Nancy-Université
Université Henri Poincaré

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

Toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➢ Contact SCD Nancy 1 : theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Département de formation doctorale en mathématique **École doctorale IAEM Lorraine**
UFR STMIA

Étude asymptotique de certains systèmes désordonnés

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le xx Septembre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Henri Poincaré – Nancy 1

(spécialité mathématique appliquée)

par

Sérgio de Carvalho Bezerra

Composition du jury

Rapporteurs :	Philippe Carmona
	Carles Rovira
Examinateurs :	Philippe Chassaing
	Francis Comets (President)
	René Schott
	Samy Tindel

Institut de Mathématiques Élie Cartan — UMR 7502

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

À mon avis, j'arrive au moment le plus dificile de la thèse : il faut faire les remerciements et je ne peux oublier aucune des personnes qui ont contribué à la realisation de ce rêve. Donc, je commence par tous ceux qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre à arriver au moment d'écrire ces mots. Ma mère, Vera Lúcia Soares de Carvalho, m'a démontré avec sa vie que la vie est belle. Mon frère, Diogo de Carvalho Bezerra, me montre toujours une incroyable capacité de vouloir apprendre sur la vie. Mon père Expedito Bezerra da Costa, m'a laissé son ADN. Dans ma tête, j'ai toujours les exemples de force des femmes de ma famille. Elles m'ont montré que nous pouvons être heureux en passant par beaucoup de difficultés : mes tantes Patricia Carvalho Bezerra Silva, Ana Paula de Carvalho, Quitéria Soares, Josefa de Carvalho, Edna de Carvalho, Maria Soares. Tous leurs conjoints et leurs fils et filles, je les remercie aussi.

J'essaye de travailler dans le domaine des probabilités. C'est pour moi très simple mais en même temps très difficile. Celle qui m'a fait tomber amoureux des probabilités a été Madame Marcilia Andrade Campos. Celui qui m'appris à compter a été Monsieur Vladimir Belitsky. Ceux qui ont fait des lettres pour mon doctorat en France ont été Hildeberto Cabral, Paulo César Pinto Carvalho et Carlos Isnard. Celui qui m'a accepté pour être étudiant de doctorat a été Samy Tindel. Il est toujours pour moi un exemple de simplicité et d'une personne qui travaille. Je ne peux pas oublier de remercier tous les membres du jury pour avoir accepté cette tâche : Philippe Carmona, Carles Rovira, Philippe Chassaing, Francis Comets et René Schott. Hildeberto Cabral m'a fait connaître Alain Albouy. Monsieur Alain Albouy est la personne responsable de mon arrivée en France et Monsieur Francis Comets m'a recommendé à Samy Tindel. je remercie aussi à Frederi Viens pour le travaille ensemble. La France, les français, la langue française, la culture française, je veux les remercier aussi. Ils m'ont fait decouvrir une nouvelle vie.

Il y a plusieurs amis qui m'ont fait penser à ce rêve. Je veux remarquer Pablo Mascarenhas de Araújo, Ana Carolina Tavares, Augusto César Nazaré, Leonardo Batista de Queirós, Leonardo Santos Albuquerque, Maricleiton Vieira, Júlio Alexandrino de Oliveira Filho, les fréres Ana Maria Luz et José Luis Sombra Luz, Lorena Rocha, Fátima Russo, Marcos Bezerra, Marcos Petrúcio, Adelailson Peixoto, Maya Boudiffa, Elahé Zooharian, Pierre Etoré, Pierre Le Gall, Sylvain Col, Marie Amélie, Rodrigo Toledo, Rodrigo Perito, Ligia Cardoso , Daniela Toledo, Tatiana Vaz Gomes, Júlio Vaz Gomes, Marcia Cristina et Fernanda. Le couple Iddo Ben Ari et Naomi. Les fonctionnaires de l'Institut Elie Cartan et de l'Université Henri Poincaré, Madame Monique et Madame Meyer-Bisch.

Pendant la période de cette thèse j'ai vécu les moments les plus difficiles de ma vie et Madame Kassiana Mesquita da Costa Bezerra a été et est toujours à mon côté. Je ne peux pas calculer la valeur de cette présence.

je dédie à ma famille.

Résumé

La thèse consiste de trois problèmes. Deux liés à l'étude du verre de spins et un au polymère dans un environement aleatoire. Nous avons étudié la fonction de recouvrement multiple du modéle de Sherrigton-KirkPatrick et nous avons établit un Theorème Central limite pour lénergie libre du modèle de Sherrigton-kirkPatrick localisé. Nous avons aussi trouvé une borne inférieur pour l'exposant de wandering pour un modéle de polymère avec temps et space continus.

Mots-clés : Modèle SK, Fonction de Recouvrement, Modéle dilué, Polymère.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Verres de spin 1

1.1.1 Recouvrement Multiple 2

1.1.2 Modèle Localisé 6

1.2 Polymère 11

1.2.1 Le modèle du polymère 11

1.2.2 Quelques résultats importants 12

1.2.3 Nos contributions 13

1.3 Résumé succinct 15

2 Fonction de recouvrement multiple **17**

2.1 Introduction 17

2.2 Préliminaires 19

2.2.1 Chemin intelligent (*Smart path*) et produit de fonctions de recouvrement 19

2.2.2 Des ensembles et graphes 20

2.2.3 Stratégie de la preuve du théorème 2.1.2 22

2.3 Quelques développements de Taylor 22

2.3.1 Le terme général et le terme d'erreur 23

2.3.2 Termes négligeables 24

2.3.3 Un terme général plus explicite 24

2.3.4 Le produit de fonctions de recouvrement 26

2.4 R-Systèmes et Graphes 32

2.4.1 L'outil de graphes : la démonstration de la proposition 2.4.1 point ii) 33

2.4.2 R-Système : preuve de la proposition 2.4.1 point i) 36

2.5 Un développement pour le deuxième moment 41

2.6 Un TCL généralisé pour la fonction de recouvrement multiple 44

3 Une version localisé du modèle SK **47**
3.1 Introduction 47
3.2 Simple limit of the free energy 49
3.2.1 The cavity method 50
3.2.2 Bounds on the overlap 52
3.2.3 Consequence for the partition function 57
3.3 Fluctuations of the free energy 58
3.3.1 Preliminary computations 59
3.3.2 Proof of Theorem 3.3.1 64

4 Croissance d'un polymère **67**
4.1 Introduction 67
4.2 Preliminaries ; the partition function 70
4.3 Study of the partition function 72
4.3.1 Lower bound result 72
4.3.2 Upper bound result 77
4.3.3 Sharpness of our method. The logarithmic regularity scale. 81
4.3.4 Conclusions 83
4.4 Polymer growth 86
4.4.1 Preliminary results 88
4.4.2 Proof of Lemma 4.4.4 100
4.4.3 Proof of Proposition 4.4.13 107
4.4.4 Proof of Proposition 4.4.14 108

Bibliographie **113**

Chapitre 1

Introduction

Le terme systèmes désordonnés recouvre une grande variété de systèmes physiques, dont un trait commun semble être l'absence d'ordre spatial.

La littérature physique et mathématique sur ce genre d'objet est foisonnante, en plein essor ces dernières années, et couvre des cas aussi divers que les marches aléatoires en milieu aléatoire, les modèles d'interface ou les EDP à potentiel aléatoire. Pour notre part, nous nous concentrerons sur l'étude de deux types de systèmes ayant connu des avancées spectaculaires ces dernières années, à savoir les verres de spins et les polymères en environnement aléatoire. Nous reviendrons sur une description détaillée de ces modèles dans les paragraphes concernés.

Cette introduction est organisée de la manière suivante : la section 1.1 donne une vision générale du modèle de verre de spins et présente les résultats de deux de nos preprints : Bezerra & Tindel (2006*b*) et Bezerra & Tindel (2006*a*). Le preprint Bezerra & Tindel (2006*b*) a été accepté (sous reserve de modifications mineures) à la revue Publicacions Matemàtiques et le preprint Bezerra & Tindel (2006*a*) a été accepté à la revue Potential Analysis. La section 1.2 présente quelques caractéristiques du modèle d'un polymère dans un environnement aléatoire et nous décrivons aussi les résultats du preprint de Bezerra, Tindel & Viens (2006). Pour finir, on présente brièvement l'ensemble de nos contributions dans la section 1.3.

1.1 Verres de spin

Les modèles de verres de spins ont été introduits à l'origine pour décrire des impuretés dans certains alliages de métaux, et ont depuis attiré, de par leur complexité, tant les expérimentateurs comme les physiciens théoriques ou les mathématiciens.

Les physiciens ont, de leur point de vue, résolu une grande partie des problèmes liés au modèles de verres de spins en champ moyen par la méthode dite des répliques symétriques (Mézard, Parisi & Virasoro 1987). Cependant, les solutions mathématiquement rigoureuses à ces problèmes n'ont commencé à émerger qu'avec la construction de chemins d'interpolation gaussiens ingénieux, construits entre autres par Comets & Neveu (1995), Talagrand (2001), Talagrand (2003*b*) et Guerra & Toninelli (2003). Ces avancées ont permis de valider la formule de Parisi, donnant la valeur exacte de l'énergie libre

pour le modèle SK (Sherrington-Kirkpatrick) en présence d'un champ extérieur. Notons cependant que le système de spins à basse température est toujours loin d'être compris dans son ensemble, même si une quantité abondante d'information (essentiellement des résultats limites fins sur la fonction de recouvrement) est disponible dans le cas de la haute température.

Notons encore que les systèmes de spins dilués ou localisés, physiquement plus réalistes, ont aussi fait l'objet d'une grande attention de la part des physiciens et des mathématiciens, et que l'énergie libre d'un certain nombre de ces modèles a été évaluée, à haute (Talagrand (2001)) ou basse (Franz & Leone (2003),Guerra & Toninelli (2003),Franz & Toninelli (2004)) température.

Notre étude se place alors dans ce contexte, et nous obtiendrons les deux résultats suivants, valides dans la région de haute température du système que nous considérons : à la section1.1.1 nous présentons un développement asymptotique du recouvrement multiple pour le modèle SK sans champ extérieur, obtenu dans le preprint Bezerra & Tindel (2006*b*), et qui sera détaillé au chapitre 2. La section 1.1.2 décrit un TCL pour un modèle SK localisé, obtenu dans le preprint Bezerra & Tindel (2006*a*), dont les détails sont donnés au chapitre 3.

1.1.1 Recouvrement Multiple

Dans cette section on décrit le modèle de Sherrigton-Kirkpatrick, qui est un type classique de verre de spin et nous rappelons certains résultats importants obtenus pour ce modèle. Finalement, on décrit nos contributions et la stratégie de la preuve de nos résultats.

Le modèle SK

Pour exprimer plus clairement le type de question qui nous intéresse, décrivons tout d'abord le modèle SK. Ce modèle a été introduit par la première fois dans l'article de Kirkpatrick & Sherrington (1978).

L'espace canonique du modèle est l'ensemble $\Sigma_N = \{-1, 1\}^N$, appelé aussi espace de configurations, où N est un entier naturel qui représente le nombre de spins. Une configuration, représentée par $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Sigma_N$, dénote la valeur de tous les spins. Le caractère probabiliste du modèle SK est alors dû au fait que nous supposons que les interactions entre les spins se produisent d'une manière aléatoire. L'addition de toutes les interactions, dénommée énergie de chaque configuration, peut être écrite comme

$$-H_N(\sigma) = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \le i < j \le N} g_{i,j}\sigma_i\sigma_j, \tag{1.1}$$

où $(g_{i,j})_{i<j}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes standard et indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Soit G_N la mesure de Gibbs sur Σ_N liée au Hamiltonien H_N. Nous définissons la

probabilité de la réalisation d'une configuration σ par

$$G_N(\{\sigma\}) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{Z_N} \text{ avec } Z_N = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)}. \tag{1.2}$$

Cette mesure, qui est elle-même aléatoire, dépend d'un paramètre β qui représente l'inverse de la température du système. Une fonction importante du modèle SK est la fonction d'énergie libre du système qui est représentée par

$$p_N(\beta) = \frac{1}{N}\mathbf{E}\log Z_N(\beta).$$

De plus, si nous observons la corrélation entre deux niveaux d'énergie associés à deux configurations différentes σ^1 et σ^2, nous obtenons :

$$\mathbf{E}H_N(\sigma^1)H_N(\sigma^2) = \frac{N}{2}R_{1,2} - \frac{1}{2} \text{ avec } R_{1,2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^1\sigma_i^2. \tag{1.3}$$

C'est la quantité $R_{1,2}$, que l'on appelle la fonction de recouvrement. Notons que les quantités $p_N(\beta)$ et $R_{1,2}$ sont essentielles pour l'étude de notre modèle. Voici encore quelques notations dont nous aurons besoin : étant donnés n un entier naturel, qui représente le nombre de répliques du système, et f une fonction sur Σ_N^n, nous définissons $\langle f\rangle$ et $\nu(f)$, respectivement, comme l'espérance de f par rapport à la mesure produit $dG_N^{\otimes n}$ et l'espérance de $\langle f\rangle$ par rapport à l'aléatoire contenu dans les coefficients $g_{i,j}$, c'est à dire, $\nu(f) = E[\langle f\rangle]$.

Les travaux sur ce modèle sont normalement partagés en deux classes : la première étudie le comportement du modèle dans la région de basse température, c'est-à-dire, pour les valeurs de β grandes (voir, par exemple, Mézard et al. 1987, Talagrand 2003*b*), et la deuxième étudie la région de haute temperature (β petit). Pour cette dernière classe une grande quantité d'information est disponible (c.f., par exemple, pour le modèle SK en la présence d'un champ externe, Bardina, Márquez-Carreras, Rovira & Tindel 2004, Guerra & Toninelli 2004, Guerra & Toninelli 2002, Talagrand 2001). Remarquons que pour nos travaux, nous nous placerons toujours dans la région de haute température.

Quelques résultats importants

Rappelons ici quelques résultats asymptotiques concernant l'énergie libre du système $p_N(\beta)$ et le recouvrement $R_{1,2}$ à haute température (i.e. $\beta < 1$), tous démontrés dans le livre de Talagrand (2003*b*). Le premier concerne la limite de l'énergie libre, et se trouve aussi dans Comets & Neveu (1995) :

Théorème 1.1.1. *Si $\beta < 1$, alors nous avons*

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \frac{\beta^2}{4} + \log 2. \tag{1.4}$$

Intéressons nous maintenant au recouvrement $R_{1,2}$. Lorsque $\beta < 1$, on peut montrer que $R_{1,2}$ converge vers 0 (qui en particulier est une limite déterministe), dans le sens où

$$\nu(R_{1,2}^2) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right). \tag{1.5}$$

Des renseignements plus précis sur les fluctuations de cette quantité sont aussi disponibles. En effet pour β assez petit, si le nombre de particules tend vers l'infini, alors $\sqrt{N(1-\beta^2)}R_{1,2}$ se comporte de manière similaire à une variable aléatoire gaussienne standard, ce que l'on peut exprimer de la façon suivante :

Théorème 1.1.2. *Soit $a(k)$ le k-ème moment d'une variable aléatoire gaussienne standard. Pour $\beta < 1$ il existe une constante K telle que*

$$\left|\nu([\sqrt{N(1-\beta^2)}R_{1,2}]^k) - a(k)\right| \leq \frac{K}{\sqrt{N}}. \tag{1.6}$$

Ce type de TCL se généralise à des produits de recouvrement, qui une fois normalisés se comportent comme des produits de gaussiennes indépendantes.

Théorème 1.1.3. *Soient $\beta < 1$ et un entier naturel n. Pour chaque couple (l_1, l_2) où $1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n$ nous considérons un entier naturel $k(\ell_1, \ell_2)$. Posons $k = \sum_{\ell_1,\ell_2} k(\ell_1, \ell_2)$. Alors,*

$$\left|\nu\Big(\prod_{\ell_1<\ell_2} R_{\ell_1,\ell_2}^{k(\ell_1,\ell_2)}\Big) - \prod_{\ell_1<\ell_2} \frac{a(k(\ell_1,\ell_2))}{[N(1-\beta^2)]^{\frac{k(\ell_1,\ell_2)}{2}}}\right| \leq \frac{K}{N^{\frac{k+1}{2}}}. \tag{1.7}$$

Nos contributions

Une étude plus fine du modèle SK passe certainement par l'obtention de résultats asymptotiques pour de nombreuses fonctionnelles du modèle. Une question naturelle, posée dans Talagrand (2003*b*), est alors : quels résultats peut-on obtenir pour la fonction de recouvrement multiple, c'est-à-dire,

$$R_{1,\dots,s} = \sum_{i\leq N} \frac{\sigma_i^1 \dots \sigma_i^s}{N},$$

qui exprime la corrélation entre les spins de s configurations au lieu de 2. Afin d'avancer dans cette direction, nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème 1.1.4. *Étant donnés $s \in \mathbb{N}$ et $\beta < 1$, nous avons :*
i) Si s est impair ($s \geq 3$), alors

$$\nu\left(R_{1,\dots,s}^2\right) = \frac{1}{N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^p}\right), \text{ pour tout } p \geq 2. \tag{1.8}$$

ii) Si s est pair ($s = 2k$), nous obtenons

$$\nu\left(R_{1,\dots,s}^2\right) = \frac{1}{N} + \frac{c(\beta,s)}{N^k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{(s+1)/2}}\right), \tag{1.9}$$

avec $c(\beta,k) = \frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)}\right)^k$.

Remarque 1.1.5. *Nous observons les points suivants :*

i) Pour $s = 2$, nous retrouvons un résultat de Talagrand (2003b).

ii) Pour $s > 2$, le terme de normalisation de $R_{1,\dots,s}$ est $\sqrt{N}$ au lieu de $\sqrt{N(1-\beta^2)}$, c'est à dire, indépendant de β.

Nous avons aussi établi un TCL similaire à celui du théorème 1.1.3 pour une famille $(R_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_s})_{1\le\ell_1<\cdots<\ell_s\le n}$ pour $s \ge 3$.

Théorème 1.1.6. *Nous considérons un entier naturel n, et pour des entiers naturels $1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_s \le n$, soit un entier naturel $k(\ell_1,\dots,\ell_s)$. Soit $k = \sum_{\ell_1,\dots,\ell_s} k(\ell_1,\dots,\ell_s)$. Alors*

$$\nu\left(\prod_{\ell_1<\cdots<\ell_s} R_{\ell_1,\dots,\ell_s}^{k(\ell_1,\dots,\ell_s)}\right) - \prod_{\ell_1<\cdots<\ell_s} \frac{a(k(\ell_1,\dots,\ell_s))}{N^{\frac{k(\ell_1,\dots,\ell_s)}{2}}} = \mathrm{O}(k+1), \tag{1.10}$$

où nous dénotons par $a(k)$ le $k^{ème}$ moment d'une variable gaussienne standard et où la relation $g = \mathrm{O}(k)$ représente l'existence d'une constante c telle que $|g| < c/N^{k/2}$.

La méthode de preuve

La démonstration du théorème 1.1.4 est divisée en une série de lemmes et de propositions. Afin de garder une vue d'ensemble du problème, nous donnons ici une idée de la démonstration que nous utilisons pour estimer $\nu(R_{1,\dots,s}^2)$.

(1) En utilisant la propriété de symétrie entre les sites, nous vérifions que

$$\nu\left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^2\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} + \nu\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right).$$

Après avoir obtenu cette relation, notre tâche principale est d'estimer le terme $\nu(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)$. L'estimation est alors assez aisée si s est un nombre impair. Ainsi, nous nous concentrons sur le cas $s = 2k$.

(2) Afin d'avoir un équivalent de $\nu(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}_{1,\dots,2k}^-)$, nous faisons un développement de Taylor pour cette quantité en suivant un chemin continu approprié défini par une famille de mesures $(\nu_t)_{t\ge0}$. Alors, en raison de la présence du produit de ε, nous sommes capables de montrer que plusieurs termes du développement valent zéro ou sont négligeables. Nous sommes donc amenés à nous centrer principalement sur des termes de la forme suivante :

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}_\alpha^-\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{U}_k^- = \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}_{1,\dots,2k}^-,$$

où le multi-indice $\alpha = (\ell_1, j_1, \dots, \ell_m, j_m)$ appartient à une certaine classe qui est déterminée dans la section 2.3, et où S_α désigne un produit de recouvrements indexé par α.

(3) Soit $\mathcal{C}_k$ défini par

$$\mathcal{C}_k \triangleq \{\alpha = (\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m) \,|\, (H) \text{ se vérifie } \}, \tag{1.11}$$

où (H) est l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.1.7. *On admet les affirmations suivantes :*
- *ℓ_i est plus petit que j_i pour tout $i \leq m$;*
- *Si α désigne l'ensemble $\{\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m\}$, alors $\{1, \ldots, 2k\} \subset \alpha$;*
- *les seuls éléments de α qui apparaissent un nombre impair de fois sont $1, \ldots, 2k$.*

Nous démontrons alors pour n'importe quel multi-indice α appartenant à $\mathcal{C}_k$, que

$$\nu_0(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}_\alpha^-) = \nu(\mathrm{S}_\alpha) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{1.12}$$

Ceci est obtenu par l'introduction d'une famille de fonctions, appelée R-systèmes, qui permet une procédure de récurrence. Notons que dans la formule (1.12), on utilise $\mathrm{O}(s)$ pour représenter la fonction $\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{s/2}}\right)$.
(4) La relation (1.12) nous amène à évaluer les quantités S_α^-. D'une manière équivalente, comme les variables aléatoires S_α^- sont stables par multiplication, nous avons à étudier leur structure de covariance. Ceci dépend forcément de la forme du multi-indice α et, après quelques calculs standard, nos estimations se basent sur :

1. une relation d'équivalence entre les multi-indices.
2. Une structure de graphe sur ces multi-indices.

Grâce aux deux outils mentionnés ci-dessus, nous sommes capables d'analyser la structure de covariance des variables aléatoires S_α^-, qui nous amènera à la conclusion de la preuve par une série de considérations élémentaires.

1.1.2 Modèle Localisé

Dans cette section on décrira le modèle de Sherrigton-Kirkpatrick avec champ extérieur et on énoncera quelques résultats associés. Ensuite nous introduisons le modèle localisé, et on présente aussi quelques résultat importants concernant ce modèle, démontrés par Franz & Toninelli (2004). Finalement, on décrit nos contributions et la stratégie de la preuve de nos résultats.

Le modèle SK avec champ extérieur

Nous présentons maintenant le modèle SK avec champ extérieur, c'est-à-dire, on considère le Hamiltonien suivant :

$$-H_N(\sigma) = \frac{\beta}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g_{i,j}\sigma_i\sigma_j + h \sum_{i \leq N} \sigma_i, \tag{1.13}$$

où h est un nombre réel positif qui représente la présence d'un champ extérieur. Ce champ favorise les spins $+$. De même, nous définissons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} Z_N(\beta, h) &= \sum_{\sigma} \exp\left(-H_N(\sigma)\right), \\ R_{1,2} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^1 \sigma_i^2, \\ p_N(\beta, h) &= \frac{1}{N}\mathrm{E}\log Z_N(\beta, h), \end{aligned} \tag{1.14}$$

où nous utilisons les mêmes notations qu'à section précédente. Le comportement asymptotique du recouvrement dans la région de haute température est alors bien contrôlé, comme le démontre le résultat suivant, tiré de Talagrand (2003*b*) :

Théorème 1.1.8. *Il existe deux constantes $L, \beta_0 > 0$ telles que pour $\beta < \beta_0$, nous avons*

$$\forall\, k \geq 0, \quad \nu\left(\left(R_{1,2} - r\right)^{2k}\right) = \mathbf{E}\langle R_{1,2} - r\rangle^{2k} \leq \left(\frac{Lk}{N}\right)^{k}, \tag{1.15}$$

où z est une variable gaussienne standard et r est l'unique solution de

$$r = \mathbf{E}\tanh^2\left(\beta z\sqrt{r} + h\right).$$

Un résultat sur la fonction d'énergie libre du système a aussi été démontré dans Guerra & Toninelli (2003), où ils établissent le théorème suivant, valable pour toute température positive :

Théorème 1.1.9. *Pour toute valeur de β et de h, la suite $(p_N(\beta, h))_{N\geq 1}$ est sous-additive, i.e., pour deux entiers naturels N_1, N_2,*

$$p_{N_1+N_2}(\beta, h) \geq \frac{N_1}{N_1+N_2} p_{N_1}(\beta, h) + \frac{N_1}{N_1+N_2} p_{N_1}(\beta, h).$$

Par conséquent, $\lim_{N\to\infty} p_N(\beta, h)$ existe.

De plus, la valeur de la limite, donnée par la formule de Parisi, a été trouvée par Talagrand (2003*a*).

Le modèle dilué

Nous nous sommes intéressés à une version localisée du modèle de Sherrington-Kirkpatrick avec champ extérieur, qui peut être décrite de la manière suivante : pour $N, d \geq 1$, notre espace de configurations est $\Sigma = \Sigma_N = \{-1, 1\}^{C_N}$, où C_N est la boîte finie $C_N = [-N; N]^d$ sur $\mathbb{Z}^d$. Étant donnée une configuration $\sigma \in \Sigma_N$, nous considérons le Hamiltonien

$$-H_N(\sigma) = \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} q\left(\frac{i-j}{N}\right) g_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j + h\sum_{i\in C_N}\sigma_i, \tag{1.16}$$

où β signifie toujours l'inverse de la température du système, $\hat{N} = 2N+1$, (i,j) est la notation pour un couple de sites $i,j \in C_N$ (considéré seulement une fois), $\{g_{(i,j)} : (i,j) \in C_N\}$ est une famille de variables aléatoire IID gaussiennes centrées standard, et h représente un champ extérieur positif et constant, grâce auquel les spins ont tendance à prendre la valeur $+1$. Notre localisation est représentée par la fonction q, qui peut être considérée comme une fonction régulière et qui est supposée d'être définie sur $[-1,1]^d$. On suppose de plus que q^2 est de type positif et invariante par symétrie par rapport à l'origine. Nous supposons aussi que q^2 est continûment différentiable sur $[-1,1]^d$ entier, incluant sa frontière périodique $-1 \equiv 1$. Notre but est d'étudier la limite, quand $N \to \infty$, de la mesure de Gibbs $G_N(\sigma)$ définie sur Σ_N par

$$G_N(\sigma) = \frac{e^{-H_N(\sigma)}}{Z_N}, \quad \text{où} \quad Z_N = Z_N(\beta) = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} e^{-H_N(\sigma)}$$

et nous nous concentrons en fait sur l'énergie libre du système, définie par :

$$p(\beta) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}[p_N(\beta)] = \text{a.s.} - \lim_{N\to\infty} p_N(\beta), \quad \text{où} \quad p_N(\beta) = \frac{1}{\hat{N}^d} \log(Z_N(\beta)). \tag{1.17}$$

Le modèle décrit par l'équation (1.16) peut être considéré comme une approximation à portée finie du modèle SK de champ moyen, associé au Hamiltonien

$$-\hat{H}_N(\sigma) = \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} g_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j + h \sum_{i \in C_N} \sigma_i,$$

pour lequel une grande quantité d'information est déjà établie (voir paragraphe précédent). Nous essayons donc d'approximer le système de verre de spins dit réaliste, sur lequel nous n'avons pas beaucoup d'informations rigoureuses (voir pourtant, Stein 1997), par notre modèle localisé. En effet, le modèle (1.16) tient compte de la structure géométrique de la configuration de spins, mais reste de type champ moyen à la limite, lorsque $N \to \infty$.

Il est alors naturel de faire un développement en N afin de quantifier la différence entre le modèle original SK et notre modèle présenté dans l'équation (1.16).

Signalons que cette idée n'est pas nouvelle, et apparaît pour la première fois dans le contexte des verre de spins avec Frolich & Zegarlinski (1987). Une version de notre modèle avec $h = 0$ a été étudiée par Toubol (1997), et plus récemment, la limite de Kac du verre de spins à portée finie a été considérée par Guerra & Toninelli (2004) et par Franz & Toninelli (2004). Dans cette dernière référence, un point de vue un peu différent a été adopté : le modèle à portée finie dépend d'un paramètre $\gamma > 0$ (qui est égal à $1/N$ dans notre cadre) et ce paramètre de localisation tend vers 0 après passage à la limite sur N. Il peut alors être montré, par des arguments d'interpolation, que dans le régime limite $\gamma \to 0$, l'énergie libre du système localisé est la même que celle du modèle SK, pour n'importe quelle valeur du paramètre $\beta \geq 0$. Les résultats contenus dans l'article de Guerra & Toninelli (2004) et de Franz & Toninelli (2004) ne peuvent pas être appliqués directement à notre modèle, car dans notre cas les limites $\gamma \to 0$ et $N \to \infty$ sont prises en même temps. Néanmoins, quelques modifications des calculs contenus dans ces articles pourraient aussi démontrer que l'énergie libre définie par (1.17), se comporte comme l'énergie libre du modèle SK pour N assez grand.

Les résultats de Franz et Toninelli

Franz & Toninelli (2004) ont considéré une version du modèle de verre de spins avec p-spins et portée finie. Pour un entier naturel p et un champ magnétique $h \in \mathbb{R}$, ils ont considéré le Hamiltonien suivant :

$$H_N^{(p)}(\sigma, h; g) = -\sqrt{\frac{p!}{2N^{p-1}}} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le N} g_{i_1,\ldots,i_p} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_p} - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \tag{1.18}$$

où les $g_{i_1,\ldots,i_p}$ sont des variables gaussiennes standard et indépendantes. Le cas $p = 2$ correspond au modèle SK avec champ.

Ils ont alors proposé une généralisation de ce modèle sur $\mathbb{Z}^d$: soit T_L, le tore discret de taille L et cardinalité $N = L^d$. Soit aussi $\gamma > 0$ et une famille $g_{i_1,\ldots,i_p}$, $i_r \in T_L$, $r = 1, \ldots, p$ i.i.d. de variables gaussiennes standard. Nous définissons le Hamiltonien de volume fini pour le modèle de p-spins où les interactions sont de type Kac, de la manière suivante :

$$H_L^{(p,\gamma)}(\sigma, h; g) = -\sum_{i_1,\ldots,i_p \in T_L} \sqrt{w^{(p)}(i_1, \ldots, i_p; \gamma)}\, g_{i_1,\ldots,i_p} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_p} - h \sum_{i \in T_L}^{N} \sigma_i, \tag{1.19}$$

où

$$w^{(p)}(i_1, \ldots, i_p; \gamma) = \frac{\sum_{k \in T_L} \psi(\gamma|i_1 - k|) \cdots \psi(\gamma|i_p - k|)}{W(\gamma)^{p/2}} \tag{1.20}$$

et

$$W(\gamma) = \left(\sum_{k \in T_L} \psi(\gamma|k|) \right)^2, \tag{1.21}$$

De plus, $\psi(|x|), x \in \mathbb{R}$, est une fonction non négative à support compact, i.e.

$$\psi(|x|) = 0 \text{ si } |x| \ge 1, \tag{1.22}$$

suffisamment régulière pour être Riemann intégrable.

Étant donné l'inverse de la température β, nous dénotons par $Z_L^{(p,\gamma)}(\beta, h; g)$ la fonction de partition du modèle (1.19), et soit $f^{(p,\gamma)}(\beta, h)$ l'énergie libre du système donnée par

$$f^{(p,\gamma)}(\beta, h) = -\frac{1}{\beta L^d} \mathbf{E} \log Z_L^{(p,\gamma)}(\beta, h; g). \tag{1.23}$$

Dans ce contexte Franz & Toninelli (2004) ont démontré que l'énergie libre du modèle de Kac, quand γ tend vers 0, tend vers la limite du modèle SK avec champ : soit $H_L^{(p)}$ le Hamiltonien défini par

$$H_L^{(p)}(\sigma, h; g) = -\sum_{i_1,\ldots,i_p \in T_L} \frac{g_{i_1,\ldots,i_p}}{L^{d(p-1)/2}} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_p} - h \sum_{i | in T_L} \sigma_i, \tag{1.24}$$

dont la fonction de partition est dénotée par $Z_L^{(p)}(\beta, h; g)$. Alors,

Théorème 1.1.10. *Pour tout β, h et p pair, et pour tout choix de la fonction ψ dans l'équation (1.20) satisfaisant l'hypothèse (1.22), la limite suivante existe et satisfait*

$$\lim_{\gamma\to 0} f^{(p,\gamma)}(\beta,h) \equiv \lim_{\gamma\to 0}\lim_{L\to\infty} f_L^{(p,\gamma)}(\beta,h) = f^{(p)}(\beta,h),$$

où $f^{(p)}(\beta,h)$ est l'énergie libre en volume infini pour le modèle de verre de spins avec p-spin de champ moyen et avec Hamiltonien (1.24), i.e,

$$f^{(p)}(\beta,h) = \lim_{L\to\infty} f_L^{(p,\gamma)}(\beta,h) \equiv -\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\beta L^d} E\ln Z_L^{(p)}(\beta,h;g).$$

Nos contributions

Notre but est en un sens plus modeste que les articles de Guerra & Toninelli (2004) et de Franz & Toninelli (2004), dans la mesure où nous ne traitons que la région de haute température du modèle, c'est-à-dire, pour des petites valeurs de β. En revanche, notre idée est de montrer que les équivalences entre le modèle SK et notre modèle localisé sont toujours vraies, dans la limite thermodynamique, pour un développement de second ordre de l'énergie libre, i.e., pour le régime du théorème central limite. Plus spécifiquement, nous avons montré le résultat limite suivant : soit γ_0 la norme L^2 de q dans $[-1,1]^d$. Pour $\beta, h > 0$, soit aussi s l'unique solution de l'équation

$$s = \mathbf{E}\left[\tanh^2(\beta z\sqrt{s}+h)\right], \tag{1.25}$$

avec z une variable gaussienne standard. Soit aussi $\mathrm{SK}(\beta,h)$ la fonction

$$\mathrm{SK}(\beta,h) = \beta^2(1-s)^2/4 + \log 2 + \mathbf{E}\left[\log\left[\cosh\left(\beta z\sqrt{s}+h\right)\right]\right], \tag{1.26}$$

qui représente l'énergie libre du modèle SK dans la région de haute température. Soient $r = r(\beta) = s(\sqrt{\gamma_0}\beta)$ et $p(\beta,h) = \mathrm{SK}(\gamma_0^{1/2}\beta, h)$. Alors, supposons

Hypothèse 1.1.11. *La fonction q est continue sur $[-1,1]^d$.*

Dans ce cas, la fonction $q^2 : [-1,1]^d \to \mathbb{R}_+$ peut être décomposée, en tant que fonction de $L^2([-1,1]^d)$, en une série de Fourier :

$$q^2(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot x}, \quad \text{avec} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k^2 < \infty \quad \text{et} \quad \Gamma \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k < \infty. \tag{1.27}$$

Hypothèse 1.1.12. *Nous supposons que, dans la décomposition (1.27) de q, il existe un entier naturel $\hat{d} > d/2$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}_*^d$ avec $\gamma_k \neq 0$, le nombre $Z(k)$ de composantes de k qui ne sont non nulles satisfait $Z(k) \geq \hat{d}$.*

Sous ces hypothèses, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.1.13. *Si q satisfait les conditions 1.1.11 et 1.1.12, et si β est suffisamment petit, on a :*

$$(\mathcal{L}) - \lim_{N\to\infty} \hat{N}^{d/2}\left[p_N(\beta) - p_{\beta,h}\right] = Y,$$

où Y est une variable gaussienne centrée de variance τ qui est donnée par

$$\tau = Var[\log(\cosh(\beta\sqrt{\gamma_0 r}z + h))] - \frac{\beta^2\gamma_0 r^2}{2}, \tag{1.28}$$

avec z une variable gaussienne centrée.

L'équivalence annoncée, au niveaux TCL, entre le modèle SK et le modèle localisé vient alors du fait que $\tau(\beta, h, 1)$ est aussi la variance d'une variable gaussienne qui apparaît dans le cas d'un théorème central limite pour le modèle SK (c.f., Guerra & Toninelli 2002, Tindel 2005). La fonction q n'intervient donc dans (1.28) qu'au travers de sa norme L^2.

La méthode de preuve

Essayons d'expliquer brièvement la méthode que nous avons utilisée à fin d'obtenir le théorème 1.1.13 : comme nous nous plaçons dans le régime de haute température, on utilise la méthode de la cavité pour calculer la limite du recouvrement du système de spins localisé. Ceci donne la limite simple de l'énergie libre. De plus, Tindel (2005) a démontré que les outils du calcul stochastique développés par Comets & Neveu (1995) pouvaient être adaptés au cas des verres de spins avec champ extérieur. Ces outils induisent une méthode assez puissante pour obtenir le théorème central limite pour l'énergie libre. Nous les utilisons pour traiter le cas localisé, en profitant systématiquement de la décomposition de Fourier de q. La méthode introduite par Tindel (2005) peut être résumée de la manière suivante. Tout d'abord, on remplace le chemin standard d'interpolation pour la méthode de la cavité :

$$t^{1/2}g + r(1-t)X, \quad t \in [0,1]$$

où g et X sont deux variables gaussiennes standard indépendantes et r est une constante positive, par

$$B_t + r\beta_{1-t}$$

où B et β sont deux browniens indépendants. On remarque alors que le processus $\{\beta_{1-t}; t \in [0,1]\}$, qui ne semble pas être adapté au même genre de filtration que B, peut aussi être vu comme la solution d'une EDS, sur laquelle on peut opérer une intégration par partie. Ainsi, le TCL pour Z_N est obtenu en appliquant la formule d'Itô pour les fluctuations de cette quantité.

1.2 Polymère

Dans cette section on présente le modèle du polymère dirigé en environnement aléatoire, puis nous rappellerons certains résultats importants de la littérature. Nous décrivons ensuite le contenu de nos contributions.

1.2.1 Le modèle du polymère

Le modèle que nous avons considéré peut se décomposer de la manière suivante : le polymère est donné par un mouvement brownien $b = \{b_t; t \geq 0\}$, défini sur un espace

probabilisé $(\Omega_b, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (P^x)_{x\in\mathbb{R}})$, où P^x signifie la mesure de Wiener avec condition initiale x. L'espérance correspondante est dénotée par E_b^x. L'environnement aléatoire en interaction avec le polymère est représenté par un champ gaussien W sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, défini sur un autre espace de probabilité complet et indépendant $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Soit $\mathbf{E}$ l'espérance par rapport à $\mathbf{P}$. La structure de covariance de W est alors donnée par

$$\mathbf{E}\left[W(t,x)W(s,y)\right] = [t \wedge s]\, Q(x-y), \tag{1.29}$$

pour un potentiel $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait certaines conditions de croissance et de régularité qui seront spécifiées plus tard. En particulier, la fonction $t \mapsto [Q(0)]^{-1/2}\ W(t,x)$ est un mouvement brownien standard pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, le processus $x \mapsto t^{-1/2}W(t,x)$ est un champ gaussien homogène sur $\mathbb{R}$ avec une fonction de covariance Q. Notons que l'hypothèse d'homogénéité facilitera la lecture des résultats, mais qu'elle n'est pas indispensable.

Après avoir donné la définition de b et de W, on peut décrire la mesure polymère de la manière suivante : pour tout $t > 0$, nous définissons l'énergie d'une trajectoire b (ou configuration) sur $[0,t]$ comme

$$-H_t(b) = \int_0^t W(ds, b_s). \tag{1.30}$$

Une signification plus formelle de cette intégrale de Wiener est donnée plus tard. Notons que pour toute trajectoire b, $H_t(b)$ est une variable gaussienne centrée avec variance $tQ(0)$. A partir de ce Hamiltonien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour une constante donnée β (interprétée comme l'inverse de la température du système), nous définissons la mesure polymère par

$$dG_t^x(b) = \frac{e^{-\beta H_t(b)}}{Z_t^x} d\hat{P}^x(b), \qquad \text{avec} \qquad Z_t^x = E_b^x\left[e^{-\beta H_t(b)}\right]. \tag{1.31}$$

Dans la suite, nous considérons certaines moyennes de Gibbs par rapport à la mesure polymère : pour tout $t \geq 0$, $n \geq 1$ et pour toute fonctionnelle $f\colon (C([0,t];\mathbb{R}^d))^n \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, la moyenne de Gibbs de f est donnée par

$$\langle f \rangle_t = \frac{E_b^x\left[f(b^1,\dots,b^n)e^{-\beta\sum_{l\leq n} H_t(b^l)}\right]}{Z_t^n}, \tag{1.32}$$

où les $b^l, 1 \leq l \leq n$, sont interprétés comme les configurations browniennes indépendantes.

1.2.2 Quelques résultats importants

Les polymères dirigés en environnement aléatoire sont des modèles de la mécanique statistique où certains processus stochastiques interagissent avec un environnement aléatoire, qui dépend du temps et de l'espace. Ces modèles ont été introduits pour la première fois dans les articles de Imbrie & Spencer (1988) et de Derrida & Spohn (1988).

Au cours des dernières années plusieurs articles ont amélioré la compréhension de différents modèles de polymères : le cas d'une marche aléatoire avec un potentiel discret

est par exemple traité par Carmona & Hu (2002) ; le cas d'une marche aléatoire gaussienne est étudié par Méjane (2004) et par Petermann (2000) ; et le cas d'un polymère brownien dans un potentiel Poissonien est considéré par Comets & Yoshida (2005). Notons que notre modèle de polymère dirigé devrait avoir un comportement similaire à celui des modèles que nous venons de citer. L'avantage de notre modèle est qu'il nous permet d'utiliser plusieurs outils puissants, tels que l'invariance d'échelle pour le polymère et pour l'environnement, l'analyse stochastique, et les propriétés gaussiennes.

L'étude de notre modèle se concentre en général sur deux quantités importantes : l'énergie libre et le taux de croissance du polymère. L'énergie libre $p(\beta)$ est définie comme une limite logarithmique de la constante de normalisation Z_t^x, c'est-à-dire que

$$p(\beta) = \lim_{t\to\infty} 1/t \log Z_t^x.$$

Des arguments de sous-additivité et de concentration montrent que cette limite existe, et est bornée par $[Q(0)\beta^2]/2$. Il est alors possible de diviser le comportement du polymère selon deux régions :

- La région où $p(\beta) = [Q(0)\beta^2]/2$, appelée région de désordre faible, où le comportement du brownien ne devrait pas être trop perturbé par l'influence du milieu.
- La région où $p(\beta) < [Q(0)\beta^2]/2$, appelée région de désordre fort, où l'aléa du milieu influence le comportement asymptotique du brownien.

Ce genre de phénomène a été étudié pour les différents modèles cités ci-dessus, et notre théorème 1.2.3 peut aussi s'interpréter comme un résultat de désordre fort pour notre polymère. Citons aussi un résultat de désordre faible contenu dans Rovira & Tindel (2005) :

Théorème 1.2.1. *Supposons que $d \geq 3$, $Q(x) = \widetilde{Q}(|x|)$, où $\widetilde{Q}$ est une fonction positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\int_0^\infty x\widetilde{Q}(x)dx < \infty$. Alors, si β est assez petit, le polymère est en régime de désordre faible.*

La deuxième quantité à laquelle on peut s'intéresser est le taux de croissance du polymère, que l'on peut définir de manière informelle comme un coefficient ξ tel que, sous G_t, on a $\sup_{s\leq t} |b_s| \sim t^\xi$. Ce type d'exposant à été étudié dans différent contextes dans les articles de Comets & Yoshida (2006), de Comets & Yoshida (2005), de Méjane (2004), de Piza (1997) et de Wüthrich (1998) et dans la thèse de Petermann (2000). Il a par exemple été établi que $3/5 \leq \xi \leq 3/4$ pour la marche gaussienne unidimensionnelle en environnement gaussien.

1.2.3 Nos contributions

Présentons brièvement maintenant les résultats obtenus dans le preprint de Bezerra et al. (2006), plus d'informations sont décrites dans le chapitre 4.

Nous cherchons de manière générale à obtenir des informations sur le comportement asymptotique de la mesure G_t définie par (1.31). Plus particulièrment, nous montrons deux résultats limites pour notre modèle. Le premier résultat asymptotique concerne la fonction $p(\beta)$, pour lequel nous supposons des bornes supérieure et inférieure sur la régularité de Q.

Hypothèse 1.2.2. *Pour un exposant $H \in (0,1]$, il existe deux constantes réelles c_0 et c_1 telles que*

$$c_0|x|^H \leq Q(0) - Q(x) \leq c_1|x|^H, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème 1.2.3. *Sous l'hypothèse 1.2.2, nous avons*

1. *Si $H \in [1/2,1]$, nous avons, pour certaines constantes C_0 et C_1 qui dépendent seulement de Q, et pour tout $\beta \geq 1$,*

$$C_0\beta^{4/3} \leq p(\beta) \leq C_1\beta^{2-2H/(3H+1)}.$$

2. *Si $H \in (0,1/2]$, nous avons, pour certaines constantes β_Q, C_0', et C_1' qui dépendent seulement de Q, et pour tout $\beta \geq \beta_Q$,*

$$C_0'\beta^{2/(1+H)} \leq p(\beta) \leq C_1'\beta^{2-2H/(3H+1)}.$$

Notons que ce résultat implique en particulier que le polymère est en régime de désordre fort pour β grand. Il quantifie de plus la différence entre $p(\beta)$ et une fonction de type $Q(0)\beta^2/2$, obtenue dans le cas de désordre faible.

Le deuxième résultat que nous démontrons concerne l'exposant ξ, qui mesure la croissance de notre polymère lorsque $t \to \infty$. Pour ce résultat, nous faisons l'hypothèse suivante sur notre environnement aléatoire :

Hypothèse 1.2.4. *Soit $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par l'équation (1.29) une fonction décroissante, positive et symétrique qui satisfait :*

1. *La fonction Q est un élément de $L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} Q(x)dx = 1$.*
2. *Il existe une constante strictement positive θ telle que*

$$Q(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{3+\theta}}\right), \qquad \text{quand} \quad x \to \pm\infty.$$

Remarque 1.2.5. *La normalisation $\int_{\mathbb{R}} Q(x)dx = 1$ n'implique pas de perte de généralité pour notre modèle, en raison de la présence du coefficient de température β.*

Sous l'hypothèse 1.2.4, on montrera alors que :

Théorème 1.2.6. *Soit β un nombre réel strictement positif. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{1}{t^{\frac{3}{5}-\varepsilon}}\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t \geq 1\right] = 1.$$

Remarque 1.2.7. *Ce théorème donne une indication de la vitesse asymptotique de notre polymère. En effet, s'il était possible d'écrire $\sup_{s\leq t} |b_s| \sim t^{\xi}$ quand $t \to \infty$, alors le théorème 1.2.6 affirmerait que $\xi \geq 3/5$.*

Rappelons à ce propos que pour un modèle de marche aléatoire gaussienne en environnement gaussien, il a été montré par Méjane et Petermann que $3/5 \leq \xi \leq 3/4$. Notons aussi que pour la dimension 1, la conjecture des physiciens, issue d'observations numériques, est $\xi = 2/3$.

La démonstration du Théorème 1.2.6 est inspirée de celle de Petermann (2000) pour le cas de la marche gaussienne. Remarquons cependant que nous sommes capables d'étendre les résultats de Petermann à une classe plus large d'environnements, i. e. sous la condition

$$Q(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^{3+\theta}}\right), \quad \text{lorsque} \quad x \to \pm\infty, \tag{1.34}$$

alors que Petermann supposait une décroissance exponentielle de Q. D'autre part, plusieurs arguments ont dû être modifiés afin de passer de la marche aléatoire au cas du mouvement brownien.

Remarquons que les démontrations mise en oeuvre dans ce travail sur les polymères sont assez longues et complexes. Nous renvoyons donc au chapitre 4 pour les détails de la stratégie que nous avons adoptée. Notons simplement que l'essentiel de nos calculs sera basé sur des techniques gaussiennes.

1.3 Résumé succinct

Dans ce chapitre, nous avons donné une vision générale des systèmes désordonnés que nous avons étudiés, c'est-à-dire les modèles de verre de spins et de polymère en environnement aléatoire. Nous avons aussi résumé les résultats de nos preprints (c.f., Bezerra & Tindel 2006*b*, Bezerra & Tindel 2006*a*, Bezerra et al. 2006).

Cette thèse contribue à l'étude de systèmes désordonnés de type verre de spins à haute température avec la démonstration d'un théorème central limite pour la fonction de recouvrement multiple du modèle SK. Dans le cas du modèle SK localisé, cette thèse propose aussi la démonstration d'un théorème central limite pour l'énergie libre du système. Pour le modèle d'un polymère dirigé (représenté par un mouvement brownien) dans un environnement aléatoire (représenté par un champ gaussien), nous avons obtenu une estimée de l'énergie libre et de l'exposant dit de wandering.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

– Le chapitre 2 présente les détails du preprint Bezerra & Tindel (2006*b*).
– Le chapitre 3 montre les détails du preprint Bezerra & Tindel (2006*a*).
– Dans le chapitre 4, nous donnons avec les détails du preprint Bezerra et al. (2006).

Chapitre 2

Fonction de recouvrement multiple

2.1 Introduction

Le modèle classique de Sherrington-Kirkpatrick (connu aussi comme modèle SK) peut modéliser (avec certaines de ses généralisations) différentes situations, telles que les systèmes de particules désordonnées ou la capacité de résaux de neurones (voir Sherrington 1989). L'espace canonique du modèle est l'ensemble $\Sigma_N = \{-1, 1\}^N$, appelé aussi espace de configurations, où N est un entier naturel qui représente le nombre de spins. Une configuration, représentée par $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \Sigma_N$, dénote la valeur de tous les spins. Le caractère probabiliste du modèle SK est alors dû au fait que nous supposons que les interactions entre les spins se produisent d'une manière aléatoire. L'addition de toutes les interactions, dénotée l'énergie de chaque configuration, peut être écrite comme

$$-H_N(\sigma) = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g_{i,j}\sigma_i\sigma_j, \tag{2.1}$$

où $(g_{i,j})_{i<j}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes standard et indépendantes définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et $1/N^{1/2}$ est un facteur de normalisation.

De manière courante en mécanique statistique, nous associons une mesure de Gibbs G_N sur Σ_N au Hamiltonien H_N.

$$G_N(\{\sigma\}) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{Z_N} \text{ avec } Z_N = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)}. \tag{2.2}$$

Cette mesure dépend d'un paramètre β dont la signification est l'inverse de la température du système. Ce modèle associé à (2.1) a alors été introduit dans Kirkpatrick & Sherrington (1978) pour décrire un système de verre de spins, c'est-à-dire, un système magnétique pour lequel les interactions entre les moments magnétiques sont en conflit. Par la suite, les physiciens se sont principalement intéressés au comportement du modèle SK pour de grandes valeurs de β. Cependant, la plupart des travaux mathématiques sur le sujet concernent la région de haute température du système, i.e. $\beta < 1$, et c'est dans cette région que nous travaillerons ici. Rappelons à ce propos qu'une grande quantité d'information est disponible pour le modèle SK avec un champ extérieur à haute température

(voir, par exemple, pour le modèle SK avec champ extérieur Bardina et al. 2004, Comets & Neveu 1995, Guerra & Toninelli 2004, Guerra & Toninelli 2002, Talagrand 2001). Introduisons aussi quelques notations classiques qui nous permettront d'établir nos résultats principaux : étant donnés n un entier positif (nombre de répliques du système) et f une fonction sur Σ_N^n, nous définissons $\langle f \rangle$ comme l'espérance de f par rapport à la mesure produit $dG_N^{\otimes n}$ et $\nu(f)$ comme l'espérance de $\langle f \rangle$ par rapport à l'aléa contenu dans les coefficients $g_{i,j}$, i.e. $\nu(f) = E[\langle f \rangle]$.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à un problème qui résulte de l'observation suivante : une grande proportion de l'information structurelle sur le comportement de Σ_N sur G_N est normalement obtenue en étudiant la fonction de recouvrement entre deux configurations σ^1 et σ^2, dénotée par

$$R_{1,2} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^1 \sigma_i^2 \ ,$$

qui peut être reliée à la distance de Hamming entre σ^1 et σ^2 (considérée comme deux configurations indépendantes sur $G_N^{\otimes 2}$). Une extension naturelle de $R_{1,2}$ serait alors une quantité qui mesure la corrélation entre s configurations, par exemple :

$$R_{1,\ldots,s} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^1 \sigma_i^2 \cdots \sigma_i^s. \tag{2.3}$$

Évidemment, le comportement asymptotique d'une telle quantité nous donnerait des informations additionnelles sur le système de spins quand N tend vers l'infini. Néanmoins, malgré les estimées asymptotiques disponibles pour $R_{1,2}$, l'étude de $R_{1,\ldots,s}$ pour $s > 2$ n'est presque pas développée, et ce chapitre propose de faire un pas dans cette direction : nous démontrerons le théorème central limite (TCL) suivant pour une famille $(R_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_s})_{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_s \leq n}$ pour $s \geq 3$.

Théorème 2.1.1. *Nous considérons un entier naturel n, et pour des entiers naturels $1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_s \leq n$, soit un entier naturel $k(\ell_1, \ldots, \ell_s)$. Soit $k = \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_s} k(\ell_1, \ldots, \ell_s)$, alors*

$$\nu\left(\prod_{\ell_1 < \cdots < \ell_s} R_{\ell_1,\ldots,\ell_s}^{k(\ell_1,\ldots,\ell_s)} \right) - \prod_{\ell_1 < \cdots < \ell_s} \frac{a(k(\ell_1, \ldots, \ell_s))}{N^{\frac{k(\ell_1,\ldots,\ell_s)}{2}}} = \mathrm{O}(k+1), \tag{2.4}$$

où nous dénotons par $a(k)$ le $k^{\text{ème}}$ moment d'une variable gaussienne standard et où la relation $g = \mathrm{O}(k)$ représente l'existence d'une constante c telle que $|g| < c/N^{k/2}$.

Ceci implique que pour un désordre typique, une famille finie de fonctions,

$$\hat{R}_{\ell_1,\ldots,\ell_s} = \sqrt{N} R_{\ell_1,\ldots,\ell_s}$$

définies sur $(\Sigma_N^n, G_N^{\otimes n})$, avec $s \geq 3$, ressemble asymptotiquement à une famille de variables gaussiennes centrées standard. Notons que, pour $s > 2$, la dépendance en β dans la normalisation de $R_{\ell_1,\ldots,\ell_s}$ disparaît, ce qui a été une surprise pour nous.

L'étape la plus importante afin de démontrer le théorème 3.3.1, a été de calculer les deux premiers termes dans le développement de $\nu(R_{1,\ldots,s}^2)$, et nous obtenons un résultat qui généralise la proposition 2.3.5 de Talagrand (2003*b*), qui considère le cas $s = 2$:

Théorème 2.1.2. *Soient $s \in \mathbb{N}$ et $\beta < 1$. Alors les relations suivantes sont vraies :*
i) Si s est impair ($s \geq 3$), on a

$$\nu\left(R^2_{1,\dots,s}\right) = \frac{1}{N} + \mathrm{O}(2p)\,, \text{ pour tout } p \geq 2. \tag{2.5}$$

ii) Si s est pair ($s = 2k$), nous avons

$$\nu\left(R^2_{1,\dots,s}\right) = \frac{1}{N} + \frac{c(\beta,s)}{N^k} + \mathrm{O}(2k+1), \tag{2.6}$$

où $c(\beta,k) = \frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)}\right)^k$.

Le théorème 2.1.2 est la contribution principale de ce chapitre. En effet, après la preuve de ces relations, le TCL peut être déduit par les méthodes standard introduites, par exemple, dans Talagrand (2003*b*), et nous pouvons aussi dire qu'ils sont implicitement contenus dans Guerra & Toninelli (2004). Notons à ce propos que les résultats de Guerra & Toninelli (2004) utilisent de manière essentielle la structure du modèle SK sans champ extérieur. Or d'une part, notre développement de $\nu(R^2_{1,\dots,s})$ est nouveau ; nous l'obtenons grâce à des outils de graphes, qui ont leur propre intérêt dans le contexte du SK, et sont introduits ici pour la première fois. De plus, il semble que nos calculs ne dépendent que modérément du modèle que nous considérons et donc, nous nous attendons à pouvoir étendre notre résultat à d'autres modèles, comme le modèle de p spins avec champ extérieur ou le modèle du perceptron.

Ce chapitre est divisé de la manière suivante : dans la section 2.2 nous introduisons quelques résultats préliminaires. Dans la section 2.3 on fait quelques développements de Taylor élémentaires. La section 2.4 introduit les outils de graphes et de R-systèmes. Dans la section 2.5, nous démontrons les résultats asymptotiques pour le deuxième moment de la fonction de recouvrement multiple. Pour conclure, dans la section 2.6, on établit le théorème central limite (TCL).

2.2 Préliminaires

Nous introduisons dans les sections 2.2.1 et 2.2.2 quelques notations et définitions qui seront utilisées dans la suite. La section 2.2.3 établit la stratégie de la preuve du théorème 2.1.2.

2.2.1 Chemin intelligent (*Smart path*) et produit de fonctions de recouvrement

Pour exprimer $\nu(\mathrm{R}^2_{1,\dots,s})$ en fonction de N, le développement de Taylor apparaît comme une idée naturelle. Étant donnés une configuration $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{N}}$ et un paramètre $t \in [0,1]$, nous définissons donc une nouvelle fonction d'énergie donnée par

$$\mathrm{H}_{\mathrm{N},t}(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{N}^{1/2}} \sum_{1\leq i<j\leq \mathrm{N}-1} g_{i,j}\sigma_i\sigma_j + \left(\frac{t}{\mathrm{N}}\right)^{1/2} \sigma_{\mathrm{N}} \sum_{1\leq i\leq \mathrm{N}-1} \sigma_i g_{i,\mathrm{N}},$$

où les coefficients $g_{i,j}$ sont, comme avant, des variables indépendantes, gaussiennes, centrées et réduites. Nous définissons aussi les mesures de Gibbs associées à ces énergies, i.e.,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{N},t}(\{\sigma\}) = \frac{\exp(-\beta \mathrm{H}_{\mathrm{N},t}(\sigma))}{Z_{\mathrm{N},t}}, \quad \text{avec} \quad Z_{\mathrm{N},t} = \sum_{\sigma \in \Sigma_{\mathrm{N}}} \exp(-\beta \mathrm{H}_{\mathrm{N},t}(\sigma)).$$

Ces mesures aléatoires induisent les moyennes suivantes :

$$\langle f \rangle_t = \frac{\sum_{\sigma^1,\ldots,\sigma^n \in \Sigma_{\mathrm{N}}} f(\sigma^1,\ldots,\sigma^n) \exp\left(\sum_{i=1}^n -\beta \mathrm{H}_{\mathrm{N},t}(\sigma^i)\right)}{Z_{\mathrm{N},t}^n} \quad \text{et} \quad \nu_t(f) = E[\langle f \rangle_t].$$

Ces moyennes sont établies pour une fonction $f \colon \Sigma_N^n \to \mathbb{R}$. Les fonctions de recouvrement R_{ℓ_i,j_i} et $R^-_{\ell_i,j_i}$ sont définies respectivement par

$$\mathrm{R}_{\ell_i,j_i} \triangleq \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k \le \mathrm{N}} \sigma_k^{\ell_i} \sigma_k^{j_i} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}^-_{\ell_i,j_i} \triangleq \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k \le \mathrm{N}-1} \sigma_k^{\ell_i} \sigma_k^{j_i}.$$

Nous pouvons alors dériver la fonction $t \mapsto \nu_t(f)$ de la manière suivante (voir Talagrand 2003*b*) :

Proposition 2.2.1. *Étant donnés une fonction f définie sur Σ_{N}^n et le paramètre $t \ge 0$, nous avons*

$$\begin{aligned}\nu_t'(f) =& \beta^2 \sum_{1 \le l < l' \le n} \nu_t(f \epsilon_l \epsilon_{l'} \mathrm{R}^-_{l,l'}) - \beta^2 n \sum_{l \le n} \nu_t(f \epsilon_l \epsilon_{n+1} \mathrm{R}^-_{l,n+1}) \\ &+ \beta^2 \frac{n(n+1)}{2} \nu_t(f \epsilon_{n+1} \epsilon_{n+2} \mathrm{R}^-_{n+1,n+2}).\end{aligned}$$

En plus de la fonction de recouvrement usuelle $R_{1,2}$, nous devons introduire une notation plus spécifique pour des produits de fonctions de recouvrement qui apparaissent au cours de nos calculs. Étant donnés des entiers naturels $\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m$ tels que $\ell_i \le j_i$ pour tout $i \le m$, nous définissons

$$\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m} \triangleq \prod_{i=1}^m \epsilon_{\ell_i} \epsilon_{j_i} \mathrm{R}_{\ell_i,j_i}, \quad \mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m} \triangleq \prod_{i=1}^m \epsilon_{\ell_i} \epsilon_{j_i} \mathrm{R}^-_{\ell_i,j_i} \tag{2.7}$$

Remarque 2.2.2. *L'importance des produits $\epsilon_{\ell_i} \epsilon_{j_i} \mathrm{R}_{\ell_i,j_i}$ vient de la proposition 2.2.1, où ils apparaissent naturellement.*

2.2.2 Des ensembles et graphes

Les preuves qui suivent utilisent deux sous-ensembles spéciaux de $n-$uples d'entiers naturels. Étant donné un naturel k, nous posons

$$\begin{aligned}\Omega^{2k} \triangleq \{(r_1,\ldots,r_{2k}) \in \mathbb{N}^{2k} |\, & r_i \le N,\ r_i \ne r_j \ \text{ si } 1 \le i < j \le 2k \text{ et } r_{2u-1} < r_{2u} \text{ pour tout} \\ & u \le k\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$\mathcal{C}_k \triangleq \{\alpha = (\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m) \,|\, (H) \text{ se vérifie } \}, \tag{2.9}$$

où (H) est l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.3. *On admet les affirmations suivantes :*
- ℓ_i *est plus petit que* j_i *pour tout* $i \leq m$ *;*
- *Si* α *désigne l'ensemble* $\{\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m\}$*, alors* $\{1, \ldots, 2k\} \subset \alpha$ *;*
- *les seuls éléments de* α *qui apparaissent un nombre impair de fois sont* $1, \ldots, 2k$*.*

Notons que la définiton de la quantité $\mathrm{S}_{\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m}$ dépend de la suite donnée par $(\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m)$. Pour simplifier et clarifier les résultats, on associe un graphe à chacune de ces suites. On peut définir un graphe comme :

Définition 2.2.4. *Étant donnés* I *un ensemble d'entiers naturels et* E *un sous-ensemble de* $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$*, nous nous appellerons* I *l'ensemble des sommets et* E *l'ensemble des arêtes. De plus, si* $(i, j) \in \mathrm{E}$*, nous considérons que* $i < j$*. Soit* $\Upsilon \colon \mathrm{E} \to \mathbb{N}^*$ *une fonction qui compte le nombre des arêtes* (i, j)*. Dans ce cas, le triple* $(\mathrm{I}, \mathrm{E}, \Upsilon)$ *est appelé un graphe. Étant donné un graphe* $(\mathrm{I}, \mathrm{E}, \Upsilon)$*, pour chaque* $J \subseteq \mathrm{I}$*,* $\mathrm{F} \subseteq J \times J \subseteq \mathrm{E}$ *et* $V \colon \mathrm{F} \to \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $e \in \mathrm{F}$*,* $V(e) \leq \Upsilon(e)$*, nous appelons* (J, F, V) *un sous-graphe de* $(\mathrm{I}, \mathrm{E}, \Upsilon)$*. Évidemment, un sous-graphe est aussi un graphe.*

Les graphes que nous considérons seront construits de la manière suivante : nous prenons une suite $(\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m)$ de $2m$ nombres (pour simplifier, on suppose que $\ell_i < j_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$) et nous définissons
- $\mathrm{I} = \{\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m\}$;
- $\mathrm{E} = \{(\ell_i, j_i) | i \leq m\}$;
- $\Upsilon((\ell_i, j_i)) = \#\{r \leq m | (\ell_i, j_i) = (\ell_r, j_r)\}$.

Nous dénotons ce graphe par $\mathrm{G}(\ell_1, j_1, \ldots, \ell_m, j_m)$. Alors étant donné notre ensemble $\mathcal{C}_k$, nous pouvons associer la famille de graphes $\mathcal{G}_k = \{\mathrm{G}(c) | c \in \mathcal{C}_k\}$.

Maintenant, nous définissons quelques objets locaux et globaux dans un graphe $g = (\mathrm{I}, \mathrm{E}, \Upsilon)$. D'abord nous posons

$$\mathrm{N}_g(i) \triangleq \sum_{e \in \mathrm{E} \colon i \in e} \Upsilon(e) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(g) = \sum_{e \in \mathrm{E}} \Upsilon(e).$$

Évidemment, $\mathrm{N}_g(i)$ représente le nombre d'arêtes ayant i comme point final et $\mathrm{N}(g)$ désigne le nombre total d'arêtes du graphe g. Nous pouvons facilement vérifier que $\mathrm{N}(g) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{N}_g(i)$. Une indication de la parité de $\mathrm{N}_g(i)$ est également nécessaire pour nos calculs. Nous définissons donc

$$\mathrm{Od}(i) = \frac{1}{2}[\mathrm{N}_g(i) \bmod (2)] \quad \text{et} \quad \mathrm{Od}(g) \triangleq \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Od}(i).$$

Quelques sous-graphes sont associés à ces notions. Ce sont les sous-graphes de $\mathcal{G}_k$ jouant un rôle spécial dans la suite : pour chaque $g \in \mathcal{G}_k$ avec $\mathrm{N}(g) = m$ et pour chaque $u \leq m$, nous définissons

$$\mathrm{S}_u(g) \triangleq \{h | h \text{ est un sous-graphe de } g \text{ et } \mathrm{N}(h) = u\}.$$

Observons que les définitions de cette section ne seront pas utilisées avant la proposition 2.4.4. Néanmoins, nous les introduisons ici car elles forment une partie essentielle de notre méthode.

2.2.3 Stratégie de la preuve du théorème 2.1.2

La démonstration du théorème 2.1.2 est divisée en une série de lemmes et de propositions qui seront établis dans les sections 2.3 et 2.4. Afin de garder une vue d'ensemble du problème, nous donnons ici une idée de la démonstration que nous utilisons pour estimer $\nu(R^2_{1,\dots,s})$.
(1) En utilisant la propriété de symétrie entre les sites, nous vérifions que

$$\nu\left(\mathrm{R}^2_{1,\dots,s}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} + \nu\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right).$$

Après avoir obtenu cette relation, notre tâche principale est d'estimer le terme $\nu(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s})$. Il est alors assez facile de voir que, si s est un nombre impair, l'estimation est relativement aisée. Ainsi, nous nous concentrons sur le cas $s = 2k$.
(2) Afin d'avoir un équivalent de $\nu(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}^-_{1,\dots,2k})$, nous faisons un développement de Taylor pour cette quantité en suivant le chemin intelligent défini par ν_t. Alors, en raison de la présence du produit de ε, nous sommes capables de montrer que plusieurs des termes du développement valent zéro ou sont négligeables. Ces considérations préliminaires seront traitées dans la section 2.3 et nous nous centrons donc sur les termes de la forme suivante :

$$\nu_0\left(\mathrm{U}^-_k\mathrm{S}^-_\alpha\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{U}^-_k = \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}^-_{1,\dots,2k},$$

où le multi-indice $\alpha = (\ell_1, j_1, \dots, \ell_m, j_m)$ appartient à une certaine classe qui est déterminée dans la section 2.3.
(3) Nous démontrons que pour n'importe quel multi-indice α, qui appartient à $\mathcal{C}_k$ (voir équation (2.9)), nous avons

$$\nu_0(\mathrm{U}^-_k\mathrm{S}^-_\alpha) = \nu(\mathrm{S}_\alpha) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.10}$$

Ceci est obtenu dans la section 2.4, par l'introduction d'une famille de fonctions, appelée R-systèmes, qui permet une procédure de récurrence. Dans la formule (2.10), étant donné un entier naturel s, on utilise $\mathrm{O}(s)$ pour représenter la fonction $\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{s/2}}\right)\cdot$
(4) La relation (2.10) nous amène à évaluer les quantités S^-_α. D'une manière équivalente, comme les variables aléatoires S^-_α sont stables par multiplication, nous sommes obligés d'étudier leur structure de covariance. Ceci dépend forcément de la forme du multi-indice α et, après quelques calculs standard, nos estimations se basent sur :

1. une relation d'équivalence entre les multi-indices (voir proposition 2.3.8).
2. Une structure de graphe sur ces multi-indices, qui est principalement utilisée dans la section 2.4.

Grâce aux deux outils mentionnés ci-dessus, nous sommes capables d'analyser la structure de covariance des variables aléatoires S^-_α, ce qui nous amènera à la conclusion de la preuve par une série de considérations élémentaires.

2.3 Quelques développements de Taylor

Dans cette section, on établit une expression générale pour le développement de Taylor de la fonction $t \mapsto \nu_t(f)$ au voisinage de 0, pour une fonction quelconque $f\colon \Sigma^n_N \to \mathbb{R}$.

Ensuite, nous identifions quelques termes négligeables et on donne une expression plus explicite pour le terme typique de ce développement. Par la suite, nous examinons le cas spécial où f est la fonction $\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}$. Pour finir, une récurrence nous permet d'évaluer $\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})$.

2.3.1 Le terme général et le terme d'erreur

Nous commençons cette section par une extension de la proposition 2.2.1. Pour $k, n \geq 1$, définissons l'ensemble $\mathcal{D}_{n,k}$ comme

$$\mathcal{D}_{n,k} = \{\alpha = (\ell_1, j_1, \ldots, \ell_k, j_k);\, l_i, j_i \leq n + 2k,\, l_i < j_i \text{ pour tout } i \leq k\}\,. \tag{2.11}$$

Proposition 2.3.1. *Soit f une fonction sur Σ^n_{N} et considérons $t \geq 0$. Alors la $k^{ème}$ dérivée de $\nu_t(f)$ peut être reécrite comme*

$$\nu_t^{(k)}(f) = \sum_{\alpha=(\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k)\in\mathcal{D}_{n,k}} c\,(n,k,\alpha)\,\beta^{2k}\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}\right), \tag{2.12}$$

où $\{c\,(n,k,\alpha)\ ;\alpha \in \mathcal{D}_{n,k}\}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{Z}$.

Démonstration. La stratégie utilisée est la récurrence sur k : on déduit le cas $k = 1$ de la proposition 2.2.1. Puis, nous supposons que le résultat est vrai pour $k = u - 1$. Nous prenons alors la dérivée d'un terme typique de $\nu_t^{(u-1)}(f)$, qui a la forme suivante :

$$c\beta^{2(u-1)}\nu_t\,(g) \qquad \text{avec} \qquad g = f\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{u-1},j_{u-1}},$$

où $\ell_1, j_1, \ldots, \ell_{u-1}, j_{u-1} \leq n'$ avec $n' \equiv n + 2(u-1)$. Ainsi, en utilisant la proposition 2.2.1, nous avons

$$\nu_t'(g) = \beta^2 \sum_{1\leq l<l'\leq n'} \nu_t(g\mathrm{S}^-_{l,l'}) - \beta^2 n' \sum_{l\leq n'} \nu_t(g\mathrm{S}^-_{l,n'+1}) + \beta^2 \frac{n'(n'+1)}{2}\nu_t(g\mathrm{S}^-_{n'+1,n'+2}),$$

d'où nous reconnaissons l'expression (2.12). □

Maintenant, nous utilisons une estimation pour $\nu_t^{(i)}(f)$ que l'on peut trouver dans Talagrand (2003*b*) :

Proposition 2.3.2. *Si f est une fonction définie sur Σ^n_{N} et $\beta < 1$, alors pour tout $t \in [0,1)$ nous avons*

$$\left|\nu_t^{(i)}(f)\right| \leq \frac{K(\beta,i,n)}{\mathrm{N}^{\frac{i}{2}}}\nu(f^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les estimations suivantes pour la variable $\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}$ seront aussi utilisées plusieurs fois dans la suite :

Proposition 2.3.3. *Étant donnés $s \geq 1$ et une famille d'entiers naturels $\ell_1, j_1, \ldots, \ell_s, j_s$, nous avons, pour $\beta < 1$:*

(a) $\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) = \mathrm{O}(s)$;

(b) $\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) = \mathrm{O}(s)$;
(c) $\nu_0(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) = \mathrm{O}(s)$;
(d) $\nu_t^{(u)}(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) = \mathrm{O}(u+s)$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Démonstration. Les relations (a)-(c) sont établies dans Bardina et al. (2004). La dernière est une conséquence des relations précédentes et de la proposition 2.3.2. □

2.3.2 Termes négligeables

Dans cette section, nous trouvons une classe de termes pour laquelle les coefficients $c(n,k,\alpha)$ de la formule (2.12) valent zéro. Un outil de base pour ce type d'identification peut être trouvé dans Talagrand (2003*b*) :

Proposition 2.3.4. *Soit f une fonction définie sur Σ_N^n. On suppose que $f = f^- f'$ où f^- est une fonction d'un système avec $N-1$-spins et f' dépend seulement de $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$. Si $Avf' = 0$ (où Av signifie une moyenne sur $\epsilon_1 = \pm 1,\ldots,\epsilon_N = \pm 1$) alors*

$$\nu_0(f) = 0.$$

Comme application de cette proposition, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 2.3.5. *Soit f une fonction sur Σ_N^n. On suppose $f = \epsilon_{m_1}\cdots\epsilon_{m_\jmath} f^-$ avec $\jmath$ un entier naturel, f^- une fonction sur le système de $N-1$-spins, et telle que tous les m_k sont des entiers naturels différents. Alors $\nu_0^{(u)}(f) = 0$ dans les deux cas suivants :*
i) $\jmath = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $u < k$;
ii) $\jmath$ est un nombre impair, sans restriction sur $u \in \mathbb{N}$.

Démonstration. D'abord, il résulte de la proposition 2.3.1 que $\nu_0^{(u)}(f)$ peut être reécrit comme une somme de termes de type

$$c\beta^{2u}\nu_0\left(f^-\prod_{i=1}^{\jmath}\epsilon_{m_i}S^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_u,j_u}\right).$$

Lorsque $\jmath = 2k$ et $u < k$, ou alors si $\jmath$ est un nombre impair, il existe des entiers naturels différents $\tilde{m}_1,\ldots,\tilde{m}_v$ tels que

$$\nu_0\left(f^-\prod_{i=1}^{t}\epsilon_{m_i}S^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_u,j_u}\right) = \nu_0\left(\prod_{i=1}^{v}\epsilon_{\tilde{m}_i}\tilde{f}\right),$$

où $\tilde{f}$ est une fonction du système de $N-1$-spins. Il résulte de la proposition 2.3.4 que le dernier terme vaut zéro, ce qui finit la preuve. □

2.3.3 Un terme général plus explicite

Notre prochaine tâche est d'évaluer la valeur de certaines constantes qui apparaissent dans la proposition 2.3.1. Nous introduisons pour ceci une relation définie sur les $2k$-uples d'entiers naturels : soient deux $2k$-uples d'entiers naturels r et s. Nous notons $r \sim s$ si pour tout $1 \le i \le k$ il existe un $1 \le j \le k$ tel que $(r_{2i-1}, r_{2i}) = (s_{2j-1}, s_{2j})$ et réciproquement, si pour tout j il existe un i tel que $(s_{2j-1}, s_{2j}) = (r_{2i-1}, r_{2i})$.

Proposition 2.3.6. *Soient $k \geq 1$ et une fonction f définie sur Σ_{N}^{2k}. Pour $u \leq k$, soit un élément $w \triangleq (w_1, \ldots, w_{2u}) \in \Omega^{2u}$, tel que $w_i \leq 2k$ pour tout $i \leq 2u$. Rappelons que Ω^{2k} a été défini par la relation (2.8). Pour tout $\beta < 1$, $t \in [0,1]$, nous avons*

$$\nu_t^{(u)}(f) = u!\beta^{2u}\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{w_1,w_2,\ldots,w_{2u-1},w_{2u}}\right) + \beta^{2u}\sum_{r \nsim w} c(r)\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{r_1,r_2,\ldots,r_{2u-1},r_{2u}}\right), \tag{2.13}$$

pour une famille $\{c(r), r \nsim w\}$ de constantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ces constantes valent zéro sauf pour un nombre fini de termes $r \nsim w$.

Démonstration. Encore une fois, nous utilisons une récurrence sur u : le cas $u = 1$ est une application directe de la proposition 2.2.1. Dans ce cas $\Omega^{2u} = \Omega^2 = \{(r_1, r_2)\ ; r_1 < r_2\}$ et les seuls éléments $w \in \Omega^2$ qui satisfont $w_i \leq 2k$ sont de la forme $w = (l, l')$ avec $1 \leq l < l' \leq 2k$. Dans la suite, on suppose que l'équation (2.13) est vérifiée pour $u = v-1$.

Étant donné $w = (w_1, \ldots, w_{2v}) \in \Omega^{2v}$ nous définissons l'ensemble W :

$$\mathrm{W} = \{\tilde{w} \in \Omega^{2v-2} | \text{ pour tout } i \leq v-1, \text{ il existe } j \leq v \text{ tel que } (\tilde{w}_{2i-1}, \tilde{w}_{2i}) = (w_{2j-1}, w_{2j})\}.$$

Nous dénotons aussi par $\tilde{\mathrm{W}}$ l'ensemble $\mathrm{W}/\sim$. Pour chaque $\tilde{w}$ qui représente une classe $\tilde{\mathrm{W}}$, notre hypothèse de récurrence donne

$$\nu_t^{(v-1)}(f) = (v-1)!\beta^{2v-2}\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\ldots,\tilde{w}_{2v-3},\tilde{w}_{2v-2}}\right) + \beta^{2v-2}\sum_{\tilde{r} \nsim \tilde{w}} c(\tilde{r})\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\tilde{r}_{2v-3},\tilde{r}_{2v-2}}\right).$$

Après addition de toutes les classes possibles dans $\tilde{\mathrm{W}}$, nous concluons que

$$\begin{aligned}\nu_t^{(v-1)}(f) = (v-1)!\beta^{2v-2}\sum_{\tilde{w}\in\tilde{\mathrm{W}}} \nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\ldots,\tilde{w}_{2v-3},\tilde{w}_{2v-2}}\right) \\ + \beta^{2v-2}\sum_{\tilde{r}\notin\tilde{\mathrm{W}}} c(\tilde{r})\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\tilde{r}_{2v-3},\tilde{r}_{2v-2}}\right).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour chaque $\tilde{w} \in \tilde{W}$, choisissons maintenant l'unique couple $(\ell_1(\tilde{w}), \ell_2(\tilde{w}))$ tel que $(\tilde{w}, \ell_1(\tilde{w}), \ell_2(\tilde{w})) \sim w$. À partir de nos hypothèses nous pouvons aussi conclure que $\ell_1, \ell_2 \leq 2k$. De plus, dans le cas où u vaut 1, nous pouvons évaluer la dérivée de chaque terme du membre de droite dans l'équation (2.14). Alors, en prenant la dérivée de l'équation (2.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\nu_t^{(v)}(f) =& (v-1)!\beta^{2v}\sum_{\tilde{w}\in\mathrm{W}} \nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\ldots,\tilde{w}_{2v-3},\tilde{w}_{2v-2}}\mathrm{S}^-_{\ell_1(\tilde{w}),\ell_2(\tilde{w})}\right) \\ &+ (v-1)!\beta^{2v}\sum_{\tilde{w}\in\mathrm{W}}\sum_{l\neq(\ell_1(\tilde{w}),\ell_2(\tilde{w}))} c(l)\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\ldots,\tilde{w}_{2v-3},\tilde{w}_{2v-2}}\mathrm{S}^-_{\ell_1,\ell_2}\right) \\ &+ \beta^{2v}\sum_{\tilde{r}\notin\tilde{\mathrm{W}}}\sum_{l=(\ell_1,\ell_2)} c(\tilde{r})\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\ldots,\tilde{r}_{2v-3},\tilde{r}_{2v-2}}\mathrm{S}^-_{\ell_1,\ell_2}\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Comme $|\tilde{W}| = v$, nous déduisons que le premier terme du membre de droite de l'équation (2.15) est égal à $u!\beta^{2u}\nu_t(f\mathrm{S}^-_{w_1,w_2,\ldots,w_{2u-1},w_{2u}})$. De plus, nous pouvons aisément vérifier que les autres termes de l'équation (2.15) nous donnent des contributions de la forme

$$\beta^{2u}\sum_{r\nsim w} c(r)\nu_t\left(f\mathrm{S}^-_{r_1,r_2,\ldots,r_{2u-1},r_{2u}}\right),$$

ce qui conclut la preuve. □

2.3.4 Le produit de fonctions de recouvrement

Nous nous concentrons à présent sur le cas spécial $f = \mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}$ et nous essayons d'identifier certains termes négligeables dans notre développement. D'après la proposition 2.3.6, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $\nu_t(f)$ possède des termes de la forme

$$\nu_t\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}\mathrm{S}^-_{r_1,r_2,\ldots,r_{2k-1},r_{2k}}\right) = \nu_t\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k,r_1,r_2,\ldots,r_{2k-1},r_{2k}}\right), \tag{2.16}$$

et rappelons que le théorème 2.1.2 demande un développement jusqu'à l'ordre $\mathrm{O}(2k+1)$. Ainsi, une question naturelle pour nous est d'établir si les termes donnés par l'expression (2.16) sont d'ordre $\mathrm{O}(2k)$ ou pas. Un premier pas dans cette direction est de remplacer $\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}$ par $\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}$. Pour ceci, on a besoin du résultat suivant :

Proposition 2.3.7. *Soient $\beta < 1$, $s \geq 1$ et une famille d'entiers naturels $\ell_1, j_1, \ldots, \ell_s, j_s$. Nous avons*

i) $\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) = \nu_0(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) + \mathrm{O}(s+1)$.

ii) $\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) = \nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}) + \mathrm{O}(s+1)$.

Démonstration. i) Cette relation est une conséquence du développement, donné par la proposition 2.2.1, et de la proposition 2.3.3 point (d).
ii) Notons que

$$\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s} = \prod_{j=1}^{s}\mathrm{S}^-_{\ell_i,j_i}.$$

De ce fait, en utilisant la relation $\mathrm{S}^-_{l,l'} = \mathrm{S}_{l,l'} - \frac{1}{\mathrm{N}}$, nous pouvons aisément vérifier que

$$\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_s,j_s}\right) \quad = \quad \sum_{u=1}^{s}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_u\leq s}\frac{(-1)^{s-u}}{\mathrm{N}^{s-u}}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) \quad + \quad \frac{(-1)^s}{\mathrm{N}^s}. \tag{2.17}$$

En utilisant la proposition 2.3.3 pour chaque $2u$-uple $(\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u})$, les termes qui sont dans l'équation (2.17), pour $u \leq s-1$, deviennent

$$\frac{(-1)^{s-u}}{\mathrm{N}^{s-u}}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) = \mathrm{O}(2(s-u)+u). \tag{2.18}$$

De plus, pour $1 \leq u \leq s-1$, nous avons $2(s-u)+u \geq s+1$. Ainsi, nous obtenons le résultat directement à partir des équations (2.18) et (2.17). □

Maintenant, nous calculons les termes donnés par l'expression (2.16) :

Proposition 2.3.8. *Pour $\beta < 1$ et $r, w \in \Omega^{2k}$. Si $r \nsim w$, alors les relations suivantes sont vraies :*

$$\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{r_1,r_2,\ldots,r_{2k-1},r_{2k}}\mathrm{S}^{-}_{w_1,w_2,\ldots,w_{2k-1},w_{2k}}\right) = \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.19}$$

D'autre part, si $r \sim w$, nous avons

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{r_1,r_2,\ldots,r_{2k-1},r_{2k}}\mathrm{S}^{-}_{w_1,w_2,\ldots,w_{2k-1},w_{2k}}\right) &= \nu\left(\left(\mathrm{S}^{-}_{r_1,r_2,\ldots,r_{2k-1},r_{2k}}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{[\mathrm{N}(1-\beta^2)]^k} + \mathrm{O}(2k+1).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Démonstration. Posons $(\ell_1, j_1, \ldots, \ell_{2k}, j_{2k}) = (r_1, \ldots, r_{2k}, w_1, \ldots, w_{2k})$. Alors,

$$\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{r_1,r_2,\ldots,r_{2k-1},r_{2k}}\mathrm{S}^{-}_{w_1,w_2,\ldots,w_{2k-1},w_{2k}}\right) = \nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right).$$

Étape 0 : nous pouvons supposer que w est une permutation de r.
La proposition 2.3.7 point i) assure que

$$\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) = \nu_0\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

De plus, si w n'est pas une permutation de r, il existe un v-uple $(t_1, \ldots, t_v)$ tel que tous les indices $t_1, \ldots, t_v$ sont différents et tel que

$$\prod_{i=1}^{2k}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i} = \prod_{i=1}^{v}\epsilon_{t_i}.$$

En utilisant la proposition 2.3.5 nous pouvons conclure que le terme $\nu_0(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}})$ disparaît et donc, nous avons $\nu(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}) = \mathrm{O}(2k+1)$. Dans la suite de la preuve, on suppose donc que w est une permutation de r. Notons aussi que l'ensemble de cette démonstration est assez technique, et nous recommandons donc que le lecteur utilise un exemple pour la suivre plus facilement. Un choix possible est

$$k = 3, r = (1,2,4,7,3,5) \text{ et } w = (4,7,1,2,3,5). \tag{2.21}$$

Étape 1 : Décomposition de $\nu(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}})$ en trois termes
En utilisant la proposition 2.3.7 point ii), nous obtenons

$$\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) = \nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.22}$$

En outre, le terme $\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}})$ peut s'écrire

$$\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) = \nu\left(\prod_{i=1}^{2k}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right), \tag{2.23}$$

par définition de $S_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}$. De plus,

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) &= \frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\sigma_k^{\ell_1}\sigma_k^{j_1}\prod_{2\le i\le 2k}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right)\\ &= \nu\left(\epsilon_{\ell_1}\epsilon_{j_1}\prod_{2\le i\le 2k}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right),\end{aligned} \tag{2.24}$$

où la dernière égalité a été obtenue grâce à la propriété de symétrie entre les sites. Observons que comme r est une permutation de w, alors $\prod_{i=1}^{2k}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i}=1$ et donc, nous avons

$$\epsilon_{\ell_1}\epsilon_{j_1}\prod_{i=1}^{2k}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i}=\epsilon_{\ell_1}\epsilon_{j_1}\quad\text{et}\quad\epsilon_{\ell_1}\epsilon_{j_1}\prod_{i=1}^{2k}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i}=\prod_{2\le i\le 2k}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i},$$

puis,

$$\epsilon_{\ell_1}\epsilon_{j_1}=\prod_{2\le i\le 2k}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i}. \tag{2.25}$$

En utilisant les expressions (2.24), (2.25) et (2.22), nous obtenons

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) &= \nu\left(\epsilon_{\ell_1}\epsilon_{j_1}\prod_{2\le i\le 2k}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right)+\mathrm{O}(2k+1)\\ &= \nu\left(\mathrm{S}_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right)+\mathrm{O}(2k+1).\end{aligned}$$

Maintenant, nous répétons la procédure de décomposition de l'équation (2.17), ce qui nous donne

$$\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right)=\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2+\mathrm{K}_3, \tag{2.26}$$

où

$$\mathrm{K}_1=\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right), \tag{2.27}$$

$$\mathrm{K}_2=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i_2\le a_1<\cdots<a_{2k-2}\le i_{2k}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\ldots,\ell_{a_{2k-2}},j_{a_{2k-2}}}\right), \tag{2.28}$$

$$\mathrm{K}_3=\sum_{u=1}^{2k-3}\frac{1}{\mathrm{N}^{2k-u-1}}\sum_{i_2\le a_1<\cdots<a_u\le i_{2k}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\ldots,\ell_{a_u},j_{a_u}}\right)+\frac{1}{\mathrm{N}^{2k-1}}. \tag{2.29}$$

Dans la suite, nous estimons chaque terme $\mathrm{K}_1,\mathrm{K}_2$ et K_3 séparément.
Étape 2 : Nous montrons que

$$\mathrm{K}_1=\beta^2\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right)+\mathrm{O}(2k+1). \tag{2.30}$$

D'abord, nous faisons un développement de Taylor pour K_1 :

$$\mathrm{K}_1=\nu_0\left(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right)+\nu_0'\left(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right)+\frac{1}{2}\nu_\xi^{(2)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right), \tag{2.31}$$

pour un certain $\xi \in [0,1]$. En utilisant la proposition 2.3.5 nous pouvons vérifier que le premier terme, $\nu_0(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}})$, vaut zéro et à partir de la proposition 2.3.3 point (d), le dernier terme de la relation (2.31) est d'ordre $\mathrm{O}(2k+1)$. Ensuite, en utilisant les propositions 2.2.1 et 2.3.5, nous pouvons établir que

$$\nu_0'\left(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) = \beta^2\nu_0\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right),$$

et la proposition 2.3.7 point ii) implique de plus que

$$\nu_0'\left(\mathrm{S}^-_{\ell_2,j_2,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) = \beta^2\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

Nous en déduisons le résultat (2.30).

Étape 3 : *Étude de* K_2.

Nous affirmons que

$$\mathrm{K}_2 = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\mathrm{S}_{\tilde{l}_1,\tilde{k}_1,\ldots,\tilde{l}_{2k-2},\tilde{k}_{2k-2}}\right) + \mathrm{O}(2k+1), & \text{si } r \sim w\,; \\ \mathrm{O}(2k+1), & \text{dans les autres cas,} \end{cases} \tag{2.32}$$

où $(\tilde{l}_1,\tilde{k}_1,\ldots,\tilde{l}_{2k-2},\tilde{k}_{2k-2}) = (\tilde{r},\tilde{w})$ pour un certain couple $(\tilde{r},\tilde{w})$ tel que $\tilde{r},\tilde{w} \in \Omega^{2(k-1)}$ et $\tilde{r} \sim \tilde{w}$.

En effet, en utilisant la proposition 2.3.7, pour une famille $(a_1,\ldots,a_{2k-2})$ telle que $i_2 \leq a_1 < \cdots < a_{2k-2} \leq i_{2k}$, nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\ldots,\ell_{a_{2k-2}},j_{a_{2k-2}}}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}\nu_0\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\ldots,\ell_{a_{2k-2}},j_{a_{2k-2}}}\right) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.33}$$

Dans le cas $r \nsim w$, étant donné $r \in \Omega^{2k}$, il existe un indice $i \in \{1,\ldots,2k\}$ tel que pour tout $u \in \{1,\ldots,2k\}\backslash\{i\}$, nous avons $(\ell_i,j_i) \neq (\ell_u,j_u)$ (notons que par définition les l et les j sont des éléments de r et de w). Nous dénotons l'indice i par i_1. Dans ce cas l'indice i_2, tel que le produit $\prod_{v=1}^{2k-2}\epsilon_{\ell_{a_v}}\epsilon_{j_{a_v}} = \epsilon_{\ell_{i_1}}\epsilon_{j_{i_1}}\epsilon_{\ell_{i_2}}\epsilon_{j_{i_2}}$, satisfait $\{\epsilon_{\ell_{i_1}},\epsilon_{j_{i_1}}\} \cap \{\epsilon_{\ell_{i_2}},\epsilon_{j_{i_2}}\} \neq \{\epsilon_{\ell_{i_1}},\epsilon_{j_{i_1}}\}$. Ainsi, si on utilise la proposition 2.3.5, le premier terme du membre de droite de l'équation (2.33) disparaît et nous obtenons

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\ldots,\ell_{a_{2k-2}},j_{a_{2k-2}}}\right) = \mathrm{O}(2k+1).$$

D'autre part, dans le cas $r \sim w$, il existe une unique suite $(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_{2k-2})$ qui satisfait $\hat{a}_1 < \hat{a}_2 < \cdots < \hat{a}_{2k-2}$ et

$$\prod_{i=1}^{2k-2}\epsilon_{\ell_{\hat{a}_i}}\epsilon_{j_{\hat{a}_i}} = 1.$$

Notons dans l'exemple (2.21) que $(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3,\hat{a}_4) = (2,3,4,6)$. Alors, si nous utilisons le même type d'arguments utilisés dans les pages précédentes, nous obtenons

$$\mathrm{K}_2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{a}_1},j_{\hat{a}_1},\ldots,\ell_{\hat{a}_{2k-2}},j_{\hat{a}_{2k-2}}}\right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

En utilisant la proposition 2.3.7, nous en déduisons

$$\mathrm{K}_2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_{\hat{a}_1},j_{\hat{a}_1},\dots,\ell_{\hat{a}_{2k-2}},j_{\hat{a}_{2k-2}}}\right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

Remarquons maintenant que $(\ell_{\hat{a}_1}, j_{\hat{a}_1}, \dots, \ell_{\hat{a}_{2k-2}}, j_{\hat{a}_{2k-2}}) = (\tilde{r}, \tilde{w})$ avec $\tilde{r}, \tilde{w} \in \Omega^{2k-2}$ et que $\tilde{r} \sim \tilde{w}$, puisque $r \sim w$ (dans l'exemple (2.21), on a $r = w = (4, 7, 3, 5)$). Ceci achève la démonstration de notre affirmation.

Étape 4 : *Nous montrons que* $\mathrm{K}_3 = \mathrm{O}(2k+1)$.

Observons que pour chaque suite $a_1, \dots, a_u$ nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{2k-u-1}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\dots,\ell_{a_u},j_{a_u}}\right) = \mathrm{O}(2(2k-u-1)+u),$$

où on a utilisé la proposition 2.3.3. Comme $2(2k-u-1)+u$ vaut au moins $2k+1$ pour tout $u \le 2k-3$, nous déduisons que

$$\mathrm{K}_3 = \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.34}$$

Étape 5 : *Conclusion.*

D'après les équations (2.30), (2.34), (2.32) et (2.26) et la proposition 2.3.7 point ii), nous obtenons, pour $\beta < 1$, que

$$(1-\beta^2)\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_{2k},j_{2k}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\mathrm{S}_{\tilde{l}_1,\tilde{k}_1,\dots,\tilde{l}_{2k-2},\tilde{k}_{2k-2}}\right) + \mathrm{O}(2k+1), & \text{si } r \sim w\,; \\ \mathrm{O}(2k+1), & \text{cas contraire.} \end{cases}$$

L'équation (2.20) s'obtient maintenant directement par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ a été démontré dans Talagrand (2003*b*), sous la forme suivante : pour $\beta < 1$, nous avons

$$\nu(\mathrm{R}^2_{1,2}) = \frac{1}{\mathrm{N}(1-\beta^2)} + \mathrm{O}(3).$$

La récurrence est maintenant triviale. □

Comme conséquence des propriétés précédentes, nous pouvons évaluer le terme général suivant :

Proposition 2.3.9. *Soit* $(\ell_1, j_1, \dots, \ell_k, j_k) \in \Omega^{2k}$. *Alors, pour tout* $\beta < 1$, *nous avons*

$$\frac{1}{k!}\nu_0^{(k)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_k,j_k}\right) = \left(\frac{\beta^2}{\mathrm{N}(1-\beta)^2}\right)^k + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.35}$$

Démonstration. D'après la proposition 2.3.6 avec $f = \mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_k,j_k}$ et $w = (\ell_1, j_1, \dots, \ell_k, j_k)$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\nu_0^{(k)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_k,j_k}\right) =& k!\beta^{2k}\nu_0\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_k,j_k}\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_k,j_k}\right) \\ &+ \beta^{2k}\sum_{r\asymp w} c(r)\nu_0\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_k,j_k}\mathrm{S}^-_{r_1,r_2,\dots,r_{2k-1},r_{2k}}\right).\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la proposition 2.3.8, nous pouvons déduire que

$$\frac{1}{k!}\nu_0^{(k)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}\right) = \beta^{2k}\left(\frac{1}{\mathrm{N}(1-\beta)^2}\right)^k + \mathrm{O}(2k+1).$$

□

Pour finir cette section, nous évaluons le premier terme du développement de $\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k})$:

Lemme 2.3.10. *Soit $r = (\ell_1, j_1, \ldots, \ell_k, j_k) \in \Omega^{2k}$. Alors, pour tout $\beta < 1$, nous avons :*

$$\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}^k}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)^k + \mathrm{O}(2k+1).$$

Démonstration. D'abord nous remarquons que $\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k} = \prod_{i=1}^k \mathrm{S}_{\ell_i,j_i}$ et d'après la relation $\mathrm{S}_{l,l'} = \mathrm{S}^-_{l,l'} + \frac{1}{\mathrm{N}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k} &= \sum_{u=1}^{k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_u\le k}\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\prod_{v=1}^{u}\mathrm{S}^-_{\ell_{i_v},j_{i_v}} + \frac{1}{\mathrm{N}^k}\\ &= \sum_{u=1}^{k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_u\le k}\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}} + \frac{1}{\mathrm{N}^k}. \qquad (2.36)\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}\right) = \sum_{u=1}^{k}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_u\le k}\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) + \frac{1}{\mathrm{N}^k}. \qquad (2.37)$$

Notons que $r \in \Omega^{2k}$ si et seulement si pour un certain $u \le k$ et une suite $(i_1, \ldots, i_u)$ telle que $1 \le i_1 < \cdots < i_u \le k$, nous avons $(\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u}) \in \Omega^{2u}$. Par conséquent, à l'aide d'un développement de Taylor, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) &= \frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\sum_{v=0}^{u}\frac{1}{v!}\nu_0^{(v)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)\\ &\quad + \frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\frac{1}{(u+1)!}\nu_\xi^{(u+1)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right), \qquad (2.38)\end{aligned}$$

pour un certain $\xi \in [0,1]$. Maintenant, d'après la proposition 2.3.5, tous les termes de la dérivée d'ordre au plus u valent zéro et, en utilisant la proposition 2.3.3 point (d), le terme d'erreur peut être estimé par :

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\frac{1}{(u+1)!}\nu_\xi^{(u+1)}\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) = \mathrm{O}(2(k-u)+2u+1) = \mathrm{O}(2k+1).$$

Par conséquent, nous arrivons à l'expression suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)=\frac{1}{\mathrm{u}!N^{k-u}}\nu_0^{(u)}\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)+\mathrm{O}(2k+1). \tag{2.39}$$

D'autre part, le terme de la dérivée d'ordre u peut être évalué par la proposition 2.3.9 : nous utilisons le fait que $(\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u})\in\Omega^{2u}$ et, en utilisant les équations (2.35) et (2.39), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)&=\frac{1}{\mathrm{N}^{k-u}}\frac{1}{u!}\left[u!\left(\frac{\beta^2}{\mathrm{N}(1-\beta^2)}\right)^u+\mathrm{O}(2u+1)\right]\\&=\frac{1}{\mathrm{N}^k}\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^u+\mathrm{O}(2k+1).\end{aligned} \tag{2.40}$$

De plus,

$$\mathrm{Card}\left\{(i_1,\ldots,i_u)|1\le i_1<\cdots<i_u\le k\right\}=\binom{k}{u},$$

et d'après l' équation (2.37)

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_k,j_k}\right)&=\sum_{u=1}^{k}\frac{1}{\mathrm{N}^k}\binom{k}{u}\left(\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}\right)^u+\frac{1}{\mathrm{N}^k}+\mathrm{O}(2k+1)\\&=\frac{1}{\mathrm{N}^k}\left(1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^k+\mathrm{O}(2k+1).\end{aligned}$$

Ceci finit la preuve. □

2.4 R-Systèmes et Graphes

Dans cette section, nous présentons une étape essentielle en vue d'évaluer les fonctions de recouvrement multiples de la forme $R_{1,\ldots,s}$ (voir l'équation (2.3)). En effet, nous démontrons un résultat préliminaire important à propos de la fonctionelle $U_k^- S^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}$, où $\mathrm{U}_k^- = \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}^-_{1,\ldots,2k}$. Nous évaluons aussi $\nu(S_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})$ pour certains indices $(\ell_1,j_1,\ldots,\ \ell_m,j_m)$. Plus spécifiquement, cette section est consacrée à la démonstration du résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Soient k un naturel et $\beta<1$. Pour tout $m\ge k$ et $(\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m)\in\mathcal{C}_k$, où $\mathcal{C}_k$ est présenté à l'équation (2.9), nous avons :*
i) $\nu_0(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})=\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})+\mathrm{O}(2k+1)$.
ii) $\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})=\mathrm{O}(2k+1)$ *si* $m\ge k+1$.

Observons que la preuve de ce résultat fait intervenir deux outils : une représentation par graphe, qui nous aide à identifier la contribution principale dans notre développement, et l'introduction de certaines familles de fonctions, dont le rôle est d'éviter une procédure récursive pénible.

2.4.1 L'outil de graphes : la démonstration de la proposition 2.4.1 point ii)

Nous établissons la proposition 2.4.1 point ii) dans un cadre plus général :

Proposition 2.4.2. *Soient un entier naturel k et $\beta < 1$. Nous supposons que la suite $(\ell_1, j_1, \dots, \ell_m, j_m)$ appartient à $\mathcal{C}_k$ avec $m \geq k+1$. Alors, nous avons les estimations suivantes :*

i) $\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_m,j_m}\right) = \mathrm{O}(2k+1)$.

ii) Pour tout $u \geq 1$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_u \leq m$, nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) = \mathrm{O}(2k+1).$$

iii) Pour tout $u \geq 1$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_u \leq m$, nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) = \mathrm{O}(2k+1).$$

Démonstration. Soit $(\ell_1, j_1, \dots, \ell_m, j_m) \in \mathcal{C}_k$. En utilisant le même type de calculs que ceux effectués pour obtenir la relation (2.36), nous obtenons

$$\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_m,j_m}\right) = \sum_{u=1}^{m} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_u\leq m} \frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) + \frac{1}{\mathrm{N}^{m}}\cdot \tag{2.41}$$

Pour chaque $u \leq m$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_u \leq m$, nous faisons alors un développement du terme $\nu(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}})$ jusqu'à l'ordre $v \in \mathbb{N}$, ce qui donne

$$\nu\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) = \sum_{r=1}^{v} \frac{1}{r!}\nu_0^{(r)}\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) + \frac{1}{(v+1)!}\nu_\zeta^{(v+1)}\left(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right), \tag{2.42}$$

pour un certain $\zeta \in \mathbb{R}$. Nous admettons pour l'instant la proposition suivante, dont la preuve utilise les outils de graphes mentionnés ci-dessus :

Proposition 2.4.3. *Étant donnés un entier naturel k et $(\ell_1, j_1, \dots, \ell_m, j_m) \in \mathcal{C}_k$, nous avons pour un certain $u \geq 1$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_u \leq m$:*

i) Il existe un entier naturel

$$\hat{a} = \hat{a}(\ell_{i_1}, j_{i_1}, \dots, \ell_{i_u}, j_{i_u})$$

tel que $\prod_{p=1}^{u} \epsilon_{\ell_{i_p}}\epsilon_{j_{i_p}} = \epsilon_{c_1}\cdots\epsilon_{c_{2\hat{a}}}$, où tous les indices c sont différents.

ii) $u - \hat{a}$ est borné par $m - k$.

Nous utilisons maintenant cette proposition : soit $v = \hat{a}$ dans l'équation (2.42). Alors, d'après la proposition 2.3.5 point i), nous avons aisément que

$$\nu(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}) = \frac{1}{\hat{a}!}\nu_0^{(\hat{a})}(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}) + \frac{1}{(\hat{a}+1)!}\nu_\zeta^{(\hat{a}+1)}(\mathrm{S}^{-}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}).$$

De plus, en utilisant la proposition 2.3.3 point (d), $\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}})$ est d'ordre $\mathrm{O}(\hat{a}+u)$. Ainsi, nous obtenons l'estimation suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}) = \mathrm{O}\left(2m-(u-\hat{a})\right).$$

Pour finir, d'après le point ii) de la proposition 2.4.3, et lorsque par hypothèse $m \geq k+1$, nous avons

$$2m-(u-\hat{a}) \geq 2m-(m-k) = m+k \geq 2k+1$$

et donc,

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}) = \mathrm{O}(2k+1), \tag{2.43}$$

ce qui finit la preuve du point ii) de la proposition 2.4.2. De plus, d'après les équations (2.43) et (2.41) le point i) de la proposition 2.4.2 est démontré.

Pour démontrer iii) dans la proposition 2.4.2, il suffit à présent de faire un développement dans l'équation (2.36), et nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) &= \frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\sum_{q=0}^{u}\sum_{i_1\leq a_1<\dots<a_q\leq i_u}\frac{1}{\mathrm{N}^{u-q}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{a_1},j_{a_1},\dots,\ell_{a_q},j_{a_q}}\right)\\ &= \mathrm{O}(2k+1),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé ii) pour chaque q et suite $(a_1,\dots,a_q)$ avec $m \geq k+1$. □

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 2.4.3. Nous commençons par le point i), pour lequel nous utilisons la définition de graphe de la section 2.2 :

Proposition 2.4.4. *Soient k,u deux entiers naturels tels que $u \leq k$. Soient aussi $(\ell_1,j_1,\dots,\ell_m,j_m) \in \mathcal{C}_k$ avec $m \geq k+1$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_u \leq m$. Considérons $g = \mathrm{G}(\ell_1,j_1,\dots,\ell_m,j_m)$ et $h \triangleq \mathrm{G}(\ell_{i_1},j_{i_1},\dots,\ell_{i_u},j_{i_u})$. Alors*

i) h appartient à $\mathrm{S}_u(g)$.

ii) Il existe un entier naturel t tel que $\prod_{i=1}^{u}\epsilon_{\ell_{i_i}}\epsilon_{j_{i_i}} = \epsilon_{c_1}\cdots\epsilon_{c_t}$ pour toute valeur de ϵ, où les indices $(c_1,\dots,c_t)$ sont différents. De plus, $\mathrm{Od}(h) = t/2$.

Remarque 2.4.5. *Le point i) justifie notre intérêt pour la classe $\mathrm{S}_u(g)$. D'autre part le point ii) implique le point i) de la proposition 2.4.3, avec $\hat{a}(\ell_{i_1},\dots,j_{i_u}) = \mathrm{Od}(h)$.*

Preuve de la proposition 2.4.4. i) C'est une conséquence directe des définitions données dans la section 2.2.

ii) Les quantités ϵ_{c_i} sont les éléments qui apparaissent un nombre impair de fois dans $\prod_{p=1}^{u}\epsilon_{\ell_{i_p}}\epsilon_{j_{i_p}}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Od}(h) = \sum_{i\in\mathrm{I}\ ;\,\mathrm{N}_h(i)\,\text{est impair}}\frac{1}{2} = \frac{t}{2}.$$

□

Étant donné un graphe g tel que $\mathrm{N}(g) = m$, une autre quantité d'intérêt pour nous est une borne supérieure de $\max_{h\in \mathrm{S}_u(g)} u - \mathrm{Od}(h)$. Nous définissons donc, pour chaque $u \in \{1, \ldots, m\}$, la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{M}_u^g\colon & \mathrm{S}_u(g) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & h & \longmapsto & u - \mathrm{Od}(h) \end{array}$$

Dans l'ambition de simplifier les notations dont nous nous servirons dans la preuve de la proposition suivante, nous définissons une opération sur les graphes que nous appelons *juxtaposition*. Soient $g_1 = (\mathrm{I}_1, \mathrm{E}_1, \Upsilon_1)$ et $g_2 = (\mathrm{I}_2, \mathrm{E}_2, \Upsilon_2)$ deux graphes. Nous notons par $g = g_1 + g_2$ le graphe défini par $g = (\mathrm{I}, \mathrm{E}, \Upsilon)$, tel que $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2$ et $\Upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2$ (nous considérons que $\Upsilon_1(e)$ et $\Upsilon_2(e)$ valent zéro si ces fonctions ne sont pas définies dans Υ_1 et Υ_2 séparément).

Rappelons que la classe de graphes $\mathcal{G}_k$ est définie par la relation (2.9). Nous allons voir apparaître dans le prochain lemme une caractéristique implicite de croissance pour $\mathcal{G}_k$.

Lemme 2.4.6. *Étant donnés $k \in \mathbb{N}$ et un graphe $g = (\mathrm{I}, \mathrm{E}, \Upsilon) \in \mathcal{G}_k$, nous avons :*
i) $\max_{h\in \mathrm{S}_u(g)} \mathrm{M}_u^g$ *est croissant en u.*
ii) $\max_{u\leq \mathrm{N}(g)} \max_{h\in \mathrm{S}_u(g)} \mathrm{M}_u^g \leq \mathrm{N}(g) - k$.

Remarque 2.4.7. *Le point ii) de la proposition 2.4.3 est une conséquence du point ii) de la proposition 2.4.6.*

Preuve de la proposition 2.4.6. i) Soit $h = (\mathrm{I}_1, \mathrm{E}_1, \Upsilon_1) \in \mathrm{S}_u(g)$ tel que $u < \mathrm{N}(g)$ et

$$\max_{h\in \mathrm{S}_u(g)} \mathrm{M}_u^g = u - \mathrm{Od}(h).$$

Soit $e = (p, q) \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{E}_1$ (e existe car $u < m$). Nous définissons $h_1 = (\{p, q\}, \{e\}, \Upsilon_2)$, tel que $\Upsilon_2(e) = 1$, et soit $\tilde{h}$ le graphe $h + h_1$. Alors, $\tilde{h} \in \mathrm{S}_{u+1}$ car $\mathrm{N}(\tilde{h}) = \mathrm{N}(h) + \mathrm{N}(h_1) = u + 1$, $\mathrm{I}_1 \cup \{p, q\} \subseteq \mathrm{I}$, $\mathrm{E}_1 \cup \{e\} \subseteq \mathrm{E}$ et $\Upsilon_1(e) + \Upsilon_2(e) \leq \Upsilon(e)$. Nous allons montrer que $\mathrm{M}_{u+1}^g(\tilde{h}) \geq \mathrm{M}_u^g(h)$. Ceci implique l'affirmation i).
Il existe trois cas possible pour p et q :

- $p, q \notin \mathrm{I}_1$
  Dans ce cas $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(p) = \mathrm{N}_{\tilde{h}}(q) = 1$ et donc, $\mathrm{Od}(\tilde{h}) = \mathrm{Od}(h) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Ceci implique $\mathrm{M}_{u+1}^g(\tilde{h}) = u + 1 - (\mathrm{Od}(h) + 1) = \mathrm{M}_u^g(h)$.
- $p \in \mathrm{I}_1$, $q \notin \mathrm{I}_1$ (ou $q \in \mathrm{I}_1$, $p \notin \mathrm{I}_1$)
  Nous avons $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(q) = 1$ et si $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(p)$ est impair, alors $\mathrm{Od}(\tilde{h}) = \mathrm{Od}(h) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ et ainsi nous obtenons le même résultat que dans le cas précédent. Si $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(p)$ est pair, c'est-à-dire $\mathrm{Od}(\tilde{h}) = \mathrm{Od}(h) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, alors $\mathrm{M}_{u+1}^g(\tilde{h}) = u + 1 - \mathrm{Od}(h) > \mathrm{M}_u^g(h)$.
- $p, q \in \mathrm{I}_1$
  Si les deux $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(p)$ et $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(q)$ sont impairs, alors $\mathrm{Od}(\tilde{h}) = \mathrm{Od}(h) + 1$; si $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(p)$ est pair et $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(q)$ est impair, alors $\mathrm{Od}(\tilde{h}) = \mathrm{Od}(h)$. Ces deux cas ont déjà été étudiés. Dans le cas où les deux $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(p)$ et $\mathrm{N}_{\tilde{h}}(q)$ sont pairs, alors $\mathrm{Od}(\tilde{h}) = \mathrm{Od}(h) - 1$ et donc, $\mathrm{M}_{u+1}^g(\tilde{h}) = u + 1 - (\mathrm{Od}(h) - 1) > \mathrm{M}_u^g(h)$. Ceci achève la preuve de l'affirmation i).

L'affirmation ii) est une conséquence du point i), car $\max_u \max_{h\in \mathrm{S}_u(g)} \mathrm{M}_u^g = \mathrm{M}_m^g = m - k$, où dans la dernière égalité, nous avons utilisé le fait que g, le graphe de départ, est l'unique sous-graphe de g avec m arêtes tel que $g \in \mathcal{G}_k$. □

Jusqu'ici, nous avons démontré la proposition 2.4.3 et par conséquent la proposition 2.4.1 point ii)

2.4.2 R-Système : preuve de la proposition 2.4.1 point i)

Dans cette section nous finissons la preuve de la proposition 2.4.1 point i), c'est-à-dire que nous montrerons que

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) = \nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.44}$$

La stratégie utilisée est une récurrence sur m, et pour éviter une procédure trop lourde nous introduisons une famille de fonctions que nous notons R-système. Donnons maintenant les détails de la preuve.

Étape 1 *:* Le premier pas de la récurrence.

Dans le cas $m \geq 2k+2$, nous utilisons l'inégalité de Schwarz et la proposition 2.3.2, ce qui entraîne

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) \leq K(\beta,m)\,\nu\left(\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{O}(m),$$

pour une constante positive $K(\beta,m)$. Dans la dernière égalité, nous avons fait appel à la proposition 2.3.3. Nous obtenons donc le résultat car $m \geq 2k+2 > 2k+1$ et en utilisant la proposition 2.4.2 $\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}) = \mathrm{O}(2k+1)$. Par conséquent, la différence $\nu_0(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}) - \nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})$ est aussi $\mathrm{O}(2k+1)$. Ceci finit la preuve.

Étape 2 *:* Maintenant, nous commençons la procédure de récurrence. Soit $m < 2k+2$, et nous supposons que le résultat est vrai pour $r > m$. D'abord, on montre que

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) = \nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

En effet, en faisant un développement inverse de Taylor, nous avons, pour un certain $\zeta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) =& \nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) - \sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r!}\nu_0^{(r)}\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)\\ &- \frac{1}{(k+1)!}\nu_\zeta^{(k+1)}\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right).\end{aligned} \tag{2.45}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, ainsi que les propositions 2.3.2 et 2.3.3 nous obtenons une borne pour le dernier terme :

$$\begin{aligned}\nu_\zeta^{(k+1)}\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) &\leq \frac{1}{\mathrm{N}^{\frac{k+1}{2}}}\nu\left(\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{1}{\mathrm{N}^{\frac{k+1}{2}}}\nu\left(\left(\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{O}(2k+1),\end{aligned}$$

car $m \geq k$. Par conséquent, l'équation (2.45) devient

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) = \nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) - \sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r!}\nu_0^{(r)}\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

En outre, la proposition 2.3.1 affirme que chaque terme

$$\nu_0^{(r)}\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)$$

peut se décomposer en une somme finie de termes de la forme

$$c(\beta,r)\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_r,j_r}\right).$$

Ceci peut être reécrit comme

$$c(\beta,r)\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_r,j_r}\right)=c(\beta,r)\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{m+r},j_{m+r}}\right). \tag{2.46}$$

D'après la proposition 2.3.4, si $(\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{m+r},j_{m+r})\notin\mathcal{C}_k$, l'expression (2.46) vaut zéro. Sinon, par hypothèse de récurrence, nous avons

$$c(\beta,r)\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{m+r},j_{m+r}}\right)=c(\beta,r)\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_{m+r},j_{m+r}}\right)+\mathrm{O}(2k+1).$$

Ainsi, comme $r\geq 1$, nous pouvons déduire de la proposition 2.4.2 que

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)=\nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)+\mathrm{O}(2k+1), \tag{2.47}$$

ce qui établit notre affirmation.
Étape 3 *:* Décomposition de $\nu_0(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})$.
Notons $\mathrm{U}_k=\epsilon_1\cdots\epsilon_{2k}R_{1\ldots 2k}$. Alors, évidemment, $\mathrm{U}_k^-=-\frac{1}{\mathrm{N}}+\mathrm{U}_k$. Cette égalité et le même type de calcul de l'équation (2.36) nous donnent

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)=&\sum_{u=1}^{m}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_u\leq m}\frac{(-1)^{m-u+1}}{\mathrm{N}^{m-u+1}}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)+\frac{1}{\mathrm{N}^{m+1}}\\&+\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)+\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_u\leq m}\frac{(-1)^{m-u}}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right).\end{aligned}$$

De plus, d'après la proposition 2.4.2, nous avons

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)=&\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)+\sum_{u=1}^{m-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_u\leq m}\frac{(-1)^{m-u}}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)\\&+\mathrm{O}(2k+1).\end{aligned}$$

Maintenant, le fait que $(\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m)\in\mathcal{C}_k$ et la propriété de symétrie nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)&=\nu\left(\epsilon_1\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}_{1,\ldots,2k}\prod_{i\leq m}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right)\\&=\nu\left(\mathrm{R}_{1,\ldots,2k}\prod_{i\leq m}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right)=\nu\left(\epsilon_1\cdots\epsilon_{2k}\prod_{i\leq m}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right)\\&=\nu\left(\prod_{i\leq m}\epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i}\mathrm{R}_{\ell_i,j_i}\right)=\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) = \nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) + \sum_{u=1}^{m-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_u\le m}\frac{(-1)^{m-u}}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.48}$$

Pour finir notre décomposition, nous introduisons un peu plus de notations : pour $1 \le i_1 < \cdots < i_u \le m$, notons $\alpha = (\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u})$ et nous définissons I l'ensemble de tous les α possibles quand u prend des valeurs dans $\{1, \ldots, m-1\}$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{I}$, notons par $\tilde{G}_\alpha$ la fonction définie par

$$\tilde{G}_\alpha = \frac{(-1)^{m-u}}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right).$$

Avec ces notations, les équations (2.47) et (2.48) nous disent que

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) = \nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right) + \sum_{\alpha\in\mathrm{I}}\tilde{G}_\alpha + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.49}$$

Étape 4 *:* Soit $1 \le u \le m-1$. Pour $\alpha = (\ell_{i_1}, \ldots, j_{i_u})$ nous écrivons $\hat{\alpha} \subseteq \alpha$ si $\hat{\alpha}$ est un sous-ensemble des indices de α. Un élément général $\hat{\alpha} \subseteq \alpha$ est de la forme $\hat{\alpha} = (\ell_{\hat{i}_1}, \ldots, j_{\hat{i}_v})$. On va montrer que

$$\tilde{G}_\alpha = \sum_{\hat{\alpha}\in I_\alpha}\mathrm{G}_{\hat{\alpha}}\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{i}_1},j_{\hat{i}_1},\ldots,\ell_{\hat{i}_v},j_{\hat{i}_v}}\right) + \mathrm{O}(2k+1), \tag{2.50}$$

où pour chaque $\hat{\alpha}$, $\mathrm{G}_{\hat{\alpha}}$ est un coefficient d'ordre O(1), et où I_α est un ensemble d'indices qui seront définis plus tard. En effet, si on répete le processus qui nous amène à l'équation (2.36) et en utilisant $\mathrm{U}_k = \frac{1}{\mathrm{N}} + \mathrm{U}_k^-$, nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}^m}\nu\left(\mathrm{U}_k^-\right) + \frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\sum_{v=1}^{u}\sum_{\hat{\alpha}\subseteq\alpha}\frac{1}{\mathrm{N}^{u-v}}\nu\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{i}_1},j_{\hat{i}_1},\ldots,\ell_{\hat{i}_v},j_{\hat{i}_v}}\right) + \frac{1}{\mathrm{N}^{m-u+u+1}} + \frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}}\sum_{v=1}^{u}\sum_{\hat{\alpha}\subseteq\alpha}\frac{1}{\mathrm{N}^{u-v+1}}\nu\left(\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{i}_1},j_{\hat{i}_1},\ldots,\ell_{\hat{i}_v},j_{\hat{i}_v}}\right). \tag{2.51}$$

Analysons maintenant quelques termes dans l'équation ci-dessus. D'abord, nous pouvons aisément vérifier que

$$\frac{1}{\mathrm{N}^m}\nu(\mathrm{U}_k^-) = \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.52}$$

D'autre part, une première idée pour manipuler le terme $N^{-(m-v+1)}\nu(\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{i}_1},j_{\hat{i}_1},\ldots,\ell_{\hat{i}_v},j_{\hat{i}_v}})$ pour $1 \le v \le u \le m-1$ pourrait être d'appliquer la proposition 2.4.2. Cependant, observons que nous n'avons supposé que $m \ge k$, alors que la proposition 2.4.2 impose $m \ge k+1$. Ceci nous amène à une procédure spéciale : le multi-indice $(\ell_{\hat{i}_1}, j_{\hat{i}_1}, \ldots, \ell_{\hat{i}_v}, j_{\hat{i}_v})$

a été construit à partir de $(\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u})$. Pourtant, comme $u \leq m-1$, nous pouvons aussi construire $(\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v})$ à partir de la suite suivante de taille $2(m+1)$ qui appartient à $\mathcal{C}_k$: prenons tous les couples dans $(\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u})$ sauf un, que nous notons (ℓ_{i^*}, j_{i^*}), et supposons que $(\ell_{i^*}, j_{i^*}) \notin (\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v})$. Maintenant, nous partageons (ℓ_{i^*}, j_{i^*}) en deux couples $(\ell_{i^*}, 1)$ et $(1, j_{i^*})$ et nous construisons la suite désirée en prenant tous ces couples. Comme exemple de cette procédure, on peut prendre $k = m = 3$, $(\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u}) = (1, 3, 2, 4, 5, 6) \in \mathcal{C}_3$, $u = v = 2$, et $(\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}) = (1, 3, 5, 6)$. Alors, cette dernière suite pourrait aussi être construite à partir de la suite

$$(1, 3, 5, 6, 2, 1, 4, 1) \in \mathcal{C}_3.$$

Maintenant, la proposition 2.4.2 point ii) peut être appliquée pour la nouvelle suite de taille $2(m+1)$ que nous venons de construire et ainsi, pour chaque $1 \leq u \leq m-1$, $\hat{\alpha} \subset \alpha$ nous avons :

$$\frac{1}{N^{m-v+1}} \nu \left(\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) = \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.53}$$

Par conséquent, d'aprés les équations (2.52) et (2.53) dans (2.51), nous obtenons :

$$\frac{1}{\mathrm{N}^{m-u}} \nu \left(\mathrm{U}_k \mathrm{S}_{\ell_{i_1}, j_{i_1}, \ldots, \ell_{i_u}, j_{i_u}} \right) = \sum_{v=1}^{u} \sum_{\hat{\alpha} \subseteq \alpha} \frac{1}{\mathrm{N}^{m-v}} \nu \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) + \mathrm{O}(2k+1). \tag{2.54}$$

Maintenant, pour chaque $\hat{\alpha} = (\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v})$ dans l'équation (2.54) nous faisons un développement de Taylor. Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \nu \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) = & \sum_{r=0}^{2k} \frac{1}{r!} \nu_0^{(r)} \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) \\ & + \frac{1}{(2k+1)!} \nu_\zeta^{(2k+1)} \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz et les propositions 2.3.2 et 2.3.3, on obtient alors

$$\nu \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) = \sum_{r=0}^{2k} \frac{1}{r!} \nu_0^{(r)} \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) + \mathrm{O}(2k+1).$$

D'après la proposition 2.3.1, nous avons donc

$$\begin{aligned} & \nu \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \right) = \\ & \qquad \sum_{r=0}^{2k} \sum_{(\ell_{\tilde{\imath}_1}, \ldots, j_{\tilde{\imath}_r}) \in \mathrm{J}_{\hat{\alpha}}} c(\hat{\alpha}, r, \beta) \nu_0 \left(\mathrm{U}_k^- \mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{\imath}_1}, j_{\hat{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\hat{\imath}_v}, j_{\hat{\imath}_v}} \mathrm{S}^-_{\ell_{\tilde{\imath}_1}, j_{\tilde{\imath}_1}, \ldots, \ell_{\tilde{\imath}_r}, j_{\tilde{\imath}_r}} \right) + \mathrm{O}(2k+1), \end{aligned} \tag{2.55}$$

où nous notons par $\mathrm{J}_{\hat{\alpha}}$ l'ensemble (fini) de toutes les valeurs possibles de $(\ell_{\tilde{\imath}_1}, \ldots, j_{\tilde{\imath}_r})$ données par la proposition 2.3.1. Par conséquent, les équations (2.55) et (2.54), nous

permettent de conclure que :

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\alpha &= \frac{(-1)^{m-u}}{\mathrm{N}^{m-u}}\nu\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}_{\ell_{i_1},j_{i_1},\ldots,\ell_{i_u},j_{i_u}}\right)\\ &= \sum_{v=1}^{u}\sum_{\hat{\alpha}\subseteq\alpha}\sum_{r=0}^{2k}\sum_{\tilde{\alpha}\in\mathrm{J}_{\hat{\alpha}}}\frac{(-1)^{m-u}}{\mathrm{N}^{m-v}}c\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_{\hat{i}_1},j_{\hat{i}_1},\ldots,\ell_{\hat{i}_v},j_{\hat{i}_v},\ell_{\tilde{i}_1},j_{\tilde{i}_1},\ldots,\ell_{\tilde{i}_r},j_{\tilde{i}_r}}\right)+\mathrm{O}(2k+1),\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de l'affirmation (2.50), en notant

$$\mathrm{I}_\alpha=\{\alpha^*=(\hat{\imath}_1,\hat{\imath}_1,\ldots,\hat{\imath}_v,\hat{\imath}_v,\tilde{\imath}_1,\tilde{\imath}_1,\ldots,\tilde{\imath}_r,\tilde{\imath}_r)|\hat{\alpha}\subseteq\alpha \text{ et } \tilde{\alpha}\in\mathrm{J}_{\hat{\alpha}}\}$$

et $\mathrm{G}_{\alpha^*}=((-1)^{m-u}/\mathrm{N}^{m-v})$. Puisque $v<m$, nous obtenons aussi que $\mathrm{G}_{\alpha^*}=\mathrm{O}(1)$.
Étape 5 *:* Conclusion.

Étapes 3 et 4 nous amènent à la définition suivante :

Définition 2.4.8. *Étant donné un entier naturel k, une collection de fonctions $(\mathrm{T}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ est appelée un* R*-système si et seulement si, pour chaque $\alpha\in\mathrm{I}$ il existe un ensemble fini $\mathrm{I}_\alpha\subseteq\mathrm{I}$ et des fonctions $\mathrm{H}_\alpha,(\mathrm{G}_{\alpha_1})_{\alpha_1\in\mathrm{I}_\alpha}$ tels que*

- $\mathrm{H}_\alpha=\mathrm{O}(2k)$.
- *Pour tout* $\alpha_1\in\mathrm{I}_\alpha,\ \mathrm{G}_{\alpha_1}=\mathrm{O}(1)$.
- $\mathrm{T}_\alpha=\mathrm{H}_\alpha+\sum_{\alpha_1\in\mathrm{I}_\alpha}\mathrm{T}_{\alpha_1}\mathrm{G}_{\alpha_1}+\mathrm{O}(2k+1)$.

Nous remarquons que les relations (2.49) et (2.50) nous donnent

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)=\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m}\right)+\sum_{\alpha\in\mathrm{I}}\sum_{\hat{\alpha}\in\mathrm{I}_\alpha}\mathrm{G}_{\hat{\alpha}}\nu_0\left(\mathrm{U}_k\mathrm{S}^-_{\hat{\alpha}}\right)+\mathrm{O}(2k+1),$$

où $\mathrm{G}_{\hat{\alpha}}=\mathrm{O}(1)$. Ainsi, si nous associons à chaque $\alpha=(\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m)\in\mathcal{C}_k$ les fonctions $\mathrm{T}_\alpha\triangleq\nu_0(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})$ et $\mathrm{H}_\alpha\triangleq\nu(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_m,j_m})$, alors nous avons que $(\mathrm{T}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{C}_k}$ est un R-système. Par conséquent, d'après le lemme ci-dessous, la preuve de l'équation (2.44) est complète, ce qui implique la proposition 2.4.1 point i).

Lemme 2.4.9. *Étant donné un* R*-système de fonctions $(\mathrm{T}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$, alors pour chaque $\alpha\in\mathrm{I}$ nous avons*

i) $\mathrm{T}_\alpha=\mathrm{H}_\alpha+\mathrm{O}(2k+1)$.
ii) En particulier, $\mathrm{T}_\alpha=\mathrm{O}(2k)$.

Démonstration. Par définition 2.4.8 et pour chaque $\alpha\in\mathrm{I}$, nous avons

$$\mathrm{T}_\alpha=\mathrm{H}_\alpha+\sum_{\alpha_1\in\mathrm{I}_\alpha}\mathrm{T}_{\alpha_1}\mathrm{G}_{\alpha_1}+\mathrm{O}(2k+1).$$

Si nous utilisons la définition 2.4.8 pour chaque $\alpha_1\in\mathrm{I}_{\alpha_0}$, alors il existe un ensemble I_{α_1} tel que

$$\mathrm{T}_\alpha=\mathrm{H}_\alpha+\sum_{\alpha_1\in\mathrm{I}_\alpha}\left(\mathrm{H}_{\alpha_1}+\sum_{\alpha_2\in\mathrm{I}_{\alpha_1}}\mathrm{T}_{\alpha_2}\mathrm{G}_{\alpha_2}+\mathrm{O}(2k+1)\right)\mathrm{G}_{\alpha_1}+\mathrm{O}(2k+1).\tag{2.56}$$

Cependant, d'après la définition 2.4.8 nous pouvons conclure que $\mathrm{H}_{\alpha_1}\mathrm{G}_{\alpha_1} = \mathrm{O}(2k+1)$ et par conséquent, l'équation (2.56) devient :

$$\mathrm{T}_\alpha = \mathrm{H}_\alpha + \sum_{\alpha_1 \in \mathrm{I}_\alpha} \sum_{\alpha_2 \in \mathrm{I}_{\alpha_1}} \mathrm{T}_{\alpha_2}\mathrm{G}_{\alpha_2}\mathrm{G}_{\alpha_1} + \mathrm{O}(2k+1).$$

En répétant ce processus $2k+1$ fois, nous obtenons :

$$\mathrm{T}_\alpha = \mathrm{H}_\alpha + \sum_{\alpha_1 \in \mathrm{I}_\alpha} \sum_{\alpha_2 \in \mathrm{I}_{\alpha_1}} \cdots \sum_{\alpha_{k+1} \in \mathrm{I}_{\alpha_k}} \mathrm{T}_{\alpha_{2k+1}}\mathrm{G}_{\alpha_{2k+1}} \cdots \mathrm{G}_{\alpha_2}\mathrm{G}_{\alpha_1} + \mathrm{O}(2k+1).$$

En utilisant la définition 2.4.8, chaque terme $\mathrm{T}_{\alpha_{2k+1}}\mathrm{G}_{2\alpha_{k+1}} \cdots \mathrm{G}_{\alpha_2}\mathrm{G}_{\alpha_1}$ est alors d'ordre $\mathrm{O}(2k+1)$, ce qui achève la preuve. Le point ii) est une conséquence triviale du point i). □

2.5 Un développement pour le deuxième moment

Nous concluons dans cette section la preuve de nos développements asymptotiques, les équations (2.5) et (2.6).

Preuve du théorème 2.1.2. Nous utilisons d'abord la définition de $\mathrm{R}_{1,\dots,s}$ et la propriété de symétrie entre les sites. Ceci nous donne

$$\nu\left(\mathrm{R}^2_{1,\dots,s}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}\nu\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sigma_i^1\sigma_i^2\cdots\sigma_i^s\mathrm{R}_{1,\dots,s}\right) = \nu\left(\epsilon_1\cdots\epsilon_s\mathrm{R}_{1,\dots,s}\right).$$

Nous appliquons maintenant la relation

$$\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}_{1,\dots,s} = \frac{1}{\mathrm{N}} + \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s},$$

où nous notons par $\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}$ la quantité $\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1}\sigma_i^1\sigma_i^2\cdots\sigma_i^s$. Ainsi, nous obtenons

$$\nu\left(\mathrm{R}^2_{1,\dots,s}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} + \nu\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right). \tag{2.57}$$

Observons que dans le membre de droite de l'équation (2.57), nous devons manipuler la fonction $\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}$ qui dépend du système avec $\mathrm{N}-1$ spins. Le développement de Taylor de ce terme donne

$$\begin{aligned}\nu\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right) = \nu_0\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right) + \sum_{u=1}^{r}\frac{1}{u!}\nu_0^{(u)}\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right)\\ + \frac{1}{(r+1)!}\nu_\zeta^{(r+1)}\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right),\end{aligned} \tag{2.58}$$

pour tout entier naturel r et pour un certain nombre réel $\zeta \in [0,1]$.

Supposons d'abord que s est impair. D'après la proposition 2.3.5, tous les termes de la dérivée dans l'équation (2.58) valent zéro, et nous obtenons

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{R}^2_{1,\dots,s}\right) &= \frac{1}{\mathrm{N}} + \frac{1}{(r+1)!}\nu_\zeta^{(r+1)}\left(\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_s\mathrm{R}^-_{1,\dots,s}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{N}} + \mathrm{O}(r),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition 2.3.2. Par conséquent, la relation (2.5) est vraie avec $r = 2p$.

Maintenant, nous étudions le cas où s est pair ($s = 2k$). Rappelons que, étant donné un entier naturel k, nous notons

$$\mathrm{U}_k^- = \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}^-_{1,\dots,2k} \text{ et } \mathrm{U}_k = \epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_{2k}\mathrm{R}_{1,\dots,2k}.$$

Quand nous choisissons $r = 2k$, l'équation (2.58) devient

$$\nu\left(\mathrm{U}_k^-\right) = \nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\right) + \sum_{u=1}^{2k}\frac{1}{u!}\nu_0^{(u)}\left(\mathrm{U}_k^-\right) + \frac{1}{(2k+1)!}\nu_\zeta^{(2k+1)}\left(\mathrm{U}_k^-\right).$$

De plus, en appliquant les propositions 2.3.5 et 2.3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}\nu\left(\mathrm{U}_k^-\right) &= \sum_{u=k}^{2k}\frac{1}{u!}\nu_0^{(u)}\left(\mathrm{U}_k^-\right) + \frac{1}{(2k+1)!}\nu_\zeta^{(2k+1)}\left(\mathrm{U}_k^-\right)\\ &= \sum_{u=k}^{2k}\frac{1}{u!}\nu_0^{(u)}\left(\mathrm{U}_k^-\right) + \mathrm{O}(2k+1).\end{aligned}$$

Observons aussi que, la proposition 2.3.1 implique que $\nu_0^{(u)}(\mathrm{U}_k^-)$ peut être reécrit comme

$$\nu_0^{(u)}(\mathrm{U}_k^-) = \sum_{\alpha=(l_1,j_1,\dots,l_u,j_u)\in\mathcal{D}_{2k,u}} c(2k,u,\alpha)\beta^{2u}\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_u,j_u}\right) \tag{2.59}$$

et nous sommes maintenant en mesure d'identifier les termes négligeables de la sommation ci-dessus. En effet, notons α pour une famille $(l_1, j_1, \dots, l_u, j_u)$, nous avons :
(1) D'après la proposition 2.3.4, si $\prod_{i=1}^u \epsilon_{\ell_i}\epsilon_{j_i} \neq \prod_{i=1}^k \epsilon_{2i-1}\epsilon_{2i}$, le terme $\nu_0(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_u,j_u})$ vaut zéro. Ceci signifie en particulier que, dans la relation (2.59), $c(2k,u,\alpha) = 0$ à moins que $\alpha \in \mathcal{C}_k$, et

$$\nu_0^{(u)}(\mathrm{U}_k^-) = \sum_{\alpha=(l_1,j_1,\dots,l_u,j_u)\in\mathcal{D}_{2k,u}\cap\mathcal{C}_k} c(2k,u,\alpha)\beta^{2u}\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_u,j_u}\right).$$

(2) Si $u \geq m+1$, la proposition 2.4.1 entraîne

$$\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_u,j_u}\right) = \nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\dots,\ell_u,j_u}\right) + \mathrm{O}(2k+1) = \mathrm{O}(2k+1).$$

Par conséquent, les termes $\nu_0^{(u)}(\mathrm{U}_k^-)$ peuvent être négligés pour $u > k$, et nous obtenons

$$\begin{aligned}\nu(\mathrm{U}_k^-) &= \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k} c(2k,k,\alpha)\beta^{2k}\nu_0\left(\mathrm{U}_k^-\mathrm{S}^-_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_u,j_k}\right)+\mathrm{O}(2k+1)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k} c(2k,k,\alpha)\beta^{2k}\nu\left(\mathrm{S}_{\ell_1,j_1,\ldots,\ell_u,j_k}\right)+\mathrm{O}(2k+1),\end{aligned}$$

où nous avons appliqué encore une fois la proposition 2.4.1 point i) dans la dernière égalité. **(3)** Nous retournons maintenant à $\mathcal{C}_k$ et à $\mathcal{D}_{2k,k}$ qui sont définis respectivement dans les équations (2.9) et (2.11), pour voir que

$$\mathcal{C}_k\cap\mathcal{D}_{2k,k} = \{\alpha=(l_1,j_1,\ldots,l_k,j_k)\ ;\ \alpha \text{ est une permutation de } (1,\ldots,2k),\ l_i<j_i \text{ pour tous } i\le k\}.$$

En particulier, nous pouvons vérifier que, si $\alpha\in\mathcal{C}_k\cap\mathcal{D}_{2k,k}$, α est aussi un élément de Ω^{2k}. Ainsi, d'après le lemme 2.3.10, nous obtenons

$$\nu(\mathrm{U}_k^-) = \frac{1}{k!N^k}\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^k \sum_{\alpha\in\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k} c(2k,k,\alpha)+\mathrm{O}(2k+1). \tag{2.60}$$

(4) Nous finissons à présent la démonstration de notre théorème avec l'évaluation de la sommation

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k} c(2k,k,\alpha).$$

Un premier pas dans cette direction consiste à remarquer que

$$\mathrm{Card}\left(\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k\right) = \binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2k)!}{2^k}\cdot$$

De plus, nous pouvons vérifier aisément que $\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k$ contient exactement $\frac{(2k)!}{2^k k!}$ classes pour la relation $\sim$ définie avant la proposition 2.3.6. Ainsi, la proposition 2.3.6 implique

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{D}_{2k,k}\cap\mathcal{C}_k} c(2k,k,\alpha) = k!\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{2^k},$$

et ces relations, plus l'équation (2.60), nous donnent

$$\nu(\mathrm{U}_k^-) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)N}\right)^k+\mathrm{O}(2k+1).$$

De plus, si nous appliquons ces relations à l'équation (2.57), nous obtenons

$$\nu\left(\mathrm{R}^2_{1,\ldots,s}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}+\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)N}\right)^k+\mathrm{O}(2k+1).$$

Ceci établit la preuve de l'équation (2.6). □

2.6 Un TCL généralisé pour la fonction de recouvrement multiple

Nous établissons la preuve du théoréme 3.3.1 qui suit en fait la même stratégie que Talagrand (2003*b*), mis à part le fait que nous utilisons nos développements asymptotiques (les équations (2.5) et (2.6)). Nous présentons la preuve ici dans un souci de complétude. Tout d'abord, nous avons besoin d'établir un résultat pour les moments de $\mathrm{R}_{1,\dots,s}$ qui est une conséquence naturelle du théorème 2.1.2.

Proposition 2.6.1. *Si $k \geq 0$, $\beta < 1$ et $s \geq 3$, alors*

$$\nu(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^k) = \frac{a(k)}{\mathrm{N}^{\frac{k}{2}}} + \mathrm{O}(k+1),$$

où $a(k)$ est le $k^{ème}$-moment d'une variable gaussienne centrée et réduite.

Démonstration. Nous utilisons la symétrie entre les sites, qui nous donne

$$\begin{aligned}\nu(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^k) = \nu(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s \mathrm{R}_{1,\dots,s}^{k-1}) = \nu(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s (\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)^{k-1}) + \frac{k-1}{\mathrm{N}} \nu((\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)^{k-2}) \\ + \sum_{l \geq 2} \frac{1}{\mathrm{N}^l} \nu((\epsilon_1 \cdots \epsilon_s)^{(l+1)} (\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)^{k-l-1}), \quad (2.61)\end{aligned}$$

en reécrivant $\mathrm{R}_{1,\dots,s} = \mathrm{R}_{1,\dots,s}^- + \mathrm{N}^{-1}\epsilon_1 \cdots \epsilon_s$ et en faisant le développement du binôme. Cependant, en utilisant le théorème 2.1.2 et l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\frac{1}{\mathrm{N}^l} \nu((\epsilon_1 \cdots \epsilon_s)^{(l+1)} (\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)^{k-l-1}) = \mathrm{O}(k+1),$$

pour $l \geq 2$. Nous écrivons maintenant $\mathrm{R}_{1,\dots,s}^- = \mathrm{R}_{1,\dots,s} - (\epsilon_1 \cdots \epsilon_s)/\mathrm{N}$ et considérons le développement de la quantité $(a+b)^{k-2}$. On observe alors d'une manière similaire que

$$\nu((\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)^{k-2}) = \nu(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^{k-2}) + \mathrm{O}(k-1)$$

et ainsi,

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \nu((\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-)^{k-2}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \nu(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^{k-2}) + \mathrm{O}(k+1),$$

et d'après l'équation (2.61), ceci implique

$$\nu\left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^k\right) = \nu\left(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s \left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right)^{k-1}\right) + \frac{k-1}{\mathrm{N}} \nu\left(\left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right)^{k-2}\right) + \mathrm{O}(k+1). \quad (2.62)$$

Maintenant, nous effectuons un développement de Taylor pour le premier terme du membre de droite de l'équation (2.62). Ceci implique, pour un certain $\xi \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\nu\left(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s \left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right)^{k-1}\right) =& \nu_0\left(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s \left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right)^{k-1}\right) + \nu_0'\left(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s \left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right)^{k-1}\right) \quad (2.63) \\ &+ \frac{1}{2}\nu_\zeta^2\left(\epsilon_1 \cdots \epsilon_s \left(\mathrm{R}_{1,\dots,s}^-\right)^{k-1}\right). \quad (2.64)\end{aligned}$$

À partir de $s \geq 3$, les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (2.63) valent zéro, et d'après le théorème 2.1.2 le terme d'erreur est d'ordre $\mathrm{O}(k+1)$. Alors, nous pouvons conclure que

$$\nu\left(\mathrm{R}^{k}_{1,\dots,s}\right) = \frac{k-1}{\mathrm{N}}\nu\left(\left(\mathrm{R}^{-}_{1,\dots,s}\right)^{k-2}\right) + \mathrm{O}(k+1),$$

et notre démonstration se finit par une récurrence sur k. □

Maintenant, nous prouvons le théorème 3.3.1 :

Démonstration du théorème 3.3.1. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $k(1, \dots, s) \geq 1$. Pour chaque entier naturel $1 \leq v \leq k$ nous considérons alors les entiers naturels $\ell_1(v), \dots, \ell_s(v)$ tels que

$$\prod_{\ell_1<\cdots<\ell_s} \mathrm{R}^{k(\ell_1,\dots,\ell_s)}_{\ell_1,\dots,\ell_s} = \prod_{v\leq k} \mathrm{R}_{\ell_1(v),\dots,\ell_s(v)},$$

et nous posons

$$\mathrm{R}(v) = \mathrm{R}_{\ell_1(v),\dots,\ell_s(v)}, \quad \mathrm{R}^{-}(v) = \mathrm{R}^{-}_{\ell_1(v),\dots,\ell_s(v)}, \quad \epsilon(v) = \epsilon_{\ell_1(v)}\cdots\epsilon_{\ell_s(v)},$$

tels que $\mathrm{R}(v) = \mathrm{R}(v)^{-} + \epsilon(v)/\mathrm{N}$. Maintenant nous utilisons la symétrie entre les sites pour écrire

$$\nu\left(\prod_{\ell_1<\cdots<\ell_s} \mathrm{R}^{k(\ell_1,\dots,\ell_s)}_{\ell_1,\dots,\ell_s}\right) = \nu\left(\prod_{v\leq k}\mathrm{R}(v)\right) = \nu\left(\epsilon(1)\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}(v)\right), \tag{2.65}$$

et on développe le produit $\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}(v)$ de la manière suivante :

$$\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}(v) = \prod_{2\leq v\leq k}\left(\mathrm{R}^{-}(v) + \frac{\epsilon(v)}{\mathrm{N}}\right).$$

Dans chacun des $k-1$ facteurs, nous pouvons choisir entre le terme $\mathrm{R}^{-}(v)$ (que nous notons terme grand) ou le terme $\epsilon(v)/\mathrm{N}$ (le terme petit). Ces $k-1$ choix résultent en 2^{k-1} termes.

Quand nous choisissons le terme "petit" dans au moins deux facteurs la contribution finale est $\mathrm{O}(k+1)$, ce qui est vérifié par la répétition de l'argument de la proposition 2.6.1 et l'inégalité de Hölder. Si nous choisissons le petit terme dans exactement l facteurs, la contribution finale est

$$\mathrm{O}(2l)\mathrm{O}(k-1-l) = \mathrm{O}(k+1)$$

pour $l \geq 2$.

Ainsi, nous avons simplement besoin de considérer les contributions où nous avons choisi le petit terme dans au maximum un facteur, et ceci implique

$$\nu\left(\epsilon(1)\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}(v)\right) = \nu\left(\epsilon(1)\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}^{-}(v)\right) + \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{2\leq v\leq k}\nu\left(\epsilon(1)\epsilon(v)\prod_{u}\mathrm{R}^{-}(u)\right) + \mathrm{O}(k+1),$$

où le produit est pour $2 \leq u \leq k,\ u \neq v$. Comme il existe $k-2$ termes dans le produit $\prod_u \mathrm{R}^-(u)$, et en faisant un autre développement, ceci implique que

$$\nu\left(\epsilon(1)\epsilon(v)\prod_u \mathrm{R}^-(u)\right) = \nu_0\left(\epsilon(1)\epsilon(v)\prod_u \mathrm{R}^-(u)\right) + \mathrm{O}(k-1). \tag{2.66}$$

Cependant, $\nu_0(\epsilon(1)\epsilon(v)\prod_u \mathrm{R}^-(u))$ est nul à moins que $\epsilon(1)\epsilon(v) = 1$, c'est-à-dire $\{1,\ldots,s\} = \{\ell_1(v),\ldots,\ell_s(v)\}$. De plus, l'expression (2.66) est d'ordre $\mathrm{O}(k-1)$ à moins que $v \leq k(1,\ldots,s)$ et ainsi,

$$\nu\left(\epsilon(1)\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}(v)\right) = \nu\left(\epsilon(1)\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}^-(v)\right) + \frac{k(1,\ldots,s)-1}{\mathrm{N}}\nu\left(\prod_u \mathrm{R}^-(u)\right) + \mathrm{O}(k+1).$$

Enfin, en utilisant des développements similaires à ceux de l'équation (2.63), il est facile de voir que

$$\nu\left(\epsilon(1)\prod_{2\leq v\leq k}\mathrm{R}^-(v)\right) = \mathrm{O}(k+1),$$

car $s > 2$.

Ainsi, les équations (2.65) et (2.66) impliquent que

$$\nu\left(\prod_{\ell_1<\cdots<\ell_s}\mathrm{R}_{\ell_1,\ldots,\ell_s}^{k(\ell_1,\ldots,\ell_s)}\right) = \frac{k(1,\ldots,s)-1}{\mathrm{N}}\nu\left(\prod_u \mathrm{R}^-(u)\right) + \mathrm{O}(k+1).$$

Nous pouvons maintenant établir l'affirmation (2.4) par récurrence sur k. □

Nous avons montré dans ce chapitre le théorème central limite pour la fonction de recouvrement multiple définie par Talagrand (2003*b*) pour le modèle SK. Dans le prochain chapitre nous démontrons un théorème central limite pour l'énergie libre du modèle SK localisé avec un champ extérieur.

Chapitre 3

Une version localisé du modèle SK

3.1 Introduction

This paper is concerned with a localized version of the Sherrington-Kirkpatrick model with external field, which can be described in the following way : for $N, d \geq 1$, our space of configurations will be $\Sigma = \Sigma_N = \{-1, 1\}^{C_N}$, where C_N is the finite lattice box $C_N = [-N; N]^d$ in $\mathbb{Z}^d$. For a given configuration $\sigma \in \Sigma_N$, we will consider the Hamiltonian

$$-H_N(\sigma) = \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} q\left(\frac{i-j}{N}\right) g_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j + h\sum_{i\in C_N}\sigma_i, \tag{3.1}$$

where β stands for the inverse of the temperature of the system, $\hat{N} = 2N + 1$, (i, j) is the notation for a pair of sites $i, j \in C_N$ (taken only once), $\left\{g_{(i,j)} : (i, j) \in C_N\right\}$ is a family of IID standard centered Gaussian random variables, and h represents a constant positive external field, under which the spins tend to take the value $+1$. Our localization is represented by the function q, which can be thought of as a smooth frame, and which is only assumed to be defined on $[-1, 1]^d$ such that q^2 is of positive type, so that q^2 is non-negative and invariant by symmetry about the origin. We also assume q^2 is a continuous function, including at its periodic boundary $-1 \equiv 1$. The aim of our article is then to study the limit, when $N \to \infty$, of the Gibbs measure $G_N(\sigma)$ defined on Σ_N by

$$G_N(\sigma) = \frac{e^{-H_N(\sigma)}}{Z_N}, \quad \text{where} \quad Z_N = Z_N(\beta) = \sum_{\sigma\in\Sigma_N} e^{-H_N(\sigma)},$$

and more specifically, we will concentrate on the so-called free energy of the system, defined by :

$$p(\beta) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}[p_N(\beta)] = \text{a.s.} - \lim_{N\to\infty} p_N(\beta), \quad \text{where} \quad p_N(\beta) = \frac{1}{\hat{N}^d}\log(Z_N(\beta)). \tag{3.2}$$

The model described by (3.1) can be considered as a finite range approximation of the mean field SK model, associated with the Hamiltonian

$$-\hat{H}_N(\sigma) = \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} g_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j + h\sum_{i\in C_N}\sigma_i,$$

for which a large amount of information is now available (Guerra & Toninelli 2004, Talagrand 2003*b*). It seems then natural to try to approximate the realistic spin glass system, on which we have very little rigorous knowledge (see however (Stein 1997)), by our localized model (3.1), capturing some of the geometry of the physical spin configuration, but still of a mean-field type in the limit $N \to \infty$. One could then hope to perform an expansion in N in order to quantify the difference between the original SK model and our model (3.1).

In fact, this kind of idea is not new, and goes back at least, in the spin glass context, to (Frolich & Zegarlinski 1987). A version of our model with $h = 0$ has been studied then in (Toubol 1997), and more recently, the Kac limit of finite range spin glasses has been considered in (Guerra & Toninelli 2004, Franz & Toninelli 2004). In these latter references, a slightly different point of view is adopted : the finite range model depends on a given parameter $\gamma > 0$, (which would be $1/N$ in our setting), and this localization parameter is sent to 0 *after* the thermodynamical limit in N is taken. It can be shown then, by some nice and soft interpolation arguments, that in the limit $\gamma \to 0$, the free energy of the localized system is the same as the free energy of the SK model, for any value of the parameter $\beta \geq 0$. Notice that the results contained in (Guerra & Toninelli 2004, Franz & Toninelli 2004) cannot be applied directly to our model, since in our case the limits $\gamma \to 0$ and $N \to \infty$ are taken at the same time. However, some slight modifications of the computations contained in these papers would also show that our quantity $p_N(\beta)$ defined at (3.2) behaves like the free energy of the SK model for large N.

The goal of our paper is then, in a sense, more modest than (Guerra & Toninelli 2004, Franz & Toninelli 2004), since we will only deal with the high temperature region of the model, i.e. small values of β. On the other hand, our scope is to show that the equivalence between the SK model and our localized model still holds, in the thermodynamical limit, for a second order expansion of the free energy, that is in the central limit theorem regime. More specifically, we will show the following limit result : let γ_0 be the L^2-norm of q in $[-1,1]^d$. For $\beta, h > 0$, let also s be the unique solution to the equation

$$s = \mathbf{E}\left[\tanh^2(\beta z\sqrt{s} + h)\right], \tag{3.3}$$

and $\mathrm{SK}(\beta, h)$ be the function

$$\mathrm{SK}(\beta, h) = \beta^2(1-s)^2/4 + \log 2 + \mathbf{E}\left[\log\left[\cosh\left(\beta z\sqrt{s} + h\right)\right]\right], \tag{3.4}$$

which represents the free energy of the SK model in the high temperature region. Set also $p(\beta, h) = \mathrm{SK}(\gamma_0^{1/2}\beta, h)$. Then, under suitable conditions on q, we have

$$(\mathcal{L}) - \lim_{N\to\infty} \hat{N}^{d/2}\left[p_N(\beta) - p(\beta, h)\right] = Y,$$

where Y is a centered Gaussian random variable with variance $\tau = \tau(\beta, h, \gamma_0)$. The announced equivalence, at the CLT level, between the SK model and the localized one, springs then from the fact that $\tau(\beta, h, 1)$ is also the variance of the Gaussian random variable which shows up in the central limit theorem of the SK case (see (Guerra & Toninelli 2002, Tindel 2005)).

Let us say a few words about the method we have used in order to get our result : since we are in the high temperature regime, we are allowed to use a cavity type method in order to compute the limit of the overlap of the localized spin system. This yields then the limit of the free energy in a straightforward manner. It has also been shown in (Tindel 2005) that the stochastic calculus tools developped in (Comets & Neveu 1995) could be adapted to the case of spin glasses with external field. This induces a powerful method for obtaining central limit theorems for the free energy, and interestingly enough, in this context, a dynamical point of view gives some insight on a static stochastic problem. We will elaborate here on this method in order to treat the localized case, by taking advantage systematically of the Fourier decomposition of q.

Our paper is divided as follows : at Section 3.2, we compute the simple limit of the overlap function and of $p_N(\beta)$, recovering the results obtained in (Franz & Toninelli 2004) for the high temmperature regime. At Section 3.3, we derive the announced central limit theorem thanks to stochastic calculus tools.

3.2 Simple limit of the free energy

Recall that we are dealing with the system induced by the Hamiltonian (3.1), and let us define some additional notations about Gibbs averages : let $f : \Sigma_N^n \to \mathbb{R}$ be a function of n configurations, with $n \geq 1$. Then we set

$$\rho(f) = \frac{1}{Z_N^n} \sum_{\sigma^1,\dots,\sigma^n} f(\sigma^1,\dots,\sigma^n) \exp\left(-\sum_{l=1}^n H_N(\sigma^l)\right), \quad \text{and} \quad \nu(f) = \mathbf{E}\left[\rho(f)\right]. \quad (3.5)$$

In the sequel of the paper, we will also write $\partial_u \varphi$ instead of $\partial\varphi/\partial u$ for the derivative of a function φ with respect to a parameter u, and $\bar{p}_N(\beta) = \mathbf{E}[p_N(\beta)]$. With these notations in hand, our strategy in order to get the limit of $p_N(\beta)$ will follow the classical steps of the cavity procedure, namely :

1. Find an expression for $\partial_\beta \bar{p}_N(\beta)$ in terms of an overlap-type function $R^{1,2}$.
2. For a general function $f : \Sigma_N^n \to \mathbb{R}$, find a useful expression for $\partial_v \rho_v(f)$ along a suitable path defined for $v \in [0,1]$, involving a Hamiltonian $H_{N,v}(\sigma)$.
3. Compute $\rho_v(R^{1,2})$ inductively and deduce an expression for $\partial_\beta \bar{p}_N(\beta)$, and then for $\bar{p}_N(\beta)$.

We will start by the first of these steps, for which we will introduce a little more notation : first of all, we assume for the moment the following basic hypothesis on q :

Hypothesis 3.2.1. *The function q is continuous on $[-1,1]^d$.*

In this case, the function $q^2 : [-1,1]^d \to \mathbb{R}_+$ can be decomposed, as a function of $L^2([-1,1]^d)$, into a Fourier series of the form :

$$q^2(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot x}, \quad \text{with} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k^2 < \infty \quad \text{and} \quad \Gamma \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k < \infty. \quad (3.6)$$

Set also $R^{1,2} = \hat{N}^{-d} \sum_{i \in C_N} \sigma_i^1 \sigma_i^2$, and for any $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$R_k^{1,2} = \frac{1}{\hat{N}^d} \sum_{i \in C_N} e^{\frac{\imath \pi i \cdot k}{N}} \sigma_i^1 \sigma_i^2, \quad \text{if } k \neq 0, \quad \text{and} \quad R_0^{1,2} = R^{1,2} - r, \tag{3.7}$$

where r is a positive constant, whose exact value will be determined later on. Eventually, we will denote by q_N the function $q(\cdot/N)$ defined on $[-N;N]^d$, and $\mathbb{Z}_*^d = \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$. Then the following relation holds true :

Proposition 3.2.2. *For all $\beta > 0$, we have*

$$\partial_\beta \bar{p}_N(\beta) = \frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j) \in C_N} q_N^2(i-j) - \frac{\beta}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} \gamma_k \mathbf{E}\left[\rho(R_k^{1,2})\right] - \frac{\beta}{2} \gamma_0 \mathbf{E}\left[\rho(R^{1,2})\right] + \frac{\Gamma}{2\hat{N}^d}.$$

Proof. Set $B(\sigma) = e^{-H_N(\sigma)}$. Then the previous definitions and an elementary Gaussian integration by parts yield (see Talagrand 2003*b*) :

$$\begin{aligned}
\partial_\beta \bar{p}_N(\beta) &= \frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \mathbf{E}\left[\sum_{(i,j) \in C_N} q_N^2(i-j) - \sum_{(i,j) \in C_N} \sum_{\sigma^1, \sigma^2} \frac{q_N^2(i-j) \sigma_i^1 \sigma_j^1 \sigma_i^2 \sigma_j^2 B(\sigma^1) B(\sigma^2)}{Z_N^2} \right] \\
&= \frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \left[\sum_{(i,j) \in C_N} q_N^2(i-j) - \sum_{(i,j) \in C_N} q_N^2(i-j) \mathbf{E}\left[\rho(\sigma_i^1 \sigma_j^1 \sigma_i^2 \sigma_j^2)\right] \right].
\end{aligned}$$

Hence, using the decomposition (3.6) of q^2, we obtain

$$\begin{aligned}
\partial_\beta \bar{p}_N(\beta) &= \frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \mathbf{E}\left[\sum_{(i,j) \in C_N} q_N^2(i-j) - \sum_{(i,j) \in C_N} \rho\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath \pi \frac{i-j}{N} \cdot k} \sigma_i^1 \sigma_j^1 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right) \right] \\
&= \frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \mathbf{E}\Bigg[\sum_{(i,j) \in C_N} q_N^2(i-j) - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\gamma_k}{2} \rho\left(\left| \sum_{i \in C_N} e^{\imath \pi \frac{i}{N} \cdot k} \sigma_i^1 \sigma_i^2 \right|^2 \right) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\gamma_k}{2} \rho\left(\sum_{i \in C_N} \left| e^{\imath \pi \frac{i}{N} \cdot k} \sigma_i^1 \sigma_i^2 \right|^2 \right) \Bigg],
\end{aligned}$$

from which the desired expression is deduced easily.

□

We are now ready to start the second step of the strategy mentioned above.

3.2.1 The cavity method

The cavity method will consist here in suppressing in a continuous way the interactions between a certain site $m \in C_N$ and the remaining spins. This will be done in the following way : set $\hat{C}_N^m = \{i \in C_N; i \neq m\}$. We decompose, for all $\sigma \in \Sigma_N$,

$$-H_N(\sigma) = -H_N^m(\rho_m) + \sigma_m \left(h + g_m(\rho_m)\right),$$

where ρ_m denotes the ordered spin values except for the m-th spin, that is, the $(\hat{N}^d - 1)$-tuple $(\sigma_i; i \in \hat{C}_N^m)$ and we denote

$$g_m(\rho_m) = \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i \in \hat{C}_N^m} q_N(m-i) g_{(m,i)} \sigma_i,$$

and we also use the notation

$$-H_N^m(\rho_m) = \sum_{(i,j) \in \hat{C}_N^m} q_N(i-j) g_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j + h \sum_{i \in \hat{C}_N^m} \sigma_i.$$

This new Hamiltonian is similar but not identical to the Hamiltonian $-H_{N-1}$ on Σ_{N-1}.

The path we will build is now of the following form : consider a collection $\{B_{i,m}(v); i \in \hat{C}_N^m, v \in [0,1]\}$ of independent standard Brownian motions, and $\{X(v); v \in [0,1]\}$ an independent reversed time Brownian motion, all defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Notice that $g_{(i,m)}$ can be seen as the final value $B_{i,m}(1)$ of the Brownian motion $B_{i,m}$, and that X is the solution to a stochastic differential equation of the form

$$X(v) = \eta - \int_0^v \frac{X(s)}{1-s} ds + W(v), \quad v \in [0,1], \tag{3.8}$$

where η is a standard Gaussian random variable and W another Brownian motion, independent of the remainder of the randomness. Notice that, for natational sake, we have written $B_{i,m}$ instead of $B_{(i,m)}$. Set then $\hat{r} = \gamma_0^{1/2} r$ and for $v \in [0,1]$, define

$$-H_{N,v}(\sigma) = -H_N^m(\rho_m) + \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i \in \hat{C}_N^m} q_N(m-i) \sigma_i \sigma_m B_{i,m}(v) + \beta \hat{r}^{1/2} \sum_{i \in \hat{C}_N^m} \sigma_i X(t) + h \sum_{i \in \hat{C}_N^m} \sigma_i.$$

For $f : \Sigma_N^n \to \mathbb{R}$, denote also by $\rho_v(f)$ the associated Gibbs average, defined in a similar way to (3.5), and $\nu_{m,v}(f) = \mathbf{E}[\rho_v(f)]$.

Recall now the following elementary lemma from (Tindel 2005) :

Lemma 3.2.3. *For $k \geq 1$, let $\{B_l; l \leq k\}$ be a collection of independent standard Brownian motions. Let also X be the solution to (3.8), and $\varphi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ be a C^2 function having at most exponential growth together with its first two derivatives. Then, for any $v \in [0,1]$,*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\varphi(B_1(v), \ldots, B_k(v), X(v))\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\varphi(\eta)\right] + \frac{1}{2} \int_0^v \sum_{l=1}^k \mathbf{E}\left[\partial^2_{x_l x_l} \varphi(B_1(s), \ldots, B_k(s), X(s))\right] ds \\
&\qquad - \frac{1}{2} \int_0^v \mathbf{E}\left[\partial^2_{x_{k+1} x_{k+1}} \varphi(B_1(s), \ldots, B_k(s), X(s))\right] ds.
\end{aligned}$$

These preliminary tools yield the following differentiation rule :

Proposition 3.2.4. *For any $f : \Sigma_N^n \to \mathbb{R}$ and $v \in [0,1]$, the derivative of $\nu_{m,v}(f)$ is given by*

$$\partial_v \nu_{m,v}(f) = \beta^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi m\cdot k/N} \Bigg(\sum_{1\le l<l'\le n} \nu_{m,v}\left(f \bar{R}_k^{l,l'} \sigma_m^{l'} \sigma_m^{l}\right) - n\sum_{l=1}^{n} \nu_{m,v}\left(f \bar{R}_k^{l,n+1} \sigma_m^{l} \sigma_m^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2} \nu_{m,v}\left(f \bar{R}_k^{n+1,n+2} \sigma_m^{n+1} \sigma_m^{n+2}\right) \Bigg). \quad (3.9)$$

Proof. This result stems from an easy application of Lemma 3.2.3 to the function

$$\varphi\left(B_{i,m}(v), i \in C_N^m;\, X_m(v)\right) \equiv \rho_{m,v}(f).$$

The computations of the second derivatives of φ are a matter of easy (though cumbersome) calculations, and are left to the reader for sake of conciseness.

□

Now that the variations of $\nu_{m,v}(f)$ have been computed, we can proceed to get some bounds on the overlaps $R_k^{1,2}$.

3.2.2 Bounds on the overlap

Let us start with three lemmas whose proofs follow essentially that of the corresponding result in the cavity method for the standard Sherrington-Kirkpatrick model, and which will be combined with the explicit expression for $\nu_{m,v}$ in Proposition 3.2.4 and a separate calculation of $\nu_{m,v}$ for $v = 0$ to obtain information on the actual expected overlaps, under $\nu = \nu_{m,1}$, i.e. for $v = 1$.

Lemma 3.2.5. *There exist two positive constants $c_{n,q,\beta}$ and $c'_{n,q,\beta}$ that depend only on n, q and β, and are uniformly bounded in β for $\beta \in [0,1]$, such that if f is a positive function on Σ_N^n then for all $m \in C_N$,*

$$\nu_{m,v}(f) \le c_{n,q,\beta}\, \nu(f), \quad (3.10)$$

and

$$|\nu_{m,v}(f) - \nu_{m,0}(f)| \le c'_{n,q,\beta} \beta^2 \nu^{1/2}\left(|f|^2\right) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k \nu^{1/2}\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\right]. \quad (3.11)$$

Proof. See (Talagrand 2003*b*, Propositions 2.4.6 and 2.4.7).

□

For $v = 0$, the expression of $\nu_v(f)$ can be simplified for a large class of functions f on Σ_N.

Lemma 3.2.6. *For fixed $m \in \Sigma_N$, let f be a function on Σ_N^n that does not depend on the values $\sigma_m^1, \sigma_m^2, \ldots, \sigma_m^n$. Then for any subset I of $\{1,\ldots,n\}$ we have*

$$\nu_{m,0}\left(f \prod_{l\in I} \sigma_m^l\right) = \mathbf{E}\left[\tanh(Y)^{|I|}\right] \nu_{m,0}(f),$$

where Y is the Gaussian random variable defined as :

$$Y = \beta z\sqrt{\gamma_0 r} + h,$$

with a standard normal variable z.

Proof. See (Talagrand 2003*b*, Lemma 2.4.4). □

On the other hand, some symmetry properties for $v = 1$ yield the following kind of estimate :

Lemma 3.2.7. *Set*

$$\delta_v \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k \nu_v \left(|R_k^{1,2}|^2\right), \quad \textit{for} \quad v \in [0,1]. \tag{3.12}$$

Then

$$\delta_1 = \gamma_0 \nu \left(\left(R^{1,2} - r\right)\left(\sigma_m^1\sigma_m^2 - r\right)\right) + \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d}\sum_{i\in C_N} \gamma_k e^{\imath\pi i\cdot k/N} \nu\left(\bar{R}_k^{1,2}\sigma_i^1\sigma_i^2\right).$$

Now, in order to exploit Lemma 3.2.6, we must modify the above expression for δ_1 by completing the following two tasks :

(i) estimate the error made by replacing the arguments of $\nu_{i,0}$ by functions that are of the same form as those in Lemma 3.2.6 ;

(ii) estimate the error made by replacing ν by $\nu_{m,0}$ (or $\nu_{i,0}$ as appropriate).

Task (i). Separation of cavity variable from others

It is sufficient to replace $R^{1,2}$ by the same quantity with the m-th term omitted : define

$$R_{-,m}^{1,2} := \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in\hat{C}_N^m} \sigma_i^1\sigma_i^2 = R^{1,2} - \frac{1}{\hat{N}^d}\sigma_m^1\sigma_m^2 = R^{1,2} + O\left(\frac{1}{\hat{N}^d}\right),$$

and similarly let

$$\begin{aligned} R_{k,-,m}^{1,2} &:= \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in\hat{C}_N^m} \sigma_i^1\sigma_i^2 e^{\imath\pi i\cdot k/N} \\ &= R_k^{1,2} - \frac{1}{\hat{N}^d}\sigma_m^1\sigma_m^2 e^{\imath\pi m\cdot k/N} = R_k^{1,2} + O\left(\frac{1}{\hat{N}^d}\right). \end{aligned}$$

Then we have the following relation, whose elementary proof is omitted :

Lemma 3.2.8. *For δ_v defined at (3.12), it holds that :*

$$\begin{aligned} \delta_0 = {} & \gamma_0\nu_{m,0}\left(\left(R_{-,m}^{1,2} - r\right)\left(\sigma_m^1\sigma_m^2 - r\right)\right) \\ & + \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d}\frac{\gamma_k}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N} \nu_{i,0}\left(\bar{R}_{k,-,i}^{1,2}\sigma_i^1\sigma_i^2\right) e^{\imath\pi i\cdot k/N} + O\left(\hat{N}^{-d}\right). \end{aligned}$$

Thanks to a Lemma by Lattala and Guerra, we can now choose r in order to eliminate one of the terms in our overlap calculation δ_0 (at $v = 0$ with separated spins), as an immediate consequence of Lemma 3.2.6.

Lemma 3.2.9. *For any choice of the parameters $\beta, \gamma_0, h > 0$, the equation*

$$r = \mathbf{E}\left[\tanh^2\left(\beta z\sqrt{\gamma_0 r} + h\right)\right] \tag{3.13}$$

has a unique solution $r \in [0,1]$, and we have

$$\nu_{m,0}\left(\left(R^{1,2}_{-,m} - r\right)\left(\sigma^1_m\sigma^2_m - r\right)\right) = 0.$$

Let us take advantage of this relation, and try to write δ_0 in terms of r : going back to the expression in Lemma 3.2.8, we get

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*}\frac{\gamma_k}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N} e^{\imath\pi i\cdot k/N}\nu_{i,0}\left(\bar{R}^{1,2}_{k,-,i}\sigma^1_i\sigma^2_i\right) + O\left(\frac{1}{N^d}\right)\\ &= r\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*}\gamma_k\left(A^1_k + A^2_k + A^3_k\right) + O\left(\frac{1}{N^d}\right),\end{aligned} \tag{3.14}$$

with

$$A^1_k := S_k\,\nu\left(\bar{R}^{1,2}_k\right), \qquad A^2_k := \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N}\nu_{i,0}\left(\bar{R}^{1,2}_{k,-,i} - \bar{R}^{1,2}_k\right)e^{\imath\pi i\cdot k/N}$$
$$A^3_k := \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N}\left[\nu_{i,0}\left(\bar{R}^{1,2}_k\right) - \nu\left(\bar{R}^{1,2}_k\right)\right]e^{\imath\pi i\cdot k/N},$$

where we have set

$$S_k = \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N} e^{\imath\pi i\cdot k/N}. \tag{3.15}$$

We can bound now δ_0 in the following way :

Lemma 3.2.10. *Recall that Γ has been defined at (3.6). Then there exists a constant κ that depends on β and q but is bounded for β bounded such that*

$$|\delta_0| \le \kappa\left(\frac{\Gamma}{N} + \beta^2\nu^{1/2}\left(\left|R^{1,2}_k\right|^2\right)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\nu^{1/2}\left(\left|R^{1,2}_k\right|^2\right)\right]\right). \tag{3.16}$$

Proof. Go back to relation (3.14), and let us bound the terms A^k_1, A^k_2, A^k_3 for $k \in \mathbb{Z}^d$. First of all, the estimation of A^k_1 is controlled by S_k. However,

$$S_k = \frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{j_1=-N}^{N}\cdots\sum_{j_d=-N}^{N}\prod_{l=1}^{d} e^{\imath\pi k_l j_l/N} = \frac{1}{\hat{N}^d}\prod_{l=1}^{d}\left[(-1)^{k_l}\mathbf{1}_{(k_l\neq 0)} + \hat{N}\mathbf{1}_{(k_l=0)}\right],$$

by an elementary argument on sums of geometric sequences. Hence,

$$|S_k| \leq \frac{\kappa}{N^{Z(k)}}, \quad \text{where} \quad Z(k) = \text{number of components of } k \text{ that are non-zero,} \tag{3.17}$$

and thus,

$$\Big| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d_*} \gamma_k A^1_k \Big| = \Big| \nu \left(\bar{R}^{1,2}_k \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d_*} \gamma_k S_k \Big| \leq \frac{\kappa \Gamma}{N}. \tag{3.18}$$

Furthermore, it is easily checked that

$$|A^2_k| \leq \frac{\kappa}{N} \quad \text{and} \quad |A^3_k| \leq \kappa \beta^2 \nu^{1/2} \left(\left| R^{1,2}_k \right|^2 \right) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \gamma_k \nu^{1/2} \left(\left| R^{1,2}_k \right|^2 \right) \right], \tag{3.19}$$

by applying inequality (3.11) in Lemma 3.2.5. Our claim is then proved easily by putting together (3.18) and (3.19).

□

Remark 3.2.11. *In the remainder of the article, κ will stand for a positive constant depending on β and q and that is uniformly bounded in the range of our parameter β ; we will allow κ to change from line to line*

Notice that, for our result on the fluctuations of Z_N, we will need an improved bound on A^1_k. This can be achieved under the following additional condition :

Hypothesis 3.2.12. *Going back to the decomposition (3.6), we assume that there exists an integer $\hat{d} > d/2$ such that, for every $k \in \mathbb{Z}^d_*$ such that $\gamma_k \neq 0$, the number $Z(k)$ of components of k that are non-zero satisfies $Z(k) \geq \hat{d}$.*

Then Lemma 3.2.10 can be enhanced in the following way :

Corollary 3.2.13. *Assume q satsifies Hypothesis 3.2.1 and 3.2.12. Then*

$$|\delta_0| \leq \kappa \left(\frac{\Gamma}{N^{\hat{d}}} + \beta^2 \nu^{1/2} \left(\left| R^{1,2}_k \right|^2 \right) \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \gamma_k \nu^{1/2} \left(\left| R^{1,2}_k \right|^2 \right) \right] \right).$$

Proof. This is trivially checked by going through the computations of Lemma 3.2.10 again, and taking into account (3.17).

□

Task (ii). Difference between the overlaps at $v = 0$ and $v = 1$

We are ready to state and prove the result which completes task (ii).

Lemma 3.2.14. *There exists a constant κ that depends on β and q but is bounded for β bounded, such that*

$$|\delta_1 - \delta_0| \leq +\kappa \beta^2 \Gamma \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \gamma_k \nu \left(\left| R^{1,2}_k \right|^2 \right). \tag{3.20}$$

Proof. We can first write, using Lemma 3.2.5,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*}\gamma_k\left|\frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N}\left[\nu\left(\bar{R}_k^{1,2}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)-\nu_{i,0}\left(\bar{R}_k^{1,2}\sigma_i^1\sigma_i^2\right)\right]e^{\imath\pi i\cdot k/N}\right|$$
$$\leq\kappa\beta^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*}\gamma_k\nu^{1/2}\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\nu^{1/2}\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\right]. \tag{3.21}$$

Similarly we can obtain

$$\gamma_0\left|\nu\left(\left(R^{1,2}-r\right)\left(\sigma_m^1\sigma_m^2-r\right)\right)-\nu_{i,0}\left(\left(R^{1,2}-r\right)\left(\sigma_m^1\sigma_m^2-r\right)\right)\right|$$
$$\leq\gamma_0\kappa\beta^2\nu^{1/2}\left(\left|R_0^{1,2}\right|^2\right)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\nu^{1/2}\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\right]. \tag{3.22}$$

We now get, by putting together (3.21) and (3.22) and applying Jensen's inequality, that

$$|\delta_1-\delta_0|=\kappa\beta^2\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\nu^{1/2}\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\right]^2\leq\kappa\beta^2\Gamma\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\nu\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right),$$

which proves the lemma.

□

Self-averaging overlap limit

We are now in a position to estimate δ_1. We show that for small β, this expected total overlap, which is recentered using the value r, converges to 0 at the speed $1/N$ as long as q is a continuous function.

Proposition 3.2.15. *Let $\beta>0$ and let $r=r(\beta)$ be the solution of (3.13). Let κ be the constant defined in Lemma 3.2.8 and Lemma 3.2.14, i.e. κ is a constant that depends on β and q but is bounded for β bounded. Assume that q satisfies Hypothesis 3.2.1, and that β is so small that $2\kappa\beta^2\Gamma<1$. In that case, we have, for N large enough, with $R_k^{1,2}$ defined by relation (3.7),*

$$0\leq\nu\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\leq\frac{r\Gamma}{(1-2\kappa\beta^2\Gamma)N}.$$

Proof. We have, using (3.16) and (3.20),

$$0\leq\delta_1=\nu\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)\leq|\delta_0-\delta_1|+r|\delta_0|$$
$$\leq 2\kappa\beta^2\Gamma\nu\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)+O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{3.23}$$

where we recall that $O(N^{-1})$ is a function that tends to zero as fast as N^{-1} and that this convergence holds uniformly in all parameters. Moreover, since κ is bounded for β bounded, for β sufficiently small we can make $2\kappa\beta^2\Gamma$ smaller than 1. The result of the proposition follows.

□

Corollary 3.2.16. *Under the same assumptions as in Proposition 3.2.15, but assuming additionally that condition 3.2.12 holds true, then the conclusion of Proposition 3.2.15 holds with N replaced by $N^{\hat{d}}$.*

Proof. This follows trivially from the proof of Proposition 3.2.15 if we modify the argument in order to take into account Corollary 3.2.13.

□

3.2.3 Consequence for the partition function

We can now apply the previous computations in order to get the simple limit of $\bar{p}_N(\beta)$, which recovers, in the high temperature region, the results contained in (Franz & Toninelli 2004).

Theorem 3.2.1. *Under the hypotheses of Proposition 3.2.15, we have*

$$\left|\bar{p}_N(\beta) - SK\left(\gamma_0^{1/2}\beta, h\right)\right| \leq \frac{C(\beta)}{N}, \tag{3.24}$$

where the constant C depends on h, q, and β, and is bounded for $\beta \in [0, \beta_0]$.

Proof. Recall from Proposition 3.2.2 that

$$\partial_\beta \bar{p}_N = \frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) - \frac{\beta}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} \gamma_k \nu\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right) - \frac{\beta}{2}\gamma_0\nu\left(\left|R_0^{1,2}+r\right|^2\right) + \frac{\Gamma}{2\hat{N}^d}. \tag{3.25}$$

The first term on the right-hand side can be handled easily : indeed, we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) &= \frac{1}{\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot i/N} e^{-\imath\pi k\cdot j/N} \\
&= \frac{1}{2\hat{N}^{2d}} \sum_{i\neq j} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot i/N} e^{-\imath\pi k\cdot j/N} \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} \gamma_k |S_k|^2 - \frac{\Gamma}{\hat{N}^d}\right),
\end{aligned}$$

where S_k has been defined at (3.15). Thus,

$$\left|\frac{\beta}{\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) - \frac{\beta\gamma_0}{2}\right| \leq \frac{\kappa}{N},$$

and Proposition 3.2.15 then easily yields, for $\beta < \beta_0$,

$$\left|\partial_\beta \bar{p}_N - \frac{\beta\gamma_0}{2} - \frac{r^2\gamma_0\beta}{2}\right| \leq \frac{\kappa}{N} + \gamma_0 r\beta \left|\nu\left(R_0^{1,2}\right)\right|. \tag{3.26}$$

Furthermore, it can be shown, along the same lines as in Talagrand (2003*b*), that for $\beta < \beta_0$, we have

$$\left|\nu\left(R_0^{1,2}\right)\right| \leq K(\beta, q)/N,$$

where $K(\beta, q)$ is bounded for β bounded. This inequality and (3.26) now imply

$$\left|\partial_\beta \bar{p}_N - \frac{\gamma_0\beta}{2}\left(1 - r^2\right)\right| \leq \frac{\kappa}{N}$$

where κ depends only on β, h, q and is bounded for $\beta \in [0, \beta_0]$. The theorem follows by integrating $\partial_\beta \bar{p}_N$, and using trivial calculations and known facts about the function SK. □

The final result we present in this section shows that while the complete structure of q does not seem to effect the limiting behavior of the partition function beyond the average value γ_0 of q^2, the speed of convergence towards this value may depend heavily on the behavior of q. We show that the speed can be increased to the order $N^{-\hat{d}}$ as long as the hypotheses of Corollary 3.2.16 hold.

Corollary 3.2.17. *Under the hypotheses of Corollary 3.2.16, we have*

$$\left|\bar{p}_N(\beta) - SK\left(\gamma_0^{1/2}\beta, h\right)\right| \leq \frac{\beta C(\beta)}{N^{\hat{d}}}$$

where the constant C depends on h, q, and β, and is bounded for $\beta \in [0, \beta_0]$.

Proof. In the proof of Theorem 3.2.1, some estimates are already of order N^{-d}. For the others, we may use Corollary 3.2.16 instead of Proposition 3.2.15 in all its occurrences. This improves all estimates that were originally of order N^{-1} to the order $N^{-\hat{d}}$, with the exception of the estimation of the first term on the right-hand side of (3.25). But here again, one can easily check that this term is of order $N^{-\hat{d}}$ under the conditions of Corollary 3.2.16.

□

3.3 Fluctuations of the free energy

In this section, we will turn to our main aim, that is the central limit theorem governing the fluctuations of Z_N. More specifically, we will get the following :

Theorem 3.3.1. *For β small enough, $t \in [0, 1]$, if q satisfies Hypothesis 3.2.1 and 3.2.12, then*

$$(\mathcal{L}) - \lim_{N\to\infty} \hat{N}^{d/2}\left[p_N(\beta) - p(\beta, h)\right] = Y,$$

where Y is a centered Gaussian random variable with variance τ, and τ is given by

$$\tau = \hat{\tau} - \frac{\beta^2\gamma_0 r^2}{2}, \qquad \textit{where} \qquad \hat{\tau} = \mathrm{Var}\left[\log(\cosh(\beta\sqrt{\gamma_0 r}z + h))\right] \tag{3.27}$$

with r defined by (3.13), and a standard Gaussian random variable z.

This kind of result is usually obtained by letting all the interactions between spins tend to 0 at once, and this procedure can be somewhat simplified by considering the computations from a stochastic calculus point of view. This leads us to consider a new path $t \mapsto H_{N,t}(\sigma)$ defined for $t \in [0,1]$ by

$$-H_{N,t}(\sigma) = \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} B_{i,j}(t) q_N(i-j)\sigma_i\sigma_j + \beta\hat{r}^{1/2} \sum_{i\in C_N} X_i(t)\sigma_i + \sum_{i\in C_N} h\sigma_i, \tag{3.28}$$

where $\hat{r} = \gamma_0 r$ and $\{B_{i,j}; (i,j) \in C_N\}$ is again a collection of independent standard Brownian motions, and $\{X_i; i \in C_N\}$ is a familly of independent reversed time Brownian motion, which can be seen as the solution to some stochastic differential equations of the form (3.8), for a familly $\{\eta_i; i \in C_N\}$ (resp. $\{W_i; i \in C_N\}$) of standard Gaussian random variables (resp. of independent Brownian motions). Here again, we will assume that all these objects are defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Notice that, in order to spare notations, we have called this modified Hamiltonian $H_{N,t}$ again, like in Section 3.2, hoping that this won't lead to any confusion. We will also denote by $Z_N(t)$ and $\rho_t(f)$ the partition function and the Gibbs average associated with $H_{N,t}$. Eventually, for $t \in [0,1]$, we define

$$p_{\beta,h,t} = \frac{\beta^2\gamma_0 t}{4}(1-r)^2 + \log(2) + \mathbf{E}\left[\log(\cosh(\beta\sqrt{\gamma_0 r}z + h))\right],$$

and we observe that $p_{\beta,h,1} = p(\beta,h)$. Once this path has been defined, the strategy which leads to Theorem 3.3.1 can be summarized as follows : apply Itô's formula in order to :

1. Compute the variations of $t \mapsto e^{-H_{N,t}(\sigma)}$.
2. Get an equation for the evolution of $Y_N(t) \equiv \hat{N}^{d/2}[p_N(\beta) - p_{\beta,h,t}]$.
3. Find a limit for $\mathbf{E}[e^{iuY_N(t)}]$ for any $u \in \mathbb{R}$.

We will detail now this global strategy.

3.3.1 Preliminary computations

Let us first study the dynamics of $t \mapsto e^{-H_{N,t}(\sigma)}$:

Proposition 3.3.1. *For $t \in [0,1]$ and $\sigma \in \Sigma_N$, we have*

$$e^{-H_{N,t}(\sigma)} = \exp\left(\sum_{i\in C_N} \sigma_i(\beta\hat{r}^{1/2}\eta_i + h)\right) + F_N^1(t) + F_N^2(t),$$

with

$$\begin{aligned} F_N^1(t) &= \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N(i-j)\sigma_i\sigma_j \int_0^t e^{-H_{N,s}(\sigma)} dB_{i,j}(s) \\ &\quad +\beta\hat{r}^{1/2} \sum_{i\in C_N} \sigma_i \int_0^t e^{-H_{N,s}(\sigma)} dW_i(s), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} F_N^2(t) &= -\beta\hat{r}^{1/2} \sum_{i\in C_N} \sigma_i \int_0^t e^{-H_{N,s}(\sigma)} \frac{X_i}{1-s} ds \\ &\quad +\frac{\beta^2}{2} \left(\frac{1}{\hat{N}^d} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) + \hat{r}\hat{N}^d \right) \int_0^t e^{-H_{N,s}(\sigma)} ds. \end{aligned}$$

Proof. The exponential function being a C^2 function with a nicely controlled growth, we can apply Ito's formula and we obtain

$$e^{-H_{N,t}(\sigma)} = e^{-H_{N,0}(\sigma)} - \int_0^t e^{-H_{N,s}(\sigma)} dH_{N,s}(\sigma) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-H_{N,s}(\sigma)} d\langle H_{N,\cdot}\rangle_s,$$

where $\langle M\rangle_t$ denotes the quadratic variation process of a semi-martingale M. Now, we can evaluate the quantity $\langle H_{N,\cdot}\rangle_s$, since all of the $B_{i,j}$, W_i are independent and using the fact that any finite variation process have a null quadratic variation. We get

$$\begin{aligned} \langle H_{N,\cdot}\rangle_t &= \frac{\beta^2}{\hat{N}^d} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j)(\sigma_i\sigma_j)^2 t + \beta^2\hat{r} \sum_{i\in C_N} \sigma_i^2 t \\ &= \frac{\beta^2}{\hat{N}^d} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) t + \beta^2\hat{r}\hat{N}^d t, \end{aligned}$$

from which our claim is easily shown.

□

We will turn now to the fluctuations of $p_N(\beta)$. Namely set, for $t \in [0,1]$,

$$Y_N(t) = \hat{N}^{d/2} \left(\frac{1}{\hat{N}^d} \log(Z_N(t)) - p_{\beta,h,t} \right), \tag{3.29}$$

and define also the function $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$\Phi(x) = \log(\cosh(\beta\hat{r}^{1/2}x + h)).$$

Then the semi-martingale Y_N can be decomposed in the following way :

Proposition 3.3.2. *Recall that* $\Gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k$. *Then, for* $t \in [0,1]$, $Y_N(t)$ *satisfies :*

$$Y_N(t) = U_N + \sum_{l\leq 2} M_{l,N}(t) - (V_{1,N}(t) - V_{2,N}(t)) + V_{3,N}(t),$$

where the random variable U_N *and the processes* $M_{l,N}$ *and* $V_{k,N}$ *are defined by :*

$$\begin{aligned}
U_N &= \hat{N}^{d/2}\left(\frac{1}{\hat{N}^d}\sum_{i\in C_N}\Phi(\eta_i) - \mathbf{E}\Phi(z)\right)\\
M_{1,N}(t) &= \frac{\beta}{\hat{N}^d}\sum_{(i,j)\in C_N} q_N(i-j)\int_0^t \rho_s(\sigma_i\sigma_j)dB_{i,j}(s)\\
M_{2,N}(t) &= \frac{\beta\hat{r}^{1/2}}{\hat{N}^{d/2}}\sum_{i\in C_N}\int_0^t \rho_s(\sigma_i)dW_i(s)\\
V_{1,N}(t) &= \frac{\beta\hat{r}^{1/2}}{\hat{N}^{d/2}}\sum_{i\in C_N}\int_0^t \rho_s(\sigma_i)\frac{X_i(s)}{1-s}ds\\
V_{2,N}(t) &= \frac{\beta^2\hat{r}}{\hat{N}^{d/2}}\sum_{i\in C_N}\int_0^t \rho_s(1-\sigma_i^1\sigma_i^2)ds\\
V_{3,N}(t) &= \left[\frac{\Gamma}{\hat{N}^{d/2}} + \frac{2}{\hat{N}^{3d/2}}\sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) - \gamma_0\hat{N}^{d/2}\right]\frac{\beta^2 t}{4}\\
&\quad - \frac{\hat{N}^{d/2}\beta^2}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\int_0^t \rho_s\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)ds.
\end{aligned}$$

Proof. Notice that $Z_N(t)$ is almost surely a strictly positive random variable. Thus, Itô's formula can be applied to $\log(Z_N(t))$, and we obtain

$$\log(Z_N(t)) = \log(Z_N(0)) + \int_0^t \frac{dZ_N(s)}{Z_N(s)} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\langle Z_N\rangle_s}{Z_N^2(s)}. \tag{3.30}$$

The first two terms in the right hand side of (3.30) are easily computed. Indeed, it is easily checked that

$$\log(Z_N(0)) = \hat{N}^d\log 2 + \sum_{i\in C_N}\log[\cosh(\beta\hat{r}^{1/2}\eta_i + h)]. \tag{3.31}$$

Furthermore, invoking the fact that $Z_N(t) = \sum_{\sigma\in\Sigma_N} e^{-H_{N,t}(\sigma)}$ and Proposition 3.3.1, we have

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dZ_N(s)}{Z_N(s)} &= \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}}\sum_{(i,j)\in C_N} q_N(i-j)\int_0^t \rho_s(\sigma_i\sigma_j)dB_{i,j}(s) + \beta\hat{r}^{1/2}\sum_{i\in C_N}\int_0^t \rho_s(\sigma_i)dW_i(s)\\
&\quad - \beta\hat{r}^{1/2}\sum_{i\in C_N}\int_0^t \rho_s(\sigma_i)\frac{X_i(s)}{1-s}ds + \left(\frac{\beta^2}{2\hat{N}^d}\sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) + \frac{\beta^2\hat{r}\hat{N}^d}{2}\right)t.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Thus, putting together (3.30), (3.31) and (3.32), we have obtained that

$$Y_N(t) = U_N + M_{1,N}(t) + M_{2,N}(t) - V_{1,N}(t) + \tilde{V}_{2,N}(t) - \frac{1}{2\hat{N}^{d/2}} \int_0^t \frac{d\langle Z_N \rangle_s}{Z_N^2(s)}, \tag{3.33}$$

where

$$\tilde{V}_{2,N}(t) = \left(\frac{\beta^2}{2\hat{N}^{3d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) + \frac{\beta^2 \hat{r} \hat{N}^{d/2}}{2} \right) t - \frac{\beta^2 \gamma_0 \hat{N}^{d/2} t}{4} (1-r)^2 .$$

Let us compute now the term $d\langle Z_N \rangle_s / Z_N^2(s)$: according to Proposition 3.3.1, $Z_N(t)$ is a continous semi-martingale, whose martingale part is

$$\begin{aligned} \hat{M}_N(t) &= \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{\sigma\in\Sigma_N} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N(i-j)\sigma_i\sigma_j \int_0^t e^{-H_N(s)} dB_{i,j}(s) \\ &\quad + \beta \hat{r}^{1/2} \sum_{\sigma\in\Sigma_N} \sum_{i\in C_N} \sigma_i \int_0^t e^{-H_N(s)} dW_i(s). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{Z_N^2(s)} d\langle Z_N \rangle_s &= \int_0^t \frac{1}{Z_N^2(s)} d\langle \hat{M}_N \rangle_s \\ &= \beta^2 \hat{r} \sum_{i\in C_N} \int_0^t \rho_s(\sigma_i^1 \sigma_i^2) ds + \frac{\beta^2}{\hat{N}^d} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) \int_0^t \rho_s \left(\sigma_i^1 \sigma_j^1 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Recall now that $q^2(x)$ can be decomposed into $q^2(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot x}$. Thus,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\langle Z_N \rangle_s}{Z_N^2(s)} = \frac{\beta^2}{\hat{N}^d} \sum_{(i,j)\in C_N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot(i-j)/N} \int_0^t \rho_s \left(\sigma_i^1 \sigma_j^1 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \right) ds \\ + \beta^2 \hat{r} \sum_{i\in C_N} \int_0^t \rho_s(\sigma_i^1 \sigma_i^2) ds. \end{aligned}$$

In order to simplify this last expression, we will use the elementary identity

$$\left| \sum_{i\in C_N} z_i \right|^2 = \sum_{i\in C_N} |z_i|^2 + 2 \sum_{(i,j)\in C_N} z_i \overline{z}_j, \tag{3.34}$$

valid for any familly of complex numbers, and applied here to $z_i = e^{\imath\pi k\cdot i/N} \sigma_i^1 \sigma_i^2$. Recalling furthermore the definition (3.7) of $R_k^{1,2}$, we end up with

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\langle Z_N \rangle_s}{Z_N^2(s)} = \frac{\hat{N}^d \beta^2}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d} \gamma_k \int_0^t \rho_s \left(\left| R_k^{1,2} \right|^2 \right) ds - \frac{\beta^2 \Gamma t}{2} \\ + \frac{\beta^2 \gamma_0 \hat{N}^d}{2} \int_0^t \rho_s \left(\left(R^{1,2} \right)^2 \right) ds + \beta^2 \hat{N}^d \hat{r} \int_0^t \rho_s(R^{1,2}) ds. \end{aligned}$$

Let us introduce now artificially the quantity $R_0^{1,2}$, by writting $(R^{1,2})^2 = (R_0^{1,2})^2 + 2rR_0^{1,2} + r^2$. This gives

$$\int_0^t \frac{d\langle Z_N\rangle_s}{Z_N^2(s)} = \frac{\hat{N}^d\beta^2}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\int_0^t \rho_s\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)ds - \frac{\beta^2\Gamma t}{2} - \frac{\beta^2\hat{N}^d\gamma_0 r^2 t}{2} + 2\beta^2\hat{N}^d\hat{r}\int_0^t \rho_s(R^{1,2})ds. \quad (3.35)$$

Similarly to (Tindel 2005), let us notice that, since $X_i(s) \sim \mathcal{N}(0, 1-s)$, a simple Gaussian integration by parts yields

$$\mathbf{E}\left[\rho_s(\sigma_i)\frac{X_i(s)}{1-s}\right] = \mathbf{E}\left[\partial_{X_i(s)}\rho_s(\sigma_i)\right] = \beta\hat{r}^{1/2}\mathbf{E}\left[\rho_s(1-\sigma_i^1\sigma_i^2)\right]. \quad (3.36)$$

This elementary consideration will induce us to add and substract $\frac{\beta^2\hat{r}}{\hat{N}^{d/2}}\sum_i \rho_s(1-\sigma_i^1\sigma_i^2)$ to the expression (3.33). By plugging moreover (3.35), we get

$$Y_N(t) = U_N + M_{1,N}(t) + M_{2,N}(t) - (V_{1,N}(t) - V_{2,N}(t)) + \hat{V}_{3,N}(t), \quad (3.37)$$

where

$$\begin{aligned}\hat{V}_{3,N}(t) = &-\frac{\beta^2\hat{r}}{\hat{N}^{d/2}}\sum_{i\in C_N}\int_0^t \rho_s(1-\sigma_i^1\sigma_i^2)ds + \frac{\beta^2}{2\hat{N}^{3d/2}}\sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j)t \\ &+ \frac{\beta^2\hat{r}}{2}\hat{N}^{d/2}t - \frac{\hat{N}^{d/2}\beta^2}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\int_0^t \rho_s\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)ds + \frac{\beta^2\Gamma t}{4\hat{N}^{d/2}} \\ &+ \frac{\beta^2\hat{N}^{d/2}\gamma_0 r^2 t}{4} - \beta^2\hat{N}^{d/2}\hat{r}\int_0^t \rho_s(R^{1,2})ds - \frac{\beta^2\gamma_0\hat{N}^{d/2}t}{4}(1-r)^2.\end{aligned}$$

This last expression can be simplified a little to give

$$\hat{V}_{3,N}(t) = \left[\frac{\Gamma}{\hat{N}^{d/2}} + \frac{2}{\hat{N}^{3d/2}}\sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) - \gamma_0\hat{N}^{d/2}\right]\frac{\beta^2 t}{4} - \frac{\hat{N}^{d/2}\beta^2}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_k\int_0^t \rho_s\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right)ds,$$

that is $\hat{V}_{3,N}(t) = V_{3,N}(t)$. By reporting this equality in (3.37), the proof is now complete. □

The last preliminary result we will need in order to establish our CLT is a self-averaging result for $R_k^{1,2}$ under the measure ρ_t at a fixed value of the parameter $t \in [0,1]$.

Proposition 3.3.3. *Under the hypotheses of Corollary 3.2.16, let $t \in [0,1]$. Then*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k \mathbf{E}\left[\rho_t(|R_k^{1,2}|^2)\right] = O\left(\frac{1}{N^{\hat{d}}}\right), \tag{3.38}$$

for $\hat{d} > d/2$, uniformly in t.

Proof. This is an easy elaboration of the computations leading to Proposition 3.2.15, by considerering the path $v \in [0,t] \mapsto H_{N,t,v}(\sigma)$ defined by

$$-H_{N,t,v}(\sigma) = -H_{N,t}^m(\sigma) + \frac{\beta}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i\in C_N^m} B_{i,m}(v) q_N(i-m)\sigma_i\sigma_m + \beta\hat{r}^{1/2} X_m(v)\sigma_m + h\sigma_m,$$

with obvious notations.

□

3.3.2 Proof of Theorem 3.3.1

For an arbitrary $u \in \mathbb{R}$, we will try to control $\Phi_{N,u}(t) \equiv \mathbf{E}[e^{\imath u Y_N(t)}]$. To this purpose, we will apply Itô's formula to the complex valued C_b^2 function $x \mapsto e^{\imath u x}$. We obtain, for any $t \in [0,1]$,

$$e^{\imath u Y_N(t)} = D_{1,N} + \sum_{m=2}^{8} D_{m,N}(t),$$

where

$$\begin{aligned}
D_{1,N} &= e^{\imath u U_N} \\
D_{2,N}(t) &= \frac{\imath u\beta}{\hat{N}^d} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N(i-j) \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(\sigma_i\sigma_j) dB_{i,j} \\
D_{3,N}(t) &= \frac{\imath u\beta\hat{r}^{1/2}}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i\in C_N} \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(\sigma_i) dW_i \\
D_{4,N}(t) &= -\frac{\imath u\beta\hat{r}^{1/2}}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i\in C_N} \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(\sigma_i) \frac{X_i(s)}{1-s} ds \\
D_{5,N}(t) &= \frac{\imath u\beta^2\hat{r}}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i\in C_N} \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(1-\sigma_i^1\sigma_i^2) ds,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
D_{6,N}(t) = \frac{\imath u\beta^2}{4} \left[\frac{\Gamma}{\hat{N}^{d/2}} + \frac{2}{\hat{N}^{3d/2}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) - \gamma_0\hat{N}^{d/2}\right] \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} ds \\
- \frac{\imath u\hat{N}^{d/2}\beta^2}{4} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s\left(\left|R_k^{1,2}\right|^2\right) ds.
\end{aligned}$$

The terms $D_{7,N}(t)$ and $D_{8,N}(t)$are the ones associated with the quadratic variation process of $Y_N(t)$, that is :

$$\begin{aligned} D_{7,N}(t) &= -\frac{u^2\beta^2}{2\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(\sigma_i^1\sigma_j^1\sigma_i^2\sigma_j^2) ds \\ &= -\frac{u^2\beta^2}{2\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k e^{\imath\pi k\cdot(i-j)/N} \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(\sigma_i^1\sigma_j^1\sigma_i^2\sigma_j^2) ds \\ D_{8,N}(t) &= -\frac{u^2\beta^2\hat{r}}{2\hat{N}^{d}} \sum_{i\in C_N} \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(\sigma_i^1\sigma_i^2) ds = -\frac{u^2\beta^2\hat{r}}{2} \int_0^t e^{\imath u Y_N(s)} \rho_s(R^{1,2}) ds. \end{aligned}$$

Let us find some estimates for the expected value of all the terms we have obtained in this decomposition. First of all, the usual central limit theorem for IID random variables yields

$$\mathbf{E}[D_{1,N}(t)] = e^{-\hat{\tau}^2 u^2/2} + O\left(\frac{1}{N^{d/2}}\right), \tag{3.39}$$

where $\hat{\tau}$ is defined at (3.27). Furthermore, the terms $D_{2,N}(t)$ and $D_{3,N}(t)$ are obviously of zero mean.

In order to control $D_{4,N}(t)$, let us perform again the Gausssian integration by parts (3.36), which can be read here as

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[D_{4,N}(t)] &= -\frac{\imath u\beta\hat{r}^{1/2}}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i\in C_N} \int_0^t \mathbf{E}\left[\partial_{X_i(s)}(e^{\imath u Y_N(s)}\rho_s(\sigma_i))\right] ds \\ &= \frac{u^2\beta\hat{r}^{1/2}}{\hat{N}^{d/2}} \sum_{i\in C_N} \int_0^t \mathbf{E}\left[\partial_{X_i(s)}(Y_N(s)) e^{\imath u Y_N(s)}\rho_s(\sigma_i)\right] ds - \mathbf{E}[D_{5,N}(t)]. \end{aligned}$$

Furthermore,

$$\partial_{X_i(s)}(Y_N(s)) = \frac{\partial_{X_i(s)}(Z_N(s))}{N^{d/2} Z_N(s)} = \frac{\beta\hat{r}^{1/2}}{N^{d/2}} \rho_s(\sigma_i),$$

and therefore, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[D_{4,N}(t) + D_{5,N}(t)] &= u^2\beta^2\hat{r} \int_0^t \mathbf{E}\left[e^{\imath u Y_N(s)}\rho_s(R^{1,2})\right] ds \\ &= u^2\beta^2\gamma_0 r^2 \int_0^t \Phi_{N,u}(s) ds + O\left(\frac{1}{N^{\hat{d}}}\right), \end{aligned} \tag{3.40}$$

owing to Proposition 3.3.3.

Let us turn now to the estimation of $D_{6,N}(t)$: notice that, under Hypothesis 3.2.1 and 3.2.12, it is easily checked that

$$\left| \frac{1}{\hat{N}^{2d}} \sum_{(i,j)\in C_N} q_N^2(i-j) - \frac{\gamma_0}{2} \right| = O\left(\frac{1}{\hat{N}^{\hat{d}}}\right),$$

which together with a direct application of Proposition 3.3.3, shows that

$$\mathbf{E}[D_{6,N}(t)] = O\left(\frac{1}{\hat{N}^{\epsilon}}\right),$$

where $\epsilon = \hat{d} - d/2$.

As far as $D_{7,N}(t)$ is concerned, notice that by relation (3.34), we have

$$\begin{aligned} D_{7,N}(t) = &-\frac{u^2\beta^2}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}_*^d}\gamma_k\int_0^t e^{\imath u Y_N(s)}\rho_s\left(|R_k^{1,2}|^2\right)ds \\ &-\frac{u^2\beta^2\gamma_0}{4}\int_0^t e^{\imath u Y_N(s)}\rho_s\left(|R^{1,2}|^2\right)ds + \frac{u^2\beta^2\Gamma}{4\hat{N}^d}\int_0^t e^{\imath u Y_N(s)}ds, \end{aligned} \tag{3.41}$$

and thanks to proposition 3.3.3, we get

$$D_{7,N}(t) = -\frac{u^2\beta^2\gamma_0 r^2}{4}\int_0^t e^{\imath u Y_N(s)}ds + O\left(\frac{1}{N^{\hat{d}}}\right), \tag{3.42}$$

and thus

$$\mathbf{E}[D_{7,N}(t)] = -\frac{u^2\beta^2\gamma_0 r^2}{4}\int_0^t \Phi_{N,u}(s)ds + O\left(\frac{1}{N^{\hat{d}}}\right).$$

Eventually, in a similar way we have

$$\mathbf{E}\left[D_{8,N}(t)\right] = -\frac{u^2\beta^2\gamma_0 r^2}{2}\int_0^t \Phi_{N,u}(s)ds + O\left(\frac{1}{\hat{N}^{\hat{d}}}\right).$$

Putting together the previous estimates on $\mathbf{E}[D_{1,N}(t)], \ldots, \mathbf{E}[D_{8,N}(t)]$, we have finally :

$$\psi_{N,u}(t) = e^{-\frac{\nu^2u^2}{2}} + \frac{(u\beta\sqrt{\gamma_0}r)^2}{4}\int_0^t \psi_{N,u}(s)ds + \hat{R}_{N,u}(t),$$

with

$$\left|\hat{R}_{N,u}(t)\right| \leq \frac{\kappa}{N^{\epsilon}},$$

which ends the proof by a Gronwall type argument.

□

Acknowledgement : We would like to thank Frederi Viens for letting us take advantage of some old computations for the simple limit of the free energy of the localized model.

Chapitre 4

Croissance d'un polymère

4.1 Introduction

This paper is concerned with a model of one-dimensional directed Brownian polymer in a Gaussian random environment which can be briefly described as follows : the polymer itself will be simply modelized by a Brownian motion $b = \{b_t; t \geq 0\}$, defined on a complete filtered probability space $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (P_b^x)_{x\in\mathbb{R}})$, where P_b^x stands for the Wiener measure starting from the initial condition x. The corresponding expected value will be denoted by E_b^x, or simply by E_b when $x = 0$.

The random environment will be represented by a centered Gaussian landscape W indexed by $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, defined on another independent complete probability space $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Denoting by $\mathbf{E}$ the expected value with respect to $\mathbf{P}$, the covariance structure of W is given by

$$\mathbf{E}\left[W(t,x)W(s,y)\right] = \left[t \wedge s\right] Q(x-y), \tag{4.1}$$

for a given homogeneous covariance function $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying some growth and regularity conditions that will be specified later on. In particular, the function $t \mapsto [Q(0)]^{-1/2}W(t,x)$ will be a standard Brownian motion for any fixed $x \in \mathbb{R}$, and for every fixed $t \in \mathbb{R}_+$, the process $x \mapsto t^{-1/2}W(t,x)$ is a homogeneous Gaussian field on $\mathbb{R}$ with covariance function Q. Notice that the homogeneity assumption is made here for sake of readability, but could be weakened for almost all the results we will show. Nevertheless, we have chosen to present this paper using only homogeneous landscapes W. The interested reader can consult (Florescu & Viens 2005) for the types of tools needed for such generalizations.

Once b and W are defined, the polymer measure itself can be described as follows : for any $t > 0$, the energy of a given path (or configuration) b on $[0,t]$ will be given by the *Hamiltonian*

$$-H_t(b) = \int_0^t W(ds, b_s). \tag{4.2}$$

Notice that a completely rigorous meaning for this integral will be given in the next section, but for the moment, notice that for any fixed path b, $H_t(b)$ is a centered Gaussian random variable with variance $tQ(0)$. Based on this Hamiltonian, for any $x \in \mathbb{R}$, and a

given constant β (interpreted as the inverse of the temperature of the system), we define our (random) polymer measure G_t^x (with $G_t := G_t^0$) as follows :

$$dG_t^x(b) = \frac{e^{-\beta H_t(b)}}{Z_t^x} dP_b^x(b), \quad \text{with} \quad Z_t^x = E_b^x \left[e^{-\beta H_t(b)} \right]. \tag{4.3}$$

Notice that, after the early results of the Mathematical Physics literature (see (Derrida & Spohn 1988), (Imbrie & Spencer 1988)), links between martingale theory and directed polymers in random environments have been established in (Bolthausen 1989), (Albeverio & Zhou 1996), and over the last few years, several papers have shed some light on different types of polymer models : the case of random walks in discrete potential is treated for instance in (Carmona & Hu 2002), the case of Gaussian random walks in (Méjane 2004), (Petermann 2000), and the case of Brownian polymers in a Poisson potential is considered in (Comets & Yoshida 2005). On the other hand, we have undertaken in (Rovira & Tindel 2005) the study of the polymer measure G_t defined by (4.3). This latter model, which is believed to behave similarly to the other directed polymers mentioned above, has at least one advantage, from our point of view : it can be tackled with a wide variety of methods. Our hope is then to exploit all the tools available in this context (scaling invariances for both b and W, stochastic analysis, Gaussian tools, relationship with Lyapunov exponents for stochastic PDEs) in order to get a rather complete description of the asymptotic behavior of the measure G_t.

In the present article, we will illustrate this point of view on the topic by giving two types of results on the asymptotic behavior of our model. The first one concerns the limiting behavior of the partition function : namely, we will see at Proposition 4.2.1 that $\frac{1}{t}\log(Z_t^x)$ converges almost surely to a quantity $p(\beta)$, usually called the free energy of the system. In the so-called weak disorder regime of the polymer model, in which the medium W has no real influence on the polymer b (see e.g. (Comets & Yoshida 2005) for a general result in that direction), $p(\beta)$ is equal to $[Q(0)\beta^2]/2$, which coincides with the annealed free energy. On the other hand, in the strong disorder regime, one gets the strict inequality $p(\beta) < [Q(0)\beta^2]/2$, and any further sharp information on the behavior of $\beta \mapsto p(\beta)$ may have some implication on the description of the asymptotic behavior of the polymer measure.

Some examples of weak and strong disorder are given in (Rovira & Tindel 2005), and the free energy of some of the related models mentioned above are also deeply investigated in (Albeverio & Zhou 1996), (Bolthausen 1989), (Carmona & Hu 2002), (Comets & Yoshida 2005), to cite just a sample of relevant references. In this paper, we will use some methods inspired by the study of Lyapunov exponents for stochastic PDEs (see (Carmona & Viens 1998), (Viens & Tindel 2002) and mostly (Florescu & Viens 2005)) in order to get some non-trivial bounds on $p(\beta)$ for large β, that is in the low temperature regime. These results will be obtained in terms of the local regularity of Q in a neighborhood of 0. Namely, assuming some upper and lower bounds on Q of the form

$$c_0|x|^{2H} \leq Q(0) - Q(x) \leq c_1|x|^{2H}, \quad \text{for all } x \in [0, r_0], \tag{4.4}$$

for a given exponent $H \in (0, 1]$ and $r_0 > 0$, we get the following conclusions :

1. If $H \in [1/2, 1]$, we have for some constants C_0 and C_1 depending only on Q, for all $\beta \geq 1$,
$$C_0 \beta^{4/3} \leq p(\beta) \leq C_1 \beta^{2-2H/(3H+1)}.$$
2. If $H \in (0, 1/2]$, we have for some constants β_Q, C_0', and C_1' depending only on Q, for all $\beta \geq \beta_Q$,
$$C_0' \beta^{2/(1+H)} \leq p(\beta) \leq C_1' \beta^{2-2H/(3H+1)}.$$

Condition (4.4) is equivalent to assuming that W has a specific almost-sure modulus of continuity in space, of order $|x|^H \log^{1/2}(1/|x|)$, i.e. barely failing to be H-Hölder continuous (see (Tindel, Tudor & Viens 2004) for details.) In the case $H \in [1/2, 1]$, the gap between the two estimates decreases as H increases to 1; for $H = 1/2$, we get bounds with the powers of β equal to 4/3 and 8/5; and for $H = 1$, the bounds are 4/3 and 3/2. It should be noted that the case $H = 1/2$ is our least sharp result, while the case $H = 1$ yields the lowest power of β, and one should not expect lower powers for any potential W since even if W is so smooth that it is C^∞ in space : indeed, unless W is highly degenerate, the lower bound in (4.4) should hold with $H = 1$, while the upper bound will automatically be satisfied with $H = 1$. The case of small H is more interesting. Indeed, we can rewrite the lower and upper bounds above as

$$C_0' \beta^{2-2H+F(H)} \leq p(\beta) \leq C_1' \beta^{2-2H+G(H)}$$

where the functions F and G satisfy, for x near 0 :

$$F(x) = 2x^2 + O\left(x^3\right);$$
$$G(x) = 6x^2 + O\left(x^3\right).$$

We therefore see that the asymptotic β^{2-2H} is quite sharp for small H, but that the second order term in the expansion of the power of β for small H, while bounded, is always positive. Notice that some sharper results will be obtained in case of a logarithmic spatial regularity for W.

The second type of result that will be addressed here deals with the wandering exponent α (this exponent is sometimes also denoted by ξ, see e.g. (Comets & Yoshida 2005, Fisher 1991)), which measures the growth of the polymer when t tends to ∞, and could be defined informally by the fact that, under the measure G_t, $\sup_{s \leq t} |b_s|$ should behave like t^α for large times t. This kind of exponent has been studied in different contexts in (Comets & Yoshida 2005), (Méjane 2004), (Petermann 2000), (Piza 1997) and (Wüthrich 1998), yielding the conclusion that, for a wide number of models in dimension one, we should have $3/5 \leq \alpha \leq 3/4$, the true exponent conjectured by the Physicists being $\alpha = 2/3$. In this paper, we will show that, for our model, we have $\alpha \geq 3/5$, and more specifically, that for any $\beta > 0$ and any $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left[\frac{1}{t^{\frac{3}{5}-\varepsilon}} \langle \sup_{s \leq t} |b_s| \rangle_t \geq 1\right] = 1 \tag{4.5}$$

where $\langle \cdot \rangle_t$ denotes expectation with respect to the polymer measure $dG_t^x(b)$. This result follows the steps of Peterman's work in (Petermann 2000), where the same kind of growth

bound has been established for a random walk in a Gaussian potential, and our proof will also be inspired by this latter reference. Notice however that we have been able to extend Petermann's result to a wider class of environments : indeed the relation (4.5) will be obtained as soon as Q satisfies a mild assumption on its decay at infinity, that is

$$Q(x) = O\Big(\frac{1}{|x|^{3+\theta}}\Big), \quad \text{as} \quad x \to \pm\infty, \tag{4.6}$$

while (Petermann 2000) assumed an exponential decay for Q. On the other hand, many arguments have to be changed in order to pass from the random walk to the Brownian case, and (Petermann 2000) is an unpublished work. We have thus chosen to include most of the computations in our proof, for sake of readability. Notice also that the two hypotheses (4.4) and (4.6) are quite different in their nature, and one could hope that combining both conditions on the regularity at 0 and on the decay of Q at ∞, we could get some sharper results on the asymptotic behavior of G_t. We plan to report on this strategy in a subsequent communication.

4.2 Preliminaries ; the partition function

In this section, we will first recall some basic facts about the partition function Z_t, and then give briefly some notions of Gaussian analysis which will be used later on. Let us recall that W is a centered Gaussian field defined on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, which can also be seen as a Gaussian family $\{W(\varphi)\}$ indexed by tests functions $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where $W(\varphi)$ stands for the Wiener integral of φ with respect to W :

$$W(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s,x) W(ds,x) dx,$$

whose covariance structure is given by

$$\mathbf{E}\left[W(\varphi)W(\psi)\right] = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(s,x) Q(x-y) \psi(s,y) dx dy \right) ds, \tag{4.7}$$

for two arbitrary test functions φ, ψ.

Let us start here by defining more rigorously the quantity $H_t(b)$ given by (4.2), which can be done through a Fourier transform procedure : there exists (see e.g. (Carmona & Viens 1998) for further details) a centered Gaussian independently scattered $\mathbf{C}$-valued measure ν on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ such that

$$W(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,t]}(s) e^{iux} \nu(ds,du). \tag{4.8}$$

For every test function $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, set now

$$\nu(f) \equiv \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} f(s,u) \nu(ds,du). \tag{4.9}$$

While the random variable $\nu(f)$ may be complex-valued, to ensure that it is real valued, it is sufficient to assume that f is of the form $f(s,u) = f_1(s)\, e^{iuf_2(s)}$ for real valued functions f_1 and f_2. Then the law of ν is defined by the following covariance structure : for any such test functions $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, we have

$$\mathbf{E}\left[\nu(f)\nu(g)\right] = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} f(s,u)\overline{g(s,u)}\hat{Q}(du)ds, \tag{4.10}$$

where the finite positive measure $\hat{Q}$ is the Fourier transform of Q (see (Tindel 1999) for details).

From (4.8), we see that the Itô-stochastic differential of W in time can be understood as $W(ds,x) := \int_{u\in\mathbb{R}} e^{iux}\nu(ds,du)$, or even, if the measure $\hat{Q}(du)$ has a density $f(u)$ with respect to the Lebesgue measure, which is typical, as

$$W(ds,x) := \int_{u\in\mathbb{R}} e^{iux}\sqrt{f(u)}M(ds,du)$$

where M is a white-noise measure on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, i.e. a centered independently scattered Gaussian measure with covariance given by $\mathbf{E}\left[M(A)\,M(B)\right] = m_{Leb}(A \cap B)$ where m_{Leb} is Lebegue's measure on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

We can go back now to the definition of $H_t(b)$: invoking the representation (4.8), we can write

$$-H_t(b) = \int_0^t W(ds, b_s) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{iub_s}\nu(ds,du), \tag{4.11}$$

and it can be shown (see (Carmona & Viens 1998)) that the right hand side of the above relation is well defined for any Hölder continuous path b, by a L^2-limit procedure. Such a limiting procedure can be adapted to the specific case of constructing $H_t(b)$, using the natural time evolution structure; we will not comment on this further. However, the reader will surmise that the following remark, give for the sake of illustration, can be useful : when $\hat{Q}$ has a density f, we obtain

$$-H_t(b) = \iint_{[0,t]\times\mathbb{R}} e^{iub_s}\sqrt{f(u)}M(ds,du),$$

Recall now that Z_t^x has been defined by

$$Z_t^x = E_b\left[e^{-\beta H_t(b)}\right],$$

and set

$$p_t(\beta) = \frac{1}{t}\mathbf{E}\left[\log\left(Z_t^x\right)\right], \tag{4.12}$$

usually called the free energy of the system. It is easily seen that $p_t(\beta)$ is independent of the initial condition $x \in \mathbb{R}$, thanks to the spatial homogeneity of W, and it is thus usual to concentrate on this quantity for $x = 0$. In fact, in the remainder of the paper, x will be understood as 0 when not specified, and E_b, Z_t will stand for E_b^0, Z_t^0, etc. Let us summarize then some basic results on $p_t(\beta)$ and Z_t shown in (Rovira & Tindel 2005).

Proposition 4.2.1. *For all $\beta > 0$ there exists a constant $p(\beta) > 0$ such that*

$$p(\beta) := \lim_{t\to\infty} p_t(\beta) = \sup_{t\geq 0} p_t(\beta).$$

Furthermore, the function p satisfies :

1. *The map $\beta \mapsto p(\beta)$ is a convex nondecreasing function on $\mathbb{R}_+$.*
2. *The following upper bound holds true :*

$$p(\beta) \leq \frac{\beta^2}{2} Q(0). \tag{4.13}$$

3. **P**-*almost surely, we have*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log Z_t = p(\beta). \tag{4.14}$$

4.3 Study of the partition function

This section is devoted to the analysis of the quantity $p(\beta)$ defined at Proposition 4.2.1. In particular, we will show that for large β the function $\beta \mapsto p(\beta)$ is always subquadratic, but grows faster than a linear function of β. More specifically, our results in this section will be formulated in relation to W's regularity, or lack thereof, in the space parameter x. The hypothesis we use guarantees that there is some $H \in (0,1)$ such that W is no more than H-Hölder-continuous in space. Accordingly, we define the spatial *canonical metric* δ of W by

$$\delta^2 (x-y) := \mathbf{E}\left[(W(1,x) - W(1,y))^2 \right] = 2\left[Q(0) - Q(x-y) \right].$$

4.3.1 Lower bound result

Theorem 4.3.1. *Assume there exists a number $H \in (0,1]$ and numbers c_0, $r_0 > 0$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x-y| \leq r_0$, we have*

$$\delta(x-y) > c_0 |x-y|^H. \tag{4.15}$$

1. *If $H \leq 1/2$, there exist constants C_0 and β_0 depending only on Q such that for all $\beta > \beta_0$,*

$$p(\beta) \geq C_0 \beta^{2/(1+H)}.$$

2. *If $H \geq 1/2$, there exist constants $\hat{C}_0$ and $\hat{\beta}_0$ depending only on Q such that for all $\beta \geq \hat{\beta}_0$,*

$$p(\beta) \geq \hat{C}_0 \beta^{4/3}.$$

Remark 4.3.1. *A remarkable feature of the above theorem is the shape and values of the power function in the lower bound. Indeed, we are claiming that $p(\beta)$ is bounded below by universal constants times $\beta^{\theta(H)}$ where $\theta(H)$ is a decreasing function defined on $[0,1]$ which is continuous, flat on $[1/2,1]$, reaches its minimum value of $4/3$ for all $H \geq 1/2$, and does not reach its supremum of 2 near the open endpoint 0 of its domain. In particular, the*

exponential rate of increase of the partition function is always significantly faster than linear in β, is nearly quadratic for very irregular potential, and may only be as low as the power $\beta^{4/3}$ when the potential W has precisely a Brownian-type behavior in space, or is more regular.

Proof of Theorem 4.3.1 : Let us divide this proof in several steps.

Step 0 : Strategy. Recall that $p_t(\beta)$ has been defined by (4.12), and Proposition 4.2.1 states that

$$p(\beta) = \sup_{t>0} p_t(\beta).$$

This proves that a lower bound on $p(\beta)$ will be obtained by evaluating $p_t(\beta)$ for any fixed value t. Additionally, by the positivity of the exponential in the definition of Z_t, one may include as a factor inside the expectation E_b the sum of the indicator functions of any disjoint family of events of $\mathcal{C}$. In fact, we will only need two events.

Step 1 : Setup. Let $A_+(b)$ and $A_-(b)$ be two disjoint events defined on the probability space $\mathcal{C}$ under P_b. Let $X_b = -\beta H_{2t}(b) = \beta \int_0^{2t} W(ds, b_s)$. Conditioning by the two events A_+ and A_-, and using Jensen's inequality, we easily obtain

$$\begin{aligned}
2tp_{2t}(\beta) &= \mathbf{E}[\log(Z_{2t})] = \mathbf{E}[\log(E_b[\exp(X_b)])] \\
&\geq \mathbf{E}[\log(P_b(A_+) E_b[e^{X_b}|A_+] + P_b(A_-) E_b[e^{X_b}|A_-])] \\
&\geq \log(\min\{P_b(A_+); P_b(A_-)\}) + \mathbf{E}[\log(E_b[e^{X_b}|A_+] + E_b[e^{X_b}|A_-])] \\
&\geq \log(\min\{P_b(A_+); P_b(A_-)\}) + \mathbf{E}[\log(\max\{E_b[e^{X_b}|A_+]; E_b[e^{X_b}|A_-]\})] \\
&= \log(\min\{P_b(A_+); P_b(A_-)\}) + \mathbf{E}[\max\{\log E_b[e^{X_b}|A_+]; \log E_b[e^{X_b}|A_-]\}] \\
&\geq \log(\min\{P_b(A_+); P_b(A_-)\}) + \mathbf{E}[\max\{Z_+, Z_-\}], \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

where

$$Z_+ := E_b[X_b|A_+] \quad \text{and} \quad Z_- := E_b[X_b|A_-];$$

these two random variables form a pair of centered jointly Gaussian random variables. Indeed, they are both limits of linear combinations of values of a single centered Gaussian field. This implies that

$$\mathbf{E}[\max\{Z_+, Z_-\}] = (2\pi)^{-1/2} \mathbf{E}^{1/2}\left[(Z_+ - Z_-)^2\right].$$

Therefore we see that we only need to choose sets A_+ and A_- that are not too small, but still big enough that condition (4.15) guarantees a certain amount of positivity in the variance of $Z_+ - Z_-$.

Step 2 : Choice of A_+ and A_-, and their probabilities. Let f be an arbitrary positive increasing function on $(0, \infty)$. We take

$$A_+ := \{2f(t) \geq b_s \geq f(t) : \forall s \in [t, 2t]\},$$

and

$$A_- := \{-2f(t) \leq b_s \leq -f(t) : \forall s \in [t, 2t]\}.$$

In other words, we force our trajectory b to be, during the entire time interval $[t, 2t]$, in one of two boxes of size $f(t)$ which are at a distance of $2f(t)$ from each other. Because these two boxes are symmetric about the starting point of b, the corresponding events have the same probability. While this probability can be calculated in an arguably explicit way, we give here a simple lower bound argument for it. Using time scaling, the Markov property of Brownian motion, the notation $a = f(t)/\sqrt{t}$, and some trivial lower bounds, we have

$$\begin{aligned} P_b(A_+) &= P_b(\forall s \in [1,2] : b_s \in [a, 2a]) \\ &= (2\pi)^{-1} \int_a^{2a} P_b(\forall s \in [0,1] : b_s + y \in [a, 2a])\, e^{-y^2/2} dy \\ &\geq (2\pi)^{-1} \int_{5a/4}^{7a/4} P_b(\forall s \in [0,1] : b_s + y \in [y - a/4, y + a/4])\, e^{-y^2/2} dy \\ &= P_b(b_1 \in [5a/4, 7a/4])\ P_b(\forall s \in [0,1] : |b_s| \leq a/4). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Step 3 : Recalling the estimation of $Z_+ - Z_-$. It was established in (Florescu & Viens 2005, page 24) that

$$\mathbf{E}\left[(Z_+ - Z_-)^2\right] \geq \beta^2 \int_t^{2t} \mathbf{E}\left[\delta\left(x^*_{s,+} - x^*_{s,-}\right)^2\right] ds,$$

where the quantities $x^*_{s,+}$ and $x^*_{s,-}$ are random variables, but we have the following deterministic bounds on them for all $s \in [t, 2t]$: $x^*_{s,+} \in [f(t), 2f(t)]$ and $x^*_{s,-}$ in the interval $[-2f(t), -f(t)]$. As a consequence, by condition (4.15), as long as $f(t)$ can be made smaller than $r_0/4$, we have (recall that c designates a constant that can change from line to line)

$$\mathbf{E}\left[(Z_+ - Z_-)^2\right] \geq ct\beta^2 (f(t))^{2H}. \tag{4.18}$$

Step 4 : The case $H \leq 1/2$. It is possible, although we will spare the reader the pain of deciphering such a development, to prove that the optimal choice for f in the case $H \leq 1/2$ is $f(t) = t^{1/2}$, which corresponds to $a = 1$, so that $P_b(A_+)$ is a universal constant c_1 that does not actually depend on t. Thus we have, from (4.16) and (4.18), that for any $t > 0$,

$$p_{2t}(\beta) = \frac{\mathbf{E}[\log(Z_{2t})]}{2t} \geq -\frac{C_1}{2t} + \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{\beta}{t^{(1-H)/2}}, \tag{4.19}$$

where the universal constant $C_1 = \log(1/c_1) > 0$. Now we may maximize the above function over all possible values of $t > 0$. To make things simple, we simply choose t so that the second term in the above right-hand side equals twice the first, yielding t of the form

$$t = \frac{c}{\beta^{2/(1+H)}}$$

and therefore

$$\sup_{t>0} p_t(\beta) \geq c\beta^{2/(1+H)},$$

and the result for $H < 1/2$ follows as announced, as long as the use of (4.18) from Step 3 can be justified, namely as long as $f(t) \leq r_0$. This is obviously acheived as soon as $\beta > \beta_0$ where

$$\beta_0 = c r_0^{-1/(1+H)}.$$

Step 5 : The case $H > 1/2$.

Step 5.1 : choosing f and evaluating $P_b(A_+)$. The simple-minded choice for f that worked so well in the previous case is still applicable here, but we may try instead the following

$$f(t) = t^\alpha,$$

for a given $\alpha \in [0,1]$. Clearly the case $\alpha = 1/2$ yields the same formula as in the case $H < 1/2$, but we would like to do much better. It is possible to prove that $\alpha \geq 1/2$ is suboptimal, but, again, we will spare the reader.

Assuming now that $\alpha < 1/2$, we then have, using the notation of Step 2, that

$$a = t^{\alpha - 1/2}.$$

By Step 3, to validate the use of Condition (4.15), we only need to impose $4f(t) = 4t^\alpha \leq r_0$, i.e.

$$t \leq (r_0/4)^{1/\alpha}.$$

Also assume that $t \leq 1$, i.e. that $a \geq 1$. Then with this lower bound on a, we may use again the the result (4.17) from Step 2, but in a different regime than we had previously. Since $a \geq 1$, we get

$$P_b(\forall s \in [0,1] : |b_s| \leq a/4) \geq P_b(\forall s \in [0,1] : |b_s| \leq 1/4) =: K_u$$

where K_u is obviously a universal constant, and we also get

$$\begin{aligned} P_b(b_1 \in [5a/4, 7a/4]) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{5a/4}^{7a/4} e^{-z^2/2} dz \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{2} e^{-(7a/4)^2/2} \\ &\geq (8\pi)^{-1/2} e^{-(49/32)a^2}; \end{aligned}$$

using (4.17), the above two lower bounds result in

$$P_b(A_+) \geq \exp\left(-c_3 a^2\right) = \exp\left(-c_3 t^{2\alpha - 1}\right)$$

for some universal constant c_3, provided $t \leq 1$.

Step 5.2 : finding a lower bound for large β by optimizing t. Using condition (4.15), inequalities (4.16) and (4.18), and the lower bound just obtained, now imply that for any $t \leq (r_0/4)^{1/\alpha} \wedge 1$,

$$p_{2t}(\beta) \geq -(c_3/2) t^{2\alpha - 2} + \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \beta t^{-1/2 + \alpha H}, \tag{4.20}$$

where c is the constant in (4.18). Now choosing t so that the second term on the right-hand side equals twice the first, we obtain

$$t = \frac{c'}{\beta^{1/(3/2-(2-H)\alpha)}}, \tag{4.21}$$

where c' is another constant depending on c and c_3. To check that this choice of t can be made smaller than $(r_0/4)^{1/\alpha} \wedge 1$, simply note that the power of β in this expression is negative : indeed, this occurs iff $\alpha < 3/(2(2-H))$, the last expression is greater than 1 because $H > 1/2$, and we have already imposed $\alpha < 1/2$. Thus to make t small enough, one only needs to choose β large enough. Therefore we have proved that for some $\hat{\beta}_0 > 0$, if $\beta > \hat{\beta}_0$, then

$$\sup_{t>0} p_{2t}(\beta) \geq c\beta^{(2-2\alpha)/(3/2-(2-H)\alpha)}. \tag{4.22}$$

Step 5.3 : optimizing the lower bound by choosing α. It is now clear that in order to maximize the power of β in the lower bound for $\sup_{t\geq 0} p_t(\beta)$, we should find the maximum of the function

$$k(\alpha) = \frac{2-2\alpha}{3/2-(2-H)\alpha}$$

for $\alpha < 1/2$. This function is monotone decreasing when $H > 1/2$, which implies that we should take α as small as possible when β is large. We may now arbitrarily decide to take $\alpha = 0$. This yields $k(0) = 4/3$. In applying condition (4.15) above, we had to assume that $t^\alpha \leq 1$, which is now obviously satisfied. This means we can state, from (4.22),

$$\sup_{t>0} p_{2t}(\beta) \geq c\beta^{4/3},$$

which finishes the case $H > 1/2$ for all $\beta \geq 0$, such that t in (4.21) is indeed smaller than a universal constant, i.e. for all β larger than some universal constant. □

The reader might wonder, in view of the arbitrary choice made for α in Step 5 of the above proof, why a smaller α, namely $\alpha < 0$, does not yield a better result ? Let us briefly discuss this issue, to prove that $\alpha = 0$ is the optimal choice above, even when β may be relatively small (i.e. in cases where β_0 turns out to be very small). Thus, assume $\alpha < 0$. The condition $t^\alpha \leq 1$ then means that t much be chosen ≥ 1. Hence from formula (4.21), we see that β must be bounded above by $c^{3/2+(2-H)|\alpha|}$, so a result for large β cannot be obtained this way. Still, one might be interested in improving the lower bound result of Theorem 4.3.1 for relatively small β. In view of (4.22), it would then be best to make $k(\alpha)$ as small as possible ; since $k(\alpha)$ is still decreasing, we are thus forced to take $\alpha = 0$, since no $\alpha < 0$ will yield a better result even for small β. This paragraph concludes the proof that the choice $\alpha = 0$ in Step 5 above is optimal.

Another interesting feature of the above proof is that the asymptotic regime for large t is bounded below using a proof that estimates the behavior for a specific value of t which turns out to be very small for large β (see (4.21)). This may be interpreted as saying that the quantity $\mathbf{E} \log Z_t$ behaves nearly linearly in t very quickly when β is large : for low temperatures, a kind of stationary regime is rapidly attained.

4.3.2 Upper bound result

To find an upper bound, we will use a different type of computation. We have the following.

Theorem 4.3.2. *Assume there exists a number $H \in (0,1]$ and numbers c_1, $r_1 > 0$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x-y| \leq r_1$, we have*

$$\delta(x-y) \leq c_1 |x-y|^H . \tag{4.23}$$

Then there exists a constant C_1 depending only on Q such that for all $\beta \geq 1$,

$$p(\beta) \leq C_1 \beta^{2-2H/(3H+1)}.$$

Démonstration. Let us divide again this proof into several steps.

Step 0 : Strategy. Exactly as in the Lower Bound theorem of the previous section, consider the quantity $p_t(\beta)$ defined by (4.12), and recall from Proposition 4.2.1 that almost surely

$$p(\beta) \leq \limsup_{t\to\infty} p_t(\beta).$$

We will first give a discretization result, which, in spirit, was obtained originally in (Carmona & Viens 1998), but finds here a much simpler proof, because of our use of the function $p_t(\beta)$. Then it will be a matter estimating this function for the discretized path.

Step 1 : Discretization. For each continuous function b on $[0,t]$, and for each fixed $\varepsilon > 0$, let the *ε-discretization* of b be the function $\tilde{b}$ defined by letting $T_0 = 0$, $T_{i+1} =$ the first exit time after T_i of $b_\cdot - b_{T_i}$ from the interval $[-\varepsilon; +\varepsilon]$, and for each $t \in [T_i, T_{i+1})$, by letting $x_i := \tilde{b}_t = b_{T_i}$. Hence under P_b, $\tilde{b}$ is a pure jump process which visits the sites of a discrete-time simple-symmetric random walk on $\varepsilon\mathbb{Z}$, while the inter-jump times of $\tilde{b}$, which are independent of the sites visited, are independent and distributed like T_1, the first exit time of b from $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

In particular, we have that for any $t \geq 0$, $|b_t - \tilde{b}_t| \leq \varepsilon$. Now using Hölder's and Jensen's inequalities, we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\log(Z_t)\right] = \mathbf{E}\left[\log E_b\left[\exp\left(-\beta[H_t(b) - H_t(\tilde{b})]\right)\exp\left(-\beta H_t(\tilde{b})\right)\right]\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\log E_b\left[\exp\left(-2\beta[H_t(b) - H_t(\tilde{b})]\right)\right]\right] + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\log E_b\left[\exp\left(-2\beta H_t(\tilde{b})\right)\right]\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\log E_b\left[\exp 2\beta^2 \int_0^t \delta^2\left(b_s - \tilde{b}_s\right) ds\right] + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\log E_b\left[\exp\left(-2\beta H_t(\tilde{b})\right)\right]\right].
\end{aligned}$$

Defining

$$p_t^\varepsilon(\beta) := \frac{1}{2t}\mathbf{E}\left[\log E_b\left[\exp\left(-2\beta H_t(\tilde{b})\right)\right]\right],$$

and assuming $\varepsilon \leq r_1$, we obtain the following.

Lemma 4.3.2. *Let δ^+ be an increasing function of one positive variable such that for all $|x-y| \le r_1$, $\delta(x-y) \le \delta^+(|x-y|)$. Then we have*

$$\limsup_{t\to\infty} p_t(\beta) \le \beta^2 \delta^+(\varepsilon)^2 + \limsup_{t\to\infty} p_t^\varepsilon(\beta).$$

Of course, assuming Condition (4.23), this translates, for all $\varepsilon \le r_1$, as

$$\limsup_{t\to\infty} p_t(\beta) \le \beta^2 c_1^2 \varepsilon^{2H} + \limsup_{t\to\infty} p_t^\varepsilon(\beta). \tag{4.24}$$

Step 2 : Setup. Let N_t be the number of jumps of $\tilde{b}$ up to time t, and use the convention $T_{N_t+1} = t$. Using the convention $\tilde{x}_0 = 0$, $\tilde{t}_0 = 0$ and $\tilde{t}_{m+1} = t$, we define

$$X\left(m, \tilde{t}, \tilde{x}\right) := \sum_{i=0}^{N_t} \left\{ W\left(\tilde{t}_{i+1}, \tilde{x}_i\right) - W\left(\tilde{t}_i, \tilde{x}_i\right) \right\}.$$

where $\tilde{x}$ is a member of $\mathcal{P}_m$ the set of nearest-neighbor path of length m in $\varepsilon\mathbb{Z}$, and $\tilde{t} = \left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \cdots, \tilde{t}_m\right)$ a member of $\mathcal{S}_{m,t}$ the simplex of all sequences of length m of increasing times in the interval $[0,t]$. Then we immediately get the representation

$$H_t(\tilde{b}) = X\left(N_t, (T_i)_{i=1}^{N_t}, (\tilde{x}_i)_{i=1}^{N_t}\right)$$

Note that X is a Gaussian field indexed by the union over all positive integers m of all the sets $J_m := \{m\} \times \mathcal{S}_{m,t} \times \mathcal{P}_m$. Let α be a fixed positive number which we will choose later. Let $I_\alpha = \cup_{m \le \alpha t} J_m$, and set also

$$Y_\alpha = \sup_{I_\alpha} X.$$

Using the inequality $x + y \le 2(x \vee 1)(y \vee 1)$, we can bound $p_t^\varepsilon(\beta)$ above as follows :

$$\begin{aligned} t p_t^\varepsilon(\beta) &\le \mathbf{E}\left[\log(A+B)\right] \\ &\le \mathbf{E}\left[\left(\log_+ A\right)\right] + \mathbf{E}\left[\log_+ B\right] + \log 2 \end{aligned} \tag{4.25}$$

where we have set $\log_+ x = [\log(x)]_+$ and where

$$A := P_b\left[N_t \le \alpha t\right] \exp\left(2\beta Y_\alpha\right)$$

and

$$B := \sum_{n\ge 1} P_b\left[n\alpha t \le N_t < (n+1)\alpha t\right] \exp\left(2\beta Y_{(n+1)\alpha}\right).$$

The following facts, which were established in (Florescu & Viens 2005, Proposition 22 and eqn. (30)), will be crucial : for some constant C_Q depending only on Q, for every $\alpha > 0$,

$$P_b\left[N_t > t\alpha\right] \le \exp\left(-\frac{1}{2} t\alpha^2 \varepsilon^2 + t\alpha\right); \tag{4.26}$$

$$\mathbf{E}\left[Y_\alpha\right] \le C_Q t \alpha^{1/2}. \tag{4.27}$$

Step 3 : The term A. Bounding the probability $P_b\left[N_t \leq \alpha t\right]$ by 1, we immediately have

$$\mathbf{E}\left[\log_+ A\right] \leq 2\beta \mathbf{E}\left[|Y_\alpha|\right].$$

Since X is a centered Gaussian field on I_α, it follows that the right-hand side above is bounded by $4\beta\mathbf{E}[Y_\alpha]+\sqrt{tQ\left(0\right)}$(see e.g. (Alder 1990, Lemma 3.1), using the fact that for $m=0$, so that $\tilde{x}=\{0\}$, $\tilde{t}=\{\ \}$ are the only choices, $X\left(0\right)=\beta W\left(t,0\right)$ satisfies $\mathbf{E}\left[|X\left(0\right)|\right]=\beta\sqrt{tQ\left(0\right)}$), which implies, via the last estimate (4.27) in Step 2,

$$\mathbf{E}\left[\log_+ A\right] \leq \left(2C_Q+\sqrt{Q\left(0\right)/\left(t\alpha\right)}\right)\beta t\sqrt{\alpha}. \tag{4.28}$$

Step 4 : The term B. Let $\mu := \mathbf{E}[Y_{\alpha n}]$. Since X is a Gaussian field on $I_{\alpha n}$, and because one shows easily that

$$\sigma^2 := \sup_{\left(m,\tilde{t},\tilde{x}\right)\in I_{\alpha n}} \mathbf{Var}\left[X\left(m,\tilde{t},\tilde{x}\right)\right] \leq tQ(0),$$

the so-called *Borell-Sudakov* inequality (see e.g. (Alder 1990, Theorem 2.1)) implies that for any constant $a>0$,

$$\mathbf{E}\left[\exp a\left|Y_{\alpha n}-\mu\right|\right] \leq 2\exp\left(a^2\sigma^2/2\right) \leq 2\exp\left(cta^2\right), \tag{4.29}$$

where here and below the constant c depending only on Q may change from line to line. Note that the last estimate above is uniform in α and n. Let now $\gamma\in(1/2,1)$ be a fixed number, and calculate, using the estimate $\mu\leq C_Q t(\alpha n)^{1/2}$ from (4.27) at the end of Step 2,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t^\gamma}\mathbf{E}\left[\left(\log B\right)_+\right]\\
&\leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{t^\gamma}\log\sum_{n\geq 2}P_b\left[N_t>\left(n-1\right)\alpha t\right]\exp\left[2\beta Y_{\alpha n}-2\beta\mu\right]\exp[c't\beta(\alpha n)^{1/2}]\right)_+\right]\\
&= \mathbf{E}\left[\log_+\left(\sum_{n\geq 1}P_b\left[N_t>n\alpha t\right]\exp\left[2\beta Y_{\alpha(n+1)}-2\beta\mu\right]\exp[c't\beta(\alpha\left(n+1\right))^{1/2}]\right)^{t^{-\gamma}}\right],
\end{aligned}$$

where the constant c' appearing in the last line need only be chosen such that $c'\geq 2C_Q$ where C_Q is given in (4.27), and thus we can assume without loss of generality that $c'\geq 4$. For $t\geq 1$, we will now use the fact that for any sequence $\left(x_n\right)_n$ of non-negative reals, $\left(\sum_n x_n\right)^{t^{-\gamma}}\leq\sum_n x_n^{t^{-\gamma}}$. We will also use the estimate (4.26) on the tail of N_t from the end of Step 2. Thus, denoting

$$\hat{Y}_{\alpha n}\equiv\exp\left[2\beta t^{-\gamma}\left(Y_{\alpha(n+1)}-\mu\right)\right],$$

we obtain

$$\frac{1}{t^\gamma}\mathbf{E}\left[(\log B)_+\right] \le \mathbf{E}\left[\log_+\left(\sum_{n\ge 1}\left(P_b\left[N_t > n\alpha t\right]\right)^{t^{-\gamma}}\hat{Y}_{\alpha n}\exp\left(c't^{1-\gamma}\beta(\alpha\left(n+1\right))^{1/2}\right)\right)\right]$$
$$\le \mathbf{E}\left[\log_+\left(\sum_{n\ge 1}\hat{Y}_{\alpha n}\exp\left(-\frac{t^{1-\gamma}}{2}\left[\alpha^2n^2\varepsilon^2 - 2\alpha n - c'\beta\left(\alpha\left(n+1\right)\right)^{1/2}\right]\right)\right)\right].$$

Now, bounding $\log_+(x)$ above by $\log(1+x)$ for $x \ge 0$, and using Jensen's inequality, we get

$$\frac{1}{t^\gamma}\mathbf{E}\left[(\log B)_+\right] \le \log\left(1 + \sum_{n\ge 1}\mathbf{E}\left[\hat{Y}_{\alpha n}\right]\exp\left(-\frac{t^{1-\gamma}u_n}{2}\right)\right),$$

where

$$u_n \equiv \alpha^2n^2\varepsilon^2 - 2\alpha n - c'\beta\left(\alpha\left(n+1\right)\right)^{1/2}.$$

In order for the series above to converge, since the expectation in the last line above is bounded in (4.29) independently of n, it is clear that we must choose α so as to compensate the negative terms in the first exponential factor. Specifically, we choose

$$\alpha^2\varepsilon^2 = 4c'\beta\alpha^{1/2},$$

i.e.

$$af\alpha = \left(c'\beta\varepsilon^{-2}\right)^{2/3}. \tag{4.30}$$

Rewriting the above estimate, with use of (4.29), we now obtain

$$\frac{1}{t^\gamma}\mathbf{E}\left[(\log B)_+\right] \le \log\left(1 + 2\exp\left(c\beta^2t^{1-2\gamma}\right)\sum_{n\ge 1}\exp\left(-\frac{1}{2}t^{1-\gamma}\alpha^2\varepsilon^2y_n\right)\right), \tag{4.31}$$

where

$$y_n := n^2 - \frac{2n}{\alpha\varepsilon^2} - \frac{1}{4}\sqrt{(n+1)}$$

The value ε will be chosen in the next step. We will then check that we can choose ε as a function of β such that

$$\beta\varepsilon \ge 1. \tag{4.32}$$

This, and the value of α in (4.30), imply that

$$\alpha\varepsilon^2 \ge \left(4c'\right)^{2/3} \ge 4$$

Note then that, since for all $n \ge 1$, $4n^2 - n - \sqrt{n+1} \ge n/2$, we can now estimate the quantity y_n as

$$y_n \ge n/8.$$

In this way, summing the geometric series thus obtained by this substitution for y in (4.31), we immediately get,

$$\frac{1}{t^\gamma}\mathbf{E}\left[(\log B)_+\right] \le \log\left[1 + 2\exp\left(c\beta^2t^{1-2\gamma}\right)\left(\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{1}{16}t^{1-\gamma}\alpha^2\varepsilon^2\right)} - 1\right)\right].$$

Since $1-\gamma>0$ and $1-2\gamma<0$, the right-hand side above converges to 0. In other words we write : as $t\to\infty$,

$$\frac{1}{t^\gamma}\mathbf{E}\left[(\log B)_+\right]=o\left(1\right). \tag{4.33}$$

Step 5 : Conclusion. With the result (4.28) of step 3, with inequality (4.33) from step 4, inequality (4.25) from step 2, and the value of α in (4.30), we obtain for some constant c depending only on Q,

$$\begin{aligned} p_t^\varepsilon(\beta) &\le c\beta\alpha^{1/2}+o\left(\frac{1}{t^{1-\gamma}}\right)+\frac{\log 2}{t} \\ &= c\beta^{4/3}\varepsilon^{-2/3}+o\left(1\right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Now we can put this result together with the discretization lemma 4.3.2, or more specifically the estimate (4.24), to obtain, for some constant c depending only on Q, that almost surely, for all $\beta\ge 0$,

$$\limsup_{t\to\infty} p_t(\beta)\le c\left(\beta^2\varepsilon^{2H}+\beta^{4/3}\varepsilon^{-2/3}\right).$$

In order to make this upper bound as small as possible (ignoring any possible multiplicative factors depending only on H), we can choose ε so that

$$\beta^2\varepsilon^{2H}=\beta^{4/3}\varepsilon^{-2/3},$$

i.e.

$$\varepsilon=\beta^{-1/(3H+1)}$$

so that

$$\limsup_{t\to\infty} p_t(\beta)\le c\beta^2\beta^{-2H/(3H+1)}.$$

Also, to satisfy condition (4.32), we can see that $\beta\varepsilon=\beta^{1-1/(3H+1)}\ge 1$ as soon as $\beta\ge 1$. This finishes the proof of the theorem. □

4.3.3 Sharpness of our method. The logarithmic regularity scale.

In this section we first show that when putting the upper and lower bound results together, we obtain an increasingly sharp result as the spatial regularity parameter H for the potential decreases, with a nearly optimal result as H approaches 0. This suggests that if we use a potential that is more irregular than any Hölder-continuous function, then we should get an optimal result (up to undetermined multiplicative constants.)

Comparing upper and lower bounds

Recall from the introduction (see condition (4.4) and explanations following) that if we assume that we may use both Theorems 4.3.1 and 4.3.2, i.e. if we assume that there exist positive constants c_0 and c_1, and $H\in(0,1]$, such that for all x,y such that $|x-y|$ is small,

$$c_0\left|x-y\right|^H\le\delta\left(x-y\right)\le c_1\left|x-y\right|^H, \tag{4.35}$$

the case of H small can be expressed as

$$C_0'\beta^{2-2H+F(H)} \leq p(\beta) \leq C_1'\beta^{2-2H+G(H)}$$

where the functions F and G are, up to constants (2 and 6 respectively), of order x^2. Hence while the asymptotic $p(\beta) \simeq \beta^{2-2H} = \beta^2/\delta^2(\beta)$ is quite sharp for small H, the lower correction F is always positive, meaning that the expression $\beta^2/\delta^2(\beta)$ always underestimates the true value of $p(\beta)$ for $H > 0$. It is therefore natural to ask ourselves if this phenomenon persists for potentials that are more irregular than those in the Hölder scale (those satisfying (4.35)). This question is the subject of the next subsection.

Logarithmic scale

We now work under the assumptions that there exist positive constants c_0, c_1, and r_1, and $\beta \in (0, \infty)$, such that for all x, y with $|x - y| \leq r_1$,

$$c_0 \log^{-\gamma}(1/|x-y|) \leq \delta(x-y) \leq c_1 \log^{-\gamma}(1/|x-y|). \tag{4.36}$$

Assumption (4.36) implies that W is not spatially Hölder-continous for any exponent $H \in (0, 1]$. Moreover, the theory of Gaussian regularity implies that, if $\gamma > 1/2$, W is almost-surely continous in space, with modulus of continuity proportional to $\log^{-\gamma+1/2}(1/|x-y|)$, while if $\gamma \leq 1/2$, W is almost-surely not uniformly continuous on any interval in space. The case $\gamma = 1/2$, which is the threshold bewteen continuous and discontinuous W, is of special interest, as the reader will find in paragraph 4.3.4.0. We now establish the following result, which is optimal, up to multiplicative constants.

Theorem 4.3.3. *Assume condition (4.36). We have for some constants C_0 and C_1 depending only on Q, for all $\beta \geq 1$,*

$$C_0\beta^2 \log^{-2\gamma}(\beta) \leq p(\beta) \leq C_1\beta^2 \log^{-2\gamma}(\beta).$$

Démonstration. Step 1 : Setup. Nearly all the calculations in the proof of Theorems 4.3.1 and 4.3.2 are valid in our situation.

Step 2 : Lower bound. For the lower bound, reworking the argument in Step 2 in the proof of Theorem 4.3.1, using the function $\log^{-\gamma}(x^{-1})$ instead of the function x^H, we obtain the following instead of (4.18) :

$$\mathbf{E}\left[(Z_+ - Z_-)^2\right] \geq t(\beta c_0)^2 \log^{-2\gamma}\left(2f(t)^{-1}\right),$$

which implies, instead of (4.19) in Step 4 of that proof, the following

$$p_{2t}(\beta) \geq -\frac{c}{2t} + \beta\left(\frac{c_0^2 \log^{-2\gamma}\left(2f(t)^{-1}\right)}{8\pi t}\right)^{1/2}.$$

In other words, now choosing $f(t) = t^{1/2}$ as we did in the case $H < 1/2$, for some constant C_Q depending only on Q,

$$p_{2t}(\beta) \geq -\frac{c}{2t} + \beta C_Q \frac{\log^{-\gamma}(t^{-1})}{t^{1/2}}.$$

Now choose t such that the second term in the right-hand side above equals twice the first, i.e.

$$t^{1/2}\log^{-\gamma}\left(t^{-1}\right) = c/\left(C_Q\beta\right).$$

For small t, the function on the left-hand side is increasing, so that the above t is uniquely defined when β is large. We see in particular that when β is large, t is small, and we have $t^{-1} \leq \beta^2$. This fact is then used to imply

$$\frac{1}{t} = (c\beta)^2 \log^{-2\gamma}\left(t^{-1}\right) \leq 2\,(c\beta)^2 \log^{-2\gamma}(\beta).$$

Therefore, for some constants β_2 and c depending only on Q, for the t chosen above with $\beta \geq \beta_2$,

$$p_{2t}(\beta) \geq c\beta^2 \log^{-2\gamma}(\beta).$$

Step 3 : Upper bound. Here, returning to the proof of Theorem 4.3.2, the upper bound (4.34) in Step 5 of that proof holds regardless of δ, and therefore, using the result of Lemma 4.3.2 with $\delta^+(r) = \log^{-\gamma}(1/r)$, we immediately get that there exists c depending only on Q such that for all $\varepsilon < r_1$ and all $\beta > \beta_3$,

$$\limsup_{t\to\infty} p_t(\beta) \leq \beta^2 \log^{-2\gamma}(1/\varepsilon) + c\beta^{4/3}\varepsilon^{-2/3},$$

as long as one is able to choose ε so that $\beta\varepsilon \geq 1$ (condition (4.32)). By equating the two terms in the right-hand side of the last inequality above, we get

$$\varepsilon \log^{-3\gamma}(1/\varepsilon) = c^{3/2}\beta.$$

Since the function $\varepsilon \mapsto \varepsilon \log^{-3\gamma}(1/\varepsilon)$ is increasing for small ε, the above equation defines ε uniquely when β is large, and in that case ε is small. We also see that for any $\theta > 0$, for large β, $1/\varepsilon \geq \beta^{1-\theta}$. Therefore we can write, for $\beta \geq \beta_3$, almost surely,

$$\limsup_{t\to\infty} p_t(\beta) \leq 2\beta^2 \frac{1}{(1-\theta)^{2\gamma}} \log^{-2\gamma}(\beta).$$

This finishes the proof of the theorem. □

4.3.4 Conclusions

Relation between $p(\beta)$ and $\delta^2(1/\beta)$

Define the commensurability relation $a \asymp b$ for two positive functions a and b by saying that the ratio a/b is bounded above and away from 0. The conclusions we can draw from the last theorem is that in the logarithmic regularity scale, i.e. under condition (4.36), up to multiplicative constants depending only on Q, the Lyapunov exponent $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log Z_t$ of the partition function Z is of order

$$p(\beta) \asymp \beta^2 \delta^2(1/\beta), \tag{4.37}$$

since $\log^{-\gamma}(1/x)$ is commensurate with the canonical metric $\delta(x)$ via (4.36). Thus, our results are sharp in this logarithmic scale. But when comparing with the Hölder scale, if we write $\delta(x) = x^H$, then the relation (4.37) does not hold. In fact, for large β, $\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log Z(t)$ is much larger than $\beta^2\delta^2(1/\beta) = \beta^{2-2H}$. Hence the Lyapunov exponent's true power of β remains unknown in the Hölder scale, and we cannot base a conjecture for the Hölder scale on our sharp results in the logarithmic scale.

Superlinear and subquadratic growth

In Theorem 4.3.1, we have found the lower bound

$$p(\beta) \geq c\beta^{4/3}$$

holds in all cases, which, as we said in Remark 4.3.1, means the partition function grows always significantly faster than linearly. On the other hand, in order to get the fastest possible growth in β, we see that we should use a potential which is as spatially irregular as possible, e.g., thanks to the lower bound in Theorem 4.3.3, we should work in the logarithmic scale with small γ. But no matter how small γ is, that is, even if W is not continuous anywhere in space – which is the case if and only if $\gamma \leq 1/2$ – the upper bound in Theorem 4.3.3 shows that the Lyapunov exponent will always grow slightly slower than quadratically in β.

However, we can get arbitrarily close to quadratic growth. Indeed, one can repeat the proof of Theorem 4.3.3 assuming, instead of (4.36), that δ is continuous and increasing on $\mathbb{R}_+$, with $\delta(0) = 0$, simply requiring that we are at best in the logarithmic scale, i.e. that for some $\gamma > 0$, $\delta(r) \geq \log^{-\gamma}(1/r)$; we then obtain that (4.37) holds in this general highly irregular case. So we see that by choosing δ which converges to 0 at 0 extremely slowly, we can force the Lyapunov exponent to grow arbitrarily close to quadratically. Still, one can prove that for any separable homogeneous Gaussian field on $\mathbb{R}$, then δ has to be continuous in a neighborhood of 0, which implies that the Lyapunov exponent can never grow quadratically in β.

Special case : spatially white-noise medium

A comparison with the discrete-space polymer is worthwhile. Our proof techniques for establishing the Lyapunov exponent of Z and the estimation of $p(\beta)$ are valid if we replace our Gibbs measure model (4.3) of Brownian paths in $\mathbb{R}$ under the influence of the random field W, by the same model, but on $\mathbb{Z}^d$ instead, i.e. with $\hat{W}$ on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^d$ and with the paths b as continuous-time random walks in $\mathbb{Z}^d$ under P_b. Then, the polymer model in which W is sometimes known as *space-time white noise,* is that in which $\{\hat{W}(1,x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ are IID centered Gaussian variables, with still $t \mapsto \hat{W}(t,x)$ a Brownian motion for each x. This is the most popular model in a Gaussian environment as far as Lyapounov exponent computations for stochastic PDEs are concerned. We omit the proof of the following result. In some sense, it also follows from the calculations in (Carmona, Koralov & Molchanov 2001).

Proposition 4.3.3. *For the polymer model in discrete space in the space-time white-noise environment $\hat{W}$ described above,* $\mathbf{P}$*-almost-surely,*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log Z_t = p(\beta) \asymp \frac{\beta^2}{\log(\beta)}.$$

In relation with the continuous space models which are the subject of this article, we see that to obtain the same behavior as with space-time white noise in discrete space, we need to use precisely the environment W in $\mathbb{R}$ with the logarithmic regularity corresponding to $\gamma = 1/2$, i.e.

$$\delta(r) \asymp \log^{-\gamma}(1/r).$$

In this logarithmic case, this behavior of W happens to be precisely at the threshold in which W becomes almost-surely discontinuous at every point. Nevertheless such a W is still function-valued. Hence, for the purpose of understanding the polymer partition function, there is no need to study the space-time white noise in continuous space, for which $W(t,\cdot)$ is not a bonafide function (only a distribution), and for which the meaning of Z_t itself is difficult to even define.

Another way to interpret the coincidence of behaviors for "*space-time white noise in* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{Z}$" and for "$\gamma = 1/2$" is to say that both models for W are function-valued and exhibit spatial discontinuity : indeed, in discrete space, one extends $W(t,\cdot)$ to $\mathbb{R}$ by making it piecewise constant, in order to preserve independence.

Strong disorder

We finish this section with some remarks on strong disorder, which draw a connection with the next section. We say (see (Rovira & Tindel 2005) and references therein) that the polymer measure $dG_t^x(b)$ exhibits *strong disorder* if its partition function Z satisfies $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log Z_t < Q(0)\beta^2/2$ almost surely. The upper bounds in Theorems 4.3.2 and 4.3.3 show that our Hölder- and logarithmic regularity scales provide wide classes of polymer measures exhibiting strong disorder for $\beta \geq \beta_0$. This also includes all spatially smooth W's, for which $H = 1$. Paragraph 4.3.4.0 above shows that this strong disorder for low temperature also works with even more irregular W.

The condition $\beta \geq \beta_0$ is uncomfortable, however. One would prefer not having any condition on the temperature scale, and physicists expect strong disorder in this our dimensional setting for all $\beta > 0$ (see also (Comets & Yoshida 2005) for a rigorous proof of this statement in a continuous time context).

This is where the polymer's growth (wandering exponent, denoted by α in the next section) can be useful. Since the concept of "strong disorder" was introduced in order to determine whether the random medium has any significant influence on polymer paths b, it is generally accepted to say that a polymer with super-diffusive behavior ($\alpha > 1/2$) exhibits strong disorder. Even though this second definition does not match the common one given above ($p(\beta) = Q(0)\beta^2/2$), it is useful to note that the results of the next section imply the following (see Corollary 4.4.15) : if W exhibits decorrelation that is not too slow, specifically if for large x, $Q(x) \leq cx^{-5/2-\vartheta}$ where $\vartheta > 0$, then the polymer is superdiffusive with exponent any $\alpha < \min\left\{\frac{1}{2} + \frac{\vartheta}{6-2\vartheta}; 3/5\right\}$, and this form of strong

disorder holds for all $\beta > 0$. The specific order of decorrelation $x^{-5/2-\vartheta} \ll x^{-5/2}$ can be quantified by saying that W's decorrelation is certainly faster than the well-known order x^{-2+2H} for the increments of fractional Brownian motion, but the class of such W's still qualifies as containing long-range correlations (polynomial with moderate power).

4.4 Polymer growth

In this section, we will specialize our environment in the following way :

Hypothesis 4.4.1. *We assume that $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by (4.1) is a symmetric positive function, such that $Q(0) < \infty$, decreasing on $\mathbb{R}_+$ and such that there exists a strictly positive constant θ such that*

$$Q(x) = O\Big(\frac{1}{|x|^{3+\theta}}\Big), \qquad as \qquad x \to \pm\infty.$$

The specific correlation decay rate of Q in the above hypothesis appears to be important in order to obtain the highest possible superdiffusion exponent α using our technique (any $\alpha < 3/5$). The end of Section 4.4.4 shows that if one tries use a smaller decay power than $3 + \theta$ above, the result is impeded : α cannot be chosen arbitrarily close to $3/5$ (see Corollary 4.4.15 and its preceeding discussion).

The rate $3+\theta$ can be quantified physically by saying that W decorrelates in space faster than the well-known order x^{-2+2H} for the increments of fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, 1)$, but the class of W's defined by Hypothesis 4.4.1 still qualifies as containing long-range correlated noises (polynomial rate with moderate power), as opposed, for instance, to exponential correlation decay, and *a fortiori* to the case of spatial white noise.

Our results open the interesting question of whether, in continuous space, the Brownian polymer in a Gaussian environment has a super-diffusive behavior with an upper bound determined by the environment's range/rate of spatial correlations.

Remark 4.4.2. *Hypothesis 4.4.1 immediately implies that $Q \in L^1(\mathbb{R})$. Without loss of generality, we will assume throughout that Q is normalized so that $\int_{\mathbb{R}} Q(x)dx = 1$.*

Recall also that the polymer measure $G_t = G_t^0$ has been defined by (4.3). Then, under the conditions of Hypothesis 4.4.1, we will be able to prove the

Theorem 4.4.1. *Let β be any strictly positive real number. Then, for any $\varepsilon > 0$, we have*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{1}{t^{\frac{3}{5}-\varepsilon}}\langle \sup_{s\le t} |b_s|\rangle_t \ge 1\right] = 1.$$

Remark 4.4.3. *This theorem gives an indication of the asymptotic speed of our polymer. Indeed, if we could write that $\sup_{s\le t} |b_s| \sim t^\alpha$ under G_t as $t \to \infty$, then Theorem 4.4.1 would state that $\alpha \ge \frac{3}{5}$.*

Strategy of the proof for Theorem 4.4.1. For $t, \epsilon > 0$, set

$$A_{t,\epsilon} = \left\{ \text{there exists } s_0 \in [t/2, t] \text{ such that} |b_{s_0}| \geq t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}} \right\}.$$

Then we can write

$$\begin{aligned} \frac{\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t}{t^{\frac{3}{5}-\epsilon}} &\geq \frac{t^{\frac{\epsilon}{2}}}{t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}} \left\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \, \mathbf{1}_{A_{t,\epsilon}} \right\rangle_t \\ &\geq t^{\frac{\epsilon}{2}} G_t\Big(A_{t,\epsilon}\Big), \end{aligned}$$

since $\sup_{s\leq t} |b_s| \geq t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}$ on $A_{t,\epsilon}$. Thus

$$\frac{\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t}{t^{\frac{3}{5}-\epsilon}} \geq t^{\frac{\epsilon}{2}} \left(1 - G_t\left(A^c_{t,\epsilon}\right)\right), \tag{4.38}$$

where $A^c_{t,\epsilon} = \{b; \sup_{s\in[t/2,t]} |b_s| \leq t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}\}$ is the complement of $A_{t,\epsilon}$. We will start now a discretization procedure in space : for an arbitrary integer k, and $\alpha > 0$, set

$$I^\alpha_k = t^\alpha[2k-1, 2k+1), \quad \text{and} \quad L^\alpha_k = \{b;\, b_s \in I^\alpha_k \text{ for all } s \in [t/2, t]\}.$$

Then $\tilde{A}_{t,\epsilon} = L_0^{3/5-\epsilon/2}$, and equation (4.38) can be rewritten as

$$\frac{\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t}{t^{\frac{3}{5}-\epsilon}} \geq t^{\frac{\epsilon}{2}} \left(1 - G_t\left(L_0^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}\right)\right).$$

Set now

$$Z^\alpha_t(k) := E_b\left[\mathbf{1}_{L^\alpha_k} \exp\left(-\beta H_t(b)\right)\right].$$

We have

$$\frac{\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t}{t^{\frac{3}{5}-\epsilon}} \geq t^{\frac{\epsilon}{2}} \left(1 - \frac{Z_t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}(0)}{E_b\left[\exp\left(-\beta H_t(b)\right)\right]}\right),$$

by definition of G_t. On the other hand, since the events L_k are disjoint sets we have

$$E_b\left[\exp\left(-\beta H_t(b)\right)\right] \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}} Z_t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}(k).$$

Therefore, we have established that

$$\frac{\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t}{t^{\frac{3}{5}-\epsilon}} \geq t^{\frac{\epsilon}{2}} \left(1 - \frac{Z_t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}(0)}{Z_t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}(0) + Z_t^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}(k)}\right), \tag{4.39}$$

for any integer $k \neq 0$. Suppose now that $W \in \mathcal{A}_t$, where $\mathcal{A}_t$ is defined as

$$\mathcal{A}_t := \{W \,;\ \text{There exists } k^* \neq 0 \text{ such that } Z^\alpha_t(k^*) > Z^\alpha_t(0)\}.$$

Then, choosing $k = k^*$ in (4.39), it is easily seen that

$$\frac{\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t}{t^{\frac{3}{5}-\epsilon}} \geq t^{\frac{\epsilon}{2}} \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) \geq 1,$$

whenever t is large enough. The proof is now easily finished if we can prove the following lemma :

Lemma 4.4.4. *Given a positive real number $\alpha \in (1/2; 3/5)$ and an environment W satisfying Hypothesis 4.4.1, then*

$$\liminf_{t\to\infty} \mathbf{P}(\mathcal{A}_t) = 1. \tag{4.40}$$

The remainder of this article will now be devoted to the proof Lemma 4.4.4. □

4.4.1 Preliminary results

In order to prove Lemma 4.4.4, we shall first go into a series of preliminary results, and we will start by a lemma on the covariance structure of W.

Covariance computations

For a given $k \in \mathbb{Z}$ and $\alpha > 0$, recall that $I_k := I_k^\alpha = t^\alpha[2k-1, 2k+1)$, and set

$$\tilde{\eta}_k = \tilde{\eta}_k^\alpha := \frac{1}{t^{(\alpha+1)/2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{I_k} W(ds, x)dx. \tag{4.41}$$

Then $\{\tilde{\eta}_k; k \in \mathbb{Z}\}$ is a centered Gaussian vector, whose covariance matrix will be called $C(t) = (C_{\ell,k}(t))_{\ell,k\in\mathbb{Z}}$, where

$$C_{\ell,k}(t) = \mathbf{E}\left[\tilde{\eta}_\ell \tilde{\eta}_k\right] = \mathbf{Cov}\left(\tilde{\eta}_\ell;\, \tilde{\eta}_k\right) = \frac{1}{2t^\alpha} \int_{I_k} \int_{I_\ell} Q\left(x-y\right) dxdy. \tag{4.42}$$

where the last equality above follows directly from the definition of W's covariance in (4.7).

Here and below, we omit the superscripts α. We will now proceed to estimate this matrix, and show in particular that $\lim_{t\to\infty} C(t) = \mathrm{Id}$. This can be interpreted as saying that the amount of decorrelation of the potential at distant locations implied by Hypothesis 4.4.1, is enough to guarantee independence of the $\tilde{\eta}_k$ asymptotically.

Proposition 4.4.5. *Let θ be the strictly positive constant defined in Hypothesis 4.4.1, and consider $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$ and $\tau < \theta \wedge 1$. Set also*

$$\lambda \equiv \frac{1}{C_{0,0}(t)} = \frac{1}{C_{k,k}(t)},$$

where $C(t)$ has been defined at (4.42). Then, the elements of $C(t)$ satisfy the following properties :

(i) $\lambda = 1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$.

(ii) $\lambda \sum_{\ell\neq k} |\ell - k|^\tau |C_{\ell,k}(t)| = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$.

Démonstration. Step 0 : initial calculation.

We will only consider the case $k = 0$, the other ones being easily deduced by homogeneity of W. Let us first evaluate $C_{\ell,0}(t)$ for $\ell \geq 0$ (here again, the case $\ell < 0$ is similar, since Q is a symmetric function). Then, a direct application of (4.42) gives

$$C_{\ell,0}(t) = \frac{1}{2t^\alpha} \int_{t^\alpha(2\ell-1)}^{t^\alpha(2\ell+1)} \int_{-t^\alpha}^{t^\alpha} Q(x-y)dxdy.$$

Set now

$$(I) := \frac{1}{2t^\alpha}\left[\int_{t^\alpha(2\ell-1)}^{t^\alpha(2\ell+1)}\int_{-\infty}^{-t^\alpha} Q(x-y)dxdy + \int_{t^\alpha(2\ell-1)}^{t^\alpha(2\ell+1)}\int_{t^\alpha}^{\infty} Q(x-y)dxdy\right].$$

Since $\int_R Q(x-y)dx = 1$ for any $y \in \mathbb{R}$, it is easily checked that

$$C_{\ell,0}(t) = 1 - (I). \tag{4.43}$$

Then, a series of changes of variable yields

$$\begin{aligned}(I) &= \frac{1}{2t^\alpha}\left[\int_{t^\alpha(2\ell-1)}^{t^\alpha(2\ell+1)}\int_{-\infty}^{-t^\alpha-y} Q(u)dudy + \int_{t^\alpha(2\ell-1)}^{t^\alpha(2\ell+1)}\int_{t^\alpha-y}^{\infty} Q(u)dudy\right]\\ &= \frac{1}{2t^\alpha}\left[\int_{-t^\alpha(2\ell+2)}^{-t^\alpha(2\ell)}\int_{-\infty}^{\hat{z}} Q(u)du\hat{dz} + \int_{-t^\alpha(2\ell)}^{-t^\alpha(2\ell-2)}\int_{z}^{\infty} Q(u)dudz\right],\end{aligned}$$

where we have set $\hat{z} = -t^\alpha - y$ and $z = t^\alpha - y$. Thus, denoting by $\bar{F}(z)$ the quantity $\int_z^\infty Q(u)du$, we get

$$\begin{aligned}(I) &= \frac{1}{2t^\alpha}\left[\int_{-t^\alpha(2\ell+2)}^{-t^\alpha(2\ell)}\left(1-\bar{F}(\hat{z})\right)d\hat{z} + \int_{-t^\alpha(2\ell)}^{-t^\alpha(2\ell-2)}\bar{F}(z))dz\right]\\ &= 1 - \frac{1}{2t^\alpha}\int_{-t^{-\alpha}(2\ell+2)}^{-t^\alpha(2\ell)}\bar{F}(z)dz + \frac{1}{2t^\alpha}\int_{-t^\alpha(2\ell)}^{-t^\alpha(2\ell-2)}\bar{F}(z))dz.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Putting together (4.43) and (4.44) one obtains, for any $\ell \geq 0$,

$$C_{\ell,0}(t) = \frac{1}{2t^\alpha}\left[\int_{-t^\alpha(2\ell+2)}^{-t^\alpha(2\ell)}\bar{F}(z)dz - \int_{-t^\alpha(2\ell)}^{-t^\alpha(2\ell-2)}\bar{F}(z)dz\right]. \tag{4.45}$$

Step 1 : proving item (i).

We are now ready to prove item (i). By symmetry of Q, we have $1 - \bar{F}(-z) = \bar{F}(z)$. Thus for $\ell = 0$, equation (4.45) becomes

$$C_{0,0}(t) = \frac{1}{2t^\alpha}\left[\int_{-2t^\alpha}^{0}\left(1-\bar{F}(-z)\right)dz - \int_0^{2t^\alpha}\bar{F}(z)dz\right] = 1 - \frac{1}{t^\alpha}\int_0^{2t^\alpha}\bar{F}(z)dz. \tag{4.46}$$

Now, using the fact that

$$\bar{F}(z) \leq c\left(1 \wedge |z|^{-(2+\theta)}\right), \tag{4.47}$$

which follows directly from Hypothesis 4.4.1, it is easily seen that $C_{0,0}(t) = 1 + O(t^{-\alpha})$, which ends the proof of item (i).

Step 2 : proving item (ii).

In order to show item (ii), we deal with $\ell = 1$ separately from the other cases. Beginning with $\ell \geq 2$, we first get the obvious derivative $\bar{F}'(z) = -Q(z)$, and we will use the fact

that Q is decreasing on $\mathbb{R}_+$ to bound this latter function on an interval in $\mathbb{R}_+$ by its value at the left endpoint. Invoking the fact that $\bar{F}(-v) = 1 - \bar{F}(x)$, we may thus write from equation (4.45)

$$\begin{aligned}
|C_{\ell,0}(t)| &= \frac{1}{2t^\alpha} \left| \int_{-t^\alpha(2\ell)}^{-t^\alpha(2\ell-2)} \left[\bar{F}(z-2t^\alpha) - \bar{F}(z)\right] dz \right| \\
&= \frac{1}{2t^\alpha} \left| \int_{-t^\alpha(2\ell)}^{-t^\alpha(2\ell-2)} \left[\bar{F}(-z+2t^\alpha) - \bar{F}(-z)\right] dz \right| \\
&= \frac{1}{2t^\alpha} \left| \int_{t^\alpha(2\ell-2)}^{2t^\alpha\ell} \left[\bar{F}(z+2t^\alpha) - \bar{F}(z)\right] dz \right| \\
&= \frac{1}{2t^\alpha} \left| \int_{t^\alpha(2\ell-2)}^{2t^\alpha\ell} \left(- \int_z^{z+2t^\alpha} Q(x)\, dx \right) dz \right| \\
&\leq 2t^\alpha Q\left(t^\alpha(2\ell-2)\right) \\
&\leq c t^{-\alpha(2+\theta)} (2\ell-2)^{-3-\theta},
\end{aligned}$$

where the last step holds by Hypothesis 4.4.1 for some constant $c > 0$. We immediately obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^{\infty} |C_{\ell,0}(t)| \ell^\tau &\leq c t^{-\alpha(2+\theta)} \sum_{\ell=2}^{\infty} (2\ell-2)^{-3-\theta} \ell^\tau \\
&\leq c K_{\tau,\theta} t^{-\alpha(2+\theta)}
\end{aligned}$$

for some constant $K_{\tau,\theta}$ as soon as $\tau < 2 + \theta$, which is clearly satisfied by the assumption on τ, and leads to an upper bound in the series in item (ii) which is amply sufficient to prove the proposition, except for the term $\ell = 1$, with which we deal now.

To finish the proof of the proposition, it is indeed sufficient to prove that $t^\alpha C_{1,0}$ is bounded. We first evaluate this quantity from (4.45) :

$$\begin{aligned}
t^\alpha C_{1,0} &= \int_{-4t^\alpha}^{-2t^\alpha} \bar{F}(z)dz - \int_{-2t^\alpha}^{0} \bar{F}(z)dz = \int_{-2t^\alpha}^{0} \left(\bar{F}(z-2t^\alpha) - \bar{F}(z)\right) dz \\
&= \int_{-2t^\alpha}^{0} \left(\int_{z-2t^\alpha}^{z} Q(x)\, dx \right) dz = \int_0^{2t^\alpha} \left(\int_{-z-2t^\alpha}^{-z} Q(x)\, dx \right) dz \\
&= \int_0^{2t^\alpha} \left(\int_z^{z+2t^\alpha} Q(x)\, dx \right) dz.
\end{aligned}$$

Next we separate the first unit of the z-integral from its remainder : $t^\alpha C_{1,0} = A + B$ where we define $A := \int_0^1 \left(\int_z^{z+2t^\alpha} Q(x)\, dx \right) dz$ and $B := \int_1^{1\wedge 2t^\alpha} \left(\int_z^{z+2t^\alpha} Q(x)\, dx \right) dz$. Since $\int_{\mathbb{R}} Q = 1$, we immediately have $A \leq 1$ which is the only term to deal with when $t \leq 2^{-1/\alpha}$.

When $t > 2^{-1/\alpha}$, for the term B, we use Hypothesis 4.4.1 : for some constant c,

$$\begin{aligned} B &\leq c \int_1^{2t^\alpha} \left(\int_z^{z+2t^\alpha} x^{-3-\theta} dx \right) dz \\ &= \frac{c}{(\theta+1)(\theta+2)} \left(1 - 2^{-\theta} + 4^{-\theta-1}\right) (t^\alpha)^{-(\theta+1)} \\ &\leq \frac{c}{(\theta+1)(\theta+2)}. \end{aligned}$$

This finishes the proof of the proposition. □

Interaction between b and W

We will now try to get some quantitative information about the way b interacts with the random medium W when the Brownian motion is localized by the event L_k^α. We begin by introducing two quantities. First, in order to simplify some t-dependent normalizers, we renormalize $\tilde{\eta}$ as

$$\eta_\ell := \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}}}{2} \tilde{\eta}_\ell = \frac{1}{2t^\alpha} \int_{\frac{t}{2}}^t \int_{I_\ell} W(ds, x) dx, \tag{4.48}$$

and will not need to revert to using $\tilde{\eta}$. We also need a vector $v = v(b_s; t/2 \leq s \leq t)$ of $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, defined for each $\ell \in \mathbb{Z}$ by

$$v_\ell = 4t^{\alpha-1} \mathbf{E} \left[\eta_\ell \int_{\frac{t}{2}}^t W(ds, b_s) \right]. \tag{4.49}$$

Then we will prove, in a sense, that v_ℓ looks like $\mathbf{1}_{\{k\}}(\ell)$ on L_k^α. To this purpose, for a fixed $k \in \mathbb{Z}$, and $\tau < \theta$ (remember that θ is defined at Hypothesis 4.4.1), let us consider the norm $\|\cdot\|_{\tau,k}$ defined on $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ by

$$\|x\|_{\tau,k} = |x_k| + \sum_{i \neq k} |x_i| |i-k|^\tau. \tag{4.50}$$

Remark 4.4.6. *It will be essential in the sequel to control the decay of v_ℓ, and also of δ_ℓ (defined at Proposition 4.4.8) when $|\ell| \to \infty$. It will be used for instance in relations (4.74) and (4.79). This is why we have introduced here this norm $\|\cdot\|_{\tau,k}$.*

We are now ready to state a first result about the interaction between b and W.

Proposition 4.4.7. *Suppose $b \in L_k^\alpha$. Then the vector v given by (4.49) satisfies the following properties :*

(i) Let $\|\cdot\|_{\tau,k}$ be the norm defined at (4.50). Then

$$\|v\|_{\tau,k} - v_k = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

(ii) For t large enough, there exist two strictly positive real numbers $\underline{c}$ and $\overline{c}$ such that

$$\underline{c} \leq v_k \leq \overline{c}.$$

Démonstration. Let us start with item (i). To perform calculations rigorously, it is best to use the environment representation (4.8). Recall also that η_k is given by (4.48). Then

$$\begin{aligned} v_\ell &= \frac{2}{t}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}}\exp(iub_s)\nu(ds,du)\int_{I_\ell}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}}\exp(iux)\nu(ds,du)dx\right] \\ &= \frac{2}{t}\int_{I_\ell}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}}\exp(iub_s)\nu(ds,du)\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}}\exp(iux)\nu(ds,du)\right]dx. \end{aligned}$$

Thanks to (4.10), and according to the fact that $\hat{Q}$ is the Fourier transform of Q, we thus have

$$\begin{aligned} v_\ell &= \frac{2}{t}\int_{I_\ell}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{\mathbb{R}}\exp(iu(b_s-x))\hat{Q}(du)ds\right]dx \\ &= \frac{2}{t}\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{I_\ell}Q(b_s-x)dxds \qquad (4.51) \\ &\leq \sup_{s\in[t/2,t]}\int_{I_\ell}Q(b_s-x)dx. \qquad (4.52) \end{aligned}$$

However, if $\ell \neq k$, on the event L_k^α, it is easily checked that, for $s \in [t/2, t]$, and for all $x \in I_\ell$, we have

$$(2|\ell-k|-2)\,t^\alpha \leq |b_s - x|\,.$$

According to the fact that Q is a positive decreasing function on $\mathbb{R}_+$, and $Q(x) = Q(|x|)$, for each $s \in [t/2, t]$ we can conclude that

$$\begin{aligned} \int_{I_\ell}Q(b_s-x)dx = \int_{I_\ell}Q(|b_s-x|)dx &\leq \int_{t^\alpha(2\ell+1)}^{t^\alpha(2\ell+1)}Q((2|\ell-k|-2)\,t^\alpha)dx \\ &\leq 2t^\alpha Q(t^\alpha(2|\ell-k|-2)). \qquad (4.53) \end{aligned}$$

Consequently, putting together equations (4.52) and (4.53), we get

$$\begin{aligned} \|v\|_{\tau,k} = v_k + \sum_{\ell\neq k}|\ell-k|^\tau v_\ell &\leq v_k + 2t^\alpha\sum_{\ell\neq k}|\ell-k|^\tau Q(t^\alpha(2|\ell-k|-2)) \\ &\leq v_k + \frac{\kappa}{t^{\alpha(2+\theta)}}\sum_{\ell\neq k}|\ell-k|^{-(3+\theta-\tau)} \leq v_k + \frac{\kappa}{t^{\alpha(2+\theta)}}, \qquad (4.54) \end{aligned}$$

where κ is a positive constant that can change from from one occurence to the next, and where we have used again Hypothesis 4.4.1. It is now readily checked that $\|v\|_{\tau,k} \leq v_k + O(t^{-\alpha})$, which ends the proof of item (i).

Let us prove now the item (ii) : go back to equation (4.51) and set $\ell = k$. Then we get

$$\inf_{s\in[\frac{t}{2},t]}\int_{I_k}Q(b_s-x)dx \leq v_k \leq \sup_{s\in[\frac{t}{2},t]}\int_{I_k}Q(b_s-x)dx \leq \int_{\mathbb{R}}Q(u)du = 1$$

To find a lower bound on the left-hand side, we now make use of the non-degeneracy assumption, as noted in Remark 4.4.2 : since Q is an even function, we get $\int_0^\infty Q(x)\,dx =$

1/2. But if $b \in L^\alpha_k$, then for any $s \in [t/2, t]$, we have that the interval $b_s - I_k$ contains either $[0, t^\alpha]$ or $[-t^\alpha, 0]$, so that, again by the evenness of Q,

$$\int_{I_k} Q(b_s - x)dx \geq \int_0^{t^\alpha} Q\,(x)\,dx.$$

The latter quantity, which tends to 1/2 when $t \to \infty$, can be made to exceed 1/4 for t large enough. This finishes the proof of item (ii) with $\underline{c} = 1/4$ and $\overline{c} = 1$, and of the proposition. □

Inversion of $C(t)$

In this section, we will be concerned with the operator $C^{-1}(t)$, where $C(t)$ has been defined by relation (4.42), and more specifically, we will try to get some information about the solution δ to the system $C(t)x = v$. The importance of δ stems from the fact that the variables η_k will be independent of $-H_t(b) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j\eta_j$, which will be useful for further computations (see Proposition 4.4.14). However, we have already seen that $C(t)$ behaves asymptotically like the identity matrix, and thus the vector δ should be of the same kind as v. This is indeed the case, and will be proved in the following Proposition :

Proposition 4.4.8. *Under Hypothesis 4.4.1, suppose in addition that $b \in L^\alpha_k$. Set $l_{\tau,k} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}; \|x\|_{\tau,k} < \infty\}$. Then*

(i) The operator $C(t)$ is invertible in $l_{\tau,k}$. We will set then $\delta := C^{-1}(t)v$.

(ii) There exist some strictly positive real numbers $\underline{d}$ and $\overline{d}$ such that

$$\underline{d} \leq \delta_k \leq \overline{d}.$$

(iii) The following relation holds true :

$$\|\delta\|_{\tau,k} - \delta_k = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right). \tag{4.55}$$

(iv) On the probability space $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, the family $\{\eta_l; l \in \mathbb{Z}\}$ is independent of $-H_t(b) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j\eta_j$.

Remark 4.4.9. *Notice that Proposition 4.4.8 contains a considerable amount of the information which will be used for the proof of Lemma 4.4.4. Indeed, inequality (4.83) will be obtained thanks to item (iv), item (iii) will be invoked for inequality (4.79), and item (ii) will be essential in order to define the random variables $\check{\eta}_0$ and $\check{\eta}_k$ at (4.77).*

Proof of Proposition 4.4.8. (i) We choose the standard operator norm on $l_{\tau,k}$: a matrix A is defined to be in the linear operator space $\mathcal{L}_{\tau,k}$ if the norm

$$\|A\|_{\tau,k} := \sup_{x\in l_{\tau,k}:\|x\|_{\tau,k}=1} \|Ax\|_{\tau,k}$$

is finite. Then, on one hand, the following relations are satisfied since we are dealing with the operator norm on $l_{\tau,k}$: for $D_1, D_2 \in \mathcal{L}_{\tau,k}$ and $x \in l_{\tau,k}$:

$$\|D_1x\|_{\tau,k} \leq \|D_1\|_{\tau,k}\|x\|_{\tau,k}, \quad \text{and} \quad \|D_1 + D_2\|_{\tau,k} \leq \|D_1\|_{\tau,k} + \|D_2\|_{\tau,k}. \tag{4.56}$$

On the other hand, let us now prove that, setting $A(t) := \mathrm{Id} - \lambda C(t)$, Proposition 4.4.5 yields that $\|A(t)\|_{\tau,k} = O(t^{-\alpha})$, and thus

$$\|A(t)\|_{\tau,k} < 1 \tag{4.57}$$

if t is large enough. First recall that by definition of $C(t)$ and λ, denoting by $\dot{C}(t)$ the matrix $C(t)$ deprived of its diagonal, we have

$$A(t) = -\lambda \dot{C}(t).$$

By Proposition 4.4.5 item (i), λ tends to 1 as $t \to \infty$. Therefore, it is sufficient to show that $\|\dot{C}(t)\|_{\tau,k} = O(t^{-\alpha})$. Thus let $x \in l_{\tau,k}$ such that $\|x\|_{\tau,k} = 1$. In other words,

$$|x_k| + \sum_{i \neq k} |x_i| \, |i-k|^{\tau} = 1.$$

Now we calculate the two terms that form $\|\dot{C}(t)x\|_{\tau,k}$. The first is

$$\begin{aligned}
\left|\left(\dot{C}(t)x\right)_k\right| &= \left|\sum_{j\neq k} C_{kj}(t)\, x_j\right| \leq \sum_{j\neq k} |C_{kj}(t)\, x_j| \\
&\leq \left(\sum_{j\neq k} |x_j| \, |k-j|^{\tau}\right)\left(\sum_{j\neq k} |C_{kj}(t)| \, |k-j|^{\tau}\right) \\
&\leq 1 \cdot O\left(t^{-\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

where we used the assumption $\|x\|_{\tau,k} = 1$ and the result of Proposition 4.4.5 item (ii). The second term in $\|\dot{C}(t)x\|_{\tau,k}$ equals

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq k} \left|\sum_{j\neq i} C_{ij}(t)\, x_j\right| |i-k|^{\tau} \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j| \sum_{i\neq j; i\neq k} |C_{ij}(t)| \, |i-k|^{\tau} =: K_2;
\end{aligned}$$

we split this sum up according to $j = k$ or $j \neq k$:

$$\begin{aligned}
K_2 &\leq |x_k| \sum_{i\neq k} |C_{ik}(t)| \, |i-k|^{\tau} + \sum_{j\neq k} |x_j| \sum_{i\neq j; i\neq k} |C_{ij}(t)| \, |i-j+j-k|^{\tau} \\
&\leq |x_k| \sum_{i\neq k} |C_{ik}(t)| \, |i-k|^{\tau} + \sum_{j\neq k} |x_j| \sum_{i\neq j; i\neq k} |C_{ij}(t)| \, |i-j|^{\tau} \\
&+ \sum_{j\neq k} |x_j| \, |j-k|^{\tau} \sum_{i\neq j; i\neq k} |C_{ij}(t)|
\end{aligned}$$

where in the last line we used the fact that $|a+b|^{\tau} \leq |a|^{\tau} + |b|^{\tau}$ whenever $\tau \in (0,1)$.

Now using the fact that $\sum_{i\neq j; i\neq k} |C_{ij}(t)|$ is bounded above by $\sum_{i\neq j} |C_{ij}(t)| \, |i-j|^{\tau}$, and the latter is $O(t^{-\alpha})$ by Proposition 4.4.5 item (ii), we can assert $K_2 \leq O(t^{-\alpha})$, which, combined with (4.58), implies our goal $\|\dot{C}(t)\|_{\tau,k} = O(t^{-\alpha})$, and thus (4.57).

This contraction relation (4.57) finishes the proof of (i) because it allows us to define $C^{-1}(t)$ in $\mathcal{L}_{\tau,k}$ by a Von Neumann type series of the form

$$C^{-1}(t) = \lambda \sum_{j\geq 0} A^j. \tag{4.59}$$

(ii) For t large enough, set $\delta = C^{-1}(t)v$, which makes sense since $v \in l_{\tau,k}$. Then, thanks to the fact that $C^{-1}(t)$ can be defined by relation (4.59), we have

$$\begin{aligned}\delta_k = \lambda\Big(v_k + \sum_{j\geq 1}(A^j v)_k\Big) &\geq \lambda\Big(v_k - \sum_{j\geq 1}\|A^j v\|_{\tau,k}\Big)\\ &\geq \lambda\Big(v_k - \sum_{j\geq 1}\|A\|^j_{\tau,k}\|v\|_{\tau,k}\Big),\end{aligned}$$

where we have used the relations $x_k \geq -\|x\|_{\tau,k}$ and (4.56). Hence, since $\|A(t)\|_{\tau,k} = O(t^{-\alpha})$, we obtain

$$\begin{aligned}\delta_k \geq \lambda\left(v_k - \frac{\|A\|_{\tau,k}}{1-\|A\|_{\tau,k}}\|v\|_{\tau,k}\right) &\geq \lambda\left(v_k + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right)\\ &\geq \underline{d} + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\end{aligned} \tag{4.60}$$

according to the properties of v shown at Proposition 4.4.7. The upper bound on δ_k can now be shown by the same type of argument, which ends the proof of our claim.

(iii) Let us evaluate now the quantity $\|\delta\|_{\tau,k} - \delta_k$: thanks to relations (4.56) and (4.60), we get

$$\begin{aligned}\|\delta\|_{\tau,k} - \delta_k &\leq \|C(t)^{-1}\|_{\tau,k}\|v\|_{\tau,k} - \delta_k\\ &\leq \left(\|C(t)^{-1}\|_{\tau,k}\|v\|_{\tau,k} - \lambda v_k + \frac{\lambda\|A\|_{\tau,k}}{1-\|A\|_{\tau,k}}\|v\|_{\tau,k}\right).\end{aligned}$$

Thus, using again that fact that $C^{-1}(t)$ is defined by equation (4.59) and relation (4.56), we obtain

$$\begin{aligned}\|\delta\|_{\tau,k} - \delta_k &\leq \lambda\left(\frac{1+\|A\|_{\tau,k}}{1-\|A\|_{\tau,k}}\|v\|_{\tau,k} - v_k\right)\\ &= \lambda\left(\|v\|_{\tau,k} - v_k\right) + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\end{aligned}$$

where in the last two steps, we have invoked, respectively, item (i) and Proposition 4.4.7.

This concludes our proof.

(iv) Recall that, by definition, $C(t) = t^{-(1-\alpha)}\mathbf{Cov}(\eta)$. Hence

$$\begin{aligned}\delta_j = \left(C^{-1}(t)\, v\right)_j &= \frac{1}{4}t^{1-\alpha}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\mathbf{Cov}(\eta)\right]^{-1}_{jk} v_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\mathbf{Cov}(\eta)\right]^{-1}_{jk}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t} W(ds, b_s)\,\eta_k\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\mathbf{Cov}(\eta)\right]^{-1}_{jk}\mathbf{E}\left[\left(-H_t(b)\right)\eta_k\right],\end{aligned}$$

we have the following standard calculation for any $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left(-H_t(b) - \sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_j\eta_j\right)\eta_\ell\right] \\ &= -\mathbf{E}\left[H_t(b)\,\eta_\ell\right] + \mathbf{E}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\mathbf{Cov}(\eta)\right]^{-1}_{jk}\mathbf{E}\left[H_t(b)\,\eta_k\right]\eta_j\eta_\ell \\ &= -\mathbf{E}\left[H_t(b)\,\eta_\ell\right] + \mathbf{E}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\mathbf{Cov}(\eta)\right]^{-1}_{jk}\left[\mathbf{Cov}(\eta)\right]_{j\ell}\mathbf{E}\left[H_t(b)\,\eta_k\right] \\ &= -\mathbf{E}\left[H_t(b)\,\eta_\ell\right] + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{k\ell}\mathbf{E}\left[H_t(b)\,\eta_k\right] = 0.\end{aligned}$$

Now since for fixed b, $H_t(b)$ and the sequence η are both linear functionals of a same Gaussian field, they form a jointly Gaussian vector, and are thus independent. □

Application of Girsanov's theorem

In our context, the cost of having b living in the interval $I_k = [t^\alpha(2k-1), t^\alpha(2k+1)]$ instead of $I_0 = [-t^\alpha, t^\alpha]$ can be calculated explicitely thanks to Girsanov's theorem : given an integer k, a real number t and a realization of the environment W, we define a new environment by setting $W^{k,t}(ds, x) := W(ds, x + h(s))$, where

$$h(s) := \min(2s/t, 1)2kt^\alpha,$$

or more rigorously,

$$W^{k,t}(s, x) := \int_0^s W(du, x + h(u)). \tag{4.61}$$

A very simple and useful result that we can now prove is the following.

Lemma 4.4.10. *The random fields defined by* $W = \{W(s, x) : (s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$ *and* $W^{k,t} = \{\int_0^s W(du, u + h(u)) : (s, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$ *have the same distribution.*

Démonstration. The easiest way to establish this result is to revert to the representation of W using the Gaussian measure ν, i.e. (4.8), and also its consequence (4.11), so that

$$W^{k,t}(s, x) := \int_0^s \int_{\mathbb{R}} e^{\imath\lambda(x+h(u))}\nu(ds, du).$$

Since the law of this centered Gaussian field is determined by its covariance structure only, it is now immediate to check, using the formulas (4.9) and (4.10), that it has the same law as W, since we have

$$W^{k,t}(s,x) := \int_0^s \int_{\mathbb{R}} e^{\imath\lambda x}\nu(ds,du).$$

The calculations are left to the reader. □

Alternate Proof. It is also possible to invoke a direct proof of this fact, using L^2 approximations of $W^{k,t}(s,x)$ by Riemann sums. For fixed s,x, $W^{k,t}(s,x)$ can be written as a limit in $L^2(\Omega)$, as $n\to\infty$, of the sum $\sum_{i=1}^n J_i^{k,t}$ of the increments $J_i^{k,t} := W([si/n, s(i+1)/n], x+h(si/n))$, whose individual laws are identical to those of the J_i's defined without adding the shift $h(si/n)$, because W is spatially homogeneous. Since the $J_i^{k,t}$'s are independent as i changes, (as are the J_i's), $W^{k,t}(s,x)$ and $W(s,x)$ have the same distribution for fixed s,x; we omit the end of this – more intuitive but less rigorous – proof. □

We will also need to introduce a modified partition function $\tilde{Z}$ defined by

$$\tilde{Z}_t^\alpha(k) = E_b\left[\mathbf{1}_{L_k^\alpha}(b)\exp\left(\beta\left(\int_0^t W(ds,b_s) - \sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_j\eta_j\right)\right)\right]. \tag{4.62}$$

In the sequel, we will have to stress the dependence of these partition functions on the environment under consideration. We will thus set $\tilde{Z}_t^\alpha(k) = \tilde{Z}_t^\alpha(k,W)$. With these notations in mind, we can prove the following proposition :

Proposition 4.4.11. *Given two positive real numbers α and t, and an integer k fixed, we have*

$$\tilde{Z}_t^\alpha(k,W) \geq \exp\left[-4(k+k^2)t^{2\alpha-1}\right]\ \tilde{Z}_t^\alpha(0,W^{k,t}). \tag{4.63}$$

Démonstration. Step 1 : using Girsanov's theorem. Given k and t, and with $h(s) = \min(2s/t,1)2kt^\alpha$ as defined above, we associate to a path b a shifted path b' by the relation

$$b'_s \equiv b_s - h(s), \qquad \text{for} \qquad s\in\mathbb{R}.$$

Notice that this shift transforms a path which lives in the interval I_k for all $s\in[t/2,t]$ into a path which belongs to I_0 in the same time interval. More precisely, one immediately checks that $\mathbf{1}_{L_k^\alpha}(b) = \mathbf{1}_{L_0^\alpha}(b')$. Let us call $M_t(b')$ the Girsanov density involved in the shift between b and b', that is

$$M_t(b') = \exp\left(-b'_{t/2}4kt^{\alpha-1} - 4k^2t^{2\alpha-1}\right).$$

The choice of $h(s) = 4kst^{\alpha-1}$ for $s\in[0,t/2]$ is made to obtain a continuous function that starts at 0, and is piecewise linear (constant over $[t/2,t]$); this function has the advantage that its Girsanov "energy" is minimal, ensuring that our proof is most efficient. It is possible that other, non-linear, choices could have fulfilled our purposes, but this would be an unnecessary complication.

For sake of clarity, let us stress now the dependence of the random variables δ, η, etc., on the data of our problem : it is readily checked for instance that

$$\eta_j = \eta_j(W), \quad \text{and} \quad \delta_j = \delta_j(b, \mathcal{L}(W)),$$

where a function of (W) represents its dependence on the increments of W in the interval $[0,t]$, as a random variable, where the sumbol $\mathcal{L}(\cdot)$ denotes the law (distribution) of a process on $[0,t]$, and where a function of b represents its dependence on the fixed path b. Then, adopting this convention, we have

$$\tilde{Z}_t^\alpha(k,W) = E_b\left[\mathbf{1}_{L_k^\alpha} \exp\left(\beta \int_0^t W(ds, b'_s + h(s)) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j(b' + h, \mathcal{L}(W))\,\eta_j(W)\right)\right].$$

After applying Girsanov's transformation, noting that by definition, $\int_0^t W(ds, b'_s + h(s)) = \int_0^t W^{k,t}(ds, b'_s)$, we get (recall that b' is a standard Brownian motion under the new probability, so that it is notationally legitimate to write b instead of b', and to denote expectation with respect to the new measure by E_b) :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_t^\alpha(k,W) = E_b\Bigg[\mathbf{1}_{L_0^\alpha(b)} M_t(b) \exp\Bigg(\beta\Bigg(\int_0^t W^{k,t}(ds, b_s) \\ - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j(b+h, \mathcal{L}(W))\,\eta_j(W)\Bigg)\Bigg)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.64}$$

Step 2 : reexpressing the transformed η. One should now compare the random variables $\eta_j(W)$ and $\eta_j(W^{k,t})$: by definition of these quantities, we have

$$\begin{aligned}\eta_j(W^{k,t}) &= \frac{1}{t^{2\alpha}} \int_{(2j-1)t^\alpha}^{(2j+1)t^\alpha} \int_{t/2}^t W(ds, x + 2kt^\alpha)dx \\ &= \frac{1}{t^{2\alpha}} \int_{(2(j+k)-1)t^\alpha}^{(2(j+k)+1)t^\alpha} \int_{t/2}^t W(ds, x)dx \\ &= \eta_{j+k}(W). \end{aligned} \tag{4.65}$$

In particular, the law of $\eta(W^{k,t})$, considered as the set of random variables forming that sequence, is the same as the law of $\eta(W)$, a fact which we will not use in this proof, but will be crucial in the proof of the next lemma.

Step 3 : reexpressing the transformed δ. Along the same lines as (4.65), we now show that

$$\delta_j(b + h, \mathcal{L}(W)) = \delta_{j-k}\left(b, \mathcal{L}(W^{k,t})\right). \tag{4.66}$$

To see this, we recall the definition of δ : we have

$$\delta = \delta(b + h, \mathcal{L}(W)) = [C(t)]^{-1} v = [C(t, \mathcal{L}(W))]^{-1} v(b + h, \mathcal{L}(W)),$$

where we calculate

$$\begin{aligned}
&C_{\ell,m}\left(t,\mathcal{L}\left(W\right)\right)\\
&=\frac{1}{t^{(\alpha+1)}}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{(2m-1)t^{\alpha}}^{(2m+1)t^{\alpha}}W(ds,x)dx\cdot\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{(2\ell-1)t^{\alpha}}^{(2\ell+1)t^{\alpha}}W(ds,x)dx\right]\\
&=\frac{1}{t^{(\alpha+1)}}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{(2(m-k)-1)t^{\alpha}}^{(2(m-k)+1)t^{\alpha}}W(ds,x+2kt^{\alpha})dx\cdot\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{(2(\ell-k)-1)t^{\alpha}}^{(2(\ell-k)+1)t^{\alpha}}W(ds,x+2kt^{\alpha})dx\right]\\
&=\frac{1}{t^{(\alpha+1)}}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{I_{m-k}}W^{k,t}(ds,x)dx\cdot\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{I_{\ell-k}}W^{k,t}(ds,x)dx\right]\\
&=C_{\ell-k,m-k}\left(t,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right),
\end{aligned}$$

and similarly

$$\begin{aligned}
v_{\ell}\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)&=4t^{\alpha-1}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{(2\ell-1)t^{\alpha}}^{(2\ell+1)t^{\alpha}}W(ds,x)dx\cdot\int_{\frac{t}{2}}^{t}W(ds,b_{s}+h\left(s\right))\right]\\
&=4t^{\alpha-1}\mathbf{E}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t}\int_{(2(\ell-k)-1)t^{\alpha}}^{(2(\ell-k)+1)t^{\alpha}}W(ds,x+h\left(s\right))dx\cdot\int_{\frac{t}{2}}^{t}W(ds,b_{s}+h\left(s\right))\right]\\
&=4t^{\alpha-1}\mathbf{E}\left[\int_{I_{\ell}}\int_{\frac{t}{2}}^{t}W^{k,t}(ds,x)dx\cdot\int_{\frac{t}{2}}^{t}W^{k,t}(ds,b_{s})\right]\\
&=v_{\ell-k}\left(b,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right).
\end{aligned}$$

We may thus write that the definition of $\delta\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)$ is equivalent to,

$$\begin{aligned}
&\forall\ell\in\mathbb{Z}:\sum_{m\in\mathbb{Z}}C_{\ell,m}\left(t,\mathcal{L}\left(W\right)\right)\delta_{m}\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)=v_{\ell}\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)\\
&\quad\Longleftrightarrow\\
&\forall\ell\in\mathbb{Z}:\sum_{m\in\mathbb{Z}}C_{\ell-k,m-k}\left(t,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right)\delta_{m}\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)=v_{\ell-k}\left(b,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right)\\
&\quad\Longleftrightarrow\\
&\forall\ell\in\mathbb{Z}:\sum_{m\in\mathbb{Z}}C_{\ell,m}\left(t,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right)\delta_{m+k}\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)=v_{\ell}\left(b,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right).
\end{aligned}$$

This last statement is equivalent to saying $\delta_{m+k}\left(b+h,\mathcal{L}\left(W\right)\right)=\delta_{m}\left(b,\mathcal{L}\left(W^{k,t}\right)\right)$, which is precisely the statement of (4.66).

Step 4 : conclusion. Plugging equations (4.65) and (4.66) into (4.64), we end up with

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{t}^{\alpha}(k,W)=E_{b}\Bigg[\mathbf{1}_{L_{0}^{\alpha}(b)}M_{t}(b)\exp\Bigg(\beta\Bigg(\int_{0}^{t}W^{k,t}(ds,b_{s})\\
-\sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_{j-k}\left(b,\mathcal{L}(W^{k,t})\right)\eta_{j-k}(W^{k,t})\Bigg)\Bigg)\Bigg],\quad(4.67)
\end{aligned}$$

To conclude the proof of the proposition, notice that for $b \in L_0^\alpha$, we get $\left|b_{t/2}\right| \leq t^\alpha$, and therefore

$$M_t(b) \geq \exp\left(-4kt^{2\alpha-1} - 4k^2t^{2\alpha-1}\right). \tag{4.68}$$

Combining (4.67) and (4.68), and renumbering the sum for $j \in \mathbb{Z}$ as $j' = j - k \in \mathbb{Z}$, we recognize the term $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{k,t})$, and the proof is complete. □

The above proof has an important consequence which we record here for use at a crucial point in the next section.

Lemma 4.4.12. *Let*

$$X(W,b) = -H_t(b) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j \eta_j = \int_0^t W(ds, b_s) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j(b,W)\,\eta_j(W)$$

and therefore

$$X\left(W^{k,t}, b\right) = \int_0^t W^{k,t}(ds, b_s) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j\left(b, W^{k,t}\right)\eta_j\left(W^{k,t}\right).$$

Also denote by $\eta(W)$ the entire sequence $\{\eta_j(W) : j \in \mathbb{Z}\}$. Then for each b, $X(W,b)$ and $\eta(W)$ are independent, and for each $k \in \mathbb{Z}$, and each b, $X\left(W^{k,t}, b\right)$ and $\eta(W)$ are independent.

Démonstration. We have already proved in Proposition 4.4.8 (iv) that $X(W,b)$ and $\eta(W)$ are independent, which is the first half of what we have to prove. This implies in addition that $X\left(W^{k,t}, b\right)$ and $\eta\left(W^{k,t}\right)$ are also independent because the random fields W and $W^{k,t}$ have the same distribution (Lemma 4.4.10).

To conclude the proof this lemma, we simply invoke the portion of the proof of the previous proposition which shows the specific shift equality relation $\eta_{j+k}(W) = \eta_j\left(W^{k,t}\right)$, from (4.65) : this is a $\mathbf{P}$-almost-sure equality in Ω. This implies that the sets of points in the sequences $\{\eta_j(W) : j \in \mathbb{Z}\}$ and $\left\{\eta_j\left(W^{k,t}\right) : j \in \mathbb{Z}\right\}$ are precisely the same sets of random variables. Therefore, for each k and b, $X\left(W^{k,t}, b\right)$ is independent of the entire sequence $\eta(W)$. □

4.4.2 Proof of Lemma 4.4.4

Recall that we have reduced our problem to the evaluation of $\mathbf{P}(\mathcal{B}_t)$, where

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{A}_t^c = \{\text{For all } k \in \mathbb{Z},\ Z_t^\alpha(k) \leq Z_t^\alpha(0)\},$$

and one wishes to show that $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\mathcal{B}_t) = 0$. Then a first step in order to prove this claim is to truncate $\mathcal{B}_t$: for a positive integer M let $\dot{\mathbb{Z}}_M$ and $\bar{\mathbb{Z}}_M$ be the sets defined respectively by

$$\bar{\mathbb{Z}}_M = \{-M, -M+1, \ldots, M-1, M\} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbb{Z}}_M = \bar{\mathbb{Z}}_M \backslash \{0\}, \tag{4.69}$$

and $\mathcal{B}_{M,t}$ the event defined by

$$\mathcal{B}_{M,t} = \left\{ \text{For all } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M,\ Z_t^\alpha(k) \leq Z_t^\alpha(0) \right\}.$$

Then obviously, $\mathbf{P}(\mathcal{B}_t) \leq \mathbf{P}(\mathcal{B}_{M,t})$, and we only need to prove that $\mathbf{P}(\mathcal{B}_{M,t})$ tends to 0 as $t \to \infty$.

Here is a brief account on the strategy we will follow in order to complete our proof.

(1) Recall that we are trying to bound

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{B}_{M,t}\right) = \mathbf{P}\left(E_b\left[\mathbf{1}_{L_k} e^{-\beta H_t(b)}\right] < E_b\left[\mathbf{1}_{L_0} e^{-\beta H_t(b)}\right] \text{ for all } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M \right). \tag{4.70}$$

A natural idea is then to split the conditions $E_b[\mathbf{1}_{L_k} e^{-\beta H_t(b)}] < E_b[\mathbf{1}_{L_0} e^{-\beta H_t(b)}]$ in terms of a condition involving the random variables η_l introduced at (4.48), on which we have a reasonable control, and another set of conditions involving some random variables independent of the family $\{\eta_l; l \in \mathbb{Z}\}$. However, we have already seen in Proposition 4.4.8 that $-H_t(b) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j \eta_j$ is independent of $\{\eta_l; l \in \mathbb{Z}\}$. Thus, a natural choice will be to replace $e^{-\beta H_t(b)}$ by $e_t(b)$ in the expression (4.70), where $e_t(b)$ is defined by

$$e_t(b) := \exp\left(-\beta \left(H_t(b) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j \eta_j \right) \right).$$

Of course, this induces a correction term $\exp(\beta \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j \eta_j)$, but this term can be controlled, since the covariance structure of the family $\{\eta_l; l \in \mathbb{Z}\}$ is given by Proposition 4.42, and the vector δ is controlled by means of Proposition 4.4.8. Up to a negligible term, we will be allowed to bound $\mathbf{P}(\mathcal{B}_{M,t})$ by a probability of the form

$$\mathbf{P}\left(\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \frac{\tilde{Z}_t^\alpha(k)}{\tilde{Z}_t^\alpha(0)} < \exp(2\gamma t^{2\alpha-1} + \eta_k^*) \right), \tag{4.71}$$

where $\tilde{Z}_t^\alpha(k) = E_b[\mathbf{1}_{L_k} e_t(b)]$, as was defined in Section 4.4.1.0 on Girsanov's theorem, the term $t^{2\alpha-1}$ comes from the sharp estimates of δ in Proposition 4.4.8, and the random variable η_k^* is one which is defined using only the random variables η, because it results from using $e_t(b)$ instead of $e^{-H_t(b)}$. The effect of η_k^* can be studied separately from the behavior of the ratio $\tilde{Z}_t^\alpha(k)/\tilde{Z}_t^\alpha(0)$, by the independence property of these two quantities.

(2) Notice that up to now, we have chosen our parameters carefully in order to get a penalization of order $\exp(2\gamma t^{2\alpha-1})$ in (4.71). This was chosen to be consistent with the correction $\exp(-\zeta t^{2\alpha-1})$ must to impose on b if we wish that it lives the second half of his life in I_k, as we showed by using Girsanov's theorem in Proposition 4.4.11. In fact, we will be able to bound $\mathbf{P}(\mathcal{B}_{M,t})$ by $\mathbf{P}(F_M)$, where the event F_M is defined by

$$F_M = \left\{ \text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \frac{\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{k,t})}{\tilde{Z}_t^\alpha(0, W)} < \exp(\hat{\gamma} t^{2\alpha-1} + \eta_k^*) \right\},$$

for a constant $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(M)$, where the shifted environments $W^{k,t}$ are defined in (4.61).

(3) It turns out that the random variable η_k^* is optimally chosen to be of the order $\eta_0 - \eta_k$ (see the definition (4.77) we chose below). We are now considering a set F_M involving the random variables $\tilde{Z}_t$ and η_k^*, and this will allow us to take advantage of the following facts :

1. The ratio $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{k,t})/\tilde{Z}_t^\alpha(0, W)$ cannot be too small at many different sites $k \in \dot{\mathbb{Z}}_M$, by translation invariance in space of W.
2. Proposition 4.42 asserts that $\{t^{-(1-\alpha)/2}\eta_k; k \in \dot{\mathbb{Z}}_M\}$ is asymptotically a standard Gaussian vector. Since η_k^* is of the order $\eta_0 - \eta_k$ (and thus of magnitude $t^{(1-\alpha)/2}$), it can be highly negative at many different sites ; thus we are allowed to expect that $\exp(\hat{\gamma}t^{2\alpha-1} + \eta_k^*)$ is much smaller than 1 at many different sites of $\dot{\mathbb{Z}}_M$.
3. The random variables $\tilde{Z}_t^\alpha$ are independent of anything defined using η, inlcuding η_k^*, and hence the two effects alluded to above can be taken into account separately.

(4) These heuristic considerations will be formalized in Step 3 of the proof below, through the introduction of an intricate family of subsets of $\dot{\mathbb{Z}}_M$, but let us mention that the exponent 3/5 comes out already at this stage : indeed, the above considerations only make sense if the magnitude $t^{(1-\alpha)/2}$ of the η_k^* is greater than the magnitude $t^{2\alpha-1}$ of the penalization, so that a highly negative η_k^* can win against the latter. This can only occur, obviously, whenever $\alpha < 3/5$. In this sense, our estimates are quite sharp : they mainly rely on the covariance structure of η and on Girsanov's theorem applied to b.

Before going into the details of our calculations, let us introduce a new set $\hat{\mathcal{B}}_{M,t}$: as mentioned above, our computations will bring out some expressions of the form $u_t := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j \eta_j$, and it will be convenient to keep this kind of term of order $O(t^{2\alpha-1})$, which is also the order of the exponential correction term appearing in (4.63). However, since δ satisfies Proposition 4.4.8, it is easily checked that u_t is of the desired order if $\eta_j \leq |j-k|^\tau t^{3\alpha-1}$ on L_k^α. These considerations motivate the introduction of the event

$$\hat{\mathcal{B}}_{M,t} \equiv \{ \text{ There exists } \ell \in \bar{\mathbb{Z}}_M \text{ and } j \in \mathbb{Z}\backslash\{\ell\};\ |\eta_j| \geq |j-\ell|^\tau t^{3\alpha-1}\},$$

and we will trivially bound $\mathbf{P}(\mathcal{B}_{M,t})$ by

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}_{M,t}) \leq \mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t}) + \mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t}^c \cap \mathcal{B}_{M,t}). \tag{4.72}$$

We will now prove that the two terms in the right hand side of (4.72) are vanishing as $t \to \infty$, whenever M is large enough.

Step 1 : Estimation of $\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t})$
Let Φ be the distribution function of a standard Gaussian random variable, i.e. if $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, then

$$\Phi(x) = \mathbf{P}(Z \leq x), \tag{4.73}$$

and set $\bar{\Phi} = 1 - \Phi$. Then let us bound simply $\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t})$ by

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t}) &\leq \sum_{\ell\in\bar{\mathbb{Z}}_M}\sum_{j\neq\ell}\mathbf{P}(|\eta_j| \geq |j-\ell|^\tau t^{3\alpha-1}) \\ &\leq 2\sum_{\ell\in\bar{\mathbb{Z}}_M}\sum_{j\neq\ell}\bar{\Phi}\left(\frac{2|j-\ell|^\tau t^{\frac{7\alpha-3}{2}}}{C_{0,0}^{1/2}(t)}\right),\end{aligned}$$

where $C_{0,0}(t)$ defined in (4.42), equals $t^{\alpha-1}/4\mathbf{E}\left[\eta_\ell\eta_k\right]$. Recall now that $\bar{\Phi}(x) \leq e^{-x^2/2}$ for x large enough, and that $C(t)$ satisfies Proposition 4.4.5. Thus, for two constants $c_1, c_2 > 0$, we get

$$\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t}) \leq c_1 M \sum_{j\geq 1}\exp\left(-c_2 j^{2\tau} t^{7\alpha-3}\right). \tag{4.74}$$

The following facts are now easily seen :

– The series in the right hand side of (4.74) is convergent, since $\tau > 0$, which explains the choice of the norm $\|x\|_{\tau,\ell}$ in order to bound η_j.

– Since we have assumed $\alpha > 1/2 > 3/7$, we have $7\alpha - 3 > 0$, and thus, an elementary application of the dominated convergence theorem yields

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t}) = 0, \tag{4.75}$$

which proves our first claim.

Step 2 : Estimation of $\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t}\cap\mathcal{B}_{M,t})$

Recall that the vector δ has been introduced because $-H_t(b) - \sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_j\,\eta_j$ is independent of the family η, and for sake of compactness of notations, set

$$e_t(b) = \exp\left(-\beta\left(H_t(b) + \sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_j\eta_j\right)\right). \tag{4.76}$$

Now we have

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t}\cap\mathcal{B}_{M,t}) &= \mathbf{P}\Big(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t} \text{ and } E_b\left[\mathbf{1}_{L_k}e^{-H_t(b)}\right] < E_b\left[\mathbf{1}_{L_0}e^{-H_t(b)}\right] \text{ for all } k\in\dot{\mathbb{Z}}_M\Big) \\ &= \mathbf{P}\Bigg(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t} \text{ and } E_b\left[\mathbf{1}_{L_k}e_t(b)\exp\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta\delta_j\eta_j\Big)\right] \\ &\qquad < E_b\left[\mathbf{1}_{L_0}e_t(b)\exp\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta\delta_j\eta_j\Big)\right] \text{ for all } k\in\dot{\mathbb{Z}}_M\Bigg).\end{aligned}$$

It is worth noticing at this point that v, and thus δ, depend on the path b, as is easily seen from definition (4.49). In order to get rid of the term $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_j\eta_j$, we will then set

$$\check{\eta}_0 = \max\left(\beta\underline{d}\eta_0, \beta\overline{d}\eta_0\right), \quad \text{and} \quad \hat{\eta}_k = \min\left(\beta\underline{d}\eta_k, \beta\overline{d}\eta_k\right), \tag{4.77}$$

where the constants $\underline{d}, \overline{d}$ have been introduced in Proposition 4.4.8. Then, according to the definition of $\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t}$, we get

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t} \cap \mathcal{B}_{M,t}) \\
\leq &\mathbf{P}\Bigg(\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M,\ E_b\left[\mathbf{1}_{L_k} e_t(b) \exp\Big(-\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta|\delta_j||j-k|^\tau t^{3\alpha-1} + \hat{\eta}_k\Big)\right] \\
&\qquad\qquad < E_b\left[\mathbf{1}_{L_0} e_t(b) \exp\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta|\delta_j|j^\tau t^{3\alpha-1} + \check{\eta}_0\Big)\right]\Bigg).
\end{aligned}$$

Now, invoking Proposition 4.4.8 item (iii), we obtain that for any integer k, there exists a constant γ (possibly depending on β) such that $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta|\delta_j||j-\ell|^\tau \leq \gamma t^{-\alpha}$ on L_k. Thus, thanks to the fact that the random variables η only depend on W, and observing that $\tilde{Z}^\alpha_t(k) = E_b[\mathbf{1}_{L_k} e_t(b)]$, we get

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t} \cap \mathcal{B}_{M,t}) &(4.78)\\
\leq &\mathbf{P}\Big(\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \tilde{Z}^\alpha_t(k) \exp(-\gamma t^{2\alpha-1} + \hat{\eta}_k) < \exp(\gamma t^{2\alpha-1} + \check{\eta}_0) \tilde{Z}^\alpha_t(0)\Big) \\
= &\mathbf{P}\left(\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \frac{\tilde{Z}^\alpha_t(k)}{\tilde{Z}^\alpha_t(0)} < \exp(2\gamma t^{2\alpha-1} + \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_k)\right). &(4.79)
\end{aligned}$$

Let us apply now Proposition 4.4.11 in order to conclude that

$$\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t} \cap \mathcal{B}_{M,t}) \leq \mathbf{P}\left(\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \frac{\tilde{Z}^\alpha_t(0, W^{k,t})}{\tilde{Z}^\alpha_t(0, W)} < \exp(\hat{\gamma} t^{2\alpha-1} + \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_k)\right),$$

where $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(M) = \sup\{2\gamma + \zeta(k); k \in \dot{\mathbb{Z}}_M\}$ and $\zeta(k) = 4k(k+1)$. We have thus proved that

$$\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}^c_{M,t} \cap \mathcal{B}_{M,t}) \leq \mathbf{P}(F_M),$$

where

$$F_M = \left\{\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \frac{\tilde{Z}^\alpha_t(0, W^{k,t})}{\tilde{Z}^\alpha_t(0, W)} < \exp(\hat{\gamma} t^{2\alpha-1} + \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_k)\right\}.$$

Step 3 : Evaluation of $\mathbf{P}(F_M)$

We can see now that the probability of F_M will be expressed in terms of a balance between the values of $\check{\eta}_0 - \hat{\eta}_k$ (which will be assumed to be highly negative) and the ratio $\tilde{Z}^\alpha_t(0, W^{k,t})/\tilde{Z}^\alpha_t(0, W)$, which cannot be too small at many different sites k. In order to quantify this heuristic statement, we will introduce a family $\bar{\mathcal{S}}_{M,m}$ of subsets of $\bar{\mathbb{Z}}_M$ which will be used to construct a large symmetric set L around 0 such that $\check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell < -t^{2\alpha-1+\rho}$ for all $\ell \in L$: for a given $\rho > 0$ and integer numbers m and M, define the families of subsets

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{M,m} = \bigcup_{k,\hat{k}\in D_{M,m}} \left\{k\dot{\mathbb{Z}}_{\hat{k}}\right\}, \quad \text{with} \quad D_{M,m} = \left\{(k,k') : k \geq 1, \hat{k} \geq m; k\dot{\mathbb{Z}}_{\hat{k}} \subset \dot{\mathbb{Z}}_M\right\} \\
&\bar{\mathcal{S}}_{M,m} = \left\{L \subset \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \text{There exists } S \in \mathcal{S}_{M,m} \text{ such that } S \subset L\right\}. &(4.80)
\end{aligned}$$

In relation with these families of subsets of $\dot{\mathbb{Z}}_M$, set also

$$\hat{F}_{M,m,\rho} = \bigcup_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \hat{F}_{\rho,L}, \tag{4.81}$$

with

$$\hat{F}_{\rho,L} = \left\{ \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell < -t^{2\alpha-1+\rho}, \text{ for all } \ell \in L, \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_{\hat{\ell}} > -t^{2\alpha-1+\rho}, \text{ for all } \hat{\ell} \in \dot{\mathbb{Z}}_M \backslash L \right\}. \tag{4.82}$$

Then one can bound trivially $\mathbf{P}(F_M)$ by

$$\mathbf{P}(F_M) \leq 1 - \mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) + \mathbf{P}(F_M \cap \hat{F}_{M,m,\rho}).$$

Furthermore, for t large enough, we have $\hat{\gamma} t^{2\alpha-1} - t^{2\alpha-1+\rho} < 0$, which explains the need for the constant $\rho > 0$. Thus

$$\begin{aligned} F_M \cap \hat{F}_{M,m,\rho} &\subseteq \bigcup_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \bigcap_{\ell \in L} \left\{ \frac{\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t})}{\tilde{Z}_t^\alpha(0, W)} < \exp\left(\hat{\gamma} t^{2\alpha-1} - 2t^{2\alpha-1+\rho} \right) \right\} \cap \hat{F}_{\rho,L} \\ &\subseteq \bigcup_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \left\{ \tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in L \right\} \cap \hat{F}_{\rho,L}. \end{aligned}$$

Hence, we get

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(F_M) &\leq 1 - \mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) + \sum_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \mathbf{P}\left(\left\{ \tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in L \right\} \cap \hat{F}_{\rho,L} \right) \\ &\leq 1 - \mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) + \sum_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in L \right) \mathbf{P}\left(\hat{F}_{\rho,L} \right), \end{aligned} \tag{4.83}$$

where in the last step, we have used the independence, proved in the next step, between the random variables $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t})$ and the sequence $\{\eta_k; k \in \bar{\mathbb{Z}}_M\}$, and also between $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W)$ and the sequence $\{\eta_k; k \in \bar{\mathbb{Z}}_M\}$.

Step 4 : Independence of η and the $\tilde{Z}_t^\alpha$'s.
Using the notation $X(W, b)$ introduced in Lemma 4.4.12, we see that this lemma's conclusion is that $X(W, b)$ and $\eta(W)$ are independent for each continuous function b; after evaluation of $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W)$ in formula (4.62), it implies that the latter is also independent of η.

The same lemma can also be applied to prove the other independence. Lemma 4.4.12 proves that for each fixed b, k, we have independence of $X\left(W^{t,k}, b\right)$ and the entire sequence η. When defining $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t})$, formula (4.62) must be used with W replaced by $W^{\ell,t}$, which specifically means

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) &= E_b\left[\mathbf{1}_{L_k^\alpha} \exp \beta \left(\int_0^t W^{\ell,t}(ds, b_s) - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j\left(b, \mathcal{L}\left(W^{\ell,t}\right)\right) \eta_j\left(W^{\ell,t}\right) \right) \right] \\ &= E_b\left[\mathbf{1}_{L_k^\alpha} \exp \beta \left(X\left(W^{\ell,t}, b\right) \right) \right], \end{aligned}$$

proving that $\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t})$ is independent of η, as required to justify (4.83) in the previous step.

It turns out one can prove in addition that $\delta(b, \mathcal{L}(W)) = \delta\left(b, \mathcal{L}\left(W^{\ell,t}\right)\right)$ for any ℓ, but this is a fact which we do not need to use here.

Step 5 : finishing the proof. The end of our proof of Lemma 4.4.4 relies on the following propositions, whose proofs will be postponed until the next sections.

Proposition 4.4.13. *Let m be a fixed positive even integer, and $M > m$. Then, for any $L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$, we have*

$$\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in L\right) \leq \frac{1}{m}.$$

Proposition 4.4.14. *Let m be a fixed positive integer. Let ρ be a strictly positive number such that $\frac{5}{2}(\alpha - \frac{3}{5}) + \rho < 0$. Then, for t large enough, there exists a M large enough such that*

$$\mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) \geq 1 - \frac{1}{m}. \tag{4.84}$$

With these results in mind, let us finish now the proof of Lemma 4.4.4, and thus of our theorem : take t, M large enough so that (4.84) is satisfied. Then (4.83) yields directly, invoking Proposition 4.4.13 and the fact that the events $\hat{F}_{\rho,L}$ are disjoints,

$$\mathbf{P}(F_M) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \mathbf{P}(\hat{F}_{\rho,L}) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}.$$

which tends to 0 as $m \to \infty$, and ends the proof of the theorem, modulo establishing the last two propositions above. □

Before proceeding with the proofs of Propositions 4.4.13 and 4.4.14, we discuss the consequences of weakening Hypothesis 4.4.1. If we assume only that

$$Q(x) \leq |x|^{-2-\theta}, \tag{4.85}$$

can we find values of $\theta \leq 1$ such that we still get superdiffusive behavior for the polymer, i.e. $\alpha > 1/2$? Since the result of the Girsanov theorem, Proposition 4.4.11, is not effected by the value of θ above, this means that the penalization from Girsanov's theorem, of order $t^{2\alpha-1}$, cannot be made smaller by a different choice of decorrelation speed in Q. Therefore we should expect not to be able to preserve the threshold $\alpha < 3/5$. To see exactly what happens to this threshold under condition (4.85), we first state, and leave it to the reader to check, that we can rework the proof of Proposition 4.4.8 item (iii) to obtain instead

$$|\delta|_{\tau,k} - \delta_k = o\left(t^{\alpha\theta}\right).$$

It is then simple to check that (4.79) becomes

$$\mathbf{P}(\hat{\mathcal{B}}_{M,t}^c \cap \mathcal{B}_{M,t}) \leq \mathbf{P}\left(\text{For any } k \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \frac{\tilde{Z}_t^\alpha(k)}{\tilde{Z}_t^\alpha(0)} < \exp(2\gamma t^{3\alpha-1-\theta} + \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_k)\right).$$

Hence the application of Proposition 4.4.11 still works, but we can no longer make the corresponding Girsanov penalization of the same order, since for $\theta < 1$, $3\alpha - 1 - \alpha\theta > 2\alpha - 1$. Having thus convinced ourselves that Hypothesis 4.4.1 is the only way to get the entire proof to be efficient in terms of using comparable penalizations throughout, we can now ignore this inefficiency, and answer the question at the beginning of this paragraph. The reader will check that any other occurences of the use of Hypothesis 4.4.1 are not further effected by switching (4.85) : the entire proof can still be used if we only require that the magnitude of the η_k's, namely $t^{(1-\alpha)/2}$, is larger than the new penalization $t^{3\alpha-1-\alpha\theta}$. This yields

$$\alpha < \frac{3}{7-2\theta}.$$

Now we see that to get a super-diffusive behavior, we need $3/(7-2\theta) > 1/2$, i.e. $\theta > 1/2$. We also see that the weakest hypothesis required for such behavior is $Q(x) \leq x^{-5/2-\vartheta}$ for $\vartheta > 0$. We state these findings formally, using the reparametrization $\theta = \vartheta + 1/2$.

Corollary 4.4.15. *Assume instead of Hypothesis 4.4.1 that there exists $\vartheta \in (0, 1/2]$ such that as $|x| \to \infty$,*

$$Q(x) = O\left(|x|^{-5/2-\vartheta}\right).$$

Then for any $\varepsilon > 0$ we obtain the following specific super-diffusive behavior for the polymer measure :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\langle \sup_{s\leq t} |b_s| \rangle_t \geq t^{\frac{1}{2}+\frac{\vartheta}{6-2\vartheta}-\varepsilon}\right] = 1.$$

4.4.3 Proof of Proposition 4.4.13

Let $L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$. Then, by definition (4.80) of $\bar{\mathcal{S}}_{M,m}$, there exists $k \geq 1$ such that $k\dot{\mathbb{Z}}_m \subset L$. Then

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in L\right)\\ \leq &\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in k\dot{\mathbb{Z}}_m\right).\end{aligned}$$

It is thus sufficient to estimate the right hand side in the above inequality.

Given an even integer $m \leq M$, recall that $\bar{\mathbb{Z}}_m$ has been defined at (4.69). Set also $\hat{m} = m/2$, and for each $i \in k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}}$, we associate the following event :

$$\Omega^{(i)} \equiv \left\{\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{i,t}) \text{ for all } \ell \in k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}} \backslash \{i\}\right\}.$$

Then these events are disjoint, and since $|k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}}| = 2\hat{m} + 1$, we get trivially the existence of $i_0 \in k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}}$ such that

$$\mathbf{P}\left(\Omega^{(i_0)}\right) \leq \frac{1}{2\hat{m}+1} \leq \frac{1}{m}. \tag{4.86}$$

However, the translation-invariance of the environment W yields

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in k\dot{\mathbb{Z}}_m\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell+i_0,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{i_0,t}) \text{ for all } \ell \in k\dot{\mathbb{Z}}_m\right).\end{aligned}$$

Indeed, denoting again $h(s) = \min(2s/t, 1)2kt^\alpha$, it is sufficient to prove that for fixed path b, $\int_0^t W(ds, b_s + (\ell + i_0)h(s))$ has the same distribution as $\int_0^t W(ds, b_s + \ell h(s))$. It is best to think of these two Gaussian random variables as L^2-limits of their Riemann sums ; in this case, one may abusively consider, for fixed s, the Gaussian increment $W(ds, b_s + (\ell + i_0)h(s))$, which has the same distribution as the increment $W(ds, b_s + \ell h(s))$ because we are merely adding the constant $i_0 h(s)$ in the space parameter. Since all these increments are independent, their sums (Wiener integrals) are also identically distributed Gaussian random variables. We may now rewrite the above expression as the following upper bound :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W) \text{ for all } \ell \in k\dot{\mathbb{Z}}_m\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{\ell,t}) < \tilde{Z}_t^\alpha(0, W^{i_0,t}) \text{ for all } \ell \in k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}} \backslash \{i_0\}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\Omega^{(i_0)}\right). \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

Observe that the last inequality is just due to the elementary fact that $k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}} \backslash \{i_0\} \subset i_0 + k\dot{\mathbb{Z}}_m$ whenever $i_0 \in k\bar{\mathbb{Z}}_{\hat{m}}$, a fact which is easily checked. Hence, putting together (4.86) and (4.87), we get the announced result. □

4.4.4 Proof of Proposition 4.4.14

Recall that $\hat{F}_{M,m,\rho}$ is defined by (4.81), and define the quantity

$$\tau(t) := 2\beta^{-1} t^{\frac{5}{2}(\alpha - \frac{3}{5}) + \rho},$$

which tends to 0 as $t \to \infty$ if $\alpha < \frac{3}{5}$ and ρ is small enough. The following inequality

$$\mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}} \left\{t^{(\alpha-1)/2}(\check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell) \leq -\beta\tau(t) \text{ for all } \ell \in L\right\}\right) \qquad (4.88)$$

is then easily established by an elementary inclusion argument, which we detail here. Indeed, assume that for some $L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$, for all $\ell \in L$, η satisfies

$$t^{(\alpha-1)/2}(\check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell) \leq -\beta\tau(t)$$

which is equivalent to

$$\check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell \leq -t^{2\alpha - 1 + \rho}$$

To justify the above inequality, we only need to prove that for some other $L' \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$, the same η also satisfies the above inequality for all $\ell \in L'$, while for all $\ell \in \dot{\mathbb{Z}}_M \setminus L'$, the contrary holds, namely

$$\check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell > -t^{2\alpha - 1 + \rho}.$$

Let then Λ be the subset of $\dot{\mathbb{Z}}_M$ defined by

$$\Lambda = \left\{\ell \in \dot{\mathbb{Z}}_M;\ \check{\eta}_0 - \hat{\eta}_\ell > -t^{2\alpha - 1 + \rho}\right\},$$

and set $L' = \dot{\mathbb{Z}}_M \setminus \Lambda$. Then, by construction L' has the required properties defined above, and since $L' \supset L$, by definition of $\bar{\mathcal{S}}_{M,m}$, we have $L' \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$.

In order to get a lower bound on the right hand side of (4.88) above, we will construct now a large enough collection of symmetric and disjoint sets in $\dot{\mathbb{Z}}_M$: with $m < M$, consider the collection $\{Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m; q < q^*\}$, where the integers $Q_q(m)$ are defined by

$$Q_1(m) = 1, \quad Q_{q+1}(m) = mQ_q(m) + 1, \quad q^* = \inf\{q; Q_q(m) > M\}.$$

This collection is the sequence

$$\dot{\mathbb{Z}}_m, (m+1)\dot{\mathbb{Z}}_m, [m(m+1)+1]\dot{\mathbb{Z}}_m, \cdots, Q_q(m)\,\dot{\mathbb{Z}}_m, \cdots, Q_{q^*-1}(m)\,\dot{\mathbb{Z}}_m,$$

which are non-overlapping annuli in $\dot{\mathbb{Z}}_M$, and therefore are indeed symmetric and disjoint subsets of $\dot{\mathbb{Z}}_M$. Since $Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m$ is certainly of the form $k\dot{\mathbb{Z}}_{\hat{k}}$ with $k \geq 1$ and $\hat{k} \geq m$, and is a subset of $\dot{\mathbb{Z}}_M$ as soon as $q < q^*$, by definition $Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$. Thus, using the notation $\check{\eta}_0, \hat{\eta}_\ell$ and η_ℓ defined in (4.76) and (4.77), and reverting to the notation $\tilde{\eta} = 2t^{-(1-\alpha)/2}\eta$, we get

$$\mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{q<q^*} \left\{ \max(\underline{d}\tilde{\eta}_0, \overline{d}\tilde{\eta}_0) - \min(\underline{d}\tilde{\eta}_\ell, \overline{d}\tilde{\eta}_\ell) \leq -\tau(t) \text{ for all } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m \right\} \right);$$

Indeed, the original set $\hat{F}_{M,m,\rho}$ defined in (4.81), (4.82) was a union of events indexed by $L \in \bar{\mathcal{S}}_{M,m}$, while here we use only sets of the form $L = Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m$; moreover, the above condition on the difference $\max(\underline{d}\tilde{\eta}_0, \overline{d}\tilde{\eta}_0) - \min(\underline{d}\tilde{\eta}_\ell, \overline{d}\tilde{\eta}_\ell)$ is implied by the two conditions on the individual terms of this difference in $\hat{F}_{M,m,\rho}$, and the shorthand notation $\tau(t)$ was introduced above to be consistent with these conditions in (4.82). Let us call now A_ℓ the event

$$A_\ell = \left\{ \max(\underline{d}\tilde{\eta}_0, \overline{d}\tilde{\eta}_0) - \min(\underline{d}\tilde{\eta}_\ell, \overline{d}\tilde{\eta}_\ell) \leq -\tau(t) \right\},$$

and we distinguish two cases according to the values of $\tilde{\eta}_0$:

(a) If $\tilde{\eta}_0 \geq 0$, then $\max(\underline{d}\tilde{\eta}_0, \overline{d}\tilde{\eta}_0) = \overline{d}\tilde{\eta}_0$, and hence A_ℓ is the event defined by the relation

$$\min(\underline{d}\tilde{\eta}_\ell, \overline{d}\tilde{\eta}_\ell) \geq \tau(t) + \overline{d}\tilde{\eta}_0.$$

In particular, $\tilde{\eta}_\ell$ has to be positive, and thus A_ℓ can be written as

$$\left\{ \overline{d}\tilde{\eta}_0 - \underline{d}\tilde{\eta}_\ell < -\tau(t) \right\}.$$

(b) If $\tilde{\eta}_0 \leq -\tau(t)/\underline{d} \leq 0$, then $\max(\underline{d}\tilde{\eta}_0, \overline{d}\tilde{\eta}_0) = \underline{d}\tilde{\eta}_0$. Thus A_ℓ can be written as the event defined by the relation

$$\min(\underline{d}\tilde{\eta}_\ell, \overline{d}\tilde{\eta}_\ell) \geq \tau(t) + \underline{d}\tilde{\eta}_0, \tag{4.89}$$

and if $\tilde{\eta}_0 \leq -\tau(t)/\underline{d}$, the quantity $\tau(t) + \underline{d}\tilde{\eta}_0$ is negative. Hence, (4.89) is implied by $\tilde{\eta}_\ell \geq 0$.

Summarizing the considerations above, we get

$$\mathbf{P}(\hat{F}_{M,m,\rho}) \geq \mathbf{P}(D^+) + \mathbf{P}(D^-),$$

with

$$D^+ = \bigcup_{q<q^*} \left\{ \overline{d}\tilde{\eta}_0 - \underline{d}\tilde{\eta}_\ell \leq -\tau(t) \text{ for all } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m \right\} \cap \{\tilde{\eta}_0 > 0\}$$
$$D^- = \bigcup_{q<q^*} \left\{ \tilde{\eta}_\ell \geq 0 \text{ for all } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m \right\} \cap \{\tilde{\eta}_0 \leq -\tau(t)/\underline{d}\} .$$

We will now prove that $\mathbf{P}(D^+)$ is close to $1/2$. Entirely similar arguments, left to the reader, lead to showing that $\mathbf{P}(D^-)$ can also be made arbitrarily close to $1/2$, concluding the proof of the proposition.

Observe that, according to Proposition 4.4.5 the random variables $\{\tilde{\eta}_\ell; l \in \bar{\mathbb{Z}}_M\}$ converge in distribution to a family of independent standard Gaussian random variables $\{\Upsilon_\ell; l \in \bar{\mathbb{Z}}_M\}$. Consequently, and using the fact that $-\tau(t) \to 0$ as $t \to \infty$,

$$\mathbf{P}(D^+) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{q<q^*} \left\{ \overline{d}\Upsilon_0 - \underline{d}\Upsilon_\ell \leq 0 \text{ for all } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m \right\} \cap \{\Upsilon_0 > 0\} \right) + \varepsilon_M(t),$$

where, for a fixed $M \in \mathbb{N}$, we have $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_M(t) = 0$. Furthermore, since the Υ_ℓ are independent random variables, we get

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D^+) &= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\bigcup_{q<q^*} \left\{ \overline{d}x - \underline{d}\Upsilon_\ell \leq 0 \text{ for all } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m \right\} \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} dx + \varepsilon_M(t) \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\bigcap_{q<q^*} \hat{D}_q \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} dx + \varepsilon_M(t), \end{aligned} \tag{4.90}$$

where

$$\hat{D}_q = \left\{ \text{There exists } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m;\ \overline{d}x - \underline{d}\Upsilon_\ell \geq 0 \right\} .$$

In order to take advantage of the independence of the Υ_ℓ, it is convenient to pick some disjoint sets out of $\dot{\mathbb{Z}}_M$, which explains the choice of disjoint subsets $Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m$. Now, it is easily seen that, for a fixed value q_0, if one desires to have $q^* > q_0$, it is sufficient to take M of order m^{q_0}. Let us assume that we are in this situation ; this means that, setting $\kappa = \overline{d}/\underline{d}$, we have

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{q<q^*} \hat{D}_q \right) &\leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{q\leq q_0} \left\{ \text{There exists } \ell \in Q_q(m)\dot{\mathbb{Z}}_m;\ \Upsilon_\ell \leq \kappa x \right\} \right) \\ &= \mathbf{P}^{q_0}\left(\text{There exists } \ell \in \dot{\mathbb{Z}}_m;\ \Upsilon_\ell \leq \kappa x \right) \\ &= \left[1 - \mathbf{P}^{2m}\left(\Upsilon_1 \geq \kappa x \right) \right]^{q_0} . \end{aligned}$$

Plugging these inequalities into (4.90), we obtain

$$\mathbf{P}(D^+) \geq \frac{1}{2} - \int_0^\infty \left[1 - \mathbf{P}^{2m}\left(\Upsilon_1 \geq \kappa x\right)\right]^{q_0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} dx + \varepsilon_M(t).$$

Recall that the functions Φ has been defined by relation (4.73). Then the last inequality yields,

$$\mathbf{P}(D^+) \geq \frac{1}{2} - \int_0^\infty \left[1 - \Phi\left(\kappa x\right)^{2m}\right]^{q_0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} dx + \varepsilon_M(t).$$

It is now easily seen that this probability can be made as close as we wish to $\frac{1}{2}$ by taking $q_0 \to \infty$, because $1/2 \leq \Phi(x) < 1$ for all $x \geq 0$, this asymptotic being equivalent to $M \to \infty$. □

Bibliographie

Albeverio, S. & Zhou, X. (1996), 'A martingale approach to directed polymers in a random environment', *J. Theoret. Probab.* **9**(1).

Alder, R. (1990), *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*, Hayward.

Bardina, X., Márquez-Carreras, D., Rovira, C. & Tindel, S. (2004), 'Higher order expansions for the overlap of the sk model.', *Progress in Probability* **58**, 21–43.

Bezerra, S. C. & Tindel, S. (2006*a*), A central limit theorem for a localized version of the sk model. preprint.

Bezerra, S. C. & Tindel, S. (2006*b*), On the multiple overlap function of the SK model. preprint.

Bezerra, S. C., Tindel, S. & Viens, F. (2006), Some scaling limits for a brownian polymer in a gaussian medium. preprint.

Bolthausen, E. (1989), 'A note on the diffusion of directed polymers in a random environment.', *Comm. Math. Phys.* **133**(4), 529–534.

Carmona, P. & Hu, Y. (2002), 'On the partition function of a directed polymer in a gaussian random environment.', *Probab. Theory Relat. Fields* **124**, 431–457.

Carmona, R., Koralov, L. & Molchanov, S. (2001), 'for the almost sure lyapunov exponent for the solution of the parabolic anderson problem', *Random Oper. Stochastic Equations* **9**(1), 77–86.

Carmona, R. & Viens, F. (1998), 'Almost-sure exponential behavior of a stochastic anderson model with continuous space parameter', *Stochastics and Stochastic Reports* **62**(3), 251–273.

Comets, F. & Neveu, J. (1995), 'The sherrington-kirkpatrick model of spin glasses and stochastic calculus : the high temperature case', *Comm. Math. Phys.* **166**(3), 549–564.

Comets, F. & Yoshida, N. (2005), 'Brownian directed polymers in random environment', *Comm. Math. Phys.* **254**(2), 257–287.

Comets, F. & Yoshida, N. (2006), 'Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder', *To appear in Annals of Probability* **34**(5).

Derrida, B. & Spohn, H. (1988), 'Polymers on disordered trees, spin glasses, and traveling waves. new directions in statistical mechanics', *J. Statist. Phys.* **51**(5-6), 817–840.

Fisher, D.S., H. D. (1991), 'Directed paths in random potential.', *Phys. Rev. B 43* **10**, 728–742.

Florescu, I. & Viens, F. (2005), 'Sharp estimation for the almost-sure lyapunov exponent of the anderson model in continuous space', *Probab. Theory and Related Fields* .

Franz, S. & Leone, M. (2003), 'Replica bounds for optimization problems and diluted spin systems', *Stat. Phys.* **58**, 111–535.

Franz, S. & Toninelli, F. L. (2004), 'Finite-range spin glasses in the kac limit : free energy and local observables', *J. Phys. A* **37**(30), 7433–7446.

Frolich & Zegarlinski (1987), 'Some comment on the sk model of spin glasses.', *Commun.Math.Phys.* (112), 553.

Guerra, F. & Toninelli, F. (2002), 'Central limit theorem for fluctuationsin the high temperature region of the sherrington-kirkpatrick spin glass model.', *J. Math. Phys.* **43**(12), 6224–6237.

Guerra, F. & Toninelli, F. L. (2003), 'The thermodynamic limit in mean field spin glass models', *Comm. Math. Phys.* **230**, 71–79.

Guerra, F. & Toninelli, F. L. (2004), 'The high temperature region of the viana bray diluted spin glass model', *Journal of Statistical Physics* **115**, 531–555.

Imbrie, J. & Spencer, T. (1988), 'Diffusion of directed polymers in a random environment', *J. Statist. Phys.* **40**(3), 609–626.

Kirkpatrick, S. & Sherrington, D. (1978), 'Infinite-ranged models of spin-glasses', *Physical Review* (B17), 4384–4403.

Méjane, O. (2004), 'Upper bound of a volume exponent for directed polymers in a random environment', *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **40**(3), 299–308.

Mézard, M., Parisi, G. & Virasoro, M. A. (1987), 'Spin glass theory and beyond', *World Scientific Lecture Notes in Physics* **9**.

Petermann, M. (2000), Superdiffusivity of polymers in random environment., PhD Dissertation, Univ. Zürich.

Piza, M. S. T. (1997), 'Directed polymers in a random environment some results on fluctuations', *J. Statist. Phys.* **89**(3-4), 581–603.

Rovira, C. & Tindel, S. (2005), 'On the brownian-directed polymer in a gaussian random environment', *J. Funct. Anal.* **222**(1), 178–201.

Sherrington, D. (1989), 'Complexity due to disorder and frustration', *lectures in complex systems* .

Stein, C. N. D. (1997), 'Non mean-field behavior of realistic spin glasses', *Phys. Rev. Lett.* **76**(12), 515–518.

Talagrand, M. (2001), 'The high temperature case of the k-sat problem', *Probab. Theory Related Fields* **119**, 187–212.

Talagrand, M. (2003*a*), 'The generalized parisi formula', *C. R. Math. Acad. Sci* **9**(2), 111–114.

Talagrand, M. (2003*b*), *Spin Glasses : A challenge for Mathematicians.*, Springer.

Tindel, S. (2005), 'On the stochastic calculus method for spins systems', *Annals of probability* **2**, 561–581.

Tindel, S., Tudor, C. A. & Viens, F. (2004), 'Sharp gaussian regularity on the circle, and applications to the fractional stochastic heat equation', *J. Funct. Anal.* **217**(2), 280–313.

Tindel, S ; Viens, F. (1999), 'On space-time regularity for the stochastic heat equations on lie groups.', *J. Funct. Analysis* **169**(2), 559–603.

Toubol, A. (1997), Etude de quelques modèles de systèmes désordonnés, PhD Dissertation, Université Paris 7.

Viens, F. & Tindel, S. (2002), 'Almost sure exponential behaviour for a parabolic spde on a manifold', *Stochastic Process. Appl.* **100**, 53–74.

Wüthrich, M. (1998), 'Superdiffusive behavior of two-dimensional brownian motion in a poissonian potential', *Ann. Probab.* **26**(3), 1000–1015.