

THESE

présentée à

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

par M. OULD EYIH Aghdhefna

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT EN GRANDES  
DEFORMATIONS DES MOUSSES : MODELE DE SIMULATION  
NUMERIQUE DE CHARGEMENT D'UN SIEGE PAR UN MANNEQUIN

Soutenu le 20 Octobre 1993 devant la commission d'Examen

Jury M.M.	P. VAN EFFENTERRE	Président
	G. LALLEMENT	Rapporteur
	D. LE HOUEDDEC	Rapporteur
	L. JEZEQUEL	Examineur
	J.P. LAINE	Examineur
	M. PAJON	Examineur



THESE



présentée à

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

par M. OULD EYIH Aghdhefna

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT EN GRANDES  
DEFORMATIONS DES MOUSSES : MODELE DE SIMULATION  
NUMERIQUE DE CHARGEMENT D'UN SIEGE PAR UN MANNEQUIN

Soutenue le 20 Octobre 1993 devant la commission d'Examen

Jury M.M.	P. VAN EFFENTERRE	Président
	G. LALLEMENT	Rapporteur
	D. LE HOUEDÉC	Rapporteur
	L. JEZEQUEL	Examineur
	J.P. LAINE	Examineur
	M. PAJON	Examineur

**ECOLE CENTRALE DE LYON**

**LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES**

A. du 30.03.82 Art. 21 et A. du 23.11.88

Directeur : Jacques BORDET  
 Directeur Adjoint : Etienne PASCAUD  
 Directeur des Etudes : Jean ROZINOER  
 Directeur Administration de la Recherche : Francis LEBOEUF

DEPARTEMENT	NOM-PRENOM	FONCTION	
ACOUSTIQUE	COMTE-BELLOT Geneviève JUVE Daniel	PROFESSEUR ---	
	GALLAND Marie-Annick ROGER Michel	MAITRE DE CONFERENCES ---	
	BLANC-BENON Philippe SUNYACH Michel	CHARGE DE RECHERCHE CNRS PORFESSEUR IUT LYON I	
ELECTRONIQUE	BLANCHET Robert LE HELLEY Michel	PROFESSEUR ---	
	HELLOUIN Yves	MAITRE DE CONFERENCES	
	VIKTOROVITCH Pierre	DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS	
	HOLLINGER Guy	---	
	GENDRY Michel	CHARGE DE RECHERCHE CNRS	
	KRAWCZYK Stanislas TARDY Jacques	---	
ELECTROTECHNIQUE	AURIOL Philippe NICOLAS Alain	PROFESSEUR ---	
	BEROUAL Abderahman ROJAT Gérard	MAITRE DE CONFERENCES ---	
MACHINES THERMIQUES	ARQUES Philippe BRUN Maurice CHAMPOUSSIN Jean-Claude	PROFESSEUR --- ---	
	MATERIAUX MECANIQUE PHYSIQUE	GUIRALDENQ Pierre TREHEUX Daniel VANNES Bernard VINCENT Léo	PROFESSEUR --- --- ---
		BLANC-BENON Jean BRUGIRARD Jean	PROFESSEUR LYON I ---
FAYEULLE Serge JUVE Denyse		CHARGE DE RECHERCHE CNRS INGENIEUR D'ETUDES	

<p>MATHEMATIQUES INFORMATIQUE SYSTEMES</p>	<p>DAVID Bertrand MARION Martine MOUSSAOUI Mohand Arezki MAITRE Jean-François THOMAS Gérard</p> <p>MUSY François ROZINOER Jean</p>	<p>- 2 -</p> <p>PROFESSEUR --- --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES ---</p>
<p>MECANIQUE DES FLUIDES</p>	<p>MATHIEU Jean ALCARAZ Emilio JEANDEL Denis LEBOEUF Francis SCOTT Jean</p> <p>BATAILLE Jean GAY Bernard GENCE Jean-Noël LANCE Michel</p> <p>BEN HADID Hamda BUFFAT Marc HAMADICHE Mahmoud</p> <p>MOREL Robert</p> <p>CAMBON Claude</p> <p>BERTOGLIO Jean-Pierre ESCODIE Dany FERRAND Pascal HENRY Daniel</p>	<p>PROFESSEUR EMERITE PROFESSEUR --- --- ---</p> <p>PROFESSEUR LYON I --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES LYON I --- ---</p> <p>PROFESSEUR INSA</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS --- --- --- ---</p>
<p>MECANIQUE DES SOLIDES</p>	<p>CAMBOU Bernard JEZEQUEL Louis SIDOROFF François</p> <p>SURRY Claude</p>	<p>PROFESSEUR --- ---</p> <p>PROFESSEUR ENISE</p>
<p>PHYSICOCHIMIE DES INTERFACES</p>	<p>CLECHET Paul JOSEPH Jacques MARTELET Claude MARTIN Jean-René PORTE Louis</p> <p>ROBACH Yves STREMSDOERFER Guy</p> <p>JAFFREZIC Nicole</p> <p>SOUTEYRAND Elyane</p>	<p>PROFESSEUR --- --- --- ---</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES ---</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS</p>

<p>PHOTACATALYSE</p>	<p>PICHAT Pierre HERRMANN Jean-Marie</p>	<p>- 3 - DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ---</p>
<p>TECHNOLOGIE DES SURFACES</p>	<p>GEORGES Jean-Marie SABOT Jean MARTIN Jean-Michel</p> <p>MATHIA Thomas KAPSA Philippe</p> <p>LOUBET Jean-Luc</p> <p>LE BOSSE Jean-Claude</p> <p>LOPEZ Jacques</p> <p>ROUSSEAU Jacques</p>	<p>PROFESSEUR --- ---</p> <p>DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS ---</p> <p>CHARGE DE RECHERCHE CNRS</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES INSA</p> <p>MAITRE DE CONFERENCES UCB</p> <p>PROFESSEUR ENISE</p>

## Remerciements

*La genèse d'un ouvrage comporte en général deux phases: une lente maturation, suivie d'une réalisation accélérée. Le texte qui suit n'échappe malheureusement pas à la deuxième phase de cette règle.*

*Sans l'accueil du Professeur JEZEQUEL, au sein de son laboratoire, ce début de carrière se serait sans doute orienté très différemment, pour cela je le remercie.*

*Monsieur VAN EFFENBERG, directeur du département Recherche et développement du Groupe Bertrand Faure Automobile, a accepté de présider mon jury. Qu'il soit remercié pour l'intérêt et les conseils qu'ils m'a toujours accordés.*

*Les professeurs LE HOUËDEC et LALLEMONT ont accepté la tâche de rapporteur et ce malgré leur importante charge de travail. Qu'ils sachent combien j'ai été sensible à ce geste.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur LAINE pour son assistance et l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail durant mon séjour au Laboratoire de Mécanique des Solides.*

*J'adresse mes remerciements à PAJON, ingénieur au Groupe Bertrand Faure Automobile pour sa collaboration.*

*Mes sincères remerciements à Messieurs MAGNUS et GROSS pour leur assistance technique et amicale.*

*Je remercie enfin tous les membres de l'équipe Dynamique des Structures, thésards - trop nombreux pour tous être cités-, chercheurs et permanents pour l'aide qu'ils m'ont accordée à un moment ou à un autre.*

## *Résumé*

L'étude du confort d'un passager nécessite la modélisation du siège. Sa structure est très complexe et se compose de divers éléments et différents matériaux: ressorts, câbles, poutres, mousse polyuréthane, toiles, ...

La modélisation du comportement des mousses est nécessaire pour la construction du modèle global du siège: ce problème est ramené à l'identification d'une fonction densité d'énergie de déformation,  $W$ .

Trois approches sont examinées pour donner une expression analytique de la fonction  $W$ :

- Approche micromécanique: à partir d'hypothèses sur la microstructure du matériau, sur l'élasticité de ses constituants et sur une loi statistique de répartition des molécules, on cherche une explication physique des phénomènes observés.
- Approche minimécanique: basée sur la notion de volume représentatif, permet d'exprimer les paramètres de la fonction  $W$  à partir des caractéristiques de l'élément de base: type de cellule, morphologie, densité, propriétés mécaniques du matériau.
- Approche macromécanique: on cherche à identifier une forme donnée - à priori - de la fonction  $W$  à partir des réponses du matériau à un certain nombre de sollicitations homogènes sans se préoccuper d'une quelconque explication physique des paramètres.

Une étude complète sur les matériaux hyperélastiques nous a permis d'identifier la mousse polyuréthane comme un matériau purement compressible de HILL. La comparaison des résultats numériques du modèle global et des essais expérimentaux pour le point H avec un mannequin 95% est très satisfaisante.

La contribution de l'air dans la rigidité dynamique de la mousse a été analysée. Un modèle rhéologique à 1 d.d.l. est identifié pour le comportement dynamique, autour d'une position d'équilibre statique, d'un échantillon de la mousse.

## *Abstract*

The study of the passenger's comfort requires the modelisation of the seat. It's structure is very complex and is made of different materials and elements: springs, cables, beams, polyurethane foam, ...

The foam behaviour modelisation is required to build a global model of the seat: this problem comes down to identify a deformation energy density function,  $W$ .

Three approaches are examined to give an analytical expression of the  $W$  function:

- Micromecanic: from microstructural hypothesis of material, on the elasticity of its constituents and from a statistical law governing the repartition of the molecules, we search a physical explanation of the observed phenomenon.

- Minimecanic: the starting point is the notion of representative volume. It allows us to express the parameters of the  $W$  function from the basic element characteristics: cell, morphology, density and mechanical properties of the material.

- Macromecanic: we try to identify a given form - a priori - of the function, from a certain number of homogeneous deformations without taking into account a physical explanation of the parameters.

A complete study of the hyperelastic materials allowed us to identify the polyurethane foam as a purely compressible HILL material.

We find good agreement between the numerical results of the global and the experimental tests of the H point made with 95% mannequin.

The contribution of the gas in the dynamical stiffness of the foam was analysed. A linear model with 1 d.o.f. is built to study the dynamical behaviour, around an equilibrium position, of a foam sample.



## Table des matières

Introduction générale	19
-----------------------	----

*Première partie : Approches mécaniques pour déterminer les densités d'énergie de déformation pour les matériaux hyperélastiques*

### *Chapitre 0*

## *Préliminaires*

I Préliminaires géométriques	26
I.1 Notions de configurations et de déformation	26
I.2 Mesures de déformations, tenseurs des déformations	26
II Notions de contraintes, équations d'équilibre	28
II.1 Notions de contraintes	28
II.2 Equations d'équilibre	29
III Lois de comportement	30
IV Matériaux élastiques, matériaux hyperélastiques	31

### *Chapitre I*

## *Micromécanique - Approche statistique*

I Introduction	36
----------------	----

II Distribution gaussienne	37
II.1 Etude d'une chaîne isolée	37
II.2 Etude d'un réseau de chaînes	39
II.3 Conclusion	42
III Distribution non-gaussienne : Distribution de Langevin	43
III.1 Etude d'une chaîne isolée	43
III.2 Etude d'un réseau non-gaussien	
III.2.1 Modèle 3-chaînes	44
III.2.2 Modèle 8-chaînes	45
III.2.3 Modèle global	46
III.3 Conclusion	48
IV Conclusion	50

## *Chapitre II*

### *Macromécanique - Approche phénoménologique*

I Hypothèses et inégalités sur la densité d'énergie	
I.1 Hypothèses sur la forme mathématique de la densité d'énergie	53
I.2 Inégalités constitutives	54
II Relations entre les fonctions de réponse et les coefficients de Lamé	
III Matériaux hyperélastiques incompressible	
III.1 Corrélation avec les courbes expérimentales contraintes-déformations	58
III.1.1 Principe	58
III.1.2 Détermination expérimentale des paramètres de la densité d'énergie	60
III.2 Détermination de la densité d'énergie à partir des données expérimentales	61
III.3 Remarques sur le manque de données pour déterminer une densité ...	63
III.4 Quelques densités d'énergie	64
III.4.1 Matériau Néo-Hookien	64
III.4.2 Densité de Varga	65
III.4.3 Densité de Mooney-Rivlin	65
III.4.4 Densité de Haines-Wilson	66
III.4.5 Densité de Hart-Smith	66
III.4.6 Densité d'Alexander	66
III.4.7 Densité d'Ogden	67
III.4.8 Densité d'Ogden non-séparable	69
III.4.9 Matériaux à paramètres durcissant de Knowles-Sternberg	69

III.4.10 Densité de Fung pour les tissus biologiques	70
<b>IV Matériaux hyperélastiques compressibles</b>	
IV.1 Détermination de la densité d'énergie à partir d'un modèle ...	71
IV.1.1 Addition d'un terme ne dépendant que de la variation de volume	72
IV.1.2 Décomposition en partie isochore et dilatationnelle	73
IV.2 Détermination de la densité d'énergie par résolution d'une équation différentielle avec second membre empirique	74
IV.3 Quelques densités d'énergie	
IV.3.1 Matériau Néo-Hookien compressible	75
IV.3.2 Densité de St-Venant- Kirchhoff	75
IV.3.3 Densités de Ciarlet-Geymonat	75
IV.3.4 Densité d'Antmann	76
IV.3.5 Densité de Fong-Penn	76
IV.3.6 Densité de Peng-Landel	77
IV.3.7 Densité de Flory-Tatara	77
IV.3.8 Densité d'Ogden avec addition d'un terme ne dépendant que de J	77
IV.3.9 Densité de Knowles-Sternberg	78
IV.3.10 Densité de Swanson	78
IV.3.11 Matériau de Levinson-Burgen	80
<b>V Conclusion</b>	83

### *Chapitre III*

## *Minimécanique - Matériaux cellulaires*

<b>I- Matériaux cellulaires</b>	
I.1 Introduction	85
I.2 Structure des matériaux cellulaires	86
I.3 Mousses polyuréthannes	87
<b>II Elasticité linéaire</b>	
II.1 Récapitulatif des travaux antérieurs	91
II.2 Elasticité linéaire des nids d'abeille	93
II.2.1 Analyse de Gibson et al.	93
II.2.2 Analyse de Warren et al.	97
II.3 Elasticité linéaire des mousses	106
II.4 Conclusion	112
<b>III - Elasticité non-linéaire</b>	

III.1 Introduction	114
III.2 Elasticité non-linéaire des nids d'abeille	114
III.3 Elasticité non-linéaire des mousses	126
III.4 Conclusion	127
IV conclusion	128

## *Deuxième partie : Modélisation du siège*

### *Chapitre IV*

## *Etude de la suspension mousse*

I Essai de compression simple de la mousse	132
II Les matériaux hyperélastiques dans ANSYS	
II.1 Matériaux de Mooney-Rivlin	134
II.2 Matériaux de Blatz et Kô	141
II.3 Matériaux compressibles d'Ogden	150
II.4 Poinçonnement d'un bloc de mousse par un cylindre	151
III Les matériaux hyperélastiques dans ABAQUS	
III.1 Matériaux compressibles de HILL	154
III.2 Chargement par un mannequin sur le siège	156
IV Conclusion	158

### *Chapitre V*

## *Comportement viscoélastique linéaire des mousses modèle rhéologique*

I Contribution du fluide dans la rigidité dynamique de la mousse	
II Etude d'un modèle rhéologique de la mousse	
II.1 Excitation force harmonique	168
II.2 Excitation force aléatoire	174
III Conclusion	176

## *Chapitre VI*

### *Etude de la suspension métallique*

I Méthodologie de modélisation de la suspension métallique	
II Structure réelle de la suspension métallique	
II.1 Détermination du niveau de modélisation	180
II.2 Influence de la prétension longitudinale	181
III Modélisation simplifiée	
III.1 Expressions analytiques des rigidités	183
III.2 Paramètres du modèle équivalent	185
III.3 Influence de la rigidité en flexion	187
IV Conclusion	188
Conclusion générale	189
Bibliographies	193
Annexes	197



# INTRODUCTION GENERALE

Le siège d'automobile révèle toute son importance en tant qu'interface entre l'individu et son véhicule. Il est devenu aujourd'hui l'un des équipements qui participe plus que par le passé à l'image des constructeurs et à la décision d'achat du consommateur final.

Sur le plan technique, le siège est un produit complexe qui se compose :

- d'une structure rigide;
- d'éléments de soutien (ressorts ou mousse);
- de mécanismes de réglage (mécaniques ou électriques);
- de sellerie (les housses de cuir, les housses en tissus cousus ou soudés, injectés de mousse ou préformés).

Chacun de ces composants est l'objet d'exigences nouvelles en matière de résistance, de sécurité, de confort et d'esthétique.

A des cahiers de charges qui évoluent avec les exigences du client final, correspondent des produits plus sophistiqués et plus chers.

Le siège d'automobile doit tout d'abord donner une impression de confort à l'accueil par son caractère moelleux et son esthétique. Sur route, il doit offrir un bon comportement filtrant ainsi qu'un maintien latéral en virages. Cette impression de confort doit subsister lors de longs parcours grâce à un bon maintien du dos.

Offrir un confort maximum au conducteur n'est pas aisé. En effet le siège est un modèle unique devant assurer une posture correcte à toute une population présentant des caractéristiques anthropométriques très différentes.

Pour répondre à toutes ces contraintes, il faut prendre en compte la diversité de comportement des éléments qui constituent le siège.

Le rôle de l'équipementier est de gérer au mieux cette combinaison de matériaux pour obtenir le meilleur compromis entre confort, contraintes d'industrialisation, normes de sécurité, qualité et coût de fabrication. Pour cela, il dispose d'un savoir-faire et de l'expérience acquise.

Les différents éléments du siège sont analysés et, selon leur contribution à la déformation statique du siège, sont introduits à différents niveaux dans la modélisation du siège:

- La structure rigide, étant indéformable dans l'application souhaitée, n'est introduite dans le modèle qu'au niveau des conditions aux limites.
- Les mécanismes de réglages permettent des déplacements de corps rigide (translation - rotation) du dossier par rapport à l'assise ou du siège par rapport au châssis pour une posture donnée. Ils sont considérés comme des paramètres géométriques du siège.

- La rigidité de la sellerie sera prise en compte dès lors qu'on procédera au recalage du modèle global.

- Enfin les éléments de soutien (ressorts, mousse) sont prépondérants dans la déformabilité statique du siège.

La réponse de la mousse à une déformation cyclique - à une vitesse donnée - présente une hystérèse qui se stabilise au bout du cinquième cycle.

La courbe de charge présente une rupture de pente suivie d'un palier et d'une densification.

Ce type de comportement est caractéristique des matériaux hyperélastiques.

La première partie est consacrée à la recherche d'une loi de comportement des matériaux hyperélastiques qui est décrite par une fonction densité d'énergie de déformation.

Le chapitre 0 rappelle les définitions des tenseurs et les relations nécessaires pour les chapitres suivants.

Trois approches micromécanique, macromécanique et minimécanique sont traitées pour identifier la fonction densité d'énergie,  $W$ .

Dans le premier chapitre nous montrons qu'à partir d'hypothèses sur, l'arrangement et la distribution des atomes dans des matériaux macromoléculaires comme les polymères, et sur la déformation à l'échelle microscopique on arrive à des lois qui traduisent les grandeurs macroscopiques (effort - déplacement).

L'approche macroscopique - approche phénoménologique -, très souvent utilisée dans la mécanique, est abordée dans le deuxième chapitre. On cherche à partir des réponses du matériau à un certain nombre de sollicitations homogènes à identifier une forme donnée - a priori - de la fonction  $W$  sans se préoccuper d'une quelconque signification physique des paramètres. Des hypothèses empiriques sur ces paramètres aident dans leur choix parmi les solutions possibles pour traduire des réponses raisonnables à d'autres types de sollicitations.

Une approche minimécanique - basée sur la notion d'élément volume représentatif reproduisant périodiquement le matériau- permet dans le troisième chapitre de construire cette fonction  $W$  à partir des caractéristiques de l'élément de base (type de cellule, morphologie, densité, propriétés mécaniques du matériau).

Cette approche permet d'expliquer des aspects macroscopiques des réponses du matériau à partir de la structure de la cellule de base.

La deuxième partie porte sur l'étude du comportement des éléments de soutien.

Ce type de siège est dit à "suspension mixte" par opposition au type de siège où les ressorts sont remplacés par une plaque rigide.

A l'issue de chacun des deux chapitres 4 et 6 on obtient un modèle traduisant la déformabilité de la suspension étudiée en fonction d'un certain nombre de paramètres relatifs à la géométrie et aux propriétés mécaniques de la suspension.

L'assemblage de ces deux modèles est facilité par la connaissance des conditions aux interfaces et les types de sollicitations envisagées.

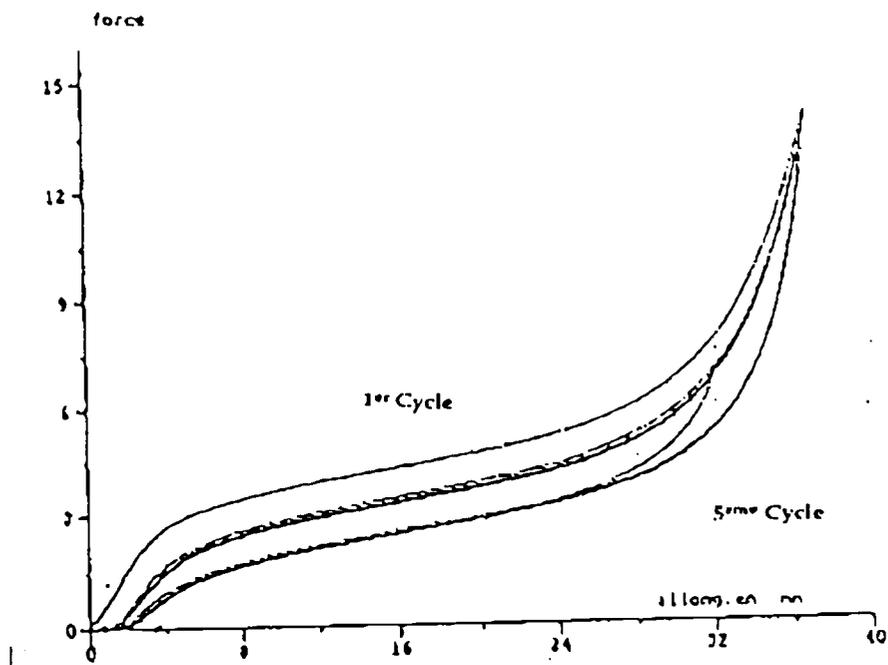
Le chapitre 4 est consacré à la modélisation de la suspension mousse. Les densités d'énergie disponibles dans les codes de calcul des structures ne sont pas souvent appropriées pour la modélisation de la mousse étudiée et la construction du modèle s'avère difficile. L'identification d'une densité d'énergie de Hill - disponible dans le code éléments finis ABAQUS - a permis la simulation numérique de l'essai de chargement d'un mannequin sur la suspension mousse.

Le chapitre 5 traite d'une modélisation simplifiée du comportement viscoélastique des mousses. Des résultats expérimentaux permettent d'identifier un modèle rhéologique à 1 d.d.l qui traduit le comportement dynamique linéaire d'une mousse à cellules ouvertes autour d'une position d'équilibre statique précontrainte.

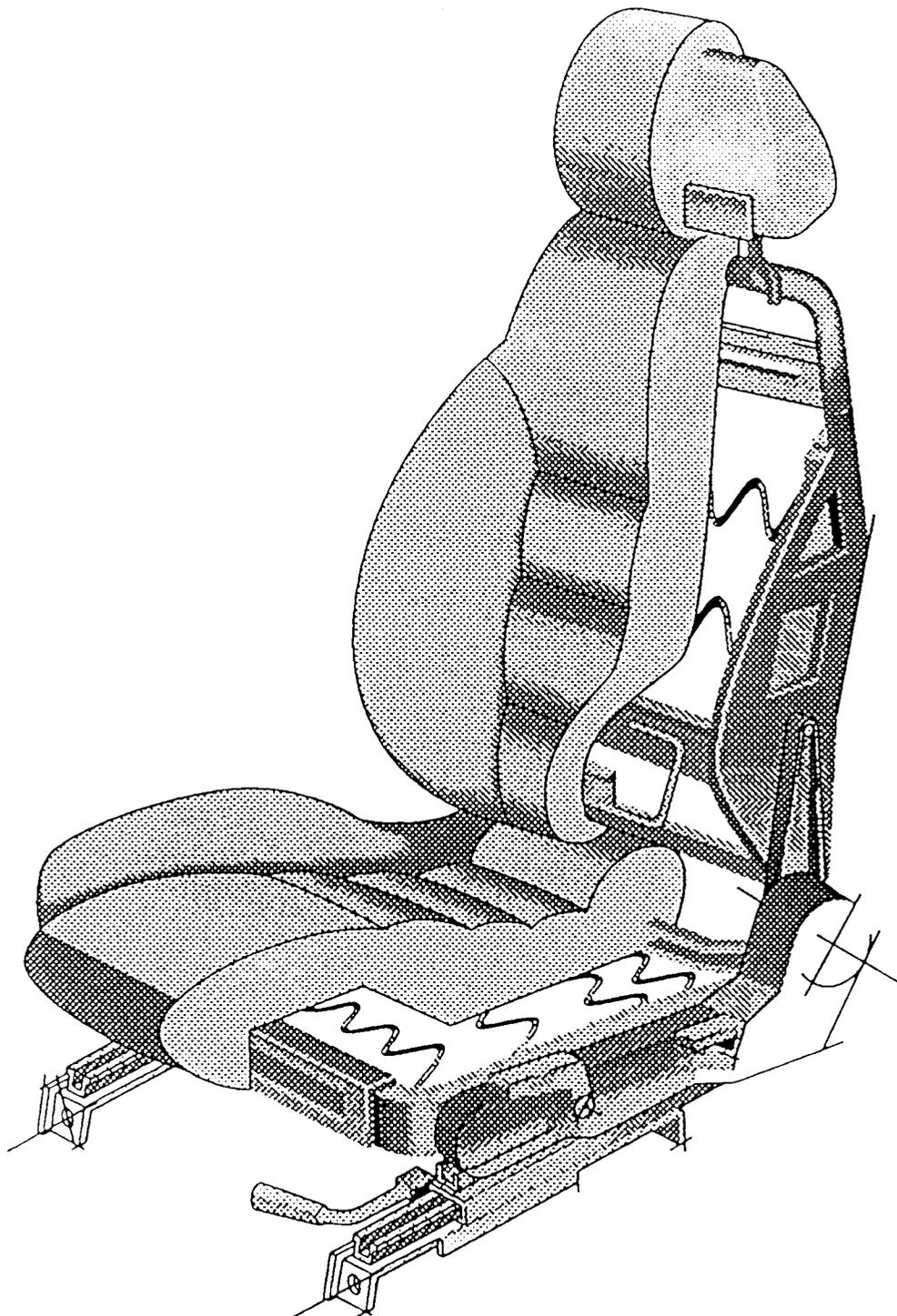
Dans le chapitre 6, nous montrons qu'à partir d'une modélisation géométrique simple (poutre droite) et avec des caractéristiques globales équivalentes à celles de la structure réelle, on obtient un modèle équivalent et simple pour la suspension métallique.

Ces caractéristiques globales peuvent être obtenues par un calcul type R.D.M., ou éléments finis, ou par des expériences simples.

Une méthodologie générale est proposée pour l'étude de ce type de structure en vue de la constitution d'une base de données.



Chargement cyclique de traction-compression sur une mousse polyuréthane



## *Première partie*

*Approches mécaniques pour déterminer les densités d'énergie de déformation des matériaux hyperélastiques*

*'Mis en face de la réalité d'un milieu poreux, l'esprit peut s'effrayer d'abord de la tâche à entreprendre.'*

*Mathéron.*



*Sommaire*

I Préliminaires géométriques

I.1 Notions de configurations et de déformation

I.2 Mesures de déformations, tenseurs des déformations

II Notions de contraintes, équations d'équilibre

II.1 Notions de contraintes

II.2 Equations d'équilibre

III Lois de comportement

IV Matériaux élastiques, matériaux hyperélastiques

# I PRELIMINAIRES GEOMETRIQUES

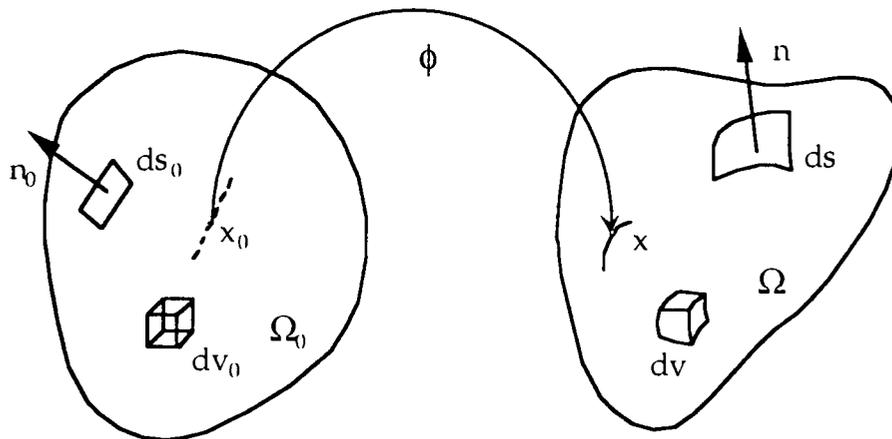
Dans ce chapitre nous allons préciser les notations et les définitions des grandeurs nécessaires pour la suite de l'exposé . Pour plus de développements de ces grandeurs le lecteur pourra consulter l'abondante littérature sur ce sujet rappelé en bibliographie.

## I.1 Notions de configurations et de déformation

Soit  $\Omega_0$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^3$  matérialisant le volume occupé par un solide "non déformé " est appelé configuration de référence. Nous notons  $x_0$  un point de  $\Omega_0$  de composante  $x_i$  dans la base canonique  $(e_i)$  de  $\mathbb{R}^3$ , et nous appelons déformation de la configuration de référence une application  $\phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , suffisamment régulière, injective, et préservant l'orientation, c'est à dire  $\det(\nabla\phi(x_0)) > 0$  pour tout  $x_0$  de  $\Omega_0$ . Le tenseur  $F = \nabla\phi(x_0)$  est appelé gradient de la déformation.

Etant donné une configuration de référence  $\Omega_0$  et une déformation  $\phi$ , l'ensemble  $\Omega = \phi(\Omega_0)$  est appelé configuration déformée.

Il ne faut pas confondre l'application  $\phi$  qui caractérise la déformation d'une particule d'un solide avec les divers tenseurs mesurant la déformation.

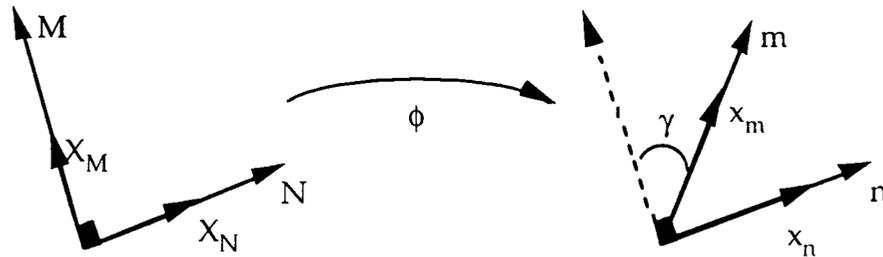


Configuration de référence et configuration déformée

## I.2 Mesures de déformations, tenseurs de déformation

Le tenseur  $F$  décrit le mouvement local du solide. Pour définir sa déformation, c'est à dire ses changements de forme, il faut éliminer sa rotation. On peut donc:

- \* soit définir directement les déformations,
- \*\* soit utiliser une décomposition permettant d'isoler la rotation en bloc du solide de la déformation pure.



- \* Pour caractériser les changements de forme, il faut caractériser les variations de longueur et les variations d'angle, soit, en fait, les variations de produit scalaire.

La variation du produit scalaire s'exprime par :

$$x_n \cdot x_m - X_N \cdot X_M = 2X_N \cdot E \cdot X_M$$

avec :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad ; \quad C = F^t F$$

**E**: tenseur des déformations de Green-St Venant ou Green-Lagrange, mesure les déformations sur la configuration de référence.

**C** : tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite. C'est un tenseur symétrique qui joue un rôle important en théorie de l'élasticité.

On peut également définir le tenseur de Cauchy-Green à gauche  $B = F F^t$ , symétrique et qui est également essentiel dans l'écriture des lois de comportement.

- \*\* Le tenseur **F** peut toujours être décomposé de manière unique sous la forme :

$$F = RU = VR$$

où:

**R** est un tenseur orthogonal ( $R \in O^+$ ),

**U** ( $C=U^2$ ) est le tenseur des déformations pures à droite,

**V** ( $B=V^2$ ) est le tenseur des déformations pures à gauche.

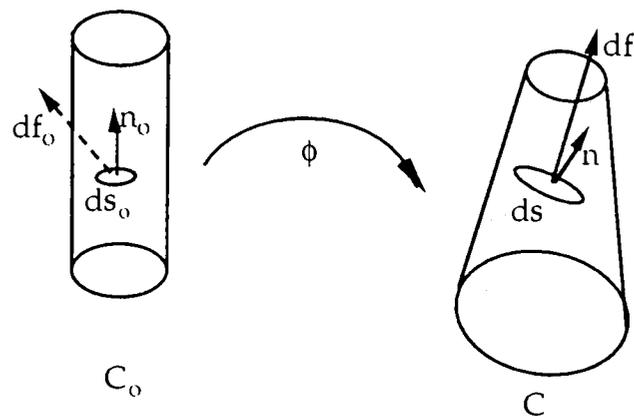
Plus généralement Hill a proposé de définir des familles de mesures de déformations en posant :

$$e_p(i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_i^p - 1) & p \neq 0 \\ \ln \lambda_i & p = 0 \end{cases}$$

Les  $\lambda_{i=1,2,3}$  sont composantes principales du tenseur gradient des déformations **F**.

## II NOTIONS DE CONTRAINTES, EQUATIONS D'EQUILIBRE

### II.1 Notions de contraintes



Le postulat fondamental de la mécanique des milieux continus (ou postulat de Cauchy) stipule la linéarité de la dépendance du vecteur des contraintes de Cauchy en la variable  $n$  (normale extérieure sur la configuration déformée).

La densité surfacique de charge  $df$  dans la configuration déformée est mesurée par  $T$  tel que:

$$df = T n ds.$$

$T$  est le tenseur des contraintes de Cauchy.

La densité de charge  $df$  dans la configuration déformée ramenée à l'élément d'aire nominale  $n_0 ds_0$  est donnée par :

$$df = \Pi n_0 ds_0.$$

La densité de charge  $df$  courante ramenée par rapport à la configuration de référence, dans la configuration de référence est donnée par :

$$df_0 = F^{-1} df = S n_0 ds_0.$$

avec :

$\Pi$  est le premier tenseur de Piola-Kirchoff (= tenseur de Boussinesq)

$S$  est le second tenseur de Piola-Kirchoff.

On introduit le tenseur de Kirchoff  $\tau = J T$ , symétrique et qui joue un rôle important dans la formulation variationnelle des problèmes en grandes déformations.

Ces tenseurs sont liés par les relations :

$$\tau = J T = \Pi F^t = F S F^t \quad \Pi = J T F^t \quad S = J F^{-1} T F^{-t} = F^{-1} \Pi$$

Parmi tous ces tenseurs caractérisant les contraintes seuls  $T$  et  $\Pi$  ont une signification physique, ils caractérisent, en effet, directement les efforts appliqués par rapport à l'élément d'aire actuel (configuration déformée) ou nominal (configuration de référence). Ils interviennent donc directement dans l'écriture des conditions aux limites statiques, qui sont de type charge morte  $T_0 = \Pi n_0$  ou bien de type force suiveuse  $T = T n$ .

## II.2 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre peuvent être écrites sur la configuration de référence ou sur la configuration déformée par écriture du principe des puissances virtuelles.

Sur la configuration de référence :

$$\operatorname{div}_0(\Pi) + \rho_0 f_0 = 0 \quad \Pi F^t = F \Pi^t \quad T_0 = \Pi n_0$$

Sur la configuration déformée :

$$\operatorname{div}(T) + \rho f = 0 \quad T = T^t \quad T = T n$$

Il en résulte des formes variationnelles associées à ces équations d'équilibre. La formulation faite avec le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $S$  et le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $E$  est dite formulation lagrangienne totale et est utile pour la résolution des problèmes d'élasticité en grandes déformations.

### III LOIS DE COMPORTEMENT

Les équations d'équilibre d'un milieu continu déterminent la divergence du tenseur des contraintes dans un champ de forces volumiques et d'accélération données; mais ne permettent pas de décrire l'état de contrainte dans ce milieu.

Plusieurs processus obéissent à ces équations qui sont des conditions nécessaires mais, cependant, pas suffisantes pour donner une description complète de la réponse du milieu continu sollicité. Parce que différents matériaux présentent différentes réponses sous l'action du même champ de forces: l'expérience montre que des systèmes géométriquement identiques soumis aux mêmes sollicitations, constitués de matériaux différents, se déforment différemment.

Ces équations doivent être complétées par les lois physiques qui décrivent la diversité des comportements du matériau constituant le milieu continu.

Ces lois sont représentées par des équations d'état (équations constitutives), qui établissent la connexion (relation fonctionnelle) entre le tenseur de contrainte et les quantités décrivant le mouvement ou l'équilibre de particules dans le cas purement mécanique.

Une considération spéculative est inévitable si nous voulons formuler les principes généraux de construction de ces équations d'état et la classification des matériaux.

De manière générale, la loi de comportement doit permettre de calculer les contraintes à l'instant  $t$  à partir de la déformation subie par le matériau jusqu'à l'instant  $t$ , soit:

$$\mathbf{T}(t) = \mathfrak{J} \left\{ \mathbf{F}(\tau) \right\}_{\tau \leq t} \qquad \mathbf{\Pi}(t) = \wp \left\{ \mathbf{F}(\tau) \right\}_{\tau \leq t}$$

$\mathfrak{J}$ ,  $\wp$  sont les fonctionnelles de réponse du matériau.

Ces expressions sont la loi de comportement d'un matériau matériellement simple, c'est à dire d'un milieu continu pour lequel la cinématique est entièrement définie par le tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}$ .

Certains matériaux ne peuvent supporter certaines déformations (matériaux incompressibles, inextensibles, ...). On parle alors de liaisons internes. Il faut donc ajouter à la forme de la loi de comportement une contrainte indéterminée ne travaillant pas dans tout mouvement compatible avec la liaison, soit:

$$\mathbf{T}(t) = \mathfrak{J} \left\{ \mathbf{F}(\tau) \right\}_{\tau \leq t} + \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{T}_0 : \mathbf{D} \equiv 0 \qquad \forall \mathbf{D}$$

Les théories modernes concernant les équations constitutives (= loi de comportement) permettent de réduire la forme possible des dépendances fonctionnelles entre les variables. Ces théories sont de nature thermodynamique ou purement mécanique. Dans le paragraphe suivant nous spécifions la forme générale de la loi de comportement pour des matériaux hyperélastiques (élastiques au sens de Green).

## IV MATERIAUX ELASTIQUES MATERIAUX HYPERELASTIQUES

Un matériau simple est dit élastique si le tenseur de contraintes de Cauchy ne dépend que du tenseur gradient de déformation. C'est l'hypothèse de Cauchy.

Green suppose l'existence d'une fonction densité d'énergie pour définir les matériaux hyperélastiques.

Les matériaux élastiques ont été largement abordés dans des exemples illustrant les principales applications de l'axiome de l'indifférence matérielle et des principes d'isotropie. Le lecteur consultera la bibliographie de ce chapitre pour plus de détails sur ces matériaux.

La suite de l'exposé sera consacrée aux matériaux hyperélastiques (élastiques au sens de Green) et aux écritures des équations constitutives tenant compte des restrictions imposées par les principaux axiomes.

On dira qu'un matériau est hyperélastique si :

- la densité d'énergie de déformation est une fonction du gradient de déformation,

- la dissipation intrinsèque est identiquement nulle.

A partir de la formulation locale du premier et second principe de la thermodynamique on peut exprimer la dissipation intrinsèque sous l'une des deux formes suivantes :

$$\phi_{int} = -\rho \dot{W} + \mathbf{T} : \mathbf{D} > 0$$

$$\phi_{int} = -\rho_0 \dot{W} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} > 0$$

avec :

$W$  : densité d'énergie de déformation

$\mathbf{D}$  : tenseur taux de déformation

$\mathbf{T}$  : tenseur de contrainte de Cauchy

$\mathbf{E}$  : tenseur de déformation de Green-Lagrange

$\mathbf{S}$  : second tenseur de Piola-Kirchoff

Le principe d'objectivité (ou d'indifférence matérielle) stipule que la loi de comportement doit être invariante dans tout changement de référentiel. Cela permet d'écrire que :

$$W = W(x_0, \mathbf{E})$$

et

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$$

C'est la forme lagrangienne objective de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique.

Dans le cas où le matériau hyperélastique est isotrope - invariance par rapport à tout changement de configuration initiale - on arrive à la forme eulérienne de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique isotrope suivante :

$$\mathbf{T} = 2\rho\mathbf{B} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}$$

Les théorèmes de représentation permettent de préciser d'une manière formelle la forme mathématique que peut prendre une fonction tensorielle à valeur scalaire ou tensorielle. La densité d'énergie de déformation est une fonction tensorielle à valeur réelle. Les théorèmes de représentation permettent alors d'écrire la forme de la fonction  $W$  :

$$W(\mathbf{x}_0, \mathbf{B}) = W(\mathbf{x}_0, I_1, I_2, I_3) \quad ; \quad \mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B}^2$$

avec  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants du tenseur  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{I}$  la matrice identité dans un repère orthonormé. Si le matériau est supposé homogène dans sa configuration de référence alors sa densité d'énergie  $W$  n'est fonction que de  $\mathbf{B}$ ,  $W(\mathbf{B})$ .

En utilisant l'identité de Clay-Hamilton, nous obtenons :

$$\mathbf{T} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_{-1} \mathbf{B}^{-1}$$

Avec les fonctions :

$$\alpha_\Lambda = \alpha_\Lambda(I_1, I_2, I_3) \quad \text{et} \quad \beta_\Gamma = \beta_\Gamma(I_1, I_2, I_3)$$

définies par :

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_0 - I_1 \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[ I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right] \\ \beta_1 &= \alpha_1 + I_1 \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \\ \beta_{-1} &= I_3 \alpha_2 = -2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_2} \end{aligned} \right\}$$

Si la configuration de référence est relâchée, état naturel, c'est à dire  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  alors :

$$\beta_{0(3,3,1)} + \beta_{1(3,3,1)} + \beta_{-1(3,3,1)} = 0.$$

Dans le cas de matériaux hyperélastiques isotropes incompressibles ( $I_3 = 1$ ), les fonctions  $\alpha_\Lambda$ ,  $\beta_\Gamma$  ne sont fonctions que des deux premiers invariants  $I_1$  et  $I_2$  et dans l'écriture de la loi de comportement apparaît une constante indéterminée :

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_{-1} \mathbf{B}^{-1}$$

avec

$$\alpha_\Lambda = \alpha_\Lambda(I_1, I_2) \quad ; \quad \Lambda = 1, 2 \qquad \beta_\Gamma = \beta_\Gamma(I_1, I_2) \quad ; \quad \Gamma = 1, 2$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + I_1 \alpha_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad ; \quad \beta_{-1} = \alpha_2 = -2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad ; \quad p = \beta_1(3, 3) + \beta_{-1}(3, 3)$$

Ces fonctions réponses peuvent être déterminées à partir des essais expérimentaux.

La densité d'énergie d'un matériau hyperélastique homogène et isotrope au voisinage d'un état naturel est :

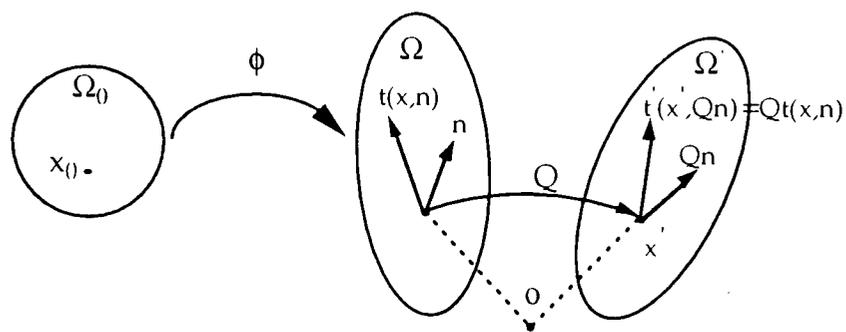
$$W(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \mathbf{E})^2 + 2\mu \text{tr} \mathbf{E}^2$$

Connaître la loi de comportement d'un matériau hyperélastique revient à connaître, à une constante additive près, la fonction  $W$  que nous appellerons indifféremment densité d'énergie (par unité de volume de la configuration de référence) ou potentiel élastique.

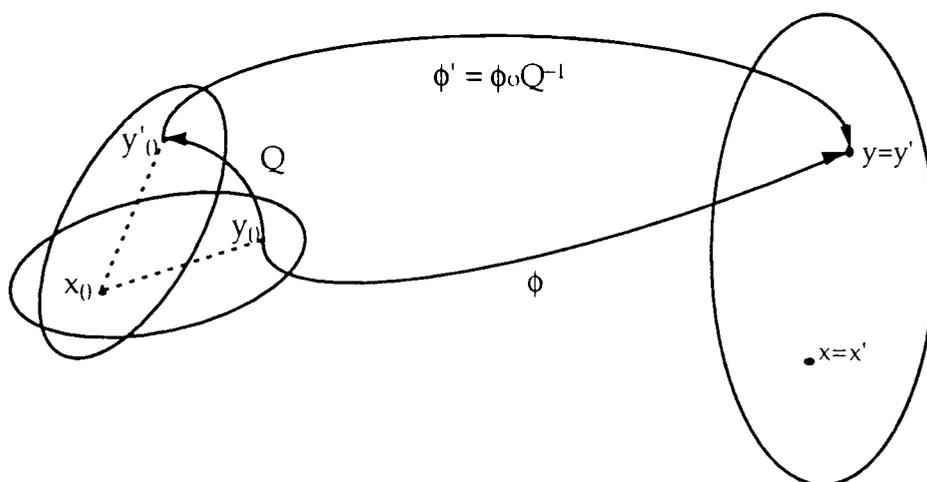
Pour tenter de déterminer une expression analytique du potentiel élastique, trois approches sont envisageables :

- l'approche microscopique ou micromécanique qui prend explicitement en compte la nature des atomes et leur agencement au sein du solide,
- l'approche minimécanique qui prend en compte certaines hypothèses de périodicité d'un volume représentatif du matériau hétérogène. Cette approche est souvent utilisée pour les propriétés homogènes équivalentes des composites et se base sur les théories de l'homogénéisation,
- l'approche macroscopique, purement phénoménologique, cherche à donner une expression analytique des fonctions  $W$ , décrivant le mieux possible les phénomènes observés, sans se préoccuper d'une quelconque explication physique à l'inverse des deux autres approches qui cherchent à trouver une explication physique aux phénomènes observés avec des paramètres liés à la géométrie, la morphologie et la nature du matériau sollicité.

Pour la clarté de l'exposé nous abordons successivement l'approche micromécanique ensuite l'approche macromécanique et enfin l'approche minimécanique.



Axiome de l'indifférence matérielle.



L'isotropie en un point

*fin du chapitre zéro*

*Micromécanique - Approche statistique*

*Sommaire*

I Introduction

II Distribution gaussienne

II.1 Etude d'une chaîne isolée

II.2 Etude d'un réseau de chaînes

II.3 Conclusion

III Distribution non-gaussienne : Distribution de Langevin

III.1 Etude d'une chaîne isolée

III.2 Etude d'un réseau non-gaussien

III.2.1 Modèle 3-chaînes

III.2.2 Modèle 8-chaînes

III.2.3 Modèle global

III.3 Conclusion

IV Conclusion

## I INTRODUCTION

Le principe est de donner, à partir d'hypothèses sur la structure microscopique du matériau, sur l'élasticité de ses constituants et sur une loi statistique de répartition des atomes, une explication physique des phénomènes observés.

Les rapports entre le potentiel élastique (ou densité d'énergie de déformation), l'énergie interne et l'entropie du solide sont ici d'une importance capitale.

Cette approche a été principalement tentée pour les caoutchoucs (élastomères) dont la structure interne - longues chaînes moléculaires - permet de nombreuses hypothèses simplificatrices.

Les élastomères sont constitués de longues chaînes macromoléculaires reliées entre elles par des liaisons pontales peu nombreuses. Les segments de chaînes compris entre les liaisons pontales sont liés entre eux par des forces de Van der Waals et peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres, sous l'action de contraintes mécaniques très faibles, sans variation notable de l'énergie interne du solide. Ce sont des solides à élasticité entropique (fig.I.1). La présence de ces liaisons pontales assure la réversibilité de la déformation.

Les chaînons d'un élastomère sont soumis à des mouvements micro browniens dont l'amplitude est proportionnelle à la température absolue et qui induisent une force qui tend à rapprocher les extrémités de la chaîne (fig.I.2). Cette force est proportionnelle à la longueur entre les extrémités du chaînon et à la température absolue  $T$ .

L'analyse statistique des propriétés élastiques des matériaux est un problème difficile à résoudre. En effet, une solution complète de ce problème doit donner une représentation exacte des propriétés de n'importe quelle structure réelle de molécule.

Les tentatives (approximations) de solution doivent tenir compte nécessairement de la représentation actuelle de la molécule par des hypothèses mathématiques plus ou moins idéalisées, dans lesquelles - pour la simplicité - certains aspects physiques significatifs du problème seront ignorés.

## II DISTRIBUTION GAUSSIENNE

### II.1 Etude d'une chaîne isolée

La chaîne est composée de  $n$  chaînons de longueur identique  $L$ , la rotation entre deux chaînons voisins est libre. Ainsi chaque liaison peut pivoter de sorte que la direction de la chaîne change à chaque chaînon, lui permettant de se tordre, s'entortiller de la façon la plus extravagante qui soit.

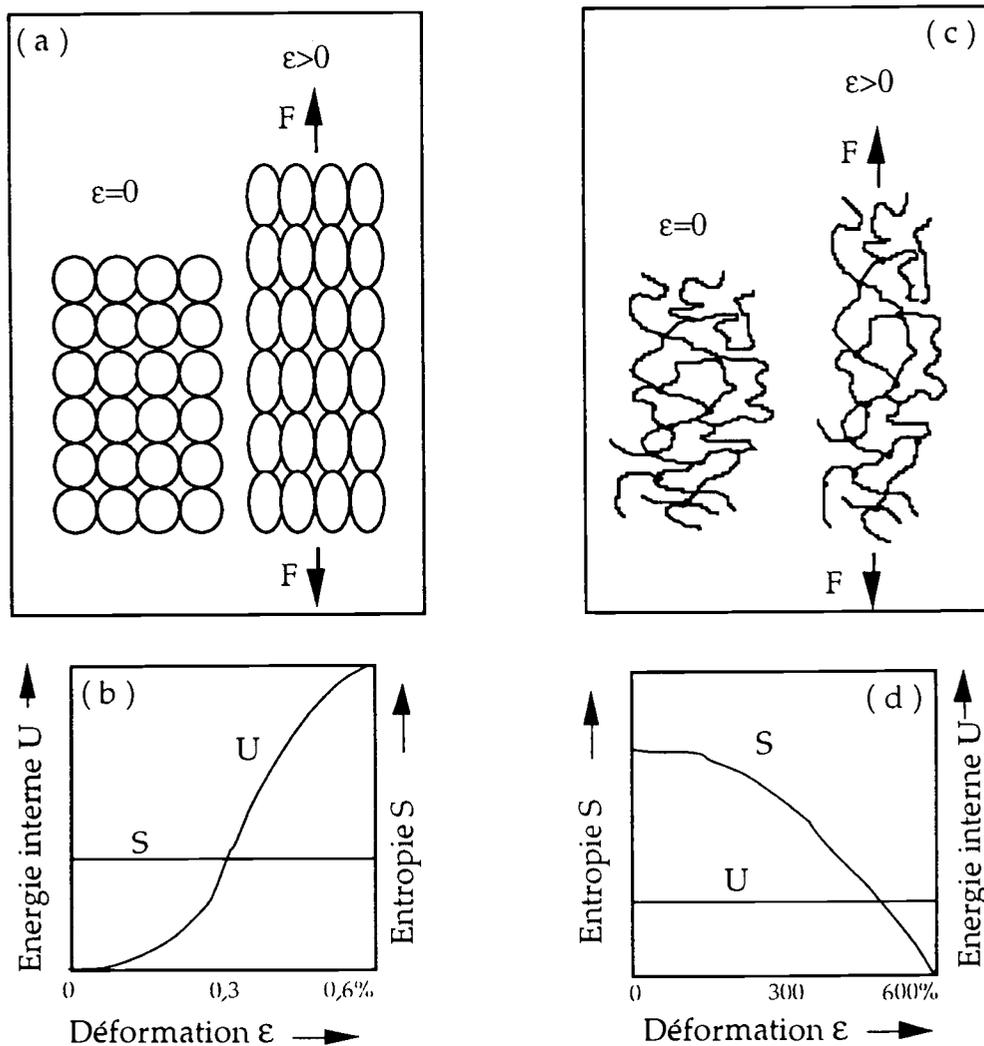


fig.I.1: Mécanismes intervenant à l'échelle atomique dans l'élasticité des solides en relation avec les variations de l'énergie interne  $U$  et de l'entropie  $S$ . (a) Mécanismes de la déformation et (b) variation d'énergie interne dans les solides à élasticité enthalpique (métaux et céramiques). (c) Mécanismes de déformation et (d) variation d'entropie dans les solides à élasticité entropique (élastomères). A noter la différence de l'échelle de déformation entre (b) et (d). D'après (W.KURZ, J.P. MERCIER, G.ZAMBELLI)

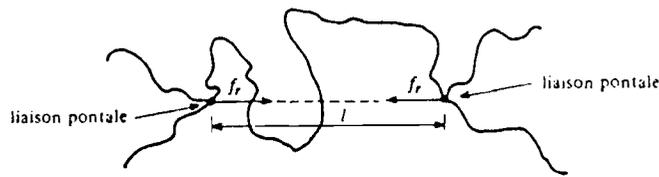


fig.I.2: Force de rétraction élastique entre les extrémités d'un chaînon d'un élastomère.

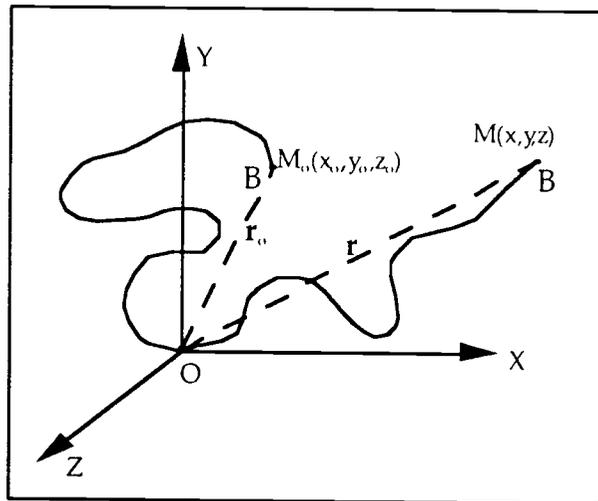


fig.I.3: Repérage géométrique d'une chaîne isolée

La distance entre les extrémités de la chaîne est en moyenne  $L\sqrt{n}$ .

On suppose qu'une extrémité de la chaîne (fig.I.3) est fixée à l'origine du repère cartésien, l'autre, B, peut se mouvoir d'une manière aléatoire dans l'espace. On choisit un élément de volume dans le voisinage d'un point  $M(x,y,z)$  quelconque de l'espace; la probabilité pour que le point B puisse être à un instant quelconque dans cet élément de volume est proportionnelle à ce volume et à une certaine fonction  $p(x,y,z)$  représentant la densité de probabilité au point M.

Il est alors nécessaire de déterminer la forme de cette fonction  $p(x,y,z)$ .

On oublie les limitations imposées par les angles de valence dans une chaîne et on traite le problème simplifié d'une chaîne où toutes les liaisons entre chaînons sont libres. Cela permet de supposer que l'orientation de la chaîne en chaque liaison est indépendante des liaisons voisines et que toutes les directions sont équiprobables.

La solution du problème - en première approximation - a été donnée par Mark et Guth (1934), Kuhn (1936).

Le problème est d'évaluer le nombre de configuration de la chaîne, la probabilité recherchée est proportionnelle à ce nombre, soit:

$$p(x, y, z)dx dy dz = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-b^2(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz \quad ; \quad b^2 = \frac{3}{2nL^2} \quad (I.1)$$

La valeur maximale de cette fonction est obtenue pour  $x=y=z=0$ , c'est à dire lorsque les deux extrémités de la chaîne coïncident. Paradoxalement cela n'implique pas que la longueur la plus probable entre les extrémités de la chaîne est nulle.

La chaîne est complètement libre et toutes les configurations sont possibles et équiprobables.

L'entropie de cette chaîne est (Kuhn, (1936)) proportionnelle au logarithme du nombre de configuration, soit:

$$s = c - kb^2 r^2 \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (I.2)$$

La constante  $c$  contient la mesure de l'élément de volume et  $k$  est la constante de Boltzmann.

Cette équation (I.2) montre que l'entropie de la chaîne est maximale pour  $r = 0$  et décroît toujours pour toute autre distance  $r$  entre les extrémités de la chaîne.

La force de rétraction entre les extrémités de cette chaîne est  $f = 2kTb^2 r$ .

Cette force de rétraction dépend linéairement de la distance  $r$ , cela reste vrai tant que la distribution de probabilité  $p(r)$  est gaussienne. La distance  $r$  doit être faible relativement à la longueur limite (chaîne déroulée) de la chaîne  $r_L = nL$ .

Pour des élongations importantes l'approximation gaussienne n'est plus appropriée et une autre fonction de distribution plus réaliste est nécessaire (distribution de Langevin).

## II.2 Etude d'un réseau de chaînes

Cette théorie (gaussienne) permet moyennant deux hypothèses supplémentaires de construire une densité d'énergie de déformation pour un réseau de chaînes enchevêtrées.

1) Les points de jonctions entre les chaînes restent fixes : les chaînes glissent mais les noeuds d'enchevêtrements sont fixes.

2) La déformation macroscopique se répercute à l'échelle microscopique dans les mêmes proportions sur tous les segments entre les liaisons : déformations affines :

$$x = \lambda_1 x_0 \quad ; \quad y = \lambda_2 y_0 \quad ; \quad z = \lambda_3 z_0 \quad (I.3)$$

Ces hypothèses peuvent être justifiées par une autre approche plus élaborée proposée par Guth et James.

On suppose qu'on peut appliquer les résultats obtenus pour une chaîne et qu'alors la variation d'entropie de la chaîne entre les états initial et déformé est :

$$\Delta s = -kb^2 \left( (\lambda_1^2 - 1)x^2 + (\lambda_2^2 - 1)y^2 + (\lambda_3^2 - 1)z^2 \right) \quad (I.4)$$

Le réseau de chaîne contient  $N_g$  groupes de  $N_p$  chaînes. Chaque groupe a la même constante  $b_p$ .

La variation d'entropie de chaque groupe de  $N_p$  chaînes est:

$$\Delta s_p = \sum_{i=1}^{N_p} \Delta s_{ip} = -kb_p^2 \left[ (\lambda_1^2 - 1) \sum_i x_{ip}^2 + (\lambda_2^2 - 1) \sum_i y_{ip}^2 + (\lambda_3^2 - 1) \sum_i z_{ip}^2 \right] \quad (I.5)$$

D'autre part comme toutes les directions sont équiprobables alors :

$$\sum_i x_{ip}^2 = \sum_i y_{ip}^2 = \sum_i z_{ip}^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_{ip}^2 \quad (I.6)$$

soit

$$\Delta s_p = -\frac{1}{3} k N_p b_p^2 \overline{r_{ip}^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (I.7)$$

avec :

$$\sum_i r_{ip}^2 = N_p \overline{r_{ip}^2} \quad (I.8)$$

On suppose que  $\overline{r_{ip}^2}$  pour un groupe de chaînes, dans un état non déformé, est le même que pour une seule chaîne qui a la même longueur; soit :  $\overline{r_{ip}^2} = \frac{3}{2b_p^2}$ .

L'équation (I.7) devient :

$$\Delta s_p = -\frac{1}{2} k N_p (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (I.9)$$

La sommation pour tous les groupes qui forment le réseau donne la variation totale de l'entropie de déformation :

$$\Delta s = \sum_p \Delta s_p = -\frac{1}{2} k N (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) ; \sum_p N_p = N \quad (I.10)$$

Si la déformation est isotherme alors l'énergie libre de Helmholtz,  $W = -T\Delta S$  est:

$$W = \frac{1}{2} G (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) ; G = NkT \quad (I.11)$$

Cette fonction est également appelée densité d'énergie de déformation par unité de volume de la configuration de référence (configuration initiale).

Elle est d'une importance capitale pour l'analyse des propriétés élastiques des caoutchoucs pour des élongations modérées.

Il est à noter que cette relation fait intervenir un seul paramètre physique,  $G$ , qui dépend de la structure du matériau.

La condition d'incompressibilité est largement admise pour ces élastomères comme le montrent les résultats expérimentaux (fig.I.4) de Gee, Stern et Treloar (1944) et est exprimée en fonction des élongations principales par  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ . Les contraintes principales de Cauchy pour une déformation homogène de ces matériaux sont :

$$\sigma_1 = G \lambda_1^2 - p \qquad \sigma_2 = G \lambda_2^2 - p \qquad \sigma_3 = G \lambda_3^2 - p \qquad (\text{I.12})$$

où  $p$  est une pression indéterminée.

Pour éliminer la constante  $p$ , on exprime ces équations (I.12) sous la forme:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = G (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \qquad \sigma_2 - \sigma_3 = G (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \qquad (\text{I.13})$$

La comparaison des résultats expérimentaux de Treloar(1944) - pour l'élongation simple, la tension biaxiale, le cisaillement simple - et les simulations numériques données par cette théorie montre une bonne correspondance de ces courbes pour des élongations faibles (fig.I.6). Ces courbes décollent rapidement des résultats expérimentaux et n'arrivent pas à simuler l'élongation maximale de ces matériaux. Cette asymptote verticale traduit le fait que lorsque tous les segments de la chaîne sont alignés la force de rétraction augmente fortement, la longueur de la chaîne dans cette configuration est  $r_L = nL$ , (fig.I.5).

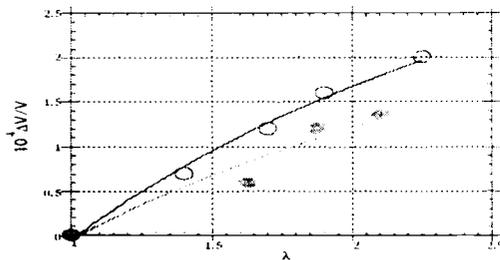


fig.I.4:Variation de volume pour deux types de caoutchoucs vulcanisés. Résultats expérimentaux de Gee, Stern,Tréloar; (1950).

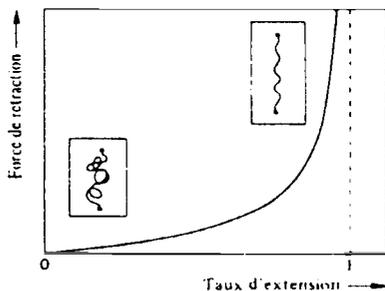


fig.I.5:Variation de la force de rétraction entre les extrémités d'une chaîne en fonction du taux d'extension de la chaîne,  $\lambda$ . En encart, variation de la conformation de la chaîne en fonction du taux d'extension  $\lambda$ .

## II.3 Conclusion

Cette théorie statistique, qui introduit un seul paramètre physique  $G$ , décrit correctement les propriétés des élastomères en première approximation. Elle est adoptée pour introduire les relations contraintes - déformations dans ce type de matériaux mais les simplifications introduites pour le traitement d'un réseau de chaînes sont trop pénalisantes pour que cette théorie soit valable pour un domaine de déformation plus vaste.

Une autre théorie plus raffinée est nécessaire pour tenir compte de la déformation limite de la chaîne.

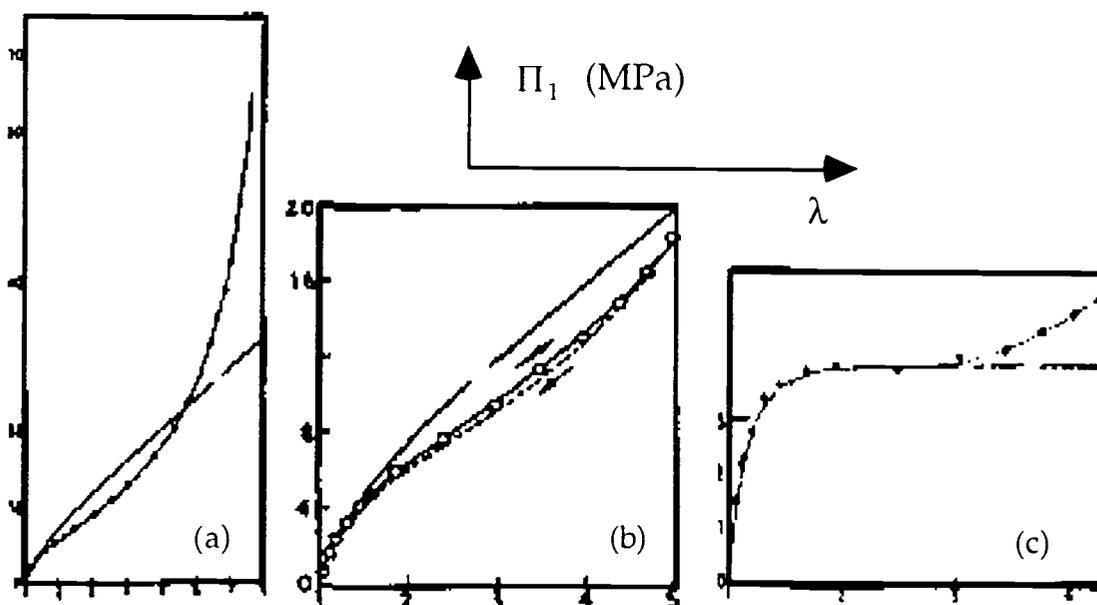


fig.I.6: Comparaison des données de Treloar avec le modèle d'un réseau gaussien:

(a): Tension simple; (b): Cisaillement pur; (c): Tension équibiaxiale.  $G = 4$  MPa

### III DISTRIBUTION NON-GAUSSIENNE : DISTRIBUTION DE LANGEVIN

Jusqu'à maintenant le développement de la théorie statistique d'un réseau de chaînes était basé sur la distribution gaussienne donnée par l'équation (I.1). Les résultats obtenus par la distribution gaussienne sont limités aux taux de déformations modérés.

En grandes déformations une proportion importante des chaînes du réseau est déroulée et les écarts entre les courbes expérimentales et théoriques sont importants.

Il est alors nécessaire d'introduire une autre distribution plus raffinée pour l'analyse des propriétés du réseau.

Dans le paragraphe suivant nous présentons une distribution non - gaussienne pour une chaîne isolée. Cette distribution est ensuite utilisée pour un réseau de chaînes.

#### III.1 Etude d'une chaîne: distribution de Langevin

Dans cette méthode proposée par W. Kuhn et al.(1942) il est nécessaire de trouver la distribution des angles des liaisons entre les chaînons pour chaque chaîne du réseau.

En tenant compte de la distribution la plus probable des angles des chaînons, Kuhn et Grün (1942) ont montré que la densité de probabilité  $p(r)$  peut s'exprimer par:

$$\ell n(p(r)) = c_1 - n \left[ \frac{r}{nL} \beta + \ell n \left( \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right] \quad \frac{r}{nL} = \coth(\beta) - \frac{1}{\beta} = \mathcal{E}(\beta) \quad (\text{I.14})$$

$\mathcal{E}$  est la fonction de Langevin,  $\beta = \mathcal{E}^{-1} \left( \frac{r}{nL} \right)$

On exprime l'entropie de la chaîne, qui est proportionnelle au logarithme de la densité de probabilité  $p(r)$ , par :

$$s = c_2 - kn \left[ \frac{r}{nL} \beta + \ell n \left( \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right]; \quad \beta = \mathcal{E}^{-1} \left( \frac{r}{nL} \right) \quad (\text{I.15})$$

L'énergie libre de Helmholtz de cette chaîne est :

$$w = nkT \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh(\beta)} \right) \right] - w_0 \quad ; \quad \beta = \mathcal{E}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) \quad (I.16)$$

avec :  $\lambda = \frac{r}{r_0}$  ;  $w_0$  est une constante quelconque.

Les contraintes principales de Cauchy sont exprimées par :

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{dw}{d\lambda_i} - p \quad (17)$$

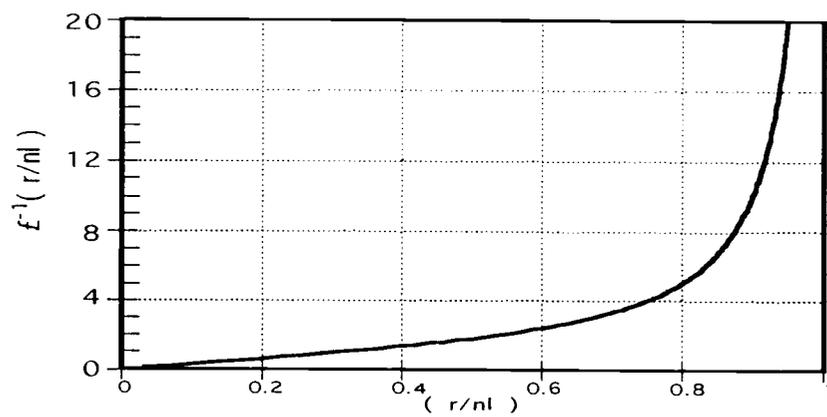


fig.I.7: Fonction de langevin

Cette théorie est appliquée dans le développement d'une théorie statistique pour un réseau de chaînes. Plusieurs méthodes - différentes par leur degré de complexité - furent proposées dans la littérature et que nous résumons ci-dessous.

## III.2 Etude d'un réseau non-gaussien

### III.2.1 Modèle 3-chaînes

Le modèle à 3-chaînes a été suggéré par James et Guth (1943). On suppose qu'un réseau de  $n$  chaînes par unité de volume est équivalent à trois groupes indépendants de  $(n/3)$  chaînes par unité de volume et parallèles aux axes principaux du repère cartésien (fig.I.8).

On suppose que la déformation est affine et que les chaînes sont fixées à l'origine. On exprime la contrainte dans le cas de la tension simple, par :

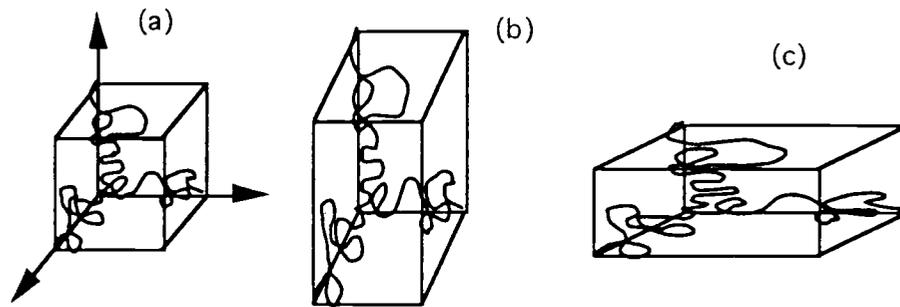


fig.I.8:Modèle 3-chaînes : configuration :  
(a) non - déformé, (b) tension uniaxiale, (c) tension biaxiale.

$$\sigma_i^{3\text{-ch}} = \frac{G}{3} \sqrt{n} \lambda_i \mathcal{E}^{-1} \left( \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) - p \quad (\text{I.18})$$

Les facettes du cube représentant le modèle restent parallèles aux axes après déformation.

Ce modèle fait intervenir deux paramètres physiques  $G$  et  $n$ .

Le paramètre  $G$ , introduit également par la théorie gaussienne, définit le module à l'origine et pour les déformations modérées, tant dis que  $n$ , spécifique à la théorie non-gaussienne, détermine l'asymptote de la déformation.

Ces deux paramètres sont considérés comme indépendants dans cette théorie.

Un autre modèle fut proposé par Flory-Rehner (1943) - modèle tétraédrique - et paraît plus réaliste pour appréhender les propriétés photo-élastiques des élastomères.

### III.2.2 Modèle 8-chaînes

E.M Arruda et al(1992) ont proposé un modèle qui possède la symétrie cubique et composé de huit chaînes.

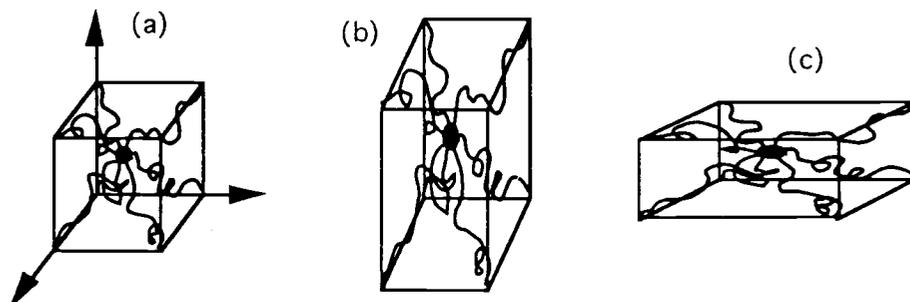


fig.I.9:Modèle 8-chaînes : configuration :  
(a) non - déformé, (b) tension uniaxiale, (c) tension biaxiale.

Chaque chaîne a la même contribution dans la déformation du modèle. La longueur de la chaîne déformée est :

$$r = \frac{L\sqrt{n}}{\sqrt{3}} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2} \quad (\text{I.19})$$

En introduisant cette expression dans l'équation (I.16) donnant la densité d'énergie de déformation d'une chaîne on obtient à partir de (I.17):

$$\sigma_i^{8\text{-ch}} = \frac{G}{3} \sqrt{n} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_c} \mathcal{E}^{-1} \left( \frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) ; \quad \lambda_c^2 = \frac{1}{3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \quad (\text{I.20})$$

En remarquant que  $I_1^2 = 3\lambda_c^2$ , on peut développer alors l'expression de  $W$  sous la forme d'une série qui dépend seulement de  $I_1$ .

$$W = G \left[ \frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20n} (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050n^2} (I_1^3 - 27) \right] \\ + G \left[ \frac{19}{7000n^3} (I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750n^4} (I_1^5 - 243) \right] + \dots \quad (\text{21})$$

Ce modèle donne des simulations satisfaisantes là où les autres modèles (3-chaînes, 4-chaînes) sont très approximatifs.

### III.2.3 Modèle global d'un réseau

Wu et al.(1993) obtiennent une densité d'énergie de déformation pour les déformations d'un réseau de chaînes à partir de la distribution de langevin d'une chaîne.

L'énergie de déformation d'un réseau de  $n$  chaînes par unité de volume est obtenue par la sommation des énergies de chaque chaîne individuelle :

$$W = \int w \, dn \quad (\text{I.22})$$

où  $dn$  est le nombre de chaînes se trouvant entre les points  $(\theta, \varphi)$  et  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ , soit:  $dn = np(\theta, \varphi; t) \sin\theta d\theta d\varphi$

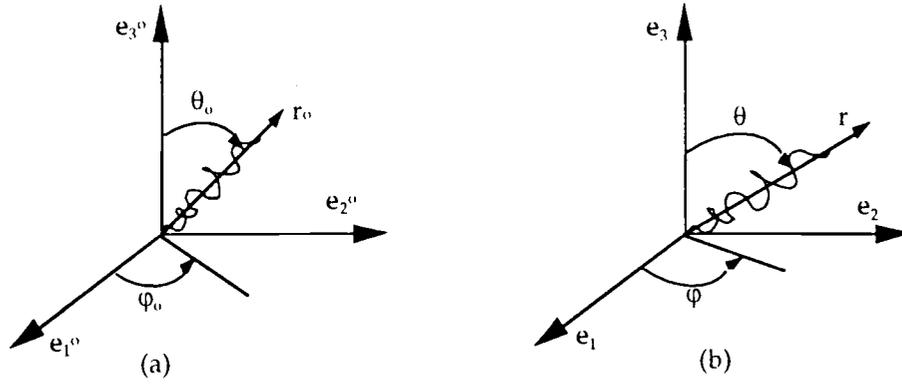


fig.I.10:Structure d'une chaîne : repérage géométrique:  
(a) structure non-déformée; (b) structure déformée.

La densité d'énergie du réseau est alors exprimée par :

$$W = n \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w_p(\theta, \varphi; \lambda_i) d\theta d\varphi \quad (\text{I.23})$$

Les contraintes principales de Cauchy sont exprimées par :

$$\sigma_i = \frac{1}{4\pi} G \sqrt{n} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{E}^{-1} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) \frac{\lambda_i^2 (m_i^0)^2}{\lambda} \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 - p \quad (\text{I.24})$$

avec :

$$m_1^0 = \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \quad ; \quad m_2^0 = \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \quad ; \quad m_3^0 = \cos \theta_0 \quad (\text{I.25})$$

$$\lambda^2 = \sum_i (m_i^0)^2 \lambda_i^2 \quad (\text{I.26})$$

Cette équation (I.24) est valable pour tous types de déformations; pour des déformations biaxiales Treloar et Riding (1979) ont proposé une expression identique.

Wu et al(1993) ont montré que les deux modèles simplifiés 3-chaînes et 8-chaînes encadrent la solution donnée par l'équation (I.24) et ont suggéré une combinaison linéaire de ces deux modèles comme pouvant donner une meilleure approximation de la contrainte, soit :

$$\sigma_i = (1 - \alpha) \sigma_i^{3\text{-ch}} + \alpha \sigma_i^{8\text{-ch}} \quad ; \quad \alpha = 0.85 \frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \lambda_{\max} = \max(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) \quad (\text{I.27})$$

### III.3 Conclusion

Il apparaît donc que cette démarche statistique est assez intéressante pour ces matériaux et que les modèles simplifiés peuvent être suffisants pour traduire un comportement donné.

Nous allons dans la partie suivante nous affranchir de chercher à donner des significations physiques aux paramètres qui interviennent dans la forme proposée pour la fonction  $W$ .

Nous cherchons à priori à proposer une forme assez simple pour cette fonction  $W$  afin de faciliter les traitements numériques, le problème de quantifier physiquement ces paramètres est relégué au second rôle.

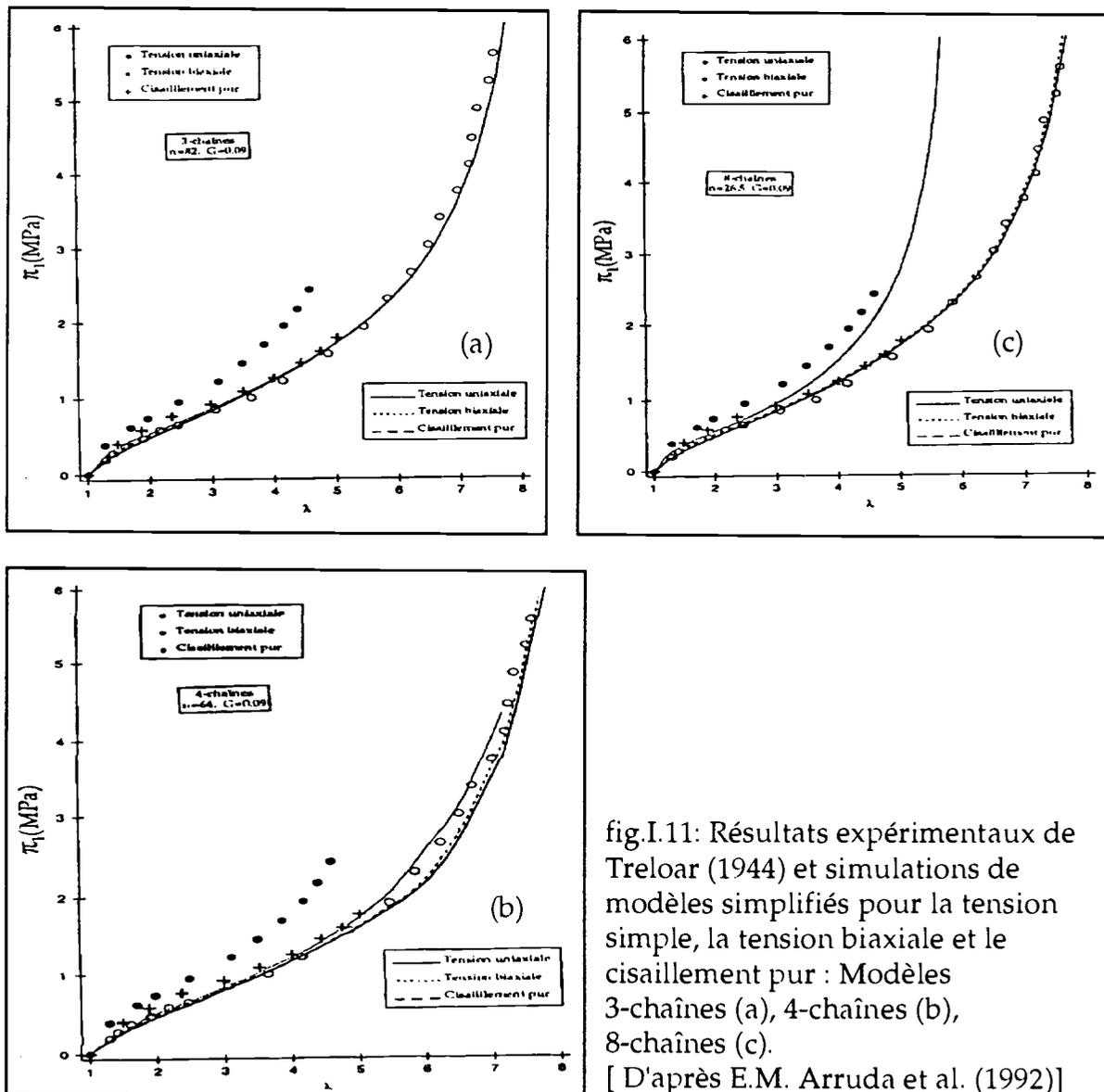


fig.I.11: Résultats expérimentaux de Treloar (1944) et simulations de modèles simplifiés pour la tension simple, la tension biaxiale et le cisaillement pur : Modèles 3-chaînes (a), 4-chaînes (b), 8-chaînes (c).  
[ D'après E.M. Arruda et al. (1992) ]

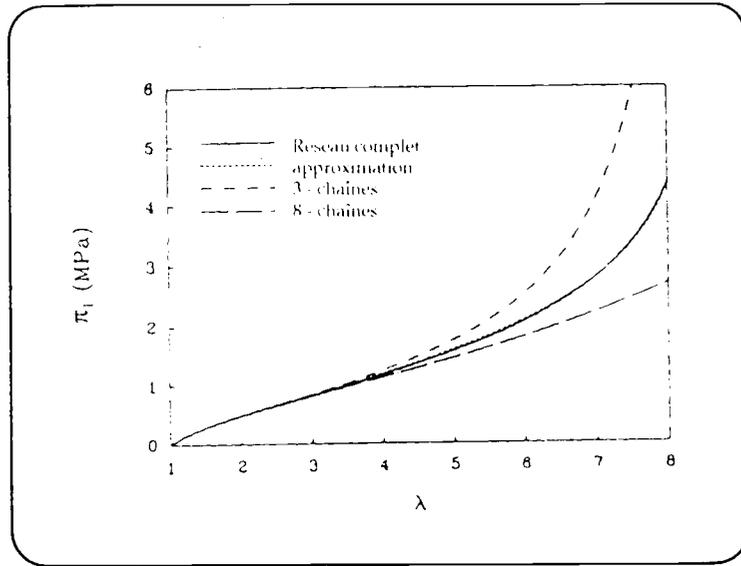


fig.I.12: Tension simple : Comparaison de modèles simplifiés:  $n = 75$ ;  $G = 0.273$  MPa [D'après P.D.Wu et al (1993)]

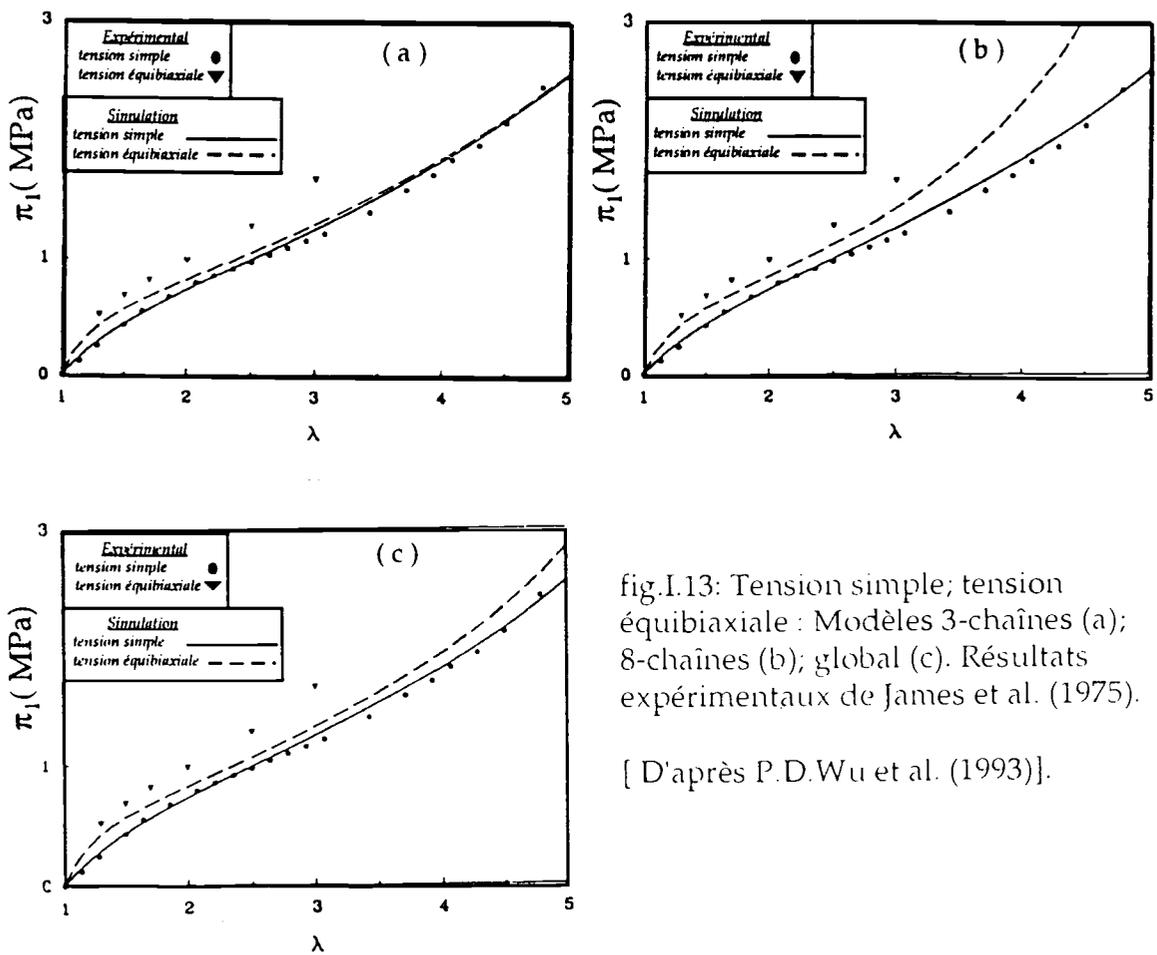


fig.I.13: Tension simple; tension équi-biaxiale : Modèles 3-chaînes (a); 8-chaînes (b); global (c). Résultats expérimentaux de James et al. (1975).

[ D'après P.D.Wu et al. (1993)].

## IV CONCLUSION

Le choix d'une distribution gaussienne permet de rendre compte du comportement des matériaux hyperélastiques tels les caoutchoucs pour des élongations modérées. Cette distribution fait intervenir un seul paramètre physique dans la forme de la densité d'énergie calculée pour une chaîne isolée. Cette distribution rend facile l'analyse mathématique pour un réseau de chaînes ( toutes les configurations sont possibles et équiprobables). Cette densité d'énergie ne donne pas une bonne approximation pour des élongations importantes ( $\lambda > 2$ ) car elle ne rend pas compte de la longueur limite de chaîne.

On a montré que la distribution de Langevin, qui introduit en plus de  $G$  un autre paramètre  $n$ , lié à la longueur limite de la chaîne, élargit le domaine de corrélation avec les résultats expérimentaux jusqu'à des élongations importantes ( $\lambda > 7$ ).

L'analyse numérique d'un réseau quelconque de chaînes s'avère très lourde lorsqu'on choisit une distribution non-gaussienne. Nous avons montré qu'une combinaison linéaire des modèles 3-chaînes et 8-chaînes donne la même précision des résultats expérimentaux qu'un modèle de réseau global.

Cette approche a permis de montrer que la non-linéarité observée dans le comportement global de ces matériaux ( caoutchoucs, ...) est constitutive (non-linéarité du matériau). Deux paramètres physiques  $G$  et  $n$  apparaissent dans l'expression analytique de la densité d'énergie et traduisent la pente à l'origine ( $G$ ) et l'asymptote verticale ( $n$ ).

*Fin du premier chapitre*

*Macromécanique - Approche phénoménologique*

*Sommaire*

I Hypothèses et inégalités sur la densité d'énergie

I.1 Hypothèses sur la forme mathématique de la densité d'énergie

I.2 Inégalités constitutives

II Relations entre les fonctions de réponse et les coefficients de Lamé

III Matériaux hyperélastiques incompressible

III.1 Corrélation avec les courbes expérimentales contraintes-déformations

III.1.1 Principe

III.1.2 Détermination expérimentale des paramètres de la densité d'énergie d'Ogden

III.2 Détermination de la densité d'énergie à partir des données expérimentales

III.3 Remarques sur le manque de données pour déterminer une densité d'énergie

III.4 Quelques densités d'énergie

III.4.1 Matériau Néo-Hookien

III.4.2 Densité de Varga

III.4.3 Densité de Mooney-Rivlin

III.4.4 Densité de Haines-Wilson

III.4.5 Densité de Hart-Smith

- III.4.6 Densité d'Alexander
- III.4.7 Densité d'Ogden
- III.4.8 Densité d'Ogden non-séparable
- III.4.9 Matériaux à paramètres durcissant de Knowles-Sternberg
- III.4.10 Densité de Fung pour les tissus biologiques

## IV Matériaux hyperélastiques compressibles

- IV.1 Détermination de la densité d'énergie à partir d'un modèle incompressible
  - IV.1.1 Addition d'un terme ne dépendant que de la variation de volume
  - IV.1.2 Décomposition en partie isochore et dilatationnelle
- IV.2 Détermination de la densité d'énergie par résolution d'une équation différentielle avec second membre empirique
- IV.3 Quelques densités d'énergie
  - IV.3.1 Matériau Néo-Hookien compressible
  - IV.3.2 Densité de St-Venant- Kirchhoff
  - IV.3.3 Densités de Ciarlet-Geymonat
  - IV.3.4 Densité d'Antmann
  - IV.3.5 Densité de Fong-Penn
  - IV.3.6 Densité de Peng-Landel
  - IV.3.7 Densité de Flory-Tatara
  - IV.3.8 Densité d'Ogden avec addition d'un terme ne dépendant que de  $J$
  - IV.3.9 Densité de Knowles-Sternberg
  - IV.3.10 Densité de Swanson
  - IV.3.11 Matériau de Levinson-Burgen

## V - Conclusion

# I HYPOTHESES ET INEGALITES SUR LA DENSITE D'ENERGIE

Cette démarche cherche à donner une expression analytique de la fonction  $W$ , décrivant le mieux possible les phénomènes observés, sans se préoccuper d'une quelconque explication physique.

De nombreux modèles macroscopiques ont été élaborés, caractérisés principalement par leurs domaines de validité.

Le but de cette partie est de mettre en évidence, en confrontant certains travaux expérimentaux avec des modèles d'élasticité non-linéaire, les problèmes qui se posent lors de la détermination expérimentale de la densité d'énergie d'un matériau hyperélastique: les propriétés mathématiques du modèle doivent permettre d'approcher les courbes expérimentales traduisant les relations contraintes-déformations tout en rendant compte de divers autres phénomènes mécaniques tels l'existence, la régularité, l'unicité ou la non unicité de solutions pour certains problèmes d'équilibre.

## I.1 hypothèses sur la forme mathématique de la densité d'énergie

Comme dans tout problème d'approximation de fonction numérique, on commence par postuler la forme sous laquelle on cherche la densité d'énergie de déformation. Nous citons les propositions qui ont donné les meilleurs résultats:

### a - Développement de Mooney-Rivlin:

On cherche la série de Taylor de la fonction  $W$ , (Ogden,(1972a)):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} c_{pqr} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q (I_3 - 3)^r \quad (\text{II.1})$$

$p, q, r$  sont des entiers.

Aucune hypothèse n'est faite sur la forme exacte de la densité d'énergie mais, seul un nombre fini de termes pouvant être calculés, on ne peut obtenir qu'un polynôme.

### b - Hypothèse de séparabilité de Valanis-Landel:

On cherche une densité d'énergie sous la forme (Valanis et al.,(1967); Ogden, (1984)):

$$W(I_1, I_2, I_3) = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (\text{II.2})$$

où la fonction  $w$  reste à déterminer; le problème complexe d'approximation d'une fonction de trois variables est donc réduit à celui de l'approximation d'une fonction réelle d'une seule variable.

Aucune raison physique ne justifie rigoureusement cette hypothèse de séparabilité, c'est essentiellement une hypothèse simplificatrice suggérée par l'observation de certaines données expérimentales.

### c - Développement en série d'Ogden:

On cherche la fonction  $W$  sous la forme (Ogden,(1972b)):

$$W(I_1, I_2, I_3) = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) + \Gamma(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \quad (\text{II.3})$$

Les coefficients  $\mu_n, \alpha_n$  sont réels.

## I.2 Inégalités constitutives

Outre les conditions de bonne corrélation avec les courbes expérimentales, les paramètres - lorsque la forme de cette fonction est postulée - doivent satisfaire d'autres relations dites inégalités constitutives.

La question, "Quelles restrictions doivent être imposées sur la fonction  $W$  (sur ses paramètres) pour que le modèle mathématique issu de cette densité d'énergie puisse donner un comportement physique "raisonnable" du matériau isotrope sollicité ?", constitue le problème de Truesdell.

La question a été étudiée sous deux aspects:

Dans le premier cas on cherche à construire des inégalités souvent empiriques pour rendre compte de certaines observations physiques et aider à interpréter les résultats analytiques.

Le deuxième cas concerne la structure analytique de la fonction, on cherche certaines conditions mathématiques nécessaires pour assurer la régularité et l'existence de solutions pour le problème des équations d'équilibre. Ces conditions manquent souvent d'interprétation physique mais sont utilisées dans le critère de stabilité du matériau.

Ces inégalités peuvent varier d'un matériau à un autre; elles modélisent l'intuition que nous avons du comportement du matériau considéré.

Nous en citons quelques unes, on pourra les consulter dans le livre de Wang et Trusdell (1973).

**a - inégalités empiriques:**

$$\begin{aligned} \text{Matériau compressible} \quad & \beta_0 \leq 0 \quad , \quad \beta_1 > 0 \quad , \quad \beta_{-1} \leq 0 \\ \text{Matériau incompressible} \quad & \beta_1 > 0 \quad , \quad \beta_{-1} \leq 0 \end{aligned} \tag{II.4}$$

**b - inégalités de Baker - Ericksen:** Le déplacement doit s'effectuer dans le sens de la force appliquée:

$$(\tau_i - \tau_j)(\lambda_i - \lambda_j) > 0 \quad \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j,$$

soit:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 - \frac{1}{\lambda_a^2 \lambda_b^2} \beta_{-1} > 0 \quad \text{si } \lambda_a \neq \lambda_b \\ \beta_1 - \frac{1}{\lambda_a^2 \lambda_b^2} \beta_{-1} \geq 0 \quad \text{si } \lambda_a = \lambda_b \end{aligned} \right\} \tag{II.5}$$

**c - condition de compressibilité:** Si le volume d'un matériau élastique isotrope augmente (diminue) quand il est soumis à une tension (compression) uniforme alors la force doit augmenter (diminuer) lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ , soit:

$$(\bar{\tau} - \tau)(\bar{\lambda} - \lambda) > 0, \quad \bar{\tau} \neq \tau \tag{II.6}$$

Nous donnerons, dans le paragraphe (III.2) où seront passées en revue certaines densités d'énergie de déformations trouvées dans la littérature, les restrictions admises sur les coefficients de la fonction W.

Les restrictions imposées sur la fonction W en élasticité linéaire sont l'ellipticité des équations d'équilibre, la convexité de W et:

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad -1 < \nu_0 < \frac{1}{2} \tag{II.7}$$

Si l'on désire modifier la densité d'énergie afin d'élargir son domaine de validité en gardant la même corrélation avec les résultats antérieurs, la valeur de  $\mu$  doit être conservée. Ainsi, le nouveau problème d'approximation pour la fonction W doit être traité sous une "contrainte" de la forme  $\mu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N) = \mu$ .

Où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N$  sont les paramètres à déterminer de la nouvelle expression de la densité d'énergie.

## II RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS DE REPONSE ET LES COEFFICIENTS DE LAME

Le tenseur des déformations de Lagrange est défini par:

$$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} \quad (\text{II.8})$$

Les tenseurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  ont les mêmes invariants qui sont exprimés par:

$$I_1 = 3 - 2I_{1E} \quad ; \quad I_2 = 3 + 4I_{1E} + 4I_{2E} \quad ; \quad I_3 = 1 + 2I_{1E} + 4I_{2E} + 8I_{3E} \quad (\text{II.9})$$

On exprime alors les dérivés de  $W$  par rapport aux invariants de  $\mathbf{E}$ :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} &= \frac{\partial W}{\partial I_{1E}} - \frac{\partial W}{\partial I_{2E}} + \frac{1}{4} \frac{\partial W}{\partial I_{3E}} \\ 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial I_{2E}} - \frac{1}{4} \frac{\partial W}{\partial I_{3E}} \\ 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} &= \frac{1}{4} \frac{\partial W}{\partial I_{3E}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.10})$$

On suppose que  $W$  peut être développée sous la forme d'une série des invariants de  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} W(I_{1E}, I_{2E}, I_{3E}) &= l_0 I_{1E} + \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{2} I_{1E}^2 - 2\mu_0 I_{2E} + l_1 I_{1E}^3 + l_2 I_{2E}^3 + m_0 I_{1E} I_{2E} \\ &\quad + m_1 I_{1E}^2 I_{2E} + n_0 I_{3E} + n_1 I_{1E} I_{3E} + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

où  $\lambda_0, \mu_0, l_k, m_k$  et  $n_k$  sont des constantes.

Cela permet d'exprimer les fonctions de réponse au premier ordre par:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &\approx -3\mu_0 - \frac{n_0}{2} + I_{1E} \left[ -\mu_0 + \frac{3m_0}{2} - \frac{n_1}{2} \right] \\ \beta_1 &\approx 2\mu_0 + l_0 + \frac{n_0}{4} + I_{1E} \left[ \lambda_0 - l_0 - m_0 - \frac{n_0}{4} + \frac{n_1}{4} \right] \\ \beta_{-1} &\approx \mu_0 + \frac{n_0}{4} + I_{1E} \left[ \mu_0 - \frac{m_0}{2} + \frac{n_0}{4} + \frac{n_1}{4} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.12})$$

vient s'ajouter les relations supplémentaires:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 + \beta_{-1} &\approx l_0 + \lambda_0 I_{1E} \\ \beta_1 - \beta_{-1} &\approx \mu_0 + I_{1E} \left[ \lambda_0 - \mu_0 - l_0 - \frac{m_0}{2} - \frac{n_0}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.13})$$

### En élasticité linéaire:

Si la configuration de référence est relâchée (libre, état naturel) -  $l_0 = 0$  - alors:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \approx \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}, I_{1E} \approx I_{1\varepsilon} \\ \mathbf{T} = (\lambda_0 + \lambda_0 I_{1\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lambda_0=0} \left. \begin{aligned} \beta_0(3,3,1) &\approx -3\mu_0 - \frac{\nu_0}{2} \\ \beta_1(3,3,1) &\approx 2\mu_0 + \frac{\nu_0}{4} \\ \beta_{-1}(3,3,1) &\approx \mu_0 + \frac{\nu_0}{4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.14})$$

Pour tenir compte des restrictions émises par Truesdell sur la forme de la densité, alors:

$$n_0 < 0 \quad -\frac{n_0}{3} \leq 2\mu_0 \leq -\frac{n_0}{2} \quad (\text{II.15})$$

## III MATERIAUX HYPERELASTIQUES INCOMPRESSIBLES

La condition d'incompressibilité permet de simplifier le problème puisque "la contrainte":  $J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , réduit à deux le nombre de variables indépendantes de  $W$ .

Nous exposons les deux méthodes proposées pour déterminer la fonction  $W$ :

- à partir des courbes expérimentales liant les contraintes aux déformations, ou
- à partir des données expérimentales, déterminer la forme de la densité d'énergie.

### III.1. Corrélation avec les courbes expérimentales contraintes-déformations

#### III.1.1 Principe

Le principe est d'approcher, à partir d'une forme analytique de la densité d'énergie, les résultats expérimentaux que l'on possède sur les relations liant les contraintes aux déformations.

Considérons par exemple le cas où la fonction  $W$  est cherchée sous la forme d'une fonction des élongations principales:  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Les contraintes principales du tenseur de Cauchy défini sur la configuration déformée sont données par:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_i} - p \quad (\text{II.16})$$

où  $p$  désigne une pression hydrostatique arbitraire associée à la contrainte interne d'incompressibilité et où l'indice  $i$  varie de 1 à 3.

Considérons des expériences où la déformation est homogène, c'est à dire le tenseur  $F$  gradient de la déformation ne dépend pas du point considéré. Les élongations principales et les contraintes réelles de Cauchy sont alors indépendantes du point actuel et leurs valeurs sont imposées par les conditions aux limites et donc facilement mesurables.

En tenant compte de la condition d'incompressibilité on élimine la variable  $\lambda_3$  et on introduit la notation:

$$\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \tilde{W}(\lambda_2, \lambda_1) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}) \quad (\text{II.17})$$

Ce qui donne pour les équations (II.16):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \lambda_1 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_1} \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \lambda_2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_2} \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= \lambda_1 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.18})$$

La fonction  $\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2)$  est soumise aux limitations suivantes

$$\left. \begin{aligned} \tilde{W}(1,1) &= 0 & ; & & \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_1}(1,1) &= 0 & ; & & \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_2}(1,1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}(1,1) &= 2\mu & ; & & \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \lambda_1^2}(1,1) &= 4\mu & ; & & \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \lambda_2^2}(1,1) &= 4\mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.19})$$

pour retrouver les résultats de l'élasticité linéaire.

Le problème est alors d'ajuster les paramètres de la fonction  $\tilde{W}$ , dont la forme a été préalablement postulée, de manière à ce que chaque courbe  $(\lambda, \sigma(\lambda))$  approche le mieux possible la courbe expérimentale correspondante, constituée d'un nombre fini de points d'équilibre.

Traction simple	$\sigma_1 = \sigma$ $\lambda_1 = \lambda$	$\sigma_2 = 0$ $\lambda_2 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$	$\sigma_3 = 0$ $\lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$	$\sigma = \lambda \frac{d\tilde{W}}{d\lambda}, \tilde{W}(\lambda) = \tilde{W}(\lambda, \lambda^{-\frac{1}{2}})$
Cisaillement pur	$\sigma_1 = \sigma$ $\lambda_1 = \lambda$	$\sigma_2 = \sigma_2$ $\lambda_2 = 1$	$\sigma_3 = 0$ $\lambda_3 = \lambda^{-1}$	$\sigma = \lambda \frac{d\tilde{W}}{d\lambda}, \tilde{W}(\lambda) = \tilde{W}(\lambda, \lambda^{-1})$
Traction équi - biaxiale	$\sigma_1 = \sigma$ $\lambda_1 = \lambda$	$\sigma_2 = \sigma$ $\lambda_2 = \lambda$	$\sigma_3 = 0$ $\lambda_3 = \lambda^{-2}$	$\sigma = \frac{1}{2} \lambda \frac{d\tilde{W}}{d\lambda}, \tilde{W}(\lambda) = \tilde{W}(\lambda, \lambda)$

La même expression de la densité  $\tilde{W}$  doit permettre d'approcher correctement toutes les courbes expérimentales dont on dispose, en général on se contente des trois courbes relatives aux expériences classiques.

Lorsque les mesures expérimentales sont effectuées en termes de contraintes nominales, contraintes de Boussinesq, alors on utilise les courbes  $(\lambda, \pi_1(\lambda))$  pour être ajustées sur les résultats expérimentaux, avec:  $\pi_1(\lambda) = \lambda^{-1} \sigma(\lambda)$ .

La méthode généralement employée pour déterminer les valeurs des paramètres d'après les données expérimentales est la méthode des moindres carrés.

Nous avons utilisé la méthode du simplexe de Nelder Mead (*Annexe du chapitre II*) pour identifier les paramètres non - linéaires et la méthode des moindres carrés pour les paramètres linéaires de la fonction objectif.

Lorsque la fonction  $W$  est cherchée sous la forme d'une fonction de deux invariants principaux, les équations liant les contraintes à  $I_1$  et  $I_2$  sont plus compliquées et d'un emploi plus difficile:

$$\sigma_i = 2 \left( \lambda_i^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} \right) - p \quad (\text{II.20})$$

### III.1.2 Détermination expérimentale des paramètres de la densité d'énergie d'Ogden

Pour bien rendre compte simultanément des trois expériences classiques pour un caoutchouc, une série d'Ogden de trois termes est nécessaire. Un nombre supérieur de termes compliquerait les calculs sans fournir de réelle amélioration.

On obtient les excellents résultats de la figure (fig.II.1), pour les valeurs numériques suivantes des paramètres de la série:

$\mu_1 = 6.3 \text{ MN} / \text{m}^2$	$\mu_2 = 0.012 \text{ MN} / \text{m}^2$	$\mu_3 = -0.1 \text{ MN} / \text{m}^2$
$\alpha_1 = 1.3$	$\alpha_2 = 5$	$\alpha_3 = -2$

Il est peu probable qu'un nombre important d'autres expériences, même pour un domaine de déformation limité, puisse être décrit par cette même densité: plus on augmente le nombre d'expériences, plus il faut augmenter le nombre de termes de la série car il ne suffit pas de modifier la valeur de certains paramètres.

Il est à noter également qu'il n'y a pas unicité du développement à trois termes, une infinité de combinaison de ces paramètres donne la même précision.

## III.2 Détermination de la forme de la densité d'énergie à partir de données expérimentales

Le travail des forces extérieures est égal à la variation de la densité d'énergie de déformation. Pour la traction, par exemple, le travail des forces extérieures est égal à l'aire comprise sous la courbe donnant la charge en fonction de l'élongation principale correspondante.

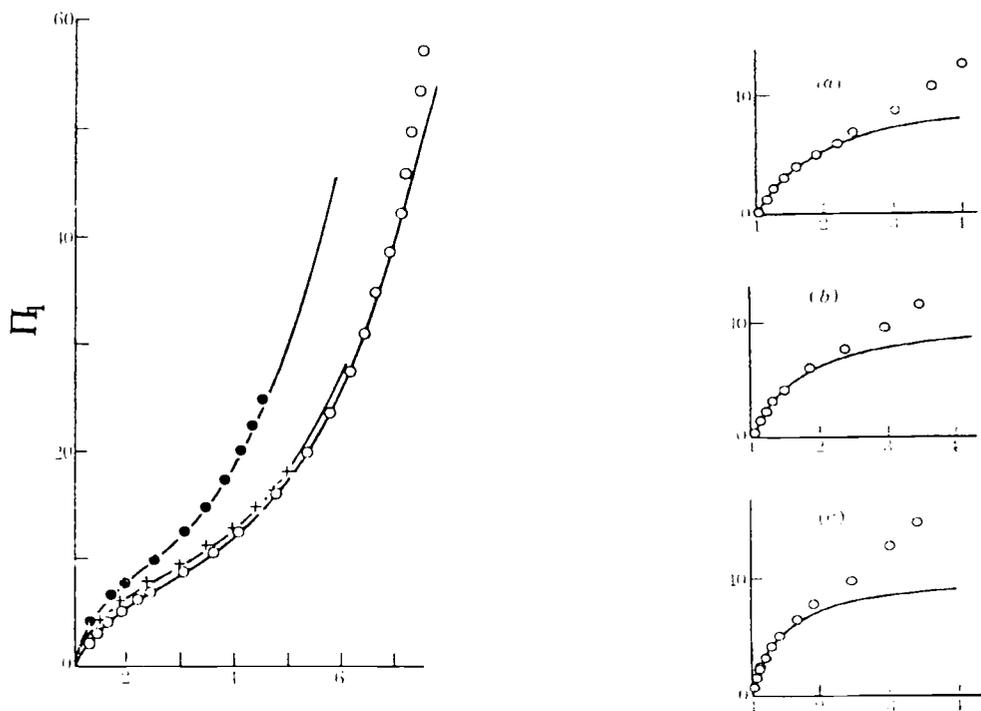


fig.II.1:

Comparaison des données expérimentales de L.R.G. Treloar ( caoutchouc ) et des courbes obtenues par la densité d'Ogden.

- : Traction équiaxiale.
- : Traction simple.
- + : Cisaillement pur.

Comparaison des données expérimentales de L.R.G. Treloar et d'une densité d'Ogden à un terme

- ( c ) : Traction équiaxiale.
- ( a ) : Traction simple.
- ( b ) : Cisaillement pur.

Par conséquent, les valeurs de la densité d'énergie peuvent être obtenues en mesurant l'aire comprise sous la courbe de la contrainte nominale fonction de l'élongation principale dans la direction de la charge.

On obtient ainsi une suite de valeurs numériques, exprimées par unité de volume de la configuration de référence, prises par la fonction  $\tilde{W}$  en certains points du plan  $I_1, I_2$ .

Il est alors possible d'approcher analytiquement le graphe de cette fonction, par des méthodes d'interpolation, sans passer par l'intermédiaire des équations liant les contraintes aux déformations.

La forme de la densité d'énergie  $W$  est déterminée d'après les remarques fondamentales suivantes portant sur les données de L.R.G. Treloar:

i) Les points  $W(I_1, I_2)$  forment une courbe concave pour  $(I_2 - 3)$  fixé à la valeur 6 et une courbe convexe pour  $(I_2 - 3)$  fixé à la valeur 11.8. Pour tenir compte de ce changement de courbure le développement doit aller jusqu'à l'ordre 3 en  $(I_1 - 3)$ .

ii) Expérimentalement, on observe que  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  et  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  dépendent de  $I_1$  et  $I_2$ , d'où la nécessité d'un terme de couplage en  $(I_1 - 3)(I_2 - 3)$ .

iii) Aucun changement de courbure en  $(I_2 - 3)$  à  $(I_1 - 3)$  fixé ne nous conduit à considérer de terme en  $(I_2 - 3)$  d'ordre supérieur à 2.

D'où la forme sous laquelle il est "raisonnable" de chercher la densité d'énergie de déformation:

$$\begin{aligned}
 W = & C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \\
 & + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3
 \end{aligned}
 \tag{II.21}$$

Il ne reste plus qu'à employer les méthodes numériques pour approcher la fonction  $W$ .

On montre (Haines et Wilson, (1979)) que les courbes théoriques de traction obtenues d'après cette surface approchent très bien les données expérimentales et que cette densité d'énergie peut prédire les déformations non -homogènes d'une membrane sphérique soumise à une pression interne.

$C_{10} = 0.179$	$\text{MN} / \text{m}^2$	$C_{11} = -8.46 \times 10^{-5}$	$\text{MN} / \text{m}^2$
$C_{01} = 0.0098$	$\text{MN} / \text{m}^2$	$C_{02} = -3.71 \times 10^{-5}$	$\text{MN} / \text{m}^2$
$C_{20} = -0.0018$	$\text{MN} / \text{m}^2$	$C_{30} = 4.45 \times 10^{-5}$	$\text{MN} / \text{m}^2$

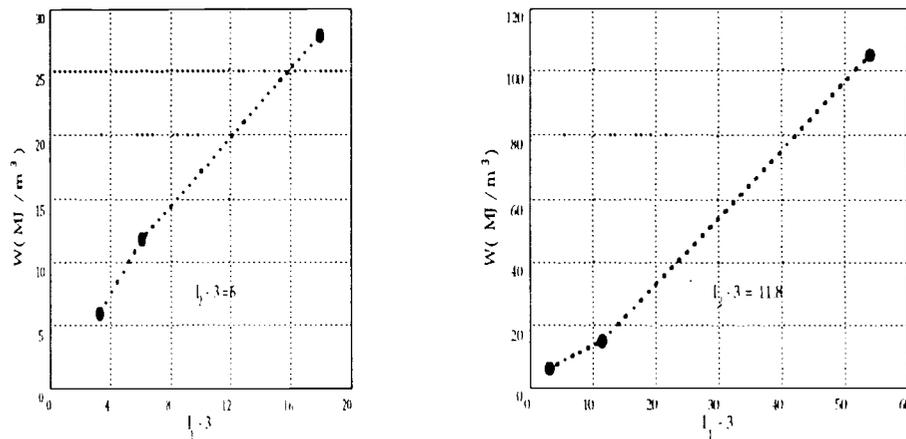


fig.II.2: Changement de concavité de la surface  $W(I_1, I_2)$  pour deux valeurs différentes de  $I_2 - 3$

### III.3 Remarques sur le manque de données pour déterminer une densité d'énergie

Que l'on calcule les valeurs prises par la densité d'énergie directement par intégration numérique des courbes expérimentales des contraintes nominales ou après avoir postulé la forme de cette fonction et en raisonnant sur les équations contraintes - déformations, il faut noter le peu de données dont on dispose.

Dans l'exemple où on cherche la densité sous la forme  $W(I_1, I_2)$ , les seules expériences fournissant des données aisément utilisables sont les trois expériences classiques. Or de tels tests constituent un échantillon bien peu représentatif de tous les phénomènes à considérer et semblent insuffisantes pour déduire, de leur seule étude, la fonction  $W$  puisque :

- les déformations sont supposées homogènes,
- les élongations  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont paramétrées par un seul nombre  $\lambda$  et donc,  $I_1, I_2$  ne pouvant être considérés comme variables indépendantes, il devient beaucoup plus difficile de déterminer les contributions respectives de ces deux termes. La courbe (fig.II.3) illustre les relations existant entre les deux invariants principaux  $I_1, I_2$  et pour chacune des trois expériences classiques.

On peut remarquer que les données expérimentales ne permettent pas un maillage satisfaisant du domaine d'élasticité en vue de l'approximation de la fonction  $W(I_1, I_2)$ .

D'une manière générale, il semble que la plupart des expériences effectuées fournissent des courbes  $(I_1, I_2)$  dans un voisinage immédiat de celle de la figure (fig.II.3); cela peut justifier le fait que l'on se contente souvent de ce maillage peu rigoureux.

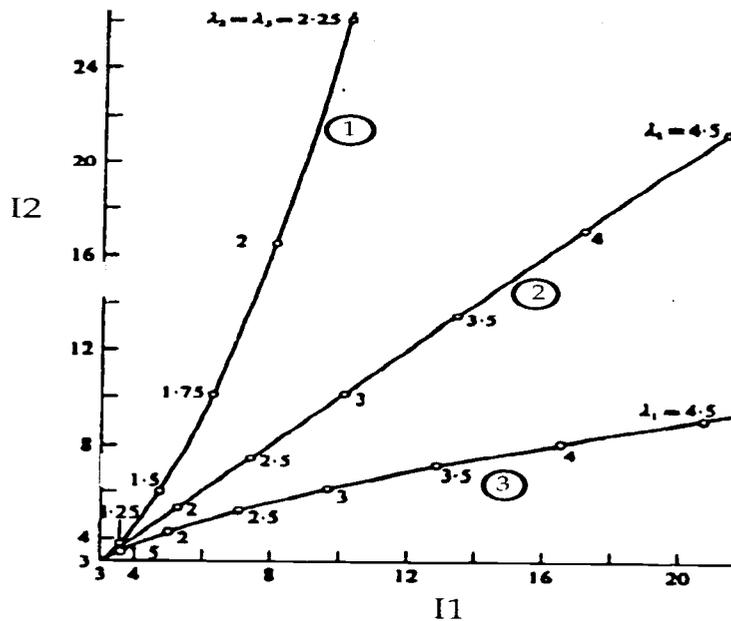


fig.II.3: Relations entre les deux invariants principaux pour différents types de déformations:

①: Traction équibiaxiale; ②: Cisaillement pur; ③: Traction simple

### III.4 Quelques densités d'énergie, (Ogden, 1984)

Nous présentons l'expression de certaines densités d'énergie pour des matériaux incompressibles. Nous attribuerons à ces modèles le nom des auteurs qui les proposèrent.

#### III.4.1 Matériau Néo-Hookien, (Ogden, (1972a))

$$W = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3) \quad (\text{II.22})$$

Ce modèle fournit une bonne approximation des courbes de traction, pour les trois expériences classiques, tant que les elongations principales restent inférieures à 2.. Pour des déformations plus importantes, on observe une nette déviation entre les courbes théoriques et les données expérimentales pour chacune des trois expériences.

Cette densité a été retrouvée par la théorie statistique des macromolécules d'un élastomère.

### III.4.2 Densité de Varga (Ogden, (1972a))

$$W = \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad (\text{II.23})$$

Ce modèle donne des résultats comparables au matériau Néo - Hookien pour la traction simple et le cisaillement pur, mais s'adapte moins bien aux données de la traction équibiaxiale.

Cette densité ne s'exprime pas de manière simple en fonction des deux invariants principaux  $I_1$ ,  $I_2$ .

### III.4.3 Densité de Mooney - Rivlin, (Chadwich, (1972))

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{II.24})$$

Cette expression constitue la forme la plus générale d'une approximation au premier ordre en  $I_1$  et  $I_2$  d'une densité d'énergie: elle représente l'équation (à une constante près) du plan tangent au point (3, 3) à toute fonction  $W(I_1, I_2)$ . Dès lors, pour des déformations suffisamment "petites", un choix judicieux des paramètres  $C_{10}$  et  $C_{01}$  fournit nécessairement une bonne approximation.

Cette densité correspond également à la solution particulière  $\beta_1 = 2C_{10}$ ,  $\beta_{-1} = -2C_{01}$  de l'équation de compatibilité:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial I_2} + \frac{\partial \beta_{-1}}{\partial I_1} = 0 \quad (\text{II.25})$$

Pour certains caoutchoucs, ce modèle fournit de bons résultats pour des élongations pouvant atteindre 4 dans chaque expérience classique; pour d'autres caoutchoucs, la forme de cette densité se révèle très irréaliste, même pour des élongations faibles.

Pour tous les caoutchoucs on peut mettre expérimentalement en évidence la dépendance en ( $I_1$ ,  $I_2$ ) des dérivées partielles premières de la fonction  $W$ , et l'on ne peut donc espérer un modèle linéaire en  $I_1$  et  $I_2$  totalement satisfaisant.

Plusieurs auteurs ont poussé plus loin le développement de Taylor de la fonction  $W$ , les résultats les plus significatifs sont attribués à Haines et Wilson.

Pour le caoutchouc étudié par Mooney, on a:  $C_{10} = 0.183 \text{ MN/m}^2$ ,  $C_{01} = 0.034 \text{ MN/m}^2$ .

### III.4.4 Densité de Haines - Wilson, (1979)

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (\text{II.26})$$

Ce modèle fournit une excellente approximation des courbes de traction des trois expériences classiques pour des élongations inférieures à 7.4 en traction simple et inférieures à 4 en cisaillement pur et en traction équibiaxiale. Il permet également une bonne description du gonflement non homogène d'une membrane sphérique.

Pour le caoutchouc étudié par Treloar, on a:

$C_{10} = 0.179$	MN / m <sup>2</sup>	$C_{11} = -8.46 \times 10^{-5}$	MN / m <sup>2</sup>
$C_{01} = 0.0098$	MN / m <sup>2</sup>	$C_{02} = -3.71 \times 10^{-5}$	MN / m <sup>2</sup>
$C_{20} = -0.0018$	MN / m <sup>2</sup>	$C_{30} = 4.45 \times 10^{-5}$	MN / m <sup>2</sup>

### III.4.5 Densité de Hart - Smith, (Ogden, (1972a))

$$W = \mu_1 \int e^{\nu_1(I_1-3)^2} dI_1 + \mu_2 \ln(I_2/3) \quad (\text{II.27})$$

Cette expression fournit de bons résultats pour des élongations inférieures à 3 et garde une bonne tendance en grande élongation, mais semble trop compliquée pour permettre la résolution explicite de problèmes. En outre, cette densité ne convient pas pour tous les caoutchoucs.

### III.4.6 Densité d'Alexander, (Ogden, (1972a))

$$W = \mu_1 \int e^{\nu_1(I_1-3)^2} dI_1 + \mu_2 \ln\left(\frac{I_2 + \nu_2 - 3}{\nu_2}\right) + \mu_3(I_2 - 3) \quad (\text{II.28})$$

Cette expression généralise la densité de Hart - Smith pour les néoprènes.

### III.4.7 Densité d'Ogden, (1972a), (1972b), (1976), (1978), (1984)

Les densités proposées précédemment et basées sur un développement de la série de Taylor en  $(I_1, I_2)$  tendent à être très encombrantes et ne permettent pas une bonne description des courbes pour les grandes élongations. La densité proposée par Ogden permet (i) une bonne description des réponses des matériaux caoutchouteux dans un intervalle plus important des élongations et (ii) est simple pour les analyses mathématiques.

$$W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (\text{II.29})$$

Pour le caoutchouc étudié par Treloar, les valeurs numériques des paramètres sont:

$\mu_1 = 6.3$	$\text{MN} / \text{m}^2$	$\alpha_1 = 1.3$
$\mu_2 = 0.012$	$\text{MN} / \text{m}^2$	$\alpha_2 = 5$
$\mu_3 = -0.1$	$\text{MN} / \text{m}^2$	$\alpha_3 = -2$

Le second coefficient de Lamé de ce caoutchouc est exprimé par:

$$2\mu = \sum \alpha_n \mu_n \quad (\text{II.30})$$

Ogden utilise l'inégalité de Hill et impose si les paramètres de la série sont indicés par ordre croissant, la condition (C.N.):

$$2\mu = (\sum \alpha_n \mu_n) > 0 \quad (\text{II.31})$$

comme étant nécessaire pour avoir un comportement physique raisonnable pour le matériau modélisé par cette densité. Il proposa une série de conditions suffisantes (C.S.):

$$\alpha_1 \mu_1 > 0 ; \alpha_2 \mu_2 > 0 ; \dots ; \alpha_N \mu_N > 0 \quad (\text{II.32})$$

N est le nombre de paramètres identifiés pour le matériau.

Cette densité fournit une excellente corrélation avec les données expérimentales pour des élongations inférieures à 7 en traction simple et inférieures à 4 en

cisaillement pur et traction équi-biaxiale; elle rend compte de certains phénomènes de bifurcation.

En outre, cette expression est polyconvexe et permet l'application de la théorie de J. Ball.

Les densités de Haines - Wilson et d'Ogden ont été déterminées à partir des données expérimentales effectuées par Treloar; contrairement à la première, la seconde est polyconvexe.

Par conséquent, on a obtenu, pour le même matériau, par deux méthodes différentes, deux modèles de densités d'énergie donnant globalement la même précision dans le même domaine de validité, l'une polyconvexe, l'autre non.

Ceci illustre les difficultés rencontrées lorsque l'on désire faire des hypothèses mathématiques "raisonnables" sur la densité d'énergie d'un matériau.

Les paramètres non - linéaires de la série permettent de donner l'allure souhaitée à la courbe réponse du matériau et le domaine de validité du terme de la série, alors que les paramètres linéaires ajustent la combinaison optimale des monômes de la série pour étendre le domaine de validité de la densité.

Successivement on a identifié un terme qui permet de donner un bon comportement du modèle en faibles élongations; puis on a rajouter un autre terme qui rallonge le domaine de validité du modèle aux élongations modérées. Le troisième terme permet de tenir compte de l'élongation maximale - asymptote verticale - et de donner au modèle un domaine de validité plus large.

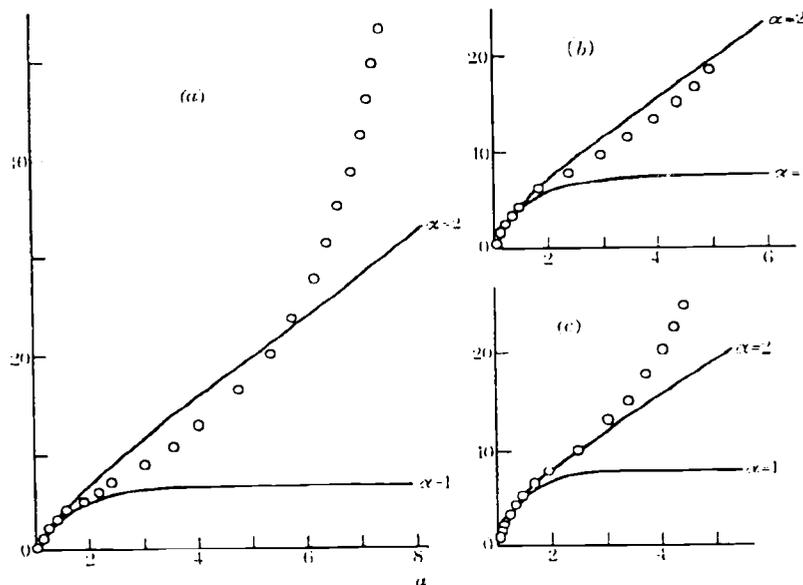


fig.II.4: Comparaison des données expérimentales de Treloar avec le modèle:

Néo - Hookien ( $\alpha = 2$ ), Densité de Varga ( $\alpha = 1$ ).

(a): Traction simple, (b): Cisaillement pur, (c): Traction équi-biaxiale.

### III.4.8 Densité d'Ogden non séparable, (Ogden, (1979), (1984))

$$W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu_m}{\beta_m} ((\lambda_1 \lambda_2)^{\beta_m} + (\lambda_3 \lambda_2)^{\beta_m} + (\lambda_1 \lambda_3)^{\beta_m} - 3) \quad (\text{II.33})$$

Cette densité fournit une précision comparable au modèle précédent pour les trois expériences classiques.

Les termes de couplage prennent en compte l'observation de la non - séparabilité de la densité d'énergie pour le gonflement et l'extension d'un cylindre de caoutchouc.

### III.4.9 Matériaux à paramètre durcissant de Knowles - Sternberg, (1973)

$$W = \frac{\mu}{2b} \left[ 1 + \frac{b}{n} (I_1 - 3) \right]^n - 1; \quad \mu > 0, \quad n > 0, \quad b > 0 \quad (\text{II.34})$$

Cette densité fut introduite afin d'explicitier une solution du problème de cisaillement anti - plan au voisinage d'une fissure.

Pour ce problème les équations d'équilibre sont partout elliptiques dès que le paramètre  $n$  est supérieur à  $1/2$ ; pour des valeurs inférieures à  $1/2$ , les équations peuvent perdre localement leur ellipticité quand le gradient du déplacement est de norme supérieure à la valeur  $k_0$  pour laquelle la contrainte de cisaillement atteint un maximum.

On peut ajuster les paramètres  $\mu$  et  $b$ , pour certaines valeurs de  $n$ , de manière à approcher les courbes expérimentales de cisaillement et de traction simple de quelques caoutchoucs.

Le cas  $n = 1$  correspond au modèle Néo - Hookien.

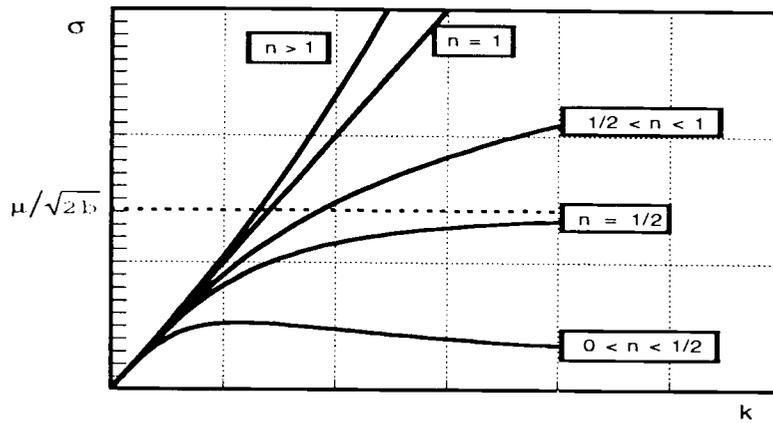


fig.II.5: Contrainte réelle de cisaillement simple pour un déplacement de la forme:  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = KX_2$

### III.4.10 Densité de Fung pour les tissus biologiques

$$W = h(I_1 - 3) + \frac{\beta}{2}(I_2 - 3); \quad h(0) = 0 \quad (\text{II.35})$$

Cette densité est obtenue à partir de la théorie moléculaire proposée par Tatibana(1951), dont un cas fut repris par Fung pour les tissus biologiques:

$$\beta = 0 \Rightarrow W = h(I_1 - 3); \quad W = \frac{\mu}{2\gamma} \left[ e^{\gamma(I_1 - 3)} - 1 \right] \quad (\text{II.36})$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement et  $\gamma$  une autre constante, utilisée souvent en biomécanique pour décrire la réponse élastique non - linéaire du tissu biologique. Pour  $\gamma = 0$  on obtient le matériau Néo - Hookien.

Les inégalités constitutives imposent que  $\mu > 0$ , alors que  $\gamma \geq 0$  pour avoir  $W$ , fonction croissante.

## IV MATERIAUX HYPERELASTIQUES COMPRESSIBLES

Dans de nombreux problèmes, le modèle incompressible conduit à une excellente description de la réponse mécanique de certains matériaux. Cependant, tous les matériaux réels sont compressibles à divers degrés, et l'hypothèse  $I_3 = 1$  peut conduire, pour certains problèmes aux limites, à des résultats considérablement faussés.

Nous cherchons donc, la densité d'énergie sous la forme:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tilde{W}(I_1, I_2, I_3) \quad (\text{II.37})$$

Outre la corrélation entre les courbes théoriques et les courbes expérimentales, la bonne prédiction des variations de volume devient une condition nécessaire pour le choix d'une densité d'énergie.

La variation relative de volume est donnée par:

$$\varepsilon = J - 1, J = \det(\mathbf{F}). \quad (\text{II.38})$$

Nous présentons deux méthodes utilisées pour déterminer cette fonction  $W$ .

### IV.1 Détermination de la densité d'énergie à partir d'un modèle incompressible: Matériaux presque incompressibles

Un matériau est dit "presque incompressible" si le rapport des deux coefficients de Lamé  $\mu/\lambda$  est petit devant 1, en pratique de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les densités proposées pour les matériaux incompressibles fournissent une variation de volume du même ordre. On cherche à perturber ces modèles incompressibles de manière à ce que les nouveaux termes, prenant en compte les variations de volume, modifient le moins possible les courbes de traction.

Nous exposons ici deux méthodes envisagées par Ogden, (1972b), (1976), (1978), (1984).

### IV.1.1 Addition d'un terme ne dépendant que de la variation de volume

On ajoute à la densité incompressible une fonction du troisième invariant, que nous notons  $\Gamma(J)$ , soit:

$$W(I_1, I_2, I_3) = W(I_1, I_2) + \Gamma(J) \quad (\text{II.39})$$

On introduit la fonction  $g$  définie par:

$$g(J) = \frac{\Gamma(J) - \Gamma'(1)\text{Ln}(J)}{\Gamma'(1) + \Gamma''(1)} \quad g(1) = g'(1) = 0, \quad g''(1) = 1 \quad (\text{II.40})$$

La compression et l'extension uniformes étant respectivement accompagnées d'une diminution et d'une augmentation de volume, la fonction  $g$  doit vérifier:

$$\left. \begin{array}{l} g'(J) < 0 \quad \text{si} \quad J < 1 \\ g'(J) > 0 \quad \text{si} \quad J > 1 \end{array} \right\} \quad (\text{II.41})$$

Il est en outre "raisonnable" de supposer que la contrainte nominale, dans chacune de ces expériences, est une fonction croissante de  $J$  (cette propriété, vérifiée en compression, n'est qu'une hypothèse dans le cas de l'extension), d'où la condition:

$$g''(J) > 0 \quad \text{pour tout } J \quad (\text{II.42})$$

Ces conditions permettent donc de restreindre le domaine de fonctions  $g$  acceptables. Pour un caoutchouc, décrit initialement par la série d'Ogden, une fonction  $g$  proposée dans Ogden(1972b) conduit à l'expression:

$$g(J) = \{\beta \ln J + J^{-\beta} - 1\} \beta^{-2}; \quad \Gamma(J) = (\lambda \beta^{-1} - \sum \mu_n) \ln J + \lambda \beta^{-2} (J^{-\beta} - 1) \quad (\text{II.43})$$

$\lambda = \Gamma'(1) + \Gamma''(1)$ , est le premier coefficient de Lamé.

Le paramètre  $\beta$  peut être ajusté de manière à obtenir une excellente corrélation avec les données expérimentales liant la contrainte nominale de pression aux variations de volume, pour le problème mixte homogène de compression uniaxiale d'un cylindre de caoutchouc avec déplacement nul imposé sur la paroi latérale.

Afin d'obtenir des résultats d'existence pour une telle densité d'énergie, J. Ball suppose que la fonction  $\Gamma$  est coercive:  $\Gamma(J) > dJ^r$  avec  $d > 0$  et  $r > 1$ ,

convexe sur  $]0, +\infty[$ , et continue à l'infini:  $\lim_{J \rightarrow 0^+} \Gamma(J) = +\infty$

## IV.1.2 Décomposition en parties isochore et dilatationnelle

On introduit les nouvelles variables:

$$\lambda_1^* = \lambda_1 J^{-1/3} \quad \lambda_2^* = \lambda_2 J^{-1/3} \quad \lambda_3^* = \lambda_3 J^{-1/3} \quad (\text{II.44})$$

On cherche la densité d'énergie du modèle compressible sous la forme:

$$W(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, J) \quad (\text{II.45})$$

Les variables  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ , vérifiant  $\lambda_1^* \lambda_2^* \lambda_3^* = 1$ , représentent la partie isochore de la déformation et  $J$  la partie dilatationnelle.

La densité  $W(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1)$  correspond au modèle incompressible initial, dit modèle incompressible associé.

Une manière de déterminer la densité d'énergie du modèle est de développer l'expression  $W$  en série de Taylor par rapport à  $J$  au voisinage de 1, le premier terme devant reproduire le modèle incompressible associé. Il reste alors à postuler la forme mathématique des coefficients de  $(J-1), (J-1)^2, \dots$  fonctions des variables  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ .

En pratique, on néglige les termes d'ordre supérieur à deux.

$$\begin{aligned} W(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, J) = & W(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1) + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial J}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial J^2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

$$\varepsilon = \left[ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left\{ \lambda_i^* \frac{\partial W}{\partial \lambda_i^*}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1) \right\} - \frac{\partial W}{\partial J}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1) \right] / \frac{\partial^2 W}{\partial J^2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, 1) \quad (\text{II.47})$$

$$W(1, 1, 1, 1) = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial J}(1, 1, 1, 1) = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial J^2}(1, 1, 1, 1) = \kappa \quad (\text{II.48})$$

$\kappa$  est le module de compressibilité du matériau ( $3\kappa = 3\lambda + 2\mu$ ).

On cherche alors des expressions analytiques des dérivées partielles premières et secondes de la fonction  $W$ , telles que l'équation (II.47) permette d'approcher, pour les trois expériences classiques, les mesures expérimentales des variations de volume en fonction des élongations principales.

## IV.2 Détermination de la densité d'énergie par résolution d'une équation différentielle avec second membre empirique

Peng et Landel, (1975) ont cherché la densité d'un caoutchouc sous la forme:

$$W(\Gamma_1, \Gamma_2, \varepsilon) \quad (\text{II.49})$$

où  $\Gamma_1, \Gamma_2$  sont les invariants, tels que:

$$\Gamma_1 = I_1/I_3^{1/3} \quad ; \quad \Gamma_2 = I_2/I_3^{2/3} \quad (\text{II.50})$$

Les contraintes de pressions non uniformes  $P_{11}, P_{22}, P_{33}$  agissant normalement sur les faces d'un cube vérifient:

$$\frac{\partial W(\Gamma_1, \Gamma_2, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -\frac{P_{11} + P_{22} + P_{33}}{3} \quad (\text{II.51})$$

Les données expérimentales permettent de déterminer une expression empirique simple du second membre de l'équation (II.51) fonction de la variation de volume, donc de  $\varepsilon$ . D'où une équation de la forme:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\Gamma_1, \Gamma_2, \varepsilon) = -\tilde{p}(\varepsilon) \quad (\text{II.52})$$

où  $\tilde{p}(\varepsilon)$  est une expression analytique approchant la courbe de pression. Pour l'échantillon étudié Peng a proposé:

$$-\tilde{p}(\varepsilon) = \frac{1}{\kappa} \varepsilon \quad (\text{II.53})$$

L'intégration de l'équation (II.52) à  $\Gamma_1, \Gamma_2$  constants conduit alors à:

$$W(\Gamma_1, \Gamma_2, \varepsilon) = \left[ \frac{g(\Gamma_1, \Gamma_2)}{2\kappa} \right] \varepsilon^2 + h(\Gamma_1, \Gamma_2) \quad (\text{II.54})$$

où les fonctions  $g$  et  $h$  peuvent être précisées à partir des données expérimentales relatives aux courbes de traction.

## IV.3 Quelques densités d'énergie de matériaux compressibles

### IV.3.1 Matériau Néo - Hookien compressible

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \lambda(J - 1) - (\lambda + \mu)\text{Ln}J \quad (\text{II.55})$$

Cette forme modifiée du modèle Néo - Hookien incompressible prend en compte la courbe expérimentale de variations de volume en compression uniforme; quant aux courbes de traction des trois expériences classiques, la qualité de l'approximation est la même que celle du modèle incompressible.

### IV.3.2 Densité de Saint-Venant-Kirchhoff, (Ciarlet, (1981), (1982))

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\lambda}{2}(\text{tr}E)^2 + \mu\text{tr}(E^2) \\ W &= -\frac{3\lambda + 2\mu}{4}\text{tr}C + \frac{\lambda}{4}\text{tr}(\text{adj}C) + \frac{3\lambda + 2\mu}{8}\text{tr}(C^2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.56})$$

$\text{adj}C$  est la transposée de la matrice des cofacteurs de  $C$ .

Ce modèle, particulièrement bien adapté aux aciers puisque la loi de comportement est linéaire en  $E$ , facilite les calculs numériques, mais la présence du coefficient négatif de  $\text{tr}C$  rend impossible l'approche théorique de Ball (la fonction  $W$  n'est pas polyconvexe) tout en restant compatible avec l'inégalité de Hill.

### IV.3.3 Densités de Ciarlet - Geymonat, (Davet, 1982)

$$\left. \begin{aligned} W &= \alpha_1\text{tr}C + \beta_1\text{tr}(\text{adj}C) + \alpha J^2 - \beta\text{Ln}J \\ W &= \alpha_1\text{tr}C + \beta_1\text{tr}(\text{adj}C) + \delta\text{tr}(C^2) + \alpha J^2 - \beta\text{Ln}J \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.57})$$

où  $\alpha_1, \beta_1, \delta, \alpha, \beta$  sont des constantes positives,  $\text{adj}C$  est la transposée de la matrice des cofacteurs de  $C$ .

La première densité (II.4.21)<sub>a</sub> est polyconvexe, coercive, continue à l'infini, et permet l'application des théorèmes d'existence de Ball. Son domaine de validité est identique à celui d'une densité de Mooney-Rivlin pour les courbes de traction des trois expériences classiques. Les deux derniers termes ne dépendent que de  $J$  permettent la description de certains phénomènes propres au comportement d'un caoutchouc soumis à compression ou extension uniformes: diminution de volume en compression, augmentation de volume en extension, croissance de la contrainte nominale en fonction de  $J$ .

Cette densité ne permet pas de décrire correctement les courbes de variations de volume en traction simple et compression uniaxiale (Davet, 1985).

La seconde densité est également polyconvexe, coercive et continue à l'infini. Ses trois premiers termes reproduisent la forme du modèle de Saint - Venant - Kirchhoff.

#### IV.3.4 Densité d'Antman, (1979)

$$W = \alpha J^{-m} + \frac{\beta}{p} [\text{tr}(\sqrt{C})]^p + \frac{\gamma}{p} (\sqrt{\text{tr}C})^p \quad (\text{II.58})$$

$\alpha, \beta, \gamma, m$  et  $p$  sont des constantes positives.

Ce modèle fut introduit afin d'obtenir des résultats d'existence pour les problèmes de l'éversion des coques sphériques.

#### IV.3.5 Densité de Fong - Penn, (1975); (Ogden, (1976))

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + \dots + H(I_1, I_2)(I_3 - 1) + \frac{1}{8\kappa}(I_3 - 1)^2 \quad (\text{II.59})$$

où  $C_1, C_2$  sont des constantes,  $\kappa$  est le module de compressibilité du caoutchouc considéré et  $H$  une fonction à valeurs réelles.

A partir du rapport formel existant entre un matériau hyperélastique et un fluide viscoélastique non-linéaire, Fong et Penn ont obtenu, à partir de la décomposition du potentiel scalaire de ce fluide, une forme générale de  $W$  qui, adaptée aux courbes expérimentales de contrainte et de variations de volume en traction simple, conduit à cette densité.

Ce modèle donne d'excellents résultats pour les courbes de contraintes et de variations de volume en traction simple pour des élongations inférieures à 2 mais ne permet pas d'obtenir des valeurs négatives de  $J - 1$  en traction simple.

### IV.3.6 Densité de Peng-Landel, (1975)

$$W = \frac{c_1}{2}\Gamma_1 + \frac{c_2}{2}\Gamma_2 + \frac{1}{2K}(\Gamma_1/\Gamma_2)(\sqrt{\Gamma_3} - 1)^2 \quad (\text{II.60})$$

$$\text{avec } \Gamma_1 = I_1/I_3^{1/3}, \quad \Gamma_2 = I_2/I_3^{2/3}, \quad \Gamma_3 = I_3$$

Cette densité fournit, pour un caoutchouc, une excellente approximation des courbes expérimentales de contrainte et de variations de volume en traction simple pour des élongations inférieures à 2.

### IV.3.7 Densité de Flory-Tatara, (1975)

$$W = \alpha \text{tr} \mathbf{C} + \beta J^{m-2} \text{tr}(\text{adj} \mathbf{C}) - \frac{\alpha}{2} \text{Ln} J \quad (\text{II.61})$$

$\text{adj} \mathbf{C}$  est la transposée de la matrice des cofacteurs de  $\mathbf{C}$ .

Ce modèle fut établi, pour un certain type de polymères, à partir de la théorie moléculaire - théorie micro mécanique - . Pour  $m = 1/2$ , on obtient, en traction simple, avec un choix correct de  $\alpha$  et  $\beta$ , une bonne description des courbes de contrainte et variations de volume tant que l'élongation principale reste inférieure à 2. Pour  $J = 1$ , on retrouve la densité de Mooney - Rivlin.

### IV.3.8 Densité d'Ogden avec addition d'un terme ne dépendant que de $J$ , (Ogden, (1972b))

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \Gamma(J) \quad ; \quad \Gamma(J) = \left( \frac{\lambda}{\beta} - \sum_{i=1}^n \mu_i \right) \text{Ln} J \quad (\text{II.62})$$

La corrélation avec les courbes de traction des trois expériences classiques est identique à celle obtenue pour le modèle incompressible associé.

Pour toute valeur de  $\beta$  entre 9 et 11, on obtient une excellente description des courbes expérimentales de variations de volume fonction de la pression pour le problème mixte de compression uniaxiale. La fonction  $\Gamma(J)$  ne donne pas une allure générale correcte de la courbe de variations de volume en traction simple.

### IV.3.9 Densité de Knowles-Sternberg, (1973)

$$W = [\alpha I_1 + \beta I_2/\sqrt{J} + \gamma J + \delta]^n \quad (\text{II.63})$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des constantes réelles et  $n$  un nombre entier.

Ce modèle est une généralisation du matériau proprement dit de Blatz - Ko, permettant une perte d'ellipticité des équations d'équilibre et générant, en contraintes planes, un potentiel élastique adapté aux problèmes de rupture.

### IV.3.10 Densité de Swanson, (1985)

$$W = \sum \frac{3A_i(I_1/3)^{1+\alpha_i}}{2(1+\alpha_i)} + \sum \frac{3B_i(I_2/3)^{1+\beta_i}}{2(1+\beta_i)} + \frac{1}{2} \int_0^{I_3} g(\xi)d\xi - \frac{1}{2}(\sum A_i + 2\sum B_i)\text{Ln}I_3 \quad (\text{II.64})$$

$$g(I_3) = D(I_3 - 1); \quad D = \frac{\mu}{2} - \frac{1}{3}(\sum A_i(1+\alpha_i) + 4\sum B_i(1+\beta_i)); \quad \mu = \sum A_i + \sum B_i$$

Cette densité fut proposée pour étendre le domaine des densités écrites en fonction des trois invariants et utilisées dans le code de calcul des structures ADINA.

Une densité à huit termes a donné d'excellents résultats pour les données expérimentales de Treloar, avec:

$\alpha$	-0.3	0.2	0.7	1.5
A(MPa)	0.0267	0.3594	-0.1107	0.0107
$\beta$	-0.15	0.1	0.35	0.75
B(MPa)	0.0752	-0.0359	0.0057	-0.0002

Si l'état de configuration est relâché,  $W(3,3,1) = 0$ , alors l'égalité supplémentaire doit être vérifiée:

$$-\frac{1}{3} \int_0^1 g(\xi)d\xi = \sum \frac{A_i}{1+\alpha_i} + \sum \frac{B_i}{1+\beta_i} \quad (\text{II.65})$$

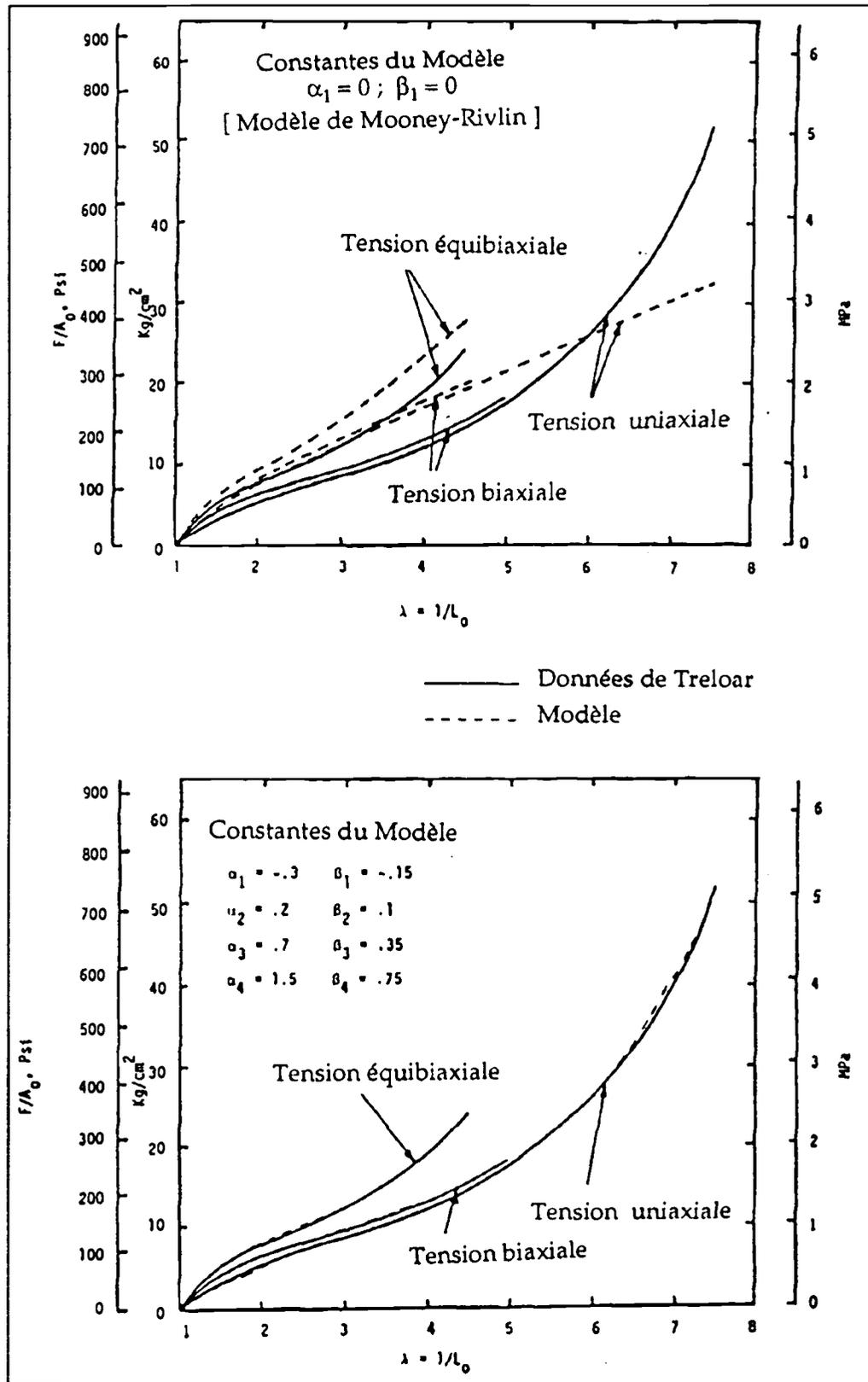


fig.II.6: Comparaison des données de Treloar (1944) avec les modèles de Mooney-Rivlin (a), et de Swanson à 8 paramètres (b).  
 [ D'après Swanson, (1985)]

### IV.3.11 Matériaux de Levinsen-Burgen

$$W(J_1, J_2, J_3) = \frac{\mu}{2} \left[ \gamma(J_1 - 3) + (1 - \gamma)(J_2 - 3) + 2(1 - 2\gamma)(J_3 - 1) + (2\gamma + \beta)(J_3 - 1)^2 \right] \left. \vphantom{W(J_1, J_2, J_3)} \right\} \quad (\text{II.66})$$

$$\beta = \frac{4\nu_0 - 1}{1 - 2\nu_0}$$

Si on cherche à trouver les matériaux purement compressibles de Levinsen-Burgen ( $\nu_0 = 0$ ) on obtient  $\beta \equiv -1$  et:

$$W(J_1, J_2, J_3) = \frac{\mu}{2} \left[ \gamma(J_1 - 3) + (1 - \gamma)(J_2 - 3) + (2\gamma - 1)(J_3 - 1)(J_3 - 3) \right] \quad (\text{II.67})$$

L'essai de compression simple est réalisable sur ces matériaux si  $\gamma = 1/2$ , c'est à dire:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv -1 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(\lambda_0) = \frac{\mu}{2} (\lambda_0 - \lambda_0^{-3}) \\ \pi_2(\lambda_0) = \pi_3(\lambda_0) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow[\mu > 0]{\forall \lambda_0 \in ]0; 1]} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(\lambda_0) \leq 0 \\ \pi_1'(\lambda_0) = \frac{\mu}{2} (1 + 3\lambda_0^{-4}) > 0 \\ \pi_1''(\lambda_0) = -6\mu\lambda_0^{-5} < 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II.68})$$

Cela montre qu'on ne peut pas avoir de point d'inflexion de la courbe contrainte déformation pour l'essai de compression simple; et par conséquent ces matériaux ne peuvent être candidats à la modélisation de la mousse étudiée.

Nous allons traiter deux cas particuliers des matériaux de Levinsen-Burgen.

#### Cas 1 $\gamma = 0$

$$W(J_1, J_2, J_3) = \frac{\mu}{2} \left[ J_2 - 3 + 2(J_3 - 1) + \beta(J_3 - 1)^2 \right] \left. \vphantom{W(J_1, J_2, J_3)} \right\} \quad (\text{II.69})$$

$$\beta_0 = \mu(1 + \beta(J_3 - 1)); \quad \beta_1 = 0; \quad \beta_{-1} = -\mu J_3^{-1}$$

L'essai de compression simple donne:

$$\pi_1(\lambda_0) = \mu(J_3^{-1} - \lambda_0^{-3}) \quad ; \quad \beta J_3^3 + (1 - \beta)J_3^2 = \lambda_0 \quad (\text{II.70})$$

La fonction  $J_3(\lambda_0)$  (fig.II.7) doit être strictement décroissante et comprise dans l'intervalle  $]0, 1]$  donc la seconde équation ne sera vérifiée, alors que si  $\beta \in ]-2, 1]$ .

Dans ce cas la courbe contrainte-déformation (fig.II.8) ne présente pas de point d'inflexion.

Ces matériaux ne conviennent pas non plus pour la modélisation de la mousse.

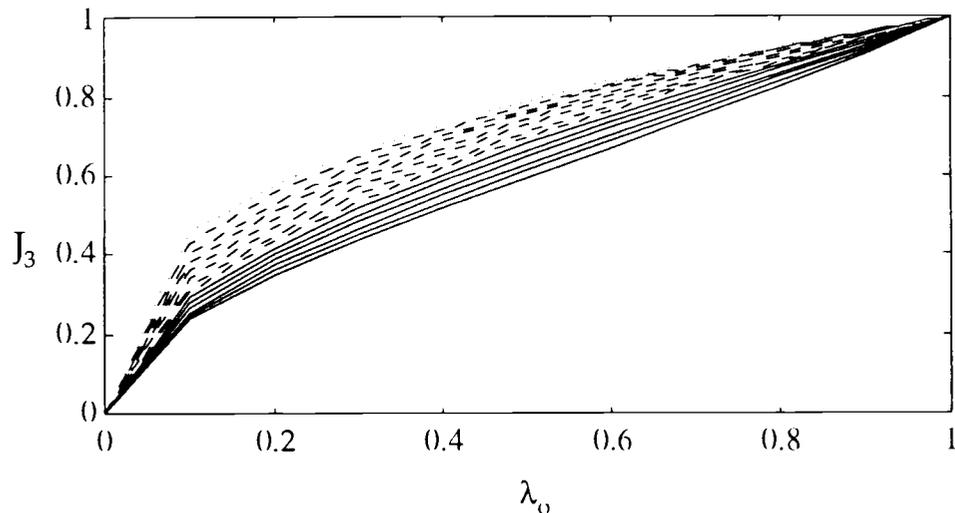


fig.II.7: Matériaux de Burgin-Levinsen:  $\gamma = 0$ ;  $J_3(\lambda_0)$

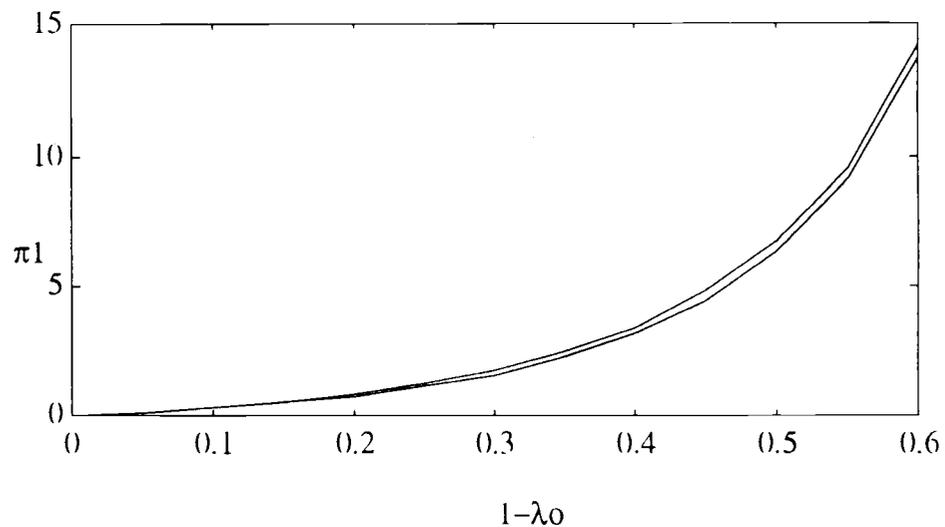


fig.II.8: Matériau de Levinsen-Burgin: Cas  $\gamma = 0$   
contrainte nominale: Essai de compression simple.

### Cas 2 $\gamma = 1$

$$\left. \begin{aligned} W(J_1, J_2, J_3) &= \frac{\mu}{2} \left[ J_1 - 3 - 2(J_3 - 1) + (\beta + 2)(J_3 - 1)^2 \right] \\ \beta_0 &= \mu \left[ (1 + \beta)(J_3 - 1) - 1 \right]; \quad \beta_1 = \mu J_3^{-1}; \quad \beta_{-1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.71})$$

La contrainte - dans l'essai de compression simple - est:

$$\pi_1 = \mu \left[ \lambda_0 - \frac{J_3}{\lambda_0^2} \right]; \quad J_3 = \frac{(3 + \beta)\lambda_0 - 1}{(2 + \beta)\lambda_0}; \quad \beta \in ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[ \quad (\text{II.72})$$

### Cas général

Il est à noter qu'on doit avoir  $J_3 = 1$  pour  $\lambda_0 = 1$  il est donc nécessaire et suffisant dans ce cas que  $\gamma = 2/3$ .

On remarque que pour  $J_3$  positif et inférieur à 1,  $\lambda_0$  est supérieur ou égal à 1, quel que soit  $\beta$  voisin de -1.

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\mu}{\lambda_0} \left[ 1 - 2\gamma + (2\gamma + \beta)(J_3 - 1) \right] + \mu\gamma\lambda_0 - \frac{\mu(1 - \gamma)}{\lambda_0^3} \\ \lambda_0 &= \frac{1 - \gamma + \sqrt{\Delta}}{2\gamma J_3^2}; \quad 0 < \gamma \leq 1; \quad -1 \leq \beta < +\infty \\ \Delta &= \left[ 1 - 2\gamma + (2\gamma + \beta)(J_3 - 1) \right]^2 J_3^4 + 4\gamma(1 - \gamma)J_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.73})$$

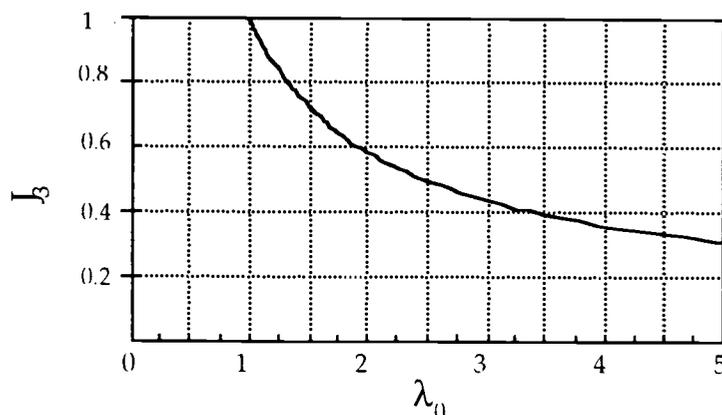


fig.II.9: Matériau de Burgen - Levinsen:  $J_3(\lambda_0)$   
(équation (IV.73)b);  $\gamma=2/3$

## V CONCLUSION

On voit que modéliser la loi de comportement d'un matériau ne revient pas uniquement à approcher les données quantitatives constituées par les courbes expérimentales: un grand nombre d'autres phénomènes doivent également être pris en compte.

Il serait cependant utopique de chercher à déterminer une expression du potentiel élastique permettant une bonne modélisation de tous les phénomènes observables dans le domaine de l'élasticité: en cherchant à trop élargir le domaine de validité d'une loi de comportement, on perd en précision d'approximation pour chaque problème particulier et l'on risque en outre d'aboutir à une expression mathématique complexe rendant les calculs inextricables; cela explique la diversité des modèles employés.

Dans la pratique, il faut le plus souvent changer de densité d'énergie suivant l'expérience et le domaine de déformations considérées de manière à obtenir, sans trop compliquer les calculs, des résultats numériques les plus précis possible.

Pour des élongations inférieures à 2 en traction simple, il serait absurde d'utiliser une densité d'Ogden non séparable alors que le modèle Néo-Hookien, beaucoup plus maniable, fournit d'excellents résultats pour ce type de déformations; cette densité non séparable s'impose néanmoins pour décrire le gonflement d'un cylindre de caoutchouc, mais reste incapable de rendre compte des variations de volume en traction simple ...

De ce point de vue, il n'existe pas de modèle universellement meilleur que les autres, et l'on ne peut affirmer que *telle fonction est la densité d'énergie de tel matériau*.

Lorsque l'on s'intéresse à l'analyse mathématique d'un problème d'élasticité non-linéaire pour un matériau donné, il est nécessaire de choisir un modèle de densité d'énergie assez "souple" pour s'adapter aux divers résultats expérimentaux tout en permettant l'application de théories d'existence. Les modèles retenus peuvent alors différer suivant la théorie que l'on souhaite appliquer.

*fin du deuxième chapitre*

# *Minimécanique - Matériaux cellulaires*

## *Sommaire*

### I- Matériaux cellulaires

#### I.1 Introduction

#### I.2 Structure et caractérisation des matériaux cellulaires

#### I.3 Mousses polyuréthannes

### II - Elasticité linéaire

#### II.1 Récapitulatif des travaux antérieurs

#### II.2 Elasticité linéaire des nids d'abeille

##### II.2.1 Analyse de Gibson et al.

##### II.2.2 Analyse de Warren et al.

#### II.3 Elasticité linéaire des mousses

#### II.4 Conclusion

### III - Elasticité non-linéaire

#### III.1 Introduction

#### III.2 Elasticité non-linéaire des nids d'abeille

#### III.3 Elasticité non-linéaire des mousses

#### III.4 Conclusion

### IV conclusion

# I MATERIAUX CELLULAIRES

## I.1 Introduction

De nombreux matériaux naturels ont une structure cellulaire: le bois, l'os, le liège et le corail par exemple. Il y a de bonnes raisons à cela: les matériaux cellulaires optimisent la rigidité, ou la résistance, ou l'absorption d'énergie, d'une masse de matériau donné.

Suivant leur origine et la composition chimique de leur substance de base, les mousses se classent en mousses organiques et inorganiques ainsi qu'en mousses naturelles et synthétiques.

Produits	Inorganiques	Organiques
Naturels	<i>Le tuf</i>	<i>Eponge naturelle</i>
Synthétiques	<i>Mousse de verre</i>	<i>Mousse plastique</i>

Les mousses sont structurellement composées de cellules polyédriques, comme les grains d'un métal. Les parois des cellules, où la matière solide se concentre, sont soit ouvertes (comme dans une éponge) soit fermées (comme une mousse de buée), et les cellules peuvent être équiaxiales ou étirées.

Les mousses peuvent encore suivant la taille de leurs cellules, être subdivisées en mousse à cellules microscopiques, à fines cellules ou à cellules grosses :

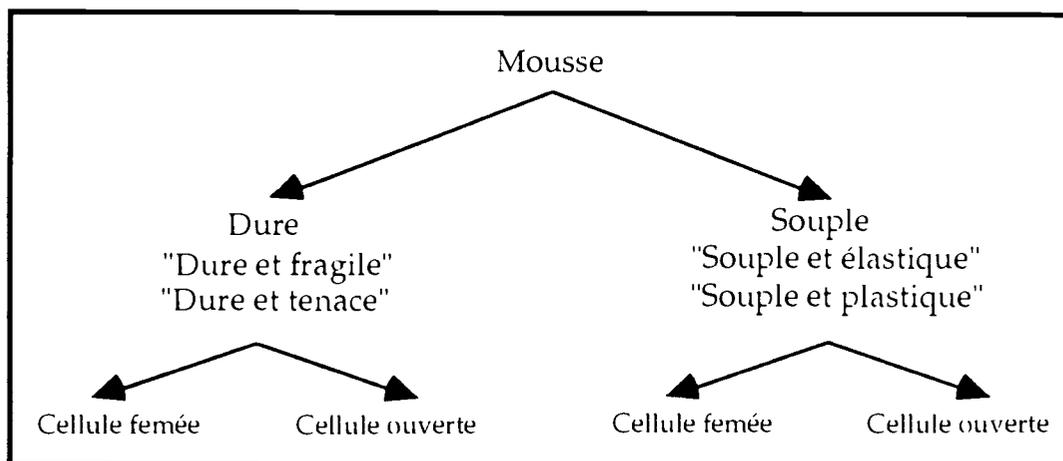
$d < 0.3 \text{ mm}$	micro cellules
$0.3 \text{ mm} < d < 2 \text{ mm}$	cellules fines
$d > 2 \text{ mm}$	cellules grosses

Les mousses naturelles sont largement utilisées par l'homme : le bois, le liège,...

Les possibilités d'utilisation de ces mousses naturelles sont toutefois limitées par ce que leurs propriétés, imposées par la nature, varient peu. Les mousses de synthèse sont également répandues: les coussins, les rembourrages, les emballages, les sièges, les isolants sont faits en polymères cellulaires.

Pour faire mousser des matières plastiques, on utilise des agents moussants ou porogènes, solides, liquides ou gazeux. Le procédé de moussage détermine en premier lieu les propriétés de la mousse déterminée parce que c'est lui qui détermine la densité de la mousse, la structure de celle-ci et la cohésion de

l'association des cellules de la mousse. L'état de la matière plastique présente un grand intérêt lorsqu'on transforme celle-ci en mousse. La matière plastique peut être liquide, pulvérulente ou granulée. L'aspect du mélange de départ est capital dans le choix du procédé de moussage. Plusieurs procédés de fabrication des mousses sont développés et qui se distinguent par la pression exercée sur le mélange dans la phase de formation des cellules. La matière plastique de départ à faire mousser est celle qui sert à caractériser la mousse. C'est elle qui, -de même que le mélange de départ et la température nécessaire pour transformer en un matériau cohérent le mélange liquide, pulvérulent ou granulé -, détermine le choix de l'agent moussant et du procédé de fabrication de la mousse.



## I.2 Structure des matériaux cellulaires

La figure (fig.III.1) montre la structure de matériaux cellulaires synthétiques (= fabriqués par l'homme) : polymères, céramiques, métaux.

Sur la figure (fig.III.2) on aperçoit des matériaux cellulaires naturels : liège, bois, éponge, corail, os.

Certains aspects géométriques de la structure de la cellule sont importants pour comprendre les propriétés mécaniques - que nous développerons dans les paragraphes suivants -, thermiques et acoustiques de ces matériaux.

Certains de ces matériaux cellulaires sont isotropes : leurs propriétés et leur structure sont identiques dans toutes les directions. D'autres, anisotropes : structures axisymétriques (le liège) ou orthotrope (le bois); les rapports de rigidité dans deux directions orthogonales peuvent varier de 2 à 10.

Ces figures montrent également que les cellules peuvent être ouvertes (éponge) : le solide est distribué en colonnes et poutres qui forment les côtés de la cellule; ou fermées (mousse de savon) : le solide est distribué sur des plaques qui forment les parois de la cellule.

Les propriétés mécaniques de ces matériaux sont en quelque sorte le reflet de cette distribution du solide dans la cellule.

La densité relative d'une mousse est le paramètre le plus important pour exprimer les propriétés mécaniques de ces matériaux cellulaires. D'autres paramètres tels la taille de la cellule, sa forme géométrique, la distribution du solide dans la cellule (cellule ouverte, cellule fermée), les aspects topologiques de l'assemblage (connexion, nombre de joints), les propriétés mécaniques du solide de base et l'aspect global isotrope ou anisotrope; participent dans les propriétés de la mousse.

Nous appellerons nids d'abeilles les matériaux cellulaires bidimensionnels et nous gardons la terminologie mousse pour les matériaux cellulaires tridimensionnels à cellules fermées ou ouvertes.

Dans la suite on s'intéressera plus particulièrement aux propriétés élastiques (linéaires et non - linéaires) des nids d'abeilles et aux mousses à cellules ouvertes.

### I.3 Mousses polyuréthannes

Ces mousses appartiennent au groupe des mousses de matière plastique dans lesquelles les composants du mélange de départ réagissent chimiquement entre eux pendant qu'on fait mousser le mélange.

La base de formation des polyuréthannes - découverts en 1937 par le Pr OTTO BAYER - est le groupe réactif isocyanate qui peut se combiner avec beaucoup d'autres groupes fonctionnels. Les réactions importantes de la fabrication des mousses sont une *propagation en chaîne*, une *formation gazeuse* et une *liaison transversale*.

En vue de bien refermer les bulles gazeuses dans le polymère, il faut contrôler soigneusement les vitesses relatives de la polymérisation et des réactions de dégagement gazeux, de sorte que la solidification du polymère coïncide avec le maximum d'expansion de la mousse. Si la première réaction est trop rapide, le matériau se figera avant d'être gonflé, et si la seconde va trop vite, la mousse gonflera rapidement et retombera avant d'avoir pu emprisonner le gaz. Cet équilibre est particulièrement critique pour la mousse souple, qui nécessite une structure à cellules complètement ouvertes lui donnant les meilleurs propriétés de résilience et de flexibilité. Suivant la composition du mélange de départ, la mousse polyuréthane peut être dure, souple ou de tous degrés de dureté intermédiaire, ce qui la distingue des autres mousses synthétiques.

Dans le procédé de fabrication des mousses polyuréthannes, on alimente les constituants (parfois pré mélangés) en continu et à des débits préétablis dans une tête mélangeuse, d'où le mélange est réparti soit sur un convoyeur (cas des plaques de mousses), ou dans des moules (moulage par injection). Dans chaque cas, les constituants principaux du mélange sont :

- a) un polyester ou polyether à groupes hydroxydes libres.
- b) un di - ou polyiocyanate.
- c) l'eau ou un hydrocarbure fluoré.

d) des accélérateurs de réaction et des stabilisateurs de mousse.

Les types souples de mousses sont à cellules ouvertes et les types durs sont, suivant le procédé de travail utilisé, plus ou moins à cellules fermées.

Les paramètres opérationnels associés au procédé de fabrication peuvent avoir une grande influence sur la qualité de la mousse, tout comme le choix initial et les proportions des matières premières. Le contrôle précis de ces nombreux paramètres est primordial pour la reproductibilité de la fabrication d'une mousse de haute qualité.

Les applications des mousses polyuréthannes se répartissent en quelques secteurs principaux :

L'*ameublement* qui est essentiellement le domaine des mousses souples : coussinage, literie. C'est un secteur qui stagne, il se pose en plus le fait que le comportement au feu du matériau est discuté.

L'*automobile* est un grand domaine d'applications des polyuréthannes. La vitalité des polyuréthannes doit se confirmer dans ce domaine, tant dans les pièces intérieures, accoudoirs, volants, sièges, dossiers,..., qu'extérieurs, pare-chocs, pièces de carrosserie. La recherche d'agent gonflant autre que le CFC est un problème d'actualité. Celui-ci devra disparaître prochainement à cause des normes d'écologie.

Le *bâtiment* est un bon créneau pour des applications différentes suivant les pays et les réglementations en vigueur.

Les *industries du froid* (réfrigérateurs, congélateurs,...), de la *chaussure* et du *textile* (tissus enduits de plastiques,...) consomment une partie constante de la production des polyuréthannes.

Le *revêtement* (vernis, laques,...) et d'autres *applications diverses* (colles, adhésifs, liants,...) comptent pour le reste de la production des polyuréthannes.

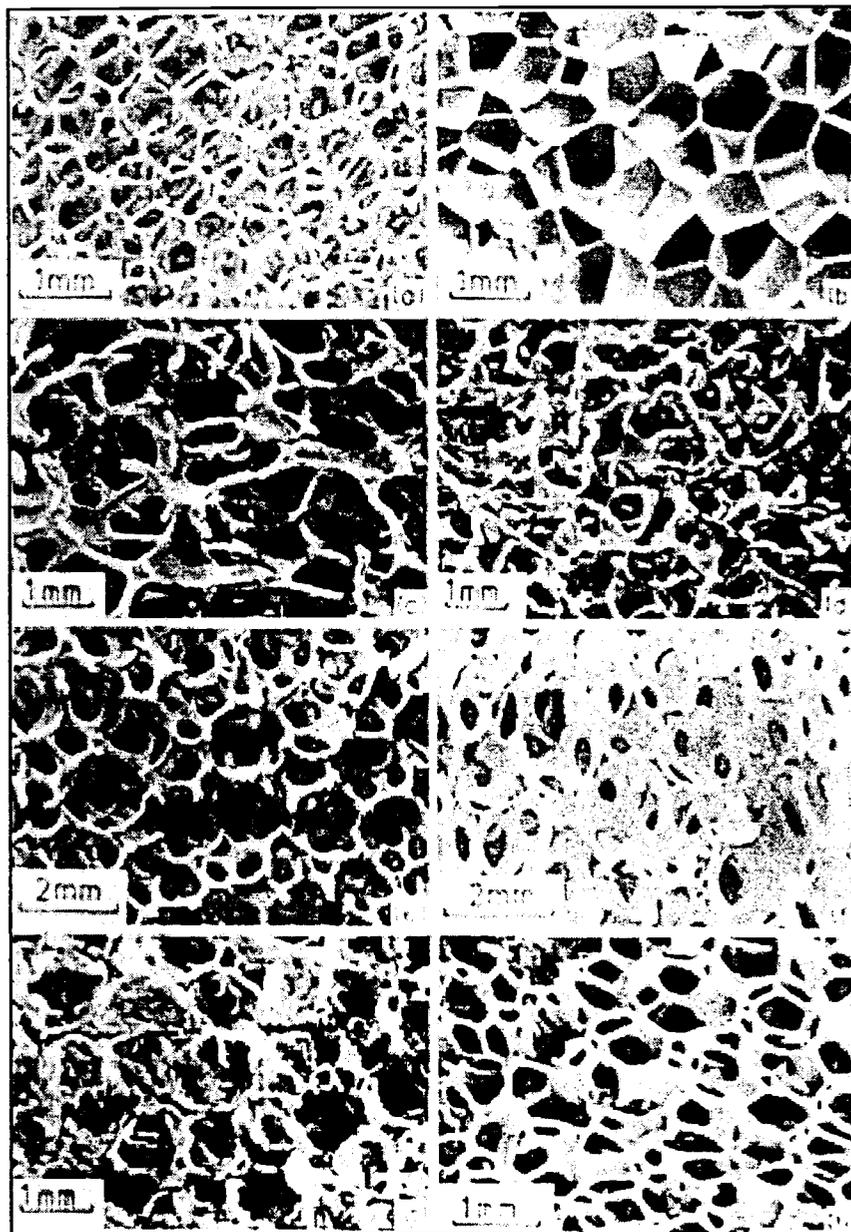


fig.III.1: Matériaux cellulaires synthétiques

(a) Mousse polyuréthane à cellules ouvertes	(b) Mousse polyéthylène à cellules fermées
(c) Nickel	(d) Cuivre
(e) Zircone	(f) Mullite
(g) Verre	(h) Mousse polyether à cellules ouvertes et fermées

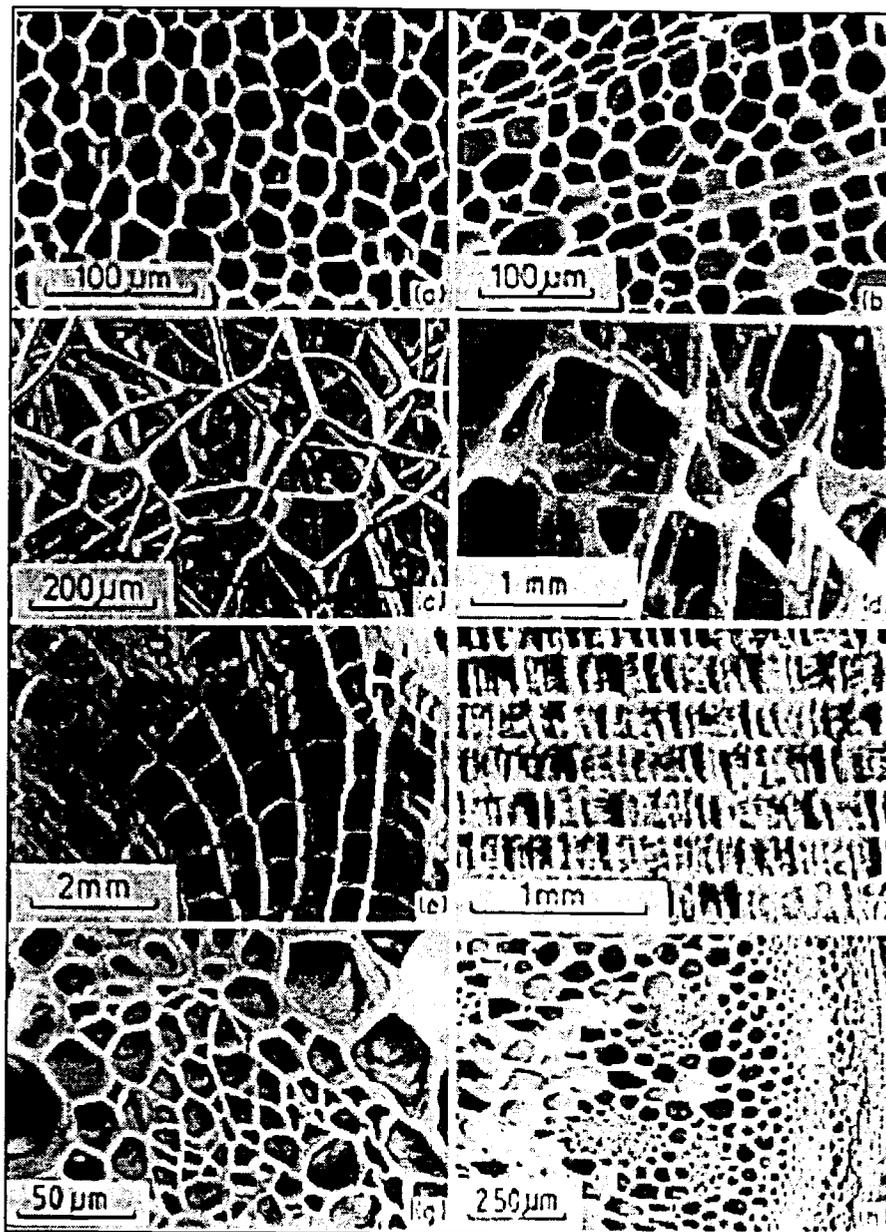


fig.III.2: Matériaux cellulaires naturels

(a) Liège	(b) Balsa
(c) Eponge	(d) Moelle de l'os
(e) Corail	(f) Cartilage de l'os
(g) iris d'une feuille	(h) Tige d'une plante

## II ELASTICITE LINEAIRE

### II.1 Récapitulatif des résultats antérieurs

Les mousses polymériques et leurs homologues céramiques et métalliques sont des matériaux cellulaires. Des matériaux naturels cellulaires comme le bois, le liège, la moelle, l'os existaient et sont largement utilisés depuis toujours.

Vu l'importance de ces matériaux- couramment appelés mousse- un large éventail de travaux leur est consacré par Meinecke et Clark (1973), Hilyard(1982) et Ashby (1988). La morphologie des mousses et plusieurs propriétés mécaniques comme la rigidité, la contrainte ultime, la fatigue et le comportement dynamique y sont discutés.

La première théorie concernant le module d'Young effectif,  $E_e$ , d'une mousse à cellules ouvertes, en fonction de la fraction de volume du matériau solide,  $\phi$ , a été proposé par Gent et Thomas (1959,1963). Leurs mousses consistent en des filaments minces élastiques qui sont connectés à des volumes rigides. Ils supposent que les déplacements de ces filaments sont linéaires et calculent l'énergie totale de déformation due à la contribution individuelle d'un filament orienté aléatoirement et qui se déforme par élongation seulement. Pour des fractions de volume faibles  $\phi$ , ils obtiennent la relation :

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{1}{6} \phi$$

Des extensions du modèle de Gent - Thomas ont été proposées pour tenir compte des variations dans la distribution entre les joints et les connections (Lederman, 1971), anisotropie structurale (Kannakkanatt, 1973) et pour les cellules fermées (Christensen, 1986). Ces théories cinématiques ne sont pas des analyses mécaniques rigoureuses, malgré leur apparent succès à coller aux résultats expérimentaux et leur popularité.

Ko (1965) a supposé que la morphologie des mousses dans le cas tridimensionnel peut être représentée par la topologie des interstices qui sont déterminés par un arrangement idéalisé de sphères uniformes en hexagonal ou cubique faces centrées.

Ces structures sont fondamentalement anisotropes, il a choisi volontairement une direction principale de déformation uniaxiale et a calculé le module effectif d'Young de la mousse à partir de l'analyse tridimensionnelle de la théorie des poutres. Pour la maille hexagonale et pour  $\phi$  petit, il obtient le résultat de Gent - Thomas, mais obtient un résultat tout à fait différent pour la maille cubique à faces centrées :

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{7}{3} \phi^2 \quad \text{cubique faces centrées}$$

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{1}{6} \phi \quad \text{hexagonale compacte}$$

La différence dans les résultats asymptotiques reflète un changement dans le mécanisme prépondérant de déformation (traction - compression pour la maille hexagonale et la flexion pour la cubique à faces centrées), qui dépend de la morphologie de la structure et de l'orientation par rapport aux axes principaux de déformation.

Gibson et al (1982a) avaient considéré une cellule constituée d'un nid d'abeilles. Les poutres sont de section uniforme et de longueur différente. Ils utilisent la théorie des poutres et obtiennent :

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{3}{2} \phi^3$$

Essentiellement la même théorie peut décrire le liège (Gibson et al, 1981), le bois (Easterling et al, 1982), et les nids d'abeilles synthétiques (Gibson et al, 1982a).

En supposant que la flexion est le mécanisme prépondérant de la déformation, Gibson et Ashby (1982b) affirmèrent que  $(E_e / E_s) \approx \phi^2$  pour les cellules ouvertes ce qui correspond au cas de la maille cubique à faces centrées étudiée par Kô (1965) où la flexion est prépondérante.

La dépendance en  $\phi^2$  est aussi prédite par Menges et al (1975, 1982).

Faisant appel à des arguments cinématiques, Christensen (1986) évoque - accepte - l'importance de la flexion dans le cas tridimensionnel. Il accepte le modèle de Gent - Thomas pour les mousses à cellules ouvertes et développe une théorie similaire qui prédit qu'on a :

$$\frac{E_e}{E_s} = \frac{1}{2} \phi$$

pour les cellules fermées d'une mousse à faible densité.

Pour résumer ces travaux, le module d'Young effectif des modèles de matériaux cellulaires, dépend :

- 1) de la morphologie de la mousse : les dimensions de la structure et les arrangements particuliers et les formes des connections;
- 2) de l'orientation de la structure par rapport aux axes principaux de déformation;
- 3) du mécanisme microstructural de déformation, et
- 4) des propriétés élastiques du matériau solide de la cellule.

## II.2 Elasticité linéaire des nids d'abeille

### II.2.1 Analyse de Gibson et al.(1982)

Nous considérons une structure hexagonale spatialement périodique, constituée d'un réseau de poutres uniformes.

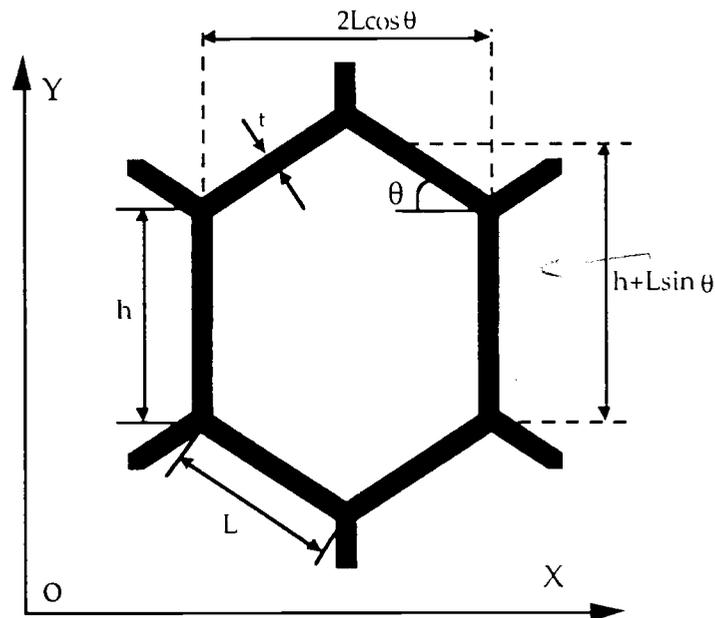


fig.III.3: Structure d'une cellule idéalisée d'un nid d'abeille

La flexion des parois (poutres ou plaques) est le mécanisme prépondérant dans les petites déformations de ces matériaux cellulaires lors des essais de compression (Patel et Finnie, (1970); Abd El Sayed et al., (1979); Gibson et al.,(1982); Warren et Kraynik, (1987)); cela est bien confirmé par les observations expérimentales (Lee, Menges et al. (1975), (1982)).

La densité relative de cette structure est exprimée par :

$$\phi = \frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{(t/L)(h/L + 2)}{2 \cos \theta (h/L + \sin \theta)} \quad (\text{III.1})$$

Où  $\rho^*$  est la densité de la mousse et  $\rho_s$  celle du solide de la matrice.

Dans le cas où les cellules sont régulières ( $h = L$ ;  $\theta = 30^\circ$ ) alors:

$$\rho^* / \rho_s = (2/\sqrt{3})(t/L) \quad (\text{III.2})$$

Quand on charge cette structure suivant l'une des directions des axes du repère (O, X, Y) alors elle se déforme linéairement par flexion des parois. La réponse de cette structure dans le plan décrit par le repère est caractérisée par cinq coefficients : Deux modules d'Young  $E_1^*$  et  $E_2^*$ , un module de cisaillement  $G_{12}^*$ , et deux coefficients de poisson,  $\nu_{12}^*$  et  $\nu_{21}^*$ . Ces paramètres sont reliés par la relation de réciprocité :  $E_1^* \nu_{21}^* = E_2^* \nu_{12}^*$ .

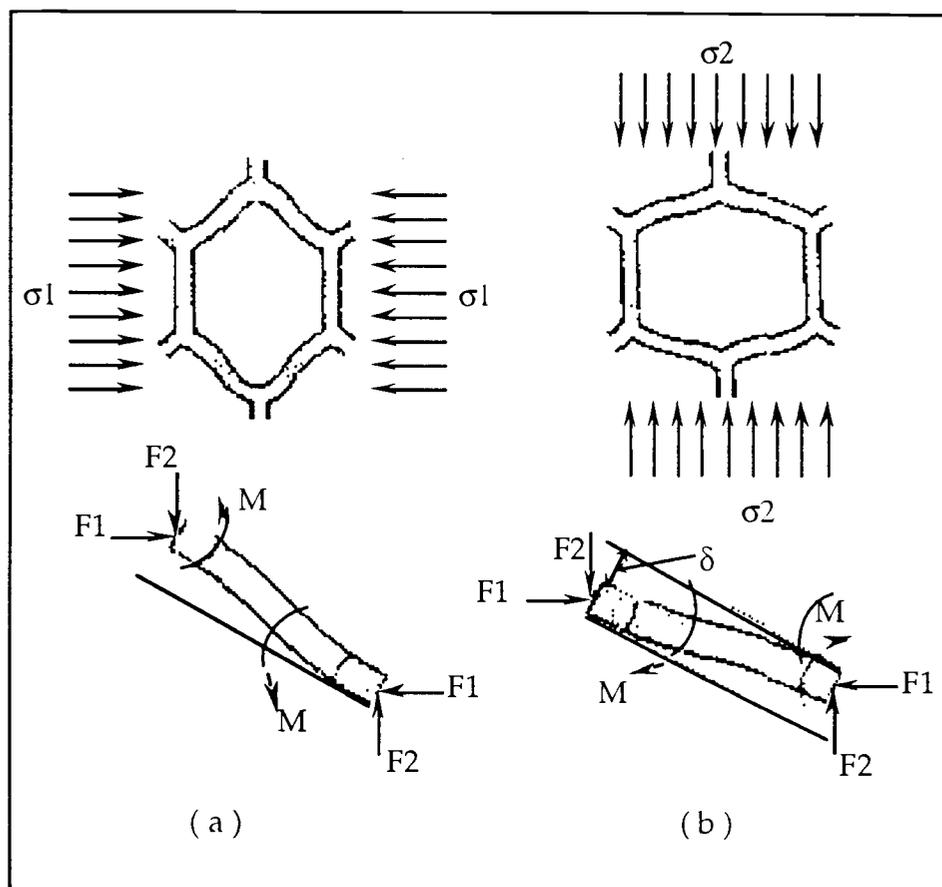


fig.III.4:Nids d'abeille: Essais de compression  
Efforts appliqués sur un élément isolé

On considère les déformations élastiques linéaires de cette structure soumise à une contrainte  $\sigma_1$  suivant X. L'équilibre statique d'une poutre isolée s'écrit :

$$F_2 = 0 \quad ; \quad F_1 = \sigma_1(h + L \sin \theta)b \quad ; \quad M = \frac{1}{2}F_1 L \sin \theta \quad (\text{III.3})$$

A partir de la théorie standard des poutres, la déflexion  $\delta$  est donnée par :

$$\delta = \frac{F_1 L^3 \sin \theta}{12 E_s I} \quad (\text{III.4})$$

Où  $I$  est le moment d'inertie de la poutre et  $b$  son épaisseur.  
 Suivant  $X_1$  la composante est  $\delta \sin \theta$  et la déformation  $\varepsilon_1$  est :

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta \sin \theta}{L \cos \theta} = \frac{\sigma_1 (h + L \sin \theta) b L^2 (\sin \theta)^2}{12 E_s I \cos \theta} \quad (\text{III.5})$$

Le module d'Young  $E_1^* = \sigma_1 / \varepsilon_1$  suivant  $X$  est exprimé par :

$$\frac{E_1^*}{E_s} = \left( \frac{t}{h} \right)^3 \frac{\cos \theta}{[(h/L) + \sin \theta] (\sin \theta)^2} \quad (\text{III.6})$$

En effectuant la même démarche pour un chargement suivant  $X_2$ ; on obtient :

$$F_1 = 0 \quad ; \quad F_2 = \sigma_2 L b \cos \theta \quad ; \quad M = \frac{1}{2} F_2 L \cos \theta \quad (\text{III.7})$$

soit :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{\delta \cos \theta}{h + L \sin \theta} = \frac{\sigma_2 b L^4 (\cos \theta)^3}{12 E_s I (h + L \sin \theta)} \\ \frac{E_2^*}{E_s} &= \left( \frac{t}{L} \right)^3 \frac{[(h/L) + \sin \theta]}{(\cos \theta)^3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8})$$

Les coefficients de poisson sont exprimés par :

$$v_{12}^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{(\cos \theta)^2}{((h/L) + \sin \theta) \sin \theta} \quad ; \quad v_{21}^* = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{((h/L) + \sin \theta) \sin \theta}{(\cos \theta)^2} \quad (\text{III.9})$$

Dans le cas particulier où l'hexagone est régulier, on obtient :

$$\frac{E_1^*}{E_2^*} = 2.3 \left( \frac{t}{L} \right)^3 \quad ; \quad v_{12}^* = v_{21}^* = 1 \quad (\text{III.10})$$

Quand  $\theta$  est négatif le coefficient de poisson devient négatif, cela implique que quand on procède à une compression suivant une direction on produit une contraction dans la direction perpendiculaire. Ceci est un résultat inhabituel comme pour les coefficients de poisson de ce matériau  $v_{12}^* = v_{21}^* = 1$ .

Un essai de cisaillement sur la structure hexagonale permet d'exprimer le module  $G_{12}^*$  par :

$$\frac{G_{12}^*}{E_s} = \left(\frac{t}{L}\right)^3 \frac{[(h/L) + \sin\theta]}{(h/L)^2 [1 + 2(h/L)] \cos\theta} \quad (\text{III.11})$$

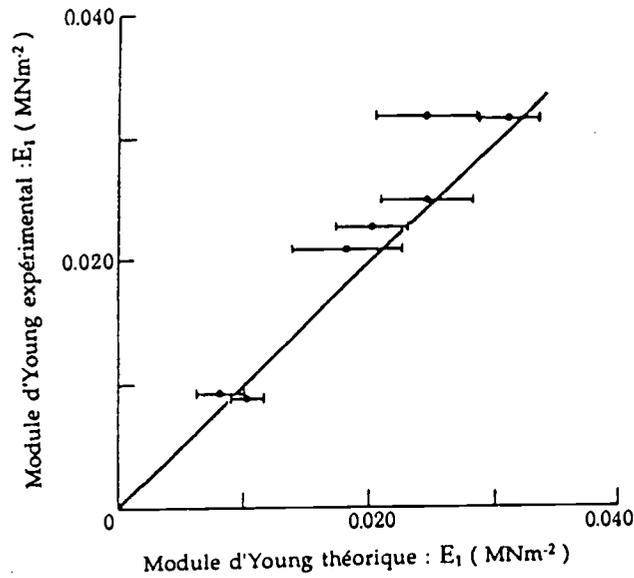


fig.V.5

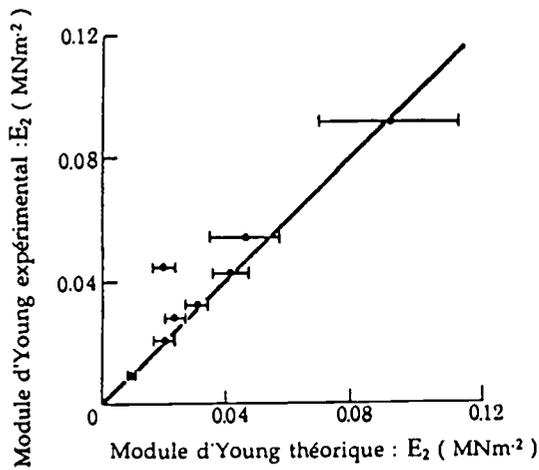


fig.V.6

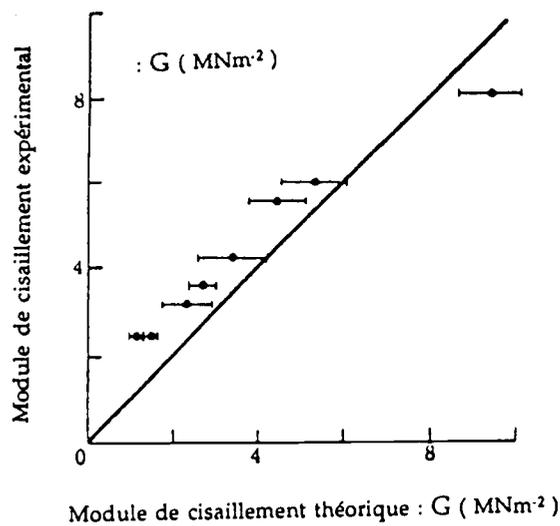


fig.V.7

On retrouve dans le cas isotrope (hexagone régulier) la relation habituelle :

$$\frac{G_{12}^*}{E_s} = 0.57 \left( \frac{t}{\ell} \right)^3 = \frac{1}{4} \frac{E^*}{E_s} \quad (\text{III.12})$$

Ces résultats ont été souvent confrontés aux données expérimentales pour des structures métalliques ou élastomères en nids d'abeille (Gibson et al. (1981)).

Les valeurs calculées et mesurées de ces paramètres sont présentées sur les figures fig.III.5, fig.III.6 et fig.III.7.

Les résultats sont très sensibles aux petites variations des paramètres géométriques de la cellule :  $t$ ,  $\theta$ ; lesquels sont en pratique très difficile à contrôler.

La concordance des résultats théoriques et expérimentaux peut être améliorée si toute fois la modélisation est raffinée (Gibson, 1981). En pratique, cela est rarement nécessaire car les résultats obtenus par ces équations sont largement suffisants.

## II.2.2 Analyse de Warren et Kraynik (1987)

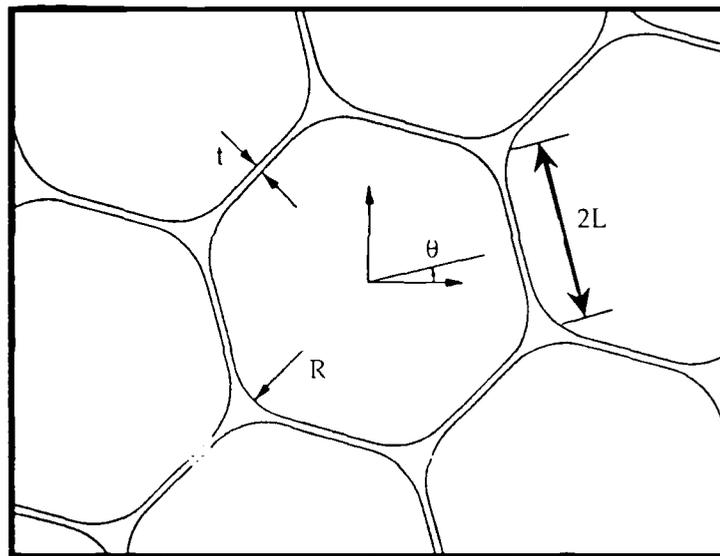


fig.III.8: Structure d'une mousse bidimensionnelle (nids d'abeille)  
[ D'après Kraynik, (1988) ]

La structure en nids d'abeille étudiée est composée de cellules hexagonales. Les cellules sont constituées d'un réseau de poutres de longueur  $2L$ .

Les déformations homogènes et linéaires de cette structure sont déterminées par les déplacements des deux points A et B par rapport au point C, fig.III.9.

On considère un repère  $(C, X, Y)$  lié à C; les déplacements affines des points A et B par rapport à C sont repérés par les vecteurs  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  respectivement.

Nous introduisons un autre repère auxiliaire  $(O, \zeta, \eta)$  lié à la jonction des poutres.

On se propose d'établir la relation force - déflexion pour cette structure. L'élément représentatif est formé du réseau des poutres OA, OB et OC.

Les poutres se déforiment antisymétriquement par rapport à leur milieu, donc l'équilibre de l'élément représentatif est assuré par les forces  $P_j$  et  $Q_j$  s'exerçant en A, B et C.

Dans le cadre des petits déplacements on suppose que chaque force  $P_j, Q_j$  induit un déplacement linéaire dans sa direction :

$$\delta_{jp} = MP_j \quad ; \quad \delta_{jn} = NQ_j + \psi_0 L \quad (III.13)$$

$\delta_{jp}$  et  $\delta_{jn}$  sont les déplacements des points milieux de la  $j^{\text{ème}}$  poutre, parallèle et perpendiculaire au plan moyen et  $\psi_0$  est la rotation de corps rigide de la jonction. M et N étant les souplesses reliant les forces aux déplacements respectifs.

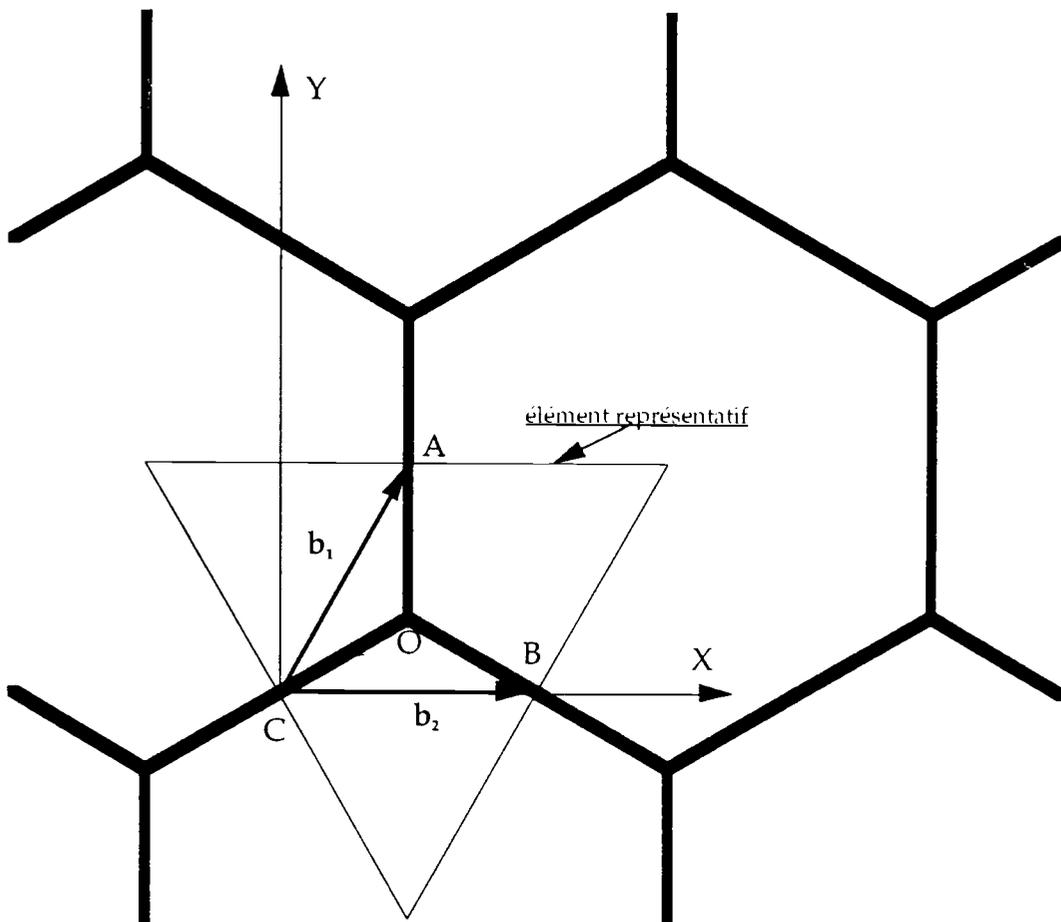


fig.III.9: Modèle de nids d'abeille : élément représentatif; repérage géométrique  
Les vecteurs déplacements des points milieux dans le repère  $(O, \zeta, \eta)$  sont :

$$\Delta_j = (\delta_{jp} \cos \phi_j + \delta_{jn} \sin \phi_j) \mathbf{i} + (\delta_{jp} \sin \phi_j - \delta_{jn} \cos \phi_j) \mathbf{j} \quad ; \quad j = 1 \text{ à } 3 \quad (\text{III.14})$$

où  $\phi_j$  est l'angle entre l'axe X et la poutre j dans le sens trigonométrique.

Les déplacements des points 1(=A) et 2(=B) par rapport au point 3(=C) sont:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Delta_1 - \Delta_3 = \delta_{1x} \mathbf{i} + \delta_{1y} \mathbf{j} \\ \delta_2 &= \Delta_2 - \Delta_3 = \delta_{2x} \mathbf{i} + \delta_{2y} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

On exprime les vecteurs  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  après déformation de la structure par :

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1'' + \delta_1 \quad ; \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2'' + \delta_2 \quad (\text{III.16})$$

où  $\mathbf{b}_1''$  et  $\mathbf{b}_2''$  sont les vecteurs repérant les points 1 et 2 dans la configuration non déformée.

Pour la structure hexagonale orientée comme sur la figure fig.III.9 on a :

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \pi \quad ; \quad \phi_2 = \frac{11}{6} \pi \quad ; \quad \phi_3 = \frac{7}{6} \pi \quad (\text{III.17})$$

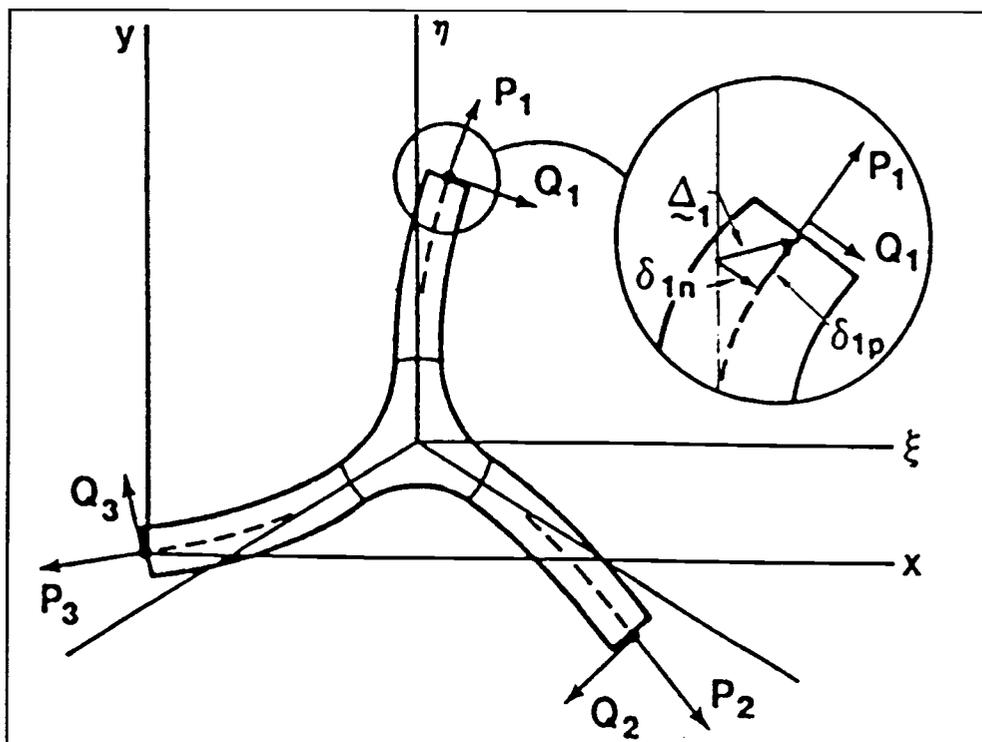


fig.III.10: Un élément isolé : Définition des efforts appliqués et des déplacements

On explicite les composantes des vecteurs déplacements donnés par les équations (III.15); soient :

$$\left. \begin{aligned} 2\delta_{1x} &= \sqrt{3}MP_3 + NQ_3 + 2NQ_1 + 3\psi_0L \\ 2\delta_{1y} &= MP_3 + 2MP_1 - \sqrt{3}NQ_3 - \sqrt{3}\psi_0L \\ 2\delta_{2x} &= \sqrt{3}M(P_2 + P_3) + N(Q_3 - Q_2) \\ 2\delta_{2y} &= M(P_3 - P_2) - \sqrt{3}N(Q_2 + Q_3) - 2\sqrt{3}\psi_0L \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.18})$$

Pour déterminer les déplacements il faut pouvoir exprimer les inconnues  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $\psi_0$ .

Les équations d'équilibre de l'élément permettent de fermer le système (III.18):

$$\sum_{j=1}^3 [P_j \cos \phi_j + Q_j \sin \phi_j] = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^3 [P_j \sin \phi_j - Q_j \cos \phi_j] = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^3 Q_j = 0 \quad (\text{III.19})$$

On obtient alors :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{D} [ -(\sqrt{3}\delta_{2x} - 6\delta_{1y} + 3\delta_{2y})M + BN ] \\ P_2 &= \frac{1}{D} [ -(2\sqrt{3}\delta_{1x} - 3\sqrt{3}\delta_{2x} + 3\delta_{2y})M + BN ] \\ P_3 &= \frac{1}{D} [ (\sqrt{3}\delta_{2x} + 2\sqrt{3}\delta_{1x} + 3\delta_{2y})M + BN ] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.20})$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{2M}{D} [ 2\delta_{1x} - \delta_{2x} - \sqrt{3}\delta_{2y} ] \\ Q_2 &= -\frac{2M}{D} [ \delta_{1x} + \delta_{2x} - \sqrt{3}\delta_{1y} + \sqrt{3}\delta_{2y} ] \\ Q_3 &= -\frac{2M}{D} [ \delta_{1x} - 2\delta_{2x} + \sqrt{3}\delta_{1y} ] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.21})$$

$$\sqrt{3}\psi_0L = \frac{M}{D} [ (2\sqrt{3}\delta_{1x} - \sqrt{3}\delta_{2x} - 3\delta_{2y})M + BN + 2(\sqrt{3}\delta_{1x} - \sqrt{3}\delta_{2x} - 3\delta_{1y})N ] \quad (\text{III.22})$$

avec :

$$D = 6M(M + N) \quad ; \quad B = \sqrt{3}\delta_{2x} + 2\delta_{1y} - \delta_{2y}$$

On exprime les contraintes effectives exercées sur un élément volume de hauteur unité dans la direction z et sur lequel agissent des efforts de résultante  $P_j$  et  $Q_j$  sur chaque coté.

Les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy sont :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{12L} \left[ \sqrt{3}(P_2 + P_3) + (Q_3 - Q_2) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{3}L} P_1 \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2\sqrt{3}L} Q_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.23)}$$

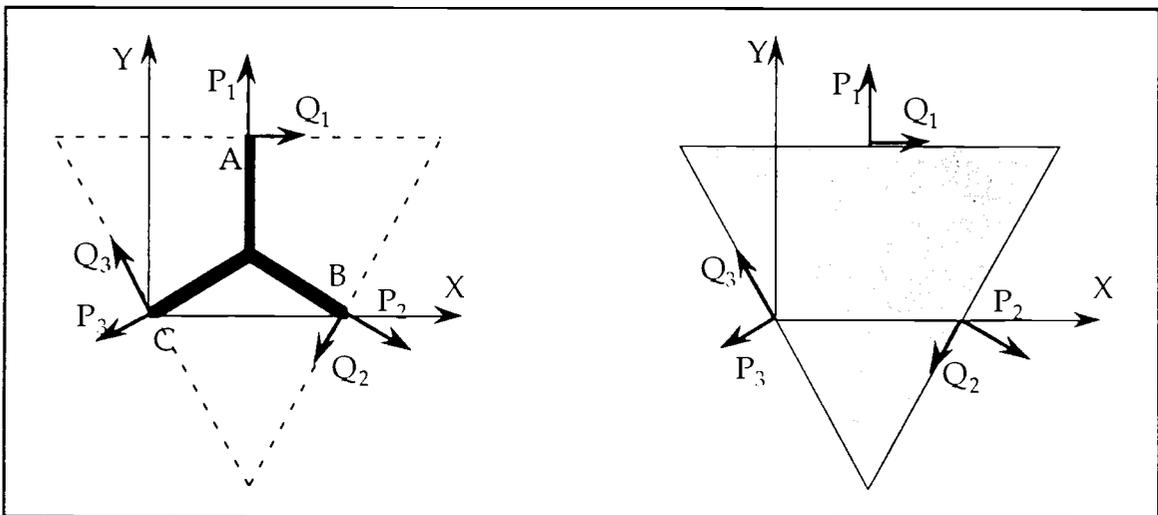


Fig.III.11: élément du matériau homogène

Soit en tenant compte des expressions précédentes :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{2\sqrt{3}DL} \left[ (3\sqrt{3}\delta_{2x} - 2\delta_{1y} + \delta_{2y})M + BN \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{3}DL} \left[ -(\sqrt{3}\delta_{2x} - 6\delta_{1y} + 3\delta_{2y})M + BN \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{3}DL} \left[ 2\delta_{1x} - \delta_{2x} + \sqrt{3}\delta_{2y} \right] M \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.24)}$$

Ceci permet donc de connaître l'état de contrainte dans un milieu homogène équivalent en fonction des paramètres géométriques de la cellule, des déformations et des propriétés mécaniques du solide de base.

Dans un autre repère obtenu par une rotation  $\theta$ , on peut exprimer les contraintes par (Muskelishvili, (1953)):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \sigma_{y'y'} - \sigma_{x'x'} + 2i\sigma_{x'y'} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) e^{i2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (III.25)$$

Soit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \frac{B}{6\sqrt{3}ML} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= \frac{-2M}{\sqrt{3}DL} \left[ (\sqrt{3}\delta_{2x} - 2\delta_{1y} + \delta_{2y}) - i(2\delta_{1x} - \delta_{2x} + \sqrt{3}\delta_{2y}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (III.26)$$

On procède à deux cas de déformation affine dans un repère  $(C, X', Y')$  tourné de  $\theta$  par rapport au repère  $(C, X, Y)$ : cisaillement pur, tension simple.

$$i' = \cos\theta i - \sin\theta j \quad ; \quad j' = \sin\theta i + \cos\theta j \quad (III.27)$$

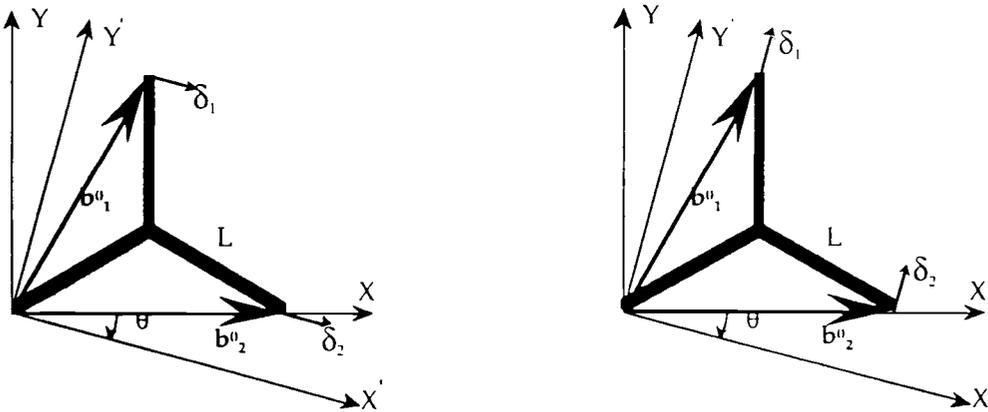


fig.III.12: Essais de tension simple et de cisaillement pur sur un élément représentatif

Pour un cisaillement pur d'amplitude  $\gamma$  et qui laisse le plan  $Y' = 0$  fixe; les déplacements des vecteurs  $b_1$  et  $b_2$  sont donnés par :

$$\delta_1 = \sqrt{3}\gamma L \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) i' \quad ; \quad \delta_2 = \sqrt{3}\gamma L \sin\theta i' \quad (III.28)$$

En exprimant les composantes des vecteurs donnés par (III.28) dans le repère (C,X,Y), on obtient par (III.26) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= \frac{i\gamma}{\sqrt{3}(M+N)} e^{i2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (III.29)$$

On obtient à partir des équations (III.25) le tenseur des contraintes de Cauchy exprimé dans le repère (CX'Y') :

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{y'y'} = 0 \quad ; \quad \sigma_{x'y'} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}(M+N)} \quad (III.30)$$

On remarque à partir de ce résultat que quelque soit l'orientation du repère (C,X',Y') par rapport au repère lié à la structure (C,X,Y), ces relations restent inchangées. La structure est isotrope.

On peut également exprimer les efforts exercés sur les poutres :

$$\left. \begin{aligned} P_i &= -\frac{\gamma L}{(M+N)} \sin 2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi(j-1)\right) \\ Q_i &= \frac{\gamma L}{(M+N)} \cos 2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi(j-1)\right) \end{aligned} \right\} \quad (III.31)$$

et la rotation de la jonction  $\psi_0 = \frac{1}{2}\gamma$

On note alors pour un cisaillement pur que les efforts appliqués sur la structure sont constants en module et que seule la direction change avec l'orientation initiale de la poutre concernée. La rotation de la jonction est également indépendante de l'orientation initiale.

L'essai de tension uniaxiale suivant CY' et d'amplitude  $\varepsilon$  induit les vecteurs déplacements suivants :

$$\delta_1 = \sqrt{3}\varepsilon L \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) j' \quad ; \quad \delta_2 = \sqrt{3}\varepsilon L \sin\theta j' \quad (III.32)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy dans le repère (C,X',Y') est alors :

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\varepsilon(N-M)}{4\sqrt{3}M(M+N)} \quad ; \quad \sigma_{y'y'} = \frac{\varepsilon(3M+N)}{4\sqrt{3}M(M+N)} \quad ; \quad \sigma_{x'y'} = 0 \quad (III.33)$$

Les efforts appliqués sur la structure sont :

$$\left. \begin{aligned} P_j &= \frac{\varepsilon L}{2M} + \frac{\varepsilon L}{(M+N)} \cos 2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi(j-1)\right) \\ Q_j &= \frac{\varepsilon L}{(M+N)} \sin 2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi(j-1)\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.34})$$

La rotation de la jonction est nulle  $\psi_0 = 0$ .

L'essai de tension simple induit donc une force axiale de module  $\varepsilon L/2M$  sur chaque poutre et une autre force de module  $\varepsilon L/(M+N)$  et de direction variable selon l'orientation initiale de la poutre.

Les constantes élastiques qui traduisent le comportement linéaire de la structure isotrope dans le plan se réduisent à  $E^*$  et  $\nu^*$ .

L'analogie entre les équations (III.30), (III.33) et les expressions données par l'élasticité linéaire d'une structure isotrope bidimensionnelle permet d'exprimer le module effectif et le coefficient de Poisson de la structure par :

$$E^* = \frac{2}{\sqrt{3}(N+3M)} \quad ; \quad \nu^* = \frac{(N-M)}{(N+3M)} \quad (\text{III.35})$$

Pour les structures à densité relative faible,  $N \gg M$ , les constantes effectives sont essentiellement déterminées par la souplesse de flexion,  $N$ . On retrouve bien les résultats obtenus par l'analyse de Ashby et al (1982).

$$N \gg M \Rightarrow E^* = \frac{2}{\sqrt{3}N} = 2.3E_s \left(\frac{t}{2L}\right)^3 \quad ; \quad N = \frac{4L^3}{E_s t^3} \quad ; \quad \nu^* = 1 \quad (\text{III.36})$$

En réalité l'épaisseur des poutres formant la structure n'est pas constante (fig.III.13). Warren et al.(1987) ont étudié l'influence de la forme de l'épaisseur  $t$  sur les constantes élastiques de la structure (fig.III.15).

Pour les densités faibles il apparaît que l'influence de la forme de la poutre est minimale sur les constantes élastiques effectives (fig.III.15).

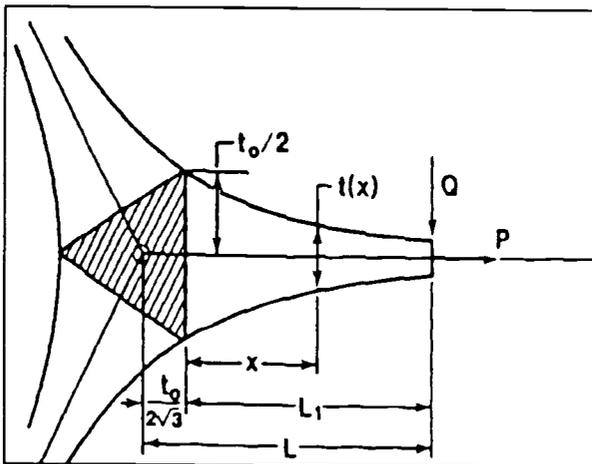


fig.III.13

$t(x)$	M	N	$\phi$
$t_0$	$\frac{L_1}{E_s t_0}$	$\frac{4L_1^3}{E_s t_0^3}$	$\frac{t_0}{\sqrt{3}L} \left( 1 - \frac{t_0}{4\sqrt{3}L} \right)$
$t_0 \left( 1 + 2\sqrt{3} \frac{x}{t_0} \right)^{-3/4}$	$\frac{\sqrt{3}}{8E_s} \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}L_1}{t_0} \right)^{3/4}$	$\frac{L_1^3}{E_s t_0^3} \left( 4 + \frac{2\sqrt{3}L_1}{t_0} \right)$	$\frac{t_0^2}{4L^2} \left( \left( \frac{2\sqrt{3}L}{t_0} \right)^{3/4} - \frac{2}{3} \right)$
$t_0 e^{-\left( \frac{2x}{\sqrt{3}t_0} \right)}$	$\frac{\sqrt{3}}{2E_s} \left( e^{\left( \frac{2L_1}{\sqrt{3}t_0} \right)} - 1 \right)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}E_s} \left[ 2e^{\left( \frac{2L_1}{\sqrt{3}t_0} \right)} - 1 \right] -$ $\frac{1}{2\sqrt{3}E_s} \left[ \left( 1 + \frac{2\sqrt{3}L_1}{t_0} \right)^2 \right]$	$\frac{t_0^2}{2L^2} \left( \frac{7}{6} - e^{-\left( 2L_1 / \sqrt{3}t_0 \right)} \right)$

fig.V.14

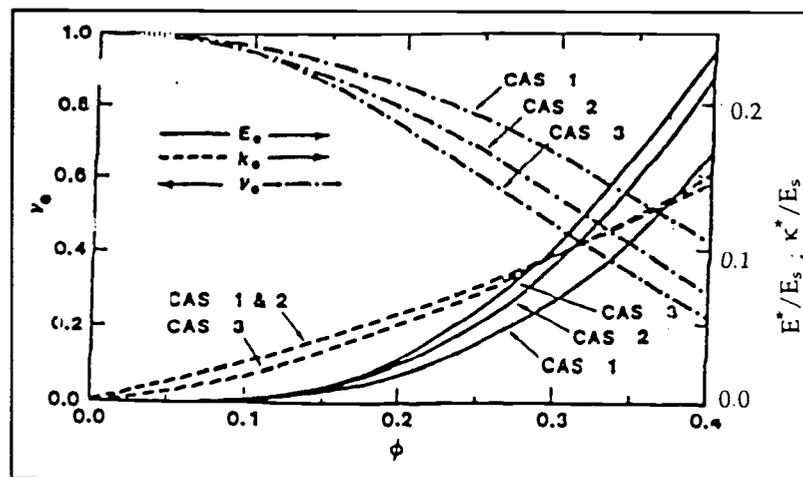
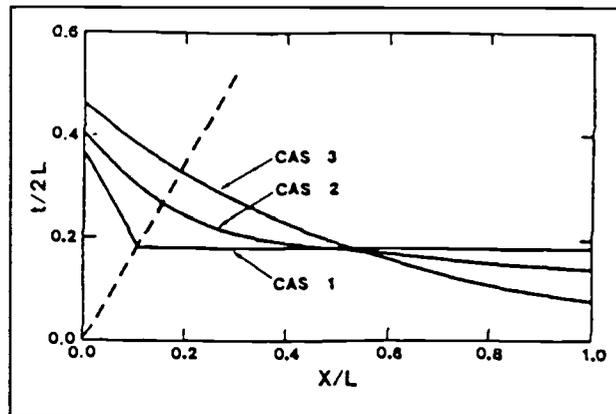


fig.V.15

## II.3 Elasticité linéaire des mousses

La flexion est le mécanisme prépondérant dans les petites déformations des structures à densité relative faible comme on l'a remarqué pour les nids d'abeille et a été confirmé par les observations microscopiques effectuées par Menges et al. (1975, 1982).

Un modèle de cellule cubique (fig.III.16) a été proposé par Gent et Thomas (1959, 1962) et a largement servi pour introduire la mécanique des matériaux cellulaires.

Gibson et Ashby (1982) proposèrent, pour les constantes élastiques linéaires d'une cellule cubique ouverte composée de poutres à section carrée, les expressions suivantes :

$$\frac{E^*}{E_s} = C_1 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 \quad ; \quad \frac{G^*}{E_s} = C_2 \left( \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 \quad ; \quad \nu^* = \frac{C_1}{2C_2} - 1 = C_3 \quad (\text{III.37})$$

Où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes de proportionnalité qui peuvent être déterminées par lissage des données expérimentales.

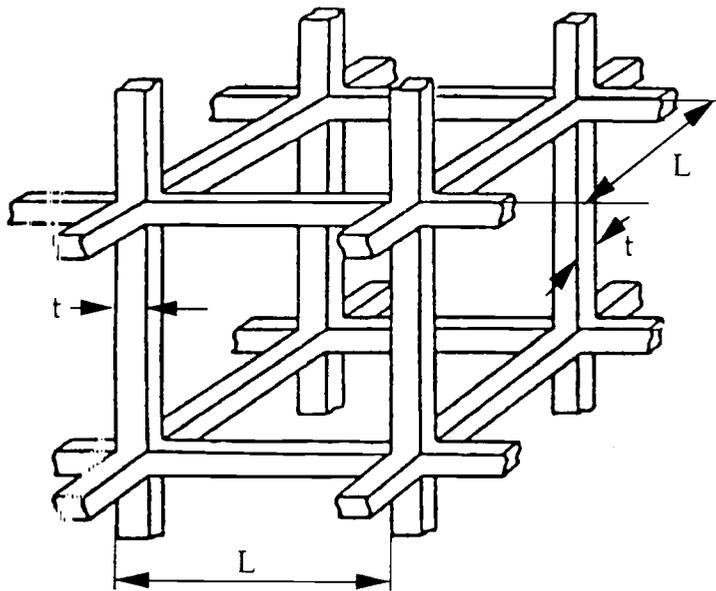


fig.III.16: Modèle de mousse à cellules ouvertes  
[ D'après Gent et Thomas, (1959) ]

Les observations microscopiques et la rhéologie des fluides non-Newtoniens ont permis de mieux identifier la forme des cellules d'une mousse.

Le modèle hexagonal représente une bonne approche de la structure observée pour les mousses bidimensionnelles comme l'a montré Kraynik (1988).

Le modèle étendu aux mousses tridimensionnelles est composé de 4 poutres formant un tétraèdre. Trois poutres forment des angles de  $120^\circ$  entre elles et ne sont pas dans un plan; la quatrième étant à  $109.47^\circ$  de chacune des trois autres.

Ce modèle est étudié par Warren et Kraynik (1988), (1991) pour déterminer les propriétés élastiques des mousses à cellules ouvertes.

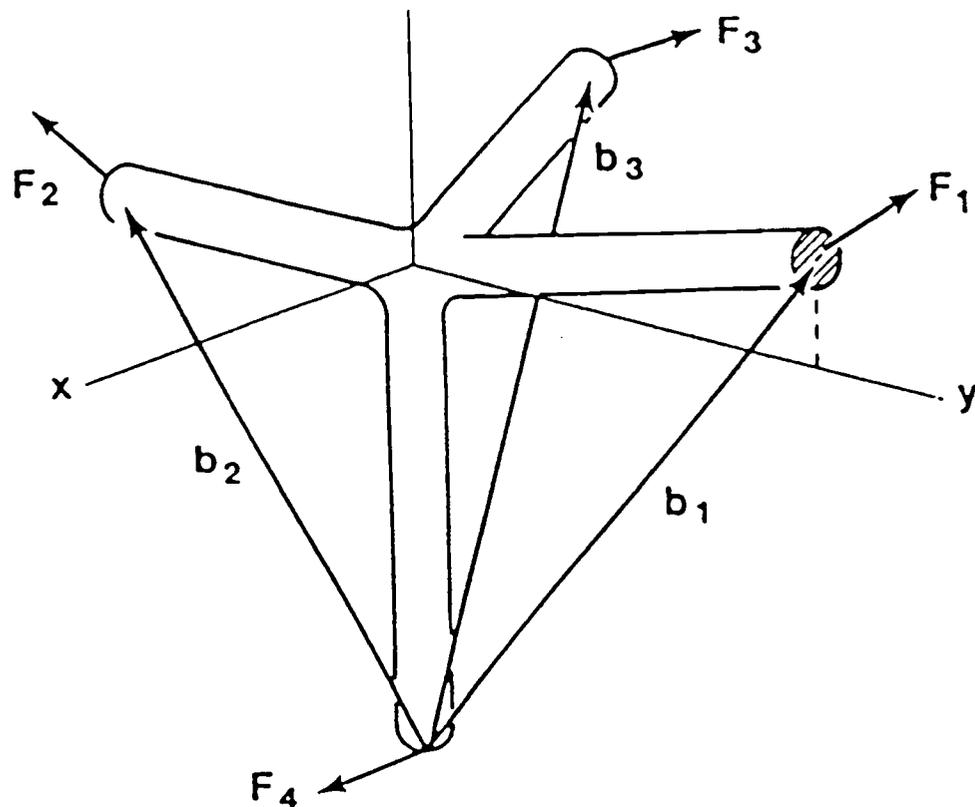


fig.III.17: Modèle de Warren et Kraynik pour une mousse à cellules ouvertes  
[ D'après Warren et Kraynik, (1988) ]

Nous présentons ci - après la démarche adoptée et les résultats obtenus pour les propriétés élastiques linéaires.

L'hypothèse de déplacements affines pour les points milieu des poutres formant la cellule est admise comme pour le cas bidimensionnel.

L'élément représentatif de la cellule est un tétraèdre régulier composé de quatre poutres identiques de longueur  $L$ .

Les déformations homogènes de la structure sont déterminées par les déplacements relatifs de trois poutres du modèle par rapport à la quatrième.

La géométrie de la structure et le système de coordonnées sont sur la figure (fig.III.17).

La démarche adoptée est identique à celle utilisée pour la structure hexagonale bidimensionnelle avec cette fois trois vecteurs  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  et  $\mathbf{b}_3$ ; l'élément de volume représentatif pour évaluer les contraintes effectives est un tétraèdre régulier.

La force  $F_j$  exercée au  $j^{\text{ème}}$  point est décomposée en composante parallèle et normale à la fibre moyenne de la poutre :

$$F_j = \underbrace{(F_j \bullet e_j)}_{\text{composante parallèle à } e_j} e_j + \underbrace{(e_j \times F_j)}_{\text{composante perpendiculaire à } e_j} \times e_j \quad (\text{III.38})$$

Le déplacement du  $j^{\text{ème}}$  point milieu est donné par :

$$\Delta_j = M(F_j \bullet e_j)e_j + N(e_j \times F_j) \times e_j + L\psi \times e_j \quad j = 1 \text{ à } 4. \quad (\text{III.39})$$

Les vecteurs de position des points milieux sont :

$$b_i = b_i^0 + \delta_i \quad ; \quad \delta_i = \Delta_i - \Delta_4 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.40})$$

Les équations d'équilibre de la structure sont :

$$\sum_{i=1}^4 F_i = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^4 e_i \times F_i = 0 \quad (\text{III.41})$$

On effectue un cisaillement pur -suivant  $Y'$ - dans un repère  $(O, X', Y', Z')$  repéré par les angles d'Euler par rapport à  $(O, X, Y, Z)$ .

Les déplacements affines des vecteurs de positions sont donnés par :

$$\delta_i = (b_i^0 \bullet k')j' \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.42})$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy évalué dans le repère  $(O, X', Y', Z')$  est :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= -\frac{\gamma M}{2D}(N-M)[f_3^* + f_4^*] \quad ; \quad \sigma_{y'y'} = -\frac{\gamma M}{2D}(N-M)[3f_3^* - f_4^*] \\ \sigma_{z'z'} &= \frac{2\gamma M}{D}(N-M)f_3^* \quad ; \quad \sigma_{x'y'} = -\frac{\gamma M}{2D}(N-M)[f_3^* - f_4^*] \\ \sigma_{x'z'} &= -\frac{\gamma M}{D}(N-M)f_2^* \quad ; \quad \sigma_{y'z'} = \frac{\gamma M}{D}[3(17N+7M)+(N-M)(f_1 + f_2)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.43})$$

Pour un essai de tension simple suivant  $Z'$ , les déplacements sont exprimés par :

$$\delta_i = \varepsilon(b_i^0 \bullet k')k' \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.44})$$

Le tenseur des contraintes est exprimé par :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{x'x'} &= \frac{\varepsilon(N-M)}{D} [(16N+11M)+M(f_1-f_2)] & ; \sigma_{x'y'} &= -\frac{\varepsilon}{D} M(N-M)f_2^* \\
 \sigma_{y'y'} &= \frac{\varepsilon(N-M)}{D} [(16N+11M)+M(f_1+f_2)] & ; \sigma_{x'z'} &= \frac{2\varepsilon}{D} M(N-M)f_3 \\
 \sigma_{z'z'} &= \frac{2\varepsilon}{D} [(8N^2+11M^2+53MN)-M(N-M)f_1] & ; \sigma_{y'z'} &= \frac{2\varepsilon}{D} M(N-M)f_3^*
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.45})$$

avec :

$$D = 288\sqrt{3}LMN(2M + N)$$

Les fonctions  $f_i^*(\theta, \varphi, \psi)$  sont obtenues à partir de  $f_i(\theta, \varphi, \psi)$  en remplaçant les termes  $(\sin\psi ; \cos\psi)$  par  $(\cos\psi ; -\sin\psi)$  respectivement.

On remarque alors que les contraintes dépendent de l'orientation initiale de la cellule par rapport à la déformation.

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(\theta, \varphi) &= 4\sqrt{2}(2\sin 2\theta - \sin 4\theta)\cos 3\theta - (4\cos 2\theta + 7\cos 4\theta) \\
 f_2(\theta, \varphi, \psi) &= (3 + 4\cos 2\theta - 7\cos 4\theta)\cos 2\psi + 4\sqrt{2}(3\sin 3\theta - \sin \theta)\sin 3\theta \sin 2\psi \\
 &\quad - 4\sqrt{2}(2\sin 2\theta + \sin 4\theta)\cos 3\theta \cos 2\psi \\
 f_3(\theta, \varphi, \psi) &= (2\sin 2\theta + 7\sin 4\theta)\sin \psi + 4\sqrt{2}(\cos 2\theta - 4\cos \theta)\cos 3\theta \sin \psi \\
 &\quad + 6\sqrt{2}(\cos \theta - \cos 3\theta)\sin 3\theta \cos \psi \\
 f_4(\theta, \varphi, \psi) &= 7(2\sin 2\theta - \sin 4\theta)\sin 3\psi + 4\sqrt{2}(7\cos 2\theta + 4\cos \theta)\cos 3\theta \sin 3\psi \\
 &\quad + 2\sqrt{2}(7\cos \theta + 9\cos 3\theta)\sin 3\theta \cos 3\psi
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.46})$$

On considère alors un volume plus grand qui contient des éléments orientés dans toutes les directions de manière équiprobable.

Dans ces conditions les contraintes effectives de l'élément représentatif sont une moyenne des contraintes de chaque élément tétraédrique suivant toutes les orientations possibles:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int_V \sigma(\theta, \varphi, \psi) dv \quad (\text{III.47})$$

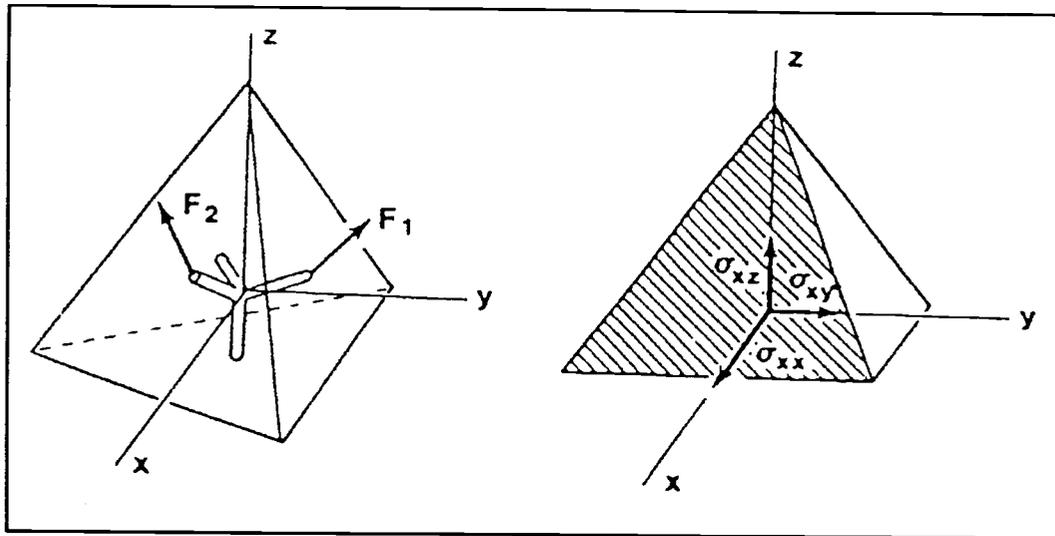


fig.III.18: Element représentatif du matériau homogène équivalent

En utilisant les angles d'Euler, la contrainte effective est:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi, \psi) \sin\theta d\varphi d\theta d\psi \quad (\text{III.48})$$

Pour les tenseurs de contrainte donnés par (III.43) et (III.45), seuls les termes  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_1^*, f_2^*, f_3^*$  et  $f_4^*$  sont concernés par cette opération; les autres sont indépendants des angles d'Euler.

On obtient :

$$f_1 = 9/5 \text{ et } f_2 = f_3 = f_4 = f_1^* = f_2^* = f_3^* = f_4^* = 0 \quad (\text{III.49})$$

En utilisant la relation habituelle de l'élasticité linéaire pour un matériau élastique isotrope :  $\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \bar{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \bar{\varepsilon}_{ij}$  pour le cisaillement pur et la tension simple, on obtient:

$$\underbrace{\bar{\sigma}_{y'z'}}_{\text{Cisaillement pur}} = \mu \gamma \quad ; \quad \underbrace{\bar{\sigma}_{x'x'} = \bar{\sigma}_{y'y'} = \bar{\sigma}_{z'z'}}_{\text{Tension simple}} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon \quad (\text{III.50})$$

Cela donne pour les constantes élastiques effectives de la mousse :

$$\left. \begin{aligned} \lambda^* &= \frac{(N-M)(5N+4M)}{90\sqrt{3}LMN(2M+N)} ; & \mu^* &= \frac{(11N+4M)}{60\sqrt{3}LN(2M+N)} ; & \kappa^* &= \frac{1}{18\sqrt{3}LM} \\ E^* &= \frac{(11N+4M)}{2\sqrt{3}L(10N^2+31MN+4M^2)} ; & \nu^* &= \frac{(N-M)(5N+5M)}{(10N^2+31MN+4M^2)} \end{aligned} \right\} \text{(III.51)}$$

On remarque que le coefficient de Poisson est compris entre -1 et 1/2 ce qui assure que la densité d'énergie soit définie positive. Le module de compression isotrope,  $\kappa^*$ , est indépendant de la souplesse de flexion N.

En supposant que les poutres ont une section droite A et un moment d'inertie  $Aq^2$  et que la densité relative de la mousse est faible, on exprime la fraction de volume ( $\approx$  densité relative) par :

$$\phi = \frac{A}{2\sqrt{3}L^2} \quad \text{(III.52)}$$

Les souplesses M et N peuvent être exprimées par :

$$M = \frac{1}{2\sqrt{3}E_s L \phi} ; \quad N = \frac{A}{36E_s q^2 L \phi^2} \quad \text{(III.53)}$$

Le module d'Young effectif de la mousse est :

$$\frac{E^*}{E_s} = \frac{33\sqrt{3}q^2\phi^2}{5A} ; \quad \phi \ll 1 \quad \text{(III.54)}$$

Pour trois sections droites : circulaire, triangulaire et de Plateau, on obtient:

circulaire:	$\frac{q^2}{A} = \frac{1}{4\pi} = 0.080$	$\frac{E^*}{E_s} = 0.91\phi^2$
triangulaire:	$\frac{q^2}{A} = \frac{1}{6\sqrt{3}} = 0.096$	$\frac{E^*}{E_s} = 1.1\phi^2$
section de Plateau:	$\frac{q^2}{A} = \frac{20\sqrt{3} - 11\pi}{6(2\sqrt{3} - \pi)^2} = 0.134$	$\frac{E^*}{E_s} = 1.53\phi^2$

On observe que les constantes effectives d'une mousse à faible densité relative dépendent de  $\phi^2$  ce qui indique la prédominance de la flexion dans la déformation de leur structure.

Pour une structure à cellules cubiques et ouvertes Warren et al.(1988) ont établi les constantes élastiques effectives et ont confirmé les résultats de Gent et Thomas(1959) pour les mousses à densité faible: Les modules d'Young et de cisaillement de la

mousse varie linéairement en fonction de la fraction de volume ce qui indique la prédominance de la traction- compression dans le mécanisme de déformation.

$$E^* = \frac{2N + M}{4LM(4N + M)} \quad ; \quad \mu^* = \frac{2N + M}{40LMN} \quad ; \quad \kappa^* = \frac{1}{12LM} \quad (\text{III.55})$$

Ces résultats illustrent et renforcent la relation entre les propriétés élastiques des mousses et leur microstructure.

Structure	Tétraédrique	Cubique
$\frac{E^*}{E_s}$	$\frac{\phi^2(11 + 4\phi)}{(10 + 31\phi + 4\phi^2)}$	$\frac{\phi(1 + \phi/\sqrt{3})}{(6 + \phi/\sqrt{3})}$
$\frac{\mu^*}{E_s}$	$\frac{\phi^2(11 + 4\phi)}{30(1 + 2\phi)}$	$\frac{\phi}{15}(1 + \phi/\sqrt{3})$
$\frac{\kappa^*}{E_s}$	$\frac{\phi}{9}$	$\frac{\phi}{9}$
$\nu^*$	$\frac{(1 - \phi)(5 + 4\phi)}{(10 + 31\phi + 4\phi^2)}$	$\frac{(1 - 2\phi/3\sqrt{3})}{(4 + 2\phi/3\sqrt{3})}$

## II.4 conclusion

Cette analyse indique que le mécanisme de déformation du réseau de poutres - en flexion ou en traction-compression - détermine les différentes constantes élastiques effectives pour une structure donnée. Si la structure est tétraédrique, les poutres fléchissent et la dépendance est carrée entre les modules effectifs et la fraction de volume du matériau solide. Pour les structures cubiques, les poutres s'étirent et il en résulte une dépendance linéaire entre les constantes effectives et la fraction de volume du matériau solide.

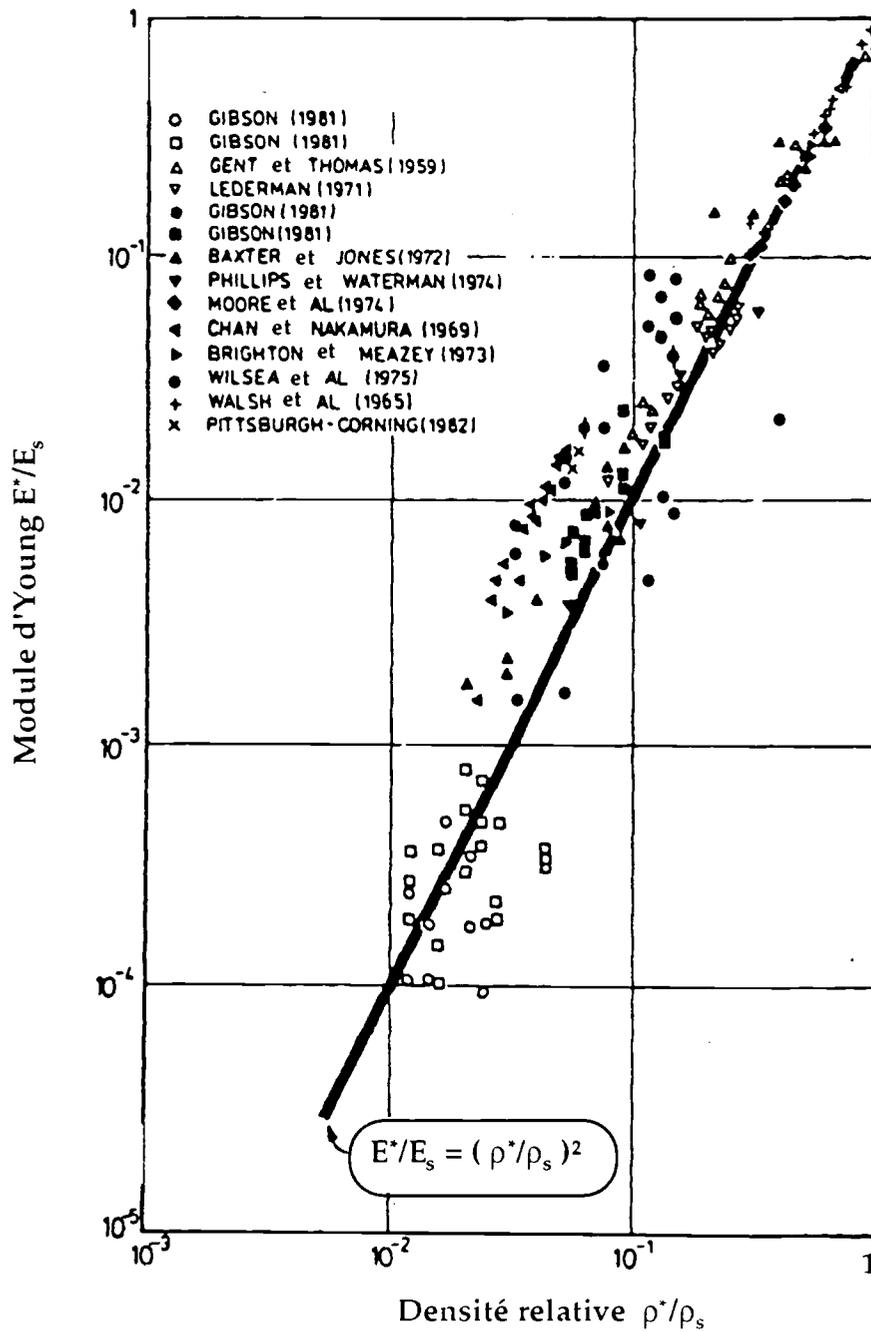


fig.III.19: Confrontation de la loi donnée par Gibson et al avec les données expérimentales.

## III ELASTICITE NON-LINEAIRE

### III.1 Introduction

Le comportement mécanique des matériaux cellulaires est déterminé par leur structure et les propriétés de leurs constituants. Les mousses synthétiques représentent une importante classe de ces matériaux cellulaires pour laquelle le comportement mécanique en grandes déformations est capital pour les applications habituelles comme l'emballage et l'atténuation des chocs.

En effet, toute description du comportement des mousses basée sur la théorie classique de l'élasticité linéaire est incomplète si les déformations sont importantes ou les modules varient fortement avec les déformations.

Le modèle élastique non-linéaire proposé est une extension du modèle élastique linéaire déjà développé par Warren et al. (1988) et repris dans la partie relative à l'élasticité linéaire (§ II).

On suppose que les déformations des poutres dépendent linéairement des efforts appliqués, les souplesses  $M$  et  $N$ , de traction - compression et de flexion, sont constantes.

Sous cette hypothèse la réponse élastique non-linéaire provient des effets géométriques dus aux grandes déformations de la cellule. Des simulations numériques incorporant des non-linéarités géométriques, pour un essai de cisaillement pur sur cette structure, montrent que l'effet de flexion des poutres décroît quand la déformation augmente, pendant que l'effet de la traction-compression devient dominant.

Dans cette optique, nous supposons que l'essentiel des effets des grandes déformations peut être capturé (appréhendé) en tenant compte de l'effet prépondérant de la traction-compression, l'effet de flexion étant négligé.

On utilise la théorie de l'élasticité non-linéaire en grandes déformations pour formuler la loi de comportement de la mousse.

On ne considère que les forces axiales  $P_i$ , agissant sur les points milieux des films (= poutres) constituant le modèle.

### III.2 Elasticité non-linéaire des nids d'abeille

La géométrie, sous cette hypothèse, est schématisée sur la figure (fig.III.20). Durant la déformation chaque poutre s'étire sous l'action de la force axiale  $P_i$  et tourne d'un angle  $\theta_i$  de sa position initiale.

Nous allons établir la relation reliant les efforts axiaux appliqués à la structure et les déplacements aux points 1, 2 et 3.

On introduit les variables auxiliaires :

$$\varphi_1 = \theta_1; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \theta_2; \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{6} - \theta_3 \quad (\text{III.56})$$

et on définit les vecteurs déplacements  $\Delta_i$ , des points extrémités de la structure par :

$$\Delta_i = (L + MP_i)\mathbf{e}_i - L\mathbf{e}_i^0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.57})$$

où :

$L$  : longueur de chaque poutre;

$P_i$  : module de la force axiale appliquée au point  $i$  de la poutre  $i$ ;

$\mathbf{e}_i$  : vecteur unitaire orienté suivant la poutre  $i$  dans la configuration déformée;

$\mathbf{e}_{i0}$  : vecteur unitaire orienté suivant la poutre  $i$  dans la configuration non déformée.

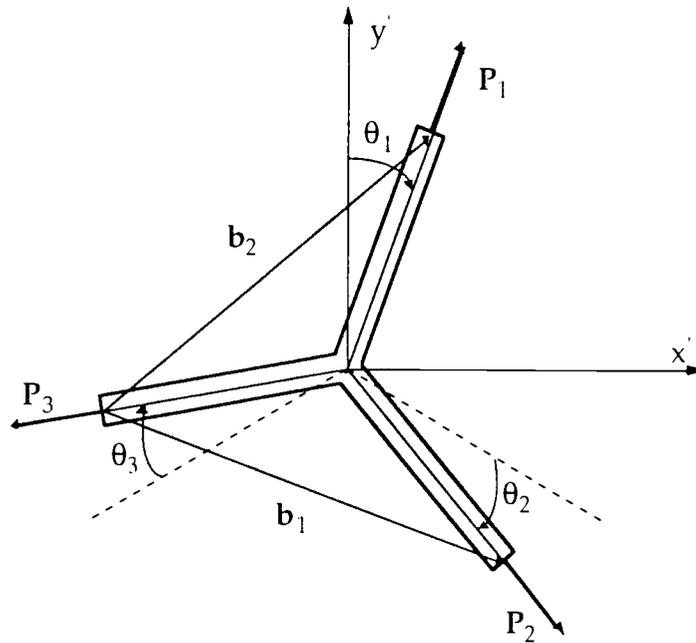


fig.III.20: Géométrie et définition de la structure étudiée

Les vecteurs repérant la position des points 1 et 2 par rapport au point 3 sont:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i^0 + \delta_i \quad ; \quad \delta_i = \Delta_i - \Delta_3 = \delta_{ix}\mathbf{i}' + \delta_{iy}\mathbf{j}' \quad (\text{III.58})$$

L'équilibre de cette structure permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_i = 0 \quad (\text{III.59})$$

Les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  et  $\delta_i$  sont déterminés à partir des déformations homogènes spécifiées pour la structure.

Les composantes des vecteurs  $\mathbf{P}_i$  données par (III.59) permettent d'exprimer les modules de  $\mathbf{P}_2$  et  $\mathbf{P}_3$  en fonction de  $P_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  par:

$$P_2 = \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_3)}{\sin(\varphi_2 + \varphi_3)} P_1 \quad ; \quad P_3 = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 + \varphi_3)} P_1 \quad (\text{III.60})$$

A partir de (III.58), (III.57) et (III.60) on arrive à formuler quatre équations non-linéaires reliant les variables  $P_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ ; soit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{L}(\delta_{1x} + \delta_{2x}) &= \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3 - \frac{3}{2} \sqrt{3} + Q \cos \varphi_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{1}{L}(2\delta_{1x} - \delta_{2x}) &= 2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 + Q \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \\ \frac{1}{L}(\delta_{1y} + \delta_{2y}) &= \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 + 2 \sin \varphi_3 - \frac{3}{2} + Q \sin \varphi_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{1}{L}(2\delta_{1y} - \delta_{2y}) &= 2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3 - 3 + Q \cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.61})$$

avec :

$$Q = \frac{3MP_1}{L \sin(\varphi_2 + \varphi_3)} \quad (\text{III.62})$$

Si on impose une déformation homogène sur la structure; alors on peut exprimer les inconnues du système (III.61),  $P_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  en fonction des données du problème :  $\delta_{ix}$  et  $\delta_{iy}$ .

On considère un état de déformation homogène qui est une combinaison d'une tension et d'un cisaillement dans un repère  $(O, X, Y)$  tourné de  $\theta$  par rapport à  $(O, X', Y')$ .

Le déplacement d'un vecteur quelconque par rapport au point 3 est exprimé par :

$$\delta \mathbf{R} = [\varepsilon_x (\mathbf{R} \cdot \mathbf{i}) + \gamma (1 + \varepsilon_y) (\mathbf{R} \cdot \mathbf{j})] \mathbf{i} + \varepsilon_y (\mathbf{R} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} \quad (\text{III.63})$$

avec :

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{i}' - \sin \theta \mathbf{j}' \quad ; \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{i}' + \cos \theta \mathbf{j}' \quad (\text{III.64})$$

On exprime les équations du système (III.61) à partir de (III.63); soit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{L}(\delta_{1x} + \delta_{2x}) &= \frac{3}{4} \left[ \begin{aligned} &\sqrt{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\sqrt{3} \cos 2\theta - \sin 2\theta) \\ &+ \gamma(1 + \varepsilon_y)(1 + \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta) \end{aligned} \right] \\ \frac{1}{L}(2\delta_{1x} - \delta_{2x}) &= \frac{3}{2} \left[ \gamma(1 + \varepsilon_y)(1 + \cos 2\theta) - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta \right] \\ \frac{1}{L}(\delta_{1y} + \delta_{2y}) &= \frac{3}{4} \left[ \begin{aligned} &\sqrt{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta) \\ &- \gamma(1 + \varepsilon_y)(\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2\theta + \sin 2\theta) \end{aligned} \right] \\ \frac{1}{L}(2\delta_{1y} - \delta_{2y}) &= \frac{3}{2} \left[ (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\theta - \gamma(1 + \varepsilon_y) \sin 2\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.65)}$$

Les efforts exercés sur la structure sont :

$$P_1 = \frac{QL}{3M} \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \quad ; \quad P_2 = \frac{QL}{3M} \cos(\varphi_1 + \varphi_3) \quad ; \quad P_3 = \frac{QL}{3M} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{(III.66)}$$

Les contraintes effectives de Cauchy associées à l'élément de volume déformé sont exprimées, dans (O, X', Y'), par:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \frac{Q}{36M\lambda_x\lambda_y} \left\{ \begin{aligned} &[\lambda_x + \lambda_y + (\lambda_x - \lambda_y) \cos 2\theta + \gamma\lambda_y \sin 2\theta] \\ &\times [\sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + 2 \cos \varphi_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_3)] \\ &+ \sqrt{3} [\gamma\lambda_y (1 + \cos 2\theta) - (\lambda_x - \lambda_y) \sin 2\theta] \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned} \right\} \\ \sigma_{y'y'} &= \frac{Q}{36M\lambda_x\lambda_y} \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{3} [\lambda_x + \lambda_y - (\lambda_x - \lambda_y) \cos 2\theta - \gamma\lambda_y \sin 2\theta] \cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \\ &+ [\gamma\lambda_y (1 - \cos 2\theta) + (\lambda_x - \lambda_y) \sin 2\theta] \\ &\times [2 \sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_3) - \cos \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_3)] \end{aligned} \right\} \\ \sigma_{x'y'} &= \frac{Q}{36M\lambda_x\lambda_y} \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{3} [\lambda_x + \lambda_y - (\lambda_x - \lambda_y) \cos 2\theta - \gamma\lambda_y \sin 2\theta] \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \\ &- [\gamma\lambda_y (1 - \cos 2\theta) + (\lambda_x - \lambda_y) \sin 2\theta] \\ &\times [2 \cos \varphi_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_3) - \sin \varphi_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_3)] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.67)}$$

En égalisant les membres de droites des systèmes (III.61) et (III.65) et en effectuant un développement limité au 3<sup>ème</sup> ordre de  $\theta_i$  et  $Q$  en fonction des  $\gamma$ ,  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$ , on obtient (III.68).

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \frac{3}{2}\gamma - \frac{3}{4}\gamma(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\
 \theta_2 + \theta_3 &= \sin 2\theta(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + (1 - \cos 2\theta)\gamma - \sin 2\theta(\varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2) \\
 &\quad - \frac{1}{4}\sin 4\theta(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)\gamma(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\gamma \cos 2\theta(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{4}(\sin 4\theta - 2\sin 2\theta)\gamma^2 \\
 (\theta_2 - \theta_3)/\sqrt{3} &= -\cos 2\theta(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \gamma \sin 2\theta + \cos 2\theta(\varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2) \\
 &\quad - \frac{1}{4}\cos 4\theta(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - \frac{1}{2}\gamma \sin 4\theta(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\gamma \sin 2\theta(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{4}(\cos 4\theta - 2\cos 2\theta)\gamma^2 \\
 Q/\sqrt{3} &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{1}{8}\gamma^2(\varepsilon_x - 11\varepsilon_y) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - 3\gamma^2\right] \cos 6\theta \\
 &\quad + \frac{1}{4}\gamma\left[3(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - \gamma^2\right] \sin 6\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (III.68)$$

Les efforts axiaux peuvent être exprimés, au 3<sup>ème</sup> ordre par:

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= \frac{QL}{2\sqrt{3}M} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta_2 - \theta_3) - \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_3)^2 \right] = P_1(\theta) \\
 P_2(\theta) &= P_1(\theta - 2\pi/3) \quad ; \quad P_3(\theta) = P_1(\theta + 2\pi/3)
 \end{aligned} \right\} \quad (III.69)$$

La théorie de l'élasticité des milieux continus est développée à partir d'une fonction de densité d'énergie dont on a proposé quelques expressions fréquemment utilisées pour modéliser les matériaux hyperélastiques.

En considérant les déformations homogènes planes telles que chaque point de la structure  $(x, y)$  est transformé en  $(X, Y)$  par:

$$X = \lambda_1 x + \gamma \lambda_2 y \quad ; \quad Y = \lambda_2 y \quad ; \quad Z = z \quad (III.70)$$

On compare les expressions du tenseur de contrainte de Cauchy obtenues par le système (III.67), en tenant compte de (III.68), et celles exprimées à partir de la densité d'énergie proposée pour le matériau.

La densité d'énergie du matériau est exprimée en fonction d'un certain nombre de paramètres qui seront identifiés à l'aide des essais expérimentaux.

On rappelle que les composantes du tenseur de Cauchy peuvent être exprimées à partir de la densité d'énergie par:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\gamma}{\lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \gamma} \right) \\ \sigma_y &= \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} - \frac{\gamma}{\lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \gamma} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.71})$$

A partir d'une expression de  $W$  de la forme (III.72), Warren et al.(1988) ont identifié par comparaison des termes des deux systèmes (III.66) et (III.71), une fois qu'ils les ont exprimés dans le même repère, les paramètres de la densité d'énergie s'expriment par:

$$W_s = \frac{\sqrt{3}}{24M} \left\{ a_2 J_1^2 + b_2 J_2 + a_3 J_1^3 + b_3 J_1 J_2 + c_3 J_3 + d_3 J_4 \right. \\ \left. + a_4 J_1^4 + b_4 J_1^2 J_2 + c_4 J_2^2 + d_4 J_1 J_3 + e_4 J_1 J_4 \right\} \quad (\text{III.72})$$

avec:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \gamma_{xy} + \gamma_y \quad ; \quad J_3 = \gamma_x \gamma_y (\gamma_x^2 + 6\gamma_{xy} + 9\gamma_y^2 - 12\gamma_{xy}) \\ J_2 &= \gamma_x \gamma_y - \gamma_{xy}^2 \quad ; \quad J_4 = 3\gamma_{xy} (\gamma_x - \gamma_y)^2 4\gamma_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.73})$$

où :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) = \varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y) \\ \gamma_y &= \frac{1}{2}[\lambda_2^2(1 + \gamma^2) - 1] = \varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}\gamma(1 + \varepsilon_y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.74})$$

sont les composantes du tenseur de déformation de Green.

Les paramètres sont :

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 1 \quad ; \quad b_2 = a_3 = c_3 = d_3 = 0 \quad ; \quad b_3 = -2 \\ a_4 &= -(1 + \frac{1}{2}\cos 6\theta) \quad ; \quad b_4 = 5 - 6\cos 6\theta \\ c_4 &= 1 \quad ; \quad d_4 = \cos 6\theta \quad ; \quad e_4 = \sin 6\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.75})$$

En tenant compte de l'énergie de flexion de la structure en petites déformations, la densité d'énergie de la structure est :

$$W = \frac{\sqrt{3}}{24M} \left\{ (1 + \alpha)J_1^2 - 4\alpha J_2 - 2J_1J_2 + J_2^2 - J_1^4 + 5J_1^2J_2 \right. \\ \left. + J_1J_4 \sin 6\theta + \frac{1}{2} J_1(2J_3 - J_1^3 - 12J_1J_2) \cos 6\theta \right\} \quad (\text{III.76})$$

avec :

$$\alpha = \frac{2M}{(N + M)} \quad (\text{III.77})$$

Les expressions des composantes du tenseur de Cauchy sont :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sqrt{3}}{12M(1+\varepsilon_y)} \left\{ \begin{aligned} &(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \left[ (2\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - 3\gamma^2\varepsilon_x \right] \cos 6\theta \\ &-\alpha\gamma^2\varepsilon_x + \frac{3}{4}\gamma^2 + (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \alpha(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \alpha\gamma^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - \frac{1}{2}(3\varepsilon_x^2 + 6\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\ &+ \gamma^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{4}\gamma \left[ 3(3\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \gamma^2 \right] \sin 6\theta \end{aligned} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\sqrt{3}}{12M(1+\varepsilon_x)} \left\{ \begin{aligned} &(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - 3\gamma^2\varepsilon_y \right] \cos 6\theta \\ &+\alpha\gamma^2\varepsilon_y + \frac{3}{4}\gamma^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \alpha(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \alpha\gamma^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - \frac{1}{2}(\varepsilon_x^2 - 6\varepsilon_x\varepsilon_y - 3\varepsilon_y^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\ &-\gamma^2(2\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{4}\gamma \left[ 3(\varepsilon_x + 3\varepsilon_y)(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \gamma^2 \right] \sin 6\theta \end{aligned} \right\} \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sqrt{3}}{12M(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{3}{4}\gamma(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\gamma(\varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x\varepsilon_y - 5\varepsilon_y^2) \\ &+ \frac{9}{8}\gamma^3 - \frac{3}{2}\gamma(\varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2) \cos 6\theta + \alpha\gamma \\ &\frac{3}{4}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 - \gamma^2 \right] \sin 6\theta \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.78})$$

A partir de ces équations nous pouvons analyser quelques types de déformations homogènes telles que le cisaillement simple, la tension uniaxiale, l'extension uniaxiale.

Lors d'un essai de compression d'un échantillon de mousse la partie centrale est en état de contrainte uniaxiale alors que la partie située sur les bords est en déformation uniaxiale.

En exprimant le système d'équation (III.78) pour chacun de ces deux types de déformations, on obtient:

**Contrainte uniaxiale** :  $\sigma_y$  ;  $\sigma_x = \sigma_{xy} = 0$ , avec :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = F_1 \varepsilon_y + F_2 \varepsilon_y^2 + F_3 \varepsilon_y^3 \\ \gamma = G_1 \varepsilon_y + G_2 \varepsilon_y^2 + G_3 \varepsilon_y^3 \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, F_2 = \frac{2(2\alpha-1)}{\alpha+1}, G_3 = -\frac{6\sin 6\theta}{(\alpha-1)^3} \\ F_3 = -\frac{4(1-8\alpha+2\alpha^2+2\alpha^3)}{(\alpha-1)^5} + \frac{2(1-3\alpha)}{(\alpha-1)^4} \cos 6\theta \end{array} \right\} \quad (\text{III.79})$$

$$\sigma_y = \frac{\alpha}{\sqrt{3M(1+\alpha)}} \left\{ \varepsilon_y + \frac{(4-\alpha^2)}{(1+\alpha)^2} \varepsilon_y^2 + \left[ \frac{(16-18\alpha-17\alpha^2+\alpha^4)}{(1+\alpha)^4} - \frac{4\cos 6\theta}{(1+\alpha)^3} \right] \varepsilon_y^3 \right\} \quad (\text{III.80})$$

Dans le cas des mousses à faibles densités relatives, on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} N \gg M \\ \alpha \approx 2M/N \ll 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3N}} [\varepsilon_y + 4\varepsilon_y^2 + 4(4-\cos 6\theta)\varepsilon_y^3] \\ \varepsilon_x = -[\varepsilon_y + 2\varepsilon_y^2 + (4-2\cos 6\theta)\varepsilon_y^3] \\ \gamma = -6\sin 6\theta \varepsilon_y^3 \end{array} \right\} \quad (\text{III.81})$$

La charge axiale appliquée à la poutre 1 est exprimée par :

$$P_1(\theta) = \frac{2L}{N} \left\{ (1+\cos 2\theta)\varepsilon_y + (3+2\cos 2\theta)\varepsilon_y^2 + (11+8\cos 2\theta-4\cos 4\theta-4\cos 6\theta)\varepsilon_y^3 \right\} \quad (\text{III.82})$$

En supposant que la poutre a une épaisseur constante  $t$ , sa charge critique donnée par la théorie d'Euler est :

$$P_c = \frac{\pi^2}{48} EL(t/L)^3 \quad (\text{III.83})$$

La déformation critique,  $\hat{\varepsilon}_1$ , de la poutre 1 chargée en compression uniaxiale est donnée par l'équation :

$$(1+\cos 2\theta)\hat{\epsilon}_1 - (3+2\cos 2\theta)\hat{\epsilon}_1^2 + (11+8\cos 2\theta - 4\cos 4\theta - 4\cos 6\theta)\hat{\epsilon}_1^3 = \frac{\pi^2}{24} \quad (\text{III.84})$$

La déformation  $\hat{\epsilon}_1$  est positive.

Chacune des poutres a une déformation critique minimale selon l'orientation de la structure par rapport à la déformation (fig.III.21). La déformation critique de la structure correspond au minimum de ces trois déformations critiques associées à chaque poutre pour l'orientation la plus défavorable :  $\epsilon_c = \min(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3)$ , (fig.III.22)

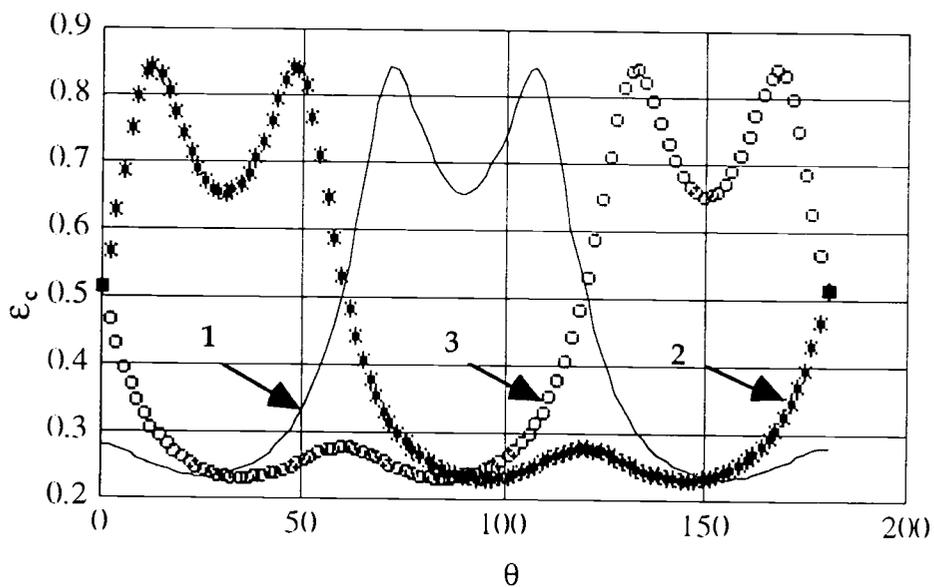


fig.III.21: Evolution des déformations critiques en fonction de l'angle d'orientation  $\theta$ .

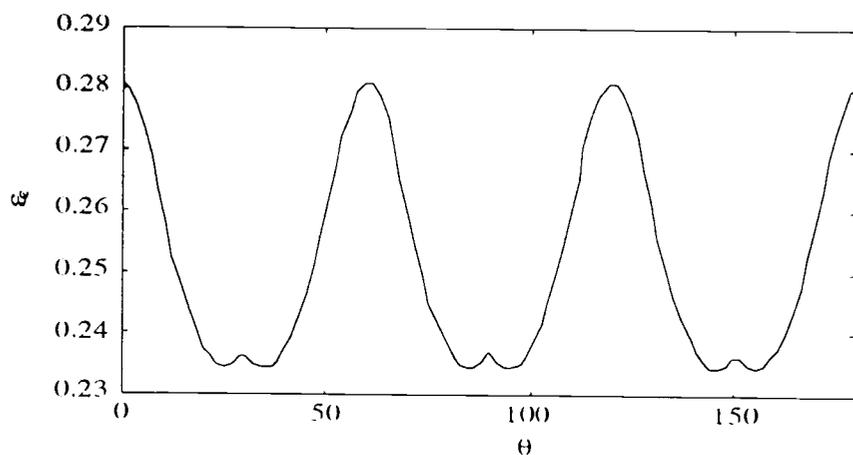


fig.III.22: Déformation critique en fonction de  $\theta$ .

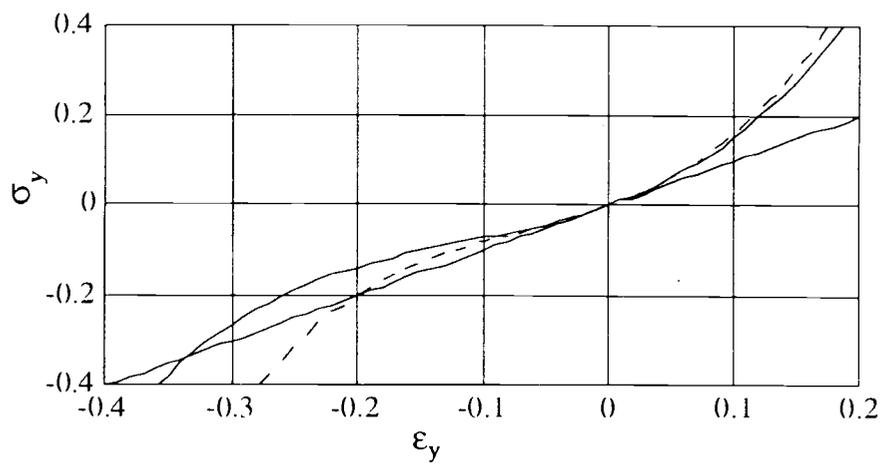


fig.III.23: Evolution de la contrainte dans le cas uniaxial paramétrée par  $\theta$ .

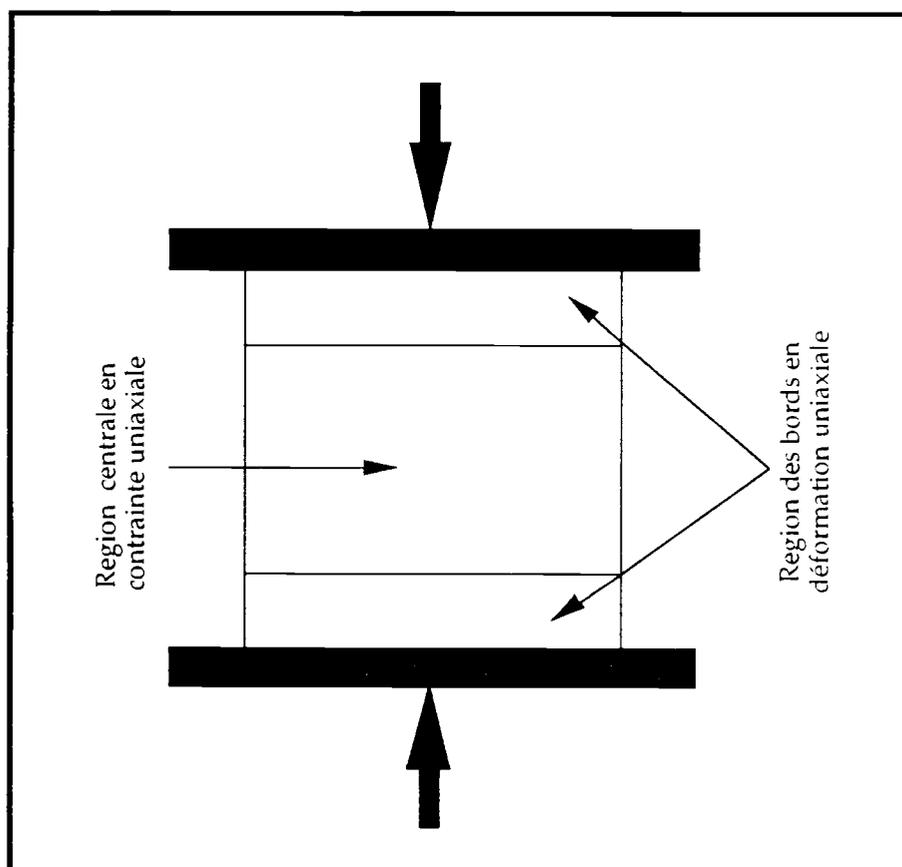


fig.III.24: Schématisation de l'essai de compression simple, Zone de contrainte uniaxiale, Zone de déformation uniaxiale

**Extension uniaxiale** :  $\varepsilon_y$  ;  $\varepsilon_x = \gamma = 0$

Le tenseur des contraintes est exprimé par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sqrt{3}}{12M} \left[ (1-\alpha)\varepsilon_y - \frac{3}{2}\varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}(2+\cos 6\theta)\varepsilon_y^3 \right] \\ \sigma_y &= \frac{\sqrt{3}}{12M} \left[ (1+\alpha)\varepsilon_y + \frac{3}{2}\varepsilon_y^2 - \frac{1}{2}(3+2\cos 6\theta)\varepsilon_y^3 \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sqrt{3}}{6M} \sin 6\theta \varepsilon_y^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.85})$$

La force axiale appliquée sur la poutre 1 est donnée par :

$$P_1(\theta) = \frac{L}{2M} \left\{ \varepsilon_y + \frac{1}{2}(1+2\cos 2\theta)\varepsilon_y^2 - \frac{1}{4}(3+2\cos 2\theta+4\cos 4\theta+\cos 6\theta)\varepsilon_y^3 \right\} \quad (\text{III.86})$$

La déformation critique de la poutre 1 est exprimée par la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2}(1+2\cos 2\theta)\bar{\varepsilon}_1^2 - \frac{1}{4}(3+2\cos 2\theta+4\cos 4\theta+\cos 6\theta)\bar{\varepsilon}_1^3 = \frac{\pi^2}{8}\phi^2 \quad (\text{III.87})$$

Pour  $\phi \ll 1$  les déformations critiques pour les trois poutres sont sensiblement identiques et égales à :

$$\varepsilon_c = \bar{\varepsilon}_i = \frac{\pi^2}{8}\phi^2 \quad i=1,2,3 \quad (\text{III.88})$$

Pour l'essai de compression la contrainte  $\sigma_y$  est la même dans les deux régions centrale et de frontière.

En égalisant les expressions (III.80) et (III.84) on arrive à :

$$6\phi^2 \left[ \varepsilon_y + 4\varepsilon_y^2 + 4(4-\cos 6\theta)\varepsilon_y^3 \right] = \bar{\varepsilon}_y + \frac{3}{2}\bar{\varepsilon}_y^2 - \frac{1}{2}(3+2\cos 6\theta)\bar{\varepsilon}_y^3 \quad (\text{III.89})$$

avec  $\bar{\varepsilon}_y$  est la déformation dans la région frontière (déformation uniaxiale) et  $\varepsilon_y$  dans la région centrale (contrainte uniaxiale).

A partir de l'équation (III.87) les poutres flambent dans la région des bords de l'échantillon quand  $\bar{\varepsilon}_y \approx -(\pi\phi)^2 / 8$  pour  $\phi$  petit, alors la déformation dans la région centrale est exprimée par :

$$\varepsilon_y + 4\varepsilon_y^2 + 4(4-\cos 6\theta)\varepsilon_y^3 = \frac{\pi^2}{48} \quad (\text{III.90})$$

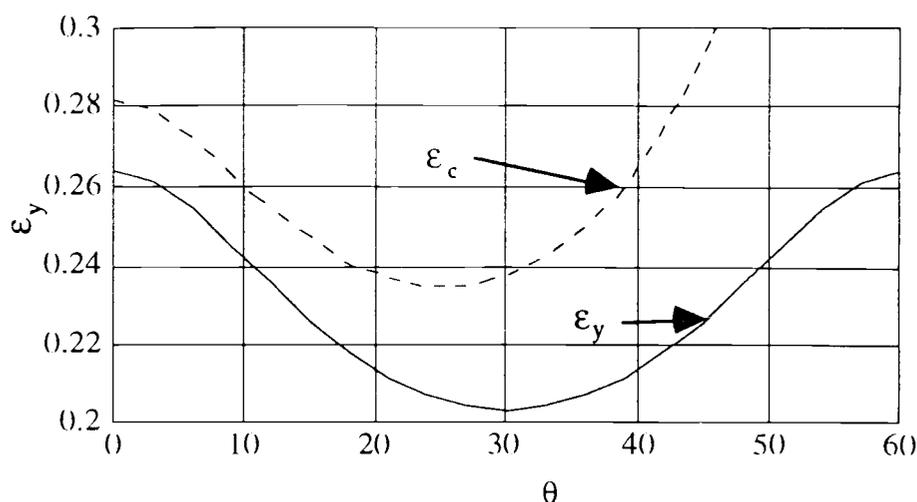


fig.III.25: Comparaison de la déformation dans la zone centrale de l'échantillon lorsque les bords sont ruinés élastiquement. La déformation dans la zone centrale est toujours inférieure à la déformation qui induit un flambement des poutres quelque soit  $\theta$ .

On observe sur cette figure que la déformation dans la région centrale est inférieure à la déformation critique. Ce résultat indique que dans le test de compression d'un échantillon de mousse à faible densité relative, le matériau commence à flamber dans les régions en bout de l'échantillon. Cet effet a été observé par Menges et Knipschild, (1982).

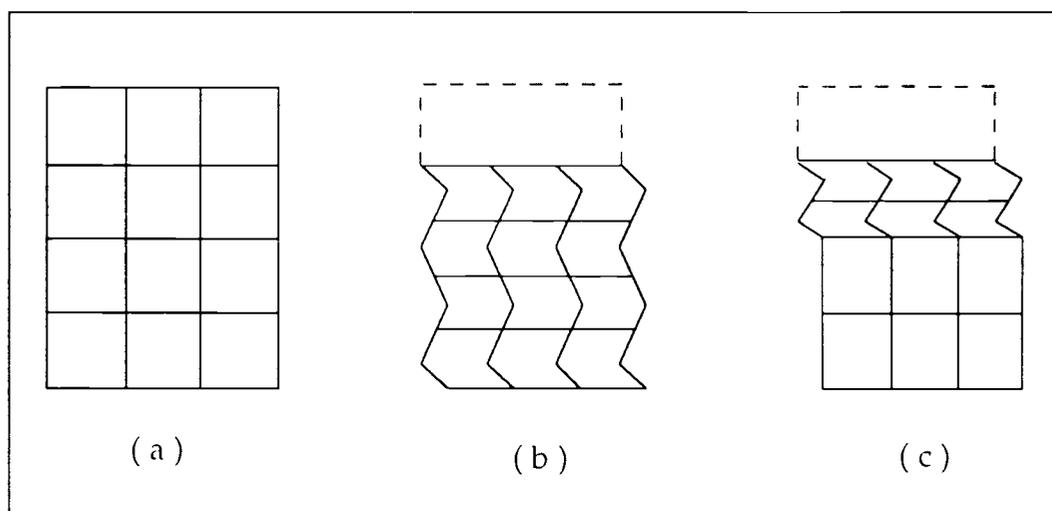


fig.III. 26:Schématisation de l'essai de compression simple sur un échantillon de mousse: (a) :Echantillon; (b) : déformation homogène supposée de l'échantillon; les barres verticales flambent; (c) : essai réel de compression de la mousse; seules les barres voisines du bout en mouvement flambent.

### III.3 Elasticité non-linéaire des mousses

Warren et Kraynik (1991) ont développé, sur leur modèle tétraédrique proposé pour les propriétés élastiques linéaires des mousses, la théorie élaborée sur le modèle élastique non-linéaire des nids d'abeille.

Pour deux types de déformations homogènes ils expriment les composantes du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff en fonction des déformations imposées et des paramètres du modèle:

**Extension uniaxiale :**  $\varepsilon_{z'z'} = \varepsilon_0$

$$\left. \begin{aligned} T_{x'x'} = T_{y'y'} &= \frac{1}{18\sqrt{3}LM} \left[ \varepsilon_0 - \frac{391}{315} \varepsilon_0^3 \right] \\ T_{z'z'} &= \frac{1}{18\sqrt{3}LM} \left[ \varepsilon_0 + \frac{11}{5} \varepsilon_0^2 - \frac{382}{315} \varepsilon_0^3 \right] \\ T_{x'y'} = T_{y'x'} = T_{y'z'} = T_{z'y'} = T_{x'z'} = T_{z'x'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (III.91)$$

**Extension biaxiale :**  $\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_t$

$$\left. \begin{aligned} T_{x'x'} = T_{y'y'} &= \frac{1}{18\sqrt{3}LM} \left[ 2\varepsilon_t + \frac{11}{5} \varepsilon_t^2 - \frac{1517}{315} \varepsilon_t^3 \right] \\ T_{z'z'} &= \frac{1}{18\sqrt{3}LM} \left[ 2\varepsilon_t - \frac{11}{5} \varepsilon_t^2 + \frac{1517}{315} \varepsilon_t^3 \right] \\ T_{x'y'} = T_{y'x'} = T_{y'z'} = T_{z'y'} = T_{x'z'} = T_{z'x'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (III.92)$$

En partant d'une forme de la densité d'énergie pour cette mousse, telle que (III.93) on arrive à exprimer les paramètres par,(III.94) :

$$W_s = \frac{1}{72\sqrt{3}LM} \left\{ a_2 J_1^2 + b_2 J_2 + a_3 J_1^3 + b_3 J_1 J_2 + c_3 J_3 + a_4 J_1^4 + b_4 J_1^2 J_2 + c_4 J_2^2 + d_4 J_1 J_3 \right\} \quad (III.93)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 = 1 \quad ; \quad b_2 = 0 \quad ; \quad a_3 = 7/10 \quad ; \quad b_3 = -6/5 \quad ; \quad c_3 = 0 \\ a_4 = -1961/5040 \quad ; \quad b_4 = 83/70 \quad ; \quad c_4 = 3/7 \quad ; \quad d_4 = -18/35 \end{aligned} \right\} \quad (III.94)$$

La densité d'énergie de déformation de la mousse, en tenant compte des petites déformations, est :

$$W = \frac{1}{72\sqrt{3}LM} \left\{ (1+\alpha)J_1^2 + -3\alpha J_2 + \frac{7}{10}J_1^3 - \frac{6}{5}J_1J_2 - \frac{1961}{5040}J_1^4 + \frac{83}{70}J_1^2J_2 + \frac{3}{7}J_2^2 - \frac{18}{35}J_1J_3 \right\} \quad (\text{III.95})$$

avec:

$$\alpha = \frac{2M(11N + 4M)}{5N(N + 2M)} \quad (\text{III.96})$$

L'essai de contrainte uniaxiale, en effectuant un développement au 3<sup>ème</sup> ordre de  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{yy}$  en fonction de  $\epsilon_{zz}$ , pour des mousses de faible densité relative,  $\alpha \ll 1$ , permet d'exprimer  $\sigma_{zz}$  par:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2L\sqrt{3}} \left\{ \frac{11}{10N}\epsilon_{zz} + \frac{187}{50N}\epsilon_{zz}^2 + \frac{6}{175M}\epsilon_{zz}^3 \right\} \quad (\text{III.97})$$

On note que la réponse linéaire est proportionnelle à  $1/N$ , la flexion détermine l'élasticité linéaire et que le terme du 3<sup>ème</sup> ordre est en  $1/M$ , la tension compression prédomine en grande déformation.

## III.4 Conclusion

Nous avons montré qu'en postulant une forme de la densité d'énergie  $W$  on arrive à exprimer ces paramètres en fonction de la géométrie de la cellule de base et des coefficients élastiques du matériau solide.

On a également montré que la non-linéarité observée sur la courbe contrainte-déformation est du type géométrique : flambement élastique des parois des cellules.

## IV CONCLUSION

Les propriétés élastiques linéaires d'une mousse sont exprimées en fonction du matériau et des paramètres géométriques de sa cellule.

La flexion des parois est le mécanisme prépondérant en petites déformations.

L'élasticité non-linéaire des mousses est causée par le flambement élastique des parois des cellules.

En postulant une forme analytique de la fonction densité d'énergie  $W$ , on peut exprimer ses paramètres en fonction de la géométrie de la cellule et des modules élastiques du solide.

Cette approche a permis de montrer que la non-linéarité observée sur le comportement global est du type géométrique.

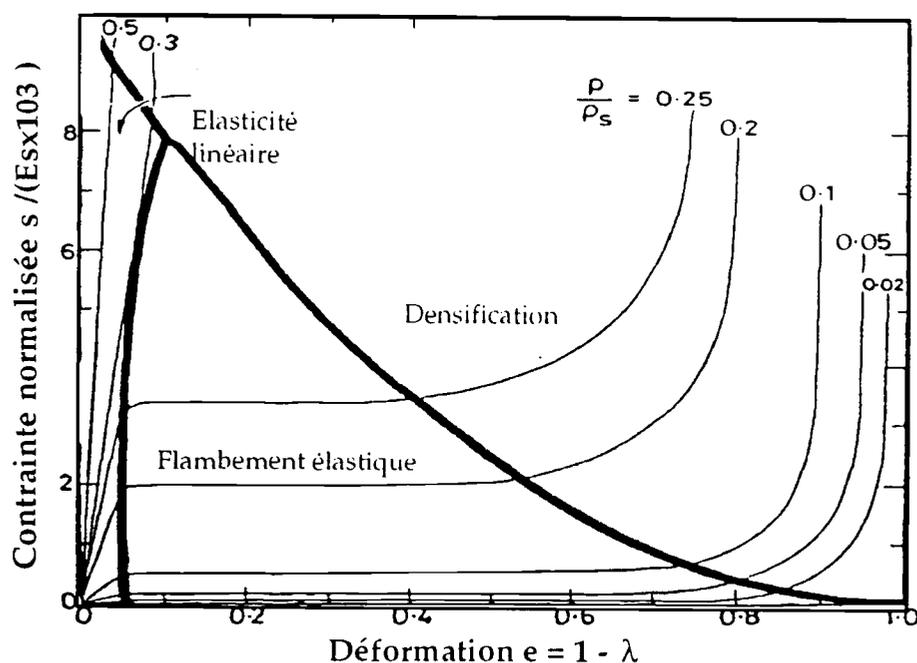
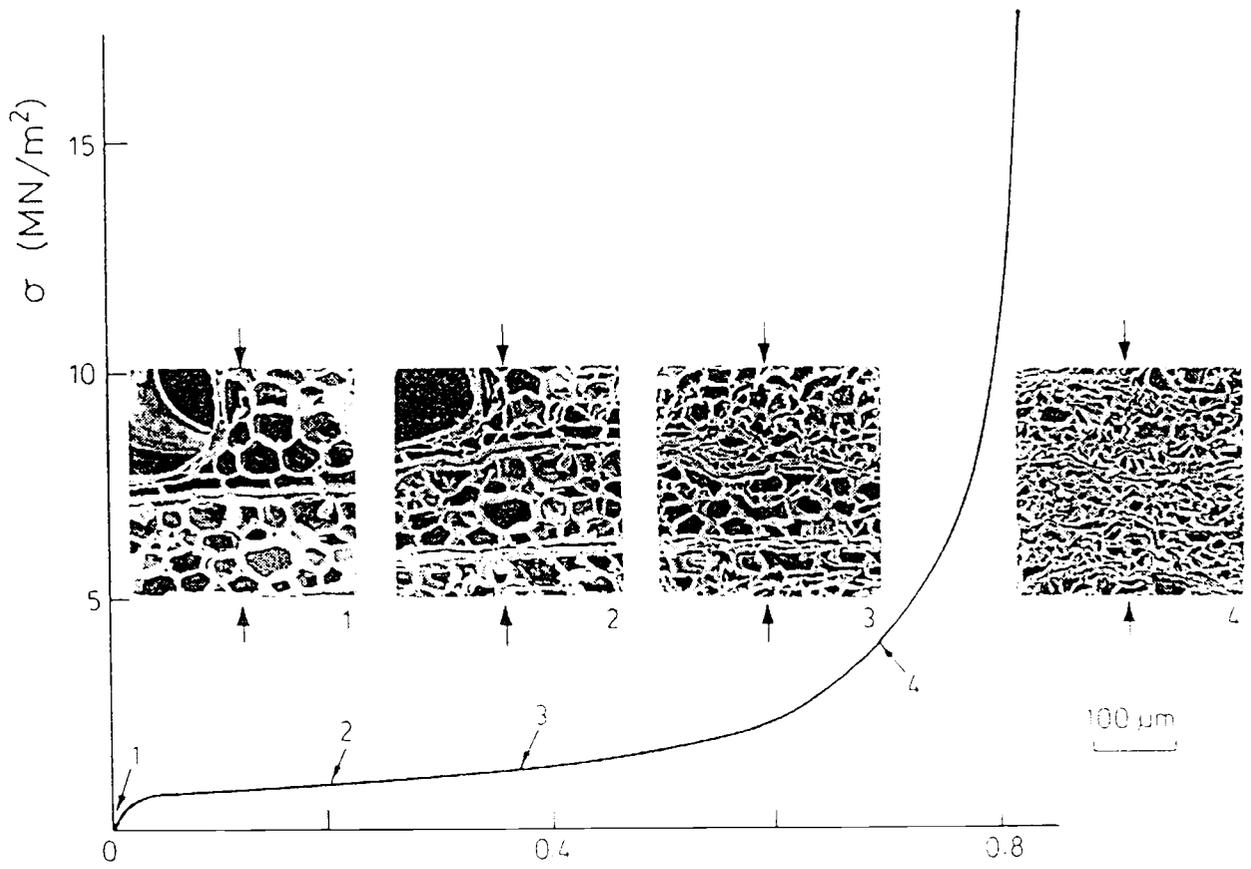


fig.III.27: Evolution des courbes contrainte-déformation en fonction  $\rho^* / \rho$



Fin du troisième chapitre

## *Deuxième partie*

### *Modélisation du siège*

*Etude de la suspension mousse*

*Sommaire*

I Essai de compression simple de la mousse

II Les matériaux hyperélastiques dans ANSYS

II.1 Matériaux de Mooney-Rivlin

II.2 Matériaux de Blatz et Kô

II.3 Matériaux compressibles d'Ogden

II.4 Poinçonnement d'un bloc de mousse par un cylindre

III Les matériaux hyperélastiques dans ABAQUS

III.1 Matériaux compressibles de HILL

III.2 Chargement par un mannequin sur le siège

IV Conclusion

# I ESSAI DE COMPRESSION SIMPLE DE LA MOUSSE

Un essai de compression simple est effectué sur un échantillon de la mousse étudiée, afin de mettre en évidence son comportement prépondérant dans l'équilibre statique de la structure du siège sous le chargement d'un mannequin.

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure (fig.IV.2) Le bloc de mousse est placé entre deux plateaux perforés pour faciliter l'échappement de l'air de l'échantillon. Un débit très faible d'eau coule dans un récipient qui comprime progressivement l'échantillon. La courbe force - déplacement (fig.IV.1) est obtenue sur une table traçante par l'enregistrement des signaux issus des capteurs force et déplacement placés sur le bloc de mousse.

Cette courbe présente trois zones différentes:

- zone 1: La force croît linéairement avec le déplacement, élasticité linéaire;
- zone 2: Au-delà d'un seuil donné, la structure s'écroule et le déplacement croît rapidement sans que la force augmente proportionnellement, flambement élastique;
- zone 3: Au-delà d'un déplacement donné la force augmente brusquement, densification.

Lors de l'essai de compression simple les dimensions transverses de l'échantillon restent constantes, cela permet de dire que le matériau est très compressible. Le coefficient de Poisson de la mousse étudiée est voisin de zéro.

A partir d'un point donné cette courbe est reproductible et l'échantillon reprend sa hauteur après la décharge. Ce type de comportement est caractéristique des matériaux hyperélastiques.

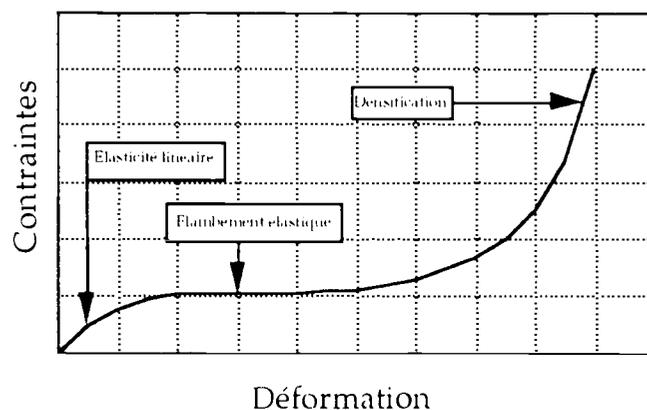


fig.IV.1 : Courbe typique de compression des mousses

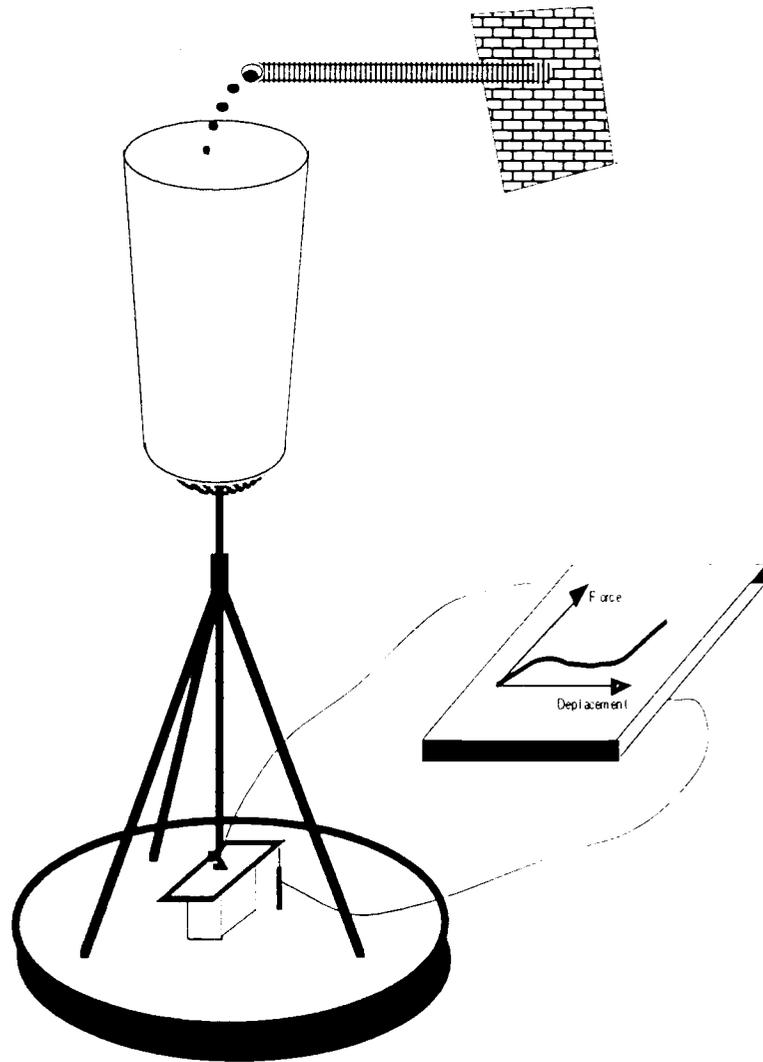


fig.IV.2: Dispositif expérimental d'un essai de compression simple

## II LES MATERIAUX HYPERELASTIQUES DANS ANSYS

Trois densités d'énergie ont été introduites dans le code d'éléments finis ANSYS pour modéliser les matériaux hyperélastiques tels que les caoutchoucs et les mousses denses organiques. Les matériaux incompressibles de Mooney-Rivlin et les matériaux compressibles de Blatz et Ko sont les plus couramment utilisés pour la modélisation de ces matériaux.

### II.1 Les matériaux de Mooney-Rivlin

#### II.1.1 Introduction

La densité d'énergie  $W$  caractérisant un matériau hyperélastique incompressible est fonction des deux premiers invariants  $I_1$  et  $I_2$  du tenseur de dilatations  $\mathbf{C}$  et s'exprime dans le cas classique des matériaux de Mooney-Rivlin par:

$$W(I_1, I_2) = a(I_1 - 3) + b(I_2 - 3) \quad (\text{IV.1})$$

$I_1, I_2, I_3$  : invariants du tenseur droit de Cauchy-Green,  $\mathbf{C}$ .

$a$  et  $b$  sont les paramètres du matériau avec  $a = 2G$ ,  $G$  est le module de cisaillement simple en petites déformations du matériau.

Ce type de matériau a nécessairement un coefficient de Poisson  $\nu_0 = 0.5$  et ne convient pas pour la modélisation des matériaux très compressibles comme les mousses polyuréthannes. Une variante de cette densité d'énergie est proposée pour les matériaux presque incompressibles sous la forme:

$$W(I_1, I_2, I_3) = W(I_1, I_2) + c(I_3^2 - 1) + d(I_3 - 1)^2 \quad (\text{IV.2})$$

Les paramètres  $c$  et  $d$  sont donnés en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\nu_0$  par:

$$c = \frac{a + 2b}{2} \quad d = \frac{a(5\nu_0 - 2) + b(11\nu_0 - 5)}{2(1 - 2\nu_0)} \quad (\text{IV.3})$$

Pour l'identification du matériau de Mooney-Rivlin qui donnerait un comportement satisfaisant pour la mousse étudiée, nous allons procéder, à partir

---

d'un essai de compression simple sur un échantillon, à la détermination des paramètres du modèle - s'ils existent - a, b et  $v_0$ .

Dans le cas d'une compression simple suivant l'axe ox sur un échantillon de section carrée  $s_0 = d_0^2$  et de hauteur  $h_0$ , d'un matériau isotrope on a :

$$h = \lambda_1 h_0 \quad \text{et} \quad d = \lambda_1 d_0 \quad (\text{IV.4})$$

$$\sigma_1 = \frac{2J^4}{\lambda_1^2} (\lambda_1^3 - J)(a\lambda_1 + bJ) \quad J = \lambda_1 \lambda_2^2 \quad (\text{IV.5})$$

et  $\sigma_2 = 0$  c'est à dire :

$$2d\lambda_1^2 J^7 + bJ^6 + (a\lambda_1 + b\lambda_1^3 - 2d\lambda_1^2)J^5 - 2c\lambda_1^2 = 0 \quad (\text{IV.6})$$

L'équation (IV.6) définit la relation qui lie les déformations  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction des paramètres du modèle : a, b et  $v_0$ .

On définit une fonction coefficient de Poisson du matériau par analogie avec les petites déformations. Cette fonction traduit les déformations transverses en compression simple :

$$v(\lambda_1) = \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - 1}$$

On suppose que  $J = \lambda_1^\gamma$  et on exprime le coefficient de Poisson en petites déformations par  $v_0 = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} v = \frac{1-\gamma}{2}$ , soit  $\lambda_2 = \lambda_1^{-v_0}$ .

Ces expressions rapportées dans l'équation (IV.6) donnent (IV.7) :

$$aB(v_0, \lambda_1) + bA(v_0, \lambda_1) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} A(v_0, \lambda_1) &= (11-5v_0) \left\{ \lambda_1^{7\gamma} - \lambda_1^{5\gamma} \right\} + \gamma \left\{ \lambda_1^{2(3\gamma-1)} + \lambda_1^{5\gamma+1} - 2 \right\} \\ B(v_0, \lambda_1) &= (5v_0-2) \left\{ \lambda_1^{7\gamma} - \lambda_1^{5\gamma} \right\} + \gamma \left\{ \lambda_1^{5\gamma-1} - 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.8})$$

*Remarque*

**Il est à noter que les paramètres a et b ne peuvent être nuls simultanément.**

### II.1.1 Cas où $a = 0$ et $b \neq 0$

Dans ce cas la fonction  $A(\lambda_1 ; \nu_0) = 0$ .

Cela n'est possible pour tout  $\lambda_1$  que si  $\nu_0 = 0.5$ .

Si  $\nu_0 \neq 0.5$  alors il n'est pas possible d'effectuer ce type de test sur ces matériaux, c'est à dire qu'on a pas toujours  $\sigma_2(\lambda_1) = 0$ , quelque soit  $\lambda_1$ .

On exprime la contrainte  $\sigma_1(\lambda_1)$ , soit:

$$\sigma_1(\lambda_1) = 2b \left[ \lambda_1^{2(3-5\nu_0)} - \lambda_1^{4(1-3\nu_0)} \right] \quad (IV.9)$$

Il faut  $\nu_0 \in ] 1/3 ; 1/2 [$  pour que  $\sigma_1(\lambda_1 = 0)$  tende vers l'infini.

Pour  $\nu_0 \in ] 1/4 ; 1/3 [$  la courbe ne présente pas un point d'inflexion mais admet une asymptote en  $\lambda_1 = 0$ .

Pour avoir un point d'inflexion  $\lambda_0 \in ] 0 ; 1 [$ , on choisit  $\nu_0 \in ] 0 ; 1/4 [$  ou  $\nu_0 \in ] 1/3 ; 0.41 [$

$$\lambda_0 = \left[ \frac{6(1-3\nu_0)(1-4\nu_0)}{5(3-5\nu_0)(1-2\nu_0)} \right]^{\frac{1}{2(1+\nu_0)}} \quad (IV.10)$$

Dans ce cas il apparaît qu'on doit choisir  $\nu_0 \in ] 1/3 ; 0.41 [$  pour avoir à la fois une asymptote et un point d'inflexion de la courbe.

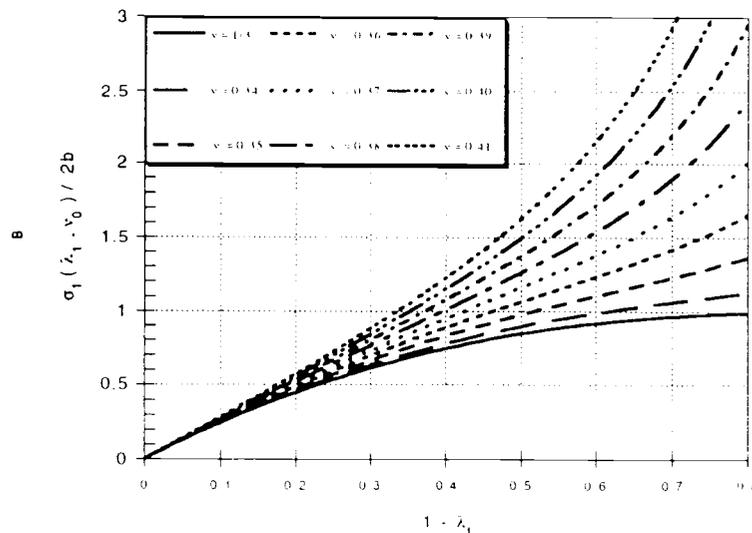


fig.IV.3 : Mooney-Rivlin :  $a = 0$   $b \neq 0$   $1/3 \leq \nu_0 < 0.41$

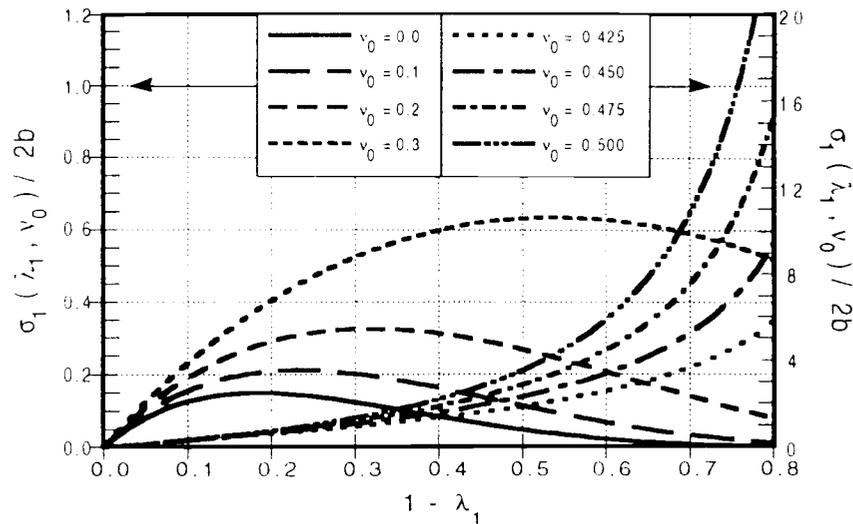


fig.IV.4 : Mooney-Rivlin :  $a = 0$   $b \neq 0$   $0 \leq \nu_0 < 1/3$  ou  $0.41 \leq \nu_0 < 0.5$

**Conclusion:** l'essai de compression simple n'est pas possible sur ce type de matériau ( $a = 0$ ) et les courbes obtenues ne ressemblent pas à celles cherchées que pour  $\nu_0 \in ] 1/3 ; 0.41 [$ .

## II.1.2 Cas où $a \neq 0$ et $b = 0$

Dans ce cas la fonction  $B(\lambda_1 ; \nu_0) = 0$ .

Cela n'est possible pour tout  $\lambda_1$  que si  $\nu_0 = 0.4$  ou  $\nu_0 = 0.5$ .

Si  $\nu_0 \neq 0.4$  ou  $\nu_0 \neq 0.5$  alors il n'est pas possible d'effectuer ce type de test sur ces matériaux, c'est à dire qu'on n'a pas toujours  $\sigma_2(\lambda_1) = 0$ , quelque soit  $\lambda_1$ .

On exprime la contrainte  $\sigma_1(\lambda_1)$ , soit:

$$\sigma_1(\lambda_1) = 2a \left[ \lambda_1^{2(3-4\nu_0)} - \lambda_1^{2(2-5\nu_0)} \right] \quad (\text{IV.11})$$

Pour  $\nu_0 \in [ 0. ; 0.3 [$  la courbe admet un point d'inflexion mais pas d'asymptote pour  $\lambda_1 = 0$ .

Pour  $\nu_0 \in ] 0.3 ; 0.4 [$  pas de point d'inflexion.

Si  $\nu_0 \in [ 0.4 ; 0.5 [$ , la courbe présente un point d'inflexion  $\lambda_0 \in ] 0 ; 1 [$  et une asymptote en  $\lambda_1 = 0$ .

$$\lambda_0 = \left[ \frac{(2-5\nu_0)(3-10\nu_0)}{(5-8\nu_0)(3-4\nu_0)} \right]^{\frac{1}{2(1+\nu_0)}} \quad (IV.12)$$

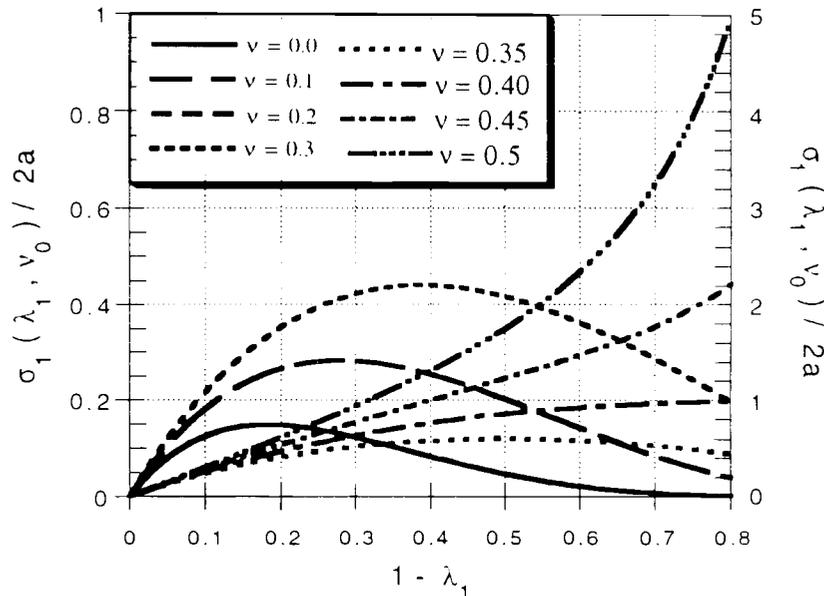


fig.IV.5 : Mooney-Rivlin :  $a \neq 0$   $b = 0$   $0 \leq \nu_0 < 0.5$

**Conclusion:** Ce type de matériau donne des courbes pour  $\nu_0 \in [0.4 ; 0.5]$  semblables à celles du test expérimental, mais l'équation  $B(\lambda_1 ; \nu_0) = 0$  n'est pas toujours vérifiée.

### II.1.3 Cas général $ab \neq 0$

L'équation  $aB(\nu_0, \lambda_1) + bA(\nu_0, \lambda_1) = 0$  est vérifiée pour tout  $\lambda_1$  si  $\nu_0 = 0.5$ .

La contrainte est donnée par :

$$\sigma_1(\lambda_1, a, b, \nu_0) = 2 \left( a + b\lambda_1^{-2\nu_0} \right) \left( \lambda_1^{2(3-4\nu_0)} - \lambda_1^{2(2-5\nu_0)} \right) \quad (IV.13)$$

Si  $\nu_0 > 1/3$  le modèle donne des courbes semblables à celles obtenues expérimentalement si on choisit  $a, b$  tels que:

$$\frac{b}{a} = - \frac{2(3-4\nu_0)(5-8\nu_0)\lambda_0^{4(1-2\nu_0)} - 2(2-5\nu_0)(3-10\nu_0)\lambda_0^{2(1-5\nu_0)}}{10(3-5\nu_0)(1-2\nu_0)\lambda_0^{2(2-5\nu_0)} - 12(1-3\nu_0)(1-4\nu_0)\lambda_0^{2(1-6\nu_0)}} \quad (IV.14)$$

$\lambda_0$  est le point d'inflexion de la courbe.

Pour  $\nu_0 \in ] 1/3 ; 0.5[$  on a  $\lambda_0 \in ]\beta(\nu_0) ; \delta(\nu_0)[$  ;  $\beta(\nu_0) \geq 0$  ;  $\delta(\nu_0) \leq 1$ .

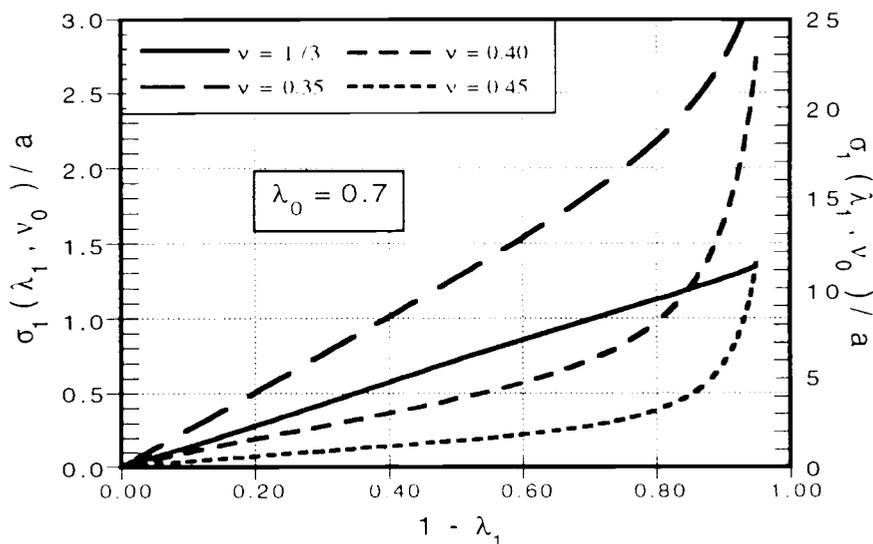


fig.IV.6 : Mooney-Rivlin :  $ab \neq 0$   $\lambda_0 = 0.7$   $1/3 < \nu_0 < 0.5$

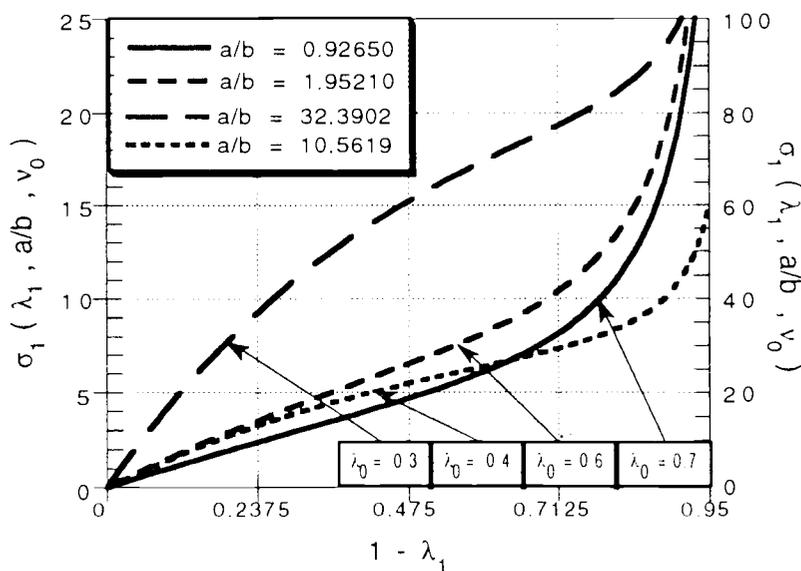


fig.IV.7 : Mooney-Rivlin :  $ab \neq 0$   $0.3 \leq \lambda_0 \leq 0.7$   $1/3 < \nu_0 < 0.5$

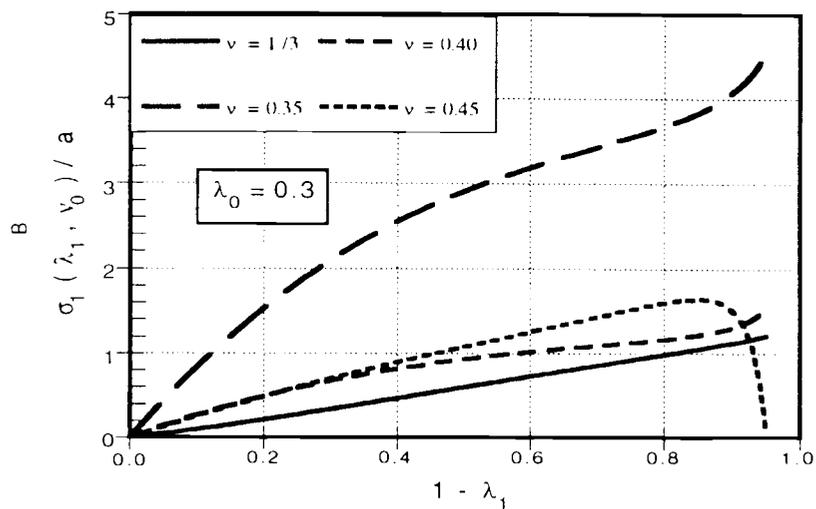


fig.IV.8 : Mooney-Rivlin :  $ab \neq 0$   $\lambda_0 = 0.3$   $1/3 < \nu_0 < 0.5$

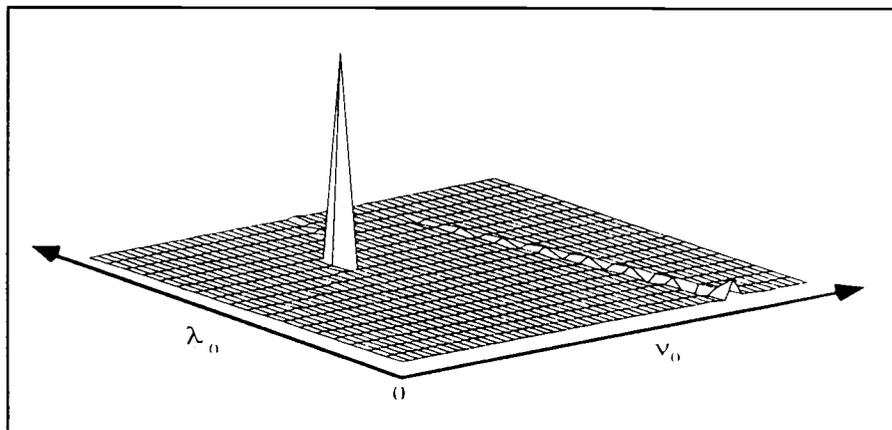


fig.IV.9 : Mooney-Rivlin :  $a / b$   $0 \leq \nu_0 < 0.5$  et  $0 < \lambda_0 \leq 1$

**Conclusion:** Nous avons essayé d'identifier le modèle - dans les cas où l'allure de la courbe s'y prête - à partir d'essai de compression simple. Aucun modèle n'a pu donner des résultats satisfaisants mais nous avons constaté que si on utilise deux modèles de matériaux montés en parallèle, on obtenait la courbe de compression souhaitée : un matériau purement compressible :  $\nu_0 = 0$  ;  $a = 10070$  Pa ;  $b = 2285$  Pa et un matériau presque incompressible :  $\nu_0 = 0.40729$  ;  $a = -11858$  Pa ;  $b = 12578$  Pa.

Le rapprochement avec un matériau incompressible perforé et immergé dans un fluide est intéressant: mousse à cellules ouvertes.

## II.2 Les matériaux de Blatz-Ko

### II.2.1 Introduction

Ces matériaux ont été proposés pour la modélisation des mousses compressibles. Le cas présenté dans ANSYS correspond à une famille des matériaux de Blatz et Ko à un seul paramètre ( $\gamma = 0$ ,  $q = -1$  et  $\nu_0 = 0.25$ ).

On introduit les nouvelles variables  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ , telles que:

$$J_1 \equiv I_1 = \text{tr} \mathbf{B} \quad ; \quad J_2 \equiv I_2/I_3 = \text{tr} \mathbf{B}^{-1} \quad ; \quad J_3 \equiv \sqrt{I_3} = \det \mathbf{F} \quad (\text{IV.67})$$

Dans ce cas, la densité d'énergie peut être formulée comme fonction des nouvelles variables, telle que:  $W(J_1, J_2, J_3)$ .

En tenant compte de ces expressions, les fonctions réponses du matériau sont exprimées par:

$$\beta_0 = \frac{\partial W}{\partial J_3} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{2}{J_3} \frac{\partial W}{\partial J_1} \quad ; \quad \beta_{-1} = -\frac{2}{J_3} \frac{\partial W}{\partial J_2} \quad (\text{IV.68})$$

On considère alors une classe spéciale de matériaux hyperélastiques, isotropes et pour lesquels on suppose que:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_r = \beta_r(J_3) \quad ; \quad r = -1, 0, 1 \\ 2\partial W/\partial J_1 = \alpha \quad ; \quad 2\partial W/\partial J_2 = \beta \\ \alpha \quad ; \quad \beta \text{ des constantes} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.69})$$

On obtient alors:

$$\beta_0 = \frac{\partial W}{\partial J_3} = W_3(J_3) \quad , \quad \beta_1 = \frac{\alpha}{J_3} \quad , \quad \beta_{-1} = -\frac{\beta}{J_3} \quad (\text{IV.70})$$

En remarquant que  $\beta_1(1) - \beta_{-1}(1) = \alpha + \beta = \mu$ , où  $\mu$  est le second coefficient de Lamé du matériau, on introduit la nouvelle constante  $\gamma$ , telle que:

$$\alpha \equiv \mu\gamma \quad , \quad \beta \equiv \mu(1 - \gamma) \quad (\text{IV.71})$$

La loi de comportement de ce type de matériau est exprimée par:

$$\mathbf{T} = W_3 \mathbf{I} + \frac{\mu\gamma}{J_3} \mathbf{B} - \frac{\mu(1-\gamma)}{J_3} \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{IV.72})$$

Si l'état indéformé est naturel, alors:  $W_3(1) + \mu(2\gamma-1) = 0$ . (IV.73)

Ces matériaux sont appelés "matériaux de Blatz - Ko" et sont les seuls matériaux hyperélastiques dont les fonctions réponses dépendent de la seule variable  $J_3$  (Beatty et Stalnaker, (1986)).

Les résultats expérimentaux de Blatz et Ko ont permis - pour une mousse polyuréthane donnée - de spécifier les fonctions réponses:

$$\beta_0 = \mu = 0.2205 \text{ MPa} \quad , \quad 0 < \beta_1 \ll 1 \quad , \quad \beta_{-1} = -\mu/J_3 \quad (\text{IV.74})$$

Ils proposèrent la loi de comportement suivante pour la mousse polyuréthane étudiée:

$$\mathbf{T} = \mu [\mathbf{I} - J_3^{-1} \mathbf{B}^{-1}] \quad (\text{IV.75})$$

L'essai de compression (tension simple) sur un cylindre de ces matériaux donne:

$$\sigma = \mu(1 - \lambda_1^{-2} \lambda_0^{-3}) \quad , \quad \lambda_1(\lambda_0) = \lambda_0^{-3/4} \quad (\text{IV.76})$$

La surface latérale du cylindre est libre  $\sigma_{22} = \sigma_{11} = 0$  et  $\sigma_{33} = \sigma$  est la contrainte exercée sur les bases;  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $\lambda_3 = \lambda_0$ .

L'équation (IV.76) ne dépend pas du module de cisaillement  $\mu$ , et donc elle est valable pour tous ces matériaux.

On introduit les fonctions: coefficient de Poisson  $\nu(\lambda_0)$ , module tangent  $E(\lambda_0)$  pour ces mousses polyuréthanes telle que:

$$\sigma(\lambda_0) = \mu(1 - \lambda_0^{-5/2}) \quad , \quad \nu(\lambda_0) = \frac{1 - \lambda_0^{-3/4}}{\lambda_0 - 1} \quad , \quad E(\lambda_0) = \frac{dT(\lambda_0)}{d\lambda_0} = \frac{5\mu}{2} \lambda_0^{-5/2} \quad (\text{IV.77})$$

Ces fonctions tendent vers les valeurs obtenues expérimentalement par Blatz et Ko, quand  $\lambda_0$  tend vers 1.

Ces courbes sont normalisées pour les matériaux dits de Blatz - Ko.

Si les courbes issues d'un essai de tension simple (ou compression) pour un matériau ne peuvent correspondre aux courbes de la figure fig.IV.8, alors le dit matériau ne peut pas être identifié comme faisant partie de cette classe. Il pourra évidemment appartenir à une autre classe des matériaux de Blatz - Ko.

En effet, d'autres tests expérimentaux effectués par Blatz - Ko, pour un élastomère polyuréthane, ont permis d'identifier les constantes  $\gamma = 1$  et  $\mu = 0.2343$  MPa.

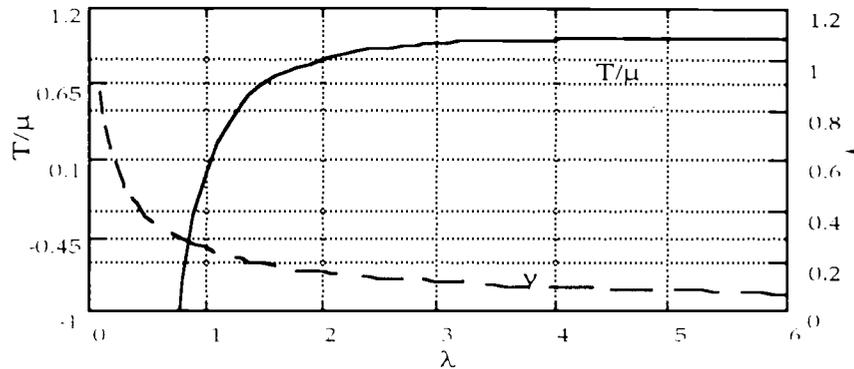


fig.IV.8: Courbes normalisées pour les matériaux de Blatz-Ko

Les fonctions réponses pour ce matériau sont:

$$\beta_0 = W_3(J_3) \quad , \quad \beta_1 = \frac{\mu}{J_3} \quad , \quad \beta_{-1} = 0 \tag{IV.78}$$

Cela permet d'exprimer la loi de comportement d'un polyuréthane solide par:

$$\mathbf{T} = W_3(J_3)\mathbf{I} + \frac{\mu}{J_3}\mathbf{B} \quad , \quad W_3(1) = -\mu \tag{IV.79}$$

L'état de référence est naturel.

En effectuant l'essai de compression (ou tension) simple sur un matériau généralisé de Blatz - Ko, on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma = W_3(J_3) + \frac{\mu\gamma}{J_3}\lambda_0^2 - \frac{\mu(1-\gamma)}{J_3}\lambda_0^{-2} \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \Rightarrow W_3(J_3) = \mu \left[ \frac{(1-\gamma)}{J_3^2}\lambda_0 - \frac{\gamma}{\lambda_0} \right] \end{aligned} \right\} \tag{IV.80}$$

Beatty et al.(1986) ont montré que pour satisfaire les inégalités constitutives:  $\beta_1 > 0$  et  $\beta_{-1} \leq 0$ . Il faut et il suffit que:  $\mu > 0$  et  $0 < \gamma \leq 1$ .

Si on postule que la variation de volume  $J_i$  est fonction de  $\lambda_{i0}$ , ce qui nous permet d'expliciter  $W_3$  comme une fonction de la seule variable  $J_i$ , alors on pose  $J_3 = \lambda_0^n$ .

La déformation transverse est exprimée par:

$$\lambda_1(\lambda_0) = \lambda_0^p; \quad p \equiv (n-1)/2. \quad (IV.81)$$

La fonction de Poisson est définie par:

$$v(\lambda_0) = \frac{1 - \lambda_0^p}{\lambda_0 - 1} \quad v_0 = \lim_{\lambda_0 \rightarrow 1} v(\lambda_0) = -p \quad (IV.82)$$

On peut donc exprimer la variation de volume et la déformation transversale de l'essai de compression (tension) simple de ces matériaux de Blatz - Ko par:

$$\lambda_0 = J_3^{1/(1-2v_0)}, \quad \text{ou} \quad \lambda_1(\lambda_0) = \lambda_0^{-v_0} \quad (IV.83)$$

On remarque bien que ces résultats donnent  $v_0=1/4$  et  $J_1 = \lambda_0^{1/2}$  pour la mousse polyuréthane étudiée précédemment.

Blatz et Ko utilisèrent cette fonction de la variation de volume (IV.83), intégrèrent la densité d'énergie avec l'état de référence libre ( $W(3,3,1) = 0$ ) et proposèrent la fonction:

$$W(J_1, J_2, J_3) = \frac{\mu\gamma}{2} \left[ (J_1 - 3) - \frac{2}{q} (J_3^q - 1) \right] + \frac{\mu(1-\gamma)}{2} \left[ (J_2 - 3) - \frac{2}{q} (J_3^{-q} - 1) \right] \quad (IV.84)$$

$$q = \frac{n-1}{n} = \frac{-2v_0}{1-2v_0}$$

C'est la forme habituelle de la densité d'énergie des matériaux de Blatz-ko et est utilisée dans la littérature pour des matériaux hyperélastiques compressibles, homogènes et isotropes.

Leurs fonctions réponses sont exprimées par:

$$\beta_0 = \mu \left[ -\gamma J_3^{q-1} + (1-\gamma) J_3^{-(q+1)} \right], \quad \beta_1 = \frac{\mu\gamma}{J_3}, \quad \beta_{-1} = -\frac{\mu(1-\gamma)}{J_3} \quad (IV.85)$$

La loi de comportement de ces matériaux est exprimée sous la forme suivante:

$$\mathbf{T} = \frac{\mu\gamma}{J_3} (\mathbf{B} - J_3^q \mathbf{I}) - \frac{\mu(1-\gamma)}{J_3} (\mathbf{B}^{-1} - J_3^{-q} \mathbf{I}) \quad (IV.86)$$

Deux cas particuliers sont souvent cités dans les applications:  $\gamma=0$  et  $\gamma=1$ .

$$\left. \begin{aligned} \text{cas 1 : } \gamma = 0 &\Rightarrow \mathbf{T} = \frac{\mu}{J_3} \left( J_3^{-q} \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right) \\ \text{cas 2 : } \gamma = 1 &\Rightarrow \mathbf{T} = \frac{\mu}{J_3} \left( \mathbf{B} - J_3^{-q} \mathbf{I} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.87})$$

Le cas 1 caractérise les mousses polyuréthannes élastomères et le cas 2 décrit la classe des solides polyuréthannes et caoutchoucs étudiés par Blatz et Ko.

Le cas 1 ne satisfait pas les inégalités constitutives ( $\mu > 0$  et  $0 < \gamma \leq 1$ ).

D'autre part, comme admis communément, une tension d'un matériau élastique isotrope génère une contraction latérale et une compression induit une expansion latérale; alors:

$$n < 1 \quad \text{et} \quad p < 0. \quad \text{Cela implique que } q \neq 0 \quad \text{et} \quad v_0 > 0.$$

Si  $n = 0$  ou  $v_0 = 1/2$  alors  $J_3 = 1$ , et si on pose  $J_3 = 1$  dans l'expression de  $W_3(J_3)$ , (IV.80)<sub>b</sub> on obtient:

$$W_3(1) = \mu \left[ -\frac{\gamma}{\lambda_0} + (1 - \gamma)\lambda_0 \right].$$

Or si l'état de référence est non déformé (état naturel) alors  $W_3(1) + \mu(2\gamma - 1) = 0$ . Donc il n'est pas possible d'effectuer une tension (compression) isochorique sur ces matériaux pour lesquels l'état de référence est libre. Il n'existe pas donc de matériaux de Blatz - Ko incompressibles.

En acceptant que l'état de référence soit libre, on associe les restrictions suivantes sur le coefficient initial de Poisson des matériaux de Blatz-Ko:  $0 < n < 1$  et  $0 < v_0 < 1/2$ .

Nous allons chercher à identifier un matériau de Blatz-Ko pour l'essai de compression simple d'une mousse polyuréthane utilisée dans le siège.

L'essai de compression simple n'engendre presque pas de déformation transversale; la mousse est alors considérée comme un matériau purement compressible.

On se pose quelques hypothèses préliminaires qui doivent être satisfaites avant d'entamer l'identification proprement dite de l'essai à partir d'une densité donnée.

- h<sub>1</sub>: le coefficient initial de Poisson du matériau doit être voisin de zéro;
- h<sub>2</sub>: la contrainte nominale initiale de l'essai est nulle;
- h<sub>3</sub>: sa dérivée est strictement positive sur tout l'intervalle ]0,1 [;
- h<sub>4</sub>: on doit avoir un point d'inflexion sur l'intervalle I<sub>n</sub>.
- h<sub>5</sub>: la contrainte est infinie quand  $\lambda$  tend vers 0.

Soit,

$$\left. \begin{array}{l} v_0 \equiv 0 \\ \pi_1(\lambda_0) < 0 \quad \forall \lambda_0 \in ]0, 1[ \\ \lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \pi_1(\lambda_0) = -\infty \quad , \quad \pi_1(1) = 0 \\ \pi_1'(\lambda_0) > 0 \quad \forall \lambda_0 \in ]0, 1[ \\ \pi_1'(\bar{\lambda}_0) = 0 \quad \exists \bar{\lambda}_0 \in ]0, 1[ \end{array} \right\} \quad (\text{IV.88})$$

## II.2.2 Cas des matériaux purement compressibles de Blatz-Ko

On définit des matériaux dits purement compressibles de Blatz-Ko en faisant un développement de Taylor de la densité proposée par rapport au coefficient initial de Poisson de ces matériaux.

On rappelle que le développement de Taylor d'une fonction  $y^x$  est de la forme:

$$y^x = 1 + x \text{Ln} y + \frac{(x \text{Ln} y)^2}{2!} + \frac{(x \text{Ln} y)^3}{3!} + \frac{(x \text{Ln} y)^4}{4!} + \dots + \quad (\text{IV.89})$$

D'où la densité d'énergie des matériaux purement compressibles de Blatz-Ko:

$$W_0(J_1, J_2, J_3) = \frac{\mu\gamma}{2}(J_1 - 3) + \frac{\mu(1-\gamma)}{2}(J_2 - 3) + \mu(1-2\gamma)\text{Ln}J_3 \quad (\text{IV.90})$$

L'essai de compression simple sur ces matériaux est défini par:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_0 \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \lambda_3 = 1 \\ \pi_1(\lambda_0) = \mu\gamma(\lambda_0 - \lambda_0^{-1}) + \mu(1-\gamma)(\lambda_0^{-1} - \lambda_0^{-3}) \quad ; \quad \pi_2(\lambda_0) = 0 \quad ; \quad \pi_3(\lambda_0) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{IV.91})$$

**Conclusion:** Toutes les conditions préliminaires sont vérifiées sauf que la courbe de contrainte - déformation ne peut avoir un point d'inflexion dans l'intervalle  $]0, 1[$ .

Ces matériaux ne peuvent donc être candidats à la modélisation de la mousse étudiée.

Nous allons montrer qu'aucun matériau de Blatz-Ko ne peut convenir pour la modélisation de cette mousse - c'est à dire qu'il ne peut satisfaire déjà toutes les conditions préliminaires ci-dessus.

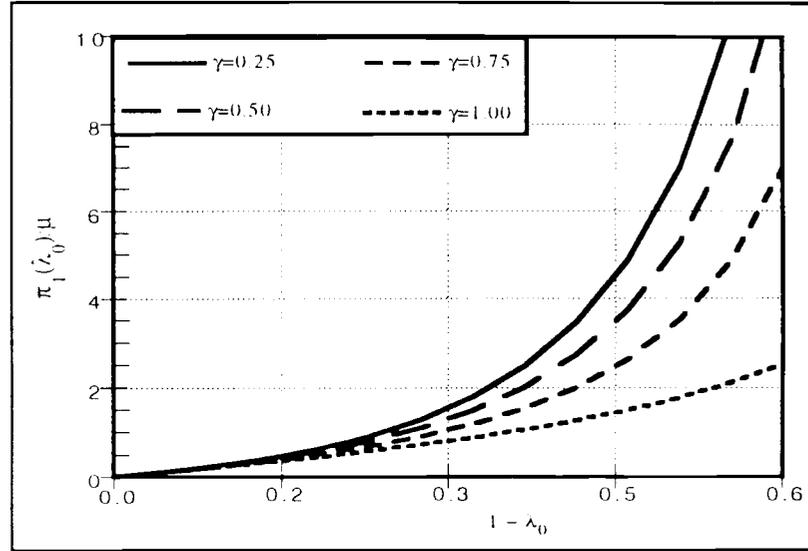


fig.IV.9: Essai de compression simple sur un matériau purement compressible de Blatz-Ko: courbes addimensionnalisées: contrainte nominale - déformation,  $0 < \gamma \leq 1$ .

### II.2.3 Cas 1 $\gamma = 0$

On exprime la contrainte nominale  $\pi_1$ , et on trouve:

$$\left. \begin{aligned}
 \pi_1(\lambda_0) &= \mu \left[ \lambda_0^{1/(q-1)} - \lambda_0^{-3} \right] , & \pi_1'(\lambda_0) &= \mu \left[ \frac{1}{q-1} \lambda_0^{(2-q)/(q-1)} + 3\lambda_0^{-4} \right] \\
 \pi_1''(\lambda_0) &= \mu \left[ \frac{(2-q)}{(q-1)^2} \lambda_0^{(3-2q)/(q-1)} - 12\lambda_0^{-5} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (IV.92)$$

**Conclusion:** Toutes les conditions sont vérifiées sauf qu'on peut pas avoir un point d'inflexion sur ]0, 1].

### II.2.4 Cas 2 $\gamma = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \pi_1(\lambda_0) &= \mu \left[ \lambda_0 - \lambda_0^{(1-2q)/(q-1)} \right] , & \pi_1'(\lambda_0) &= \mu \left[ 1 + \frac{(2q-1)}{q-1} \lambda_0^{(3q-2)/(1-q)} \right] \\ \pi_1''(\lambda_0) &= -\mu \frac{(2q-1)(3q-2)}{(1-q)^2} \lambda_0^{(4q-3)/(1-q)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.93})$$

**Conclusion:** De l'expression de  $\pi_1''(\lambda_0)$  il apparaît qu'on ne pourra pas obtenir un point d'inflexion dans l'intervalle ]0, 1].

### II.2.5 Cas général: $\gamma \neq 0$ et $\gamma \neq 1$

$$\left. \begin{aligned} \pi_1(\lambda_0) &= \gamma \mu \left[ \lambda_0 - \lambda_0^{n-2} \right] - (1-\gamma) \mu \left[ \lambda_0^{-3} - \lambda_0^{-n} \right] , \quad \text{avec : } 0 < n \leq 1 , 0 < \gamma \leq 1 \\ \pi_1''(\lambda_0) &= 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\gamma}{1-\gamma} (2-n)(3-n) \lambda_0^{n-1}}_{\geq 0} + 12 = \underbrace{\frac{n(n+1) \lambda_0^{-(n+3)}}{0 < \dots \leq 2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.94})$$

Comme le second membre de l'équivalence (IV.94)<sub>b</sub> est impossible on en déduit qu'on pourra pas avoir de point d'inflexion de la courbe de la contrainte nominale en fonction de l'élongation.

**Conclusion:** Ces matériaux ne conviennent pas pour le type de mousse étudiée.

Les restrictions imposées sur les paramètres sont la conséquence des inégalités constitutives, lesquelles peuvent aider à trouver un comportement acceptable physiquement pour les simulations et les essais effectués sur ces matériaux.

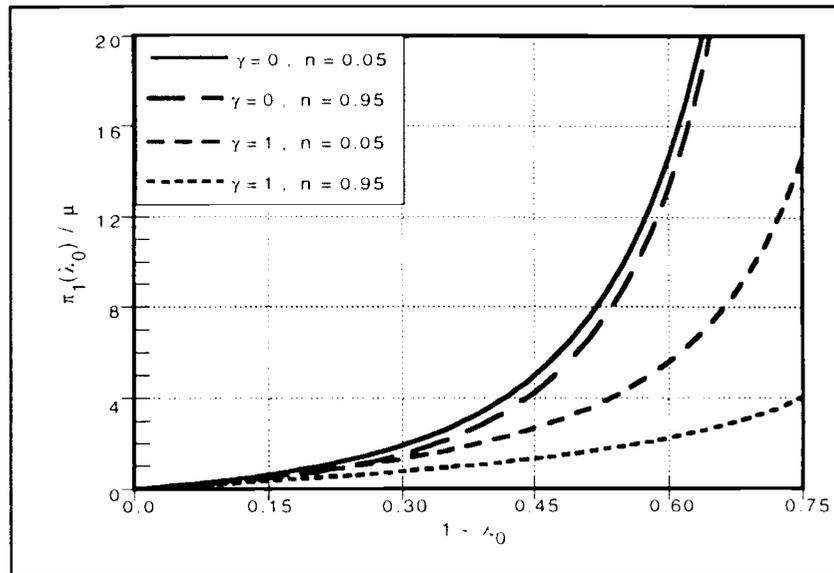


fig.IV.10: Contrainte nominale - déformation: Cas:  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 1$

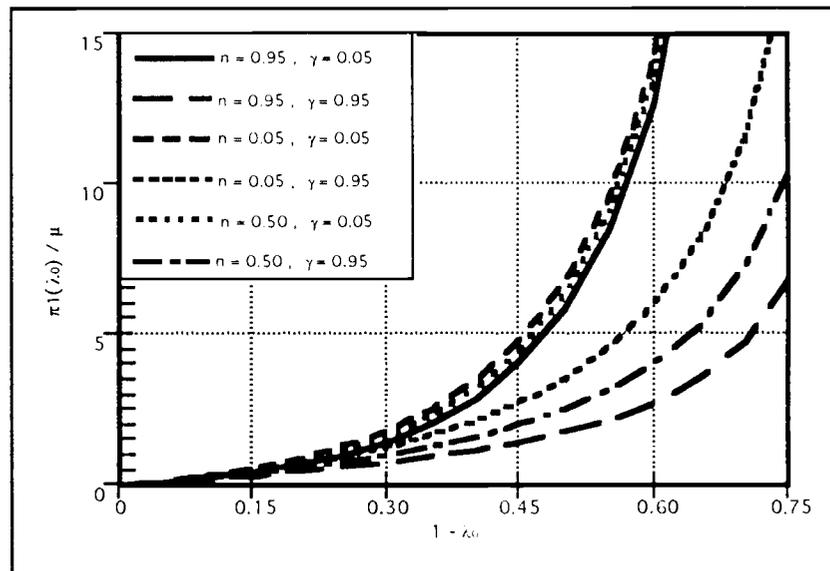


fig.IV.11: Contrainte nominale - déformation: Cas général  $\gamma \neq 0, \gamma \neq 1$

## II.3 Matériaux compressibles d'Ogden

La densité d'énergie proposée est du type Ogden non séparable.

$$W = \sum_i A_i [\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3] + \sum_k C_k [(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\gamma_k} - 1] + \sum_j B_j [(\lambda_1 \lambda_2)^{\beta_j} + (\lambda_2 \lambda_3)^{\beta_j} + (\lambda_1 \lambda_3)^{\beta_j} - 3] \quad (IV.17)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les élongations principales.

En exprimant le cas de l'essai de compression simple pour ces matériaux, on obtient si le matériau est purement compressible  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , alors :

$$\sigma_1 = \alpha_1 A_1 \lambda_1^{\alpha_1 - 1} + 2\beta_1 B_1 \lambda_1^{\beta_1 - 1} + \gamma_k C_k \lambda_1^{\gamma_k - 1} \quad (IV.18)$$

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \beta_1 B_1 \lambda_1^{\beta_1} + \gamma_k C_k \lambda_1^{\gamma_k} = 0 \quad (IV.19)$$

Dans le cas où on a un terme de chaque élément de cette série, on obtient :

$$\beta_1 = \gamma_1 \quad \alpha_1 A_1 = -\beta_1 B_1 = \gamma_k C_k \quad (IV.20)$$

Ce modèle a 3 paramètres indépendants :  $\alpha_1, \beta_1, A_1$

On identifie ce modèle avec la méthode du simplex de Nelder et Mead :

$$\alpha_1 = 21.988 \quad \beta_1 = -0.31416 \quad A_1 = 205\text{Pa}$$

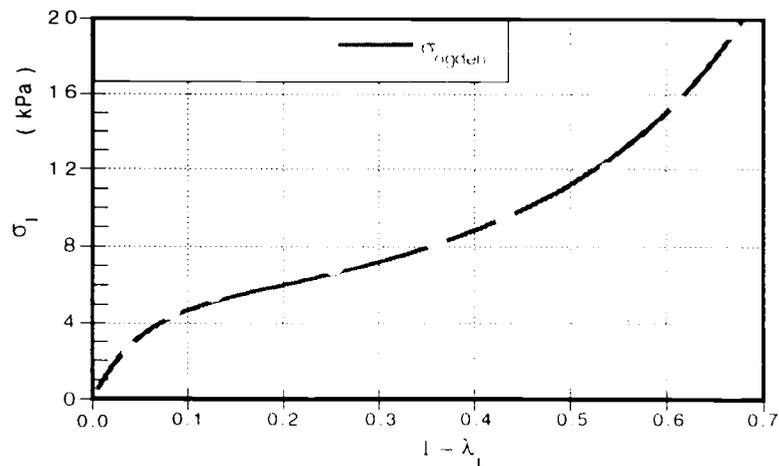


fig.IV.11 : Ogden  $\alpha_1 = 21.988$  ;  $\beta_1 = -0.31416$  ;  $A_1 = 205\text{Pa}$

Un test numérique sur le code ANSYS de l'essai de compression simple a permis de confirmer la validité de ce modèle pour la mousse.

Ce modèle reproduit exactement la courbe de compression simple de la mousse étudiée et son coefficient de Poisson est voisin de zéro.

**Conclusion:** nous avons identifié un matériau hyperélastique compressible d'Ogden pour modéliser le comportement en compression de la mousse étudiée.

Il faudra alors chercher à vérifier la réponse de ce modèle pour un autre type de chargement, par exemple : poinçonnement par une sphère sur le bloc de mousse. Nous disposons d'un essai expérimental de ce test avec une sphère de rayon  $R = 13$  cm. Le test numérique n'a pu pour l'instant donner de résultats ( le pilotage en déplacement du chargement extérieur n'a pu converger ) ; nous proposons dans la suite de ce chapitre un autre test : poinçonnement par un cylindre sur le bloc de mousse.

## II.4 Poinçonnement d'un bloc de mousse par un cylindre

Le poinçonnement d'un bloc de mousse par un cylindre introduit une non - linéarité supplémentaire due à la géométrie cylindrique du chargement. Ce type de chargement est utile pour appréhender l'influence de la non - linéarité du chargement sur la déformation statique du siège. Il correspond à une idéalisation du mannequin.

Le cylindre est supposé rigide, cela permet de calculer analytiquement les déplacements imposés sur la région de contact et d'éviter une augmentation excessive de la taille du problème en introduisant des éléments supplémentaires pour le maillage du cylindre.

Le maillage géométrique de la structure est effectué avec des éléments triangulaires et le modèle numérique utilise un élément hyperélastique avec une loi d'Ogden dont les paramètres sont identifiés avec l'essai de compression simple.

Le maillage a été raffiné dans la partie rapprochée du cylindre et le pilotage du chargement extérieur s'effectue en déplacement. Si on impose un déplacement  $U_0$  au centre de la section du cylindre et suivant  $oy$ , le déplacement qui sera imposé sur les autres noeuds de la structure est:

$$U_1 = U_0 - R + \sqrt{R^2 - d^2}$$

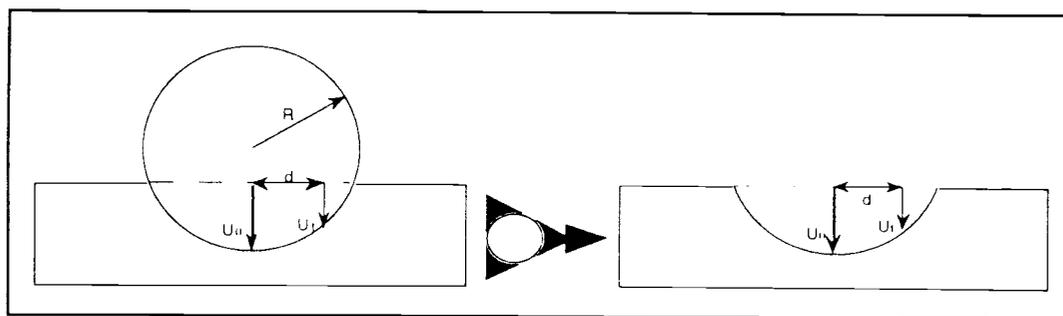


fig.IV.12 : Essai de poinçonnement par un cylindre sur un bloc de mousse

Cet essai a été effectué sur un bloc de mousse 50cmx50cmx10cm avec un cylindre de section circulaire de rayon  $R = 13$  cm.

La force résultante  $F_y$  sur la demi-structure due au déplacement imposé  $U_0$  est présentée sur la figure(fig.IV.13) et montre que la non-linéarité géométrique du chargement n'a pas tout à fait masqué la non-linéarité du matériau.

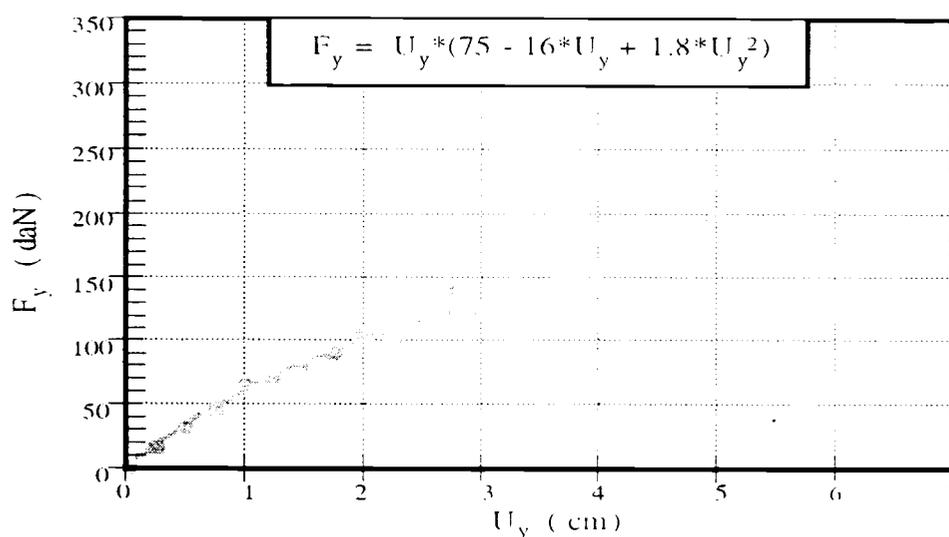


fig.IV.13 : poinçonnement par un cylindre sur la demi-structure : essai numérique sur le matériau identifié d'Ogden.

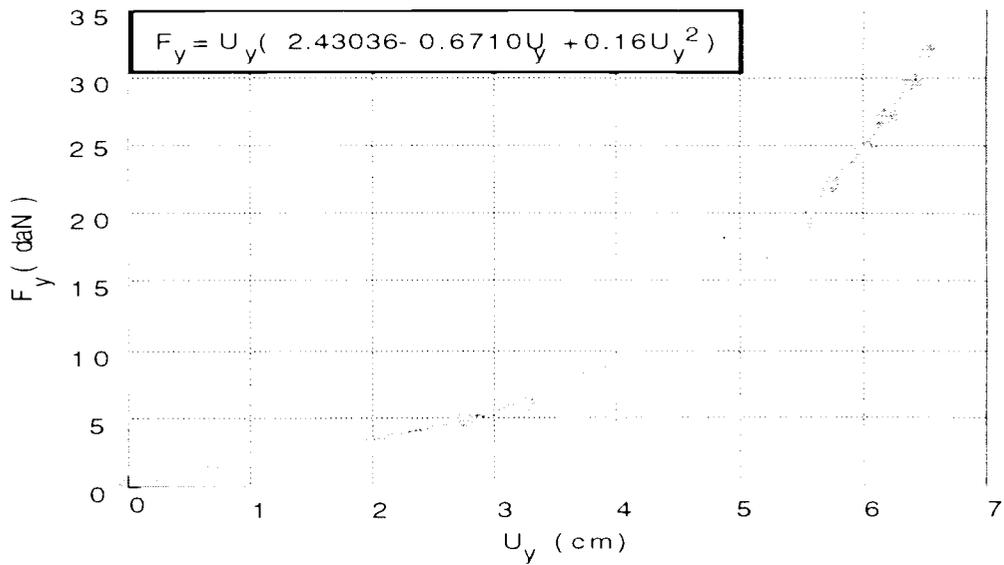


fig.IV.14 : poinçonnement par une sphère sur la demi-structure : Essai expérimental

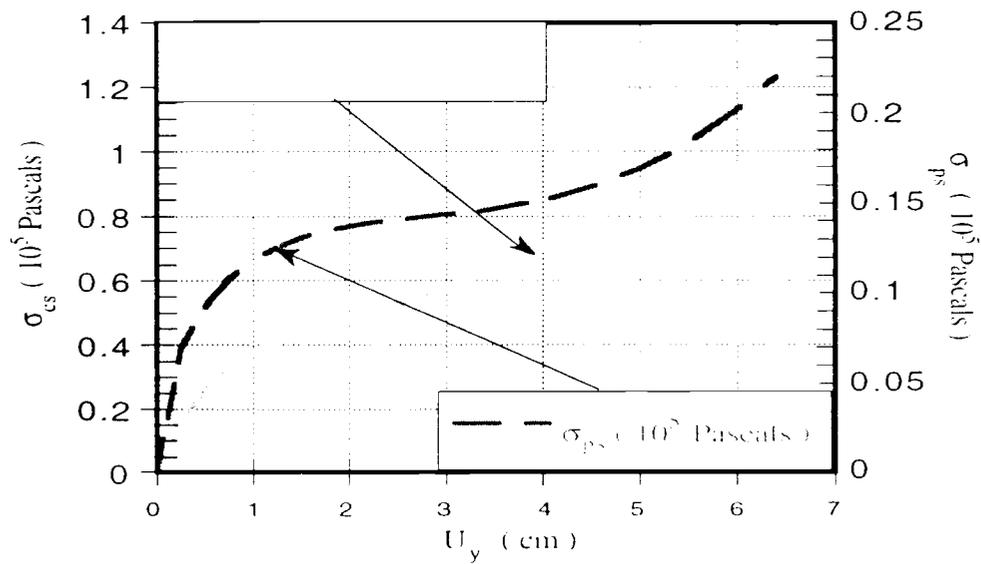


fig.IV.15 : essais numériques sur le matériau identifié d'Ogden : poinçonnement cylindrique ( ps ) ; compression simple ( cs )

## III LES MATERIAUX HYPERELASTIQUES DANS ABAQUS

### III.1 Matériaux compressibles de HILL

Plus généralement connus comme une généralisation des densités proposées par Ogden pour les matériaux compressibles; ces densités d'énergie conviennent particulièrement pour les mousses très compressibles.

Plusieurs formes furent alors proposées dans la littérature dont on extrait celle utilisée dans le code de calcul des structures ABAQUS:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} \left[ J_3^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right] \right] \\ & \mu_0 = \sum \mu_i \quad ; \quad \nu_i = \frac{\beta_i}{1 + 2\beta_i} \end{aligned} \right\} \quad (IV.103)$$

Le cas particulier des matériaux de Blatz-Ko correspond à:

N = 2	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = -2$	$\beta_1 = \beta_2 = \alpha$	$\mu_1 = \mu\beta$	$\mu_2 = \mu(1-\beta)$
-------	----------------	-----------------	------------------------------	--------------------	------------------------

#### III.1.1 Cas des matériaux purement compressibles de Hill

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 + \alpha_i \text{Ln} J_3 \right] \quad (IV.104)$$

L'essai de compression simple sur ces matériaux donne:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i \lambda_1} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1) \quad ; \quad \pi_1' = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i \lambda_1^2} ((\alpha_i - 1) \lambda_1^{\alpha_i} + 1) \\ \pi_1'' &= \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i \lambda_1^3} ((\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2) \lambda_1^{\alpha_i} - 2) \end{aligned} \right\} \quad (IV.105)$$

L'identification du modèle de la mousse étudiée a donné:

$$\alpha_1 = 17.3596 \quad ; \quad \mu_1 = 0.3064 \quad \text{kPa}$$

$$\alpha_2 = -5.3547 \quad ; \quad \mu_2 = 0.0069 \quad \text{kPa}$$

**Conclusion:** Aucune densité à un terme (2 paramètres) n'a pu donner des résultats satisfaisants pour cet essai.

Parmi toutes les densités à deux termes la solution trouvée n'est pas unique, c'est à dire qu'on peut obtenir un autre jeu de paramètres (4 paramètres également) qui puisse donner des résultats aussi bons pour cet essai.

D'où la nécessité d'avoir d'autres résultats expérimentaux et/ou d'autres restrictions pour faire le tri des solutions possibles.

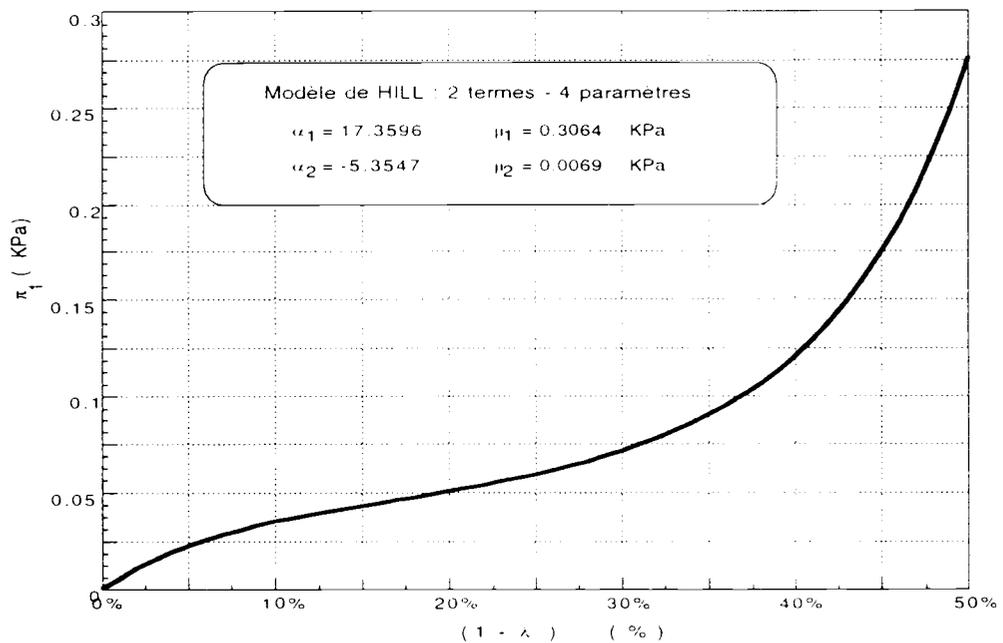


fig.IV.15:Matériaux compressibles de Hill: Essai de compression simple. Simulation numérique avec une série à 4 paramètres

## III.2 Essai de chargement par un mannequin

Un test de chargement par un mannequin 95% sur le siège ( suspension mousse seulement) est effectué.

Le bloc de mousse utilisé dans le test numérique ne comporte pas la bosse antisoumarinage.

Lors de l'essai expérimental la rotation torse-cuisse du mannequin n'a pas pu être bloquée.

Ces deux différences expliquent l'écart entre les courbes expérimentales et numériques de la figure (fig.IV.16).

Le mannequin pèse 72 kg. L'écart entre les valeurs simulée et mesurée du point H est de 5%.

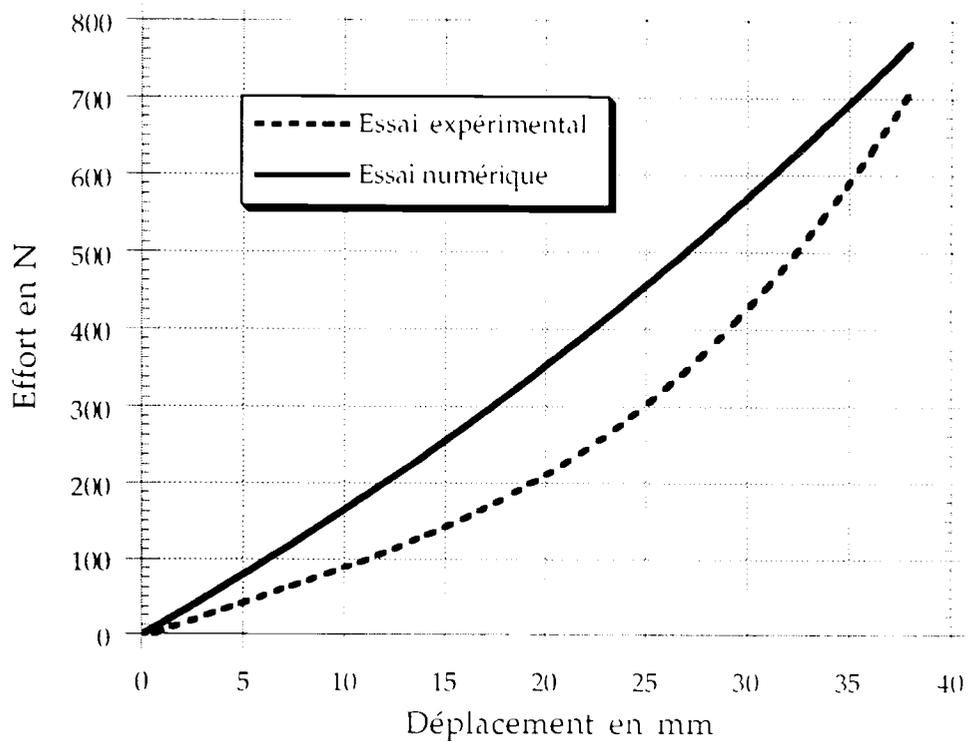


fig.IV.16:Effort-déplacement: test numérique et essai expérimental

fig.IV.17: Mannequin 95%

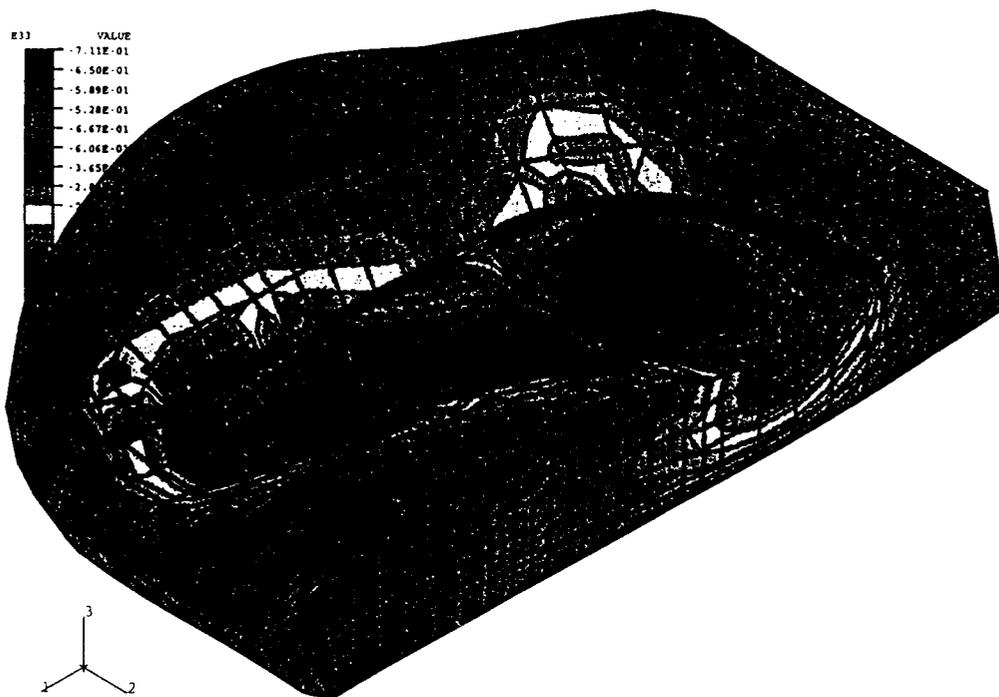
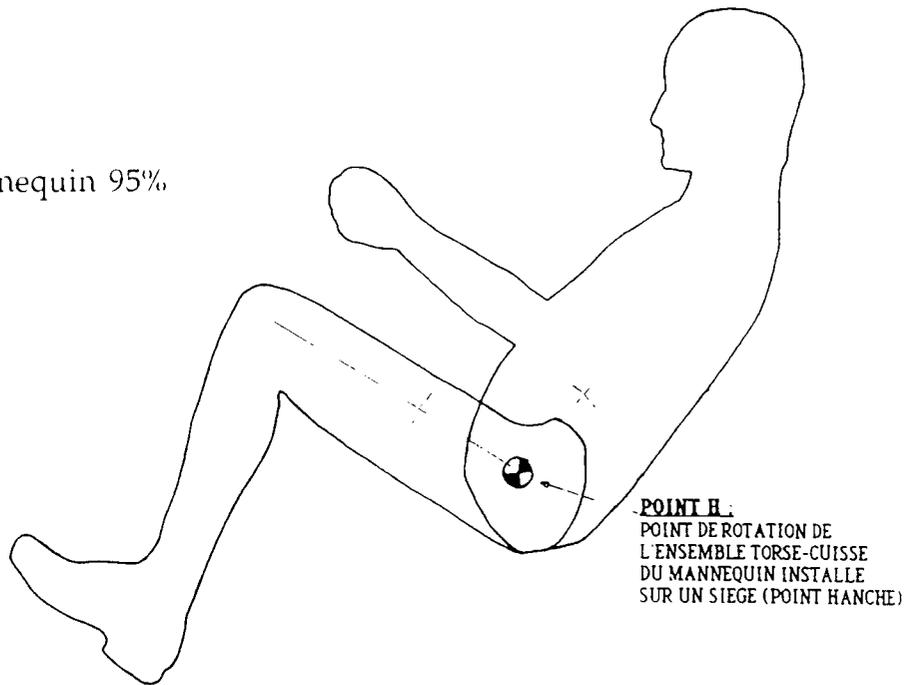


fig.IV.18: Modèle de l'assise utilisée dans le test

## IV CONCLUSION

Pour conclure nous disons que l'identification du modèle de la mousse a permis de montrer qu'un matériau hyperélastique compressible d'Ogden est approprié à la mousse étudiée et que les tests numériques effectués sur ce matériau sont en accord avec les tests expérimentaux.

Un calcul global sur la structure du siège est donc possible pourvu que la taille des matrices issues du modèle numérique ne dépasse pas la limite admissible du code éléments finis et que les hypothèses sur les algorithmes soient suffisamment pertinentes pour que les calculs puissent être conduits à terme (si on n'a pas de problèmes de convergence numérique). Cela dépend largement de la taille des éléments utilisés et donc de la taille résultante du problème global.

*Fin du quatrième chapitre*

*Comportement viscoélastique linéaire des mousses  
modèle rhéologique*

*Sommaire*

I Contribution du fluide dans la rigidité dynamique de la mousse

II Etude d'un modèle rhéologique de la mousse

II.1 Excitation force harmonique

II.2 Excitation force aléatoire

III Conclusion

## I CONTRIBUTION DU FLUIDE DANS LA RIGIDITE DYNAMIQUE DE LA MOUSSE

Les mousses souples à cellules ouvertes sont largement "usuellement" utilisées pour atténuer les vibrations et les chocs parce qu'elles possèdent une grande capacité d'absorption d'énergie durant la compression et un faible rebond.

L'énergie n'est pas seulement dissipée par l'hystérèse du polymère de la matrice mais aussi également par le processus d'écoulement d'air à travers la mousse: ce phénomène est appelé "amortissement pneumatique".

Un modèle simple (fig.V.1) de ce phénomène a été présenté par Koster et Zwikker(1939).

Le ressort représente la rigidité de la matrice (polymère) et le tube capillaire le mécanisme de dissipation visqueuse.

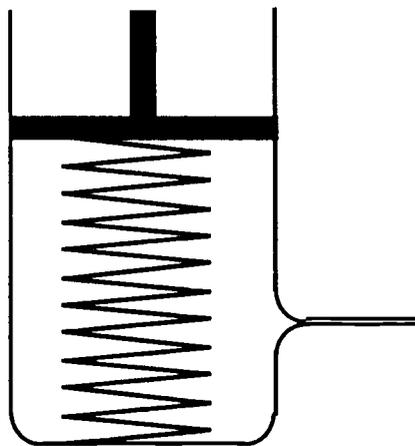


fig.V.1: Modèle de Koster et Zwikker, (1939) pour le comportement visqueux de la mousse.

Gent et Rush(1966) montrent que le gradient de pression nécessaire pour qu'il y ait écoulement du fluide à travers la mousse, est exprimé par:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\eta v}{K(y)} + \frac{\rho v^2}{B(y)} \quad (V.1)$$

où  $v$  est la vitesse de l'écoulement,  $\eta$  et  $\rho$  sont la viscosité et la densité du fluide,  $K(y)$  et  $B(y)$  sont des coefficients caractéristiques de la structure de la mousse.

L'équation (V.1) est valable pour tous les fluides gaz ou liquides, les coefficients  $B(y)$  et  $K(y)$  restent indépendants de la nature du fluide interstitiel.

Le premier terme de l'équation (V.1) traduit les pertes visqueuses et est relativement prédominant pour les écoulements à faibles vitesses: écoulements laminaires: "amortissement pneumatique". Le second terme, dominant pour les écoulements à grandes vitesses représente les pertes inertielles résultantes de l'écoulement turbulent: "amortissement hydraulique".

La perméabilité de la mousse  $K$  et la constante des cellules  $B$  sont généralement fonction de  $y$ .

Gent et Rush (1966) supposent négligeable l'amortissement hydraulique et analysent la réponse d'un échantillon de mousse à cellules ouvertes sous une petite déformation sinusoïdale,  $e=e_0 \sin \omega t$ . La contrainte dynamique dans l'échantillon est donnée par:

$$\sigma = E e_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (V.2)$$

$E$  est le module dynamique de la mousse et  $\delta$  est le déphasage entre la déformation et la contrainte.

$\text{Tg} \delta$  mesure l'amortissement mécanique qui est proportionnel à l'énergie dissipée par cycle de déformation.

$$\text{tg} \delta = \frac{E''}{E'} \quad (V.3)$$

$E'$  et  $E''$  sont les composantes du module dynamique en phase et en quadrature ( $\delta=\pi/2$ ) avec la déformation.

$$E = S_m \left[ (1 + 1/\alpha - 8\psi_1/\alpha)^2 + (d_0 + 8\psi_2/\alpha)^2 \right]^{1/2} \quad (V.4)$$

$$\text{tg} \delta = (\alpha d_0 + 8\psi_2) / (\alpha + 1 - 8\psi_1) \quad (V.5)$$

avec :

$$\psi_1 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{\left[ (n^2 \pi^2)^2 + (\alpha \gamma)^2 \right]} \quad ; \quad \psi_2 = (\alpha \gamma) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\left[ (n^2 \pi^2)^2 + (\alpha \gamma)^2 \right]} \quad (V.6)$$

$$\alpha \equiv \phi \frac{S_m}{S_g} \quad ; \quad \gamma = w \eta \frac{L^2}{\phi S_m K} \quad ; \quad d_0 = \frac{S_m}{S_m} \quad (V.7)$$

$S_m'$  et  $S_m''$  sont les composantes du module de compression du polymère de la mousse ( $S_m'$  et  $S_m''$  sont supposées indépendantes de la fréquence),  $S_g$  est le module de compression de l'air,  $\phi$  est le volume relatif de la mousse.

La résistance du fluide en régime turbulent, caractérisée par  $B(y)$  dans l'équation (V.1) et la déformation latérale de la mousse ont été négligées dans la formulation des équations (V.4) et (V.5).

L'amortissement pneumatique (V.5) dépend de trois paramètres addimensionnalisés,  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $d_0$ .

Le premier terme,  $\alpha$ , exprime le rapport de rigidité entre la matrice (polymère) et l'air. Le second,  $\gamma$ , contient la fréquence de la déformation imposée et la hauteur de l'échantillon. Le troisième,  $d_0$ , représente l'amortissement inhérent du polymère.

Pour des fréquences faibles, l'équation (V.5) est exprimée simplement par:

$$\text{tg}\delta = d_0 + \frac{\gamma}{12} \quad (\text{V.8})$$

Le diagramme de  $\text{tg}\delta(f)$  est une droite de pente  $\frac{\pi\eta L^2}{6\phi S_m' K}$  et passant par  $(0, d_0)$ .

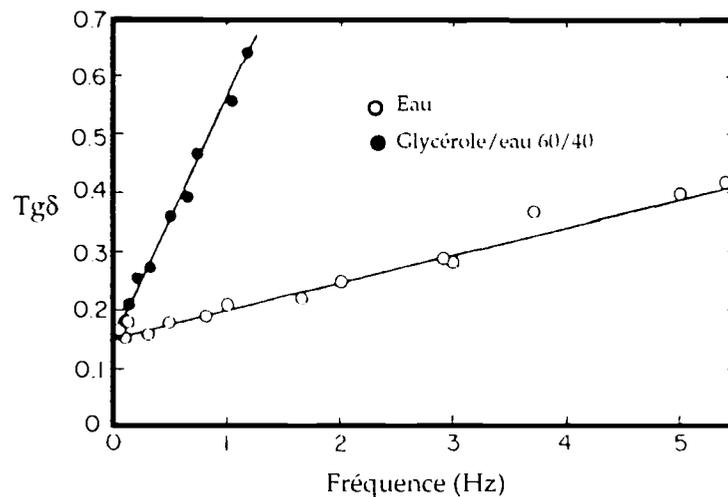


fig.V.2: Relation entre  $\text{tg}\delta$  et la fréquence de la déformation imposée; mousse de latex imbibée; d'eau o; de Glycérol/Eau : 60/40 •.

D'après Gent et Rush (1966)

Les données des fluides et de la mousse sont :

$$K = 2.2 \times 10^{-6} \text{ cm}^2 \quad ; \quad \phi = 0.82 \quad ; \quad S_m' = 0.052 \text{ MPa}$$

$L = 2.8 \text{ cm}$ ;  $\eta$  (Glycérol/Eau) =  $8.6 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ ;  $\eta$  (Eau) =  $9 \times 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$

Il faut se souvenir toujours que le comportement viscoélastique des mousses est non-linéaire et, donc, ce résultat est valable seulement si l'amplitude de la déformation dynamique est faible pour que les effets non-linéaires puissent être négligés.

La relation linéaire (V.8) entre  $\text{tg}\delta$  et la fréquence a été vérifiée expérimentalement par Gent et Rush(1966). Sur la figure (fig.V.2)  $\text{tg}\delta$  est représentée en fonction de la fréquence pour deux fluides interstitiels différents dans la même mousse. On remarque que l'intersection de ces deux courbes avec l'axe de  $\text{tg}\delta$  est la même (même valeur de  $d_0$ ) et que les pentes théoriques (0.38 pour le mélange 60/40 glycérol/eau; 0.040 pour eau) sont en accords avec celles obtenues expérimentalement. Le rapport de ces deux pentes est égal au rapport des viscosités des liquides.

Sur la figure (fig.V.3) l'influence de la viscosité du fluide se traduit par une translation parallèle à l'axe  $\text{tg}\delta$  de la courbe ( $\text{tg}\delta, \log f$ ); la viscosité de l'air est très faible, la courbe  $\text{tg}\delta$  est constante.

De même la variation du paramètre  $L$ , épaisseur de l'échantillon, permet pour un même fluide d'obtenir des courbes (fig.V.4) semblables à celles de la figure (fig.V.3).

La courbe  $\text{tg}\delta$  passe par un maximum pour des fréquences élevées. Les figures (fig.V.5 et fig.V.6) montrent ce phénomène pour une mousse polyuréthane et une mousse de latex avec l'air comme fluide interstitiel.

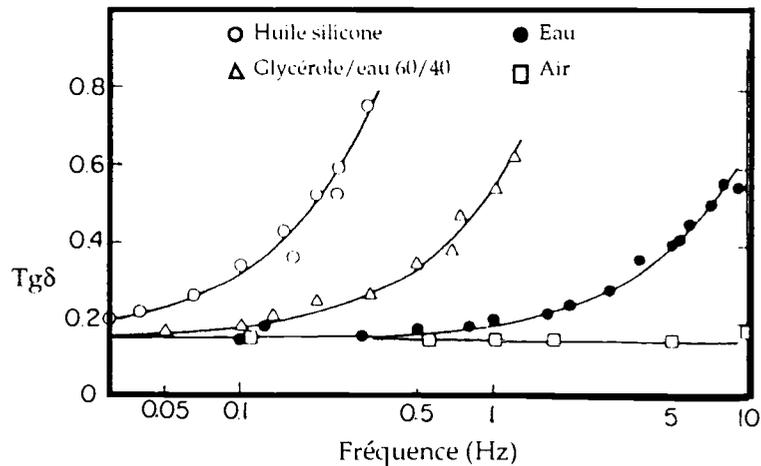


fig.V.3: Relation entre  $\text{tg}\delta$  et la fréquence de la déformation imposée; mousse de latex imbibée; d'huile silicone ○; de Glycérol/Eau : 60/40 Δ; d'eau ●; d'air □. [D'après Gent et Rush (1966)]

Le paramètre  $\alpha$  a été choisi pour donner la meilleure correspondance entre les courbes théoriques et les mesures expérimentales. Pour les deux figures (fig.V.5,

fig.V.6), le choix de  $\alpha$  était de 0.52 pour la mousse polyuréthane et de 2.0 pour la mousse de latex.

La déviation observée entre la courbe théorique et la courbe expérimentale (fig.V.5) à haute fréquence est due à l'influence des phénomènes de la déformation latérale et d'écoulement turbulent que l'on a négligés dans cette formulation.

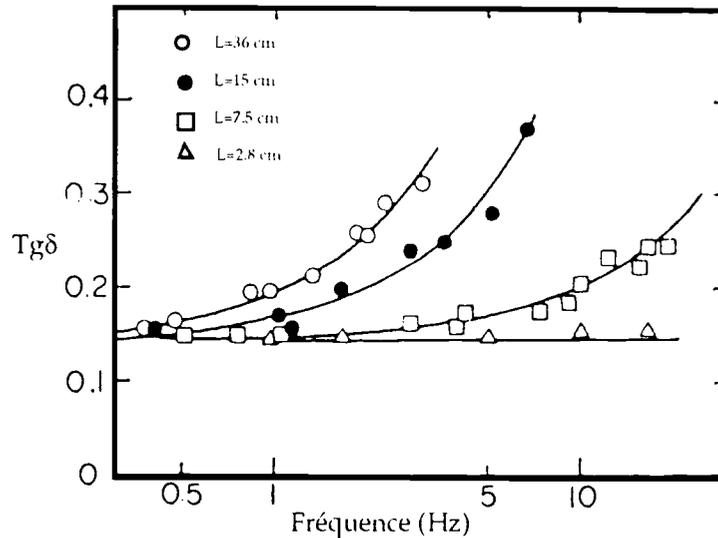


fig.V.4: Relation entre  $\text{tg}\delta$  et la fréquence de la déformation imposée; mousse de latex dans d'air: variation de la hauteur de l'échantillon. [D'après Gent et Rush (1966)]

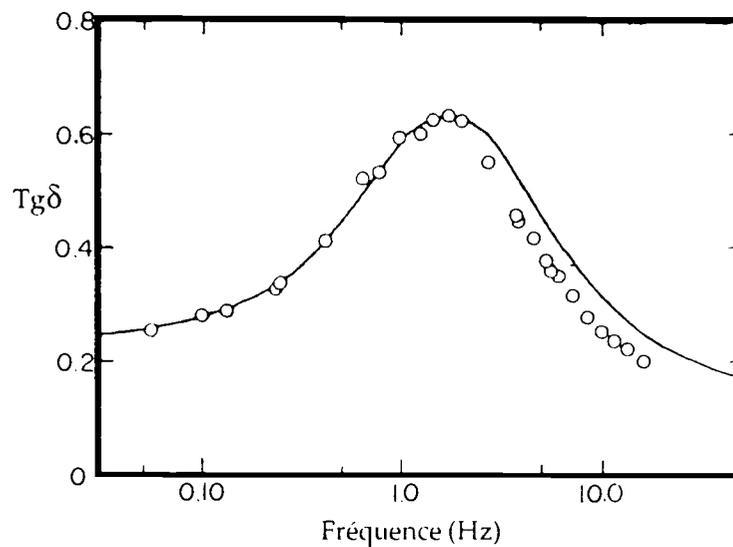


fig.V.5: Relation entre  $\text{tg}\delta$  et la fréquence de la déformation imposée; mousse polyuréthane dans l'air. [D'après Gent et Rush (1966)]

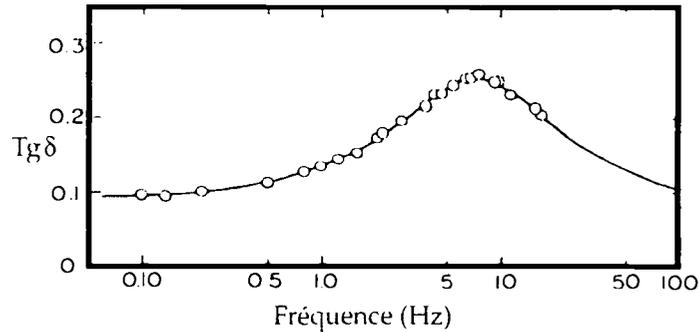


fig.V.6: Relation entre  $\text{tg}\delta$  et la fréquence de la déformation imposée; mousse de latex dans l'air. [D'après Gent et Rush (1966)]

Les valeurs mesurées de  $S'_m$ ,  $f$  et  $S_g$  ont permis d'obtenir pour le paramètre  $\alpha$ : 1.25 pour la mousse de latex et 0.44 pour la mousse polyuréthane.

La théorie de Gent et Rush prédit quantitativement la forme générale de la dépendance entre l'amortissement de la mousse et la fréquence. Elle permet de déterminer l'amplitude maximale de l'amortissement et sa fréquence.

Au delà de la fréquence donnant  $\text{tg}\delta$  maximum la théorie de Gent et Rush devient très approximative et les effets des bords de l'échantillons perturbent l'écoulement du fluide dans la mousse.

Hilyard (1971) a proposé un modèle, (figV.8), qui tient compte des effets de la déformation transversale de l'échantillon ainsi que de la force issue de l'écoulement turbulent.

La vitesse de l'écoulement quand on impose un déplacement  $y$  à l'échantillon est:

$$v = \frac{x(\dot{y}/h)}{\phi(1-y/h)} \quad (\text{V.9})$$

Sur deux échantillons de mousse polyuréthannes noyées dans une huile silicone ( $\eta=50$  cp à 24°C) il obtient que le paramètre de la cellule  $B(y)$  est constant et que la perméabilité de l'échantillon varie linéairement avec  $y$ .

$$K(y) = K_0(1 - \psi y/h) \quad B(y) = B_0 \quad (\text{V.10})$$

L'équation de l'équilibre dynamique de ce modèle est non-linéaire du troisième ordre et avec des coefficients variables.

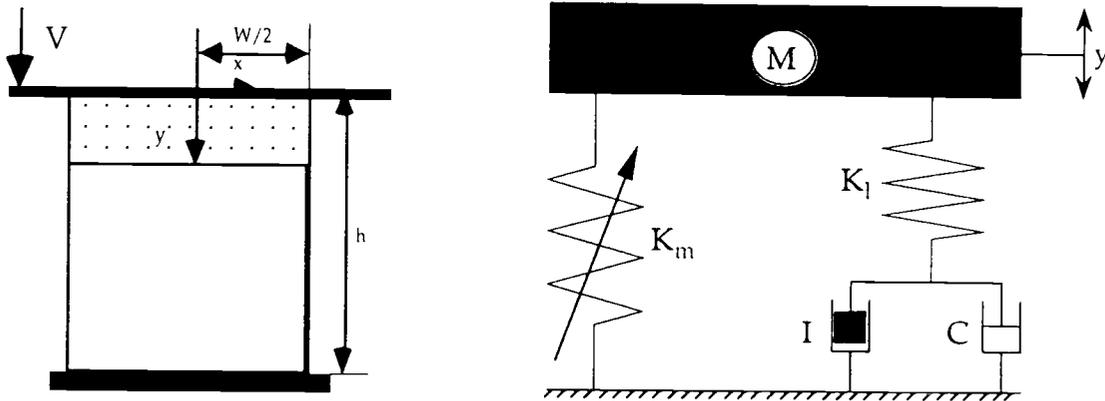


fig.V.7 : Modèle de Hilyard pour le comportement dynamique des mousses. [D'après Hilyard (1971)].

Les paramètres du modèle sont :

$$C = \frac{\eta W^3 L}{24 \phi h K_0 (1 - \psi y / h) (1 - y / h)}$$

$$I = \frac{\rho W^4 L}{64 \phi^2 h^2 B_0 (1 - y / h)^2}$$

$$K_1 = \frac{E_t W^3 L}{6 h^2} \tag{V.11}$$

$K_m$  = Rigidité statique de la mousse

Ce modèle est nécessaire si on veut étudier le comportement des mousses aux chocs; tel est le cas pour tous les emballages.

Gibson et al (1988) ont supposé que l'écoulement est lent et gouverné par la loi Darcy:

$$u = - \frac{K}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{V.12}$$

En supposant que la vitesse de l'écoulement est constante et égale à la vitesse imposée sur le plateau supérieur,  $V$ , et que la perméabilité est  $K \approx L_1(1-\varepsilon)$ ; la contribution du fluide est :

$$\sigma_f = \frac{C_0 \eta \dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)} \left( \frac{L}{L_1} \right)^2 \quad (\text{V.13})$$

Où  $C_0$  est une constante,  $L_1$  est la longueur des cellules de la mousse et  $\dot{\varepsilon} = V/h$ .

Cette contribution négligeable pour un fluide interstitiel peu visqueux (air; fig.V.8) devient importante pour des fluides visqueux pour des vitesses de déformations supérieures à  $10 \text{ s}^{-1}$  (Eau+Glycérol; fig.V.9).

Dans la suite on s'intéresse à un modèle simplifié où les effets de l'écoulement turbulent sont négligés et on considère que l'amplitude de la déformation sinusoïdale imposée est faible.

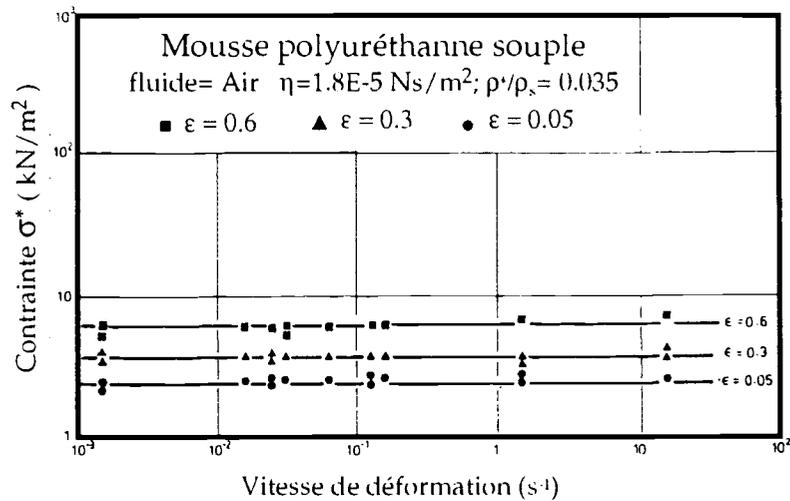


fig.V.8: [D'après Gibson et al (1988)].

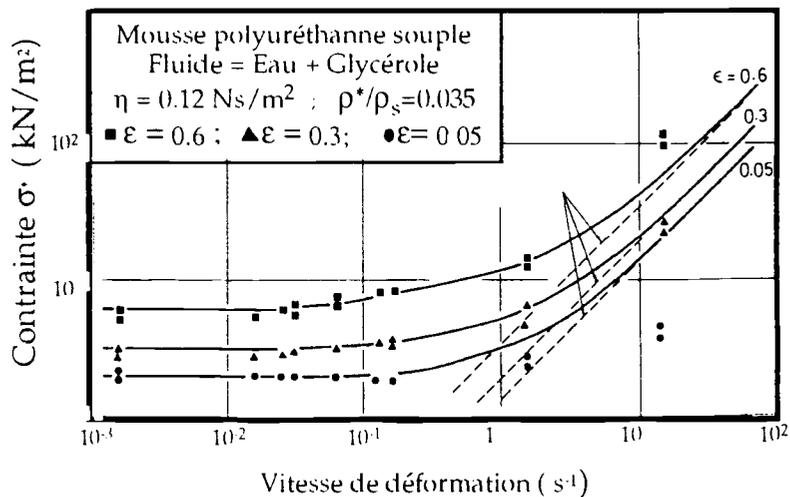


fig.V.9: [D'après Gibson et al (1988)].

## II ETUDE D'UN MODELE RHEOLOGIQUE DE LA MOUSSE

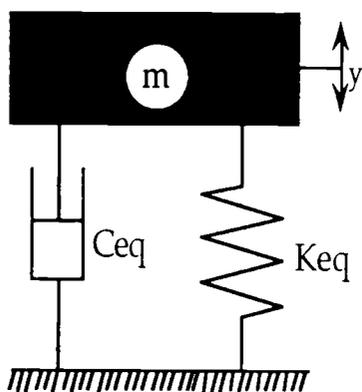


fig.V.10 : Modèle de Kelvin - Voigt

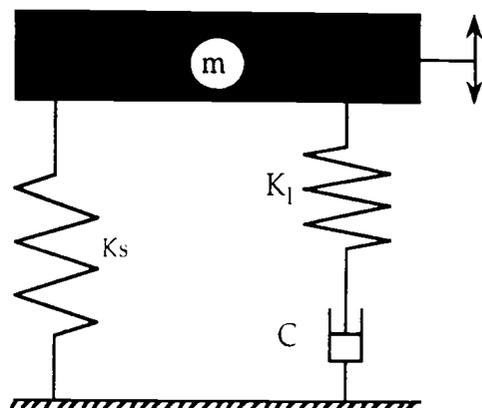


fig.V.11 : Modèle de Poynting - Thomson

$$K_{eq} = \frac{K_s K_1^2 + \omega^2 C^2 (K_s + K_1)}{K_1^2 + \omega^2 C^2} \quad (V.14)$$

$$C_{eq} = \frac{C K_1^2}{K_1^2 + \omega^2 C^2}$$

Le module de rigidité dynamique de ce modèle est  $\sqrt{K_{eq}^2 + \omega^2 C_{eq}^2}$ . (V.15)

Nous avons procédé à des essais expérimentaux sur divers échantillons de mousse et pour différents taux de compression statique. Le but est de pouvoir caractériser les paramètres du modèles qui traduit le comportement dynamique de la mousse à un taux de compression imposé.

C'est à dire pouvoir quantifier l'influence du taux de compression sur le comportement dynamique de la mousse.

### II.1 Excitation force harmonique

On impose un déplacement  $Y_s$  statique à l'échantillon de mousse au moyen du pot vibreur.

La plaque supérieure est alors excitée par une force sinusoïdale d'amplitude  $F_0$  et de pulsation  $\omega$ . On vérifie bien que le déplacement induit à la plaque est sinusoïdal et on mesure expérimentalement le rapport  $\frac{F_0}{A_0} = \frac{F_0}{\omega^2 X_0}$  et le déphasage  $\delta$  entre la force d'excitation et le déplacement de la plaque pour une pulsation donnée.

On varie la fréquence ( $\omega = 2\pi f$ ) de la force d'excitation dans l'intervalle [1; 30] pour chaque déplacement statique  $Y_s$  imposé.

Si on assume l'échantillon à un modèle de Kelvin-Voigt (fig.V.1), on a :

$$K = \omega^2 \left( \frac{F_0}{A_0} \cos \delta + M \right) ; \quad C = -\frac{F_0}{A_0} \omega \sin \delta \quad (\text{V.16})$$

Les paramètres de ce modèles dépendent de la pulsation d'excitation.

Le modèle de Poynting-Thomson (fig.V.2) donne des paramètres indépendants de la fréquence d'excitation. Il est un cas particulier du modèle de Hilyard et est souvent proposé comme modèle simple du comportement des mousses.

Ce modèle peut être ramené à un modèle de Kelvin-Voigt équivalent; avec :

$$K_{\text{eq}} = \frac{K_s K_1^2 + (K_s + K_1)(C\omega)^2}{[K_1^2 + (C\omega)^2]} ; \quad C_{\text{eq}} = \frac{CK_1^2}{[K_1^2 + (C\omega)^2]} \quad (\text{V.17})$$

La rigidité dynamique est :

$$K_{\text{dyn}} = \sqrt{K_{\text{eq}}^2 + \omega^2 C_{\text{eq}}^2} = \left[ \left[ \frac{K_s K_1^2 + (K_s + K_1)(C\omega)^2}{[K_1^2 + (C\omega)^2]} \right]^2 + \left[ \frac{C\omega K_1^2}{[K_1^2 + (C\omega)^2]} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (\text{V.18})$$

Le lissage de la courbe de la rigidité dynamique de l'échantillon pour chaque déplacement statique imposé permet de déterminer les deux paramètres inconnus du modèle :  $K_1$  et  $C$ . Le paramètre  $K_s$  étant donné par un essai de compression statique.

Les paramètres du modèle sont dans les tableaux suivants :

$Y_s$ (mm)	$K_s$ (N / m)	$K_1$ (N / m)	$C$ (Ns / m)	$Y_s$ (mm)	$K_s$ (N / m)	$K_1$ (N / m)	$C$ (Ns / m)
4	3285	1678	112.6	10	1870	3808	343
22	1820	7865	645	19	2106	4934	414.3
27	2522	9805	728.5	24	2750	5615	586
38	6446	12507	1276				

tab.V.1:

Echantillon 1 : 100x100x64; m=0.125    Echantillon 2 : 80x80x60; m=0.140

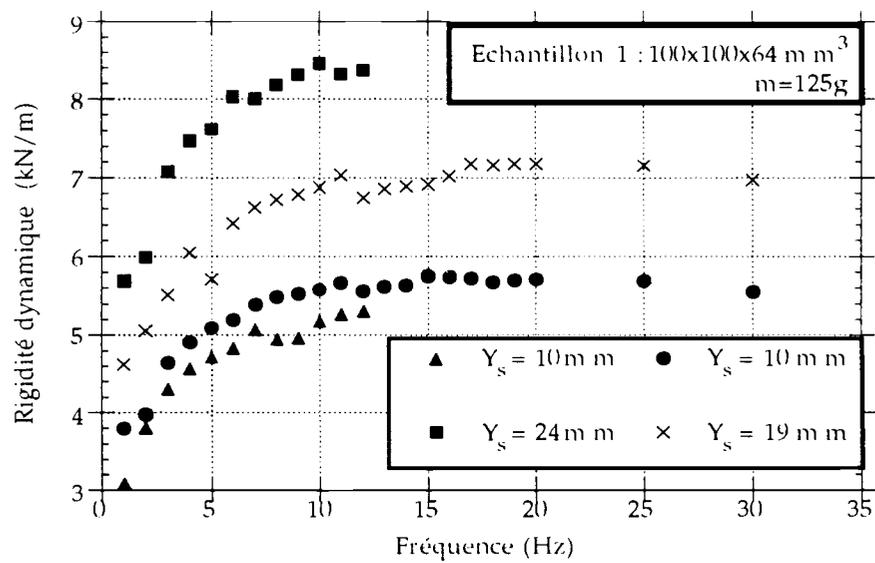


fig.V.12: Evolution de la rigidité dynamique en fonction de la fréquence d'excitation pour l'échantillon 1.

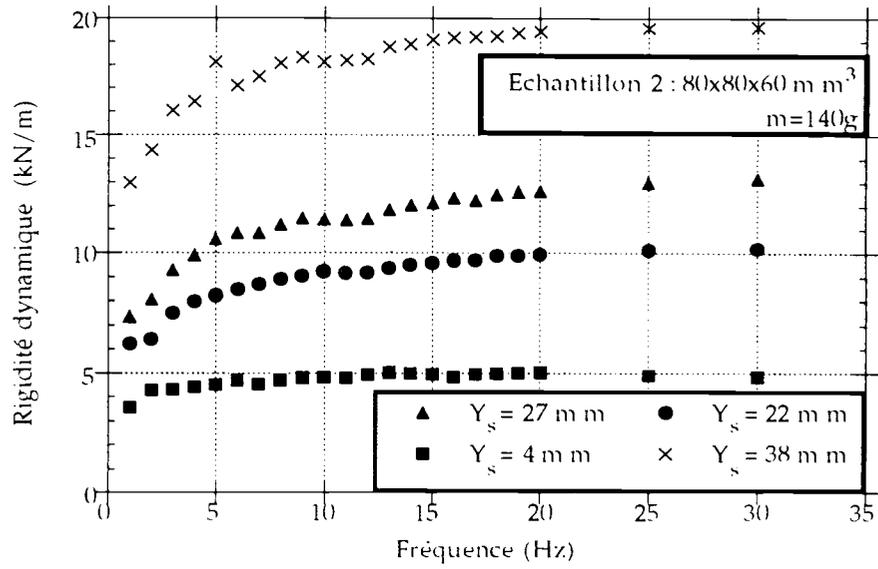


fig.V.13 : Evolution de la rigidité dynamique en fonction de la fréquence d'excitation pour l'échantillon 2.

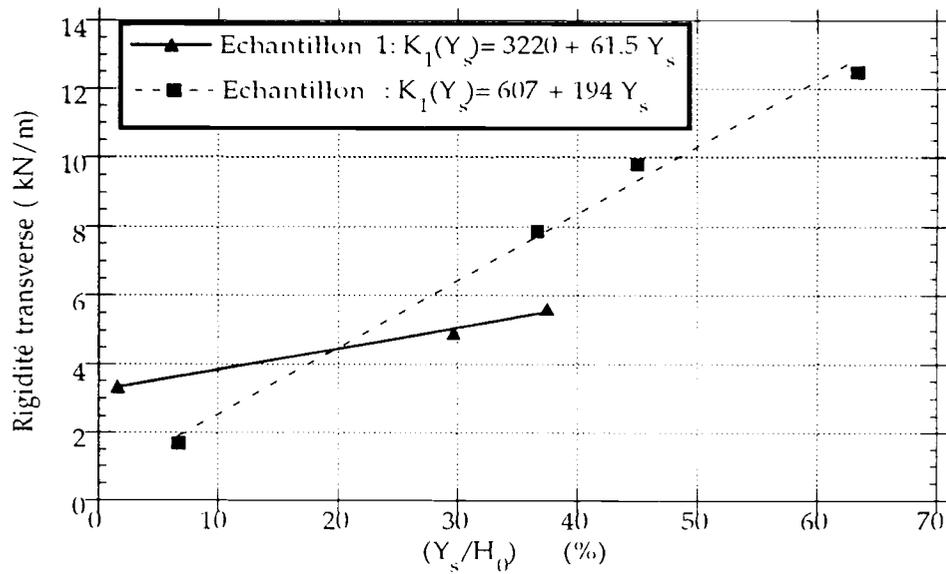


fig.V.14 : Evolution de la rigidité transverse  $K_1$  en fonction du déplacement statique.

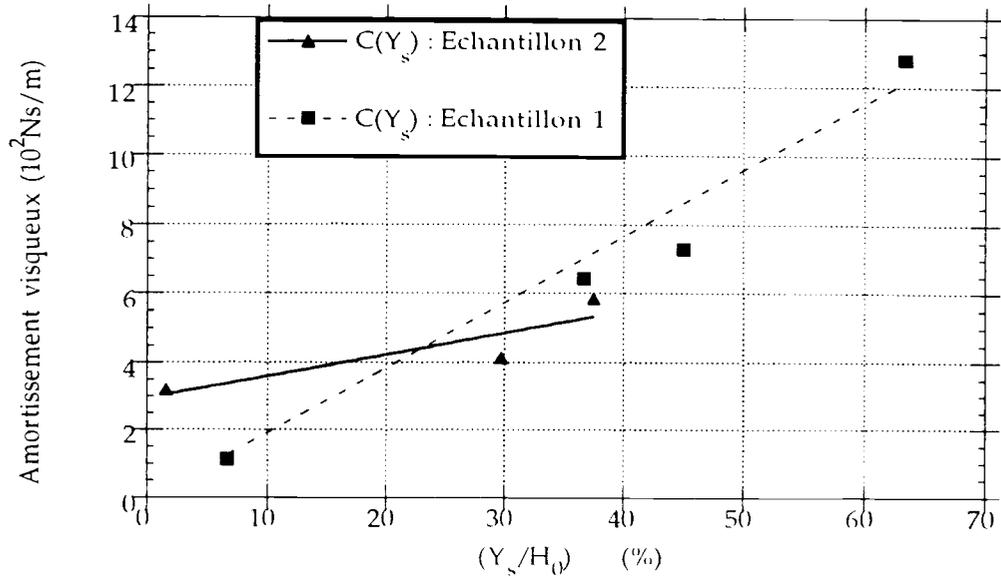


fig.V.15 : Evolution de la rigidité transverse  $K_1$  en fonction du déplacement statique.

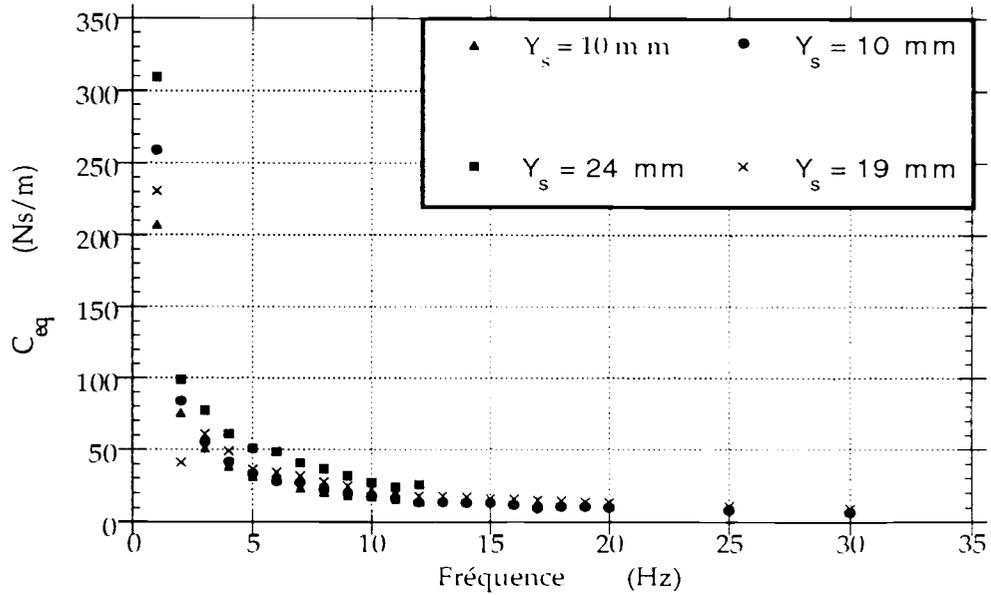


fig.V.16 : Evolution du coefficient d'amortissement visqueux  $C_{eq}$  en fonction de la fréquence d'excitation pour l'échantillon 1.

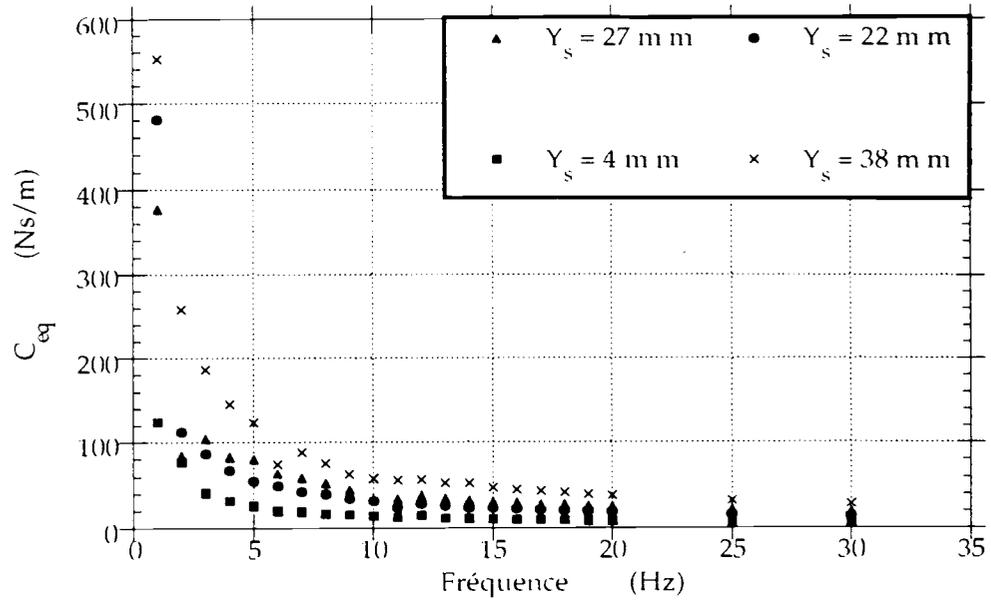


fig.V.17 : Evolution du coefficient d'amortissement visqueux  $C_{eq}$  en fonction de la fréquence d'excitation pour l'échantillon 2.

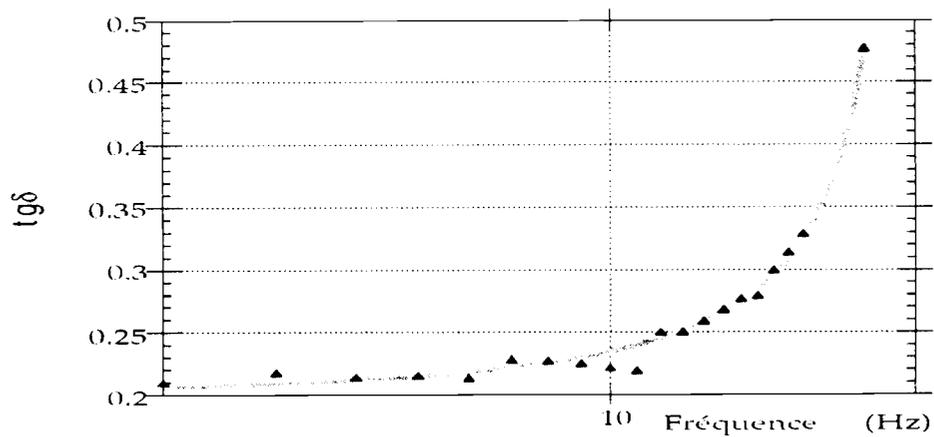


fig.V.18 : Evolution de  $tg\delta$  avec la fréquence d'excitation

Il est à noter que le rapport  $C/K_1$  varie très peu avec la fréquence ( $[0; 20]$ ), et le déplacement statique imposé,  $Y_s$ , ( $[0; 70\%]$ ).

Ce rapport représente la constante de relaxation de la mousse et est de l'ordre de 0.1 s.

On a effectué également un essai avec une excitation force aléatoire sur deux échantillons de la même mousse et d'autres mousses.

Cet essai a été effectué pour trois taux de compression statique : 5%; 30%; 50%.

## II.2 Excitation Force aléatoire

Les paramètres du modèle de Kelvin-Voigt, K et C équivalent sont déterminés à partir de la réponse comme suit:

Sur le diagramme des phases la fréquence propre ( $f_0$ ) correspond à l'abscisse du déphasage  $-\pi/2$ .

Sur le diagramme des amplitudes l'amplitude correspondante à  $f_0$  vaut  $1/(2m\zeta)$ .

Les paramètres du modèle sont:  $K = m\omega_0^2$                        $C = 2m\zeta\omega_0$

$\varepsilon$ %		$\omega_0$ rd/s	$\zeta$ %	K kN/m	C kg/s
5	(1)	99.3	8	5.9	10
5	(2)	82.9	8	4.1	8
25	(1)	84.8	14	4.3	14
25	(2)	72.2	12	3.1	10
50	(1)	144	16	12.4	28
50	(2)	117	8	8.2	12

tab.V.2 : La masse sismique est  $m = 0.6$  kg. Densité de la mousse :  $\rho = 60$  kg/m<sup>3</sup>  
Echantillons: (1):  $S = 4915$  mm<sup>2</sup>  $H_0 = 36$  mm; (2):  $S = 5925$  mm<sup>2</sup>  $H_0 = 78$  mm.

Les résultats des autres échantillons sont sur les tableaux (tab.V.3 à tab.V.5).

$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\zeta$ (%)	$\omega_0$ (rd/s)	C (kg/s)	K (kN/m)
17.5	6.1	218	9.4	17.8
20.5	6.7	212	10.2	16.9
25	5.5	243	9.6	22.1
28.5	4.8	251	8.8	23.7
29	7.8	170	9.6	10.8
36	6.3	179	8.2	12.0
39.5	7.4	271	14.5	27.6
57	7.0	224	11.2	18.8

tab.V.3 :  $\varepsilon = 5$  %;  $S = 100$  cm<sup>2</sup>;  $H_0 = 5$  cm;  $m = 0.36$  kg

$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\zeta$ (%)	$\omega_0$ (rd/s)	C (kg/s)	K (kN/m)
17.5	12.8	31.5	48.3	5.9
20.5	12.8	31.5	48.3	5.9
25	14.9	29.5	52.7	5.2
28.5	13.0	32.7	51.2	6.4
29	17.4	23.3	48.5	3.2
36	17.0	24.8	50.6	3.7
39.5	17.4	27.9	58.1	4.7
57	17.4	24.8	51.7	3.7

tab.V.4 :  $\varepsilon = 30\%$ ;  $S = 100\text{ cm}^2$ ;  $H_0 = 5\text{ cm}$ ;  $m = 6\text{ kg}$ 

$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\zeta$ (%)	$\omega_0$ (rd/s)	C (kg/s)	K (kN/m)
17.5	15.0	25.4	75.1	6.4
20.5	13.4	25.4	67.1	6.4
25	11.5	27.9	63.0	7.7
28.5	11.7	29.5	68.0	8.6
29	15.3	22.3	67.2	4.9
36	15.9	22.3	69.7	4.9
39.5	11.3	23.6	52.5	5.5
57	13.9	26.7	73.1	7.0

tab.V.5 :  $\varepsilon = 50\%$ ;  $S = 100\text{ cm}^2$ ;  $H_0 = 5\text{ cm}$ ;  $m = 9.85\text{ kg}$

### III CONCLUSION

Nous avons présenté un modèle à 1 d.d.l. qui traduit le comportement viscoélastique linéaire autour d'une position d'équilibre statique imposée à l'échantillon.

Les paramètres du modèle dépendent du taux de compression statique  $Y_s$ . Cela montre bien que le comportement dynamique de la mousse est non-linéaire.

On remarque que la rigidité dynamique croît avec la fréquence d'excitation et tend vers une valeur limite d'autant plus vite que le taux de compression statique imposé est important. Lorsque  $Y_s$  croît les dimensions des cellules diminuent et l'air emprisonné s'échappe plus difficilement. La rigidité adiabatique de l'air vient s'ajouter à la rigidité du matériau; le coefficient d'amortissement visqueux diminue rapidement.

La fréquence de coupure au dessus de laquelle l'échappement de l'air est interrompu diminue quand  $Y_s$  croît.

Ce modèle permet d'étudier le comportement dynamique d'un siège chargé par un mannequin autour d'une position d'équilibre statique.

Le comportement au choc peut être approché par le modèle de Hilyard ou par une généralisation du modèle de Gent et Rush où on suppose que la pression est variable dans une section donnée du tube.

*Fin du cinquième chapitre*

*Etude de la suspension métallique*

*Sommaire*

I Méthodologie de modélisation de la suspension métallique

II Structure réelle de la suspension métallique

II.1 Détermination du niveau de modélisation

II.2 Influence de la prétension longitudinale

III Modélisation simplifiée

III.1 Expressions analytiques des rigidités

III.2 Paramètres du modèle équivalent

III.3 Influence de la rigidité en flexion

IV Conclusion

# I METHODOLOGIE DE MODELISATION DE LA SUSPENSION METALLIQUE

Cette méthodologie s'applique pour des suspensions formées de ressorts plats dont l'écartement est éventuellement maintenu constant par des barres articulées. Dans le cadre de notre étude la suspension est complétée par des ressorts de traction hélicoïdaux.

On schématise la suspension à l'aide d'éléments linéiques du type "poutre".

Les rigidités équivalentes en traction - compression et en flexion de ces éléments peuvent être déterminées, soit analytiquement, soit par calcul éléments finis, soit à partir d'expériences simples.

Dans le cadre final il faut tenir compte des prétensions éventuelles.

L'effet qui détermine la flexibilité de la suspension est un effet du second ordre (couplage entre les déformations transversales et longitudinales) et nécessite dans un code de calcul de structure une formulation en grands déplacements.

L'étude réalisée pour la suspension métallique mixte du siège de la Renault 25 est donnée à titre d'exemple.

Il faut noter que c'est la déformabilité en traction - compression des éléments linéiques qui joue un rôle prépondérant dans le comportement de la suspension.

La prétension des éléments a une faible influence sur la rigidité dynamique mais s'avère importante pour le calcul du point H.

La méthode se résume en trois points essentiels :

- La structure est modélisée avec des éléments "poutre" et des éléments "rigides".

- Les rigidités des éléments peuvent être déterminées par:

- o- Calculs éléments finis ou,
- o- Calculs analytiques type R.D.M ou,
- o- expériences simples.

- La modélisation est effectuée en grands déplacements et avec prise en compte des prétensions éventuelles.

La structure de la suspension métallique se compose de quatre éléments identiques, on se limite à l'étude d'un élément représentatif isolé de la structure.

L'élément étudié se compose d'un ressort de traction et d'une série de poutres courbes comme indiqué sur la figure (fig.VI.2).

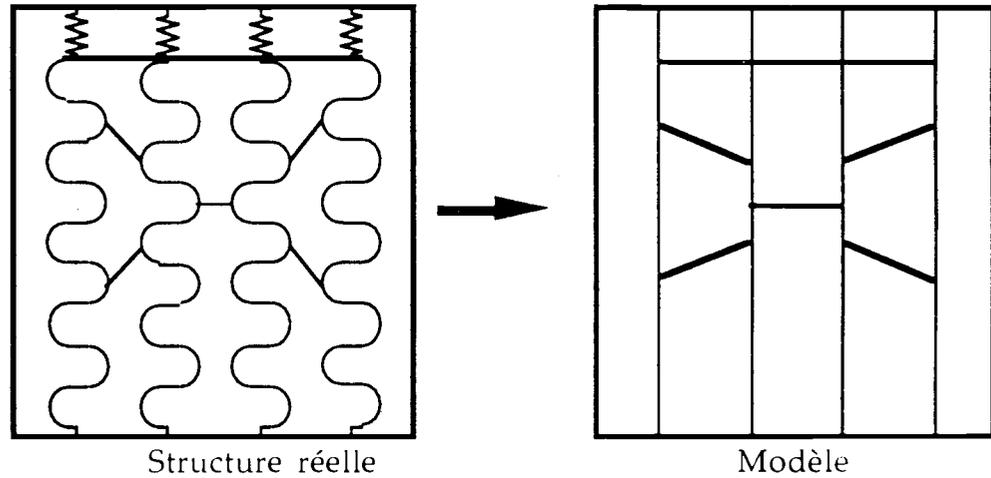


fig.VI.1 : Structure et modèle de la suspension métallique

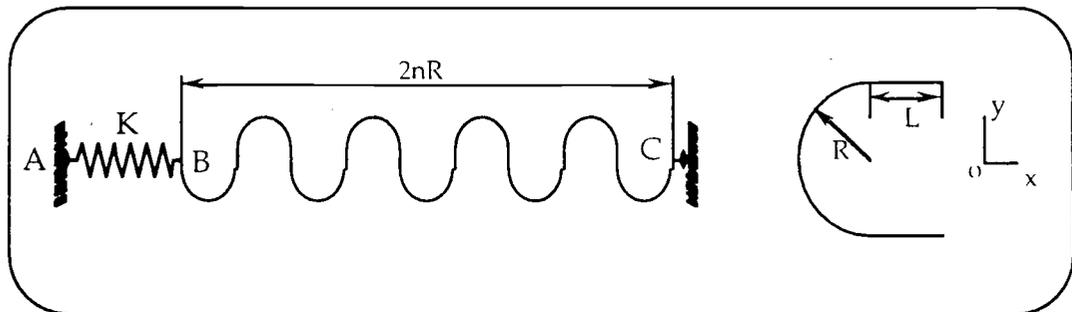


fig VI.2 : élément représentatif de la suspension métallique

L'étude consiste à mettre en évidence les paramètres qui déterminent la déformabilité de la structure. Ces paramètres doivent nous permettre de prédire les déformations d'une telle structure par le calcul avant la conception du siège et donc sans avoir recours à l'expérience.

Dans la suite de ce chapitre nous déterminons le niveau de modélisation à prendre en compte pour la construction du modèle simplifié de la suspension métallique. On détermine les expressions analytiques des rigidités du modèle par un calcul type R.D.M, enfin nous procédons à une analyse de sensibilité sur les paramètres du modèle.

## II STRUCTURE REELLE DE LA SUSPENSION METALLIQUE

### II.1 Détermination du niveau de modélisation

Le modèle doit être prédictif pour la réponse souhaitée de la suspension métallique; et cela en restant le plus simple possible - c'est à dire - en ne tenant compte des non- linéarités que si c'est nécessaire. Dans la pratique les non-linéarités sont de type géométrique ou matériau. Seules les non-linéarités géométriques doivent être envisagées dans la modélisation de la suspension métallique pour les déformations statiques du siège.

On adopte l'hypothèse simplificatrice des *petits déplacements avec prétension* due aux tensions longitudinales dans la structure. Dans le cas où cette hypothèse est très pénalisante nous envisageons l'hypothèse des *grands déplacements* qui tient compte du changement de la localisation des noeuds.

On utilise deux types d'éléments finis : élément "ressort", élément "poutre courbe".

Les données géométriques et mécaniques de la structure étudiée sont résumées dans le tableau (tab.VI.1) :

Données géométriques ( mm )		Données mécaniques	
longueur du ressort	90	Module d'young	$E=210 \text{ GPa}$
longueur totale	360	coefficient de poisson	$\nu = 0.25$
diamètre poutre	$d=1.7$	Raideur du ressort	$K=13 \text{ kN/m}$
rayon de courbure	$R= 15$		
longueur de poutre	$l=6.5$		

tab VI.1: Données géométriques et mécaniques du problème

Les conditions aux limites sont résumées dans le tableau (tab.VI.2)

On impose un déplacement  $u_x = U_0$  au point A pour tenir compte de la prétension, puis on applique une charge - suivant l'axe  $oz$  - répartie sur la structure et de module  $F_z$ .

	Ux	Uy	Uz	Rotx	Roty	Rotz
Point A	$U_0$	0	0	0	libre	0
Point B	libre	0	libre	0	0	0
Point C	0	0	0	0	libre	0

tab.VI.2 : conditions aux limites du problème

Pour une force  $F_z = 180 \text{ N}$ , les déplacements  $u_z$  correspondants à chaque valeur de  $U_0$  imposé en A sont récapitulés dans le tableau ( tab.VI.3 ).

A la lumière de ces résultats (tab.VI.3), il apparaît que les résultats obtenus avec l'hypothèse des *petits déplacements* s'écartent largement des déplacements mesurés alors que l'hypothèse des *grands déplacements* paraît en conformité avec l'expérience. L'écart des déplacements calculés avec ces deux hypothèses diminue quand  $U_0$  augmente car la structure devient plus rigide. Le déplacement  $U_0$  imposé dans la structure réelle du siège est de 6 mm. On ne peut pas adopter l'hypothèse des *petits déplacements* car l'écart est trop important.

$U_0$ mm imposé en A	2	4	6	8	10	12
$U_z$ mm petits déplac.	260	167	122	97	80	68
$U_z$ mm grands déplac.	45.1	43.5	42	40.5	39	37.5
$U_z$ mm expérimental.	46		40		38	

tab.VI.3 : Comparaison des hypothèses p.d , g.d et experience.

**Conclusion:** on doit adopter l'hypothèse des *grands déplacements* dans la construction du modèle de la suspension métallique du siège.

## II.2 Influence de la prétension longitudinale

On s'intéresse à l'influence que peut avoir le déplacement imposé  $U_0$  au point A sur la déflexion maximale  $U_z$  dans la structure. Pour une valeur imposée de  $U_0$  on trace l'évolution de la déflexion  $U_z$  en fonction de la charge  $F_z$  répartie sur la structure.

Les courbes  $U_z(F_z, U_0 = \text{constante})$  sont tracées sur la figure ( fig.VI.3 ).

La prétension influe sur la rigidité tangentielle pour de faibles charges  $F_z$ .

Les pentes à l'origine de ces courbes tendent vers la pente de la droite asymptote quand  $U_0$  croît et donc la non-linéarité - qui est symbolisée par la cassure de pente de ces courbes - tend à disparaître.

Quand la prétension est faible l'accroissement des efforts de traction dû à la tension additionnelle qui se produit par la flexion n'est pas négligeable. Dès que cette prétension devient suffisamment importante - soit en l'imposant initialement avec  $U_0$  ou en augmentant la charge répartie  $F_z$  - alors la pente à l'origine tend vers son asymptote immédiatement.

L'influence de la prétension se manifeste sur la rigidité tangentielle de la structure pour des chargements faibles, et sur la déflexion statique pour des chargements nominaux.

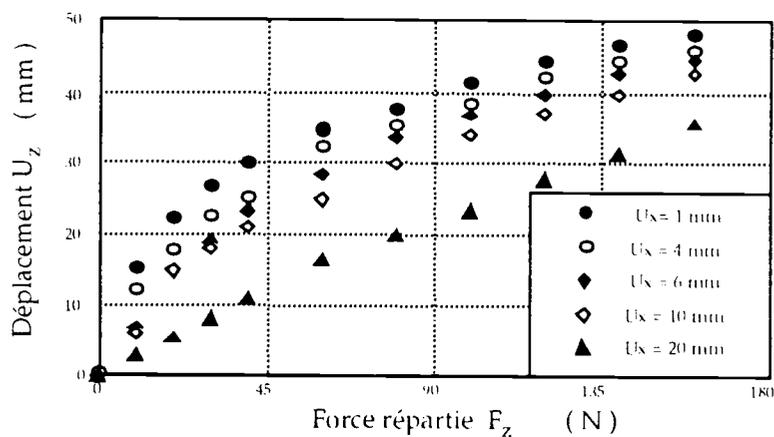


fig.VI.3 : Influence de  $U_x$  sur la déformabilité de la structure

### III MODELISATION SIMPLIFIEE

Dans ce paragraphe on veut construire un modèle simple géométriquement de la structure étudiée dans le paragraphe précédent ( § II ). On établira analytiquement les rigidités de la poutre équivalente à la structure; puis on évaluera l'influence de la rigidité en flexion sur la déflexion.

#### III.1 Expressions analytiques des rigidités

On calcule généralement les déplacements des poutres par application du théorème de Castigliano : le déplacement, dans la direction de la charge  $F$ , du point d'application de cette charge qui agit sur la poutre, est :  $\delta = \frac{\partial U}{\partial F}$  où  $U$  est l'énergie de déformation de la poutre.

On se trouve dans le cas le plus simple lorsque les dimensions de la section transversale de la poutre sont faibles comparativement au rayon de courbure de la fibre moyenne.

Dans les calculs on néglige l'énergie de déformation due aux forces longitudinales et de cisaillement.

On applique une force suivant la direction où on veut calculer le déplacement et on établit la rigidité de la structure correspondante à la direction de la force appliquée.

##### III.1.1 Déplacement $\delta x$ au point B sous une force $F_x$

La structure supporte dans son plan moyen une force  $F_x$  en B et suivant l'axe  $ox$ . Le moment de flexion dans une section quelconque est égal à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} yF_x & 0 \leq y \leq L \\ F_x(L + R \sin \phi) & 0 \leq \phi \leq \pi \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{pour les poutres droites} \\ \text{pour les poutres courbes} \end{array} \right\}$$

L'énergie de déformation de flexion est :

$$U = n \left[ \int_0^L \frac{y^2 F_x^2}{EI_z} dy + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{(L + R \sin \theta)^2 F_x^2}{EI_z} R d\theta \right] \quad (\text{VI.1})$$

En dérivant sous le signe intégral par rapport à  $F_x$ , on obtient après le développement des calculs:

$$\delta x = \frac{n F_x}{EI_z} \left[ \frac{2}{3} L^3 + \pi R \left( L^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) + 4LR^2 \right] \quad (\text{VI.2})$$

La rigidité en traction compression de la structure est:

$$k_x = \frac{EI_z}{n \left[ \frac{2}{3} L^3 + \pi R \left( L^2 + \frac{1}{2} R^2 \right) + 4LR^2 \right]} \quad (\text{VI.3})$$

### III.1.2 Déplacement $\delta y$ au point B sous une force $F_y$

Le moment de flexion dans une section quelconque de la structure est  $M_z = xF_y$ , avec  $0 \leq i \leq n$ :

$$\begin{array}{lll} x = 2R(n-i) & s = y & \text{pour les poutres droites;} \\ x = 2R(n-i) - R(1-\cos(\phi)) & s = R\phi & \text{pour les poutres courbes} \end{array}$$

L'énergie de déformation de flexion de la structure est :

$$U = \int_0^s \frac{(xF_y)^2 ds}{EI_z}$$

Le déplacement suivant l'axe  $oy$  est :

$$\delta y = \frac{R^2 F_y}{EI_z} \left[ 4L \left\{ n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \right\} + R \left\{ \sum_{i=0}^n \left[ \int_0^\pi [2(n-i) - 1 + \cos \phi]^2 d\phi \right] \right\} \right] \quad (\text{VI.4})$$

Après le calcul de ces termes, on obtient:

$$\delta y = \frac{nR^2 F_y}{3EI_z} \left[ (4n^2 + 18n + 2)L + \pi R(4n^2 + 9n + 8) \right] \quad (\text{VI.5})$$

Cela donne pour la rigidité suivant oy:

$$k_y = \frac{3EI_z}{nR^2} \left[ \frac{1}{L(4n^2 + 18n + 2) + \pi R(4n^2 + 9n + 8)} \right] \quad (\text{VI.6})$$

### III.1.3 Déplacement $\delta_z$ au point B sous une force $F_z$

Une force appliquée suivant oz au point B de la structure donne les composantes du moment des efforts intérieurs dans une section droite quelconque, par:

$$M_x = yF_z \qquad M_y = -xF_z \qquad M_z = 0$$

Par application du théorème de Castigliano sur la structure, on obtient:

$$k_z = \frac{k_x k_y}{(1 + \nu_0)k_y + k_x} \quad (\text{VI.7})$$

## III.2 Paramètres du modèle équivalent de la structure

Par application de ces formules des rigidités de la structure étudiée avec les données du tableau (tab.VI.1) on a obtenu les résultats comparés avec les calculs éléments finis effectués sur la structure réelle, dans le tableau (tab.VI.4).

Les paramètres du modèle sont alors calculés par:

$$S = \frac{L_t k_x}{E} \qquad I_y = \frac{L_t^3 k_y}{E} \qquad I_z = \frac{L_t^3 k_z}{E} \quad (\text{VI.8})$$

On obtient dans ce cas :

$$S = 0.1477E - 7 \text{ m}^2 \quad I_y = 0.282E - 11 \text{ m}^4 \quad I_z = 0.282E - 11 \text{ m}^4$$

	$K_x$ (N/m)	$K_y$ (N/m)	$K_z$ (N/m)
R.D.M	11500	90	89
E.F	11600	104	91

tab.VI.4 : Rigidités calculées de la structure réelle

L'écart entre les valeurs de  $k_y$  peut être minimisé en réduisant davantage les dimensions des éléments finis utilisés.

La structure est donc modélisée par le modèle "poutre-ressort" suivant avec les paramètres obtenus précédemment:

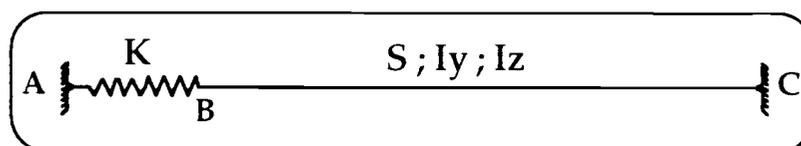


fig.VI.4: Modèle équivalent de la structure

Un test de validation est effectué sur ce modèle et comparé à la déflexion de la structure réelle pour une charge répartie  $F_z$  de 180 N, avec  $U_0 = 8$  mm. Les calculs sont effectués avec l'hypothèse des grands déplacements.

Les courbes de la figure ( fig.VI.5 ) montrent la validité parfaite du modèle pour les déformations statiques de la suspension métallique.

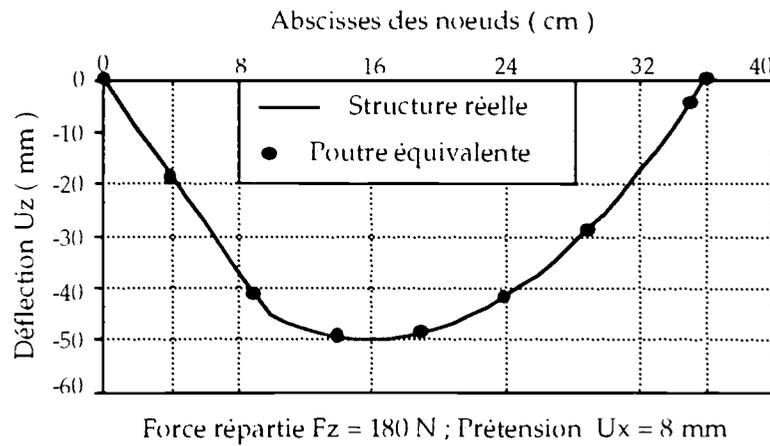


fig.VI.5 : Déformée statique de la structure et du modèle équivalent

### III.3 Influence de la rigidité en flexion

Sur la structure du modèle équivalent nous avons voulu montrer la sensibilité de la déflexion de la structure par rapport au paramètre de rigidité en flexion,  $I_z$ .

Cette influence est presque négligeable - comme le montre la figure ( fig.VI.6 ); le modèle peut être rapprocher au modèle d'un câble prétendu et chargé uniformément.

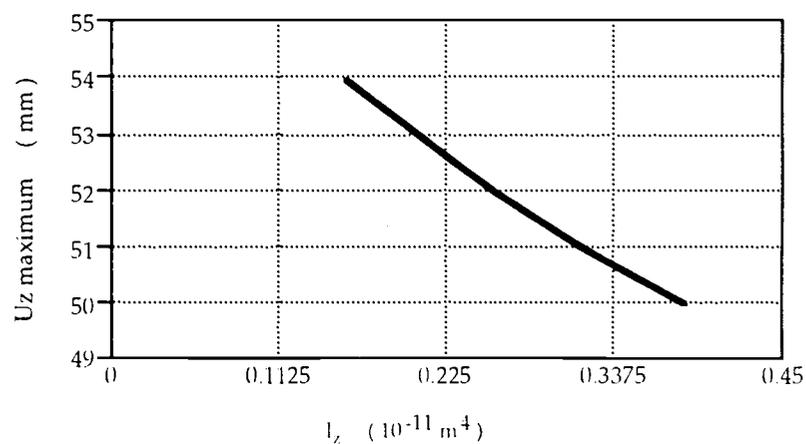


fig.VI.6 : Influence de  $I_z$  sur la deflection

## IV CONCLUSION

Il apparaît de cette étude que la rigidité en traction est le facteur prépondérant dans les déformations de la structure et que la rigidité en flexion n'est pas négligeable.

La nécessité de l'hypothèse des grands déplacements est apparue lors de la prise en compte des conditions aux limites.

La géométrie complexe de la structure de la suspension métallique nécessite un maillage très fin pour rendre compte de la déformabilité de la structure; cela alourdit le modèle global du siège.

Pour palier cet inconvénient, nous avons construit un modèle simple géométriquement et équivalent à la structure pour les déformations statiques. On a établi les expressions analytiques des paramètres du modèle en fonction de la géométrie réelle de la structure et de ses caractéristiques mécaniques.

*Fin du sixième chapitre*

## CONCLUSION GENERALE

Pour l'étude du confort d'un passager nous avons voulu construire un modèle simplifié d'un siège d'automobile. Cette structure est très complexe et se compose de divers éléments et de différents matériaux:

- Suspension métallique: ressorts, câbles, poutres,
- Garniture: mousse polyuréthane, toile,

Une première étude a permis de construire un modèle simple et prédictif de la suspension métallique en *grands déplacements*. On a en premier lieu calculé par la théorie des poutres les rigidités de la suspension métallique qu'on a assimilées à des poutres droites.

Aucune hypothèse simplificatrice (géométrique ou constitutive) n'a pu être adoptée pour la construction d'un modèle de la mousse. Ainsi les chapitres trois, quatre et cinq sont consacrés à la construction et l'identification d'un modèle en *grandes déformations* de la mousse. Ce problème a été abordé sous des aspects différents:

-*Approche macroscopique*:: à partir des lois de comportements des matériaux hyperélastiques on identifie une loi de comportement de la mousse polyuréthane avec un essai statique de compression simple.

-*Approche minimécanique*: à l'aide de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques et avec des hypothèses sur la microstructure de la mousse, sur les propriétés élastiques du polymère et le mécanisme microstructural de déformation, on établit les expressions des paramètres de la loi d'une déformation macroscopique homogène (compression simple, cisaillement pur) de la mousse.

Une étude complète sur les matériaux hyperélastiques nous a permis d'identifier la mousse polyuréthane comme un *matériau purement compressible de Hill*. Différentes variantes de la densité d'énergie associée à ce matériau sont implantées dans des logiciels de calcul des structures: ADINA, ABAQUS.

L'approche macroscopique, purement phénoménologique, ne fait pas apparaître dans l'expression de la densité d'énergie l'influence des paramètres traduisant le comportement microscopique du matériau.

L'approche minimécanique est basée sur les propriétés des milieux spatialement périodiques. En définissant: une cellule de base (morphologie de la cellule, dimensions, arrangement et forme des connexions) pour cette structure, l'orientation de la cellule par rapport aux axes de déformation, un mécanisme microstructural de déformation et les propriétés élastiques du polymère de la

mousse, nous avons établi les propriétés élastiques linéaires de la mousse en fonction de ces paramètres et de sa densité relative. Le choix d'une expression analytique de la densité d'énergie permet d'exprimer ses paramètres en fonction des rigidités en flexion, en traction - compression et des propriétés élastiques du polymère.

Cette approche a permis de confirmer:

- que la flexion des poutres est le mécanisme prépondérant en petites déformations,
- que le plateau de la courbe contrainte-déformation est dû au flambement élastique des parois des cellules,
- et qu'en première approximation la densité relative est le paramètre essentiel pour exprimer le comportement des mousses.

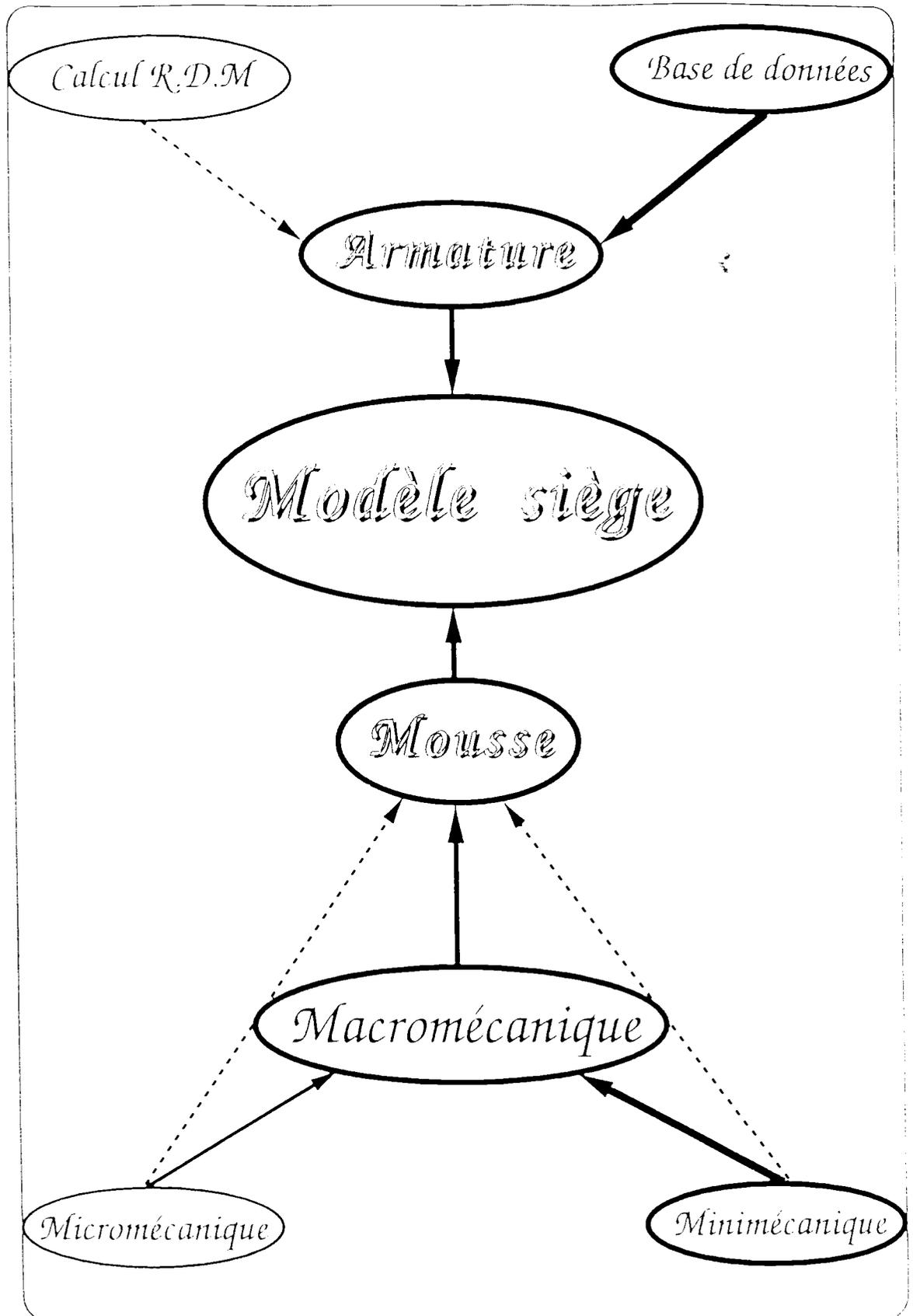
L'observation d'une rigidité dynamique beaucoup plus importante que la rigidité statique nous a amené à traduire la contribution de la circulation de l'air dans la mousse. Pour les mousses à cellules fermées cette contribution est importante et est traduite par le taux de compression statique ainsi que la pression initiale de l'air dans la cellule. Quant aux mousses à cellules ouvertes la vitesse de déformation est le paramètre prépondérant ainsi que la viscosité dynamique du fluide. Nous avons identifié un modèle rhéologique à 1 d.d.l qui représente le comportement dynamique linéarisé de la mousse autour d'une position d'équilibre.

A cours terme, le recalage statique du modèle global: dans un code éléments finis on dispose d'une densité d'énergie appropriée et on effectuera un calcul de chargement statique du siège par un mannequin. Ce travail a été effectué sur le logiciel ABAQUS et la prédictivité du point H est impressionnante ( 5% d'erreur ).

A moyen terme, on cherchera à identifier les paramètres d'un certain nombre d'expressions analytiques de densités d'énergie (Hill, Blatz - Ko, Ogden, Mooney - Rivlin ) à partir de la microstructure de la mousse.

A long terme:

- analyse du confort statique: définir l'enfoncement et étudier la répartition des pressions sur le passager.
- analyse du confort dynamique: simuler le comportement stationnaire du passager et faire une analyse des accélérations pour se rattacher à des critères de confort normalisés. En définissant un mannequin dynamique ( masses, ressorts ) on cherchera à caractériser le comportement filtrant d'un siège soumis à un signal enregistré sur route. On pourra alors observer les conséquences d'une modification de la raideur des ressorts ou de la combinaison épaisseur-portance d'une mousse. L'objectif final est de concevoir entièrement un siège grâce aux moyens de calcul. Ceci amènerait un gain de temps et surtout financier en réduisant le nombre de prototypes à réaliser.





# BIBLIOGRAPHIES

## Bibliographie du Chapitre I

E. M. ARRUDA & M. C. BOYCE : 'A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials', **J. Mech. Phys. Solids** 1993, 41, 2, 389-412.

W. KUHN & F. GRUN : **Kolloid Z.** 1942, 101, 248.

L. R. G. TRELOAR : 'The physics of rubber elasticity ', Oxford, 1975.

M. C. WANG & E. GUTH : **J. Chem. Phys.** 1952, 20, 1144.

P. D. WU & V. D. GIESSEN : 'On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers', **J. Mech. Phys. Solids** 1993, 41, 3, 427-456.

## Bibliographie des Chapitres O et II

L. ANAND : 'On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations', **ASME J. Appl. Mech.** 1979, 46, 78-82.

M. F. BEATTY : 'Topics in finite elasticity: Hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples', **ASME Appl. Mech. Rev.** 1987, 40, 12, 1699-1734.

P. J. BLATZ & W. L. KO : 'Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials', **Trans. Soc. Rheol.** 1962, 6, 223-251.

D. T. CHUNG; C. O. HORGAN & R. ABEYRATNE : 'The finite deformation of internally pressurized hollow cylinders and spheres for a class of compressible elastic materials', **Int. J. Solids Structures** 1986, 22, 12, 1557-1570.

P. G. CIARLET : 'Elasticité tridimensionnelle ', Paris, 1985.

J. L. DAVET : 'Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire: confrontation de modèles et travaux expérimentaux', **Annales des Ponts et Chaussées** 1985, 2-33.

---

W. KURZ; J. P. MERCIER & G. ZAMBELLI : '*Introduction à la science des matériaux*', presses polytechniques romandes, Paris, 1987.

P. Le Tallec & M. VIDRASCU : '*Une méthode numérique pour les problèmes d'équilibre de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations*', *Numerische Mathematik* 1984, 43, 199-224.

R. W. OGDEN : '*Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*', *Proc. R. Lond.* 1972, A326, 565-584.

R. W. OGDEN : '*Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids*', *Proc. R. Lond.* 1972, A328, 567-583.

R. W. OGDEN : '*Non-linear elastic deformations*', New York, 1984.

S. T. J. PENG & R. F. LANDEL : '*Stored energy function and compressibility of compressible rubberlike materials under large strain*', *J. Appl. Phys.* 1975, 46, 6, 2599-2604.

B. R. SIMON : '*Multiphase poroelastic finite element models for soft tissue structures*', *ASME Appl. Mech. Rev.* 1992, 45, 6, 191-218.

S. R. SWANSON : '*A constitutive model for high elongation elastic materials*', *ASME J. Eng. Mat. Tech.* 1985, 107, 110-114.

S. R. SWANSON; L. W. CHRISTENSEN & M. ENSIGN : '*Large deformation finite element calculations for slightly compressible hyperelastic materials*', *Computer & Structures* 1985, 21, 1/2, 81-88.

### Bibliographie du Chapitre III

ABAQUS User's Manual, Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc., Providence

M. F. ASHBY : '*The mechanical properties of cellular solids*', *Metallurgical Transactions A* 1983, 14, 1755-1769.

A. N. GENT & A. G. THOMAS : '*The deformation of foamed elastics materials*', *Journal of applied polymer science* 1959, 1, 1, 107-113.

L. J. GIBSON; K. E. EASTERLING & M. F. ASHBY : '*The structure and mechanics of cork*', *Proc. R. Soc. Lond.* 1981, A 377, 99-117.

- L. J. GIBSON; M. F. ASHBY & G. S. SCHAJER : 'The mechanics of two-dimensional cellular materials', **Proc. R. Soc. Lond.** 1982, A 382, 25-42.
- L. J. GIBSON & M. F. ASHBY : 'The mechanics of three-dimensional cellular materials', **Proc. R. Soc. Lond.** 1982, A 382, 43-59.
- L. J. GIBSON & M. F. ASHBY : 'Cellular solids ', Pergamon Press, Oxford, 1988.
- W. L. KO : 'Deformations of foamed elastomers', **Journal of cellular plastics** 1965, 45-50.
- A. K. KRAYNIK : 'Foams flows', **Annual review of fluid mechanics** 1988, 20, 325-357.
- E. A. MEINECKE & R. C. CLARK : 'Mechanical properties of polymeric foams ', Westport, 1973.
- S. T. J. PENG & R. F. LANDEL : 'Stored energy function and compressibility of compressible rubberlike materials under large strain', **Journal of applied physics** 1975, 46, 6, 2599-2604.
- J. L. THRONE : 'On the static compressibility of partially liquid-filled, open-cell foams', **Journal of cellular plastics** 1991, 27, 354-377.
- W. E. WARREN & A. M. KRAYNIK : 'Foam mechanics: The linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials', **Mechanics of Materials** 1987, 6, 27-37.
- W. E. WARREN & A. M. KRAYNIK : ' The linear elastic properties of open-cell foams', **ASME J. appl. Mech.** 1988, 55, 341-346.
- W. E. WARREN; A. M. KRAYNIK & C. M. STONE : 'A constitutive model for two-dimensional nonlinear elastic foams', **J. Mech. Phys. Solids** 1989, 37, 6, 717-733.
- W. E. WARREN & A. M. KRAYNIK : 'The nonlinear elastic behavior of open-cell foams', **ASME J. appl. Mech.** 1989, 58, 377-381.

### Bibliographie du Chapitre V

- R. C. CLARK & E. A. MEINECKE : 'Mechanical Properties of Polymeric Foams ', Westport, 1973.
- L. J. GIBSON & M.F. ASHBY : 'Cellular Solids', Pergamon Press, Oxford, 1988.

- C. M. HARRIS : '*Shock Vibration Handbook* ', New York, Paris, 1988.
- N. C. HILYARD : '*Observations on the Impact Behavior of Polyurethane Foams; II. The Effect of Fluid Flow*', **J. of Cellular Plastics**, 7, 84, 1971.
- N. C. HILYARD : '*Mechanics of Cellular Plastics* ', London, 1982.
- A. D. NASHIF : '*Vibration Damping* ', New York, 1985.
- D. RIXEN & M. GERADIN : '*Théories des vibrations: Application à la dynamique des structures* ', Paris, 1993.
- Y. ROCARD : '*Dynamique générale des vibrations* ', Masson, Paris, 1971.
- K. C. RUSH & A. N. GENT : '*Viscoelastic Behavior of open-cell Foams*', **J. Cellular Plastics**, 2, 46, 1966.
- L. H. SPERLING & R. D. CORSARO : '*Sound and vibration damping with polymers* ', Washington, DC, 1990.
- J. C. SNOWDON : '*Vibration and Shock in Damping Mechanical Systems* ', New York, London, Sydney, 1968.
- W. T. THOMSON : '*Theory of vibrations with applications* ', Ney Jersey, 1988).
- J. L. THRONE : '*On the static Compressibility of Partially Liquid-Filled, Open-cell Foams*', **J. Cellular Plastics**, 27, 354, 1991.
- G. WOODS : '*Flexible polyurethane foams: Chemistry and Technology* ', Applied Science Publishers

### Bibliographie des Chapitres IV et VI

- ANSYS: User's Manual, Version 4.3, Version 4.4, Swanson analysis systems, Inc. Houston, Pennsylvania.
- J. J. BARRAU S. LAROZE : '*Mécaniques des structures* ' : tomes 1 à 3, 1987, Eyrolles Masson, Paris
- S. P. TIMOSHENKO : '*Résistance des matériaux*', tomes: 1 et 2, Dunod, Paris, 1968.

## Annexe du chapitre II

### Méthode du simplexe de Nelder et Mead

La méthode de NELDER et MEAD est la plus efficace de toutes les méthodes séquentielles courantes pour minimiser une fonction coût non-linéaire.

Dans la méthode du simplexe, on calcule les valeurs prises par la fonction coût en  $(n + 1)$  points qui constituent les sommets du simplexe.

La méthode de NELDER et MEAD se résume en trois étapes: réflexion, expansion, contraction.

Soient les valeurs prises par  $f$ , avec  $f_r$  la plus grande valeur de  $f$  et  $f_s$  celle qui la suit,  $f_l$  la plus petite valeur de  $f$  au sommet du simplexe et  $x_h, x_s, x_l$  les vecteurs contenant les paramètres de la fonction coût et correspondant aux valeurs de  $f$  respectivement. Soit  $x_b$  le barycentre des sommets du simplexe et  $f_b$  la valeur de  $f$  correspondante.

A partir d'une estimation initiale des paramètres,  $x_0$  on calcule le simplexe initial avec ses sommets  $x_j$ , tels que :

$$x_j = x_0 + p e_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n q e_k \quad j = 1, \dots, n$$

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}} [\sqrt{n+1} + n - 1] \quad q = \frac{a}{n\sqrt{2}} [\sqrt{n+1} - 1] \quad x_b = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_i$$

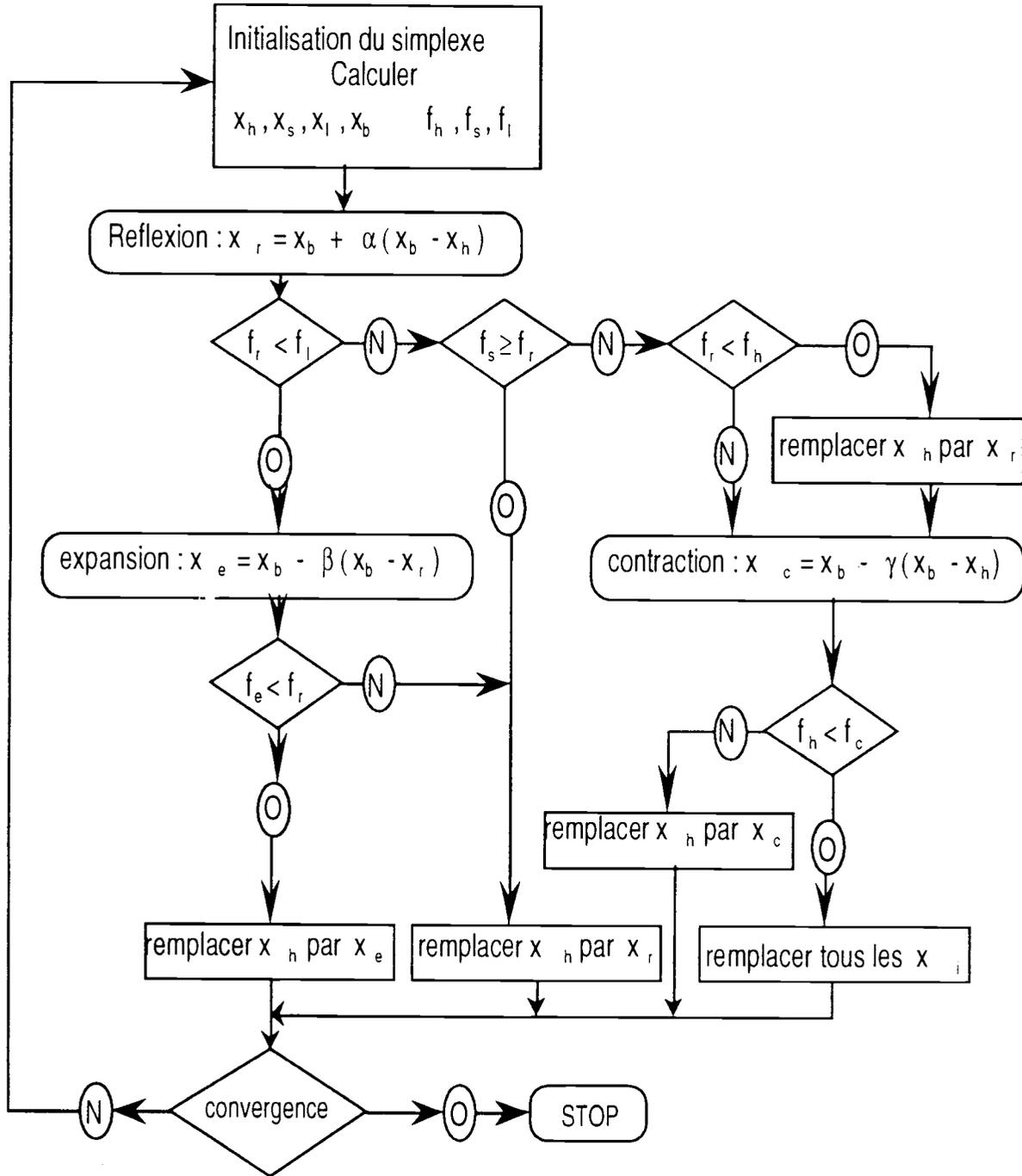
Au départ:

$x_h$  se "réfléchit" par rapport à  $x_b$  pour donner:  $x_r = (1 + \alpha) x_b - \alpha x_h$  ;  $\alpha = 1$

- Si la *reflexion* engendre un point  $f_r < f_l$ , on fait une *expansion* dans cette direction :  $x_e = \beta x_r + (1 - \beta) x_b$  ;  $\beta = 2$ .

- Si la *reflexion* fournit un point pour lequel  $f_r > f_s$ , on fait une *contraction* du simplexe:  $x_c = \gamma x_h + (1 - \gamma) x_b$  ;  $\gamma = 0.5$ .

- Si  $f_s > f_r > f_l$  ;  $x_r$  remplace  $x_h$  et le processus itératif de base se poursuit d'où l'algorithme :



*Annexe du chapitre III*

*Elasticité linéaire d'un nid d'abeille carré*

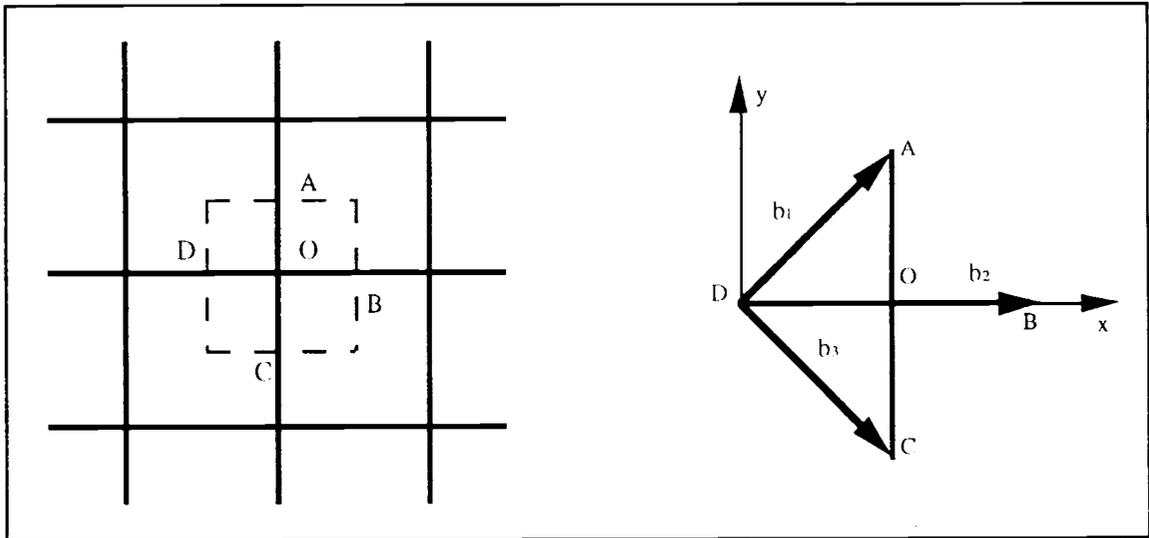


fig.A3.1

La même démarche que celle appliquée pour la structure hexagonale est utilisée ici avec cette fois l'élément représentatif et la structure carrée de la figure (fig.A3.1).

En explicitant les équations ( III.15 ) avec cette fois trois vecteurs déplacements, on obtient :

$$\delta_{1x} = N Q_1 + M P_4 + \psi_0 L$$

$$\delta_{1y} = M P_1 - N Q_4 - \psi_0 L$$

$$\delta_{2x} = M P_2 + M P_4$$

$$\delta_{2y} = -N ( Q_2 + Q_4 ) - 2 \psi_0 L$$

$$\delta_{3x} = M P_4 - N Q_3 - \psi_0 L$$

$$\delta_{3y} = -M P_3 - N Q_4 - \psi_0 L$$

Les équations d'équilibre sont :

$$P_1 - P_3 = Q_2 - Q_4$$

$$P_2 - P_4 = Q_3 - Q_1$$

$$Q_2 + Q_4 = - (Q_3 + Q_1)$$

On a donc un système d'équations linéaires avec neuf ( 9 ) inconnues dont la solution est :

$$P_1 = \frac{M}{D_1} [ 2 \delta_{1y} - \delta_{2y} ] + \frac{N}{D_1} [ \delta_{1y} - \delta_{3y} ]$$

$$P_2 = - \frac{M}{D_1} [ \delta_{3x} + \delta_{1x} ] + \frac{(N + 2M)}{D_1} \delta_{2x}$$

$$P_3 = \frac{M}{D_1} [ \delta_{2y} - 2 \delta_{1y} ] + \frac{(N + 2M)}{D_1} [ \delta_{1y} - \delta_{3y} ]$$

$$P_4 = \frac{M}{D_1} [ \delta_{3x} + \delta_{1x} ] + \frac{N}{D_1} \delta_{2x}$$

$$Q_1 = \frac{1}{4N} \delta_{2y} - \frac{1}{2(M+N)} \delta_{2x} + \frac{1}{4N(M+N)} \{ (M+3N) \delta_{1x} + (N-M) \delta_{3x} \}$$

$$Q_2 = \frac{1}{4N} ( \delta_{3x} - \delta_{1x} ) + \frac{1}{2(M+N)} \delta_{3y} + \frac{1}{4N(M+N)} \{ 2N \delta_{1y} - (3N+M) \delta_{2y} \}$$

$$Q_3 = \frac{1}{4N} \delta_{2y} + \frac{1}{2(M+N)} \delta_{2x} + \frac{1}{4N(M+N)} \{ (M-N) \delta_{1x} - (3N+M) \delta_{3x} \}$$

$$Q_4 = \frac{1}{4N} ( \delta_{3x} - \delta_{1x} ) - \frac{1}{2(M+N)} ( \delta_{1y} + \delta_{3y} ) + \frac{(N-M)}{4N(M+N)} \delta_{2y}$$

Sur un élément de volume homogène de hauteur unité suivant l'axe z, sur lequel s'exerce un chargement équivalent aux forces d'équilibre on a les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy suivantes :

$$\sigma_{xx} = \frac{P_2 + P_4}{4L} \quad \sigma_{yy} = \frac{P_1 + P_3}{4L} \quad \sigma_{xy} = - \frac{Q_2 + Q_4}{4L}$$

ou en fonction des déplacements affines :

$$\sigma_{xx} = \frac{\delta_{2x}}{4ML} \quad \sigma_{xy} = \frac{\delta_{1x} - \delta_{3x} + \delta_{2y}}{8NL} \quad \sigma_{yy} = \frac{\delta_{1y} - \delta_{3y}}{4ML}$$

///

## *Annexe du chapitre II*

### *Compression simple de la mousse : Modèle parallèle*

L'utilisateur confronté à un calcul non-linéaire, utilisant un code industriel de calcul par éléments finis, se trouve très souvent devant plusieurs possibilités pour la résolution, ces possibilités concernent:

- la discrétisation géométrique et le type d'éléments à utiliser,
- le choix d'une configuration de référence pour la résolution du problème non-linéaire géométrique,
- le choix d'un algorithme d'intégration pour le calcul des contraintes,
- le choix d'une stratégie de résolution qui va conditionner la vitesse de convergence et le temps de calcul.

Les non-linéarités qu'on peut rencontrer dans la pratique sont de type:

- géométrique: grands déplacements, grandes déformations;
- matériel: comportement des matériaux ( plasticité, élasticité non - linéaire );
- frottement, ruptures, contact, ...

On peut distinguer les applications suivantes:

- 1 - applications où il y a présence de grands déplacements, les déformations restant modérées et le comportement matériel linéaire,
- 2 - applications où il y a présence de grands déplacements et de grandes déformations, le comportement pouvant être linéaire,
- 3 - applications où il y a présence de grands déplacements, de grandes déformations et de comportement matériel non-linéaire,
- 4 - applications où il y a présence de grands déplacements, de grandes déformations, de comportement matériel non-linéaire et de contact avec ou sans frottement.

Le cas 4 correspond au problème de la modélisation de la déformation statique du siège sous un mannequin.

Nous exposons un modèle "parallèle" pour traduire le comportement en compression simple de la mousse.

Pour appréhender le comportement en petites déformations et garder le comportement en grandes déformations - donné par un modèle de Blatz-Ko - nous proposons un modèle fictif où on a en parallèle un matériau non - linéaire et un matériau de Blatz-Ko.

Les deux matériaux étant supposés en parallèle, leurs rigidités s'ajoutent, ce qui donne:

- en petites déformations le comportement du matériau non-linéaire est prépondérant, la zone 1 est obtenue par le matériau non-linéaire;
- en grandes déformations le comportement du matériau de Blatz-Ko est prépondérant, la zone 3 est modélisée par le matériau de Blatz-Ko;

Dans la zone 2 la rigidité équivalente des deux matériaux pourra être ajustée pour donner un modèle correct.

Ce modèle possède quatre paramètres:

$$\begin{array}{llll} E_0 & E_p & \delta_0 & \text{pour le matériau non-linéaire;} \\ G & & & \text{pour le matériau de Blatz-Ko.} \end{array}$$

Il est à noter que le modèle non-linéaire est formulé en petites déformations et que le modèle de Blatz-Ko est en grandes déformations.

La contrainte globale suivant 0x est exprimée par:

$$\sigma_1 = \sigma_{nl} + \sigma_{bk}$$

avec:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{bk} & \text{la contrainte dans le matériau de Blatz-Ko} \\ \sigma_{nl} & \text{La contrainte dans le matériau non-linéaire.} \end{array}$$

$$\sigma_{bk} = G \left[ 1 - \lambda_1^{\frac{-5}{2}} \right] \quad \text{et} \quad \lambda_0 = 1 - \delta_0$$

$$\sigma_{nl} = \begin{cases} E_i (\lambda_1 - 1) & \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq 1 \\ E_i (\lambda_0 - 1) + E_p (\lambda_1 - \lambda_0) & 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_0 \end{cases}$$

avec les inégalités suivantes sur les paramètres:

$$E_i > 0 \quad E_p > 0 \quad G > 0 \quad 0 \leq \lambda_0 \leq 1$$

En utilisant un algorithme de minimisation (méthode B.F.G.S ou Simplexe) sur une fonction coût  $\sigma_m$  avec le changement de variables pour éliminer les limitations sur les paramètres, nous obtenons :

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{N_m} \left[ \sigma_{nl}(j, \lambda) - \sigma_{bk}(j, \lambda, g) - \sigma_{nl}(j, \lambda, e_i, e_p, \theta_0) \right]^2$$

$$E_i = e_i^2 ; E_p = e_p^2 ; G = g^2 ; \lambda_0 = (\cos \theta_0)^2$$

$N_m$  est le nombre de points expérimentaux où on a évalué  $\sigma_{exp}$  en chaque point  $j\lambda$ .

On a obtenu les paramètres suivant, la courbe de ce modèle approche bien l'essai expérimental.

$$E_i = 58.85 \text{ kPa} \quad E_p = 5.58 \text{ kPa} \quad G = 0.725 \text{ kPa} \quad \lambda_0 = 0.91$$

On dira en conclusion qu'on a identifié un modèle pour l'essai de compression simple de la mousse. Il reste cependant un problème posé par ce modèle à savoir la multiplication du nombre d'éléments du modèle numérique. Ceci est un grand inconvénient car on risque rapidement d'arriver à des matrices assemblées trop grandes pour être résolues par le logiciel A.N.S.Y.S.

Ce modèle numérique donne un coefficient de poisson en petites déformations égale à 0.25, ce qui est loin de la réalité et très gênant pour la suite de la modélisation du siège global. En effet il faudra modifier les dimensions de la structure ou alors imposer des conditions aux limites afin d'arriver en fin de chargement à la structure réelle prévue.

///



## *Annexe du chapitre V*

### *Essai de compression simple : Résultats expérimentaux*

Il existe deux types de mousses : mousse chaude, mousse froide.

La mousse chaude -HO- est ainsi appelée du fait qu'en fin d'expansion la surface en contact avec le moule est cuite de façon à obtenir une peau. La mousse froide -HR- n'a pas besoin de cuisson. Sa propre chaleur de réaction suffit à terminer la polymérisation de surface.

Le bloc de mousse est monté entre deux plateaux, l'un fixe (inférieur), l'autre piloté en déplacement. Les deux plateaux sont troués de façon à permettre à l'air contenu dans la mousse de s'échapper.

Les échantillons "peau" et "coeur" ont été extraits du même bloc, la peau est placée du côté du plateau supérieur.

La descente s'effectue à une vitesse de 100 mm/mn.

Une précharge de 1 N est exercée sur l'échantillon pour caler le zéro de la machine, puis trois cycles de charge-décharge sont enchaînés jusqu'à 75 % de déformation. Un régime d'écoulement permanent s'est établi.

L'acquisition a lieu au 5ème cycle.

Cinq éprouvettes "peau" et "coeur" ont été testées pour des mousses chaudes à densité faible, moyenne et élevée.

Les échantillons "peau" et "coeur" ont été extraits du même bloc de mousse.

Nous avons dans le tableau (page 207) les portances au 5ème cycle pour 25%, 50% et 65% de déformation.

L'effet de la peau se traduit par une augmentation de la portance et un élargissement de l'hystérèse.

Les éprouvettes avec "peau" sont plus rigides que les éprouvettes sans "peau" car celle-ci est plus dense et au fur et à mesure que la déformation augmente la "peau" commence à se déformer, ce qui entraîne un accroissement plus important de la portance pour les éprouvettes avec "peau" comparativement aux éprouvettes à "coeur" et pour le même taux de déformation.

La peau joue également le rôle d'écran qui empêche l'air de s'échapper par le plateau supérieur d'où une hystèrese plus large que pour les éprouvettes sans "peau".

Ces deux phénomènes sont couplés si on augmente la densité de la mousse.

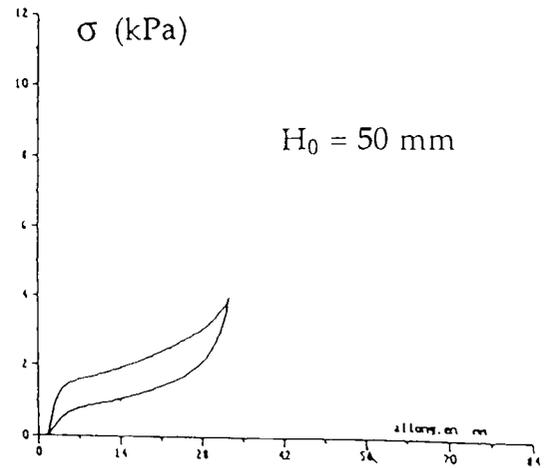
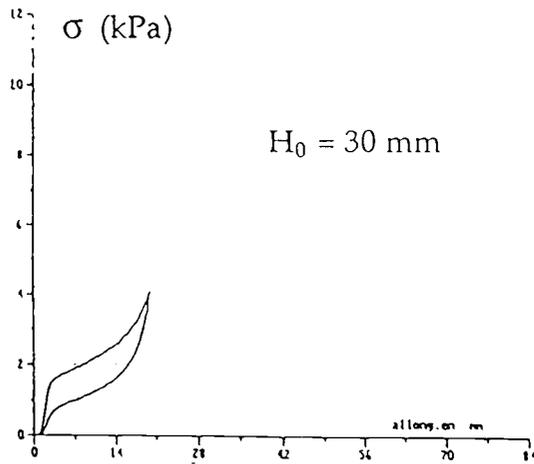
Nous avons également montré sur les courbes (page 208) que pour des échantillons de même section carrée mais d'épaisseurs différentes les portances pour un même taux de déformation sont faiblement variables avec la hauteur de l'échantillon. Cela peut expliquer que la mousse est assez homogène dans sa hauteur.

Quand la vitesse croît, les portances augmentent puis oscillent et tendent vers une valeur supérieure à la portance statique (page 209).

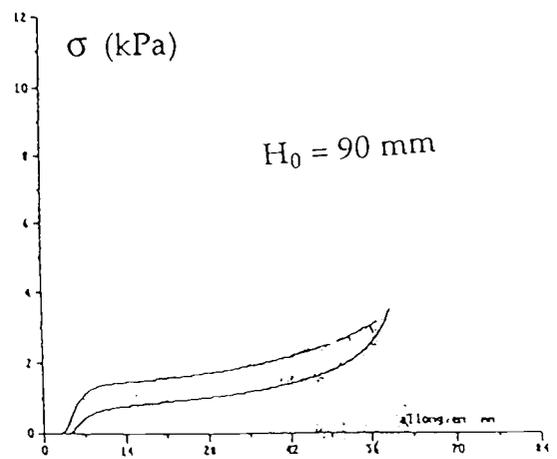
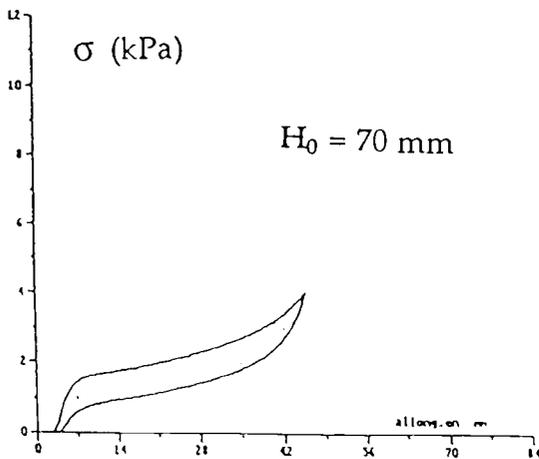
	Numéro	Procédé	Peau/Coeur (P/C)	Haut mm	Section mm <sup>2</sup>	Densité Kg/m <sup>3</sup>	PS/25 kPa	PS/50 kPa	PS/65 kPa	SAG
DF	1	HO	C	49.8	10000	28.80	1.75	2.51	3.84	2.20
DF	2	HO	C	50.3	10000	29.20	1.88	2.51	3.94	2.10
DF	3	HO	C	50.6	10000	28.60	1.66	2.26	3.49	2.10
DF	4	HO	C	49.4	10000	28.80	1.67	2.31	3.54	2.10
DF	5	HO	C	51.3	10000	27.60	1.56	2.12	3.18	2.00
DF	Moyenne			50.28	10000	28.60	1.70	2.34	3.60	2.10
DF	Ecart type					0.36	0.01	0.03	0.09	0.01
DF	1	HO	P	51.6	10000	30.10	1.87	2.85	4.39	2.30
DF	2	HO	P	51.2	10000	29.60	1.81	2.69	4.18	2.30
DF	3	HO	P	50.7	10000	32.80	2.23	3.38	5.35	2.40
DF	4	HO	P	50.9	10000	31.50	1.99	3.01	4.60	2.30
DF	5	HO	P	51.1	10000	30.10	1.78	2.75	4.22	2.40
DF	Moyenne			51.1	10000	30.82	1.94	2.94	4.55	2.34
DF	Ecart type					1.73	0.03	0.08	0.23	0.00
DF	Ecart peau - coeur					2.22	0.23	0.60	0.95	0.24
DF	Relatif (/peau)					7.2%	12.0%	20.3%	20.9%	10.3%
DM	1	HO	C	51.4	10000	33.00	3.31	4.86	7.84	2.40
DM	2	HO	C	50.5	10000	33.00	3.43	5.00	8.01	2.30
DM	3	HO	C	49.9	10000	34.20	3.78	5.61	9.14	2.40
DM	4	HO	C	50	10000	32.30	3.56	5.12	8.09	2.30
DM	5	HO	C	50.3	10000	34.00	3.88	5.53	8.89	2.30
DM	Moyenne			50.42	10000	33.30	3.59	5.22	8.39	2.34
DM	Ecart type					0.62	0.06	0.11	0.34	0.00
DM	1	HO	P	50.8	8000	41.20	4.17	6.80	12.27	2.90
DM	2	HO	P	49.6	10000	41.50	3.83	6.30	11.38	3.00
DM	3	HO	P	49.7	10000	43.00	4.03	6.70	12.10	3.00
DM	4	HO	P	49.8	10000	42.70	4.30	6.86	12.16	2.80
DM	5	HO	P	49.8	10000	40.70	3.89	6.37	11.25	2.90
DM	Moyenne			49.94	9600	41.82	4.04	6.60	11.83	2.92
DM	Ecart type					0.98	0.04	0.06	0.23	0.01
DM	Ecart peau - coeur					8.52	0.45	1.38	3.44	0.58
DM	Relatif (/peau)					20.4%	11.1%	20.9%	29.1%	19.9%
DE	1	HO	C	49.5	10000	36.40	5.87	8.10	12.63	2.20
DE	2	HO	C	50.3	10000	38.60	6.06	8.38	13.14	2.20
DE	3	HO	C	49.9	10000	38.40	5.97	8.18	12.93	2.20
DE	4	HO	C	50	10000	40.00	6.42	8.83	14.19	2.20
DE	5	HO	C	49.8	10000	37.70	5.51	7.80	12.40	2.20
DE	Moyenne			49.9	10000	38.22	5.97	8.26	13.06	2.20
DE	Ecart type					1.73	0.11	0.15	0.48	0.00
DE	1	HO	P	50.1	10000	43.00	6.78	9.97	16.21	2.40
DE	2	HO	P	49.9	10000	42.80	6.34	9.33	15.31	2.40
DE	3	HO	P	50.2	10000	41.60	6.33	9.24	15.06	2.40
DE	4	HO	P	50	10000	41.60	6.60	9.71	15.81	2.40
DE	5	HO	P	50.8	10000	42.60	6.69	9.94	16.22	2.40
DE	Moyenne			50.2	10000	42.32	6.55	9.64	15.72	2.40
DE	Ecart type					0.45	0.04	0.11	0.28	0.00
DE	Ecart peau - coeur					4.10	0.58	1.38	2.66	0.20
DE	Relatif (/peau)					9.7%	8.9%	14.3%	16.9%	8.3%

DE: Densité Elevée . DM: Densité Moyenne . DF: Densité Faible

. Récapitulatif des résultats de l'essai de compression  
sur différents échantillons "peau" et "coeur".

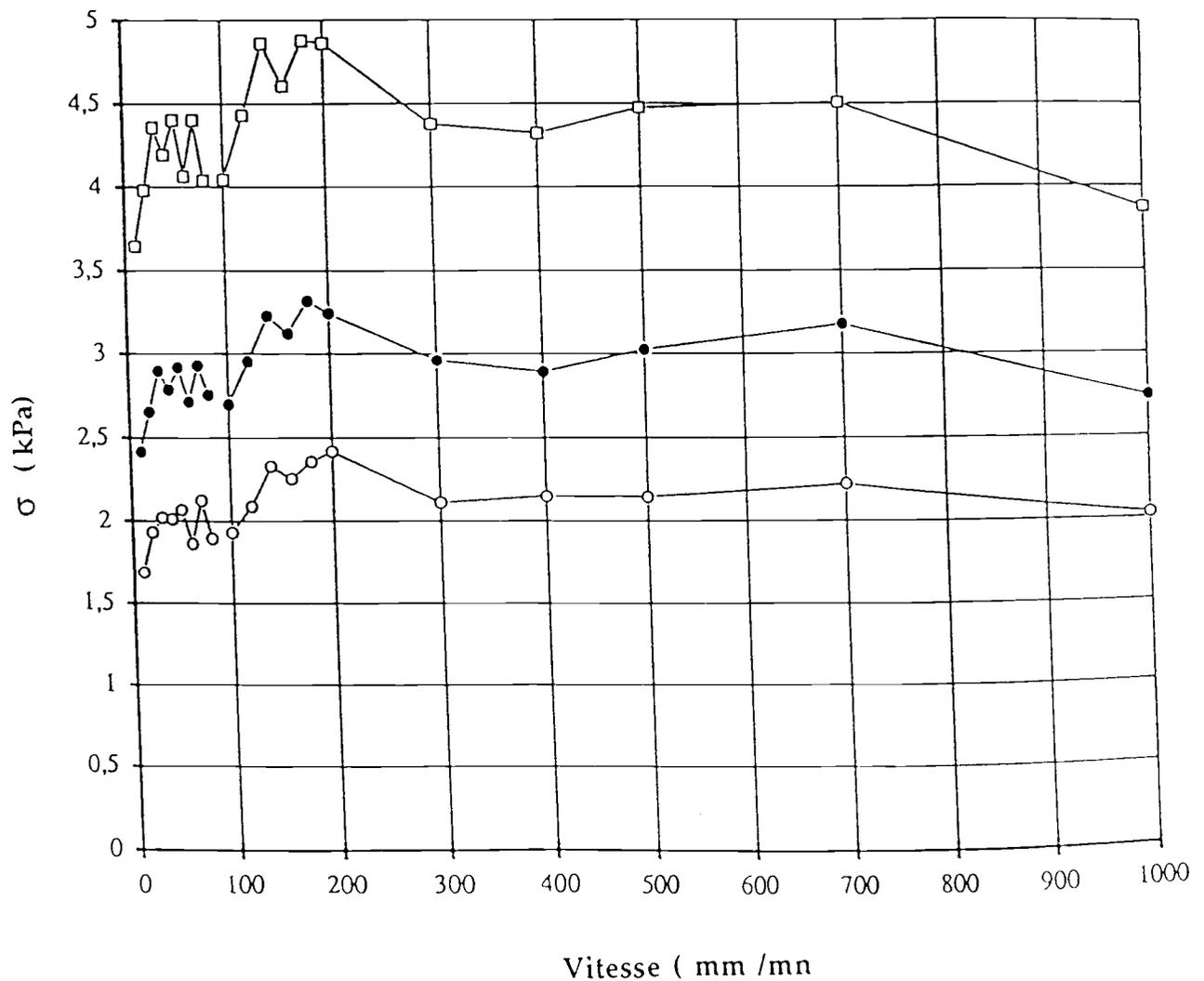


Hauteur ( mm )	P <sub>5/25</sub> kPa	P <sub>5/50</sub> kPa	P <sub>5/65</sub> kPa
30	1.94	2.78	4.12
50	1.86	2.79	4.01
70	1.88	2.74	4.08
90	1.64	2.37	3.56
Mousse Chaude		$\rho = 21$ kg/m <sup>3</sup>	



Vitesse	p25%	p50%	p65%
10	1,688	2,416	3,644
20	1,932	2,652	3,98
30	2,02	2,896	4,356
40	2,012	2,784	4,192
50	2,068	2,916	4,4
60	1,864	2,712	4,064
70	2,124	2,928	4,4
80	1,896	2,752	4,036
100	1,932	2,696	4,044
120	2,088	2,952	4,428
140	2,328	3,224	4,86
160	2,252	3,12	4,604
180	2,356	3,316	4,876
200	2,416	3,24	4,86
300	2,112	2,96	4,376
400	2,148	2,892	4,32
500	2,144	3,024	4,472
700	2,22	3,176	4,504
1000	2,032	2,74	3,872

Procédé HO  
Coeur  
21 kg/m<sup>3</sup>  
s=10000mm<sup>2</sup>  
h=49,8



PARAMETRES:  
 Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %  
 Précharge (h0/mm) : 1 N  
 Cycl.de stabilis. : 4  
 Course-cyc.stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc.stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc. mesure : 100 mm/min

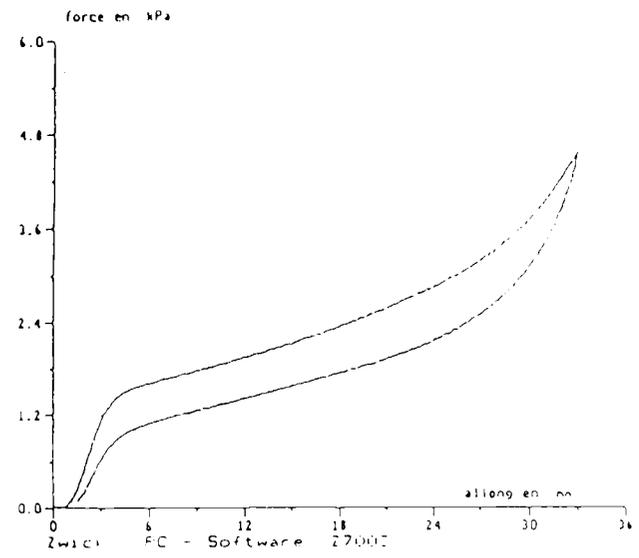
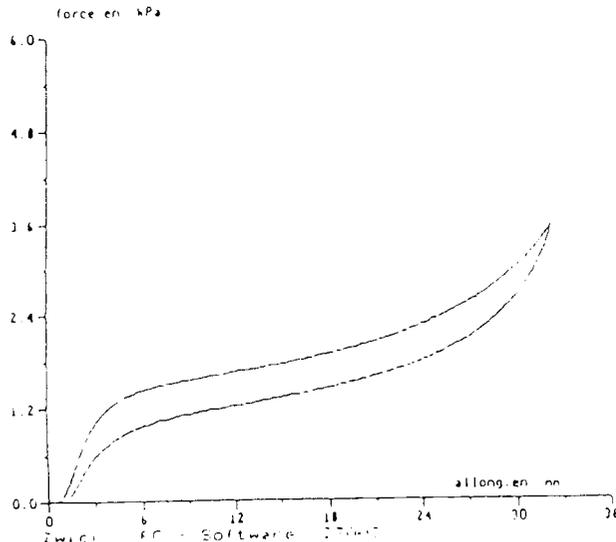
PARAMETRES:  
 Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %  
 Précharge (h0/mm) : 1 N  
 Cycl.de stabilis. : 4  
 Course-cyc.stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc.stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc. mesure : 100 mm/min

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	matériau	Proced	Pesu Coeur	Haut	Section	Densité	Port 251	Port 501	Port 651	Fact SAG
					mm	mm <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	MPa	MPa	MPa	
1	170.F	H0	Coeur	69.4	10000	28.8	1.628	2.308	3.540	2.1	

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	matériau	Proced	Pesu Coeur	Haut	Section	Densité	Port 251	Port 501	Port 651	Fact SAG
					mm	mm <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	MPa	MPa	MPa	
1	170.F	H0	Pezu	50.9	10000	11.5	1.988	1.008	1.600	2.3	

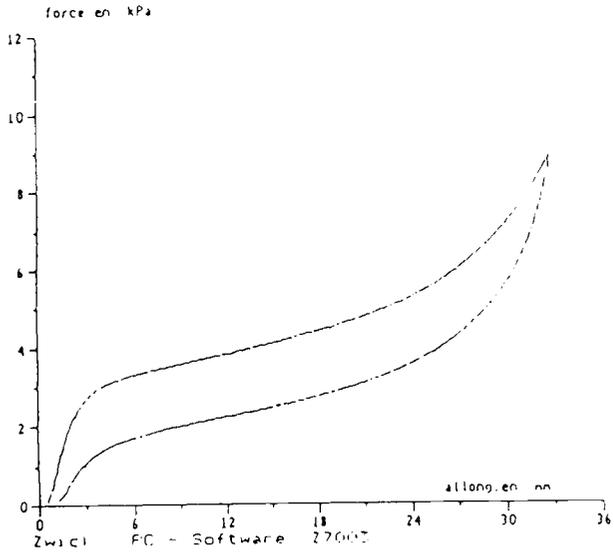


PARAMETRES:  
 Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %

Précharge (h0/mm) : 1 N  
 Cycl.de stabilis. : 4  
 Course-cyc.stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc.stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc.mesure : 100 mm/min

RESULTATS D'ESSAI:

n	Muebr	estelassure	Procedr	Peau	Coeur	Haut mm	Section mm <sup>2</sup>	Densite kg/m <sup>3</sup>	Port 251 kPa	Port 501 kPa	Port 651 kPa	Fact S46
5	170.N		H0		Coeur	50.2	8000	34.0	3.680	5.530	8.690	2.3



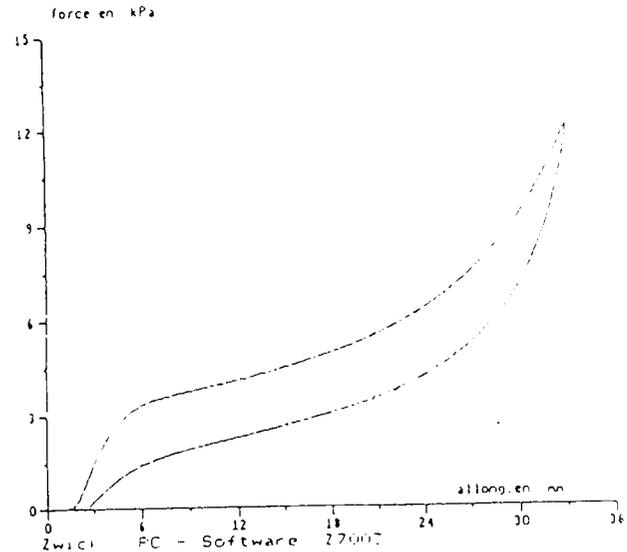
PARAMETRES:  
 Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %

Précharge (h0/mm) : 1 N  
 Cycl.de stabilis. : 4  
 Course-cyc.stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc.stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc.mesure : 100 mm/min

RESULTATS D'ESSAI:

n	Muebr	estelassure	Procedr	Peau	Coeur	Haut mm	Section mm <sup>2</sup>	Densite kg/m <sup>3</sup>	Port 251 kPa	Port 501 kPa	Port 651 kPa	Fact S46
11	170.N		H0		Peau	50.8	8000	34.0	4.165	6.800	12.270	2.4

*Précharge*  
*Précharge*



Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %

Précharge (h0=mm) : 1 N  
 Cycl.de stabilis. : 4  
 Course-cyc.stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc.stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc. mesure : 100 mm/min

Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %

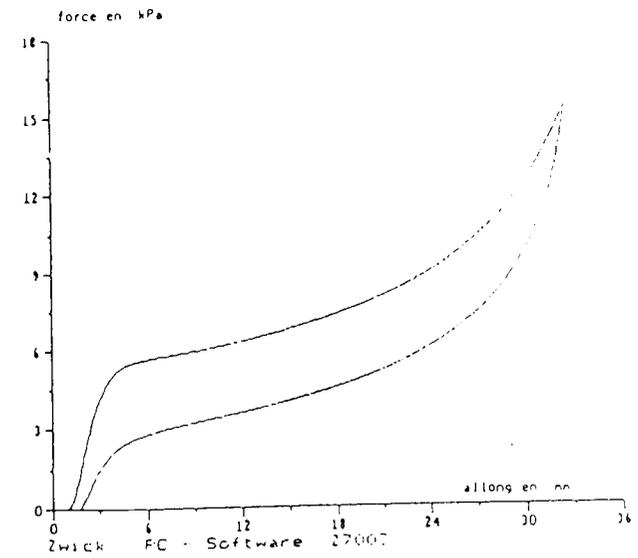
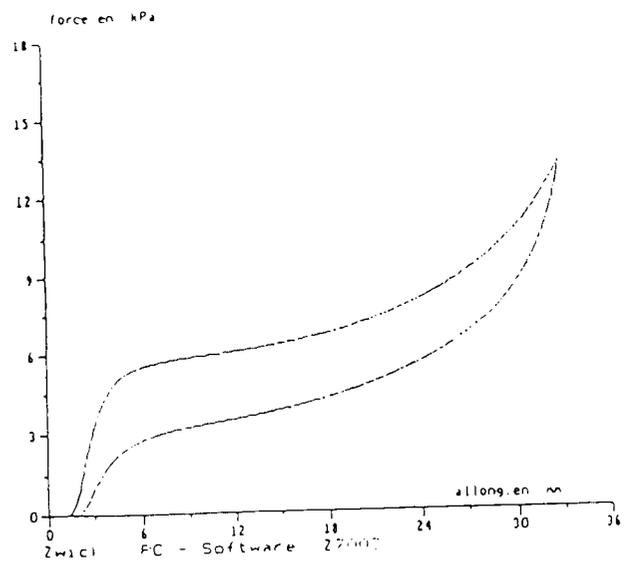
Précharge (h0=mm) : 1 N  
 Cycl.de stabilis. : 4  
 Course-cyc.stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc.stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc. mesure : 100 mm/min

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	Matériau	Proced	Prav	Conur	haut	Section	Densité	Port 201	Port 501	Port 601	Fact SAG
						mm	mm <sup>2</sup>	Kg3	MPa	MPa	MPa	
1	770 E	HD	Coax	50.3	10000	38.6	6.060	8.384	13.144	2.2		

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	Matériau	Proced	Prav	Conur	haut	Section	Densité	Port 201	Port 501	Port 601	Fact SAG
						mm	mm <sup>2</sup>	Kg3	MPa	MPa	MPa	
1	770 E	HD	Coax	50.3	10000	38.6	6.060	8.384	13.144	2.2		



PARAMETRES:  
 Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %  
 Précharge (N/mm) : 1 N  
 Cycl. de stabilis. : 4  
 Course-cycl. stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cycl. stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/min

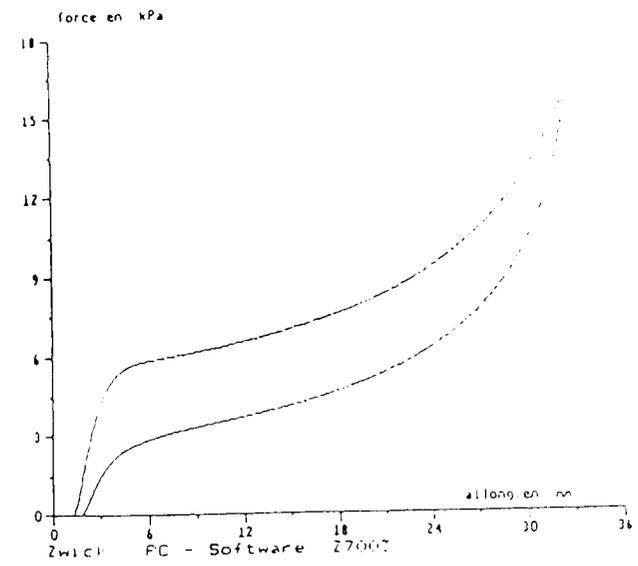
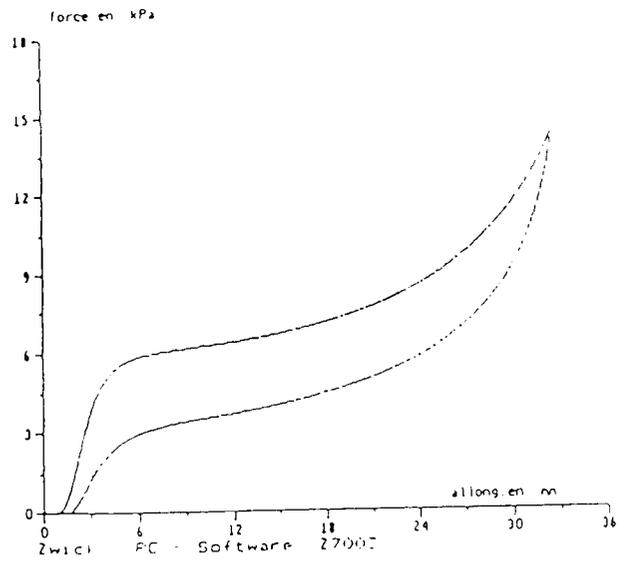
PARAMETRES:  
 Course 1: 25 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %  
 Précharge (N/mm) : 1 N  
 Cycl. de stabilis. : 4  
 Course-cycl. stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cycl. stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/min

RESULTATS D'ESSAI:

n	Muistro	extelassure	Procidr	Peau	Corur	haut aa	Section ap	Densité Ea	Port 201 kPa	Port 501 kPa	Port 101 kPa	Fact SAG
1	1/0.E		H0	Coavr	50.0	10000	10.0	6.416	6.632	14.197		2.2

RESULTATS D'ESSAI:

n	Muistro	extelassure	Procidr	Peau	Corur	haut aa	Section ap	Densité Ea	Port 201 kPa	Port 501 kPa	Port 101 kPa	Fact SAG
1	1/0.E		H0	Peau	50.0	10000	11.6	6.604	6.717	17.808		2.4



Course 1: 20 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %

Déplacement (mm) : 1  
 Cycle de stabilis. : 4  
 Course-cyc. stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc. stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc. mesure : 100 mm/min

Course 1: 20 %  
 Course 2: 50 %  
 Course 3: 65 %

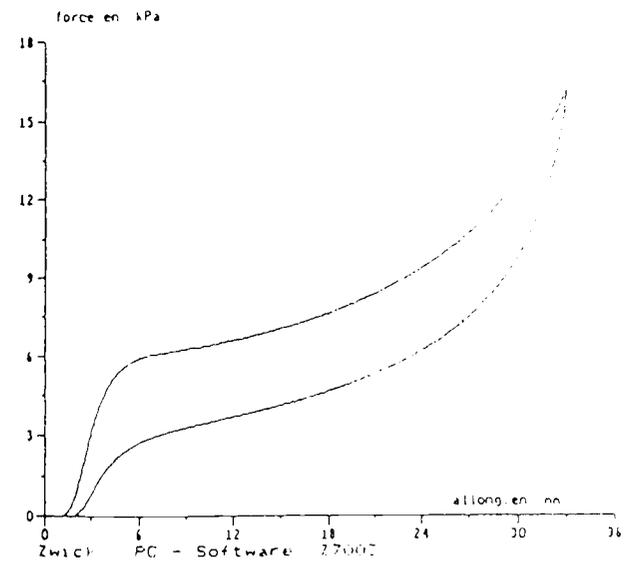
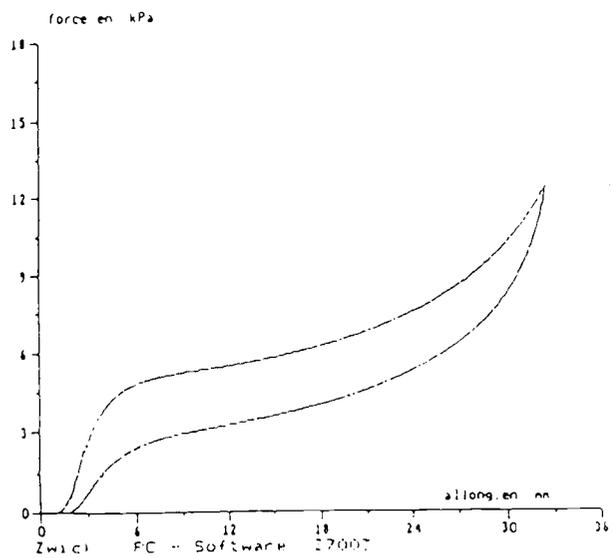
Déplacement (mm) : 1  
 Cycle de stabilis. : 4  
 Course-cyc. stabilis. : 75 %  
 Vitesse-cyc. stabilis. : 100 mm/min  
 Vitesse-cyc. mesure : 100 mm/min

RESULTATS D'ESSAI:

n	Matériau	Matérialisation	Procedi	Prav	Coeur	Haut mm	Section mm <sup>2</sup>	Densité kg/m <sup>3</sup>	Port 221 kPa	Port 501 kPa	Port 451 kPa	Fact SA6
2/0.1	H0	Corur		19.8	10000	32.7	5.512	7.800	12.460			2.2

RESULTATS D'ESSAI:

n	Matériau	Matérialisation	Procedi	Prav	Coeur	Haut mm	Section mm <sup>2</sup>	Densité kg/m <sup>3</sup>	Port 221 kPa	Port 501 kPa	Port 451 kPa	Fact SA6
2/0.1	H0	Prav		10.8	10000	42.6	5.607	9.936	16.224			2.4



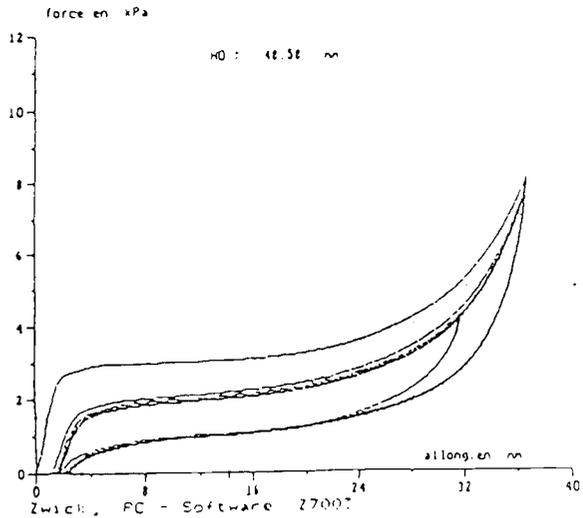
Date : 27.03.1991

Etude : caract. mousse pu  
 Méthode d'essai : 1003  
 Poché de mousse : H0  
 Observations : 27.03.91  
 N° éprouvette : 20/B  
 Dimension éprouvette : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
 Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	Peau Coeur	Densité K/m <sup>3</sup>	Port 25% kPa	Port 50% kPa	Port 65% kPa	Fact SAG
14	20/B	Coeur	17.5	1.920	2.508	4.096	2.1



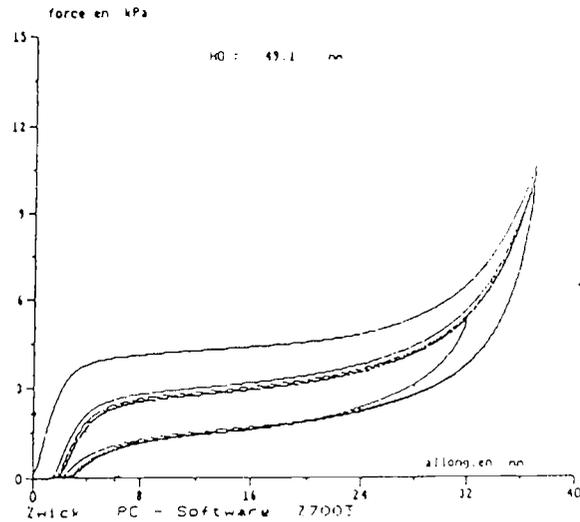
Date : 27.03.1991

Etude : caract. mousse pu  
 Méthode d'essai : 1003  
 Poché de mousse : H0  
 Observations : 27.03.91  
 N° éprouvette : 23/3  
 Dimension éprouvette : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
 Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	Peau Coeur	Densité K/m <sup>3</sup>	Port 25% kPa	Port 50% kPa	Port 65% kPa	Fact SAG
12	23/3	Coeur	20.5	2.704	3.556	5.284	2.0



Bertrand FAURE Laboratoire d'essais

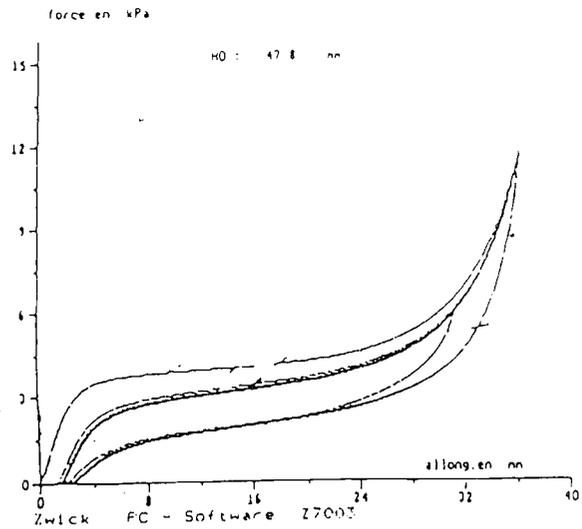
Date : 28.03.1991

Etude : caract. mousse pu  
 Méthode d'essai : 1003  
 Procédé Mousse : HD  
 Observations : 28.03.91  
 N° éprouvette : 26/3  
 Dimension epr : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
 Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	Peau	Coeur	Densité Km3	Fort 25% kPa	Fort 50% kPa	Fort 65% kPa	Fact SAG	
4	26/3	fil	pol	Coeur	25.0	2.488	3.920	5.900	2.0



Bertrand FAURE Laboratoire d'essais

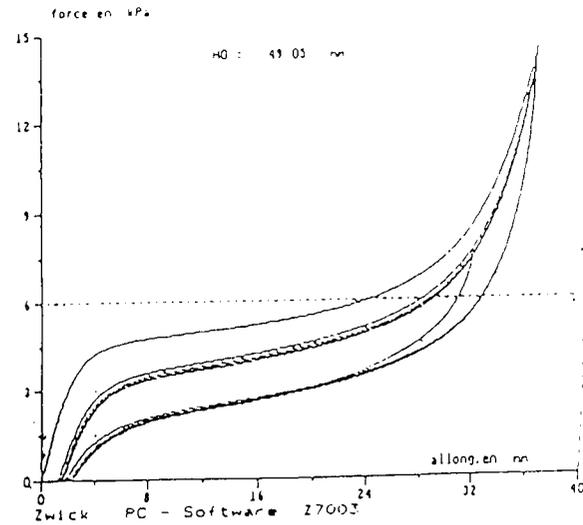
Date : 27.03.1991

Etude : caract. mousse pu  
 Méthode d'essai : 1003  
 Procédé Mousse : HD  
 Observations : 27.03.91  
 N° éprouvette : 30 E  
 Dimension epr : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
 Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numero	Peau	Coeur	Densité Km3	Fort 25% kPa	Fort 50% kPa	Fort 65% kPa	Fact SAG	
11	30 E			Coeur	20.5	2.688	4.940	7.332	2.0



Bertrand FAURE Laboratoire d'essais

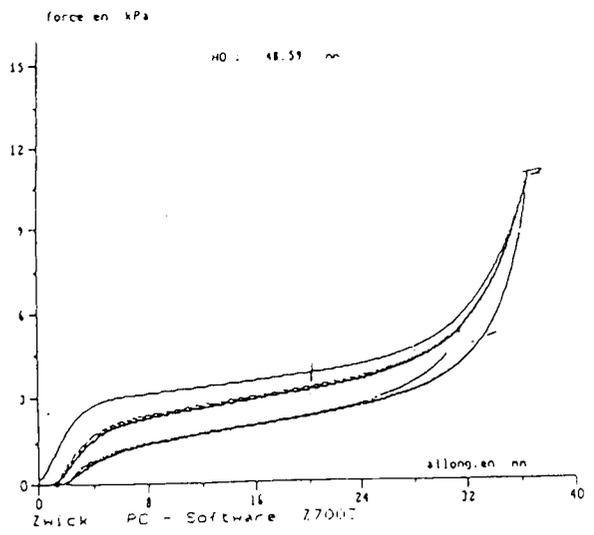
Date : 28.03.1991

Etude : caracter mousse pu  
Méthode d'essai : 1003  
Procédè Mousse : HO  
Observations : 28.03.91  
N° éprouvette : 30/A ext  
Dimension epr : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numéro	Peau Coeur	Densité kg/m <sup>3</sup>	Fort 25% kPa	Fort 50% kPa	Fort 65% kPa	Fact SAG
3	30/A ext	Coeur	29.1	2.504	3.564	5.252	2.1



Bertrand FAURE Laboratoire d'essais

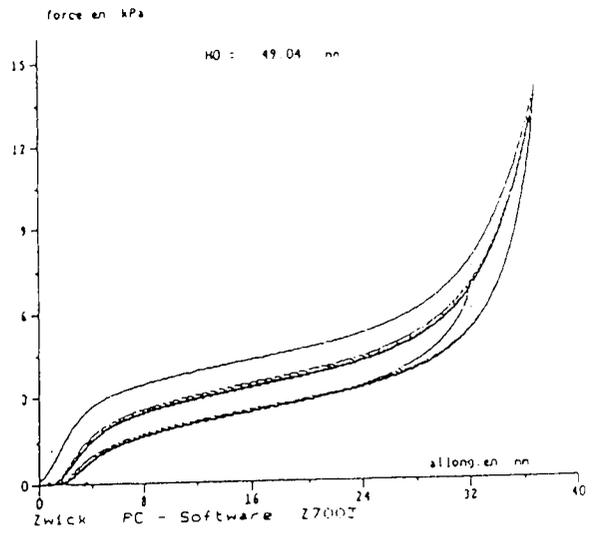
Date : 28.03.1991

Etude : caracter mousse pu  
Méthode d'essai : 1003  
Procédè Mousse : HO  
Observations : 28.03.91  
N° éprouvette : 40/4  
Dimension epr : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numéro	Peau Coeur	Densité kg/m <sup>3</sup>	Fort 25% kPa	Fort 50% kPa	Fort 65% kPa	Fact SAG
1	40/4	Coeur	36.0	2.916	4.240	6.644	2.3



Bertrand FAURE Laboratoire d'essais

Date : 28.03.1991

Etude : caracter mousse pu  
 Methode d'essai : 1007  
 Procédé Mousse : H0  
 Observations : 28.03.91  
 N° éprouvette : 69  
 Dimension épr : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
 Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numéro	Peau	Coeur	Densité Km3	Fort 25% kPa	Fort 50% kPa	Fort 65% kPa	Fact SA
5	50	Coeur		57.0	4.484	6.792	10.544	2.3

Bertrand FAURE Laboratoire d'essais

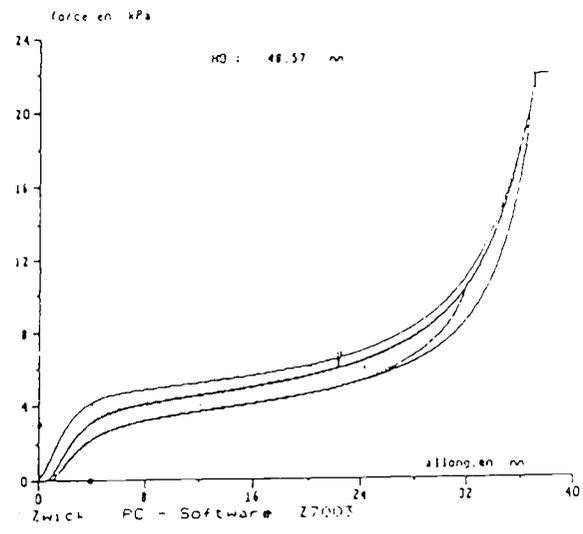
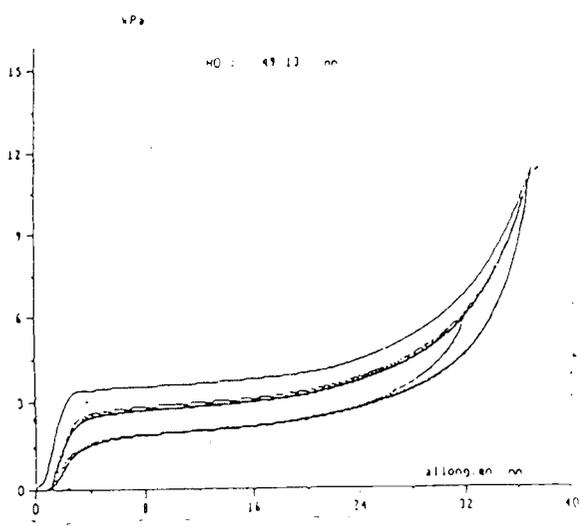
Date : 28.03.1991

Etude : caracter mousse pu  
 Methode d'essai : 1007  
 Procédé Mousse : H0  
 Observations : 28.03.91  
 N° éprouvette : 40/AE X  
 Dimension épr : 100x100x50mm

PARAMETRES:  
 Vitesse-cycl. stabilisation: 100 mm/m  
 Vitesse-cycl. mesure : 100 mm/m

RESULTATS D'ESSAI:

n	Numéro	Peau	Coeur	Densité Km3	Fort 25% kPa	Fort 50% kPa	Fort 65% kPa	Fact SAG
2	40/AE X	Coeur		59.5	2.792	3.720	5.848	2.1



dernière page de la thèse

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr L. JEZEQUEL Professeur - Mécanique des Solides - ECOLE CENTRALE DE LYON,

et les rapports de

Mr G. LALLEMENT Professeur - Université de Franche Comté - 25030 BESANCON Cedex,

Mr D. LE HOUEDDEC Professeur - ECOLE CENTRALE DE NANTES - 1, rue Noë - 44000 NANTES,

Monsieur **OULDEYIH Aghdhefna**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention  
du titre de **DOCTEUR**

Spécialité : **MECANIQUE**

Fait à Ecully, le 15 octobre 1993

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur  
de l'Administration de la  
Recherche



F. LEBOEUF



## Résumé

L'étude du confort d'un passager nécessite la modélisation du siège. Sa structure est très complexe et se compose de divers éléments et différents matériaux: ressorts, câbles, poutres, mousse polyuréthane, toiles, ...

La modélisation du comportement des mousses est nécessaire pour la construction du modèle global du siège: ce problème est ramené à l'identification d'une fonction densité d'énergie de déformation,  $W$ .

Trois approches sont examinées pour donner une expression analytique de la fonction  $W$ :

- Approche micromécanique: à partir d'hypothèses sur la microstructure du matériau, sur l'élasticité de ses constituants et sur une loi statistique de répartition des molécules, on cherche une explication physique des phénomènes observés.
- Approche minimécanique: basée sur la notion de volume représentatif, permet d'exprimer les paramètres de la fonction  $W$  à partir des caractéristiques de l'élément de base: type de cellule, morphologie, densité, propriétés mécaniques du matériau.
- Approche macromécanique: on cherche à identifier une forme donnée - à priori - de la fonction  $W$  à partir des réponses du matériau à un certain nombre de sollicitations homogènes sans se préoccuper d'une quelconque explication physique des paramètres.

Une étude complète sur les matériaux hyperélastiques nous a permis d'identifier la mousse polyuréthane comme un matériau purement compressible de HILL. La comparaison des résultats numériques du modèle global et des essais expérimentaux pour le point H avec un mannequin 95% est très satisfaisante.

La contribution de l'air dans la rigidité dynamique de la mousse a été analysée. Un modèle rhéologique à 1 d.d.l. est identifié pour le comportement de la mousse, autour d'une position d'équilibre statique, d'un échantillon de mousse.

