Nancy-Université
Université Henri Poincaré

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

Toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➢ Contact SCD Nancy 1 : theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Pierre DEBS

Pénalisations de marches aléatoires

Soutenue publiquement le 9 Novembre 2007

Membres du jury :

Jean Bertoin	Examinateur	Professeur, Université Paris VI
Dominique Lépingle	Examinateur	Professeur, Université d'Orléans
Bernard Roynette	Examinateur	Professeur, Université Nancy I (Directeur de Thèse)
Pierre Vallois	Examinateur	Professeur, Université Nancy I

Rapporteurs :

Michel Emery	Directeur de Recherche CNRS, Strasbourg
Marc Yor	Professeur, Université Paris VI

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Table des matières

Introduction 5
Première partie 7
Deuxième partie 11

Chapitre 1. Pénalisation de la marche aléatoire symétrique 13
1. Introduction 15
2. Principe de la Pénalisation : Quelques résultats généraux 20
3. Pénalisation par une fonction du maximum unilatère 25
4. Pénalisation par une fonction de S_{g_p} 36
5. Pénalisation par une fonction de S_{d_p} 54
6. Pénalisation par une fonction de $S^*_{g_p}$ 60
7. Pénalisation par une fonction du temps local 73
8. Pénalisation par la longueur des excursions 82
9. Pénalisation par le nombre de descentes entre **a** et **b** 99

Chapitre 2. Pénalisation de chaînes et processus de naissance et de mort 111
1. Introduction 113
2. Notations et résultats principaux 114
3. Démonstration des résultats principaux 117
4. Chaînes de Bessel et autres exemples 127

Conclusion et perspectives 131

Bibliographie 133

Introduction

Soit $\left(\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+),\, (B_t,\, \mathcal{F}_t,\, t \geq 0)\,, \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t,\, \mathbb{P}_x(x \in \mathbb{R})\right)$ le mouvement brownien canonique, où $\mathcal{F}_t := \sigma\left\{X_s, s \leq t\right\},\, t \geq 0$ désigne la filtration naturelle.
Considérons à présent le processus de Bessel de dimension 3 issu de $x > 0$, noté $(R_t, t \geq 0)$. Ce dernier peut être obtenu en conditionnant le processus $(B_t, t \geq 0)$, lorsqu'il est issu de x, à atteindre 0 en un temps infini. Cependant il existe bien d'autres façons de le construire :

(1) Soit $(W_t = (W_t^1, W_t^2, W_t^3), t \geq 0)$ un mouvement brownien de dimension 3 tel que $W_0 = (x, 0, 0)$. Si on pose $R_t := \|W_t\| = \sqrt{(W_t^1)^2 + (W_t^2)^2 + (W_t^3)^2}$, alors $(R_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de x.

(2) Le processus de Bessel de dimension 3 issu de x est la solution de l'EDS :

$$R_t = x + \int_0^t \frac{1}{R_s}\mathrm{d}s + W_t \tag{0.1}$$

où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0.

(3) Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de x et posons $S_t = \sup\left\{X_s, s \leq t\right\}$. Si l'on pose :

$$\forall t \geq 0,\, R_t = 2S_t - X_t, \tag{0.2}$$

alors $(R_t, t \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3 issu de x.

Comme annoncé plus haut, le processus de Bessel $(R_t, t \geq 0)$ peut être obtenu en conditionnant un mouvement brownien issu de x à atteindre l'état 0 en un temps infini. Cependant, il n'existe pas de manière canonique de conditionner par un événement de probabilité nulle.
L'une d'entre elles consiste en la construction d'une mesure de probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, "proche" de la mesure $\mathbb{P}$ au sens suivant :
il existe une $(\mathcal{F}_t,\, \mathbb{P})$ martingale positive $(M_t,\, t \geq 0)$, avec $M_0 = 1$ et telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$Q_{|\mathcal{F}_t} = M_t \centerdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t},\, Q(X_u > 0, \forall u \geq 0) = 1.$$

Plus précisément, supposons alors que $(B_t,\, \mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$ soit issu de $x > 0$, posons $I_t := \inf\left\{B_s, s \leq t\right\}$ et soit $M_t := \frac{B_t}{x}\mathbb{1}_{I_t > 0}$. Il est évident que $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale arrêtée lorsque $(B_t,\, t \geq 0)$ atteint le niveau 0. Définissons maintenant la probabilité Q_x sur $(\Omega,\, \mathcal{F}_\infty)$ par :

$$\forall t \geq 0,\, \forall \Lambda_t \in \mathcal{F}_t,\; Q_x(\Lambda_t) = \mathbb{P}_x(M_t \Lambda_t) \tag{0.3}$$

Posons pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a := \inf\left\{t \geq 0, X_t = a\right\}$. En utilisant le Théorème d'arrêt de Doob, il est évident que :

$$Q_x\left(I_\infty < 0\right) = Q_x\left(T_0 < \infty\right) = \mathbb{E}_x\left[M_{T_0}\right] = 0 \tag{0.4}$$

et pour $x > a > 0$:

$$Q_x\left(I_\infty < a\right) = \mathbb{E}_x\left[M_{T_a}\right] = \frac{a}{x} \tag{0.5}$$

Ainsi, sous Q : $I_\infty \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{U}_{[0,x]}$ où $\mathcal{U}_{[0,x]}$ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, x]$.
Si l'on considère $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$, en utilisant la formule d'Itô et la définition de la probabilité

Q_x, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^Q\left[f(B_{t\wedge T_0})\right] &= \mathbb{E}_x\left[f(B_{t\wedge T_0})\frac{B_{t\wedge T_0}}{x}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[f(x)+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{f'(B_s)B_s+f(B_s)}{x}\mathrm{d}B_s+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{f'(B_s)}{x}\mathrm{d}s+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{B_s f''(B_s)}{2x}\mathrm{d}s\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[f(x)+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{f'(B_s)}{x}\mathrm{d}s+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{B_s f''(B_s)}{2x}\mathrm{d}s\right] \\
&= \mathbb{E}_x^Q\left[f(x)+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{f'(B_s)}{B_s}\mathrm{d}s+\int_0^{t\wedge T_0}\frac{f''(B_s)}{2}\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

et comme sous $Q_x\left(T_0<\infty\right)=0$:

$$\mathbb{E}_x^Q\left[f(B_t)\right]=\mathbb{E}_x^Q\left[f(x)+\int_0^t\frac{f'(B_s)}{B_s}\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{f''(B_s)}{2}\mathrm{d}s\right] \tag{0.6}$$

Sous Q_x, le générateur infinitésimal du processus $(B_t, t\geq 0)$ est donc :

$$Lf(r)=\frac{1}{2}f''(r)+\frac{f'(r)}{r} \tag{0.7}$$

Par ailleurs, c'est celui d'un processus de Bessel de dimension 3.
La martingale $(M_t, t\geq 0)$ s'obtient de manière naturelle en étudiant la limite quand $t\to\infty$ de la quantité :

$$\frac{\mathbb{E}_x\left[\Lambda_s\mathbb{1}_{T_0>t}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{T_0>t}\right]}=\frac{\mathbb{E}_x\left[\Lambda_s\mathbb{1}_{T_0>s}\mathbb{E}_{X_s}\left[\mathbb{1}_{T_0>t-s}\right]\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{T_0>t}\right]} \tag{0.8}$$

où $s\geq 0$ et $\Lambda_s\in\mathcal{F}_s$. En remarquant que :

$$\mathbb{P}_x\left(T_0>t\right)\underset{t\to\infty}{\sim}\frac{x}{\sqrt{2\pi t}} \tag{0.9}$$

et en utilisant la propriété de Markov, il est facile de montrer que (0.8) converge vers $\mathbb{E}\left[\Lambda_s M_s\right]$. Remarquons que cela revient à conditionner par l'événement de probabilité nulle $I_\infty>0$.

L'exemple précédent est une illustration de la méthode de **pénalisation** : nous avons favorisé les trajectoires qui ne passent pas sous 0 en mettant un poids sur la mesure $\mathbb{P}_x$, c'est le rôle joué ici par $h(I_t)=\mathbb{1}_{I_t>0}$.
La **pénalisation**, si l'on se restreint au cadre précédent, est une méthode mécanique de construction de martingales, puis de probabilités Q_x sous lesquelles I_∞ est fini p.s.
L'idée est de mettre un "poids" sur la mesure $\mathbb{P}$, lorsque c'est possible, avec des fonctions de l'infimum moins triviales que précédemment et qui auront pour effet de favoriser les trajectoires dont l'infimum "ne descend pas trop bas". Par exemple avec des fonctions h telles que $\int_0^\infty h(y)\mathrm{d}y<\infty$.
Cette théorie a été introduite par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor dans [**RVY06b**] mais elle a vraiment été développée dans [**RVY06a**].
Dans cet article, ses auteurs considèrent, comme dans l'exemple précédent, le mouvement brownien canonique $\left((B_t,\,\mathcal{F}_t,\,t\geq 0)\,,\mathcal{F}_\infty=\bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\,\mathbb{P}_x(x\in\mathbb{R})\right)$ et construisent des martingales, puis des probabilités Q qui ne sont pas absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. Plus précisément, B. Roynette, P. Vallois et M. Yor ont considéré des fonctionnelles positives et adaptées Γ : $\mathbb{R}^+\times\Omega\to\mathbb{R}$ et pour $\Lambda_s\in\mathcal{F}_s$, ont étudié la limite de la quantité :

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s}\Gamma_t]}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]} \tag{0.10}$$

lorque t tend vers l'infini. Ils établissent que pour beaucoup de processus $(\Gamma_t, t\geq 0)$ cette limite existe et est de la forme $Q_x\left(\Lambda_s\right):=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\Lambda_s\}}M_s\right]$ où $(M_t, t\geq 0)$ est une martingale positive non uniformément intégrable. Ensuite, ils étudient les propriétés du processus canonique sous la

nouvelle probabilité Q_x.
Cette étude a été réalisée pour plusieurs fonctionnelles et avec d'autres processus que le mouvement brownien unidimensionnel. Donnons un exemple : la pénalisation par une fonction du maximum unilatère du processus canonique noté $S_t := \sup_{s\leq t}\{B_s\}$. Ici, $\Gamma_t = \varphi(S_t)$ où φ est une fonction positive dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut 1. Dans ce cas, le résultat obtenu est :

THÉORÈME 0.1 (Théorème RVY).

(1) *Pour tout $s \geq 0$ et tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\Lambda_s}\varphi(B_t)\right]}{\mathbb{E}_x\left[\varphi(B_t)\right]} = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_s} M_s\right] \tag{0.11}$$

La martingale obtenue est la martingale d'Azéma-Yor. Plus précisément :

$$M_t = \varphi(S_t)(S_t - X_t) + 1 - \phi(S_t) \tag{0.12}$$

où $\phi(x) = \int_0^x \varphi(s)ds$. Cette martingale est positive, non uniformément intégrable : en fait elle tend vers 0 lorsque $t \to \infty$.

(2) *Sous la nouvelle probabilité Q :*
   (a) *S_∞ est finie p.s. et sa densité de probabilité est égale à φ.*
   (b) *soit $T_\infty := \inf\{t \geq 0, X_t = S_\infty\}$; $(X_t, t \leq T_\infty)$ et $(S_\infty - X_{t+T_\infty}, t \geq 0)$ sont deux processus indépendants.*
   (c) *Sachant que $\{S_\infty = a\}$, $(X_t, t \leq T_a)$ est un mouvement brownien stoppé lorsqu'il atteint le niveau a.*
   (d) *$(S_\infty - X_{T_\infty+t}, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0, noté $(R_t, t \geq 0)$, indépendant de (S_∞, T_∞).*

(3) *Soit $R_t = 2S_t - X_t$. Alors sous Q, $(R_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3.*

Cette thèse a pour objet d'établir une théorie semblable pour des processus discrets et se décompose en deux parties :
.dans la première, nous donnons une définition générale du principe de pénalisation puis nous donnons le pendant discret de plusieurs résultats obtenus par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor (cf.[**RVY06a**],[**RVY**]).
.dans la deuxième partie, nous étudions la pénalisation dans le cadre des chaînes et des processus de naissance et de mort.

Première partie

Dans cette partie, nous donnons la version discrète de résultats obtenus par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor, par pénalisation du mouvement brownien unidimensionnel.
L'équivalent discret du mouvement brownien est la marche aléatoire symétrique. Plus précisément, soit Ω l'ensemble des fonctions X de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, telles que $X(n+1) = X(n) \pm 1$, $(X_n, n \geq 0)$ le processus des coordonnées de cet espace, $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle associée, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ et $\mathbb{P}_x$ $(x \in \mathbb{N})$ la famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que sous $\mathbb{P}_x$, $X = (X_n, n \geq 0)$ soit la marche aléatoire standard issue de x. Lorsque x n'est pas indiqué, on considère, pour alléger les notations, que la marche est issue de 0. Tout d'abord, nous donnons une définition du principe général de la pénalisation. Ce principe explique pourquoi lorque l'on étudie, pour des fonctionnelles $G : \Omega \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, des quantités du type :

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} G_p]}{\mathbb{E}_x[G_p]},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, \tag{0.13}$$

lorque p tend vers l'infini, alors les limites sont de la forme $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n]$ où $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale non-uniformément intégrable. Ainsi, lorsque l'on définit la probabilité Q_x par $Q_x(\Lambda_n) := \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n]$, cette probabilité sous $\mathcal{F}_\infty$ n'est pas équivalente à $\mathbb{P}_x$, ce qui justifie l'intérêt de l'étude de $(X_n, n \geq 0)$ sous Q_x.
D'autre part, dans cette partie, on essaie d'expliquer pourquoi, dans la formule (0.13), on prend des événements qui sont dans $\mathcal{F}_n$ et non pas dans $\mathcal{F}_\infty$.
Ce principe une fois établi, la suite de cette partie est constituée de plusieurs exemples de pénalisations de la marche aléatoire. Pour faire le lien avec l'exemple que nous avons donné dans le cas continu, nous n'énonçons dans cette introduction que le résultat obtenu lorsque nous pénalisons par une fonction du maximum unilatère. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\sum_{k \geq 0} \varphi(k) = 1,$$

et on définit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$$

Nous obtenons :

THÉORÈME 0.2.

(1) (a) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, la limite suivante existe et vaut :*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \varphi(S_p)]}{\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^\varphi] \tag{0.14}$$

où $M_n^\varphi := \varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n)$.

(b) *$(M_n^\varphi, n \geq 0)$ est une martingale positive, non uniformément intégrable : en fait, elle tend vers 0 p.s. lorsque $n \to \infty$.*

(2) *Soit Q^φ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ caractérisée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, \quad Q^\varphi(\Lambda_n) = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^\varphi] \tag{0.15}$$

Alors sous Q^φ, on a :

(a) *S_∞ est fini p.s. et vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$Q^\varphi(S_\infty = k) = \varphi(k). \tag{0.16}$$

(b) *Soit $T_\infty := \inf\{n \geq 0, X_n = S_\infty\}$; sous Q^φ, T_∞ est fini presque sûrement et :*

(i) *$(X_n, n \leq T_\infty)$ et $(S_\infty - X_{n+T_\infty}, n \geq 0)$ sont deux processus indépendants.*

(ii) *Sachant que $\{S_\infty = k\}$, $(X_n, n \leq T_k)$ est une marche aléatoire standard stoppée lorsqu'elle atteint le niveau k.*

(iii) *$(S_\infty - X_{T_\infty + n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3 issue de 0, notée $(R_n, n \geq 0)$, indépendante de (S_∞, T_∞).*

(3) *Soit $R_n = 2S_n - X_n$. Alors sous Q^φ, $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3.*

Dans la première partie de cette thèse, les autres résultats se présentent tous sous une forme analogue à celle du Théorème 0.2 : on donne d'abord la martingale puis on présente les propriétés de $(X_n, n \geq 0)$ sous la nouvelle probabilité Q. Remarquons que dans tous nos exemples, il existe une variable aléatoire temps T qui joue un rôle central, intimement liée à la fonctionnelle (T_∞ pour l'exemple ci-dessus). D'autre part, sous Q, avant cette variable aléatoire T, le processus conditionné par un événement de probabilité positive (sous $\mathbb{P}$ et Q), est le même sous $\mathbb{P}$ et sous Q, les modifications étant réalisées après T. Afin d'alléger ce résumé, nous récapitulons dans le tableau ci-dessous nos autres résultats. Pour chaque pénalisation nous donnons la fonctionnelle G_p considérée, les conditions imposées à G_p, la martingale obtenue, la variable aléatoire T et une description du processus après T. Dans ce tableau, nous donnons une description du processus après T, ce processus aprés T étant indépendant du processus avant T.
Dans le tableau, MB(3) désigne une marche de Bessel de dimension 3, i.e. une marche aléatoire positive dont les sauts sont d'amplitude 1 et telle que $p_{i,i+1} = \frac{i+2}{2i+2}$, $i \geq 0$.
De la même façon, MB*(3) désigne une marche de Bessel* de dimension 3, i.e. une marche aléatoire strictement positive, dont les sauts sont aussi d'amplitude 1 et telle que $p_{i,i+1} = \frac{i+1}{2i}$, $i \geq 1$.

Notations, conditions	Fonctionnelle	martingale	T	Processus sous Q
$g_p := \sup\{k \le p, X_k = 0\}$ $\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$ $g := \sup\{k \ge 0, X_k = 0\}$ $\phi(\infty) = 1$	$\left(\varphi(S_{g_p}), p \ge 0\right)$	$\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\lvert X_n\rvert + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - X_n^+\right)$ $+1 - \phi\left(S_n\right)$	g	Avec probabilité $1/2$ $(X_n, n \ge g)$ (resp. $(-X_n, n \ge g)$) est une MB(3) issue de 0.
$d_p = \inf\{k \ge p, X_k = 0\}$ $\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$	$\left(\varphi(S_{d_p}), p \ge 0\right)$ $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) = 1$	$\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n)$	T_∞	cf. thm 0.1
$S_p^* := \sup\{\lvert X_k\rvert, k \le p\}$ $\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$	$\left(\varphi\left(S_{g_p}^*\right), p \ge 0\right)$ $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) = 1$	$\varphi\left(S_{g_n}^*\right)\lvert X_n\rvert + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - \lvert X_n\rvert\right)$ $+1 - \phi\left(S_n^*\right)$		Avec probabilité $1/2$, $(X_n, n \ge g)$ (resp. $(-X_n, n \ge g)$) est une MB(3).
$L_0 = 0$ $L_{n+1} = L_n + \mathbb{1}_{X_n = 0}$ sinon $H(k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(h^+(j) + h^-(j))$ $H(\infty)$	$h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p \ge 0}$ $+h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p \le 0}$, $p \ge 0$	$X_n^+ h^+(L_n) + X_n^- h^-(L_n)$ $+1 - H(L_n)$	g	Avec probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k\ge1} h^+(k)$ (resp. $\frac{1}{2}\sum_{k\ge1} h^-(k)$) $(X_{g+u}, u \ge 0)$ (resp.$(-X_{g+u}, u \ge 0)$ est une MB*(3) issue de 0.
$\Sigma_n := \sup\{d_k - g_k, d_k \le n\}$ $\mathbb{E}\left[\lvert X_x\rvert \mid \tau > x\right] = \theta(x)$ $A_n = n - g_n$	$\left(\mathbb{1}_{\Sigma_p \le x}, p \ge 0\right)$	$\left\{\frac{\lvert X_n\rvert}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n \le x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n \le x}$	g	Avec probabilité $1/2$, $(X_n, n \ge g)$ (resp. $(-X_n, n \ge g)$) est une MB(3).
$b > a$, $n \ge 0$ $\sigma_1 = \inf\{k \ge 0, X_k = b\}$ $\sigma_2 = \inf\{k \ge \sigma_1, X_k = a\}$ $\sigma_{2n+1} = \inf\{k \ge \sigma_{2n}, X_k = b\}$ $\sigma_{2n+2} = \inf\{k \ge \sigma_{2n+1}, X_k = a\}$ $D_p = \sum_{n\ge1} \mathbb{1}_{\{\sigma_{2n} \le p\}}$ G décroissante $G(0) = 1, G(\infty) := 0$ $\triangle G(n) = G(n) - G(n+1)$ $g := \inf\{p \ge 0, D_p = D_\infty\}$ $\overline{g} := \{p \ge g, X_p = b\}$	$(\triangle G(D_p), p \ge 0)$	$\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} > n} \frac{G(D_n)}{2}\left(1 + \frac{b - X_n}{b-a}\right)$ $+\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} > n} \frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_n - a}{b-a}\right)$ $+\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} \le n} \frac{G(D_n+1)}{2}\left(1 + \frac{b - X_n}{b-a}\right)$ $+\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} \le n} \frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_n - a}{b-a}\right)$	g $\overline{g}$	sachant que $\overline{g} < \infty$ $(X_{\overline{g}+u}, u \ge 0)$ est une MB(3) issue de $b - a$ sachant que $\overline{g} = \infty$ $(b - X_{\overline{g}+u}, u \ge 0)$ est une MB(3) issue de $b - a$

Deuxième partie

L'origine des résultat de cet alinea se trouve dans un article de P. Vallois, B. Roynette et M. Yor, dans lequel ils pénalisent un processus de Bessel de dimension $d \geq 2$, donc transient, par une fonction de son temps local en zéro.
Essayant de discrétiser ces résultats, i.e. de pénaliser une marche de Bessel de dimension $d \geq 2$ par le nombre de visites en zéro, nous avons développé un raisonnement qui fonctionne pour toute chaîne de naissance et de mort transiente. Puis, nous avons prolongé ce raisonnement à des processus de naissance et de mort, i.e. des processus de sauts qui ne changent d'état qu'avec les états les plus proches. Dans cette introduction, nous n'énonçons que les résultats obtenus pour ces processus, considérons les résultats du cadre discret comme des outils pour obtenir ces derniers. Rappelons que ces processus servent, par exemple, à représenter l'évolution d'une population de particules au cours du temps ; chaque particule pouvant au bout d'un temps exponentiel, soit mourir avec une certaine probabilité, soit donner naissance à une nouvelle particule avec la probabilité complémentaire.
Plus précisément, nous reprenons la définition des changements d'états d'un processus de naissance et de mort $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ donnée dans [**Res05**] pp.313 : quand le processus est dans l'état ℓ, on suppose l'existence de deux variables aléatoires indépendantes $B(\ell)$ et $D(\ell)$, qui sont indépendantes de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, de loi exponentielle de paramètres respectifs b_ℓ et d_ℓ. Une transition de ℓ à $\ell+1$ est établie si $B(\ell) \leq D(\ell)$, ce qui arrive avec probabilité

$$\mathbb{P}[B(\ell) \leq D(\ell)] = {}^{b_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)}; \tag{0.17}$$

sinon, une transition de ℓ à $\ell-1$ est réalisée. Le temps de séjour dans l'état ℓ est $B(\ell) \wedge D(\ell)$, de loi exponentielle de paramètre $b_\ell + d_\ell$ (on suppose que $d_0 = 0$). On peut penser à $B(\ell)$ comme la temps d'arrivée d'une naissance quand la population est de taille ℓ et, $D(\ell)$ est le temps d'arrivée d'une mort quand la population est de taille ℓ ; la population augmente d'une unité si une naissance a lieu avant une mort ; autrement la population décroit d'une unité. Habituellement, les processus de naissance et de mort en temps continu sont décrits à l'aide de ce qu'on nomme les taux de naissance et de mort : dans une population de taille ℓ une particule nait avec taux b_ℓ et meurt avec taux d_ℓ. Plus précisément, les probabilités de transition infinitésimale sont :

$$\mathbb{P}(X(t+h) = \ell + k | X(t) = \ell) = \begin{cases} b_\ell h + o(h) & \text{si } k = 1 \\ d_\ell h + o(h) & \text{si } k = -1 \\ o(h) & \text{si } |k| > 1 \end{cases}, \text{ quand } h \to 0.$$

On peut voir que ces hypothèses décrivent un processus de Markov à sauts, dont le temps d'attente en ℓ est de paramètre :

$$\lambda_\ell := b_\ell + d_\ell$$

et le saut de ℓ

$$\xi_\ell = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } {}^{b_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)} \\ -1 & \text{avec probabilité } {}^{d_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)} \end{cases}.$$

Avec les notations ci-dessus, le processus à sauts $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est transient si et seulement si :

$$S := \sum_{\ell \geq 0} \gamma_\ell = 1 + \sum_{\ell \geq 1} \prod_{k=1}^{\ell} \frac{d_k}{b_k} < \infty. \tag{0.18}$$

(voir par exemple [**Nor98**].) C'est la seule condition que nous imposons à nos taux de passage. En effet, l'originalité de ce travail, par rapport à la pénalisation des processus de Bessel, est que les taux de passage n'ont pas besoin d'être donnés explicitement pour réaliser la pénalisation.
Posons :

$$V(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{\{X(s)=0\}} ds,\ 0 \leq t \leq \infty. \tag{0.19}$$

Alors, on obtient :

THÉORÈME 0.3. *Soit $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée au processus transient de naissance et de mort $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.*

(1) *Pour tout $t \geq 0$ et tout élément $A_t \in \mathcal{F}_t$*

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}]}{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}M(t)], \tag{0.20}$$

où

$$M(t) := (1/S)\exp(b_0V(t)/S)\sum_{\ell\geq X(t)}\gamma_\ell. \tag{0.21}$$

(2) *$\{M(t)\}_{t\geq 0}$ est une $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale positive qui tend p.s. vers 0 quand t tend vers l'infini. De ce fait $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas uniformément intégrable.*

(3) *L'égalité* (0.20) *induit une mesure de probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que : pour tout $t \geq 0$ et tout élément $A_t \in \mathcal{F}_t$*

$$Q(A_t) := \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}M(t)]. \tag{0.22}$$

Alors, sous Q, $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de naissance et de mort récurrent dont les taux de passage sont :

$$\tilde{b}_\ell := b_\ell(\textstyle\sum_{k\geq\ell+1}\gamma_k)/(\sum_{k\geq\ell}\gamma_k),\ \ell \geq 0,\ \tilde{d}_\ell := d_\ell(\sum_{k\geq\ell-1}\gamma_k)/(\sum_{k\geq\ell}\gamma_k),\ \ell > 0. \tag{0.23}$$

Comme annoncé plus haut, le Théorème 0.3 se démontre en utilisant les résultats obtenus sur les chaînes de naissance et de mort appliqués à la chaîne des sauts de $(Y_n, n \geq 0)$ définie par :

$$Y_n := X(J_n),\ n \geq 0. \tag{0.24}$$

où

$$J_0 = 0 \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad J_n = \inf\{t \geq J_{n-1} : X(t) \neq X(J_{n-1})\}. \tag{0.25}$$

Suite à ces résultats, une question naturelle se pose : Est-il possible de pénaliser une chaîne de naissance et de mort récurrente pour la rendre transiente ?

Il est à noter que que le pendant continu de ce travail a été effectué dans le cas particulier du processus de Bessel de dimension $0 < d < 2$, donc récurrent, par B.Roynette et M. Yor (cf. [**RY**] pp.147).

Nous essayons à travers un exemple simple, de montrer que dans ce cas la pénalisation dépend fortement des probabilités de passage, ce qui donne l'impression qu'un résultat général est hors de portée.

CHAPITRE 1

Pénalisation de la marche aléatoire symétrique

1. Introduction

B. Roynette, P. Vallois et M. Yor (cf [**RVY06a**]) ont étudié le problème suivant :
soit $\left\{\Omega, (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}_x\right\}$ le mouvement brownien canonique de dimension 1. Ω est l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(X_t, t \geq 0)$ est le processus des coordonnées, $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$, et $\mathbb{P}_x$ est la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.
On considère $\Gamma : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle positive. Pour plusieurs types de fonctionnelles Γ, ces auteurs montrent que, pour tout s fixé et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$,la quantité :

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s}\Gamma_t]}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]}$$

admet une limite quand t tend vers l'infini et que cette limite est de la forme, $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s}M_s^x]$ où $(M_s^x, s \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_s, s \geq 0)$ martingale positive. Ceci permet de définir sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ la probabilité Q_x par la formule :

$$Q_x(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_s}M_s^x] \quad (\Lambda_s \in \mathcal{F}_s)$$

Ils ont alors décrit de manière précise le processus $(\Omega, X_s, s \geq 0, \mathcal{F}_s, s \geq 0)$ sous la probabilité Q_x. Cette étude a été réalisée pour de nombreuses fonctionnelles Γ_t, par exemple une fonction du maximum unilatère, une fonction du temps local, de la longueur des excursions ou encore de l'âge du processus (cf[**RVY06a**]).
Dans cette thèse, on se propose de donner une version discrète des résultats précédents. Plus précisément, nous nous plaçons dans Ω l'ensemble des fonctions X de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, telles que $X(n+1) = X(n) \pm 1$, $(X_n, n \geq 0)$ le processus des coordonnées de cet espace, $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle associée, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ et $\mathbb{P}_x$ $(x \in \mathbb{Z})$ la famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que sous $\mathbb{P}_x$, $X = (X_n, n \geq 0)$ soit la marche aléatoire standard issue de x, c'est à dire la marche aléatoire dont les probabilités de transitions sont données par :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}\left(X_{n+1} = k+1 | X_n = k\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = k-1 | X_n = k\right) = \frac{1}{2}$$

Lorsque x n'est pas indiqué, on considère, pour alléger les notations, que la marche est issue de 0. Soit $G : \mathbb{N} \times \Omega \to \mathbb{N}$ une fonctionnelle adaptée et positive. Le but de ce travail est de montrer que pour plusieurs types de fonctionnelles G :
i) Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:

$$\frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}G_p]}{\mathbb{E}_x[G_p]}, \tag{1.1}$$

admet une limite quand p tend vers l'infini.
ii) Cette limite est égale à $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}M_n^x]$, où $(M_n^x, n \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ martingale positive telle que $M_0^x = 1$.
Cette limite, que l'on note $Q_x(\Lambda_n)$ induit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Lambda_n \in \mathcal{F}_n,\ Q_x(\Lambda_n) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}M_n^x\right] \tag{1.2}$$

On étudie ensuite le processus $(X_n, n \geq 0, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ sous Q_x.
Pour simplifier les calculs, nous supposons dans tous les résultats que la marche est issue de 0.

1) Dans une première partie, on considère une fonction du maximum unilatère, i.e. :

$$G_p = \varphi\left(S_p\right)$$

où $S_p = \sup\{X_k, k \leq p\}$ et où φ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) = 1$$

et on définit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$$

Nous obtenons :

THÉORÈME 1.1.

(1) (a) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, on a :*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)]}{\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^{\varphi}] \tag{1.3}$$

où $M_n^{\varphi} := \varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n)$.

(b) *$(M_n^{\varphi}, n \geq 0)$ est une martingale positive, non uniformément intégrable : en fait, elle tend vers 0 p.s. lorsque $n \to \infty$.*

(2) *Soit Q^{φ} la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ caractérisée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, \quad Q^{\varphi}(\Lambda_n) = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^{\varphi}] \tag{1.4}$$

Alors sous Q^{φ}, on a :

(a) *S_∞ est fini p.s. et vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$Q^{\varphi}(S_\infty = k) = \varphi(k). \tag{1.5}$$

(b) *Soient $T_k := \inf\{n \geq 0, X_n = k\}$ et $T_\infty := \inf\{n \geq 0, X_n = S_\infty\}$; sous Q^{φ}, T_∞ est fini presque sûrement et :*

(i) *$(X_n, n \leq T_\infty)$ et $(S_\infty - X_{n+T_\infty}, n \geq 0)$ sont deux processus indépendants.*

(ii) *Sachant que $\{S_\infty = k\}$, $(X_n, n \leq T_k)$ est une marche aléatoire standard stoppée lorsqu'elle atteint le niveau k.*

(iii) *$(S_\infty - X_{T_\infty+n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3 issue de 0, notée $(R_n, n \geq 0)$, indépendante de (S_∞, T_∞).*

(3) *Soit $R_n = 2S_n - X_n$. Alors sous Q^{φ}, $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3.*

Les démonstrations des deuxième et troisième partie de ce résultat reposent en grande partie sur un Théorème de Pitman (cf [**Pit75**]) ainsi que sur l'étude de la quantité $\mathbb{P}(\Lambda_n | S_p = k)$ lorsque p tend vers l'infini et où Λ_n est un élément de $\mathcal{F}_n$.

Dans cette thèse, deux chaînes de Markov jouent un rôle particulier. La marche de Bessel de dimension 3 et la marche de Bessel* de dimension 3. Ces deux chaînes sont identiques à un décalage d'un pas près.

La marche de Bessel de dimension 3 est la chaîne de Markov $(R_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les probabilités de passage sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{n+1} = 1 \mid R_n = 0) &= 1 \\ \mathbb{P}(R_{n+1} = x+1 \mid R_n = x) &= \frac{x+2}{2x+2}, \text{ pour } x \geq 1 \\ \mathbb{P}(R_{n+1} = x-1 \mid R_n = x) &= \frac{x}{2x+2}, \text{ pour } x \geq 1 \end{aligned}$$

Nous désignons par $(\mathcal{R}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle de la marche de Bessel.

Nous appelons marche de Bessel* de dimension 3, la chaîne de Markov $(\tilde{R}_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie par les probabilités de passage suivantes :
.$\mathbb{P}_0(\tilde{R}_1 = 1) = 1$
.Si $x \geq 1$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_x(\tilde{R}_1 = x+1) &= \frac{1}{2}\frac{x+1}{x} \\ \mathbb{P}_x(\tilde{R}_1 = x-1) &= \frac{1}{2}\frac{x-1}{x} \end{cases}$$

Plus haut nous avons affirmé que ces deux marches sont identiques à un décalage près. En effet :

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x+1 \mid \tilde{R}_n = x) = \mathbb{P}(R_{n+1} = x+2 \mid R_n = x+1) \tag{1.6}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x-1 \mid \tilde{R}_n = x) = \mathbb{P}(R_{n+1} = x \mid R_n = x+1) \tag{1.7}$$

2) Dans une deuxième partie, la fonctionnelle G_p est une fonction du "temps local" en 0 de la marche aléatoire, c'est à dire que :

$$G_p := h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p \geq 0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p \leq 0}$$

avec, pour tout a réel :

$$a^+ = 0 \vee a,\ a^- = -(0 \wedge a).$$

et où h^+ et h^- sont deux fonctions définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^+(k) + h^-(k)) = 1$$

De plus, on pose :

$$H(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x}(h^+(k) + h^-(k))$$

Nous appelons processus du temps local en 0, noté $(L_n, n \geq 0)$, le processus défini par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} L_0 &= 0 \\ L_{n+1} &= L_n + \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=1} + \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=-1} = L_n + \mathbb{1}_{X_n=0} \quad si \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 0$, L_n est la somme du nombre de montés de 0 à 1 et du nombre de descentes de 0 à -1 avant n. Nous obtenons :

THÉORÈME 1.2. (1) (a) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, on a :*

$$lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p\geq 0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p\leq 0})]}{\mathbb{E}[h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p\geq 0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p\leq 0}]} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^{h^+,h^-}] \tag{1.8}$$

où $M_n^{h^+,h^-} := X_n^+ h^+(L_n) + X_n^- h^-(L_n) + 1 - H(L_n)$.

(b) *$M_n^{h^+,h^-}$ est une martingale positive, non uniformément intégrable : en fait elle tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.*

(2) *Soit la probabilité $Q_0^{h^+,h^-}$ caractérisée par :*

$$\forall n \geq 0,\ \Lambda_n \in \mathcal{F}_n,\ Q_0^{h^+,h^-}(\Lambda_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n^{h^+,h^-}] \tag{1.9}$$

Sous $Q_0^{h^+,h^-}$ on a les propriétés suivantes :

(a) *L_∞ est finie p.s. et vérifie :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Q\left(L_\infty = k\right) = \frac{1}{2}(h^+(k) + h^-(k)) \tag{1.10}$$

(b) *Soit $g := sup\left\{n \geq 0, X_n = 0\right\}$. Alors g est finie $Q_0^{h^+,h^-}$ p.s. et :*

(i) *Les processus $(X_{g+u}, u \geq 0)$ et $(X_u, u \leq g)$ sont indépendants.*

(ii) *Avec probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^+(k))$, le processus $(X_{g+u}, u \geq 1)$ est une marche de Bessel* de dimension 3 partant de 1.*
Avec probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^-(k))$, le processus $(-X_{g+u}, u \geq 1)$ est une marche de Bessel de dimension 3 partant de 1.*

(iii) *Sachant $L_\infty = l$, le processus $(X_u, u \leq g+1)$ est une marche aléatoire standard arrêtée lorsque son temps local en 0 atteint le niveau l.*

La motivation du choix de cette définition du temps local en 0 de la marche aléatoire plutot qu'une autre se situe dans la preuve du premier point. En effet, il est important que ce temps local possède une propriété de symétrie. La deuxième partie de la preuve de ce Théorème, repose essentiellement sur un article de Le Gall (cf [**LeG85**]) qui nous permet d'affirmer, sous des conditions que l'on précisera plus loin, qu'une marche de Bessel* de dimension 3 sous $\mathbb{P}$ est encore une marche de Bessel* sous $Q_0^{h^+,h^-}$.

3) Dans notre troisième partie, G_p est une fonction de la plus grande excursion avant g_p. Soit x un entier pair positif, fixé et :

$$G_p := \mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x}$$

avec $g_n := \sup\left\{k \leq n, X_k = 0\right\}$ et $d_n := \inf\left\{k \geq n, X_k = 0\right\}$, et $\Sigma_n := \sup\left\{d_k - g_k, d_k \leq n\right\}$.
Pour $n \geq 0$, Σ_n est la longueur de la plus grande excursion avant g_n.
Soit $A_n := n - g_n$. Le processus $(A_n, n \geq 0)$ est le processus de l'âge et soit $A_n^* := \sup_{k \leq n} A_k$.
Dans ce qui suit, $\tilde{T}_0$ est une copie de T_0, indépendante de $\mathcal{F}_n$, $\gamma_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = 0\}}$ est le nombre de visite en 0 avant n, $\tau = \inf\left\{n > T_0, X_n = 0\right\}$ le premier retour en 0 et nous notons :

$$\mathbb{E}\left[|X_x| \mid \tau > x\right] := \theta(x) \tag{1.11}$$

Nous obtenons :

THÉORÈME 1.3. (1) (a) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x}]}{\mathbb{P}_0[\Sigma_p \leq x]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n] \tag{1.12}$$

Avec :

$$M_n := \left\{ \frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right) \mathbb{1}_{A_n \leq x} \right\} \mathbb{1}_{\Sigma_n \leq x}$$

(b) *De plus* $(M_n, n \geq 0)$ *est une martingale positive, non uniformément intégrable : en fait, elle tend vers 0* $\mathbb{P}$ *p.s. lorsque* $n \to \infty$.

(2) *Soit la probabilité* Q^x *induite par :*

$$\forall n \geq 0, \forall \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, Q^x(\Lambda_n) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n] \tag{1.13}$$

Alors sous Q^x*, on a :*

(a) $\Sigma_\infty \leq x$ *p.s. et vérifie pour tout* $y \leq x$ *:*

$$Q^x(\Sigma_\infty > y) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > y)} \tag{1.14}$$

(b) $A^*_\infty = \infty$ *p.s.*

(c) *Soit* $g := \sup\{n \geq 0, X_n = 0\}$ *Alors* $Q^x(0 \leq g < \infty) = 1$*. De plus, si* $p = 2l$ *ou* $2l+1$ *avec* $l \geq 0$ *:*

$$Q^x(g > p) = \left(\frac{1}{2}\right)^l \sum_{k=0}^{l \wedge \frac{x}{2}} C^{l-k}_{2l-2k} C^k_{2k} \left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right) \tag{1.15}$$

(d) *Soit* y *tel que* $0 \leq y \leq x$*. Alors :*

(i) *la loi de* $\left(A_n, n \leq T^A_y\right)$ *est la même sous* $\mathbb{P}$ *et sous* Q^x*.*

(ii) $\left(A_n, n \leq T^A_y\right)$ *et* $X_{T^A_y}$ *sont indépendants sous* $\mathbb{P}$ *et sous* Q^x*.*

(iii) *La loi sous* Q^x *de* $X_{T^A_y}$ *est donnée par :*

$$Q^x\left(X_{T^A_y} = k\right) = \left\{ \frac{|k|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_k\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \right\} \mathbb{P}(X_y = k \mid \tau > y) \tag{1.16}$$

(iv)

$$Q^x\left(g > T^A_y\right) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > y)} \tag{1.17}$$

(v) *Sous* Q^x*,* $\left(A_n, n \leq T^A_y\right)$ *est indépendant de* $\left\{g > T^A_y\right\}$*.*

(3) *Sous* Q^x *:*

(a) *Les processus* $(X_n, n \leq g)$ *et* $(X_{g+n}, n \geq 0)$ *sont indépendants.*

(b) *Avec probabilité* $\frac{1}{2}$*, le processus* $(X_{g+n}, n \geq 0)$ *est une marche de Bessel* de dimension 3 et avec probabilité* $\frac{1}{2}$*, le processus* $(-X_{g+n}, n \geq 0)$ *est une marche de f de dimension 3.*

(c) *Conditionnellement à $\gamma_\infty = l$, le processus $(X_n, n \leq g)$ est une marche aléatoire standard arrêtée à sa l^{ieme} visite en 0 et conditionnée à $\Sigma_{\tau_l} \leq x$ où τ_l est le temps du l^{ieme} retour en 0.*

La démonstration du premier point du Théorème 1.3 repose en grande partie sur un Théorème tauberien (cf [**Fel50**]) qui permet d'obtenir un équivalent lorsque p tend vers l'infini de $\mathbb{P}(\Sigma_p \leq x)$. Quant à l'étude du processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^x, cette dernière repose sur des arguments similaires à ceux utilisés pour la démonstration du Théorème 1.2.

Les trois résultats énoncés ci-dessus, ont été rassemblés dans un article soumis à publication au séminaire de probabilités. Les autres résultats obtenus sont relatifs à la pénalisation par :
.G_p est une fonction de S_{g_p} où $g_p := \sup\{n \leq p, X_n = 0\}$, i.e. le dernier zéro à gauche de p (cf pp.36)
.G_p est une fonction de S_{d_p} où $d_p := \inf\{n \geq p, X_n = 0\}$, i.e. le premier zéro à droite de p (cf pp.54)
.G_p est une fonction de $S^*_{g_p}$ où $S^*_p := \sup\{|X_n|, n \leq p\}$ (cf pp.60)
.G_p est une fonction du nombre de descentes entre a et b, deux entiers tels que $a < b$ (cf pp.99).

2. Principe de la Pénalisation : Quelques résultats généraux

Dans tous les Théorèmes que nous avons obtenus, il y a des similitudes dans les premières conclusions. La Définition suivante est l'équivalent discret du Théorème générique de [**RY**] pp.246 :

Definition 2.1.
Soit $(A_n, n \geq 0)$ un processus adapté, croissant tel que $A_\infty = \infty$ $\mathbb{P}$ p.s.
On dit que le processus $(A_n, n \geq 0)$ satisfait au principe général de pénalisation, que l'on note P.G.P., s'il existe une fonction $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\lambda_p \underset{p\to\infty}{\to} \infty,$$

et une mesure ν telle que $\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\,\nu(k) = 1$$

alors :

(1)

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \mathbb{E}[\varphi(A_p)] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\,\nu(k) \tag{2.1}$$

(2)

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[\lambda_p \varphi(A_p) \mid \mathcal{F}_n] = M^\varphi_n, \text{ au sens p.s. et } L^1 \tag{2.2}$$

Si le P.G.P. est satisfait, alors :

(1) $\forall n \geq 0$, $\forall \Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \lambda_p \varphi(A_p)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M^\varphi_n] \tag{2.3}$$

(2) $(M_n^{\varphi}, n \geq 0)$ est une martingale positive valant 1 en 0 et non uniformément intégrable.

Remarque 2.2.

(1) On peut remarquer tout d'abord que $(M_n, n \geq 0)$ est nécessairement une martingale. En effet, soient $m \leq n$ et $\Lambda_m \in \mathcal{F}_m$. D'après (2.3) :

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m} \lambda_p \varphi\left(A_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m} M_m^{\varphi}\right]$$

Mais $(\mathcal{F}_u, u \geq 0)$ étant une filtration, $\Lambda_m \in \mathcal{F}_n$ et donc :

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m} \lambda_p \varphi\left(A_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m} M_n^{\varphi}\right]$$

ce qui permet de conclure que $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale. Cependant, travaillant avec des équivalents, nous vérifierons à "la main" que $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale.

(2) Il est agréable que la martingale obtenue ne soit pas uniformément intégrable. En effet, l'uniforme intégrabilité entrainerait l'absolue continuité de Q par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$, et ainsi l'étude du processus canonique sous Q serait classique.

Proposition 2.3. *Supposons le P.G.P. satisfait. Alors, avec les notations précédentes :*

$$M_p^{\varphi} \underset{p\to\infty}{\to} 0 \ p.s \tag{2.4}$$

Démonstration de la Proposition 2.3.

(1) Tout d'abord, quitte à diviser par $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(k\right)$, on peut supposer que $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(k\right) = 1$. On note par $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, une fonction croissante telle que $\psi\left(\infty\right) = \infty$ et qui vérifie :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(k\right) \psi\left(k\right) \nu(k) < \infty \tag{2.5}$$

L'existence d'une telle fonction est élémentaire. En effet, soit :

$$\psi\left(k\right) := \left(S_k\right)^{1-p}$$

où $S_k := \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi\left(i\right) \nu(i)$ et $p \in]0,1[$.
Alors cette fonction ψ satisfait à (2.5). En effet, il suffit d'appliquer le Théoréme des accroissements finis à la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui a x associe x^p.
Soit $n \geq 0$, il existe $x_n \in]S_{n+1}, S_n[$ telle que :

$$f\left(S_n\right) - f\left(S_{n+1}\right) = f'\left(x_n\right)\left(S_n - S_{n+1}\right)$$

i.e. :

$$\left(S_n\right)^p - \left(S_{n+1}\right)^p = \frac{p}{x_n^{1-p}}\left(S_n - S_{n+1}\right)$$

Or $x_n \in]S_{n+1}, S_n[$ donc $\frac{1}{x_n^{1-p}} \geq \frac{1}{S_n^{1-p}}$ et par définition, on a $\left(S_n - S_{n+1}\right) = \varphi\left(n\right)$. Alors :

$$\left(S_n\right)^p - \left(S_{n+1}\right)^p \geq p\frac{\varphi\left(n\right)}{S_n^{1-p}}$$

On somme maintenant sur n :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} p\frac{\varphi(n)\,\nu(n)}{S_n^{1-p}} &\leq \sum_{n\geq 0}(S_n)^p-(S_{n+1})^p\\ &\leq (S_0)^p-\lim_{N\to\infty}(S_N)^p\\ &\leq (S_0)^p\\ &\leq \left(\sum_{n\geq 0}\varphi(n)\,\nu(n)\right)^p=1\end{aligned}$$

Pour tout $n\geq 0$, soit $U_p:=\inf\{k\geq 0, A_k>p\}$. Notre but est de montrer l'existence d'une constante $C<\infty$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[M^{\varphi}_{U_n}\right]\leq\frac{C}{\psi(p)} \tag{2.6}$$

(2) Rappelons que d'après le P.G.P., on a la formule (2.3) :
$\forall n\geq 0$, $\forall\Lambda_n\in\mathcal{F}_n$:

$$\lim_{p\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\lambda_p\varphi(A_p)\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}M^{\varphi}_n\right]$$

Si on applique (2.3) avec $\Lambda_n=\{U_k<n\}$:

$$F:=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k<n}\lambda_p\varphi(A_p)\right]\underset{p\to\infty}{\to}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k<n}M^{\varphi}_n\right] \tag{2.7}$$

Pour $p>n$, $\{U_k<n\}\subset\{U_k<p\}$ donc :

$$\begin{aligned}F &\leq \mathbb{E}\left[\lambda_p\varphi(A_p)\,\mathbb{1}_{U_k<p}\right]\\ &\leq \mathbb{E}\left[\lambda_p\varphi(A_p)\,\mathbb{1}_{A_p\geq k}\right]\\ &\leq \mathbb{E}\left[\lambda_p\varphi(A_p)\,\mathbb{1}_{\psi(A_p)\geq\psi(k)}\right]\\ &\leq \frac{1}{\psi(k)}\mathbb{E}\left[\lambda_p\varphi(A_p)\,\psi(A_p)\right]\end{aligned}$$

car $\frac{\psi(A_k)}{\psi(k)}\geq\mathbb{1}_{\psi(A_p)\geq\psi(k)}$.
Et en faisant tendre p vers ∞, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k<n}M^{\varphi}_n\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{U_k<n}M^{\varphi}_{U_k}\right]\leq\frac{1}{\psi(k)}\sum_{i=0}^{\infty}\varphi(i)\psi(i)\nu(i)=\frac{C}{\psi(k)}<\infty$$

Nous appliquons le Théoréme de convergence dominée en faisant tendre n vers ∞, ce qui implique (2.6).
Comme $\left(M^{\varphi}_p, p\geq 0\right)$ est une martingale positive, elle admet une limite p.s. quand $p\to\infty$ et (2.6) implique que cette limite vaut 0.

□

Grâce à la Proposition 2.3, on est en mesure de montrer que si le P.G.P. est satisfait, $(M_n, n\geq 0)$ n'est pas uniformément intégrable. En effet si elle l'était, on aurait que $\mathbb{E}\left[M^{\varphi}_n\right]=\mathbb{E}\left[M^{\varphi}_{\infty}\right]=0$, ce qui est absurde.
Dans la même veine que la Proposition précédente, on peut voir la :

Proposition 2.4.
Si le P.G.P est satisfait alors :

$$\lambda_p\varphi(A_p)\underset{p\to\infty}{\to}0 \text{ } \textit{en probabilité} \tag{2.8}$$

Démonstration de la Proposition 2.4.
On reprend les mêmes notations que dans la démonstration précédente.
Soient $\delta > 0$ et $M > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right) > \delta\right) &= \mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right)\psi\left(A_p\right) > \delta\psi\left(A_p\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right)\psi\left(A_p\right) > \delta\psi\left(A_p\right), \psi\left(A_p\right) < M\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right)\psi\left(A_p\right) > \delta\psi\left(A_p\right), \psi\left(A_p\right) \geq M\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\psi\left(A_p\right) < M\right) + \mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right)\psi\left(A_p\right) > \delta M\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\psi\left(A_p\right) < M\right) + \frac{1}{\delta M}\mathbb{E}\left[\lambda_p\varphi\left(A_p\right)\psi\left(A_p\right)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi d'après le P.G.P. appliquée à la fonction $\varphi\psi$:

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right) > \delta\right) \leq \overline{\lim_{p\to\infty}}\mathbb{P}\left(\psi\left(A_p\right) < M\right) + \frac{1}{\delta M}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)\psi(k) \tag{2.9}$$

Or : $A_p \underset{p\to\infty}{\to} \infty$ et $\psi\left(\infty\right) = \infty$. Par conséquent :

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\mathbb{P}\left(\psi\left(A_p\right) < M\right) = 0 \tag{2.10}$$

On en déduit :

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right) > \delta\right) \leq \frac{C}{\delta M} \tag{2.11}$$

où M est arbitraire. Ce qui implique que $\overline{\lim_{p\to\infty}}\mathbb{P}\left(\lambda_p\varphi\left(A_p\right) > \delta\right) = 0$, d'où la Proposition 2.4. □

On va maintenant essayer de montrer quel est l'intérêt de prendre dans le P.G.P. des éléments de $\mathcal{F}_n$ plutot que des éléments de $\mathcal{F}_\infty$.
Pour cela on va définir :

$$Q^{(1)} = \lim_{p\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\lambda_p\varphi\left(\Lambda_p\right)\right] \tag{2.12}$$

$$Q^{(2)} = \lim_{p\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}M_p^{\varphi}\right] \tag{2.13}$$

$$Q^{(3)} = Q^{\varphi}\left(\Lambda_n\right) \tag{2.14}$$

Lorsque le P.G.P. est satisfait, pour $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, ces trois quantités sont égales. On aimerait remplacer Λ_n par Λ un élément de $\mathcal{F}_\infty$. Les limites des quantités (2.12), (2.13) existent elles ? Et y a t'il égalité entre (2.12), (2.13) et (2.14).
Pour montrer l'interêt de cette question, on va donner deux exemples donnant des résultats différents :
Exemple 1
On suppose le P.G.P. satisfait et soit $\Lambda := \{A_\infty = \infty\}$. Par définition, on sait que sous $\mathbb{P}$, cet événement est de probabilité 1. D'autre part, le P.G.P. est un principe qui va "favoriser" les trajectoires dans lesquelles A_∞ n'est pas très grand. En effet pour $p > n$:

$$\{A_n > k\} \subset \{A_p > k\}$$

D'après le P.G.P. :

$$Q^{\varphi}\left(A_n > k\right) = \lim_{p\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{A_n>k\}}\lambda_p\varphi(A_p)\right] \leq \lim_{p\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{A_p>k\}}\lambda_p\varphi(A_p)\right]$$

On pose $\tilde{\varphi} := \varphi\mathbb{1}_{.>k}$. Le P.G.P. est satisfait pour $\tilde{\varphi}$ et donc :

$$Q^{\varphi}\left(A_n > k\right) \leq \sum_{x\geq 0}\tilde{\varphi}(x)\nu(x) = \sum_{x>k}\varphi(x)\nu(x)$$

Faisant tendre $n \to \infty$:

$$Q^{\varphi}\left(A_{\infty} > k\right) \leq \sum_{x>k} \varphi(x)\nu(x)$$

Et par conséquent :

$$Q^{\varphi}\left(A_{\infty} = \infty\right) = 0$$

Pour résumer :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Lambda\right) &= 1 \\ Q^{\varphi}\left(\Lambda\right) &= 0 \end{aligned}$$

Soit $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ tel que $Q^{\varphi}\left(\Lambda_n\right) > 0$ (ce qui implique que $\mathbb{P}\left(\Lambda_n\right) > 0$).
Alors :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Lambda} M_p^{\varphi}\right] = Q^{\varphi}\left(\Lambda_n\right) \tag{2.15}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Lambda} \lambda_p \varphi\left(A_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \lambda_p \varphi\left(A_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\to} Q^{\varphi}\left(\Lambda_n\right) \tag{2.16}$$

$$Q^{\varphi}\left(\Lambda_n \cap \Lambda\right) \leq Q^{\varphi}\left(\Lambda\right) = 0 \tag{2.17}$$

On a donc que :

$$Q^{(1)}\left(\Lambda\right) = Q^{(2)}\left(\Lambda\right) \neq Q^{(3)}\left(\Lambda\right) \tag{2.18}$$

Exemple 2 On suppose encore une fois que le P.G.P. est satisfait.
Posons $M_{\infty}^{\varphi,*} := \sup_{p\geq 0} M_p^{\varphi}$ et pour $a > 1$, $\mathcal{T}_a := \inf\left\{p \geq 0, M_p^{\varphi} \geq a\right\}$. (On rappelle que $M_0^{\varphi} = 1$ $\mathbb{P}$ p.s.).
Si l'on considère l'événement $\Lambda_a = \{T_a < \infty\} = \{M_{\infty}^{\varphi,*} \geq a\}$, on a que :
$Q^{(1)}\left(\Lambda_a\right) = Q^{(2)}\left(\Lambda_a\right) = Q^{(3)}\left(\Lambda_a\right)$.

Montrons tout d'abord que sous Q^{φ}, $\limsup_{p\to\infty} M_p^{\varphi} = \infty$.
En effet, pour $p \geq 0$, $a > 1$:

$$\mathbb{E}\left[M_{\mathcal{T}_a \wedge p}\right] = 1 = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < p} M_{T_a}^{\varphi}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a \geq p} M_p^{\varphi}\right] \tag{2.19}$$

On en déduit que :

$$Q^{\varphi}\left(T_a < p\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < p} M_{T_a}^{\varphi}\right] = 1 - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a \geq p} M_p^{\varphi}\right] \tag{2.20}$$

Comme, $\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a \geq p} M_p^{\varphi} \underset{p\to\infty}{\to} 0$ $\mathbb{P}$ p.s. et que $\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a \geq p} M_p^{\varphi} \leq a$, en appliquant le Théoréme de convergence dominée :

$$Q^{\varphi}\left(T_a < \infty\right) = \lim_{p\to\infty} 1 - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a \geq p} M_p^{\varphi}\right] = 1 \tag{2.21}$$

D'autre part :

$$1 \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_a} M_p^{\varphi}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < \infty} M_p^{\varphi}\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < p} M_p^{\varphi}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < p} M_{\mathcal{T}_a}^{\varphi}\right] \tag{2.22}$$

Et d'après la formule (2.20), en faisant tendre p vers ∞, on a :

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_a} M_{\mathcal{T}_a}^{\varphi}\right] = 1 \tag{2.23}$$

i.e. :

$$Q^{(2)}\left(\Lambda_a\right) = 1 \tag{2.24}$$

Enfin, on vérifie la dernière égalité :

$$1 \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_a} \varphi\left(A_p\right) \lambda_p\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < n} \varphi\left(A_p\right) \lambda_p\right] \tag{2.25}$$

On applique le P.G.P. avec $\Lambda_n = \{\mathcal{T}_a < n\}$.
Alors en faisant tendre p vers l'infini on obtient :

$$1 \geq \liminf_{p\to\infty} \left[\mathbb{1}_{\Lambda_a} \varphi\left(A_p\right) \lambda_p\right] \geq \lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < n} \varphi\left(A_p\right) \lambda_p\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a < n} M_n^{\varphi}\right] \tag{2.26}$$

Cette inégalité est vraie pour tout n, et on a montré dans la démonstration de la deuxième égalité que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_a<n} M_n^{\varphi}\right] = 1$.
Par conséquent :

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_a} \varphi\left(A_p\right) \lambda_p\right] = Q^{(1)}\left(\Lambda_a\right) = 1 \tag{2.27}$$

Proposition 2.5.
Sous Q^{φ}, on a :

(1) $A_\infty < \infty$ *p.s.*

(2) $M_\infty = \infty$ *p.s.*

Démonstration de la Proposition 2.5.
(1) cf. exemple 1.
(2) Montrons tout d'abord que $(M_n, n \geq 0)$ ne s'annule pas sous Q^{φ}. Soit $\mathcal{T}_0 := \inf\left\{n \geq 0,\ M_n^{(\varphi)} = 0\right\}$.
Alors :

$$Q^{\varphi}\left(\mathcal{T}_0 < \infty\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{T}_0 \geq p} M_{\mathcal{T}_0}^{\varphi}\right] = 0 \tag{2.28}$$

Par conséquent, on peut considérer la chaîne $((M_n^{\varphi})^{-1}, n \geq 0)$.
Cette chaîne est une martingale positive sous Q^{φ}. En effet pour $m < n$ et $\Lambda_m \in \mathcal{F}_m$:

$$\mathbb{E}^{Q^{\varphi}}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m} (M_n^{\varphi})^{-1}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m}\right] = \mathbb{E}^{Q^{\varphi}}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_m} (M_m^{\varphi})^{-1}\right] \tag{2.29}$$

Par conséquent $((M_n^{\varphi})^{-1}, n \geq 0)$ est une martingale positive sous $Q^{(\varphi)}$ et admet donc une limite p.s.
On a montré dans l'exemple 2 que $M_\infty^{\varphi,*} = \infty$ Q^{φ}-p.s., et donc $(M_\infty^{\varphi})^{-1} = 0$ Q^{φ}-p.s. □

3. Pénalisation par une fonction du maximum unilatère

3.1. Notations.

Rappelons que $S_p = \sup\{X_k, k \leq p\}$ désigne le maximum unilatère de la marche aléatoire $(X_n, n \geq 0)$. Nous considérons φ, une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) = 1$$

et on définit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(k) := \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(j)$$

La marche de Bessel de dimension 3 est la chaîne de Markov $(R_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les probabilités de passage sont :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{n+1} = 1 \mid R_n = 0) &= 1 \\
\mathbb{P}(R_{n+1} = x+1 \mid R_n = x) &= \frac{x+2}{2x+2}, \text{ pour } x \geq 1 \\
\mathbb{P}(R_{n+1} = x-1 \mid R_n = x) &= \frac{x}{2x+2}, \text{ pour } x \geq 1
\end{aligned}$$

Nous désignons par $(\mathcal{R}_n, n \geq 0)$ la filtration naturelle de la marche de Bessel.

3.2. Démonstration du Théorème 1.1.

Commençons par faire quelques rappels :
Le résultat suivant est classique (cf. [**Fel50**] pp.75) :

LEMME 3.1. $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_0(X_n = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^{\frac{n+x}{2}} \tag{3.30}$$

REMARQUE 3.2. Dans tout ce qui suit, on note :

$$\mathbb{P}_0(X_n = x) := p_{n,x} \tag{3.31}$$

et nous remarquons que $p_{n,x}$ est non nulle si et seulement si n et x sont de même parité et $|x| \leq n$.

LEMME 3.3. *Soit $k \leq n$. La probabilité qu'un chemin de n pas issu de $O = (0,0)$ arrive au point $A = (n,k)$ et ait un maximum supérieur ou égal à r est égale à :*

$$\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) = \mathbb{P}_0(X_n = 2r - k) = p_{n,2r-k}, \quad |2r-k| \leq n \tag{3.32}$$

Démonstration du lemme 3.3.
Grâce au principe de réflexion de Désiré André (voir par exemple [**Fel50**] pp.72 et pp.88-89), il est aisé de voir que le nombre de chemins qui partent de 0, qui arrivent en k à l'instant n et qui ont leur maximum supérieur à r, est égal au nombre de chemins qui partent de 0 et qui arrivent en $2r-k$ à l'instant n. De ce fait :

$$\mathbb{P}_0(X_n = k, S_n \geq r) = p_{n,2r-k} \tag{3.33}$$

□

LEMME 3.4. *Soient n, r deux entiers. On a :*

$$\mathbb{P}_0(S_n = r) = p_{n,r} \vee p_{n,r+1} \tag{3.34}$$

Démonstration du lemme 3.4.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(S_n = r, X_n = k) &= \mathbb{P}_0(S_n \geq r, X_n = k) - \mathbb{P}_0(S_n \geq r+1, X_n = k) \\
&= \mathbb{P}_0(X_n = 2r-k) - \mathbb{P}_0(X_n = 2r+2-k), \text{ d'après (3.32)} \\
&= p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}
\end{aligned}$$

Si $S_n = r$, X_n ne peut être inférieur à $r-n$. Ainsi :.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(S_n = r) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}_0(S_n = r, X_n = k) \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} \mathbb{P}_0(S_n = r, X_n = k) \\
&= \sum_{k=r-n}^{r} p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k} \\
&= (p_{n,2r-(r-n)} - p_{n,2r+2-(r-n)}) + (p_{n,2r-(r-n+1)} - p_{n,2r+2-(r-n+1)}) \\
&+ (p_{n,2r-(r-n+2)} - p_{n,2r+2-(r-n+2)}) + (p_{n,2r-(r-n+3)} - p_{n,2r+2-(r-n+3)}) \\
&+ \ldots \\
&+ (p_{n,2r-(r-2)} - p_{n,2r+2-(r-2)}) + (p_{n,2r-(r-1)} - p_{n,2r+2-(r-1)}) \\
&+ p_{n,2r-r} - p_{n,2+2-r} \\
&= (p_{n,r+n} - p_{n,r+2+n}) + (p_{n,r+n-1} - p_{n,r+1+n}) + (p_{n,r+n-2} - p_{n,r+n}) \\
&+ (p_{n,r+n-3} - p_{n,r+n-1}) + \ldots + (p_{n,r+2} - p_{n,r+4}) + (p_{n,r+1} - p_{n,r+3}) + (p_{n,r} - p_{n,r+2})
\end{aligned}$$

Cette somme est télescopique et donc :

$$\mathbb{P}_0(S_n = r) = p_{n,r} + p_{n,r+1} = p_{n,r} \vee p_{n,r+1}\,, \text{ d'après la Remarque 3.2.} \tag{3.35}$$

□

2.i) Montrons le point 1.a du Théorème 1.1.
Nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3.5. *Soit la marche aléatoire standard $(\widetilde{X}_p, p \geq 0)$ issue de 0, définie par $(\widetilde{X}_u = X_{u+n} - X_n, u \geq 0)$ et soit $(\widetilde{S}_p, p \geq 0)$ le processus du maximum unilatère de cette marche. Alors pour tout $n \geq 0$, $p \geq n$, $k \in \mathbb{N}$, et $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:*

$$\mathbb{P}_0(\Lambda_n \mid S_p = k) = \frac{\mathbb{P}(S_n = k)}{\mathbb{P}(S_p = k)} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{P}(k - X_n > \widetilde{S}_{p-n}) \mid S_n = k] \tag{3.36}$$

$$+ \frac{1}{\mathbb{P}(S_p = k)} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{S_n \leq k} \mathbb{P}(k - X_n = \widetilde{S}_{p-n})] \tag{3.37}$$

Démonstration du lemme 3.5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \{S_p = k\}\right) &= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{S_n \vee \left(\sup_{n \leq u \leq p} X_u\right) = k\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{S_n \vee \left(X_n + \sup_{n \leq u \leq p} \tilde{X}_u\right) = k\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{S_n \vee \left(X_n + \tilde{S}_{p-n}\right) = k\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n \cap \left\{\left\{S_n > X_n + \tilde{S}_{p-n}, S_n = k\right\} \cup \left\{\tilde{S}_{p-n} + X_n \geq S_n, \tilde{S}_p - n = k - X_n\right\}\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, k - X_n > \tilde{S}_{p-n}, S_n = k\right) + \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, S_n \leq k, \tilde{S}_{p-n} = k - X_n\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(S_n = k\right) \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, k - X_n > \tilde{S}_{p-n} \mid S_n = k\right) \\
&+ \mathbb{P}_0\left(\Lambda_n, S_n \leq k, \tilde{S}_{p-n} = k - X_n\right) \\
&= \mathbb{P}_0\left(S_n = k\right) \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{P}\left(k - X_n > \tilde{S}_{p-n}\right) \mid S_n = k\right] \\
&+ \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n, S_n \leq k} \mathbb{P}_0\left(\tilde{S}_{p-n} = k - X_n\right)\right]
\end{aligned}$$

□

LEMME 3.6. *Pour tout $k \geq 0$:*

$$\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n \to \infty}{\sim} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.38}$$

Démonstration du lemme 3.6.
Cette démonstration résulte de la formule de Stirling appliquée à la formule (3.34) en faisant attention à la parité de n et k. □

Grâce à ces deux Lemmes on peut prouver la Proposition suivante :

PROPOSITION 3.7.
i) Pour tout $n \geq 0$, tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ et tout $k \in \mathbb{N}$
$\mathbb{P}(\Lambda_n \mid S_p = k)$ admet une limite lorsque p tend vers l'infini. Notons $Q^{(k)}(\Lambda_n)$ cette limite. Elle vaut :

$$Q^{(k)}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(k - X_n) \mid S_n = k] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{S_n \leq k}] \tag{3.39}$$

ii) (3.39) induit une probabilité $Q^{(k)}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ et on a :

$$Q^{(k)}(S_\infty = k) = 1 \tag{3.40}$$

Démonstration de la Proposition 3.7.
Prouvons i. D'après le lemme 3.6 :

$$\mathbb{P}(\widetilde{S}_{p-n} = k - X_n) \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.41}$$

$$\mathbb{P}(\widetilde{S}_{p-n} < k - X_n) \underset{p\to\infty}{\sim} (k - X_n)\left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \mathbb{P}(\Lambda_n \mid S_p = k) &= \lim_{p\to\infty} \left\{ \frac{\mathbb{P}(S_n = k)}{\mathbb{P}(S_p = k)} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{P}(k - X_n > \tilde{S}_{p-n}) \mid S_n = k] \right\} \\
&+ \lim_{p\to\infty} \left\{ \frac{1}{\mathbb{P}(S_p = k)} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{S_n \le k} \mathbb{P}(\tilde{S}_{p-n} = k - X_n)] \right\} \\
&= \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(k - X_n) \mid S_n = k] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{S_n \le k}] \\
&= Q^{(k)}(\Lambda_n)
\end{aligned}$$

Montrons ii. Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
Q^{(k)}(S_\infty \neq k) &= Q^{(k)}(\exists n \ge 0 \text{ tel que } \forall m \ge n, S_m \neq k) \\
&= Q^{(k)}\left(\bigcup_{n\ge 0} \{\forall m \ge n, S_m \neq k\} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} Q^{(k)}\left(S_n \neq k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n \neq k}(k - X_n) \mid S_n = k\right] \\
&+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n \neq k} \mathbb{1}_{S_n \le k}\right]
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n \neq k}(k - X_n) \mid S_n = k\right] = 0$$

et comme :

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \mathbb{P}_0 \text{ p.s.}$$

on a :

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{S_n \neq k} \mathbb{1}_{S_n \le k}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi :

$$Q^{(k)}(S_\infty = k) = 1$$

□

Lemme 3.8. *Soient $x \ge 0$, $x \ge y$. Alors :*

$$\mathbb{E}_0\left[\varphi(x \vee (y + S_n))\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \{(x - y)\varphi(x) + 1 - \phi(x)\} \tag{3.43}$$

Démonstration du lemme 3.8.
On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[\varphi(x \vee (y + S_n))\right] &= \mathbb{E}_0\left[\varphi(x)\mathbb{1}_{x > y + S_n}\right] + \mathbb{E}_0\left[\varphi(y + S_n)\mathbb{1}_{x \le y + S_n}\right] \\
&= \varphi(x)\mathbb{P}(x - y > S_n) + \mathbb{E}_0\left[\varphi(y + S_n)1_{x - y \le S_n}\right] \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.6 :

$$\mathbb{P}(x - y > S_n) = \sum_{k=0}^{x-y-1} \mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to\infty}{\sim} (x - y)\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.45}$$

Quant au second terme de (3.44), puisque pour n assez grand :

$$\left(\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(S_n = k) \leq \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(S_n = 0) \leq 2$$

et que $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) < \infty$ on a, en appliquant le Théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=x-y}^{n} \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(S_n = k)\varphi(y+k) &\underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=x-y}^{\infty} \varphi(y+k) = \sum_{k=x}^{\infty} \varphi(k) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \left(1 - \sum_{k=0}^{x-1} \varphi(k)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} (1 - \phi(x))\end{aligned}$$

□

Achevons la démonstration du premier point du Théorème 1.1. On garde les mêmes définitions que dans le lemme 3.5 pour $\widetilde{X}$ et $\widetilde{S}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)] &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p \vee (\sup_{0<q<p-n} X_{n+q} - X_n))] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_n \vee \left(X_n + \widetilde{S}_{p-n}\right)\right)] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{E}[\varphi\left(S_n \vee \left(X_n + \widetilde{S}_{p-n}\right)\right) \mid (S_n, X_n)]]\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.8 :

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)] \underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} [\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n)]\right] \tag{3.46}$$

Si on fait $n = 0$ et $\Lambda_0 = \Omega$ dans (3.46), on obtient :

$$\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.47}$$

Ainsi d'après (3.46) et (3.47) on a :

$$\frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi(S_p)]}{\mathbb{E}_0[\varphi(S_p)]} \underset{p\to\infty}{\to} \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n))]$$

□

2.ii) Vérifions maintenant que $(M_n^{\varphi}, n \geq 0)$ est une martingale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0[M_n^{\varphi}] &= \mathbb{E}_0[\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n)] \\ &\leq \mathbb{E}_0[S_n - X_n] + 1 - \mathbb{E}_0[\phi(S_n)]\end{aligned}$$

Or $\phi \geq 0$ et comme $|S_n| \leq n$:

$$\mathbb{E}_0[M_n^{\varphi}] \leq 1 + 2n$$

Ainsi, $M_n^{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$.
Soit $Y_{n+1} = X_{n+1} - X_n$, le pas de la marche aléatoire. Alors Y_{n+1} est centrée et indépendante de $\mathcal{F}_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}^{\varphi} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\varphi(S_{n+1})(S_{n+1} - X_{n+1}) + 1 - \phi(S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n \leq S_n - 1}\varphi(S_n)(S_n - X_n - Y_{n+1} + 1 - \phi(S_n) \mid \mathcal{F}_n])] \\ &+ \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n = S_n\} \cap \{Y_{n+1} = -1\}}\varphi(S_n)(S_n - X_n + 1) + 1 - \phi(S_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &+ \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n = S_n\} \cap \{Y_{n+1} = 1\}}\varphi(S_n + 1)(S_{n+1} - X_{n+1}) + 1 - \phi(S_n + 1) \mid \mathcal{F}_n] \\ &:= (1) + (2) + (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{1}_{X_n \leq S_n - 1}\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n) \\
(2) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = -1)\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[\varphi(S_n) + 1 - \phi(S_n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[\varphi(S_n) + 1 - \phi(S_n)\right] \\
(3) &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[1 - \phi(S_{n+1})\right] = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[1 - \phi(S_n) - \varphi(S_n)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}^{\varphi} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{1}_{X_n \leq S_n - 1}\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n) + \mathbb{P}(Y_{n+1} = -1)\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[\varphi(S_n) + 1 - \phi(S_n)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[\varphi(S_n) + 1 - \phi(S_n)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n = S_n}\left[1 - \phi(S_n) - \varphi(S_n)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n \leq S_n - 1}\varphi(S_n)(S_n - X_n) + \mathbb{1}_{X_n = S_n}\varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n) \\
&= \varphi(S_n)(S_n - X_n) + 1 - \phi(S_n) \\
&= M_n^{\varphi}
\end{aligned}$$

On a donc montré que $(M_n^{\varphi}, n \geq 0)$ était une martingale et il est facile de montrer qu'elle est positive. Ainsi, M_n^{φ} admet une limite p.s. lorsque n tend vers l'infini que l'on note M_{∞}^{φ}. Notons $T_0^{(n)}$, la suite des 0 de $(X_n, n \geq 0)$. Alors :

$$M_{T_0^{(n)}}^{\varphi} \underset{n \to \infty}{\to} 0, \ \mathbb{P} \text{ p.s.} \tag{3.48}$$

ce qui implique :

$$M_n^{\varphi} \underset{n \to \infty}{\to} 0, \ \mathbb{P} \text{ p.s..} \tag{3.49}$$

En particulier, la martingale $(M_n^{h^+, h^-}, n \geq 0)$ n'est pas uniformément intégrable.

□

3) On va maintenant donner quelques résultats qui serviront à montrer les autres points du Théorème 1.1. Rappelons le résultat classique suivant (cf. [**LeG85**] pp.449).

LEMME 3.9. *Soient $(R_n, n \geq 0)$ la marche de Bessel de dimension 3 et $\sigma(a) := \inf\{k \geq 0, R_k = a\}$, le temps d'atteinte du niveau a du processus $(R_n, n \geq 0)$. Alors, pour tout $x \geq 1$, la suite $\left(\frac{1}{R_{n \wedge \sigma(1)} + 1}, n \geq 1\right)$ est une $\mathbb{P}_x-$martingale.*

Démonstration du lemme 3.9.
On note $\varepsilon_{n+1} = R_{n+1} - R_n$, le pas de la marche de Bessel. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] + \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n\wedge\sigma(1)}+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_n+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\frac{1}{R_{n-1}+\varepsilon_n+1}\mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1} \mid \mathcal{R}_{n-1}\right] \\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\left[\mathbb{P}_x(\varepsilon_n = 1 \mid \mathcal{R}_{n-1})\frac{1}{R_{n-1}+2} + \mathbb{P}_x(\varepsilon_n = -1 \mid \mathcal{R}_{n-1})\frac{1}{R_{n-1}}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1} \\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\left[\frac{R_{n-1}+2}{2R_{n-1}+2}\frac{1}{R_{n-1}+2} + \frac{R_{n-1}}{2R_{n-1}+2}\frac{1}{R_{n-1}}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1} \\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\left[\frac{2R_{n-1}(R_{n-1}+2)}{R_{n-1}(R_{n-1}+2)(2R_{n-1}+2)}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1} \\
&= \mathbb{1}_{\sigma(1)>n-1}\frac{1}{R_{n-1}+1} + \mathbb{1}_{\sigma(1)\leq n-1}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{R_{n-1\wedge\sigma(1)}+1}
\end{aligned}$$

De plus, cette martingale est évidemment uniformément intégrable car bornée par 1. □

LEMME 3.10. *Soit $(R_n, n \geq 0)$ une marche de Bessel issue de $x > 0$ et soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a < x < b$. Alors :*

$$\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}} \tag{3.50}$$

et $\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{x+1}$. De plus, $J_0 = \inf_{n\geq 0} R_n$ suit la loi uniforme sur $[0, x]$.

Ce lemme est lui aussi classique et résulte du lemme 3.9 (cf [**LeG85**] pp. 449).

Démonstration du lemme 3.10.
Grâce au lemme 3.9 on peut appliquer le Théorème d'arrêt de Doob et donc :

$$\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{X_{n\wedge\sigma(1)\wedge\sigma(a)\wedge\sigma(b)+1}}\right] = \frac{1}{x+1}$$

Comme $0 < a < x < b$, $\sigma(1)$ ne joue aucun rôle et donc lorsqu'on fait tendre n vers l'infini :

$$\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{X_{\sigma(a)\wedge\sigma(b)+1}}\right] = \frac{1}{x+1}$$

On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{a+1}\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) + \frac{1}{b+1}\mathbb{P}_x(\sigma(b) < \sigma(a)) & = & \frac{1}{x+1} \\ \mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) + \mathbb{P}_x(\sigma(b) < \sigma(a)) & = & 1 \end{array}\right.$$

qui implique :

$$\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \sigma(b)) = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+1}}$$

Faisant tendre b vers l'infini on obtient :

$$\mathbb{P}_x(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{x+1}$$

Enfin :

$$\mathbb{P}_x(J_0 \leq a) = \mathbb{P}_x(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{x+1}$$

□

On va maintenant énoncer un Théorème classique dû à Pitman dont on ne fera pas la démonstration(cf. [**Pit75**])

THÉORÈME 3.11. *La suite $2S_n - X_n = R_n^X$ est une marche de Bessel issue de 0. De plus, si $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0 et si $J_n = \inf_{m>n} R_m$, alors les suites $(2S_n - X_n, S_n)_{n\geq 0}$ et $(R_n, J_n,)_{n\geq 0}$ ont même loi.*

Dans la suite plutôt que le Théorème précédent on utilisera un de ses Corollaires :

COROLLAIRE 3.12. *La loi conditionnelle de S_n sachant $\mathcal{F}_n^{2S-X}$ est la loi uniforme sur $[0, 2S_n - X_n]$.*

Démonstration du Corollaire 3.12.
Grâce au Théorème 3.11, la loi conditionnelle de S_n sachant $\mathcal{F}_n^{2S-X}$ est aussi la loi conditionnelle de J_n sachant $\mathcal{R}_n$, mais grâce à la propriété de Markov, c'est aussi la loi de $\widetilde{J}_0 = \inf_{n\geq 0} \widetilde{R}_n$ où $\widetilde{R}_n$ est une marche de Bessel issue de R_n. D'après le Lemme 3.10 on a :

$$\mathbb{P}_{R_n}(\widetilde{J}_0 \leq a) = \mathbb{P}_{R_n}(\sigma(a) < \infty) = \frac{a+1}{R_n+1}$$

□

REMARQUE 3.13. Soit $W_n := 2J_n - R_n$, W_n. Alors $(W_n, n \geq 0)$ est une marche aléatoire issue de $2J_0 - R_0$ et sa filtration est $\sigma(J_n, \mathcal{R}_n)$ que l'on note $\mathcal{F}_n^W$.

PROPOSITION 3.14. *Soit $(R_n, n \geq 0)$ une marche de Bessel. Si T est un temps d'arrêt de la suite $(R_n, J_n)_{n\geq 0}$ tel que $R_T = J_T$ alors $R_{T+n} - R_T$ est une marche de Bessel issue de 0 indépendante de $\mathcal{R}_T$*

Démonstration de la Proposition 3.14.
Pour plus de facilité, supposons que R est issue de 0. De la remarque 3.13 on déduit que T est aussi un temps d'arrêt de W. Par conséquent, d'après la propriété de Markov :
$\left(\widetilde{W}_n = W_{T+n} - W_T, n \geq 0\right)$ est une marche aléatoire issue de 0, indépendante de $\mathcal{F}_T^W$. D'après la définition de T, on a :

$$W_T = 2J_T - R_T = R_T$$

De plus (cf. démonstration du Théorème de Pitman, [**Pit75**] pp.242-243), on a aisément que $S_n = J_n$, d'où :

$$J_{T+n} - J_T = J_{T+n} - R_T = J_{T+n} - W_T = S_{T+n} - S_T = \widetilde{S}_n$$

et :

$$\begin{aligned} R_{T+n} - R_T &= 2J_{T+n} - W_{T+n} - 2J_T + W_T \\ &= 2(J_{T+n} - J_T) - (W_{t+n} - W_T) \\ &= 2\widetilde{S}_n - \widetilde{W}_n \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème de Pitman $(R_{T+n} - R_T, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0 indépendante de $\mathcal{R}_n$. □

4) Etudions maintenant le processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^φ.
4.i) Montrons que sous Q^φ, $S_\infty < \infty$ p.s. et que $Q^\varphi(S_\infty = p) = \varphi(p)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et on rappelle que T_p : $\inf\{k \geq 0,\, X_k = p\}$. Par définition de Q^φ et d'après le Théorème d'arrêt de Doob :

$$Q_0^\varphi(S_n \geq p) = Q_0^\varphi(T_p \leq n) = \mathbb{E}_0[1_{T_p \leq n} M_n^\varphi] = \mathbb{E}_0[1_{T_p \leq n} M_{T_p}^\varphi]$$

Or :

$$M_{T_p}^\varphi = \varphi(S_{T_p})(S_{T_p} - X_{T_p}) + 1 - \phi(S_{T_p}) = 1 - \phi(S_{T_p}) = 1 - \phi(p)$$

Il en résulte que :

$$Q_0^\varphi(S_n \geq p) = (1 - \phi(p))\mathbb{P}(T_p \leq n),$$

d'où l'on déduit :

$$Q_0^\varphi(S_\infty \geq p) = 1 - \phi(p) \tag{3.51}$$

en faisant tendre $n \to \infty$. □

4.ii) Montrons que sous Q^φ, $2S_n - X_n$ est une chaîne de Bessel de dimension 3.
Soit $(R_n, n \geq 0)$la suite définie par $R_n = 2S_n - X_n$. Grâce au Théorème 3.11, on sait que $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel sous $\mathbb{P}$. Etudions maintenant sa loi sous Q^φ.

Proposition 3.15. *Sous Q^φ, la loi de $(R_n, n \geq 0)$ est celle de la marche de Bessel de dimension 3 issue de 0.*

Démonstration de la Proposition 3.15. Soit F une fonction dépendant des $p+1$ premières coordonnées.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n^X, n \leq p)] &= \mathbb{E}[F(R_n^X, n \leq p) M_p^\varphi] \\
&= \mathbb{E}[F(R_n^X, n \leq p)\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p]] \\
&\text{or} \\
\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p] &= \mathbb{E}[\varphi(S_p)(S_p - X_p) + 1 - \phi(S_p) \mid \mathcal{R}_p] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_p)(S_p - 2S_p + R_p) + 1 - \phi(S_p) \mid \mathcal{R}_p] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_p)(R_p - S_p) + 1 - \phi(S_p) \mid \mathcal{R}_p]
\end{aligned}$$

D'après le Corollaire 3.12 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p] &= \frac{1}{1+R_p}\left[\sum_{i=0}^{R_p} \varphi(i)(R_p - i) + 1 - \phi(i)\right] \\
&= \frac{1}{1+R_p}\left[\sum_{i=0}^{R_p} \varphi(i)(R_p - i) + R_p + 1 - \sum_{i=0}^{R_p}\sum_{j=0}^{i-1} \phi(j)\right]
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} \phi(j) = \sum_{i=0}^{R_p - 1} \varphi(i)(R_p - i)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_p^\varphi \mid \mathcal{R}_p] &= \frac{1}{1+R_p}\left[\sum_{i=0}^{R_p-1} \varphi(i)(R_p - i) + \varphi(R_p)(R_p - R_p) - \sum_{i=0}^{R_p-1} \varphi(i)(R_p - i) + R_p + 1\right] \\
&= \frac{R_p + 1}{R_p + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p)] = \mathbb{E}[F(R_n, n \leq p)]$$

□

5) Achevons la démonstration du Théorème 1.1 :
5.i) Montrons que $(R_n, n \geq 0)$est indépendant de S_∞ sous Q^φ.
On rappelle que $Q_0^{(k)}(\Lambda_n)$ est la limite de $\mathbb{P}(\Lambda_n \mid S_p = k)$ lorsque p tend vers l'infini et que cette limite est égale à :

$$Q_0^{(k)}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(k - X_n) \mid S_n = k] + \mathbb{E}[1_{\Lambda_n} 1_{S_n \leq k}] \tag{3.52}$$

LEMME 3.16. *La loi conditionnelle de Q^φ sachant $\{S_\infty = k\}$ ne dépend pas de φ.*

Démonstration du lemme 3.16.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} Q^{(k)}(\Lambda_n)\varphi(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(k - X_n) \mid S_n = k]\varphi(k) + \mathbb{E}[1_{\Lambda_n} 1_{S_n \leq k}]\varphi(k) \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_n)\mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(S_n - X_n) \mid S_n]] + \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\Lambda_n} 1_{S_n \leq k}\varphi(k)] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_n)(S_n - X_n)1_{\Lambda_n}] + \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\Lambda_n} 1_{S_n \leq k}\varphi(k)] \\
&= \mathbb{E}[\varphi(S_n)(S_n - X_n)1_{\Lambda_n}] + \mathbb{E}[1_{\Lambda_n}(1 - \phi(S_n)] \\
&= \mathbb{E}[(\varphi(S_n)(S_n - X_n) + (1 - \phi(S_n))\, 1_{\Lambda_n}] \\
&= \mathbb{E}[1_{\Lambda_n} M_n^\varphi] \\
&= Q^\varphi(\Lambda_n) \text{ (d'après la définition de } Q^\varphi)
\end{aligned}$$

On a donc montré :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{F}_\infty, \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(k)}(\Lambda)\varphi(k) = Q^\varphi(\Lambda). \tag{3.53}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.16, la loi de S_∞ sous Q^φ est φ d'où, $\forall \Lambda \in \mathcal{F}_\infty$:

$$Q^\varphi(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^\varphi(S_\infty = k)\mathbb{E}^Q[1_\Lambda \mid S_\infty = k] \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) Q^\varphi\left(\Lambda \mid S_\infty = k\right) \tag{3.54}$$

Donc, si l'on compare (3.53) et (3.54), on a :

$$Q^{(k)}(\Lambda) = Q^\varphi(\Lambda \mid S_\infty = k) \tag{3.55}$$

car $Q^{(k)}(.)$ et $Q^\varphi(. \mid S_\infty = k)$ ne chargent que $S_\infty = k$ (il suffit de prendre $\{\Lambda \cap S_\infty = k\}$).
On a donc bien que $Q^\varphi(. \mid S_\infty)$ ne dépend pas de φ. □

PROPOSITION 3.17. *Sous Q^φ, $(R_n, n \geq 0)$ est indépendante de S_∞.*

Démonstration de la Proposition 3.17.
Soit F une fonction dépendant des $p+1$ premières coordonnées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p) \mid S_\infty = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\mathbb{E}^{Q^{(k)}}[F(R_n, n \leq p)]
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{E}^{Q^\varphi}[F(R_n, n \leq p)] = \mathbb{E}^{Q^{(k)}}[F(R_n, n \leq p)] \tag{3.56}$$

D'après le lemme.3.16, la loi de $(R_n, n \geq 0)$ ne dépend pas de φ. Choisissant alors $\varphi = \delta_{y_0}$, sous $Q^{(y_0)}$, $(R_n, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0. Or $Q^{(y_0)}$ est la loi de Q^φ sachant que $S_\infty = y_0$ et donc on a bien que $(R_n, n \geq 0)$ est indépendante de S_∞. □

5.ii) On va maintenant démontrer les points 2.ii.a, 2.ii.b et 2.ii.c.
Les résultats précédents nous permettent de décrire le comportement de $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^φ sachant que $S_\infty = k$. On rappelle que $T_k = \inf\{n \geq 0, X_n = k\}$. Montrons que :

. $(X_n, n \leq T_k)$ est une marche aléatoire standard arrêtée lorsqu'elle atteint le niveau k

. $(k - X_{T_k+n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0

. Ces deux processus sont indépendants

Pour cela on va "reconstruire" le processus $(X_n, n \geq 0)$ à partir de $(R_n, n \geq 0)$ et $S_\infty = k$. Pour $n \leq T_k$, on sait que $R_n = 2S_n - X_n$ et pour $n \geq T_k$, sachant que $S_\infty = k$, on a que $R_n = 2k - X_n$. Donc :

$$\begin{aligned} X_n &= 2J_n - R_n \text{ pour } n \leq T_k \\ &= 2k - R_n \text{ pour } n \geq T_k \end{aligned}$$

Soit $J_k^* = \inf\{n \geq 0, J_n \geq k\}$. Montrons que $J_k^* = T_k$ dans ce cas. Si $n < J_k^*$:$X_n = 2J_n - R_n = 2S_n - R_n$. Supposons que $X_n \geq k$ et $S_m \geq k$ sur $[n, J_k^*]$, donc $J_m \geq k$ sur $[n, J_k^*]$ d'où $n = J_k^*$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\begin{aligned} X_n &= 2J_n - R_n \text{ pour } n \leq J_k^* \\ &= 2k - R_n \text{ pour } n \geq J_k^* \end{aligned}$$

Or J_k^* est un temps d'arrêt de $(R_n, J_n)_{n\geq 0}$ tel que $R_{J_k^*} = J_{J_k^*}$.
D'après la Proposition 3.12,$(R_{J_k^*+n} - R_{J_k^*}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0, indépendante de $\mathcal{F}_{T_k}$. Or :

$$2k - X_{J_k^*+n} = R_{J_k^*+n} \Longleftrightarrow k - X_{J_k^*+n} = R_{J_k^*+n} - k \tag{3.57}$$

Ce qui montre que $(k - X_{n+J_k^*}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel issue de 0 indépendante de $\mathcal{F}^X_{J_k^*}$ qui est égale à $\mathcal{F}^X_{T_k}$ sous Q^φ sachant que $S_\infty = k$. Enfin, soit f une fonction de n variables. D'après la propriété de Markov forte et la Proposition 3.17 :

$$Q^\varphi(f(S_\infty - X_{T_\infty+1}, ..., S_\infty - X_{T_\infty+n})) = \sum_{k\geq 0} Q^\varphi(f(S_{T_k} - X_{T_k+1}, ..., S_{T_k} - X_{T_k+n})\mathbb{1}_{S_\infty=k})$$

$$= \sum_{k\geq 0} Q^\varphi(f(R_{T_k} - R_{T_k+1}, ..., R_{T_k} - R_{T_k+n})\mathbb{1}_{S_\infty=k})$$

$$= \sum_{k\geq 0} Q^\varphi(f(R_{T_k} - R_{T_k+1}, ..., R_{T_k} - R_{T_k+n}) \mid S_\infty = k)Q^\varphi(S_\infty = k)$$

$$= \sum_{k\geq 0} Q^\varphi(f(R_{T_k} - R_{T_k+1}, ..., R_{T_k} - R_{T_k+n}))Q^\varphi(S_\infty = k) = \sum_{k\geq 0} Q^\varphi(f(R_1, ..., R_n))Q^\varphi(S_\infty = k)$$

$$= Q^\varphi(f(R_1, ..., R_n)) \sum_{k\geq 0} Q^\varphi(S_\infty = k) = Q^\varphi(f(R_1, ..., R_n))$$

□

4. Pénalisation par une fonction de S_{g_p}

4.1. Enoncé du résultat principal.

Nous considérons ici, une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ qui , en plus des hypothèses du chapitre précédent, satisfait la propriété suivante :

$$\sum_{k\geq 0} k\varphi(k) < \infty$$

Rappelons que pour tout $p \geq 0$, $g_p := \sup\{k \leq p, X_k = 0\}$ et $d_p := \inf\{k \geq p, X_k = 0\}$. Le résultat de cette première partie est :

THÉORÈME 4.1.

(1) (a) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]} = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n\right] \tag{4.1}$$

avec $M_n = \frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_n| + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - X_n^+\right) + 1 - \phi\left(S_n\right)$.

(b) *De plus, $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale positive, non uniformément intégrable.*

(2) *Soit la probabilité Q sur $\Omega, \mathcal{F}_\infty$ induite par :*

$$\forall n \geq 0, \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, Q\left(\Lambda_n\right) := \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M_n\right] \tag{4.2}$$

Alors sous Q on a :

(a) *Soit $g := \sup\{k \geq 0, X_k = 0\}$. Alors $Q\left(0 \leq g < \infty\right) = 1$.*

(b) *$Q\left(S_\infty = \infty\right) = \frac{1}{2}$ et conditionnellement à $S_\infty < \infty$, S_∞ admet φ comme densité.*

(c) *Le couple (S_g, γ_g) admet comme densité :*

$$f_{\gamma_g, S_g}(a,k) = \mathbb{1}_{k=0}\left(\frac{1}{2}\right)^a \varphi(0) + \mathbb{1}_{k\neq 0}\frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{2(k+1)}\right)^{a-1} - \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{a-1}\right\}\varphi(k) \tag{4.3}$$

En particulier, S_g admet φ comme densité.

(3) *Sous Q :*

(a) *$(X_n, n \leq g)$ et $(X_{g+n}, n \geq 0)$ sont deux processus indépendants.*

(b) *Avec probabilité $\frac{1}{2}$, $(X_{g+n}, n \geq 0)$ (respectivement $(-X_{g+n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.*

(c) *Sachant que $\gamma_g = a$ et $S_g = b$, le processus $(X_n, n \leq g)$ est une marche aléatoire standard arrêtée en τ_a et conditionnée à $S_{\tau_a} = b$.*

Ce que nous appelons ici une chaîne de Bessel* de dimension 3, est la chaîne de Markov $(\tilde{R}_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie par les probabilités de passage suivantes :
.$\mathbb{P}_0(\tilde{R}_1 = 1) = 1$
.Si $x \geq 1$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x+1 \mid \tilde{R}_n = x) &= \frac{1}{2}\frac{x+1}{x} \\ \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x-1 \mid \tilde{R}_n = x) &= \frac{1}{2}\frac{x-1}{x} \end{cases}$$

On peut remarquer que cette marche est très proche de la marche de Bessel de dimension 3 définie pp.25 : il suffit de décaler l'une des marches d'un pas pour obtenir l'autre :

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x+1 \mid \tilde{R}_n = x) = \mathbb{P}(R_{n+1} = x+2 \mid R_n = x+1) \tag{4.4}$$
$$\mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x-1 \mid \tilde{R}_n = x) = \mathbb{P}(R_{n+1} = x \mid R_n = x+1) \tag{4.5}$$

4.2. Démonstration du Théorème 4.1.

1.i) Démontrons tout d'abord (4.1). Nous avons besoin des deux résultats suivants :

LEMME 4.2. *Pour tout $x \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}\left(S_{g_n} = x\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.6}$$

LEMME 4.3. *Pour $a < 0$:*

$$\mathbb{P}\left(S_{T_a} = c\right) = -\frac{a}{(c+1-a)(c-a)} \tag{4.7}$$

Démonstration du lemme 4.2.

Nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P}\left(S_{g_n} < x\right) = \mathbb{P}\left(g_n < T_x\right) = \mathbb{P}\left(n < d_{T_x}\right)$$

et, puisque :

$$d_{T_x} = T_x + T_0.\theta_{T_x}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{g_n} < x\right) &= \mathbb{P}\left(n < T_x + T_0.\theta_{T_x}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T_x + T_{x'} > n\right), \text{ où } T'_x \text{ et } T_x \text{ sont i.i.d.} \\
&= \mathbb{P}\left(T_{2x} > n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(S_n < 2x\right)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{g_n} = x\right) &= \mathbb{P}\left(S_{g_n} < x+1\right) - \mathbb{P}\left(S_{g_n} < x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(S_n < 2x+2\right) - \mathbb{P}\left(S_n < 2x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(S_n = 2x+1\right) + \mathbb{P}\left(S_n = 2x\right)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.6 :

$$\mathbb{P}\left(S_n = x\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui entraîne :

$$\mathbb{P}\left(S_{g_n} = x\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

Démonstration du lemme 4.3.

Résolvant le système suivant :

$$\begin{cases}
\mathbb{E}\left[X_{T_a \wedge T_c}\right] = a\mathbb{P}\left(T_a < T_c\right) + c\mathbb{P}\left(T_a > T_c\right) &= 1 \\
\mathbb{P}\left(T_a < T_c\right) + \mathbb{P}\left(T_a > T_c\right) &= 1
\end{cases}$$

on obtient :

$$\mathbb{P}\left(T_a < T_c\right) = \frac{c}{c-a}$$

Et comme :

$$\mathbb{P}\left(S_{T_a} < c\right) = \mathbb{P}\left(T_a < T_c\right)$$

nous obtenons facilement :

$$\mathbb{P}\left(S_{T_a} = c\right) = -\frac{a}{(c-a)(c+1-a)}$$

□

Remarquons que pour toute fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ de somme finie :

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{g_p}\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0} \psi(k) \tag{4.8}$$

En effet, pour tout k :

$$\left(\frac{p\pi}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left(S_{g_p} = k\right) = \left(\frac{p\pi}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{P}\left(S_p = 2k+1\right) + \mathbb{P}\left(S_p = 2k\right)\right) \leq 2\left(\frac{p\pi}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left(S_p = 0\right) \leq 2$$

pour p assez grand d'après le lemme 4.2. Comme ψ est de somme finie, d'après le Théorème de Lebesgue :

$$\begin{aligned}\left(\frac{p\pi}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\psi\left(S_{g_p}\right)\right] &= \left(\frac{p\pi}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(S_{g_p} = k\right)\psi(k) \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{k\geq 0} \psi(k)\end{aligned}$$

Nous nous intéressons dorénavant au comportement, quand p tend vers l'infini, de :

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]} = \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]}$$

D'après (4.8), il est clair que :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.9}$$

Nous découpons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\mathbb{1}_{g_p<n} \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\mathbb{1}_{g_p\geq n} \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &:= (1) + (2)\end{aligned}$$

a) Commençons par étudier le comportement lorsque $p \to \infty$ de (1).

$$\begin{aligned}(1) &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)\mathbb{1}_{g_p<n} \mid \mathcal{F}_n\right] \quad \text{, car si } g_p < n,\ g_p = g_n \\ &= \varphi\left(S_{g_n}\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{g_p<n} \mid \mathcal{F}_n\right]\end{aligned}$$

Posons $\left(\tilde{X}_p = X_{n+p} - X_n, n \geq 0\right)$ et $\tilde{T}_0$, le temps d'atteinte de 0 associé à cette marche. Alors grâce à la propriété de Markov et l'indépendance de $\left(\tilde{X}_p, p \geq 0\right)$ et $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(g_p < n \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{P}\left(p < d_n \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(n + T_0.\theta_n > p \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= \mathbb{P}_{|X_n|}\left(\tilde{T}_0 > p - n\right) \\ &= \mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_{|X_n|} > p - n\right)\end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 3.6 :

$$\mathbb{P}_0\left(T_x > p\right) = \mathbb{P}_0\left(S_p < x\right) \underset{n\to\infty}{\sim} x\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.10}$$

et par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(g_p < n \mid \mathcal{F}_n\right) \underset{n\to\infty}{\sim} |X_n|\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

Ce qui implique :

$$(1) \underset{n\to\infty}{\sim} \varphi\left(S_{g_n}\right)|X_n|\left(\frac{2}{\pi p)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

b) Etudions maintenant le comportement de (2).

$$\begin{aligned}(2) &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_n \vee S_{[n,g_p]}\right)\mathbb{1}_{g_p\geq n} \mid \mathcal{F}_n\right] \quad \text{, où } S_{[n,g_p]} = \sup_{n\leq u\leq g_p} X_u \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(S_n \vee \left(X_n + \tilde{S}_{\tilde{g}_{p-n}^{-X_n}}\right)\right)\mathbb{1}_{\tilde{T}_{-X_n}\leq p-n}\right] \quad \text{, où } g_p^a = \sup\left\{k\leq p, X_k = a\right\}\end{aligned}$$

Encore une fois, les variables "tildées" concernent la marche aléatoire $\left(\tilde{X}_p, p\geq 0\right)$, définie plus haut, qui est issue de X_n et indépendante de $\mathcal{F}_n$. Nous devons donc estimer une quantité de la forme :

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{g_p^a}\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] \tag{4.13}$$

lorsque p tend vers l'infini.

Supposons tout d'abord que $a<0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{g_p^a}\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] &= \mathbb{E}\left[\psi\left(S_{T_a}\vee\left(a+\tilde{S}_{g_{p-T_a}}\right)\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] \\ &= \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{g_{p-T_a}} = k\right)\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{T_a}\vee(a+k)\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right]\end{aligned}$$

D'après (4.8) :

$$\begin{aligned}E\left[\psi\left(S_{g_p^a}\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] &\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}E\left[\psi\left(S_{T_a}\vee(a+k)\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}A(k)\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} A(k) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0}\psi\left(S_{T_a}\vee(a+k)\right)\right] \\
&= \sum_{k'\geq 0}\mathbb{P}\left(S_{T_a}=k'\right)\sum_{k\geq 0}\psi\left(k'\vee(a+k)\right) \\
&= \sum_{k'\geq 0}\mathbb{P}\left(S_{T_a}=k'\right)\sum_{k\geq a}\psi\left(k'\vee k\right) \\
&= \sum_{k'\geq 0}\mathbb{P}\left(S_{T_a}=k'\right)\left[-a\psi(k')+\sum_{k\geq 0}\psi\left(k'\vee k\right)\right] \\
&= \sum_{k'\geq 0}\mathbb{P}\left(S_{T_a}=k'\right)\left[-a\psi(k')+\sum_{k=0}^{k'-1}\psi(k')+\sum_{k=k'}^{\infty}\psi(k)\right] \\
&= \sum_{k'\geq 0}-\frac{a}{(k'+1-a)(k'-a)}\left[\left(-a+k'\right)\psi(k')+\sum_{k=k'}^{\infty}\psi(k)\right] \\
&= \sum_{k'\geq 0}-\frac{a\left(-a+k'\right)}{(k'+1-a)(k'-a)}\psi(k')+\sum_{k'\geq 0}-\frac{a}{(k'+1-a)(k'-a)}\sum_{k=k'}^{\infty}\psi(k) \\
&= \sum_{k'\geq 0}\frac{a}{(k'+1-a)}\psi(k')+\sum_{k\geq 0}\psi(k)\sum_{k'=0}^{k}-\frac{a}{(k'+1-a)(k'-a)} \\
&= \sum_{k'\geq 0}\frac{a}{(k'+1-a)}\psi(k')+\sum_{k\geq 0}\psi(k)\sum_{k'=1}^{k+1}-\frac{a}{(k'-1-a)(k'-a)} \\
&= (3)+(4)
\end{aligned}$$

D'après [**GR80**] p.3 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(p+(k-1)\,q\right)\left(p+kq\right)}=\frac{n}{p\left(p+nq\right)} \tag{4.14}$$

Cette formule appliquée à (4), avec $p=-a$, $q=1$ et $n=k+1$, donne :

$$(4)=-a\sum_{k\geq 0}\psi(k)\frac{k+1}{-a\left(-a+k+1\right)}=\sum_{k\geq 0}\psi(k)\frac{k+1}{-a+k+1} \tag{4.15}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} A(k) &= \sum_{k'\geq 0}\frac{a}{(k'+1-a)}\psi(k')+\sum_{k\geq 0}\psi(k)\frac{k+1}{-a+k+1} \\
&= \sum_{k\geq 0}\left[\frac{a}{(k+1-a)}+\frac{k+1}{-a+k+1}\right]\psi(k) \\
&= \sum_{k\geq 0}\psi(k)
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{g_p^a}\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right]\underset{p\to\infty}{\sim}2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}\psi(k) \tag{4.16}$$

Supposons maintenant que $a \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{g_p^a}\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] &= \mathbb{E}\left[\psi\left(a+S_{g_p^a-T_a}\right)\mathbb{1}_{T_a\leq p}\right] \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\left(S_{g_p^a-T_a}=k\right)\psi\left(a+k\right) \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}\psi(a+k)
\end{aligned}$$

Le raisonnement précédent appliqué avec $\psi(k)=\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+k\right)\right)$ et $a=-X_n$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{k\geq 0}\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+k\right)\right)+\mathbb{1}_{X_n\leq 0}\sum_{k\geq 0}\varphi\left(S_n\vee k\right)\right] \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\left\{\sum_{k\geq 0}^{S_n-X_n-1}\varphi\left(S_n\right)+\sum_{k=S_n-X_n}^{\infty}\varphi\left(k+X_n\right)\right\} \\
&+ \quad 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n\leq 0}\left\{\sum_{k\geq 0}^{S_n-1}\varphi\left(S_n\right)+\sum_{k=S_n}^{\infty}\varphi\left(k\right)\right\} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\left\{\left(S_n-X_n\right)\varphi\left(S_n\right)+\sum_{k=S_n}^{\infty}\varphi\left(k\right)\right\}+\mathbb{1}_{X_n\leq 0}\left\{S_n\varphi\left(S_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right\}\right] \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(S_n-X_n^+\right)\varphi\left(S_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right] \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Des formules (4.9), (4.12) et (4.17), nous déduisons :

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_p}\right)\right]}=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\left\{\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left|X_n\right|+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n^+\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right\}\right] \qquad (4.18)$$

ii) Montrons maintenant que $(M_n, n\geq 0)$ est bien une $\mathcal{F}_n$-martingale sous $\mathbb{P}$. Pour simplifier les calculs, nous découpons en 4 cas :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{|X_n|\geq 2}+\mathbb{1}_{X_n=1}+\mathbb{1}_{X_n=-1}+\mathbb{1}_{X_n=0}\right)M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right] \\
&:= \mathbb{E}\left[(1)+(2)+(3)+(4)\mid\mathcal{F}_n\right]
\end{aligned}$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{1}_{|X_n|\geq 2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{n+1}}\right)|X_{n+1}| + \varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1}-X_{n+1}^{+}\right)+1-\phi\left(S_{n+1}\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_{n+1}| + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_{n+1}^{+}\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_{n+1}| + \varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1}-X_{n+1}^{+}\right)+1-\phi\left(S_{n+1}\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_{n+1}| + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-0\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-\left(X_n+1\right)^{+}\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right)| + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-\left(X_n-1\right)^{+}\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n+1\right)\left(S_n+1-\left(X_n+1\right)^{+}\right)+1-\phi\left(S_n+1\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-\left(X_n-1\right)^{+}\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n-1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n+1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n+1\right)\left(S_n-X_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n+1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n-1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n+1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + 1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\mathbb{1}_{X_n+1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\mathbb{1}_{X_n-1=X_{n+1}}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(1) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n-1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n+1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right)+1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right)+\varphi\left(S_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n+1\right)+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left(X_n-1\right)+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)X_n+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)X_n+1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)X_n+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left|X_n\right|+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n^+\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left|X_n\right|+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n^+\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\leq -2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)\left|X_n\right|+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n^+\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{|X_n|\geq 2}M_n
\end{aligned}$$

Considérons maintenant (2) :

$$\begin{aligned}
(2) &= \mathbb{1}_{X_n=1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{n+1}}\right)\left|X_{n+1}\right|+\varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1}-X_{n+1}^+\right)+1-\phi\left(S_{n+1}\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)2+\varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1}-X_n-1\right)+1-\phi\left(S_{n+1}\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{n+1}}\right)\times 0+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n-1\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+\varphi\left(S_n+1\right)\left(S_n+1-X_n-1\right)+1-\phi\left(S_n+1\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)-\varphi\left(S_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)\right]\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]
\end{aligned}$$

Conditionnant par $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(2) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{X_n=1}\frac{1}{2}\mathbb{1}_{S_n\geq X_n-1}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)-\varphi\left(S_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\frac{1}{2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(S_{g_n}\right)+1-\phi\left(S_n\right)-\varphi\left(S_n\right)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)+1-\phi\left(S_n\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)S_n-\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)+1-\phi\left(S_n\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)S_n-\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)X_n\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_n|+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n^+\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}M_n
\end{aligned}$$

En remarquant que si $X_{n+1}=0$, $S_{n+1}=S_n$, nous effectuons un raisonnement semblable pour le troisième terme (3) :

$$\begin{aligned}
(3) &= \mathbb{1}_{X_n=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{n+1}}\right)|X_{n+1}|+\varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1}-X_{n+1}^+\right)+1-\phi\left(S_{n+1}\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{n+1}}\right)\times 0+\varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1}-0\right)+1-\phi\left(S_{n+1}\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)(-2)+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-0\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)(-2)+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right]
\end{aligned}$$

Conditionnant par $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(3)|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{X_n=-1}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)(-2)+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)(-1)+\varphi\left(S_n\right)S_n+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_n|+\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n^+\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=-1}M_n
\end{aligned}$$

Enfin, traitons le terme (4) :

$$\begin{aligned}
(4) &= \mathbb{1}_{X_n=0}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{n+1}}\right)|X_{n+1}| + \varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1} - X_{n+1}^{+}\right) + 1 - \phi\left(S_{n+1}\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_{n+1}\right)\left(S_{n+1} - 1\right) + 1 - \phi\left(S_{n+1}\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\mathbb{1}_{S_n-1\geq X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n+1\right)\left(S_n+1-1\right) + 1 - \phi\left(S_n+1\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\mathbb{1}_{S_n-1\geq X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n+1\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right) - \varphi\left(S_n\right)\right], \text{ ici } S_n = 0 \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\mathbb{1}_{S_n-1\geq X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=1}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right) - \varphi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=-1}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right)\right]
\end{aligned}$$

En conditionnant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(4) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{X_n=0}\frac{1}{2}\mathbb{1}_{S_n-1\geq X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\frac{1}{2}\mathbb{1}_{S_n=X_n}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right) - \varphi\left(S_n\right)\right] \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=0}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)\right], \text{ or } X_n = 0 \text{ implique que } g_n = n \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right) + \varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left[\varphi\left(S_n\right)S_n + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left[\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_n}\right)|X_n| + \varphi\left(S_n\right)\left(S_n - X_n^{+}\right) + 1 - \phi\left(S_n\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}M_n
\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[(1)+(2)+(3)+(4) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{|X_n|\geq 2} + \mathbb{1}_{X_n=1} + \mathbb{1}_{X_n=-1} + \mathbb{1}_{X_n=0}\right] M_n \\ &= M_n\end{aligned}$$

2.i) Montrons que $Q\left(S_\infty\right) = \frac{1}{2}$.
D'après le Théorème d'arrêt :

$$\begin{aligned}Q\left(S_n > p\right) &= Q\left(T_p < n\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_p<n}\left\{\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{T_p}}\right)p + 1 - \phi\left(p\right)\right\}\right]\end{aligned}$$

D'où, faisant tendre n vers l'infini et en utilisant le fait que sous $\mathbb{P}$, $S_{g_{T_p}}$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0,...,p-1\}$ (cf.[**LeG85** p.457-458) :

$$\begin{aligned}Q\left(S_\infty > p\right) &= \lim_{n\to\infty} Q\left(S_n > p\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{T_p}}\right)p + 1 - \phi\left(p\right)\right\}\right] \\ &= \frac{p}{2}\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_{T_p}}\right)\right] + 1 - \phi\left(p\right) \\ &= \frac{p}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{p}\varphi(k) + 1 - \phi(p) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\varphi(k) + 1 - \phi(p)\end{aligned}$$

Et lorsque $p \to \infty$:

$$\begin{aligned}Q\left(S_\infty = \infty\right) &= \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\varphi(k) + 1 - \phi(p) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.ii) Démontrons que g est fini Q-p.s. Pour cela on a besoin, pour $p > 0$, de la loi sous $\mathbb{P}$ de S_{d_p} conditionnellement à $\mathcal{F}_p$.

LEMME 4.4. *Soit une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ de somme finie. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{d_p}\right) \mid \mathcal{F}_p\right] = \mathbb{1}_{S_p=0}\psi(0) + \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\left\{\psi\left(S_p\right)\left(1 - \frac{X_p^+}{S_p}\right) + X_p^+\sum_{k\geq S_p}\frac{\psi(k)}{k(k+1)}\right\} \tag{4.19}$$

Démonstration du lemme 4.4.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{d_p}\right) \mid \mathcal{F}_p\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{\mathbb{1}_{S_p=0} + \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\right\}\psi\left(S_{d_p}\right) \mid \mathcal{F}_p\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p=0}\psi\left(S_{d_p}\right) \mid \mathcal{F}_p\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\psi\left(S_{d_p}\right) \mid \mathcal{F}_p\right] \\ &= (1)+(2)\end{aligned}$$

Il est évident que :

$$(1) = \mathbb{1}_{S_p=0}\psi(0) \tag{4.20}$$

Etudions donc le deuxième terme :

$$\begin{aligned}(2) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\left\{\mathbb{1}_{X_p\leq 0}+\mathbb{1}_{X_p>0}\right\}\psi\left(S_{d_p}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\left\{\mathbb{1}_{X_p\leq 0}+\mathbb{1}_{X_p>0}\right\}\psi\left(S_p\vee S_{\{p,\dots,d_p\}}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}1_{X_p\leq 0}\psi\left(S_p\vee S_{\{p,\dots,d_p\}}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\psi\left(S_p\vee S_{\{p,\dots,d_p\}}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\\ &= (3)+(4)\end{aligned}$$

Il est clair que pour $X_p\leq 0$, le maximum entre p et d_p est nulle (la marche est toujours en dessous de 0 avant d_p). Par conséquent :

$$(3)=\mathbb{1}_{S_p\neq 0}1_{X_p\leq 0}\psi\left(S_p\right)=\mathbb{1}_{S_p\neq 0}1_{X_p\leq 0}\left\{\psi\left(S_p\right)\left(1-\frac{X_p^+}{S_p}\right)+X_p^+\sum_{k\geq S_p}\frac{\psi(k)}{k(k+1)}\right\}. \tag{4.21}$$

Il s'ensuit qu'il suffit d'étudier le terme (4) :

$$\begin{aligned}(4) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\psi\left(S_{d_p}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\\ &= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\mathbb{E}\left[\psi\left(S_p\vee\left\{X_p+\sup_{0\leq q\leq d_p}\left\{X_q-X_p\right\}\right\}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\\ &= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\mathbb{E}\left[\psi\left(S_p\vee\left\{X_p+\sup_{0\leq q\leq d_p-p}\left\{X_{q+p}-X_p\right\}\right\}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\end{aligned}$$

Posons $\left(\tilde{X}_q:=X_{q+p}-X_p, q\geq 0\right)$. Cette chaîne est une marche aléatoire issue de 0 et indépendante de $\mathcal{F}_p$. De plus, d_p est le premier instant où la chaîne $\left(\tilde{X}_q, q\geq 0\right)$ atteint le niveau $-X_p$. Par conséquent :

$$\tilde{S}_{T_{-X_p}}:=\sup_{0\leq q\leq\tilde{T}_{-X_p}}\tilde{X}_q=\sup_{0\leq q\leq d_p-p}\left\{X_{q+p}-X_p\right\}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
(4) &= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\mathbb{E}\left[\psi\left(S_p\vee\left\{X_p+\tilde{S}_{T_{-X_p}}\right\}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\mathbb{E}\left[\psi\left(S_p\vee\left\{X_p+\tilde{S}_{\tilde{T}_{-X_p}}\right\}\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\mathbb{E}_{X_p}\left[\psi\left(S_p\vee\tilde{S}_{\tilde{T}_0}\right)\right]\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\sum_{k\geq X_p}\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0}=k\right)\psi\left(S_p\vee\tilde{k}\right)\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\left\{\sum_{k=X_p}^{S_p-1}\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0}=k\right)\psi\left(S_p\right)+\sum_{k\geq S_p}^{\infty}\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0}=k\right)\psi\left(k\right)\right\}\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\left\{\sum_{k=X_p}^{S_p-1}\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0}=k\right)\psi\left(S_p\right)+\sum_{k\geq S_p}^{\infty}\mathbb{P}_{0}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_{-X_p}}=k-X_p\right)\psi\left(k\right)\right\}\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\left\{\sum_{k=X_p}^{S_p-1}\frac{X_p}{k(k+1)}\psi\left(S_p\right)+\sum_{k\geq S_p}^{\infty}\frac{X_p}{k(k+1)}\psi\left(k\right)\right\}\text{, d'après le lemme 4.3}\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\left\{\left(\frac{1}{X_p}-\frac{1}{S_p}\right)X_p\psi\left(S_p\right)+\sum_{k\geq S_p}^{\infty}\frac{X_p}{k(k+1)}\psi\left(k\right)\right\}\\
&= \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\mathbb{1}_{X_p>0}\left\{\left(1-\frac{X_p}{S_p}\right)\psi\left(S_p\right)+\sum_{k\geq S_p}^{\infty}\frac{X_p}{k(k+1)}\psi\left(k\right)\right\}
\end{aligned}$$

D'où :

$$(1)+(3)+(4)=\mathbb{1}_{S_p=0}\psi(0)+\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\left\{\psi\left(S_p\right)\left(1-\frac{X_p^+}{S_p}\right)+X_p^+\sum_{k\geq S_p}\frac{\psi(k)}{k(k+1)}\right\}\tag{4.22}$$

□

Nous disposons maintenant des outils nécessaires pour démontrer que g est bien fini Q-p.s. Soit $a>0$:

$$\begin{aligned}
Q\left(g_p\geq a\right) &= Q\left(d_a\leq p\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{d_a\leq p}M_{d_a}\right]\text{, d'après le Théorème d'arrêt}\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{d_a\leq p}\left\{\frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{d_a}}\right)\left|X_{d_a}\right|+\varphi\left(S_{d_a}\right)\left(S_{d_a}-X_{d_a}^+\right)+1-\phi\left(S_{d_a}\right)\right\}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{d_a\leq p}\left\{\varphi\left(S_{d_a}\right)S_{d_a}+1-\phi\left(S_{d_a}\right)\right\}\right]
\end{aligned}$$

Passant à la limite quand p tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
Q\left(g_\infty\geq a\right) &= \lim_{p\to\infty}Q\left(g_p\geq a\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{d_a}\right)S_{d_a}+1-\phi\left(S_{d_a}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{d_a}\right)S_{d_a}\right]+\mathbb{E}\left[1-\phi\left(S_{d_a}\right)\right]\\
&= (5)+(6)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que chaque terme tend vers 0 lorsque $a\to\infty$.
D'après le Théorème de convergence dominé :

$$(6)=\mathbb{E}\left[1-\phi\left(S_{d_a}\right)\right]\underset{a\to\infty}{\to}0$$

Utilisant le lemme 4.4 avec $\psi(x) := x\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{d_a}\varphi\left(S_{d_a}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[S_{d_a}\varphi\left(S_{d_a}\right) \mid \mathcal{F}_a\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_a=0} \times 0\varphi(0) + \mathbb{1}_{S_a\neq 0} S_a\varphi\left(S_a\right)\left(1 - \frac{X_a^+}{S_a}\right) + X_a^+ \sum_{k\geq S_a} \frac{k\varphi(k)}{k(k+1)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_a\neq 0}\varphi\left(S_a\right)\left(S_a - X_a^+\right) + X_a^+ \sum_{k\geq S_a} \frac{\varphi(k)}{k+1}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_a\neq 0}\varphi\left(S_a\right) S_a + \frac{X_a^+}{S_a+1} \sum_{k\geq S_a} \varphi(k)\right] \text{ il est clair que } \tfrac{X_a^+}{S_a+1} \leq 1 \\
&\leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_a\right) S_a + 1 - \phi\left(S_a\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_a\right) S_a\right] + \mathbb{E}\left[1 - \phi\left(S_a\right)\right]
\end{aligned}$$

D'une part, d'après le Théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{E}\left[1 - \phi\left(S_a\right)\right] \underset{a\to\infty}{\to} 0$$

D'autre part pour a assez grand, d'après le lemme 3.6 :

$$\left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left(S_a = k\right) \leq \left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left(S_a = 0\right) \leq 2$$

et comme par hypothèse $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)k < \infty$, d'après le Théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_a\right) S_a\right] &= \left(\frac{a\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_a = k\right)\varphi(k)k \\
&\underset{a\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)k
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_a\right) S_a\right] \underset{a\to\infty}{\to} 0 \tag{4.23}$$

Nous avons donc montré que :

$$Q\left(g = \infty\right) = \lim_{a\to\infty} Q\left(g > a\right) = 0 \tag{4.24}$$

2.ii) Montrons maintenant les points 2.ii, 3.i, 3.ii et 3.iii.
Rappelons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_n &:= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}} \\
\tau_a &:= \inf\left\{p \geq 0, \gamma_p = a\right\}
\end{aligned}$$

Tout d'abord, établissons les deux résultats suivants :

Lemme 4.5. *Pour tout $c > 0$, $a \geq 1$:*

$$\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = c\right) = \left(1 - \frac{1}{2(c+1)}\right)^{a-1} - \left(1 - \frac{1}{2c}\right)^{a-1} \tag{4.25}$$

Si $c = 0$ et $a \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = 0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} \tag{4.26}$$

LEMME 4.6. *Pour tout $n \geq 0$:*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left[k\varphi(k) + 1 - \phi(k)\right] = \frac{1}{n}\left(1 - \phi(n)\right) \tag{4.27}$$

Démonstration du lemme 4.5.
Si $c = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = 0\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 = -1\right)\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = 0 \mid X_1 = -1\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(S_{\tau_{a-1}} = 0\right), \text{ en faisant une récurrence évidente} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $c > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} < c\right) = \mathbb{P}\left(\tau_a < T_c\right) = \mathbb{P}\left(a < \gamma_{T_c}\right) \tag{4.28}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\gamma_{T_c} = k\right) &= \mathbb{P}\left(\tau_k < T_c < \tau_{k+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_k < T_c\right)\mathbb{P}\left(\tau_{k+1} > T_c \mid \tau_k < T_c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_1 < T_c, \tau_2 < T_c, ..., \tau_k < T_c\right)\mathbb{P}\left(\tau_{k+1} > T_c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c\right)\mathbb{P}\left(\tau_3 < T_c, ..., \tau_k < T_c \mid \tau_2 < T_c\right)\mathbb{P}\left(\tau_{k+1} > T_c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c\right)^{k-1}\mathbb{P}\left(\tau_2 > T_c\right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Nous nous intéressons donc à $\mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 = 1, \tau_2 < T_c\right) + \mathbb{P}\left(X_1 = -1, \tau_2 < T_c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right)\mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c \mid X_1 = 1\right) + \mathbb{P}\left(X_1 = -1\right)\mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c \mid X_1 = -1\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1\left(T_0 < T_c\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}\left(T_0 > T_c\right), \text{ or } \mathbb{P}_{-1}\left(T_0 > T_c\right) = 1 \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1\left(T_0 < T_c\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mais nous avons déjà vu :

$$\mathbb{P}_1\left(T_c < T_0\right) = \frac{1}{c} \tag{4.30}$$

et donc :

$$\mathbb{P}\left(\tau_2 < T_c\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2c} \tag{4.31}$$

Reprenant (4.29) :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_{T_c} = k\right) = \left(1 - \frac{1}{2c}\right)^{k-1}\frac{1}{2c}, \tag{4.32}$$

ce qui montre que γ_{T_c} suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2c}$.
Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = c\right) &= \mathbb{P}\left(S_{\tau_a} < c\right) - \mathbb{P}\left(S_{\tau_a} < c + 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\gamma_{T_{c+1}} \geq a\right) - \mathbb{P}\left(\gamma_{T_c} \geq a\right) \\
&= \sum_{k \geq a}\left(1 - \frac{1}{2(c+1)}\right)^{k-1}\frac{1}{2(c+1)} - \left(1 - \frac{1}{2c}\right)^{k-1}\frac{1}{2c} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2(c+1)}\right)^{a-1} - \left(1 - \frac{1}{2c}\right)^{a-1}
\end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme 4.6.
Nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left[k\varphi(k) + 1 - \phi(k)\right] = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k+1}\varphi(k) + \sum_{l=k}^{\infty} \frac{\varphi(l)}{k(k+1)}$$

Si $k' \geq k$, alors le coefficient de $\varphi(k')$ est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k'+1} + \sum_{l=n}^{k'} \frac{1}{l(l+1)} &= \frac{1}{k+1} + \sum_{l=n}^{k} \frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left[k\varphi(k) + 1 - \phi(k)\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(k)$$

□

Soient F une fonctionnelle, f_1 et f_2 des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[F\left(X_u, u \leq g\right) f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S_g\right)\right] &= \sum_{a\geq 0} \mathbb{E}^Q \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \mathbb{1}_{\tau_a<\infty} \mathbb{1}_{\tau_{a+1}=\infty}\right] \\ &= \sum_{a\geq 0} \mathbb{E}^Q \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \mathbb{1}_{\tau_a<\infty}\right] \\ &- \mathbb{E}^Q \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \mathbb{1}_{\tau_{a+1}<\infty}\right] \\ &= \sum_{a\geq 0} \mathbb{E} \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \mathbb{1}_{\tau_a<\infty} M_{\tau_a}\right] \\ &- \mathbb{E} \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \mathbb{1}_{\tau_{a+1}<\infty} M_{\tau_{a+1}}\right] \\ &= \sum_{a\geq 0} \mathbb{E} \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \left(M_{\tau_a} - M_{\tau_{a+1}}\right)\right] \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} M_{\tau_a} - M_{\tau_{a+1}} &= \frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{\tau_a}}\right) \left|X_{\tau_a}\right| + \varphi\left(S_{\tau_a}\right) \left(S_{\tau_a} - X^+_{\tau_a}\right) + 1 - \phi\left(S_{\tau_a}\right) \\ &- \frac{1}{2}\varphi\left(S_{g_{\tau_{a+1}}}\right) \left|X_{\tau_{a+1}}\right| + \varphi\left(S_{\tau_{a+1}}\right) \left(S_{\tau_{a+1}} - X^+_{\tau_{a+1}}\right) - 1 + \phi\left(S_{\tau_{a+1}}\right) \\ &= \varphi\left(S_{\tau_a}\right) S_{\tau_a} + 1 - \phi\left(S_{\tau_a}\right) - \varphi\left(S_{\tau_{a+1}}\right) S_{\tau_{a+1}} - 1 + \phi\left(S_{\tau_{a+1}}\right) \end{aligned}$$

Posons :

$$\left(\tilde{X}_n = X_{n+\tau_a}, n \geq 0\right) \tag{4.33}$$

qui est une marche aléatoire standard issue de 0 et indépendante de $\mathcal{F}_{\tau_a}$. Si $\tilde{S}$ et $\tilde{\tau}_1$ désignent respectivement le supremum unilatère et le temps de premier retour en 0 de la marche $\tilde{X}$, alors :

$$M_{\tau_a} - M_{\tau_{a+1}} = \varphi\left(S_{\tau_a}\right) S_{\tau_a} + 1 - \phi\left(S_{\tau_a}\right) - \varphi\left(S_{\tau_a} \vee \tilde{S}_{\tilde{\tau}_1}\right) S_{\tau_a} \vee \tilde{S}_{\tilde{\tau}_1} - 1 + \phi\left(S_{\tau_a} \vee \tilde{S}_{\tilde{\tau}_1}\right) \tag{4.34}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q \left[F\left(X_u, u \leq g\right) f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S_g\right)\right] \sum_{a\geq 0} \mathbb{E} \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \left(\varphi\left(S_{\tau_a}\right) S_{\tau_a} + 1 - \phi\left(S_{\tau_a}\right)\right)\right] \\ &- \mathbb{E} \left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right) f_2\left(S_{\tau_a}\right) \left(\varphi\left(S_{\tau_a} \vee \tilde{S}_{\tilde{\tau}_1}\right) S_{\tau_a} \vee \tilde{S}_{\tilde{\tau}_1} - 1 + \phi\left(S_{\tau_a} \vee \tilde{S}_{\tilde{\tau}_1}\right)\right)\right] \\ &= \sum_{a\geq 0} A(a) - B(a) \end{aligned}$$

Conditionnant $B(a)$ par $\mathcal{F}_{\tau_a}$, nous avons à calculer une quantité de la forme $\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{\tau_1}\right)\right]$. Nous utilisons le résultat du Lemme 4.6 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\psi\left(S_{\tau_1}\right)\right] &= \mathbb{P}\left(S_{\tau_1}=0\right)\psi(0)+\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\left(S_{\tau_1}=k\right)\psi(k)\\
&= \frac{1}{2}\psi(0)+\sum_{k\geq 1}\left\{\left(1-\frac{1}{2(k+1)}\right)-\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right\}\psi(k)\\
&= \frac{1}{2}\psi(0)+\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\psi(k)
\end{aligned}$$

Avec ψ bien choisi et en posant $C(a)=F\left(X_u,u\leq\tau_a\right)f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right)f_2\left(S_{\tau_a}\right)$ pour alléger les formules :

$$\begin{aligned}
B(a) &= \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(S_{\tau_a}\right)S_{\tau_a}+1-\phi\left(S_{\tau_a}\right)\right\}\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\left\{\sum_{k\geq 1}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\left(\varphi\left(S_{\tau_a}\wedge k\right)S_{\tau_a}\wedge k-1+\phi\left(S_{\tau_a}\wedge k\right)\right)\right\}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(S_{\tau_a}\right)S_{\tau_a}+1-\phi\left(S_{\tau_a}\right)\right\}\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}^{S_{\tau_a}-1}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\left(\varphi\left(S_{\tau_a}\right)S_{\tau_a}-1+\phi\left(S_{\tau_a}\right)\right)\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\sum_{k=S_{\tau_a}}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\}\left(\varphi\left(k\right)k-1+\phi\left(k\right)\right)\right], \text{ d'après le lemme 4.6}\\
&= \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\left\{\varphi\left(S_{\tau_a}\right)S_{\tau_a}+1-\phi\left(S_{\tau_a}\right)\right\}\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[C(a)\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{S_{\tau_a}}\right)\left\{\varphi\left(S_{\tau_a}\right)S_{\tau_a}+1-\phi\left(S_{\tau_a}\right)\right\}+\frac{1}{S_{\tau_a}}\left(1-\phi\left(S_{\tau_a}\right)\right)\right\}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[C(a)\left\{\varphi\left(S_{\tau_a}\right)S_{\tau_a}+1-\phi\left(S_{\tau_a}\right)-\frac{1}{2}\varphi\left(S_{\tau_a}\right)\right\}\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left[F\left(X_u,u\leq g\right)f_1\left(\gamma_g\right)f_2\left(S_g\right)\right] &= \sum_{a\geq 0}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[F\left(X_u,u\leq\tau_a\right)f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right)f_2\left(S_{\tau_a}\right)\varphi\left(S_{\tau_a}\right)\right]\\
&= \sum_{a\geq 1}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[F\left(X_u,u\leq\tau_a\right)f_1\left(a\right)f_2\left(S_{\tau_a}\right)\varphi\left(S_{\tau_a}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{a\geq 1}\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\left(S_{\tau_a}=k\right)f_1(a)f_2(k)\varphi(k)\\
&= \sum_{a\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^a f_1(a)f_2(0)\varphi(0)\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{a\geq 1}\sum_{k\geq 1}\left\{\left(1-\frac{1}{2(k+1)}\right)^{a-1}-\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{a-1}\right\}f_1(a)f_2(k)\varphi(k)
\end{aligned}$$

En prenant $F\equiv 1$, la densité du couple (γ_g,S_g) est :

$$f_{\gamma_g,S_g}(a,k)=\mathbb{1}_{k=0}\left(\frac{1}{2}\right)^a\varphi(0)+\mathbb{1}_{k\neq 0}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2(k+1)}\right)^{a-1}-\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{a-1}\right\}\varphi(k) \quad (4.35)$$

La loi de S_g sous Q est donc :

$$\begin{aligned}
Q(S_g = k) &= \mathbb{1}_{k=0}\varphi(0)\sum_{a\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^a + \mathbb{1}_{k\neq 0}\varphi(k)\frac{1}{2}\sum_{a\geq 1}\left(1-\frac{1}{2(k+1)}\right)^{a-1} - \left(1-\frac{1}{2k}\right)^{a-1} \\
&= \mathbb{1}_{k=0}\varphi(0)\sum_{a\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^a + \mathbb{1}_{k\neq 0}\varphi(k)\frac{1}{2}\sum_{a\geq 1}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{a-1} - \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^{a-1} \\
&= \mathbb{1}_{k=0}\varphi(0)\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \mathbb{1}_{k\neq 0}\varphi(k)\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\frac{2k+1}{2k+2}} - \frac{1}{1-\frac{2k-1}{2k}}\right\} \\
&= \mathbb{1}_{k=0}\varphi(0) + \mathbb{1}_{k\neq 0}\varphi(k)\frac{1}{2}\left[2k+2-2k\right] \\
&= \varphi(k)
\end{aligned}$$

3.iii) Pour montrer ce point, on va revenir à la formule $\mathbb{E}\left[F\left(X_u, u\leq g\right) f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S_g\right)\right]$ que l'on va écrire de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q\left[F\left(X_u, u\leq g\right) f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S_g\right)\right] \\
&= \sum_{a\geq 0}\sum_{k\geq 0} Q\left(S_g = k, \gamma_g = a\right)\mathbb{E}_Q\left[F\left(X_u, u\leq g\right) \mid S_g = k, \gamma_g = a\right] f_1(a)\, f_2(k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a\geq 0}\mathbb{E}\left[F\left(X_u, u\leq \tau_a\right) f_1(a)\, f_2\left(S_{\tau_a}\right)\varphi\left(S_{\tau_a}\right)\right], \text{ d'après ce qu'on a fait précédemment,} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a\geq 0}\sum_{k\geq 0} f_1(a)\, f_2(k)\,\varphi(k)\,\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = k\right)\mathbb{E}\left[F\left(X_u, u\leq \tau_a\right) \mid S_{\tau_a} = k\right]
\end{aligned}$$

En reprenant les formules obtenues pour $Q\left(S_g = k, \gamma_g = a\right)$ et $\mathbb{P}\left(S_{\tau_a} = k\right)$, il devient évident que pour tout $k, a \geq 0$:

$$\mathbb{E}_Q\left[F\left(X_u, u\leq g\right) \mid S_g = k, \gamma_g = a\right] = \mathbb{E}\left[F\left(X_u, u\leq \tau_a\right) \mid S_{\tau_a} = k\right] \tag{4.36}$$

3.ii) Nous nous intéressons maintenant à la loi de $(X_n, n\geq g)$ sous Q.
Pour cela nous avons besoin du résultat suivant :

LEMME 4.7. *Soit p un entier strictement positif. Alors, la loi de $(X_n, n < T_p)$ conditionnellement à $\{T_p < T_0\}$ est la même sous $\mathbb{P}$ et sous Q.*

Démonstration du lemme 4.7.
Soit G une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned}
Q_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0\right] &= \frac{Q_1\left[G\left(X_1, ...; X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\right]}{Q_1\left[T_p < T_0\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0} M_{T_0}\right]}{\mathbb{P}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} M_{T_0}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{P}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\left(\varphi\left(S_{T_0}\right)S_{T_0} + 1 - \phi\left(S_{T_0}\right)\right)\right]}{\mathbb{P}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}\left(\varphi\left(S_{T_0}\right)S_{T_0} + 1 - \phi\left(S_{T_0}\right)\right)\right]}
\end{aligned}$$

Conditionnant, nous obtenons :

$$= \frac{\mathbb{E}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\mathbb{E}_p\left[\varphi\left(\tilde{S}_{T_0}\right)\tilde{S}_{T_0} + 1 - \phi\left(\tilde{S}_{T_0}\right)\right]\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}\mathbb{E}_p\left[\varphi\left(\tilde{S}_{T_0}\right)\tilde{S}_{T_0} + 1 - \phi\left(\tilde{S}_{T_0}\right)\right]\right]}$$

Comme :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p\left[\varphi\left(S_{T_0}\right)S_{T_0}+1-\phi\left(S_{T_0}\right)\right] &= \sum_{k\geq p}\mathbb{P}_p\left(S_{T_0}=k\right)\left[k\varphi(k)+1-\phi(k)\right]\\ &= p\sum_{k\geq p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left[k\varphi(k)+1-\phi(k)\right], \text{ d'après le lemme 4.6}\\ &= 1-\phi(p)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}Q_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p}\mid T_p<T_0\right] &= \frac{\mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\left\{1-\phi(p)\right\}\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}\left\{1-\phi(p)\right\}\right]}\\ &= \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n<T_p}\mid T_p<T_0\right]\end{aligned}$$

□

D'autre part, d'après [**LeG85**], conditionnellement à $\{T_p<T_0\}$ sous $\mathbb{P}_1$ la loi de $(X_n, n<T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3. On en déduit donc que sous Q_1, conditionnellement à $\{T_p<T_0\}$, $(X_n, n<T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient que sous Q_1 conditionnellement à $\{T_0=\infty\}$, $(X_n, n\geq 0)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.
Il est évident, par symétrie, que sous Q_{-1}, conditionnellement à $\{T_0=\infty\}$, $(-X_n, n\geq 0)$ est une marche de Bessel* de dimension 3. On en déduit donc que $(X_n, n\geq g)$ est soit une marche de Bessel* , soit une marche de Bessel* inversée de dimension 3. Il reste à savoir avec quelles probabilités on a l'une ou l'autre.
Nous avons vu dans le point 2.ii que S_∞ sous Q était fini avec probabilité $\frac{1}{2}$. Comme une marche de Bessel* de dimension 3 tend vers l'infini en l'infini, on en déduit donc que $(X_n, n\geq g)$ est l'une ou l'autre des marches avec probabilité $\frac{1}{2}$.

□

5. Pénalisation par une fonction de S_{d_p}

5.1. Enoncé du résultat principal.

Les notations sont les mêmes que dans les deux chapitres précédents, avec une condition supplémentaire sur la fonction $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$:

$$\sum_{k\geq 0}k^2\varphi\left(k\right)<\infty \tag{5.1}$$

et soit $f:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^+$ définie par :

$$f(b,a):=\mathbb{1}_{b=0}\varphi(0)+\mathbb{1}_{b\neq 0}\left[\varphi(b)\left(1-\frac{a^+}{b}\right)+a^+\sum_{k=b}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right] \tag{5.2}$$

Le résultat de cet alinéa est :

THÉORÈME 5.1. *Pour tout $n\geq 0$ et tout $\Lambda_n\in\mathcal{F}_n$:*

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_{d_p}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{d_p}\right)\right]}=\lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}f\left(S_p,X_p\right)\right]}{\mathbb{E}\left[f\left(S_p,X_p\right)\right]}=\lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S_p\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\right]}=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}M_n^\varphi\right] \tag{5.3}$$

avec $M_n^\varphi:=\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)$.
On remarque que l'on obtient la même martingale que lorsque l'on a pénalisé par une fonction du maximum unilatère (cf. Théorème 1.1 16), i.e. que la pénalisation par $\varphi\left(S_{d_p}\right)$ est la même que celle par $\varphi\left(S_p\right)$.

1) On a déjà vu d'après le lemme 4.4 que :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{d_p}\right) \mid \mathcal{F}_p\right] = \mathbb{1}_{S_p=0}\varphi(0) + \mathbb{1}_{S_p\neq 0}\left\{\varphi\left(S_p\right)\left(1-\frac{X_p^+}{S_p}\right) + X_p^+ \sum_{k\geq S_p} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right\} = f\left(S_p, X_p\right) \tag{5.4}$$

2) On va tout d'abord montrer que :

$$\mathbb{E}\left[f\left(S_p, X_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\right] \tag{5.5}$$

Comme :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(S_p, X_p\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\varphi\left(S_p\right)\frac{X_p^+}{S_p}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}X_p^+ \sum_{k\geq S_p}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right] \\ &= (1)-(2)+(3)\end{aligned}$$

Etudions successivement chaque terme.
i) D'après le lemme 3.8 avec $x = y = 0$, lorque $p \to \infty$, le premier terme est équivalent à $\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0}\varphi(k)$.
ii) Pour étudier le comportement des deux derniers termes, il convient de rappeler le lemme suivant :

Lemme 5.2. *Pour $b \geq 0$ et $a \leq b$:*

$$\mathbb{P}\left(S_p = b, X_p = a\right) \underset{p\to\infty}{\sim} (2b-a+1)\left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.6}$$

Démonstration du lemme 5.2. Rappelons que :

$$\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2} \tag{5.7}$$

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{p} k^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2 \tag{5.9}$$

Sous les hypothèses citées plus haut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_p = b, X_p = a\right) &= \mathbb{P}\left(S_p \geq b, X_p = a\right) - \mathbb{P}\left(S_p \geq b+1, X_p = a\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_p = 2b - a\right) - \mathbb{P}\left(X_p = 2b + 2 - a\right), \text{ d'après le principe de réflexion} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^p \left[C_p^{\frac{p+2b-a}{2}} - C_p^{\frac{p+2b-a}{2}+1}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{p!}{\left(\frac{p+2b-a}{2}\right)!\left(\frac{p-(2b-a)}{2}-1\right)!}\left[\frac{1}{\frac{p-(2b-a)}{2}} - \frac{1}{\frac{p+2b-a}{2}+1}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{p!}{\left(\frac{p+2b-a}{2}\right)!\left(\frac{p-(2b-a)}{2}\right)!}\frac{2b-a+1}{\frac{p+2b-a}{2}+1} \\
&= \mathbb{P}\left(X_p = 2b-a\right)\frac{2b-a+1}{\frac{p+2b-a}{2}+1} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2b-a+1}{\frac{p+2b-a}{2}+1}, \text{ d'après le lemme 3.1 et la formule de Stirling} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2^3}{\pi p^3}\right)^{\frac{1}{2}} (2b-a+1)
\end{aligned}$$

□

a) Pour p assez grand :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi p^3}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{0\leq a\leq b} \mathbb{P}\left(S_p = b, X_p = a\right)\varphi(b)\frac{a}{b} &= \left(\frac{\pi p^3}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{0\leq a\leq b} \mathbb{P}\left(X_p = 2b-a\right)\frac{2b-a+1}{\frac{p+2b-a}{2}+1}\varphi(b)\frac{a}{b} \\
&\leq \left(\frac{\pi p}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{0\leq a\leq b} \mathbb{P}\left(S_p = 0\right)\varphi(b)\frac{a(2b-a+1)}{b} \\
&\leq \left(\frac{\pi p}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}\left(S_p = 0\right)\varphi(b)\frac{(2b+1)(b+1)}{3} \\
&\leq \varphi(b)\frac{(2b+1)(b+1)}{6}
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses sur la fonction φ, la série $\displaystyle\sum_{b>0}\frac{(2b+1)(b+1)}{3}\varphi(b)$ est convergente. Par conséquent d'après le Théorème de convergence dominée, on a :

$$\left(\frac{\pi p^3}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\varphi\left(S_p\right)\frac{X_p^+}{S_p}\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{b>0}\frac{(2b+1)(b+1)}{3}\varphi(b)$$

Ainsi le deuxième terme est négligeable par rapport au premier lorsque p tend vers ∞.
b) Avec un raisonnement similaire pour (3), on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi p^3}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0} X_p^+ \sum_{k\geq S_p} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\right] &\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{b>0}\sum_{0\leq a\leq b}(2b-a+1)a\sum_{k=b}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{b>0}\frac{b(2b+1)(b+1)}{3}\sum_{k=b}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{k>0}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{b(2b+1)(b+1)}{3} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{k>0}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\sum_{b=1}^{k}\frac{2b^3+3b^2+b}{3} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{k>0}\varphi(k)\left[\frac{k(k+1)}{3}+\frac{2k+1}{6}+\frac{1}{2}\right].
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments concernant le terme (2), (3) est négligeable par rapport à (1) lorsque p tend vers l'infini.
Le dénominateur dans la formule (5.3) est donc équivalent à $\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\right]$ lorsque $p\to\infty$.
3) Nous allons maintenant montrer que pour tout $n\geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{d_p}\right)\mid\mathcal{F}_n\right]\underset{p\to\infty}{\sim}\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\mid\mathcal{F}_n\right] \tag{5.10}$$

Comme on a déjà vu que $\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{d_p}\right)\mid\mathcal{F}_p\right]=f\left(S_p,X_p\right)$, il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E}\left[f\left(S_p,X_p\right)\mid\mathcal{F}_n\right]\underset{p\to\infty}{\sim}\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\mid\mathcal{F}_n\right] \tag{5.11}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(S_p,X_p\right)\mid\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_p\right)\mid\mathcal{F}_n\right]-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\varphi\left(S_p\right)\frac{X_p^+}{S_p}\mid\mathcal{F}_n\right]+\mathbb{E}\left[X_p^+\sum_{k\geq S_p}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\mid\mathcal{F}_n\right] \\
&= (1)-(2)+(3)
\end{aligned}$$

On sait déjà, d'après (3.46), que $(1)\underset{p\to\infty}{\sim}\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\varphi\left(S_n\right)\left(S_n-X_n\right)+1-\phi\left(S_n\right)\right]$.
2) Nous nous intéressons maintenant au terme (2) :

$$\begin{aligned}
(2) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\varphi\left(S_p\right)\frac{X_p^+}{S_p}\mid\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\neq 0\right\}}\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\right)\frac{X_n+\tilde{X}_{p-n}}{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\mathbb{1}_{\left\{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\neq 0\right\}}\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\right)\frac{X_n+\tilde{X}_{p-n}}{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)}\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n\leq 0}\mathbb{1}_{\left\{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\neq 0\right\}}\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\right)\frac{X_n+\tilde{X}_{p-n}}{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)}\right] \\
&= (A)+(B)
\end{aligned}$$

Nous allons étudier chaque terme séparément. Premièrement :

$$\begin{aligned}(A) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\mathbb{1}_{\left\{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\neq 0\right\}}\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\right)\frac{X_n+\tilde{X}_{p-n}}{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)}\right]\\ &= \mathbb{1}_{X_n>0}\mathbb{1}_{\left\{S_n\vee\left(X_n+\tilde{S}_{p-n}\right)\neq 0\right\}}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-X_n}^{b}\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{p-n}=b,\tilde{X}_{p-n}=a\right)\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+\tilde{b}\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+\tilde{b}\right)}\left(X_n+a\right)^+\end{aligned}$$

Comme $X_n>0$, nécessairement $S_n\neq 0$ et donc :

$$\begin{aligned}(A) &= \mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-X_n}^{b}\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{p-n}=b,\tilde{X}_{p-n}=a\right)\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\left(X_n+a\right)^+\\ &\leq \mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-X_n}^{b}\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{p-n}=b,\tilde{X}_{p-n}=a\right)\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\left(X_n+|a|\right)\\ &\leq \mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\sum_{a=0}^{X_n}\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{p-n}=b,\tilde{X}_{p-n}=a\right)\left(X_n+a\right)\\ &+ \mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\sum_{a=0}^{b}\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{p-n}=b,\tilde{X}_{p-n}=a\right)\left(X_n+a\right)\\ &\underset{p\to\infty}{\sim}\left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\sum_{a=0}^{X_n}(2b-a+1)\left(X_n+a\right)\\ &+ \left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\sum_{a=0}^{b}(2b-a+1)\left(X_n+a\right)\\ &\underset{p\to\infty}{\sim}\left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\sum_{a=0}^{X_n}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &+ \left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{\varphi\left(S_n\vee\left(X_n+b\right)\right)}{S_n\vee\left(X_n+b\right)}\sum_{a=0}^{b}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &\underset{p\to\infty}{\sim}\left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{S_n-X_n}\frac{\varphi\left(S_n\right)}{S_n}\sum_{a=0}^{X_n}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &+ \left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)}{X_n+b}\sum_{a=0}^{X_n}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &+ \left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=0}^{S_n-X_n}\frac{\varphi\left(S_n\right)}{S_n}\sum_{a=0}^{b}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &+ \left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)}{X_n+b}\sum_{a=0}^{b}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &= (C)+(D)+(E)+(F)\end{aligned}$$

On peut tout de suite remarquer que (C) et (E) sont de la forme $K\left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ où K est une constante. Par conséquent, ils sont négligeables par rapport à (1).

Pour simplifier les calculs on pose $C(p,X_n)=\left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}$.

$$\begin{aligned}\frac{(D)}{C(p,X_n)} &= \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)}{X_n+b}\sum_{a=0}^{X_n}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &= \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)\left(2b+1+X_n\right)X_n\left(2X_n+1\right)}{2\left(X_n+b\right)}\\ &+ \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)X_n\left(2b+1\right)\left(X_n+1\right)}{\left(X_n+b\right)}\\ &- \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)X_n\left(X_n+1\right)\left(2X_n+1\right)}{6\left(X_n+b\right)}\end{aligned}$$

D'après les hypothèses sur φ, ces séries sont convergentes et par conséquent (D) est bien négligeable par rapport à (1).
De la même façon :

$$\begin{aligned}\frac{(F)}{C(p,X_n)} &= \left(\frac{2^3}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{X_n>0}\sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)}{X_n+b}\sum_{a=0}^{b}\left(2b+1+X_n\right)a+X_n\left(2b+1\right)-a^2\\ &= \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)\left(2b+1+X_n\right)b\left(2b+1\right)}{2\left(X_n+b\right)}\\ &+ \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)X_n\left(2b+1\right)\left(b+1\right)}{\left(X_n+b\right)}\\ &- \sum_{b=S_n-X_n+1}^{\infty}\frac{\varphi\left(X_n+b\right)b\left(b+1\right)\left(2b+1\right)}{6\left(X_n+b\right)}\end{aligned}$$

Comme précédemment, grâce aux hypothèses sur φ, on peut affirmer que (F) est négligeable par rapport à (1).
3) Concernant le dernier terme, il faut remarquer que :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}X_p^+\sum_{k\geq S_p}\frac{\varphi(k)}{k(k+1)}\mid\mathcal{F}_n\right]\leq\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{S_p\neq 0}\frac{X_p^+}{S_p}\sum_{k\geq S_p}\frac{\varphi(k)}{k}\mid\mathcal{F}_n\right]\tag{5.12}$$

Et on applique le même raisonnement que ci-dessus avec la fonction $h(x)=\sum_{k\geq x}\frac{\varphi(k)}{k}$ et $x>0$.

Il suffit de vérifier que $\sum_{\tilde{k}>0}\tilde{k}^2h(\tilde{k})<\infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{k}>0}\tilde{k}^2h(\tilde{k}) &= \sum\tilde{k}^2\sum_{k\geq\tilde{k}}\frac{\varphi(k)}{k}\\ &\leq \sum_{\tilde{k}>0}\tilde{k}\sum_{k\geq\tilde{k}}\varphi(k)\\ &\leq \sum_{k\geq 0}\varphi(k)\sum_{k\geq\tilde{k}}\tilde{k}\\ &\leq \sum_{k\geq 0}\varphi(k)\frac{k(k+1)}{2}<\infty,\end{aligned}$$

ce qui est vrai d'après les hypothèses sur φ. □

6. Pénalisation par une fonction de $S^*_{g_p}$

6.1. Enoncé du résultat principal.

Rappelons que :

$$S^*_p := \sup_{n\geq p} |X_n|$$

et posons $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, une fonction à support fini.

REMARQUE 6.1. *Nous n'avons pas réussi à montrer que ce Théorème était réalisé pour toute fonction φ de somme finie mais ce résultat existe en continue et il semble donc possible d'obtenir un résultat similaire en affinant les majorations effectuées dans la démonstration ci-dessous.*

Le résultat de cet alinea est :

THÉORÈME 6.2. (1) (a) *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\varphi\left(S^*_{g_p}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right)\right]} = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M^*_n\right] \tag{6.1}$$

où $M^*_n = \varphi\left(S^*_{g_n}\right)|X_n| + \varphi\left(S^*_n\right)\left(S^*_n - |X_n|\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)$.

(b) *De plus, $(M^*_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$ martingale positive, non uniformément intégrable.*

(2) *Soit le probabilité Q^* sur$(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ induite par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Lambda_n \in \mathcal{F}_n : \quad Q^*\left(\Lambda_n\right) := \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} M^*_n\right] \tag{6.2}$$

Alors, sous Q^* on a :

(a) *Soit $g := \sup\{k \geq 0, X_n = 0\}$. Alors g est fini et $S^*_\infty = \infty$ p.s.*

(b) *Le couple $\left(S^*_g, \gamma_g\right)$ admet comme densité :*

$$f_{\gamma_g, S_g}(a,k) = \mathbb{1}_{\{a=0,k=0\}}\varphi(0) + \mathbb{1}_{\{a\geq 0, k>0\}}\left\{\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^a - \left(1-\frac{1}{k}\right)^a\right\}\varphi(k) \tag{6.3}$$

On en déduit que S^*_g admet φ comme densité.

(3) *Sous Q^* :*

(a) *$(X_n, n \leq g)$ et $(X_n + g, n \geq 0)$ sont deux processus indépendants.*

(b) *Avec probabilité $\frac{1}{2}$, $(X_{g+n}, n \geq 0)$ (respectivement $(-X_{g+n}, n \geq 0)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.*

(c) *Sachant que $\gamma_g = a$ et $S^*_g = b$, le processus $(X_n, n \leq g)$ est une marche aléatoire standard arrêtée en τ_a et conditionnée à $S^*_{\tau_a} = b$.*

6.2. Démonstration du Théorème 6.2.
1) Nous démontrons la formule 6.1 à l'aide d'un Théorème Tauberien sur les séries entières et du lemme 6.4 :

THÉORÈME 6.3 (Cf. [**Fel71**] pp. 447).
Soit $q_n \geq 0$ et on suppose que :

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n \tag{6.4}$$

converge pour $0 \leq s < 1$. Si $0 \leq p < \infty$ alors les deux relations :

$$S(s) \underset{s\to 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-s)^p} C \tag{6.5}$$

et :

$$q_0 + q_1 + ... + q_{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(p+1)} n^p C, \tag{6.6}$$

où $0 < C < \infty$, sont équivalentes.
De plus, si la suite $\{q_n\}$ est monotone et $0 < p < \infty$, alors (6.5) est équivalente à :

$$q_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(p)} n^{p-1} C \tag{6.7}$$

LEMME 6.4. *Soient $a < 0 < b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T_a \wedge T_b}\right] = \frac{\cos\lambda\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\lambda\left(\frac{a-b}{2}\right)} \tag{6.8}$$

Démonstration du lemme 6.4.
Définissons le processus $(W_n, n \geq 0)$:

$$W_n = \frac{\cos\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^n} \tag{6.9}$$

$(W_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\cos\lambda\left(X_{n+1} - \frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\cos\lambda\left(X_n + Y_{n+1} - \frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right], \text{ où } Y_{n+1} \text{ est le pas de la marche} \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\cos\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)\cos\lambda Y_{n+1} - \sin\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)\sin\lambda Y_{n+1}}{(\cos\lambda)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \frac{\cos\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{n+1}}\mathbb{E}\left[\cos\lambda Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] - \frac{\sin\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)}{(\sin\lambda)^n}\mathbb{E}\left[\sin\lambda Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \frac{\cos\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{n+1}}\frac{1}{2}\left(\cos\lambda + \cos -\lambda\right) - \frac{\sin\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)}{(\sin\lambda)^{n+1}}\frac{1}{2}\left(\sin\lambda + \sin -\lambda\right) \\
&= \frac{\cos\lambda\left(X_n - \frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^n} \\
&= W_n
\end{aligned}$$

et en utilisant le Théorème d'arrêt avec $T_a \wedge T_b$:

$$\mathbb{E}\left[W_{T_a \wedge T_b}\right] = \mathbb{E}\left[W_0\right] = \cos\lambda\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{6.10}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_{T_a\wedge T_b}\right] &= \mathbb{E}\left[W_{T_a}\mathbb{1}_{\{T_a<T_b\}} + W_{T_b}\mathbb{1}_{\{T_b<T_a\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\cos\lambda\left(a-\frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{T_a}}\mathbb{1}_{\{T_a<T_b\}} + \frac{\cos\lambda\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{T_b}}\mathbb{1}_{\{T_b<T_a\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\cos\lambda\left(\frac{a-b}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{T_a}}\mathbb{1}_{\{T_a<T_b\}} + \frac{\cos\lambda\left(\frac{b-a}{2}\right)}{(\cos\lambda)^{T_b}}\mathbb{1}_{\{T_b<T_a\}}\right] \\
&= \cos\lambda\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathbb{E}\left[\frac{1}{(\cos\lambda)^{T_a}}\mathbb{1}_{\{T_a<T_b\}} + \frac{1}{(\cos\lambda)^{T_b}}\mathbb{1}_{\{T_b<T_a\}}\right] \\
&= \cos\lambda\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T_a\wedge T_b}\right] \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

Les formules 6.10 et 6.11 permettent de conclure la démonstration. □

Nous obtenons alors le résultat suivant :

LEMME 6.5. *Soient $\alpha > 0$ et $a \in \mathbb{Z}$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_p} \le \alpha\right) &= 0 \text{ si } \alpha < |a| \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } \alpha \ge |a|
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 6.5.
La première égalité est évidente. Démontrons alors l'équivalence.
En premier lieu, remarquons :

$$\left\{S^*_{g_p} \le \alpha\right\} = \{g_p \le T^*_\alpha\} = \left\{p \le d_{T^*_\alpha}\right\} = \left\{p \le T^*_\alpha + T_0.\theta_{T^*_\alpha}\right\} \qquad (6.12)$$

Soit δ_β, une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre β $(1 > \beta > 0)$ telle que δ_β soit indépendante de la marche $(X_n, n \ge 0)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_{\delta_\beta}} \le \alpha\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_k} \le \alpha, \delta_\beta = k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_k} \le \alpha\right)\mathbb{P}\left(\delta_\beta = k\right) \qquad (6.13) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_k} \le \alpha\right)(1-\beta)^{k-1}\beta \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_{\delta_\beta}} \le \alpha\right) &= \mathbb{P}_a\left(\delta_\beta \le d_{T^*_\alpha}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_a\left(\delta_\beta > d_{T^*_\alpha}\right) \\
&= 1 - \mathbb{E}_a\left[\mathbb{E}_a\left[\mathbb{1}_{\delta_\beta > d_{T^*_\alpha}} \mid \mathcal{F}_{T^x_\alpha}\right]\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}_a\left[(1-\beta)^{d_{T^*_\alpha}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}_a\left[(1-\beta)^{T^*_\alpha}(1-\beta)^{T_0.\theta_{T^*_\alpha}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}_a\left[(1-\beta)^{T^*_\alpha}\mathbb{E}_{X_{T^*_\alpha}}\left[(1-\beta)^{\tilde{T}_0}\right]\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}_a\left[(1-\beta)^{T^*_\alpha}\right]\mathbb{E}_0\left[(1-\beta)^{T_\alpha}\right]
\end{aligned}$$

D'après (8.14) :

$$\mathbb{E}_0\left[(1-\beta)^{T_\alpha}\right] = \left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-\alpha} \tag{6.15}$$

Concernant $\mathbb{E}_a\left[(1-\beta)^{T^*_\alpha}\right]$, nous pouvons supposer que $a \geq 0$. Le raisonnement dans l'autre cas est identique et donne le même résultat.
En utilisant la propriété de Markov :

$$\mathbb{E}_a\left[(1-\beta)^{T^*_\alpha}\right] = \mathbb{E}_0\left[(1-\beta)^{T_{\{-\alpha-a\}}\wedge T_{\{\alpha-a\}}}\right]$$

et en appliquant le lemme 6.4 :

$$\mathbb{E}\left[(\cosh\lambda)^{T_{\{-\alpha-a\}}\wedge T_{\{\alpha-a\}}}\right] = \frac{\cosh a\lambda}{\cosh\alpha\lambda}$$

Il suffit de prendre $i\lambda$ dans le Lemme 6.4.
Posons $\lambda = \text{Argch}\left(\frac{1}{1-\beta}\right)$. Alors :

$$\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_{\delta_\beta}} \leq \alpha\right) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-\alpha} \frac{\cosh\left[\text{Argch}\left(\frac{1}{1-\beta}\right)a\right]}{\cosh\left[\text{Argch}\left(\frac{1}{1-\beta}\right)\alpha\right]}$$

Faisant tendre β vers 0 :

$$\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_{\delta_\beta}} \leq \alpha\right) \underset{\beta\to 0}{\sim} \alpha\sqrt{2\beta}$$

D'après les formules (6.14) et (6.2) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_a\left(S^*_{g_k} \leq \alpha\right)(1-\beta)^{k-1}\beta \underset{\beta\to 0}{\sim} \alpha\sqrt{2\beta} \tag{6.16}$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_a\left(S^*_{g_k} \leq \alpha\right)(1-\beta)^{k} \underset{\beta\to 0}{\sim} \alpha\sqrt{\frac{2}{\beta}}(1-\beta) \tag{6.17}$$

en posant $\beta = 1-\omega$, la formule (6.17) donne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_a\left(S^*_{g_k} \leq \alpha\right)\omega^k &\underset{\omega\to 1-}{\sim} \alpha\omega\sqrt{\frac{2}{(1-\omega)}} \\ &\underset{\omega\to 1-}{\sim} \alpha\sqrt{\frac{2}{(1-\omega)}}\end{aligned}$$

On applique le Théorème tauberien avec $p = \frac{1}{2}$ et $C = \alpha\sqrt{2}$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_p} \leq \alpha\right) &\underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} p^{\frac{1}{2}-1} L(p) \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha\end{aligned}$$

□

Ce lemme permet d'établir le résultat suivant :

LEMME 6.6. *Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Alors :*

$$\mathbb{E}_a\left[\psi\left(S^*_{g_p}\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq|a|} \psi(k) \tag{6.18}$$

Démonstration du lemme 6.6.
Il suffit de voir que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a\left(S^*_{g_p} = \alpha\right) &= \mathbb{P}_a\left(S^*_{g_p} \leq \alpha+1\right) - \mathbb{P}_a\left(S^*_{g_p} \leq \alpha\right) \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha+1) - \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

en appliquant le Théorème de convergence de Lebesgue, on a :

$$\mathbb{E}_a\left[\psi\left(S^*_{g_p}\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq|a|} \psi(k) \tag{6.19}$$

□

On dispose maintenant des outils nécessaires pour démontrer la formule 6.1. Remarquons que si $g_p < n$ alors $g_p = g_n$ et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right) \mathbb{1}_{g_p<n} \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right) \mathbb{1}_{g_p\geq n} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_n}\right) \mathbb{1}_{g_p<n} \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right) \mathbb{1}_{g_p\geq n} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \varphi\left(S^*_{g_n}\right) \mathbb{P}\left(g_p < n \mid \mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right) \mathbb{1}_{g_p\geq n} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= (1) + (2)
\end{aligned}$$

D'après le formule (4.11) :

$$(1) \underset{p\to\infty}{\sim} \varphi\left(S^*_{g_n}\right) |X_n| \left[\frac{2}{\pi\left(p-n\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.20}$$

Quant au deuxième terme, posons $S^*_{[n,g_p]}$, le maximum bilatère de la marche sur l'intervalle $[n, g_p]$ et nous posons $\tilde{S}^*_p$ et $\tilde{g}_p := \sup\{n \geq p, X_n = 0\}$, le maximum bilatère (respectivement le dernier zéro à gauche de p), de la marche $\left(\tilde{X}_p, p \geq 0\right) := (X_{n+p} - X_n, p \geq 0)$ qui est indépendante de

$\mathcal{F}_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
(2) &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_n \vee S^*_{[n,g_p]}\right)\mathbb{1}_{g_p\geq n} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}_{|X_n|}\left[\varphi\left(S^*_n \vee \tilde{S}^*_{\tilde{g}_{p-n}}\right)\mathbb{1}_{g_p\geq n}\right] \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \sum_{k\geq|X_n|} \tilde{\mathbb{P}}_{|X_n|}\left(\tilde{S}^*_{\tilde{g}_{p-n}} = k\right)\varphi\left(S^*_n \vee k\right) \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq|X_n|} \varphi\left(S^*_n \vee k\right), \text{ d'après le lemme 6.6} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=|X_n|}^{S^*_n-1} \varphi\left(S^*_n\right) + \sum_{k\geq S^*_n} \varphi(k)\right\} \\
&\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\left(S^*_n - |X_n|\right)\varphi\left(S^*_n\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)\right\}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\varphi\left(S^*_{g_n}\right)|X_n| + \left(S^*_n - |X_n|\right)\varphi\left(S^*_n\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)\right] \tag{6.21}$$

Cette formule étant valable pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$, en prenant $n = 0$ et $\Lambda_0 = \Omega$:

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_p}\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.22}$$

La formule (6.1) se déduit facilement de (6.21) et (6.22).

□

1.ii) Vérifions que $(M^*_n, n \geq 0)$ est bien une martingale.
Il suffit de décomposer en plusieurs cas :

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}M_{n+1} + \mathbb{1}_{X_n\leq -2}M_{n+1} + \mathbb{1}_{X_n=1}M_{n+1} + \mathbb{1}_{X_n=-1}M_{n+1} + \mathbb{1}_{X_n=0}M_{n+1} \\
&= (1) + (2) + (3) + (4) + (5)
\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de s'intéresser aux points (1), (3) et (5), grâce au caractère symétrique de M^*_n.

$$\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}M_{n+1} \\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\left\{\varphi\left(S^*_{g_{n+1}}\right)|X_{n+1}| + \varphi\left(S^*_{n+1}\right)\left(S^*_{n+1} - |X_{n+1}|\right) + 1 - \phi\left(S^*_{n+1}\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S^*_n-1\geq X_n}\left\{\varphi\left(S^*_{g_n}\right)X_{n+1} + \varphi\left(S^*_n\right)\left(S^*_n - X_{n+1}\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S^*_n=X_n}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\varphi\left(S^*_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + \varphi\left(S^*_n+1\right)\left(S^*_n+1-X_n-1\right) + 1 - \phi\left(S^*_n+1\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S^*_n=X_n}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\varphi\left(S^*_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S^*_n\right)\left(S^*_n - X_n + 1\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S^*_n-1\geq X_n}\left\{\varphi\left(S^*_{g_n}\right)X_{n+1} + \varphi\left(S^*_n\right)\left(S^*_n - X_{n+1}\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S^*_n=X_n}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\varphi\left(S^*_{g_n}\right)\left(X_n+1\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right) - \varphi\left(S^*_n\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S^*_n=X_n}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\varphi\left(S^*_{g_n}\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S^*_n\right) + 1 - \phi\left(S^*_n\right)\right\}
\end{aligned}$$

En conditionnant par $\mathcal{F}_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(1) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n^*-1\geq X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n^*=X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)\left(X_n+1\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right) - \varphi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n^*=X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)\left(X_n-1\right) + \varphi\left(S_n^*\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n^*-1\geq X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)X_n + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n\geq 2}\mathbb{1}_{S_n^*=X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)X_n + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n\geq 2}M_n \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

On s'intéresse à (3) :

$$\begin{aligned}
(3) &= \mathbb{1}_{X_n=1}M_{n+1} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\varphi\left(S_{g_{n+1}}^*\right)X_{n+1} + \varphi\left(S_{n+1}^*\right)\left(S_{n+1}^* - X_{n+1}\right) + 1 - \phi\left(S_{n+1}^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + \varphi\left(S_{n+1}^*\right)\left(S_{n+1}^* - X_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_{n+1}^*\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\varphi\left(S_{n+1}^*\right)\times 0 + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n + 1\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n^*-1\geq X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n^*=X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + \varphi\left(S_n^*+1\right)\left(S_n^*+1 - X_n - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n^*+1\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + \varphi\left(S_n^*\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n^*-1\geq X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) - \varphi\left(S_n^*\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{S_n^*=X_n}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + 1 - \phi\left(S_n^*\right) - \varphi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + \varphi\left(S_n^*\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right) - \varphi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + \varphi\left(S_n^*\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\}
\end{aligned}$$

En conditionnant par $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(3) \mid \mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right)2 + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right) - \varphi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + \varphi\left(S_n^*\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\varphi\left(S_{g_n}^*\right) + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - X_n\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=1}M_n \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

Enfin, on effectue un raisonnement analogue avec (5).
Supposons, tout d'abord que $n \neq 0$. Dans ce cas, d'après la définition de $(S_n^*, n \geq 0)$, il est clair que $S_n^* \geq 1$ et donc que $S_n^* = S_{n+1}^*$. De plus comme $g_{n+1} = n$, on a $S_{g_{n+1}}^* = S_n^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
(5) &= \mathbb{1}_{X_n=0}M_{n+1} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left\{\varphi\left(S_{g_{n+1}}^*\right)\left|X_{n+1}\right| + \varphi\left(S_{n+1}^*\right)\left(S_{n+1}^* - \left|X_{n+1}\right|\right) + 1 - \phi\left(S_{n+1}^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)\left|X_{n+1}\right| + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - \left|X_{n+1}\right|\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)\times 1 + \varphi\left(S_n^*\right)\left(S_n^* - 1\right) + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}\left\{\varphi\left(S_n^*\right)S_n^* + 1 - \phi\left(S_n^*\right)\right\} \\
&= \mathbb{1}_{X_n=0}M_n
\end{aligned}$$

Si $n = 0$:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_1 \\ &= \varphi(S_0^*) \times 1 + \varphi(1)(S_1^* - |X_1|) + 1 - \phi(S_1^*) \\ &= \varphi(0) + 1 - \phi(1) \\ &= \varphi(0) + 1 - \varphi(0) \\ &= 1 \\ &= M_0 \end{aligned}$$

il est donc évident que :

$$\mathbb{E}[(5) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{1}_{X_n=0} M_n \tag{6.25}$$

Au vu des formules (6.23),(6.24) et (6.25), et grâce à la symétrie de $(M_n, n \geq 0)$, il est clair que $(M_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$ martingale.

□

2.i) Montrons que $g < \infty$ p.s. sous Q^*.
pour $a > 0$:

$$\begin{aligned} Q^*(g_p > a) &= \mathbb{E}^Q\left[\mathbb{1}_{g_p>a}\right] \\ &= \mathbb{E}^Q\left[\mathbb{1}_{p>d_a}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{p>d_a} M_{d_a}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{p>d_a}\left\{\varphi\left(S^*_{g_{d_a}}\right)|X_{d_a}| + \varphi\left(S^*_{d_a}\right)\left(S^*_{d_a} - |X_{d_a}|\right) + 1 - \phi\left(S^*_{d_a}\right)\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{p>d_a}\left\{\varphi\left(S^*_{d_a}\right) S^*_{d_a} + 1 - \phi\left(S^*_{d_a}\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$Q^*(g > a) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{d_a}\right) S^*_{d_a} + 1 - \phi\left(S^*_{d_a}\right)\right] \tag{6.26}$$

D'après le Théorème de convergence de Lebesgue :

$$\mathbb{E}\left[1 - \phi\left(S^*_{d_a}\right)\right] \underset{a\to\infty}{\to} 0 \tag{6.27}$$

Il reste donc à montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{d_a}\right) S^*_{d_a}\right] \underset{a\to\infty}{\to} 0 \tag{6.28}$$

Pour cela on va utiliser le lemme suivant :

LEMME 6.7. *Soient $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ et $a > 0$. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[\psi\left(S^*_{d_a}\right) \mid \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{1}_{X_a=0}\psi(X_a) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\left\{\psi(S_a^*)\left(1 - \frac{|X_a|}{S_a^*}\right) + |X_a| \sum_{k=S_a}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k(k+1)}\right\} \tag{6.29}$$

Démonstration du lemme 6.7.
Posons $\tilde{S}^*_{\tilde{T}_0}$ le maximum bilatère d'une marche issue de X_a arrêtée lorsqu'elle atteint le niveau 0 et qui est indépendante de $\mathcal{F}_a$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\psi\left(S^*_{d_a}\right) \mid \mathcal{F}_a\right] &= \mathbb{E}\left[\psi\left(S_a^* \vee \tilde{S}^*_{\tilde{T}_0}\right) \mid \mathcal{F}_a\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_{|X_a|}\left[\psi\left(S_a^* \vee \tilde{S}^*_{\tilde{T}_0}\right)\right] \\ &= \mathbb{1}_{X_a=0}\psi(S_a^*) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0} \sum_{k\geq|X_a|} \mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}^*_{\tilde{T}_0} = k\right)\psi(S_a^* \vee k) \end{aligned}$$

Il faut remarquer que :

$$\mathbb{1}_{X_a>0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}^*_{\tilde{T}_0} = k\right) = \mathbb{1}_{X_a>0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0} = k\right) \tag{6.30}$$

En effet le maximum bilatère a ici la même loi que le maximum unilatère car il n'y a pas de changement de signe.
De plus,par symétrie, si on pose $\underline{S}_n = \sup\{-X_p, 0 \leq p \leq n\}$, on a :

$$\mathbb{1}_{X_a<0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}^*_{\tilde{T}_0} = k\right) = \mathbb{1}_{X_a<0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\underline{\tilde{S}}_{\tilde{T}_0} = k\right) = \mathbb{1}_{X_a>0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0} = k\right) \tag{6.31}$$

Alors, d'après le lemme 4.3 :

$$\mathbb{1}_{X_a\neq 0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}^*_{\tilde{T}_0} = k\right) = \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\mathbb{P}_{X_a}\left(\tilde{S}_{\tilde{T}_0} = k\right) = \frac{|X_a|}{k(k+1)} \tag{6.32}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\psi\left(S^*_{d_a}\right) \mid \mathcal{F}_a\right] &= \mathbb{1}_{X_a=0}\psi\left(S^*_a\right) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\sum_{k\geq|X_a|}\psi\left(S^*_a \vee k\right)\frac{|X_a|}{k(k+1)} \\
&= \mathbb{1}_{X_a=0}\psi\left(S^*_a\right) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\sum_{k=|X_a|}^{S^*_a-1}\psi\left(S^*_a\right)\frac{|X_a|}{k(k+1)} + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\sum_{k\geq S^*_a}\psi\left(k\right)\frac{|X_a|}{k(k+1)} \\
&= \mathbb{1}_{X_a=0}\psi\left(S^*_a\right) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\psi\left(S^*_a\right)|X_a|\left(\frac{1}{|X_a|} - \frac{1}{S^*_a}\right) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\sum_{k\geq S^*_a}\psi\left(k\right)\frac{|X_a|}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

□

Appliquons ce lemme avec $\psi(x) := x\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{d_a}\right)S^*_{d_a}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{d_a}\right)S^*_{d_a} \mid \mathcal{F}_a\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_a=0}\varphi\left(S^*_a\right)S^*_a + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}\varphi\left(S^*_a\right)\left(S^*_a - |X_a|\right) + \mathbb{1}_{X_a\neq 0}|X_a|\sum_{k\geq S^*_a}\frac{\varphi(k)}{k+1}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_a\right)S^*_a\right] + \mathbb{E}\left[\frac{|X_a|}{S^*_a+1}\sum_{k\geq S^*_a}\varphi(k)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_a\right)S^*_a\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq S^*_a}\varphi(k)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_a\right)S^*_a\right] + \mathbb{E}\left[1 - \phi\left(S^*_a\right)\right]
\end{aligned}$$

D'après le Théorème de convergence de Lebesgue :

$$\mathbb{E}\left[1 - \phi\left(S^*_a\right)\right] \underset{a\to\infty}{\to} 0 \tag{6.33}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_a\right)S^*_a\right] &= \sum_{k\geq 0}\varphi(k)k\mathbb{P}\left(S^*_a = k\right) \\
&\leq \sum_{k\geq 0}\varphi(k)k\mathbb{P}\left(S_a = k\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_a\right)S_a\right] \qquad (6.34)
\end{aligned}$$

et on a déjà vu que (6.34) tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini (cf. 4.23).
On en déduit que :

$$Q^*\left(g = \infty\right) = \lim_{a\to\infty} Q^*\left(g > a\right) = 0 \tag{6.35}$$

□

2.ii) On va maintenant démontrer que $S^*_\infty = \infty$ p.s. sous Q^*. Il faut remarquer que cette démonstration n'est pas nécessaire si on démontre le point 3.ii.

D'après [**LeG85**] pp.457-458, $S_{g_{T_\alpha}}$ est de loi uniforme sur $\{0,1,...,\alpha-1\}$.
On en déduit que $S^*_{g^*_{T_\alpha}}$ suit aussi une loi uniforme sur $\{0,1,...,\alpha-1\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
Q^*\left(S^*_\infty > \alpha\right) &= Q^*\left(T^*_\alpha < \infty\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T^*_\alpha<\infty} M_{T^*_\alpha}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_{T^*_\alpha}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_{T^*_\alpha}}\right)|X_{T^*_\alpha}| + \varphi\left(S^*_{T^*_\alpha}\right)\left(S^*_{T^*_\alpha} - |X_{T^*_\alpha}|\right) + 1 - \phi\left(S^*_{T^*_\alpha}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S^*_{g_{T^*_\alpha}}\right)\alpha + 1 - \phi\left(S^*_{T^*_\alpha}\right)\right] \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{\varphi(k)}{\alpha} + 1 - \phi(\alpha) \\
&= \phi(\alpha) + 1 - \phi(\alpha) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout α positif, donc :

$$Q^*\left(S^*_\infty = \infty\right) = 1 \tag{6.36}$$

□

3) Pour montrer le dernier point du Théorème 6.2, nous avons besoin du :

LEMME 6.8. *Pour tout $a > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(S^*_{\tau_a} = k\right) = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^a - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^a \tag{6.37}$$

$$\mathbb{P}\left(S^*_{\tau_a} = 0\right) = 0 \tag{6.38}$$

et :

$$\mathbb{P}\left(S^*_0 = 0\right) = 1 \tag{6.39}$$

Démonstration du lemme 6.8.
Le deuxième point est évident.
On reprend les définitions introduites dans le lemme 4.5 pour la suite de variables aléatoires $\left(T^k_0, k \geq 0\right)$. Alors, pour $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S^*_{\tau_a} < k\right) &= \mathbb{P}\left(\tau_a < T^*_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(a < \gamma_{T^*_k}\right)
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\gamma_{T^*_k} = c\right) &= \mathbb{P}\left(T^{c-1}_0 < T^*_k < T^c_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T^{c-1}_0 < T^*_k\right)\mathbb{P}\left(T^*_k < T^c_0 \mid T^{c-1}_0 < T^*_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T^{c-1}_0 < T^*_k\right)\mathbb{P}\left(T^1_0 > T^*_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T^1_0 < T^*_k, T^2_0 < T^*_k ..., T^{c-1}_0 < T^*_k\right)\mathbb{P}\left(T^1_0 > T^*_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T^1_0 < T^*_k\right)^{c-1}\mathbb{P}\left(T^1_0 > T^*_k\right)
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T^1_0 < T^*_k\right) &= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}_1\left(T_0 < T^*_k\right) + \mathbb{P}_{-1}\left(T_0 < T^*_k\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}_1\left(T_0 < T_k\right) + \mathbb{P}_{-1}\left(T_0 < T_k\right)\right] \\
&= \mathbb{P}_1\left(T_0 < T_k\right), \text{ par symétrie} \\
&= 1 - \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_{T_k^*}=c\right)=\left(1-\frac{1}{k}\right)^{c-1}\frac{1}{k} \tag{6.40}$$

Remarquons que $\gamma_{T_k^*}\sim\mathcal{G}\left(\frac{1}{k}\right)$.
Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{\tau_a}^*=k\right) &= \mathbb{P}\left(S_{\tau_a}^*<k+1\right)-\mathbb{P}\left(S_{\tau_a}^*<k\right)\\
&= \mathbb{P}\left(a<\gamma_{T_{k+1}^*}\right)-\mathbb{P}\left(a<\gamma_{T_k^*}\right)\\
&= \sum_{c=a+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{c-1}\frac{1}{k+1}-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{c-1}\frac{1}{k}\\
&= \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{a}-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{a}
\end{aligned}$$

□

Soient F une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u,u\leq g\right)f_1\left(\gamma_g\right)f_2\left(S_g^*\right)\right] &= \sum_{a\geq 0}\mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u,u\leq\tau_a\right)f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right)f_2\left(S_{\tau_a}^*\right)\mathbb{1}_{\tau_a<\infty}\mathbb{1}_{\tau_{a+1}=\infty}\right]\\
&= \sum_{a\geq 0}\mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u,u\leq\tau_a\right)f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right)f_2\left(S_{\tau_a}^*\right)\left\{\mathbb{1}_{\tau_a<\infty}-\mathbb{1}_{\tau_{a+1}<\infty}\right\}\right]\\
&= \sum_{a\geq 0}\mathbb{E}\left[F\left(X_u,u\leq\tau_a\right)f_1\left(\gamma_{\tau_a}\right)f_2\left(S_{\tau_a}^*\right)\left\{M_{\tau_a}-M_{\tau_{a+1}}\right\}\right]
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{\tau_a}-M_{\tau_{a+1}}\mid\mathcal{F}_{\tau_a}\right] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_{\tau_a}}^*\right)|X_{\tau_a}|+\varphi\left(S_{\tau_a}^*\right)\left(S_{\tau_a}^*-|X_{\tau_a}|\right)+1-\phi\left(S_{\tau_a}^*\right)\mid\mathcal{F}_{\tau_a}\right]\\
&- \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{g_{\tau_{a+1}}}^*\right)|X_{\tau_{a+1}}|+\varphi\left(S_{\tau_{a+1}}^*\right)\left(S_{\tau_{a+1}}^*-|X_{\tau_{a+1}}|\right)+1-\phi\left(S_{\tau_{a+1}}^*\right)\mid\mathcal{F}_{\tau_a}\right]\\
&= \varphi\left(S_{\tau_a}^*\right)S_{\tau_a}^*+1-\phi\left(S_{\tau_a}^*\right)-\mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{\tau_{a+1}}^*\right)S_{\tau_{a+1}}+1-\phi\left(S_{\tau_{a+1}}^*\right)\mid\mathcal{F}_{\tau_a}\right]\\
&= \varphi\left(S_{\tau_a}^*\right)S_{\tau_a}^*+1-\phi\left(S_{\tau_a}^*\right)\\
&- \mathbb{E}\left[\varphi\left(S_{\tau_a}^*\vee\tilde{S}_{\tau_1}^*\right)S_{\tau_a}^*\vee\tilde{S}_{\tau_1}^*+1-\phi\left(S_{\tau_a}^*\vee\tilde{S}_{\tau_1}^*\right)\mid\mathcal{F}_{\tau_a}\right]\\
&= (1)-(2)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 6.8 :

$$\begin{aligned}
(2) &= \sum_{k>0} \mathbb{P}\left(S^*_{\tau_1} = k\right) \left\{\varphi\left(S^*_{\tau_a} \vee k\right) S_{\tau_a} \vee k + 1 - \phi\left(S^*_{\tau_a} \vee k\right)\right\} \\
&= \sum_{k>0} \frac{1}{k(k+1)} \left\{\varphi\left(S^*_{\tau_a} \vee k\right) S^*_{\tau_a} \vee k + 1 - \phi\left(S^*_{\tau_a} \vee k\right)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{S^*_{\tau_a}-1} \frac{\varphi\left(S^*_{\tau_a}\right) S^*_{\tau_a} + 1 - \phi\left(S^*_{\tau_a}\right)}{k(k+1)} \\
&+ \sum_{k=S^*_{\tau_a}}^{\infty} \frac{\varphi(k)\, k + 1 - \phi(k)}{k(k+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{S^*_{\tau_a}}\right) \left\{\varphi\left(S^*_{\tau_a}\right) S^*_{\tau_a} + 1 - \phi\left(S^*_{\tau_a}\right)\right\} \\
&+ \sum_{k=S^*_{\tau_a}}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k+1} + \frac{1 - \phi(k)}{k(k+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{S^*_{\tau_a}}\right) \left\{\varphi\left(S^*_{\tau_a}\right) S^*_{\tau_a} + 1 - \phi\left(S^*_{\tau_a}\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{S^*_{\tau_a}} \left(1 - \phi\left(S^*_{\tau_a}\right)\right), \text{ d'après le lemme 4.6} \\
&= \left(S^*_{\tau_a} - 1\right) \varphi\left(S^*_{\tau_a}\right) + 1 - \phi\left(S^*_{\tau_a}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\left[M_{\tau_a} - M_{\tau_{a+1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_a}\right] = \varphi\left(S^*_{\tau_a}\right) \tag{6.41}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u, u \leq g\right) f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S^*_g\right)\right] = \sum_{a \geq 0} \mathbb{E}\left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1(a)\, f_2\left(S^*_{\tau_a}\right) \varphi\left(S^*_{\tau_a}\right)\right] \tag{6.42}$$

En prenant $F \equiv 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q\left[f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S^*_g\right)\right] &= \sum_{a \geq 0} \mathbb{E}\left[f_1(a)\, f_2\left(S^*_{\tau_a}\right) \varphi\left(S^*_{\tau_a}\right)\right] \\
&= \sum_{a \geq 0} \sum_{k \geq 0} f_1(a) f_2(k) \varphi(k) \mathbb{P}\left(S^*_{\tau_a} = k\right) \\
&= \mathbb{1}_{k=0} \mathbb{1}_{a=0} \varphi(0) f_1(0) f_2(0) \\
&+ \sum_{a \geq 0} \sum_{k>0} \varphi(k) \left[\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^a - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^a\right] f_1(a) f_2(k)
\end{aligned}$$

La loi du couple $\left(\gamma_g, S^*_g\right)$ est donc :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_g = a, S^*_g = k\right) = \mathbb{1}_{k=0} \mathbb{1}_{a=0} \varphi(0) + \mathbb{1}_{k>0} \mathbb{1}_{a=0} \varphi(k) \left[\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^a - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^a\right] \tag{6.43}$$

Sommant sur a :

$$\mathbb{P}\left(S^*_g = k\right) = \varphi(k) \tag{6.44}$$

□

3.ii) Etudions la loi de $(X_u, u \leq g)$.

En reprenant la formule précédente :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u, u \leq g\right) f_1\left(\gamma_g\right) f_2\left(S^*_g\right)\right] \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{a\geq 0} Q^*\left(S^*_g = k, \gamma_g = a\right) f_1(a) f_2(k) \mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u, u \leq g\right) \mid S^*_g = k, \gamma_g = a\right] \\
&= \sum_{a\geq 0} \mathbb{E}\left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) f_1\left(a\right) f_2\left(S^*_{\tau_a}\right) \varphi\left(S^*_{\tau_a}\right)\right] \\
&= \sum_{a\geq 0}\sum_{k\geq 0} f_1(a) f_2(k) \mathbb{P}\left(S^*_{\tau_a} = k\right) \varphi(k) \mathbb{E}\left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) \mid S^*_{\tau_a} = k\right]
\end{aligned}$$

Et donc, d'après ce que l'on a fait plus haut, on a :

$$\mathbb{E}^Q\left[F\left(X_u, u \leq g\right) \mid S^*_g = k, \gamma_g = a\right] = \mathbb{E}\left[F\left(X_u, u \leq \tau_a\right) \mid S^*_{\tau_a} = k\right] \tag{6.45}$$

ce qui démontre le point 3.iii du Théorème 6.2. □

3.iii) Achevons la démonstration du Théorème 6.2
Pour démontrer les derniers points, il suffit de prouver le résultat donné dans le lemme suivant et la suite est identique au raisonnement du point 3.ii du Théorème 4.1.

LEMME 6.9. *Soit p un entier strictement positif. Alors, la loi de $(X_n, n < T_p)$ conditionnellement à $\{T_p < T_0\}$ est la même sous $\mathbb{P}_1$ et sous Q^*_1.*

Démonstration du lemme 6.9.

$$\begin{aligned}
Q^*_1\left(F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0\right) &= \frac{Q^*_1\left(F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\right)}{Q^*_1\left(T_p < T_0\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_1\left[F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0} M_{T_0}\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} M_{T_0}\right]}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
M_{T_0} &= \varphi\left(S^*_{g_{T_0}}\right)|X_{T_0}| + \varphi\left(S^*_{T_0}\right)\left(S^*_{T_0} - |X_{T_0}|\right) + 1 - \phi\left(S^*_{T_0}\right) \\
&= \varphi\left(S^*_{T_0}\right) S^*_{T_0} + 1 - \phi\left(S^*_{T_0}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} M_{T_0} \mid \mathcal{F}_{T_p}\right] &= \mathbb{1}_{T_p<T_0} \mathbb{E}_p\left[M_{T_0}\right], \text{ d'après la propriété de Markov forte} \\
&= \mathbb{1}_{T_p<T_0} \mathbb{E}_p\left[\varphi\left(S^*_{T_0}\right) S^*_{T_0} + 1 - \phi\left(S^*_{T_0}\right)\right] \\
&= \mathbb{1}_{T_p<T_0} \sum_{k\geq p} \varphi\left(k\right) k + 1 - \phi\left(k\right) \mathbb{P}_p\left(S^*_{T_0} = k\right)
\end{aligned}$$

Comme $p > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p\left(S^*_{T_0} = k\right) &= \mathbb{P}_p\left(S_{T_0} = k\right) \\
&= \frac{p}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.6, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} M_{T_0} \mid \mathcal{F}_{T_p}\right] &= \mathbb{1}_{T_p<T_0} \sum_{k\geq p} \varphi\left(k\right) k + 1 - \phi\left(k\right) \frac{p}{k(k+1)} \\
&= \mathbb{1}_{T_p<T_0}\left(1 - \phi(p)\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q_1^* \left(F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0 \right) &= \frac{\mathbb{E}_1 \left[F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0} \left(1 - \phi(p)\right) \right]}{\mathbb{E}_1 \left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} \left(1 - \phi(p)\right) \right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_1 \left[F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0} \right]}{\mathbb{E}_1 \left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} \right]} \\ &= \mathbb{E}_1 \left[F\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0 \right] \end{aligned}$$

□

7. Pénalisation par une fonction du temps local

7.1. Notation.

Ici, la fonctionnelle G_p est une fonction du "temps local" en 0 de la marche aléatoire, c'est à dire que :

$$G_p := h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p \geq 0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p \leq 0}$$

avec, pour tout a réel :

$$a^+ = 0 \vee a,\ a^- = -\left(0 \wedge a\right).$$

et où h^+ et h^- sont deux fonctions définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(h^+(k) + h^-(k)) = 1$$

De plus, on pose :

$$H(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x}(h^+(k) + h^-(k))$$

Nous appellons ici le processus du temps local en 0, noté $(L_n, n \geq 0)$, le processus défini par la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_0 & = & 0 \\ L_{n+1} & = & L_n + \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=1} + \mathbb{1}_{X_n=0, X_{n+1}=-1} = L_n + \mathbb{1}_{X_n=0} \quad si \quad n \neq 0 \end{array} \right.$$

Pour tout $n \geq 0$, L_n est la somme du nombre de montés de 0 à 1 et du nombre de descentes de 0 à -1 avant n. Nous obtenons :

Definition 7.1. On rappelle que ce que l'on appelle marche de Bessel* de dimension 3 : c' est la chaîne de Markov notée $(\tilde{R}_n, n \geq 0)$ définie par les probabilités de passage suivantes :
.$\mathbb{P}_0(\tilde{R}_1 = 1) = 1$
.Si $x \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x + 1 \mid \tilde{R}_n = x) & = & \frac{1}{2}\frac{x+1}{x} \\ \mathbb{P}(\tilde{R}_{n+1} = x - 1 \mid \tilde{R}_n = x) & = & \frac{1}{2}\frac{x-1}{x} \end{array} \right.$$

7.2. Démonstration du Théorème 1.2.

1.i) Vérifions déjà que $\left(M_n^{h^+,h^-}, n \geq 0\right)$ est une martingale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-}] &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-}\mathbb{1}_{X_n\geq 1}] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-}\mathbb{1}_{X_n\leq -1}] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-}\mathbb{1}_{X_n=0,X_{n+1}=1}] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}^{h^+,h^-}\mathbb{1}_{X_n=0,X_{n+1}=-1}] \\
&:= (A)+(B)+(C)+(D)
\end{aligned}$$

Si on pose, $Y_{n+1} = X_{n+1} - X_n$, Y_n est centrée et indépendante de $\mathcal{F}_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(A) &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[X_{n+1}^+ h^+(L_{n+1}) + X_{n+1}^- h^-(L_{n+1}) + 1 - H(L_{n+1})\mathbb{1}_{X_n\geq 1})] \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(X_n + Y_{n+1})^+ h^+(L_n) + 0\times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n\geq 1})] \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(X_n + Y_{n+1}) h^+(L_n) + 0\times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n\geq 1})] \\
&= [(X_n)^+ h^+(L_n) + 0\times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n\geq 1}] + \mathbb{E}[Y_{n+1})]]h^+(L_n) \\
&= (X_n)^+ h^+(L_n) + 0\times h^-(L_n) + (1 - H(L_n))\mathbb{1}_{X_n\geq 1}
\end{aligned}$$

En faisant le même raisonnement pour (B), on obtient :

$$(B) = (X_n)^- h^+(L_n) + 0\times h^-(L_n) + 1 - H(L_n)\mathbb{1}_{X_n\leq -1}$$

On s'intéresse maintenant à la partie (C) :

$$\begin{aligned}
(C) &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[X_{n+1}^+ h^+(L_{n+1}) + X_{n+1}^- h^-(L_{n+1}) + 1 - H(L_{n+1})\mathbb{1}_{X_n=0,X_{n+1}=1}] \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(X_n+1)^+ h^+(L_n+1) + (X_n+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n+1)\mathbb{1}_{X_n=0,X_{n+1}=1}] \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}[(0+1)^+ h^+(L_n+1) + (0+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) \\
&- \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0,Y_{n+1}=1}] \\
&= [(0+1)^+ h^+(L_n+1) + (0+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) \\
&- \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\mathbb{P}(Y_{n+1}=1) \\
&= [(0+1)^+ h^+(L_n+1) + (0+1)^- h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) \\
&- \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\frac{1}{2} \\
&= [h^+(L_n+1) + 1 - H(L_n) - \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De la même façon on obtient que :

$$(D) = [h^-(L_n+1) + 1 - H(L_n) - \frac{1}{2}(h^+(L_n+1) + h^-(L_n+1))\mathbb{1}_{X_n=0}]\frac{1}{2}$$

Ainsi, la somme de (A),(B),(C) et (D) est égale à $M_n^{h^+,h^-}$. Le fait que $(M_n^{h^+,h^-}, n \geq 0)$ soit positive résulte immédiatement des définitions des fonctions h^+, h^- et H. □

1.ii) On va maintenant montrer la formule 1.8 du Théorème 1.2.

Pour cela, nous utiliserons les résultats suivants :

LEMME 7.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(L_n = k\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\left(\frac{2}{n\pi}\right)}$$

LEMME 7.3. *Soit $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} h(k) < \infty$ et soient a positif et x un élément de $\mathbb{Z}$. Alors :*

$$\mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}] \underset{n\to\infty}{\sim} h(a)x^+\sqrt{\left(\frac{2}{n\pi}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}\sum_{k=1+a}^{\infty} h(k)$$

$$\mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \leq 0}] \underset{n\to\infty}{\sim} h(a)x^-\sqrt{\left(\frac{2}{n\pi}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}\sum_{k=1+a}^{\infty} h(k)$$

Démonstration du lemme 7.2.
Posons $\gamma_n = |\{p \leq n, X_p = 0\}|$ où $|A|$ est le cardinal de A. γ_n est ainsi le nombre de visites en 0 avant l'instant n.
Il est clair que :

$$L_n = \gamma_n \mathbb{1}_{X_n \neq 0} + (\gamma_n - 1)\mathbb{1}_{X_n = 0} = \gamma_n - \mathbb{1}_{\{X_n = 0\}} \tag{7.1}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_n = k) &= \mathbb{P}(\gamma_n = k, X_n \neq 0) + \mathbb{P}(\gamma_n = k+1, X_n = 0) &(7.2)\\ &= \mathbb{P}(\gamma_n = k) - \mathbb{P}(\gamma_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(\gamma_n = k+1, X_n = 0) &(7.3)\end{aligned}$$

Nous allons étudier la loi de γ_n. On définit la suite $(V_n, n \geq 0)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V_0 & = & 0 \\ V_{n+1} & = & \inf\{k > 0, X_{V_n+k} = 0\} \end{array} \right.$$

On pose $T_i = \inf(k \geq 0, X_n = i)$. Grâce à la symétrie de la marche aléatoire et la propriété de Markov, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 = k) &= \mathbb{P}(V_1 = k, X_1 = 1) + \mathbb{P}(V_1 = k, X_1 = -1)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(V_1 = k \mid X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(V_1 = k \mid X_1 = -1)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(T_0 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}(T_0 = k-1)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(T_1 = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(T_1 = k-1)\\ &= \mathbb{P}_0(T_1 = k-1)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$V_1 \overset{\mathcal{L}}{=} T_1 + 1 \tag{7.4}$$

Pour plus de clarté notons $(X_n^{(1)}, n \geq 0) = (X_n, n \geq 0)$ et définissons $(X_n^{(k)}, n \geq 0)$ par :

$$\forall n,\ X_n^{(k)} = X_{V_k+n} \tag{7.5}$$

Soit $T_{(i)}^{(k)} = \inf\left\{k \geq 0, X_n^{(k)} = i\right\}$.
Par un raisonnement identique au précédent, on prouve que :

$$V_2 \overset{\mathcal{L}}{=} T_1^{(2)} + 1 \tag{7.6}$$

De plus, d'après la propriété de Markov forte, $(X_n^{(2)}, n \geq 0)$ est indépendante de $\mathcal{F}_{V_1}$ et donc :

$$V_1 + V_2 \overset{\mathcal{L}}{=} T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + 2 \tag{7.7}$$

D'où, par récurrence :

$$V_1 + V_2 + ... + V_k \overset{\mathcal{L}}{=} T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + ... + T_1^{(k)} + k \tag{7.8}$$

D'autre part, on a de manière évidente que :

$$T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + ... + T_1^{(k)} \overset{\mathcal{L}}{=} T_k \tag{7.9}$$

Ainsi (7.2) devient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\gamma_n = k) &= \mathbb{P}(V_1 + ... + V_k \leq n < V_1 + ... + V_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_k + k \leq n < T_{k+1} + k + 1) \\ &= \mathbb{P}(T_k \leq n - k, T_{k+1} > n - k - 1) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-k} \geq k, S_{n-k-1} \leq k) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-k} = k, S_{n-k-1} \leq k) + \mathbb{P}(S_{n-k} = k + 1, S_{n-k-1} \leq k) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-k} = k) + \mathbb{P}(T_{k+1} = n - k)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = k) + \mathbb{P}(T_{k+1} = n - k) - \mathbb{P}(\gamma_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(\gamma_n = k + 1, X_n = 0) \tag{7.10}$$

D'après [**Fel50**] pp. 89, on sait que le temps de premier passage en r est égal à n avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(T_r = n\right) := \varphi_{r,n} = \frac{r}{n} C_n^{\frac{n+r}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{7.11}$$

et que le $r-$ième retour en 0 a lieu à l'instant n avec la probabilité :

$$\varphi_{r,n-r} = \frac{r}{n-r} C_{n-r}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} \tag{7.12}$$

Mais d'après le lemme 3.6 :

$$\varphi_{r,n} \underset{n\to\infty}{\sim} r\left(\frac{2}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \mathbb{P}(S_{n-k} = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent, d'après (7.10) :

$$\mathbb{P}(L_n = k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.13}$$

□

Démonstration du lemme 7.3.

Tout d'abord, grâce à la symétrie de X et $-X$, il suffit de montrer une seule des deux équivalences.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}] &= \mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}\mathbb{1}_{T_0 > n}] \\ &+ \mathbb{E}_x[h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}\mathbb{1}_{T_0 \leq n}] \\ &:= (1)_n + (2)_n\end{aligned}$$

On a :

$$h(L_n + a)\mathbb{1}_{X_n \geq 0}\mathbb{1}_{T_0 > n} = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ h(a)\mathbb{1}_{T_0 > n} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(1)_n : \quad &= h(a)\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{P}_x(T_0 > n) \\ &= h(a)\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{P}_0(T_x > n) \\ &= h(a)\mathbb{1}_{x>0}\mathbb{P}_0(x > S_n) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} x\mathbb{1}_{x>0}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} x^+\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

D'autre part, soit

$$\widetilde{X}_n := X_{n+T_0} - X_{T_0} = X_{n+T_0}$$

D'après la propriété de Markov forte, $(\widetilde{X}_n, n \geq 0)$ est une marche aléatoire standard indépendante de $\mathcal{F}_{T_0}$. Soit $\widetilde{L}$ son temps local en 0. Alors :

$$\begin{aligned}(2)_n &= \mathbb{E}_x[h(\widetilde{L}_{n-T_0}+a)\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{n-T_0}\geq 0}\mathbb{1}_{T_0\leq n}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{T_0\leq n}\widetilde{\mathbb{E}}_0[h(\widetilde{L}_{n-T_0}+a)\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{n-T_0}\geq 0}]]\end{aligned}$$

Posons :

$$g(n) = \mathbb{E}_0[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n\geq 0}]$$

Par symétrie, on a :

$$\begin{aligned}g(n) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_0[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n\geq 0}] + \mathbb{E}_0[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n\leq 0}] \\ &= \frac{1}{2}\{\mathbb{E}_0[h(L_n+a)] - \mathbb{E}_0[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n=0}]\} \qquad (7.14)\end{aligned}$$

Or :

$$\mathbb{E}_0[h(L_n+a)\mathbb{1}_{X_n=0}] = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(L_n=k, X_n=0)$$

Et d'après le lemme 7.2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_n=k, X_n=0) &= \mathbb{P}(X_n=0, \gamma_n=k+1) \\ &= \varphi_{k+1,n-k+1} \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} (k+1)\left(\frac{2}{\pi n^3}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Pour tout $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$\mathbb{P}\left(L_n=k\right) = \mathbb{P}\left(S_{n-k}=k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(C_{n-k}^{\frac{n}{2}} \vee C_{n-k}^{\frac{n-1}{2}}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(C_{n}^{\frac{n}{2}} \vee C_{n}^{\frac{n-1}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(S_n=0\right)$$

Ainsi, pour n assez grand :

$$\left(\frac{\pi n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{P}\left(L_n=k\right)h(a+k) \leq 2h(a+k)$$

Et comme $\sum_{k\geq 1} h(k) < \infty$, on applique le Théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}_0[h(L_n+a)] &= \left(\frac{\pi n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(L_n=k)h(a+k) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k\geq 1+a} h(k)\end{aligned}$$

De cette façon, il est clair que le deuxième terme de (7.14) est négligeable par rapport au premier ce qui achève la démonstration. □

Grâce à ces deux lemmes, le premier point du Théorème 1.2 se démontre aisément :
On pose $\widetilde{X}_k = X_{k+n} - X_n$ et soit $\widetilde{L}$ le temps local associé à $\left(\widetilde{X}_k, k \geq 0\right)$, on applique les deux

lemmes précédents avec :

$$\begin{aligned} a &\longleftrightarrow L_n \\ x &\longleftrightarrow X_n \\ p &\longleftrightarrow p-n \\ (X_n, n\geq 0) &\longleftrightarrow (\widetilde{X}_n, n\geq 0) \\ (L_n, n\geq 0) &\longleftrightarrow (\widetilde{L}_n, n\geq 0) \end{aligned}$$

On a :

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p\geq 0}+h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p\leq 0}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}(h^+(L_n+\widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}\geq 0}+h^-(L_n+\widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}\leq 0})]$$
$$= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\widetilde{\mathbb{E}}_{X_n}(h^+(L_n+\widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}\geq 0} + h^-(L_n+\widetilde{L}_{p-n})\mathbb{1}_{\widetilde{X}_{p-n}\leq 0})]$$
$$\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} [X_n^+ h^+(L_n) + X_n^- h^-(L_n) + \frac{1}{2}\sum_{k=L_n+1}^{\infty}(h^+(k)+h^-(k))]$$

Il suffit de prendre $n=0$ et $\Lambda_0=\Omega$ dans la formule précédente et ainsi le dénominateur de la formule (1.8) est équivalent à :

$$\mathbb{E}_x[(h^+(L_p)\mathbb{1}_{X_p\geq 0} + h^-(L_p)\mathbb{1}_{X_p\leq 0})] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.15}$$

et en effectuant le quotient de ces deux équivalences on obtient le premier point du Théorème 1.2.

□

2.i) Montrons que L_∞ est fini p.s. sous Q^{h^+,h^-} et que $Q^{h^+,h^-}(L_\infty = k) = \frac{1}{2}(h^+(k)+h^-(k))$.

On pose $\tau_l = \inf\{k\geq 0, L_k = l\}$. Alors :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(L_n\geq l) &= Q_0^{h^+,h^-}(\tau_l\leq n) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}M_{\tau_l}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}(1-H(l)+X^+_{\tau_l\leq n}h^+(l)+X^-_{\tau_l\leq n}h^-(l)] \end{aligned}$$

Or, par symétrie :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_l\leq n) &= \mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=1)+\mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=-1) \\ &= 2\mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_l\leq n) &= \mathbb{P}(\tau_l\leq n, X_{\tau_l}=1) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(L_n\geq l) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}](1-H(l)) + \mathbb{E}[X^+_{\tau_l\wedge n}\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}]h^+(l) + \mathbb{E}[X^-_{\tau_l\wedge n}\mathbb{1}_{\tau_l\leq n}]h^-(l) \\ &= (1-H(l))\mathbb{P}(\tau_l\leq n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau_l\leq n)(h^+(l)+h^-(l)) \\ &= (1-H(l-1))\mathbb{P}(\tau_l\leq n) \end{aligned} \tag{7.16}$$

Mais, la marche aléatoire $(X_n, n\geq 0)$ étant récurrente, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\tau_l\leq n) = 1,$$

et donc, d'après (7.16) :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Q_0^{h^+,h^-}(L_n\geq l) &= Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty\geq l) \\ &= 1-H(l-1) \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l) &= Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty \geq l) - Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty \geq l+1) \\ &= H(l) - H(l-1) \\ &= \frac{1}{2}(h^+(l) + h^-(l)) \end{aligned}$$

□

2.ii) Effectuons l'étude du processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^{h^+,h^-}.

Pour cela, on a besoin des trois lemmes suivants :

LEMME 7.4. *Sous $\mathbb{P}_1$ conditionnellement à $\{T_p \leq T_0\}$, la loi de $(X_n, 0 \leq n \leq T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3 (au sens de la Définition 7.1).*

LEMME 7.5. *Sous $Q_1^{h^+,h^-}$ conditionnellement à $\{T_p \leq T_0\}$ la loi de $(X_n, 0 \leq n \leq T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3(au sens de la Définition 7.1).*

LEMME 7.6. *Posons $\Gamma^+ := \{X_{n+g} > 0, \forall n > 0\}$ et $\Gamma^- := \{X_{n+g} < 0, \forall n > 0\}$ Alors :*

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k) \tag{7.17}$$

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^-) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^-(k) \tag{7.18}$$

Démonstration du lemme 7.4.
cf. [**LeG85**] □

Démonstration du lemme 7.5.
Soient f et G deux fonctions de $\mathbb{Z}$ (respectivement $\mathbb{Z}^n$) dans $\mathbb{R}^+$. Alors, d'après la définition de la probabilité Q et grâce au Théorème d'arrêt de Doob :

$$\begin{aligned} Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0] &= \frac{Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}]}{Q_1^{h^+,h^-}(T_p < T_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0} M_{T_0}^{h^+,h^-}]}{\mathbb{P}_1(\mathbb{1}_{T_p<T_0} M_{T_0}^{h^+,h^-})} \end{aligned}$$

or :

$$M_{T_0}^{h^+,h^-} = 1 - H(1)$$

i.e. $M_{T_0}^{h^+,h^-}$ est constante. Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0] &= \frac{\mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}(1-H(1))]}{\mathbb{P}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}(1-H(1))\right]} \\ &= \frac{\mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p<T_0}]}{\mathbb{P}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0}\right]} \\ &= \mathbb{P}_1[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0] \end{aligned}$$

□

D'autre part, comme :

$$Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_0 = \infty] = \lim_{p\to\infty} Q_1^{h^+,h^-}[G(X_1,...,X_n)f(X_{n+1})\mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0]$$

on en déduit que $(X_n, n \geq 0)$ sachant que $\{T_0 = \infty\}$ est une marche de Bessel* de dimension 3.

Démonstration du lemme 7.6.
Puisque g est fini Q^{h^+,h^-} p.s. et que $X_n \neq 0$ pour $n > g$, on a :

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+) = \lim_{n\to\infty} Q_0^{h^+,h^-}(X_n > 0) \tag{7.19}$$

Or :

$$\begin{aligned} Q_0^{h^+,h^-}(X_n > 0) &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0} M_n^{h^+,h^-}] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}(1 - H(L_n))] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0} X_n^+ h^+(L_n)] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}(1 - H(L_n))] + \mathbb{E}_0[X_n^+ h^+(L_n)] \end{aligned}$$

Comme :

$$\mathbb{1}_{X_n>0}(1 - H(L_n)) \leq 1 - H(L_n) \leq 1$$

d'après le Théorème de convergence dominée on a :

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{X_n>0}(1 - H(L_n))] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.20}$$

Grâce au premier point du Théorème 1.2 :

$$M_n^{h^+,0} = 1 - \widetilde{H}(L_n) + X_n^+ h^+(L_n)$$

où $\widetilde{H}(L_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n} h^+(k)$, est une martingale (il n'est pas nécessaire que $\lim_{n\to\infty} \widetilde{H}(n) = 1$ pour cela).
Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[M_n^{h^+,0}] &= \mathbb{E}_0[M_1^{h^+,0}] \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^+(1) + \mathbb{E}_0[X_1^+ h^+(L_1)] \\ &= 1 - \frac{1}{2}h^+(1) + \frac{1}{2}h^+(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[\tilde{H}(L_n)] &= \mathbb{E}_0[X_n^+ h^+(L_n)] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_0[\sum_{k=1}^{L_n} h^+(k)] \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k) \end{aligned}$$

Cette somme étant finie, d'après le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_0[\tilde{H}(L_n)] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k) \tag{7.21}$$

Ainsi, d'après (7.19)

$$Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} h^+(k)$$

□

2.ii.a) Montrons les points 2.ii.a et 2.ii.b du Théorème 1.2 : Soient F et G deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{E}_0^Q[F(X_{g+1},...,X_{g+n})G(X_{n+g+1})] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},X_{k+2},...,X_{k+n})G(X_{k+g+1})\mathbb{1}_{g=k}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},X_{k+2},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1})\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=1}]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},X_{k+2},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1})\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=-1}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1}) \mid g=k, X_{k+1}=1]Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=1)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_0^Q[F(X_{k+1},...,X_{k+n})G(X_{k+n+1}) \mid g=k, X_{k+1}=-1]Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=-1)$$

$$= \mathbb{E}_1^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty] \sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=1)$$

$$+ \mathbb{E}_{-1}^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty] \sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(g=k, X_{k+1}=-1)$$

$$= \mathbb{E}_1^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty] \sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^+)$$

$$+ \mathbb{E}_{-1}^Q[F(X_0,X_1,...,X_{n-1})G(X_n) \mid T_0=\infty] \sum_{k=0}^{\infty} Q_0^{h^+,h^-}(\Gamma^-)$$

□

2.ii.b) On va terminer la démonstration en montrant que conditionnellement à $\{L_\infty = l\}$, sous Q^{h^+,h^-}, $(X_u, u < g+1)$ est une marche aléatoire standard arrêtée lorsque son temps local atteint le niveau l.
Soit F une fonction sur $\mathbb{Z}^n$ et soit l un élément de $\mathbb{Z}$. D'après la définition de Q et le Théorème d'arrêt, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}] &= \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}M_{\tau_l}^{h^+,h^-}] \\
&= \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}(1-H(l)+\frac{1}{2}(h^+(l)+h^-(l))] \\
&= \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}](1-H(l-1))
\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne résulte d'un raisonnement analogue à celui de la démonstration du point 2.i.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l} \mid L_\infty = l] &= \frac{\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}\mathbb{1}_{\tau_{l+1}=\infty}]}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\infty}] - \mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}]}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}M_{\tau_l}] - \mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}M_{\tau_{l+1}}]}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}](1 - H(l-1) - 1 + H(l))}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}](\frac{1}{2}(h^+(l) + h^-(l))}{Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l)}
\end{aligned}$$

Comme $Q_0^{h^+,h^-}(L_\infty = l) = \frac{1}{2}(h^+(l) + h^-(l))$, on a immédiatement que :

$$\mathbb{E}_0^Q[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l} \mid L_\infty = l] = \mathbb{E}_0[F(X_1,...,X_n)\mathbb{1}_{n<\tau_l}] \tag{7.22}$$

□

8. Pénalisation par la longueur des excursions

8.1. Notations. Pour $n \geq 0$, on note g_n (respectivement d_n), le dernier zero avant n (respectivement le premier zéro après n).

$$g_n := \sup\{k \leq n, X_k = 0\} \tag{8.1}$$
$$d_n := \inf\{k > n, X_k = 0\} \tag{8.2}$$

Ainsi, $d_n - g_n$ définit la longueur de l'excursion qui enjambe n. On pose :

$$\Sigma_n = \sup\{d_k - g_k, d_k \leq n\} \tag{8.3}$$

i.e. Σ_n est la plus grande excursion avant g_n. On peut aussi remarquer que :

$$\Sigma_n = \Sigma_{g_n} \tag{8.4}$$

Définissons $(A_n, n \geq 0)$, le processus de l'âge :

$$A_n = n - g_n \tag{8.5}$$

On note la filtration naturelle de ce processus $\mathcal{A}_n = \sigma(A_n, n \geq 0)$.
On note :

$$A_n^* = \sup_{k \leq n} A_k \tag{8.6}$$

On remarque que :

$$A_n^* = (\Sigma_n - 1) \vee (n - g_n) \tag{8.7}$$

et donc :

$$A_{g_n}^* = \Sigma_{g_n} - 1 \tag{8.8}$$

Dans ce qui suit, $\tilde{T}_0$ est une copie de T_0, indépendante de $\mathcal{F}_n$, $\gamma_l := \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$ est le nombre de visite en 0 avant n, $\tau = \inf\{n > T_0, X_n = 0\}$ le premier retour en 0 et pour plus de clarté, on note :

$$\mathbb{E}[|X_x| \mid \tau > x] = \theta(x) \tag{8.9}$$

8.2. Démonstration du Théorème 1.3.

1.i) Pour démontrer la formule 1.12, nous avons besoin de la :

PROPOSITION 8.1.

$$\mathbb{P}(\Sigma_k \leq x) \underset{k\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[|X_x| \mid \tau > x\right] \tag{8.10}$$

Pour démontrer cette Proposition, on utilise le lemme suivant :

LEMME 8.2. *Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \geq 0$ et tout $k > 0$:*

$$\mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid A_n = k\right] = \mathbb{E}_0\left[f(X_k) \mid \tau > k\right] \tag{8.11}$$

Démonstration du lemme 8.2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid A_n = k\right] &= \mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid n - g_n = k\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[f(X_n) \mid X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} \neq 0, ..., X_n \neq 0\right], \text{ d'après la propriété de Markov} \\
&= \mathbb{E}_0\left[f(X_k) \mid \tau > k\right]
\end{aligned}$$

□

Démonstration de la Proposition 8.1.

Soit δ_β, une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre β, avec $1 > \beta > 0$ et telle que δ_β est indépendante de la marche X.

D'après (8.4) et (8.8), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(A^*_{g_{\delta_\beta}} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Sigma_{g_{\delta_\beta}} \leq x + 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Sigma_{g_{\delta_\beta}} \leq x\right) \quad \text{, car } x \text{ et } \Sigma_{g_{\delta_\beta}} \text{ sont tous les deux pairs} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\delta_\beta = k, \Sigma_k \leq x\right), \text{ toujours d'après (8.4).} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\delta_\beta = k\right) \mathbb{P}\left(\Sigma_k \leq x\right) \quad \text{, comme } \delta_\beta \text{ et } X \text{ sont indépendants.} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1-\beta)^{k-1} \beta \mathbb{P}\left(\Sigma_k \leq x\right)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(A^*_{g_{\delta_\beta}} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T^A_x \geq g_{\delta_\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\delta_\beta \leq d_{T^A_x}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\delta_\beta > d_{T^A_x}\right) \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{d_{T^A_x}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T^A_x} (1-\beta)^{T_0 \circ \theta_{T^A_x}}\right] \\
&= 1 - \mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T^A_x} \mathbb{E}_{X_{T^A_x}}\left[(1-\beta)^{T_0}\right]\right]
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Or d'après [**ALR04**] pour $0 < x < 1$, on a :

$$\mathbb{E}[x^{T_k}] = \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{-k} \tag{8.13}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{X_{T_x^A}}\left[(1-\beta)^{T_0}\right] &= \mathbb{E}_0\left[(1-\beta)^{T_{|X_{T_x^A}|}}\right] \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{1-(1-\beta)^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{2\beta}\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|} \qquad (8.14)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $X_{T_x^A}$ et $\mathcal{A}_{T_x^A}$ sont indépendants (cf. [**ALR04**])
Ainsi, la formule (8.12), devient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta} \leq x\right) &= 1-\mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\left(\frac{1+\sqrt{2\beta}\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right] \\
&= 1-\mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\right]\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta}\sqrt{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]
\end{aligned}$$

On cherche z tel que :

$$\mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(z)^{T_x^A}}\right] \qquad (8.15)$$

On rappelle que :

$$\mathrm{Argch}(x) = \ln\left\{x+\sqrt{x^2-1}\right\} \qquad (8.16)$$

En posant :

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{1}{1-\beta} \qquad (8.17)$$

alors :

$$\begin{aligned}
z &= \mathrm{Argch}\left(\frac{1}{1-\beta}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{1-\beta}+\sqrt{\frac{1}{(1-\beta)^2}-1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)
\end{aligned}$$

Toujours d'après [**ALR04**]

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(z)}\right)^{T_x^A}\right] = \mathbb{E}[\exp(zX_{T_x^A})] \qquad (8.18)$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[(1-\beta)^{T_x^A}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{X_{T_x^A}}\right] \qquad (8.19)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta}\leq x\right) &= 1-\frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{X_{T_x^A}}\right]}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{|X_{T_x^A}|}\right]-\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]\right]}{\frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{|X_{T_x^A}|}\right]+\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right)^{-|X_{T_x^A}|}\right]\right]}\end{aligned}$$

On remarque que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1+\sqrt{2\beta-\beta^2}}{1-\beta}\right]^k &\underset{\beta\to 0^+}{\sim} \left[1+\sqrt{2\beta}\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\right]^k\\ &\underset{\beta\to 0^+}{\sim} 1+k\sqrt{2\beta}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\Sigma_{\delta_\beta}\leq x\right)\underset{\beta\to 0^+}{\sim}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]\sqrt{2\beta} \tag{8.20}$$

On a donc obtenu :

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta)^{k-1}\beta\mathbb{P}\left(\Sigma_k\leq x\right)\underset{\beta\to 0^+}{\sim}\sqrt{2\beta}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right] \tag{8.21}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta)^{k}\mathbb{P}\left(\Sigma_k\leq x\right)\underset{\beta\to 0^+}{\sim}\sqrt{\frac{2}{\beta}}(1-\beta)\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right] \tag{8.22}$$

On va poser $\alpha=1-\beta$ de manière à appliquer le Théorème Taubérien 6.3, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k\mathbb{P}\left(\Sigma_k\leq x\right) &\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}\alpha\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]\\ &\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]\end{aligned}$$

On applique donc le Théorème Taubérien 6.3 avec $p=\frac{1}{2}$ et $C=\sqrt{2}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Sigma_k\leq x) &\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}k^{\frac{1}{2}-1}C\\ &\underset{\alpha\to 1^-}{\sim} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[|X_{T_x^A}|\right]\end{aligned}$$

□

Grâce à ce qui précède on peut achever la démonstration du point 1.i.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_p\leq x}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\left[\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n>p-n}+\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\leq(p-n)\wedge(x-A_n)}\mathbb{1}_{\Sigma_{p-n-T_0\circ\theta_n}\leq x}\right]\right]\\ &= (1)+(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n>p-n}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{P}_{|X_n|}\left(T_0>p-n\right)\right]\\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{|X_n|}{p^{\frac{1}{2}}}\right]\end{aligned}$$

$$(2) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\leq(p-n)\wedge(x-A_n)}\mathbb{1}_{\Sigma_{p-n-T_0\circ\theta_n}\leq x}\right]$$

Lorsque p tend vers l'infini, comme sous $\mathbb{P}$, $A_n<+\infty$ p.s. :

$$\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\leq(p-n)\wedge(x-A_n)}\sim\mathbb{1}_{T_0\circ\theta_n\leq x-A_n} \tag{8.23}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(2) &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{A_n\leq x}\mathbb{P}_{X_n}(\tilde{T}_0\leq x-A_n)\mathbb{P}\left(\Sigma_{p-n-T_0}\leq x\right)\right]\\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{A_n\leq x}\mathbb{P}_{X_n}(\tilde{T}_0\leq x-A_n)\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\theta(x)\right]\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\mathbb{1}_{\Sigma_p\geq x}]}{\mathbb{E}_0[\Sigma_p\geq x]}=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\right] \tag{8.24}$$

□

1.ii) On va maintenant montrer que $(M_n, n\geq 0)$ est bien une martingale. Pour cela, on doit faire attention à la parité de $n+1$ et on va donc décomposer en deux cas. Rappelons tout d'abord que $\theta(x)=\mathbb{E}\left[|X_x|\,|\tau>x\right]$. Supposons que $n+1$ est impair :

$$M_{n+1}=\left\{\frac{|X_{n+1}|}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\leq x} \tag{8.25}$$

Comme $X_{n+1}\neq 0$, on a $\Sigma_{n+1}=\Sigma_n$.
Tout d'abord, on peut voir facilement que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_{n+1}|\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}X_{n+1}-\mathbb{1}_{X_n<0}X_{n+1}+\mathbb{1}_{X_n=0}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}-\mathbb{1}_{X_n<0}X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]+\mathbb{1}_{X_n=0,\Sigma_n\leq x}\\ &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\left[\mathbb{1}_{X_n>0}X_n-\mathbb{1}_{X_n<0}X_n\right]+\mathbb{1}_{X_n=0}\\ &= \mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}|X_n|+\mathbb{1}_{X_n=0}\end{aligned}$$

On va donc maintenant s'intéresser à :

$$\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\leq x,\Sigma_{n+1}\leq x}$$

en remarquant qu'ici $A_{n+1}=A_n+1$ et que $X_n=0$ implique que $A_n=0$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\leq x,\Sigma_{n+1}\leq x}=\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x}\\ &=\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,X_{n+1}=X_n+1,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\\ &+\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,X_{n+1}=X_n-1,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\\ &+\mathbb{1}_{\{X_n=0,X_{n+1}=X_n+1,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0\leq x-1\right)+\mathbb{1}_{\{X_n=0,X_{n+1}=X_n-1,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0\leq x-1\right)\end{aligned}$$

En conditionnant par $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{n+1}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_{n+1}\right)\mathbb{1}_{A_{n+1}\leq x,\Sigma_{n+1}\leq x}|F_n\right] &= \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n=0,\Sigma_n\leq x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \leq x - 1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n=0,\Sigma_n\leq x\}}\frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - 1\right)\end{aligned}$$

On peut voir que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n, X_{n+1} = X_n + 1\right) &= \mathbb{P}_{X_n}\left(X_{n+1} = X_n + 1\right)\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n \mid X_{n+1} = X_n + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n \mid X_{n+1} = X_n + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)\end{aligned}$$

Si on effectue un raisonnement analogue avec $\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)$, si on note

$$(A) = \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\left\{\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right) + \mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n - 1\right)\right\},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}(A) &= \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n, X_{n+1} = X_n + 1\right)\\ &+ \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}p_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n, X_{n+1} = X_n - 1\right)\\ &= \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x-1,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right)\\ &= \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right) - \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n=x,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 = 0\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n=x,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 = 0\right) = 0$$

Par conséquent :

$$(A) = \mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,A_n\leq x,\Sigma_n\leq x\}}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_n\right) \tag{8.26}$$

Il reste donc à démontrer que :

$$\mathbb{1}_{\{X_n=0,\Sigma_n\leq x\}}\frac{1}{2}\left[\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \leq x - 1\right) + \mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x - 1\right)\right] = \mathbb{1}_{X_n=0,\Sigma_n\leq x}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right). \tag{8.27}$$

Pour cela, on va utiliser un résultat classique ([**Fel50**] pp.73-77)

$$\mathbb{P}\left(X_1 > 0, X_2 > 0, ..., X_{2n-1} > 0, X_{2n} = 2r\right) = \frac{1}{2}\left(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}\right) \tag{8.28}$$

où $p_{n,r} = \frac{1}{2^n} C_n^{\frac{n+r}{2}}$.
On va utiliser la formule (8.28) dans ce qui suit avec $x = 2n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau > x)\,\theta(x) &= \mathbb{P}(\tau > x)\,\mathbb{E}\left[|X_x| \mid \tau > x\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X_x| \mathbb{1}_{\{\tau > x\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_x \mathbb{1}_{\{\tau > x, X_x > 0\}}\right] - \mathbb{E}\left[X_x \mathbb{1}_{\{\tau > x, X_x < 0\}}\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[X_x \mathbb{1}_{\{\tau > x, X_x > 0\}}\right] \\
&= 2 \sum_{k>0, k \text{ pair}}^{x} k\mathbb{P}\left(X_x = k, \tau > x\right) \\
&= 4 \sum_{\ell > 0}^{n} \ell \mathbb{P}\left(X_{2n} = 2\ell, \tau > x\right) \\
&= 2 \sum_{\ell > 0}^{n} \ell \left(p_{2n-1, 2\ell-1} - p_{2n-1, 2\ell+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} \sum_{\ell > 0}^{n} \ell \left(C_{2n-1}^{n+\ell-1} - C_{2n-1}^{n+\ell}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(C_{2n-1}^{n+\ell-1} - C_{2n-1}^{n+\ell}\right) &= C_{2n-1}^{n} - C_{2n-1}^{n+1} + 2C_{2n-1}^{n+1} - 2C_{2n-1}^{n+2} + 3C_{2n-1}^{n+2} - 3C_{2n-1}^{n+3} \\
&+ \ldots + (n-1)C_{2n-1}^{2n-2} - (n-1)C_{2n-1}^{2n-1} + nC_{2n-1}^{2n-1} - nC_{2n-1}^{2n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} C_{2n-1}^{n+\ell} \\
&= 2^{2n-2}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\theta(x)\mathbb{P}\left(\tau > x\right) = 1 \tag{8.29}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) &= \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n+1} = 1)\mathbb{P}_1\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) \\
&+ \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n+1} = -1)\mathbb{P}_{-1}\left(\tilde{T}_0 \leq x-1\right) \\
&= \mathbb{P}_0(X_1 = 1, \tilde{T}_0 \leq x) + \mathbb{P}_0(X_1 = -1, \tilde{T}_0 \leq x) \\
&= \mathbb{P}_0(\tilde{T}_0 \leq x) \\
&= \mathbb{P}_0(\tau \leq x) \\
&= 1 - \mathbb{P}_0(\tau > x) \qquad (8.30)
\end{aligned}$$

Et donc, en reprenant (8.29) et (8.30) on a bien la formule (8.27).
On s'intéresse maintenant au cas où $n+1$ est pair :

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \mathbb{1}_{X_n>0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{X_n+1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{0}{\theta(x)}+1\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\le -3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{-X_n-1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n<0}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{1-X_n}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{0}{\theta(x)}+1\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\ge 3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{X_n-1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&= \mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{2}{\theta(x)}+\mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\ge 3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{X_n+1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{\mathbb{1}+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\le -3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\left\{\frac{-X_n-1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{2}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{-2}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_n\le -3}\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\left\{\frac{1-X_n}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\\
&+ \mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n\ge 3}\left\{\frac{X_n-1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right]=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{2}{\theta(x)}+\mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n\ge 3}\left\{\frac{2X_n}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}+\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n\le -3}\left\{\frac{-2X_n}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}+\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=-1}\left\{\frac{2}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{-2}\left(\tilde{T}_0\le x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\le x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\\
&+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\mid\mathcal{F}_n\right]\\
&+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\le x}\mid\mathcal{F}_n\right]
\end{aligned}$$

On remarque que sur $\{X_{n+1}=X_n+1\}\cap\{X_n=-1\}$:

$$\{\Sigma_{n+1}\le x\}=\{\Sigma_n\le x\}\cap\{d_n-g_n\le x\}=\{\Sigma_n\le x\}\cap\{n+1-g_n\le x\}=\{\Sigma_n\le x\}\cap\{A_n\le x-1\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\leq x} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=-1}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\\ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_{n+1}\leq x} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=1}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\right]\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\\ &+\mathbb{1}_{X_n\geq 3}\left\{\frac{X_n}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\right]\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\\ &+\mathbb{1}_{X_n\leq -3}\left\{\frac{-X_n}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\right]\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\\ &+\mathbb{1}_{X_n=-1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_{-2}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\right]\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\\ &=(1)+(2)+(3)+(4)\end{aligned}$$

Il faut remarquer que, comme précédemment :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{X_n\neq 0}\left\{\mathbb{P}_{X_n+1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}+\mathbb{P}_{X_n-1}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}&\\ =\mathbb{1}_{X_n\neq 0}\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n\right)\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}&\end{aligned}$$

On peut appliquer le raisonnement ci-dessus dans (1) et (4). En effet, on a pour (1) :

$$\begin{aligned}(1) &= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\left[\frac{1}{2}\mathbb{P}_2\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n-1\right)\right]\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\\ &= \mathbb{1}_{X_n=1}\left\{\frac{1}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n\right)\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x}\end{aligned}$$

et on peut appliquer le même raisonnement pour (4). On obtient donc que :

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]=\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)}+\mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0\leq x-A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\leq x} \tag{8.31}$$

A priori, on n'a pas exactement obtenu M_n car on a $\mathbb{1}_{A_n\leq x-1}$ au lieu de $\mathbb{1}_{A_n\leq x}$ mais ici, il est impossible que A_n soit égal à x. En effet, $A_n = n - g_n$ où n est impair et g_n est pair, donc A_n est impair. Etant donné que l'on a pris x pair, $\mathbb{1}_{A_n=x}=0$. On a donc bien obtenu M_n.
Enfin :

$$\forall n\geq 0,\ 0\leq M_n\leq \frac{n}{\theta(x)}+1 \tag{8.32}$$

et on a donc montré que $(M_n, n\geq 0)$ était une martingale positive.

□

2.i) Montrons que pour tout $y\leq x$, sous Q^x, $Q^x\left(\Sigma_\infty > y\right)=1-\frac{\mathbb{P}(\tau>x)}{\mathbb{P}(\tau>y)}$.

LEMME 8.3. *Pour tout $y\leq x$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[M_{T_y^A}\right]=1 \tag{8.33}$$

Démonstration du lemme 8.3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{T_y^A}\right] &= \mathbb{E}\left[\left\{\frac{|X_{T_y^A}|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_{T_y^A}\right)\mathbb{1}_{A_{T_y^A}\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^A}\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\{\frac{|X_{T_y^A}|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\mathbb{1}_{y\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^A}\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{|X_{T_y^A}|}{\theta(x)}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right] \\
&= \frac{\theta(y)}{\theta(x)} + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \tau > y\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \tau > y\right] \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 > x - y\right)\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\tilde{T}_0 > x - y \mid X_y\right]\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tilde{T}_0>x-y}\mathbb{1}_{\tau>y}\right]}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)} + 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > y)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Grâce à ce lemme, on peut montrer le point 2.i du Théorème 1.3.
En effet, si on pose $T_y^\Sigma := \inf\{n \geq 0, \Sigma_n > y\}$:

$$\begin{aligned}
Q^x\left(\Sigma_\infty > y\right) &= Q^x\left(T_y^\Sigma < \infty\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_y^\Sigma<\infty} M_{T_y^\Sigma}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T_y^\Sigma<\infty}\left\{\frac{|X_{T_y^\Sigma}|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_{T_y^\Sigma}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_{T_y^\Sigma}\right)\mathbb{1}_{A_{T_y^\Sigma}\leq x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^\Sigma}\leq x}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\{0+1\}\,\mathbb{1}_{\Sigma_{T_y^\Sigma}} \leq x\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\Sigma_{T_y^\Sigma} \leq x\right]
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma_{T_y^\Sigma} \leq x\right\} &= \left\{\Sigma_{T_y^A} \leq x\right\} \cap \left\{\theta_{T_y^A} \circ T_0 + y \leq x\right\}, \left\{\Sigma_{T_y^A} \leq x\right\} \text{ étant un événement de probabilité 1} \\
&= \left\{\theta_{T_y^A} \circ T_0 + y \leq x\right\}
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} Q^x\left(\Sigma_\infty > y\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\theta_{T_y^A}\circ T_0 + y \leq x}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\theta_{T_y^A}\circ T_0 + y \leq x} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Sigma_{X_{T_y^A}}\left[\mathbb{1}_{\tilde{T}_0 \leq x-y}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left[\tilde{T}_0 \leq x-y\right]\right] \end{aligned}$$

et d'après la démonstration du lemme 8.3, on a :

$$Q^x\left(\Sigma_\infty > y\right) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > y)} \tag{8.34}$$

□

2.ii) Il est maintenant facile de terminer la démonstration du point 2.

LEMME 8.4. *Pour tout $n \geq 0$, on a :*

$$Q^x\left(\Sigma_n \leq x\right) = 1 \tag{8.35}$$

Démonstration du lemme 8.4.
D'après la définition de la probabilité Q^x :

$$\begin{aligned} Q^x\left(\Sigma_n \leq x\right) &= \lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\Sigma_n \leq x, \Sigma_p \leq x\right)}{\mathbb{P}\left(\Sigma_p \leq x\right)} \\ &= \lim_{p\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\Sigma_p \leq x\right)}{\mathbb{P}\left(\Sigma_p \leq x\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

3) On va étudier le processus $(A_n, n \geq 0)$ sous Q^x.
3.i) Montrons que $A_\infty = \infty$ p.s.

LEMME 8.5. *Pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$:*

$$\mathbb{P}\left(A_{2n} = 2k\right) = \mathbb{P}\left(A_{2n+1} = 2k+1\right) = C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{8.36}$$

Démonstration du lemme 8.5.
D'après [**Fel50**] pp.79, "Arcsin law for last visit" :

$$\mathbb{P}\left(g_{2n} = 2k\right) = C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{8.37}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A_{2n} = 2k\right) &= \mathbb{P}\left(2n - g_{2n} = 2k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(g_{2n} = 2n - 2k\right) \\ &= C_{2n-2k}^{n-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A_{2n+1} = 2k+1\right) &= \mathbb{P}\left(2n+1-g_{2n+1} = 2k+1\right) \quad \text{, comme } g_{2n} = g_{2n+1} \\ &= \mathbb{P}\left(g_{2n} = 2n-2k\right) \end{aligned}$$

□

Pour montrer les points 2.iv.d et 2.iv.e, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 8.6. *Pour tout $p > 0$, on a :*

$$Q^x\left(g > p \mid \mathcal{F}_p\right) = \mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right)\frac{1}{M_p} \tag{8.38}$$

Démonstration du lemme 8.6.
Posons $T_0^{(p)} := \inf\{n > p, X_n = 0\}$, le premier 0 après p et rappelons que sous Q^x, $\{\Sigma_p \leq x\}$ est un événement de probabilité 1. Alors, pour tout $\Lambda_p \in \mathcal{F}_p$:

$$\begin{aligned}
Q^x\left(\{\Lambda_p\} \cap \{g > p\}\right) &= Q^x\left(\{\Lambda_p\} \cap \left\{T_0^{(0)} \circ \theta_p < \infty\right\}\right) \\
&= Q^x\left(\{\Lambda_p\} \cap \left\{T_0^{(p)} < \infty\right\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p} M_{T_0^{(p)}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p}\mathbb{1}_{\Sigma_{T_0^{(p)}} \leq x}\right], \text{ comme } \left\{\Sigma_{T_0^{(p)}} \leq x\right\} = \left\{\left(\Sigma_{g_p} \vee \left\{A_p + T_0^{(0)} \circ \theta_p\right\}\right) \leq x\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p}\mathbb{1}_{\Sigma_{g_p} \leq x}\mathbb{E}_{X_p}\left[\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right]\right], \text{ il est clair que } \Sigma_{g_p} = \Sigma_p, \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p}\mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x}\frac{\mathbb{P}_{X_p}\left[\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right]}{M_p} M_p\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p}\mathbb{1}_{\Sigma_p \leq x}\frac{\mathbb{P}_{X_p}\left[\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right]}{M_p}\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_p}\frac{\mathbb{P}_{X_p}\left[\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right]}{M_p}\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien :

$$Q^x\left(g > p \mid \mathcal{F}_p\right) = \mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0 \leq x - A_p\right)\frac{1}{M_p} \tag{8.39}$$

□

Ici, nous supposons que $p = 2l$ où $l \geq 0$, et nous ne donnerons pas la démonstration du cas pù $p = 2l + 1$, le calcul étant similaire (cf. lemme 8.5). D'après le lemme 8.6 :

$$\begin{aligned}
Q^x(g > p) &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{g>p} \mid \mathcal{F}_p\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right)\frac{1}{M_p}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{l\wedge\frac{x}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right)\mathbb{1}_{A_p=2k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x\right)\mathbb{1}_{A_p=0}\right] + \sum_{k=1}^{l\wedge\frac{x}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right)\mathbb{1}_{A_p=2k}\right] \\
&= \mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x\right)\mathbb{P}(A_p = 0) + \sum_{k=1}^{l\wedge\frac{x}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_p}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - A_p\right) | A_p = 2k\right]\mathbb{P}(A_p = 2k) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x\right)\mathbb{P}(A_p = 0) + \sum_{k=1}^{l\wedge\frac{x}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{2k}}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - 2k\right) | \tau > 2k\right]\mathbb{P}(A_p = 2k) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x\right)\mathbb{P}(A_p = 0) + \sum_{k=1}^{l\wedge\frac{x}{2}} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{2k}}\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x - 2k\right)\mathbb{1}_{\tau>2k}\right]}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\mathbb{P}(A_p = 2k) \\
&= \mathbb{P}_0\left(\tilde{T}_0^{(0)} \leq x\right)\mathbb{P}(A_p = 0) + \sum_{k=1}^{l\wedge\frac{x}{2}} \left[1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right]\mathbb{P}(A_p = 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{l\wedge\frac{x}{2}} \left[1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right]\mathbb{P}(A_p = 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{l\wedge\frac{x}{2}} C_{2l-2k}^{l-k} C_{2k}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^l \left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > 2k)}\right) \qquad (8.40)
\end{aligned}$$

On a donc la loi de g sous Q^x. Montrons que g est fini p.s. sous cette même probabilité. D'après la démonstration ci-dessus on a pour $p > 2$:

$$\begin{aligned}
Q^x(g > p) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_p \leq x}\left(1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > x)}{\mathbb{P}(\tau > A_p)}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_p} \leq x\right], \text{or sous } \mathbb{P},\ A_p \text{ tend vers l'infini p.s.}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
Q^x(g = \infty) &= \lim_{p\to\infty} Q^x(g > p) \\
&\leq \lim_{p\to\infty} \mathbb{P}(A_p \leq x) = 0
\end{aligned}$$

□

Remarquons que pour démontrer le résultat annoncé, on a du montrer le point 2.iii.(cf formule 8.40).

3.ii.a) Montrons que $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ a même loi sous $\mathbb{P}$ et sous Q^x. En effet, d'après la définition

de la probabilité Q^x, pour toute fonctionnelle F on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) \mathbb{E}\left[M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right],\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\left[M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right] = \mathbb{E}\left[M_{T_y^A}\right] = 1$, cf. lemme 8.3. □

b) On va maintenant prouver que $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ et $X_{T_y^A}$ sont indépendants sous $\mathbb{P}$ et sous Q^x : Soit G une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et rappelons que, d'après [**ALR04**], $X_{T_y^A}$ et $A_{T_y^A}$ sont indépendants. Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) G\left(X_{T_y^A}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] \mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A}\right] \mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right], \text{ cf. 2.iv.a} \\ &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] \mathbb{E}^{Q^x}\left[G\left(X_{T_y^A}\right)\right]\end{aligned}$$

□

c) Cherchons maintenant la loi de $X_{T_y^A}$ sous Q^x. On utilise les mêmes notations que dans les points précédents.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{Q^x}\left[G\left(X_{T_y^A}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G\left(X_{T_y^A}\right) M_{T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[G\left(X_y\right)\left\{\frac{|X_y|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mid \tau > y\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[G\left(X_y\right)\left\{\frac{|X_y|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mid \tau > y\right] \\ &= \sum_k G(k)\left\{\frac{|k|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_k\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mathbb{P}\left(X_y = k \mid \tau > y\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de $X_{T_y^A}$ sous Q^x vérifie :

$$\mathbb{P}\left(X_{T_y^A} = k\right) = \left\{\frac{|k|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_k\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right\} \mathbb{P}\left(X_y = k \mid \tau > y\right) \tag{8.41}$$

(La quantité $\mathbb{P}\left(X_y = k \mid \tau > y\right)$ est explicite et donnée dans [**Fel50**] pp. 77). □

d) On va maintenant calculer $Q^x\left(g > T_y^A\right)$, ce qui nous permet de démontrer le point 2.iv.e.

$$\begin{aligned}Q^x\left(g > T_y^A\right) &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{g > T_y^A} \mid \mathcal{F}_{T_y^A}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \frac{1}{M_{T_y^A}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_{T_y^A}}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{X_y}\left(\tilde{T}_0 \leq x - y\right) \mid \tau > y\right] \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}\left(\tau > x\right)}{\mathbb{P}\left(\tau > y\right)}\end{aligned} \tag{8.42}$$

□

e) Prouvons maintenant l'indépendance de $\left(A_n, n \leq T_y^A\right)$ et $\left\{g > T_y^A\right\}$ sous Q^x. Encore une fois, on se sert ici de l'indépendance de $X_{T_y^A}$ et $A_{T_y^A}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) \mathbb{1}_{g>T_y^A}\right] &= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) \mathbb{E}^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{g>T_y^A} \mid \mathcal{A}_{T_y^A}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) \mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right) \frac{1}{M_{T_y^A}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) \mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right) M_{T_y^A}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{P}_{T_y^A}\left(\tilde{T}_0 \leq x-y\right)\right], \text{ cf. a} \\
&= \mathbb{E}^{Q^x}\left[F\left(A_n, n \leq T_y^A\right)\right] Q^x\left(g > T_y^A\right)
\end{aligned}$$

□

4) Etudions le processus $(X_n, n \geq 0)$ sous Q^x.
4.i) Commençons par étudier la loi du processus $(X_n, n \geq g)$.
Rappelons le lemme 7.4 :

Sous $\mathbb{P}_1$, conditionnellement à $\{T_p \leq T_0\}$, la loi de $(X_n, 0 \leq n \leq T_p)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.

LEMME 8.7. *Sous Q_1^x, conditionnellement à $\{T_0 = \infty\}$, la loi de $(X_n, 0 \geq n)$ est une marche de Bessel* de dimension 3.*

Démonstration du lemme 8.7.
Soit G une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
Q_1^x\left(G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0\right) &= \frac{Q_1^x\left(G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0}\right)}{Q_1^x\left(T_p < T_0\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0} M_{T_0}\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} M_{T_0}\right]}, \text{ or } M_{T_0} = \mathbb{1}_{\Sigma_{T_0} \leq x} \\
&= \frac{\mathbb{E}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p<T_0} \mathbb{1}_{\Sigma_{T_0} \leq x}\right]}{\mathbb{E}_1\left[\mathbb{1}_{T_p<T_0} \mathbb{1}_{\Sigma_{T_0} \leq x}\right]} \\
&= \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0, \Sigma_{T_0} \leq x\right]
\end{aligned}$$

Si on passe à la limite quand p tend vers ∞ :

$$\begin{aligned}
Q_1^x\left(G\left(X_1, ..., X_n\right) \mid T_0 = \infty\right) &= \lim_{p \to \infty} Q_1^x\left(G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0\right) \\
&= \lim_{p \to \infty} \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right) \mathbb{1}_{n<T_p} \mid T_p < T_0, \Sigma_{T_0} \leq x\right] \\
&= \mathbb{E}_1\left[G\left(X_1, ..., X_n\right) \mid T_0 = \infty\right]
\end{aligned}$$

□

Soit F une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$ et posons $\Gamma^+ = \{X_n > 0, n > g\}$,$\Gamma^- = \{X_n < 0, n > g\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{g+1},...,X_{g+n}\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mathbb{1}_{g=k}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=1}\right]\\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mathbb{1}_{g=k}\mathbb{1}_{X_{k+1}=-1}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mid g=k, X_{k+1}=1\right]Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=1\right)\\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_{k+1},...,X_{k+n}\right)\mid g=k, X_{k+1}=-1\right]Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=-1\right)\\
&= \mathbb{E}_1^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right)\mid T_0=\infty\right]\sum_{k=0}^{\infty}Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=1\right)\\
&+ \mathbb{E}_{-1}^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right)\mid T_0=\infty\right]\sum_{k=0}^{\infty}Q_0^x\left(g=k, X_{k+1}=-1\right)\\
&= \mathbb{E}_1^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right)\mid T_0=\infty\right]Q_0^x\left(\Gamma^+\right)\\
&+ \mathbb{E}_{-1}^{Q^x}\left[F\left(X_0,...,X_n\right)\mid T_0=\infty\right]Q_0^x\left(\Gamma^-\right)
\end{aligned}$$

Il reste à voir que les événements $\Gamma^+ = \{X_n > 0, n > g\}$ et $\Gamma^- = \{X_n < 0, n > g\}$ sont symétriques sous Q_0^x et sont donc chacun de probabilité $\frac{1}{2}$.

Lemme 8.8.

$$Q_0^x\left(\Gamma^+\right) = Q_0^x\left(\Gamma^+\right) = \frac{1}{2} \tag{8.43}$$

Démonstration du lemme 8.8.
Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned}
Q_0^x\left(\Gamma^+\right) &= \lim_{n\to\infty} Q_0^x\left(X_n > 0\right)\\
Q_0^x\left(\Gamma^-\right) &= \lim_{n\to\infty} Q_0^x\left(X_n < 0\right)
\end{aligned}$$

Par définition de Q^x :

$$\begin{aligned}
Q_0^x\left(X_n > 0\right) &= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n>0}M_n\right]\\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\le x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\right]
\end{aligned}$$

Grâce à la symétrie de la marche aléatoire sous $\mathbb{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
Q_0^x\left(X_n > 0\right) &= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n>0}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\le x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\right]\\
&= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{X_n<0}\left\{\frac{|X_n|}{\theta(x)} + \mathbb{P}_{X_n}\left(\tilde{T}_0 \le x - A_n\right)\mathbb{1}_{A_n\le x}\right\}\mathbb{1}_{\Sigma_n\le x}\right]\\
&= Q_0^x\left(X_n < 0\right)
\end{aligned}$$

On a vu que sous Q^x, g est fini p.s., par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} Q^x\left(X_n = 0\right) = 0$$

Comme :

$$Q_0^x\left(X_n > 0\right) + Q_0^x\left(X_n < 0\right) + Q_0^x\left(X_n = 0\right) = 2Q_0^x\left(X_n > 0\right) + Q_0^x\left(X_n = 0\right) = 1$$

en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$Q_0^x\left(\Gamma^+\right)+Q_0^x\left(\Gamma^-\right)=2Q_0^x\left(\Gamma^+\right)=1$$

□

4.ii) On rappelle les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_n &:= |\{k\leq n, X_k=0\}| && (8.44)\\
\gamma_\infty &:= \lim_{n\to\infty}\gamma_n && (8.45)\\
\tau_1 &:= T_0 && (8.46)\\
\forall n\geq 2,\ \tau_n &:= \inf\{k\geq\tau_{n-1},\ X_k=0\} && (8.47)
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que conditionnellement à $\gamma_\infty=l$, $\{|X_u|, u\geq g\}$ est une marche aléatoire standard arrêtée à τ_l et conditionnée par $\Sigma_{\tau_l}\geq x$.
Soit F, une fonctionnelle sur $\mathbb{Z}^n$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\mid\gamma_\infty=l\right]=\frac{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\mathbb{1}_{\gamma_\infty=l}\right]}{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\gamma_\infty=l\right]}\\
&=\frac{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\infty}\right]-\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}\right]}{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\tau_l<\infty}\mathbb{1}_{\tau_{l+1}=\infty}\right]}\\
&=\frac{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\infty}\right]-\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}\right]}{\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\tau_l<\infty}\right]-\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[\mathbb{1}_{\tau_{l+1}<\infty}\right]}\\
&=\frac{\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\infty}M_{\tau_l}\right]-\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l<\tau_{l+1}<\infty}M_{\tau_{l+1}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\tau_l<\infty}M_{\tau_l}\right]-\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\tau_{l+1}<\infty}M_{\tau_{l+1}}\right]}
\end{aligned}$$

Comme sous $\mathbb{P}$, $\{\tau_l<\infty\}$ est de probabilité 1 :

$$\begin{aligned}
M_{\tau_l}-M_{\tau_{l+1}} &= \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}-\mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_{l+1}}\leq x}\\
&= \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\left(1-\mathbb{1}_{\tau_{l+1}-\tau_l\leq x}\right)\\
&= \mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\mathbb{1}_{\tau_{l+1}-\tau_l>x}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0^{Q^x}\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\mid\gamma_\infty=l\right]=\frac{\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\left(M_{\tau_l}-M_{\tau_{l+1}}\right)\right]}{\mathbb{E}_0\left[M_{\tau_l}-M_{\tau_{l+1}}\right]}\\
&=\frac{\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{\left\{n\leq\tau_l,\Sigma_{\tau_l}\leq x,\tau_{l+1}-\tau_l>x\right\}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\left\{\Sigma_{\tau_l}\leq x,\tau_{l+1}-\tau_l>x\right\}}\right]},\ \tau_{l+1}-\tau_l \text{ indépendant de } \mathcal{F}_{\tau_l}\\
&=\frac{\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l,\Sigma_{\tau_l}\leq x}\right]\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{\tau_{l+1}-\tau_l>x\}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\right]\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\tau_{l+1}-\tau_l>x}\right]}\\
&=\frac{\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{\left\{n\leq\tau_l,\Sigma_{\tau_l}\leq x\right\}}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\Sigma_{\tau_l}\leq x}\right]}\\
&=\mathbb{E}_0\left[F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq\tau_l}\mid\Sigma_{\tau_l}\leq x\right]
\end{aligned}$$

□

9. Pénalisation par le nombre de descentes entre a et b

9.1. Notations.

Soient $b > a$ et $n \geq 0$, on pose :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \inf\{k \geq 0, X_k = b\} \\ \sigma_2 &= \inf\{k \geq \sigma_1, X_k = a\} \\ \sigma_{2n+1} &= \inf\{k \geq \sigma_{2n}, X_k = b\} \\ \sigma_{2n+2} &= \inf\{k \geq \sigma_{2n+1}, X_k = a\} \end{aligned}$$

Et pour $p \geq 0$:

$$D_p = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{\sigma_{2n} \leq p\}} \tag{9.1}$$

Remarque 9.1.

$$D_p = \sup\{n \geq 0, \sigma_{2n} \leq p\} \tag{9.2}$$

On définit encore $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, une fonction décroissante, telle que :

$$G(0) = 1, G(\infty) := \lim_{n \to \infty} G(n) = 0 \tag{9.3}$$

Pour tout $n \geq 0$, on définit :

$$\triangle G(n) = G(n) - G(n+1) \tag{9.4}$$

9.2. Enoncé du résultat principal.

Théorème 9.2. (1) (a) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$:*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \triangle G(D_p)\right]}{\mathbb{E}\left[\triangle G(D_p)\right]} = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \frac{M_n^{\downarrow}}{M_0^{\downarrow}}\right] \tag{9.5}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_n^{\downarrow} &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} > n} \frac{G(D_n)}{2}\left(1 + \frac{b - X_n}{b - a}\right) + \frac{G(D_n + 1)}{2}\left(\frac{X_n - a}{b - a}\right) \\ &+ \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} \leq n} \frac{G(D_n + 1)}{2}\left(1 + \frac{b - X_n}{b - a}\right) + \frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_n - a}{b - a}\right) \end{aligned}$$

(b) *De plus, $\left(M_n^{\downarrow}, n \geq 0\right)$ est une martingale positive, non uniformément intégrable.*

(2) *Soit la probalité $Q_0^{\downarrow}$ sur $\Omega, \mathcal{F}_\infty$ induite par :*

$$\forall n \geq 0, \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, Q_0^{\downarrow}(\Lambda_n) := \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \frac{M_n^{\downarrow}}{M_0^{\downarrow}}\right] \tag{9.6}$$

Alors sous $Q_0^{\downarrow}$:

(a) *la variable aléatoire D_∞ est fini p.s. et :*

$$Q_0^{\downarrow}(D_\infty = n) = G(n) - G(n+1) \tag{9.7}$$

(b) *Soient $g = \inf\{p \geq 0, D_p = D_\infty\}$ et $\overline{g} = \inf\{p \geq g, X_p = b\}$.*
Alors : $Q_0^{\downarrow}(0 \leq g < \infty) = 1$ et $Q_0^{\downarrow}(\overline{g} < \infty) = \frac{1}{2}$.

(c) *Sous $Q_0^{\downarrow}$ et conditionnellement à $\{\overline{g} < \infty\}$:*

(i) *$(X_u, 0 \leq u \leq g)$, $(X_u, 0 \leq u \leq \overline{g} - g)$ et $(X_{\overline{g}+u}, u \geq 0)$ sont indépendants.*

(ii) $(X_{g+u}, 0 \leq u \leq \overline{g} - g)$ *est une marche standard qui démarre de* a *et qui s'arrête lorsqu'elle atteint le niveau* b. *(est-ce une marche de Bessel ? ? ?)*

(iii) $(X_{\overline{g}+u}, 0 \leq u)$ *est une chaîne de Bessel* de dimension 3 issue de* $b - a$.

(d) *Sous* $Q_0^{\downarrow}$ *et conditionnellement à* $\{\overline{g} = \infty\}$ *:*

(i) $(X_u, 0 \leq u \leq g)$ *et* $(X_{\overline{g}+u}, 0 \leq u)$ *sont indépendants.*

(ii) $(b - X_{g+u}, 0 \leq u)$ *est une chaîne de Bessel* de dimension 3 issue de* $b - a$.

(e) *Sachant que* $\{D_\infty = n\}$, $(X_k, 0 \leq k \leq g)$ *est une marche aléatoire partant de* 0 *et arrêtée lorsque le nombre de descentes de* b *à* a *est égal à* n, *i.e* σ_{2n}.

9.3. Démonstration du Théorème 9.2.

1.i) On va tout d'abord montrer le point i du Théorème en commençant par montrer la formule (9.5).

LEMME 9.3. *Soit* $H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *telle que* $\sum_{k\geq 0} H(k) < \infty$ *et soit* $x \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$\mathbb{E}_x\left[H\left(D_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} 2\left(b-a\right)\left(\frac{2}{\pi p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\geq 1} H(k) + H(0)\left(\frac{1}{2} + \frac{\mid x-b \mid}{2(b-a)}\right)\right) \tag{9.8}$$

Démonstration du lemme 9.3.

Si $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}_x\left(D_p = n\right) = \mathbb{P}_x\left(\sigma_1 + ... + \sigma_{2n} - \sigma_{2n-1} \leq p, \sigma_1 + ... + \sigma_{2n+1} - \sigma_{2n} + \sigma_{2n+2} - \sigma_{2n+1} > p\right)$$

Or sous $\mathbb{P}_x$, les variables aléatoires σ_1,$\sigma_2 - \sigma_1$,...,$\sigma_{2n+2} - \sigma_{2n+1}$ sont indépendantes. D'autre part, σ_1 est de même loi que $T_{|b-x|}$ sous $\mathbb{P}_0$, $\sigma_{i+1} - \sigma_i$ est de même loi que T_{b-a} sous $\mathbb{P}_0$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(D_p = n\right) &= \mathbb{P}_0\left(T_{|b-x|+(2n-1)(b-a)} \leq p, T_{|b-x|+(2n+1)(b-a)} > p\right) \\ &= \mathbb{P}_0\left(\mid b-x \mid +(2n-1)(b-a) \leq S_p <\mid b-x \mid +(2n+1)(b-a)\right) \end{aligned} \tag{9.9}$$

où $S_p = \sup\{X_k, k \leq p\}$.

On rappelle que dans le lemme 3.6, on a montré que :

$$\mathbb{P}(S_p = k) \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.10}$$

or dans la formule (9.9), S_p a $2(b-a)$ valeurs possibles, ce qui implique :

$$\mathbb{P}_x\left(D_p = n\right) \underset{p\to\infty}{\sim} 2(b-a)\left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.11}$$

Si $n = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(D_p = 0\right) &= \mathbb{P}_x\left(\sigma_2 > p\right) \\ &= \mathbb{P}_x\left(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 > p\right) \\ &= \mathbb{P}_0\left(T_{|b-x|+(b-a)} > p\right) \\ &= \mathbb{P}_0\left(S_p <\mid b-x \mid +(b-a)\right) \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(b-a+\mid b-x \mid\right)\end{aligned}$$

On peut facilement voir que pour p assez grand :

$$\left(\frac{p\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{P}_x\left(D_p = n\right)H(k) \leq \left(\frac{p\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\mathbb{P}\left(S_p = 0\right)H(k) \leq 4(b-a)H(k)$$

Par conséquent, comme $\sum_{k\geq 0} H(k) < \infty$, d'après le Théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\left(\frac{p\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_x\left[H\left(D_p\right)\right] &= \left(\frac{p\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0} H\left(k\right) \mathbb{P}_x\left(D_p = k\right) \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \left[H(0)\left(b-a+ \mid b-x \mid\right) + 2(b-a)\sum_{k\geq 1} H\left(k\right)\right]\end{aligned}$$

□

Soit $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ et soit $\Sigma_1 = \left\{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} > n\right\}$ et $\Sigma_2 = \Sigma_1^c = \left\{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} \leq n\right\}$.
a) Sur Σ_1 :

$$D_p = D_{p-n}.\theta_n + D_n$$

En effet, on a pas atteint b une nouvelle fois. On applique le lemme 9.3 avec $H(k) = \Delta G\left(k + D_n\right)$ et $x = X_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \Delta G\left(D_p\right) \mathbb{1}_{\Sigma_1}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_1} \mathbb{E}\left[\Delta G\left(D_p\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_1} \mathbb{E}_{X_n}\left[\Delta G\left(D_{p-n}.\theta_n + D_n\right)\right]\right]\end{aligned}$$

D'après le lemme 9.3 :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n} \Delta G\left(D_p\right) \mathbb{1}_{\Sigma_1}\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_1} \left(\frac{2}{(p-n)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\Delta G\left(D_n\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\mid b - X_n \mid}{2(b-a)}\right) + \sum_{k\geq 1} \Delta G\left(D_n + k\right)\right]\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_1} \left(\frac{2}{(p-n)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\left(G\left(D_n\right) - G\left(D_n+1\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{b - X_n}{2(b-a)}\right) + G\left(D_n+1\right)\right]\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_1} \left(\frac{2}{(p-n)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\frac{G\left(D_n\right)}{2}\left(1 + \frac{b - X_n}{b-a}\right) + \frac{G\left(D_n+1\right)}{2}\left(\frac{X_n - a}{b-a}\right)\right]\right]\end{aligned}$$

b) Nous allons maintenant décomposer Σ_2 en deux événements disjoints :
$\Sigma_3 = \Sigma_2 \cap \left\{X_n > b\right\}$ et $\Sigma_4 = \Sigma_2 \cap \left\{a < X_n \leq b\right\}$ (X_n ne peut être inférieure à a sinon D_n est incrémentée de 1...).
b.1) Sur Σ_3, on a toujours :

$$D_p = D_{p-n}.\theta_n + D_n$$

et donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_3} \Delta G\left(D_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_2 \cap \{X_n > b\}} \Delta G\left(D_{p-n}.\theta_n + D_n\right)\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_2 \cap \{X_n > b\}} \left(\frac{2}{(p-n)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\Delta G\left(D_n\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\mid b - X_n \mid}{2(b-a)}\right) + \sum_{k\geq 1} \Delta G\left(D_n + k\right)\right]\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_2 \cap \{X_n > b\}} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\left(G\left(D_n\right) - G\left(D_n+1\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{X_n - b}{2(b-a)}\right) + G\left(D_n+1\right)\right]\right] \\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_2 \cap \{X_n > b\}} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\frac{G\left(D_n\right)}{2}\left(\frac{X_n - a}{b-a}\right) + \frac{G\left(D_n+1\right)}{2}\left(1 + \frac{b - X_n}{b-a}\right)\right]\right]\end{aligned}$$

b.2) Découpons Σ_4 en trois événements disjoints :

$$\begin{aligned}\Sigma_5 &= \Sigma_4 \cap \{n + T_a.\theta_n < n + T_b \circ \theta_n < p\}\\ \Sigma_6 &= \Sigma_4 \cap \{n + T_b \circ \theta_n < n + T_a.\theta_n < p\}\\ \Sigma_7 &= \Sigma_4 \cap \{(n + T_a.\theta_n) \vee (n + T_b \circ \theta_n) \geq p\}\end{aligned}$$

b.2.i) Posons $U_a := n + T_a.\theta_n$ et $U_b := n + T_b \circ \theta_n$.
Sur Σ_5, on a :

$$D_p = D_{U_a} + D_{p-U_a}.\theta_{U_a} = 1 + D_n + D_{p-U_a}.\theta_{U_a} = 1 + D_n + D_{p-U_b}.\theta_{U_b}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \Delta G\left(D_p\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \mathbb{E}\left[\Delta G\left(D_{U_b} + D_{p-U_b}.\theta_{U_b}\right) \mid \mathcal{F}_{U_b}\right]\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \mathbb{E}\left[\Delta G\left(1 + D_n + D_{p-U_b}.\theta_{U_b}\right) \mid \mathcal{F}_{U_b}\right]\right]\end{aligned}$$

Si on définit $\tilde{X}_\cdot := X_{U_b+\cdot} - X_{U_b}$ et $\tilde{D}_\cdot$ le nombre de descentes de b à a associée à cette marche, on a :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \Delta G\left(D_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \tilde{\mathbb{E}}_b\left[\Delta G\left(1 + D_n + \tilde{D}_{p-U_b}\right)\right]\right] \tag{9.12}$$

On va appliquer le lemme 9.3 avec $H(k) = \Delta\left(D_n + 1 + k\right)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}_b\left[\Delta G\left(1 + D_n + \tilde{D}_{p-U_b}\right)\right] &\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{(p-U_b)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\Delta G\left(1 + D_n\right)\frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1} \Delta G\left(k + 1 + D_n\right)\right]\\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{(p-U_b)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (b-a)\left[G\left(D_n + 1\right) + G\left(D_n + 2\right)\right]\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \Delta G\left(D_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (b-a)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_4 \cap U_a < U_b}\left[G\left(D_n + 1\right) + G\left(D_n + 2\right)\right]\right]$$

En conditionnant par $\mathcal{F}_n$ et en rappelant que pour $a < x < b$, $\mathbb{P}_x\left(T_a < T_b\right) = \frac{b-x}{b-a}$, on obtient que :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_5} \Delta G\left(D_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_4}(b - X_n)\left[G\left(D_n + 1\right) + G\left(D_n + 2\right)\right]\right] \tag{9.13}$$

b.2.ii) Sur Σ_6 :

$$D_p = D_{U_b} + D_{p-U_b}.\theta_{U_b} = 1 + D_n + D_{p-U_a}.\theta_{U_a}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_6} \Delta G\left(D_p\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_6} \mathbb{E}\left[\Delta G\left(D_n + 1 + D_{p-U_a}.\theta_{U_a}\right) \mid \mathcal{F}_{U_a}\right]\right]$$

En utilisant un raisonnement analogue au précédent, on trouve tout d'abord que :

$$\tilde{\mathbb{E}}_a\left[\Delta G\left(1 + D_n + \tilde{D}_{p-U_a}\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{(p-U_a)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)G\left(1 + D_n\right)$$

où $\tilde{X}_\cdot := X_{U_b+\cdot} - X_{U_b}$ et $\tilde{D}_\cdot$ le nombre de descentes de b à a associée à cette marche.
Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_6} \Delta G\left(D_p\right)\right] &\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_4 \cap U_b < U_a} G\left(D_n + 1\right)\right]\\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n \cap \Sigma_4} 2(X_n - a)G(D_n + 1)\right]\end{aligned} \tag{9.14}$$

b.ii.3) σ_7 peut se décomposer en trois ensembles :

$$\begin{aligned}\sigma_8 &= \sigma_4 \cap \{U_a < p < U_b\}\\ \sigma_9 &= \sigma_4 \cap \{U_b < p < U_a\}\\ \sigma_{10} &= \sigma_4 \cap \{p < U_a \wedge U_b\}\end{aligned}$$

Sur σ_8, $D_p = D_n + 1$. En conditionnant par $\mathcal{F}_n$ puis en faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_8}\Delta G\left(D_p\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_4}\Delta G\left(D_n+1\right)\mathbb{E}_{X_n}\left[T_a < p-n < T_b\right]\right]\\ &\underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_4}\Delta G\left(D_n+1\right)\mathbb{E}_{X_n}\left[p-n < T_b\right]\right]\end{aligned}$$

Rappellons que pour $0 < x \leq k$, $\mathbb{P}_x(T_k > p) = \mathbb{P}_x(S_p < k) \underset{p\to\infty}{\sim} (k-x)\left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ et par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_8}\Delta G\left(D_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_4}\Delta G\left(D_n+1\right)\left(b-X_n\right)\left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{9.15}$$

Avec un raisonnement similaire et en remarquant que sur σ_9, $D_p = D_n$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_9}\Delta G\left(D_p\right)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda_n\cap\Sigma_4}\Delta G\left(D_n\right)\left(X_n-a\right)\left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{9.16}$$

On va maintenant montrer que sur σ_{10}, la quantité étudiée est négligeable.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_n}\left(T_a\wedge T_b > p-n\right) &= \mathbb{P}_{X_n}\left(T_a\wedge T_b > a+b\right)\mathbb{P}_{X_n}\left(T_a\wedge T_b > p-n | T_a\wedge T_b > a+b\right)\\ &\leq \left(1-\mathbb{P}_{X_n}\left(T_a\wedge T_b \leq a+b\right)\right)\mathbb{P}_{X_{n+a+b}}\left(T_a\wedge T_b > p-n-(a+b)\right)\\ &\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}\right)\mathbb{P}_{X_{n+a+b}}\left(T_a\wedge T_b > p-n-(a+b)\right)\end{aligned}$$

et avec une récurrence évidente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_n}\left(T_a\wedge T_b > p-n\right) &\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}\right)^{\lfloor\frac{p-n}{a+b}\rfloor}\mathbb{P}_{X_{p-n-(a+b)\lfloor\frac{p-n}{a+b}\rfloor}}\left(T_a\wedge T_b > p-a+b\lfloor\frac{p-n}{a+b}\rfloor\right)\\ &\leq \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}\right)^{\lfloor\frac{p-n}{a+b}\rfloor}\end{aligned}$$

ce qui nous permet de ne pas considérer σ_{10} lorsque nous calculons notre équivalent.
Ainsi lorsque nous additionnons (9.13), (9.14), (9.15) et (9.16) :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\Lambda_n,\sigma_4\}}\delta G(D_p)\right] \underset{p\to\infty}{\sim} \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2(b-a)\left[\frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_n-a}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_n}{b-a}\right)\right] \tag{9.17}$$

1.ii) Montrons que $\left(M_n^{\downarrow}, n\geq 0\right)$ est bien une martingale.
On va donc étudier la quantité

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}^{\downarrow} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_{n+1}}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_{n+1}}}>n+1}\frac{G(D_{n+1})}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_{n+1}+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\\ &+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_{n+1}}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_{n+1}}}\leq n+1}\frac{G(D_{n+1}+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_{n+1})}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\end{aligned}$$

Il y a deux cas importants $\{X_n = a+1\}$ et $\{X_n \neq a+1\}$.
a) Dans le cas où $\{X_n \neq a+1\}$, il est clair que $D_{n+1} = D_n$. Alors :

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^{\downarrow} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n+1}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n+1}\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]$$
$$=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n+1}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]$$
$$-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}=n+1}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]$$
$$+\quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}=n+1}\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}(1) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]-a}{b-a}\right)\\ &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_n}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_n-a}{b-a}\right)\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}(2) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_n+}{b-a}\right)+\frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_n-a}{b-a}\right)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(3) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}=n+1}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}=n+1}\left(\frac{G(D_n)}{2}+\frac{G(D_n+1)}{2}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(4) &= \left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}=n+1}\frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}=n+1}\left(\frac{G(D_n)}{2}+\frac{G(D_n+1)}{2}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n\neq a+1}M_{n+1}^{\downarrow} \mid \mathcal{F}_n\right] = (1)+(2)+(3)-(4) = \mathbb{1}_{X_n\neq a+1}M_n^{\downarrow} \tag{9.18}$$

b) On se place maintenant dans le cas où $X_n = a+1$. Il y a deux cas à distinguer : $X_{n+1} = X_n+1$ et $X_{n+1} = X_n - 1$.
b.i) Dans le cas, où $X_{n+1} = X_n + 1$ on a encore une fois que $D_{n+1} = D_n$. Il faut aussi distinguer 2 cas : lorsque $b = a+2$ et $b \neq a+2$.

Supposons que $b \neq a+2$. Dans ce cas l'événement $\left\{\sigma_{2D_{n+1}} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_{n+1}}} = n+1\right\}$ est nul et par conséquent :

$$\begin{aligned}
(A) = & \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1, X_{n+1}=X_n+1} M_{n+1}^{\downarrow} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
= & \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n} \frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right) + \frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
+ & \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n+1}\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n} \frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right) + \frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
= & \quad \tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1}\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n} \frac{G(D_n)}{2}\left(1+\frac{b-X_n-1}{b-a}\right) + \frac{G(D_n+1)}{2}\left(\frac{X_n-a}{b-a}\right) \\
+ & \quad \tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1}\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n} \frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_n-1}{b-a}\right) + \frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_n+1-a}{b-a}\right) \\
= & \quad \tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1} M_n^{\downarrow} \\
+ & \quad \tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\frac{G(D_n)}{2(b-a)} - \frac{G(D_n+1)}{2(b-a)} + \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\frac{G(D_n+1)}{2(b-a)} - \frac{G(D_n)}{2(b-a)}\right]
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $b = a+2$. Dans ce cas, sur $\{X_n = a+1, X_{n+1} = X_n+1\}$, $M_n = \mathbb{1}_{\left\{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n\right\}}\left(\frac{3}{4}G(D_n+1) + \frac{1}{4}G(D_n)\right) + \mathbb{1}_{\left\{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n\right\}}\left(\frac{3}{4}G(D_n) + \frac{1}{4}G(D_n+1)\right)$ et $\left\{\sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} \leq n+1\right\}$ est de probabilité 1. D'où :

$$\begin{aligned}
(A) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n+1}\frac{G(D_n+1)}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right) + \frac{G(D_n)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n+1}\frac{G(D_n+1)}{2} + \frac{G(D_n)}{2} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1}\frac{G(D_n+1)}{2} + \frac{G(D_n)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1} M_n^{\downarrow} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\left[\frac{1}{4}G(D_n) - \frac{1}{4}G(D_n+1)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\left[\frac{1}{4}G(D_n+1) - \frac{1}{4}G(D_n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1} M_n^{\downarrow} \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\frac{G(D_n)}{2(b-a)} - \frac{G(D_n+1)}{2(b-a)} + \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\frac{G(D_n+1)}{2(b-a)} - \frac{G(D_n)}{2(b-a)}\right]
\end{aligned}$$

b.ii) Supposons maintenant que $X_{n+1} = X_n - 1$. Remarquons que dans notre cas, l'événement $\left\{\sigma_{2D_{n+1}} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_{n+1}}>n+1}\right\}$ est de probabilité 1.

$$\begin{aligned}
(B) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n-1} M_{n+1}^{\downarrow} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n-1}\frac{G(D_{n+1})}{2}\left(1+\frac{b-X_{n+1}}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n-1}\frac{G(D_{n+1}+1)}{2}\left(\frac{X_{n+1}-a}{b-a}\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n-1} G(D_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right]
\end{aligned}$$

Sur $\left\{X_n = a+1, X_{n+1} = X_n - 1, \sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} \leq n\right\}$, $D_{n+1} = D_n + 1$ et sur $\left\{X_n = a+1, X_{n+1} = X_n - 1, \sigma_{2D_n} + T_b \circ \theta_{\sigma_{2D_n}} > n\right\}$, $D_{n+1} = D_n$.

D'autre part, sur $\{X_n = a+1\}$:

$$\begin{aligned} M_n &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n} G(D_n)\left(1-\frac{1}{2(b-a)}\right)+\frac{G(D_n+1)}{2(b-a)} \\ &+ \mathbb{1}_{\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n} G(D_n+1)\left(1-\frac{1}{2(b-a)}\right)+\frac{G(D_n)}{2(b-a)} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (B) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n-1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n} G(D_n) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1,X_{n+1}=X_n-1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n} G(D_n+1) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n} G(D_n) \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n} G(D_n+1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1} M_n^{\downarrow} \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}>n}\frac{G(D_n)}{2(b-a)}-\frac{G(D_n+1)}{2(b-a)} \\ &+ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{X_n=a+1,\sigma_{2D_n}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_n}}\leq n}\frac{G(D_n+1)}{2(b-a)}-\frac{G(D_n)}{2(b-a)} \end{aligned}$$

si on reprend les formules de (A) et (B), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_n=a+1} M_{n+1}^{\downarrow} \mid \mathcal{F}_n\right] = (A)+(B) = \mathbb{1}_{X_n=a+1} M_n^{\downarrow} \tag{9.19}$$

□

2.i.a) Montrons que $\overline{g}$ est fini avec probabilité $\frac{1}{2}$ sous $Q^{\downarrow}$.
Remarquons tout d'abord que :

$$\overline{g} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k+1}\mathbb{1}_{\sigma_{2k}<\infty,\sigma_{2k+2}=\infty}$$

Alors :

$$\begin{aligned} Q^{\downarrow}(\overline{g}) &= \sum_{k=0}^{\infty} Q^{\downarrow}(\sigma_{2k+1}<\infty,\sigma_{2k+2}=\infty) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{Q^{\downarrow}}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2k+1}<\infty,\sigma_{2k+2}=\infty}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{Q^{\downarrow}}\left[\mathbb{1}_{\sigma_{2k+1}<\infty}-\mathbb{1}_{\sigma_{2k+2}<\infty}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[M_{\sigma_{2k+1}}^{\downarrow}-M_{\sigma_{2k+2}}^{\downarrow}\right] \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} M^{\downarrow}_{\sigma_{2k+1}} &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+1}}}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+1}}}}>\sigma_{2k+1}} \frac{G\left(D_{\sigma_{2k+1}}\right)}{2}\left(1+\frac{b-X_{\sigma_{2k+1}}}{b-a}\right)+\frac{G\left(D_{\sigma_{2k+1}}+1\right)}{2}\left(\frac{X_{\sigma_{2k+1}}-a}{b-a}\right) \\ &+ \mathbb{1}_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+1}}}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+1}}}}\leq\sigma_{2k+1}} \frac{G\left(D_{\sigma_{2k+1}}+1\right)}{2}\left(1+\frac{b-X_{\sigma_{2k+1}}}{b-a}\right)+\frac{G\left(D_{\sigma_{2k+1}}\right)}{2}\left(\frac{X_{\sigma_{2k+1}}-a}{b-a}\right) \\ &= \frac{G\left(k+1\right)}{2}+\frac{G\left(k\right)}{2} \end{aligned} \tag{9.20}$$

de la même façon :

$$\begin{aligned} M^{\downarrow}_{\sigma_{2k+2}} &= \mathbb{1}_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+2}}}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+2}}}}>\sigma_{2k+2}} \frac{G\left(D_{\sigma_{2k+2}}\right)}{2}\left(1+\frac{b-X_{\sigma_{2k+2}}}{b-a}\right)+\frac{G\left(D_{\sigma_{2k+2}}+1\right)}{2}\left(\frac{X_{\sigma_{2k+2}}-a}{b-a}\right) \\ &+ \mathbb{1}_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+2}}}+T_b\circ\theta_{\sigma_{2D_{\sigma_{2k+2}}}}\leq\sigma_{2k+2}} \frac{G\left(D_{\sigma_{2k+2}}+1\right)}{2}\left(1+\frac{b-X_{\sigma_{2k+2}}}{b-a}\right)+\frac{G\left(D_{\sigma_{2k+2}}\right)}{2}\left(\frac{X_{\sigma_{2k+2}}-a}{b-a}\right) \\ &= G\left(k+1\right) \end{aligned} \tag{9.21}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q^{\downarrow}\left(\overline{g}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{G\left(k+1\right)}{2}+\frac{G\left(k\right)}{2}-\frac{G\left(k+1\right)}{2} \\ &= \frac{G(0)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

2.i.b) Montrons que g est fini $Q^{\downarrow}$ p.s.

$$\begin{aligned} Q^{\downarrow}\left(D_{\infty}\geq n\right) &= Q^{\downarrow}\left(\sigma_{2n}<\infty\right) \\ &= \mathbb{E}^{Q^{\downarrow}}\left[\mathbb{1}_{\{\sigma_{2n}<\infty\}}M^{\downarrow}_{\sigma_{2n}}\right] \\ &= G(n) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$Q^{\downarrow}\left(D_{\infty}=n\right)=G(n)-G(n+1) \tag{9.22}$$

ce qui implique que sous $Q^{\downarrow}$, g est fini p.s. iii.b)

$$\begin{aligned} &Q^{\downarrow}\left(F\left(X_{1+g},...,X_{n+g}\right)\mathbb{1}_{n+g\leq\overline{g}}\mid\overline{g}<\infty\right)=\frac{Q^{\downarrow}\left(F\left(X_{1+g},...,X_{n+g}\right)\mathbb{1}_{n+g\leq\overline{g}<\infty}\right)}{Q^{\downarrow}\left(\overline{g}<\infty\right)} \\ &=2\sum_{k\geq0}Q^{\downarrow}\left(F\left(X_{1+\sigma_{2k}},...,X_{n+\sigma_{2k}}\right)\mathbb{1}_{\{n+\sigma_{2k}\leq\sigma_{2k+1}\}\cap\{\sigma_{2k+1}<\infty,\sigma_{2k+2}=\infty\}}\right) \\ &=2\sum_{k\geq0}Q^{\downarrow}\left(F\left(X_{1+\sigma_{2k}},...,X_{n+\sigma_{2k}}\right)\mathbb{1}_{\{n+\sigma_{2k}\leq\sigma_{2k+1},\sigma_{2k+1<\infty}\}}\left(1-\mathbb{1}_{\sigma_{2k+1<\infty}}\right)\right) \\ &=2\sum_{k\geq0}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(F\left(X_{1+\sigma_{2k}},...,X_{n+\sigma_{2k}}\right)\mathbb{1}_{\{n+\sigma_{2k}\leq\sigma_{2k+1}\}}\left(M_{\sigma_{2k+1}}-M_{\sigma_{2k+2}}\right)\right) \end{aligned}$$

On utilise le caractère markovien de X sous $\mathbb{P}$ ainsi que (9.21) et (9.20) :

$$\begin{aligned} Q^{\downarrow}\left(F\left(X_{1+g},...,X_{n+g}\right)\mathbb{1}_{n+g\leq\overline{g}}\mid\overline{g}<\infty\right) &= \sum_{k\geq0}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}_{a}\left(F\left(X_{1},...,X_{n}\right)\mathbb{1}_{n\leq T_b}\left(G(k)-G(k+1)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}_{a}\left(F\left(X_{1},...,X_{n}\right)\mathbb{1}_{n\leq T_b}\right) \end{aligned}$$

iii.c)

$$\begin{aligned} Q_b^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p} \mid T_p<T_a\right) &= \frac{Q_b^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p<T_a}\right)}{Q_b^{\downarrow}\left(T_p<T_a\right)} \\ &= \frac{\mathbb{E}_b^{\mathbb{P}}\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p<T_a}M_{T_a}\right)}{\mathbb{E}_b^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{T_p<T_a}M_{T_a}\right)} \end{aligned}$$

Il faut remarquer que sous $\mathbb{P}_b$, $M_{T_a}=G(1)$, i.e. une constante. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q_b^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p} \mid T_p<T_a\right) &= \frac{\mathbb{E}_b^{\mathbb{P}}\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p<T_a}\right)}{\mathbb{E}_b^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{T_p<T_a}\right)} \\ &= \mathbb{P}_b\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p} \mid T_p<T_a\right) \end{aligned}$$

On va maintenant utiliser la même méthode que dans [**LeG85**] pour étudier la loi sous $\mathbb{P}_b$ de $(X_n-a, 0\leq n\leq T_p)$ sachant que $T_p<T_a$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_b\left(F\left(X_1-a,...,X_n-a\right)f(X_{n+1}-a)\mathbb{1}_{n+1\leq T_p} \mid T_p<T_a\right) \\ &= \mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)f(\tilde{X}_{n+1})\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a}} \mid \tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right) \\ &= \mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)f(\tilde{X}_{n+1})\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0}\right)\mathbb{P}_{b-a}\left(\tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right)^{-1} \\ &= \mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a},n+1<\tilde{T}_0}\mathbb{E}_{\tilde{X}_n}\left[f(\tilde{X}_{n+1})\mathbb{1}_{\tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0}\right]\right)\frac{p-a}{b-a} \\ &= \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a},n+1<\tilde{T}_0}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{X}_n+1)\mathbb{P}_{\tilde{X}_n+1}\left(\tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right)\right]\right) \\ &+ \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a},n+1<\tilde{T}_0}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{X}_n-1)\mathbb{P}_{\tilde{X}_n-1}\left(\tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right)\right]\right) \\ &= \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a},n+1<\tilde{T}_0}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{X}_n+1)\frac{\tilde{X}_n+1}{p-a}\right]\right) \\ &+ \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a},n+1<\tilde{T}_0}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{X}_n-1)\frac{\tilde{X}_n-1}{p-a}\right]\right) \\ &= \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{X}_n+1)\frac{\tilde{X}_n+1}{p-a}\right]\mathbb{P}_{\tilde{X}_n}\left(\tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right)^{-1}\right) \\ &+ \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0}\left[\frac{1}{2}f(\tilde{X}_n-1)\frac{\tilde{X}_n-1}{p-a}\right]\mathbb{P}_{\tilde{X}_n}\left(\tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right)^{-1}\right) \\ &= \frac{p-a}{b-a}\mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0}\left[f(\tilde{X}_n+1)\frac{\tilde{X}_n+1}{2\tilde{X}_n}+f(\tilde{X}_n-1)\frac{\tilde{X}_n-1}{2\tilde{X}_n}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}_{b-a}\left(F\left(\tilde{X}_1,...,\tilde{X}_n\right)\mathbb{1}_{n+1\leq \tilde{T}_{p-a}}\left[f(\tilde{X}_n+1)\frac{\tilde{X}_n+1}{2\tilde{X}_n}+f(\tilde{X}_n-1)\frac{\tilde{X}_n-1}{2\tilde{X}_n}\right] \mid \tilde{T}_{p-a}<\tilde{T}_0\right) \end{aligned}$$

On a donc montré que la loi sous $\mathbb{P}_b$ de $(X_n-a, 0\leq n\leq T_p)$ sachant que $T_p<T_a$ est celle d'une chaîne de Bessel de dimension 3 partant de $b-a$. Ainsi, en faisant tendre p vers l'infini, on obtient que sous $Q_b^{\downarrow}$ conditionnellent à $T_a=\infty$, $(X_n-a, n\geq 0)$ est une marche de Bessel de dimension 3 issue de $b-a$.

iv.b) On utilise le même raisonnement et on obtient :

$$Q_a^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p} \mid T_p<T_b\right)=\mathbb{P}_a\left(F\left(X_1,...,X_n\right)\mathbb{1}_{n\leq T_p} \mid T_p<T_b\right) \tag{9.23}$$

Puis on effectue le même raisonnement que précédemment avec la chaîne $(b - X_n, n \geq 0)$ sous $Q_a^{\downarrow}$ conditionnellement à $T_{-p} < T_b$.
v) Soit F une fonction de $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}^+$. Alors :

$$\begin{aligned}
Q^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_k\right) \mid D_\infty = n\right) &= \frac{Q^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_k\right)\mathbb{1}_{k\leq g}\mathbb{1}_{D_\infty=n}\right)}{Q^{\downarrow}\left(D_\infty = n\right)} \\
&= \frac{Q^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_k\right)\mathbb{1}_{k\leq \sigma_{2n}}\mathbb{1}_{\sigma_{2n+2}=\infty}\right)}{G\left(n\right) - G(n+1)} \\
&= \frac{Q^{\downarrow}\left(F\left(X_1,...,X_k\right)\mathbb{1}_{k\leq \sigma_{2n}}\left(1 - \mathbb{1}_{\sigma_{2n+2}<\infty}\right)\right)}{G\left(n\right) - G(n+1)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(F\left(X_1,...,X_k\right)\mathbb{1}_{k\leq \sigma_{2n}}\left(M^{\downarrow}_{\sigma_{2n}} - M^{\downarrow}_{\sigma_{2n+2}}\right)\right)}{G\left(n\right) - G(n+1)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(F\left(X_1,...,X_k\right)\mathbb{1}_{k\leq \sigma_{2n}}\left(G\left(n\right) - G(n+1)\right)\right)}{G\left(n\right) - G(n+1)} \\
&= \mathbb{E}\left(F\left(X_1,...,X_k\right)\mathbb{1}_{k\leq \sigma_{2n}}\right)
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

Pénalisation de chaînes et processus de naissance et de mort

Pénalisation de chaînes et processus de naissance et de mort par le "temps local"

1. Introduction

Ce chapitre est le résultat d'un travail réalisé en collaboration avec Mihai Gradinaru et a été soumis à *Journal of Theoretical probability*. L'origine de ces résultats est un article de B. Roynette, P. Vallois et M. Yor dans lequel ses auteurs considèrent un processus de Bessel de dimension $d \geq 2$ qu'ils pénalisent par son temps de séjour en 0. Rappelons que si $d \geq 2$, le processus est transient et que le processus $(R_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension d si il est solution de l'EDS :

$$R_t = B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{R_s} \tag{1.1}$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est le mouvement brownien unidimensionnel. Suite à cette pénalisation, sous la nouvelle probabilité, le processus est récurrent et lorsque il atteint des points assez éloignés de l'origine, il se comporte comme un processus de Bessel de dimension $d' = 4 - d$.

Comme dans le premier chapitre de cette thèse, l'idée de départ a été de considérer l'équivalent discret d'un processus de Bessel, à savoir une marche de Bessel, et pénaliser cette chaîne par son nombre de visites en zéro. Mais le raisonnement que nous avons développé pour cette chaîne peut en fait être utilisé pour toute chaîne de Markov de naissance et de mort, i.e. toute chaîne de Markov positive dont les changements d'état n'ont lieu qu'avec les états voisins, qui est transiente dans notre cas.

Le fait que les probabilités de passage n'ont pas besoin d'être explicites est ce qui constitue l'originalité de ces résultats comparés à son homologue continu, et pour faire le lien avec ce dernier nous donnons les résultats obtenus dans le cas particulier d'une chaîne de Bessel de dimension $d \geq 2$.

Dans notre raisonnement, en plus des probabilités de passage consistant à réaliser un saut d'amplitude 1, nous avons rajouter la probabilité de ne pas changer d'état. Il est intéressant de voir que suite à la pénalisation, cette probabilité reste inchangée (sauf en 0), et on se pose une question naturelle :

que se passe-t-il si nous remplaçons ces probabilités de stationnarité par des temps d'attente de loi exponentielle ?

Cette question nous a pemis d'aboutir à l'étude de ce qui constitue notre deuxième partie : la pénalisation d'un processus de naissance et de mort transient par son temps de séjour en 0. Une manière simple de décrire le processus est la suivante : lorsqu'il est dans l'état $i \geq 0$, notre processus séjourne pour une durée représentée par une variable aléatoire exponentielle de paramètre $b(i) + d(i)$, et qu'alors, il saute en $i+1$ avec probabilité p_i eten $i-1$ avec probabilité $q_i = 1 - p_i$, remarquons que si $i = 0$, $q_i = 0$. Il est intéressant de voir que sous la probabilité obtenue par pénalisation, le processus est encore un processus de naissance et de mort dont les paramètres des lois exponentielles ont été inchangées (sauf dans l'état 0), conformément à ce que nous attendions aux vues des résultats discrets, mais que ce sont les quantités que l'on a notée p_i et q_i qui sont modifiées.

Les démonstration des résultats obtenus dans cette deuxième partie reposent en grande partie sur les résultats établies sur les chaînes de naissance et de mort mais aussi sur la formule de Dynkin.

Une suite logique de ces résultats serait le raisonnemnt inverse i.e. la pénalisation d'une marche (respectivement d'un processus) de naissance et de mort récurrente par son temps de séjour en 0 de façon à obtenir une chaîne de naissance et de mort transiente. Cette question reste ouverte mais à travers un exemple simple en apparence, à savoir une marche biaisée, nous pouvons

penser qu'un raisonnement général comme il a été fait pour passer du transient au récurrent, si il n'est pas impossible, paraît plus ardu, et il semble qu'une étude cas par cas est plus judicieuse.

2. Notations et résultats principaux

2.1. Chaînes de naissance et de mort.

Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de naissance et de mort, en d'autres termes c'est une chaîne de Markov à espace d'états $\mathbb{N}$ et ayant les probabilités de passage suivantes :

$$p_\ell := \mathbb{P}(X_{n+1} = \ell + 1 \mid X_n = \ell),\ q_\ell := \mathbb{P}(X_{n+1} = \ell - 1 \mid X_n = \ell),$$
$$r_\ell := \mathbb{P}(X_{n+1} = \ell \mid X_n = \ell) = 1 - p_\ell - q_\ell,\ \ell \geq 1 \quad (2.1)$$

et

$$p_0 := \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0),\ q_0 := 0,\ r_0 := 1 - p_0. \quad (2.2)$$

Notons

$$\rho_\ell := \frac{q_\ell}{p_\ell},\ \forall \ell \geq 0 \quad et \quad \gamma_0 := 1,\ \gamma_\ell := \rho_1 \dots \rho_\ell,\ \ell \geq 1 \quad (2.3)$$

et il peut être montré que (voir par exemple [**Law06**], p. 77) :

PROPOSITION 2.1. *La chaîne de naissance et de mort $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est transiente si et seulement si :*

$$\sum_{\ell \geq 0} \gamma_\ell < \infty, \quad (2.4)$$

et dans ce cas on note :

$$S := \sum_{\ell \geq 0} \gamma_\ell\,. \quad (2.5)$$

Posons

$$U_n : \quad (2.6)$$

La résultat principal de cet alinéa est :

THÉORÈME 2.2.
Soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la chaîne transiente de naissance et de mort $\{X_n\}_{n\geq 0}$.

(1) *Pour tout entier $n \geq 0$ et tout élément de $A_n \in \mathcal{F}_n$*

$$\lim_{\kappa \to \infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{\{U_\infty \geq \kappa\}}]}{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{U_\infty \geq \kappa\}}]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n} M_n], \quad (2.7)$$

où

$$M_n := (1/S)\,(1 - p_0/S)^{-U_n + \mathbb{1}_{\{X_n = 0\}}} \left(\sum_{\ell \geq X_n} \gamma_\ell \right). \quad (2.8)$$

(2) *$\{M_n\}_{n\geq 0}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}$-martingale positive qui tend p.s.vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi $\{M_n\}_{n\geq 0}$ n'est pas uniformément intégrable.*

(3) *L'égalité (2.7) induit une mesure de probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$:*
pour tout entier $n \geq 0$ et tout élément $A_n \in \mathcal{F}_n$

$$Q(A_n) := \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n} M_n]. \quad (2.9)$$

Alors, sous Q, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne récurrente de naissance et de mort dont les probabilités de transition sont :

$$\tilde{p}_\ell := p_\ell(\textstyle\sum_{k\geq \ell+1} \gamma_k)/(\sum_{k\geq \ell} \gamma_k),\ \tilde{q}_\ell := q_\ell(\textstyle\sum_{k\geq \ell-1} \gamma_k)/(\sum_{k\geq \ell} \gamma_k),\ \tilde{r}_\ell := r_\ell,\ \ell \geq 1, \quad (2.10)$$

et

$$\tilde{p}_0 := p_0(S-1)/(S-p_0),\ \tilde{q}_0 := 0,\ \tilde{r}_0 := r_0 S/(S-p_0). \quad (2.11)$$

Remarque 2.3.
1. Il est possible de supposer que la chaîne $\{X_n\}_{n\geq 0}$ démarre de $x \neq 0$. Le résultat est similaire avec des différences minimes : par exemple dans (2.8), on doit remplacer le facteur S^{-1} par $\left(\sum_{\ell\geq x}\gamma_\ell\right)^{-1}$. Nous supposons que la chaîne démarre de 0 pour la simplicité des calculs.
2. Pour illustrer nos propos, on peut considérer l'exemple de la marche de Bessel (cf §4.1 ci-dessous) qui satisfait :

$$p_\ell = \frac{\ell+2\alpha+1}{2\ell+2\alpha+1},\ q_\ell = \frac{\ell}{2\ell+2\alpha+1},\ \ell\geq 1,\quad p_0 = 1. \tag{2.12}$$

(voir aussi [**LeG85**], pp. 448)

2.2. Processus de naissance et de mort.
Soit $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ un processus de Markov d'espaces d'états $\mathbb{N}$, à temps continu.On suit [**Res05**], p. 373, pour décrire la version continue d'une chaîne de naissance et de mort que l'on note $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. le changement d'état peut se décrire comme suit :
quand le processus est dans l'état ℓ, on suppose l'existence de deux variables aléatoires indépendantes $B(\ell)$ et $D(\ell)$, qui sont indépendantes de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, de lois exponentielles de paramètres respectifs b_ℓ et d_ℓ. Une transition de ℓ à $\ell+1$ est établie si $B(\ell)\leq D(\ell)$, ce qui arrive avec probabilité

$$\mathbb{P}[B(\ell)\leq D(\ell)] = {}^{b_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)}; \tag{2.13}$$

sinon, une transition de ℓ à $\ell-1$ est réalisée. Le temps de séjour dans l'état ℓ est $B(\ell)\wedge D(\ell)$, de loi exponentielle de paramètre $b_\ell+d_\ell$ (on suppose que $d_0=0$). On peut penser à $B(\ell)$ comme le temps d'attente d'une naissance quand la population est de taille ℓ et, $D(\ell)$ est le temps d'attente avant une mort quand la population est de taille ℓ ; la population augmente d'une unité si une naissance a lieu avant une mort ; autrement la population décroit d'une unité.

Habituellement, les processus de naissance et de mort en temps continu sont décrits à l'aide de ce qu'on nomme les taux de naissance et de mort : dans une populaition de taille ℓ une particule nait avec taux b_ℓ et meurt avec taux d_ℓ. Cela est lié aux probabilités de transition infinitésimale :

$$\mathbb{P}(X(t+h)=\ell+k|X(t)=\ell) = \begin{cases} b_\ell h+o(h) & \text{si } k=1 \\ d_\ell h+o(h) & \text{si } k=-1 \\ o(h) & \text{si } |k|>1 \end{cases}.$$

On peut voir que ces hypothéses décrivent un processus de markov à sauts, dont le temps d'attente en ℓ est de paramètre :

$$\lambda_\ell := b_\ell + d_\ell$$

et le saut de ℓ

$$\xi_\ell = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } {}^{b_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)} \\ -1 & \text{avec probabilité } {}^{d_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)} \end{cases}.$$

On note

$$J_0 = 0 \quad \text{et, pour } n\geq 1,\quad J_n = \inf\{t\geq J_{n-1} : X(t)\neq X(J_{n-1})\}. \tag{2.14}$$

On introduit la suite de variables aléatoires $\{Y_n\}_{n\geq 0}$, donnée par

$$Y_n := X(J_n),\ n\geq 0. \tag{2.15}$$

Le résultat suivant est classique (voir par exemple [**Law06**], pp. 76-77 et [**Nor98**], pp. 115) :

Proposition 2.4.

(1) $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ *définie par* (2.15) *est une chaîne de naissance et de mort dont les probabilités de transition sont* $p_\ell = {}^{b_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)}$, $q_\ell = {}^{d_\ell}\!/_{(b_\ell+d_\ell)}$, $\ell\geq 1$ *et* $p_0=1$. *Posons*

$$\gamma_0 = 1 \quad \textit{et} \quad \gamma_\ell = \prod_{k=1}^{\ell}\frac{q_k}{p_k} = \prod_{k=1}^{\ell}\frac{d_k}{b_k},\ \ell\geq 1.$$

(2) *Le processus à temps continu* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *est transient si et seulement si la chaîne de Markov à temps discret* $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ *est transiente, i.e. si et seulement si*

$$S := \sum_{\ell\geq 0} \gamma_\ell = 1 + \sum_{\ell\geq 1} \prod_{k=1}^{\ell} \frac{d_k}{b_k} < \infty. \tag{2.16}$$

Notons

$$V(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{\{X(s)=0\}} ds,\ 0 \leq t \leq \infty. \tag{2.17}$$

Le deuxième résultat de cette section est :

THÉORÈME 2.5. *Soit* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle associée au processus transient de naissance et de mort* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

(1) *Pour tout* $t \geq 0$ *et tout élément* $A_t \in \mathcal{F}_t$

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}]}{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t} M(t)], \tag{2.18}$$

où

$$M(t) := (1/S)\exp(b_0 V(t)/S) \sum_{\ell\geq X(t)} \gamma_\ell. \tag{2.19}$$

(2) $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ *est une* $\{\mathcal{F}_t\}$*-martingale positive qui tend p.s. vers 0 quand* t *tend vers l'infini. De ce fait,* $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ *n'est pas uniformément intégrable.*

(3) *L'égalité* (2.18) *induit une mesure de probabilité* Q *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *: pour tout* $t \geq 0$ *et tout élément* $A_t \in \mathcal{F}_t$

$$Q(A_t) := \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t} M(t)]. \tag{2.20}$$

Alors, sous Q, $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *est un processus de naissance et de mort récurrent dont les taux de passage sont :*

$$\tilde{b}_\ell := b_\ell(\textstyle\sum_{k\geq\ell+1}\gamma_k)/(\sum_{k\geq\ell}\gamma_k),\ \ell \geq 0,\ \tilde{d}_\ell := d_\ell(\textstyle\sum_{k\geq\ell-1}\gamma_k)/(\sum_{k\geq\ell}\gamma_k),\ \ell > 0. \tag{2.21}$$

2.3. Chaîne de Bessel en tant que marche aléatoire pénalisée.
Dans cette partie, nous essayons de faire le travail inverse, plus précisément, pénaliser une chaîne de markov de naissance et de mort récurrente de manière à en obtenir une qui soit transiente. Nous présentons un exemple de chaîne de naissance et de mort mais la méthode que nous utilisons dans ce cas (cf. §3.3) semble être plus compliquée dans le cas général. Ainsi, cela reste une question ouverte.

Soit $p \in (0, 1/2)$ et on considère une marche aléatoire récurrente $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ avec les probabilités de transition :

$$p_\ell := \mathbb{P}(Z_{n+1} = \ell + 1 \mid Z_n = \ell) = p,\ q_\ell : \mathbb{P}(Z_{n+1} = \ell - 1 \mid Z_n = \ell) = q = 1 - p,\ \forall \ell \geq 1$$
$$\text{and} \quad p_0 = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Z_n = 0) = 1. \tag{2.22}$$

Puisque $\sum_{\ell\geq 1}\gamma_\ell = \sum_{\ell\geq 1}(q/p)^\ell = \infty$, cette chaîne est récurrente d'après la Proposition 2.1.

Nous pénalisons cette chaîne de façon à ce qu'elle atteigne l'état 0 au bout d'un temps infini. Comme d'habitude, on note par T_0, le temps d'atteinte de zero par la chaîne de Markov $\{Z_n\}_{n\geq 0}$. Nous pouvons alors établir :

PROPOSITION 2.6. *Soit* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ *la filtration naturelle associée à la chaîne de naissance et de mort* $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ *avec les probabilités de transition données par (2.22).*

(1) *Pour tout entier* $x \geq 1$, $n \geq 0$ *et tout événement* $A_n \in \mathcal{F}_n$

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{T_0\geq\kappa\}}]}{\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T_0\geq\kappa\}}]} = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A_n} M'_n], \tag{2.23}$$

où

$$M'_n := \mathbb{1}_{\{T_0>n\}} \frac{Z_n}{x} \left(\frac{q}{p}\right)^{(Z_n-x)/2} (4pq)^{-n/2} \tag{2.24}$$

est une $\{\mathcal{F}_n\}$-martingale positive qui tend vers zéro, presque sûrement.

(2) *L'égalité* (2.23) *induit une mesure de probabilité Q_x sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$: pour tout entier $n \geq 0$ et tout événement $A_n \in \mathcal{F}_n$,*

$$Q_x(A_n) := \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A_n} M'_n]. \tag{2.25}$$

Alors, sous Q_x, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de naissance et de mort transiente avec les probabilités de transition suivantes :

$$, = \frac{\ell-1}{2\ell}, \quad \forall \ell \geq 1,$$

et (2.26)

qui sont les probabilités de transition d'une chaîne de Bessel d'indice 1/2 (ou de dimension 3).

Nous avons le même phénomène que dans le cadre continu où l'on pénalise un mouvement brownien avec drift de manière à ce qu'il atteigne le niveau 0 au bout d'un temps infini. Dans ce cas, le nouveau processus est un Bessel de dimension 3.

PROPOSITION 2.7. *Soit $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ un mouvement borownien avec dérive $X(t) := B(t) + \mu t$, où $\mu < 0$ et $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard démarrant de x. On note, comme d'habitude, $\{\mathcal{F}_t^{(B,\mu)}\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle et $T_0^{(B,\mu)}$ le temps d'atteinte de 0 par X.*

(1) *Pour tout $t \geq 0$ et tout $A_t \in \mathcal{F}_t^{(B,\mu)}$:*

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{A_t, T_0^{(B,\mu)}>\kappa\}}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{T_0^{(B,\mu)}>t}\right]} = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A_t} M^{(B,\mu)}(t)\right], \tag{2.27}$$

où

$$M^{(B,\mu)}(t) := \mathbb{1}_{\{T_0^{(B,\mu)}>t\}} \frac{X_t}{x} e^{-\mu(X_t-x)+(t\mu^2/2)} \tag{2.28}$$

est une $\mathcal{F}^{(B,\mu)}$-martingale positive qui tend vers zéro, presque sûrement.

(2) *L'égalité (2.27) induit une mesure de probabilité $Q_x^{(B,\mu)}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$: pour tout $t \geq 0$ et tout $A_t \in \mathcal{F}_t^{(B,\mu)}$:*

$$Q_x^{(B,\mu)}(A_t) := \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A_t} M^{(B,\mu)}(t)\right] \tag{2.29}$$

et sous $Q_x^{(B,\mu)}$, le générateur infinitésimal de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est $L = 1/x\, d/dx + 1/2\, d^2/dx^2$.

3. Démonstration des résultats principaux

3.1. Démonstration du Théorème 2.2.

a. Démonstration de (2.7)-(2.8).

Pour commencer, décomposons $\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}]$ en deux termes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}] &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\{\mathbb{1}_{\{U_n\geq\kappa\}} + \mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}\mathbb{1}_{\{U_n<\kappa\}}\}] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_n\geq\kappa\}}] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}\mathbb{1}_{\{U_n<\kappa\}}]\end{aligned}$$

et on remarque que $\mathbb{1}_{\{U_n\geq\kappa\}}$ s'annule si $\kappa \geq \lfloor n/2 \rfloor$.

On s'intéresse donc au second terme et on définit la chaîne de Markov $\{\tilde{X}_p := X_{n+p} - X_n\}_{p\geq 0}$. Alors, pour $\kappa \geq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty \geq \kappa\}}\mathbb{1}_{\{U_n<\kappa\}}] &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\circ\theta_n\geq\kappa-U_n+\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{E}_{X_n}\left(\mathbb{1}_{\{\tilde{U}_\infty\geq\kappa-U_n+\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\}}\right)\right],\end{aligned}$$

où $\tilde{U}_\infty = \sum_{p\geq 0}\mathbb{1}_{\{\tilde{X}_p=0\}}$. Ici, on a besoin du résultat suivant :

LEMME 3.1. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$\mathbb{P}_n(U_\infty \geq \kappa) = (R_n/S)(1-p_0/S)^{\kappa-1}, \tag{3.1}$$

où

$$R_0 = S \quad \text{and} \quad R_n := \sum_{\ell\geq n}\gamma_\ell, \quad n \geq 1. \tag{3.2}$$

Supposons ce lemme est démontré et achevons la démonstration de (2.7). Pour $\kappa \geq \lfloor n/2 \rfloor$:

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A_n}\left(R_{X_n}/S\right)\left(1-p_0/S\right)^{\kappa-U_n+\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}-1}\right]$$

et, si nous combinons avec (3.1) pour $n=0$, alors, pour $\kappa \geq \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_n}\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}]}{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{U_\infty\geq\kappa\}}]} = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A_n}\left(R_{X_n}/S\right)\left(1-p_0/S\right)^{-U_n+\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}}\right].$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 2.2

Démonstration du lemme 3.1.

Considèrons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et, pour $n \geq 1$ entier, $f(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell$. Alors, un calcul direct prouve que $\{f(X_n) : n \geq 0\}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. Notons par T_n le temps d'atteinte de $n \in \mathbb{N}$ par la chaîne de naissance et de mort $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_n(T_0 < \infty) = (\Sigma_{\ell\geq n}\gamma_\ell)/S. \tag{3.3}$$

En effet, si $m \geq n$, d'après le Théorème d'arrêt

$$f(n) = \mathbb{E}_n\left[f(X_{T_m\wedge T_0})\right] = f(m)\mathbb{P}_n(T_m < T_0) + f(n-1)[1-\mathbb{P}_n(T_0 > T_m)]$$

et par conséquent

$$\mathbb{P}_n(T_m < T_0) = (f(n)-f(0))/(f(m)-f(0)) = \textstyle\sum_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell/\sum_{\ell=0}^{m-1}\gamma_\ell.$$

Puisque $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov transiente, en faisant $m \to \infty$,

$$\mathbb{P}_n(T_0 = \infty) = \textstyle\sum_{\ell=0}^{n-1}\gamma_\ell/S \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_n(T_0 < \infty) = (\Sigma_{\ell\geq n}\gamma_\ell)/S = R_n/S\,.$$

On introduit les temps d'arrêt suivants :

$$T_0^{(0)} = T_0 \text{ and } T_0^{(\ell)} := \inf\{n \geq T_0^{(\ell-1)} : X_n = 0\}, \text{ si } \ell \geq 1.$$

Avec ces notations, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0\left(T_0^{(1)} < \infty\right) &= \mathbb{P}_0\left(X_1 = 0\right) + \mathbb{P}_0\left(X_1 = 1, T_0^{(1)} < \infty\right) \\ &= r_0 + p_0\mathbb{P}_1\left(T_0 < \infty\right) \\ &= r_0 + p_0\left(1 - \frac{1}{S}\right) \\ &= r_0 + p_0 - \frac{p_0}{S} \\ &= 1 - \frac{p_0}{S}\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.6), on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(U_\infty = \ell) &= \mathbb{P}_0(T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(\ell-1)} < \infty, T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(\ell)} = \infty)\\ &= \mathbb{P}_0(T_0^{(1)} < \infty)\mathbb{P}_0(T_0^{(2)} < \infty \mid T_0^{(1)} < \infty)\ldots\mathbb{P}_0(T_0^{(\ell-1)} < \infty \mid T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(\ell-1)} < \infty)\\ &\times \mathbb{P}_0(T_0^{(\ell)} = \infty \mid T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(\ell-1)} < \infty)\\ &= \mathbb{P}_0(T_0^{(1)} < \infty)^{\ell-1}\mathbb{P}_0(T_0^{(1)} = \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty)^{\ell-1}\mathbb{P}_1(T_0 = \infty)\\ &= (p_0/s)(1 - p_0/s)^{\ell-1}.\end{aligned}$$

C'est pourquoi, d'une part :

$$\mathbb{P}_0(U_\infty \geq \kappa) = \sum_{\ell \geq \kappa} \mathbb{P}_0(U_\infty = \ell) = (1 - p_0/s)^{\kappa-1},$$

alors que, d'autre part, si $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_n(U_\infty \geq \kappa) = \mathbb{P}_n(T_0 < \infty)\mathbb{P}_0(U_\infty \geq \kappa) = (\Sigma_{\ell \geq n}\gamma_\ell)/s(1 - p_0/s)^{\kappa-1}.$$

□

Remarque 3.2. Remarquons que la limite dans (2.7) est en fait une egalité exacte pour $\kappa > \lfloor n/2 \rfloor$. Cela est en quelque sorte une situation différente de celle décrite dans la première partie de cette thèse ou [**RVY06c**]. □

b. Démonstration de la deuxième partie du Théorème 2.2.
Utilisant encore le fait que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov transiente, nous obtenons que $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ presque sûrement. Alors, nécessairement, en supposant que $\{M_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale, elle ne peut être uniformément intégrable.

Ainsi, la seule chose que nous devons prouver est que $\{M_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n+1\}}|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n-1\}}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}}|\mathcal{F}_n\right] \quad (3.4)\\ &+ \mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n\}}|\mathcal{F}_n\right]. \quad (3.5)\end{aligned}$$

En utilisant (2.8) et (3.2), le premier terme de (3.4) peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_{n+1}}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n+1\}}|\mathcal{F}_n\right] &= (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_{n+1}}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n+1\}}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_{n+1}}p_{X_n}.\end{aligned}$$

Pour le second terme dans (3.4), on décompose l'espérance en deux termes

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n-1\}}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,1\}}|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n-1\}}\mathbb{1}_{\{X_n=1\}}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{E}\left[(1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_{n-1}}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n-1\}}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0,1\}}|\mathcal{F}_n\right]\\ &+\mathbb{E}\left[(1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n-1+1}R_{X_{n-1}}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n-1\}}\mathbb{1}_{\{X_n=1\}}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_{n-1}}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}}(\mathbb{1}_{\{X_n\neq 1\}} + \mathbb{1}_{\{X_n=1\}})\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{n+1}=X_n-1}|\mathcal{F}_n\right]\\ &= (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_{n-1}}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}}q_{X_n}.\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, le troisième terme de (3.4) peut être écrit

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=X_n\}}|\mathcal{F}_n\right] = (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}R_{X_n}r_{X_n}.$$

En remplaçant dans (3.4) et on peut écrire d'une part,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}}|\mathcal{F}_n\right] &= (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}}\left[p_{X_n}R_{X_{n+1}} + q_{X_n}R_{X_{n-1}} + r_{X_n}R_{X_n}\right]\\ &= (1/s)(1 - p_0/s)^{-U_n}\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}}\left[(p_{X_n} + q_{X_n} + r_{X_n})R_{X_n} + q_{X_n}\gamma_{X_n-1} - p_{X_n}\gamma_{X_n}\right]\\ &= M_n\mathbb{1}_{\{X_n\neq 0\}},\end{aligned}$$

par (2.1), (2.3) et (3.2). Et d'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}|\mathcal{F}_n\right] &= (1/S)(1-p_0/S)^{-U_n}\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\left\{p_0\sum_{\ell\geq 1}\gamma_\ell + r_0\sum_{\ell\geq 0}\gamma_\ell\right\}\\ &= (1/S)(1-p_0/S)^{-U_n}\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}S(1-p_0/S) = (1/S)(1-p_0/S)^{-U_n+1}\mathbb{1}_{\{X_n=0\}}\\ &= M_n\mathbb{1}_{\{X_n=0\}},\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\sum_{\ell\geq 1}\gamma_\ell = S-1$ et $r_0 = 1-p_0$. Ce qui implique que $\{M_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale.

c. Démonstration de la troisième partie du Théorème 2.2.
En supposant que , sous Q, la suite $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de naissance et de mort dont les probabilités de transition sont données par (2.10), il n'est pas difficile de montrer que, sous Q, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est récurrente.
En effet, il suffit d'utiliser la Proposition 2.1. Posons

$$\tilde{\rho}_\ell := \frac{\tilde{q}_\ell}{\tilde{p}_\ell},\ \forall \ell\geq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}_0 := 1,\ \tilde{\gamma}_\ell := \tilde{\rho}_1\ldots\tilde{\rho}_\ell,\ \ell\geq 1. \tag{3.6}$$

Par conséquent, en utilisant (2.3), (2.10) et (3.2),

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\geq 1}\tilde{\gamma}_\ell &= \sum_{\ell\geq 1}\prod_{k=1}^{\ell}\frac{q_k R_{k-1}}{p_k R_{k+1}} = \sum_{\ell\geq 1}\gamma_\ell\prod_{k=1}^{\ell}\frac{R_{k-1}}{R_{k+1}} = \sum_{\ell\geq 1}\gamma_\ell\frac{R_0R_1}{R_\ell R_{\ell+1}} &(3.7)\\ &= SR_1\sum_{\ell\geq 1}(1/R_{\ell+1} - 1/R_\ell) = SR_1\lim_{N\to\infty}(1/R_{N+1} - 1/R_1) = \infty &(3.8)\end{aligned}$$

puisque $\lim_{N\to\infty} R_{N+1} = 0$, d'après la Proposition 2.1.

Prouvons maintenant que, sous Q, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de naissance et de mort avec les transitions de probabilités données dans (2.10). Notons, pour tout entier $n\geq 1$ et tous les entiers $a_{n-1},\ldots,a_0\geq 0$,

$$A_{n-1} := \{X_{n-1} = a_{n-1},\ldots,X_0 = a_0\}.$$

Pour tout $\ell\geq 1$ et tout entier $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\tilde{p}_\ell &= Q\left[X_{n+1}=\ell+1|X_n=\ell,A_{n-1}\right] = \frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=\ell+1,X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}M_{n+1}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}M_n\right]}, \quad \text{by (2.9)}\\ &= \frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=\ell+1,X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_{n+1}}R_{\ell+1}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_n}R_\ell\right]}, \quad \text{d'après (2.8)}\\ &= \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\,\frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=\ell+1,X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right]\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_n}\right]}\\ &= \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\,\frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_n}\mathbb{P}_0\left(X_{n+1}=X_n+1|\mathcal{F}_n\right)\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_n}\right]}, \quad \text{puisque } \ell\geq 1\\ &= \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\,\frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_n}p_{X_n}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=\ell\}\cap A_{n-1}}(1-p_0/S)^{-U_n}\right]} = p_\ell\,\frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}.\end{aligned}$$

Avec un calcul similaire, on obtient que, pour $\ell\geq 1$, $\tilde{r}_\ell = r_\ell$.

Supposons maintenant que $\ell = 0$. Alors en utilisant un raisonnement similaire, pour tous $a_{n-1}, \dots, a_0 \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 &= Q\left[X_{n+1} = 1 | X_n = 0, A_{n-1}\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=1, X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_{n+1}} R_1\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_n + \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}} R_0\right]}, \qquad \text{by (2.9) and (2.8)} \\
&= \frac{R_1}{S}\frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_n} p_{X_n}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_n+1}\right]} = p_0 \frac{R_1}{S}\left(1 - {}^{p_0}\!/_S\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_0 &= Q\left[X_{n+1} = 0 | X_n = 0, A_{n-1}\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=0, X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_{n+1} + \mathbb{1}_{\{X_{n+1}=0\}}} R_0\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_n + \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}} R_0\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=0, X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_n - 1 + 1}\right]}{\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{\{X_n=0\}\cap A_{n-1}}(1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-U_n + 1}\right]} = r_0 (1 - {}^{p_0}\!/_S)^{-1}.
\end{aligned}$$

3.2. Démonstration du Théorème 2.5. La démonstration présente des idées similaire à celle du Théorème 2.2. nous allons mettre en avant les principales différences.

a. Démonstration de (2.18)-(2.19).
Cette partie est presque identique au cas discret. Nous décomposons

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}] = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(t)\geq\kappa\}}] + \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}\mathbb{1}_{\{V(t)<\kappa\}}]$$

et on remarque que $\mathbb{1}_{\{V(t)\geq\kappa\}}$ s'annule si $\kappa > t$. Posons $\{\tilde{X}(s) := X(t+s) - X(t)\}_{s\geq 0}$ et remarquons que $V(\infty) = V(t) + V(\infty)\circ\theta_t$. On utilise ici la notation classique, $\{\theta_t\}_{t\geq 0}$ pour la famille des "'translations"'. Alors pour $\kappa > t$:

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}\mathbb{1}_{\{V(t)<\kappa\}}] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\circ\theta_t\geq\kappa - V(t)\}}\right] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{E}_{X(t)}\left(\mathbb{1}_{\{\tilde{V}(\infty)\geq\kappa - V(t)\}}\right)\right],$$

où $\tilde{V}(\infty) = \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\tilde{X}(t)=0\}} ds$. Comme dans le cas discret on peut établir le résultat suivant :

Lemme 3.3. *Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}_n(V(\infty) > t) = ({}^{R_n}\!/_S) e^{-{}^{b_0 t}\!/_S}, \tag{3.9}$$

où R_n est donné par (3.2).

Finissons la démonstration de (2.18). Pour $\kappa > t$:

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}] = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}({}^{R_{X(t)}}\!/_S) e^{-{}^{b_0(t-V(t))}\!/_S}]$$

et en utilisant le Lemme (3.9), pour $\kappa > t$:

$$\frac{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}]}{\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{V(\infty)\geq\kappa\}}]} = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{A_t}({}^{R_{X(t)}}\!/_S) e^{{}^{b_0 V(t)}\!/_S}],$$

qui est (2.18)-(2.19).

Démonstration du Lemme 3.3. Rappelons que $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ est donné par (2.15) et on note $U_\infty^{(Y)} := \sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{\{Y_n=0\}}$. Il n'est pas difficile de voir que, sur l'événement $\{U_\infty^{(Y)} = k\}$, $V(\infty)$ est la somme de k variables aléatoires indépendantes $\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_k$, le temps d'attente en 0, de loi exponentielle de paramètre $\lambda_0 = b_0$, et indépendantes de $U_\infty^{(Y)}$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(V(\infty) > t) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_n\left(U_\infty^{(Y)} = k, \mathfrak{e}_1 + ... + \mathfrak{e}_k > t\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_n\left(U_\infty^{(Y)} = k\right) \mathbb{P}\left(\mathfrak{e}_1 + \ldots + \mathfrak{e}_k > t\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{R_n}{S}\left(1-\frac{1}{S}\right)^{k-1} \frac{1}{S} e^{-b_0 t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(b_0 t)^i}{i!} \quad \text{by (3.1)} \\
&= \frac{R_n}{S}\frac{1}{S} e^{-b_0 t} \sum_{i\geq 0} \frac{(b_0 t)^i}{i!} \sum_{k\geq i+1} \left(1-\frac{1}{S}\right)^{k-1} \\
&= \frac{R_n}{S}\frac{1}{S} e^{-b_0 t} \sum_{i\geq 0} \frac{(b_0 t)^i}{i!} \left(1-\frac{1}{S}\right)^{i} S = \frac{R_n}{S} e^{\frac{-b_0 t}{S}}
\end{aligned}$$

b. Démonstration de la deuxième partie du Théorème 2.5.
Comme dans le cas discret, on doit mettre en avant une martingale utile. A ce niveau, nous devons rappeler la formule de Dynkin pour les processus de sauts purs (voir, par exemple [**Kle05**], pp. 262) : si f est une fonction bornée telle que $\{f(X(t))\}_{t\geq 0}$ est un processus de sauts purs, alors

$$M^f(t) := f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t Lf(X(s))ds \tag{3.10}$$

est une martingale locale, avec la notation

$$Lf(x) := b_x\left[f(x+1) - f(x)\right] + d_x\left[f(x-1) - f(x)\right]. \tag{3.11}$$

En prenant (3.11) $f(x) = \sum_{\ell\geq x}\gamma_\ell = R_x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
Lf(x) &= b_x\left(R_{x+1} - R_x\right) + d_x\left(R_{x-1} - R_x\right) = -b_x\gamma_x + d_x\gamma_{x-1} \\
&= -b_x \prod_{\ell=1}^{x} \frac{d_\ell}{b_\ell} + d_x \prod_{\ell=1}^{x-1} \frac{d_\ell}{b_\ell} = -b_0\gamma_0 \mathbb{1}_{\{x=0\}} = -b_0 \mathbb{1}_{\{x=0\}}.
\end{aligned}$$

D'où $\{M^f(t)\}$, donné par (3.10), est une martingale locale et on peut appliquer la formule d'intégration par parties (voir, par exemple [**Kle05**], pp. 220) à la semimartingale

$$R_{X(t)} = M^f(t) + S - \int_0^t b_0 \mathbb{1}_{\{X(s)=0\}} ds$$

et le processus à variation finie $A(t) := \exp(b_0 V(t)/S)$. Remarquons que

$$dR_{X(t)} = dM^f(t) - b_0 \mathbb{1}_{\{X(t)=0\}} dt, \quad dA(t) = (b_0/S) e^{b_0 V(t)/S} \mathbb{1}_{\{X(t)=0\}} dt$$

et $\langle R_{X(\cdot)}, A\rangle = 0$. En utilisant (2.19),

$$\begin{aligned}
S\,M(t) &= R_{X(t)} e^{b_0 V(t)/S} = S + \int_0^t R_{X(s)}\, dA(s) + \int_0^t A(s)\, dR_{X(s)} + \langle R_{X(\cdot)}, A\rangle_t \\
&= S + \int_0^t R_{X(s)} \frac{b_0}{S} e^{b_0 V(s)/S} \mathbb{1}_{\{X(s)=0\}} ds + \int_0^t e^{b_0 V(s)/S}\left(dM^f(s) - b_0 \mathbb{1}_{\{X(s)=0\}} ds\right) \\
&= S + \int_0^t e^{b_0 V(s)/S} dM^f(s)
\end{aligned}$$

et par conséquent, $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ est une martingale locale. En fait, c'est une vrai martingale puisque, pour tout $T \geq 0$, $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |M(t)|) \leq \exp(b_0 T/S)$.

b. Démonstration de la troisième partie du Théorème 2.5.
Tout d'abord nous allons prouver que , sous Q, $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Markov. Pour tout $n \geq 1$ et toutes suites $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$ et $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{N}$, nous notons

$$A_{n-1} = \{X(t_0) = a_0, ..., X(t_{n-1}) = a_{n-1}\}.$$

Alors, pour tout $k, \ell \geq 0$,

$$\begin{aligned}
Q(X(t_{n+1}) = \ell \quad | \quad X(t_n) = k, A_{n-1}) &= \frac{Q\left(X(t_{n+1}) = \ell, X(t_n) = k, A_{n-1}\right)}{Q\left(X(t_n) = k, A_{n-1}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_{n+1})=\ell, X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} M(t_{n+1})\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} M(t_n)\right]} = \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_{n+1})=\ell, X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} R_\ell e^{b_0 V(t_{n+1})/S}\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} R_k e^{b_0 V(t_n)/S}\right]} \\
&= \frac{R_\ell}{R_k} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_{n+1})=\ell, X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} \exp\left(b_0(V(t_n)+V(t_{n+1}-t_n)\circ\theta_{t_n})/S\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} e^{b_0 V(t_n)/S}\right]} \\
&= \frac{R_\ell}{R_k} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} e^{b_0 V(t_n)/S} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_{n+1})=\ell\}} \exp\left(b_0(V(t_{n+1}-t_n)\circ\theta_{t_n})/S\right) \mid \mathcal{F}_{t_n}\right]\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} e^{b_0 V(t_n)/S}\right]} \\
&= \frac{R_\ell}{R_k} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} e^{b_0 V(t_n)/S} \mathbb{E}_k\left[\mathbb{1}_{\{\tilde{X}(t_{n+1}-t_n)=\ell\}} e^{b_0 \tilde{V}(t_{n+1}-t_n)/S}\right]\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X(t_n)=k\}\cap A_{n-1}} e^{b_0 V(t_n)/S}\right]} \\
&= \frac{R_\ell}{R_k} \mathbb{E}_k\left[\mathbb{1}_{\{\tilde{X}(t_{n+1}-t_n)=\ell\}} e^{b_0 \tilde{V}(t_{n+1}-t_n)/S}\right],
\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de A_{n-1}. Sous Q, $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est donc un processus markovien.

Pour étudier les temps d'attente sous Q, du processus $\{X(t)\}_{t\geq 0}$, grâce au caratère markovien du processus, il suffit d'étudier la loi de J_1. Pour tout entier $\ell \geq 1$ et tout $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\ell^Q[e^{-\alpha J_1}] &= \frac{\mathbb{E}^Q[e^{-\alpha J_1}\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}}]}{\mathbb{E}^Q[X(0)=\ell]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}} e^{-\alpha J_1} M(J_1)]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}} M(0)]} = \frac{S}{R_\ell}\mathbb{E}_\ell[e^{-\alpha J_1} M(J_1)] \\
&= \frac{S}{R_\ell}\left(\mathbb{E}_\ell\left[\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}} e^{-\alpha B(\ell)} M(B(\ell))\right] + \mathbb{E}_\ell\left[\mathbb{1}_{\{D(\ell)\leq B(\ell)\}} e^{-\alpha D(\ell)} M(D(\ell))\right]\right) \\
&= \frac{1}{R_\ell}\left(\mathbb{E}_\ell\left[\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}} e^{-\alpha B(\ell)} R_{\ell+1}\right] + \mathbb{E}_\ell\left[\mathbb{1}_{\{D(\ell)\leq B(\ell)\}} e^{-\alpha D(\ell)} R_{\ell-1}\right]\right),
\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}} V(J_1) = 0$, $\mathbb{P}_\ell$-p.s. et en utilisant (2.19) et le Théorème d'arrêt. D'où :

$$\mathbb{E}_\ell^Q[e^{-\alpha J_1}] = \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\mathbb{E}_\ell\left[\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}} e^{-\alpha B(\ell)}\right] + \frac{R_{\ell-1}}{R_\ell}\mathbb{E}_\ell\left[\mathbb{1}_{\{D(\ell)\leq B(\ell)\}} e^{-\alpha D(\ell)}\right].$$

En utilisant (2.13) :

$$\mathbb{E}_\ell[\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}} e^{-\alpha B(\ell)}] = \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x} e^{-b_\ell x} b_\ell \int_x^\infty dy\, e^{-d_\ell y} d_\ell = \frac{b_\ell}{b_\ell + d_\ell + \alpha}.$$

Nous obtenons alors :

$$\mathbb{E}_\ell^Q[e^{-\alpha J_1}] = \frac{b_\ell R_{\ell+1} + d_\ell R_{\ell-1}}{R_\ell(b_\ell + d_\ell + \alpha)} = \frac{b_\ell + d_\ell}{b_\ell + d_\ell + \alpha}.$$

En conclusion, le temps de séjour en $\ell \geq 1$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda_\ell = b_\ell + d_\ell$. Remarquons que pour $\ell \geq 1$ la loi du temps de séjour est la même sous $\mathbb{P}$ et sous Q.

Le raisonnement est identique pour $\ell = 0$, :

$$\mathbb{E}_0^Q[e^{-\alpha J_1}] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X(0)=0\}} e^{-\alpha J_1} M(J_1)]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X(0)=0\}} M(0)]} = \mathbb{E}_0[e^{-\alpha B(0)} \frac{R_1}{S} e^{b_0 V(B(0))/S}]$$
$$= \frac{R_1}{S}\mathbb{E}_0[e^{-\alpha B(0)} e^{\frac{b_0 B(0)}{S}}] = \frac{S-1}{S}\mathbb{E}_0[e^{B(0)(-\alpha+b_0/S)}] = \frac{b_0 - b_0/S}{b_0 - b_0/S + \alpha},$$

Et nous en déduisons que le temps de séjour en 0 est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $b_0(S-1)/S$.

Maintenant, nous allons étudier la chaîne de Markov sous jacente $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ sous Q. Pour toute fonction borelienne $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ et $\ell \geq 1$, alors, comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\ell^Q[g(Y_1)] &= \mathbb{E}_\ell^Q[g(X(J_1))] = \frac{\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}} g(X(J_1))]}{\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}}]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}}\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}} g(\ell+1)R_{\ell+1}]}{\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}} R_\ell]} + \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}}\mathbb{1}_{\{D(\ell)\leq B(\ell)\}} g(\ell-1)R_{\ell-1}]}{\mathbb{E}^Q[\mathbb{1}_{\{X(0)=\ell\}} R_\ell]} \\
&= g(\ell+1)\frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\mathbb{E}_\ell[\mathbb{1}_{\{B(\ell)\leq D(\ell)\}}] + g(\ell-1)\frac{R_{\ell-1}}{R_\ell}\mathbb{E}_\ell[\mathbb{1}_{\{D(\ell)\leq B(\ell)\}}] \\
&= g(\ell+1)\frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\frac{b_\ell}{b_\ell+d_\ell} + g(\ell-1)\frac{R_{\ell-1}}{R_\ell}\frac{d_\ell}{b_\ell+d_\ell}\,.
\end{aligned}$$

Pour $\ell = 0$, le raisonnement est identique. On conclut en disant que sous Q, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de naissance et de mort avec les probabilités de transition suivantes :

$$\tilde{p}_\ell = \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\frac{b_\ell}{b_\ell+d_\ell}, \quad \tilde{q}_\ell = \frac{R_{\ell-1}}{R_\ell}\frac{d_\ell}{b_\ell+d_\ell}, \text{ for } \ell \geq 1, \quad \text{and } \tilde{p}_0 = 1.$$

Alors, si on pose $\tilde{\gamma}_0 = 1$ et $\tilde{\gamma}_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\tilde{q}_i}{\tilde{p}_i}$, pour $\ell \geq 1$, on a :

$$\sum_{\ell\geq 0}\tilde{\gamma}_\ell = 1 + \sum_{\ell\geq 1}\prod_{i=1}^{\ell}\frac{d_i\,R_{i-1}}{b_i R_{i+1}} = 1 + \sum_{\ell\geq 1}\prod_{i=1}^{\ell}\frac{q_i\,R_{i-1}}{p_i R_{i+1}}\,.$$

D'après (3.7) et la Proposition 2.1, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ est récurrente. De plus, d'après le deuxième point de la Proposition (2.4), $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est récurrent sous Q.
Si on note $\tilde{b}_\ell$ et $\tilde{d}_\ell$ les taux de naissance et de mort de $(X(t), t \geq 0)$ sous Q, on a :

$$\tilde{b}_\ell + \tilde{d}_\ell = b_\ell + d_\ell \quad \text{et} \quad \tilde{p}_\ell = \frac{\tilde{b}_\ell}{\tilde{b}_\ell+\tilde{d}_\ell} = \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}\frac{b_\ell}{b_\ell+d_\ell}\,.$$

Par conséquent,

$$\tilde{b}_\ell = b_\ell\,\frac{R_{\ell+1}}{R_\ell} \quad \text{et} \quad \tilde{d}_\ell = d_\ell\,\frac{R_{\ell-1}}{R_\ell},$$

et (2.21) est démontré.

3.3. Démonstration des Propositions 2.6 et 2.7.

Pour commencer, donnons un équivalent lorsque $\kappa \to \infty$, de $\mathbb{P}_x(T_0 \geq \kappa)$, lorsque $x \geq 1$ est un entier. Plus précisément, nous établissons le résultat suivant :

LEMME 3.4. *soit $x \geq 1$ un entier. Lorsque $\kappa \to \infty$,*

$$\mathbb{P}_x\left(T_0 \geq \kappa\right) \sim \frac{x}{\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{x/2}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-3/2}(4pq)^{\kappa/2}\,. \tag{3.12}$$

Comme précédemment, nous supposons la démonstration de ce lemme effectuée et nous achevons tout d'abord la démonstration de (2.23)-(2.24). Lorsque $\kappa \to \infty$, nous obtenons l'équivalent suivant

$$\frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{A_n,\, T_0\geq\kappa\}}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq\kappa\}}\right]} = \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{\Lambda_n,\, T_0\geq n\}}\mathbb{E}_{Z_n}\left[\mathbb{1}_{\widetilde{T}_0\geq\kappa-n}\right]\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq\kappa\}}\right]}$$

$$\sim \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{A_n,\, T_0\geq n\}}\frac{Z_n}{\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{Z_n/2}\left(\frac{\kappa-n}{2}\right)^{-3/2}(4pq)^{(\kappa-n)/2}\right]}{\frac{x}{\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{x/2}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-3/2}(4pq)^{\kappa/2}}$$

et nous en déduisons l'expression de M'_n, (2.24). Comme d'habitude, nous vérifions le fait que c'est une martingale. Premièrement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[M'_{n+1}\mathbb{1}_{\{Z_n\geq 2\}} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{1}_{\{T_0\geq n,\, Z_n\geq 2\}}\frac{Z_n}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(Z_n-x)/2}(4pq)^{-(n+1)/2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}/2} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&+ \mathbb{1}_{\{T_0\geq n,\, Z_n\geq 2\}}\frac{1}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(Z_n-x)/2}(4pq)^{-(n+1)/2}\mathbb{E}\left[\xi_{n+1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_{n+1}/2} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_0\geq n,\, Z_n\geq 2\}}\frac{Z_n}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(Z_n-x)/2}(4pq)^{-(n+1)/2}\left[p\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} + q\left(\frac{q}{p}\right)^{-1/2}\right] \\
&+ \mathbb{1}_{\{T_0\geq n,\, Z_n\geq 2\}}\frac{1}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(Z_n-x)/2}(4pq)^{-(n+1)/2}\left[p\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2} - q\left(\frac{q}{p}\right)^{-1/2}\right] = \mathbb{1}_{\{Z_n\geq 2\}}M'_n
\end{aligned}$$

et, deuxièmement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[M'_{n+1}\mathbb{1}_{\{Z_n=1\}} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq n\, Z_{n+1}=2,\, Z_n=1\}}\frac{2}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(2-x)/2}(4pq)^{-(n+1)/2}\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_0\geq n, Z_n=1\}}\frac{2}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(1-x)/2}(4pq)^{-n/2}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}(4pq)^{-1/2}p = \mathbb{1}_{\{Z_n=1\}}M'_n
\end{aligned}$$

Enfin, pour vérifier (2.26), encore une fois A_{n-1} désigne l'ensemble $\{Z_0 = a_0, \ldots, Z_{n-1} = a_{n-1}\}$. Si $\ell \geq 1$:

$$\begin{aligned}
Q_x\left(Z_{n+1} = \ell+1 \mid Z_n = \ell, A_{n-1}\right) &= \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{Z_{n+1}=\ell+1, Z_n=\ell\}\cap A_{n-1}}M'_{n+1}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{Z_n=\ell\}\cap A_{n-1}}M'_n\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq n+1, Z_{n+1}=\ell+1, Z_n=\ell,\}\cap A_{n-1}}\frac{\ell+1}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(\ell+1-x)/2}(4pq)^{-(n+1)/2}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq n, Z_n=\ell,\}\cap A_{n-1}}\frac{\ell}{x}\left(\frac{q}{p}\right)^{(\ell-x)/2}(4pq)^{-n/2}\right]} \\
&= \frac{\ell+1}{\ell}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}(4pq)^{-1/2}\frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq n, Z_{n+1}=\ell+1, Z_n=\ell\}\cap A_{n-1}}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0\geq n, Z_n=\ell\}\cap A_{n-1}}\right]} = \frac{\ell+1}{2\ell p} \\
\times\, \mathbb{P}_x\left(T_0\geq n, Z_{n+1} = \ell+1 \mid Z_n = \ell, A_{n-1}\right) &= \frac{\ell+1}{2\ell p}\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = \ell+1 \mid Z_n = \ell\right) = \frac{\ell+1}{2\ell},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le caractère markovien de $\{Z_n\}$ sous $\mathbb{P}_x$. De la même manière, on montre que

$$Q_x\left(Z_{n+1} = \ell-1 \mid Z_n = \ell\right) = \frac{\ell-1}{2\ell}\ .$$

Ainsi, il est clair que $Q_x(Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = 1) = 0$ et (2.26) est démontré.

Démonstration du lemme 3.4. Tout d'abord, rappelons que (voir par exemple [**Fel50**], pp. 351), pour tout $s \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}_x\left(s^{T_0}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}\right)^x = \sum_{r\geq x} \mathbb{P}_x(T_0 = r)s^r \tag{3.13}$$

C'est un calcul direct :

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}\right)^x = \frac{1}{(2p)^x}\sum_{\ell\geq x}\frac{(-4pq)^\ell}{\ell!}s^{2\ell-x}\sum_{k=0}^{x}(-1)^k\binom{x}{k}\prod_{i=0}^{\ell-1}\left(\frac{k}{2}-i\right).$$

Par conséquent, si x et r sont de même parité, on obtient

$$\begin{aligned}P_x(T_0=r) &= \frac{(-4pq)^{(n+r)/2}}{(2p)^x\left((x+r)/2\right)!}\sum_{k=0}^{x}(-1)^k\binom{x}{k}\prod_{i=0}^{(x+r)/2-1}\left(\frac{k}{2}-i\right)\\ &= -\frac{(-4pq)^{(x+r)/2}}{(2p)^x\left(\frac{(x+r)}{2}\right)!}\sum_{k'=0}^{\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor}\binom{x}{2k'+1}\prod_{i=0}^{\frac{(x+r)}{2}-1}\left(k'-i+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Après quelques calculs :

$$\mathbb{P}_x(T_0=r) = \frac{(4pq)^{(x+r)/2}}{\pi(2p)^x\left((x+r)/2\right)!}\sum_{k'=0}^{\lfloor\frac{x-1}{2}\rfloor}(-1)^{k'}\binom{x}{2k'+1}\Gamma\left(k'+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+r}{2}-k'-\frac{1}{2}\right).$$

Comme $r\to\infty$, tous les termes sont négligeables par rapport au terme en $k'=0$, d'où

$$\mathbb{P}_x(T_0=r) \sim \frac{x\Gamma(3/2)}{\pi\left(\frac{x+r}{2}\right)!}\left(\frac{q}{p}\right)^{x/2}(4pq)^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{x+r}{2}-\frac{1}{2}\right) \sim \frac{x}{\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{x/2}\left(\frac{r}{2}\right)^{3/2}(4pq)^{r/2}.$$

Enfin, puisque $\mathbb{P}_x(T_0\geq\kappa) = \sum_{r\geq\kappa}\mathbb{P}_x(T_0=r)$, comme $\kappa\to\infty$, $\mathbb{P}_x(T_0\geq\kappa)\sim\mathbb{P}_x(T_0=\kappa)$, le premier terme. La démonstration (3.12) est terminée.

Démonstration de la Proposition 2.7.

C'est un résultat classique, en utilisant le Théorème de Girsanov (voir, par exemple [**KS**], pp. 197), que :

$$\mathbb{P}(T_0^{(B,\mu)}>t) = \int_t^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{(x-\mu s)^2}{2s}\right)ds$$

et nous obtenons facilement que :

$$\mathbb{P}(T_0^{(B,\mu)}>t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{\mu x-\mu^2 t/2} \tag{3.14}$$

Alors, comme dans la démonstration de la Proposition 2.6 :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{A_t,T_0^{(B,\mu)}>\kappa\}}\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0^{(B,\mu)}>\kappa\}}\right]} &\underset{\kappa\to\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{A_t,T_0^{(B,\mu)}>\kappa\}}\mathbb{E}_{X(t)}\left(\mathbb{1}_{\{\widetilde{T}_0^{(B,\mu)}>\kappa-t\}}\right)\right]}{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{T_0^{(B,\mu)}>\kappa\}}\right]}\\ &\underset{\kappa\to\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\{A_t,T_0^{(B,\mu)}>\kappa\}}\left(X(t)/\sqrt{2\pi(\kappa-t)^3}\right)\exp(\mu X(t)-(\kappa-t)\mu^2/2)\right]}{\left(x/\sqrt{2\pi\kappa^3}\right)\exp(\mu x-\kappa\mu^2/2)}\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir l'expression de $M^{(B,\mu)}$. Nous démontrons le fait que $\left(M_t^{(B,\mu)}, t \geq 0\right)$ est une $\mathcal{F}^{(B,\mu)}$-martingale en utilisant la formule d'Ito classique :

$$\begin{aligned}
\frac{X(t)}{x} e^{-\mu(X(t)-x)+\mu^2 t/2} &= 1 + \frac{e^{\mu x}}{x} \int_0^t e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2} \left(\mu + -\frac{\mu^2}{2}\left(B(s)+\mu s\right)\right) ds \\
&+ \frac{e^{\mu x}}{x} \int_0^t e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2} \left(1 - \mu\left(B(s)+\mu s\right)\right) dB(s) \\
&+ \frac{e^{\mu x}}{2x} \int_0^t e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2} \left(\mu^2\left(B(s)+\mu s\right) - 2\mu\right) ds \\
&= \frac{e^{\mu x}}{x} \int_0^t e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2} \left(1 - \mu\left(B(s)+\mu s\right)\right) dB(s).
\end{aligned}$$

Etudions maintenant le processus $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ sous $Q_x^{(B,\mu)}$. Nous considérons la fonction $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[f\left(X(t)\right)\right] &= \mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[f\left(X(t)\right) M^{(B,\mu)}(t)\right] \\
&= \mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[f(x) + \frac{e^{\mu x}}{x}\int_0^t f(X(s)) e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2}(1-\mu X(s)) dB(s)\right] \\
&+ \mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[\int_0^t f'(X(s)) M^{(B,\mu)}(s)\left(dB(s)+\mu ds\right) + \frac{e^{\mu x}}{x}\int_0^t f'(X(s)) e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2}(1-\mu X(s)) ds\right] \\
&+ \mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[\frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s)) M^{(B,\mu)}(s) ds\right] \\
&= \mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[f(x) + \int_0^t f'(X(s)) \frac{e^{\mu x}}{x} e^{-\mu B(s)-\mu^2 s/2} + \frac{1}{2} f''(X(s)) M^{(B,\mu)}(s) ds\right] \\
&= \mathbb{E}_x^{(B,\mu)}\left[f(x) + \int_0^t \frac{f'(X(s))}{X(s)} M^{(B,\mu)}(s) ds + \frac{f''(X(s))}{2} M^{(B,\mu)}(s) ds\right]
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que sous $Q_x^{(B,\mu)}$, le générateur infinitésimal de $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est celui d'un processus de Bessel de dimension 3.

4. Chaînes de Bessel et autres exemples

4.1. Chaînes de Bessel.

Nous allons illustrer nos résultats avec deux exemples. Dans le cas discret, nous considérons la marche de Bessel d'indice $\alpha > 0$, tandis que dans le cas continu nous adaptons cet exemple.

Rappelons la définition d'une marche de Bessel d'indice $\alpha > -1$ (ou de dimension $\delta = 2(\alpha+1) > 0$) : c'est une chaîne de naissance et de mort $\{X_n\}_{n\geq 0}$ avec les probabilités de transition suivantes :

$$p_0 = 1,\ p_\ell := \frac{\ell + 2\alpha + 1}{2\ell + 2\alpha + 1},\ q_\ell := \frac{\ell}{2\ell + 2\alpha + 1}, \quad \ell \geq 1.$$

Grâce à la Proposition 2.1, remarquons que $\{X_n\}$ est transiente pour $\alpha > 0$. Ainsi, si on suppose $\alpha > 0$, d'après le Théorème 2.2 on obtient :

Corollaire 4.1. (1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout élément $A_n \in \mathcal{F}_n$, (2.7) est vérifiée avec la martingale positive et non uniformément intégrable*

$$M_n := \frac{\Gamma(2\alpha+1) X_n!}{\Gamma(X_n + 2\alpha + 1)(2\alpha+1)^{-U_n + \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}}}. \tag{4.1}$$

(2) *Soit Q la mesure de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ donnée par (2.9). Alors, sous Q, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de naissance et de mort récurrente dont les probabilités de transition sont :*

$$\tilde{p}_\ell := \frac{\ell+1}{2\ell+2\alpha+1}, \tilde{q}_\ell := \frac{\ell+2\alpha}{2\ell+2\alpha+1}, \quad \textit{pour } \ell \geq 1, \quad \textit{et} \quad \tilde{p}_0 := 1. \tag{4.2}$$

Démonstration du Corollaire 4.1
Il suffit de calculer la quantité R_n, $\forall n \geq 0$. Tout d'abord on calcule, par (2.3) :

$$\gamma_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{q_i}{p_i} = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{i}{i+2\alpha+1} = \Gamma(2\alpha+2)\frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+2\alpha+2)} = (2\alpha+1)\beta(2\alpha+1,\ell+1).$$

Alors, d'après (3.2), pour $n \geq 1$:

$$R_n = (2\alpha+1)\sum_{\ell\geq n}\beta(2\alpha+1,\ell+1) = (2\alpha+1)\sum_{\ell\geq 0}\beta(2\alpha+1,\ell+n+1) = (2\alpha+1)\beta(2\alpha,n+1),$$

où on a utilisé l'égalité suivante : $\sum_{k\geq 0}\beta(x,y+k) = \beta(x-1,y)$ (voir par exemple, [**GR80**], pp.950). d'où,

$$R_n = \frac{(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha)n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)}, \text{ for } n \geq 1, \quad \text{et} \quad R_0 = S = 1 + R_1 = \frac{2\alpha+1}{2\alpha}. \tag{4.3}$$

L'expression (4.1) est alors la conséquence de (4.3) et (2.8). De plus, d'après (2.10), $\tilde{p}_k = {}^{p_k R_{k+1}}/_{R_k}$, et en utilisant encore (4.3) on obtient (4.2). □

Remarque 4.2. On va ici illustrer un comportement similaire au comportement obtenu dans [**RY**] pour le processus de Bessel de dimension plus grande ou égale à 2 et pénalisé par son temps de séjour dans un intervalle. En effet, une marche de Bessel d'indice $\alpha > -1$, peut aussi être caractérisée par les probabilités de passage suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = \ell - 1 \mid X_n = \ell) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha + {}^1/_2}{\ell+\alpha+{}^1/_2}\right), \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = \ell + 1 \mid X_n = \ell) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha + {}^1/_2}{\ell+\alpha+{}^1/_2}\right), \text{ pour } \ell, n \geq 1 \text{ entiers.}
\end{aligned}$$

Il est évident que si $\alpha \in (0,1)\setminus\{{}^1/_2\}$ (ou de dimension $\delta \in (2,4)\setminus\{3\}$),

$$Q(X_{n+1} = \ell - 1 \mid X_n = \ell) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{-\alpha + \frac{1}{2}}{\ell - \alpha + \frac{1}{2}}\right) + \frac{H(\ell)}{2},$$

avec

$$H(\ell)\frac{{}^\alpha/_2 - \alpha^2}{(\ell - \alpha + {}^1/_2)(\ell + \alpha + {}^1/_2)}.$$

Lorsque $\ell \to \infty$:

$$Q(X_{n+1} = \ell - 1 \mid X_n = \ell) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{-\alpha + \frac{1}{2}}{\ell - \alpha + \frac{1}{2}}\right) + o({}^1/_\ell).$$

En d'autres termes, si $\alpha \neq {}^1/_2$, le comportement de la chaîne $\{X_n\}$ sous Q, est celle d'une marche de Bessel d'indice $\alpha' = -\alpha$ (ou de dimension $\delta' = 4 - \delta \in (0,2)\setminus\{1\}$), pour des ℓ assez grands.

Si $\alpha = {}^1/_2$, la chaîne $\{X_n\}_{n\geq 0}$ sous Q, est une marche de Bessel d'indice $-{}^1/_2$. □

On va maintenant s'intéresser à l'exemple dans le cas continu qui est basé sur l'exemple précédent. On appelle processes de sauts de Bessel d'indice $\alpha > 0$, un processus de sauts $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ avec pour taux de naissance et de mort :

$$b_\ell = \ell + 2\alpha + 1, \quad d_\ell = \ell, \text{ pour } \ell \geq 0 \text{ entier.}$$

Une conséquence du Théorème 2.5 est le résultat suivant :

Corollaire 4.3.

(1) *Pour tout $t \geq 0$ et tout élémentt $A_t \in \mathcal{F}_t$,* (2.18) *est vérifiée avec la martingale positive non uniformément intégrable suivante*

$$M(t) := \frac{2\alpha}{2\alpha+1} e^{2\alpha V(t)} \frac{X(t)!\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+X(t)+1)}. \tag{4.4}$$

(2) *Soit Q la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ donnée par* (2.20)*. Alors, sous Q, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est un processus de Bessel récurrent avec les taux de transition :*

$$\tilde{b}_\ell := \ell + 1,\ \ell \geq 0, \quad \tilde{d}_\ell := \ell + 2\alpha,\ \ell \geq 1. \tag{4.5}$$

La démonstration de ce Corollaire est basée sur le fait suivant ; la chaîne de naissance et de mort sous jacente à $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est une marche de Bessel d'indice α. Les détails restants sont laissés au lecteur.

4.2. Autres exemples.

On peut se poser la question naturelle suivante : en supposant satisfaites les hypothèses du Théorème 2.5, le processus X, sous Q, est il récurrent positif ? Existe-t-il une mesure invariante ? La réponse à cette question est non. Nous allons donner deux exemples simples.

Posons, pour $\ell \geq 0$, $b_\ell := a^\ell$, $d_\ell := a^{2\ell}$, où $0 < a < 1$. De cette façon, le processus de naissance et de mort associé est transient puisque

$$\gamma_n = \prod_{\ell=1}^{n} a^\ell = a^{n(n+1)/2}, \quad S = \sum_{n\geq 0} a^{n(n+1)/2} < \infty.$$

D'après le Théorème 2.5, le processus est donc récurrent sous Q. En utilisant (2.21) on obtient

$$\tilde{b}_\ell = b_\ell \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell} = a^\ell \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell}, \quad \tilde{d}_\ell = d_\ell \frac{R_{\ell-1}}{R_\ell} = a^{2\ell} \frac{R_{\ell-1}}{R_\ell}.$$

On calcule

$$\sum_{j\geq 1} \prod_{\ell=1}^{j} \frac{\tilde{b}_{\ell-1}}{\tilde{d}_\ell} = \sum_{j\geq 1} \left(\frac{R_j}{S}\right)^2 \prod_{\ell=1}^{j} \frac{1}{a^{\ell+1}} = \frac{1}{S^2} \sum_{j\geq 1} \frac{R_j^2}{a^{(j^2+3j)/2}} = \frac{1}{S^2} \sum_{j\geq 1} U_j,$$

où

$$U_j := \frac{1}{a^{(j^2+3j)/2}} \left(\sum_{\ell\geq j} a^{\ell(\ell+1)/2}\right)^2$$

Puisque

$$\frac{U_{j+1}}{U_j} = a^{(2j-4)/2} \frac{a^{(j+1)(j+2)}}{a^{j(j+1)}} \left(\frac{\sum_{\ell\geq 0} a^{\ell(\ell+2j+3)/2}}{\sum_{\ell\geq 0} a^{\ell(\ell+2j+1)/2}}\right)^2 = a^{3j} \left(\frac{\sum_{\ell\geq 0} a^{\ell(\ell+2j+3)/2}}{\sum_{\ell\geq 0} a^{\ell(\ell+2j+1)/2}}\right)^2$$

et d'après le Théorème de convergence dominée

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\sum_{\ell\geq 0} a^{\ell(\ell+2j+3)/2}}{\sum_{\ell\geq 0} a^{\ell(\ell+2j+1)/2}} = 1,$$

alors $\lim_{j\to\infty} {}^{U_{j+1}}/_{U_j} = 0$. D'après le critère de D'Alembert , la série $({}^1/_{S^2}) \sum_{j\geq 1} U_j$ converge et on a donc la condition nécessaire pour l'existence d'une mesure invariante (voir par exemple [**Law06**], pp.78 ou [**Res05**], pp. 412) est satisfait. On a donc bien dans ce cas l'existence d'une mesure invariante pour le processus X sous Q.

Posons, pour $\ell \geq 0$, $b_\ell := a^\ell$, $d_\ell := a^{\ell+1}$, où $0 < a < 1$. Encore une fois, le processus de naissance et de mort associé est transient puisque

$$\gamma_n = \prod_{\ell=1}^{n} a = a^n, \quad S = \sum_{n\geq 0} \gamma_n = \frac{1}{1-a} < \infty.$$

En utilisant (2.21) on obtient

$$\tilde{b}_\ell = b_\ell \frac{R_{\ell+1}}{R_\ell} = b_\ell \frac{a^{\ell+1}}{a^\ell} = a^{\ell+1}, \quad \tilde{d}_\ell = d_\ell \frac{R_{\ell-1}}{R_\ell} = d_\ell \frac{a^{\ell-1}}{a^\ell} = a^\ell.$$

D'une part, d'après le Théorème 2.5 on sait que le processus est récurrent sous Q. D'autre part :

$$\sum_{j\geq 1} \prod_{\ell=1}^{j} \frac{\tilde{b}_{\ell-1}}{\tilde{d}_\ell} = \sum_{j\geq 1} 1 = \infty.$$

Ainsi, dans ce cas il n'y a pas de mesure invariante pour X sous Q.

Remarquons que dans les deux exemples précédents, il n'y a pas d'explosion. Nous nous posons la question suivante : si le processus explose, est il possible de démontrer l'existence d'une mesure invariante ? Encore une fois la réponse à cette question est négative.

Rappelons que, d'après [**Nor98**] pp. 90 , que $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ explose avec une probabilité positive $\sup_{\ell\geq 0} b_\ell + d_\ell = \infty$. Posons, pour $\ell \geq 0$, $b_\ell = (1+\ell)^a$ et $d_\ell = \ell^a$, with $a > 1$. Alors, il est évident que $\sup_{\ell\geq 0} b_\ell + d_\ell = \infty$, et

$$\gamma_n = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^a}{(1+\ell)^a}, \quad S = \sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{(1+\ell)^a} < \infty.$$

Comme précédemment, on a :

$$\sum_{j\geq 1} \prod_{\ell=1}^{j} \frac{\tilde{b}_{\ell-1}}{\tilde{d}_\ell} = \sum_{j\geq 1} \left(\frac{R_j}{S}\right)^2 \prod_{\ell=1}^{j} \frac{b_{\ell-1}}{d_\ell} = \frac{1}{S^2} \sum_{j\geq 1} \left(\sum_{\ell\geq j} \frac{1}{(1+\ell)^a} \right)^2$$

Puisque :

$$\sum_{\ell\geq j} \frac{1}{(1+\ell)^a} \underset{j\to\infty}{\sim} \int_j^\infty \frac{1}{(1+y)^a} = \frac{1}{(a-1)(j+1)^{a-1}}$$

la série $\sum_{j\geq 1} \prod_{\ell=1}^{j} {}^{\tilde{b}_{\ell-1}}/_{\tilde{d}_\ell}$ se comporte comme la série $\sum_{j\geq 1} (j+1)^{2-2a}$, qui est convergente si $a > {}^3/_2$ et divergente si $a \leq {}^3/_2$.

Finalement, l'explosion n'est pas un critère pour l'existence d'une mesure invariante.

Conclusion et perspectives

Pénalisation de la marche aléatoire standard

Il me paraît nécessaire de poursuivre l'étude de la pénalisation de la marche aléatoire symétrique pour des fonctionnelles variées afin d'obtenir une étude aussi complète que celle obtenue par B. Roynette, P. Vallois et M. Yor, concernant la pénalisation du mouvement brownien. Nous pouvons, par exemple, pénaliser par une fonction de l'âge de la marche ou encore d'une fonction des temps locaux en deux niveaux différents. Le sujet est riche et de nombreuses directions sont possibles : en ce moment, je termine l'étude d'une pénalisation de la loi jointe du supremum et de l'infimum.

Le travail réalisé en collaboration avec Mihai Gradinaru m'offre deux futurs axes de recherche :

Pénalisation de marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA)

Dans la première partie de notre article, nous avons considéré une chaîne de naissance et de mort transiente que nous avons pénalisée par son nombre de visites en 0. L'originalité de ce résultat réside dans le fait que le raisonnement utilisé est général, qu'il ne nécessite pas la connaissance explicite des probabilités de passage, ces dernières doivent juste satisfaire la propriété de récurrence.
Au vu de ce résultat, nous souhaitons remplacer ces probabilités de passage déterministes par des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0, 1]$, c'est à dire étudier la MAMA transiente pénalisée par son temps de séjour en 0. Il est évident que ces variables aléatoires vont devoir satisfaire des propriétés propres aux MAMA de manière à satisfaire la propriété de transience.

Pénalisation de superprocessus

Après avoir pénalisé successivement une marche de naissance et de mort transiente par son nombre de visites en 0, puis un processus de naissance et de mort transient par son temps de séjour en 0, une suite logique, et pour que l'étude soit complète, serait de réaliser un raisonnement similaire dans un cadre continu tant au niveau des paramètres qu'au niveau de l'espace d'états, autrement dit les superprocessus.

Processus renforcés

Toujours en collaboration avec Mihai Gradinaru, nous nous intéressons à ce qu'on appelle les processus renforcés. Une définition simpliste de ces processus consiste à dire que leur loi à l'instant t dépend de tout le passé de la trajectoire : le processus cherche à retourner là où il a passé le plus de temps.
Cette définition intuitive nous amène à nous poser la question suivante :
Sommes-nous capables de trouver une pénalisation du mouvement brownien de telle sorte que

sous la nouvelle probabilité Q, le processus se comporte comme une diffusion renforcée ?

Bibliographie

[ALR04] C. Ackermann, G. Lorang, and B. Roynette, *Independance of time and position for a random walk*, Revista Matematica Iberoamericana **20** (2004), no. 3, pp. 915–917.

[Fel50] Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 1950.

[Fel71] ———, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2, 1966-1971.

[GR80] I.S. Gradstein and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press New York, 1980.

[Kle05] F.C Klebaner, *Introduction to stochastic calculus with applications*, 2nd edition ed., Imperial College Press, 2005.

[KS] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second edition ed.

[Law06] G Lawler, *Introduction to stochastic processes*, 2nd edition ed., Chapman & Hall/CRC Boca Raton London New York, 2006.

[LeG85] J.F. LeGall, *Une Approche Elémentaire des Théorèmes de Décomposition de Williams*, Lecture Notes in Mathematics, Séminaire de Probabilités XX, 1984-1985, pp. 447–464.

[Nor98] J Norris, *Markov chains*, 2nd printing ed., Cambridge University Press, 1998.

[Pit75] J Pitman, *One-dimensional brownian motion and the three-dimensional bessel process*, Advances in Appl. Probabality, vol. 7, 1975, pp. p. 511–526.

[Res05] S.I Resnick, *Adventures in stochastic processes*, 4th printing ed., Birkhäuser Boston Basel Berlin, 2005.

[RVY] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor, *Brownian penalisations related to excursion lengths*, Article soumis aux Annales de l'Institut Henri Poincaré en octobre 2006.

[RVY06a] ———, *Limiting Laws associated with Brownian Motion perturbed by Its Maximum, Minimum and Local Time*, Studia sci. Hungarica Mathematica **43** (2006), no. 3.

[RVY06b] ———, *Limiting laws associated with brownian motion perturbed by normalized exponential weights i*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **43** (2006), no. 2, 171–246.

[RVY06c] ———, *Pénalisations et quelques extensions du théorème de pitman, relatives au mouvement brownien et à son maximum*, Séminaire de Probabilités XXXVIII : In memoriam Paul-André Meyer (Springer Berlin, ed.), Lecture Notes in Math. 1874, 2006, pp. 305–336.

[RY] B. Roynette and M. Yor, *Brownian penalisations, some exact results and metatheorems.*

Discipline : Mathématiques

Mots clés : Random walk ; Birth and death Markov processes ; penalization ; sojourn time ; Dynkin's formula ; random walk ; Brownian motion with drift ; Bessel chain and process ; change of probability.

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex