \in J$*), on dira que* Δ *est* ***régulier****.*

Par construction, le sous-groupe normal engendré par les $\gamma_j^{d_j}$ coïncide avec le sous-groupe K et on a donc :

$$\pi_1(X/\Delta) = \pi_1(X/\Delta_{reg}).$$

De plus, Δ_{reg} est le plus petit diviseur orbifolde dont les multiplicités divisent celles de Δ et qui satisfait à l'égalité ci-dessus (autrement dit, on ne peut pas réduire Δ_{reg} sans réduire strictement $\pi_1(X/\Delta)$). Par exemple, si on considère une courbe orbifolde $(\mathbb{P}^1/\Delta)$ telle que le support de Δ soit réduit à un point (avec une multiplicité quelconque), on a alors $\Delta_{reg} = \emptyset$. De même, si Δ est constitué des points 0 et ∞ de multiplicités respectives m et n, la régularisation de ce diviseur est

$$\Delta_{reg} = (1 - \frac{1}{d})(\{0\} + \{\infty\})$$

avec $d = \text{pgcd}(m, n)$.

Le fait de remplacer un diviseur par sa régularisation nous permet d'obtenir une notion de revêtement universel satisfaisante.

Corollaire 9.1.1
Il existe (à isomorphisme près) un unique revêtement $\pi_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \longrightarrow (X/\Delta)$ *ramifié en au plus* Δ *avec* $\widetilde{X}_\Delta$ *simplement connexe. On l'appelle le revêtement universel de* (X/Δ)*. Le revêtement* π_Δ *ramifie exactement en* Δ *si et seulement si* Δ *est régulier.*

Démonstration :

Pour obtenir le revêtement en question, il suffit de considérer le revêtement correspondant au sous-groupe K lui-même. Notons le (pour alléger l'écriture) $\pi : Y \longrightarrow X$. Si $X^0 = X \backslash \text{Sing}(\Delta)$, on va montrer que $Y^0 = \pi^{-1}(X^0)$ est simplement connexe (comme $Y \backslash Y^0$ est de codimension 2 dans Y, cela entraînera la simple connexité de Y). Notons au passage la lissité de Y^0 !

Faisons la remarque suivante : au vu de la construction même de Y, les lacets $\gamma_j^{m_j}$ se relèvent en des lacets dans Y^* qui deviennent homotopes à zéro dans Y^0. Il suffit en effet de considérer la situation locale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{D}^* & \longrightarrow & \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{D}^* \\ (z_1, \cdots, z_n) & \mapsto & (z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n^m) \end{array}$$

et sa complétion. Soit alors γ_Y un lacet dans Y^0 ; quitte à le déformer, on le supposera dans Y^*. Comme $\pi : Y^0 \longrightarrow X^0$ est le revêtement ramifié (en au plus Δ^0) correspondant au sous-groupe K, le lacet $\gamma = \pi_*(\gamma_Y)$ est dans K et peut donc s'écrire (dans $\pi_1(X^*)$) comme un produit de conjugués des lacets $\gamma_j^{m_j}$ et de leurs inverses. Avec la remarque ci-dessus, γ admet donc un relèvement $\tilde{\gamma}$ dans Y^* qui devient homotope à zéro dans Y^0. Comme γ_Y est homotope (dans Y^* donc dans Y^0) à $\tilde{\gamma}$, on en conclut que γ_Y est lui aussi homotope à zéro dans Y^0. Ce dernier est donc simplement connexe.
La dernière assertion est évidente compte tenu du fait que d_j (notation de la définition 9.1.3) est aussi l'ordre de ramification de π_Δ au-dessus de D_j. □

Remarque 9.1.3
Même lorsque le diviseur est régulier, le revêtement universel $\widetilde{X}_\Delta$ de (X/Δ) n'est pas forcément lisse (bien que l'application π_Δ ramifie exactement en Δ). Considérons par exemple la surface orbifolde

$$(X/\Delta) = \left(\mathbb{P}^2/(\frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2)\right)$$

où Δ_1 et Δ_2 sont deux droites se coupant en un point $p \in \mathbb{P}^2$. Comme le complémentaire du support de Δ est isomorphe au plan affine privé d'une droite, son groupe fondamental est cyclique

$$\pi_1(X^*) \simeq \mathbb{Z}$$

et le diviseur Δ est régulier (car $K \simeq 2\mathbb{Z}$). Le groupe fondamental de cette surface orbifolde est donc :

$$\pi_1(X/\Delta) = \pi_1(X^*)/K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

D'après le corollaire 9.1.1, il existe un revêtement double $\pi : Y \longrightarrow (X/\Delta)$ ramifiant exactement en Δ (avec Y simplement connexe).
En revanche, au voisinage du point p, (X/Δ) est isomorphe à

$$\left(\mathbb{C}^2/(\frac{1}{2}\{x=0\} + \frac{1}{2}\{y=0\})\right)$$

et le groupe fondamental local au point p est donné par :

$$\pi_{1,loc}(X/\Delta)_p \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Si V désigne un voisinage de p et U une composante connexe de $\pi_\Delta^{-1}(V)$, U est donc un quotient intermédiaire de l'uniformisation $(x,y) \mapsto (x^2, y^2)$. On vérifie sans peine que U correspond à l'action diagonale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$(x,y) \mapsto (-x,-y)$$

et on obtient ainsi une singularité conique au-dessus du point p dans Y.

De même, pour $n \geq 2$, le revêtement universel de l'orbifolde

$$\left(\mathbb{P}^2/(1-1/n)(\Delta_1 + \Delta_2)\right)$$

est le cône sur la courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^n$.

Pour finir, le résultat suivant met en avant une situation dans laquelle on peut "éliminer" le diviseur orbifolde par un revêtement fini.

Théorème 9.1.2 (th. 11.16 [Cam07])
Soit (X/Δ) une orbifolde lisse de groupe fondamental $\pi_1(X/\Delta)$ résiduellement fini[2]. Il existe alors un revêtement fini $\pi : X' \longrightarrow (X/\Delta)$ ramifié exactement en Δ avec X' lisse. En particulier, $\pi_1(X')$ est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(X/\Delta)$ et le revêtement universel (au sens usuel) de X' s'identifie au revêtement universel (au sens orbifolde) de (X/Δ).

[2]Un groupe est résiduellement fini si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est réduite à $\{1\}$.

9.2 Notion de métriques kählériennes orbifoldes

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de donner une définition de la notion de métrique kählérienne sur une orbifolde lisse (X/Δ). Pour commencer, étudions le modèle local $(\mathbb{C}^n, \Delta)$ où Δ a pour composantes irréductibles les axes de coordonnées $D_j = \{z_j = 0\}$ affectés de multiplicités $m_j \geq 2$ $(1 \leq j \leq r)$. Le diviseur Δ doit être considéré comme un bord à l'infini et les multiplicités comme l'ordre des pôles "autorisés" le long de ce diviseur ; ceci nous conduit à penser qu'une métrique orbifolde pour le modèle local doit être de la forme :

$$\omega_\Delta = \sum_{j=1}^{r} \frac{i dz_j \wedge d\overline{z_j}}{|z_j|^{2(1-1/m_j)}} + \sum_{j>r} i dz_j \wedge d\overline{z_j}.$$

On constate de plus que, dans une uniformisation, cette métrique se relève en une métrique lisse. En effet, si

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (t_1, \ldots, t_n) & \mapsto & (z_1, \ldots, z_n) = (t_1^{m_1}, \ldots, t_r^{m_r}, t_{r+1}, \ldots, t_n) \end{array} \right.$$

désigne le revêtement universel ramifiant exactement le long de Δ, on a :

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega) &= \sum_{j=1}^{r} \frac{id(t_j^{m_j}) \wedge d(\overline{t_j}^{m_j})}{\left|t_j^{m_j}\right|^{2(1-1/m_j)}} + \sum_{j>r} i dt_j \wedge d\overline{t_j} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \frac{im_j^2 t_j^{m_j-1} dt_j \wedge \overline{t_j}^{m_j-1} d\overline{t_j}}{|t_j|^{2(m_j-1)}} + \sum_{j>r} i dt_j \wedge d\overline{t_j} \\ &= \sum_{j=1}^{r} im_j^2 dt_j \wedge d\overline{t_j} + \sum_{j>r} i dt_j \wedge d\overline{t_j} \end{aligned}$$

et, aux coefficients m_j^2 près, on retrouve la métrique euclidienne de $\mathbb{C}^n$.

Ceci étant, nous adoptons la définition suivante.

Définition 9.2.1
Une métrique hermitienne sur une orbifolde lisse est une (1,1)-forme positive (lisse) ω_Δ définie (et lisse) sur $X^* = X \backslash Supp(\Delta)$ qui se prolonge en un courant positif fermé sur X et vérifiant de plus la condition suivante : si $(z_1, \cdots, z_n)$ sont des coordonnées locales adaptées à Δ et si $\omega_\Delta = i \sum_{j,k} \omega_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z_k}$ est l'expression locale de la métrique, alors la fonction

$$|z_j|^{2(1-1/m_j)}\, \omega_{j,j}$$

se prolonge en une fonction lisse.
La métrique est dite kählérienne si elle est fermée (comme forme lisse ou comme courant).

Reste maintenant à étudier la question de l'existence de tels objets. La remarque suivante va nous permettre d'envisager la construction de métriques sur les variétés compactes.

Remarque 9.2.1
L'expression $\sum_j |z_j|^{2/m_j}$ *fournit un potentiel (continu) pour la partie polaire de la métrique orbifolde défini dans le cas local. En effet, un calcul direct donne :*

$$i\partial\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j} = i\partial\overline{\partial}(z_j^{1/m_j}\overline{z_j}^{1/m_j}) = \frac{idz_j\wedge d\overline{z_j}}{m_j^2\,|z_j|^{2(1-1/m_j)}}.$$

On en déduit donc :

Proposition 9.2.1
Soit X *une variété complexe compacte et* $\Delta = \sum_{j\in J}(1-1/m_j)D_j$ *un diviseur orbifolde tel que* (X/Δ) *soit lisse. Soit également* ω *une métrique hermitienne sur* X*. Pour tout* $j\in J$*, on note* s_j *la section canonique du fibré en droites* $\mathcal{O}_X(D_j)$ *que l'on munit d'une métrique lisse quelconque. Si* $C>0$*, on pose enfin*

$$\omega_\Delta = C\omega + \sum_{j\in J} i\partial\overline{\partial}\,|s_j|^{2/m_j}\,.$$

Si la constante C *est choisie suffisamment grande,* ω_Δ *définit une métrique hermitienne pour l'orbifolde* (X/Δ) *vérifiant de plus :*

$$\omega_\Delta \geq \omega \ \textit{ au sens des courants.}$$

Si de plus ω *est kählérienne, la métrique* ω_Δ *l'est également.*

Démonstration :
L'expression ci-dessus définit bien une (1,1)-forme réelle lisse sur X^*. De plus, d'après la remarque 9.2.1, cette forme a des pôles d'ordre m_j le long de D_j. Il reste donc à vérifier la positivité. Pour cela, on recouvre X par un nombre fini de boules de rayon 2 fournissant des coordonnées adaptées à Δ et telles que les boules de rayon 1 recouvrent encore X. On mène alors le calcul dans une de ces cartes. L'expression locale de $|s_j|^{2/m_j}$ est $|z_j|^{2/m_j}\,f_j$ où f_j est une fonction lisse et strictement positive. Quitte à multiplier les métriques par des constantes, on supposera même que $f_j\geq 1$ sur la boule de rayon 1. On a donc :

$$\begin{aligned} i\partial\overline{\partial}\,|s_j|^{2/m_j} &= if_j\partial\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j} + i\partial f_j\wedge\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j} \\ &\quad + i\partial\,|z_j|^{2/m_j}\wedge\overline{\partial}f_j + i\,|z_j|^{2/m_j}\,\partial\overline{\partial}f_j. \end{aligned} \tag{9.1}$$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned} i\partial(|z_j|^{2/m_j}+f_j)\wedge\overline{\partial}({z_j}^{2/m_j}+f_j) &= i\partial f_j\wedge\overline{\partial}f_j + i\partial f_j\wedge\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j} \\ &\quad + i\partial\,|z_j|^{2/m_j}\wedge\overline{\partial}f_j + i\partial\,|z_j|^{2/m_j}\wedge\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j}\,, \end{aligned}$$

on obtient alors (au sens des courants) :

$$\begin{aligned} i\partial f_j\wedge\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j} + i\partial\,|z_j|^{2/m_j}\wedge\overline{\partial}f_j &\geq -i\partial f_j\wedge\overline{\partial}f_j - i\partial\,|z_j|^{2/m_j}\wedge\overline{\partial}\,|z_j|^{2/m_j} \\ &\geq -i\partial f_j\wedge\overline{\partial}f_j - \frac{i\,|z_j|^{2/m_j}\,dz_j\wedge d\overline{z_j}}{|z_j|^{2(1-1/m_j)}}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Comme f_j est lisse, on peut trouver une constante C_j telle que

$$i\,|z_j|^{2/m_j}\,\partial\overline{\partial}f_j - i\partial f_j \wedge \overline{\partial} f_j \geq -C_j\omega \text{ sur la boule de rayon 1.} \tag{9.3}$$

En combinant (9.1), (9.2) et (9.3), on obtient donc

$$\begin{aligned}\omega_\Delta &\geq (C - \sum_j C_j)\omega + \sum_j \frac{(f_j - |z_j|^{2/m_j})i dz_j \wedge d\overline{z_j}}{|z_j|^{2(1-1/m_j)}} \\ &\geq (C - \sum_j C_j)\omega \text{ sur la boule de rayon 1.}\end{aligned}$$

Comme X est recouverte par un nombre fini de telles boules, on peut trouver une constante C qui rende l'expression ci-dessus strictement positive (ou même telle que ω_Δ domine ω).

Au vu de l'expression de ω_Δ, on a $d\omega_\Delta = d\omega$ et la métrique orbifolde ω_Δ est kählérienne si et seulement si ω l'est. □

Faisons le lien avec le revêtement universel introduit au paragraphe précédent.

Proposition 9.2.2
Soit (X/Δ) une orbifolde lisse avec Δ régulier. Si $\pi_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \longrightarrow (X/\Delta)$ est le revêtement universel de (X/Δ) et ω_Δ une métrique hermitienne orbifolde, $\pi_\Delta^*(\omega_\Delta)$ définit une métrique sur $\widetilde{X}_\Delta$ au sens des V-variétés de Satake.

Démonstration :
Comme Δ est régulier, π_Δ ramifie exactement en Δ : les uniformisations locales de $\widetilde{X}_\Delta$ sont donc les mêmes que celles de (X/Δ). La métrique $\pi_\Delta^*(\omega_\Delta)$ a donc au plus des singularités quotients (au-dessus du lieu sigulier de Δ). □

On peut remarquer ici l'intérêt de considérer des métriques orbifoldes : le fait d'avoir des pôles le long de Δ compense la ramification et assure que l'objet obtenu par image réciproque sur $\widetilde{X}_\Delta$ est encore une forme strictement positive. Si on s'était contenté de considérer l'image réciproque d'une métrique hermitienne (kählérienne) ω sur X, la (1,1)-forme $\pi_\Delta^*(\omega)$ serait seulement positive au sens large : elle s'annule en effet en dehors du lieu où le morphisme π_Δ est un isomorphisme local.

9.3 Construction de la $\widetilde{\Gamma}$-réduction

Nous allons mettre à profit les deux paragraphes précédents pour construire la $\tilde{\Gamma}$-réduction des orbifoldes kählériennes compactes (*i.e.* une version méromorphe de la réduction de Remmert pour $\widetilde{X}_\Delta$). Rappelons tout d'abord que la fibration correspondante sur (X/Δ) a été introduite (dans la catégorie orbifolde) dans [Cam07, § 11.4]. La construction de [Cam07] s'effectue directement sur l'orbifolde (X/Δ) et permet de construire une fibration vérifiant les mêmes propriétés que dans le cas absolu (*i.e.* $\Delta = \emptyset$). Rappelons le résultat en question.

Théorème 9.3.1 (th. 11.21 [Cam07])
Soit (X/Δ) une orbifolde lisse avec X kählérienne compacte. Il existe alors une unique fibration presque-holomorphe (à équivalence biméromorphe près)

$$\gamma_{(X/\Delta)} : (X/\Delta) \dashrightarrow \Gamma(X/\Delta)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. *pour $y \in \Gamma(X/\Delta)$ générique, $\pi_1(X_y/\Delta_{X_y})_{(X/\Delta)}$ est fini (où X_y désigne la fibre de $\gamma_{(X/\Delta)}$ au-dessus de y)*
2. *pour $y \in \Gamma(X/\Delta)$ général, si Z est un sous-ensemble analytique de X qui rencontre X_y et si $\pi_1(Z/\Delta_Z)_{(X/\Delta)}$ est fini, alors Z est contenu dans X_y.*

La fibration $\gamma_{(X/\Delta)}$ est appelée la Γ-réduction de (X/Δ) et l'entier

$$\gamma d(X/\Delta) := \dim(\Gamma(X/\Delta))$$

la Γ-dimension de (X/Δ).
Une orbifolde (X/Δ) sera dite de type π_1-général si $\gamma d(X/\Delta) = \dim(X)$.

Explicitons dans un cas simple ce que signifie la notation $\pi_1(Z/\Delta_Z)_{(X/\Delta)}$. Plaçons nous en effet dans la situation où Z rencontre transversalement le diviseur Δ : Z est lisse et la restriction de Δ à Z est encore à croisements normaux. Par restriction, on obtient donc une orbifolde lisse (Z/Δ_Z) et il est facile de vérifier que l'inclusion $i : (Z/\Delta_Z) \hookrightarrow (X/\Delta)$ induit un morphisme au niveau des groupes fondamentaux orbifoldes :

$$i_* : \pi_1(Z/\Delta_Z) \longrightarrow \pi_1(X/\Delta).$$

La notation $\pi_1(Z/\Delta_Z)_{(X/\Delta)}$ désigne alors naturellement l'image du morphisme i_*. Pour définir cette quantité dans le cas général, on choisit un modèle biméromorphe (divisible) de (X/Δ) sur lequel le sous-ensemble analytique Z devient lisse et rencontre transversalement le diviseur orbifolde. Pour plus de détails sur les notions de morphismes (divisibles ou non), de sous-objets et de restrictions dans la catégorie orbifolde, on renverra systématiquement à [Cam07].

L'objectif de ce dernier paragraphe est donc de construire la $\tilde{\Gamma}$-réduction sur le revêtement universel $\widetilde{X}_\Delta$ de (X/Δ) et de montrer que cette fibration est compatible avec la réduction $\gamma_{(X/\Delta)}$ introduite ci-dessus. Par analogie avec le cas absolu, on voudrait montrer l'existence d'une fibration (presque-holomorphe) **propre** sur $\widetilde{X}_\Delta$ qui contracte les sous-variétés compactes maximales de $\widetilde{X}_\Delta$. La correspondance entre sous-variétés compactes de $\widetilde{X}_\Delta$ et sous-orbifoldes de (X/Δ) de groupe fondamental fini dans (X/Δ) est ainsi l'analogue du lemme 2.2.1 et assure la compatibilité entre $\gamma_{(X/\Delta)}$ et une $\tilde{\Gamma}$-réduction potentielle de $\widetilde{X}_\Delta$.

Lemme 9.3.1
Soit (X/Δ) une orbifolde lisse de revêtement universel $\pi_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \longrightarrow (X/\Delta)$ (avec X compacte) et soit Z une sous-variété irréductible de X. Sont équivalentes les deux assertions suivantes :

(i) le groupe $\pi_1(Z/\Delta_Z)_{(X/\Delta)}$ est fini

(*ii*) *chaque composante irréductible de* $\pi_\Delta^{-1}(Z)$ *est compacte.*

Démonstration :

On se place sur un modèle biméromorphe (divisible) adéquat de telle sorte que Z rencontre transversalement Δ ; si Y désigne une composante irréductible de $\pi_\Delta^{-1}(Z)$ (ici une composante connexe puisque Z est lisse), le revêtement $Y \longrightarrow Z$ ramifié en au plus Δ_Z correspond au sous-groupe

$$G = \mathrm{Ker}(\pi_1(Z/\Delta_Z) \longrightarrow \pi_1(Z/\Delta_Z)_{(X/\Delta)}).$$

D'après le théorème 9.1.1, ce revêtement est fini si et seulement si G est d'indice fini dans $\pi_1(Z/\Delta_Z)$ ou encore : Y est compacte si et seulement si $\pi_1(Z/\Delta_Z)_{(X/\Delta)}$ est fini. □

En suivant les lignes de [Cam94], nous allons montrer comment construire la $\tilde{\Gamma}$-réduction de $\widetilde{X}_\Delta$. Avant toute chose, faisons l'observation suivante : le fait de remplacer le diviseur Δ par sa régularisation Δ_{reg} ne change ni le groupe fondamental de (X/Δ) ni son revêtement universel. Nous ferons donc désormais l'hypothèse suivante :

dans toute la suite, le diviseur Δ sera supposé régulier.

Si ω_Δ est une métrique hermitienne orbifolde sur (X/Δ), la proposition 9.2.2 montre que $\widetilde{\omega_\Delta} := \pi_\Delta^*(\omega_\Delta)$ est une métrique hermitienne (au sens des V-variétés) sur $\widetilde{X}_\Delta$. On peut alors lui associer une distance d_Δ qui fait de $(\widetilde{X}_\Delta, d_\Delta)$ un espace métrique complet (compacité de X). On pourra trouver les différentes vérifications techniques concernant la distance associée à une métrique riemannienne sur une V-variété dans [Bor92].

Si Z est une sous-variété irréductible compacte de dimension p de $\widetilde{X}_\Delta$, on peut définir son volume respectivement à la métrique $\widetilde{\omega_\Delta}$:

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{\omega_\Delta}}(Z) = \int_Z \widetilde{\omega_\Delta}^p.$$

On peut par exemple calculer cette intégrale dans les uniformisations locales (sans oublier de diviser la quantité obtenue par le degré du revêtement). Par compacité de X, on en déduit facilement :

Lemme 9.3.2

Il existe des constantes $r, \delta > 0$ *vérifiant les propriétés suivantes : pour toute sous-variété irréductible compacte* $Z \subset \widetilde{X}_\Delta$ *et tout* $z \in Z$,

$$\mathrm{vol}_{\widetilde{\omega_\Delta}}(Z \cap B(z,r)) \geq \delta$$

où $B(z,r)$ *désigne la boule de centre* z *et de rayon* r *pour la distance* d_Δ.

Les résultats de compacité relatifs à l'espace des cycles d'une variété kählérienne permettent de reformuler le lemme précédent de la manière suivante.

Lemme 9.3.3

Soit (X/Δ) *une orbifolde* kählérienne *lisse de revêtement universel* $\widetilde{X}_\Delta$ *et* T

une composante irréductible de $\mathcal{C}(\widetilde{X}_\Delta)$. On considère alors le graphe d'incidence de la famille de cycles paramétrée par T :

$$G_T = \left\{(t,x) \in T \times \widetilde{X}_\Delta |\, x \in Z_t\right\}$$

(où Z_t est le cycle de paramètre t) et les projections naturelles :

$$q : G_T \longrightarrow \widetilde{X}_\Delta \text{ et } r : G_T \longrightarrow T.$$

Dans cette situation, l'application q est propre.

Remarque 9.3.1
Par construction, r est également propre. Plus généralement, si T est une composante irréductible de $\mathcal{C}(Y)$ où Y est un espace normal, la projection $r : G_T \longrightarrow T$ est toujours surjective et propre.

Démonstration :
On munit $\widetilde{X}_\Delta$ d'une métrique $\widetilde{\omega_\Delta}$ comme ci-dessus (cette métrique est maintenant kählérienne). Si K est un compact de $\widetilde{X}_\Delta$, $r(q^{-1}(K))$ consiste en l'ensemble des cycles paramétrés par T rencontrant K. Or, comme T est une composante irréductible de $\mathcal{C}(\widetilde{X}_\Delta)$ et comme $\widetilde{\omega_\Delta}$ est kählérienne, les cycles de T ont tous même volume. On note v cette quantité et on considère le compact $\hat{K}$ de $\widetilde{X}_\Delta$ défini par :

$$\hat{K} = \left\{x \in \widetilde{X}_\Delta |\, d_\Delta(x,K) \leq M\right\} \text{ avec } M > r\left\lceil \frac{v}{\delta} \right\rceil$$

(les constantes r et δ étant celles du lemme 9.3.2). Le choix de $\hat{K}$ entraîne alors l'inclusion

$$q^{-1}(K) \subset r^{-1}(r(q^{-1}(\hat{K}))),$$

c'est-à-dire que les cycles de volume $\leq v$ et rencontrant K sont automatiquement contenus dans $\hat{K}$. Supposons en effet qu'il existe un cycle Z rencontrant K, de volume v et non-contenu dans $\hat{K}$. Soit alors x un point de $Z \cap K$ et $y \in Z$ n'appartenant pas à $\hat{K}$. On peut donc trouver N boules de rayon r disjointes (avec $N > v/\delta$) centrées en des points z_i de Z avec $z_1 = x$ et $z_N = y$. On aurait alors :

$$\mathrm{vol}_{\widetilde{\omega_\Delta}}(Z) \geq \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}_{\widetilde{\omega_\Delta}}(Z \cap B(z_i, r)) \geq N\delta > v.$$

Comme Z est de volume v, on en déduit qu'il doit être entièrement contenu dans $\hat{K}$ dès qu'il rencontre K.

Or, d'après le théorème de Bishop, $r(q^{-1}(\hat{K}))$ est compact (les cycles de $r(q^{-1}(\hat{K}))$ ont un volume constant et ont leur support dans un compact fixé) ; par propreté de r (remarque 9.3.1), on en déduit que $q^{-1}(K)$ est également compact. L'application q est donc bien propre. □

Pour construire la $\tilde{\Gamma}$-réduction de $\widetilde{X}_\Delta$, on utilisera le résultat principal de [Cam81].

Théorème 9.3.2 (th. 1, p. 189 [Cam81])
Soit Y un espace analytique normal et T une composante irréductible de $\mathcal{C}(Y)$

telle que la famille $(Z_t)_{t\in T}$ paramétrée par T soit couvrante (i.e. q est surjective) et de membre générique irréductible (i.e. r est à fibres connexes). On suppose de plus que l'application q est propre.
Il existe alors une application presque-holomorphe propre à fibres connexes

$$g_T : Y \dashrightarrow Q_T$$

dont la fibre passant par un point générique $y \in Y$ est la classe d'équivalence de y pour la relation d'équivalence engendrée par la famille de cycles paramétrée par T (deux points de Y sont équivalents si ils peuvent être joints par une chaîne finie et connexe de cycles de la famille Z_t).

On peut alors appliquer le même schéma de démonstration que dans le cas absolu pour construire la $\tilde{\Gamma}$-réduction de $\widetilde{X}_\Delta$.

Théorème 9.3.3
Soit (X/Δ) une orbifolde kählérienne lisse de revêtement universel $\widetilde{X}_\Delta$. Il existe alors une unique fibration presque-holomorphe propre

$$\tilde{\gamma}_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{X}_\Delta)$$

vérifiant la propriété suivante :
pour $x \in \widetilde{X}_\Delta$ général, toute sous-variété irréductible compacte de $\widetilde{X}_\Delta$ contenant x est contenue dans la fibre de $\tilde{\gamma}_\Delta$ passant par x.

Corollaire 9.3.1
Le lemme 9.3.1 montre l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_\Delta & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_\Delta} & \Gamma(\widetilde{X}_\Delta) \\ {\scriptstyle \pi_\Delta}\downarrow & & \downarrow \\ (X/\Delta) & \xrightarrow{\gamma(X/\Delta)} & \Gamma(X/\Delta) \end{array}$$

Démonstration du théorème 9.3.3 :
Soit d le plus petit entier tel qu'il existe une fibration presque-holomorphe propre

$$f : \widetilde{X}_\Delta \dashrightarrow V$$

avec $\dim(V) = d$. Supposons par l'absurde que, pour $x \in \widetilde{X}_\Delta$ général, il existe un sous-ensemble analytique compact non-contenu dans $f^{-1}(f(x))$. Comme $\mathcal{C}(\widetilde{X}_\Delta)$ est dénombrable à l'infini, il existe alors une composante irréductible T de $\mathcal{C}(\widetilde{X}_\Delta)$ telle que la famille de cycles $(U_t)_{t\in T}$ paramétrée par T vérifie

$$\forall\, t \in T,\ \dim(f(U_t)) > 0$$

et U_t est irréductible pour t générique dans T. On considère alors la famille de cycles *compacts*

$$Z_t = f^{-1}(f(U_t))$$

paramétrée (méromorphiquement) par T. A nouveau, Z_t est irréductible pour t générique dans T et, grâce au lemme 9.3.3, on peut appliquer le théorème

9.3.2 à la famille $(Z_t)_{t\in T}$: le quotient correspondant est une fibration presque-holomorphe propre

$$g_T : \widetilde{X}_\Delta \dashrightarrow Q_T$$

et, la fibre de f étant strictement contenue dans celle de g_T, on a :

$$\dim(Q_T) < d = \dim(V).$$

Ceci est en contradiction avec le choix de d et montre que la fibration $f : \widetilde{X}_\Delta \dashrightarrow V$ et bien celle recherchée.
De même, l'unicité est évidente par construction : si f et g sont deux fibrations définies sur $\widetilde{X}_\Delta$ comme dans l'énoncé ci-dessus et x un point suffisamment général, la fibre de f en x doit être contenue dans celle de g et réciproquement. □

9.4 Orbifoldes de petite Γ-dimension

Pour finir ce chapitre, nous entendons montrer que l'analogue de la proposition 2.5.1 existe dans la catégorie orbifolde. Remarquons tout d'abord que, comme dans le cas absolu, on a :

$$\gamma d(X/\Delta) = 0 \text{ si et seulement si } \pi_1(X/\Delta) \text{ est fini.}$$

A nouveau, le groupe fondamental suffit à caractériser la condition $\gamma d = 1$.

Théorème 9.4.1
Soit (X/Δ) une orbifolde kählérienne lisse. La Γ-dimension de (X/Δ) vaut 1 si et seulement si son groupe fondamental $\pi_1(X/\Delta)$ est commensurable au groupe fondamental d'une courbe de genre $g \geq 1$.

Démonstration :
Si $\gamma d(X/\Delta) = 1$, la suite exacte orbifolde (voir [Cam07, prop. 11.7]) associée à la fibration

$$\gamma : (X/\Delta) \longrightarrow C = \Gamma(X/\Delta)$$

montre que $\pi_1(X/\Delta)$ est l'extension d'un groupe G commensurable au groupe fondamental d'une courbe de genre positif par un groupe fini. Le lemme A.0.2 de l'appendice A montre que $\pi_1(X/\Delta)$ est lui aussi commensurable à un tel groupe.

Réciproquement, si $\pi_1(X/\Delta) \equiv \pi_1(C)$ avec $g(C) > 0$, on en déduit que $\pi_1(X/\Delta)$ est résiduellement fini ($\pi_1(C)$ l'est car il est linéaire). On peut alors appliquer le théorème 9.1.2 : il existe un revêtement fini $\pi : Y \longrightarrow (X/\Delta)$ qui ramifie exactement en Δ. Comme le groupe fondamental de Y est commensurable à celui de C, on en déduit que $\gamma d(Y) = 1$. Le revêtement universel de (X/Δ) étant biméromorphe à celui de Y, on en déduit que $\gamma d(X/\Delta) = 1$. □

Corollaire 9.4.1
Si (S/Δ) est une surface orbifolde kählérienne (lisse), la valeur de $\gamma d(S/\Delta)$ ne dépend que du groupe fondamental de (S/Δ).

On rappelle alors la définition 12.1 de [Cam07] :

Définition 9.4.1
Une famille d'orbifoldes paramétrée par une base B est une orbifolde lisse $(\mathcal{X}/\mathcal{D})$ dont la variété sous-jacente est munie d'une submersion propre à fibre connexe

$$f : \mathcal{X} \longrightarrow B$$

telle que la restriction de f à chaque composante irréductible $\mathcal{D}_j$ de $\mathcal{D}$ soit encore submersive.

Dans cette terminologie, le théorème 9.4.1 a également pour conséquence l'invariance par déformation de la Γ-dimension des surfaces orbifoldes.

Corollaire 9.4.2
Soit $(\mathcal{S}/\mathcal{D}) \longrightarrow B$ une famille de surfaces kählériennes orbifoldes au-dessus d'une base connexe B. L'application

$$b\,(\in B) \mapsto \gamma d(\mathcal{S}_b/\mathcal{D}_b)$$

est constante au cours de la déformation.

Démonstration :
D'après le corollaire 9.4.1, $\gamma d(\mathcal{S}_b/\mathcal{D}_b)$ ne dépend que de $\pi_1(\mathcal{S}_b/\mathcal{D}_b)$. Or, si on fixe un point base $0 \in B$ et si on note $(S/\Delta) = (\mathcal{S}_0/\mathcal{D}_0)$, on peut trouver (pour b proche de 0) un difféomorphisme

$$\varphi_b : \mathcal{X}_b \xrightarrow{\sim} X$$

tel que, pour tout j :

$$\varphi_b(\mathcal{D}_{j|\mathcal{X}_b}) = \Delta_j.$$

En particulier, le groupe $\pi_1(\mathcal{S}_b/\mathcal{D}_b)$ ne dépend pas de b et la Γ-dimension est bien invariante. $\square$

Troisième partie

Extensions de formes pluricanoniques : la méthode One-Tower

Chapitre 10

Introduction à la partie III

10.1 Invariance des plurigenres

Parmi les invariants biméromorphes d'une variété complexe compacte, les plurigenres font partie des plus simples à définir mais cette simplicité ne doit pas cacher le fait qu'ils sont une source considérable d'informations sur la géométrie de la variété : leur comportement dicte en effet une grande partie de la-dite géométrie. Une question naturelle qui se pose alors est la suivante : comment se comportent les plurigenres dans une déformation de variétés complexes ? Si la réponse à cette question est triviale dans le cas des courbes (les plurigenres sont alors des invariants topologiques), elle l'est déjà nettement moins dans le cas des surfaces [Iit70] :

Théorème 10.1.1 (S. Iitaka, 1970)
Les plurigenres sont invariants dans une déformation de surfaces.

La démonstration de ce résultat s'appuyant sur la classification des surfaces obtenue (entre autres) par K. Kodaira, F. Enriques et I.R. Shafarevich, celui-ci n'admet bien entendu aucune généralisation en dimension supérieure. D'autant plus que, sous cette forme naïve, l'énoncé précédent devient faux en dimension supérieure : une construction due à I. Nakamura [Nak72] montre que, dès la dimension 3, les plurigenres peuvent avoir des sauts au cours d'une déformation. Dans l'exemple de Nakamura, les fibres de la déformation ne sont cependant pas kählériennes. Cette remarque motive donc la conjecture suivante :

Conjecture 10.1.1
Les plurigenres sont invariants dans une déformation de variétés kählériennes. En d'autres termes, si $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ est une application holomorphe, propre et connexe au dessus de la base B (connexe) et si toutes les fibres de π sont kählériennes, l'application :

$$B \ni b \mapsto p_m(\mathcal{X}_b)$$

est constante sur B pour tout entier $m \geq 1$.

Dans le cadre purement kählérien, le résultat le plus significatif obtenu dans la direction de la conjecture 10.1.1 est dû à M. Levine :

Théorème 10.1.2 ([Lev83])
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ une déformation de variétés complexes et 0 un point de B ; on suppose que $\mathcal{X}_0$ la fibre au dessus de 0 est dans la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki et que le système linéaire $|mK_{\mathcal{X}_0}|$ contient un membre lisse pour un certain entier $m \geq 1$. Il existe alors un voisinage U de 0 dans B (on peut même choisir U un ouvert de Zariski) tel que :

$$\forall\, b \in U,\ \forall\, k = 1 \dots m,\ p_k(\mathcal{X}_b) = p_k(\mathcal{X}_0).$$

On rappelle que la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki désigne la classe des variétés complexes qui sont biméromorphes à une variété kählérienne. Les variétés de la classe $\mathcal{C}$ jouissent de certaines propriétés vérifiées par les variétés kählériennes, par exemple la décomposition de Hodge est encore valable sur une variété $X \in \mathcal{C}$, ainsi que la dégénéréscence en E_1 de la suite spectrale de Hodge-Frölicher. *A contrario*, si la classe des variétés kählériennes est stable par petites déformations (théorème de Kodaira-Spencer), il n'en est rien de la classe $\mathcal{C}$ (voir [Cam91a]).

Pour montrer le théorème 10.1.2, M. Levine calcule explicitement l'obstruction au fait de pouvoir étendre une section définie sur la fibre $\mathcal{X}_0$ à un voisinage de $\mathcal{X}_0$ et, sous les hypothèses ci-dessus, il montre que cette obstruction s'annule par un argument de théorie de Hodge (dégénérescence de la suite spectrale de Frölicher d'un revêtement fini de $\mathcal{X}$). La conjecture 10.1.1 se réduit en effet à un problème d'extension de sections. D'après les théorèmes d'images directes de H. Grauert, on sait que la fonction :

$$B \ni b \mapsto p_m(\mathcal{X}_b)$$

est semi-continue supérieurement (pour une déformation $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$) ; en particulier, si on fixe un point base 0 dans B, on a nécessairement :

$$p_m(\mathcal{X}_b) \leq p_m(\mathcal{X}_0) \text{ au voisinage de } 0.$$

Si on sait montrer que toute section $s \in H^0(\mathcal{X}_0, mK_{\mathcal{X}_0})$ se prolonge sur un voisinage de la fibre $\mathcal{X}_0$, on obtient alors l'autre inégalité et donc :

$$p_m(\mathcal{X}_b) = p_m(\mathcal{X}_0) \text{ au voisinage de } 0.$$

La fonction $b \mapsto p_m(\mathcal{X}_b)$ est alors localement constante donc constante si B est connexe.

Dans une série d'articles remarquables [Siu98] et [Siu02], Y.-T. Siu démontre l'invariance des plurigenres dans le cas d'une famille projective au-dessus du disque unité de $\mathbb{C}$ (la question étant locale sur la base, ce cas suffit amplement) : les fibres sont alors projectives et munies d'une polarisation globale. Dans [Siu98], qui traite le cas du type général, la propriété d'extension des sections pluricanoniques est établie en comparant de façon astucieuse deux idéaux multiplicateurs (voir le chapitre 11 pour les notions introduites). L'article [Siu02] démontre le cas général en autorisant même des sections pluricanoniques à valeurs dans un fibré en droites pseudo-effectif (c'est à dire à courbure positive au sens des courants) :

Théorème 10.1.3 ([Siu02])
Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective et $(L, \tilde{h})$ un fibré pseudo-effectif sur

$\mathcal{X}$ avec $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ bien définie et $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$ et soit $m \geq 1$ un entier.
Alors, toute section $s \in H^0(\mathcal{X}_0, mK_{\mathcal{X}_0} + L)$ vérifiant : $\|s\|_{\infty,\tilde{h}} < +\infty$ s'étend en une section $\tilde{s} \in H^0(\mathcal{X}, mK_{\mathcal{X}} + L)$ (c'est-à-dire : $\tilde{s}_{\mathcal{X}_0} = s \wedge \pi^*(dt)$).

Le cas du fibré L trivial correspond donc à l'invariance des plurigenres dans la situation d'une famille projective.

Enfin, récemment, M. Păun a donné une nouvelle démonstration de l'invariance des plurigenres : en introduisant la méthode dite One-Tower, il a considérablement simplifié la démonstration de [Siu02] et a amélioré l'énoncé 10.1.3 (le rendant dans le même temps plus naturel) :

Théorème 10.1.4 ([Pău07])
Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille de variétés projectives et $(L, \tilde{h})$ un fibré pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ avec $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ bien définie et soit $m \geq 1$ un entier.
Toute section $s \in H^0(\mathcal{X}_0, (mK_{\mathcal{X}_0} + L) \otimes \mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}))$ s'étend en une section $\tilde{s} \in H^0(\mathcal{X}, mK_{\mathcal{X}} + L)$.

10.2 Cadre général de la méthode One-Tower

Bien qu'ayant montré son efficacité dans le cas des familles projectives (au dessus du disque), la méthode One-Tower d'extension de sections pluricanoniques s'adapte à différentes situations et il est possible d'en extraire un principe général.

Soit donc X une variété complexe munie d'un fibré hermitien (A, h_A) à courbure strictement positive (dans le cas où X est projective, cela correspond à un fibré ample) et soit S une hypersurface compacte de X. On se donne enfin une section $s \in H^0(S, mK_S)$ que l'on veut prolonger à X tout entier (pour simplifier, on expose le cas où le fibré L est trivial). Le procédé, pour pouvoir être mis en place, nécessite un résultat de type Ohsawa-Takegoshi (correspondant au cas $m = 1$) :

Méta-théorème 10.2.1 (voir le théorème 12.1.2)
Soit F un fibré en droites sur X muni d'une métrique h dont la forme de courbure $i\Theta_h(F)$ est positive (en un sens à préciser). Alors toute section $\sigma \in H^0(S, K_S + F)$ vérifiant :

$$\int_S \|\sigma\|_h^2 < +\infty$$

s'étend à l'espace X tout entier.

Quitte à remplacer A par un multiple suffisamment grand, on impose alors les deux conditions suivantes :

(A1) Toute section de $mK_S + A_S$ s'étend à X.

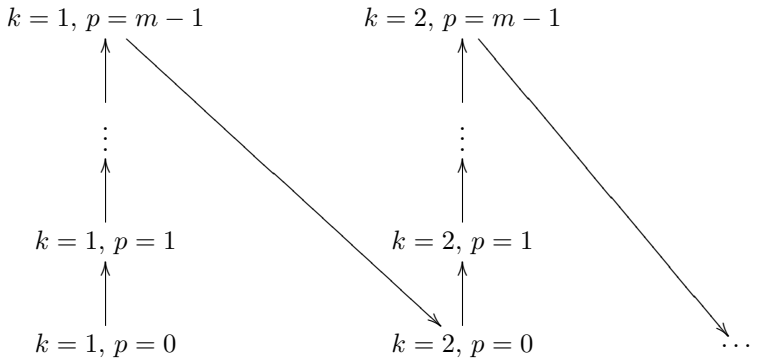
(A2) Pour tout $p = 0 \dots m-1$, le fibré $pK_X + A$ est engendré, au voisinage de S, par une famille de sections $(s_j^{(p)})_{j=1..N_p}$.

Comme on impose un nombre fini de conditions, on peut toujours trouver un multiple de A qui remplit les conditions **(A1)** et **(A2)**.

La méthode consiste alors en deux étapes :

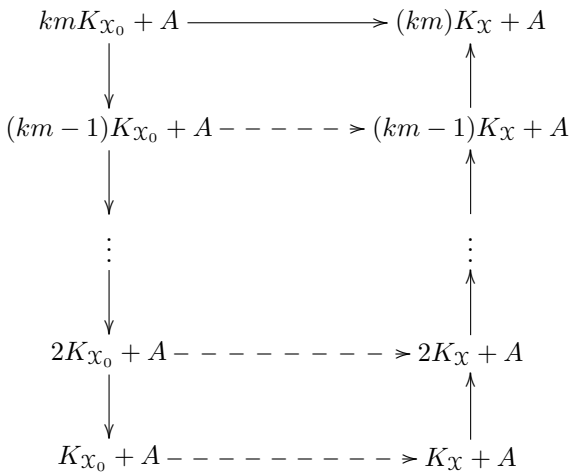
1. **Extension pas à pas des sections $s^k \otimes s_j^{(p)}$:** en utilisant 10.2.1, on produit une extension $s_j^{(km+p)}$ de $s^k \otimes s_j^{(p)}$. Pour cela, on procède par récurrence et on utilise la famille d'extensions $(s_j^{(km+p-1)})_{j=1..N_{p-1}}$ construite au cran précédent pour concentrer les singularités le long des zéros de s ; si $p = 0$, on utilise la famille $(s_j^{((k-1)m+m-1)})_{j=1..N_{m-1}}$ (la récurrence se fait en fait modulo m).
2. **Extraction de racines :** la famille de sections $(s_j^{(km)})_{j=1..N_0}$ induit alors une métrique sur le fibré $kmK_X + A$ et sa racine $k^{\text{ième}}$ est une métrique (à courbure positive) sur le $\mathbb{Q}$-fibré $mK_X + \frac{1}{k}A$. En faisant tendre k vers l'infini, on peut ainsi espérer produire une métrique sur $(m-1)K_X$ pour laquelle la section s est de carré intégrable et lui appliquer alors 10.2.1 en écrivant $mK_X = K_X + (m-1)K_X$.

Les extensions succesives de la première étape se font par récurrence sur l'entier $km + p$ ($k \geq 1$ et $0 \leq p \leq m-1$) et la "tour" se présente donc de la façon suivante



Il est maintenant grand temps d'expliciter l'appellation de la méthode (par opposition aux techniques développées par Y.-T. Siu). Dans [Siu02], ce dernier propose la démarche suivante pour étendre (avec estimations) $s^k \otimes s_A$ où s est la section pluricanonique que l'on veut étendre et s_A une section d'un fibré auxiliaire suffisamment ample. Tout d'abord, on effectue des contractions successives avec des sections (locales) de $-K_{\mathcal{X}}$: si ξ est une telle section, $\xi \otimes s^k \otimes s_A$ est une section de $(km-1)K_{\mathcal{X}_0} + A$. En itérant ce procédé, on se ramène à des sections (locales) de $K_{\mathcal{X}_0} + A$, fibré adjoint pour lequel on peut appliquer Ohsawa-Takegoshi et obtenir des extensions des sections locales considérées. On peut alors se servir de ces extensions pour remonter d'un cran dans la tour ; à nouveau, en se servant à chaque étape des sections étendues au cran précédent, on constate que l'on peut remonter dans la deuxième tour jusqu'au rang km et ainsi obtenir une extension (avec estimations) de $s^k \otimes s_A$. Les deux tours de

[Siu02] se présentent donc de la façon suivante :



Dans cette troisième partie, nous allons montrer comment mettre en pratique cette technique à tour unique dans des contextes assez différents.

10.3 Résultat principal

Avant de donner plus de détails sur les notions introduites et sur la mise en place effective de la méthode One-Tower, citons le résultat principal de cette partie (démontré dans le chapitre 12 ci-dessous) :

Théorème 12.1.1 ([Cla05])
Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille projective et $(L, \tilde{h})$ un fibré pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ avec $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ bien définie et $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$.
Pour tout entier $m \geq 1$, l'application de restriction :

$$H^0(\mathcal{X}, m(K_{\mathcal{X}} + L)) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_0, m(K_{\mathcal{X}_0} + L))$$

est surjective.

Bien que le théorème 12.1.1 ait un air de famille avec le théorème 10.1.4, ils ne sont pas logiquement conséquence l'un de l'autre. Le théorème 10.1.4 permet en effet d'étendre des sections qui sont dans l'idéal $\mathcal{I}(\tilde{h}^{\otimes m})$. Or, par sous-additivité (théorème 11.3.4), on a :

$$\mathcal{I}(\tilde{h}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_0}) \subset \mathcal{I}(\tilde{h}_{\mathcal{X}_0})^{\otimes m} (= \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$$

avec, en général, inclusion stricte. Comme le théorème 12.1.1 prétend que, sous l'hypothèse $\mathcal{I}(\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$, on peut étendre toutes les sections de $m(K_{\mathcal{X}} + L)$, on constate que ce dernier n'est pas une conséquence du théorème 10.1.4.

On peut d'ailleurs essayer d'interpoler ces différents résultats d'extension. Le résultat suivant synthétise les résultats d'extension de [Pău07] et [Cla05] (voir également le théorème 12.5.1 pour un énoncé similaire).

Théorème 10.3.1 ([Dem06])
Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille projective et (L_j, h_j) $(0 \leq j \leq m-1)$ des fibrés en droites pseudo-effectifs sur $\mathcal{X}$. On suppose :

(i) pour tout $0 \leq j \leq m-1$, la restriction de h_j à $\mathcal{X}_0$ est bien définie,

(ii) pour tout $1 \leq j \leq m-1$, l'idéal multiplicateur $\mathcal{I}(h_{j|\mathcal{X}_0})$ est trivial.

Alors, toute section

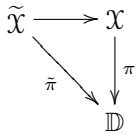
$$s \in H^0(\mathcal{X}_0, (mK_{\mathcal{X}_0} + \sum_{j=0}^{m-1} L_j) \otimes \mathcal{I}(h_{0|\mathcal{X}_0}))$$

s'étend à $\mathcal{X}$ tout entier.

En revanche, on peut voir le théorème 12.1.1 comme une version en famille du théorème 4.1 de [Tak06] dans le cas des variétés projectives ; nous en donnerons une démonstration s'appuyant sur la méthode "One-Tower".

Afin de faire le lien avec les parties précédentes, nous étudierons les formes pluricanoniques L^2 des revêtements universels (ou plus généralement des revêtements non-compacts) des variétés projectives. Faute d'un énoncé plus naturel, nous montrerons que ces sections admettent des prolongements méromorphes (bien que nous ne soyons pas pour l'instant parvenu à le montrer, le caractère holomorphe de ces extensions semble probable).

Théorème 12.3.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective et considérons :



la famille des revêtements universels. Alors toute section $s \in H^0(\widetilde{\mathcal{X}}_0, mK_{\widetilde{\mathcal{X}}_0})$ vérifiant

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{\frac{1}{m}} < +\infty$$

admet une extension σ méromorphe (avec des pôles d'ordre au plus $m-1$ le long d'un diviseur fixé), holomorphe au voisinage de la fibre centrale et vérifiant de plus

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}} (\sigma \wedge \overline{\sigma})^{\frac{1}{m}} \leq C_0 \int_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{\frac{1}{m}}$$

où C_0 est la constante numérique apparaissant dans le théorème d'Ohsawa-Takegoshi.

Pour finir, nous redonnerons également une démonstration du théorème suivant qui fait de plus le lien avec la Γ-réduction :

Théorème 12.4.1
Soit X une variété (projective) de type général et de groupe fondamental infini, $\widetilde{X}$ son revêtement universel et Z la fibre générale de la Γ-réduction de $\widetilde{X}$:

$$\gamma_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X}).$$

Pour $m \geq 2$, l'application de restriction :

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}) \longrightarrow H^0(Z, mK_Z)$$

est surjective.

Ce dernier a également comme corollaire presque immédiat le résultat suivant :

Corollaire 12.4.2
Si X est une variété de type général et de type π_1-général, on a :

$$\forall\, m \geq 2,\ p_m(X) \geq 1.$$

Chapitre 11

Métriques singulières et idéaux multiplicateurs

On entend dans ce chapitre rappeler quelques notions sur les métriques hermitiennes singulières (sur les fibrés en droites) ainsi que les notions de positivité qui y sont attachées. Nous donnerons également des précisions sur les idéaux multiplicateurs associés aux métriques à courbure positive (ou plus généralement aux fonctions quasi-plurisousharmoniques) et rappellerons les théorèmes de Nadel.

11.1 Courbure des métriques singulières

Soit X une variété complexe munie d'une métrique hermitienne notée ω et L un fibré en droites sur X.

Définition 11.1.1
Une métrique hermitienne singulière $\tilde{h}$ sur L est un produit $\tilde{h} = e^{-\varphi}h$ où

$$\varphi : X \longrightarrow [-\infty; +\infty[$$

est une fonction localement intégrable sur X et h une métrique lisse L.

Comme la condition est locale sur le poids φ, cette condition ne dépend pas de la métrique lisse choisie pour tester l'intégrabilité : une métrique $\tilde{h}$ est donc singulière lorsque tous ses poids locaux sont (localement) intégrables. Par poids local, on entend la notion suivante :

si U est un ouvert de X sur lequel L est trivial

$$L_{|U} \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{C}$$

et une métrique h (non nécessairement lisse) est donnée par une relation du type

$$\|(x, \xi)\|_h = |\xi|\, e^{-\psi(x)}$$

où ψ est une fonction (prenant éventuellement des valeurs infinies) sur U : c'est le poids local de la métrique h relativement à la trivialisation choisie sur U.

La classe des métriques singulières est celle où l'on autorise les poids à être localement intégrables (et pas seulement lisses).

Cette condition d'intégrabilité a pour objectif principal de garantir l'existence d'un courant de courbure associé à une métrique singulière $\tilde{h}$. En effet, si U_1 et U_2 sont deux trivialisations de L (avec $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$) et si ψ_1 et ψ_2 sont les poids locaux (intégrables) de $\tilde{h}$ sur U_1 et U_2, on peut alors calculer

$$i\partial\overline{\partial}\psi_1 \text{ et } i\partial\overline{\partial}\psi_2$$

au sens des distributions : ce sont des courants de type $(1,1)$ sur les ouverts en question. Or, sur $U_1 \cap U_2$, les poids diffèrent du facteur suivant :

$$\psi_1 = \psi_2 + \log(|g|) \text{ avec } g \in \mathcal{O}^*(U_1 \cap U_2)$$

où g est la fonction de transition de L sur $U_1 \cap U_2$. Comme g ne s'annule pas, on a

$$i\partial\overline{\partial}\log(|g|) = 0$$

et les courants $i\partial\overline{\partial}\psi_1$ et $i\partial\overline{\partial}\psi_2$ se recollent sur l'intersection $U_1 \cap U_2$.

Définition 11.1.2
Si $(L, \tilde{h})$ un fibré hermitien muni d'une métrique singulière $\tilde{h}$, la courbure de $\tilde{h}$

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) = i\partial\overline{\partial}\psi \text{ (avec } \psi \text{ un poids local de } \tilde{h})$$

est bien définie au sens des courants sur X.

Remarque 11.1.1
Si on écrit $\tilde{h} = e^{-\varphi}h$ où h est une métrique lisse, on a bien évidemment :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) = i\partial\overline{\partial}\varphi + i\Theta_h(L).$$

11.2 Notions de positivité

La notion de positivité pour les courants de type $(1,1)$ (et plus généralement de type (p,p)) est parfaitement définie (voir par exemple [Dem97, chap. III]). Par souci de commodité, rappelons cette définition pour les courants de type $(1,1)$.

Définition 11.2.1
Soit $T = i\sum_{j,k} T_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z_k}$ l'expression locale d'un $(1,1)$-courant (les $T_{j,k}$ sont donc des distributions). Le courant T est dit positif *si pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{1 \leq j,k \leq n} \lambda_j \overline{\lambda_k} T_{j,k}$$

est une mesure positive.

Ceci nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition 11.2.2
Un fibré hermitien $(L, \tilde{h})$ muni d'une métrique éventuellement singulière est dit pseudo-effectif si son courant de courbure est positif :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq 0.$$

Un fibré L est dit pseudo-effectif si il peut être muni d'une métrique singulière à courbure positive.

Cela revient bien entendu à dire que les poids locaux de la métrique sont des fonctions plurisousharmoniques (on adoptera naturellement l'abréviation *psh* dans la suite).

Il est maintenant grand temps de dicuter d'une classe particulièrement importante de métriques singulières : celle induite par une famille de sections. Pour cela, considérons une famille (finie) de sections $(s_j)_{j=1..N}$ avec $s_j \in H^0(X, L)$. L'expression

$$|\xi|_{(s_j)} = \frac{|\xi|^2}{\sum_{j=1}^N |s_j(x)|^2} \text{ avec } \xi \in L_x$$

est alors définie intrinséquement : elle ne dépend pas du choix d'une métrique lisse pour calculer $|\xi|$ et $|s_j(x)|$. On l'appelle la métrique induite par la famille de sections $(s_j)_{j=1..N}$. Si les sections s_j sont données localement par des fonctions holomorphes f_j, le poids local de la métrique est alors :

$$\psi = \log(\sum_{j=1}^N |f_j(x)|^2)$$

et on a donc :

$$i\Theta_{(s_j)}(L) = i\partial\overline{\partial} \log(\sum_{j=1}^N |f_j(x)|^2) \geq 0.$$

Proposition 11.2.1
La métrique (singulière) induite par une famille de sections est à courbure positive (au sens des courants). En d'autres termes, un fibré effectif est pseudo-effectif (il suffit même que mL soit effectif pour un certain entier m).

Les singularités de la métrique induite par une famille $(s_j)_{j=1..N}$ sont bien entendu concentrées le long des zéros communs aux sections s_j. En particulier, un fibré en droites dont un multiple est engendré par ses sections globales est hermitien semi-positif.

On peut également renforcer la notion de positivité introduite ci-dessus :

Définition 11.2.3
Le fibré $(L, \tilde{h})$ est dit strictement positif (par rapport à la métrique hermitienne ω) si il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq \epsilon\omega,$$

i.e. $i\Theta_{\tilde{h}}(L) - \epsilon\omega$ est un courant positif.

Si la variété X est compacte, le fait d'être strictement positif ne dépend pas de la métrique hermitienne ω choisie. Dans le cas non-compact, il n'y aura en général pas d'ambiguité sur la métrique de référence fixée.

Dans le cas projectif, on peut être plus précis : non seulement la stricte positivité ne dépend pas de la métrique ω choisie mais on peut même montrer que c'est une propriété algébrique du fibré L :

Proposition 11.2.2
Soit X une variété projective et L un fibré en doites sur X. On peut alors munir L d'une métrique singulière à courbure strictement positive si et seulement si le fibré L est big, *i.e. si :*

$$\kappa(X,L) := \limsup_{m\to+\infty} \frac{\log(h^0(X,mL))}{\log(m)} = \dim(X).$$

Démonstration :
D'après le lemme de Kodaira, un fibré en droites L est *big* si et seulement si on peut écrire :

$$mL = A + E$$

où m est un entier, A un fibré ample sur X et E un fibré effectif. Si L est *big*, on peut donc considérer une telle décomposition et munir A d'une métrique h_A lisse à courbure strictement positive et E d'une métrique singulière h_E donnée par une famille de sections (comme E est effectif, on peut appliquer la proposition 11.2.1). La métrique $\tilde{h}$ donnée par la racine $m^{\text{ième}}$ de $h_A \otimes h_E$ vérifie alors :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) = \frac{1}{m}(i\Theta_{h_A}(A) + i\Theta_{h_E}(E)) \geq \frac{\epsilon}{m}\omega.$$

Réciproquement, en utilisant les estimations L^2 de L. Hörmander (adaptées par J.-P. Demailly au cas singulier), on peut montrer qu'un fibré à courbure strictement positive admet un multiple effectif (on pourra consulter [Dem96, prop. 6.6, p.42] pour plus de détails). Si L est à courbure strictement positive, le fibré $mL - A$ est à courbure strictement positive pour m assez grand et donc $k(mL - A)$ admet des sections pour un certain entier k ; on a alors :

$$kmL = kA + E$$

avec E effectif et L est *big*. □

11.3 Idéaux multiplicateurs

Les idéaux multiplicateurs introduits par H. Skoda [Sko72] puis repris (entre autres) par A. Nadel et J.-P. Demailly se sont, ces dernières années, révélés des outils d'une extrême pertinence en géométrie algébrique complexe. Nous donnons ici un bref aperçu de la théorie analytique de ces idéaux (pour une construction dans la catégorie algébrique, on pourra se reporter à [Laz04b]).

Soit donc toujours (X,ω) une variété hermitienne complexe et φ une fonction quasi-psh, c'est-à-dire vérifiant :

$$i\partial\overline{\partial}\varphi \geq -C\omega$$

où C est une fonction lisse positive.

Définition 11.3.1
Le faisceau d'idéaux multiplicateurs attaché à la fonction φ est par définition :

$$\forall\, x \in X,\ \mathcal{I}(\varphi)_x = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} | \int_U |f|^2\, e^{-2\varphi} < +\infty \right\}$$

où U est un voisinage de x sur lequel le germe f est défini. C'est un sous-faisceau d'idéaux du faisceau structural $\mathcal{O}_X$.

Concernant la question de la cohérence du faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$, la réponse (affirmative) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 11.3.1 (A. Nadel, 1989)
Le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent sur X.

Pour la démonstration de ce résultat, on pourra par exemple consulter [Dem96, prop. 5.7, p. 35].

Si on se place dans le contexte géométrique d'un fibré hermitien $(L, \tilde{h})$ pseudo-effectif, les poids locaux φ_j sont alors des fonctions psh qui définissent (sur les ouverts de trivialisation U_j de L) des faisceaux cohérents $\mathcal{I}(\varphi_j)$ qui se recollent sur les intersections :

Définition 11.3.2
Si $(L, \tilde{h})$ est un fibré pseudo-effectif, le faisceau d'idéaux multiplicateurs de la métrique $\tilde{h}$ est bien défini :

$$\mathcal{I}(\tilde{h}) \subset \mathcal{O}_X.$$

C'est un faisceau cohérent.

L'intérêt (et la raison de cette dénomination) réside(nt) en grande partie dans le théorème d'annulation suivant :

Théorème 11.3.2 (Demailly-Nadel)
Soit (X, ω) une variété kählérienne complète munie d'un fibré $(L, \tilde{h})$ à courbure strictement positive :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq \epsilon\omega \quad (\epsilon > 0).$$

On a alors :

$$\forall q \geq 1,\ H^q(X, (K_X + L) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h})) = 0.$$

Les techniques L^2 fournissent en fait une version effective du théorème d'annulation 11.3.2 :

Théorème 11.3.3
Soient $q \geq 1$ un entier et (X, ω) une variété kählérienne complète munie d'un fibré $(L, \tilde{h})$ à courbure strictement positive :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq \epsilon\omega \quad (\epsilon > 0).$$

Pour toute (n,q)-forme g (à coefficients mesurables) à valeur dans le fibré L vérifiant $\overline{\partial} g = 0$ (au sens des courants) et

$$\int_X |g|^2_{\tilde{h}}\, dV_\omega < +\infty,$$

il existe une $(n,q-1)$-forme f solution de $\overline{\partial} f = g$ satisfaisant de plus :

$$\int_X |f|^2_{\tilde{h}}\, dV_\omega \leq \frac{1}{q\epsilon} \int_X |g|^2_{\tilde{h}}\, dV_\omega.$$

Démonstration :
On pourra consulter [Dem96, cor. 5.3, p. 33 et th. 5.11, p. 38]. □

En ce qui concerne la propriété de sous-additivité des idéaux multiplicateurs mentionnée dans l'introduction, rappelons l'énoncé suivant :

Théorème 11.3.4 ([DEL00])
Soient (L_1, h_1) et (L_2, h_2) deux fibrés en droites pseudo-effectifs sur X. On a alors :

$$\mathcal{I}(h_1 \otimes h_2) \subset \mathcal{I}(h_1) \otimes \mathcal{I}(h_2).$$

Démonstration :
Voir par exemple [Laz04b, th. 9.5.20, p. 202] pour une démonstration dans le cadre algébro-géométrique ou l'article original [DEL00]. □

Pour finir, donnons quelques précisions sur le comportement des idéaux multiplicateurs lors d'une restriction à une sous-variété. Soient donc S une hypersurface (lisse et connexe) de X et $(L, \tilde{h})$ un fibré en droites pseudo-effectif sur X ; on supposera de plus (pour que ce qui suit ait un sens) que la restriction de $\tilde{h}$ à S soit bien définie : si $\tilde{h} = e^{-\varphi} h$ où h est une métrique lisse, cela revient à supposer que $\varphi_S \not\equiv -\infty$. On peut alors tenter de comparer les deux idéaux suivants sur S :

$$\mathcal{I}(\tilde{h}_S) \text{ et } \mathcal{I}(\tilde{h})_S.$$

Théorème 11.3.5
Si X, S et $(L, \tilde{h})$ sont comme ci-dessus, on a alors :

$$\mathcal{I}(\tilde{h}_S) \subset \mathcal{I}(\tilde{h})_S.$$

Plus précisément, il existe un faisceau d'idéaux $Adj(S, \tilde{h}) \subset \mathcal{I}(\tilde{h}) \subset \mathcal{O}_X$ (faisceau adjoint de h relativement à S) qui rend exacte la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-S) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h}) \longrightarrow Adj(S, \tilde{h}) \longrightarrow \mathcal{I}(\tilde{h}_S) \longrightarrow 0.$$

Démonstration :
Cf [Laz04b, th. 9. 5.1, p. 195]. L'exemple 9.5.2 qui suit l'énoncé du théorème dans [Laz04b] montre qu'en général l'inclusion est stricte. □

Chapitre 12

Extensions de formes pluricanoniques

Dans ce chapitre, nous mettons en pratique la méthode One-Tower pour, dans un premier temps, démontrer le théorème 12.1.1. Afin d'en montrer le vaste champ d'application, nous montrerons ensuite comment l'adapter à différents types de situations. Ainsi, le théorème 12.2.1 traite le cas du fibré canonique tordu par un fibré *big* sur une variété projective alors que les deux derniers paragraphes de ce chapitre concerneront les extensions de sections pluricanoniques L^2 dans les revêtements universels des variétés projectives (cas relatif et absolu).

12.1 Cas d'une famille projective

Rappelons le résultat principal de cette partie :

Théorème 12.1.1 ([Cla05])
Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective et $(L, \tilde{h})$ un fibré pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ avec $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ bien définie[1] *et $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$.*
Pour tout entier $m \geq 1$, l'application de restriction :

$$H^0(\mathcal{X}, m(K_{\mathcal{X}} + L)) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_0, m(K_{\mathcal{X}_0} + L))$$

est surjective.

L'ingrédient essentiel de la démonstration du théorème 12.1.1 est le théorème d'Ohsawa-Takegoshi (voir [OT87]) qui permet d'étendre des sections L^2 définies sur une sous-variété à l'espace ambiant et qui joue donc le rôle de l'énoncé 10.2.1. Cependant, la version que nous allons utiliser apparaît dans [Siu02, th. 3.1] :

Théorème 12.1.2 (T. Ohsawa-K. Takegoshi, Y.-T. Siu)
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective et (F, h) un fibré pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ (avec $h_{\mathcal{X}_0}$ bien définie). Il existe une constante universelle C_0 (qui ne dépend pas de (F, h)) telle que toute section $\sigma \in H^0(\mathcal{X}_0, K_{\mathcal{X}_0} + F)$ satisfaisant de plus :

$$\int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|_h^2 < +\infty\,,$$

[1] *i.e.* $\tilde{h}_{|\mathcal{X}_0} \not\equiv +\infty$

admet un prolongement $\tilde{\sigma} \in H^0(\mathcal{X}, K_{\mathcal{X}} + F)$ *(avec* $\tilde{\sigma}_{|\mathcal{X}_0} = \sigma \wedge \pi^* dt$*) qui vérifie :*

$$\int_{\mathcal{X}} \|\tilde{\sigma}\|_h^2 \leq C_0 \int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|_h^2 .$$

La constante C_0 est effective : on peut prendre $C_0 = 8\pi e\sqrt{2 + \frac{1}{e}}$.

Avant de rentrer dans les détails techniques, fixons quelques notations. On fixe une métrique hermitienne ω quelconque sur $\mathcal{X}$ et également une section non nulle $s \in H^0(\mathcal{X}_0, m(K_{\mathcal{X}_0} + L_{\mathcal{X}_0}))$ (que l'on veut étendre sur $\mathcal{X}$). Comme la famille est projective, elle est munie d'une polarisation globale : il existe un fibré A ample sur $\mathcal{X}$. Quitte à remplacer A par un de ses multiples, on impose les conditions suivantes :

(A1) Toute section de $m(K_{\mathcal{X}_0} + L_{\mathcal{X}_0}) + A_{\mathcal{X}_0}$ s'étend à $\mathcal{X}$.

(A2) Pour tout $p = 0 \dots m-1$, le fibré $p(K_{\mathcal{X}} + L) + A$ est engendré par une famille de sections $(s_j^{(p)})_{j=1..N_p}$.

Quitte à restreindre un peu le disque $\mathbb{D}$, on peut bien entendu réaliser ces deux conditions : en prenant A suffisamment ample, on obtient l'annulation du groupe de cohomologie H^1 qui contient l'obstruction au fait de pouvoir étendre des sections en appliquant par exemple le théorème d'annulation de Serre. Comme la condition **(A2)** n'est requise que pour un nombre fini de fibrés, on peut bien évidemment la réaliser avec un grand multiple de A.
On munit alors A et L de métriques lisses h_A et h. La métrique ω induit par ailleurs une métrique sur $K_{\mathcal{X}}$ que l'on notera h_ω. On dénotera enfin par $h_q = (h_\omega \otimes h)^{\otimes q} \otimes h_A$ la métrique lisse associée sur $q(K_{\mathcal{X}} + L) + A$ (lorsque q est un entier). Si besoin, $h_{q,r}$ désignera la métrique $h_\omega^{\otimes q} \otimes h^{\otimes r} \otimes h_A$ sur $qK_{\mathcal{X}} + rL + A$.

Pour finir, exprimons les données de l'énoncé en termes de ces notations : la métrique $\tilde{h}$ s'écrit

$$\tilde{h} = e^{-\varphi} h$$

et la condition sur la courbure s'écrit donc :

$$i\Theta_{\tilde{h}}(L) = i\partial\overline{\partial}\varphi + i\Theta_h(L) \geq 0.$$

La fonction φ est donc quasi-psh et, par conséquent, localement bornée supérieurement. Quitte à restreindre le disque $\mathbb{D}$ et à multiplier la métrique lisse h par un facteur strictement positif, on peut donc supposer que la fonction φ vérifie :

$$\varphi \leq 0 \text{ sur } \mathcal{X}.$$

La condition de trivialité de l'idéal mutiplicateur s'écrit quant à elle :

$$C_L = \int_{\mathcal{X}_0} e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty.$$

12.1.1 Procédé inductif

La proposition suivante est le coeur de la méthode : on construit la tour pas à pas. La force de l'énoncé suivant (qui réside dans le théorème d'Ohsawa-Takegoshi) consiste à produire des extensions avec des estimations L^2 précises, correspondant en quelque sorte à un contrôle uniforme des singularités introduites.

Proposition 12.1.1
Il existe une constante $C > 0$ vérifiant : pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq p \leq m-1$, on peut étendre les sections $s^k \otimes s_j^{(p)}$ (pour $1 \leq j \leq N_p$) en

$$\widetilde{s}_j^{(km+p)} \in H^0(\mathcal{X}, (km+p)(K_{\mathcal{X}} + L) + A)$$

avec de plus les estimations suivantes :
(E1) *si $1 \leq p \leq m-1$, on a*

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sum_{j=1}^{N_p} \left\| \widetilde{s}_j^{(km+p)} \right\|^2_{h_{km+p}}}{\sum_{j=1}^{N_{p-1}} \left\| \widetilde{s}_j^{(km+p-1)} \right\|^2_{h_{km+p-1}}} dV_\omega \leq C,$$

(E2) *pour $p = 0$ (et $k \geq 2$), l'estimation devient*

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sum_{j=1}^{N_0} \left\| \widetilde{s}_j^{(km)} \right\|^2_{h_{km}}}{\sum_{j=1}^{N_{m-1}} \left\| \widetilde{s}_j^{((k-1)m+m-1)} \right\|^2_{h_{(k-1)m+m-1}}} dV_\omega \leq C.$$

Démonstration :
Comme indiqué ci-dessus, on va construire les extensions $\widetilde{s}_j^{(km+p)}$ de proche en proche. Avant de mettre en place le procédé inductif à proprement parler, faisons la remarque suivante : quitte à restreindre le disque, la propriété **(A2)** nous autorise à trouver une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\max_{0 \leq r,q \leq m-1} \sup_{\mathcal{X}} \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_r} \left\| s_j^{(r)} \right\|^2_{h_r}}{\sum_{j=1}^{N_q} \left\| s_j^{(q)} \right\|^2_{h_q}} \right) \leq C_1.$$

On considère alors la constante :

$$\widetilde{C} = \max(1, \|s\|^2_{L^\infty}) C_0 C_1 C_L,$$

où on a posé :

$$\|s\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathcal{X}_0} (\|s(x)\|_{(h_\omega \otimes h)^{\otimes m}}).$$

Pour amorcer le procédé (cas $(k,p) = (1,0)$), considérons les sections $s \otimes s_j^{(0)}$ pour $1 \leq j \leq N_0$. Ce sont des sections du fibré $m(K_{\mathcal{X}_0} + L) + A$ et on peut alors appliquer la propriété **(A1)** : on peut étendre ces sections en des sections :

$$\widetilde{s}_j^{(m)} \in H^0(\mathcal{X}, m(K_{\mathcal{X}} + L) + A) \quad (1 \leq j \leq N_0).$$

Voyons maintenant comment étendre les sections

$$s \otimes s_j^{(1)} \in H^0(\mathcal{X}_0, (m+1)(K_{\mathcal{X}_0} + L) + A).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème d'Ohsawa-Takegoshi 12.1.2, on écrit :

$$(m+1)(K_{\mathcal{X}} + L) + A = K_{\mathcal{X}} + \underbrace{m(K_{\mathcal{X}} + L) + A}_{(s_q^{(m)})} + \underbrace{L}_{\tilde{h}},$$

l'écriture ci-dessus signifiant que l'on munit le fibré $m(K_{\mathcal{X}}+L)+A$ de la métrique induite par la famille $(s_q^{(m)})_{q=1..N_0}$ et L de sa métrique singulière $\tilde{h}$. On obtient ainsi une métrique (singulière) à courbure positive sur $m(K_{\mathcal{X}}+L)+A+L$ pour laquelle la norme de $s\otimes s_j^{(1)}$ est majorée par :

$$\frac{\left\|s\otimes s_j^{(1)}\right\|^2_{h_{m+1,m}\otimes\tilde{h}}}{\sum_{q=0}^{N_0}\left\|s\otimes s_q^{(0)}\right\|^2_{h_m}}=\frac{\left\|s\otimes s_j^{(1)}\right\|^2_{h_{m+1}}}{\sum_{q=0}^{N_0}\left\|s\otimes s_q^{(0)}\right\|^2_{h_m}}e^{-2\varphi}\leq C_1e^{-2\varphi}.$$

En intégrant sur $\mathcal{X}_0$, on a donc une majoration de la norme L^2 par :

$$\int_{\mathcal{X}_0}\frac{\left\|s\otimes s_j^{(1)}\right\|^2_{h_{m+1,m}\otimes\tilde{h}}}{\sum_{q=0}^{N_0}\left\|s\otimes s_q^{(0)}\right\|^2_{h_m}}dV_\omega\leq C_1C_L<+\infty.$$

On peut alors appliquer le théorème 12.1.2 et obtenir une extension $\widetilde{s}_j^{(m+1)}$ de $s\otimes s_j^{(1)}$ vérifiant de plus l'estimation :

$$\int_{\mathcal{X}}\frac{\left\|\widetilde{s}_j^{(m+1)}\right\|^2_{h_{m+1,m}\otimes\tilde{h}}}{\sum_{q=0}^{N_0}\left\|\widetilde{s}_q^{(m)}\right\|^2_{h_m}}dV_\omega\leq C_0C_1C_L.$$

Pour obtenir une estimation ne faisant intervenir que la métrique h_{m+1}, on utilise le fait que φ est négative sur $\mathcal{X}$. La métrique $\tilde{h}$ domine la métrique h et on a donc :

$$\int_{\mathcal{X}}\frac{\left\|\widetilde{s}_j^{(m+1)}\right\|^2_{h_{m+1}}}{\sum_{q=0}^{N_0}\left\|\widetilde{s}_q^{(m)}\right\|^2_{h_m}}dV_\omega\leq C_0C_1C_L\leq\widetilde{C}.$$

Supposons à présent les extensions $\widetilde{s}^{(km+p)}$ (avec $(k,p)\neq(1,0)$) vérifiant les estimations L^2 de l'énoncé 12.1.1 déjà construites. On va alors montrer comment construire les extensions au cran suivant en distinguant deux cas :

Cas 1 : $p<m-1$
Comme précédemment, on écrit :

$$(km+p+1)(K_{\mathcal{X}}+L)+A=K_{\mathcal{X}}+\underbrace{(km+p)(K_{\mathcal{X}}+L)+A}_{(s_q^{(km+p)})}+\underbrace{L}_{\tilde{h}},$$

ce qui signifie que l'on considère la métrique induite par la famille $(\widetilde{s}_q^{(km+p)})_{q=0\ldots N_p}$ et la métrique $\tilde{h}$; comme ci-dessus, on obtient l'estimation suivante sur $\mathcal{X}_0$:

$$\frac{\left\|s^k\otimes s_j^{(p+1)}\right\|^2_{h_{km+p+1,km+p}\otimes\tilde{h}}}{\sum_{q=0}^{N_p}\left\|\widetilde{s}_q^{(km+p)}\right\|^2_{h_{km+p}}}=\frac{\left\|s^k\otimes s_j^{(p+1)}\right\|^2_{h_{km+p+1}}}{\sum_{q=0}^{N_p}\left\|s^k\otimes s_q^{(p)}\right\|^2_{h_{km+p}}}e^{-2\tilde{\varphi}}\leq C_1e^{-2\tilde{\varphi}}$$

et on peut étendre la section $s^k \otimes s_j^{(p+1)}$ avec l'estimation L^2 souhaitée, de la même façon que dans le premier pas du procédé inductif présenté ci-dessus.

cas 2 : $p = m-1$
A cette étape du procédé, on a construit des extensions $\widetilde{s}_q^{(km+m-1)}$ de $s^k \otimes s_q^{(m-1)}$ et on veut maintenant étendre $s^{k+1} \otimes s_j^{(0)}$. La décomposition

$$(k+1)m(K_{\mathcal{X}}+L)+A = K_{\mathcal{X}} + \underbrace{(km+m-1)(K_{\mathcal{X}}+L)+A}_{(s_q^{(km+p)})} + \underbrace{L}_{\tilde{h}}$$

permet de munir $(km+m-1)(K_{\mathcal{X}}+L)+A+L$ de la métrique induite par $(\widetilde{s}_q^{(km+m-1)})_{q=0\ldots N_{m-1}}$ et L de sa métrique $\tilde{h}$; l'estimation de la norme (sur $\mathcal{X}_0$) est légèrement différente dans le cas présent :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}_0} \frac{\left\| s^{k+1}\otimes s_j^{(0)} \right\|^2_{h_{r,r-1}\otimes\tilde{h}}}{\sum_{q=0}^{N_{m-1}} \left\| \widetilde{s}_q^{(km+m-1)} \right\|^2_{h_{r-1}}} dV_\omega &= \int_{\mathcal{X}_0} \frac{\left\| s^{k+1}\otimes s_j^{(0)} \right\|^2_{h_r} e^{-2\tilde{\varphi}}}{\sum_{q=0}^{N_{m-1}} \left\| s^k \otimes s_q^{(m-1)} \right\|^2_{h_{r-1}}} dV_\omega \\
&\leq C_1 \int_{\mathcal{X}_0} \|s\|^2_{(h_\omega\otimes h)^{\otimes m}} e^{-2\tilde{\varphi}} dV_\omega \\
&\leq C_1 C_L \|s\|^2_{L^\infty},
\end{aligned}$$

où on a posé $r=(k+1)m$. En appliquant le théorème 12.1.2, on obtient donc une section

$$\widetilde{s}_j^{((k+1)m)} \in H^0(\mathcal{X}, (k+1)m(K_{\mathcal{X}}+L)+A)$$

avec $\widetilde{s}_{j|\mathcal{X}_0}^{((k+1)m)} = s^{k+1}\otimes s_j^{(0)}$ et

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\left\| \widetilde{s}_j^{((k+1)m)} \right\|^2_{h_{(k+1)m,km+m-1}\otimes\tilde{h}}}{\sum_{q=0}^{N_{m-1}} \left\| \widetilde{s}_q^{(km+m-1)} \right\|^2_{h_{km+m-1}}} dV_\omega \leq C_0 C_1 C_L \|s\|^2_{L^\infty}.$$

Pour obtenir l'estimation finale, on utilise à nouveau le fait que φ est négative sur $\mathcal{X}$:

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\left\| \widetilde{s}_j^{((k+1)m)} \right\|^2_{h_{(k+1)m}}}{\sum_{q=0}^{N_{m-1}} \left\| \widetilde{s}_q^{(km+m-1)} \right\|^2_{h_{km+m-1}}} dV_\omega \leq C_0 C_1 C_L \|s\|^2_{L^\infty} \leq \widetilde{C}.$$

Il ne nous reste plus qu'à poser $C = \widetilde{C}\cdot \max(N_0,\ldots,N_{m-1})$ pour conclure la preuve de la proposition 12.1.1. □

12.1.2 Extraction de racines et conclusion

Afin de conclure la démonstration du théorème 12.1.1, on va utiliser les extensions obtenues grâce à la proposition 12.1.1 pour construire une métrique sur $(m-1)(K_X+L)+L$ (à courbure positive) adaptée à la section s que l'on

désire étendre. Les estimations **(E1)** et **(E2)** de la proposition 12.1.1 sont d'une importance capitale dans ce qui va suivre : elles permettent en effet d'obtenir des majorations uniformes et de passer à la limite dans les extractions de racines.

Considérons à cet effet les fonctions quasi-psh suivantes :

$$f_{k,p} = \frac{1}{2}\log(\sum_{j=1}^{N_0} \left\| \widetilde{s}_j^{(km+p)} \right\|^2_{h_{km+p}}).$$

L'utilisation combinée de la concavité du logarithme et de l'inégalité de Jensen permettent de réécrire les estimations **(E1)** et **(E2)**sous la forme :

$$\int_{\mathcal{X}} (f_{k,p} - f_{k,p-1}) dV_\omega \leq C' \tag{12.1}$$

où C' est une constante. En posant $f_k = f_{k,0}$ et en sommant les inégalités (12.1), on obtient :

$$\int_{\mathcal{X}} f_k dV_\omega \leq kmC' + C''',$$

inégalité que l'on peut réécrire sous la forme (avec M une constante indépendante de k) :

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{1}{k} f_k dV_\omega \leq M. \tag{12.2}$$

Comme la famille de sections $(\widetilde{s}_j^{km})_{j=1..N_0}$ induit sur $km(K_{\mathcal{X}} + L) + A$ une métrique à courbure positive, f_k satisfait à :

$$\Theta_{h_m}(m(K_{\mathcal{X}} + L)) + \frac{i}{k}\partial\overline{\partial} f_k \geq -\frac{1}{k}\Theta_{h_A}(A) \tag{12.3}$$

au sens des courants. La majoration (12.2) montre alors que les fonctions quasi-psh $(1/k)f_k$ sont (localement) uniformément majorées : ceci résulte en effet immédiatement de l'inégalité de la moyenne pour les fonctions psh ; pour passer à la limite, on utilise la proposition suivante de théorie du potentiel, extraite de [LG86] (théorème 1.26, p. 19).

Proposition 12.1.2
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^N$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions psh sur Ω uniformément majorées sur Ω. Soit $\psi = \limsup_{n\to+\infty} \psi_n$ et ψ_{reg} l'enveloppe semi-continue supérieurement de la fonction ψ. La fonction ψ_{reg} est encore une fonction psh sur Ω.

En appliquant la proposition 12.1.2, on peut donc considérer l'enveloppe semi-continue supérieurement de la limite supérieure des fonctions $(1/k)f_k$:

$$f_\infty = \overline{\lim_{k\to+\infty} \operatorname{reg}} \frac{1}{k} f_k$$

qui vérifie donc l'hypothèse de courbure suivante (cela revient à passer à la limite dans (12.3)) :

$$\Theta_{h_m}(m(K_{\mathcal{X}} + L)) + i\partial\overline{\partial} f_\infty \geq 0 \tag{12.4}$$

et que l'on peut supposer négative (quitte à soustaire la borne uniforme). Pour constater que f_∞ va nous permettre de construire une métrique adaptée à s, on remarque que, sur la fibre centrale, on a :

$$\frac{2}{k} f_{k|\mathcal{X}_0} = \log(\|s\|^2) + \frac{1}{k}\log(\sum_{j=1}^{N_0} \left\|s_j^{(0)}\right\|_{h_0}^2)$$

qui devient à la limite :

$$\|s\|^2 e^{-2f_\infty} \leq M'$$

où M' est une constante positive. La métrique $h_\infty = e^{-f_\infty} h_m$ est alors une métrique (singulière) à courbure positive (par (12.4)) pour laquelle la norme de s est bornée. Pour conclure, on considère la métrique $g = h_\infty^{\frac{m-1}{m}} \otimes \tilde{h}$ sur le fibré $(m-1)(K_\mathcal{X} + L) + L$. Pour cette métrique, s est L^2 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}_0} \|s\|_g^2 &= \int_{\mathcal{X}_0} \|s\|^2 e^{-2\frac{(m-1)}{m} f_\infty - 2\varphi} dV_\omega \\ &\leq \int_{\mathcal{X}_0} \|s\|^2 e^{-2f_\infty} e^{-2\varphi} dV_\omega \\ &\leq M' \int_{\mathcal{X}_0} e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty.\end{aligned}$$

On peut donc appliquer une ultime fois le théorème d'Ohsawa-Takegoshi 12.1.2 et obtenir une extension de la section s.□

Remarque 12.1.1
Une dernière remarque s'impose quant au fait d'étendre s sur $\mathcal{X}$; en effet, il a été fait mention de la nécessité éventuelle de rétrécir un peu le disque $\mathbb{D}$ et ce à plusieurs reprises (mais heureusement en nombre fini) : a priori, l'extension obtenue n'est pas définie sur $\mathcal{X}$ tout entier. Pour parer à ce défaut, on considère $\mathcal{F} = R^0\pi_*(m(K_\mathcal{X} + L))$: c'est un faisceau cohérent sur $\mathbb{D}$ (propreté de π). De plus, l'extension obtenue (au dessus d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{D}$) définit un élément non-nul de $\mathcal{F}_0$. Comme $\mathbb{D}$ est de Stein, on sait que $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales ou encore que l'application de restriction :

$$H^0(\mathcal{X}, m(K_\mathcal{X} + L)) \simeq \Gamma(\mathbb{D}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_0$$

est surjective. On peut donc prolonger s à $\mathcal{X}$ tout entier.

12.2 Cas projectif

Afin de montrer la souplesse de la méthode One-Tower, nous mettons à profit ce paragraphe pour redonner une démonstration du théorème suivant ([Tak06, th. 4.1]) :

Théorème 12.2.1 ([Tak06])
Soit X une variété projective lisse et S une hypersurface (lisse et connexe) de X ; on considère de plus un fibré en droite $(L, \tilde{h})$ muni d'une métrique singulière vérifiant :

(i) *$i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq \epsilon\omega$ avec $\epsilon > 0$ et ω une métrique hermitienne sur X,*

(ii) *$\tilde{h}_{|S}$ est bien définie (i.e. non identiquement $-\infty$),*

(iii) *l'idéal multiplicateur de $\tilde{h}_{|S}$ est trivial : $\mathcal{I}(S, \tilde{h}_{|S}) = \mathcal{O}_S$.*

Alors, pour tout entier $m \geq 1$, l'application de restriction :

$$H^0(X, m(K_X + L + S)) \longrightarrow H^0(S, m(K_S + L_S))$$

est surjective.

Comme mentionné plus haut, la mise en oeuvre de la méthode nécessite un théorème d'extension. Dans le cas algébrique qui nous préoccupe ici, on obtient un tel résultat comme une conséquence du théorème de Nadel 11.3.2 :

Proposition 12.2.1
Soit X une variété projective lisse et S une hypersurface lisse connexe de X. Soit de plus un fibré en droites F muni d'une métrique singulière h à courbure strictement positive.
Le sous-espace $H^0(S, (K_S + F_S) \otimes \mathcal{I}(h_S))$ est dans l'image de l'application de restriction :

$$H^0(X, K_X + S + F) \longrightarrow H^0(S, K_S + F_S).$$

En d'autres termes, toute section $s \in H^0(S, (K_S + L) \otimes \mathcal{I}(h_S))$ s'étend en une section $\sigma \in H^0(X, K_X + S + L)$.

Démonstration :
On a en effet la suite exacte de l'adjonction (proposition 11.3.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-S) \otimes \mathcal{I}(h) \longrightarrow \mathrm{Adj}(S, h) \longrightarrow \mathcal{I}(h_S) \longrightarrow 0$$

que l'on peut réécrire en :

$$0 \to (K_X + F) \otimes \mathcal{I}(h) \to (K_X + F + S) \otimes \mathrm{Adj}(S, h) \to (K_S + F_S) \otimes \mathcal{I}(h_S) \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée donne :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^0(X, (K_X + F) \otimes \mathcal{I}(h)) \longrightarrow H^0(X, (K_X + S + F) \otimes \mathrm{Adj}(S, h)) \longrightarrow \\ & H^0(S, (K_S + F_S) \otimes \mathcal{I}(h_S) \longrightarrow H^1(X, (K_X + F) \otimes \mathcal{I}(h)). \end{aligned}$$

Le théorème de Nadel 11.3.2 s'applique et on a donc

$$H^1(X, (K_X + F) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0,$$

ce qui assure la surjectivité de

$$H^0(X, (K_X + F + S) \otimes \mathrm{Adj}(S, h)) \longrightarrow H^0(S, (K_S + F_S) \otimes \mathcal{I}(h_S)).$$

Comme $\mathrm{Adj}(S, h) \subset \mathcal{O}_X$, on a bien la conclusion attendue. □

On fixe alors le même type de conditions (et de notations) que précédemment : on choisit A un fibré suffisamment ample sur X pour que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(A1) $p(K_X + L + S) + A$ est globalement engendré par $(s_j^{(p)})_{j=1..N_p}$ pour $0 \leq p \leq m - 1$.

(A2) Toute section de $m(K_S + L_S) + A_S$ s'étend (en une section de $m(K_X + L + S) + A$).

On notera également h_ω la métrique induite par ω sur K_X et on fixe g et h des métriques lisses (quelconques) sur S et L ; on choisit de plus une métrique lisse h_A sur A à courbure > 0. Pour un entier q, on notera h_q la métrique $(h_\omega \otimes g \otimes h)^{\otimes q} \otimes h_A$ sur $q(K_X + L + S) + A$. Enfin, on note s la section de $m(K_S + L_S)$ que l'on désire étendre.
Notons que la métrique $\tilde{h}$ s'écrit $\tilde{h} = e^{-\varphi} h$ où la fonction φ vérifie :

$$\int_S e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty.$$

On procède par extensions successives :

Proposition 12.2.2
Pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq p \leq m-1$, on peut étendre les sections $s^k \otimes s_j^{(p)}$ (pour $1 \leq j \leq N_p$) en $\widetilde{s}_j^{(km+p)} \in H^0(X, (km+p)(K_X + L + S) + A)$.

Démonstration :
On copie presque mot pour mot la démonstration de la proposition 12.1.1. La propriété **(A2)** permet de traiter gratuitement le cas $(k, p) = (1, 0)$. Ensuite, on considère le fibré :

$$(km + p + 1)(K_X + S + L) + A = K_X + \underbrace{(km + p)(K_X + S + L) + A)}_{(\widetilde{s}_q^{(km+p)})} + \underbrace{L}_{\tilde{h}}.$$

Le fait de munir L de sa métrique $\tilde{h}$ nous assure que la métrique ainsi considérée sur $(km + p)(K_X + S + L) + A + L$ est à courbure strictement positive. De plus, par construction, les singularités de cette métrique sont concentrées le long des zéros de s. On vérifie alors sans peine (calculs identiques à ceux de la démonstration de 12.1.1) que $s^k \otimes s_j^{(p+1)}$ est dans l'idéal multiplicateur de cette métrique. La proposition 12.2.1 permet alors d'étendre $s^k \otimes s_j^{(p+1)}$. □

On peut ici remarquer une différence considérable avec la situation en famille : on étend sans se soucier de contrôler les normes L^2. La raison est en fait double : tout d'abord la proposition 12.2.1 ne fournit pas de telles estimations ; de plus, la positivité stricte de L suffit à compenser la partie négative qui apparaît quand on extrait les racines. Ce dernier fait va apparaître clairement dans ce qui suit.

Pour $k \geq 1$, on pose alors :

$$f_k = \frac{1}{2} \log \Big(\sum_{j=1}^{N_0} \Big\| \widetilde{s}_j^{(km)} \Big\|^2_{h_{km}} \Big).$$

On a donc :

$$i\Theta_{h_{km}}(km(K_X + L + S) + A) + i\partial\overline{\partial} f_k \geq 0$$

et ainsi :

$$i\Theta_{(*)^{\otimes m}}(m(K_X + L + S)) + \frac{i}{k}\partial\overline{\partial} f_k \geq -\frac{i}{k}\Theta_{h_A}(A)$$

ou encore :

$$i\Theta_{(*)^{\otimes(m-1)}}((m-1)(K_X+L+S))+\frac{i(m-1)}{mk}\partial\overline{\partial}f_k\geq-\frac{i(m-1)}{mk}\Theta_{h_A}(A)$$

avec $(*)=h_\omega\otimes g\otimes h$. Si on choisit k suffisamment grand, on peut donc obtenir :

$$i\Theta_{(*)^{\otimes(m-1)}}((m-1)(K_X+L+S))+\frac{i(m-1)}{mk}\partial\overline{\partial}f_k\geq-\frac{\epsilon}{2}\omega.$$

On munit alors $(m-1)(K_X+L+S)+L$ de la métrique :

$$h_\infty=e^{-\frac{m-1}{mk}f_k}(h_\omega\otimes g\otimes h)^{\otimes(m-1)}\otimes\tilde{h}.$$

Le choix de k entraine alors $i\Theta_{h_\infty}((m-1)(K_X+L+S)+L)\geq\frac{\epsilon}{2}\omega$ et on constate aisément que σ est dans l'idéal multiplicateur de la métrique h_∞ ; une dernière application de la proposition 12.2.1 nous permet de conclure.□

12.3 Invariance des plurigenres L^2

Dans cette section, nous allons montrer que les sections pluricanoniques L^2 du revêtement universel d'une variété projective sont de bons candidats pour être des invariants de déformation. Rappelons tout d'abord ce que nous entendons par plurigenres L^2.

Définition 12.3.1
Soit $\widetilde{X}\to X$ le revêtement universel d'une variété X kählérienne compacte. Les plurigenres L^2 de X sont définis par :

$$\forall\, m\geq 1,\ p_m^{(2)}(X)=\dim_{\pi_1(X)}\left(H^0_{(2)}(\widetilde{X},mK_{\widetilde{X}})\right),$$

où $\dim_{\pi_1(X)}$ désigne la dimension de Von Neumann (voir appendice C).

Dans le cas du type général, on peut relier ces invariants aux plurigenres (classiques) de la variété X (via les théorèmes d'annulation adéquats et le théorème de l'indice L^2).

Proposition 12.3.1 (th. 15.5, p.163, [Kol95])
Si X est une variété projective de type général, on a :

$$\forall m\geq 2,\ \dim_{\pi_1(X)}H^0_{(2)}(\widetilde{X},mK_{\widetilde{X}})=h^0(X,mK_X).$$

Les plurigenres L^2 d'une variété de type général sont en particulier des entiers.

Concernant le problème de l'invariance des plurigenres L^2, la combinaison de la proposition précédente et du résultat principal de [Siu98] nous permet d'affirmer que la quantité

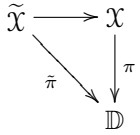
$$B\ni b\mapsto p_m^{(2)}(\mathcal{X}_b)$$

est constante dans une déformation projective de type général $\mathcal{X}\longrightarrow B$ au dessus-d'une base connexe.

Question 12.3.1
Les plurigenres L^2 d'une variété kählérienne compacte X (non nécessairement de type général) sont-ils en général entiers ?

Plutôt que de s'intéresser à une version numérique de l'invariance par déformation, nous proposons une sorte de version qualitative de cette propriété en termes d'extension de sections L^2 (pour la condition d'intégrabilité naturelle pour les formes pluricanoniques). Plus précisément, on dispose de l'énoncé suivant.

Théorème 12.3.1
Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective et considérons :



la famille des revêtements universels. Alors toute section $s \in H^0(\widetilde{\mathcal{X}}_0, mK_{\widetilde{\mathcal{X}}_0})$ vérifiant

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{\frac{1}{m}} < +\infty$$

admet une extension σ holomorphe au voisinage de la fibre centrale $\widetilde{\mathcal{X}}_0$, méromorphe avec des pôles d'ordre au plus $m-1$ (le long d'un diviseur ample fixé) et vérifiant de plus

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}} (\sigma \wedge \overline{\sigma})^{\frac{1}{m}} \leq C_0 \int_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{\frac{1}{m}}$$

où C_0 est la constante numérique apparaissant dans le théorème d'Ohsawa-Takegoshi.

Donnons quelques mots d'explication sur la notation $(s \wedge \overline{s})^{1/m}$. En coordonnées locales, la section s s'écrit

$$s = f(z)\big(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n\big)^{\otimes m}$$

avec f une fonction holomorphe. Par abus de notation, $(s \wedge \overline{s})^{1/m}$ désigne la (n,n)-forme **positive** définie en coordonnées locales par l'expression :

$$|f(z)|^{2/m}\, i dz_1 \wedge d\overline{z_1} \wedge \cdots \wedge i dz_n \wedge d\overline{z_n}.$$

Remarque 12.3.1
Bien que nous n'y soyons pas parvenu, il est vraisemblable que la section s admette une extension holomorphe sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ tout entier (avec bien entendu la même inégalité intégrale).

La démonstration du théorème 12.3.1 n'est qu'une adaptation de plus de la méthode One-Tower. Il y a tout de même quelques difficultés additionnelles à gérer convenablement pour mener à bien la mise en place de la-dite méthode.

1. la condition d'intégrabilité de la section s qu'on souhaite étendre peut sembler peu naturelle ; c'est pourtant celle dont on a besoin lors de la dernière application du théorème d'Ohsawa-Takegoshi (ceci n'apparaît pas clairement dans l'invariance des plurigenres : la fibre centrale étant compacte, toutes les sections lisses sont intégrables).
2. les familles de sections auxiliaires $s_j^{(p)}$ sont maintenant indexées par $j \geq 1$ (*a priori*, ces familles sont infinies). Cependant, la somme des carrés de ces sections est convergente (si on les choisit formant une base hilbertienne d'un espace de sections L^2).
3. on ne peut pas obtenir des extensions de $s^k \otimes s_j^{(p)}$ avec estimations uniformes sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ tout entier. On doit pour cela se restreindre à des ouverts de Stein (bornés) qui forment une exhaustion de $\widetilde{\mathcal{X}} \backslash \widetilde{A}$ (où $\widetilde{A}$ est une section hyperplane de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Nous allons revenir dans un instant sur ces difficultés et sur la façon de les traiter. En revanche, nous pouvons d'ores et déjà noter que le théorème d'Ohsawa-Takegoshi est encore valable pour la famille des revêtements universels. Nous aurons en fait besoin de la version démontrée par Y.-T. Siu :

Théorème 12.3.2 (th. 3.1, p. 241 [Siu02])
Soit $\pi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille paramétrée par le disque unité de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante : il existe une hypersurface $\mathcal{S}$ de $\mathcal{Y}$ dominant $\mathbb{D}$ telle que $\mathcal{Y} \backslash \mathcal{S}$ puisse s'écrire comme une réunion d'ouverts de Stein (à bord lisse) relativement compacts. Il existe alors une constante (universelle) $C_0 > 0$ vérifiant :
pour tout fibré en droites pseudo-effectif (L, h) (avec h éventuellement singulière) sur $\mathcal{Y}$, toute section

$$s \in H^0_{(2)}(\mathcal{Y}_0, (K_{\mathcal{Y}_0} + L_{|\mathcal{Y}_0}) \otimes \mathcal{I}(h))$$

admet une extension

$$\sigma \in H^0_{(2)}(\mathcal{Y}, (K_{\mathcal{Y}} + L) \otimes \mathcal{I}(h))$$

avec de plus l'estimation :

$$\int_{\mathcal{Y}} \|\sigma\|_h^2 \leq C_0 \int_{\mathcal{Y}_0} \|s\|_h^2 .$$

Remarque 12.3.2
La constante C_0 est la même que dans l'énoncé du théorème 12.1.2 et peut donc être fixée à $C_0 = 8\pi e\sqrt{2 + 1/e}$.

Le théorème 12.3.2 s'applique en particulier dans le cas où $\mathcal{Y} = \widetilde{\mathcal{X}}$ est la famille des revêtements universels d'une famille projective (mais pas seulement).

12.3.1 Préliminaires

Avant de montrer que la méthode One-Tower s'adapte également à cette situation, étudions les difficultés qui ont été recensées ci-dessus.

Tout d'abord, la condition d'intégrabilité diffère légérement des autres situations ; on doit en effet supposer que la forme volume $(s\wedge\overline{s})^{1/m}$ est intégrable sur la fibre centrale. Bien que plus difficilement maniable (cette condition ne définit même plus une norme pour $m \geq 3$), le caractère intrinsèque de cette condition semble plaider en sa faveur.

Le lemme suivant montre que cette condition d'intégrabilité est en réalité plus forte que celle imposée par une métrique périodique. Ce résultat va nous permettre d'utiliser des métriques et les conditions d'intégrabilité qui s'y rapportent.

Lemme 12.3.1
Soit $\widetilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement universel d'une variété kählérienne compacte X, ω une métrique de kähler sur X ($\tilde{\omega}$ la métrique induite sur $\widetilde{X}$) et $m \geq 1$ un entier. Il existe une constante $C = C(X, \omega, m)$ telle que :

$$\forall\, s \in H^0(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}),\ \int_{\widetilde{X}} |s|^2_{\tilde{\omega}}\, dV_{\tilde{\omega}} \leq C\Big(\int_{\widetilde{X}} (s\wedge\overline{s})^{\frac{1}{m}}\Big)^m$$

Démonstration :
Soit $x \in \widetilde{X}$ et $(z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées locales géodésiques (pour $\tilde{\omega}$) centrées au point x. Si, dans ce système de coordonnées, la section s s'écrit

$$s(z) = f(z)(dz)^{\otimes m},$$

on a alors :

$$|s(x)|^2_{\tilde{\omega}} = |f(x)|^2 \text{ et } (s(x)\wedge\overline{s}(x))^{\frac{1}{m}} = |f(x)|^{\frac{2}{m}}\, d\lambda(z),$$

où on a noté $d\lambda(z)$ la mesure de Lebesgue. D'autre part, l'inégalité de la moyenne s'écrit :

$$|f(x)|^{\frac{2}{m}} \leq C\int_{B_x} |f(z)|^{\frac{2}{m}}\, d\lambda(z) \leq C\int_{\widetilde{X}} (s\wedge\overline{s})^{\frac{1}{m}}$$

et la constante C peut être choisie uniforme par rapport au point x (puisque la géométrie de $\widetilde{X}$ est uniformément bornée). Si on note $I = \int_{\widetilde{X}} (s\wedge\overline{s})^{\frac{1}{m}}$ (intégrale que l'on suppose bien entendu finie), cette dernière inégalité peut encore s'écrire :

$$|f(x)|^2 \leq CI^{m-1}\, |f(x)|^{\frac{2}{m}}$$

(la constante C pouvant varier suivant les inégalités). De façon intrinsèque, on a donc obtenu une inégalité entre formes volumes :

$$|s(x)|^2_{\tilde{\omega}}\, dV_{\tilde{\omega}} \leq CI^{m-1}(s(x)\wedge\overline{s}(x))^{\frac{1}{m}}$$

qui, en l'intégrant, fournit celle annoncée. □

Il nous faut maintenant choisir les sections auxiliaires. On fixe donc un fibré $A \longrightarrow \mathfrak{X}$ suffisamment ample pour que :

(A1) toute section de $H^0_{(2)}(\widetilde{\mathfrak{X}}_0, mK_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} + \widetilde{A}_{|\widetilde{\mathfrak{X}}_0})$ s'étende à $\widetilde{\mathfrak{X}}$,

(A2) pour tout $p = 0, \ldots, m-1$, $pK_{\widetilde{\mathfrak{X}}} + \widetilde{A}$ soit engendré par $H^0_{(2)}(\widetilde{\mathfrak{X}}, mK_{\widetilde{\mathfrak{X}}} + \widetilde{A})$ (on notera $(s_j^{(p)})_{j\geq 1}$ une base hilbertienne de ce dernier espace).

Si h_A est une métrique lisse à courbure strictement positive sur A, on notera ω et $\tilde{\omega}$ les métriques kählériennes induites sur $\mathcal{X}$ et $\widetilde{\mathcal{X}}$. La seule différence à noter est le fait que l'on doive considérer une famille infinie de sections L^2 de $pK_{\widetilde{\mathcal{X}}} + \widetilde{A}$; cependant, quitte à restreindre un peu le disque $\mathbb{D}$, on peut trouver des constantes $M, \delta > 0$ telles que :

$$\forall p = 0, \ldots, m-1,\ \delta \leq \sum_{j \geq 1} \left| s_j^{(p)} \right|^2 \leq M$$

et ce ponctuellement sur $\widetilde{\mathcal{X}}$. En effet, l'inégalité de droite est une conséquence directe de l'inégalité de la moyenne. Pour montrer celle de gauche, il convient de noter que la fonction C^∞

$$f(x) = \sum_{j \geq 1} \left| s_j^{(p)}(x) \right|^2$$

est strictement positive sur $\widetilde{\mathcal{X}}$ (les sections L^2 de $pK_{\widetilde{\mathcal{X}}} + \widetilde{A}$ sont censées engendrer ce fibré) et invariante sous l'action de $\pi_1(\mathcal{X})$; elle est donc le relèvement à $\widetilde{\mathcal{X}}$ d'une fonction C^∞ strictement positive sur $\mathcal{X}$. En diminuant légèrement le rayon du disque $\mathbb{D}$, on peut donc supposer que cette fonction est minorée par une constante $\delta > 0$.

Reste une difficulté à surmonter : majorer uniformément les extensions que l'on va produire dans le procédé inductif. Comme celui-ci fait apparaître des termes de la forme

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} \frac{\sum_{j \geq 1} \left| s_j^{(p)} \right|^2}{\sum_{j \geq 1} \left| s_j^{(p-1)} \right|^2} dV_{\tilde{\omega}}$$

(qui sont des intégrales clairement divergentes puisque l'intégrande est une fonction strictement positive et $\pi_1(\mathcal{X})$-invariante), on doit travailler sur des ouverts bornés. On considère donc :

$$\Omega = \widetilde{\mathcal{X}} \backslash \tilde{A}$$

et, si $\varphi = -\log(|s_{\tilde{A}}|)$ (avec $s_{\tilde{A}}$ une section L^2 définissant $\tilde{A}$), on pose également

$$\Omega_\epsilon = \left\{ \varphi < \frac{1}{\epsilon} \right\}.$$

Comme une section L^2 tend vers 0 à l'infini, les ouverts Ω_ϵ sont relativement compacts (une fois le disque de base légèrement rétréci) et de Stein.

12.3.2 Démonstration du théorème 12.3.1

Soit $s \in H^0(\widetilde{\mathcal{X}}_0, mK_{\widetilde{\mathcal{X}}_0})$ vérifiant la condition d'intégrabilité

$$\int_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{1/m} < +\infty.$$

Le procécé inductif peut alors être mis en place (sur chaque Ω_ϵ) comme dans les paragraphes précédents grâce au lemme 12.3.1 :

Proposition 12.3.2
Pour tout $\epsilon > 0$, $k \geq 1$, $0 \leq p \leq m-1$ et tout $j \geq 1$, les sections

$$s^k \otimes s_j^{(p)} \in H^0(\widetilde{\mathcal{X}}_0, (km+p)K_{\widetilde{\mathcal{X}}_0} + \widetilde{A}_{|\widetilde{\mathcal{X}}_0})$$

admettent des extensions

$$\sigma_j^{(km+p)} \in H^0(\Omega_\epsilon, (km+p)K_{\widetilde{\mathcal{X}}} + \widetilde{A})$$

vérifiant de plus les estimations L^2 (uniformes en k) :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\sum_{j\geq 1} \left|\sigma_j^{(km+p)}\right|^2}{\sum_{j\geq 1}\left|\sigma_j^{(km+p-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \leq C_\epsilon.$$

Lorsque $p = 0$, il faut bien entendu remplacer $km+p-1$ par $(k-1)m+m-1$ dans l'énoncé ci-dessus.

Démonstration :

On procède exactement comme dans les démonstrations des propositions 12.1.1 et 12.2.2. L'assertion **(A1)** permet d'étendre sans frais les sections $s\otimes s_j^{(0)}$. Montrons sur les étapes $(k,p) = (1,1)$ et $(k,p) = (2,0)$ que l'on peut étendre avec estimations uniformes (les estimations dépendant cependant de ϵ).

$(k,p) = (1,1)$:
On utilise la métrique définie par les sections $\sigma_j^{(m)}$ (qui étendent $s \otimes s_j^{(0)}$ sur Ω_ϵ) sur le fibré $mK_{\widetilde{\mathcal{X}}} + \widetilde{A}$. Pour cette métrique, la norme de $s \otimes s_j^{(1)}$ sur l'ouvert (relativement compact) $\Omega_{\epsilon,0} = \Omega_\epsilon \cap \widetilde{\mathcal{X}}_0$ est majorée par :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\left|s\otimes s_j^{(1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|\sigma_q^{(m)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} &= \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\left|s\otimes s_j^{(1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s\otimes s_q^{(0)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \\ &\leq \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\left|s_j^{(1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s_q^{(0)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}}\end{aligned}$$

et cette dernière intégrale est finie puisque l'intégrande est lisse et l'ouvert $\Omega_{\epsilon,0}$ relativement compact. On peut donc étendre (théorème 12.3.2) la section $s\otimes s_j^{(1)}$ sur Ω_ϵ en une section $\sigma_j^{(m+1)}$ avec l'estimation :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\left|\sigma_j^{(m+1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|\sigma_q^{(m)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \leq C_0 \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\left|s_j^{(1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s_q^{(0)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}}.$$

En sommant ces inégalités sur l'indice j, on obtient une estimation de la forme :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\sum_{j\geq 1}\left|\sigma_j^{(m+1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|\sigma_q^{(m)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \leq C_0 \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\sum_{j\geq 1}\left|s_j^{(1)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s_q^{(0)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \leq \frac{C_0 M}{\delta} \mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}}(\Omega_{\epsilon,0})$$

(où M et δ sont les contantes introduites ci-dessus pour encadrer la somme des carrés des sections $(s_l^{(p)})_{l\geq 1}$).

$(k,p) = (2,0)$:
On suppose qu'on dispose d'extensions $\sigma_q^{(m+m-1)}$ de $s \otimes s_q^{(m-1)}$ sur Ω_ϵ, ces sections définissant ainsi une métrique sur $(2m-1)K_{\widetilde{\mathcal{X}}} + \widetilde{A}$. Pour cette métrique, la norme L^2 de $s^2 \otimes s_j^{(0)}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\left|s^2 \otimes s_j^{(0)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|\sigma_q^{(m+m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} &= \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{\left|s^2 \otimes s_j^{(0)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s \otimes s_q^{(m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \\ &\leq \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{|s|^2\left|s_j^{(0)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s_q^{(m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}}.\end{aligned}$$

On peut ainsi trouver une extension $\sigma_j^{(2m)}$ dont la norme L^2 vérifie :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\left|\sigma_j^{(2m)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|\sigma_q^{(m+m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \leq C_0 \int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{|s|^2\left|s_j^{(0)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s_q^{(m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}}.$$

A nouveau, en sommant sur j, on en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\sum_{j\geq 1}\left|\sigma_j^{(2m)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|\sigma_q^{(m+m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} &\leq C_0 \int_{\Omega_{\epsilon,0}} |s|^2 \frac{\sum_{j\geq 1}\left|s_j^{(0)}\right|^2}{\sum_{q\geq 1}\left|s_q^{(m-1)}\right|^2} dV_{\tilde{\omega}} \\ &\leq \frac{MC_0}{\delta}\int_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} \left|s^2\right| dV_{\tilde{\omega}} = \frac{MC_0}{\delta}\|s\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

(d'après le lemme 12.3.1, la section s est L^2 pour toute métrique lisse provenant de $\mathcal{X}$).

Il suffit alors de poser

$$C_\epsilon = \max\left(\frac{C_0 M}{\delta}\mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}}(\Omega_{\epsilon,0}), \frac{MC_0}{\delta}\|s\|_{L^2}^2\right)$$

pour conclure la démonstration de la proposition 12.3.2. □

Pour finir, on va montrer que l'on peut étendre la section s sur les ouverts Ω_ϵ avec des estimations $L^{2/m}$ **uniformes** par rapport à ϵ. Pour cela, nous mettons à profit une astucieuse majoration de ces normes $L^{2/m}$ introduite dans [BP07].

Proposition 12.3.3
Pour tout $\epsilon > 0$, la section s admet une extension σ_ϵ sur Ω_ϵ vérifiant l'estimation :

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1/m} \leq C_0 \int_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{1/m}$$

où C_0 est la constante numérique du théorème 12.3.2.

Démonstration :

Montrons d'abord qu'une extension de s existe (avant d'en choisir une qui aura la propriété requise). Comme on a des estimations uniformes sur Ω_ϵ (proposition 12.3.2 ci-dessus), on peut les traduire en borne (localement) uniforme sur la suite de fonctions quasi-psh :

$$\frac{1}{k} f_k = \frac{1}{k} \log \Big(\sum_{j \geq 1} \Big| \sigma_j^{(km)} \Big|^2 \Big)$$

(comme dans les paragraphes précédents) et ainsi considérer sa limite supérieure (régularisée) que l'on notera f_∞. Pour le poids ainsi construit (sur le fibré $mK_{\widetilde{\mathfrak{X}}}$), la section s est bornée :

$$(s \wedge \overline{s}) e^{-2f_\infty} \leq M'.$$

On dispose donc d'une métrique singulière h_∞ sur $(m-1)K_{\widetilde{\mathfrak{X}}}$ à courbure positive pour laquelle la norme de la section s vérifie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\epsilon,0}} |s|^2_{h_\infty} &= \int_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} (s \wedge \overline{s}) e^{-2\frac{m-1}{m} f_\infty} \\ &= \int_{\Omega_{\epsilon,0}} (s \wedge \overline{s})^{1/m} \Big((s \wedge \overline{s}) e^{-2f_\infty} \Big)^{1-1/m} \\ &\leq M'^{(1-1/m)} \int_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{1/m}. \end{aligned}$$

Le théorème 12.3.2 permet alors d'exhiber une extension de s sur Ω_ϵ.

Il nous faut encore montrer que l'on peut trouver une extension qui réponde à la majoration de l'énoncé. Pour ce faire, on choisit σ_ϵ une extension de s à Ω_ϵ de norme $L^{2/m}$ minimale ; on va montrer que cette extension en question convient. Comme σ_ϵ est une section de $mK_{\widetilde{\mathfrak{X}}}$, elle définit une métrique singulière (à courbure positive) sur $(m-1)K_{\widetilde{\mathfrak{X}}}$ pour laquelle la norme L^2 de s vaut :

$$\int_{\Omega_{\epsilon,0}} \frac{s \wedge \overline{s}}{(\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{(1-1/m)}} = \int_{\Omega_{\epsilon,0}} (s \wedge \overline{s})^{1/m} < +\infty$$

car σ_ϵ est une extension de s. On peut une nouvelle fois appliquer le théorème 12.3.2 pour ce choix de métrique sur $(m-1)K_{\widetilde{\mathfrak{X}}}$ et on obtient ainsi une extension τ_ϵ de s et vérifiant l'estimation :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\tau_\epsilon \wedge \overline{\tau_\epsilon}}{(\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{(1-1/m)}} \leq C_0 \int_{\Omega_{\epsilon,0}} (s \wedge \overline{s})^{1/m} \leq C_0 \int_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{1/m}.$$

Si on sait montrer l'inégalité

$$(*) \quad \int_{\Omega_\epsilon} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1/m} \leq \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\tau_\epsilon \wedge \overline{\tau_\epsilon}}{(\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{(1-1/m)}},$$

on aura bien (en combinant $(*)$ avec l'estimation ci-dessus) :

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1/m} \leq C_0 \int_{\widetilde{\mathfrak{X}}_0} (s \wedge \overline{s})^{1/m}.$$

Par l'absurde, supposons que l'inégalité $(*)$ ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\tau_\epsilon \wedge \overline{\tau_\epsilon}}{(\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{(1-1/m)}} < \int_{\Omega_\epsilon} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1/m}.$$

Avec l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} (\tau_\epsilon \wedge \overline{\tau_\epsilon})^{1/m} &= \int_{\Omega_\epsilon} \frac{(\tau_\epsilon \wedge \overline{\tau_\epsilon})^{1/m}}{(\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{\frac{m-1}{m^2}}} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{\frac{m-1}{m^2}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\tau_\epsilon \wedge \overline{\tau_\epsilon}}{(\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1-1/m}} \right)^{1/m} \left(\int_{\Omega_\epsilon} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1/m} \right)^{1-1/m} \\
&< \int_{\Omega_\epsilon} (\sigma_\epsilon \wedge \overline{\sigma_\epsilon})^{1/m},
\end{aligned}$$

ce qui contredit la minimalité de la norme de σ_ϵ. L'inégalité $(*)$ est donc satisfaite et la majoration des normes $L^{2/m}$ (uniforme par rapport à ϵ) en découle. □

On peut alors conclure la démonstration du théorème 12.3.1 : en passant à la limite lorsque $\epsilon \to 0$, on obtient une extension σ de la section s sur Ω telle que la (n,n)-forme $(\sigma \wedge \overline{\sigma})^{1/m}$ soit intégrable sur Ω (grâce à la proposition précédente). Cette estimation montre que σ est en fait méromorphe le long de $\tilde{A}$ avec des pôles d'ordre au plus $m-1$. Comme σ est holomorphe sur la fibre centrale $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ et comme le domaine sur lequel elle est holomorphe est un ouvert, on en déduit que σ est holomorphe sur un voisinage de $\widetilde{\mathcal{X}}_0$ (malheureusement, comme la projection $\tilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{D}$ n'est plus propre, on ne peut pas *a priori* choisir un voisinage tubulaire et il ne suffit donc pas de rétrécir le disque de base pour obtenir une extension holomorphe).□

12.4 Formes pluricanoniques L^2 et Γ-réduction

On souhaite donner ici une dernière illustration de l'élégance des techniques L^2, illustration obtenue en combinant les techniques du chapitre 4 et celles développées dans les paragraphes précédents. Ce dernier énoncé concerne les formes pluricanoniques L^2 sur $\widetilde{X}$ et la relation qu'elles entretiennent avec la Γ-réduction. Bien qu'il n'y soit pas explicitement formulé sous cette forme, le résultat suivant apparaît dans les lignes de [Tak04].

Théorème 12.4.1
Soit X une variété (projective) de type général et de groupe fondamental infini, $\widetilde{X}$ son revêtement universel et Z la fibre générale de la Γ-réduction de $\widetilde{X}$:

$$\gamma_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X}).$$

Pour $m \geq 2$, l'application de restriction :

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}) \longrightarrow H^0(Z, mK_Z)$$

est surjective.

Remarque 12.4.1
L'exemple de [EL97] (voir le paragraphe 4.3.3) montre qu'on ne peut pas prendre $m = 1$ *dans l'énoncé ci-dessus. La variété* X *en question est de dimension 3 avec* $\kappa(X) = \gamma d(X) = 3$ *et* $h^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) = 0$ *; comme* Z *est ici réduite à un point, l'application*

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}) \longrightarrow H^0(Z, K_Z)$$

ne peut en aucun cas être surjective.

Comme il en a été fait mention ci-dessus, on va montrer que la méthode One-Tower s'adapte à cette situation pour fournir une démonstration naturelle du théorème 12.4.1. Fixons à cette fin quelques notations : si (L, h) est un fibré en droite muni d'une métrique (éventuellement singulière) sur X, on notera $(\tilde{L}, \tilde{h})$ les objets correspondants sur $\widetilde{X}$ (obtenus par image réciproque). On considère un fibré ample A sur X muni d'une métrique (lisse) h_A ; la courbure de ce fibré est donc une métrique kählérienne que l'on notera ω. On notera également U un voisinage relativement compact de Z dans $\widetilde{X}$ sur lequel la Γ-réduction de $\widetilde{X}$ est topologiquement triviale (si besoin, on s'autorisera à rétrécir le voisinage en question).

12.4.1 Un premier résultat d'extension

La pierre angulaire de la méthode est un résultat d'extension de type Ohsawa-Takegoshi ; dans la situation qui nous intéresse, la proposition 12.4.1 joue ce rôle. Il est à noter que, dans cette proposition, X n'est plus nécessairement supposée de type général.

Proposition 12.4.1
Soit X *une variété projective de revêtement universel* $\widetilde{X}$ *et soit* Z *la fibre générale de l'application* $\gamma_{\widetilde{X}}$*. Soit également* (L, h) *un fibré en droites sur* X *muni d'une métrique singulière dont la courbure vérifie :*

$$i\Theta_h(L) \geq \epsilon\omega \quad (\epsilon > 0)$$

au sens des courants (i.e. L *est* big*).*
Alors toute section $s \in H^0(Z, (K_Z + \tilde{L}_{|Z}) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h}))$ *s'étend à* $\widetilde{X}$ *:*

$$\text{il existe } \sigma \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} + \tilde{L}) \text{ avec } \sigma_{|Z} = s.$$

La section σ *est de plus* L^2 *par rapport à* $\tilde{h}$ *:*

$$\sigma \in H^0(\widetilde{X}, (K_{\widetilde{X}} + \tilde{L}) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h})).$$

Lorsque Z est réduit à un point (cas du type π_1-général), on a :

$$H^0(Z, (K_Z + \tilde{L}_{|Z}) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h})) \simeq \mathbb{C}$$

en choisissant bien sûr le point Z suffisamment général hors du cosupport de l'idéal $\mathcal{I}(\tilde{h})$. On en déduit donc :

Corollaire 12.4.1
Si X *est de type* π_1*-général et si* (L, h) *est un fibré en droites* big *sur* X*, alors :*

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, (K_{\widetilde{X}} + L) \otimes \mathcal{I}(\tilde{h})) \neq 0.$$

En utilisant le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah, on peut même "redescendre" les sections sur X et obtenir le théorème de non-annulation suivant :

Théorème 12.4.2 ([Eys99], [Tak99])
Soit X une variété projective de type π_1-général et L un fibré en droite big *sur X, alors :*

$$H^0(X, K_X + L) \neq 0.$$

La démonstration de la proposition 12.4.1 repose sur le lemme suivant qui, en un certain sens, relève de la technique de concentration de Kawamata-Shokurov : on peut construire des fonctions quasi-psh dont les singularités sont concentrées exactement le long de Z (qui se comporte donc à la manière d'un centre log-canonique), la partie négative de leur hessien pouvant être rendue arbitrairement petite.

Pour construire ces fonctions, on utilise les techniques L^2 usuelles pour exhiber suffisamment de sections de $m\tilde{A}$ qui s'annulent sur Z (A désignant un fibré ample quelconque sur X supposée projective). Avant toute chose, rappelons la propriété de convexité de $\widetilde{X}$ par rapport à $m\tilde{A}$ mise en évidence par T. Napier (ce résultat est une conséquence assez directe du théorème 11.3.2).

Théorème 12.4.3 ([Nap90])
Soit (X, A) une variété projective lisse polarisée par un fibré ample A et de revêtement universel $\widetilde{X}$ non compact. Il existe alors un entier $m_0 \geq 1$ ne dépendant que de (X, A) et vérifiant :
pour toute suite uniformément discrète $(x_i)_{i\geq 1}$ de points dans $\widetilde{X}$, l'application d'évaluation :

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A}) \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \bigoplus_{i\geq 1} \tilde{A}/\mathfrak{m}_{x_i}\tilde{A}) \simeq l^2(\{x_i\}_{i\geq 1}, \mathbb{C})$$

est surjective pour tout $m \geq m_0$

On munit X de la métrique kählérienne ω donnée par la courbure d'une métrique lisse h_A sur A (les objets induits sur $\widetilde{X}$ seront notés $\tilde{\omega}$, $\widetilde{h_A}$, ...). Une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ de points dans $\widetilde{X}$ est alors dite uniformément discrète si

$$i \neq j \Longrightarrow d_{\tilde{\omega}}(x_i, x_j) > \delta(X, \omega),$$

où $d_{\tilde{\omega}}$ est la distance induite par $\tilde{\omega}$ sur $\widetilde{X}$ et $\delta(X, \omega)$ le diamètre de X pour la distance induite par ω. Par exemple, toute suite qui tend vers l'infini dans $\widetilde{X}$ admet une sous-suite uniformément discrète.

Quitte à remplacer A par $m_0 A$, on peut donc supposer que les sections L^2 de $m\tilde{A}$ interpolent les suites uniformément discrètes pour tout entier $m \geq 1$. Un argument de dimension permet alors de construire des sections s'annulant sur Z et dont le lieu des zéros ne contient pas un sous-ensemble analytique non-compact fixé.

Proposition 12.4.2 (lemme 4.3, p. 188 [Tak99])
Soit Y un sous-ensemble analytique irréductible (réduit) non compact de $\widetilde{X}$.

Pour tout $m \geq 1$, il existe une section $s \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A})$ qui s'annule le long de Z mais dont la restriction à Y n'est pas identiquement nulle.

Démonstration :

On note I_Z l'idéal des germes de fonctions de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ qui s'annulent sur Z. Comme Y est non compact, on choisit sur Y une suite de points $(x_i)_{i\geq 1}$ uniformément discrète. La suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow mA \otimes I_Z \longrightarrow mA \longrightarrow mA \otimes \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

donne en cohomologie L^2 :

$$0 \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A} \otimes I_Z) \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A}) \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A} \otimes \mathcal{O}_Z).$$

Or, $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A} \otimes \mathcal{O}_Z)$ s'identifie à $H^0(Z, m\tilde{A}_{|Z})$ qui est de **dimension finie** puisque Z est compacte (théorème de finitude de Cartan-Serre). Si on fixe un entier $l > h^0(Z, m\tilde{A}_{|Z})$, le théorème 12.4.3 nous permet de trouver des sections $s_1, \ldots, s_l \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A})$ vérifiant :

$$s_j(x_i) \neq 0 \Longleftrightarrow i = j.$$

En restriction à Z, la famille $(s_1, \ldots, s_l)$ est liée pour des raisons de dimension ; cela signifie exactement qu'une combinaison linéaire non triviale s'annule le long de Z :

$$s = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j s_j \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, m\tilde{A} \otimes I_Z).$$

Si $\lambda_k \neq 0$, on a alors $s(x_k) = \lambda_k s_k(x_k) \neq 0$ et ainsi $s_{|Y} \not\equiv 0$. □

On est maintenant en mesure de construire une suite de fonctions quasi-psh dont les singularités (lieu de non-intégrabilité) sont exactement concentrées le long de Z.

Lemme 12.4.1 (prop. 4.1, p. 188 [Tak99])
Pour tout $N > 0$, il existe une fonction quasi-psh φ_N vérifiant :

1. *$i\partial\overline{\partial}\varphi_N \geq -\frac{1}{N}\tilde{\omega}$,*
2. *$U \cap Supp(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/\mathcal{I}(\varphi_N)) = Z$ et donc : $\mathcal{I}(\varphi_N)_{|U} \subset \mathcal{I}_{Z|U}$,*
3. *φ_N est bornée supérieurement (par une constante C_N) : $\varphi_N \leq C_N$.*

Démonstration :

A nouveau en utilisant le fait que certains espaces de sections sont de dimension infinie, on peut trouver des sections L^2 de $\tilde{A}$ qui s'annulent le long de Z à un ordre arbitrairement grand. En effet, si $N, q \geq 1$ sont deux entiers, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \tilde{A} \otimes I_Z^{Nq}) \longrightarrow H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \tilde{A}) \longrightarrow H^0(\widetilde{X}, \tilde{A} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}/I_Z^{Nq}).$$

Comme le faisceau

$$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}/I_Z^{Nq}$$

est supporté par Z, l'espace

$$H^0(\widetilde{X}, \tilde{A} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}/I_Z^{Nq})$$

est de dimension finie et l'espace

$$H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \tilde{A} \otimes I_Z^{Nq})$$

n'est donc pas réduit à zéro. Soit alors $(s_j)_{j\in J}$ une famille finie de sections de $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \tilde{A} \otimes I_Z^{Nq})$. En utilisant la proposition 12.4.2, on peut toujours rajouter des sections à la famille ci-dessus et supposer que Z est la seule composante compacte de

$$U \cap \left(\bigcap_{j\in J} s_j^{-1}(0) \right)$$

(quitte à rétrécir U). On pose alors :

$$\varphi_N = \frac{1}{N} \log \left(\sum_{j\in J} |s_j|^2 \right).$$

Les points 1 et 3 de l'énoncé sont alors clairement vérifiés pour ce choix de fonction. D'autre part, comme l'entier q est arbitraire, on peut le choisir suffisamment grand pour réaliser la condition 2. □

Démonstration de la proposition 12.4.1 :

Commençons tout d'abord par étendre s sur le voisinage U : comme s est L^2 pour la métrique $\tilde{h}$, le théorème d'Ohsawa-Takegoshi-Siu 12.1.2 permet en effet d'étendre s à U (quitte à restreindre U) tout en préservant la condition L^2 (on peut également utiliser la version géométrique de L. Manivel [Man93]). On note toujours s cette extension.

On va maintenant munir $\tilde{L}$ d'une métrique dont les singularités seront suffisamment concentrées sur Z pour obtenir l'extension souhaitée. On choisit $N > 1/\epsilon$ et la fonction φ_N correspondante provenant du lemme 12.4.1 ; on considère alors la métrique suivante sur $\tilde{L}$:

$$h_N = \tilde{h} e^{-\varphi_N}.$$

La courbure de cette métrique vérifie :

$$i\Theta_{h_N}(\tilde{L}) = i\Theta_{\tilde{h}}(\tilde{L}) + i\partial\overline{\partial}\varphi_N \geq (\epsilon - \frac{1}{N})\tilde{\omega}.$$

De plus, par le point 3 du lemme 12.4.1, on a :

$$\tilde{h} \leq C h_N. \tag{12.5}$$

On étend alors la section s par un raisonnement classique (remontant à L. Hörmander) : soit ρ une fonction plateau au voisinage de Z et dont le support est contenu dans U. La section $u = \overline{\partial}(\rho s) = s\overline{\partial}\rho$ est alors une $(n,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée à valeur $\tilde{L}$ définie sur $\widetilde{X}$ tout entier dont le support (compact) est contenu dans $U \backslash U_1$ où U_1 est un voisinage de Z sur lequel la fonction ρ vaut identiquement 1. De plus, comme les singularités de h_N (dans U) ne diffèrent de celles de $\tilde{h}$ que le long de Z et comme s est L^2 pour $\tilde{h}$ sur U, on en déduit que u est L^2 pour h_N sur $\widetilde{X}$. Comme $(\tilde{L}, h_N)$ est à courbure strictement positive, le théorème d'existence L^2 de Demailly-Nadel (corollaire 11.3.3) s'applique : l'équation

$$\overline{\partial} v = u (= \overline{\partial}(\rho s))$$

admet une solution v vérifiant de plus :

$$\int_{\widetilde{X}} |v|^2_{h_N}\, dV_{\tilde{\omega}} \leq C' \int_{\widetilde{X}} |u|^2_{h_N}\, dV_{\tilde{\omega}}. \tag{12.6}$$

On pose alors :

$$\sigma = \rho s - v.$$

Par construction, σ est holomorphe :

$$\sigma \in H^0(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}} + \tilde{L}).$$

Or, ρs est L^2 pour $\tilde{h}$ et v est L^2 pour h_N ; avec (12.5) ci-dessus, on en déduit que σ est L^2 pour $\tilde{h}$. Remarquons alors la chose suivante : comme ρ vaut identiquement 1 sur U_1, u est nulle sur U_1 et donc v est holomorphe sur U_1 et la condition d'intégrabilité (12.6) montre que :

$$v_{|U_1} \in \mathcal{I}(h_N)_{|U_1} \subset \mathcal{I}(\varphi_N)_{|U_1} \subset \mathcal{I}_{Z\,|U_1}.$$

La section v doit donc s'annuler le long de Z et, en particulier, on a :

$$\sigma_{|Z} = s.$$

□

12.4.2 Procédé inductif et fin de la démonstration

Soit donc une section (non-nulle) $s \in H^0(Z, mK_Z)$ avec $m \geq 2$ que l'on souhaite étendre. On fixe des conditions de positivité suffisantes sur A ; en effet, choisissons A tel que :

(A1) toute section de $mK_Z + \tilde{A}_{|Z}$ s'étend en une section L^2 (pour des métriques lisses) de $mK_{\widetilde{X}} + \tilde{A}$,

(A2) pour tout $0 \leq p \leq m-1$, il existe une famille de sections $(s_j^{(p)})_{j=1..N_p}$ de $pK_{\widetilde{X}} + \tilde{A}$ sans zéro commun le long de Z.

Comme A est ample, on peut effectivement réaliser toutes ces conditions (en nombre fini) simultanément. De plus, comme K_X est *big*, il admet une métrique singulière h_X dont le courant de courbure vérifie :

$$i\Theta_{h_X}(K_X) \geq \epsilon_0 \omega.$$

Proposition 12.4.3
Pour tout $k \geq 1$ et pour tout $0 \leq p \leq m-1$, on peut étendre les sections :

$$s^k \otimes s_j^{(p)} \in H^0(Z, (km+p)K_Z + \tilde{A}_{|Z}) \quad (1 \leq j \leq N_p)$$

en des sections :

$$s_j^{(km+p)} \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, (km+p)K_{\widetilde{X}} + \tilde{A})$$

qui sont L^2 pour les métriques lisses $\widetilde{h_A}$ et $\tilde{\omega}$.

Démonstration :

On procède de la façon maintenant habituelle. Explicitons tout de même les deux premières étapes de la récurrence :

Première étape : il faut étendre $s \otimes s_j^{(0)} \in H^0(Z, mK_Z + \tilde{A}_{|Z})$ et ceci peut se faire grâce à la propriété **(A1)** vérifiée par A. Celle-ci nous fournit donc des sections :

$$s_j^{(m)} \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}} + \tilde{A})$$

avec :

$$s_{j|Z}^{(m)} = s \otimes s_j^{(0)}.$$

Deuxième étape : on dispose des extensions $s_j^{(m)} \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}} + \tilde{A})$ et on veut étendre les sections $s \otimes s_j^{(1)} \in H^0(Z, (m+1)K_Z + \tilde{A}_{|Z})$. Pour appliquer la proposition 12.4.1, il faut construire une métrique à courbure strictement positive sur $mK_{\widetilde{X}} + \tilde{A}$ et pour laquelle les sections $s \otimes s_j^{(1)}$ soient intégrables. La métrique $(\sum_q \left|s_q^{(m)}\right|^2)^{-1}$ étant seulement à courbure positive (au sens large), on considère la métrique :

$$h_\delta = \frac{(\widetilde{h_X}^{\otimes m} \otimes \widetilde{h_A})^\delta}{(\sum_q \left|s_q^{(m)}\right|^2)^{(1-\delta)}} \quad (0 < \delta < 1)$$

dont la courbure est certainement minorée par :

$$i\Theta_{h_\delta}(mK_{\widetilde{X}} + \tilde{A}) \geq \delta(m\epsilon_0 + 1)\tilde{\omega}.$$

En choisissant $\delta > 0$ rationnel assez petit, on constate que l'on peut rendre $s \otimes s_j^{(1)}$ de carré intégrable pour h_δ : en effet, les singularités (sur Z) de la métrique induite par la famille $(s_q^{(m)})_q$ sont portées par le lieu d'annulation de s (les sections $(s_q^{(0)})_q$ sont sans zéro commun) et, en choisissant δ assez petit, on rend intégrables les singularités de h_X. On peut alors appliquer la proposition 12.4.1 et ainsi obtenir les extensions :

$$s_j^{m+1} \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, (m+1)K_{\widetilde{X}} + \tilde{A}).$$

Le procédé se poursuit alors comme pour la démonstration des propositions 12.1.1 et 12.2.2. □

On est maintenant en mesure de conclure la

Démonstration du théorème 12.4.1 :

Pour tout $k \geq 1$, on dispose de sections

$$s_j^{(km)} \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, kmK_{\widetilde{X}} + \tilde{A})$$

dont la restriction à Z coincide avec $s^k \otimes s_j^{(0)}$. La métrique $g_{k,\delta}$ sur $(m-1)K_{\widetilde{X}}$ définie par :

$$g_{k,\delta} = \frac{\widetilde{h_X}^{\otimes(m-1)\delta}}{\{(\sum_{j=1}^{N_0} \left|s_j^{(km)}\right|^2) \otimes \widetilde{h_A}\}^{\frac{(m-1)(1-\delta)}{km}}} \quad (0 < \delta < 1)$$

a une courbure vérifiant :

$$i\Theta_{g_{k,\delta}}((m-1)K_{\widetilde{X}}) \geq (m-1)\Big(\delta\epsilon_0 - \frac{(1-\delta)}{km}\Big)\tilde{\omega}. \tag{12.7}$$

Si on fixe d'abord δ rationnel assez petit pour rendre les singularités de $(m-1)h_X$ intégrables, on peut ensuite choisir k assez grand pour rendre le minorant de (12.7) strictement positif. Pour ce choix de (k,δ), on a alors :

$$\begin{aligned}\int_Z |s|^2_{g_{k,\delta}}\, dV_{\tilde{\omega}} &\leq C\int_Z \frac{|s|^2\, e^{-2(m-1)\delta\tilde{\varphi}}}{(\sum_j \left|s^k\otimes s_j^{(0)}\right|^2)^{\frac{(m-1)(1-\delta)}{km}}} dV_{\tilde{\omega}}\\ &\leq C\int_Z \frac{|s|^2\, e^{-2(m-1)\delta\tilde{\varphi}}}{|s|^{\frac{2(m-1)(1-\delta)}{m}}\,(\sum_j \left|s_j^{(0)}\right|^2)^{\frac{(m-1)(1-\delta)}{km}}} dV_{\tilde{\omega}}\\ &\leq C'\int_Z e^{-2(m-1)\delta\tilde{\varphi}} dV_{\tilde{\omega}} < +\infty,\end{aligned}$$

car on a justement choisi δ pour que $e^{-2(m-1)\delta\tilde{\varphi}}$ devienne localement intégrable (φ est ici le poids de la métrique h_X par rapport à ω). Finalement s est L^2 pour $g_{k,\delta}$ dont la courbure est strictement positive : on peut appliquer la proposition 12.4.1 et obtenir l'extension souhaitée

$$\sigma \in H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}).$$

□

Pour finir, donnons un corollaire intéressant du théorème 12.4.1 : dans le cas où X est supposée de type π_1-général, Z est alors un point et :

$$\forall m \geq 1,\ h^0(Z, mK_Z) = 1$$

et en particulier, on a $H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}) \neq 0$ pour $m \geq 2$. Or, la proposition 12.3.1 montre que

$$\forall m \geq 2,\ h^0(X, mK_X) = h^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}}) = \dim_{\pi_1(X)} H^0_{(2)}(\widetilde{X}, mK_{\widetilde{X}})$$

pour une variété X de type général. On en déduit donc :

Corollaire 12.4.2
Si X est une variété de type général et de type π_1-général, on a :

$$\forall m \geq 2,\ p_m(X) = p_m^{(2)}(\widetilde{X}) \neq 0$$

Remarque 12.4.2
On peut aussi obtenir le corollaire 12.4.2 en appliquant le théorème 12.4.2 à $L = (m-1)K_X$.

12.5 Discussion autour des problèmes d'extensions

12.5.1 Interpolation des différents énoncés

Rappelons que le théorème 10.1.4 concerne le problème d'extension pour les sections de $mK_{\mathcal{X}} + L$ alors que le théorème 12.1.1 traite du cas $m(K_{\mathcal{X}} + L)$.

Il est alors naturel de se demander si on peut interpoler les deux résultats et obtenir un énoncé d'extension pour des sections de $mK_{\mathcal{X}} + pL$ où m et p sont des entiers positifs. La méthode One-Tower permet d'obtenir le résultat suivant (voir aussi [Dem06]) :

Théorème 12.5.1
Soient $\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ une famille projective, $m, p \geq 1$ deux entiers et (L, h) un fibré en droites pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ tel que la restriction de h à la fibre centrale $\mathcal{X}_0$ soit bien définie. Supposons de plus que : $\mathcal{I}(h^q_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$ où $p = (m-1)q + r$. Toute section de $(mK_{\mathcal{X}_0} + pL) \otimes \mathcal{I}(h^r_{\mathcal{X}_0})$ s'étend alors à $\mathcal{X}$.

Donnons quelques mots d'explication sur la décomposition $p = (m-1)q+r$. La méthode One-Tower est composée de m étapes mais il faut en fait distinguer deux catégories :

1. au cours des $m-1$ premières étapes, on cherche à étendre les sections $s^k \otimes s_j^{(p+1)}$ en utilisant les sections déjà construites $\widetilde{s}_q^{(km+p)}$; dans les estimations L^2, s apparaît au numérateur et au dénominateur avec le même exposant k et les contributions se compensent. Comme on rajoute q copies de L à chaque étape, on a besoin de la trivialité de l'idéal multiplicateur correspondant pour majorer les normes L^2.
2. à l'étape m, on veut prolonger $s^{k+1} \otimes s_j^{(0)}$ en utilisant $\widetilde{s}_q^{(km+m-1)}$. Dans l'expression de la métrique, le terme en s^k au dénominateur est compensé par l'exposant $k+1$ au numérateur : pour majorer les normes L^2, on aboutit alors naturellement à la condition $s \in \mathcal{I}(h^r_{\mathcal{X}_0})$ (puisque dans la dernière étape, il faut rajouter r copies de L).

12.5.2 Un contre-exemple

Pour conclure cette discussion sur ces problèmes d'extension de formes pluricanoniques, on se propose de montrer sur un exemple que les conditions de positivité sur L dans le théorème 12.2.1 ne peuvent être affaiblies. Sur l'exemple en question, les fibrés L et $L-S$ sont même nef (en particulier pseudo-effectifs) et l'application de restriction n'est en aucun cas surjective. Cette construction est en partie extraite de [DPS94] :

Soit E une courbe elliptique et V l'unique fibré de rang 2 sur E obtenu comme extension non scindée du fibré trivial par lui-même :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow V \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0.$$

En particulier, V est numériquement plat : $c_1(V) = 0$ et $c_2(V) = 0$. Considérons alors la surface $X = \mathbb{P}(V)$ et la section $S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_E) \subset X$ du réglage $\pi : X \longrightarrow E$. Il est aisé de vérifier que S satisfait aux égalités suivantes :

$$S^2 = 0, \ \mathcal{O}_X(S) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1), \ \text{ et } \ \mathcal{O}_S(S) = \mathcal{O}_S.$$

D'autre part, le fibré canonique de X est donné par :

$$K_X = \mathcal{O}_X(-2S).$$

On choisit alors pour L le fibré en droites : $L = \mathcal{O}_X(2S) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2)$. Comme V est numériquement plat, il est nef comme fibré vectoriel et ainsi

$$L - S = \mathcal{O}_X(2S) - \mathcal{O}_X(S) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

est également nef. Or, comme

$$\begin{aligned} K_X + L + S &= \mathcal{O}_X(-2S) + \mathcal{O}_X(2S) + \mathcal{O}_X(S) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \\ K_S + L_{|S} &= (K_X + L + S)_{|S} = \mathcal{O}_S(S) = \mathcal{O}_S, \end{aligned}$$

l'application de restriction (pour $m \geq 1$) :

$$H^0(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(m)) \simeq H^0(X, m(K_X + S + L)) \longrightarrow H^0(S, m(K_S + L)) \simeq H^0(S, \mathcal{O}_S)$$

est en fait l'application nulle. Elle n'est, *a fortiori*, pas surjective.

Remarque 12.5.1
Dans [DPS94], le fibré L est un exemple de fibré en droites nef qui n'est cependant pas hermitien semi-positif (i.e. L n'admet pas de métrique lisse à courbure positive ou nulle).

Appendice

Annexe A

Deux lemmes de théorie des groupes

Commencons par un premier résultat concernant les groupes presque abéliens ; on rappelle qu'un groupe est dit presque abélien (ou virtuellement abélien) si il possède un sous-groupe d'indice fini qui est abélien.

Lemme A.0.1
Soit une suite exacte de groupes :

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

avec F un groupe fini, G de type fini et H presque abélien. Dans cette situation, G est également presque abélien.

Démonstration :
On peut supposer que $H \simeq G/F$ est abélien (et ceci n'affecte pas l'hypothèse G de type fini). De plus, la conjugaison donne un morphisme $c : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$ de noyau d'indice fini dans G. Quitte à remplacer G par $\mathrm{Ker}(c)$, on peut donc supposer F abélien et central dans G. Si on pose $N = \mathrm{card}(F)$, on note abusivement $N : H \longrightarrow H$ la multiplication par N (H étant abélien, l'application N est bien définie) ; soit alors : $\widetilde{H} = \mathrm{Im}(N) = N \cdot H$. Puisque G est de type fini, H l'est également et ceci entraine en particulier que $\widetilde{H}$ est d'indice fini dans H et $\widetilde{G} = \pi^{-1}(\widetilde{H})$ est donc également d'indice fini dans G. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \mapsto & [x,y] = xyx^{-1}y^{-1} \end{array} \right.$$

est bien définie et passe au quotient (car F est central dans G) en :

$$\mathrm{cm} : H \times H \longrightarrow F.$$

Or, si $(g,h) \in \widetilde{H}$, on a clairement : $\mathrm{cm}(g,h) = 0$ ($\widetilde{H} = N \cdot H$). On en déduit alors immédiatement que $\widetilde{G}$ est abélien.□

Le deuxième résultat concerne les groupes de surfaces (*i.e.* les groupes fondamentaux des courbes complexes compactes) et plus précisément, il donne une

condition suffisante de commensurabilité. Dans le lemme suivant, la terminologie *groupe de surface* désigne le groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte :

Lemme A.0.2
Si on a une suite exacte de groupes : $1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ *avec* N *fini et* H *un groupe de surface, alors* G *est commensurable à* H*.*

Démonstration :
Si on a une telle suite exacte : $1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ avec N fini et H un groupe de surface, on peut tout d'abord se ramener à N central dans G. En effet, l'action par conjugaison de G sur N définit un morphisme $c : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$; $G_1 = \mathrm{Ker}(c)$ est un sous-groupe d'indice fini de G (donc commensurable à G) et en posant $N_1 = N \cap G_1$ et H_1 l'image de G_1 dans H, on obtient une nouvelle suite exacte : $1 \longrightarrow N_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow H_1 \longrightarrow 1$ et comme H_1 est clairement d'indice fini dans H, c'est encore un groupe de surface. On supposera donc dorénavant l'extension $1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ centrale.

Mais les extensions centrales de H par N sont classifiées par le groupe de cohomologie $H^2(H, N)$ et une telle extension est représentée par la donnée d'un élément $\xi \in H^2(H, N)$. Si on peut exhiber un sous-groupe H' d'indice fini dans H tel que $\xi_{\|H'}$ soit trivial, l'extension correspondante à H' sera scindée et, a fortiori, G sera commensurable à H. De plus, comme on a supposé N abélien (et fini), on sait que N est un produit direct de groupes cycliques et pour simplifier, on supposera désormais que $N = \mathbb{Z}_m$ est cyclique d'ordre m. On a alors une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

qui donne une suite exacte longue en cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^2(H, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot m} H^2(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(H, N) \longrightarrow H^3(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Mais $H = \pi_1(C)$ (où C est une courbe de genre ≥ 1) et comme C est un espace $K(H, 1)$, on en déduit que : $H^*(H, \mathbb{Z}) \simeq H^*(C, \mathbb{Z})$ e de même pour la cohomologie à valeurs dans N ; en particulier, $H^2(H, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^3(H, \mathbb{Z}) = 0$. Comme on peut également écrire cette suite longue pour C' revêtement de C de degré m (ça existe), on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^2(C, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot m} & H^2(C, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(C, N) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & H^2(C', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cdot m} & H^2(C', \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(C', N) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Mais comme $C' \longrightarrow C$ est un revêtement (étale) de degré m, l'application $H^2(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(C', \mathbb{Z})$ est clairement la muliplication par m, d'où :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H^2(C, N) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \cdot m} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot m} & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot m} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & H^2(C', N) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

et de l'exactitude de ce diagramme, on tire facilement que la flèche : $H^2(C, N) \longrightarrow H^2(C', N)$ est identiquement nulle. Si $H' = \pi_1(C')$, on a donc bien : $\xi_{\|H'}$ et l'extension correspondante est scindée.

On constate également que cette démonstration s'adapte au cas où N est un groupe abélien fini. En effet, N est alors un produit direct de groupes cycliques et il suffit alors de remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}^r$ (où r est le nombre de facteurs dans la décomposition de N) et d'effectuer les opérations facteur par facteur.□

Annexe B

π_1-orbifolde d'une fibration

Nous donnons en appendice les démonstrations des énoncés concernant les groupes fondamentaux orbifoldes.

B.1 Démonstration de la proposition 5.3.1 :

Les notations sont celles de la section 5.3. Dans la suite, on notera $Y^* = Y \setminus |\Delta|$ et $X^* = f^{-1}(Y^*)$; si D_j est une composante de $|\Delta|$, on notera :

$$f^*(D_j) = \sum_k m_{jk} D_{jk} + R_j$$

et γ_{jk} désignera encore un petit lacet autour de D_{jk}. On a alors : $f_*(\gamma_{jk}) = \gamma_j^{m_{jk}}$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1(F) & \xrightarrow{k_*} & \pi_1(X^*) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y^*) & \longrightarrow & 1 \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \downarrow & & \\
\pi_1(F) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions et où k est l'inclusion de F dans X^*. De plus, la première suite horizontale est maintenant exacte :

$$\pi_1(F)_{X^*} = \mathrm{Ker}(\pi_1(X^*) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y^*)).$$

Pour vérifier que l'on peut bien définir un morphisme

$$f^* : \pi_1(Y/\Delta^*(f)) \longrightarrow \pi_1(X)/\pi_1(F)_X,$$

il suffit de montrer que tout relèvement de $\gamma_j^{m_j^*}$ dans $\pi_1(X)$ est en fait dans $\pi_1(F)_X$. On va tout d'abord exhiber un relèvement $\alpha \in \pi_1(X^*)$ de $\gamma_j^{m_j^*}$ vérifiant $j_*(\alpha) = 1$ dans $\pi_1(X)$. En effet, comme $m_j^* = \mathrm{pgcd}_k \{m_{jk}\}$, on sait (théorème de Bezout) qu'il existe $u_{jk} \in \mathbb{Z}$ tels que : $\sum_k u_{jk} m_{jk} = m_j^*$. En posant $\alpha = \prod_k \gamma_{jk}^{u_{jk}}$, on a alors :

$$f_*(\alpha) = \prod_k f_*(\gamma_{jk})^{u_{jk}} = \gamma_j^{\sum_k u_{jk} m_{jk}} = \gamma_j^{m_j^*}.$$

Or, chaque γ_{jk} est un petit lacet dans X^* donc peut être contracté dans X et on a donc bien $j_*(\alpha) = 1$ dans $\pi_1(X)$.

Soit alors $\beta \in \pi_1(X^*)$ un autre relèvement de $\gamma_j^{m_j^*}$; on a donc :

$$f_*(\beta) = \gamma_j^{m_j} = f_*(\alpha).$$

L'exactitude de la première suite horizontale dans le diagramme ci-dessus entraîne que $\beta\alpha^{-1} \in \pi_1(F)_{X^*}$ d'où : $\beta\alpha^{-1} = k_*(\epsilon)$ avec $\epsilon \in \pi_1(F)$. En appliquant j_*, on a alors : $j_*(\beta) = j_*(k_*(\epsilon)) = i_*(\epsilon)$, ce qui signifie exactement que $j_*(\beta) \in \pi_1(F)_X$.

Pour constater que le morphisme $\pi_1(Y/\Delta^*(f)) \longrightarrow \pi_1(X)/\pi_1(F)_X$ est surjectif, il suffit de remarquer que $\pi_1(X^*) \longrightarrow \pi_1(X)$ est lui-même surjectif.

B.2 Démonstration de la proposition 5.3.3 :

On reprend les notations de la démonstration précédente. Remarquons de plus que, comme f est nette, il existe un morphisme birationnel $u : X \longrightarrow X'$ vérifiant la propriété suivante : les diviseurs f-exceptionnels sont également u-exceptionnels.
si $\Delta^* = \sum_i (1 - \frac{1}{m_i^*}) D_i$, on note $Y^* = Y \setminus |\Delta^*|$ et $X^* = f^{-1}(Y^*)$. Pour D_i une composante irréductible de Δ^*, on note :

$$f^*(D_i) = \sum_k m_{ik} D_{ik} + R_i,$$

avec R_i f-exceptionnel. Si on définit X_0 comme étant le complémentaire (dans X) de la réunion des R_i et X_0' le complémentaire (dans X') de la réunion des $u(R_i)$, X_0 et X_0' sont alors des ouverts de Zariski de X et X'. On en déduit le diagramme suivant :

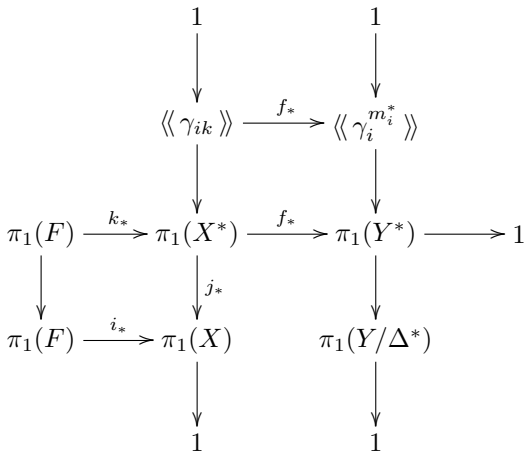
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0) & \longrightarrow & \pi_1(X_0') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(X') \end{array}$$

où la première flèche verticale est surjective et la deuxième un isomorphisme (car X_0' a un complémentaire de codimension au moins 2) ; de plus, comme u est biméromorphe, les deux flèches horizontales sont également des isomorphismes : la flèche $\pi_1(X_0) \longrightarrow \pi_1(X)$ est donc un isomorphisme.

Si γ_{ik} désigne (toujours) un lacet autour de D_{ik}, le théorème de Van Kampen nous fournit la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \langle\!\langle\, \gamma_{ik} \,\rangle\!\rangle \longrightarrow \pi_1(X^*) \longrightarrow \pi_1(X_0) \cong \pi_1(X) \longrightarrow 1$$

à partir de laquelle on peut construire le diagramme commutatif suivant :



On constate qu'on peut maintenant compléter le diagramme en construisant une flèche : $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y/\Delta^*)$; si on note ce morphisme f_*, on constate aisément qu'il est l'inverse de f^* : les deux morphismes en question sont bien des isomorphismes.□

Remarque B.2.1
Dans la situation ci-dessus, on a en fait remplacé X par X' et, en quelque sorte, cela revient à éliminer les diviseurs exceptionnels (au moins au niveau des groupes fondamentaux).

B.3 Démonstration de la proposition 6.0.3 :

Dans ce qui suit, F désignera encore la fibre générale de f (c'est donc une courbe compacte lisse) ; on obtient alors une structure orbifolde induite sur F (notée abusivement (F/Δ)) provenant de celle de S. Si $F^* = F - (F \cap |\Delta|)$ et $S^* = S - |\Delta|$, l'inclusion $F^* \hookrightarrow S^*$ donne alors un morphisme $\pi_1(F^*) \longrightarrow \pi_1(S^*)$ dont l'image est normale dans $\pi_1(S^*)$.

De plus, F étant générale, elle rencontre les composantes (de la partie horizontale) de $|\Delta|$ transversalement ; un petit lacet (dans F^*) autour d'un point de $F \cap |\Delta|$ est donc aussi un petit lacet autour d'une composante de Δ dans S^*. Ceci signifie que le morphisme naturel :

$$\pi_1(F/\Delta) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta)$$

est parfaitement défini et on vérifie facilement que son image (que l'on notera $\pi_1(F/\Delta)_S$) est normale dans $\pi_1(S/\Delta)$.

Pour $x_l \in |D^*|$, on note : $f^{-1}(x_l) = \sum_\alpha m_{l\alpha} D_{l\alpha} + \sum_\beta m_{l\beta} D_{l\beta}$ où la somme indexée par α correspond aux composantes de la fibre qui sont déjà des composantes (verticales) de Δ. On a alors $m_l^* = \mathrm{pgcd}_{\alpha,\beta}(m_{l\alpha} m(D_{l\alpha}, \Delta), m_{l\beta})$. On note :

- $S^{**} = S^* - (\bigcup_l f^{-1}(x_l))$,
- $C^* = C - |D|$,

- γ_l un petit lacet autour de x_l dans C^*,
- λ_j un petit lacet autour des composantes de Δ et
- $\gamma_{l\beta}$ un petit lacet autour de $D_{l\beta}$.

On a alors un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \langle\!\langle\, \gamma_{l\beta} \,\rangle\!\rangle & \xrightarrow{f_*} & \langle\!\langle\, \gamma_l \,\rangle\!\rangle & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_1(F^*) & \longrightarrow & \pi_1(S^{**}) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(C^*) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\pi_1(F^*) & \longrightarrow & \pi_1(S^*) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{array}$$

On va montrer qu'on peut encore construire un morphisme :

$$\pi_1(S/\Delta)/\pi_1(F/\Delta)_S \longrightarrow \pi_1(C/D).$$

Pour cela il faut montrer que les différentes opérations de relèvement et d'image directe sont cohérentes avec la structure orbifolde.
Soit donc un élément de $\pi_1(S/\Delta)/\pi_1(F/\Delta)_S$; on peut successivement lui choisir des antécédents dans $\pi_1(S/\Delta)$, dans $\pi_1(S^*)$ puis dans $\pi_1(S^{**})$. A chaque étape, le choix du relèvement dépend successivement d'un élément de $\langle\!\langle\, \lambda_j^{d_j} \,\rangle\!\rangle$, de $\pi_1(F^*)$ et enfin d'un élément de $\langle\!\langle\, \gamma_{l\beta} \,\rangle\!\rangle$. Or, les éléments de ces groupes ont une image triviale dans $\pi_1(C/D)$:

1. si λ_j est un lacet autour d'une composante horizontale de Δ, on a $f_*(\lambda_j) = 1$ dans $\pi_1(C^*)$;
2. si λ_j est un lacet autour d'une composante verticale $E_j = D_{l\alpha}$ de Δ, alors $f_*(\lambda_j) = \gamma_l^{m_{l\alpha}}$ d'où $f_*(\lambda_j^{d_j}) = \gamma_l^{d_j m_{l\alpha}} = \gamma_l^{m(D_{l\alpha},\Delta)m_{l\alpha}} \in \langle\!\langle\, \gamma_l^{m_l^*} \,\rangle\!\rangle$ car m_l^* divise $m(D_{l\alpha}, \Delta)m_{l\alpha}$;
3. dans le cas de $\gamma_{l\beta}$, on a $f_*(\gamma_{l\beta}) = \gamma_l^{m_{l\beta}} \in \langle\!\langle\, \gamma_l^{m_l} \,\rangle\!\rangle$ car m_l divise $m_{l\beta}$;
4. pour finir, un lacet dans F^* a toujours une image triviale dans $\pi_1(C^*)$.

Ceci assure bien la cohérence au niveau des groupes fondamentaux orbifoldes. Le morphisme ainsi construit

$$f_* : \pi_1(S/\Delta)\Big/\pi_1(F/\Delta)_S \longrightarrow \pi_1(C/D)$$

est surjectif. En utilisant l'exactitude (partielle) du diagramme ci-dessus et le théorème de Bezout (comme ci-dessus), on montre facilement qu'il est injectif.□

Annexe C

Formule de l'indice L^2

Dans cette annexe, on souhaite redonner quelques précisions autour du théorème de l'indice L^2 qui permet de comparer les invariants d'une variété compacte avec les invariants L^2 de son revêtement universel. Comme on a pu le constater dans les différentes parties du présent travail, ce théorème donne des renseignements très importants sur la géométrie du revêtement universel (par exemple lorsqu'on dispose des théorèmes d'annulations adéquats). C'est entre autre pour cette raison qu'il nous a semblé important de préciser les grandes lignes de la démonstration de ce résultat (d'autant plus qu'à notre connaissance, hormis l'article original d'Atiyah, peu de lignes ont été écrites à ce sujet).

Le théorème de l'indice L^2 à proprement parler concerne les indices des opérateurs elliptiques sur les variétés riemanniennes compactes (et leurs revêtements galoisiens) ; nous nous plaçons ici volontairement dans la catégorie analytique complexe (et même kählérienne) et l'énoncé que nous en donnons portera sur les caractéristiques d'Euler de fibrés vectoriels holomorphes. La démonstration dont nous présentons les grandes lignes repose sur les méthodes de l'équation de la chaleur : après en avoir dégagé les idées essentielles, nous donnerons les précisions nécessaires sur les quelques points les plus retors.

Notations

Si $F \longrightarrow X$ est un fibré vectoriel holomorphe sur une variété kählérienne (X, ω) de dimension n et si on munit F d'une métrique hermitienne h, on notera :

$$L^2_{p,q}(X,F) = L^2(X, \Lambda^{p,q}T^*_X \otimes F) \text{ et}$$

$$L^2_{0,\bullet}(X,F) = \oplus_{q=0}^{n} L^2_{0,q}(X,F)$$

les espaces de sections L^2 correspondants et de même pour les section C^∞. De plus, $< \cdot, \cdot >$ désignera toujours le produit scalaire dans les espaces L^2.

Si $\overline{\partial}$ désigne la connexion (canonique) de type $(0,1)$ sur F, on note $\overline{\partial}^*$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}$ et :

$$\Delta'' = [\overline{\partial}, \overline{\partial}^*] = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$$

le laplacien anti-holomorphe (agissant sur les formes à valeurs dans F). Comme on ne considérera parfois que l'action sur les $(0,q)$ formes, on notera Δ''_q l'opérateur ainsi obtenu.

C.1 Enoncé du théorème et schéma de la démonstration

Soit $F \longrightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur (X, ω) variété kählérienne compacte de dimension n. On considère de plus $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement universel de X. Si on munit F d'une métrique h, on considérera les métriques $\tilde{\omega}$ et $\tilde{h}$ (sur $\widetilde{X}$ et $\widetilde{F}$) obtenues par relèvement, $\widetilde{F}$ désignant le fibré $\pi^*\widetilde{F}$:

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{F}, \tilde{h}) & \longrightarrow & (F, h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\widetilde{X}, \tilde{\omega}) & \xrightarrow{\pi} & (X, \omega) \end{array}$$

D'après la théorie de Hodge, on sait que les formes harmoniques permettent de calculer la cohomologie (sur X à valeurs dans F) ; on s'intéresse donc aux espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) &= \{(p,q) - \text{formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{u \in L^2(\widetilde{X}, \Lambda^{p,q} T^*_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{F}) \,|\, \widetilde{\Delta''} u = 0\}. \end{aligned}$$

L'action de $G = \pi_1(X)$ sur $\widetilde{X}$ (et donc sur $\widetilde{F}$) permet de définir une dimension renormalisée prenant en compte la structure additionnelle de G-module pour des sous-espaces de formes L^2, cette G-dimension ayant la particularité d'être à valeurs réelles positives. La compacité de X entraîne que les espaces $\mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F})$ sont de G-dimension finie ; on peut donc considérer une G-caractéristique d'Euler :

$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim_G \Big(\mathcal{H}^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) \Big).$$

On peut alors énoncer le théorème de l'indice L^2 [Ati76] sous la forme suivante :

Théorème C.1.1 (M.F. Atiyah, 1976)
Dans la situation décrite ci-dessus, on dispose de l'égalité

$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) \quad = \quad \chi(X, F).$$

Remarque C.1.1
Comme le montre l'exemple des tores, l'égalité se produit pour la somme alternée mais il n'y a en général pas de lien entre $h^{0,q}(X, F)$ et $h^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F})$. En effet, si X est un tore et $F = \mathcal{O}_X$ est le fibré trivial, on a alors $\widetilde{X} = \mathbb{C}^n$ et

$$\forall\, 0 \leq q \leq n,\ h^{0,q}(X) = C^q_n \text{ et } h^{0,q}_{(2)}(\widetilde{X}) = 0.$$

L'égalité n' a donc lieu qu'une fois que l'on considère les caractéristiques d'Euler.

La démonstration que nous allons en donner repose sur la méthode de la chaleur : elle consiste à examiner les équations d'évolution associées aux opérateurs auto-adjoints positifs Δ'' sur X et $\widetilde{\Delta''}$ sur $\widetilde{X}$ et, plus particulièrement, les noyaux des semi-groupes $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$. En effet, ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta''_q}) = \text{cste (indépendante de } t)$$

$$\text{et } \mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}}) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \mathrm{Tr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''_q}}) = \text{cste},$$

où Tr_G désigne la trace renormalisée. Or, lorsque $t \to \infty$, on montre que :

$$e^{-t\Delta''} \longrightarrow P_{\mathcal{H}}$$

$$(\text{resp. } e^{-t\widetilde{\Delta''}} \longrightarrow \widetilde{P_{\mathcal{H}}}),$$

où $P_{\mathcal{H}}$ désigne la projection sur l'espace des formes harmoniques (resp. $\widetilde{P_{\mathcal{H}}}$). L'idée sous-jacente est, bien sûr, que si u est un vecteur propre de Δ'' pour la valeur propre $\lambda \geq 0$, alors $e^{-t\Delta''}u = e^{-t\lambda}u$ et donc que $e^{-t\Delta''}u \to 0$ quand $t \to +\infty$ si $\lambda > 0$ tandis que $e^{-t\Delta''}u = u$ si $\lambda = 0$ (*i.e.* u est harmonique).

On en déduit donc la très importante formule de McKean-Singer :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = \mathrm{STr}(P_{\mathcal{H}}) = \chi(X, F) \tag{C.1}$$

(la dernière égalité étant une conséquence de la théorie de Hodge) et son homologue sur $\widetilde{X}$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}}) = \mathrm{STr}_G(\widetilde{P_{\mathcal{H}}}) = \chi^G_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}). \tag{C.2}$$

Comme il a été mentionné ci-dessus, les opérateurs $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$ sont des opérateurs à noyaux C^∞ (notés $k_t(x, y)$ et $\widetilde{k_t}(\tilde{x}, \tilde{y})$) ; les égalités (C.1) et (C.2) se réécrivent alors en :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \chi(X, F) = \int_X \mathrm{str}(k_t(x, x))dx, \tag{C.3}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \chi^G_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) = \int_U \mathrm{str}(\widetilde{k_t}(x, x))dx, \tag{C.4}$$

où U désigne un domaine fondamental (ouvert) pour l'action de G et où *str* désigne la trace alternée dans la fibre au dessus de x.

Les égalités (C.3) et (C.4) ayant été obtenues en étudiant les asymptotiques de l'équation de la chaleur quand $t \longrightarrow +\infty$, il est naturel d'examiner le comportement du noyau de cette équation quand $t \longrightarrow 0^+$. Or, il s'avère que les noyaux k_t et $\widetilde{k_t}$ admettent (au moins sur la diagonale de $X \times X$ et celle de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$) des développements asymptotiques de la forme :

$$k_t(x, x) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n}(\alpha_0(x) + \alpha_1(x)t + \cdots + \alpha_n(x)t^n + \cdots)$$

$$\widetilde{k}_t(x,x) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n}(\widetilde{\alpha_0}(x) + \widetilde{\alpha_1}(x)t + \cdots + \widetilde{\alpha_n}(x)t^n + \cdots).$$

En intégrant ces développements asymptotiques et en utilisant (C.3) et (C.4), on obtient :

$$\chi(X,F) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n}\big(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots\big) \tag{C.5}$$

où $a_j = \int_X \mathrm{str}(\alpha_j(x))dx$ et :

$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F}) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n}\big(\widetilde{a_0} + \widetilde{a_1} t + \cdots + \widetilde{a_n} t^n + \cdots\big) \tag{C.6}$$

où $\widetilde{a_j} = \int_U \mathrm{str}(\widetilde{\alpha_j}(x))dx$. Comme le membre de gauche est constant dans (C.5) et (C.6), on obtient par identification :

$$\chi(X,F) = \frac{1}{(2\pi)^n} a_n = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_X \mathrm{str}(\alpha_n(x))dx \tag{C.7}$$

et

$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\widetilde{a_n} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_U \mathrm{str}(\widetilde{\alpha_n}(x))dx. \tag{C.8}$$

Pour conclure il ne nous reste plus qu'à remarquer que les termes du développement ($\alpha_j(x)$ et $\widetilde{\alpha_j}(x)$)) sont des expressions algébriques locales en les coefficients des métriques ω et h et de leurs dérivées ; les métriques considérées sur $\widetilde{X}$ et $\widetilde{F}$ vérifiant $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ et $\tilde{h} = \pi^* h$, on a nécessairement $\widetilde{\alpha_n} = \pi^*\alpha_n$. Comme U est un domaine fondamental, on déduit de (C.7) et (C.8) l'égalité annoncée du théorème C.1.1.

C.2 Dimension de Von Neumann

Pour commencer, il nous faut donner un sens un peu plus précis à la notion de dimension renormalisée. La discussion qui va suivre tient en particulier de [Ati76] mais, pour un traitement plus complet de la dimension de Von Neumann, on pourra consulter [Lüc02, chapitre 1]. La lecture du chapitre 6 est également recommandée : le traitement de la dimension de Von Neumann y est complètement algébrisé et toute l'analyse hilbertienne disparaît pour laisser place aux structures algébriques (algèbre homologique et théorie des anneaux et modules). On pourra également consulter les quelques pages [Kol95, p. 75-80].

C.2.1 Cas de $l^2(G)$

Dans un premier temps, on va étudier la situation de l'espace modèle $l^2(G)$ (où G est un groupe dénombrable) et construire une dimension renormalisée prenant en compte la structure additionnelle de G-module. Pour cela, on considère la base hilbertienne canonique $(e_g)_{g\in G}$ de $l^2(G)$ définie par :

$$e_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient ainsi une injection canonique de G dans $l^2(G)$. Comme G agit naturellement sur $l^2(G)$ par translation à gauche, on va considérer l'algèbre $\mathcal{A}(G)$

des opérateurs bornés G-équivariants sur $l^2(G)$. L'algèbre $\mathcal{A}(G)$ est munie d'une trace naturelle (obtenue en renormalisant la trace usuelle) :

$$\mathrm{Tr}_G(P) =< P(e_1), e_1 > .$$

Si maintenant V est un sous-espace de $l^2(G)$ invariant par l'action de G et si P_V désigne le projecteur orthogonal sur $\overline{V}$, alors $P_V \in \mathcal{A}(G)$ et on pose :

$$\dim_G(V) = \mathrm{Tr}_G(P_V).$$

On a donc défini, pour les sous-espaces invariants de $l^2(G)$, une dimension vérifiant :

(i) $0 \leq \dim_G(V) \leq 1$,

(ii) si $V = V_1 \oplus V_2$ (somme orthogonale) alors $\dim_G(V) = \dim_G(V_1) + \dim_G(V_2)$,

(iii) si G' est un sous-groupe d'indice d de G, $\dim_{G'}(V) = d \dim_G(V)$,

(iv) $\dim_G(l^2(G)) = 1$.

La propriété (iii) montre bien que la G-dimension est une renormalisation de la dimension usuelle car, si $|G| < +\infty$, on a alors : $\dim_G(V) = \frac{\dim\,(V)}{|G|}$.

A titre d'exemple, étudions le cas de $\mathbb{Z}$; les séries de Fourier fournissent l'isomorphisme : $l^2(\mathbb{Z}) \simeq L^2(\mathbb{S}^1)$ et l'action de $\mathbb{Z}$ devient la multiplication par z^n. Si $U \subset \mathbb{S}^1$ est un borélien, on note V_U l'ensemble des fonctions de $l^2(\mathbb{S}^1)$ s'annulant sur U ; V_U est alors clairement $\mathbb{Z}$-invariant. La projection sur V_U étant la multiplication par χ_U (fonction caractéristique de U), on en déduit :

$$\dim_{\mathbb{Z}}(V_U) =< P_U(1), 1 >=< \chi_U 1, 1 >= m(U),$$

c'est à dire la mesure de Lebesgue de U. Elle prend donc bien des valeurs réelles arbitraires entre 0 et 1

C.2.2 Opérateurs à G-trace sur $L^2(\widetilde{X})$

On va maintenant étendre cette étude au cas qui nous intéresse, à savoir celui des sous-espaces de L^2 sur $\widetilde{X}$; pour simplifier on va tout d'abord examiner le cas des fonctions, c'est à dire de $L^2(\widetilde{X})$. Comme précédemment, on va noter $\mathcal{A}(G)$ l'algèbre des opérateurs G-équivariants. Dans toute la suite, U désignera un domaine fondamental pour l'action de G, c'est-à-dire un ouvert relativement compact de $\widetilde{X}$ disjoint de tous ses translatés par G et vérifiant :

$$\widetilde{X} \backslash (\bigcup_{g \in G} g(U)) \text{ est de mesure nulle.}$$

On dispose alors de l'isomorphisme :

$$L^2(\widetilde{X}) \simeq l^2(G) \hat{\otimes} L^2(U).$$

On considère donc la base $(e_g \otimes f_j)_{g \in G, j \in \mathbb{N}}$ où $(e_g)_g$ est la base canonique de $l^2(G)$ et $(f_j)_j$ une base hilbertienne de $L^2(U)$. Pour munir $L^2(\widetilde{X})$ d'une G-trace, on peut utiliser la trace renormalisée definie précédemment sur $l^2(G)$. Pour traiter la partie $L^2(U)$ dans la décomposition ci-dessus, on introduit la

classe des opérateurs G-Hilbert-Schmidt : on dit que $T \in \mathcal{A}(G)$ est G-Hilbert-Schmidt (G-HS) si il vérifie

$$\|T\|^2_{G-HS} = \sum_{j\geq 0} \|T(e_1 \otimes f_j)\|^2 < +\infty.$$

Comme dans la situation hilbertienne classique, G-HS est un idéal bilatère auto-adjoint de $L^2(\widetilde{X})$ et on a de plus :

$$\|T^*\|_{G-HS} = \|T\|_{G-HS}\,.$$

Définition C.2.1
Un opérateur $T \in \mathcal{A}(G)$ est dit de G-classe trace si on peut l'écrire $T = AB$ avec A et $B \in G - HS$.

Pou un opérateur $T = AB$ de G-classe trace (avec $A, B \in G$-HS), on pose :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_G(T) &=< B, A^* >_{G-HS} \\ &= \sum_{j\geq 0} < B(e_1 \otimes f_j), A^*(e_1 \otimes f_j) > \\ &= \sum_{j\geq 0} < T(e_1 \otimes f_j), e_1 \otimes f_j > .\end{aligned}$$

Cette quantité est donc bien indépendante de l'écriture $T = AB$. Pour un opérateur T auto-adjoint positif (ce que seront $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$ et $\widetilde{P_{\mathcal{H}}}$), la convergence de la série ci-dessus suffit en fait à assurer le fait que T soit de G-classe trace.

Ceci nous amène alors à la définition suivante :

Définition C.2.2
Soit V est un sous-espace G-invariant de $L^2(\widetilde{X})$; si P_V, le projecteur orthogonal sur $\overline{V}$, est de classe G-trace, on dit que V est de G-dimension finie et on pose :

$$\dim_G(V) = \mathrm{Tr}_G(P_V).$$

Voici quelques propriétés vérifiées par la G-trace qui nous seront utiles par la suite (voir [Lüc02, th. 1.9, p. 18] ou [Ati76]) :

Proposition C.2.1
Si $T \in \mathcal{A}(G)$ et si S est de G-classe trace, on a :

$$\mathrm{Tr}_G(ST) = \mathrm{Tr}_G(TS).$$

Proposition C.2.2
Si S est de G-classe trace et si $(T_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}(G)$ converge faiblement vers $T \in \mathcal{A}(G)$ (i.e. $\forall\, f \in L^2(\widetilde{X})$, $T_n(f) \longrightarrow T(f)$), alors :

$$\mathrm{Tr}_G(ST_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}_G(ST).$$

Signalons enfin le cas des opérateurs à noyaux. Un opérateur T sur $L^2(\widetilde{X})$ est dit à noyau si il existe $k : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall\, f \in L^2(\widetilde{X}),\ \forall\, x \in \widetilde{X},\ (Tf)(x) = \int_{\widetilde{X}} k(x,y) f(y) dx.$$

Proposition C.2.3
Soit $T \in \mathcal{A}(G)$ un opérateur auto-adjoint positif représenté par un noyau lisse $k(x,y)$. Alors T est de classe G-trace et on dispose de la formule :

$$\mathrm{Tr}_G(T) = \int_U k(x,x) dx.$$

Remarque C.2.1
L'opérateur T étant G-équivariant, son noyau vérifie nécessairement

$$\forall\, g \in G,\ k(g \cdot x, g \cdot y) = k(x,y)$$

et l'intégrale ci-dessus ne dépend donc pas du choix du domaine fondamental U.

Nous n'avons considéré, dans un souci de clarté, que le cas d'opérateurs sur $L^2(\widetilde{X})$; or, dans la situation qui nous intéresse, il s'agit d'opérateurs sur des formes L^2 à valeurs dans $\widetilde{F}$. La discussion menée ci-dessus s'applique bien entendu à ce cadre (le fibré $(\widetilde{F}, \tilde{h})$ étant équivariant). La seule modification à apporter concerne la proposition C.2.3 : le noyau étant à valeur dans les homomorphismes, il faut remplacer $k(x,x)$ par $\mathrm{tr}(k(x,x))$ dans la formule donnant la G-trace.

C.3 Equation de la chaleur

On va maintenant développer les méthodes de la chaleur à proprement parler. Elles résultent de l'étude approfondie de l'équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta'' u & = & 0 \\ u_{|t=0} & = & u_0 \end{array} \right.$$

où u_0 est la donnée initiale ($u_0 \in L^2$). Comme pour l'équation usuelle sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, on va montrer que la solution s'exprime à partir de la donnée initiale via un noyau intégral. En effet, sur $\mathbb{R}^N$, on obtient la solution de l'équation de la chaleur en effectuant la convolution de u_0 avec le noyau $\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/4t}$. On verra également que ce noyau admet, dans le cas général, un développement asymptotique quand $t \to 0$, dont le premier terme n'est autre que le noyau ci-dessus .

C.3.1 Noyau de la chaleur

Remarquons tout d'abord que la variété $\widetilde{X}$ est complète ; le lemme suivant est alors bien connu :

Lemme C.3.1
L' opérateur $\widetilde{\Delta''}$ est auto-adjoint (au sens des opérateurs non-bornés) sur l'espace $L^2_{0,\bullet}(\widetilde{X},\widetilde{F})$. A fortiori, Δ'' est également auto-adjoint sur $L^2_{0,\bullet}(X,F)$.

Démonstration :
voir par exemple [Dem97, chap. 8, th. 3.2]. □

Considérons la situation sur $\widetilde{X}$; l'opérateur $\widetilde{\Delta''}$ est alors auto-adjoint positif et maximal au sens suivant : l'opérateur $\mathrm{Id}+\widetilde{\Delta''} : \mathrm{Dom}(\widetilde{\Delta''}) \longrightarrow L^2$ est surjectif. Le théorème de Hille-Yosida (cf. par exemple [Bre83, th. VII.7, p. 113]) sur les équations d'évolution nous permet alors d'affirmer que, pour tout $u_0 \in L^2$, l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta'' u & = & 0 \\ u|t=0 & = & u_0 \end{array} \right.$$

a une unique solution u_t vérifiant (pour tout $k \in \mathbb{N}$) :

$$u_t \in C(\mathbb{R}_+, L^2) \bigcap C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{Dom}(\widetilde{\Delta''}^k)).$$

De plus, on peut définir un semi-groupe d'opérateurs (bornés) à un paramètre $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$ par la formule :

$$u_t = e^{-t\widetilde{\Delta''}} u_0.$$

En utilisant les estimations elliptiques standard (valables car $\widetilde{X}$ est à géométrie bornée), on peut représenter $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$ par un noyau intégral :

Proposition C.3.1
Pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$ a un noyau

$$\widetilde{k_t} \in C^\infty(\widetilde{X} \times \widetilde{X}, Hom\Big(pr_2^*(\Lambda^{0,\bullet} T^*_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{F}), pr_1^*(\Lambda^{0,\bullet} T^*_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{F})\Big)$$

(la dépendance en t étant également lisse). On a donc :

$$\forall\, u \in L^2,\ \forall\, x \in \widetilde{X},\ (e^{-t\widetilde{\Delta''}} u)(x) = \int_{\widetilde{X}} \widetilde{k_t}(x,y) u(y) dy.$$

Il est à noter ici que, dans le cas compact, on dispose d'une formule explicite pour construire le noyau k_t. Par compacité, on peut en effet diagonaliser Δ'' et on note $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ ses valeurs propres et $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondants. Les estimations elliptiques montrent que

$$\lambda_k \geq C k^{1/n} \quad (C \text{ constante positive}).$$

La croissance de λ_k suffit alors à assurer la convergence de la série

$$k_t(x,y) = \sum_{k\geq 0} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x) \otimes \phi_k^*(y)$$

en topologie C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+ \times X \times X$ et, en utilisant le fait que $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base ortonormée, on vérifie facilement que k_t définit bien le noyau de l'opérateur $e^{-t\Delta''}$. On pourra consulter [Gil95] pour les détails.

C.3.2 Existence du développement asymptotique

Le fait de considérer les opérateurs $\Delta^{''}$ et $\widetilde{\Delta^{''}}$ agissant sur des formes à valeurs dans les fibrés F et $\widetilde{F}$ n'apportant pas de complications sensibles (les calculs sont locaux et peuvent donc se recoller par un argument de partition de l'unité), on va ici se limiter au cas scalaire. L'identité kählérienne

$$\Delta^{''} = \frac{1}{2}\Delta$$

nous ramène donc au cas du laplacien riemannien agissant sur les fonctions. On fera donc désormais les calculs pour Δ et k_t désignera le noyau de l'équation de la chaleur associé à Δ.

Pour justifier le fait que le noyau k_t admette un développement asymptotique dont le premier terme est justement le noyau dans le cas euclidien, on peut effectuer le raisonnement heuristique suivant. On sait que :

$$\forall\, x \in X,\ (e^{-t\Delta^{''}}u)(x) = \int_X k_t(x,y)u(y)dy \underset{t\to 0}{\longrightarrow} u(x),$$

ce qui signifie que, à x fixé, la suite de fonctions $(k_t(x,\cdot))_{t>0}$ converge vers la masse de Dirac en x quand t tend vers 0. Les valeurs des fonctions $k_t(x,\cdot)$ doivent donc se concentrer au voisinage de x lorsque t diminue et on est bien ramener à un calcul local (avec un opérateur elliptique proche du laplacien ordinaire).

L'idée est donc de comparer le noyau k_t au noyau de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ donné par $(x,y) \longrightarrow \frac{1}{(4\pi t)^n}e^{-|x-y|^2/4t}$; on cherche donc un développement sous la forme :

$$k_t(x,y) \sim f_t(x,y)\sum_{j\geq 0} u_j(x,y)t^j,$$

où on a posé $f_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^n}e^{-d(x,y)^2/4t}$ (d désignant la distance riemannienne). Pour déterminer les coefficients u_j, on va reporter ce développement dans l'équation de le chaleur en vue d'obtenir un système différentiel les reliant. Comme on cherche un développement asymptotique quand $t \longrightarrow 0$, la présence de la fonction f_t en facteur de la somme nous permet de nous limiter au cas où x est proche de y. On fixe donc $y \in X$ et on se donne des coordonnées normales au voisinage de y ; la fonction $f_t(x,y)$ devient :

$$f_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^n}e^{-r^2/4t} \text{ avec } r = d(x,y).$$

Proposition C.3.2
Si $k \geq 0$ est un entier et u une fonction de la variable x, on a :

$$\big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\big)(uf_t t^k) = \Big[\big((k + \frac{r}{2g}\frac{\partial g}{\partial r})u + r\frac{\partial u}{\partial r}\big)t^{k-1} + t^k\Delta u\Big]f_t,$$

où g désigne le déterminant de la métrique riemannienne.

Démonstration :
On fera usage de deux formules de calcul différentiel. Tout d'abord, le laplacien du produit de deux fonctions est donné par :

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v - 2(du,dv) + u(\Delta v),$$

l'accouplement (du, dv) s'effectuant grâce à la métrique riemannienne. D'autre part, en coordonnées polaires, le laplacien d'une fonction v qui ne dépend que de la variable r se calcule de la façon suivante :

$$\Delta v = -\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{2n-1}{r}\right)$$

(rappelons que, dans notre situation, la dimension réelle est $2n$). On a alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)(u f_t t^k) = k t^{k-1} u f_t + t^k u \frac{\partial f_t}{\partial t} + t^k \left(u\Delta f_t - 2\frac{\partial f_t}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + f_t \Delta u\right). \quad \text{(C.9)}$$

Or, on vérifie facilement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_t}{\partial t} &= (-\frac{n}{t} + \frac{r^2}{4t^2}) f_t, \\
\frac{\partial f_t}{\partial r} &= -\frac{r}{2t} f_t \text{ et} \\
\frac{\partial^2 f_t}{\partial r^2} &= (-\frac{1}{2t} + \frac{r^2}{4t}) f_t.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\Delta f_t = \left(\frac{n}{t} - \frac{r^2}{4t} + \frac{r}{2tg}\frac{\partial g}{\partial r}\right) f_t.$$

En combinant tout ceci avec l'égalité (C.9), on en déduit la formule annoncée dans la proposition C.3.2. □

En reportant formellement le développement $k_t \sim f_t(x) \sum_{j\geq 0} u_j(x) t^j$ dans l'équation de la chaleur et en utilisant la proposition C.3.2, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)\left(f_t \sum_{k\geq 0} u_k t^k\right) = \frac{f_t}{t} \sum_{k\geq 0} \left[\left(\frac{r}{2g}\frac{\partial g}{\partial r} + k\right) u_k + r\frac{\partial u_k}{\partial r} + \Delta u_{k-1}\right] t^k,$$

où on a posé $u_{-1} = 0$ pour obtenir une écriture condensée. Cette expression compliquée devant être nulle (le noyau k_t vérifie bien entendu l'équation de la chaleur), on en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial r} &= -\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial r} u_0 \text{ et} \\
\forall k \geq 1,\ \frac{\partial u_k}{\partial r} + (\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{k}{r}) u_k &= -\frac{1}{r}\Delta u_{k-1}.
\end{aligned}$$

La première équation s'intègre en $u_0 = C g^{-1/2}$ où C est une fonction angulaire ; comme le noyau k_t doit se comporter comme une masse de Dirac quand $t \longrightarrow 0$, on doit choisir $C \equiv 1$. On peut ensuite résoudre les équations suivantes de proche en proche. En effet, la deuxième équation ci-dessus s'intègre en :

$$u_k = -r^{-k} g^{-1/2} \int_0^r g^{1/2} \Delta u_{k-1} s^{k-1} ds.$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on utilise simplement le fait que la fonction u_k est définie jusqu'en $r = 0$. Les coefficients u_k du développement

asymptotique potentiel sont donc déterminés de façon unique par les expressions ci-dessus. Si on pose

$$S_t^N = f_t \sum_{k=0}^{N} u_k t^k,$$

on peut montrer que S_t^N est effectivement asymptotique à k_t lorsque $t \longrightarrow 0$ (et ceci uniformément avec N). Pour cela, on peut par exemple appliquer la proposition suivante :

Proposition C.3.3 (Principe de Duhamel)
Si v_t une fonction C^∞ en t et en x, la solution u_t de

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)u_t &= v_t \\ u_{|t=0} &= 0 \end{cases}$$

est donnée par la formule

$$u_t = \int_0^t e^{-(t-s)\Delta} \cdot v_s ds.$$

Démonstration :
c'est un calcul immédiat. □

En effet, en injectant $k_t - S_t^N$ dans l'équation de la chaleur et en utilisant la proposition C.3.3 couplée aux estimations elliptiques standard, on obtient des majorations suffisantes sur les normes de Sobolev de $k_t - S_t^N$ pour montrer que S_t^N est bien asymptotique à k_t.

Si on note $\theta_j(x) = u_j(0)$, on a donc un développement le long de la diagonale de $X \times X$ du type :

$$k_t(x,x) \sim \frac{1}{(4\pi t)^n} \sum_{j \geq 0} \theta_j(x) t^j.$$

En remarquant alors que les coefficients du système différentiel ci-dessus sont des expressions algébriques en les coefficients des métriques ω et h ainsi que de leurs dérivées et en procédant par récurrence sur j, on constate que les $\theta_j(x)$ sont des expressions algébriques locales en les coefficients de ω et h (et de leurs dérivées). Pour revenir au noyau de Δ'', on remarque que le facteur $1/2$ dans la formule de Bochner-Kodaira-Nakano se répercute par un changement d'échelle sur la variable t et on a donc :

Proposition C.3.4
Sur la diagonale, le noyau k_t du semi-groupe $e^{-t\Delta''}$ admet un développement asymptotique uniforme le long de la diagonale de $X \times X$:

$$k_t(x,x) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n} \sum_{j \geq 0} \alpha_j(x) t^j,$$

avec $\alpha_j \in C^\infty(X, \mathrm{End}(\Lambda^{0,\bullet} T_X^* \otimes F))$ que l'on peut calculer localement comme des expressions algébriques en les coefficients de ω, h et de leurs dérivées.

Pour finir, remarquons que les calculs ci-dessus sont purement locaux ; les estimées elliptiques sur $\widetilde{X}$ permettent de montrer que le développement trouvé est effectivement (localement) asymptotique au noyau $\widetilde{k}_t$. Finalement, la situation sur $\widetilde{X}$ est similaire à celle sur X :

Proposition C.3.5
Sur la diagonale de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$, le noyau $\widetilde{k}_t$ admet un développement asymptotique localement uniforme :

$$\widetilde{k}_t(x,x) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n} \sum_{j\geq 0} \widetilde{\alpha_j}(x) t^j,$$

avec $\widetilde{\alpha_j} \in C^\infty(\widetilde{X}, \mathrm{End}(\Lambda^{0,\bullet} T^*_{\widetilde{X}} \otimes \widetilde{F}))$ que l'on peut calculer localement comme des expressions algébriques en les coefficients de $\tilde{\omega}$, $\tilde{h}$ et de leurs dérivées.

C.4 Formules de McKean-Singer

Pour conclure la démonstration du théorème C.1.1, il nous reste à établir les formules de trace (C.1) et (C.2). Remarquons tout d'abord que, comme $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\widetilde{\Delta''}}$ sont des opérateurs à noyaux, ils sont respectivement de classe trace et de G-classe trace. De plus, en utilisant la graduation naturelle portée par le fibré des $(0,q)$-formes, on peut définir une trace alternée (ou *super*-trace) donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) &= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta''_q}) \\
&= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \int_X \mathrm{tr}(k_t^q(x,x))dx \\
&= \int_X \mathrm{str}(k_t(x,x))dx.
\end{aligned}$$

De même pour les opérateurs de G-classe trace (proposition C.2.3) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}}) &= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \mathrm{Tr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''_q}}) \\
&= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \int_U \mathrm{tr}(\widetilde{k}_t^{\,q}(x,x))dx \\
&= \int_U \mathrm{str}(\widetilde{k}_t(x,x))dx.
\end{aligned}$$

Le fait de considérer une somme alternée provoque des compensations pour le moins miraculeuses, en témoigne le résultat suivant [MS67].

Théorème C.4.1 (McKean-Singer, 1967)
Les quantités

$$\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) \text{ et } \mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}})$$

sont indépendantes de $t \in \mathbb{R}_*^+$.

Remarque C.4.1
Les "annulations fantastiques" mises en avant par McKean et Singer concernent bien entendu celles intervenant dans l'expression $\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''})$, *les invariants* L^2 *n'ayant été introduits que 9 ans plus tard par Atiyah. Cependant, leur calcul s'applique tout aussi bien au terme* $\mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}})$.

Démonstration :
Au vue des expressions ci-dessus, $\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''})$ et $\mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}})$ sont C^∞ en t. D'autre part, le théorème spectral nous permet de dériver sous le signe intégrale et le calcul pour Δ'' donne :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{d}{dt}\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = -\mathrm{STr}(\Delta'' e^{-t\Delta''}).$$

En développant l'expression, on obtient :

$$\mathrm{STr}(\Delta'' e^{-t\Delta''}) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q(\mathrm{Tr}(\overline{\partial}\overline{\partial}^* e^{-t\Delta''_q}) + \mathrm{Tr}(\overline{\partial}^*\overline{\partial} e^{-t\Delta''_q}))$$

et, en arrangeant astucieusement les termes, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\overline{\partial}^*\overline{\partial} e^{-t\Delta''_q}) &= \mathrm{Tr}(\overline{\partial}^*\overline{\partial} e^{-t/2\Delta''_q} e^{-t/2\Delta''_q}) \\
&= \mathrm{Tr}(\overline{\partial}^* e^{-t/2\Delta''_{q+1}}\overline{\partial} e^{-t/2\Delta''_q}) \qquad (\text{car } \overline{\partial} \text{ commute avec } \Delta'') \\
&= \mathrm{Tr}(\overline{\partial} e^{-t/2\Delta''_q}\overline{\partial}^* e^{-t/2\Delta''_{q+1}}) \qquad (\text{propriété de la trace}) \\
&= \mathrm{Tr}(\overline{\partial}\overline{\partial}^* e^{-t/2\Delta''_{q+1}} e^{-t/2\Delta''_{q+1}}) \quad (\text{propriété de commutation}) \\
&= \mathrm{Tr}(\overline{\partial}\overline{\partial}^* e^{-t\Delta''_{q+1}}).
\end{aligned}$$

Finalement, les termes se téléscopent donc deux à deux dans la somme ci-dessus et on a bien :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{d}{dt}\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = -\mathrm{STr}(\Delta'' e^{-t\Delta''}) = 0.$$

Le calcul pour $\mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}})$ s'effectue de la même façon ; il faut simplement remplacer la propriété de commutation usuelle de la trace par la proposition C.2.1. □

Or, si $P_{\mathcal{H}}$ et $\widetilde{P_{\mathcal{H}}}$ désignent les projections sur les espaces de formes harmoniques (sur X et $\widetilde{X}$ respectivement), on peut facilement vérifier que ce sont des opérateurs régularisants à noyaux lisses ; ils sont donc de classe trace. D'autre part, le théorème spectral montre que

$$e^{-t\Delta''} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} P_{\mathcal{H}} \text{ et } e^{-t\widetilde{\Delta''}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P_{\mathcal{H}}},$$

avec convergence au sens faible. La proposition C.2.2 s'applique et montre que :

$$\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = \mathrm{STr}(P_{\mathcal{H}}) \text{ et}$$
$$\mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}}) = \mathrm{STr}_G(\widetilde{P_{\mathcal{H}}}).$$

Par théorie de Hodge dans le cas de X et par définition dans le cas de $\widetilde{X}$, ces traces alternées sont respectivement égales à $\chi(X,F)$ et $\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F})$. On a donc montré :

Proposition C.4.1
Les caractéristiques d'Euler de F et $\widetilde{F}$ admettent les expressions intégrales suivantes (indépendantes de t) :

$$\chi(X,F) = \mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = \int_X \mathrm{str}(k_t(x,x))dx \ \ et$$
$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F}) = \mathrm{STr}_G(e^{-t\widetilde{\Delta''}}) = \int_U \mathrm{str}(\widetilde{k_t}(x,x))dx.$$

La dernière étape de la démonstration s'effectue en exploitant la situation lorsque $t \longrightarrow 0$ et en reportant les développements asymptotiques de k_t et $\widetilde{k_t}$ dans les intégrales ci-dessus. En effet, d'après les propositions C.3.4 et C.3.5, $k_t(x,x)$ (resp. $\widetilde{k_t}(x,x)$) admet un développement asymptotique uniforme sur X losrque t tend vers 0 (resp. localement uniforme sur $\widetilde{X}$). Avec ci-dessus, on en déduit

$$\chi(X,F) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n}\Big(\sum_{j\geq 0} a_j t^j\Big) \ \text{ et}$$
$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F}) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(2\pi t)^n}\Big(\sum_{j\geq 0} \widetilde{a_j} t^j\Big),$$

avec

$$a_j = \int_X \alpha_j(x)dx \ \text{ et } \ \widetilde{a_j} = \int_U \widetilde{\alpha_j}(x)dx$$

En identifiant les termes constants, on obtient une formule locale pour les indices $\chi(X,F)$ et $\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F})$:

$$\chi(X,F) = \frac{1}{(2\pi t)^n} a_n = \frac{1}{(2\pi t)^n}\int_X \alpha_n(x)dx \ \text{ et}$$
$$\chi^G_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{F}) = \frac{1}{(2\pi t)^n}\widetilde{a_n} = \frac{1}{(2\pi t)^n}\int_U \widetilde{\alpha_n}(x)dx.$$

Comme les coefficients des développements asymptotiques ci-dessus sont des expressions algébriques locales en les coefficients des métriques et de leurs dérivées et comme U est un domaine fondamental de l'action de $G = \pi_1(X)$ sur $\widetilde{X}$, on a nécessairement

$$\widetilde{\alpha_n} = \pi^*(\alpha_n) \ \text{ et } \ \widetilde{a_n} = a_n.$$

Cette dernière égalité est celle annoncée dans l'énoncé du théorème C.1.1.

Bibliographie

[ABC+96] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[AM04] V. Alexeev and S. Mori, *Bounding singular surfaces of general type*, Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000), Springer, Berlin, 2004, pp. 143–174.

[Ati76] M. F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974), Soc. Math. France, Paris, 1976, pp. 43–72. Astérisque, No. 32–33.

[Bar75] D. Barlet, *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie*, Fonctions de plusieurs variables complexes, II (Sém. François Norguet, 1974–1975), Springer, Berlin, 1975, pp. 1–158. Lecture Notes in Math., Vol. 482.

[BDPP04] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Paun, and T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact kähler manifold and varieties of negative kodaira dimension*, preprint math.AG/0405285, 2004.

[Bea83] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782 (1984).

[BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Bla56] A. Blanchard, *Sur les variétés analytiques complexes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **73** (1956), 157–202.

[Bog80] F. A. Bogomolov, *Unstable vector bundles and curves on surfaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978) (Helsinki), Acad. Sci. Fennica, 1980, pp. 517–524.

[Bor92] J. Borzellino, *Riemannian geometry of orbifolds*, Ph.D. thesis, University of California, Los Angeles, 1992.

[BP07] B. Berndtsson and M. Păun, *Bergman Kernels and the pseudo-effectivity of relative canonical bundles II*, preprint, 2007, en préparation.

[Bre83] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise., Masson, Paris, 1983, Théorie et applications.

[Cam81] F. Campana, *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact*, Invent. Math. **63** (1981), no. 2, 187–223.

[Cam91a] ———, *The class $\mathcal{C}$ is not stable by small deformations*, Math. Ann. **290** (1991), no. 1, 19–30.

[Cam91b] ———, *On twistor spaces of the class $\mathcal{C}$*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 541–549.

[Cam92] ———, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.

[Cam94] ———, *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), no. 2, 255–284.

[Cam95a] ———, *Fundamental group and positivity of cotangent bundles of compact Kähler manifolds*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 3, 487–502.

[Cam95b] ———, *Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **28** (1995), no. 3, 307–316.

[Cam98] ———, *Negativity of compact curves in infinite covers of projective surfaces*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 4, 673–693.

[Cam04a] ———, *Orbifoldes à première classe de Chern nulle*, The Fano Conference, Univ. Torino, Turin, 2004, pp. 339–351.

[Cam04b] ———, *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 499–630.

[Cam04c] ———, *Orbifolds, special varieties and classification theory : an appendix*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 631–665.

[Cam07] ———, *Orbifoldes spéciales et classifications biméromorphes des variétés kählériennes compactes*, preprint arXiv :0705.0737, 2007.

[Cat91] F. Catanese, *Moduli and classification of irregular Kaehler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibrations*, Invent. Math. **104** (1991), no. 2, 263–289.

[CD01] F. Campana and J.-P. Demailly, *Cohomologie L^2 sur les revêtements d'une variété complexe compacte*, Ark. Mat. **39** (2001), no. 2, 263–282.

[Cla05] B. Claudon, arXiv :math/0511736, 2005.

[CP00] F. Campana and T. Peternell, *Complex threefolds with non-trivial holomorphic 2-forms*, J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 2, 223–264.

[CZ05] F. Campana and Q. Zhang, *Compact Kähler threefolds of π_1-general type*, Recent progress in arithmetic and algebraic geometry, Contemp. Math., vol. 386, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–12.

[DEL00] J.-P. Demailly, L. Ein, and R. Lazarsfeld, *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan Math. J. **48** (2000), 137–156, Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.

[Dem96] J.-P. Demailly, L^2 *vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory*, Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro, 1994), Lecture Notes in Math., vol. 1646, Springer, Berlin, 1996, pp. 1–97.

[Dem97] ———, *Complex analytic and differential geometry*, http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/books.html, 1997.

[Dem06] ———, *Kähler manifolds and transcendental technics in algebraic geometry*, Plenary talk and Proceedings of the Internat. Congress of Math., Madrid, 2006, Volume I.

[DGMS75] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274.

[dOKR02] B. de Oliveira, L. Katzarkov, and M. Ramachandran, *Deformations of large fundamental groups*, Geom. Funct. Anal. **12** (2002), no. 4, 651–668.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, and M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bndles*, J. Alg. Geom. **3** (1994), 295–345.

[EL97] L. Ein and R. Lazarsfeld, *Singularities of theta divisors and the birational geometry of irregular varieties*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 243–258.

[Eys99] P. Eyssidieux, *Systèmes linéaires adjoints* L^2, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), no. 1, vi, ix–x, 141–176.

[Eys04] Philippe Eyssidieux, *Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe*, Invent. Math. **156** (2004), no. 3, 503–564.

[FM92] L. Fong and J. McKernan, *Log abundance for surfaces*, Flips and Abundance for Algebraic Threefolds (J. Kollar, ed.), Astérisque, no. 211, 1992, pp. 127–137.

[FM94] R. Friedman and J. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surface*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, no. 27, Springer Verlag, 1994.

[Fuj94] T. Fujita, *Approximating Zariski decomposition of big line bundles*, Kodai Math. J. **17** (1994), no. 1, 1–3.

[Fuj79] A. Fujiki, *Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **14** (1978/79), no. 1, 1–52.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67 (electronic).

[Gil95] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, second ed., Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[Gri71] P. A. Griffiths, *Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 21–51.

[Gro89] M. Gromov, *Sur le groupe fondamental d'une variété kählérienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **308** (1989), no. 3, 67–70.

[Gro91] ———, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 1, 263–292.

[GS85] R. V. Gurjar and A. R. Shastri, *Covering spaces of an elliptic surface*, Compositio Math. **54** (1985), no. 1, 95–104.

[Gur87] R. V. Gurjar, *Coverings of algebraic varieties*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 179–183.

[Iit70] S. Iitaka, *Deformations of compact complex surfaces. II*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 247–261.

[JZ00] J. Jost and K. Zuo, *Vanishing theorems for L^2-cohomology on infinite coverings of compact Kähler manifolds and applications in algebraic geometry*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), no. 1, 1–30.

[Kat97] L. Katzarkov, *Nilpotent groups and universal coverings of smooth projective varieties*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 2, 336–348.

[Kaw07] Y. Kawamata, *A product formula for volumes of varieties*, preprint arXiv0704.1014, 2007.

[KK83] L. Kaup and B. Kaup, *Holomorphic functions of several variables*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 3, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983, An introduction to the fundamental theory.

[KM92] J. Kollár and S. Mori, *Classification of three-dimensional flips*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 3, 533–703.

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779.

[Kob87] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 15, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987, , Kanô Memorial Lectures, 5.

[Kol93a] J. Kollár, *Effective base point freeness*, Math. Ann. **296** (1993), no. 4, 595–605.

[Kol93b] ———, *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 177–215.

[Kol95] ———, *Shafarevich maps and automorphic forms*, M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Laz04a] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.

[Laz04b] ———, *Positivity in algebraic geometry. II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[Ler99] S. Leroy, *Variétés d'albanese supérieures complexes d'une variété kahlérienne compacte*, Ph.D. thesis, I.E.C.N. (Nancy), 1999.

[Lev83] M. Levine, *Pluri-canonical divisors on Kähler manifolds*, Invent. Math. **74** (1983), no. 2, 293–303.

[LG86] P. Lelong and L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 282, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Lie78] D. I. Lieberman, *Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds*, Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977), Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer, Berlin, 1978, pp. 140–186.

[Lüc02] W. Lück, *L^2-invariants : theory and applications to geometry and K-theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 44, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Man93] L. Manivel, *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien*, Math. Z. **212** (1993), no. 1, 107–122.

[MS67] H. P. McKean, Jr. and I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geometry **1** (1967), no. 1, 43–69.

[MS80] G. D. Mostow and Y.-T. Siu, *A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 2, 321–360.

[Nad90] A. M. Nadel, *Semisimplicity of the group of biholomorphisms of the universal covering of a compact complex manifold with ample canonical bundle*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 193–211.

[Nak72] I. Nakamura, *On complex parallelisable manifolds and their small deformations*, Proc. Japan Acad. **48** (1972), 447–449.

[Nam87] M. Namba, *Branched coverings and algebraic functions*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 161, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.

[Nap90] T. Napier, *Convexity properties of coverings of smooth projective varieties*, Math. Ann. **286** (1990), no. 1-3, 433–479.

[Nor83] M. V. Nori, *Zariski's conjecture and related problems*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 2, 305–344.

[OT87] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of l^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), 197–204.

[Pău07] M. Păun, *Siu's invariance of plurigenera : a one-tower proof*, J. Differential Geom. **76** (2007), no. 3, 485–493.

[Sat56] I. Satake, *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 359–363.

[Sha74] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1974, Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 213.

[Siu87] Y.-T. Siu, *Strong rigidity for kähler manifolds and the construction of bounded holomorphic functions*, Discrete Groups and Analysis (R. Howe, ed.), Birkhäuser Verlag, 1987.

[Siu98] ———, *Invariance of plurigenera*, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.

[Siu02] ———, *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type*, Complex geometry (Göttingen, 2000), Springer, Berlin, 2002, pp. 223–277.

[Sko72] H. Skoda, *Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **5** (1972), 545–579.

[Tak99] S. Takayama, *Nonvanishing theorems on an algebraic variety with large fundamental group*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 1, 181–195.

[Tak00] ———, *Simple connectedness of weak Fano varieties*, J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 2, 403–407.

[Tak04] ———, *On the existence of pluricanonical forms on varieties with infinite fundamental group*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1221–1235.

[Tak06] ———, *Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type*, Invent. Math. **165** (2006), no. 3, 551–587.

[Uen75] K. Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439.

[Voi02] C. Voisin, *Théorie de hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés, vol. 10, S.M.F., 2002.

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

L'objectif de cette thèse consiste en l'étude du revêtement universel des variétés kählériennes compactes, de leurs systèmes pluricanoniques et des liens qui les unissent. Dans un premier temps, nous étudions la Γ-réduction d'une variété kählérienne compacte vue comme quotient de Remmert biméromorphe de son revêtement universel. La dimension de l'espace quotient est par définition la Γ-dimension d'une telle variété. Les grandes lignes de l'étude de cet invariant sont les suivantes : lien avec l'existence de formes holomorphes L^2 sur le revêtement universel, comportement de la Γ-dimension dans les fibrations, place de la Γ-réduction dans la théorie de la classification, structure des variétés de type π_1-général (au moins en petite dimension). La fin de cette première partie est consacrée à l'étude de l'invariance par déformation de la Γ-dimension en dimension 3. Cette propriété est établie dans diverses situations, par exemple dans les cas des familles de variétés kählériennes qui ne sont pas de type général. La deuxième partie porte sur la méthode One-Tower d'extension de formes pluricanoniques. Nous mettons en effet cette partie à profit pour montrer comment adapter cette méthode dans différentes situations. Ainsi, après quelques rappels sur les différentes notions de positivité des fibrés en droites et sur les idéaux multiplicateurs, nous établissons des résultats d'extension de sections pluricanoniques dans les contextes suivants : famille projective de variétés (avec fibré canonique tordu par un fibré en droites pseudo-effectif), hypersurface d'une variété projective, fibre générale de la Γ-réduction pour les variétés de type général et famille des revêtements universels.

Deformation of Kähler compact manifolds : invariance of Γ-dimension and extension of pluricanonical sections

In this thesis we study universal cover of Kähler compact manifolds, their pluricanonical systems and the different links between them. First, we introduce the Γ-reduction of a Kähler compact manifold as a rational Remmert reduction of its universal cover ; the Γ-dimension is defined to be the dimension of the base of this fibration. In this study we consider the following aspects : behaviour of the Γ-dimension in a fibration, relationships with L^2 holomorphic forms on the universal cover, comparison with the fibrations of the classification theory, Γ-reduction for manifolds of small dimension. At the end of this first part, we establish invariance of Γ-dimension for several families of Kähler threefolds (for instance for non general type). We then show statements of extension of pluricanonical forms in the spirit of the One-Tower method. After a brief review concerning positivity of line bundles and multiplier ideal sheaves, we apply this strategy in different situations : projective family (with a twisting pseudo-effective line bundle), hypersurface in a projective manifold, Γ-reduction for manifolds of general type and family of infinite covers.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : Classification des variétés kählériennes compactes, Γ-réduction, groupe fondamental, revêtement universel,formes holomorphes L^2, déformation de variétés complexes, formes pluricanoniques, positivité des fibrés en droites, métriques singulières, idéaux multiplicateurs.

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex