Modélisation de l'amortissement actif-passif des structures sandwichs

THÈSE



présentée et soutenue publiquement le 30 novembre 2007 pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Paul Verlaine-Metz

(spécialité mécanique)

par

Hakim BOUDAOUD

Composition du jury :

Rapporteurs : Erasmo Carrera, Etienne Balmès

Examinateurs : Lahcen Azrar, Michel Potier-Ferry

Directeur de thèse : El mostafa DAYA

Co-Directeur de thèse : Salim BELOUETTAR

Invité : Benoît Petitjean

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux - CNRS

U.M.R 7554

Laboratoire de Technologies Industrielles - Centre de Recherche Public Henri Tudor

à ma mère

à mes soeurs

à ma petite puce

Remerciements

Cette thèse a été menée, à la fois, au sein de l'équipe Simulation Numérique du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz et de l'équipe Modélisation du Laboratoire de Technologies Industrielles du Centre de Recherche Public Henri Tudor du Luxembourg.

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur El Mostafa Daya, mon directeur de thèse qui m'a beaucoup apporté, a toujours été disponible pour m'aider, aussi bien dans les développements théoriques que numériques, et qui m'a fait confiance en me laissant beaucoup d'autonomie durant ces trois années de thèse.
Je tiens également à remercier Monsieur Salim Belouettar, qui a co-dirigé cette thèse, pour tous les conseils qu'il m'a donnés, pour la confiance qu'il m'a témoigné et pour m'avoir permis de travailler dans un groupe élargi. Merci aussi pour ton amitié et tes remarques piquantes et justes à la fois.
J'aimerais aussi remercier Monsieur Potier Ferry qui ma judicieusement aiguillé sur de nombreux points et monsieur Ayech Benjeddou pour sa collaboration.
Je tiens aussi à remercier chacun des membres du LPMM et du LTI et en particulier, David Fiorelli, Serge Gillé, Gaston Rauchs et Georges Schutz.

J'exprime ma gratitude aux membres de mon jury de thèse : les professeurs Erasmo Carrera et Etienne Balmès qui ont accépté de relire mon document ainsi que les professeurs Potier Ferry et Lahcen Azrar pour me faire l'honneur de juger de mes travaux de recherche.

Je remercie l'ensemble des agents et mes collègues pour l'ambiance agréable qu'ils font régner au sein du laboratoire. Je voudrais citer ici plus particulièrement Nicolas Jacques, Hu Heng, DjeDje Sylvain Zeze (futur ministre), Jerôme Serri, Mohamed Assidi, Mohamed El Hédi Ben Zeineb, Anas Mtalaa (et la liste est encore longue . . .) avec lesquels j'ai eu de nombreuses et enrichissantes conversations qui m'ont permis d'élargir l'horizon de cette recherche. . . .

Table des matières

Introduction **1**

1 Etude Bibliographique **7**

1.1 Solutions passives 7

1.2 Solutions actives 11

1.2.1 Théorie du contrôle 13

1.3 Solutions hybrides 15

1.4 Méthodes numériques pour problèmes aux valeurs propres complexes . . . 18

1.4.1 Méthodes approchées 18

1.4.2 Méthodes dites exactes 21

1.5 Conclusions et propositions 22

2 Modèle analytique de poutre sandwich à amortissement hybride **25**

2.1 Introduction 25

2.2 Modèle cinématique et lois de comportement 25

2.2.1 Equations constitutives généralisées 28

2.2.2 Lois électromécaniques équivalentes 29

2.3 Condensation du potentiel électrique 30

2.3.1 Cas 1 : Capteur libre de charge 30

2.3.2 Cas 2 : Application d'électrodes 31

2.4 Prise en compte du contrôle 32

2.5 Approche modale simplifiée 34

2.5.1 Analyse modale avec un contrôle proportionnel direct 35

2.5.2 Analyse avec un contrôle dérivatif en vitesse 38

2.5.3 Analyse avec prise en compte des électrodes 39

2.6 Applications et commentaires 40
2.6.1 Validations numériques 41
2.6.2 Analyse des modèles analytiques avec différents gains de contrôle direct 42
2.6.3 Analyse des modèles analytiques avec un gain de contrôle en vitesse 43
2.6.4 Modèles analytiques simplifiés 46
2.7 Conclusions 47

3 Eléments finis pour les coques sandwich à 5 couches 49
3.1 Introduction 49
3.2 Champs de déplacements et de déformations 49
3.2.1 Hypothèses de calcul 49
3.2.2 Déplacements 50
3.2.3 Déformations 51
3.3 Relation électroélastique pour les couches piézoélectriques 53
3.3.1 Loi linéaire piézoélectrique 53
3.3.2 Propriétés électriques 54
3.4 Formulation théorique 54
3.4.1 Formulation variationnelle 54
3.4.2 Formulation élément finis 55
3.4.3 Prise en compte du contrôle 57
3.4.4 Analyse de la réponse fréquentielle et calcul des propriétés amortissantes 58
3.5 Tests de validations 60
3.5.1 Propriétés des structures étudiées 60
3.5.2 Tests de poutre 60
3.5.3 Test de plaque 63
3.6 Conclusions 66

4 Méthode numérique pour le calcul des modes complexes des sandwichs à amortissement hybride 67
4.1 Introduction 67
4.2 Formulation élément finis du problème des vibrations propres 68

4.3 Technique d'homotopie 69
4.4 Technique de perturbation 70
4.5 Méthode de continuation 73
4.6 Résultats numériques 74
4.6.1 Calcul de poutres 75
4.6.2 Calcul de plaque 75
4.7 Conclusions 83

5 Vers la modélisation de l'amortissement passif à base de matériaux piézoélectriques **85**
5.1 Introduction 85
5.2 Formulation théorique 87
5.2.1 Equations caractéristiques 87
5.3 Equations généralisées du modèle 92
5.3.1 Equations généralisées constitutives 93
5.4 Solutions de type Navier 94
5.5 Résultats et analyses 96
5.5.1 Validation du modèle à l'aide des éléments finis 96
5.6 Analyse paramétrique 97
5.7 Conclusions 102

Conclusion **105**

A Caractérisation des matériaux viscoélastiques **109**
A.1 Modèles rhéologiques de la viscoélasticité linéaire 111

B Principales caractéristiques des matériaux piézoélectriques **113**

C La Méthode Asymptotique Numérique (MAN) **117**
C.1 Technique de perturbation 118
C.2 Définition du paramètre de chemin 119

Table des figures

1 Dispositifs d'amortissement passif 2
2 Représentation schématique des classes de contrôle 3

1.1 Représentation des modèles cinématiques multicouches [17] 10
1.2 Représentation schématique des mécanismes d'action par extension et cisaillement 12
1.3 Traitement hybride pour le contrôle des vibrations 16
1.4 Calcul d'amortissement par la méthode des bandes passantes. 20

2.1 Notations pour le sandwich piezo/elast/visco/elast/piezo 26
2.2 maillage du sandwich 5 couches sous Abaqus 42
2.3 Première pulsation propre Ω fonction du gain de contrôle proportionnel direct g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa. 44
2.4 Amortissement η du premier mode en fonction du gain de contrôle proportionnel g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa. 44
2.5 Variation de fréquence avec et sans condition d'équipotentialité η=0.5 contrôle proportionnel direct g variant. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa. 45
2.6 Première pulsation propre Ω fonction du gain de contrôle en vitesse g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa. 45
2.7 Amortissement η du premier mode en fonction du gain de contrôle en vitesse g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa. 46

3.1 Définition du sandwich 50
3.2 Maillage de la plaque 65

5.1 Cinématique de la poutre sandwich 86
5.2 Cinématique de la poutre sandwich 86

5.3 Variation de l'EMCC pour le premier mode, en fonction de R_l, R_e et E_p=69.5GPa fixé 98
5.4 Variation de l'EMCC pour le premier mode, en fonction de R_l, R_h et h_p=0.5mm fixé 99
5.5 Variation de l'EMCC pour le quatrieme mode, en fonction de R_l, R_e et E_p=69.5GPa fixé 100
5.6 Variation de l'EMCC pour le quatrième mode, en fonction de R_l, R_h et h_p=0.5mm fixé 101
5.7 Variation de l'EMCC pour les n premiers modes en fonction de h_p 102

A.1 Principe de superposition de Boltzman 109
A.2 Modèle de Maxwell et Voigt 112
A.3 Modèle de Maxwell généralisé 112

B.1 Modes de déformations 113

C.1 Schéma descriptif de la MAN 117

Liste des tableaux

2.1 Propriétés mécaniques 41

2.2 Dimensions des couches pour la poutre 41

2.3 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle EF (numérique). η_v=0.5 contrôle proportionnel direct. Trois premier modes de flexion. . . . 42

2.4 Comparaison entre le modèle analytique et le modèle EF (numérique). η_v=0.5. contrôle proportionnel direct et prise en compte de l'équipotentialité. Trois premier modes de flexion 43

2.5 Amortissement purement passif (g_d=g_v=0). Influence de l'hypothèse des modes supposés réels sur la première fréquence propre et amortissement modale associé. 47

3.1 Propriétés mécaniques 60

3.2 Dimensions des couches pour la poutre 60

3.3 Trois premières propriétés modales obtenues de manière analytique et numérique pour différentes valeurs du facteur de perte η_v.(avec un gain de contrôle proportionnel g_d=-1, et pas de gain de contrôle en vitesse g_v=0) 61

3.4 Trois premières propriétés modales déterminées analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v.(contrôle proportionnel de gain g_d=-20, pas de contrôle en vitesse g_v=0) 62

3.5 Première propriété modale déterminée analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v et différents gains de contrôle proportionnel direct g_d, pas de contrôle en vitesse g_v=0 62

3.6 Trois premières propriétés modales déterminées analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v.(gain de contrôle en vitesse g_v=0, pas de contrôle proportionnel direct g_d=0) 63

3.7 Trois premières propriétés modales déterminées analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v.(gain de contrôle en vitesse g_v=-0.01, pas de contrôle proportionnel direct g_d=0) 64
3.8 Quantités modales (fréquence et amortissement) pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v et différent gain de contrôle en vitesse g_v, pas de contrôle proportionnel direct g_d=0 64
3.9 Dimensions des couches pour la plaque 65
3.10 Trois premières fréquences propres de la plaque non amortie obtenues avec l'élément coque et avec le modèle 3 D du code Abaqus 65
3.11 Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle proportionnel direct 66
3.12 Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle en vitesse . 66

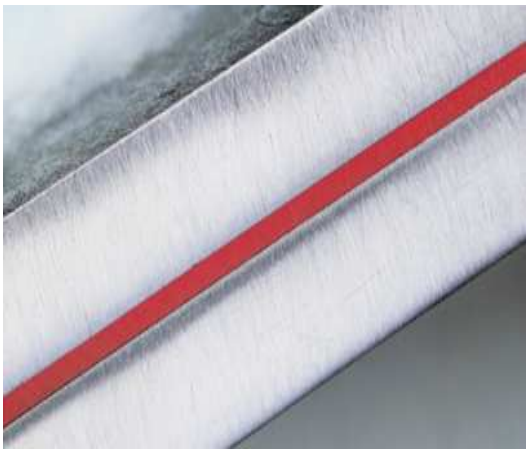
4.1 Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle direct proportionnel g_d=-1, g_v=0) 76
4.2 Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle direct proportionnel g_d=-20, g_v=0) 77
4.3 Première valeur modale obtenue par le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différent gain de contrôle proportionnel direct et différentes valeurs de η_v.(g_v=0) 78
4.4 Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle en vitesse g_v=0, g_d=0) 79
4.5 Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle en vitesse g_v=-0.01, g_d=0) 80
4.6 Première valeur modale obtenue par le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différent gain de contrôle proportionnel direct et différentes valeurs de η_v.(g_d=0) 81

4.7 Trois premières fréquences propres de la plaque non amortie obtenues, avec l'élément coque muni de la MSEC ou de la MAN, ainsi qu'avec le modèle 3 D du code Abaqus 82
4.8 Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle proportionnel direct avec la MSEC et la MAN 82
4.9 Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle en vitesse avec la MSEC et la MAN 82

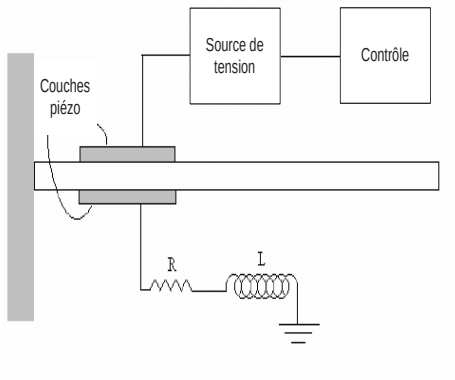
5.1 Fréquences et EMCC pour les cinq premiers modes. Comparaisons EF et modèle analytique 97
5.2 EMCC $K^2(\%)$ pour différentes épaisseurs du coeur 102

Introduction

Les vibrations structurales sont très indésirables puisqu'elles peuvent causer des problèmes tels que la fatigue structurale, la transmission des vibrations à d'autres systèmes, le bruit interne ou externe dû au rayonnement acoustique, etc. Néanmoins, il est possible de limiter leurs effets grâce, fondamentalement, à trois types de techniques de réduction de vibrations. La première est la technique d'annulation (ou suppression), utilisée surtout pour éliminer le bruit engendré par la vibration et non la vibration elle-même. Elle se fait par la production d'une source de bruit secondaire émettant le négatif du bruit primaire afin d'aboutir à une annulation des deux sources. La seconde est l'isolation qui consiste à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans pour autant éliminer les vibrations du système émetteur. Finalement, le troisième groupe de techniques, dit d'atténuation, est utilisé pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système en cas d'échec ou d'impossibilité de son isolation ou pour réduire le rayonnement acoustique en cas d'impossibilité de production ou d'inefficacité d'une source secondaire d'anti-bruit.
Les techniques d'atténuation consistent à diminuer l'amplitude des vibrations structurales dont les fréquences sont dans le voisinage des fréquences propres de la structure. Par conséquent, ces techniques permettent d'atténuer, ou même d'éliminer, les résonances de la structure. En général, elles peuvent être classées en trois catégories : techniques dites passives, actives ou hybrides.
Les techniques passives d'amortissement des vibrations structurales utilisent l'intégration ou l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes, couplés à la structure de telle façon que les vibrations de la structure sont amorties passivement, c'est-à-dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire. Les structures sandwichs avec un coeur en matériaux polymères viscoélastiques Fig.1.a constituent des traitements très efficaces pour réduire les amplitudes de résonance de structures vibrantes. Les matériaux viscoélastiques ont la propriété de passer d'un état peu rigide (caoutchouteux), pour des



Sandwich à âme viscoélastique



Amortissement shunt

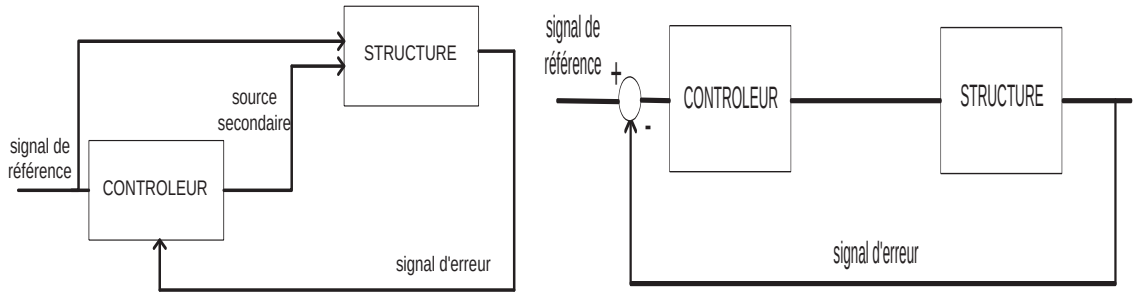
FIG. 1 – Dispositifs d'amortissement passif

températures élevées et des fréquences de vibration basses, à un autre rigidifié (vitreux), pour la situation opposée. De plus, dans la région de transition entre ces deux états, où leurs propriétés élastiques varient rapidement, ces matériaux sont capables de transformer l'énergie de déformation en énergie thermique, dissipant ainsi, sous forme de chaleur, l'énergie vibratoire de la structure.

Cependant ces techniques présentent certaines limitations : en effet leurs performances sont limitées dans le domaine des basses fréquences, l'encombrement peut être important et surtout le coefficient d'amortissement est dépendant de la température et de la fréquence. Au début des années 1980 et plus précisément suite aux travaux de Forward [36] on a vu apparaître un autre type d'amortissement passif ne faisant intervenir aucune source d'énergie extérieure. Il s'agit ici de la mise en oeuvre d'amortissement de type électro-actif offrant des solutions aux limitations des solutions à base de matériaux viscoélastiques. Parce qu'ils possèdent de très bonnes caractéristiques de couplage électromécanique, les matériaux piézoélectriques sont souvent utilisés dans ce type de dispositif. L'élément piézoélectrique convertit en énergie électrique une part de l'énergie mécanique, puis cette même énergie électrique est dissipée à travers un dispositif résisitif Fig.1.b.

Les techniques actives permettent, quant à elles, de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser l'intensité des vibrations indésirables. C'est le principe du Contrôle Actif (CA) des vibrations. Ces mesures sont, soit basées sur une référence, soit fournies par des

capteurs plus ou moins intégrés dans la structure. Dans le premier cas, le système est dit "*feedforward*" (par anticipation) et, dans l'autre, "*feedback*" (rétroactif). Ce dernier étant dû à la rétroaction des mesures effectuées sous forme d'action de contrôle des vibrations Fig.2. Une structure contenant des actionneurs et capteurs collés ou intégrés et couplés



Contrôle par anticipation Contrôle par rétroaction

FIG. 2 – Représentation schématique des classes de contrôle

par un système de contrôle est dite " *intelligente ou adaptative* ". En effet, les mesures fournies par le capteur sont traitées par un système de contrôle approprié, qui envoie ensuite à l'actionneur un signal capable de modifier le comportement de la structure, l'adaptant à un comportement requis.

Il est bien établi que les dispositifs actifs sont très efficaces en basses fréquences, mais ces dispositifs sont principalement limités par la puissance de la source externe. De plus, le couplage électromécanique rend difficile la mise en oeuvre des algorithmes classiques de recherche de modes de vibrations. En effet la connaissance des modes et fréquences propres permet de quantifier d'une part les propriétés amortissantes du système de couplage (fréquence, amortissement), et d'autrepart elle permet d'effectuer des analyses modales.

Les besoins industriels actuels, à savoir des systèmes de contrôle fiables et robustes, ont conduit au développement de systèmes de contrôle "hybride" actif-passif, utilisant dans le même traitement les matériaux viscoélastique (passif) et piézoélectrique (actif). Le premier assure la fiabilité et la robustesse du système puisqu'en cas de défaillance du contrôle actif, le système reste amorti. Le second améliore les performances du système pour les basses fréquences. Les deux méthodes de contrôles, passif et actif sont donc complémentaires et leur association permettrait d'atténuer l'amplitude d'un grand nombre de modes de vibrations.

Le couplage passif-actif pour amortir les vibrations est une technique somme toute as-

sez récente dont le développement est lié aux nombreux progrès dans le domaine des matériaux dits intelligents. Les structures à amortissement hybride sont généralement des multicouches composés de couches élastiques, viscoélastiques et de patchs piézoélectriques. Cette thèse est une contribution à la modélisation de l'amortissement actif-passif des structures sandwichs viscoélastiques et piézoélectriques. Le manuscrit sera structuré en cinq chapitres comme suit :

Au chapitre 1, nous passons en revue l'ensemble des travaux de recherche du domaine de l'amortissement passif, actif et hybride des vibrations. Parallèlement, un rappel est fait sur les méthodes numériques de résolution des problèmes aux valeurs propres non linéaires.

Au chapitre 2, la modélisation de l'amortissement hybride est abordé au moyen d'une étude analytique des poutres sandwichs composées de couches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. Nous proposons une approche modale pour obtenir la fréquence propre complexe des vibrations. Elle permet d'étudier le couplage de l'amortissement actif et passif introduit par ces structures.

Au chapitre 3, un élément fini sandwich de type coque est proposé. Sa formulation utilise les hypothèses classiques de la théorie des structures laminés et les cinématiques de type Kirchhoff pour les couches dures et de Mindlin pour le coeur viscoélastique. En respectant les conditions de raccord aux interfaces, le nombre de degré de liberté (ddl) par noeud est de 10 : 8 déplacements et 2 ddl électriques. Les résultats numériques obtenus par cet élément sont validés à travers des comparaisons avec des résultats analytiques du chapitre 2 et ceux obtenus en utilisant le code commercial Abaqus.

Au chapitre 4, nous proposons une méthode numérique pour le calcul direct des vibrations libres des sandwichs viscoélastiques et piézoélectriques. Basée sur la technique d'homotopie et sur la méthode de perturbation, elle permet de résoudre le problème aux valeurs propres complexes non linéaires.

Au chapitre 5, la modélisation de l'amortissement passif à base de matériaux piézoélectriques est abordée au moyen d'une étude analytique des poutres sandwich avec un coeur piézoélectrique.

La formulation analytique obtenue est tout d'abord validée au moyen d'un modèle élément fini réalisée sur le code commercial Abaqus. Puis une étude paramétrique est menée pour évaluer les performances de telle structure.

Le travail de thèse que nous présentons dans ce document a été réalisé dans le cadre du projet Européen CASSEM (NMP3-CT-2005-013517) et d'une collaboration entre le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'Université Paul Verlaine-Metz et le Laboratoire de Technologies Industrielles (LTI) du Centre de Recherche Public Henri Tudor (CRP). Cette thèse a été financée par le Ministère de la Recherche Luxembourgeois (BFR n°04/079).

Chapitre 1

Etude Bibliographique

Dans ce chapitre, nous passons en revue les travaux de recherche dans le domaine de l'amortissement des vibrations.

1.1 Solutions passives

Parmi les solutions passives les plus répandues, on trouve les structures sandwich à coeur viscoélastique. Celles-ci sont généralement constituées d'une couche viscoélastique fine intercalée entre deux couches élastiques. Cet assemblage permet d'avoir un amortissement maximum. Celui-ci étant dû aux déformations de cisaillement de la couche centrale. La première étude sur les propriétés vibratoires de poutres sandwichs à coeur viscoélastique a été présentée par Kerwin [49], vers la fin des années 50. Il a considéré des poutres sandwichs simplement appuyées, dont les peaux élastiques étaient beaucoup plus rigides que le coeur et dont la rigidité en flexion de la couche de précontrainte était négligeable par rapport à celle de la structure de base. Ainsi, le coeur est supposé ne se déformant qu'en cisaillement transverse et la rigidité en flexion de la poutre sandwich est celle de la structure de base. DiTaranto [29] a étendu les travaux de Kerwin pour traiter les vibrations libres des poutres sandwichs avec des conditions aux limites arbitraires. Ensuite, tout en gardant les hypothèses de Kerwin, un autre modèle de poutre sandwich a été développé par Mead et Markus [61] pour étudier les vibrations forcées pour plusieurs conditions aux limites. Ensuite d'autres développements analytiques Markus [61] ; Rao [70] ont été réalisés pour le calcul de l'amortissement et des fréquences amorties des structures sandwichs viscoélastiques à géométries simples. La plupart des ces travaux uti-

lisent le concept du module complexe constant pour modéliser le matériau viscoélastique. L'emploi du concept du module complexe permet d'éliminer une autre difficulté à savoir la modélisation du comportement viscoélastique qui dépend de façon non linéaire de la fréquence et de la température. Les propriétés élastiques et dissipatives des matériaux viscoélastiques dépendent, généralement, des fréquences, amplitude et de la température. Le besoin de modèles d'amortissement viscoélastique capables de représenter la réalité physique de ces propriétés a motivé une grande quantité d'études dans les années 80. À cette époque-là, l'approche des modules complexes était déjà largement utilisée. Cependant, la construction des modèles à matrices complexes rendait les analyses impraticables. Par conséquent, Johnson et al. [47] ont proposé une méthode, dite des énergies modales (Modal Strain Energy, MSE), consistant à estimer les amortissements modaux à travers une relation entre les facteurs de perte et les énergies modales de déformation de la structure et du matériau viscoélastique. Néanmoins, il a été considéré que les propriétés du matériau viscoélastique restent constantes pour toute condition de chargement, ce qui éloigne cette approche de la réalité. Pour pouvoir tenir compte de la dépendance en fréquence des propriétés des Matériaux Viscoélastiques (MV), cette méthode doit être considérée dans une version itérative. Le comportement rhéologique du matériau viscoélastique doit alors être connu de manière précise dans le domaine fréquentiel concerné et pour ce faire de nombreux auteurs ont caractérisé cette dépendance à l'aide de modèle plus ou moins complexe.Pour permettre une représentation temporelle plus fine du comportement du MV Plouin et Balmès [66] ont proposé une méthode basée sur des dérivées fractionnaires efficace pour des analyses dans le domaine fréquentiel mais aboutissant, dans le domaine temporel, à des équations différentielles d'ordre fractionnaire assez complexes à résoudre. D'autres méthodes temporelles ont, ainsi, été proposées aboutissant à des équations différentielles ordinaires. Lesieutre [56] a proposé un modèle nommé Augmenting Thermodynamic Fields (ATF), basé sur l'introduction de variables internes (dissipatives), similaires aux variables cachées introduites par Biot [16] dans sa théorie linéaire de la thermodynamique irréversible. Limité aux cas unidimensionnels, ce modèle a été ensuite étendu aux cas tridimensionnels par Lesieutre et son équipe [53] grâce à un nouveau modèle nommé Anelastic Displacement Fields (ADF). En parallèle, Dovstam [31] a présenté une étude analogue, bien que dans ce cas-ci, seule une analyse dans le domaine fréquentiel a été réalisée. Hughes et son équipe [45] ont aussi développé un

modèle, dit Golla-Hughes-McTavish (GHM), basé sur l'introduction de variables dissipatives, tout comme le modèle ADF. Les modèles ATF/ADF et GHM sont assez similaires vu qu'ils utilisent tous des variables additionnelles pour bien modéliser les relaxations du matériau viscoélastique. Néanmoins, on peut distinguer quelques différences entre eux. Le modèle GHM utilise une formulation dans le domaine de Laplace devant être transformée pour des analyses dans le domaine temporel. Par ailleurs, il aboutit à une équation du second ordre compatible avec les équations provenant du modèle éléments finis. Tandis que le modèle ATF/ADF aboutit à des équations du premier ordre de telle façon que la compatibilité entre ces équations et celles provenant du modèle éléments finis n'est obtenue qu'en construisant un système couplé sous la forme d'équations d'état. D'autre part, même si les modèles GHM et ADF utilisent différents paramètres ayant différentes significations physiques, les modèles éléments finis construits en les utilisant présentent des réponses similaires. D'autres méthodes basées aussi sur l'addition de variables internes peuvent être trouvées dans la littérature [12]. Ces modèles représentent bien la variation des propriétés des matériaux viscoélastiques avec la fréquence, mais pour une température constante donnée. Afin de permettre la représentation de la dépendance en température des propriétés et l'échauffement du matériau, Lesieutre et son groupe [54] ont étendu le modèle ADF pour ces cas, aboutissant, néanmoins, à des équations non linéaires.

D'un point de vue cinématique les sandwichs viscoélastiques peuvent difficilement être modélisés suivant les hypothèses de Kirchhoff-Love ou de Reissner-Mindlin, qui supposent un déplacement linéaire dans l'épaisseur. En effet ces hypothèses conduisent à la théorie des stratifiés classiques, qui définit des tenseurs de rigidité équivalente en flexion et membrane. Mais cette théorie ne fonctionne pas bien lorsque l'âme du sandwich est très molle, ce qui est le cas des sandwichs à âme molle ou des tôles sandwichs avec une couche de polymère amortissant. Pour les sandwichs à âme molle, il faut donc enrichir la description des champs à travers l'épaisseur. Divers modèles ont été proposés, les plus connus étant l'hypothèse d'une variation cubique dans l'épaisseur (Reddy, Soldatos...), d'une variation sinusoïdale (Touratier) ou d'une variation en Zigzag (Mead, Rao...) ou d'autres encore Fig. 1.1. Nous pouvons classer l'ensemble des modèles en deux catégories, les modèles zig-zag et les modèles non zig-zag. La différence essentielle entre ces deux descriptions est au niveau de la continuité ou de la non continuité du champ de déplacement à l'interface coeur-peaux. Le plus connu et le plus simple des modèles est celui proposé par Love

(1927) connu sous le nom de Kirchoff-Love. Dans ce modèle, le champ de déplacement est linéaire par rapport à z et la déformation transversale est nulle. Vu l'importance de la déformation transversale du coeur dans la modélisation d'une structure sandwich, le modèle de Kirchhoff-love est inadapté à la modélisation du coeur par contre il pourra être retenu pour la modélisation des faces. L'autre modèle linéaire, souvent utilisé, est celui de Mindlin (Mindlin, 1951). Contrairement au modèle de Kirchhoff-love, ce modèle permet de décrire une déformation de cisaillement non nulle au niveau du coeur. Le modèle de Mindlin au coeur combiné avec un modèle de Kirchhoff-love aux faces est un modèle de type zig-zag Fig. 1.1.b. Une étude plus approfondie par Hu et al [46] a permis de comparer les différents modèles existant et apporte des éléments de réponse quant aux choix de la description cinématique des sandwichs.

Aussi d'autres modèles et méthodes numériques ont été développés pour faciliter la modélisation numérique des structures sandwichs à coeur viscoélastique [25], [68] et [28]. Nous rappellerons les méthodes permettant le calcul des propriétés amortissantes de ces sandwichs à la fin de ce chapitre.

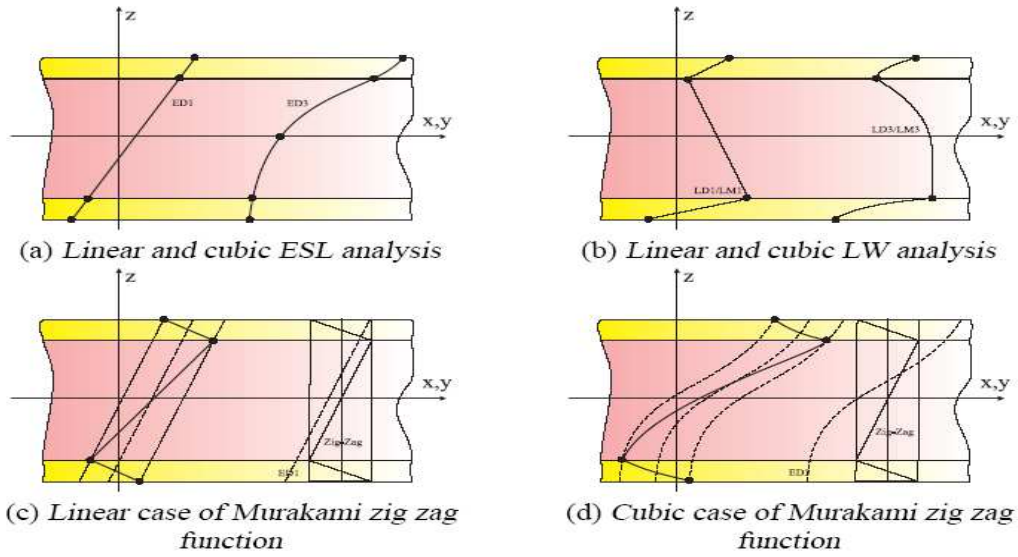


FIG. 1.1 – Représentation des modèles cinématiques multicouches [17]

L'amortissement passif des vibrations peut aussi être obtenu à l'aide matériaux intelligents tels que les matériaux piézoélectrique shuntés par des circuits adaptés. La première mise en oeuvre de telles solutions apparait en 1980 avec les travaux de Forward [36].

Ce dernier a mis en évidence que l'ajout d'un circuit shunt à des patchs piézoélectriques permet d'obtenir un amortissement passif. Cet amortissement est engendré par la dissipation d'une partie de l'énergie vibratoire, transformée en énergie électrique, dans le circuit électrique. En 1991, Hagood et Von Flotow [40] ont proposé les premiers modèles analytiques quantitatifs couplant le patch piézoélectrique soit à une résistance en série soit à un circuit RL (résistance et inductance en série) et déterminent ainsi les valeurs du circuit optimales pour la dissipation maximale. Depuis une quinzaine d'année de nombreux travaux sont menés sur ce nouveau type d'amortissement passif. Edberg et al [34] ont montré qu'il était possible d'atténuer simultanément deux modes de vibrations à l'aide des circuits accordés multiples. Wu et Bicos [79] ont implantés des contrôles multimodes sur des plaques composites. Davis et Lesieutre [26] ont amélioré l'amortissement par rapport au shunt passif avec un système activement accordé. Une revue plus exhaustive sur le contrôle passif par "shunt" est donnée par Moheimani [63]. Ce dernier explicite comment obtenir un modèle de contrôle passif par shunt efficace et les méthodes expérimentales permettant de contourner les limitations techniques tel que le besoin d'inductances très élevées ($L > 60H$) pour le contrôle des modes à très basses fréquences.
L'apport du contrôle passif de type shunt est indéniable et présente l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre et de ne jamais déstabiliser le système. Cependant les performances obtenues par ce type de contrôle demeurent faibles et ne concernent que quelques modes visées.

1.2 Solutions actives

Le concept de contrôle actif date du milieu des années 50 (Olsen, 1956). Toutefois, la non-existence d'actionneurs assez puissants pour contrôler les vibrations a limité les recherches. Forward et Liu [36] ont été parmi les premiers à utiliser des capteurs et actionneurs piézoélectriques afin de contrôler les vibrations de structures flexibles. Leurs travaux consistaient en l'utilisation d'un actionneur piézoélectrique attaché à la surface de la structure couplé à une jauge de contrainte piézoélectrique. Par la suite, Bailey et Hubbard [5] ont utilisé un film de polymère piézoélectrique (PVF_2) afin de contrôler les vibrations d'une poutre de type encastrée-libre. Beaucoup d'autres travaux ont été effectués afin de modéliser le comportement des actionneurs piézoélectriques. Crawley et de Luis [24] ainsi que Crawley et Anderson [23] ont présenté des modèles détaillés pour

l'utilisation d'actionneurs piézoélectriques afin de contrôler l'amplitude vibratoire d'une poutre soumise à une excitation. Hagood et al. [39] ont, par la suite, modélisé le couplage se produisant entre le piézoélectrique et la structure à contrôler. Par la suite, Dosch et al. [30] et Hagood et Anderson [4] ont démontré la possibilité d'utiliser un piézoélectrique à la fois comme capteur et comme actionneur. Les actionneurs et capteurs mis en oeuvre dans les modèles sont généralement, soit des pastilles céramiques piézoélectrique (ou polymère) soit des "couches" piézoélectriques. Du fait des problèmes de fabrications et de poids, de nombreux auteurs se sont attachés à étudier l'utilisation de capteurs et actionneurs en couches fines ou discrets localisés. Ceux-ci peuvent alors, soit recouvrir la surface comme dans les travaux de Veley et Rao [77], soit être incorporés dans la structure [15]. Le premier type de capteur en surface utilise le mécanisme par extension Fig. 1.2.a, le deuxième utilise le mécanisme par cisaillement Fig. 1.2.b.

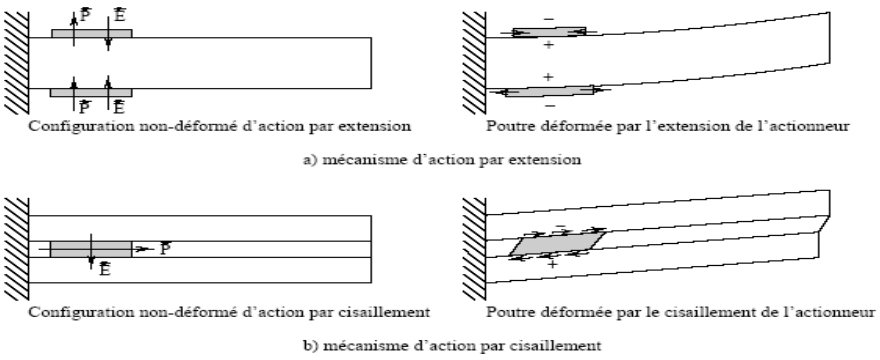


FIG. 1.2 – Représentation schématique des mécanismes d'action par extension et cisaillement

Le mécanisme par extension a été le premier, et est encore très étudié. Pour ne citer qu'eux Saravanos et Heyliger [42] ; Gopinathan et al [38] ; Benjeddou et Deü [13] ont modélisé, pour leur part, des sandwichs utilisant ce mode d'action au niveau de la couche piézoélectrique. Il s'agissait d'utiliser bien souvent un piézo-polymère tel que le PVDF (ou un piézo-céramique) qui, soumit à un champ transversal parallèle à sa polarisation, produit une déformation par extension de la couche. Avec la généralisation de l'utilisation de piézo-céramique, telle que le PZT, matériau pour lequel le coefficient d'interaction électrique mécanique le plus élevé n'est pas forcément celui provoquant une déformation par extension, ont voit de plus en plus de travaux étudiant le comportement des couches piézoélectriques par activation du mécanisme par cisaillement. Benjeddou [15] a pour

sa part comparé les deux mécanismes et mis en place des modèles pour différent cas d'utilisation en cisaillement du piézo. Qu'il s'agisse d'un piézo travaillant en extension ou en cisaillement un élément d'étude important est la localisation des patchs. Là aussi, de nombreux travaux ont permis de fixer les positions optimales des capteurs et actionneurs dans le but de réduire les vibrations dans une plage de fréquence donnée. Hiramoto et al. [43] ont quant à eux développé une méthode permettant d'obtenir une localisation idéale pour le contrôle en boucle fermée. Batra et al. [8] ont utilisé les séries de Fourier pour l'analyse de la vibration harmonique en flexion d'une plaque élastique avec des capteurs piézoélectrique collés aux extrémités des surfaces. Dans les cas où les patchs sont remplacés par des couches, la modélisation des sandwichs élastique/piézoélectrique progresse suivant deux voies :

- une meilleure représentation du comportement mécanique,
- une meilleure modélisation du comportement électrique.

Les travaux fondamentaux de Tiersten [74] ont donné la base théorique du comportement d'une plaque piézo. Puis suite aux travaux de Lee [51], une simplification du modèle a été obtenue en utilisant les hypothèses de Kirchhoff dans le cas des plaques. Dès lors, de nombreux chercheurs ont utilisé le modèle CLPT (Classical Laminate Plate Theory) dans des modélisations analytiques et numériques de plaques piézo. Heyliger [41] a montré les limites de ce modèle dans le cas ou le rapport longueur sur hauteur et faible. Quoiqu'il en soit, la plupart des modèles 2D sont basés sur la CLPT (champs de déplacements linéaires dans l'épaisseur) et considèrent le champ électrique comme constant dans l'épaisseur. Des modèles plus précis tel que la "théorie des couches discrètes" de Mitchell et Reddy [62] et la théorie multicouche de Saravanos et al [71] ont été développé pour une meilleure représentation du comportement électromécanique du matériau. Le dernier modèle présente quant à lui de bien meilleurs résultats que la CLPT ou le modèle FSDT de Gopinathan et al [38].

1.2.1 Théorie du contrôle

Il existe deux approches radicalement différentes pour contrôler activement une structure. La première est l'approche dite "Feedforward Control" qui consiste en un contrôle de type prédictif, appelé aussi "à priori". Dans le cas du contrôle par anticipation, les régulateurs travaillent sur la base de mesures alimentant un modèle mathématique et/ou

logique plus ou moins complexe décrivant le comportement du processus. C'est alors le modèle qui élabore la grandeur de pilotage. Ce type de contrôle suppose que la perturbation du système est prévisible, c'est notamment le cas lorsque :

- Le contrôle concerne des applications liées aux machines tournantes ; la perturbation tend alors à être harmonique.
- La perturbation se propage à travers le système de telle sorte qu'elle est, en tout point de la structure, fonction de sa valeur en amont.

En raison de sa simplicité d'utilisation, la forme la plus courante d'algorithme adaptatif est celle utilisant l'algorithme LMS (Least Mean Square). La seconde approche dite "Feedback Control" est la plus classique et la plus applicable, cela est du à la simplicité du principe, ce type de contrôle consiste en une régulation par un système et/ou logiciel ayant en charge de faire respecter une consigne de grandeur par rapport aux mesures entrantes en fournissant une grandeur de pilotage aux actionneurs agissant sur le processus. Il existe plusieurs méthodes de contrôle actif par rétroaction :

- Le contrôle optimal,
- Le contrôle actif dit classique.

Le contrôle optimal consiste en la minimisation d'un indice de performance défini au moyen des matrices pondérant les états et les commandes du système. Le contrôleur actif classique est généralement robuste. Les régulateurs sont alors le plus souvent de type PI (Proportionnelle - Intégrale) ou PID (Proportionnelle - Intégrale - Dérivée)
Dans le cadre de notre étude nous nous concentrerons sur l'approche dite "Feedback Control" car elle offre l'assurance de la stabilité lorsque l'actionneur et le capteur sont co-localisés [69] ; de plus cette approche est efficace pour la bande de fréquence proche des pics de résonnances. Nous considèrerons par la suite uniquement deux lois de types classiques simples à savoir : la loi rétroactive proportionnelle et directe (Direct proportional feedback) et la loi rétroactive en vitesse avec gain constant négatif (Constant gain negative velocity feedback). Ces lois font partie de la famille des contrôleurs dits à basse autorité et utilisent de préférence des configurations d'actuateurs et de senseurs co-localisées.

Loi rétroactive proportionnelle et directe

Comme son nom l'indique, utiliser cette loi revient à appliquer à l'actionneur, un potentiel $\phi_a(t)$ directement proportionnel au potentiel de sortie du capteur $\phi_s(t)$. Ce

potentiel s'écrit :

$$\{\phi_a(t)\} = g_d \{\phi_s(t)\} \tag{1.1}$$

où g_d représente le gain de contrôle.

Cette loi de contrôle a été utilisée entre autre par Liu et al [52] et Wang et al [78].

Loi rétroactive en vitesse avec gain constant négatif

Cette loi présente un amortissement large-bande qui dépend de la localisation des actuateurs et des senseurs, ainsi que du gain de la boucle. La loi est telle que le potentiel appliqué à l'actionneur est égal à l'opposé de la dérivée du potentiel de sortie multiplié par le gain de la boucle g_v ce qui donne

$$\{\phi_a(t)\} = g_v \left\{\dot{\phi_s}(t)\right\} \tag{1.2}$$

Cette loi de contrôle a été utilisée entre autre par Huang et Sun [44].

Contrôle optimal

Le contrôle optimal ou encore la méthode LQR (Linear Quadratic Regulator) est une méthode de contrôle pour laquelle on considère que l'état du système peut être connu de manière exacte. Cette approche est très optimiste (pas de perturbations, état du système parfaitement connu), elle permet d'obtenir la meilleure performance pour le contrôle du système. De manière plus réaliste on introduit la méthode LQG (Linear Quadratic Gaussian) qui remplace la méthode LQR lorsqu'il y a nécessité d'estimer l'état du système. En effet en présence de perturbations extérieures, l'état du système ne peut alors plus être connu de manière exacte et il faut donc dans un premier temps l'estimer avant de pouvoir l'utiliser pour déterminer le contrôle. Cette opération d'estimation peut être réalisée par un filtre de Kalman. Pour plus de détails concernant ces méthodes, une revue bibliographique peut être obtenue dans la thèse de Trindade [75].

1.3 Solutions hybrides

Le succès des traitements passifs, combiné aux progrès obtenus dans le domaine des matériaux intelligents, a motivé le développement de traitements actif-passif par l'as-

sociation de couches viscoélastiques et piézoélectriques Fig. 1.3. Leurs principaux avantages résident dans leur capacité d'augmenter activement le cisaillement du matériau viscoélastique à travers l'actionneur piézoélectrique, améliorant la dissipation d'énergie ; la combinaison des performances aux fréquences plus élevées, des matériaux viscoélastiques, aux très basses fréquences, des actionneurs piézoélectriques ; et enfin l'augmentation de la robustesse du contrôle actif, dans la mesure où, en cas de mauvais fonctionnement, le système reste amorti Fig.1.3. Depuis le début des années 90, plusieurs configurations de

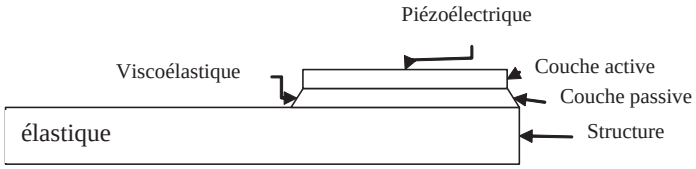


FIG. 1.3 – Traitement hybride pour le contrôle des vibrations

traitement ont été présentées dans la littérature. Celle proposée par Plump et Hubbard [67] a été retenue par la majorité des chercheurs. Néanmoins, une multitude de systèmes ont été proposés selon les positions et types des capteurs/actionneurs. Ainsi, Agnes et Napolitano [3], Huang et al. [44] et Yellin et Shen [80] ont supposé des actionneurs autocapteurs dans le revêtement contraint actif (RCA), tandis que Shen [72] et Liao et Wang [57] ont utilisé des capteurs optiques pour mesurer la flèche du bout de la poutre. Varadan et al. [76] ont considéré un capteur piézoélectrique collé à côté du traitement hybride. Lesieutre et Lee [55] ont proposé de segmenter le traitement afin d'augmenter sa robustesse, bien que les performances pour les fréquences plus élevées ont été diminuées. Dans ce cas, les déformations de la surface opposée de la poutre sont mesurées. Cette configuration a aussi été étendue par Baz [10] en considérant deux traitements collés symétriquement sur les surfaces d'une poutre, mais seuls les déplacements longitudinaux ont été considérés

afin d'étudier le mécanisme d'amélioration du cisaillement de la couche viscoélastique. Au niveau de la modélisation, Agnes et Napolitano [3] ont utilisé la théorie de Kerwin, en considérant l'effet de l'actionneur piézoélectrique comme une augmentation de la rigidité de la couche de précontrainte. D'autre part, Baz et Ro [9] sont partis de l'équation de Mead et Markus [61] pour étudier, par la méthode des ondes progressives, une poutre encastrée-libre partiellement traitée par le RCA, bien que dans leur cas, une couche piézoélectrique, servant de capteur, soit placée entre le matériau viscoélastique et la poutre. Ils ont supposé que le capteur et la poutre forment une seule couche dont la rigidité est équivalente à la somme de celles des deux couches. Dans ce cas, l'action piézoélectrique a été approchée par une déformation imposée. Cela a aussi été supposé par Shen [72] afin de dériver les équations de mouvement d'une poutre totalement couverte par un traitement hybride, qu'il a analysé ensuite à travers l'approche des fonctions de transfert. De même, van Nostrand et Inman [65] ont utilisé ces hypothèses pour développer leur modèle éléments finis (EF) avec quatre degrés de liberté (ddls) par noeud, pour lequel, tout comme Baz [9] et Huang et al. [44] , ils ont supposé les mêmes hypothèses que celles introduites par Baz et Ro [11] pour leur configuration de RCA, mais en tenant compte aussi des extensions et flexion de la couche viscoélastique. Ensuite, Lesieutre et Lee [55] ont développé un modèle EF à 9 ddls par élément avec des interpolations quadratiques pour le déplacement longitudinal et l'angle de cisaillement. Les effets des inerties de rotation ont été pris en compte pour les trois couches. Par ailleurs, des éléments finis isoparamétriques ont été utilisés pour étudier des traitements hybrides par Varadan et al. [76]. Dans les deux cas, des ddls électriques ont été utilisés pour modéliser l'action piézoélectrique. D'autre part, la méthode de Rayleigh-Ritz a aussi été utilisée par Baz et Ro [11] et Liao et Wang [57] pour discrétiser les équations de mouvement, où l'inertie de rotation a été négligée mais les déformations axiales de la couche viscoélastique ont été considérées. Le dernier modèle a été utilisé par les mêmes auteurs pour étudier l'effet des éléments aux bords. Ces derniers étant modélisés par des ressorts reliant l'actionneur à la poutre. Tout récemment Galucio et al. [37] se sont intéressés au traitement hybride en dynamique transitoire et ont donné des modèles simples à base de dérivées fractionnaires.

1.4 Méthodes numériques pour problèmes aux valeurs propres complexes

Comme nous l'avons déjà mentionné, le comportement des matériaux viscoélastiques dépend de la fréquence des vibrations. Ceci conduit à une matrice de rigidité complexe et dépendante non linéairement de la fréquence. Cette non linéarité rend difficile la résolution des problèmes de vibrations libre des sandwichs viscoélastiques que l'on peut écrire sous la forme discrétisée suivante :

$$([K(\omega)] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{0\} \tag{1.3}$$

où $[K(\omega)]$ est la matrice de rigidité dépendant de la fréquence. $[M]$ est la matrice de masse, considérée constante. $\{U\}$ est le vecteur discrétisé représentant les modes propres nodaux complexes. La résolution directe du problème (équation 1.3) permet de déterminer les propriétés modales (Ω fréquence amortie et η le facteur de perte) à l'aide de la formule suivante :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \tag{1.4}$$

Cependant plusieurs méthodes [73], [6], [19], [59], [27] et [32] ont été développées pour le calcul de ces propriétés modales. Ces méthodes peuvent être classés selon deux types : soit des méthodes dites "approchées" soit des méthodes dites "exactes".

1.4.1 Méthodes approchées

Parmi les méthodes approchées on trouve la méthode dite d'énergie de déformation modale (M.S.E) [73]. L'amortissement structurel dans la M.S.E. est défini comme la somme des énergies de déformation modales des sous systèmes, dans la base du système non-amorti, pondérées de leur amortissement matériau respectif, divisée par la somme des énergies de déformation. En fonction de la précision désirée, il y a deux manières d'appliquer cette méthode, à savoir en utilisant le mode réel ou le mode complexe. Dans le premier cas on suppose que le mode propre du sandwich est proportionnel au mode propre de la structure non amortie U_r, qui vérifie le problème aux valeurs propres réelles :

$$([K(0)] - \omega_0^2 [M]) \{U_r\} = \{0\} \tag{1.5}$$

où $[K(0)]$ est la matrice de rigidité construite en considérant seulement l'élasticité retardée du matériau viscoélastique. Le problème aux valeurs propres complexes (1.3) s'écrit alors :

$$([K(\omega)] - \omega^2 [M]) \{U_r\} = 0 \tag{1.6}$$

On approxime ensuite, $[K(\omega)]$ par $[K(\omega_0)]$. On obtient ainsi une approximation de la fréquence Ω et de l'amortissement η à l'aide du rapport :

$$\omega^2 = \frac{\{U_r\}^t [K(\omega_0)] \{U_r\}}{\{U_r\}^t [M] \{U_r\}} = \Omega^2 (1 + i\eta) \tag{1.7}$$

L'amortissement η est pour sa part défini par le rapport suivant :

$$\eta = \frac{\text{énérgie dissipée}}{\text{énérgie de déformation stockée}} \tag{1.8}$$

Cette méthode permet d'estimer l'amortissement en ne calculant que des modes réels, elle a donc un coût numérique faible mais elle ne demeure précise que pour des structures faiblement amorties [28]. On peut améliorer l'estimation de Ω et η en utilisant la même technique en remplaçant U par une autre approximation du mode complexe U_c. Il s'agit ici de la M.S.E. complexe (MSEC). On résout le problème linéaire suivant :

$$([K(\omega_0)] - {\omega_0}^2 [M]) \{U_c\} = \{F\} \tag{1.9}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des amplitudes des forces sinusoïdales imposées. Dans ce cas, Ω et η sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\{U_c\}^t \left[K^R(\omega_0)\right] \{U_c\}}{\{U_c\}^t [M] \{U_c\}} \\ \eta &= \frac{\{U_c\}^t \left[K^I(\omega_0)\right] \{U_c\}}{\{U_c\}^t [K^R(\omega_0)] \{U_c\}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

où $\left[X^R\right]$ et $\left[X^I\right]$ désigne respectivement la parie réelle et imaginaire de $[X]$. Cette méthode donne de très bonne estimations [73] dans le cas où la matrice de rigidité $[K(\omega)]$ est constante. Cependant, l'approximation du mode $\{U\}$ par $\{U_c\}$ peut être insuffisante lorsque $[K(\omega)]$ dépend de ω.

Une autre méthode approchée souvent utilisée est la méthode directe de réponse en fréquence. Celle ci considère l'analyse de la réponse du système en régime harmonique.

Dans ce cas, l'équation du problème est donnée par :

$$([K(\omega)] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{F\} \tag{1.11}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des amplitudes des forces sinusoïdales imposées habituellement prises comme réelles et définie de manière à exciter le mode correspondant ; l'excitation de l'ensemble des modes s'obtenant en imposant toutes les composantes de $\{F\}$ non nulles. On cherche ensuite la solution $\{U(\omega)\}$ (courbes de réponses), ce qui impose l'assemblage, la décomposition et l'inversion de la matrice de rigidité dynamique complexe $([K(\omega)] - \omega^2 [M])$ pour chaque pulsation ω. A partir des courbes de réponses en fréquence, des pics de résonance sont mis en évidence. Ainsi, le calcul des facteurs de perte de la structure peut se faire à l'aide de la méthode des bandes passantes à 3 dB Fig. 1.4 et le facteur de perte a pour expression (1.12)

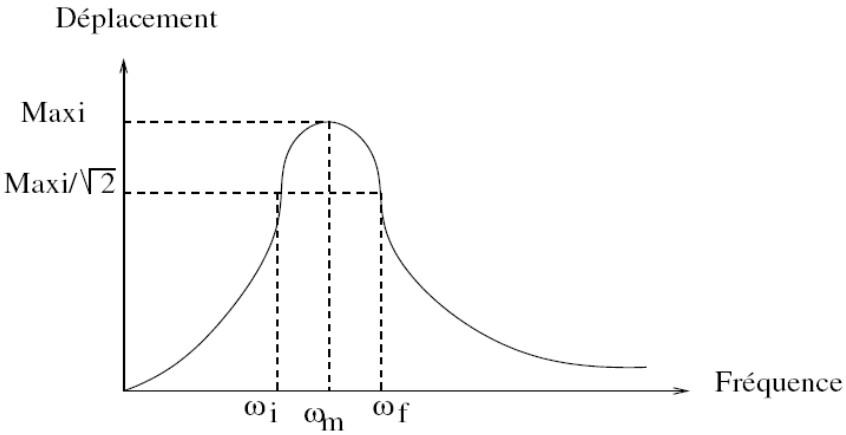


FIG. 1.4 – Calcul d'amortissement par la méthode des bandes passantes.

$$\eta = \frac{\omega_f - \omega_i}{\omega_m} \tag{1.12}$$

avec ω_m la pulsation correspondant au déplacement maximal, ω_f et ω_i les pulsations correspondant au $\frac{\text{déplacement } maximal}{\sqrt{2}}$ avec $\omega_i \leq \omega_f$. Cette méthode est avant tout une méthode permettant d'estimer l'amortissement à partir de résultats expérimentaux et présente par ailleurs quelques inconvénients si elle est appliquée avec un grand nombre de degré de liberté. En effet, l'obtention de la courbe de réponse $U(\omega)$, Fig. 1.4, est très coûteuse quand une solution complète est exigée et de plus l'évaluation du facteur de perte

n'est valide que pour un amortissement petit et pour des fréquences propres suffisamment séparées.

1.4.2 Méthodes dites exactes

Parmi les méthodes exactes, la plus connue est la méthode QR. Cette méthode permet de calculer les valeurs propres d'une matrice complexe constante [6]. Le principe de base de l'itération QR est de décomposer la matrice complexe A sous la forme :

$$[A] = [Q]\,[R] \tag{1.13}$$

Avec $[Q]$ matrice orthogonale et $[R]$ matrice triangulaire supérieure. Une fois $[Q]\,[R]$ obtenue, la matrice $[R]\,[Q]$ est formée. On itère ce calcul sur la matrice obtenue. Lorsque la suite matricielle est convergente, elle tend vers une matrice triangulaire supérieure semblable à $[A]$, dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres λ de $[A]$. Pour obtenir les vecteurs propres de $[A]$, il suffit de résoudre le système : $([A] - \lambda\,[I])\,\{x\} = \{0\}$, où $[I]$ est la matrice identité. Pour plus de détails sur cette méthode nous invitons le lecteur à se reporter à la thèse de Duigou [33].

. Bien que la méthode QR permette de déterminer précisément toutes les valeurs propres, elle présente deux limitations majeures. En effet, elle ne peut pas être utilisée si la matrice de rigidité dépend de la fréquence et surtout elle n'est efficace que pour des structures à faible nombre de degrés de liberté.

Depuis une vingtaine d'années de nouvelles méthodes permettant de résoudre directement le problème non linéaire aux valeurs propres complexes (équation 1.3) ont été développées. Chen et al [19] ont proposé une méthode d'itération-réduction en deux pas. Le premier consiste à obtenir une solution de perturbation au premier ordre. Le deuxième pas est une technique itérative pour trouver les valeurs propres complexes. Cette dernière est couplée avec un algorithme de Lanczos et une base réduite. La méthode d'itération réduction est une sorte d'algorithme de Newton. Elle demande souvent beaucoup d'itérations, ce qui augmente le temps de calcul pour des problèmes à grand nombre de degrés de liberté . Ma et He [59] ont proposé une méthode asymptotique qui n'a été appliqué qu'au cas où la matrice de rigidité $[K(\omega)]$ est constante et s'écrit sous la forme $[K_1]+[K_2]\,(1+i\beta)$ où β représente le facteur de perte de la couche viscoélastique et les matrices $[K_1]$ et $[K_2]$ sont constantes. Les modes propres, les fréquences propres et l'amortissement sont exprimés

dans ce cas sous forme de séries entières en β :

$$\begin{cases} \{U\} = \{U_0\} + \mu\{U_1\} + \mu^2\{U_2\} + \mu^3\{U_3\} + \mu^4\{U_4\} + ... \\ \Omega^2 = \Omega_0^2 + \mu^2\Omega_2^2 + \mu^4\Omega_4^2..... \\ i\eta = \mu\eta + \mu^3\eta_3 + \mu^5\eta_5 \\ \mu = i\beta \end{cases} \tag{1.14}$$

Les nouvelles expressions sont alors injectées dans l'équation (1.3). Une suite de problème récurrents est obtenue et résolue en utilisant la normalisation des modes complexes : $\{U\}^t[M]\{U\}$=1.

Les fréquences propres et les facteurs de perte modale sont ainsi calculés à l'aide des formules (1.14) en se limitant à l'ordre 5. L'approximation résultante a été améliorée en utilisant les approximants de Padé [35]. Technique qui améliore le rayon de convergence des séries. Cependant cette méthode ne peut être appliquée aux cas de grand amortissements et aux problèmes dont la matrice de rigidité est dépendante de la fréquence. Il faut dans ce cas, un nouveau paramètre de développement. En effet, dans ces cas, les séries ne convergent généralement pas et une méthode de continuation est nécessaire. Partant de ce constat Daya et Potier-Ferry [27] ont proposée une méthode couplant la technique d'homotopie et la technique de perturbation pour résoudre le problème (**??**). Il s'agit d'une méthode asymptotique pour laquelle une procédure de continuation est proposée. A partir des modes propres non amortis, les modes complexes sont déduits par la technique de perturbation. La méthode précédente utilise des pas de continuation pour lesquels il faut décomposer une matrice complexe ce qui double le nombre de degrés de libertés. Afin d'éviter la décomposition de matrices complexes, des algorithmes itératifs d'ordre élevés ont été développés par Duigou et al. [32]. Ils sont basés sur les mêmes techniques que la méthode de continuation avec cependant des pas qui ne nécessitent que l'inversion d'une matrice réelle.

1.5 Conclusions et propositions

D'après cette revue bibliographique, peu de travaux ont été dédiés au calcul des propriétés amortissantes des structures hybrides constituées de matériaux piézoélectriques et viscoélastiques. Ce genre de structures pose deux types de problèmes. Le premier est

lié au modèle qui doit prendre en compte le cisaillement de la couche visqueuse et le couplage électromécanique avec un coût de calcul raisonnable. Le deuxième problème est d'ordre numérique et est lié à la matrice de rigidité qui est complexe et dépendante de la fréquence et du contrôle. Cette dépendance rend difficile la mise en oeuvre des méthodes classiques de recherche des modes propres, de calcul de réponses et d'analyse des vibrations non linéaires. Dans ce travail nous proposons d'établir des modèles analytiques et numériques pour caractériser les propriétés amortissantes des sandwichs à 5 couches piézoélectrique/ élastique/ viscoélastique/ élastique/ piézoélectrique. Les modèles analytiques concernent des sandwichs de type poutre et conduisent à une approche modale simplifiée des fréquences et des amortissements. Les modèles numériques engendrent le développement d'une classe d'éléments finis sandwich de type coque et d'un algorithme numérique pour le calcul des vibrations libres de ces sandwichs. Enfin, une approche analytique et modale est proposée pour l'étude de l'amortissement passif à base de matériaux piézoélectriques. Cette étude analytique est menée dans le cas d'une poutre sandwich à coeur piézoélectrique.

Chapitre 2

Modèle analytique de poutre sandwich à amortissement hybride

2.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, la formulation théorique d'une poutre présentant un amortissement à caractère actif/passif. La géométrie du sandwich à 5 couches est décrite dans la Fig. 2.1. Le modèle est choisi de la manière la plus simple possible incluant une cinématique de type Euler-Bernoulli et de type Timoshenko ainsi que l'hypothèse d'un champ électrique purement transverse. Différent niveaux d'approximations sont considérés et le traitement du problème électrostatique dans le capteur est discuté. Cette analyse est une extension des travaux effectués par Duigou et al [33] pour les laminés à trois couches : piézoélectrique/ élastique/ piézoélectrique. L'analyse conduit à une approche modale simplifiée permettant le calcul des propriétés amortissantes de ces structures. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus à l'aide de la modélisation par éléments finis 2D en utilisant le code de calcul Abaqus.

2.2 Modèle cinématique et lois de comportement

Pour décrire les propriétés de la poutre sandwich en question, nous considérons une cinématique de type Euler-Bernoulli pour les différentes couches dures (piézoélectriques et élastiques) et une cinématique de type Timoshenko pour la partie centrale viscoélastique. Les couches supérieure et inférieure jouent respectivement les rôles de capteur et action-

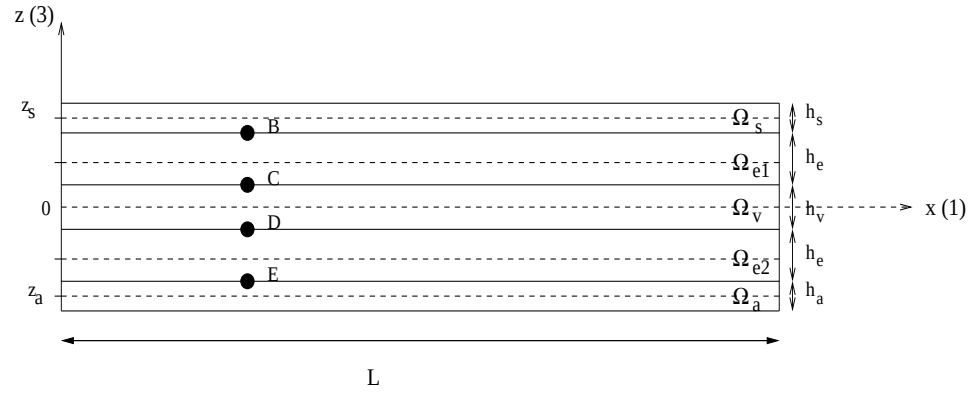


FIG. 2.1 – Notations pour le sandwich piezo/elast/visco/elast/piezo

neur et sont reliées par une loi de contrôle en boucle de rétroaction. Les déformations de cisaillement résultent de la différence de déplacement dans le plan des couches élastiques (e_1,e_2), Fig. 2.1. Nous considérons les hypothèses classiques [25], [59] et [70] suivantes :

- Il n'y a pas de glissement entre les différentes couches du sandwich.
- Tous les points d'une même normale à l'axe de la poutre ont le même déplacement transverse.
- Les matériaux sont supposés homogènes, linéaires et isotropes (hormis pour le piézoélectrique qui est orthotrope).
- La théorie zig-zag est utilisée.
- Les couches piézoélectriques sont supposées fines et agissant suivant le mode d'extension. (Annexe B)
- Le champ électrique ne dépend, dans l'espace, que de la variable x.
- Le coeur est conducteur avec un potentiel uniforme fixé à zéro.
- La flèche w est la même dans les 5 couches.
- Les déplacements et les déformations sont petits.

En considérant que l'origine de l'axe z est le plan médian, les déplacements axiaux dans les couches peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_i(x,z) = u_i(x) - (z - z_i)w'(x) \qquad i = s, e_1, e_2, a \\ \\ U_v(x,z) = u(x) + z\beta(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

où z_i est l'ordonnée de l'axe médian de la ième couche :

$$z_s = -z_a = (h_v + 2h_e + h_p)/2, z_{e1} = -z_{e2} = (h_v + h_e)/2 \tag{2.2}$$

p=s ou a, u_i représente le déplacement de l'axe de la couche i, u celui de la couche viscoélastique et β la rotation de la normale du plan médian de cette couche. Les conditions de raccords cinématiques aux points B,C,D,E définis à la figure Fig. 2.1 peuvent s'écrire

$$\begin{cases} U_s(Z_B) = U_{e1}(Z_B) \\ U_{e1}(Z_C) = U_v(Z_c) \\ U_v(Z_D) = U_{e2}(Z_D) \\ U_{e2}(Z_E) = U_a(Z_E) \end{cases} \tag{2.3}$$

A l'aide des conditions de raccords précédemment définis (2.3) le nombre de variables est réduit à 3 : le déplacement axial de la couche centrale viscoélastique, la rotation β de la normale au plan moyen dans cette couche et la flèche commune aux 5 couches. Les déplacements et les déformations axiales dans les différentes couches peuvent s'écrire uniquement en fonction de u, β, w, comme suit

$$\begin{cases} u_s = u + \frac{h_v}{2}\beta - Hw' \\ u_{e1} = u + \frac{h_v}{2}\beta - \frac{h_e}{2}w' \\ u_{e2} = u - \frac{h_v}{2}\beta + \frac{h_e}{2}w' \\ u_a = u - \frac{h_v}{2}\beta + Hw' \end{cases} \tag{2.4}$$

où $H = \frac{h_p}{2} + h_e$. Les déformations axiales s'écrivent ainsi sous la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_{1s} = u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'' - (z - z_s)w'' \\ \varepsilon_{1e1} = u' + \frac{h_v}{2}\beta' - \frac{h_e}{2}w'' - (z - z_{e1})w'' \\ \varepsilon_{1v} = u' + z\beta' \\ \varepsilon_{1e2} = u' - \frac{h_v}{2}\beta' + \frac{h_e}{2}w'' - (z - z_{e2})w'' \\ \varepsilon_{1a} = u' - \frac{h_v}{2}\beta' + Hw'' - (z - z_a)w'' \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.1 Equations constitutives généralisées

Nous considérons ici que les matériaux élastiques et viscoélastiques sont linéaires, homogènes et isotropes. En accord avec la loi de Hooke et les relations cinématiques définies par les équations (2.1) et (2.2), on définit l'effort axial N, le moment fléchissant M des couches élastiques et viscoélastiques ainsi que l'effort tranchant du coeur T comme suit :

$$\begin{aligned} N_{e_1} &= E_e S_e(u' + \tfrac{h_v}{2}\beta' - \tfrac{h_e}{2}w'') & M_{e1} &= E_e I_{e_1} w'' \\ N_{e_2} &= E_e S_e(u' - \tfrac{h_v}{2}\beta' + \tfrac{h_e}{2}w'') & M_{e2} &= E_e I_{e_2} w'' \\ N_v &= S_v E_v * \dot{u}' & M_v &= I_v Y * \dot{\beta}' \\ T &= \tfrac{S_v}{2(1+\nu_v)} Y * (\dot{w}' + \dot{\beta}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $*$ représente le produit de convolution, $\dot{A}$ désigne la dérivée temporelle de A, Y est la fonction de relaxation, E_i le module d'Young, ν_i le coefficient de Poisson, I_i le moment quadratique et S_i l'aire de la section transverse de la $i^{\text{ème}}$ couche.
Les équations constitutives peuvent se réduire dans notre cas comme présenté en annexe B à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & -e_{31}^* \\ e_{31}^* & \epsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

où

$$\begin{cases} \epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}} \\ e_{31}^* = e_{31} - \frac{c_{13}}{c_{33}} e_{33} \\ c_{11}^* = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \end{cases}$$

La relation champ électrique/potentiel électrique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.8}$$

Dans cette analyse, on considère que la couche centrale est conductrice avec un potentiel uniforme fixé à zéro [38]. Souvent dans la littérature, le champ électrique est supposé variant linéairement à travers l'épaisseur, en accord avec la même variation de contrainte et de déformation [48] [60] [58]. Ici on considère des couches fines ce qui nous permet de

considérer un champ électrique constant à travers l'épaisseur de chaque couche :

$$E_3 = -\frac{\phi}{h} \tag{2.9}$$

où ϕ représente le potentiel à la surface, h est l'épaisseur de la couche piézoélectrique.
A partir de l'expression (équation (2.5)), on définit les forces axial N et le moment fléchissant M dans les couches piézoélectrique comme suit :

$$\begin{array}{ll} N_s = c_{11}^* S_p(u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'') + e_{31}^* \frac{S_p}{h_p}\phi_s & M_s = c_{11}^* I_s w'' \\ N_a = c_{11}^* S_p(u' - \frac{h_v}{2}\beta' + Hw'') - e_{31}^* \frac{S_p}{h_p}\phi_a & M_a = c_{11}^* I_a w'' \\ \text{oú} \quad I_i = \int_S (z - z_i)^2 dS & i = s, a \end{array} \tag{2.10}$$

2.2.2 Lois électromécaniques équivalentes

En accord avec la cinématique zig-zag, la contrainte dans la poutre sandwich peut être représentée par une force normale globale N, un moment global M_β et M_w et par une force de cisaillement, de tel manière que le principe de d'Alembert s'écrit, en négligeant les inerties de rotation :

$$\begin{gathered} \int_0^L \{N\delta u' + M_w \delta w'' + M_\beta \delta\beta' + T(\delta\beta + \delta w') + (\rho S)_{eq}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w)\} dx = 0 \\ \forall \delta u, \delta w, \delta\beta \end{gathered} \tag{2.11}$$

où

$$(\rho S)_{eq} = \rho_s S_s + \rho_{e1} S_{e1} + \rho_v S_v + \rho_{e2} S_{e2} + \rho_a S_a \tag{2.12}$$

et N, M_β, M_w et T sont définis ainsi

$$\begin{array}{l} N = N_s + N_{e1} + N_v + N_{e2} + N_a, \\ M_\beta = \frac{h_v}{2}(N_{e_1} - N_{e_2}) + M_v + \frac{h_v}{2}(N_s - N_a), \\ M_w = M_s + M_{e_1} + M_{e_2} + M_a - \frac{h_e}{2}(N_{e_1} - N_{e_2}) - H(N_s - N_a) \\ T = \frac{S_v}{2(1+\nu_v)} Y * (\dot{w}' + \dot{\beta}) \end{array} \tag{2.13}$$

On considère que le coeur viscoélastique est fin et mou si bien que les résultantes M_v et N_v peuvent être négligées [70]. En combinant les équations (2.13), (2.6) et (2.10), on déduit les équations global constitutives du laminés :

$$\begin{cases} N = (ES)_{mec}u' + e_{31}^{*}\frac{S_p}{h_p}(\phi_s - \phi_a) \\ M_\beta = (EI)_\beta\beta' + \gamma_w w'' + e_{31}^{*}\frac{h_v}{2}\frac{S_p}{h_p}(\phi_s + \phi_a) \\ M_w = \gamma_w\beta' + (EI)_{mec}w'' - e_{31}^{*}H\frac{S_p}{h_p}(\phi_s + \phi_a) \\ T = \frac{S_v}{2(1+\nu_v)}Y * (\dot{w}' + \dot{\beta}) \end{cases} \tag{2.14}$$

avec

$$\begin{cases} (ES)_{mec} = 2E_eS_e + 2c_{11}^{*}S_p \\ (EI)_{mec} = E_e(I_{e1} + I_{e2} + \frac{h_e^2}{2}S_e) + c_{11}^{*}(I_a + I_s + 2H^2S_p) \\ \gamma_w = -\frac{h_v}{2}(h_eS_eE_e + 2c_{11}^{*}S_pH) \\ (EI)_\beta = \frac{h_v^2}{2}(E_eS_e + c_{11}^{*}S_p) \end{cases} \tag{2.15}$$

On peut remarquer ici qu'il n'y a pas de termes de couplages entre membrane et courbure du fait de la configuration symétrique du sandwich.

2.3 Condensation du potentiel électrique

Afin de réduire le nombre de variables généralisées on peut éliminer le potentiel électrique du capteur suivant deux cas :

- Dans le premier cas nous considérons le capteur libre de charge en surface.
- Dans le deuxième cas nous considérons la présence d'électrodes.

2.3.1 Cas 1 : Capteur libre de charge

Nous supposons qu'il n'y a pas de déplacement électrique dans le capteur piézoélectrique, celui ci est libre de charges

$$\int_{z_s-\frac{h_p}{2}}^{z_s+\frac{h_p}{2}}(\int_0^L D_3(z_s)dx)dz = S_s\int_0^L(e_{31}^{*} * \varepsilon_{1s}(z_s) - \epsilon_{33}^{*} * \frac{\phi_s}{h_p})dx = 0 \tag{2.16}$$

Le potentiel du capteur ϕ_s est obtenu comme une fonction des variables cinématiques :

$$\phi_s = \frac{e_{31}^{*}}{\epsilon_{33}^{*}}h_p(u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'') \tag{2.17}$$

Si l'on considère la relation (équation (2.17)) on peut éliminer le potentiel électrique du capteur dans l'équation (2.14). Ce qui nous conduit à la loi constitutive modifiée :

$$\begin{cases} N = (ES)_{eq}u' + \alpha\frac{h_v}{2}\beta' - \alpha H w'' - e_{31}^{*}\frac{S_p}{h_p}\phi_a \\ M_\beta = \alpha\frac{h_v}{2}u' + (EI)_{\beta eq}\beta' + \gamma_{weq}w'' + e_{31}^{*}\frac{h_v}{2}\frac{S_p}{h_p}\phi_a \\ M_w = -\alpha H u' + \gamma_{weq}\beta' + (EI)_{eq}w'' - e_{31}^{*}H\frac{S_p}{h_p}\phi_a \end{cases} \tag{2.18}$$

avec

$$\begin{cases} (ES)_{eq} = (ES)_{mec} + \alpha \\ (EI)_{eq} = (EI)_{mec} + \alpha H^2 \\ \gamma_{weq} = \gamma_w - \frac{h_v}{2}H\alpha \\ (EI)_{\beta eq} = (EI)_\beta + (\frac{h_v}{2})^2\alpha \end{cases} \qquad \alpha = \frac{e_{31}^{2}*}{\epsilon_{33}*}S_p \tag{2.19}$$

Deux termes de couplages apparaissent dans les équations (2.18) et (2.19). Les termes α dans γ_{weq} représente le terme de couplage flexion/rotation d'origine électrique. Le terme de couplage membrane/flexion (-αH dans N et M_w) est du à la condensation du potentiel électrique dans le capteur.

Les formules (équation (2.18)) peuvent s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = [C]\begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} + e_{31}^{*}\frac{S_p}{h_p}\phi_a[V_a] \tag{2.20}$$

avec

$$[C] = \begin{bmatrix} (ES)_{eq} & \alpha\frac{h_v}{2} & -\alpha H \\ \alpha\frac{h_v}{2} & (EI)_{\beta eq} & \gamma_{weq} \\ -\alpha H & \gamma_{weq} & (EI)_{eq} \end{bmatrix} \qquad et \qquad [V_a] = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{h_v}{2} \\ -H \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

La matrice $[C]$ est réelle et symétrique. On peut y voir le terme de couplage membrane/flexion du à la condensation de l'équation électrostatique dans le capteur.

2.3.2 Cas 2 : Application d'électrodes

Nous supposons cette fois-ci comme précédemment qu'il n'y a pas de déplacement électrique dans le capteur piézoélectrique et qu'une électrode recouvre la couche piézo. Ceci nous conduit à prendre en compte une nouvelle condition caractérisant l'équipotentialité

au niveau du capteur (ϕ_s constante suivant la direction x)

$$\begin{cases} \int_{z_s-\frac{h_p}{2}}^{z_s+\frac{h_p}{2}} (\int_0^L D_3(z_s)dx)dz = S_s \int_0^L (e_{31}^* * \varepsilon_{1s}(z_s) - \epsilon_{33}^* * \frac{\phi_s}{h_p})dx = 0 \\ \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Le potentiel du capteur ϕ_s est obtenu comme une fonction des variables cinématiques :

$$\phi_s = \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} h_p \int_0^L (u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'')dx \tag{2.23}$$

Si l'on considère la relation (2.23), on peut éliminer le potentiel électrique du capteur dans l'équation (2.14). Ce qui mène à une loi constitutive modifiée légèrement différente de celle ne prenant pas en compte l'équipotentialité :

$$\begin{cases} N = (ES)_{mec}u' + \alpha \int_0^L (u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'')dx - e_{31}^* \frac{S_p}{h_p}\phi_a \\ M_\beta = \alpha \frac{h_v}{2} \int_0^L (u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'')dx + (EI)_\beta \beta' + \gamma_w w'' + e_{31}^* \frac{h_v}{2} \frac{S_p}{h_p}\phi_a \\ M_w = -\alpha H \int_0^L (u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'')dx + \gamma_w \beta' + (EI)_{mec} w'' - e_{31}^* H \frac{S_p}{h_p}\phi_a \end{cases} \tag{2.24}$$

avec ici aussi $\alpha = \frac{e_{31}^{2*}}{\epsilon_{33*}} S_p$

2.4 Prise en compte du contrôle

Nous considérerons deux type de lois de contrôle en rétroaction. Dans un premier temps, on ne tient pas compte de l'électrode et une loi de contrôle proportionnelle direct est utilisée :

$$\phi_a = g_d \phi_s \tag{2.25}$$

où g_d est le gain direct de contrôle. Si l'on utilise cette loi de contrôle on obtient la forme suivante pour la loi constitutive :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = ([C] + g_d \alpha [V_a].[V_s]^t) \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$[V_s] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{h_v}{2} \\ -H \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

La seconde loi de contrôle est une loi rétroactive en vitesse avec un gain constant négatif

$$\phi_a = -g_v \dot{\phi_s} \tag{2.28}$$

où g_v est le gain en vitesse. A partir de l'équation (2.17)) la loi de contrôle transforme la loi constitutive de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} - g_v \alpha [V_a].[V_s]^t \begin{bmatrix} \dot{u'} \\ \dot{\beta'} \\ \dot{w''} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Finalement, des modèles constitutifs de poutre (équations (2.26) et (2.29)) sont obtenus, qui prennent compte tout à la fois le problème électrique dans la couche du capteur et la loi de contrôle dans l'actionneur. La première équation (2.26) est une sorte de loi élastique, mais sans aucune symétrie de la matrice vu que V_a est différent de V_s. Ce manque de symétrie est du au caractère non conservative de la loi de contrôle (équation (2.25)). L'équation (2.29) est similaire à une loi viscoélastique de type Kelvin. Néanmoins, la matrice d'amortissement $[V_a][V_s]^t$ n'a pas un signe définis, le problème dynamique peut ne pas être bien posé comme dans [33]. La dernière conséquence ne doit pas constituer un frein pour l'analyse des lois de type fréquence.

Si l'on considère ici la présence d'électrodes les modèles sont modifiés et l'on obtient alors pour la loi de contrôle proportionnelle directe :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = [C_{elastique}] \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} + \alpha [V_{equi}] \int_0^L (u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'')dx \tag{2.30}$$

avec

$$[C_{elastique}] = \begin{bmatrix} (ES)_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & (EI)_{\beta} & \gamma_w \\ 0 & \gamma_w & (EI)_{mec} \end{bmatrix} \qquad et \qquad [V_{equi}] = \begin{bmatrix} 1 - g_d \\ 1 + g_d \\ -1 - g_d \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

et pour la loi de contrôle en vitesse

$$\begin{bmatrix} N \\ M_{\beta} \\ M_w \end{bmatrix} = [C_{elastique}] \begin{bmatrix} u' \\ \beta' \\ w'' \end{bmatrix} + [A] \int_0^L (u' + \frac{h_v}{2}\beta' - Hw'')dx + [\Gamma] \int_0^L (\dot{u}' + \frac{h_v}{2}\dot{\beta}' - H\dot{w}'')dx \tag{2.32}$$

avec

$$[A] = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad et \qquad [\Gamma] = \alpha g_v \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

2.5 Approche modale simplifiée

Afin de définir les propriétés amortissantes de la poutre sandwich nous considérons les vibrations harmoniques libres. Les inconnus u, w, β, N, M_{β}, M_w et T sont supposés sous forme harmonique (ω est la fréquence et peut être complexe) :

$$\begin{aligned} &u = ue^{i\omega t}, \quad w = we^{i\omega t}, \quad \beta = \beta e^{i\omega t} \\ &N = Ne^{i\omega t}, \quad M_w = M_w e^{i\omega t}, \quad M_{\beta} = M_{\beta} e^{i\omega t}, \quad T = Te^{i\omega t} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dans le cas présent, les équations constitutives du matériau peuvent être définis, comme explicité dans l'annexe A par un module d'Young complexe $E_v(\omega)$, qui est dépendant de la fréquence. Ainsi, la force de cisaillement T s'écrit sous la forme suivante :

$$T = G_v(\omega) S_v (w' + \beta) \tag{2.35}$$

où $G_v(\omega) = \frac{E_v(\omega)}{2(1+\nu_v)}$ est le module de cisaillement complexe qui dépend de ω. le problème modale défini à partir de l'équation 2.11 devient :

$$\int_0^L \begin{bmatrix} N & M_\beta & M_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u' \\ \delta\beta' \\ \delta w'' \end{bmatrix} + T(\delta\beta + \delta w') - (\rho S)_{eq}\omega^2(u\delta u + w\delta w)dx = 0 \quad \forall \delta u, \delta w, \delta\beta \tag{2.36}$$

A partir de l'expression 2.36 et après intégrations par parties, les équations locales d'équilibres sont obtenues sous la forme :

$$\begin{cases} N' = \rho S\omega^2 u \\ M'_\beta - T = 0 \\ M''_w - T' = \rho S\omega^2 w \end{cases} \tag{2.37}$$

Pour faciliter cette étude analytique, nous éliminons le déplacement axial par condensation statique et négligeons les termes d'inertie membranaire par rapport à ceux en flexion ($N' \approx 0$). En utilisant l'équation (2.37.b) et après condensation de u, w devient l'unique déplacement du problème. Par ailleurs, le facteur de perte modale η et la fréquence Ω peuvent être obtenus sous forme classique [70] :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \tag{2.38}$$

Pour étudier analytiquement l'effet du couplage hybride sur les propriétés amortissantes, on considère ici une poutre en appui simple ($N = 0$, $w = 0$, $M_w = 0$ et M_β=0) aux extrémités. Dans ce cas les solutions prennent les formes suivantes :

$$w = Wsin(kx) \qquad \beta = Bcos(kx) \qquad u = Ucos(kx) \qquad k = \frac{n\pi}{L} \tag{2.39}$$

où W, B, U sont les amplitudes complexes inconnues et k est le nombre du mode (n=1,2,....).

2.5.1 Analyse modale avec un contrôle proportionnel direct

Si l'on considère la loi de contrôle proportionnel direct (équation (2.25)), la loi constitutive (équation (2.26)) devient :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = \left([C] + g_d\alpha[V_a].[V_s]^t\right) \begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} (-ksin(kx)) \tag{2.40}$$

En insérant les équations (2.14b), (2.14c), (2.14d) et (2.35) dans les équations (2.37.a) et (2.37.b), on obtient les équations suivantes dans lesquelles les inconnues se réduisent aux amplitudes U,B et W.

$$\begin{cases} [(ES)_{eq} - \alpha g_d]U + \frac{h_v}{2}\alpha(1-g_d)B = H\alpha(1-g_d)kW & (a) \\ -\frac{h_v}{2}\alpha(1+g_d)k^2U - \left\{[(EI)_{\beta eq} + \alpha g_d(\frac{h_v}{2})^2]k^2 + G_v(\omega)S_v\right\}B = & \\ [G_v(\omega)S_v + (\gamma_{weq} - \alpha g_d\frac{h_v}{2}H)k^2]kW & (b) \end{cases} \tag{2.41}$$

De l'équation (2.41), les amplitudes U, B et W peuvent s'exprimer seulement en fonction de W :

$$\begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} = [R_{mode}]\, kW \tag{2.42}$$

avec

$$[R_{mode}] = \begin{bmatrix} U_{mode} \\ B_{mode} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

où

$$\begin{cases} U_{mode} = \dfrac{2\frac{H}{h_v}\left\{\left[(EI)_{\beta eq} + \alpha g_d(\frac{h_v}{2})^2\right]k^2 + G_v(\omega)S_v\right\} + G_v(\omega)S_v + \left(\gamma_{weq} - \alpha g_d\frac{h_v}{2}H\right)k^2}{\frac{(ES)_{eq}-\alpha g_d}{\frac{h_v}{2}\alpha(1-g_d)}\left\{\left[(EI)_{\beta eq} + \alpha g_d(\frac{h_v}{2})^2\right]k^2 + G_v(\omega)S_v\right\} - \frac{h_v}{2}\alpha(1+g_d)k^2} \\ B_{mode} = \dfrac{G_v(\omega)S_v + \left[\gamma_{weq} + \frac{h_v}{2}H\left(\frac{\alpha^2(1-g_d^2)}{(ES)_{eq}-\alpha g_d} - \alpha g_d\right)\right]k^2}{-G_v(\omega)S_v + \left[\left(\frac{h_v}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha^2(1-g_d^2)}{(ES)_{eq}-\alpha g_d} - \alpha g_d\right) - (EI)_{\beta eq}\right]k^2} \end{cases} \tag{2.44}$$

Comme le module de cisaillement $G_v(\omega)$ apparait dans l'expression 2.44, $[R_{mode}]$ est alors complexe et dépend de ω.

Valeurs propres complexes

Pour obtenir les valeurs propres ω^2, la forme variationnelle de l'équation (2.36) est utilisé avec la condensation de u et β. les déplacements virtuels suivants sont considérés :

$$\delta u = \overline{u} = \overline{U} cos(kx) \quad , \quad \delta w = \overline{w} = \overline{W} sin(kx) \quad , \quad \delta\beta = \overline{\beta} = \overline{B} cos(kx) \tag{2.45}$$

où $\overline{X}$ est le complexe conjugué de X.
Ainsi en introduisant les équations (2.42), (2.43), (2.35) et (2.45) dans l'équation (2.36), celà nous donne l'expression suivante :

$$\omega^2 = \frac{k^4[\overline{R_{mode}}]^t \left([C] + \alpha g_d[V_a].[V_s]^t\right)[R_{mode}] + k^2 S_v G_v(\omega)|B_{mode} + 1|^2}{(\rho S)_{eq}} \tag{2.46}$$

Approximation de la fréquence complexe

L'équation (2.46) ne fournit pas une expression explicite de la fréquence propre car $[R_{mode}]$ et le module de cisaillement dépendent de ω. Pour simplifier l'expression, nous considérons le concept de module complexe constant. Ce dernier permet d'écrire le module de cisaillement $G_v(\omega)$ sous la forme

$$G_v(\omega) = G_v^R(1 + i\eta_v) \tag{2.47}$$

où η_v est le facteur de perte de la couche viscoélastique et G_v^R la partie réelle du module qui représente l'élasticité retardée.
Une autre approximation peut être effectuée en négligeant l'influence de l'amortissement du matériau η_v dans l'expression du vecteur $[R_{mode}]$, c'est à dire en remplaçant $G_v(\omega)$ par ${G_v}^R$ dans les équations (2.43) et (2.44) ce qui nous amène à une analyse modale réelle et l'on obtient les estimations suivantes de la pulsation propre et du facteur de perte

$$\begin{cases} \Omega^2 = \dfrac{k^4[\overline{R_{mode}}]^t \left([C] + \alpha g_d[V_a].[V_s]^t\right)[R_{mode}] + k^2 S_v {G_v}^R|B_{mode} + 1|^2}{(\rho S)_{eq}} \\ \dfrac{\eta}{\eta_v} = \dfrac{k^2 S_v G_v^R (1+B_{mode})^2}{\Omega^2 (\rho S)_{eq}} \end{cases} \tag{2.48}$$

On peut remarquer ici que l'amortissement modale est proportionnel à l'amortissement viscoélastique et que le gain g_d de contrôle peut modifier cet amortissement à travers l'amplitude B_{mode} et la pulsation Ω. Par la suite nous ne considérerons plus que l'analyse modale complexe ($[R_{mode}]$ complexe).

2.5.2 Analyse avec un contrôle dérivatif en vitesse

Si l'on considère la loi de contrôle dérivative, (équation 2.28), la loi constitutive (équation 2.29) devient :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = \left([C] - i\omega\alpha g_v [V_a].[V_s]^t\right) \begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} (-ksin(kx)) \tag{2.49}$$

En procédant de manière similaire que précédemment, nous obtenons les expressions suivantes des amplitudes U_{mode}, B_{mode} :

$$\begin{cases} U_{mode} = \dfrac{2\frac{H}{h_v}\left\{\left[(EI)_{\beta eq} - i\omega\alpha g_v(\frac{h_v}{2})^2\right]k^2 + G_v(\omega)S_v\right\} + G_v(\omega)S_v + \left(\gamma_{weq} + i\omega\alpha g_v\frac{h_v}{2}H\right)k^2}{2\frac{(ES)_{eq}}{h_v\alpha}\left\{\left[(EI)_{\beta eq} - i\omega\alpha g_v(\frac{h_v}{2})^2\right]k^2 + G_v(\omega)S_v\right\} - \frac{h_v}{2}(\alpha(1-i\omega g_v))k^2} \\ B_{mode} = \dfrac{G_v(\omega)S_v + \left[\gamma_{weq} + \frac{h_v}{2}H\left(\frac{(\alpha^2(1-i\omega)g_v)}{(ES)_{eq}} + i\omega\alpha g_v\right)\right]k^2}{-G_v(\omega)S_v + \left[\left(\frac{h_v}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha^2(1-i\omega g_v)}{(ES)_{eq}} + i\omega\alpha g_v\right) - (EI)_{\beta eq}\right]k^2} \end{cases} \tag{2.50}$$

ainsi que pour les valeurs propres

$$\omega^2 = \frac{k^4[\overline{R_{mode}}]^t\left([C] - i\omega\alpha g_v[V_a].[V_s]^t\right)[R_{mode}] + k^2 S_v G_v(\omega)|B_{mode}+1|^2}{(\rho S)_{eq}} \tag{2.51}$$

Trois effets structuraux majeurs peuvent être observés

- L'effet élastique est défini principalement par le terme : $[\overline{R_{mode}}]^t([C])[R_{mode}]$
- L'amortissement passif introduit par la couche viscoélastique s'exprime par la partie imaginaire de : $S_v G_v(\omega)|B_{mode}+1|^2$.
- L'amortissement acif s'exprime par le terme $[\overline{R_{mode}}]^t\left(\omega\alpha g_v[V_a].[V_s]^t\right)[R_{mode}]$.

Pour de faibles valeurs du facteur de perte et du gain de contrôle, l'amortissement total est la somme de l'amortissement actif et passif.

2.5.3 Analyse avec prise en compte des électrodes

A ce stade de l'analyse, la condition d'équipotentialité est considérée. Nous procédons de la même manière que précédemment pour déterminer les valeurs propres complexes. Dans le cas de la loi de contrôle proportionnel la loi constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = [C_{elastique}] \begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} (-ksin(kx)) + \alpha[V_{equi}]\Phi \tag{2.52}$$

avec

$$\Phi = (U + \frac{h_v}{2}B - HkW)((-1)^n - 1) \tag{2.53}$$

Les amplitudes U_{mode}, B_{mode} sont pour le cas présent

$$\begin{cases} U_{mode} = \frac{bf-ec}{ea-bd} \\ B_{mode} = \frac{af-dc}{bd-ae} \end{cases} \tag{2.54}$$

avec

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}Lk^2(ES)_{mec} + \frac{(1-g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \\ b = \frac{h_v(1-g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \\ c = \frac{-H(1-g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \\ d = \frac{h_v(1+g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \\ e = \frac{1}{2}L(k^2(EI)_\beta + G_rS_v) + \frac{h_v^2(1+g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{4L} \\ f = \frac{1}{2}L(k^2\gamma_w + G_rS_v) - \frac{Hh_v(1+g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \end{cases} \tag{2.55}$$

Les valeurs propres quant à elles s'expriment sous la forme

$$\omega^2 = \frac{2k^2\left(gU_{mode} + hB_{mode} + i\right)}{(\rho S)_{eq}L} \tag{2.56}$$

où

$$\begin{cases} g = \frac{-H(1+g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \\ h = \frac{1}{2}L(k^2\gamma_w + G_rS_v) - \frac{Hh_v(1+g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \\ i = \frac{1}{2}L(k^2(EI)_{mec} + G_rS_v) + \frac{H^2(1+g_d)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \end{cases} \tag{2.57}$$

Dans le cas de la deuxième loi de contrôle on obtient l'expression suivante pour la loi constitutive :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_\beta \\ M_w \end{bmatrix} = [C_{elastique}] \begin{bmatrix} U \\ B \\ kW \end{bmatrix} (-ksin(kx)) + [A]\,\Phi + [\Gamma]\,\dot{\Phi} \tag{2.58}$$

Les amplitudes U_{mode}, B_{mode} s'expriment comme précédemment (voir équation 2.54) avec cette fois-ci

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}Lk^2(ES)_{mec} + \frac{(1+i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \\ b = \frac{h_v(1+i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \\ c = \frac{-H(1+i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \\ d = \frac{h_v(1-i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \\ e = \frac{1}{2}L(k^2(EI)_\beta + G_rS_v) + \frac{h_v^2(1-i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{4L} \\ f = \frac{1}{2}L(k^2\gamma_w + G_rS_v) - \frac{Hh_v(1-i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \end{cases} \tag{2.59}$$

Les valeurs propres s'expriment comme en (2.56) avec

$$\begin{cases} g = \frac{-H(1-i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \\ h = \frac{1}{2}L(k^2\gamma_w + G_rS_v) - \frac{Hh_v(1-i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{2L} \\ i = \frac{1}{2}L(k^2(EI)_{mec} + G_rS_v) + \frac{H^2(1-i\omega g_v)\alpha((-1)^n-1)^2}{L} \end{cases} \tag{2.60}$$

D'après les expressions obtenues, lorsque l'on prend en compte l'équipotentialité, il n'y a pas d'effets électriques pour les modes paire car l'approximation modale (2.39) conduit à un potentiel nul d'après (2.24)

2.6 Applications et commentaires

Dans ce paragraphe, les modèles analytiques développés dans ce chapitre sont appliqués dans le cas d'une poutre sandwich symétrique à 5 couches piézo/ ela/ visco/ ela/ piézo. Les données géométriques et matérielles des couches élastiques et viscoélastique sont définis dans les tableaux 2.1 et 2.2. Les couches piézoélectriques sont constituées de PZT4 dont le comportement est rappelé en annexe B et pour lequel les coefficients valent

$$\begin{cases} C_{11} = C_{22} = 139.0\ GPa;\ C_{33} = 115.3\ GPa \\ C_{13} = C_{23} = 74.3\ GPa;\ C_{12} = 77.8\ GPa \\ C_{44} = C_{55} = 25.6\ GPa;\ C_{66} = 30.6\ GPa \\ e_{31} = e_{32} = -5.21 C/m^2;\ e_{33} = 15.1 C/m^2;\ e_{15} = e_{24} = 12.7 C/m^2 \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1.31 e^{-8} Farad/m;\ \epsilon_{33} = 1.15 e^{-8} Farad/m \end{cases} \tag{2.61}$$

Elastique	G_e=25GPa	ν=0.33
Viscoélastique	G_v= $G^R{}_v(1+\eta_v)$	ν=0.45

TAB. 2.1 – Propriétés mécaniques

Poutre	L=50h	h=10 mm
Elastique	h_e= 6h/15	ρ = 2040 (kg/m^3)
Viscoélastique	h_v= h/15	ρ = 1200 (kg/m^3)
Piezoélectrique	h_p= h/15	ρ = 7500 (kg/m^3)

TAB. 2.2 – Dimensions des couches pour la poutre

2.6.1 Validations numériques

Afin de valider le modèle analytique pour les poutres sandwichs à 5 couches présenté dans ce chapitre, nous comparons les résultats obtenus par cette approche à ceux obtenus en utilisant un modèle élément finis 2D avec le code de calcul Abaqus. La poutre sandwich est soumise à une loi de contrôle proportionnelle direct. Le maillage éléments finis, Fig. 2.2, du sandwich est composé de 240 éléments à 8 noeuds de type déformation plane à intégration réduite. Une procédure de type " steady-state linear dynamic analysis" [2] est utilisée pour obtenir la réponse linéaire de la structure soumise à une excitation continue de type harmonique. Les propriétés modales (fréquence f et amortissement η) sont extraites des courbes de réponse à l'aide de la méthode de la bande passante à -3dB présentée au chapitre 1.

Le tableau (2.3) présente les valeurs de la fréquence et du facteur de perte obtenus au moyen du modèle EF et les valeurs obtenus en utilisant $[R_{mode}]$ complexe (équation (2.46)) pour différentes valeurs du gain g_d et de module de cisaillement G_v. Dans le tableau (2.4) sont présentés les mêmes résultats incluant cette fois-ci la condition d'équipotentialité.

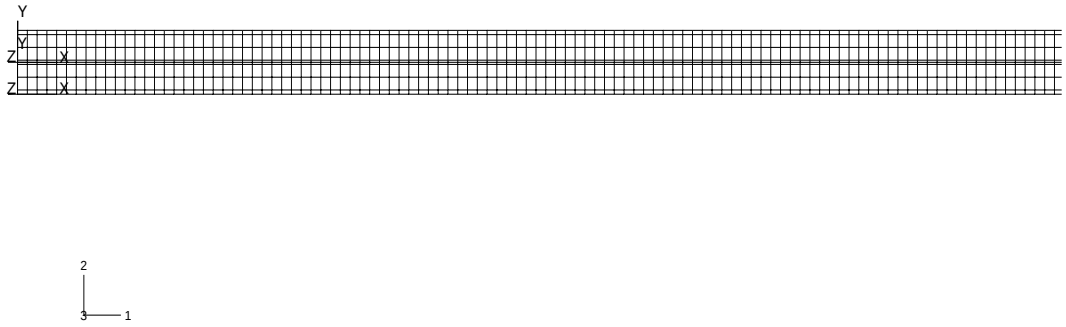


FIG. 2.2 – maillage du sandwich 5 couches sous Abaqus

Dans les deux situations analysés, les résultats obtenus analytiquement (équation (2.46)) et numériquement sont très proches.

g_d	G_v (MP_a)	f (Hz) analytique	f (Hz) numérique	η analytique	η numérique
1	2.5	67.2	67.2	0.171	0.171
	25	86.4	86.5	0.038	0.038
	2500	90.2	90.3	0.00043	0.00042
0	2.5	66.2	66.1	0.169	0.169
	25	84.8	84.7	0.038	0.039
	2500	88.2	88.1	0.00042	0.00045
-1	2.5	65.1	65	0.167	0.168
	25	82.9	82.9	0.037	0.037
	2500	86.2	86.2	0.00041	0.00043

TAB. 2.3 – Comparaison entre le modèle analytique et le modèle EF (numérique). η_v=0.5 contrôle proportionnel direct. Trois premier modes de flexion.

2.6.2 Analyse des modèles analytiques avec différents gains de contrôle direct

Dans cette partie le module de cisaillement du coeur (G_v=2.5 MP_a) et des couches élastiques (G_e=25 GP_a) sont fixés. Ces valeurs de module de cisaillement sont plus ou moins représentatives de matériaux réels. A partir des figures 2.3 2.4, on peut remarquer

g_d	G_v (MP_a)	f (Hz) analytique	f (Hz) numérique	η analytique	η numérique
1	2.5	66.9	66.8	0.170	0.176
	25	85.9	85.9	0.038	0.038
	2500	89.5	89.6	0.00043	0.00042
0	2.5	66.0	66.0	0.169	0.172
	25	84.4	84.5	0.037	0.037
	2500	87.9	87.8	0.00042	0.00045
-1	2.5	65.1	65.1	0.167	0.168
	25	83.0	83.0	0.037	0.037
	2500	86.3	86.2	0.00041	0.00042

TAB. 2.4 – Comparaison entre le modèle analytique et le modèle EF (numérique). η_v=0.5. contrôle proportionnel direct et prise en compte de l'équipotentialité. Trois premier modes de flexion

que la pulsation Ω et que l'inverse du facteur de perte modale $\frac{1}{\eta}$ varient plus ou moins linéairement pour un gain de contrôle dans la zone -10 $\leq g_d \leq$ 40. En effet, cette loi de contrôle ressemble à une loi de type élastique. Elle modifie la rigidité de la structure et par conséquent ses valeurs propres. Le facteur de perte modale dépend du contrôle seulement à travers le changement de fréquence. La prise en compte de la condition d'équipotentialité a été testé pour trois valeurs de facteur de pertes (η_v=0.1, 0.5, 1). Globalement l'effet de l'électrode est faible si l'on considère des valeurs de gain de contrôle dans une zone [-10,2], Fig. 2.5. Pour des valeurs hors de cette zone on a un effet plus notable sur la fréquence et sur le comportement comme on peut le voir sur la figure 2.5.

2.6.3 Analyse des modèles analytiques avec un gain de contrôle en vitesse

Les figures 2.6 et 2.7 montre que la loi de contrôle influe de manière significative sur l'amortissement de la structure, mais pas sur les valeurs des fréquences propres. Dans la zone considérée , $0 \leq g_v \leq 0.025$, le facteur de perte croît linéairement avec le gain de contrôle. Par ailleurs, on peut voir sur la figure 2.7 que les courbes sont plus ou moins parallèles, ce qui sous entend que les contributions de l'amortissement actif et passif sont additives.

La prise en compte de la condition d'équipotentialité a été testé pour différentes valeurs du facteur de perte (η_v=0.1, 0.5, 1). Nous avons observé que quelque soit le cas testé le système devenait instable.

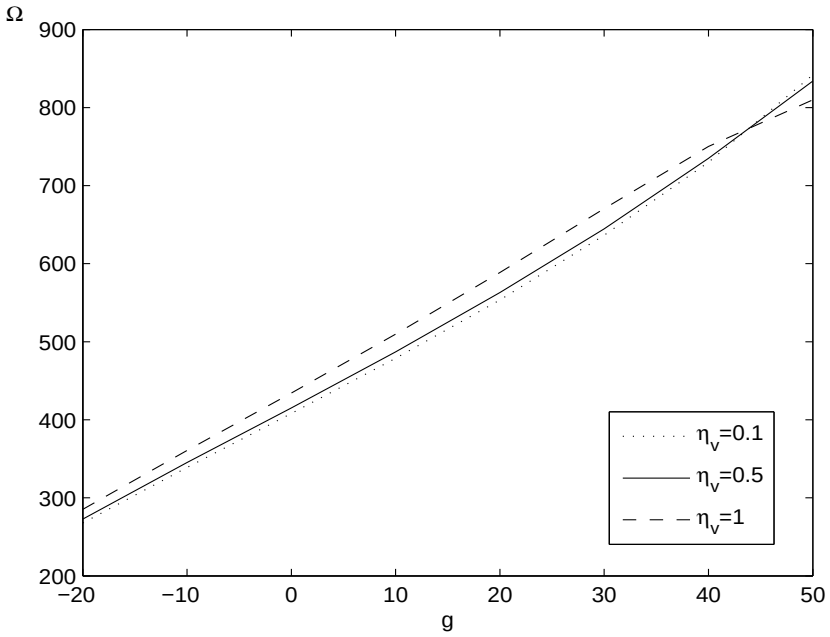


FIG. 2.3 – Première pulsation propre Ω fonction du gain de contrôle proportionnel direct g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa.

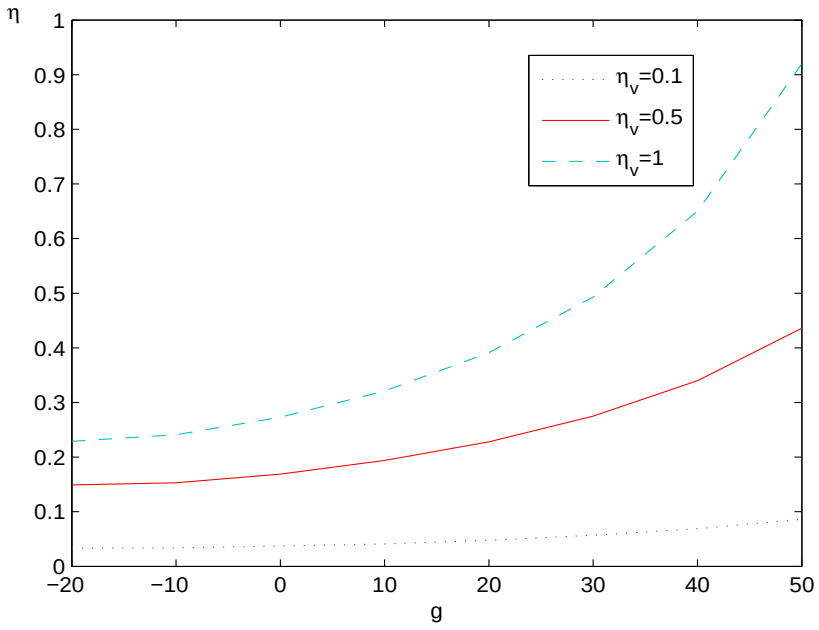


FIG. 2.4 – Amortissement η du premier mode en fonction du gain de contrôle proportionnel g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa.

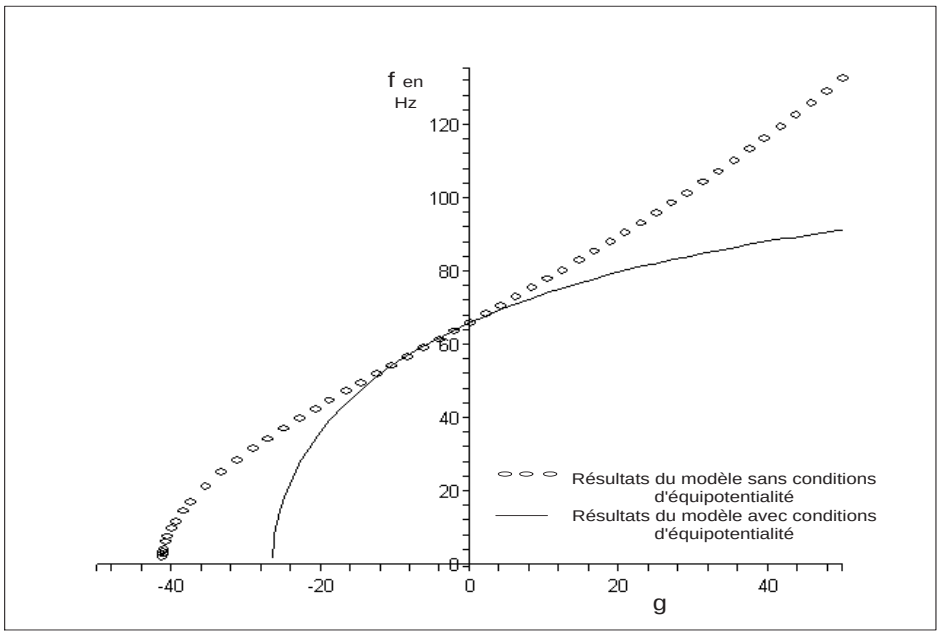


FIG. 2.5 – Variation de fréquence avec et sans condition d'équipotentialité η=0.5 contrôle proportionnel direct g variant. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa.

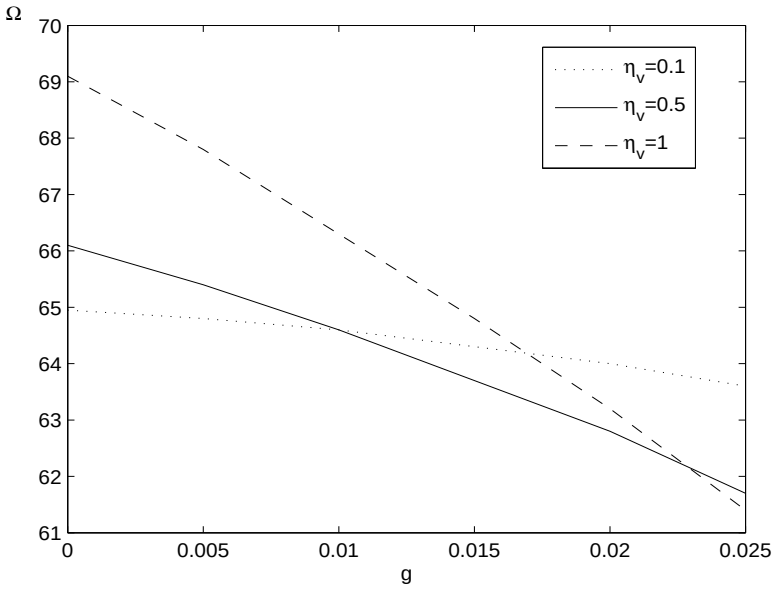


FIG. 2.6 – Première pulsation propre Ω fonction du gain de contrôle en vitesse g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa.

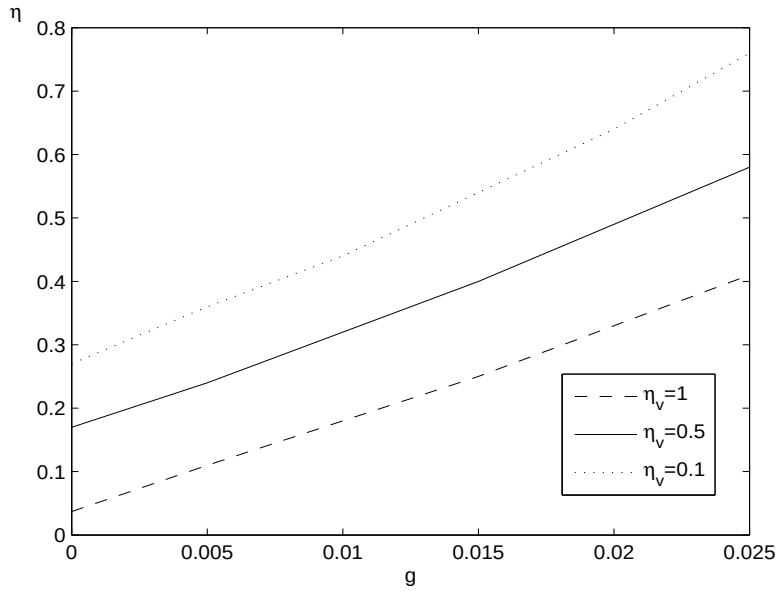


FIG. 2.7 – Amortissement η du premier mode en fonction du gain de contrôle en vitesse g. G_v=2.5 MPa, G_e=25 GPa.

2.6.4 Modèles analytiques simplifiés

Nous avons jusqu'ici établis des modèles analytiques basés sur la forme de l'amplitude du mode $[R_{mode}]$. Celle ci peut être réelle (équation (2.48)) ou complexe (équation (2.46)). La prise en compte de la deuxième approximation (équation (2.46)) engendre des difficultés de résolution particulièrement quand le module du coeur dépend de façon non linéaire de la fréquence. Pour celà, nous comparons les résultats obtenus par les deux approximations quand l'amortissement est de type passif (g_d=0). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (2.5) pour différentes valeurs de G_v^R et η_v. D'après les résultats obtenus, l'hypothèse des modes réels est une bonne approximation pour $G_v^R/G_e \leq 10^{-4}$ et $\eta_v \leq 0.5$. C'est à dire pour un coeur mou et moyennement amorti.
La même comparaison a été effectuée quand le gain de contrôle g_d est différent de zéro en utilisant les cas présentés auparavant. Elle montre que l'utilisation de la partie réelle de $[R_{mode}]$ entraîne au plus une erreur de 2%, dans la zone de gain proportionnel -20 $\leq g_d \leq$ 50. Hors de cette zone, le système devient instable.

η_v	G_v^R (MP_a)	f (Hz) with $[R_{mode}]$ real	f (Hz) with $[R_{mode}]$ complex	η with $[R_{mode}]$ real	η with $[R_{mode}]$ complex
0.5	0.25	44.0	43.9 (0.2%)	0.108	0.107 (0.9%)
	2.5	65.0	66.1 (1.7%)	0.167	0.169 (1.2%)
	25	84.1	84.8 (0.8%)	0.032	0.038 (15.8%)
1.0	0.25	43.9	44.2 (0.7%)	0.214	0.212 (0.9%)
	2.5	65.6	69.1 (5.1%)	0.26	0.273 (4.8%)
	25	84.8	85.9 (1.3%)	0.028	0.049 (42.9%)

TAB. 2.5 – Amortissement purement passif (g_d=g_v=0). Influence de l'hypothèse des modes supposés réels sur la première fréquence propre et amortissement modale associé.

2.7 Conclusions

Dans cette partie nous avons proposés des modèles analytiques donnant l'expression des propriétés amortissantes des poutres sandwichs de type piézoélectrique/ élastique/ viscoélastique/ élastique/ piézoélectrique. La loi de contrôle de type proportionnelle directe ainsi que la loi en vitesse ont été considérées et les équations constitutives pour le modèle électromécanique global du sandwich ont été établies. L'effet des électrodes sur la poutre a été modélisé et son impact sur les propriétés amortissantes a été étudié. Les fréquences propres et le facteur de perte ont été obtenus définissant ainsi l'amortissement hybride. Les résultats obtenus montrent que le contrôle proportionnelle directe modifie la rigidité et les fréquences propres alors que le contrôle de type vitesse modifie principalement l'amortissement. Les modèles ont été validés par comparaison à un calcul éléments finis 2D avec le code Abaqus.

Afin de généraliser ces modèles analytiques pour l'analyse d'autres types de structures (plaques, coques...) et d'autres conditions aux limites, nous présentons dans le chapitre suivant un élément fini de type coque pour modéliser les plaques et coques sandwich à 5 couches piézo/ élast/ visco/ élast/ piézo.

Chapitre 3

Eléments finis pour les coques sandwich à 5 couches

3.1 Introduction

Afin de modéliser les structures sandwichs à 5 couches piézo/ elast/ visco/ elast/ piézo de forme quelconque, nous présentons dans ce chapitre un élément fini sandwich de type coque. Sa formulation utilise les hypothèses classiques de calcul des sandwichs et les théories de coques de Kirchhoff et de Mindlin. Il résulte de l'assemblage des éléments de coques suivant l'épaisseur. A l'aide des conditions de raccord aux interfaces le nombre de ddl par noeud est réduit à 10 ddl : 8 déplacements et 2 ddl électriques. L'élément fini sera validé au moyen de comparaisons avec des résultats obtenus analytiquement et numériquement en utilisant le code commercial Abaqus.

3.2 Champs de déplacements et de déformations

3.2.1 Hypothèses de calcul

Pour décrire les propriétés du sandwich piézo/elast/visco/elast/piézo nous considérons un comportement de type plaque de Love/Kirchhoff dans les différentes couches dures (piézoélectriques et élastiques), ainsi qu'un modèle de type plaque de Reissner/Mindlin pour la partie centrale. Les couches supérieures et inférieures jouent, respectivement, les rôles de capteur et actionneur et sont reliées par une loi de contrôle en boucle de rétroaction. Les déformations de cisaillement de la couche viscoélastique résultent de la

différence de déplacement dans le plan des couches élastiques (e_1,e_2), Fig. 2.1 et Fig. 3.1. Nous utilisons les mêmes hypothèses classiques [70] que pour les modèles analytiques à savoir :

- Il n'y a pas de glissement entre les différentes couches du sandwich.
- Tous les points d'une même normale à l'axe x ont le même déplacement transverse.
- Les matériaux sont supposés homogènes, linéaires et isotrope.
- La théorie zig-zag est utilisée.
- Les couches piézo-électriques sont supposées fines et agissant en extension.
- Le champ électrique ne dépend dans l'espace que des variables x,y.
- Le coeur est conducteur avec un potentiel uniforme fixé à zéro.
- La flèche w est la même dans les 5 couches.
- La rotation de la normale est la même dans les couches élastiques et piézoélectriques.

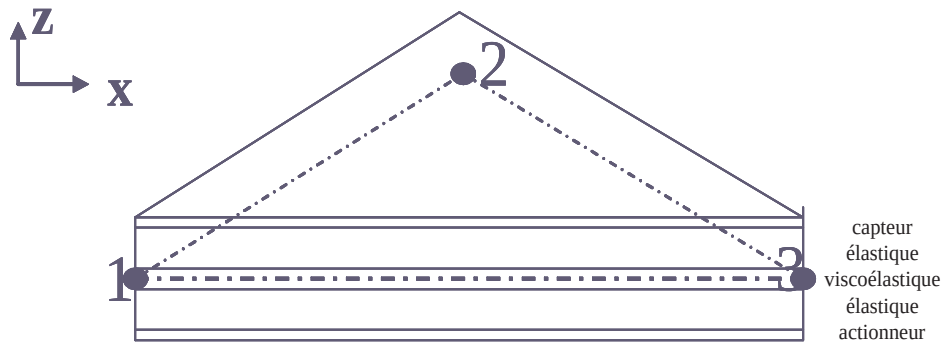


FIG. 3.1 – Définition du sandwich

3.2.2 Déplacements

En accord avec les hypothèses précédentes, les déplacements dans les couches élastiques et piézoélectriques sont de la forme :

$$\begin{cases} U^i(x,y,z,t) = u^i(x,y,t) + (z-z_i)R_x(x,y,t) \\ V^i(x,y,z,t) = v^i(x,y,t) + (z-z_i)R_y(x,y,t) \\ W^i(x,y,z,t) = w^i(x,y,t) \qquad i = s, e_1, e_2, a \end{cases} \tag{3.1}$$

ou z_i est la coordonnée z de chaque plan moyen des couches, $u^i(x,y,t)$, $v^i(x,y,t)$ et $w^i(x,y,t)$ sont les composantes du déplacement du plan moyen de la i ème couche et R_x, R_y, R_z sont les rotations de la normale au plan moyen des couches élastiques et piézoélectriques. Le déplacement de la couche centrale viscoélastique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U^c(x,y,z,t) = u^c(x,y,t) + zR_x^c(x,y,t) \\ V^c(x,y,z,t) = v^c(x,y,t) + zR_y^c(x,y,t) \\ W^c(x,y,z,t) = w^c(x,y,t) \end{cases} \tag{3.2}$$

Les conditions de raccords cinématiques aux interfaces nous permettent d'obtenir les expressions du déplacement dans les couches viscoélastique et piézoélectriques sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} U^c(x,y,z,t) = \frac{u^{e_1}(x,y,t)+u^{e_2}(x,y,t)}{2} + z(\frac{u^{e_1}(x,y,t)-u^{e_2}(x,y,t)}{h_c} - \frac{h_e}{h_c}R_x(x,y,t)) \\ V^c(x,y,z,t) = \frac{v^{e_1}(x,y,t)+v^{e_2}(x,y,t)}{2} + z(\frac{v^{e_1}(x,y,t)-v^{e_2}(x,y,t)}{h_c} - \frac{h_e}{h_c}R_y(x,y,t)) \\ W^c(x,y,z,t) = w(x,y,t) \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} U^s(x,y,z,t) = u^{e_1}(x,y,t) + (z - \frac{h_c+h_e}{2})R_x(x,y,t) \\ V^s(x,y,z,t) = v^{e_1}(x,y,t) + (z - \frac{h_c+h_e}{2})R_y(x,y,t) \\ W^s(x,y,z,t) = w(x,y,t) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} U^a(x,y,z,t) = u^{e_2}(x,y,t) + (z + \frac{h_c+h_e}{2})R_x(x,y,t) \\ V^a(x,y,z,t) = v^{e_2}(x,y,t) + (z + \frac{h_c+h_e}{2})R_y(x,y,t) \\ W^a(x,y,z,t) = w(x,y,t) \end{cases} \tag{3.5}$$

Le nombre de déplacements généralisés est réduit à 7, à savoir u^{e_1},v^{e_1},u^{e_2},v^{e_2},w,R_x,R_y.

3.2.3 Déformations

En utilisant les expressions précédentes pour les déplacements et en considérant l'hypothèse des petites perturbations, les déformations dans les couches peuvent aussi s'écrire,

en utilisant les 7 déplacements généralisés précédents, de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^i_{xx} \\ \epsilon^i_{yy} \\ \gamma^i_{xy} \\ \gamma^i_{xz} \\ \gamma^i_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & (z-z_i)\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & (z-z_i)\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & (z-z_i)\frac{\partial}{\partial y} & (z-z_i)\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{e_1} \\ v^{e_1} \\ u^{e_2} \\ v^{e_2} \\ w \\ R_x \\ R_y \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

pour les couches élastiques et avec $i = e_1, e_2$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^s_{xx} \\ \epsilon^s_{yy} \\ \gamma^s_{xy} \\ \gamma^s_{xz} \\ \gamma^s_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & (z-\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & (z-\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & (z-\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial y} & (z-\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{e_1} \\ v^{e_1} \\ u^{e_2} \\ v^{e_2} \\ w \\ R_x \\ R_y \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

pour la couche réalisant la fonction capteur

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^a_{xx} \\ \epsilon^a_{yy} \\ \gamma^a_{xy} \\ \gamma^a_{xz} \\ \gamma^a_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & (z+\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & (z+\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & (z+\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial y} & (z+\frac{h_c+h_e}{2})\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{e_1} \\ v^{e_1} \\ u^{e_2} \\ v^{e_2} \\ w \\ R_x \\ R_y \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

pour la couche réalisant la fonction actionneur

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^c_{xx} \\ \epsilon^c_{yy} \\ \gamma^c_{xy} \\ \gamma^c_{xz} \\ \gamma^c_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}+\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial x} & 0 & (\frac{1}{2}-\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -z\frac{h_e}{h_c}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2}+\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial y} & 0 & (\frac{1}{2}-\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -z\frac{h_e}{h_c}\frac{\partial}{\partial y} \\ (\frac{1}{2}+\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial y} & (\frac{1}{2}+\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial x} & (\frac{1}{2}-\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial y} & (\frac{1}{2}-\frac{z}{h_c})\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z\frac{h_e}{h_c}\frac{\partial}{\partial y} & -z\frac{h_e}{h_c}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{h_c} & 0 & -\frac{1}{h_c} & 0 & 0 & -1-\frac{h_e}{h_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_c} & 0 & -\frac{1}{h_c} & 0 & 0 & -1-\frac{h_e}{h_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{e_1} \\ v^{e_1} \\ u^{e_2} \\ v^{e_2} \\ w \\ R_x \\ R_y \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

pour le coeur viscoélastique.

3.3 Relation électroélastique pour les couches piézoélectriques

Dans cette partie, nous rappelons les lois de comportement et les relations électriques des couches piézoélectriques fines.

3.3.1 Loi linéaire piézoélectrique

Les équations linéaires piézoélectriques couplant les champs élastiques et électriques peuvent s'écrire en considérant l'effet direct et l'effet inverse sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \mathbf{C_{ijkl}}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k \\ \\ D_k = e_{kij}\varepsilon_{ij} + \epsilon_{kl}E_l \end{cases} \tag{3.10}$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont respectivement les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy et du tenseur des déplacements, D_k, les composantes du vecteur de déplacements électriques et E_i le champ électrique. $\mathbf{C_{ijkl}}$, e_{kij} et ϵ_{kl} représentent les constantes élastiques qui sont mesurées à champ électrique constant, les composantes piézoélectriques et les composantes de la permittivité diélectrique qui sont mesurées à déformation constante. Les matériaux piézoélectriques sont considérés comme orthotropes et on considère le mécanisme d'extension (voir annexe B).

3.3.2 Propriétés électriques

La relation couplant le champ électrique au potentiel est la suivante :

$$E_i = -(\nabla\ \phi)_i \tag{3.11}$$

Dans cette analyse, nous considérons que les couches viscoélastiques et élastiques sont conductrices avec un potentiel uniforme fixé à zéro [38]. Souvent dans la littérature, le champ électrique est considéré comme variant linéairement dans l'épaisseur, en accord avec la même variation pour la contrainte et la déformation [48], [58], [60]. Nous supposons que les couches piézoélectriques sont fines. Cela nous amène à considérer un champ électrique constant suivant l'épaisseur de chaque couche piézoélectrique.

$$E_3 = -\frac{\Delta\phi(x,y)}{h_p} \tag{3.12}$$

où $\Delta\phi(x,y)$ représente la différence de potentiel entre les faces de la couche piézoélectrique et h_p est sont épaisseur.

3.4 Formulation théorique

Dans cette partie, nous présentons la forme des matrices élémentaires de rigidité et de masse de l'élément sandwich à 5 couches. Pour cela nous établissons par la suite la formulation variationnelle du problème dynamique du sandwich à 5 couches.

3.4.1 Formulation variationnelle

En l'absence de charge électrique volumique dans les couches piézoélectrique, les équations d'équilibres et électrostatique peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_{bi} = \rho\ddot{u}_i, \\ D_{i,i} = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

où f_{bi} et ρ sont respectivement les composantes des forces volumiques appliquées et la masse volumique. Les équations dynamiques du sandwich s'écrivent en utilisant le principe

d'Hamilton :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \tag{3.14}$$

où l'opérateur δ indique la variation de premier ordre et t_0 et t_1 définissent le temps. Les variations s'annulent à t = t_0 et t = t_1. Le lagrangien L est définie par l'énergie disponible dans les 5 couches :

$$L = W + E_c - E_h \tag{3.15}$$

où E_c est l'énergie cinétique, E_h est l'énergie électromécanique, et W l'énergie due aux excitations mécaniques et électriques extérieures. Considérant qu'il n'y ait aucune charge électrique extérieure, les énergies se réduisent à :

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho \dot{u_i}^2 d\Omega \\ E_h = \frac{1}{2} \int_\Omega (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - E_i D_i) d\Omega \\ W = \int_\Omega u_i f_{b_i} d\Omega + \int_{S_f} u_i f_{s_i} dS + \sum u_i f_{c_i} \end{cases} \tag{3.16}$$

Ici Ω est le volume du sandwich, f_{s_i} sont les forces surfaciques, f_{c_i} les forces ponctuelles concentrées et S_f le région où les forces de surface s'appliquent. L'introduction des équations (3.10) dans le principe d'Hamilton (3.14), nous conduit à la stationnarité de la fonctionnelle Lagrangienne pour des δu_i et $\delta \phi_i$ admissibles.

$$\delta W + \delta E_c - \delta E_h = 0 \tag{3.17}$$

3.4.2 Formulation élément finis

Rappelons que le nombre de déplacements généralisés avaient été réduit à 7 (3.3, 3.4 et 3.5). Cependant lorsqu'on considère des éléments coques on se doit d'introduire une rotation fictive R_z [7], afin de connecter les vecteurs de rotation entre des éléments voisins. Les déplacements et les potentiels électriques de l'élément peuvent être définis dans chaque

couche en fonction des variables nodales, précédemment décrites, comme suit :

$$\begin{cases} \left\{ \widehat{U}^i \right\}^t = \left\{ U^i, V^i, W^i \right\} \\ \left\{ \widehat{U}^i \right\} = \left[{N_u}^i \right] \left\{ u^e \right\} \\ \left\{ \Phi^k \right\} = \left[{N_\phi}^k \right] \left\{ \phi^e \right\} \\ \left\{ u^e \right\}^t = \left\{ {u^{e_1}}_j, {v^{e_1}}_j, {u^{e_2}}_j, {v^{e_2}}_j, w_j, R_{xj}, R_{yj}, R_{zj} \right\} \\ \left\{ \phi^e \right\}^t = \left\{ \phi_{aj}, \phi_{sj} \right\} \\ \text{oú} \quad i = s, e_1, c, e_2, a \quad k = s, a \ \ and \ \ j = 1..NE \end{cases} \tag{3.18}$$

où NE est le nombre de noeuds, $\left\{\widehat{U}^i\right\}$ est le vecteur déplacement dans chaque couche ^{i}, $\left[{N_u}^i\right]$ et $\left[{N_\phi}^k\right]$ sont les fonctions d'interpolations pour les variables de $\left\{\widehat{U}^i\right\}$ et $\left\{\Phi^i\right\}$. On souligne ici que les fonctions de formes linéaires utilisées pour le potentiel $\left\{\Phi^i\right\}$ sont identiques à celles utilisées pour les vecteurs de déplacements $\left\{\widehat{U}^i\right\}$. En injectant la relation déformation-déplacement, en terme de déplacement nodaux, dans chaque couche i nous obtenons une formulation discrétisée de la déformation mécanique :

$$\left\{S^i\right\} = \left[{B_u}^i\right] \left\{u^e\right\} \tag{3.19}$$

où $\left[{B_u}^i\right]$ est le produit de la matice de l'opérateur différentiel reliant $\left\{S^i\right\}$ à la matrice des fonctions de formes $\left[{N_u}^i\right]$. De la même manière nous avons dans chaque couche piézoélectrique :

$$\left\{E^k\right\} = -\nabla \ \left\{\Phi^k\right\} = -\nabla \ \left[{N_\phi}^k\right] \left\{\phi^e\right\} = -\left[{B_\phi}^k\right] \left\{\phi^e\right\} \tag{3.20}$$

où $[B_\phi]$ réalise le produit de la matrice de l'opérateur différentiel ∇ avec la matrice de fonctions de formes $\left[{N_\phi}^k\right]$.

En substituant les équations (3.10), (3.19), (3.20) et (3.16) dans les équations (3.17) et en assemblant les équations de l'élément, on obtient la forme discrétisée du problème de dynamique du sandwich :

$$\begin{cases} \left[K_{uu}\right] \left\{u\right\} + \left[K_{u\phi}\right] \left\{\phi\right\} + \left[M_{uu}\right] \left\{\ddot{u}\right\} = \left\{F_u\right\} \\ \left[K_{u\phi}^T\right] \left\{u\right\} + \left[K_{\phi\phi}\right] \left\{\phi\right\} = \left\{0\right\} \end{cases} \tag{3.21}$$

où $[K_{uu}]$, $[M_{uu}]$, $[K_{u\phi}]$ et $[K_{\phi\phi}]$ sont respectivement les matrices de rigidité, de masse, piézoélectrique et de permittivité. $\{F_u\}$ est le vecteur de forces appliquées. Ils sont donnés par les formes élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
[M_{uu}]^e &= \sum_i \int_{v_i^e} \rho \left[{N_u}^i\right]^t \left[{N_u}^i\right] d\Omega^e \\
[K_{uu}]^e &= \sum_i \int_{v_i^e} \left[{B_u}^i\right]^t \left[C^i\right] \left[{B_u}^i\right] d\Omega^e \\
\left[K_{u\phi}^k\right]^e &= \sum_k \int_{v_k^e} \left[{B_u}^k\right]^t [e]^t \left[{B_\phi}^k\right] d\Omega^e \qquad i = e_1, e_2, s, a, c \\
\left[K_{\phi\phi}^k\right]^e &= \sum_k \int_{v_k^e} [{B_\phi}^n]^t [\epsilon] \left[{B_\phi}^n\right] d\Omega^e \qquad k = s, a \\
\{F_u\}^e &= \sum_i \left(\int_{v_i^e} \left[{N_u}^i\right]^t f_{b_i} d\Omega^e + \int_{s_i^e} \left[{N_u}^i\right]^t f_{s_i} dS^e + \left[{N_u}^i\right]^t f_{c_i} \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ainsi une classe d'éléments finis sandwich est développée. Celle ci a 10 d.d.l. par noeud : les déplacements longitudinaux dans les couches élastiques, la flèche commune, les rotations dans les couches élastiques et les d.d.l. électriques ϕ^a, ϕ^s. Pour obtenir un élément sandwich il suffi de choisir un type d'élément pour les couches élastiques. Dans ce travail, nous avons mis en place un élément sandwich triangulaire à 3 noeuds de type DKT 18 (Discrete Kirchhoff Theory) [7].

3.4.3 Prise en compte du contrôle

Lorsque une structure vibre, la couche capteur génère une tension de sortie qui est amplifiée et réintroduite via, une loi directe proportionnelle, ou une loi contrôle en vitesse, dans la couche actionneur. Le contrôle peut s'exprimer de manière généralisée sous la forme suivante (loi PD : proportionnel dérivatif) :

$$\{\phi^a\} = g_d \{\phi^s\} + g_v \left\{ \dot{\phi}^s \right\} \tag{3.23}$$

g_d et g_v sont, respectivement, la constante du gain en déplacement et la constante du gain en vitesse de contrôle.

3.4.4 Analyse de la réponse fréquentielle et calcul des propriétés amortissantes

Pour utiliser la classe d'éléments sandwich développés, nous considérons l'analyse de la réponse fréquentielle d'une structure 5 couches assujettie à une force harmonique. La force appliquée, les déplacements et potentiels électriques peuvent alors s'exprimer comme des fonctions harmoniques en temps sous les formes suivantes.

$$\begin{cases} \{F_u(x,y,z,t)\} = \{F_u(x,y,z)\}\, e^{i\omega t} \\ \{u(x,y,z,t)\} = \{U(x,y,z)\}\, e^{i\omega t} \\ \{\phi(x,y,z,t)\} = \{\Phi(x,y,z)\}\, e^{i\omega t} \end{cases} \tag{3.24}$$

où ω est la pulsation d'excitation et $i = \sqrt{-1}$. Par substitution de l'équation (3.24) dans l'équation (3.21), les équations globales de la dynamique de l'élément fini peuvent se réécrire :

$$\left\{ \left(\begin{bmatrix} K_{uu}(\omega) & K_{u\phi_s} & K_{u\phi_a} \\ K_{\phi u_s} & K_{\phi\phi_s} & 0 \\ K_{\phi u_a} & 0 & K_{\phi\phi_a} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ \Phi_s \\ \Phi_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right. \tag{3.25}$$

Le potentiel généré au niveau du capteur peut se réduire à :

$$\{\Phi_s\} = [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s \{U\} \tag{3.26}$$

de l'équation (3.23) nous obtenons

$$\{\Phi_a\} = (g_d + i\omega g_v)[K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s \{U\} \tag{3.27}$$

Par substitution des équations (3.26) et (3.27) dans l'équation (3.25) nous obtenons les équations dynamiques réduites de la loi de contrôles après condensation des degrés de liberté électriques.

$$([K(\omega)] + i\,[C(\omega)] - \omega^2\,[M_{uu}])\,\{U\} = \{F_u\} \tag{3.28}$$

où

$$\begin{cases} [K(\omega)] = \Re\{[K_{uu}(\omega)]\} + ([K_{u\phi}]_s + g_d[K_{u\phi}])_a [K_{\phi\phi}]_s{}^{-1} [K_{\phi u}]_s \\ [C(\omega)] = \Im\{[K_{uu}(\omega)]\} + \omega g_v [K_{u\phi}]_a [K_{\phi\phi}]_s{}^{-1} [K_{\phi u}]_s \end{cases}$$

$\Re(a)$ et $\Im(a)$ désigne respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de a. $[K_{uu}(\omega)]$ est la matrice de rigidité complexe dont la partie imaginaire dépend de la fréquence. Cette partie imaginaire caractérise le comportement dissipatif due à la couche viscoélastique de la structure.

Pour déterminer les propriétés amortissantes du sandwich, nous utilisons la méthode de l'énergie de déformation modale complexe, introduite au chapitre bibliographie. Nous décrivons ici l'application de cette méthode qui se fait selon les étapes suivantes :

- Nous déterminons tout d'abord les modes propres réels de la structure sandwich non amortie U_r qui vérifient le problème au valeurs propres réelles :

$$([K_{uu}(0)] - {\omega_0}^2 [M_{uu}]) \{U_r\} = 0 \tag{3.29}$$

  où $[K_{uu}(0)]$ a été défini précédemment et ne prend en compte que la partie élasticité retardée pour le coeur viscoélastique.
- On approche ensuite le mode complexe en résolvant le problème linéaire :

$$([K(\omega_0)] + i\,[C(\omega_0)] - {\omega_0}^2 [M_{uu}]) \{U_c\} = \{F\} \tag{3.30}$$

  où $\{F\}$ est le vecteur des amplitudes des forces sinusoïdales imposées et

$$[C(\omega_0)] = \Im\{[K_{uu}(\omega_0)]\} + \omega_0 g_v [K_{u\phi}]_a [K_{\phi\phi}]_s{}^{-1} [K_{\phi u}]_s$$

  La partie imaginaire illustre à la fois la dissipation dans le matériau viscoélastique ainsi que celle due à la loi de contrôle en vitesse entre les deux couches piézoélectriques.
- On obtient finalement une approximation de la pulsation et de l'amortissement donnée par :

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{\{U_c\}^t [K_{uu}(\omega_0)] \{U_c\}}{\{U_c\}^t [M_{uu}] \{U_c\}} = \Omega^2(1 + i\eta) \\ \eta = \frac{\{U_c\}^t [C(\omega_0)] \{U_c\}}{\{U_c\}^t [K_{uu}(0)] \{U_c\}} \end{cases} \tag{3.31}$$

  où ω est la pulsation amortie et η représente la part d'énergie dissipée sur la part

d'énergie de déformation stockée.

3.5 Tests de validations

Nous proposons ici une validation de l'élément fini par :

- une comparaison avec les modèles analytiques dans le cas poutre,
- une comparaison avec le code Abaqus dans le cas plaque.

3.5.1 Propriétés des structures étudiées

Les propriétés matérielles des couches viscoélastiques, élastiques et piézoélectriques sont données dans le tableau 3.1. Les équations constitutives des couches piézoélectriques

Elastique	E_e=45.54 GPa	ν=0.33
Viscoélastique	E_v= 7.25 Mpa	ν=0.45

TAB. 3.1 – Propriétés mécaniques

peuvent être résumées sous la forme matricielle explicitée dans l'annexe B avec les valeurs suivantes pour les différents coefficients

$$\begin{cases} C_{11} = C_{22} = 139.0\, GPa;\ C_{33} = 115.3\, GPa \\ C_{13} = C_{23} = 74.3\, GPa;\ C_{12} = 77.8\, GPa \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} = 25.6\, GPa \\ e_{31} = e_{32} = -5.21 C/m^2;\ e_{33} = 15.1 C/m^2;\ e_{15} = e_{24} = 12.7 C/m^2 \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1.31 e^{-8} Farad/m;\ \epsilon_{33} = 1.15 e^{-8} Farad/m \end{cases}$$

Poutre	L=50h	h=10 mm
Elastique	h_e= 69h/150	ρ = 2040 (kg/m^3)
Viscoélastique	h_v= h/15	ρ = 1200 (kg/m^3)
Piezoélectrique	h_p= h/150	ρ = 7500 (kg/m^3)

TAB. 3.2 – Dimensions des couches pour la poutre

3.5.2 Tests de poutre

Nous considérons ici une poutre simplement appuyée dont les dimensions sont définies dans le tableau 3.2. Nous analysons tout d'abord le cas d'un contrôle proportionnel direct

(g_v=0). Différentes valeurs du gain proportionnel g_d et du facteur de perte sont considérées (tableaux 3.3, 3.4 et 3.5). Nous comparons, dans les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5, les trois premières propriétés modales (fréquence et amortissement) obtenus avec l'élément proposé et la MSEC, avec le modèle analytique présenté au chapitre précédent. Si l'on considère de petites valeurs pour le gain de contrôle proportionnel direct (tableaux 3.3, 3.4) nous obtenons une très bonne corrélation entre les valeurs modales analytiques et numériques. Les fréquences diffèrent de moins de 2% et l'amortissement de moins de 3%. Comme pour le modèle analytique, la valeurs de g_d produit principalement un décalage fréquentiel et ne modifie pas l'amortissement (tableau 3.5). On considère maintenant le cas d'un gain de contrôle en vitesse constant (pas de gain proportionnel direct g_d=0). Différentes valeurs du gain de contrôle en vitesse g_v et du facteur de perte sont étudiés.

η_v		f_1 in (Hz)	η_1	f_2 in (Hz)	η_2	f_3 in (Hz)	η_3
0	anal	95,2	0	298,9	0	612,5	0
	num	96,5	0	303,1	0	622,2	0
	différence(%)	1,33	0,00	1,41	0,00	1,55	0,00
0.2	anal	95,5	0,0740	299,1	0,057	612,6	0,035
	num	96,8	0,0741	303,5	0,057	622,6	0,035
	différence(%)	1,31	0,13	1,45	0,00	1,61	0,00
0.4	anal	96,2	0,144	299,7	0,113	613	0,07
	num	97,5	0,144	304,6	0,114	623,9	0,07
	différence(%)	1,30	0,00	0,77	0,00	1,75	0,43
0.6	anal	97,4	0,205	300,7	0,168	613,6	0,105
	num	98,7	0,206	306,6	0,169	626,1	0,105
	différence (%)	1,30	0,49	1,93	0,59	2,00	0,00
0.8	anal	99,0	0,256	302,2	0,221	614,5	0,14
	num	100,2	0,258	309,5	0,223	629,2	0,139
	différence(%)	1,23	0,78	2,36	0,90	2,34	0,72
1	anal	100,8	0,296	304,0	0,272	615,6	0,174
	num	102,0	0,299	313,4	0,275	633,4	0,173
	différence(%)	1,22	1,00	3,00	1,09	2,81	0,58

(3.32)

TAB. 3.3 – Trois premières propriétés modales obtenues de manière analytique et numérique pour différentes valeurs du facteur de perte η_v.(avec un gain de contrôle proportionnel g_d=-1, et pas de gain de contrôle en vitesse g_v=0)

Nous comparons dans les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8 les trois premières propriétés modales (fréquence et amortissement correspondant) obtenues avec l'élément proposé et avec le modèle analytique présenté au chapitre 2. Si l'on considère de faibles valeurs du gain de contrôle en vitesse et le premier mode (tableaux 3.6 et 3.7) nous obtenons des résultats en adéquation avec les résultats analytiques. Les fréquences diffèrent de moins de 2% et l'amortissement de moins de 3%. Pour les modes d'ordres plus élevés et pour des valeurs du facteur de perte viscoélastique plus importantes l'écart entre les résultats obtenus analytiquement et numériquement est plus important. Ceci est principalement du à la

η_v		f_1 en (Hz)	η_1	f_2 en (Hz)	η_2	f_3 en (Hz)	η_3
0	anal	89,8	0	280,8	0	573,4	0
	num	91,0	0	284,8	0	582,6	0
	différence (%)	1,34	0,00	1,40	0,00	1,58	0,00
0.2	anal	90,1	0,0740	281,0	0,059	573,5	0,037
	num	91,3	0,0741	285,2	0,059	583,0	0,037
	différence (%)	1,33	0,00	1,47	0,34	1,64	0,65
0.4	anal	90,8	0,143	281,6	0,117	573,9	0,074
	num	92,0	0,144	286,35	0,117	584,4	0,074
	différence (%)	1,30	0,42	1,66	0,00	1,80	0,14
0.6	anal	91,9	0,204	282,7	0,173	574,6	0,11
	num	93,1	0,205	288,3	0,174	586,6	0,11
	différence (%)	1,28	0,49	1,94	0,57	2,05	0,27
0.8	anal	93,4	0,254	284,1	0,227	575,5	0,146
	num	94,6	0,256	291,2	0,230	589,8	0,145
	différence (%)	1,26	0,78	2,44	1,18	2,42	0,69
1	anal	95,1	0,293	286,0	0,279	576,6	0,181
	num	96,3	0,296	295,2	0,282	594,1	0,18
	différence (%)	1,23	1,01	3,00	1,09	2,94	0,56

(3.33)

TAB. 3.4 – Trois premières propriétés modales déterminées analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v.(contrôle proportionnel de gain g_d=-20, pas de contrôle en vitesse g_v=0)

η_v		g_d=-1		g_d=-20		g_d=-150	
		f_1 en (Hz)	η_1	f_1 en (Hz)	η_1	f_1 en (Hz)	η_1
0	anal	95,2	0	89,8	0	44,8	0
	num	96,5	0	91,0	0	45,5	0
	différence (%)	1,33	0,00	1,34	0,00	1,58	0,00
0.2	anal	95,5	0,0740	90,1	0,074	45,1	0,12
	num	96,8	0,0741	91,3	0,0741	45,8	0,12
	différence (%)	1,31	0,13	1,33	0,13	1,53	0,00
0.4	anal	96,2	0,144	90,8	0,143	45,8	0,23
	num	97,5	0,144	92,0	0,144	46,5	0,23
	différence (%)	1,30	0,00	1,30	0,42	1,53	1,29
0.6	anal	97,4	0,205	91,9	0,204	46,8	0,32
	num	98,7	0,206	93,1	0,205	47,6	0,31
	différence (%)	1,30	0,49	1,28	0,49	1,66	4,32
0.8	anal	99,0	0,256	93,4	0,254	48,1	0,38
	num	100,2	0,258	94,6	0,256	49,0	0,39
	différence (%)	1,23	0,78	1,26	0,68	1,86	2,56
1	anal	100,8	0,296	95,1	0,279	49,6	0,42
	num	102,0	0,299	96,3	0,282	51,3	0,41
	différence (%)	1,22	1,23	1,23	1,01	3,26	2,20

(3.34)

TAB. 3.5 – Première propriété modale déterminée analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v et différents gains de contrôle proportionnel direct g_d, pas de contrôle en vitesse g_v=0

η_v		f_1 en (Hz)	η_1	f_2 en (Hz)	η_2	f_3 en (Hz)	η_3
0	anal	95,5	0	299,8	0	614,5	0
	num	96,8	0	304,1	0	624,2	0
	différence (%)	1,33	0,00	1,41	0,00	1,55	0,00
0.2	anal	95,8	0,074	300,0	0,057	614,6	0,035
	num	97,0	0,074	304,6	0,057	624,6	0,035
	différence (%)	1,31	0,00	1,51	0,0	1,60	0,0
0.4	anal	96,5	0,144	300,6	0,113	615,0	0,07
	num	97,8	0,144	306,4	0,113	625,9	0,07
	différence (%)	1,29	0,0	1,89	0,00	1,74	0,0
0.6	anal	97,8	0,205	301,7	0,168	615,6	0,105
	num	99,0	0,206	309,4	0,167	628,1	0,105
	différence (%)	1,26	0,49	2,49	0,60	1,99	0,0
0.8	anal	99,3	0,256	303,1	0,221	616,5	0,140
	num	100,5	0,258	313,7	0,217	631,2	0,139
	différence (%)	1,23	0,78	3,38	1,84	2,33	0,72
1	anal	101,1	0,296	304,9	0,271	617,6	0,174
	num	102,3	0,299	319,6	0,264	635,4	0,173
	différence (%)	1,17	1,0	4,60	2,84	2,80	0,58

(3.35)

TAB. 3.6 – Trois premières propriétés modales déterminées analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v.(gain de contrôle en vitesse g_v=0, pas de contrôle proportionnel direct g_d=0)

méthode de résolution numérique utilisée, à savoir la méthode d'énergie de déformation complexe (MSEC) qui reste une approximation.

3.5.3 Test de plaque

Le test de plaque concerne la plaque de la figure 3.2, encastrée à un bord et libre à l'autre. Les dimensions de cette plaque sont définies dans le tableau 3.9 et les propriétés des couches dans le tableau 3.1. Sachant qu'on ne peut pas modéliser le contrôle et l'amortissement actif sur Abaqus à l'aide des éléments tridimensionnels, nous nous limitons à une comparaison des modes propres de la plaque non-amortie obtenus par un modèle E.F. 3D avec le code de calcul Abaqus et à l'aide de notre élément sandwich. Le maillage sur Abaqus comprend, 420 éléments 3D à intégration réduite de type C3D20R, avec 5 éléments dans l'épaisseur. Le calcul à l'aide de l'élément sandwich utilise 168 éléments. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.10 où l'on peut observer un bon accord entre ces résultats. Ensuite, les propriétés amortissantes de la plaque ont été calculées à l'aide de l'élément sandwich en utilisant la MSEC. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux 3.11 et 3.12 pour différentes valeurs du gain de contrôle et du facteur de perte. Notons que ces résultats ne sont pas validés à ce stade en terme de calcul d'amortissement car ce genre de modèle hybride n'a pas été traité dans la littérature. Cependant, ces résultats seront confortés par comparaison à des résultats obtenus à l'aide d'un algorithme

η_v		f_1 in (Hz)	η_1	f_2 in (Hz)	η_2	f_3 in (Hz)	η_3
0	anal	95,5	0.036	299,5	0,117	610,2	0,28
	num	96,8	0.036	305,5	0,119	642,0	0,286
	différence (%)	1,34	0,0	1,96	1,68	4,95	2,1
0.2	anal	95,6	0,11	298,4	0,175	608,7	0,30
	num	96,9	0,11	306,7	0,179	643,5	0,31
	différence (%)	1,34	0,0	2,71	2,23	5,41	4,22
0.4	anal	96,1	0,18	297,8	0,233	605,7	0,33
	num	97,5	0,181	309,1	0,241	647,4	0,355
	différence (%)	1,44	0,55	3,66	3,32	6,44	7,04
0.6	anal	97,1	0,243	297,5	0,291	603,0	0,37
	num	98,5	0,243	312,8	0,302	652,3	0,404
	différence (%)	1,42	0,00	4,89	3,64	7,56	8,42
0.8	anal	98,5	0,295	297,7	0,347	600,5	0,412
	num	100	0,296	318,0	0,36	658,3	0,455
	différence (%)	1,50	0,34	6,38	3,61	8,78	9,45
1	anal	100,1	0,337	298,0	0,402	598,0	0,45
	num	101,7	0,338	325,0	0,422	665,7	0,51
	différence (%)	1,52	0,30	8,31	4,74	10,17	11,76

(3.36)

TAB. 3.7 – Trois premières propriétés modales déterminées analytiquement et numériquement pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v.(gain de contrôle en vitesse g_v=-0.01, pas de contrôle proportionnel direct g_d=0)

η_v		G_v=0		g_v=-0.01		g_v=-0.05	
		f_1 in (Hz)	η_1	f_1 in (Hz)	η_1	f_1 in (Hz)	η_1
0	anal	95,5	0	95,5	0.036	95,2	0,180
	num	96,8	0	96,8	0.036	96,5	0,181
	différence (%)	1,33	0,00	1,34	0,0	1,37	0,55
0.2	anal	95,8	0,074	95,6	0,11	94,6	0,258
	num	97,0	0,074	96,9	0,11	96,1	0,258
	différence (%)	1,31	0,00	1,34	0,0	1,61	0,0
0.4	anal	96,5	0,144	96,1	0,18	94,2	0,334
	num	97,8	0,144	97,5	0,185	96,1	0,332
	différence (%)	1,29	0,0	1,44	0,55	1,98	0,60
0.6	anal	97,8	0,205	97,1	0,243	94,5	0,404
	num	99,0	0,206	98,5	0,243	96,6	0,4
	différence (%)	1,26	0,49	1,42	0,00	2,17	1,00
0.8	anal	99,3	0,256	98,5	0,295	95,2	0,464
	num	100,5	0,258	100	0,296	97,6	0,458
	différence (%)	1,23	0,78	1,50	0,34	2,46	1,31
1	anal	101,1	0,296	100,1	0,337	96,2	0,514
	num	102,3	0,299	101,7	0,338	98,8	0,505
	différence (%)	1,17	1,0	1,52	0,30	2,63	1,78

(3.37)

TAB. 3.8 – Quantités modales (fréquence et amortissement) pour différentes valeurs du facteur de perte viscoélastique η_v et différent gain de contrôle en vitesse g_v, pas de contrôle proportionnel direct g_d=0

de recherche de valeurs propres complexes présenté dans le chapitre suivant.

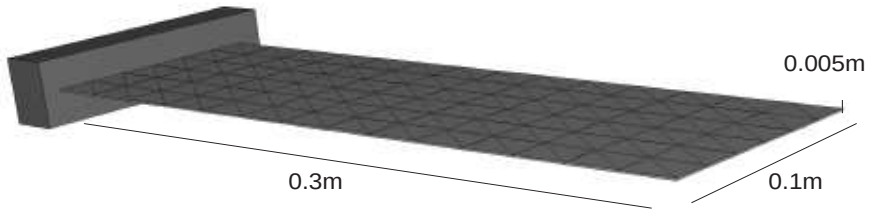


FIG. 3.2 – Maillage de la plaque

Plaque	L=3l=60h ;	h=5 mm
Elastique	h_e= 22h/150	ρ = 2040 (kg/m^3)
Viscoélastique	h_v= 4h/50	ρ = 1200 (kg/m^3)
Piezoélectrique	h_p= h/50	ρ = 7500 (kg/m^3)

TAB. 3.9 – Dimensions des couches pour la plaque

Mode	Fréquence en (Hz) avec l'élément coque	Fréquence en (Hz) avec E.F. 3 D d'Abaqus	différence relative (%)
1	39,26	38,73	1,35
2	165,66	164,4	0,76
3	185,25	181,32	2,12

TAB. 3.10 – Trois premières fréquences propres de la plaque non amortie obtenues avec l'élément coque et avec le modèle 3 D du code Abaqus

η_v	g_d	f_1 en (Hz)	η_1
0.1	0	39,65	0,019
	-20	33,29	0,017
	-50	23,6	0,019
0.5	0	95,6	0,11
	-20	40,16	0,082
	-50	23,94	0,081
1.0	0	41,26	0,12
	-20	34,58	0,11
	-50	24,62	0,114

TAB. 3.11 – Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle proportionnel direct

η_v	g_v	f_1 en (Hz)	η_1
0	0	39,65	0,019
	-0,01	39,61	0,059
	-0,05	39,17	0,225
0.5	0	95,6	0,11
	-0,01	40,16	0,082
	-0,05	40,04	0,123
1.0	0	39,3	0,296
	-0,01	41,09	0,163
	-0,05	40,1	0,344

TAB. 3.12 – Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle en vitesse

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre un élément fini sandwich de type coque a été développé. Il permet de modéliser les sandwichs à amortissement hybride. Les propriétés amortissantes, à l'aide de cet élément, ont été obtenues dans le cas de poutre et de plaque. Ces résultats constituent une première validation de cet élément sandwich, cependant le calcul des propriétés amortissantes a été effectué à l'aide de la MSEC qui induit des erreurs relativement importantes pour les structures fortement amorties. Pour remédier à ces limitations, nous proposons un algorithme qui permet d'obtenir les valeurs exactes de la fréquence et de l'amortissement en résolvant le poblème des vibrations libres.

Chapitre 4

Méthode numérique pour le calcul des modes complexes des sandwichs à amortissement hybride

4.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, dans le cas des sandwichs à 5 couches, la détermination numérique des propriétés amortissantes, à savoir le facteur de perte (amortissement) et la fréquence amortie, pose problème car la matrice de rigidité de ces structures (equation 3.28) est complexe et dépendante de la fréquence et de la température. Cette dépendance implique que le problème des vibrations libres se ramène à un problème aux valeurs propres non linéaire, ce qui rend difficile la recherche des modes et fréquences propres et l'analyse des vibrations non linéaires.

Pour déterminer les propriétés amortissantes de ces structures, nous avons traité le problème de manière approché en utilisant la MSEC. Ici, nous proposons le développement d'un algorithme numérique pour résoudre de manière précise et directe le problème aux valeurs propres non linéaires. Cet algorithme utilise les techniques usuelles de la méthode asymptotique numérique (MAN) [32], qui sont l'association des techniques d'homotopie et de perturbation, couplé si besoin aux approximants de Padé [35] pour améliorer le domaine

de validité des séries. Le principe général de la méthode est : à partir des modes propres non amorties nous déduisons les modes complexes à l'aide d'une méthode de perturbation. Avant de présenter l'algorithme de recherche des modes propres des structures sandwichs à 5 couches nous rappelons la formulation par élément finis du problème des vibrations libres de ces structures.

4.2 Formulation élément finis du problème des vibrations propres

Dans le chapitre précédent, nous avions établi que les équations de mouvement régissant le comportement dynamique du sandwich à 5 couches peuvent s'écrire après discrétisation sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} [K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} + [M_{uu}]\{\ddot{u}\} = \{F_u\} \\ [K_{u\phi}]^T\{u\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{0\} \end{cases} \tag{4.1}$$

où $[K_{uu}]$, $[M_{uu}]$, $[K_{u\phi}]$ et $[K_{\phi\phi}]$ sont respectivement les matrices de rigidités, de masse, piézoélectrique et de permittivité électrique. $\{F_u\}$ est le vecteur force appliqué. Ces différentes matrices s'écrivent de manière plus explicite telle que décrit par l'équation (3.22) du chapitre 3. Le coeur de la structure est composée d'une couche viscoélastique, nous avons donc ici une matrice de rigidité $[K_{uu}]$ complexe et dépendante non linéairement de la fréquence. Si l'on réalise la condensation des potentiels électriques le problèmes des vibrations libres ($\{F_u\} = 0$) se ramène au problème de valeurs propres complexes non-linéaires suivant :

$$([K(\omega)] + i\,[C(\omega)] - \omega^2\,[M_{uu}])\,\{U\} = 0 \tag{4.2}$$

où

$$\begin{cases} [K(\omega)] = \Re\{[K_{uu}(\omega)]\} + ([K_{u\phi}]_s + g_d[K_{u\phi}])_a[K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s \\ [C(\omega)] = \Im\{[K_{uu}(\omega)]\} + \omega g_v[K_{u\phi}]_a[K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s \end{cases}$$

$(\{U\}, \omega)$ sont les éléments propres : $\{U\}$ modes propres, ω pulsations propres et $\Re(a)$ et $\Im(a)$ désigne respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de a. Dans le cas de systèmes à nombre de degrés de libertés réduit le système est parfois résolu de manière exacte à l'aide d'une méthode QR telle que décrite au chapitre bibliographie,

mais cette méthode est limité aux systèmes à petit nombre de degrés de libertés. La détermination de $\{U\}$ et ω se fait souvent comme nous l'avons fait au chapitre 3 au moyen de méthodes approchées telles que : la méthode d'énergie de déformation modale utilisant soit le mode réel soit le mode complexe ou encore par le calcul direct de la réponse en fréquence. Nous proposons donc un algorithme pour résoudre (4.2) de manière directe. Cet algorithme est similaire à celui développé par Daya et Potier-Ferry [27] pour les tôles sandwich viscoélastiques. Par soucis de simplicité, les étapes de notre algorithme, sont présentées dans le cas où le comportement du matériau viscoélastique est modélisé par $E_v = E^R(1 + i\eta_v)$ constant. Ceci signifie que $[K_{uu}]$ ne dépend pas de ω et s'écrit sous la forme $[K_{uu}] = \left[K_{uu}^R\right] + i\left[K_{uu}^I\right]$.

4.3 Technique d'homotopie

Cette première étape nous permet de transformer le problème aux valeurs propres non linéaires (equation (4.2)) en utilisant la technique d'homotopie. En introduisant un paramètre artificiel ε de la manière suivante :

$$\begin{cases} \left([K_{reel}(\varepsilon)] + i\varepsilon\left[K_{comp}(\varepsilon)\right] - \omega^2\left[M_{uu}\right]\right)\{U\} = 0 \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

où

$$\begin{cases} [K_{reel}(\varepsilon)] = \left[K_{uu}^R\right] + \left([K_{u\phi}]_s + \varepsilon g_d[K_{u\phi}]\right)_a [K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s \\ [K_{comp}(\varepsilon)] = \left[K_{uu}^I\right] + \omega g_v [K_{u\phi}]_a [K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s \end{cases}$$

de telle sorte que lorsque ε=0 on se retrouve face au problème aux valeurs propres réelles (équation(4.4)) que l'on résous par une méthode classique ; d'itération de sous espace ou par une méthode de Lanczos et dont le couple solutions est noté (U_0, ω_0) vérifient le problème suivant :

$$\left(\left[K_{uu}^R\right] + [K_{u\phi}]_s [K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s - \omega^2\left[M_{uu}\right]\right)\{U_0\} = 0 \tag{4.4}$$

Lorsque ε=1 on se ramène au problème défini dans l'annexe (B.6). A partir de la solution (U_0, ω_0), nous déduisons la solution de (4.3) par la transformation d'homotopie. Cependant, le vecteur solution $\{U\}$ de l' équation (4.3) est définit à une constante multiplicative

près. Nous introduisons donc ici une condition de normalisation sous la forme :

$$\{U_0\}^t (\{U\} - \{U_0\}) = 0 \tag{4.5}$$

où $\{U_0\}$ est le mode non amorti. Les équations (4.3) et (4.5) définissent alors un problème bien posé tel que :

$$\varepsilon \rightarrow \{U(\varepsilon), \omega(\varepsilon)\} \tag{4.6}$$

Ce problème peut être résolu par les méthodes incrémentales classiques telle que la méthode de Newton-Raphson par exemple. Le problème sera résolu ici par la méthode asymptotique numérique (MAN). Cette dernière a permis la résolution de nombreux problèmes de mécanique non linéaire (non linéarités géométrique, matériaux et contact) [22] dont le principe général est décrit dans l'annexe C.

4.4 Technique de perturbation

Dans cette étape, on cherche les inconnues du problème (4.3), $\{U\}$ et ω sous formes de séries entières par rapport au paramètre ε.

$$\begin{cases} \{U\} = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \{U_j\} \\ \omega = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j p_j \\ \omega^2 = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j C_j \\ 0 \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

où N est l'ordre de troncature des séries et ω la fréquence propre complexe. Après insertion des séries (4.7) dans l'équation (4.3) et par identification des puissances en ε, nous obtenons une série de problèmes linéaires récurrents :

Problème à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} [A]\{U_0\} = 0 \\ [A] = (\left[K_{uu}^R\right] + [K_{senseur}] - C_0\,[M_{uu}])\{U_0\} \\ C_0 = {\omega_0}^2 \end{cases} \tag{4.8}$$

où $[K_{senseur}]=[K_{u\phi}]_s[K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s$ et $[K_{actionneur}]=[K_{u\phi}]_a[K_{\phi\phi}]_s{}^{-1}[K_{\phi u}]_s$ représente respectivement les rigidités statiques adjointes dues au capteur et à l'actionneur.

Problème à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} [A]\{U_1\} = \{F_1\} \\ \{F_1\} = -(g_d\,[K_{actionneur}] - i(\left[K_{uu}^I\right] + p_0 g_v\,[K_{actionneur}]) + C_1\,[M_{uu}])\{U_0\} \end{cases} \tag{4.9}$$

Problème à l'ordre (j+1) :

$$\begin{cases} [A]\{U_j\} = \{F_j\} \\ \{F_j\} = \sum_{k=1}^{k=j} C_k\,[M_{uu}]\{U_{j-k}\} - (i\left[K_{uu}^I\right] + g_d\,[K_{actionneur}])\{U_{j-1}\} \\ -ig_v \sum_{k=0}^{k=j-1} p_k\,[K_{actionneur}]\{U_{j-k-1}\} \end{cases} \tag{4.10}$$

On remarque que le problème à l'ordre 1 correspond au problème au valeurs propres réelles c'est à dire le problème des vibrations propres du sandwich non amorti. Nous résolvons ce système à l'aide d'une méthode d'itération sur les sous espaces. Pour les autres ordres les problèmes sont linéaires non homogènes mais possèdant tous la même matrice tangente $[A]$. Nous pouvons calculer les termes des séries en inversant seulement une matrice par fréquence propre. Cependant cette matrice $[A]$ est singulière et son noyau est généré par le mode non amorti $[U_0]$. Une condition supplémentaire est nécessaire pour calculer ces solutions. Celle-ci est la condition de solvabilité suivante :

$$\{F_j\}^t\{U_0\} = 0 \tag{4.11}$$

Elle permet de calculer les constantes C_j de la série définis précédemment (équation (4.7)) :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\{U_0\}^t(g_d[K_{actionneur}]^t + i(\left[K^I_{uu}\right] + p_0 g_v[K_{actionneur}]^t))\{U_0\}}{\{U_0\}^t[M_{uu}]\{U_0\}} \\ C_j = \frac{(-\sum_{k=1}^{k=j-1} C_k\{U_{j-k}\}^t[M_{uu}] + i\{U_{j-1}\}^t(\left[K^I_{uu}\right] + g_d[K_{actionneur}]^t) + \\ \{U_0\}^t[M_{uu}]\{U_0\} \\ \frac{ig_v\left\{U_{j-k-1}\right\}^t \sum_{k=0}^{k=j-1} p_k[K_{actionneur}]^t)\{U_0\}}{\{U_0\}^t[M_{uu}]\{U_0\}} \\ j = 2, 3, ... \end{cases} \tag{4.12}$$

Le nombre C_j dépend uniquement des vecteurs $\{U_n\}$ et des C_n calculés aux ordres précédents. Nous pouvons donc ici calculer C_1 en résolvant (équation (4.12)) puis $\{U_1\}$ au moyen de (équation(4.9)), puis C_2 en résolvant à nouveau (équation (4.12)) puis $\{U_2\}$ au moyen de (équation(4.10)) et ainsi de suite. De manière récurrente nous déterminons les termes p_k définis précédemment par l'équation (4.7) et fonction uniquement des termes C_k de même ordre et des termes p_k d'ordre inférieur à savoir

$$\begin{cases} C_0 = {p_0}^2 \\ C_1 = p_0 p_1 + p_1 p_0 \\ ... \\ C_k = \sum_{j=0}^{j=k} p_{k-j} p_j \\ j = 2, 3, ... \end{cases} \tag{4.13}$$

Si l'équation de solvabilité est satisfaite, alors les équations linéaires (4.9) et (4.10) sont bien posées. Ces équations ont une solution unique si la condition supplémentaire de normalisation (équation (4.5)) est satisfaite :

$$\{U_0\}^t\{U_j\} = 0 \qquad\qquad j = 1, ..., N \tag{4.14}$$

Le système d'équations (4.10 et 4.14) est réarrangé en introduisant un multiplicateur de Lagrange k. Ceci permet d'obtenir le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} [A] & \{U_0\} \\ \{U_0\}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U_j\} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_j\} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

La matrice $[A]$ dans l'équation (4.15) est réelle et inversible. Nous pouvons donc la factoriser par la méthode de Crout. Ceci nous permet de résoudre tous les problème linéaires avec une seule factorisation matricielle. Nous obtenons ainsi les solutions du problème

perturbé (équation (4.3)) sous la forme :

$$\begin{cases} \{U(\varepsilon)\} = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \{U_j\} \\ \omega = i\sqrt{\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j C_j} \end{cases} \tag{4.16}$$

Ceci constitue une estimation de la solution de l'équation (4.3), puisque l'ordre de troncature est nécessairement fini (généralement on prend N=20). Cependant, la solution recherchée correspond à ε=1, ce qui implique que le rayon de convergence des séries doit être supérieur ou égal à 1. Si l'estimation est suffisamment bonne, c'est à dire si le résidu relatif (équation (4.17)) est plus petit qu'une tolérance donnée ($10^{-8}..10^{-6}$) la solution du problème est obtenue en prenant ε=1 dans l'équation (4.16).

$$\begin{cases} R(\varepsilon) = \frac{\|([K_{reel}(\varepsilon)]+i\varepsilon[K_{comp}(\varepsilon)]-\omega^2[M_{uu}])\{U(\varepsilon)\}\|}{\|([K^R_{uu}]+[K_{senseur}])\{U(\varepsilon)\}\|} \\ \{U\} = \sum_{j=0}^{N} \{U_j\} \\ \omega = i\sqrt{\sum_{j=0}^{N} C_j} \end{cases} \tag{4.17}$$

Lorsque ce n'est pas le cas et que le rayon de convergence est inférieur à 1, nous avons mis en place une formulation a partir des approximants de Padé qui nous permet de remplacer l'approximation polynômiale par une approximation rationnelle. L'avantage de cette technique réside dans le fait que le rayon de convergence est plus important. Plus de détails sur la mise en oeuvre des approximants de Padé peuvent être trouvé dans les travaux de Cochelin et al [21] et Elhage-Hussein et al [35]. Si le résidu relatif à ε=1 n'est toujours pas satisfaisant, on procède à une méthode de continuation.

4.5 Méthode de continuation

Il faut déterminer l'intervalle de validité des séries (4.7) $[0, \varepsilon_{max}]$. En utilisant la MAN, il existe une formule simple pour évaluer cet intervalle qui suggère que le dernier terme

$\{U_n\}$ doit être très petit devant $\{U_1\}$ [20].

$$\varepsilon_{max} = (\xi \frac{\|U_1\|}{\|U_n\|})^{\frac{1}{N-1}} \tag{4.18}$$

où ξ=10^{-4} en général. Cette formule permet d'éviter de calculer plusieurs résidus relatifs (coût très élevé) pour évaluer ε_{max}. On évalue ainsi un nouveau point de départ à l'aide de (4.7) défini par $\{U_{max}\} = \{U(\varepsilon_{max})\}$ et $\omega_{max} = \omega(\varepsilon_{max})$. Le problème perturbé (4.3) devient à ce stade

$$\begin{cases} ([K_{reel}(\varepsilon_{max} + \Delta\varepsilon)] + i(\varepsilon_{max} + \Delta\varepsilon)\,[K_{comp}(\varepsilon_{max} + \Delta\varepsilon)] - \omega^2\,[M_{uu}])\,\{U\} = 0 \\ 0 \leq \varepsilon = \varepsilon_{max} + \Delta\varepsilon \leq 1 \end{cases} \tag{4.19}$$

puis on applique la procédure de perturbation en cherchant les inconnues sous forme de séries entières en $\Delta\varepsilon$:

$$\begin{cases} \{U\} = \{U_{max}\} + \sum_{j=1}^{N} (\Delta\varepsilon)^j \{U_j\} \\ \omega = \omega_{max} + \sum_{j=1}^{N} (\Delta\varepsilon)^j \omega_j \end{cases} \tag{4.20}$$

Les séries sont injectées dans (4.19) ce qui donne une série de problème linéaires similaires à 4.8, 4.9 et 4.10 ayant une même matrice $[A] = [K_{reel}(\varepsilon_{max})] + i\varepsilon_{max}\,[K_{comp}(\varepsilon_{max})] - \omega^2_{max}\,[M_{uu}]$ qui est ici complexe et double ainsi le nombre des ddl. Si le nouveau rayon de convergence des séries (4.20) est encore inférieur à 1, on procède de la même manière que l'étape précédente au moyen des approximants de Padé et si besoin on refait un pas de continuation.

4.6 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous proposons des tests de validation de l'algorithme MAN présenté pour le calcul des vibrations libres des sandwichs viscoélastiques et piézoélectriques. Pour celà, deux types de calculs sont proposés : un calcul de poutre et un calcul de plaque. Les paramètres d'utilisations de l'algorithme MAN ont été choisis comme suit : N nombre de troncature des séries égal à 19, ξ=10^{-4}, $R(\varepsilon) \leq 10^{-4}$.

4.6.1 Calcul de poutres

Pour valider nos développements, nous considérons une poutre à 5 couches en appui simple à ses extrémités. Ses caractéristiques géométriques et matérielles sont données dans les tableaux 3.1 et 3.2. Les propriétés électromécanique des couches piézoélectriques sont les mêmes que celles présentées dans le chapitre précédent. Les résultats obtenus en utilisant la MAN sont comparés à ceux obtenus en utilisant la MSEC et à ceux déterminé analytiquement. Deux lois de contrôles, à savoir un contrôle proportionnel et un contrôle en vitesse, ont été utilisées.

Contrôle proportionnel

Pour la première loi de contrôle les comparaisons obtenues sont présentées dans les tableaux (4.1), (4.2) et (4.3) pour différentes valeurs du facteur de perte η_v et du gain de contrôle g_d. Il y a un bon accord ente les résultats de la MAN et ceux du modèle analytique et de la MSEC. Cependant lorsque l'amortissement du coeur devient plus important ou lorsque le gain de contrôle augmente les valeurs obtenues avec la MAN sont en adéquation avec les valeurs analytiques alors que celles obtenues avec la MSEC tendent à s'éloigner des valeurs analytiques.

Contrôle en vitesse

Pour la deuxième loi les résultats sont aussi présentés dans les tables (4.4), (4.5) et (4.6) pour différentes valeurs du facteur de perte η_v et du gain de contrôle G_v. Dans les différents cas on obtient de meilleurs résultats lorsqu'on utilise la MAN, plus particulièrement lorsque l'amortissement du coeur devient plus important et ou lorsque le gain de contrôle devient plus important.

4.6.2 Calcul de plaque

Nous reprenons ici le cas de la plaque encastrée libre décrite au chapitre précédent, figure 3.2, dont les dimensions sont définies dans le tableau 3.9. Nous comparons ici les propriétés modales du sandwich 5 couches non-amorti, obtenues avec l'élément sandwich et la MSEC ou la MAN, avec les résultats obtenus avec le code Abaqus. La procédure utilisée sous Abaqus est la même que celle décrite au chapitre 3. Les propriétés modales de la plaque considérée, obtenues par notre élément finis coque et avec Abaqus sont présentées

η_v		f_1 in (Hz)	η_1	f_2 in (Hz)	η_2	f_3 in (Hz)	η_3
0	anal	95,2	0	298,9	0	612,5	0
	MSEC	96,5	0	303,1	0	622,2	0
	MAN	96,5	0	303,1	0	622,2	0
0.2	anal	95,5	0,0740	299,1	0,057	612,6	0,035
	MSEC	96,8	0,0741	303,5	0,057	622,6	0,035
	MAN	96,8	0,074	303,3	0,057	622,3	0,035
0.4	anal	96,2	0,144	299,7	0,113	613	0,07
	MSEC	97,5	0,144	304,6	0,114	623,9	0,07
	MAN	97,5	0,144	304,0	0,114	622,3	0,07
0.6	anal	97,4	0,205	300,7	0,168	613,6	0,105
	MSEC	98,7	0,206	306,6	0,169	626,1	0,105
	MAN	98,7	0,205	305,5	0,168	623,3	0,105
0.8	anal	99,0	0,256	302,2	0,221	614,5	0,14
	MSEC	100,2	0,258	309,5	0,223	629,2	0,139
	MAN	100,3	0,256	306,5	0,221	624,2	0,14
1	anal	100,8	0,296	304,0	0,272	615,6	0,174
	MSEC	102,0	0,299	313,4	0,275	633,4	0,173
	MAN	102,1	0,296	308,4	0,275	625,4	0,174

TAB. 4.1 – Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle direct proportionnel g_d=-1, g_v=0)

η_v		f_1 in (Hz)	η_1	f_2 in (Hz)	η_2	f_3 in (Hz)	η_3
0	anal	89,8	0	280,8	0	573,4	0
	MSEC	91,0	0	284,8	0	582,6	0
	MAN	91,0	0	284,8	0	582,6	0
0.2	anal	90,1	0,0740	281,0	0,059	573,5	0,037
	MSEC	91,3	0,0741	285,2	0,059	583,0	0,037
	MAN	91,3	0,074	285,1	0,059	582,8	0,037
0.4	anal	90,8	0,143	281,6	0,117	573,9	0,074
	MSEC	92,0	0,144	286,35	0,117	584,4	0,074
	MAN	92,0	0,143	285,7	0,117	583,2	0,074
0.6	anal	91,9	0,204	282,7	0,173	574,6	0,11
	MSEC	93,1	0,205	288,3	0,174	586,6	0,11
	MAN	93,1	0,204	286,8	0,174	583,8	0,11
0.8	anal	93,4	0,254	284,1	0,227	575,5	0,146
	MSEC	94,6	0,256	291,2	0,230	589,8	0,145
	MAN	94,7	0,254	288,2	0,227	584,7	0,146
1	anal	95,1	0,293	286,0	0,279	576,6	0,181
	MSEC	96,3	0,296	295,2	0,282	594,1	0,18
	MAN	96,4	0,293	290,1	0,279	585,9	0,181

TAB. 4.2 – Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle direct proportionnel g_d=-20, g_v=0)

η_v		g_d=-1		g_d=-20		g_d=-150	
		f_1 in (Hz)	η_1	f_1 in (Hz)	η_1	f_1 in (Hz)	η_1
0	anal	95,2	0	89,8	0	44,8	0
	MSEC	96,5	0	91,0	0	45,5	0
	MAN	96,5	0	91,0	0	45,6	0
0.2	anal	95,5	0,0740	90,1	0,074	45,1	0,12
	MSEC	96,8	0,0741	91,3	0,0741	45,8	0,12
	MAN	96,8	0,074	91,3	0,074	45,8	0,119
0.4	anal	96,2	0,144	90,8	0,143	45,8	0,23
	MSEC	97,5	0,144	92,0	0,144	46,5	0,23
	MAN	97,5	0,144	92,0	0,143	46,5	0,23
0.6	anal	97,4	0,205	91,9	0,204	46,8	0,32
	MSEC	98,7	0,206	93,1	0,205	47,6	0,31
	MAN	98,7	0,205	93,2	0,204	47,6	0,31
0.8	anal	99,0	0,256	93,4	0,254	48,1	0,38
	MSEC	100,2	0,258	94,6	0,256	49,0	0,39
	MAN	100,3	0,256	94,7	0,254	48,9	0,376
1	anal	100,8	0,296	95,1	0,279	49,6	0,42
	MSEC	102,0	0,299	96,3	0,282	51,3	0,41
	MAN	102,1	0,296	96,4	0,279	50,4	0,42

TAB. 4.3 – Première valeur modale obtenue par le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différent gain de contrôle proportionnel direct et différentes valeurs de η_v.(g_v=0)

η_v		f_1 in (Hz)	η_1	f_2 in (Hz)	η_2	f_3 in (Hz)	η_3
0	anal	95,5	0	299,8	0	614,5	0
	MSEC	96,8	0	304,1	0	624,2	0
	MAN	96,8	0	304,1	0	624,2	0
0.2	anal	95,8	0,074	300,0	0,057	614,6	0,035
	MSEC	97,0	0,074	304,6	0,057	624,6	0,035
	MAN	97,1	0,074	304,3	0,057	624,3	0,035
0.4	anal	96,5	0,144	300,6	0,113	615,0	0,07
	MSEC	97,8	0,144	306,4	0,113	625,9	0,07
	MAN	97,8	0,144	304,9	0,113	624,7	0,07
0.6	anal	97,8	0,205	301,7	0,168	615,6	0,105
	MSEC	99,0	0,206	309,4	0,167	628,1	0,105
	MAN	99,0	0,205	306,0	0,168	625,4	0,105
0.8	anal	99,3	0,256	303,1	0,221	616,5	0,140
	MSEC	100,5	0,258	313,7	0,217	631,2	0,139
	MAN	100,6	0,256	307,4	0,221	626,2	0,139
1	anal	101,1	0,296	304,9	0,271	617,6	0,174
	MSEC	102,3	0,299	319,6	0,264	635,4	0,173
	MAN	102,4	0,296	309,3	0,271	627,4	0,173

TAB. 4.4 – Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle en vitesse g_v=0, g_d=0)

η_v		f_1 in (Hz)	η_1	f_2 in (Hz)	η_2	f_3 in (Hz)	η_3
0	anal	95,5	0.036	299,5	0,117	610,2	0,28
	MSEC	96,8	0.036	305,5	0,119	642,0	0,286
	MAN	96,8	0.036	302,9	0,119	612,1	0,278
0.2	anal	95,6	0,11	298,4	0,175	608,7	0,30
	MSEC	96,9	0,11	306,7	0,179	643,5	0,31
	MAN	96,8	0,11	301,8	0,176	610,5	0,30
0.4	anal	96,1	0,18	297,8	0,233	605,7	0,33
	MSEC	97,5	0,181	309,1	0,241	647,4	0,355
	MAN	97,4	0,18	301,1	0,234	607,6	0,33
0.6	anal	97,1	0,243	297,5	0,291	603,0	0,37
	MSEC	98,5	0,243	312,8	0,302	652,3	0,404
	MAN	98,4	0,243	300,9	0,292	604,9	0,373
0.8	anal	98,5	0,295	297,7	0,347	600,5	0,412
	MSEC	100	0,296	318,0	0,36	658,3	0,455
	MAN	99,8	0,296	301,1	0,348	602,5	0,412
1	anal	100,1	0,337	298,0	0,402	598,0	0,45
	MSEC	101,7	0,338	325,0	0,422	665,7	0,51
	MAN	101,5	0,337	301,7	0,402	600,4	0,45

TAB. 4.5 – Comparaison des trois premières valeurs modales obtenues en utilisant le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différentes valeurs de η_v.(contrôle en vitesse g_v=-0.01, g_d=0)

η_v		g_v=0		g_v=-0.01		g_v=-0.05	
		f_1 in (Hz)	η_1	f_1 in (Hz)	η_1	f_1 in (Hz)	η_1
0	anal	95,5	0	95,5	0.036	95,2	0,180
	MSEC	96,8	0	96,8	0.036	96,5	0,181
	MAN	96,8	0	96,8	0.036	95,8	0,18
0.2	anal	95,8	0,074	95,6	0,11	94,6	0,258
	MSEC	97,0	0,074	96,9	0,11	96,1	0,258
	MAN	97,0	0,074	96,8	0,11	95,1	0,258
0.4	anal	96,5	0,144	96,1	0,18	94,2	0,334
	MSEC	97,8	0,144	97,5	0,185	96,1	0,332
	MAN	97,8	0,144	97,4	0,181	94,9	0,333
0.6	anal	97,8	0,205	97,1	0,243	94,5	0,404
	MSEC	99,0	0,206	98,5	0,243	96,6	0,4
	MAN	99,0	0,205	98,4	0,243	95,2	0,401
0.8	anal	99,3	0,256	98,5	0,295	95,2	0,464
	MSEC	100,5	0,258	100	0,296	97,6	0,458
	MAN	100,6	0,256	99,8	0,296	95,8	0,461
1	anal	101,1	0,296	100,1	0,337	96,2	0,514
	MSEC	102,3	0,299	101,7	0,338	98,8	0,505
	MAN	102,4	0,296	101,5	0,337	96,9	0,51

TAB. 4.6 – Première valeur modale obtenue par le calcul analytique, la MSEC et la MAN pour différent gain de contrôle proportionnel direct et différentes valeurs de η_v.(g_d=0)

dans le tableau 4.7. Les résultats obtenus avec notre élément et le nouvel algorithme sont identique à ceux obtenues avec la MSEC et proches de ceux obtenus avec le code Abaqus. Dans les tabeaux 4.8 et 4.9 sont présentées, les propriétés modales obtenues, avec les deux méthodes de résolution, pour différents facteurs de perte et différents gains de contrôle. Nous observons une bonne corrélation entre les résultats obtenus avec les deux méthodes.

Mode	Fréquence en (Hz) avec l'élément coque MSEC	Fréquence en (Hz) avec l'élément coque MAN	Fréquence en (Hz) avec E.F. 3 D d'Abaqus
1	39,26	39,26	38,73
2	165,66	165,65	164,4
3	185,25	185,25	181,32

TAB. 4.7 – Trois premières fréquences propres de la plaque non amortie obtenues, avec l'élément coque muni de la MSEC ou de la MAN, ainsi qu'avec le modèle 3 D du code Abaqus

η_v	g_d	f_1 en (Hz) MSEC	f_1 en (Hz) MAN	η_1 MSEC	η_1 MAN
0.1	0	39,7	39,7	0,019	0,019
	-20	33,3	33,3	0,017	0,019
	-50	23,6	23,6	0,019	0,019
0.5	0	95,6	95,6	0,11	0,11
	-20	40,2	40,2	0,082	0,082
	-50	23,9	23,9	0,081	0,081
1.0	0	41,3	41,3	0,12	0,12
	-20	34,6	34,5	0,11	0,11
	-50	24,6	24,3	0,11	0,12

TAB. 4.8 – Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle proportionnel direct avec la MSEC et la MAN

η_v	g_v	f_1 en (Hz) MSEC	f_1 en (Hz) MAN	η_1 MSEC	η_1 MAN
0	0	39,7	39,7	0,019	0,019
	-0,01	39,6	39,6	0,059	0,059
	-0,05	39,2	39,2	0,225	0,228
0.5	0	95,6	95,6	0,11	0,11
	-0,01	40,2	40,2	0,082	0,082
	-0,05	40	40	0,123	0,123
1.0	0	39,3	39,2	0,296	0,296
	-0,01	41,1	41,0	0,163	0,162
	-0,05	40,1	39,8	0,344	0,340

TAB. 4.9 – Première caractéristique modale de la plaques avec différentes valeurs du facteur de perte et trois valeurs différentes du gain de contrôle en vitesse avec la MSEC et la MAN

4.7 Conclusions

Un algorithme numérique pour la résolution des problèmes aux valeurs propres non linéaires des sandwichs coques à amortissement hybride 5 couches est présenté. Cet algorithme est basé sur la méthode asymptotique numérique (MAN) qui permet le calcul direct des quantités modales. Les résultats sont validés par comparaison à un modèle analytique et à ceux obtenus en utilisant la méthode des énergies modale complexe (MSEC). Comme conclusion la MAN est bien plus efficace que la MSEC particulièrement pour des grandes valeurs de η_v et du gain de contrôle. De plus les résultats présentés ici ont nécessité uniquement un pas et une seule utilisation des approximants de Padé. La méthode MAN développée est encore plus efficace pour les modes d'ordres élevés dont les résultats ne sont pas rapportés ici.

Chapitre 5

Vers la modélisation de l'amortissement passif à base de matériaux piézoélectriques

5.1 Introduction

Il est bien établi que les piézocéramiques utilisant le mode de cisaillement ont un coefficient de déformation en cisaillement piézoélectrique élevés [14]. Partant de ce constat on se demande ici s'il pourrait être intéressant de remplacer l'amortissement passif de type viscoélastique par un amortissement passif de type shunt. On remplace dans ce cas la couche viscoélastique par un matériau piézoélectrique se déformant en cisaillement et on lui adjoint un circuit de dissipation de type RL. Les performances en amortissement "shunt" sont gouvernées par le coefficient de couplage électromécanique (EMMC) qui donne une estimation rapide du maximum d'amortissement shunt disponible. Par définition l'EMCC, ou plus précisément sa racine est la mesure de l'énergie mécanique convertie en énergie électrique et vice versa [1]. Il est déterminé habituellement au moyen des résonnances et anti-résonnances des courbes d'admittance/impédance [64]. Pour une structure adaptative piézoélectrique l'EMCC effectif global peut être obtenu au moyen de l'énergie statique ou de déformation modale des patchs en court circuit et à circuit ouvert [18]. Dans le chapitre suivant nous présentons une analyse analytique du coefficient de couplage électromécanique et ce dans le cas d'une poutre sandwich élastique/ piézoélectrique/

élastique en appui simple. La formulation analytique obtenue pour l'EMCC est validée au moyen d'une analyse élément fini réalisée avec un code commercial, Abaqus 2D (en déformation plane) ainsi qu'en 3D. Les résultats obtenus analytiquement sont comparés a ceux obtenus numériquement et valide ainsi le modèle présenté. Dans un second temps une étude paramétrique est menée et l'on évalue les performances de la structure au travers de caractéristiques géométriques telles que le ratio longueur sur épaisseur de la poutre, ou encore épaisseur des faces sur épaisseur du coeur.

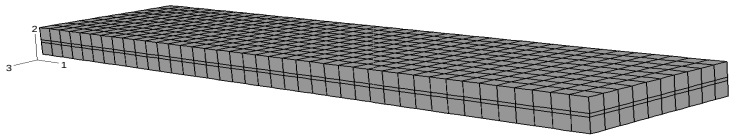


FIG. 5.1 – Cinématique de la poutre sandwich

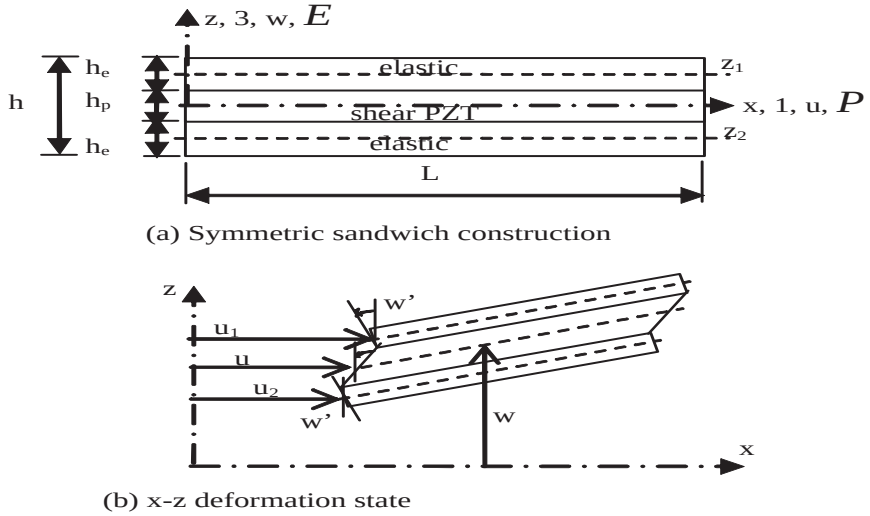


FIG. 5.2 – Cinématique de la poutre sandwich

5.2 Formulation théorique

Afin d'obtenir une formulation analytique de la solution nous avons considéré les hypothèses suivantes :

- Les faces sont supposées suffisamment fines pour que l'on puisse considérer le cisaillement transverse négligeable, alors que le coeur est supposé relativement épais.
- La flexion transverse est supposée constante, et l'on considère le déplacement axial suivant la théorie classique des stratifiés.
- Le sandwich est symétrique et on néglige l'inertie de rotation et les contraintes normales transverses.
- Le potentiel électrique au coeur et les déplacements sont supposés respectivement, linéaire et constant à travers l'épaisseur, mais tout deux sont supposé uniforme dans le plan.
- Les faces sont composées d'un matériau orthotrope et le coeur est en piézocéramique, la polarisation de ce dernier est suivant l'axe principale et ses surfaces inférieurs et supérieurs sont supposées totalement électrodées. Toutes les couches ont leurs axes de symétrie coïncidant avec celui du repère cartésien.

5.2.1 Equations caractéristiques

Nous présentons ici les différentes équations caractéristiques du sandwich à coeur piézoélectrique, c'est à dire, les déplacements et déformations mécaniques, le potentiel et le champ électrique, les équations piézoélectriques réduites et la formulation variationnelle des équations.

Déplacements et déformations

En accord avec les hypothèses formulées précédemment, les déplacements axiaux peuvent s'écrire sous la forme suivante dans les couches élastiques (i=1,2) et dans le coeur piézocéramique (p) :

$$\begin{cases} U_i(x,z) = u_i(x) - (z - z_i)w'(x) \quad (i = 1,2) \\ \\ U_p(x,z) = u(x) + z\beta(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

où β est la rotation de la normale du plan médian de la couche centrale et z_i est l'ordonnée de l'axe médian de la $i^{\text{ème}}$ couche :

$$z_1 = -z_2 = (h_p + h_e)/2 \tag{5.2}$$

Les conditions de raccords cinématiques aux niveaux des interfaces du sandwich sont de la forme :

$$U_1(x, \frac{h_p}{2}) = U_p(x, \frac{h_p}{2}), \quad U_2(x, -\frac{h_p}{2}) = U_p(x, -\frac{h_p}{2}) \tag{5.3}$$

Ces conditions permettent d'écrire les déplacements dans les différentes couches uniquement en fonction des déplacements généralisés du coeur :

$$\begin{cases} u_1 = u(x) + \frac{h_p}{2}\beta - \frac{h_e}{2}w' \\ u_2 = u(x) - \frac{h_p}{2}\beta + \frac{h_e}{2}w' \end{cases} \tag{5.4}$$

on note ici, que si le déplacement axial $u(x)$ au coeur est négligé, celui au niveau des faces devient opposé (termes restant de (5.4)), u_2=-u_1.
Les relations linéaires déformations/déplacements classiques, combinés aux équations (5.1) et (5.4) donnent les déformations axiales dans les différentes couches :

$$\begin{cases} \varepsilon_i(x,z) = e_i(x) + (z - z_i)\chi_e(x) \\ \varepsilon_p(x,z) = e_p(x) + z\chi_p(x) \end{cases} \tag{5.5}$$

où, e(x) et χ(x) sont respectivement les déformations en membranes et les courbures (flexion) généralisées définies pour le coeur et les faces comme suit

$$\begin{aligned} e_i(x) &= u_i'(x), \quad \chi_e(x) = -w''(x) \\ e_p(x) &= u'(x), \quad \chi_p(x) = \beta'(x) \end{aligned} \tag{5.6}$$

La aussi si on néglige la déformation en membrane du coeur celle des faces devient opposée (voir(5.4)), e_2=$-e_1$.
Le cisaillement transverse dans le coeur piézocéramique s'exprime par :

$$\gamma_p(z,x) = \beta(x) + w'(x) \tag{5.7}$$

Potentiel électrique et champ électrique dans le coeur piézocéramique

En respectant les hypothèses formulées auparavant, le potentiel électrique dans le coeur piézocéramique s'écrit en fonction des potentiels électriques en surface (supérieur ϕ^+ et inférieur ϕ^-) comme

$$\phi(z) = \frac{\phi^- + \phi^+}{2} + z\frac{\phi^+ - \phi^-}{h_p} \tag{5.8}$$

Pour un problème en flexion pure, les potentiels supérieur et inférieur sont opposés de manière à ce que

$$\phi^+ = -\phi^- = \varphi \tag{5.9}$$

à partir des relations usuelles liant champ et potentiel électriques ainsi qu'au moyen des équations (5.8) et (5.9), la seule valeur non nulle des composantes du champ électrique est :

$$E_3 = \frac{-2\varphi}{h_p} \tag{5.10}$$

Pour le coeur avec des électrodes en Court Circuit (CC), cette condition implique que

$$\varphi = 0 \tag{5.11}$$

Cependant, pour le coeur avec des électrodes en Circuit Ouvert (CO) le potentiel φ est inconnu. Dans ce cas le coeur est libre de charges électriques en surface, ce qui se traduit par la formulation intégrale suivante :

$$\int_0^L D_3(\pm\frac{h_p}{2})dx = 0 \tag{5.12}$$

où D_3 est le déplacement électrique. Cette condition se simplifie si l'on considère la 4$^{\text{ème}}$ hypothèse (uniformité du déplacement électrique dans le plan) soit

$$D_3(\pm\frac{h_p}{2}) = 0 \tag{5.13}$$

Equations constitutives réduites

Pour un sandwich à faces élastiques symétrique, seul la contrainte axiale est non nulle :

$$\sigma_i = Q_{11}\varepsilon_i \tag{5.14}$$

où Q_{11} est la contrainte normale et qui s'exprime comme

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \tag{5.15}$$

avec C_{11}, C_{13} et C_{33} les constantes élastiques qui peuvent être définies, si l'on considère les hypothèses de contraintes-planes, en fonction des modules d'Young longitudinaux et transversaux (Y_L,Y_T) et des coefficients de Poisson (ν_{LT}, ν_{TL}) :

$$Q_{11} = \frac{Y_l}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad \nu_{TL} = \frac{Y_T}{Y_L}\nu_{LT} \tag{5.16}$$

On peut noter ici que pour un matériau élastique isotrope homogène, Y_L=Y_T=E et ν_{LT}=ν_{TL}=ν_{LT}=ν. On a alors Q_{11}=$\frac{E}{1-\nu^2}$ si l'on considère l'hypothèse de contraintes plane et $\nu = 0$, Q_{11}=E dans l'hypothèse des déformations planes.
Pour le coeur piézocéramique travaillant en mode de cisaillement, les équations constitutives réduites peuvent s'exprimer comme dans [15]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \tau_p \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{33}^E & 0 & 0 \\ 0 & Q_{55}^E & -e_{15} \\ 0 & e_{15} & \varepsilon_{11}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_p \\ E_3 \end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

où, $e15$ et ε_{11}^s sont respectivement les constantes piézoélectrique et diélectrique à déformation constante. Q_{33}^E et Q_{55}^E sont définis pour les couches élastiques par :

$$Q_{33}^E = C_{33} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad Q_{55}^E = C_{55}^E = G_{13}^E \tag{5.18}$$

Formulation variationnelle

Au moyen du principe de Hamilton étendu aux matériaux piézoélectriques, la formulation variationnelle du sandwich, en l'absence de travaux extérieurs peut s'écrire comme

dans [15] :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - H)dt = 0; \quad \forall \delta u,\ \delta w,\ \delta w',\ \delta \beta \tag{5.19}$$

pour des déplacements virtuels δu, δw, $\delta w'$, $\delta \beta$ s'annulant au temps t_1 et t_2 et avec

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{i=1}^{2} \int_{V_i} \rho_e(\delta \dot{U}_i \dot{U}_i + \delta \dot{w} \dot{w})dV + \int_{V_p} \rho_p(\delta \dot{U}_p \dot{U}_p + \delta \dot{w} \dot{w})dV \\ \delta H &= \sum_{i=1}^{2} \int_{V_i} \delta \varepsilon_i \sigma_i dV + \int_{V_p} \delta \varepsilon_p \sigma_p + \delta \gamma_p \tau_p - \delta E_3 D_3)dV \end{aligned} \tag{5.20}$$

où, ρ_e, ρ_p sont les densités massiques des faces élastiques et du coeur piézocéramique. Comme on ne considère que les vibrations libres, le terme $\delta E_3 D_3$ est nul. Cela est du au fait que dans le cas CC δE_3=0 et que dans le cas CO $D_3 = 0$. L'hypothèse que D_3 est constant et nul au niveau des électrodes entraine D_3 nul dans tout le coeur. Cependant, les équations constitutives définies en (5.17) doivent être utilisées comme suit :

– Pour l'analyse en vibration libre avec des électrodes en CC,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \tau_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{33}^E & 0 \\ 0 & Q_{55}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_p \end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

– Pour l'analyse en vibration libre avec des électrodes en CO,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \tau_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{33}^E & 0 \\ 0 & Q_{55}^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_p \end{Bmatrix} \tag{5.22}$$

où

$$Q_{55}^D = \frac{Q_{55}^E}{1 - k_{15}^2} \tag{5.23}$$

et avec

$$k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^T Q_{55}^E}, \quad \varepsilon_{11}^T = \frac{\varepsilon_{11}^S}{1 - k_{15}^2} \tag{5.24}$$

La relation (5.23) vient de la condensation de la dernière ligne dans (5.17) de manière à ce que

$$E_3 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} \gamma_p \tag{5.25}$$

Puis on substitue cette relation avec (5.24) dans la deuxième ligne de (5.17).

Prenant en compte ces différentes considérations, δH est réduit à

$$\delta H = \sum_{i=1}^{2} \int_{V_i} \delta \epsilon_i \sigma_i dV + \int_{V_p} (\delta \epsilon_p \sigma_p + \delta \gamma_p \tau_p)dV \tag{5.26}$$

où les contraintes obéissent aux relations d'élasticité (5.14), ((5.22) avec k_{15}=0) pour le piézo en CC ainsi que (5.22) pour le piézo en CO. Les déformations et leurs contreparties virtuelles sont celles données dans (5.5-5.7).

5.3 Equations généralisées du modèle

Afin de réduire les équations variationelles 3D (5.19) à une formulation poutre 1D, on sépare l'intégration à travers l'épaisseur et suivant l'axe principale. On obtient ainsi, au moyen de (5.4) et en négligeant les termes d'inerties conformément à la troisième hypothèse, l'énergie virtuelle cinétique du sandwich

$$\delta T = \int_0^L m(\delta\dot{u}\dot{u} + \delta\dot{w}\dot{w})dx \tag{5.27}$$

où, L est la longueur de la poutre, m la masse par unité de longueur, cette dernière se défini en fonction des sections droites de chacune des couches, élastiques (S_e=bh_e) et piézocéramique (S_p=bh_p) comme

$$m = 2\rho_e S_e + \rho_p S_p \tag{5.28}$$

Pour ce qui est de réduire l'expression de δH, on substitue (5.5) dans l'équation (5.26) et l'on obtient les efforts normaux, tranchants et moments résultants dans les différentes couches

$$\begin{aligned} &N_i = \textstyle\int_{S_i} \sigma_i dS, \;\; N_p = \int_{S_p} \sigma_p dS, \;\; T_p = \int_{S_p} \tau_p dS \\ &M_i = \textstyle\int_{S_i} (z - z_i)\sigma_i dS, \;\; M_p = \int_{S_p} z\sigma_p dS \end{aligned} \tag{5.29}$$

Avec ces différentes définitions l'expression de δH se réduit à

$$\delta H = \sum_{i=1}^{2} \int_0^L (\delta e_i N_i + \delta\chi_e M_i)dx + \int_0^L (\delta e_p N_p + \delta\chi_p M_p + \delta\gamma_p\tau_p)dx \tag{5.30}$$

En introduisant les expressions homogénéisées des efforts normaux et moments résultants on obtient :

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_p \\ M_\beta &= \tfrac{h_p}{2}(N_1 - N_2) + M_p \\ M_{w'} &= \tfrac{h_e}{2}(N_1 - N_2) + M_1 + M_2 \end{aligned} \tag{5.31}$$

L'équation (5.30) se simplifie comme suit

$$\delta H = \int_0^L (\delta e_p N + \delta\chi_e M_{w'} + \delta\chi_p M_\beta + \delta\gamma_p \tau_p) dx \tag{5.32}$$

5.3.1 Equations généralisées constitutives

Afin d'écrire les efforts normaux, tranchants et moments résultants (5.31) en fonction des déformations correspondantes comme dans (5.32), on substitue (5.14,5.21,5.22) dans (5.29) et on obtient

$$\begin{aligned} N &= A_{11}^E e_p \\ M_\beta &= D_{11}^E \chi_p + D_{12}\chi_e, \quad M_{w'} = D_{12}\chi_p + D_{22}\chi_e \\ T_p &= A_{55}^D \gamma_p \end{aligned} \tag{5.33}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{11}^E &= 2Q_{11}S_e + Q_{33}^E S_p \\ D_{11}^E &= \tfrac{h_p^2}{2} Q_{11}S_e + Q_{33}^E I_p, \quad D_{12} = \tfrac{h_p}{2} h_e Q_{11} S_e \\ A_{55}^D &= Q_{55}^D S_p, \quad D_{22} = 2Q_{11}I_e + \tfrac{{h_e}^2}{2} Q_{11} S_e \end{aligned} \tag{5.34}$$

où dans le cas de sections rectangulaires des faces et du coeur on a

$$I_e = \tfrac{b h_e^3}{12}, \quad I_p = \tfrac{b h_p^3}{12} \tag{5.35}$$

Les équations caractéristiques du moment fléchissant (équations ligne 2 de (5.33)) peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{c} M_\beta \\ M_{w'} \end{array} \right\} = \left[D^E\right] \left\{ \begin{array}{c} \chi_p \\ \chi_e \end{array} \right\}, \quad \left[D^E\right] = \left[\begin{array}{cc} D_{11}^E & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{array} \right] \tag{5.36}$$

Equations généralisées du mouvement

l'intégration par partie de (5.19), qui prend en compte (5.27,5.32), nous donne les équations suivantes, correspondant respectivement aux variations δu, δw, $\delta w'$ et $\delta\beta$

$$\begin{aligned} N' &= m\ddot{u}, \quad T_p' = m\ddot{w} \\ M_{w'}' &= 0, \quad M_\beta' - T_p = 0 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Les conditions aux limites mécaniques correspondant à l'équation (5.37) sont

$$\begin{aligned} &N = 0 \quad \text{ou } u = 0 \text{ à } x = 0,\ L \\ &T_p = 0 \quad \text{ou } w = 0 \text{ à } x = 0,\ L \\ &M_{w'} = 0 \quad \text{ou } w' = 0 \text{ à } x = 0,\ L \\ &M_\beta = 0 \quad \text{ou } \beta = 0 \text{ à } x = 0,\ L \end{aligned} \tag{5.38}$$

Les conditions aux limites classiques de type appui-simple, encastré, libre et rotule peuvent être déduites de (5.38) respectivement comme

$$\begin{aligned} &N = 0,\ w = 0,\ M_{w'} = M_\beta = 0 \\ &u = 0,\ w = w' = 0,\ \beta = 0 \\ &N = 0,\ T_p = 0,\ M_{w'} = M_\beta = 0 \\ &u = w = 0,\ \ M_{w'} = M_\beta = 0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

On peut noter ici à partir des équations (5.37) que le comportement en membrane est découplé du comportement en cisaillement flexion. On peut ainsi résoudre ces deux problèmes séparément. Ici on s'intéresse aux réponses harmoniques du problème de vibrations libres pour la partie cisaillement flexion. Ces réponses harmoniques peuvent s'obtenir en résolvant le problème suivant

$$T_p' + \omega^2 m w = 0,\ M_{w'}' = 0,\ M_\beta' - T_p = 0 \tag{5.40}$$

La dernière équation de (5.40) est utilisée pour obtenir une relation entre la rotation β et la flexion transverse w au moyen de la deuxième et dernière équation constitutive de (5.33)

$$A_{55}^D \beta - D_{11}^E \beta'' = -A_{55}^D w' - D_{12} w''' \tag{5.41}$$

5.4 Solutions de type Navier

La formulation variationnelle faible correspondant au problème (5.40) est

$$\int_0^L \left[-\delta w'' M_{w'} + \delta\beta' M_\beta + (\delta\beta + \delta w') T_p\right] dx - \omega^2 \int_0^L \delta w m w dx = 0; \quad \forall \delta w, \delta w', \delta\beta \tag{5.42}$$

(5.33) et (5.36) combinées à (5.6) permet d'écrire

$$\begin{aligned}&\int_0^L (< \delta\beta' \ -\delta w'' > \left[D^E\right] \left\{ \begin{array}{c} \beta' \\ -w'' \end{array} \right\} + < \delta\beta \ -\delta w' > A_{55}^D \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ w' \end{array} \right\}) dx \\ &= \omega^2 \int_0^L \delta w m w dx\end{aligned} \tag{5.43}$$

Une solution possible à l'équation (5.43) qui remplit les conditions aux limites en appui simple s'écrit sous la forme :

$$w(x) = W_n sin(\lambda_n x), \quad \beta(x) = B_n cos(\lambda_n x) \tag{5.44}$$

où, $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ est la $n^{\text{ième}}$ longueur d'onde modale et W_n, B_n sont les amplitudes reliées entre elles par la relation (5.41) qui devient

$$B_n = \frac{\lambda_n^2 D_{12} - A_{55}^D}{\lambda_n^2 D_{11}^E + A_{55}^D} \lambda_n W_n = C_n^D(\lambda_n) \lambda_n W_n \tag{5.45}$$

On constate que le coefficient de proportionnalité entre les deux amplitudes dépend uniquement des conditions aux limites électriques et de la longueur d'onde modale λ_n. C'est pour cela que le problème aux vibrations libres se réduit à un problème à une inconnue W_n. Si l'on considère les équations (5.45) et (5.44) dans la formulation variationnelle (5.43) et en intégrant analytiquement nous obtenons la formule suivante pour la $n^{\text{ième}}$ valeur propre :

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^2}{m} \left\{ \lambda_n^2 [D_{11}^E (C_n^D)^2 - 2 D_{12} C_n^D + D_{22}] + A_{55}^D (C_n^D + 1)^2 \right\} \tag{5.46}$$

Cette expression permet d'évaluer analytiquement les pulsations en CO et CC notées respectivement ω_n^{CO} et ω_n^{CC}.

Cela conduit au calcul analytique du coefficient de couplage électromécanique (EMCC) à partir de (5.46) et en utilisant sa définition donnée dans [64]

$$K^2 = \frac{(\omega_n^{CO})^2 - (\omega_n^{CC})^2}{(\omega_n^{CC})^2} \tag{5.47}$$

où K^2 traduit le rapport entre l'énergie transformée sur l'énergie fournie suivant un mode. En introduisant (5.46) dans (5.47), pour les deux types de conditions aux limites

électriques CC et CO, on obtient la formule suivante définissant l'EMCC pour la poutre sandwich :

$$K^2 = \frac{\lambda_n^2(C_n^D - C_n^E)[D_{11}^E(C_n^D + C_n^E) - 2D_{12}] + [A_{55}^D(C_n^D+1)^2 - A_{55}^E(C_n^E+1)^2]}{\lambda_n^2[D_{11}^E(C_n^E)^2 - 2D_{12}C_n^E + D_{22}] + A_{55}^E(C_n^E+1)^2} \tag{5.48}$$

où C_n^E a la même expression que dans (5.45) mais en remplaçant le terme A_{55}^D par le terme A_{55}^E. On remarque que l'EMCC est indépendant de la masse et que la longueur de la poutre affecte l'EMCC à travers l'expression de λ_n^2.

5.5 Résultats et analyses

Cette section à pour but d'évaluer la formule donnée par (5.48) au moyen de comparaisons avec des résultats obtenus en utilisant le code commercial Abaqus. La formulation analytique est aussi utilisée pour évaluer l'EMCC en cisaillement au moyen d'une analyse paramétrique faisant varier quelques ratios géométriques à savoir les ratios longueur sur épaisseur et épaisseur des faces sur épaisseur du coeur ainsi que des ratios matériaux à savoir le module d'Young des faces sur le module d'Young du coeur.

5.5.1 Validation du modèle à l'aide des éléments finis

On considère ici une poutre sandwich de longueur 110 mm, de largeur 25 mm et d'épaisseur 5 mm. Ces faces sont composées d'aluminium de densité 2790 Kg/m^3, de module d'Young 73 GPa de coefficient de poisson $\nu = 0.3$. Le coeur piézocéramique est un PZT5A de densité 7700 Kg/m^3 at ayant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
&C_{11}^E = C_{22}^E = 99.2\ GPa, \quad C_{33}^E = 86.9\ GPa \\
&C_{13}^E = C_{23}^E = 50.8\ GPa, \quad C_{12}^E = 54.0\ GPa \\
&C_{44}^E = C_{55}^E = 21.1\ GPa, \quad C_{66}^E = 22.6\ GPa \\
&e_{31} = e_{32} = -7.21 C/m^2, \quad e_{33}^E = 15.12 C/m^2 \\
&e_{15} = e_{24} = 12.32\ C/m^2 \\
&\varepsilon_{11}^s = \varepsilon_{22}^s = 1.53e-8\ F/m, \quad \varepsilon_{33}^s = 1.5e-8\ F/m
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Les résultats obtenus analytiquement et ceux obtenus à l'aide de modèles en 3D et 2D en déformations planes en utilisant le code Abaqus standard sont donnés dans le tableau (5.1). On observe que les résultats obtenus par Abaqus en 3D et en déformations planes

sont similaires à ceux obtenus par le modèle analytique.

Solution	Mode	1	2	3	4	5
Analytique (5.48)	f^{CC}(Hz)	882.73	3524	7904	13988	21734
	f^{CO}(Hz)	882.92	3527	7919	14034	21845
	K^2(%)	0.04	0.17	0.38	0.66	1.02
EF (5.47)	f^{CC}(Hz), 2D	881.56	3495	7752	13519	20639
	f^{CO}(Hz), 2D	881.73	3498	7765	13559	20729
	K^2(%), 2D	0.04	0.16	0.35	0.60	0.88
	K^2(%), 3D	0.04	0.16	0.35	0.59	0.88

TAB. 5.1 – Fréquences et EMCC pour les cinq premiers modes. Comparaisons EF et modèle analytique

on peut remarquer ici que les valeurs d'EMCC obtenues sont faibles. En fait si l'on considère les conditions d'équipotentialités pour le cas CO on obtient un EMCC nul dans le cas appui simple présenté ici. Cependant des simulations avec des poutres encastré-libre donnent des valeurs non nul pour l'EMCC.

5.6 Analyse paramétrique

Afin de juger des performances de l'EMCC en mode cisaillement défini par l'équation (5.48), la poutre utilisée précédemment est étudiée analytiquement (MAPLE) en faisant varier les trois paramètres caractéristiques : le ratio longueur de poutre sur épaisseur $R_L = L/h$, le ratio épaisseur des faces sur épaisseur du coeur $R_h = h_e/h_p$, et le rapport des modules d'Young, $R_Y = Y_e/Y_p$. Pour ces différentes variations on à fixé h_p=0.5mm et Y_p=69.5GPa. Les résultats correspondant sont présentés respectivement sur les figures 5.3 et 5.4 pour le premier mode et les figures 5.5 et 5.6 pour le quatrième mode. Ces résultats confirment que l'EMCC est très faible pour la configuration présentée ici. Cependant, il apparait qu'un sandwich court, avec des faces plus rigides que le coeur, et avec une épaisseur de couche centrale similaire à l'épaisseur des faces, donnerait une configuration optimale pour l'EMCC en cisaillement.

On considère à présent une poutre de longueur et d'épaisseur totale telles que celle décrite dans la section précédente (L=110mm, b=25mm, h=5mm). L'EMCC est évalué analytiquement pour les dix premiers modes et pour une épaisseur de coeur piézocéramique variable. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (5.2) et illustrés graphiquement Fig. 5.7. Comme prévu, l'EMCC est plus important pour des sandwichs avec des

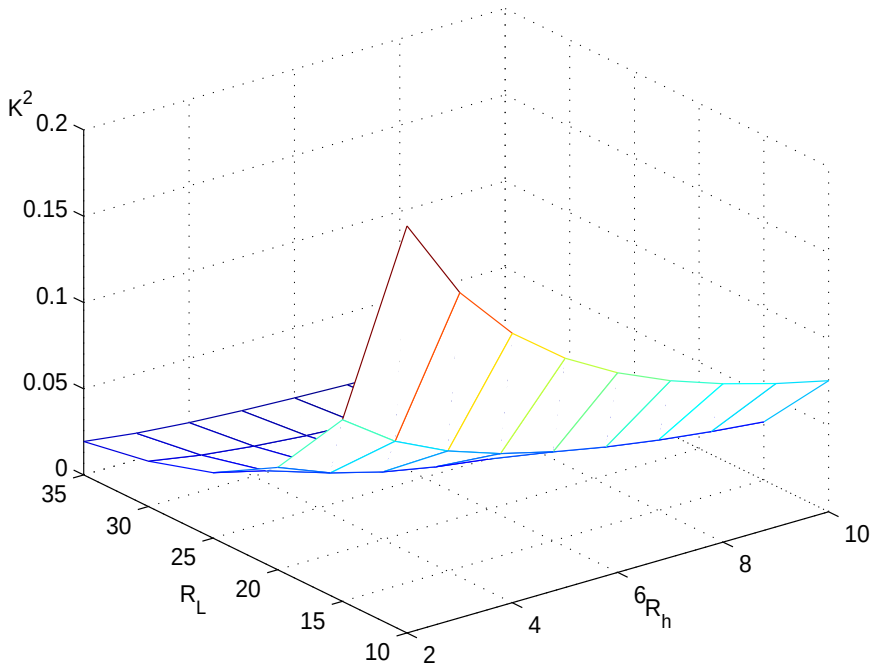


FIG. 5.3 – Variation de l'EMCC pour le premier mode, en fonction de R_l, R_e et E_p=69.5GPa fixé

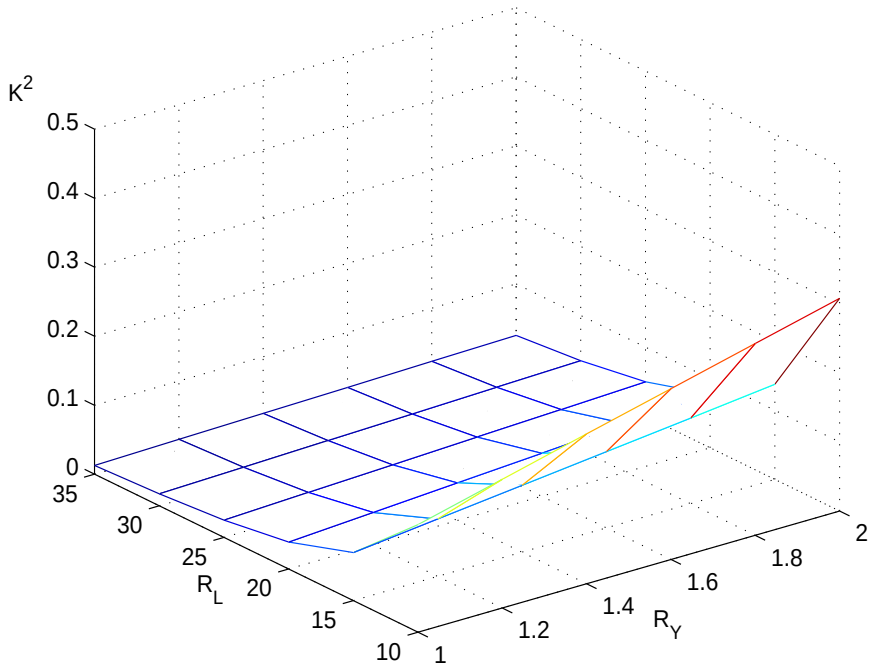


FIG. 5.4 – Variation de l'EMCC pour le premier mode, en fonction de R_l, R_h et h_p=0.5mm fixé

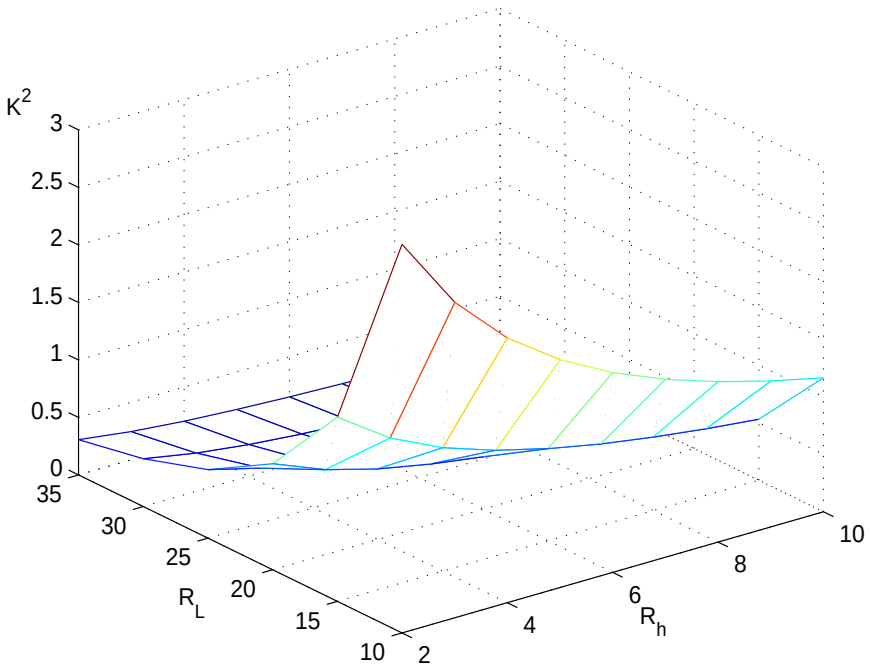


FIG. 5.5 – Variation de l'EMCC pour le quatrieme mode, en fonction de R_l, R_e et E_p=69.5GPa fixé

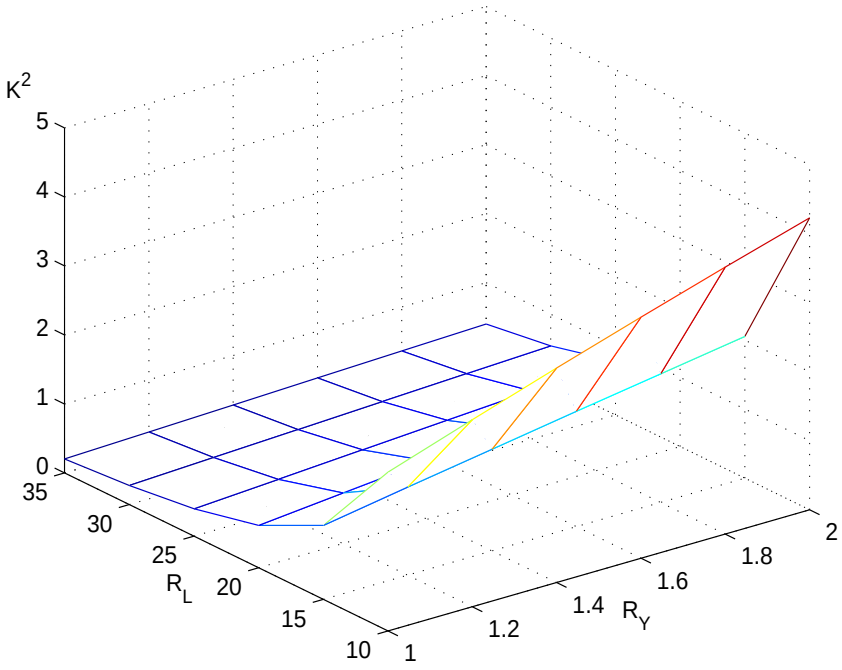


FIG. 5.6 – Variation de l'EMCC pour le quatrième mode, en fonction de R_l, R_h et h_p=0.5mm fixé

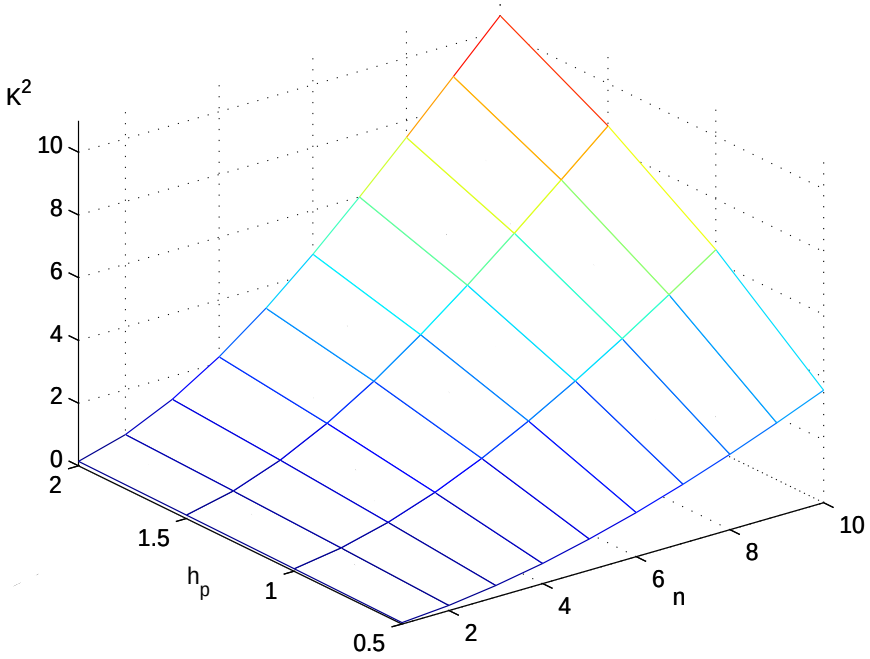


FIG. 5.7 – Variation de l'EMCC pour les n premiers modes en fonction de h_p

coeurs épais et pour les modes d'ordre élevés vu que ces situations sont favorables à la présence de cisaillement. Cependant les résultats obtenus doivent être considérés avec précautions pour les piézocéramiques de longueur supérieur à 25mm. En effet les longueurs des patchs sont limitées à cette longueur (PI Ceramics).

h_p (mm)	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5
0.25	0.02	0.09	0.19	0.34	0.52
0.50	0.04	0.17	0.38	0.66	1.02
1.00	0.08	0.33	0.73	1.27	1.95
1.50	0.12	0.47	1.04	1.81	2.75
2.00	0.15	0.59	1.30	2.25	3.41

TAB. 5.2 – EMCC $K^2(\%)$ pour différentes épaisseurs du coeur

5.7 Conclusions

Une formulation analytique évaluant le coefficient de couplage électromécanique d'une poutre sandwich symétrique a été proposée. Cette dernière est constituée de face élastique

et d'un coeur en piézocéramique agissant en mode de cisaillement. La poutre sandwich est soumises à des conditions aux limites de type appui simple. Le modèle analytique obtenu a été dans un premier temps validé par comparaison à un modèle élément finis 2D en déformations planes et a un modèle EF développé sous Abaqus. Une étude paramétrique s'attachant à étudier l'effet des caractéristiques géométriques et matérielles a été conduite sur les premiers modes. Les résultats obtenus sont conformes à ceux attendus avec cependant des valeurs d'EMCC faible.

Le modèle présenté demeure cependant limité à des structures poutres sandwichs avec un coeur entièrement piézoélectrique et avec des conditions aux limites de type appui simple. Par ailleurs l'effet d'équipotentialité n'a pas été pris en compte lors de l'analyse en CO (circuit ouvert). Toutefois, optimiser la position et la longueur des patchs où prendre en compte des conditions aux limites différentes et numériquement possible.

Néanmoins on peut apporter quelques améliorations au modèle présenté ici en considérant par exemple, un ordre plus élevé pour l'approximation du potentiel électrique (quadratique ou cubique) ou prendre en compte l'effet des électrodes (utilisation de 5.12 au lieu de 5.13). Par ailleurs une configuration plus pratique avec des patchs peut être étudiée au moyen des fonctions d'Heaviside.

Conclusion

L'objectif de ce travail de thèse a été de proposer des formulations analytiques et élément finis pour la modélisation simple du comportement modale des structures sandwich à amortissement actif-passif. La structure étudiée se compose d'un coeur viscoélastique intercalé entre deux couches élastiques sur lesquels on adjoint deux couches piézoélectriques réalisant respectivement les fonctions de capteur et actionneur et pour lesquelles deux lois de contrôle, à savoir la loi de contrôle proportionnel direct et la loi de contrôle en vitesse, ont été appliqué. Afin de répondre au mieux aux différentes problématiques auxquelles nous étions confrontés nous avons développé notre recherche autour de trois axes majeurs :

Après un bref état de l'art concernant les méthodes d'amortissement passives et actives, nous avons développé un modèle analytique de type poutre pour les structures de type sandwichs piézoélectrique/ élastique/ viscoélastique/ élastique/ piézoélectrique. Deux lois de contrôle, proportionnelle direct et en vitesse ont été considérées et différents niveaux d'approximations sont considérés et discutés ainsi que le traitement du problème électrostatique dans le capteur. La prise en compte de conditions d'équipotentialités, afin de modéliser la réalité physique dans le cas où l'on applique des électrodes sur les couches piézoélectriques, a aussi été discutée. Pour l'ensemble des différents modèles obtenus nous avons validé ceux ci par comparaison à des modèles éléments finis obtenus au moyen de code commerciaux lorsque cela était possible. Nous avons par ailleurs observés l'effet des deux types d'amortissements sur les propriétés modales des structures et ce en prenant en compte ou non l'effet des électrodes.

Au chapitre 3, nous avons considéré une extension du modèle analytique et avons développé un élément finis de type coque à 3 noeuds. Sa formulation utilise les hypothèses classiques de calcul des sandwichs et les théories de coques de Kirchhoff et de Mindlin. Ce dernier résulte de l'assemblage des éléments de coques suivant l'épaisseur. L'utilisation des conditions de continuité du champ de déplacement aux interfaces réduit le nombre

de degrés de libertés à 8 en déplacement et 2 degrés électriques qui ont été condensés. Le comportement en poutre de cet élément a été validé en le comparant au modèle analytique développé au chapitre 2. Dans le cas des plaques nous avons donné les propriétés modales obtenues avec les deux lois de contrôles et pour différents coeurs viscoélastiques.

Au chapitre 4, nous avons proposé le développement d'un algorithme numérique pour résoudre de manière précise et directe le problème aux valeurs propres non linéaires auxquelles nous étions confrontés dans le chapitre 3. Cet algorithme utilise les techniques usuelles de la méthode asymptotique numérique (MAN) à savoir l'association des techniques d'homotopie et de perturbation, couplé si besoin aux approximants de Padé pour améliorer le domaine de validité des séries.

Enfin au chapitre 5, nous avons développé un modèle analytique permettant de caractériser le coefficient de couplage électromécanique d'un matériau piézoélectrique se déformant en cisaillement. Ce modèle nous a permis de quantifier la dissipation maximale que l'on pouvait obtenir en remplaçant le coeur viscoélastique par un matériau piézoélectrique sollicité en cisaillement.

Les travaux que nous avons menés ouvrent la voie à de nombreux axes de recherches :

- concernant la modélisation de l'amortissement des structures sandwich hybride il serait intéressant de modéliser non plus des couches piézoélectriques mais des patchs et de pouvoir ainsi à l'aide d'un modèle analytique déterminer la position optimale de ces derniers,

- pour la classe d'élément fini coque développé il serait judicieux de considérer un élément quadrangle qui prend en compte l'effet de membrane et permettrait de gagner en temps de calcul et en précision,

- d'un point de vue algorithme, la méthode de résolution qui a été développé dans ce document peut être efficacement utilisée pour la prise en compte des conditions d'équipotentialité dues à la présence d'électrodes.

- les outils théoriques et numériques développés dans cette thèse peuvent être étendus à la modélisation de l'amortissement dans le cas des vibrations non linéaires.

Annexe A

Caractérisation des matériaux viscoélastiques

On considère ici la viscoélasticité linéaire appliquée aux matériaux homogènes isotropes pour introduire les modèles rhéologiques couramment utilisés ainsi que le modèle de Maxwell généralisé qui est utilisé dans les chapitres 2 et 3 de ce document. Selon le principe de Boltzman, l'état de contrainte ou de déformation d'un corps viscoélastique est fonction de toutes les sollicitations appliquées au matériau. Chaque nouvelle sollicitation contribue de manière indépendante à l'état final (figure(A.1)). De manière usuelle cela im-

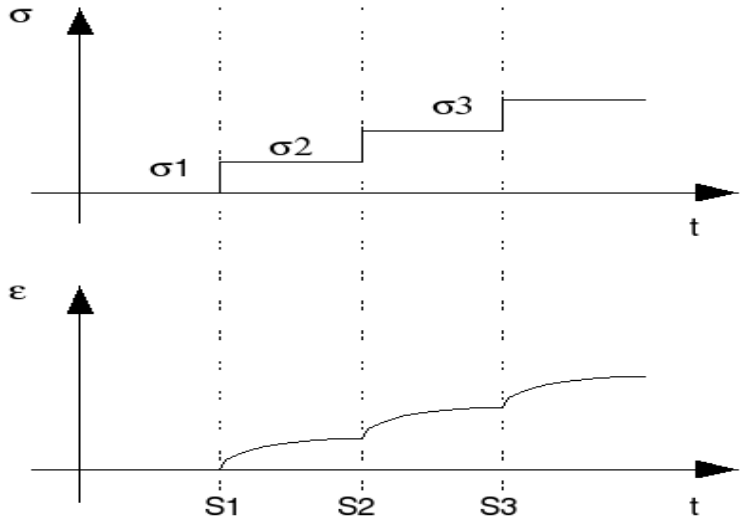


Fig. A.1 – Principe de superposition de Boltzman

plique que le matériau viscoélastique possède une loi de comportement qui est dépendante du temps : la contrainte dépend de la vitesse de déformation ou sous une autre forme la déformation est dépendante de la vitesse de variation de la contrainte. L'hypothèse commune faite pour les matériaux viscoélastiques linéaires est que la contrainte σ à l'instant t est une fonction linéaire de l'historique des déformations ϵ ce qui peut se traduire par l'existence d'une fonction de relaxation h définit telle que

$$\sigma(t) = \int_0^\infty \varepsilon(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{A.1}$$

où τ est la variable d'intégration temporelle. Par utilisation de la transformée de Laplace, l'équation précédente est équivalente à l'existence d'un module complexe H qui n'est autre que la transformée de Laplace de la fonction de relaxation h et tel que

$$\sigma(\omega) = H(\omega)\varepsilon(\omega) \tag{A.2}$$

Résoudre un problème de viscoélasticité revient ici à résoudre un problème d'élasticité linéaire où les propriétés du matériau sont complexes et dépendantes de la fréquence ω. Il s'agit ici du principe d'équivalence élastique/viscoélastique. Pour les matériaux isotropes et homogènes, H est fonction du module Young E^* et du coefficient de Poisson ν^* complexes. Lors de la modélisation des structures sandwich, le coefficient de Poisson est souvent supposé constant et réel. La loi de comportement du matériau viscoélastique isotrope linéaire non vieillissant en sollicitations harmoniques s'écrit ainsi :

$$\sigma(\omega) = (E^R(\omega) + iE^I(\omega))\varepsilon(\omega) \quad (E^R, E^I) \in \Re^2 \tag{A.3}$$

où E^R et E^I représentent respectivement les modules de stockage et les modules de perte. Les composantes de ces modules sont définies directement dans le domaine des fréquences et leur détermination se fait expérimentalement pour chaque matériau. Afin de définir les modules de stockage et de perte, des modèles rhéologiques simples composés de ressort et d'amortisseur ont été établis.

A.1 Modèles rhéologiques de la viscoélasticité linéaire

Pour un corps idéalement élastique, la réversibilité entre contrainte et déformation est parfaite et se fait instantanément (pas de décalage temporel au niveau de la réponse). Ce modèle correspond à une relation de type

$$\sigma = k\varepsilon \tag{A.4}$$

Le matériau se modélise mécaniquement par un ressort vu qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie.
Pour un corps idéalement visqueux, l'énergie est totalement dissipée sous forme de chaleur. Ce modèle correspond à une relation de type

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{A.5}$$

où η est la viscosité. Le matériau se modélise ici classiquement par un amortisseur (piston).

Modèle de Maxwell et Voigt

Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur disposé en série (Figure (A.2)). Il correspond à un comportement de fluage pour lequel la loi de comportement peut s'écrire :

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = k\tau\dot{\varepsilon} \tag{A.6}$$

où τ est le temps de relaxation et k la rigidité du ressort. Le modèle de Voigt est pour sa part composé d'un ressort et d'un amortisseur disposé en parallèle (Figure (A.2)). Il correspond qualitativement à un comportement élastique retardé pour lequel la loi de comportement peut s'écrire :

$$\sigma = k_0\varepsilon + k\tau\dot{\varepsilon} \tag{A.7}$$

où τ est le temps de relaxation et k_0 la rigidité à vide du ressort.

Modèle de Maxwell généralisé

Afin de caractériser finement le comportement d'un matériau viscoélastique et de tenir compte de la dépendance en fréquence température nous allons par la suite utiliser une

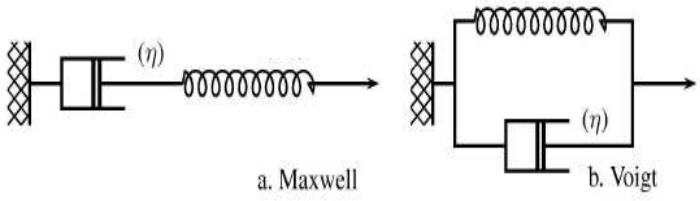


FIG. A.2 – Modèle de Maxwell et Voigt

combinaison en parallèle de modèles de Maxwell et de Voigt (figure A.3). Le module opérationnel de ce modèle s'écrit :

$$H(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{j=1}^{Nmax} \frac{i\omega}{(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j})} \tag{A.8}$$

où les coefficients k_j et η_j sont obtenus comme décrit dans [50] à partir de tests expérimentaux sur un polymère.

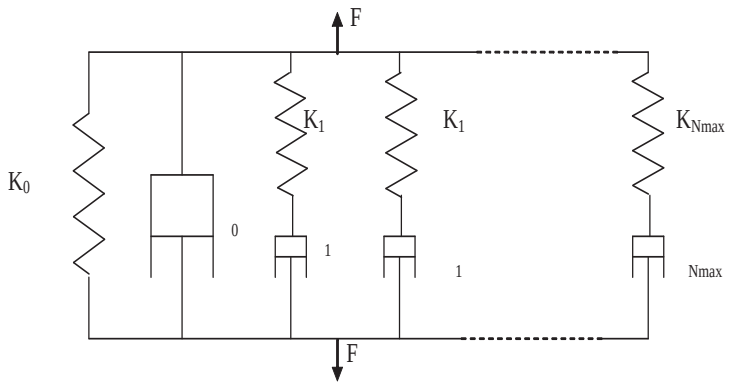


FIG. A.3 – Modèle de Maxwell généralisé

Annexe B

Principales caractéristiques des matériaux piézoélectriques

Certains cristaux naturels (quartz, cristaux à base de bismuth...) ou synthétiques (zirconium titanate de plomb (P.Z.T.), polyfluorure de vinilydène floride (P.V.D.F.)....) ont la particularité de se polariser sous l'effet d'une contrainte mécanique et de produire ainsi une charge électrique qui soit fonction de cette contrainte. C'est ce que l'on nomme l'effet piézoélectrique direct qui permet d'utiliser ces matériaux comme capteurs. L'effet piézoélectrique étant réversible, l'orque l'on soumet ces cristaux à un champ électrique ils se déforment ; c'est l'effet piézoélectrique inverse qui permet de les utiliser comme actionneurs. En fonction de la direction de polarisation P et du champ électrique E, le mode de déformation peut être différent comme on peut le voir figure B

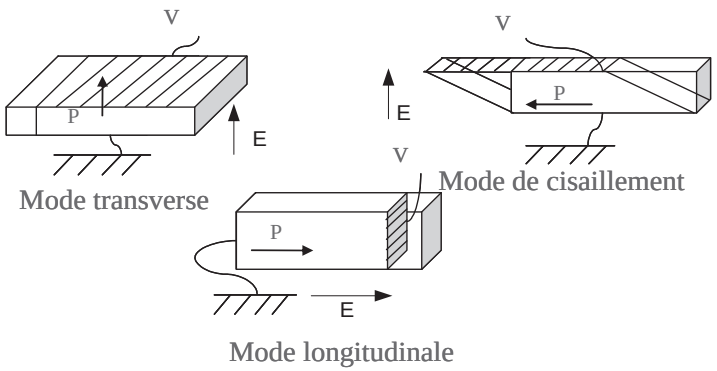


Fig. B.1 – Modes de déformations

La polarisation est une fonction non linéaire du champ électrique, en effet pour une valeur importante du champ on a saturation de la polarisation et le comportement ferroélectrique est décrit alors par un cycle d'hystérésis. Si l'on considère la piézoélectricité linéaire, les équations de l'élasticité linéaire sont couplées aux équations de l'électrostatique par l'intermédiaire des coefficients piézoélectriques :

$$\begin{cases} \sigma = \mathbf{c}\varepsilon - \mathbf{e}^t\mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e}\varepsilon + \epsilon\mathbf{E} \end{cases} \tag{B.1}$$

où σ, ε, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ sont respectivement les tenseurs de contrainte et déformation, le déplacement et le champ électrique. $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$, ϵ sont la matrice d'élasticité, la matrice piézoélectrique et la permittivité diélectrique. Les coefficients de la matrice d'élasticité sont mesurés à champ électrique constant les composants de la matrice de permittivité sont mesurés à déformations constantes.
Le vecteur du champ électrique se dérive du potentiel électrique par :

$$E = -\nabla\phi \tag{B.2}$$

et le vecteur de déplacement électrique $\mathbf{D}$ satisfait le théorème de Gauss (pas de charges électriques libres) dans un matériau isolant :

$$div\mathbf{D} = 0 \tag{B.3}$$

Pour caractériser les matériaux piézoélectriques on utilise un coefficient dit coefficient de couplage électromécanique K. Celui-ci mesure la capacité, suivant un mode de déformation, d'un matériau piézoélectrique de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement.

$$K = \frac{\text{énergie transformée}}{\text{énergie fournie}} \tag{B.4}$$

Si l'on considère des couches piézoélectriques utilisant le mécanisme d'extension et pola-

risées dans la direction de l'épaisseur, la loi de comportement s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\\ D_1\\ D_2\\ D_3\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33}\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{22} & 0\\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\epsilon_1\\ \epsilon_2\\ \epsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\\ E_1\\ E_2\\ E_3\end{array}\right\} \tag{B.5}$$

si les couches sont supposées fines ($\gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$) et que l'on considère des conditions de contraintes planes ($\sigma_3 = 0$) on obtient alors une loi de comportement simplifiée

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\ D_3\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} c^*_{11} & -e^*_{31}\\ e^*_{31} & \epsilon^*_{33}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_1\\ E_3\end{array}\right\} \tag{B.6}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon^*_{33} = \epsilon_{33} + \frac{e^2_{33}}{c_{33}}\\ e^*_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}}{c_{33}} e_{33}\\ c^*_{11} = c_{11} - \frac{c^2_{13}}{c_{33}}\end{array}\right.$$

Annexe C

La Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

De nombreux problèmes issus de la physique se ramènent à la résolution de problèmes non linéaires dépendant d'un paramètre réel Θ. ils peuvent s'écrire sous la forme,

$$R(U, \Theta) = 0. \tag{C.1}$$

où $U \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur inconnu et $R \in \mathbb{R}^n$, est un vecteur rassemblant "n" équations et qui est supposé être une fonction "suffisamment régulière" de ses arguments U et Θ.
L'idée principal de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est de tracer numériquement la branche de solutions de Eq(C.1) en générant non pas une séquence de points mais une séquence de "morceaux" de branches : branche^1, branche^2, branche^3 ... branche^j, branche^{j+1} ... (voir figure C.1) Principe de la MAN : on génère une succession de morceau

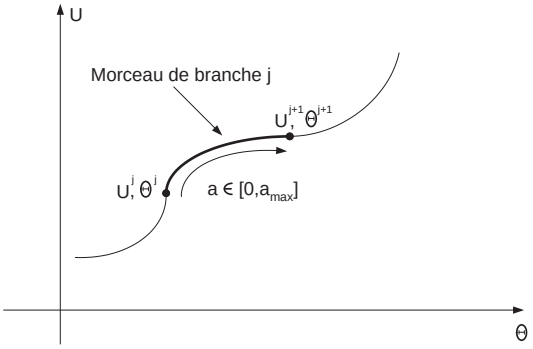


Fig. C.1 – Schéma descriptif de la MAN

de branche, chaque nouveau morceau de branche est déterminé par une représentation en série à partir d'un point de départ.

C.1 Technique de perturbation

Partant d'un point solution connu (U^j, Θ^j), on génère un nouveau morceau de branche en cherchant sa représentation en série entière par rapport à un paramètre de chemin a :

$$\begin{cases} U(a) = U^j + \sum_{p=1}^{\infty} a^p U_p = U^j + aU_1 + a^2U_2 + \dots \\ \\ \Theta(a) = \Theta^j + \sum_{p=1}^{\infty} a^p \Theta_p = \Theta^j + a\Theta_1 + a^2\Theta_2 + \dots \end{cases} \tag{C.2}$$

Cette branche Eq(C.2) doit être solution de l'équation Eq(C.1), ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} 0 &= R(U^j + aU_1 + a^2U_2 + \dots, \Theta^j + a\Theta_1 + a^2\Theta_2 + \dots) \\ &= R(U^j, \Theta^j) + \frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j(aU_1 + a^2U_2 + \dots) + \frac{\partial R}{\partial \Theta}\rfloor_j(a\Theta_1 + a^2\Theta_2 + \dots) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial U^2}\rfloor_j(aU_1 + a^2U_2 + \dots)(aU_1 + a^2U_2 + \dots) + \dots \end{aligned} \tag{C.3}$$

En utilisant le fait que $R(U^j, \Theta^j) = 0$, et en ordonnant les termes suivant les puissances

croissants de a, l'équation précédente se réécrit,

$$\begin{aligned}
0 &= a\left\{\frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j U_1 + \frac{\partial R}{\partial \Theta}\rfloor_j \Theta_1\right\} \\
&= a^2\left\{\frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j U_2 + \frac{\partial R}{\partial \Theta}\rfloor_j \Theta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial U^2}\rfloor_j U_1 U_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial \Theta^2}\rfloor_j \Theta_1^2 + \frac{\partial^2 R}{\partial U \partial \Theta}\rfloor_j \Theta_1 U_1\right\} \\
&+ a^3\left\{\frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j U_3 + \frac{\partial R}{\partial \Theta}\rfloor_j \Theta_3 + \text{termes dépendants de } U_1, U_2, \Theta_1, \Theta_2\right\} \\
&\vdots \\
&+ a^p\left\{\frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j U_p + \frac{\partial R}{\partial \Theta}\rfloor_j \Theta_p + \underbrace{\text{termes dépendants de } U_1 \ldots U_{p-1}, \Theta_1 \ldots \Theta_p}_{F_p^{nl}}\right\} \\
&+ \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ou bien sous forme condensée,

$$R(U(a), \Theta(a)) = aR_1 + a^2 R_2 + \ldots = 0 \tag{C.4}$$

Cette relation devenant être vérifiée pour toute valeur de a, on en déduit une infinité d'équations qui vont permettre de définir successivement les termes de la série Eq(C.2) :

$$R_p = 0 \text{ pour } p \geq 1 \tag{C.5}$$

A chaque ordre p, l'équation $R_p = 0$ est un système linéaire en U_p, Θ_p qui s'écrit sous la forme,

$$\frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j U_p + \frac{\partial R}{\partial \Theta}\rfloor_j \Theta_p = F_p^{nl} \tag{C.6}$$

et où le seconde membre F_p^{nl} ne dépend que des termes aux ordres précédents.

C.2 Définition du paramètre de chemin

En faite, l'équation Eq (C.6) n'est pas bien posée puisque'il y a n équation et $n+1$ inconnus. Comme dans les méthodes prédictions-corrections, il faut une condition complémentaire

à chaque ordre. Cette condition n'est autre que la définition du paramètre de chemin a qui intervient dans Eq(C.2). On va utiliser ici encore la pseudo-Longueur d'arc :

$$a = (U - U^j)U_1 + (\Theta - \Theta^j)\Theta_1 \tag{C.7}$$

qui correspond à la projection de l'incrément sur la direction tangente (U_1, Θ_1). En reportant les séries Eq(C.2) dans Eq(C.7), on obtient la condition supplémentaire cherché à chaque ordre :

$$\begin{cases} \|U_1\|^2 + \Theta_1^2 = 1; \\ \\ U_p U_1 + \Theta_p \Theta_1 = 0 \end{cases} \tag{C.8}$$

En résumé, le calcul de la branche^j demande le calcul de N_{ordre} secondes membres F_p^{nl} et la résolution de N_{ordre} problèmes linéaires Eq(C.6) et Eq(C.8). A la différence des méthodes prédictions-corrections, une seule matrice $\frac{\partial R}{\partial U}\rfloor_j$ doit être calculée et inversée pour résoudre tous les problèmes Eq(C.6). Ceci est très avantageux du point de vue du temps de calcul puisque le traitement d'un second membre est faible devant le traitement d'une matrice jacobienne. Le point crucial dans le calcul des séries de la MAN est le calcul secondes membre F_p^{nl}.

Bibliographie

[1] . Ieee standard on piezoelectricity. 1988.

[2] Abaqus Standard. *Version 5.8.* Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, RI, 1998.

[3] Agnes G.S. and Napolitano K. Active constrained layer viscoelastic damping. *In 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct., Structural Dyn., and Mater. Conf., AIAA, Reston (USA)*, pages 3499–3506, 1993.

[4] Hagood N.W.and Anderson E.H. Simultaneous sensing and actuation using piezoelectric materials. *SPIE Conference on Active and Adaptive Optical Components*, 15 :1540–1543, 1991.

[5] Bailey T. and Hubbard J. . Distributed piezoelectric-polymer active control of a cantilevered beam. *J . of Guidance. Control. and Dynamics*, 8 :605–611, 1985.

[6] Bathe K.J. *Finite element procedures in engineering analysis.* NJ : Prentice-Hall, 1982.

[7] Batoz J.L. and Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis. Coques.* Hermès, 1990.

[8] Batra R.C., Liang X.Q., and Yang J.S. The vibration of a simply supported rectangular elastic plate due to piezoelectric actuators. *International Journal of Solids and Structures*, 33 :1597–1618, 1996.

[9] Baz A. and Ro J. . Finite element modeling and performance of active constrained layer damping. *9th VPI and SU Conf. on Dyn. and Control of Large Struct., Blacksburg (USA)*, pages 345–357, 1993.

[10] Baz A. and Ro J. . Partial treatment of flexible beams with active constrained layer damping. *Recent Developments in Stability, Vibration and Control of Structural Systems, ASME, New York*, AMD-167 :61–80, 1993.

[11] Baz A. and Ro J. . Optimum design and control of active constrained layer damping. *J. Vib. Acoust.*, 117 :135–144, 1995.

[12] Park C.H.and Baz A. . Vibration control of bending modes of plates using active constrained layer damping. *Journal of Sound and Vibration*, 227 :711–734, 1999.

[13] Benjeddou A. and Deu J.F. A two-dimensional closed-form solution for the free-vibrations analysis of piezoelectric sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :1463–1486, 2002.

[14] Benjeddou A. and Ranger J.A. Use of shunted shear-mode piezoceramics for structural vibration passive damping. *Computers and Structures*, 84 :1415–1425.

[15] Benjeddou A., Trindade M.A., and Ohayon R. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, 8(12) :1012–1025, 1997.

[16] Biot M.A. Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. *Phys. Rev.*, 97 :1463–1469, 1955.

[17] Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 50 :183–198, 2000.

[18] Chang S.H., Rogacheva N.N. , and Chou C.C. . Analysis methods for determining electromechanical coupling coefficients of piezoelectric elements. *IEEE Trans. Ultras. Freq. Contr.*, 42 :630–640, 1995.

[19] Chen X., Chen H.L., and Hu Le. Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach. *Journal of Sound and Vibration*, 222(5) :803–812, 1999.

[20] Cochelin B. Méthode asymptotique-numérique pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques, 1994.

[21] Cochelin B., Damil N., and Potier-Ferry M. Asymptotic-Numerical Methods and Padé approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :1187–1213, 1994.

[22] Cochelin B., Damil N., and Potier-Ferry M. *Méthode asymptotique numérique.* Hermès - Lavoisier, 2007.

[23] Crawley E.F. and Anderson E.H. . Detailed models of piezoceramic actuation of beams. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, page 1388, 1989.

[24] Crawley E.F. and de Luis J. . Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 25(10) :1373–1385, 1987.

[25] Cupial P. and Niziol J. Vibration and damping analysis of three-layered composite plate with viscoelastic mid-layer. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1) :99–114, 1995.

[26] Davis C.L. and Lesieutre G.A. An actively-tuned solid-state piezoelectric vibration absorber. *Proceedings of the SPIE-The international society for optical engineering*, 3327 :169–182, 1998.

[27] Daya E.M. and Potier-Ferry M. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems : application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79 :533–541, 2001.

[28] Daya E.M. and Potier-Ferry M. A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11(1) :39–56, 2002.

[29] DiTaranto RA. Theory of vibratory bending of elastic and viscoelastic layered finite-length beams. *Journal of Applied Mechanics*, 32 :881–886, 1965.

[30] Dosch J.J., Inman D.J. , and Garcia E. . A self-sensing actuafor for collocated control. *J. of Intelligent Material Systems and Structures*, 3(1) :166–185, 1992.

[31] Dovstam K. Augmented hooke's law in frequency domain : a three dimensional, material damping formulation. *Int. J. Solids Struct.*, 32 :2835–2852, 1995.

[32] Duigou L., Daya E.M., and Potier-Ferry M. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1323–1335, 2003.

[33] Duigou L., Daya E.M., and Potier-Ferry M. Equivalent stiffness and damping of sandwich piezoelectric beams submitted to active control. *Smart materials and structures*, 15 :623–630, 2006.

[34] Edberg D.L., Bicos A.S., and Fechter J.S. On piezoelectric energy conversion for electronic passive damping enhancement. *Proceedings of Damping San Diego*, 1991.

[35] Elhage-Hussein A., Potier-Ferry M., and Damil N. A numerical continuation method based on padé approximants. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :6981–7001, 2000.

[36] Forward R. and Liu C. . Electronic damping of resonances in gimbal structures. *22nd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 1981.

[37] Galucio A.C., Deü J.F., and Ohayon R. A fractional derivative viscoelastic model for hybrid active/ passive damping treatments in time domain application to sandwich beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16 :33–45, 2005.

[38] Gopinathan S.V., Varandan V.V., and Varandan V.K. A review and critique of theories for piezoelectric laminates. *Smart materials and Structures*, 9 :24–48, 2000.

[39] Hagood N.W., Chung W.H., and von Flotow A. . Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control. *J. of intelligent Materials, Systems, and Structures*, 1 :327–354, 1990.

[40] Hagood N.W. and von Flotow A. . Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *J. of Sound and Vibration*, 146 :243–268, 1991.

[41] Heyliger P. and Brooks S. . Exact solutions for laminated piezoelectric plates in cylindrical bending. *Journal of Applied Mechanics*, 63 :903–910, 1996.

[42] Saravanos D.A.and Heyliger P.R. Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates and shells. *Applied mechanical revue*, 52(10) :305–315, 1999.

[43] Hiramoto K. and Doki H. Optimal sensor/actuator placement for active vibration control using explicit solution of algebraic riccati equation. *Journal of Sound and Vibration*, 229 :1057–1074, 2000.

[44] Inman D.J. Huang S.C. and Austin E.M. Some design considerations for active and passive constrained layer damping treatments. *Smart Mater. Struct.*, 5(3) :301–313, 1996.

[45] Hughes P.C. and Golla D.F. Dynamics of viscoelastic structures - a time domain, finite element formulation. *J. Appl. Mech.*, 52 :897–906, 1985.

[46] Hu Y.C and Huang S.C. The frequency response and damping effect of three-layer thin shell with viscoelastic core. *Computers and structures*, 76 :577–591, 2000.

[47] Johnson C.D., Kienholz D.A., and Rogers L.C. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layer. *Shock and Vibration Bulletin*, 51(1) :71–81, 1981.

[48] Kapuria S., Ahmed A., and Dumir P.C. An efficient coupled zigzag theory for dynamic analysis of piezoelectric composite and sandwich beams with damping. *Journal of sound and Vibration*, 279 :345–371, 2005.

[49] Kerwin E.M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *Journal of the Acoustic Society of America*, 31(7) :952–962, 1959.

[50] Landier J. Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich. Thesis, University of Metz, 1993.

[51] Lee C.K. Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. part i : Governing equations and reciprocal relationships. *Journal of the Acoustical American Society*, 87 :1144–1158, 1990.

[52] Lee E. H. and Liu D. T. Finite strain elastic-plastic theory particulary for plane wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 38, 1967.

[53] Lesieutre G.A. and Bianchini E.B. Time-domain modeling of 3-d continuum viscoelasticity using anelastic displacement fields. *Vibr. Acoust.*, 117, 1994.

[54] Lesieutre G.A. and Gowindswamy K. Finite element modeling of frequency-dependent and temperature-dependent dynamic behavior of viscoelastic material in simple shear. *I. J. of Solids and structures*, 33 :419–432, 1996.

[55] Lesieutre G.A. and Lee U. . A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics. *Smart Mater. Struct.*, (5) :615–627, 1996.

[56] Lesieutre G.A. and Mingori D.L. Finite element modeling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields. *Guidance Control Dynam.*, 13 :1040–1050, 1990.

[57] Liao W.H. and Wang K.W. On the analysis of viscoelastic materials for active constrained layer damping treatments. *J. Sound Vib.*, 3(207) :319–334, 1997.

[58] Liew K.M., He X.Q., and Kitipornchai S. Finite element method for the feedback control of fgm shells in the frequency domain via piezoelectric sensors and actuators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :257–273, 2004.

[59] Ma B.A. and He J.F. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 52 :107–123, 1992.

[60] Maurini C., Pouget J., and dell'Isola F. On a model of layered piezoelectric beams including transverse stress effect. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :4473–4502, 2004.

[61] Mead DJ. and Markus S. The forced vibration of three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 10 :163–175, 1969.

[62] Mitchell J.A. and Reddy J.N. . A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae. . *Int. J. Solids Struct*, 32 :2345–2367, 1995.

[63] Moheimani S.O.R. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on control systems technology*, 11(4) :482–494, 2003.

[64] Naillon M., Coursant R.H. , and Besnier F. . Analyse de structures piézoélectriques par une méthode d'éléments finis. *Acta Electr.*, 25 :341–362, 1983.

[65] Nostrand W.C. and Inman D.J. Finite element model for active constrained layer damping. *SPIE conf. on Active Mater. and Smart Struct.*, 2427 :124–139, 1995.

[66] Plouin A.S. and Balmes E. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. *Int. Modal Analysis Conf., SEM, Bethel (USA)*, pages 1440–1446, 1998.

[67] Plump J.M. and Hubbard Jr. Modeling of an active constrained layer damper. *2th Int. Congress on Acoustics, Toronto (Canada)*, pages D4–1, 1986.

[68] Polit O. and Touratier M. A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses. *Composite Structures*, 58 :121–128, 2002.

[69] Preumont A. *Vibration control of active structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[70] Rao D.K. Frequency and loss factor of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(5) :271–282, 1978.

[71] Heyliger P.R. Saravanos D.A. and Hopkins D.A. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *Int. J. Solids Struct.*, 34 :359–378, 1997.

[72] Shen I.Y. Stability and controllability of euler-bernoulli beams with intelligent constrained layer treatments. *Vib. Acoust.*, 1(118) :70–77, 1996.

[73] Soni M.L. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 55(1) :97–109, 1981.

[74] Tiersten H.F. *Linear piezoelectric plate vibrations.* Plenum Press, 1969.

[75] Trindade M. Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes, 2000.

[76] Lim Y.H. Varadan V.V. and Varadan V.K. . Closed loop finite-element modeling of active/passive damping in structural vibration control. *Journal of Smart Material and Structures*, 227(5) :685–694, 1996.

[77] Veley D.E. and Rao S.S. A comparison of active, passive and hybrid damping treatments in structural design. *Smart Struct. and Mater.*, 2720 :184–195, 1996.

[78] Wang N. M. A rigid-plastic rate-sensitive finite element method for modelling sheet metal forming processes. *Numerical Analysis of Forming Processes*, pages 117–164, 1984.

[79] Wu S.Y. and Bicos A.S. Structural vibration damping experiments using improved piezoelctric shunts. *Proceedings of the SPIE-The international society for optical engineering*, 3045 :40–50, 1997.

[80] Yellin J.M. and Shen I.Y. An analytical model for a passive stand-off layer damping treatment applied to an euler-bernoulli beam. *Smart Struct. Mater.*, 3327 :349–356, 1998.