

N° d'Ordre : 92-44

T1574  
double

Année 1992

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : Mécanique

par M. Ahmed NACIRI

---

Contribution à l'étude des forces exercées par un liquide sur une bulle de gaz :  
portance, masse ajoutée et interactions hydrodynamiques.

---

Soutenue le 24 juillet 1992 devant la Commission d'Examen

Jury :                    MM. J. BATAILLE    ( Rapporteur )  
                              J. FABRE            ( Rapporteur )  
                              J.L. ACHARD  
                              M. LANCE  
                              J. MAGNAUDET



THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : Mécanique

par M. Ahmed NACIRI

---

Contribution à l'étude des forces exercées par un liquide sur une bulle de gaz :  
portance, masse ajoutée et interactions hydrodynamiques.

---

Soutenue le 24 juillet 1992 devant la Commission d'Examen

Jury :                   MM. J. BATAILLE   ( Rapporteur )  
                              J. FABRE           ( Rapporteur )  
                              J.L. ACHARD  
                              M. LANCE  
                              J. MAGNAUDET

ECOLE CENTRALE DE LYON

Directeur : J. BORDET  
Directeur Adjoint : E. PASCAUD  
Directeur des Etudes : F. SIDOROFF

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 Juillet 1984,  
modifié par l'Arrêté du 21 Mars 1988)

Mathématiques-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur
M. MARION (Mlle)	Professeur
J.F. MAITRE	Professeur
J. ROZINOER	Maître de Conférences
G. THOMAS	Maître de Conférences
F. MUSY	Maître de Conférences

Physico-Chimie des Interfaces

P. CLECHET	Professeur
J. JOSEPH	Professeur
J.R. MARTIN	Professeur
L. PORTE	Professeur
G. ESCHALIER	Maître de Conférences
A. GAGNAIRE	Maître de Conférences
C. MARTELET	Maître de Conférences
R. OLIER	Maître de Conférences
Y. ROBACH	Maître de Conférences
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERRMANN	Directeur de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC (Mme)	Directeur de Recherche au CNRS

Matériaux : Mécanique Physique

P. GUIRALDENQ	Professeur
D. TREHEUX	Professeur
B. VANNES	Professeur
L. VINCENT	Professeur
J. BLANC-BENON	Professeur - Lyon I
J. BRUGIRARD	Professeur - Lyon I
B. COQUILLET	Maître de Conférences
D. NGUYEN	Maître de Conférences
S. FAYEULLE	Chargé de Recherche au CNRS
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etudes

Electronique

R. BLANCHET	Professeur
M. LE HELLEY	Professeur
Y. HELLOUIN	Maître de Conférences
P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
G. HOLLINGER	Directeur de Recherche au CNRS
M. GENDRY	Chargé de Recherche au CNRS
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
J. TARDY	Chargé de Recherche au CNRS

## Electrotechnique

P. AURIOL	Professeur
A. NICOLAS	Professeur
G. ROJAT	Maître de Conférences

## Mécanique des Solides

B. CAMBOU	Professeur
F. SIDOROFF	Professeur
L. JEZEQUEL	Professeur
A. DOGUI	Maître de Conférences
C. SURRY	Professeur - E.N.I.S.E.

## Technologie des Surfaces

J.M. GEORGES	Professeur
J. SABOT	Professeur
J.M. MARTIN	Professeur
N. ALBEROLA (Mme)	Maître de Conférences
H. MONTES	Maître de Conférences
T. MATHIA	Directeur de Recherche au CNRS
P. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
J.L. LOUBET	Chargé de Recherche au CNRS

## Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur
E. ALCARAZ	Professeur
D. JEANDEL	Professeur
F. LEBOEUF	Professeur
J. BATAILLE	Professeur
B. GAY	Professeur - Lyon I
J. GENGE	Professeur - Lyon I
M. LANCE	Professeur - Lyon I
R. MOREL	Professeur - Lyon I
C. CAMBON	Professeur - INSA
J.P. BERTOGLIO	Chargé de Recherche au CNRS
P. FERRAND	Chargé de Recherche au CNRS
D. HENRY	Chargé de Recherche au CNRS

## Acoustique

G. COMTE-BELLOT (Mlle)	Professeur
D. JUVE	Professeur
M. SUNYACH	Professeur - Lyon I (IUT)
M. ROGER	Maître de Conférences
P. BLANC-BENON	Chargé de Recherche au CNRS

## Machines Thermiques

M. BRUN	Professeur
P. ARQUES	Professeur
J.C. CHAMPOUSSIN	Professeur - Lyon I

---

## Résumé

La modélisation des écoulements diphasiques à bulles se heurte à un certain nombre de difficultés liées essentiellement à la méconnaissance des mécanismes physiques à l'échelle de la bulle, en particulier la force exercée par un liquide en mouvement non uniforme sur la bulle et les effets d'interaction hydrodynamique entre bulles. De ce fait, nous nous sommes intéressés dans ce travail à trois mécanismes de base :

- La quantification de la force de portance, soit expérimentalement dans le cas d'une bulle placée dans un écoulement en rotation; ceci nous a permis d'évaluer le coefficient de portance et de montrer que sa valeur est comprise entre celle obtenue pour un fluide parfait et celle déduite des simulations numériques pour une sphère solide ; soit théoriquement pour un corps axisymétrique placé dans un écoulement faiblement cisailé de fluide parfait où on a montré l'égalité entre le coefficient de portance et celui de masse ajoutée.

- La détermination expérimentale de la quantité de fluide déplacé par une bulle isolée et la comparaison de ce phénomène à celui de masse ajoutée. Il s'est avéré dans cette étude que lorsque l'interface de la bulle demeure approximativement sphérique on a l'égalité entre ces deux quantités.

- L'évaluation de la force mutuelle d'interaction entre deux bulles de même diamètre montant dans un liquide au repos. Les résultats sont comparés à la théorie de fluide parfait où on montre que celle-ci décrit correctement l'interaction lorsque la répartition du champ de pression constitue l'effet dominant. Ceci tombe en défaut lorsque les effets du sillage sont ressentis par l'une des deux bulles.

L'utilisation du résultat concernant la force de portance dans un code de calcul développé au Laboratoire montre que la démarche suivie dans le cadre de ce travail peut aider à l'amélioration des lois de fermeture utilisées dans les modélisations des écoulements à bulles.

---

---

## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE I : FORCE EXERCEE PAR UN ECOULEMENT SUR UNE SPHERE ISOLEE .....	4
I-1- Cas des Reynolds très petits .....	4
I-2- Cas des Reynolds très grands .....	5
CHAPITRE II : COEFFICIENT DE PORTANCE - ETUDE EXPERIMENTALE .....	9
II-1- Dispositif expérimental .....	11
II-2- Résultats .....	13
II-3- Comparaison avec le modèle de fluide parfait de Auton et alii .....	20
II-4- Comparaison avec les résultats de Dandy et Dwyer .....	24
CHAPITRE III : COEFFICIENT DE MASSE AJOUTEE - ETUDE EXPERIMENTALE .....	27
III-1- Théorie de fluide parfait .....	28
III-2- Dispositif expérimental .....	32
III-3- Principe de la mesure .....	34
III-4- Résultats expérimentaux .....	36
CHAPITRE IV : COEFFICIENT DE PORTANCE - ETUDE THEORIQUE .....	41
IV-1- Position du problème .....	42
IV-2- Cas d'un ellipsoïde aplati .....	45
IV-2-a- Cas d'un cisaillement faible .....	45
IV-2-b- Fonction "de dérive" .....	47
IV-2-c- Détermination de $\phi_1$ .....	48
IV-2-d- Conditions aux limites .....	49
IV-3- Calcul du coefficient de portance .....	52
IV-4- Calcul analytique du coefficient de portance .....	55
IV-4-a- Expression de la force .....	55
IV-4-b- Cas d'une perturbation en cisaillement linéaire à l'infini amont .....	57
IV-4-c- Cas d'une perturbation en tangente hyperbolique à l'infini amont .....	58

---

---

CHAPITRE V : INTERACTION HYDRODYNAMIQUE ENTRE DEUX BULLES	60
V-1- Dispositif expérimental	61
V-2- Résultats expérimentaux	66
CONCLUSION GENERALE	76
ANNEXES	78
Annexe I- Analyse dimensionnelle	78
Annexe II- Calcul de la force de portance	80
Annexe III- Force d'interaction, théorie de fluide parfait	85
BIBLIOGRAPHIE	90

---

# INTRODUCTION

Les écoulements diphasiques à bulles se rencontrent dans de nombreuses applications industrielles : Génie Chimique, Nucléaire, Energétique... Il est donc naturel que la modélisation de tels écoulements soit devenue une nécessité pour prédire le comportement des unités industrielles fonctionnant en régime à bulles.

Le développement récent des moyens informatiques a permis de mettre en oeuvre des modélisations numériques, fondées soit sur une description lagrangienne de la phase dispersée, soit sur une description eulérienne à deux fluides. Il s'avère que, malgré des succès indéniables, ces approches se heurtent à un certain nombre de difficultés, liées essentiellement à la méconnaissance des mécanismes physiques à l'échelle de la bulle. Parmi ceux-ci, on peut citer en particulier la force exercée par un liquide en mouvement non uniforme sur l'interface, et les effets d'interactions hydrodynamiques entre bulles, connus seulement pour les cas asymptotiques des nombres de Reynolds tendant vers zéro où l'infini.

Il est clair que la prédiction du comportement d'une population de bulles passe nécessairement par l'étude de la dynamique d'une ou d'un petit nombre de bulles dans un liquide réel. L'objectif du présent travail s'inscrit précisément dans ce cadre. Nous nous sommes intéressés essentiellement à trois mécanismes de base induisant des effets importants sur l'évolution d'un écoulement à bulles.

- Le premier concerne la force transversale de portance subie par une bulle isolée dans un champ de vitesse rotationnel. Un tel effet a souvent été invoqué pour expliquer la distribution non uniforme de taux de vide dans les écoulements à bulles en conduite.

- Le deuxième problème abordé est celui de la masse ajoutée. Cette notion, définie rigoureusement dans le cas d'un fluide parfait ou du mouvement accéléré d'un corps en écoulement de Stokes, joue un rôle très important, non seulement dans le calcul des forces liées à l'instationnarité, mais également dans l'évaluation de la densité de quantité de mouvement et d'énergie du liquide. Des simulations numériques récentes (Rivero 1991) montrent que la force de masse ajoutée calculée en fluide parfait s'applique encore, au moins pour un corps sphérique pour des nombres de Reynolds finis. Nous avons tenté ici d'explorer un autre aspect de la masse ajoutée, à savoir le lien entre cette grandeur et la masse de fluide déplacé par une bulle de gaz dans un fluide réel.

- La dernière question étudiée dans ce travail porte sur l'évaluation de la force mutuelle d'interaction entre deux bulles montant dans un liquide au repos. Les seules tentatives proposées pour prendre cet effet en compte reposent, une fois encore, sur la théorie de fluide parfait. Il apparaît donc utile de tester la validité de cette approximation lorsque les effets de viscosité et de contamination de l'interface, inévitables dans les situations pratiques, ne sont plus négligeables.

La démarche adoptée dans cette étude repose sur des expériences effectuées dans des configurations aussi simples que possible. Après une brève présentation bibliographique des informations disponibles sur les forces subies par une bulle dans un écoulement de liquide non uniforme (chapitre I), nous présentons dans le chapitre II une première expérience portant sur le comportement d'une bulle d'air injectée dans un cylindre horizontal en rotation autour de son axe. On observe que la bulle atteint une position d'équilibre stable, quel que soit le nombre de Reynolds compris entre 10 et 2600. Ceci permet d'évaluer le coefficient de portance, à partir de l'hypothèse communément admise de la décomposition de la force subie par la bulle en contributions complètement découplées. Il s'avère que la valeur expérimentale de ce coefficient est comprise entre la valeur théorique obtenue pour un fluide parfait et celle déduite des simulations numériques pour une sphère solide.

Dans le chapitre III nous déterminons expérimentalement le volume de fluide entraîné par une bulle isolée se mouvant à travers l'interface séparant deux liquides au repos de densité voisine. La mesure de ce volume, par une méthode d'absorption d'un faisceau laser, est comparée à la masse ajoutée, qui selon les travaux de Darwin (1953) est égale en fluide parfait à la masse du fluide déplacé, pour des nombres de Reynolds relatifs à la bulle allant de 600 à 1300.

Le chapitre IV est consacré à la relation entre le coefficient de portance et le coefficient de masse ajoutée. La théorie développée par Auton (1983) pour une sphère placée dans un fluide parfait faiblement cisailé montre l'égalité de ces grandeurs. Bien que ce résultat n'est plus valable en fluide visqueux, il est intéressant d'explorer cette relation pour des géométries non sphériques dans le cas des nombres de Reynolds infinis. Partant des équations linéarisées pour un faible cisaillement, nous montrons dans cette partie, par intégration numérique du problème et par une analyse en champ lointain, que le résultat d'Auton est valable pour tout corps axisymétrique.

Le chapitre V présente une série d'expériences concernant l'interaction entre deux bulles de même diamètre (5 mm) dans un liquide au repos. L'analyse des trajectoires permet de montrer que la force mutuelle d'interaction déduite par Bieusheuvel et Van Wijngaarden (1982) pour un fluide parfait reste valable lorsque les interactions avec le sillage restent faibles, mais tombe rapidement en défaut lorsque celles-ci deviennent importantes.

## CHAPITRE I

# FORCE EXERCEE PAR UN ECOULEMENT SUR UNE SPHERE ISOLEE

Dans ce chapitre, nous allons faire un bref rappel concernant les différents modèles analytiques proposés dans la littérature pour décrire les forces exercées sur une particule sphérique dans les deux cas asymptotiques : Reynolds très petits et Reynolds très grands.

### I-1- Cas des Reynolds très petits

#### I-1-a- Mouvement d'une inclusion sphérique dans un écoulement au repos

Le premier résultat connu pour une sphère solide animée d'une vitesse de translation uniforme  $\vec{u}$  dans un liquide au repos à petit nombre de Reynolds est celui obtenu par Stokes (1851). Il s'agit de la force de traînée :

$$\vec{F} = -6 \cdot \pi \cdot a \cdot \mu \cdot \vec{u} \quad (\text{I.1})$$

où  $a$  est le rayon de la sphère,

$\mu$  la viscosité dynamique du fluide.

Dans le cas où la sphère est en mouvement uniforme accéléré, il apparaît une force résistante due au fait que pour accélérer une particule, il est nécessaire d'accélérer une portion du fluide avoisinant. Le calcul de la force totale subie par la sphère est donné par (Landau et Lifchitz) :

$$\vec{F} = -6 \cdot \pi \cdot a \cdot \mu \cdot \vec{u} - \rho \cdot V \cdot C_{VM} \frac{d\vec{u}}{dt} - 6 \cdot \rho \cdot a^2 \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{u}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (\text{I.2})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide,

$V$  le volume de la sphère.

Le premier terme correspond à la traînée stationnaire décrite ci-dessus. Les deux autres termes traduisent le caractère instationnaire du mouvement ; ils représentent la force de masse ajoutée et la force de Basset ou terme d'histoire, qui traduit l'effet de retard provoqué par la diffusion visqueuse de la quantité de mouvement à travers la couche limite près de la surface du corps.

#### I-1-b- Mouvement d'une inclusion sphérique dans un écoulement quelconque

Lorsque l'écoulement est non uniforme et de champ de vitesse  $\vec{v}$ , la force exercée sur la sphère est modifiée. Plusieurs auteurs ont introduit des corrections de l'expression ci-dessus en tenant compte de la non uniformité du champ de vitesse : Faxen (1924), Tchen

(1947), Corrsin et Lumley (1956). On se limite à donner ici l'expression proposée par Maxey et Riley (1982) et Gatignol (1982) :

$$F_i = \rho V \frac{Dv_i}{Dt} \Big|_0 - \frac{1}{2} \rho V \frac{d}{dt} \left( u_i - v_i \Big|_0 - \frac{a^2}{10} \nabla^2 v_i \Big|_0 \right) - 6\pi\mu a \left( u_i - v_i \Big|_0 - \frac{a^2}{6} \nabla^2 v_i \Big|_0 \right) - \frac{3}{2} \pi\mu \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} \left( u_i - v_i \Big|_0 - \frac{a^2}{6} \nabla^2 v_i \Big|_0 \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} \quad (I.3)$$

où l'indice 0 signifie que la quantité doit être prise à la position occupée par le centre de la particule,

$v$  représente la viscosité cinématique du fluide,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad ; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$$

On constate que l'introduction de gradients de vitesse modifie les termes usuels de masse ajoutée, de traînée visqueuse, ainsi que l'expression de la force de Basset.

Le cas particulier de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère qui se déplace dans un domaine de fluide limité par des parois a donné lieu à beaucoup de travaux : Saffman (1965) ; Goldman et alii (1967) ; O'Neil (1968) ; Goren (1970) ; Feuillebois (1980).

Saffman (1965) considère le cas d'une sphère placée dans un fluide cisailé en l'absence des effets de paroi. Il déduit la force de portance sous la forme :

$$F_L = 4.46 \cdot \mu \cdot a^2 \cdot u_r \cdot \sqrt{\frac{K}{\nu}} \quad (I.4)$$

où  $K$  est l'intensité du cisaillement

$u_r$  la vitesse relative de la sphère par rapport à l'écoulement.

## I-2- Cas des Reynolds très grands

Certaines études récentes ont conduit à une meilleure formulation des forces exercées sur une inclusion sphérique isolée dans le cas d'écoulements irrotationnels et non uniformes de fluide parfait. Elles ont en particulier permis de clarifier une mauvaise compréhension de la forme de la force de la masse ajoutée et de généraliser le résultat classique de la force d'inertie  $\vec{F}_I$  exercée sur une sphère se déplaçant avec une vitesse  $\vec{u}$  dans un écoulement stationnaire et uniforme  $\vec{v}$  d'un fluide non visqueux (Landau et Lifchitz) :

$$\vec{F}_I = \rho V \frac{d\vec{v}}{dt} - (\rho - \rho_g) \cdot V \cdot \vec{g} - \rho V \cdot C_{VM} \frac{d}{dt} (\vec{u} - \vec{v}) \quad (I.5)$$

où  $C_{VM}$  est le coefficient de masse ajoutée,

au cas d'un écoulement instationnaire et non uniforme (Voinov, Voinov et Petrov, 1973 ; Landweber et Miloh, 1980 ; L'huillier, 1982 et Auton, 1983) :

$$\vec{F}_I = \rho V \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho V C_{VM} \left( \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) - (\rho - \rho_g) V \cdot \vec{g} \quad (I.6)$$

Lorsque l'écoulement est rotationnel, en plus des effets mentionnés ci-dessus, une autre force apparaît, dite force de portance, qui est due à l'interaction entre la vorticité et la vitesse relative du corps par rapport à l'écoulement non perturbé. Auton (1983), par un calcul basé sur les travaux de Lighthill (1956), montre que dans le cas d'un cisaillement faible, la force de portance qui s'exerce sur une sphère de vitesse nulle se met sous la forme :

$$\vec{F}_L = \rho V \cdot C_L \cdot \vec{v}_0 \times \vec{\Omega} \quad (I.7)$$

avec  $\rho$  : la masse volumique du liquide,

$C_L$  : le coefficient de portance,

$V$  : le volume de la sphère,

$\vec{v}_0$  : le champ de vitesse de l'écoulement moyen,

$\vec{\Omega}$  : le vecteur tourbillon.

Par ailleurs, Auton et alii (1988) ont généralisé cette expression au cas où la sphère est en accélération à la vitesse  $\vec{u}$  dans un champ rotationnel  $\vec{v}$ . Ainsi, la force non visqueuse  $\vec{F}_{NV}$  subie par la sphère peut se mettre sous la forme de deux contributions (dans la limite d'un écoulement faiblement cisailé dont la vorticité varie lentement) :

$$\vec{F}_{NV} = \vec{F}_I + \vec{F}_L \quad (I.8)$$

avec  $\vec{F}_I$  est la force d'inertie décrite ci-dessus,

$$\vec{F}_L = -\rho V \cdot C_L \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{\Omega}$$

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}$$

La dynamique d'une bulle diffère considérablement lorsqu'elle est en présence d'une autre bulle. En raison de l'interaction hydrodynamique, elle subit une force supplémentaire et la nature de celle-ci est fonction de la position et de l'orientation relatives entre les deux bulles. Dans le cas d'un écoulement très pur, la théorie de l'écoulement potentiel a été utilisée par plusieurs auteurs afin de déduire une formulation de cette force d'interaction. Biesheuvel (1982) donne l'expression de la force d'inertie subie par une bulle sphérique lors de son déplacement en présence d'une autre bulle identique sous la forme :

$$\vec{F}_I = \vec{F}_{VM} + \vec{F}_{Int}(s, \theta) \quad (I.9)$$

où  $\vec{F}_{Int}$  est la force d'interaction,  $s$  la distance entre les deux bulles et  $\theta$  l'angle entre l'axe reliant leur centre et l'accélération  $\vec{g}$ . L'expression de cette force sera détaillée dans le chapitre V du présent mémoire.

Dans le cas d'un écoulement rotationnel et non uniforme pour des Reynolds très grands, la traînée visqueuse  $\vec{F}_D$  peut être simplement ajoutée à la force non visqueuse  $\vec{F}_{NV}$ , si bien que la force exercée sur une bulle sphérique est donnée par :

$$\vec{F} = \vec{F}_D + \vec{F}_{NV} \quad (I.10)$$

$$\text{avec } \vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho \cdot C_D \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \cdot |\vec{u} - \vec{v}| \quad (I.11)$$

où  $C_D$  est le coefficient de traînée.

Pour tenir compte de la présence de contaminant dans le liquide, on met la force de traînée sous la forme :

$$\vec{F}_D = -\rho V \frac{g}{V_T} (\vec{u} - \vec{v}) \cdot f \left( \frac{|\vec{u} - \vec{v}|}{V_T} \right) \quad (I.12)$$

où  $V_T$  est la vitesse terminale de la bulle,

$f$  : une fonction qui traduit l'état de pureté du liquide :

$f = 1$  dans le cas d'un fluide pur,

$f = \frac{|\vec{u} - \vec{v}|}{V_T}$  dans le cas d'un fluide contaminé.

L'expression de la force ainsi obtenue présente encore quelques problèmes non résolus. En effet dans cette expression, on voit apparaître des coefficients - coefficient de traînée, de masse ajoutée et de portance - dont la valeur est encore mal connue :

Coefficient de traînée :

Si la valeur de ce coefficient est bien connue dans le cas d'un écoulement non rotationnel - plusieurs modèles ont été proposés pour le décrire dans toute la gamme des Reynolds (Clift, Grace et Weber) - il n'en est pas de même lorsque l'écoulement devient rotationnel. Seul le cas d'une sphère solide placée dans un écoulement cisailé a été traité récemment par Dandy et Dwyer (1990) qui montrent que la valeur de ce coefficient n'est pas affectée par le cisaillement dans une gamme de Reynolds allant de 10 à 100.

Coefficient de masse ajoutée :

Dans le cas de fluide parfait, la valeur de ce coefficient est très bien connue pour des géométries simples comme le cas de la sphère ou d'un ellipsoïde. Dans le cas de Reynolds

intermédiaires, Mayela Rivero (1991) a traité séparément les deux cas d'une sphère solide et d'une bulle sphérique placées dans un écoulement accéléré. Cette étude a montré que dans les deux cas, la valeur de ce coefficient est indépendante de l'accélération et du nombre de Reynolds et est égale à 0,5. Une étude expérimentale menée par Odar et Hamilton (1964) montre cependant que la valeur de ce coefficient augmente rapidement avec l'accélération pour atteindre une valeur limite de 1,05. Selon Mayela Rivero, cette différence est due à des erreurs existant dans la procédure expérimentale suivie par ces auteurs.

#### Coefficient de portance :

La valeur de ce coefficient présente encore beaucoup de zones d'ombre. En effet, sa valeur exacte n'est connue que dans le cas de fluide parfait pour une sphère. La résolution numérique des équations de Navier-Stokes menée par Dandy et Dwyer (1990) dans le cas d'une sphère solide montre que la valeur de ce coefficient est approximativement proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds dans la gamme  $0,1 < Re < 40$  et pour des Reynolds compris entre 40 et 100, cette valeur devient indépendante du Reynolds.

Ainsi, les chapitres qui vont suivre seront consacrés à la détermination de ces coefficients pour des géométries de la bulle autre que sphériques, soit expérimentalement dans le cas de fluide réel, soit numériquement et analytiquement dans le cas de fluide parfait pour le coefficient de portance.

## CHAPITRE II

### COEFFICIENT DE PORTANCE ETUDE EXPERIMENTALE

## Introduction

Divers études expérimentales montrent l'existence d'une migration latérale des bulles dans un écoulement diphasique gaz-liquide dans une veine verticale. Ceci conduit à une répartition non uniforme des phases. Cet effet a des conséquences sérieuses sur les problèmes de transfert entre la paroi et le liquide.

Pour expliquer l'origine d'un tel phénomène, on propose l'effet d'une force de portance latérale sur les bulles, due au gradient de vitesse, par analogie avec le mécanisme connu de migration de particules en suspension dans un écoulement de Poiseuille.

Afin de quantifier la contribution de l'effet de portance sur la répartition transversale des phases, il est nécessaire de faire une estimation de la force de portance exercée par un écoulement cisailé simple sur une bulle de gaz.

Si beaucoup de résultats sont connus pour une gamme de Reynolds petits, en revanche moins d'études sont consacrées aux cas de Reynolds élevés, ce qui est le cas de beaucoup d'applications pratiques des écoulements diphasiques gaz-liquide.

Récemment, une analyse théorique de la force de portance exercée sur une sphère placée dans un écoulement faiblement cisailé de fluide parfait a été proposée par Auton, qui a trouvé que le coefficient de portance est exactement égal à  $1/2$ . Dandy et Dwyer ont résolu numériquement les équations de Navier-Stokes, pour une gamme de Reynolds intermédiaires ( $0,1 \leq Re \leq 100$ ), dans le cas d'une sphère solide placée dans un écoulement cisailé linéairement.

Cependant, la transposition de ces données au cas d'une bulle de gaz est en aucun cas évidente, en raison, en particulier, de la condition aux limites à l'interface de la bulle, et de la déformation possible de cette interface.

L'objectif de ce chapitre est la mise en évidence expérimentale et la détermination quantitative de la force de portance exercée par un liquide réel en mouvement rotationnel sur une bulle isolée. Il est important de pouvoir s'affranchir des non-uniformités des gradients de vitesse afin de faciliter l'interprétation des résultats.

Deux situations sont possibles : écoulement de cisaillement ou écoulement de rotation solide. La première configuration a l'avantage de permettre une mise en évidence non ambiguë de la portance dans la mesure où celle-ci constitue la seule force transversale

exercée sur la bulle. Néanmoins, sa mise en oeuvre expérimentale est très délicate. C'est pourquoi nous avons retenu l'écoulement de rotation solide qui s'avère plus facile à réaliser mais qui en revanche fait apparaître une force transversale due à une combinaison des effets de portance, de pression et de masse ajoutée.

**II-1- Dispositif expérimental**

Le dispositif expérimental est décrit sur la figure I. Il consiste en un réservoir cylindrique horizontale en rotation autour de son axe. La longueur et le diamètre du cylindre sont respectivement de 200 et 150 mm.

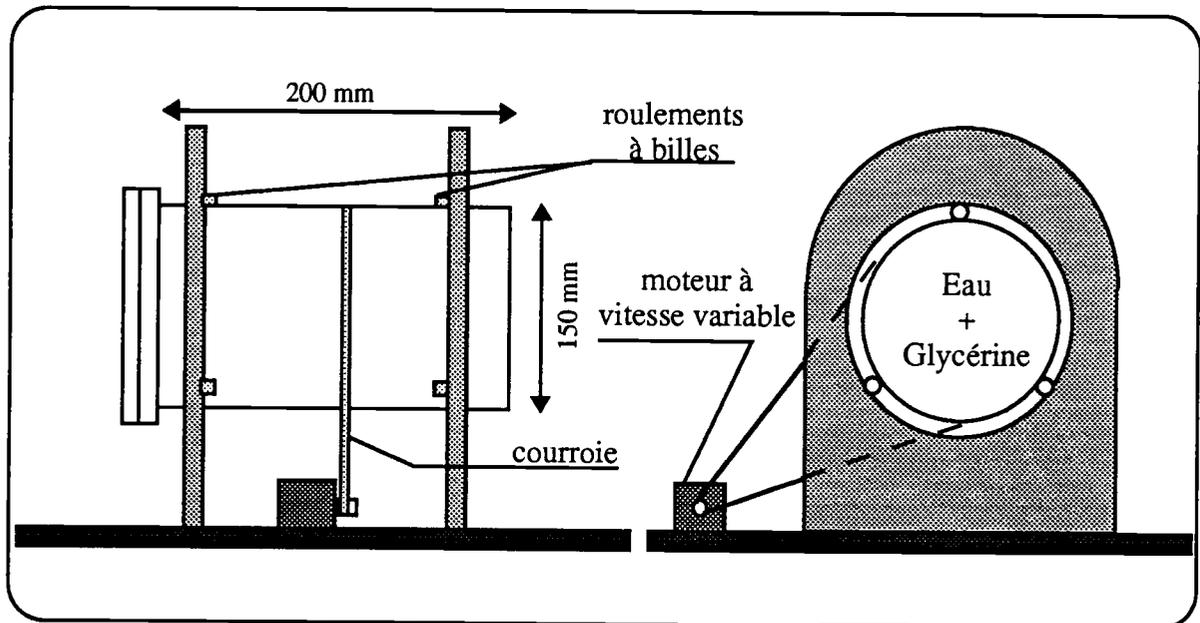


Figure II.1 Schéma de l'installation

La paroi du réservoir est en plexiglas, avec une vitre de chaque côté du cylindre ceci afin de permettre d'effectuer des mesures optiques telle que la L.D.A.. Le réservoir est maintenu horizontalement par des roulements à billes fixés sur deux supports verticaux. Il est mis en rotation par une courroie entraînée à l'aide d'un moteur à vitesse variable.

Malgré la simplicité apparente du procédé, celui-ci s'est avéré plutôt difficile pour obtenir une rotation solide parfaitement stable du liquide, ce qui requiert un alignement précis des roulements à billes et la suppression de toute source de vibration mécanique.

Le liquide utilisé dans cette expérience est un mélange d'eau distillée et de glycérine avec différents pourcentage de dilution, correspondant aux viscosités cinématiques :  $1 \cdot 10^{-6}$  ;  $5.4 \cdot 10^{-6}$  ;  $8.7 \cdot 10^{-6}$  ;  $19.4 \cdot 10^{-6}$  ;  $51.3 \cdot 10^{-6}$   $\text{m}^2/\text{s}$ .

La rotation commence à une température ambiante de l'ordre de  $24^\circ$ . Il n'est pas possible ici de contrôler le changement de température pendant la rotation, mais on peut estimer une influence négligeable de cet effet.

La bulle d'air est injectée dans le liquide par une ouverture dans la surface latérale du cylindre. Le volume d'air est pris dans un dispositif rempli d'eau, et ensuite acheminé au

reservoir à l'aide d'un tuyau transparent. Le diamètre de la bulle est facilement déterminé à partir de la longueur de l'air contenu dans le tuyau, avec une précision de  $\pm 0,1$  mm. Les diamètres obtenus avec cette méthode sont compris entre 0,8 et 12 mm.

## II-2- Résultats

Comme mentionné ci-dessus, la principale difficulté de cette expérience consiste à obtenir une rotation solide du liquide à l'intérieur du cylindre. Le champ de vitesse dans le réservoir a été mesuré à l'aide de la L.D.A.. Le système est constitué d'un laser Argon Spectra-Physics type "Stabilité 2016", fonctionnant en monoraie verte de longueur d'onde  $\lambda=514$  nm et de puissance maximale de 5 w.

La trajectoire de la bulle est déterminée à partir d'un enregistrement vidéo directement sur l'écran d'un moniteur à l'aide d'une grille de référence.

Une bulle injectée dans ce système en rotation atteint une position d'équilibre ( $x_E, z_E$ ) après un mouvement en spirale et ceci quelque soit le nombre de Reynolds allant de 10 à 2600. Cette position d'équilibre est fixée d'une part par la vitesse de rotation  $\omega$  et d'autre part par la taille de la bulle.. La précision relative obtenue sur la position du centroïde est de 10% pour  $z_E$  et 4% pour  $x_E$ .

On sait que pour des petites valeurs du coefficient de Weber,  $W$ , qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de tension superficielle, une bulle reste sphérique et son ascension dans un liquide est rectiligne. Cependant, lorsque  $W$  croît, la trajectoire de la bulle se modifie et devient hélicoïdale ou en zig-zag, ce qui correspond à un minimum du coefficient de traînée en fonction de  $W$  et également en fonction du Reynolds. Ceci ne peut être interprété, comme pour un solide, par l'apparition d'un échappement tourbillonnaire, le sillage de la bulle restant fin. Il faut en déduire qu'apparaissent là les premiers effets dus à la déformation (Hartumai et Sears, 1957, qui montrent là aussi l'existence d'un Weber critique). Compte-tenu de ces remarques, on peut s'attendre, dans le cas de notre expérience, à ce qu'une bulle de diamètre important oscille autour de sa position d'équilibre. Le résultat montre que ce n'est pas le cas, en effet une fois le point d'équilibre atteint, la bulle ne présente plus d'oscillation.

Lorsque la bulle atteint le point d'équilibre, la force qu'elle subit de la part du liquide a pour expression :

$$\vec{F} = \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{II.1})$$

où  $\vec{\sigma}$  est le tenseur de contrainte,  $\vec{n}$  la normale extérieure à la surface de la bulle et  $S$  la surface de la bulle.

Cette force est compensée par la force de flottabilité :

$$\vec{F}_B = -(\rho - \rho_g) \cdot V \cdot \vec{g} \quad (\text{II.2})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide,  $\rho_g$  celle de l'air,

$V$  le volume de la bulle.

Décomposons alors la force  $\vec{F}$  en une partie normale  $\vec{F}_N$  et une partie tangentielle  $\vec{F}_T$  comme le montre la figure II.2 et définissons les deux coefficients  $C_N$  et  $C_T$ , comme il est coutume en aérodynamique, par :

$$C_T = \frac{F_T}{\frac{1}{2} \rho V_E^2 \pi \cdot a_b^2} \quad C_N = \frac{F_N}{\rho V \Omega V_E} \quad (\text{II.3})$$

où  $a_b$  est le rayon équivalent de la bulle,  $V_E$  la vitesse du liquide mesurée au point d'équilibre et  $V$  le volume de la bulle.

Vu la configuration de la position du point d'équilibre, la force tangentielle s'identifie à la force de traînée visqueuse exercée par l'écoulement sur la bulle. Quant à la force normale, elle traduit les effets de portance, de masse ajoutée et de pression.

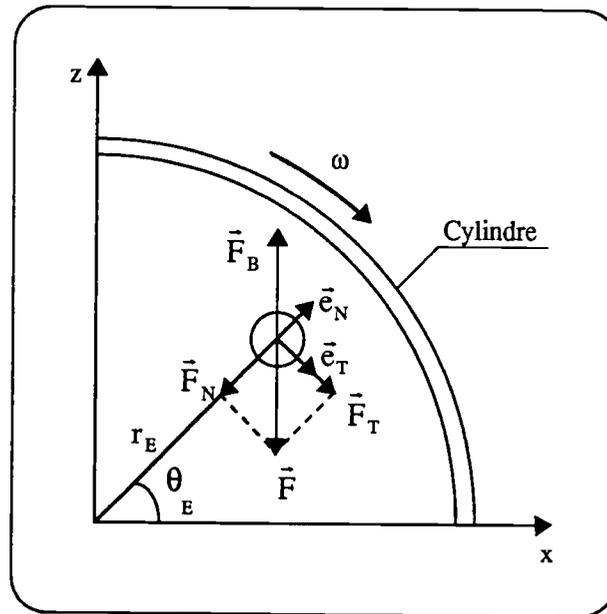


Figure II.2 : Configuration au point d'équilibre

La relation traduisant l'équilibre des forces :

$$\vec{F} + \vec{F}_B = \vec{0} \quad (\text{II.4})$$

nous donne alors la valeur de ces deux coefficients en fonction de la position du point d'équilibre  $(r_E, \theta_E)$  et de la vitesse du fluide en ce point  $V_E$  :

$$C_T = \frac{4}{3} \frac{g \cdot D_b}{V_E^2} \cos \theta_E \qquad C_N = \frac{1}{2} \frac{g \cdot r_E}{V_E^2} \sin \theta_E \qquad (II.5)$$

La précision relative obtenue pour les valeurs de ces deux coefficients est de 10% pour  $C_N$  et 4% pour  $C_T$ .

Pour une bulle de diamètre donné, lorsque l'on change la vitesse de rotation, la position du point d'équilibre se déplace de telle sorte que les deux quantités

$$\frac{\cos \theta_E}{V_E^2} \text{ et } \frac{r_E \sin \theta_E}{V_E^2}$$

restent constantes. Une conséquence en est que la valeur de ces deux coefficients n'est pas affectée par la rotation et ceci dans toute la gamme explorée dans cette étude.

On a tracé sur les figures II.3 et II.4 l'évolution des coefficients  $C_T$  et  $C_N$  en fonction du nombre de Reynolds dans la gamme de 10 à 2600.

On constate que les points expérimentaux, dans le cas de  $C_T$ , sont compris dans l'enveloppe des courbes données dans la littérature, correspondant à la valeur du coefficient de traînée dans le cas d'un écoulement irrotationnel d'un fluide pur (symbole rond) ou contaminé (symbole carré). Quant au coefficient  $C_N$ , il évolue autour de la valeur 0,5 avec une dispersion de 25%. On peut remarquer que l'on rencontre le même phénomène de dispersion dans les courbes données dans la littérature concernant la mesure de la vitesse d'ascension d'une bulle dans un liquide contaminé. Ceci s'explique par le fait que la bulle rencontre plus ou moins de contaminants dans le liquide de tel sorte que les conditions à l'interface sont différentes.

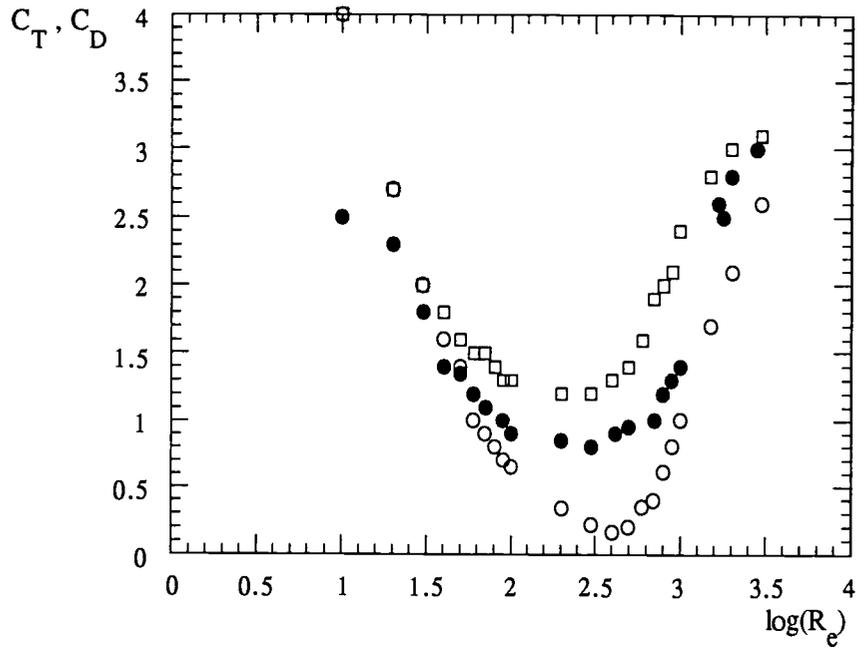


Figure II.3 : Coefficient de traînée en fonction du Reynolds  
 : fluide pure et o : fluide contaminé ( Clift, Grace and Weber )  
 : notre expérience

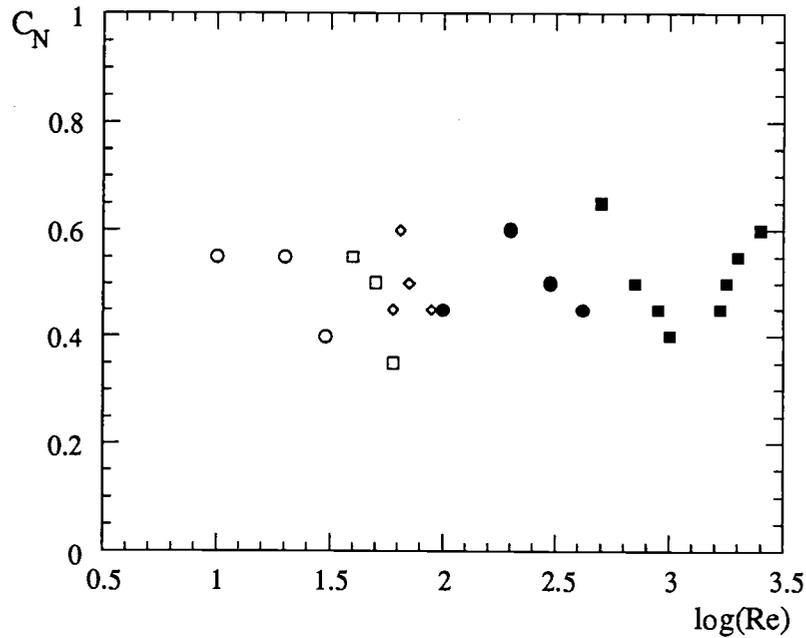


Figure II.4 : Evolution du oefficient  $C_N$  en fonction du Reynolds

Afin de trouver une évolution évidente de ce coefficient, nous avons procédé à une analyse dimensionnelle du problème. On montre dans l'annexe I les deux relations suivantes :

$$C_D = F(M, B_0) \quad , \quad C_N = G\left(\frac{\omega \cdot D_b}{\nu}, M, B_0\right)$$

avec  $M = \frac{g \cdot \mu^4}{\rho \cdot \sigma^3}$  ,  $B_0 = \sqrt{E}$  ,  $E = \frac{\rho \cdot g \cdot D^2}{\sigma}$

où la quantité  $M$  ne fait intervenir que les caractéristiques du milieu où évolue la bulle, c'est le nombre de Morton

$E$ : le nombre d'Eötvös définis,

$B_0$  : le nombre de Bond.

Dans le cadre de notre expérience on montre que le coefficient  $C_N$  ne dépend ni de la rotation  $\omega$  ni de la viscosité  $\nu$  du liquide. On a donc :

$$C_N = C_N(M, E)$$

On trace sur la courbe II.5 l'évolution de  $C_N$  en fonction de  $B_0$ , on constate malheureusement que la dispersion persiste, ceci vient du fait que la quantité  $E$  dépend de la tension superficielle  $\sigma$  qui elle-même dépend de la présence de contaminants dans le liquide.

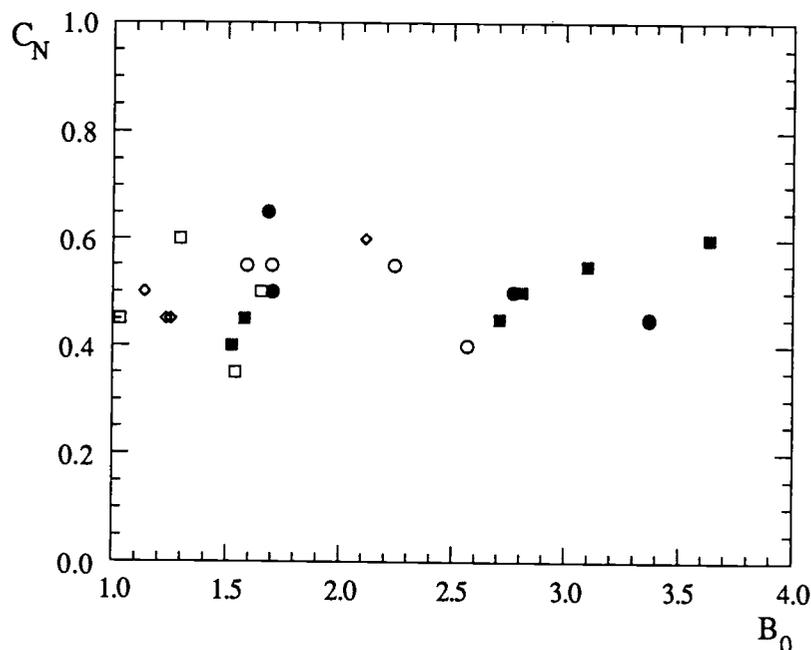


Figure II.5 : Evolution du coefficient  $C_N$  en fonction de  $B_0$

En introduisant le nombre de Froude  $F_r$ , qui traduit le rapport des effets d'inertie aux forces de gravité, défini par :

$$F_r = \frac{V_E^2}{g \cdot D_b}$$

où  $D_b$  : diamètre équivalent de la bulle,  
 $g$  : accélération gravitationnelle.

l'expression du coefficient  $C_N$  devient alors :

$$C_N = \frac{1}{2} \frac{1}{F_r} \frac{r_E \cdot \sin \theta_E}{D_b}$$

La courbe II.6 montre une variation linéaire de la quantité  $\frac{1}{2} \frac{r_E \cdot \sin \theta_E}{D_b}$  en fonction de la racine carrée du nombre de Froude :

$$\frac{1}{2} \frac{r_E \cdot \sin \theta_E}{D_b} = 0,53 \cdot \sqrt{F_r} - 0,29$$

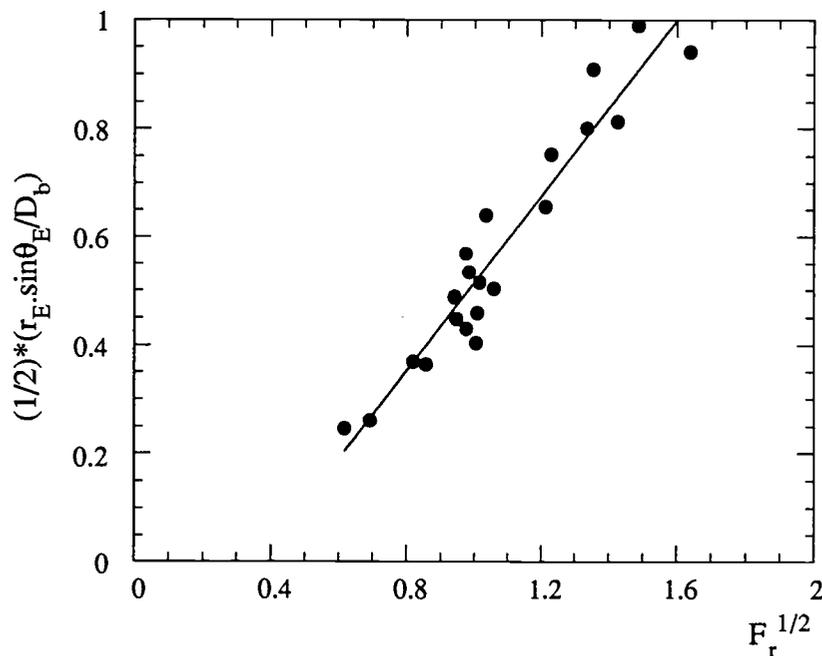


Figure II.6 : Evolution de la quantité  $\frac{1}{2} \frac{r_E \cdot \sin \theta_E}{D_b}$  en fonction du Froude

Ceci nous permet d'avoir une loi d'évolution du coefficient  $C_N$  en fonction du Froude, dans la gamme des diamètres utilisés dans notre expérience, sous la forme :

$$C_N = \frac{0,53}{\sqrt{F_r}} - \frac{0,29}{F_r}$$

Il est intéressant de comparer les résultats expérimentaux ci-dessus avec les approches théoriques ou numériques proposées dans la littérature. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, les informations disponibles ne s'appliquent qu'à deux cas :

- bulle sphérique en écoulement cisailé de fluide parfait ( $Re \rightarrow \infty$ ) (Auton et alii, 1987),
- sphère solide dans un écoulement de cisaillement pur pour des nombres de Reynolds modérés (0,1 à 100) (Dandy et Dwyer, 1990).

### II-3- Comparaison avec le modèle de fluide parfait de Auton et alii

Dans le cas de Reynolds très grands et pour une bulle sphérique, le modèle de Auton et alii (1987) propose la décomposition de la force totale exercée sur la bulle en quatre effets complètement découplés :

$$\vec{F} = \vec{F}_{VM} + \vec{F}_L + \vec{F}_D + \vec{F}_B \quad (\text{II.6})$$

Dans le cadre de cette expérience, on se place dans le cas particulier où l'écoulement est stationnaire et en rotation pure. Avec les notations de la figure II.7, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \vec{u} = (u, v, w) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{r} = (x, y, z) \\ \vec{\Omega} = (0, 2, \omega, 0), \quad \vec{g} = (0, 0, -g), \quad \vec{v} = (\omega, z, 0, -\omega, x) \end{aligned}$$

La force  $\vec{F}$  prend ainsi l'expression :

$$\begin{aligned} \vec{F} = \rho V \left[ -C_{VM} \frac{d\vec{u}}{dt} + \omega^2 (2.C_L - C_{VM} - 1) (\vec{r} - y.\vec{k}) \right. \\ \left. - 2.\omega.C_L \vec{u} \times \vec{j} - \frac{3.C_D}{4.D_b} (\vec{u} - \vec{v}) |\vec{u} - \vec{v}| - \frac{\rho - \rho_g}{\rho} \vec{g} \right] \quad (\text{II.7}) \end{aligned}$$

L'équation du mouvement est alors décrite par le système suivant (dans lequel on a négligé la masse volumique de la bulle devant celle du liquide) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\alpha.x + \beta.w - \gamma.\sqrt{(u - \omega.z)^2 + v^2 + (w + \omega.x)^2} . (u - \omega.z) \\ \frac{dv}{dt} = -\gamma.\sqrt{(u - \omega.z)^2 + v^2 + (w + \omega.x)^2} . v \\ \frac{dw}{dt} = -\alpha.z - \beta.u - \gamma.\sqrt{(u - \omega.z)^2 + v^2 + (w + \omega.x)^2} . (u + \omega.x) + \delta \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

avec  $\alpha = \frac{B}{A}$  ;  $\beta = \frac{D}{A}$  ;  $\gamma = \frac{C}{A}$  ;  $\delta = \frac{E}{A}$

$$A = C_{VM} ; B = (1 + C_{VM} - 2.C_L).\omega^2 ; C = \frac{4.C_D}{3.D_b} ; D = \omega.C_L ; E = g$$

La résolution de ce système d'équations, par la méthode de Runge-Kutta à l'ordre quatre, nous donne la trajectoire d'une bulle avec les conditions initiales  $\vec{r}_0 = \vec{0}$  et  $\vec{u}_0 = \vec{0}$ . On constate que la trajectoire tend vers un point d'équilibre, dont il est facile de vérifier la stabilité, où les différentes forces qui s'exercent sur la bulle se compensent entre elles, comme le montre la figure II.7.

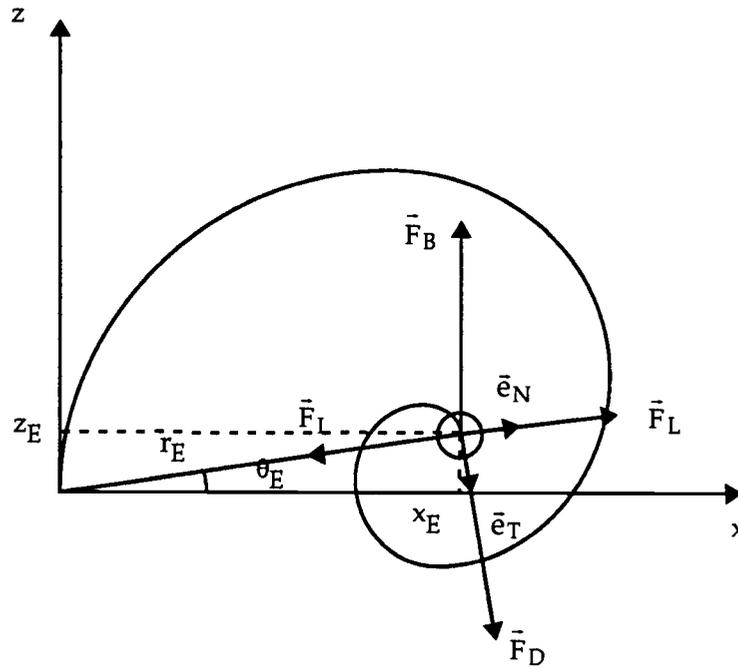


Figure II.7 : Trajectoire de la bulle obtenue par résolution numérique du système (II.8)

En posant  $\vec{u} = \vec{0}$  dans le système (II.8), lorsque la bulle atteint son point d'équilibre, on obtient des relations entre les coefficients  $C_L$ ,  $C_{VM}$ ,  $C_D$  et la position  $(r_E, \theta_E)$  du point d'équilibre :

$$\begin{cases} 2.C_L - C_{VM} = 1 - \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin \theta_E}{r_E} \\ C_D = \frac{4}{3} \frac{g \cdot D_b}{\omega^2} \frac{\cos \theta_E}{r_E^2} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

L'une des hypothèses de validité de l'expression de la force donnée par Auton et alii impose un taux de cisaillement faible, c'est-à-dire la vitesse induite à la surface de la bulle par le vecteur tourbillon  $(\omega \cdot D_b)$  reste très petite devant la vitesse relative entre le liquide et la bulle  $V_E$ . La valeur de  $\omega \cdot D_b / V_E$  varie comme  $D_b / r_E$ , où  $r_E$  est la position du point d'équilibre. On vérifie que dans notre expérience, cette quantité reste toujours petite devant l'unité (elle varie de 0,1 à 0,6) quelque soit la vitesse de rotation utilisée. L'autre hypothèse concerne la géométrie sphérique de la bulle, or comme on l'a vu auparavant, ceci est respecté lorsque le diamètre de la bulle reste inférieur à 3 mm dans le cas de liquide contaminé.

Au point d'équilibre l'expression de la force (II.7) se réduit à :

$$\frac{V_E^2}{r_E} (2.C_L - C_{VM} - 1) \cdot \vec{e}_N + \frac{3}{4} \frac{C_D}{D_b} V_E^2 \cdot \vec{e}_T - \vec{g} = \vec{0} \quad (\text{II.10})$$

Ainsi, dans la limite  $R_e \rightarrow \infty$ , ce calcul montre que la force transversale inclue deux effets : le terme  $2.C_L$  provenant de la force de portance et le terme  $(1+C_{VM})$  traduisant les effets de masse ajoutée qui proviennent de l'existence d'un gradient de pression transversale dans le fluide. Ces deux effets sont représentés habituellement par le coefficient de portance rotationnel qui s'écrit sous la forme :

$$C_{L\Omega} = \frac{1}{2}(2.C_L - C_{VM} - 1)$$

En comparant alors les expressions (II.10) et (II.4), on a :

$$C_D \equiv C_T \quad ; \quad C_{L\Omega} \equiv -C_N = -\frac{1}{2} \frac{g.r_E}{V_E^2} \sin \theta_E$$

Evidemment, cette comparaison n'a de sens que pour des Reynolds suffisamment grands et une gamme de diamètres pour lesquels la bulle reste approximativement sphérique.

Comme on l'a vu précédemment, lorsque l'on change la vitesse de rotation, la quantité  $\frac{r_E \cdot \sin \theta_E}{V_E^2}$  reste constante, ceci implique que le coefficient  $C_N$  n'est pas affecté par la rotation. Par conséquent, dans le cas de fluide parfait, le coefficient  $C_{L\Omega}$  est lui aussi indépendant de la rotation.

On trace sur la figure II.8 l'évolution du coefficient  $C_N$  en fonction du Reynolds, pour des bulles dont le diamètre reste inférieur à 4 mm. On constate que dans la gamme de Reynolds allant de 200 à 1000, la valeur mesurée de  $C_N$  diffère notablement de la valeur de  $C_{L\Omega}$  calculée en fluide parfait ( $0,5 < C_N < -0,4$ , alors que  $C_{L\Omega} = -1/4$ ). Ceci peut être certainement attribué d'une part aux effets de rigidification de l'interface de la bulle par les impuretés présentes dans liquide. En effet, celle-ci conduit à l'apparition d'un sillage important qui, de plus, est non symétrique ( Figure II.8 ). D'autre part, pour des diamètres de cet ordre, les déformations peuvent avoir une influence non négligeable sur le comportement de la bulle.

Cette valeur de  $C_{L\Omega}$  nous permet d'avoir une relation entre le coefficient de portance et le coefficient de masse ajoutée :

$$2.C_L - C_{VM} = 0$$

Le fait que la bulle peut atteindre une position d'équilibre stable nous a permis de faire des mesures du champ de vitesse autour de celle-ci à l'aide de l'Anémométrie Laser à Effet

Doppler, ce qui montre l'existence d'un sillage important et non symétrique comme le montre la figure II.8 correspondant à une bulle de 12 mm.

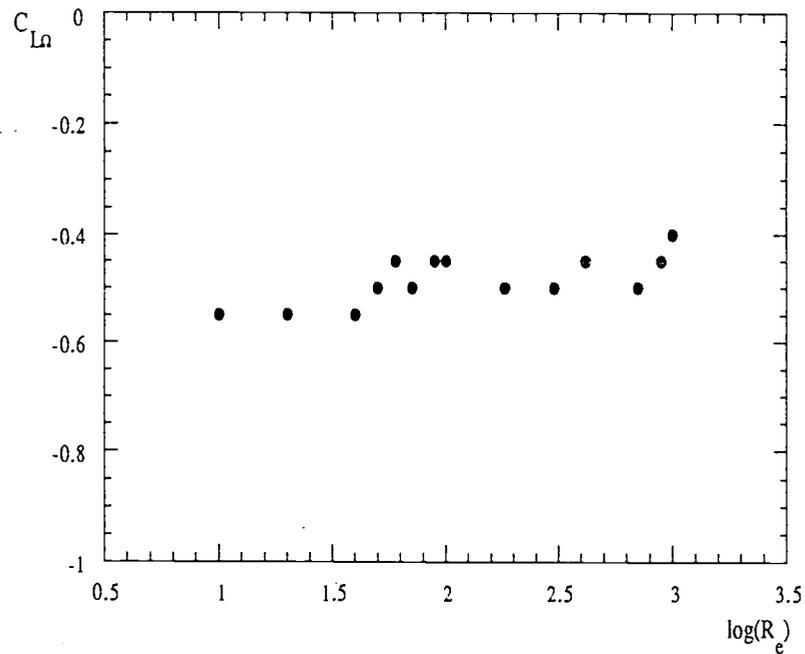


Figure II.8 : Coefficient de portance rotationnel en fonction du Reynolds pour des bulles dont le diamètre est inférieur à 4 mm.

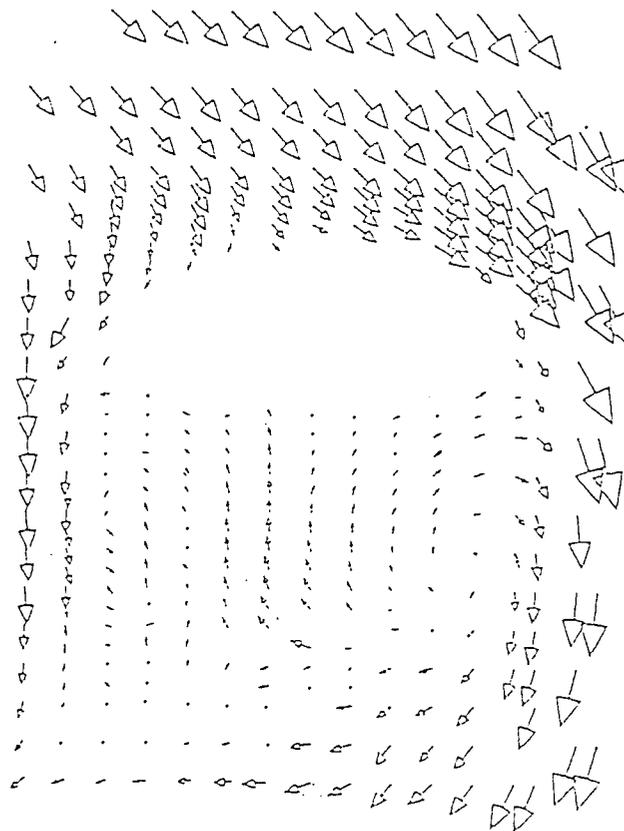


Figure II.9 : Champ de vitesse autour de la bulle

#### II-4- Comparaison avec les résultats de Dandy et Dwyer

Dandy et Dwyer (1990) ont résolu numériquement les équations de Navier-Stokes dans le cas d'une sphère solide placée dans un écoulement en cisaillement linéaire pour des Reynolds allant de 0,1 à 100 et pour des taux de cisaillement adimensionnels  $K$  tels que  $0,005 \leq K \leq 0,4$ . Ils définissent le coefficient de traînée et le coefficient de portance par :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \pi a_b^2} \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \pi a_b^2} \quad (\text{II.11})$$

où  $a_b$  est rayon de la sphère,  $U_\infty$  la vitesse relative entre l'écoulement et la sphère,  $F_D$  et  $F_L$  sont les forces subies par la sphère parallèlement et perpendiculairement à l'écoulement moyen et le taux de cisaillement est défini par :

$$K = \frac{D_b \cdot \Omega}{U_\infty}$$

Pour différentes valeurs du taux de cisaillement  $K$ , ces auteurs montrent que pour des Reynolds allant de 10 à 100, la valeur du coefficient de traînée  $C_D$  est sensiblement égale à la valeur calculée dans le cas d'un écoulement uniforme et stationnaire ( $K = 0$ ). Ceci est en accord avec le résultat obtenu dans le cadre de notre expérience concernant le coefficient  $C_T$  dans cette gamme de Reynolds.

Toujours dans la gamme de  $Re$  allant de 10 à 100, ces auteurs montrent que le coefficient de portance  $C_L$  présente un comportement différent. En effet, celui-ci varie linéairement en fonction du taux de cisaillement  $K$  pour un  $Re$  donné. Pour un  $K$  fixé, l'évolution de  $C_L$  en fonction de  $Re$  présente deux régions :

- une région  $40 \leq Re \leq 100$  reste constante,
- une région  $10 \leq Re \leq 40$  où  $C_L$  présente une variation en  $Re^{-1/2}$ .

Dans le cas d'un écoulement visqueux irrotationnel, plusieurs auteurs (Oder et Hamilton, 1964 ; Rivero, 1991) supposent que la force totale qui s'exerce sur une inclusion sphérique est la contribution d'effets complètement découplés (force de traînée, force d'inertie et force de Basset). Dans le cadre de notre expérience et afin de faire une comparaison avec les résultats de Dandy et Dwyer, nous allons supposer valable cette décomposition (la force de Basset étant négligée dans notre cas) et lui superposer simplement la force de portance comme le suggère le modèle de Auton et alii dans le cas de fluide parfait.

Dans l'expérience numérique menée par ces auteurs, le cisaillement étant linéaire, la contribution de l'effet de masse ajoutée n'intervient pas dans la valeur du coefficient de portance. Nous allons donc retrancher à la valeur de  $C_N$  mesurée la quantité  $(-1 - C_{VM})$  provenant de cet effet, en prenant pour  $C_{VM}$  la valeur 0,5 qui correspond au cas d'une bulle sphérique (Rivero, 1991). On présente sur les figures II.10 et II.11 ci-contre les valeurs obtenues par ces auteurs dans le cas  $K = 0,1$  en comparaison avec nos résultats expérimentaux pour des bulles dont le diamètre reste inférieur à 4 mm.

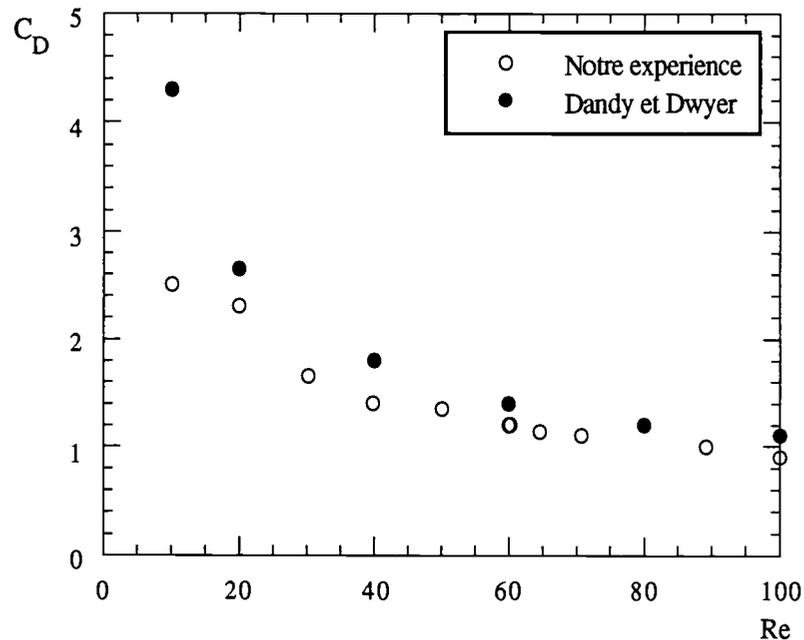


Figure II.10 : Evolution du coefficient de traînée en fonction du Reynolds

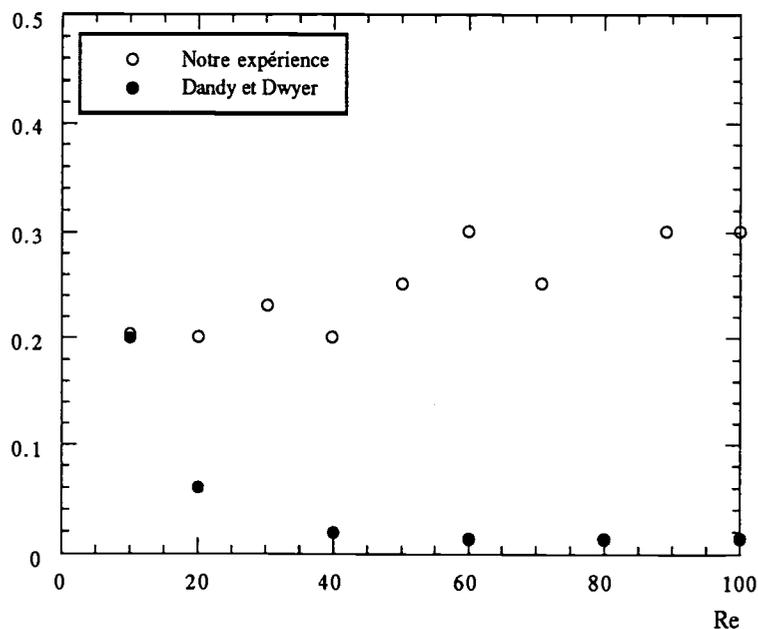


Figure II.11 : Evolution du coefficient de portance en fonction du Reynolds

### **Conclusion**

On a pu dans cette expérience mesurer simplement la force transversale exercée par un écoulement en rotation uniforme sur une bulle isolée en fluide réel, pour une gamme de Reynolds allant de 10 à 2600 et pour des formes de bulle allant de la sphère ( $D < 3$  mm) à la bulle de Taylor. Une représentation adimensionnelle des résultats a permis de regrouper assez bien les points expérimentaux, indépendamment de la forme de la bulle et du liquide choisi.

Une comparaison avec la simulation numérique de Dandy et Dwyer dans une gamme de Reynolds allant de 10 à 100 montre une nette différence quant à la valeur du coefficient de portance.

On constate un accord qualitatif avec la théorie de Auton. Cependant, la valeur du coefficient de portance rotationnel obtenue dans cette expérience diffère de celle prédite par la théorie de fluide parfait.

Ces comparaisons ont mis en évidence la sensibilité de la force de portance à certains effets comme la présence d'un sillage non symétrique derrière la bulle, la présence de contaminant dans le liquide qui change les conditions à l'interface et enfin la forme géométrique de la bulle.

## CHAPITRE III

### COEFFICIENT DE MASSE AJOUTEE ETUDE EXPERIMENTALE

**Introduction**

La notion de masse ajoutée, en fluide parfait, possède une interprétation multiple : force liée à la mise en mouvement du fluide par un corps accéléré, densité d'énergie cinétique apportée au liquide par le corps en mouvement uniforme, masse de fluide comprise entre une surface matérielle initialement plane et cette même surface déformée lorsqu'un corps en mouvement uniforme la traverse perpendiculairement.

Cette dernière interprétation a notamment été utilisée par Kowe et alii (1988) pour estimer le flux de masse moyen dans un écoulement à bulles diluées.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier expérimentalement une telle propriété dans le cas d'un fluide réel.

**III-1- Théorie de fluide parfait**

Dans le cas d'un corps se déplaçant uniformément dans un domaine infini de fluide parfait, Darwin (1953) montre que la masse du liquide déplacé est égale à la masse hydrodynamique ou masse ajoutée associée au corps. Cette étude a été reprise par Yih (1980) et énoncée plus formellement par Brooke Benjamin (1986). Le problème considéré par Darwin est le suivant : quel est le comportement d'une surface matérielle plane  $S$ , marquée de façon à ce que l'on puisse l'identifier, lorsqu'elle est traversée perpendiculairement par un corps en mouvement uniforme ?

Si on appelle  $x$  la direction du mouvement, le déplacement d'une particule dans cette direction sur une ligne de courant est donné par la fonction "de dérive" définie comme :

$$X = \int_{-\infty}^x (v_x + 1). dt \quad (\text{III.1})$$

La quantité la plus intéressante à étudier est le volume "de dérive"  $V_D$ , qui correspond au volume compris entre la position initiale  $S_0$  ( $t = 0$ ) et la position finale  $S_\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) du plan  $S$ , comme l'illustre le schéma suivant :

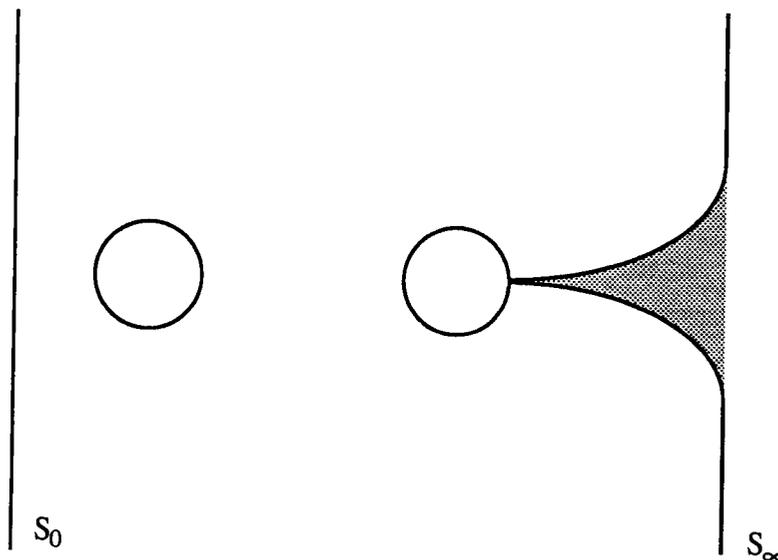


Figure III.1 : Comportement d'une surface  $S$  de fluide parfait traversant une sphère (Darwin)

Sa valeur correspond à l'intégrale de la fonction "de dérive" sur toutes les lignes de courant :

$$V_D = \iint X. d\psi d\zeta \quad (\text{III.2})$$

où  $\psi$  et  $\zeta$  sont des fonctions définissant les surfaces des lignes de courant.

Dans le cas d'un cylindre de rayon  $a$  se déplaçant perpendiculairement à son axe, le problème admet une solution complète :

$$V_D = \pi \cdot a^2 \quad (\text{III.3})$$

Comme l'a fait remarquer Darwin, ce résultat est positif et ne correspond aucunement au reflux du liquide déplacé par le cylindre, mais à la masse ajoutée associée à celui-ci.

Dans le cas d'un corps quelconque se déplaçant à vitesse uniforme dans un domaine limité de dimension  $\pm l$ ,  $\pm m$ ,  $\pm n$ , Darwin montre l'égalité suivante entre le volume "de dérive"  $V_D$  et le volume  $V_H$  correspondant à la masse hydrodynamique déduite de l'expression de l'énergie cinétique fournie au fluide :

$$V_H - V_D = 8 \cdot A \cdot \text{Arctg} \left( \frac{m \cdot n}{l \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right) \quad (\text{III.4})$$

Il est clair que l'égalité entre ces deux volumes n'est satisfaite que dans le cas où  $l \gg m$ ,  $n$ . Cependant, Darwin montre, en se basant sur une analyse dimensionnelle des différents termes intervenant dans les équations, que la partie centrale de la surface "de dérive" est exactement la même que dans le cas d'un domaine infini, de telle sorte que le volume "de dérive" correspond au volume hydrodynamique. Ce volume est bien sûr compensé sur les parois par une "dérive" négative, cependant celle-ci s'étend sur une surface très large et de très faible hauteur.

La démarche de Darwin suppose que l'inclusion se déplace à vitesse constante, or on sait que la particularité essentielle de la masse ajoutée devrait être associée à l'accélération. Cependant, Kowe et alii (1988) montrent, dans le cas de Reynolds très grands, que le déplacement d'une bulle avec une vitesse non uniforme  $\bar{u}$  donne lieu à un flux "de dérive" qui est directement lié au coefficient de masse ajoutée. Dans le cas d'un écoulement à bulles à très faible taux de concentration, en faisant une analyse du champ d'écoulement en trois parties associées respectivement au liquide interstitiel  $v_0$ , au liquide déplacé  $v_L$  et à la bulle elle-même  $u$  (figure III.2), ils expriment la quantité du liquide déplacé par unité de temps à travers une surface  $S$  sous la forme :

$$v_L \cdot S = [v_0 \cdot (1 - \varepsilon) + C_{VM} \cdot \varepsilon \cdot (u - v_0)] \cdot S \quad (\text{III.5})$$

(1)                      (2)

où les termes (1) et (2) correspondent respectivement au flux loin et près de la bulle.

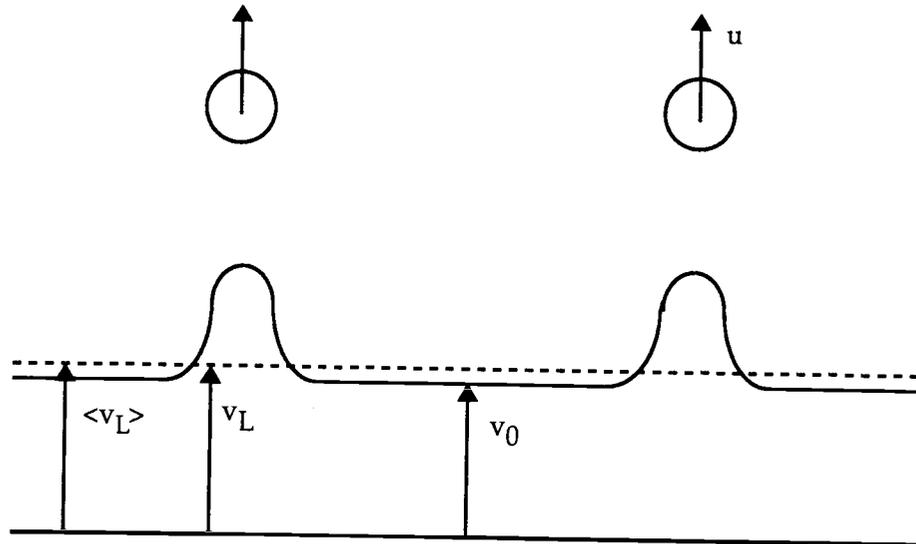


Figure III.2 : Schéma de la décomposition de la vitesse donnée par Kowe et alii  
 $v_0$  : vitesse du liquide interstitiel,  
 $v_L$  : vitesse du liquide entraîné,  
 $u$  : vitesse de la bulle.

Dans le cas d'un écoulement visqueux, les raisonnements tenus ci-dessus ne sont plus applicables et une résolution complète des équations de Navier-Stokes devient indispensable. Une telle résolution a été menée récemment à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse par Mayela Rivero (1991), traitant de l'écoulement accéléré autour d'une inclusion sphérique. Elle déduit la quantité  $(1+C_{VM})$  par une décomposition de la force totale en trois contributions, force de traînée, force de masse ajoutée et force d'histoire :

$$\vec{F}(t) = \frac{1}{2} C_D \pi a^2 \vec{u}(t) |\vec{u}(t)| + \rho V \cdot (1 + C_{VM}) \cdot \vec{a}(t) + \vec{F}_H(t) \quad (\text{III.6})$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération de l'écoulement non perturbé.

Toutes les expériences menées dans cette étude montrent que le coefficient de masse ajoutée  $C_{VM}$ , dans une gamme de Reynolds allant de 0,1 à 500, est indépendant de l'accélération et est toujours égal à 0,5.

Comme il est difficile de réaliser une expérience où on peut mesurer directement la force de masse ajoutée exercée sur une bulle, nous allons suivre la démarche suggérée par Darwin. A cette fin, nous avons réalisé une expérience nous permettant de déterminer le volume entraîné par une bulle isolée se mouvant à travers une interface séparant deux liquides de densités légèrement différentes. La mesure de ce volume par une méthode d'absorption laser nous donnera ce que l'on va appeler coefficient de masse entraînée  $C_{ME}$ ,

que l'on définit comme le rapport du volume déplacé au volume de la bulle. Ce coefficient sera comparé au coefficient de masse ajoutée dans une gamme de Reynolds relatif à la bulle allant de 500 à 1300.

### III-2- Dispositif expérimental

On dispose d'une cuve en verre de dimension  $40 \times 40 \times 120 \text{ cm}^3$  contenant deux liquides 1 et 2 non miscibles, néanmoins de densités très voisines (3%). Le liquide 2, le plus bas, est un mélange d'eau de robinet et de sel, additionné d'une petite quantité de fluorescéine afin de rendre l'interface visible ; un ajout d'une certaine quantité d'huile de silicone a été nécessaire pour éliminer la diffusion naturelle de la fluorescéine du liquide 2 vers le liquide 1.

Un tube laser muni d'un élargisseur nous fournit un faisceau dont le diamètre de sa section est de 7 cm. On mesure l'intensité du faisceau à l'aide d'un photomultiplicateur dont la tension de sortie est proportionnelle au flux de lumière reçu.

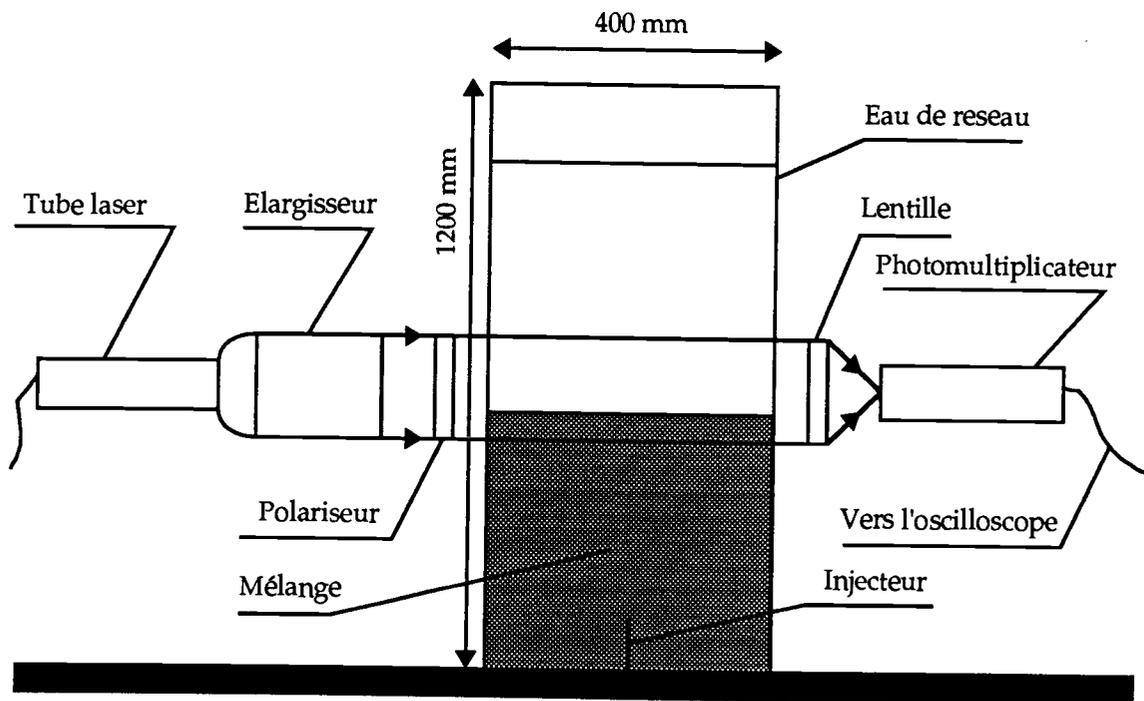


Figure III.3 : Schéma de l'installation

Malgré la simplicité apparente du principe de cette expérience, sa réalisation présente bien des difficultés et nécessite des démarches délicates. En effet, l'opération qui consiste à mettre deux liquides de densités voisines dans la même cuve en évitant leur mélange demande beaucoup de patience et de temps. A cette fin, on procède de la manière suivante : on commence tout d'abord par mettre un certain volume d'eau dans la cuve, le mélange (2) est ensuite acheminé au fond du réservoir à l'aide d'un tube en verre dont l'extrémité

est placée au raz du fond de la cuve et ceci avec un débit très faible. Une autre difficulté réside dans le fait qu'à chaque passage d'une bulle, l'interface n'est plus nette ; pour remédier à cela on introduit, au niveau de l'interface, un tube en verre qui nous permet de siphonner toute la partie trouble comprise entre l'eau et le mélange. Malheureusement, cette opération devient inefficace au bout de quatre passages et l'opération de départ est à recommencer. Et enfin, pour éviter toute perturbation par la lumière extérieure, toutes les mesures ont été effectuées dans une pièce obscure.

Les bulles d'air sont injectées par le fond de la cuve. Leur volume est déterminé en laissant entrer une petite quantité d'air dans un récipient rempli d'eau en amont de l'injection, ce qui permet d'obtenir à volonté la variation des diamètres équivalents. L'air est ensuite acheminé vers l'injecteur à l'aide d'un tuyau transparent, où la longueur du volume occupé par l'air est mesurée et, connaissant la section du tuyau, on peut avoir des diamètres équivalents avec une précision de l'ordre de  $\pm 0,1$  mm. A son passage à travers l'interface, une bulle de volume  $V_0$  injectée au bas du réservoir dans le liquide 2 va entraîner une certaine quantité de celui-ci dans le liquide 1, comme l'illustre le schéma suivant :

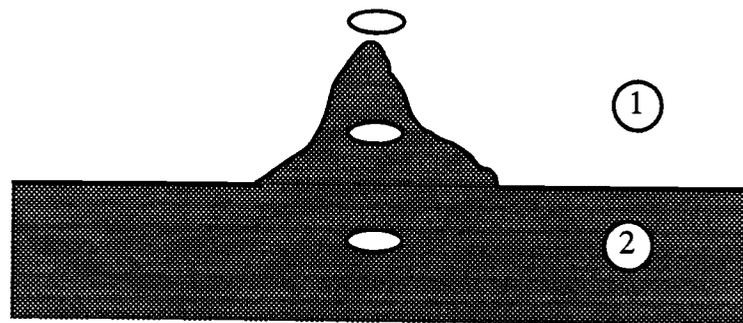


Figure III.4 : Schéma du comportement de l'interface traversée par une bulle isolée

On place le faisceau laser de telle sorte qu'il englobe la région de passage de la bulle. Derrière le réservoir, une lentille focalise le faisceau vers un photomultiplicateur, la tension de sortie de celui-ci est mesurée à l'aide d'un oscilloscope à mémoire ; le signal au passage de la bulle présente un creux qui correspond au maximum d'absorption. On déduit alors le coefficient de masse entraînée  $C_{ME}$  que l'on définit comme le rapport du volume entraîné par le volume de la bulle.

### III-3- Principe de la mesure

Le principe de la mesure que l'on va utiliser pour déterminer le volume entraîné repose sur une méthode d'absorption Laser selon la loi de Beer-Lambert. Considérons un volume  $V$  d'un certain liquide de coefficient d'absorption  $\lambda$ , placé dans un faisceau laser d'intensité  $I_0$  et de section  $S_0$ . On va montrer ci-dessous que dans le cas d'une faible absorption, on peut expliciter une relation simple entre le volume  $V$  et la quantité d'intensité absorbée.

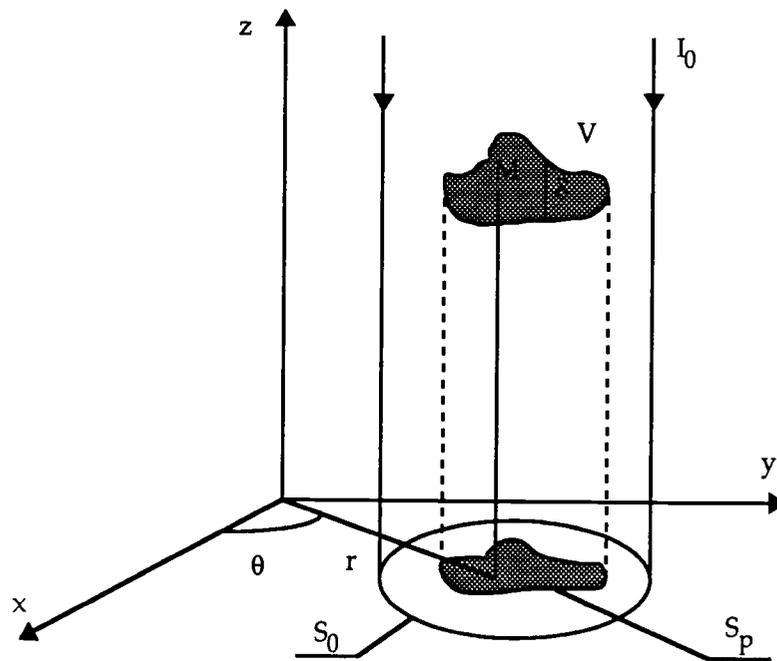


Figure III.5 : Schéma du principe de la mesure

Dans le système de coordonnées  $(r, \theta, z)$ , le volume  $V$  a pour expression :

$$V = \iint_{S_p} \delta(r, \theta) \cdot r \cdot dr d\theta$$

$S_p$  étant la projection de  $V$  sur le plan  $(x, y)$ .

Un rayon d'intensité  $I_0$ , traversant une largeur  $\delta$  du liquide, subit une atténuation donnée par la loi de Beer-Lambert :

$$I = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \delta} \quad (\text{III.8})$$

Une intégration sur la surface  $S_0$  nous donne la quantité du faisceau absorbée par tout le volume  $V$  :

$$J = \iint_{S_0} I(r, \theta) \cdot r \cdot dr d\theta \quad (\text{III.9})$$

$$J = (S_0 - S_p) \cdot I_0 + \iint_{S_p} I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \delta} \cdot r \cdot dr d\theta$$

En se plaçant dans la partie linéaire de la courbe d'absorption :

$$I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \delta} \approx I_0 \cdot (1 - \lambda \cdot \delta)$$

on a :

$$\begin{aligned} J &= (S_0 - S_p) \cdot I_0 + \iint_{S_p} I_0 \cdot (1 - \lambda \cdot \delta) \cdot r \cdot dr d\theta \\ &= S_0 \cdot I_0 - \lambda \cdot I_0 \iint_{S_p} \delta \cdot r \cdot dr d\theta \\ &= S_0 \cdot I_0 - \lambda \cdot I_0 \cdot V \end{aligned}$$

D'où la relation entre le flux absorbé et le volume V :

$$V = \frac{S_0}{\lambda} \frac{J_0 - J}{I_0} \quad (\text{III.10})$$

$$\text{avec : } J_0 = I_0 \cdot S_0$$

On définit alors le coefficient de masse entraînée  $C_{ME}$  comme étant le rapport du volume entraîné V au volume de la bulle  $V_0$  :

$$C_{ME} = \frac{V}{V_0} \quad (\text{III.11})$$

**III-4- Résultats expérimentaux**

Comme on l'a fait remarquer dans l'étude du cas de fluide parfait, l'entraînement d'un certain volume est compensé par un reflux qui s'étale sur une grande surface et une hauteur très faible. Calculons l'erreur commise lors de la mesure du flux de lumière, due à ce phénomène. On peut montrer facilement la relation suivante :

$$\frac{J'-J}{J} \approx \frac{a \cdot V}{S_0 \cdot l \cdot L} (1 - e^{-\lambda \cdot L}) \quad (\text{III.12})$$

où  $V$  est le volume entraîné,  $J'$  et  $J$  sont les flux calculés respectivement en tenant compte ou non du reflux,  $l$  et  $L$  sont la longueur et la largeur de la cuve. Une application numérique pour une valeur maximale du volume entraîné dans nos expériences montre que ce terme est de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Afin d'estimer l'erreur commise sur la mesure du volume entraîné, on a pris comme référence des volumes bien connus ( $8 \text{ cm}^3$ ,  $2 \text{ cm}^3$ ,  $0,5 \text{ cm}^3$ ) que l'on a mesurés par cette méthode, on trouve alors dans les trois cas une erreur de 1%.

Dans de nombreuses situations, la forme des bulles s'écarte beaucoup de la sphéricité et s'approche plutôt du cas d'un ellipsoïde de révolution aplatie. C'est pour cela que l'on va comparer le coefficient  $C_{ME}$  avec le coefficient de masse ajoutée obtenu pour cette géométrie, dans le cadre de l'approximation du fluide parfait, qui est donné par (Lamb) :

$$C_{11} = \frac{\gamma_0}{2 - \gamma_0} \quad (\text{III.13})$$

$$\text{avec } \gamma_0 = \frac{2}{e^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \text{Arcsin } e \right) \text{ et } e = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi}$$

où  $\xi$  est l'aplatissement de l'ellipsoïde, défini comme le rapport du grand axe au petit axe.

Afin d'obtenir  $\xi$  en fonction du diamètre équivalent de la bulle, on a utilisé le résultat de Moore donnant la courbe liant le coefficient de Weber à  $\xi$  :

$$W_b = \frac{D_e \cdot V_T^2 \cdot \rho}{\sigma} = f(\xi) \quad (\text{III.14})$$

$D_E$  est le diamètre équivalent de la bulle et  $V_T$  sa vitesse terminale,

$\rho$  la masse volumique du liquide,

$\sigma$  la tension superficielle eau-air,

$f$  une fonction de  $\xi$  qu'il donne sous la forme :

$$f(\xi) = 4 \cdot \xi^{-3/4} \cdot (\xi^3 + \xi - 2) \cdot (\xi^2 \cdot \sec^{-1} \xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot (\xi^2 - 1)^{-3}$$

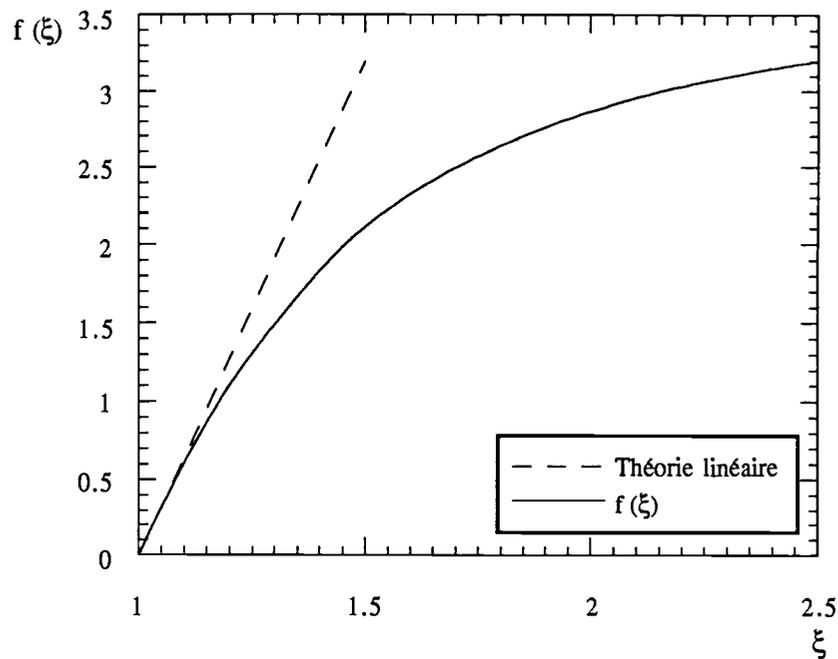


Figure III.6 : Evolution du coefficient de Weber en fonction de l'aplatissement de la bulle (Moore)

On présente sur la courbe suivante les valeurs du coefficient de masse entraînée mesurées par notre expérience et le coefficient de masse ajoutée dans le cas d'un fluide parfait.

La dispersion, en moyenne de 20%, qui apparaît pour les valeurs expérimentales du coefficient de masse entraînée peut être due à deux raisons provoquées par le même facteur. Etant donné que l'on ne contrôle pas le caractère homogène du mélange (2), lors de son ascension à travers ce milieu une bulle peut rencontrer des concentrations différentes. Ceci peut avoir des conséquences directes sur la mesure ; en effet, cette non homogénéité a une influence notable sur la qualité du mélange (en terme de la constance du coefficient d'absorption) entraîné dans le liquide (1). D'autre part, on sait que la présence de contaminant dans un liquide joue un rôle important quant à la forme de la bulle et ceci peut affecter la quantité du volume entraîné.

On peut remarquer que l'on rencontre le même phénomène de dispersion dans les courbes données dans la littérature concernant la mesure de la vitesse d'ascension d'une bulle dans un liquide contaminé.

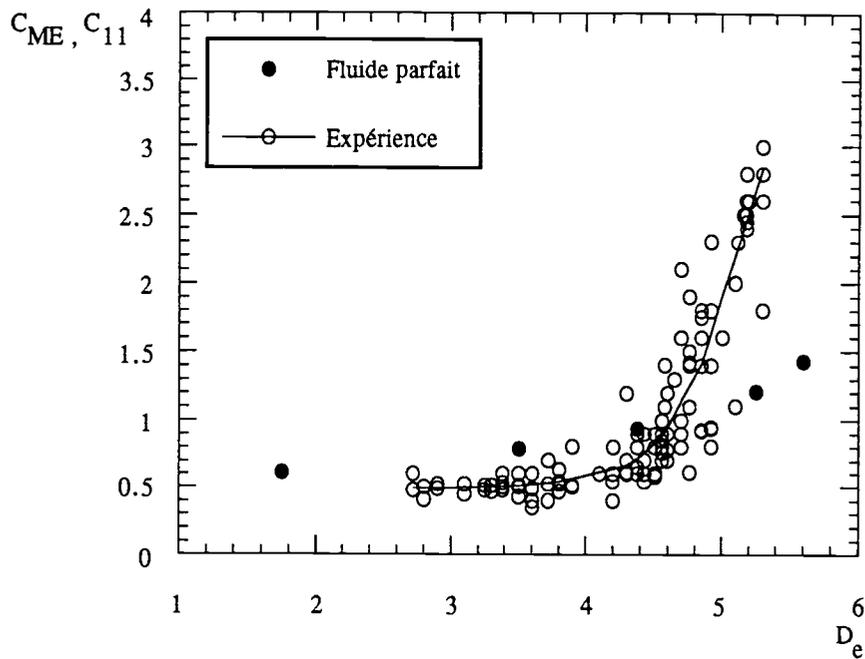


Figure III.7 : Evolution du coefficient  $C_{ME}$  en fonction du diamètre équivalent  $D_e$  Comparaison avec le coefficient de masse ajoutée  $C_{11}$

La courbe ainsi présentée peut être partagée en trois régions où apparaît une concurrence entre les effets de sillage et de géométrie :

- Une région correspondant à des diamètres compris entre 2,7 et 3,6 (ou pour des Reynolds allant de 500 à 700) où le  $C_{ME}$  prend une valeur moyenne de 0,5, ce qui correspond à la valeur théorique de  $C_{VM}$  pour des bulles sphériques en fluide parfait. Or pour ces diamètres, le coefficient de Weber relatif à la bulle est supérieur à 1 et, théoriquement, le caractère sphérique des bulles n'est plus respecté et d'autre part, les effets visqueux sont importants. Cependant, l'existence d'impuretés dans le liquide peut assurer cette géométrie et quant aux effets visqueux, l'étude de Rivero (1992) montre que pour une gamme de Reynolds allant de 0,1 à 500, la valeur de  $C_{VM}$  est constante et égale à 0,5.

- Une région correspondant à des diamètres compris entre 3,6 et 4,6 (Reynolds allant de 700 à 950) où les valeurs mesurées pour  $C_{ME}$  sont inférieures à celles prédites par la théorie de fluide parfait  $C_{VM}$ . Dans cette région, la bulle n'est certes plus sphérique, mais son aplatissement est moindre que celui prévu par la théorie et malgré l'existence d'un sillage derrière la bulle, son effet est encore modéré par rapport à celui de géométrie qui donne des valeurs supérieures pour le  $C_{VM}$ .

- Dans la troisième région correspondant à des diamètres compris entre 4,6 et 5,4 (Reynolds allant de 950 à 1300), la valeur expérimentale de  $C_{ME}$  est nettement supérieure à celle donnée dans le cas de fluide parfait. Ceci montre bien la dominance de l'effet du sillage par rapport à celui de géométrie.

### **Conclusion**

Dans ce chapitre, on a voulu appliquer le théorème de Darwin, qui affirme l'égalité de la masse hydrodynamique et de la masse "de dérive" pour un corps en déplacement uniforme dans un fluide parfait, au cas réel d'une bulle d'air en ascension dans un liquide au repos.

Un premier résultat concerne les bulles dont le diamètre est inférieur à 3,6 mm. Malgré la valeur importante du Weber correspondant, leur comportement se rapproche du cas des bulles sphériques et la valeur de  $C_{ME}$  est en moyenne égale à la valeur du coefficient de masse ajoutée, qui est de 0,5.

Un deuxième résultat concerne les bulles de diamètre important (supérieur à 4,5 mm) qui montre l'effet important que joue le sillage dans l'entraînement du liquide, la valeur de  $C_{ME}$  est largement supérieure à la valeur du coefficient de masse ajoutée prédite par la théorie de fluide parfait qui ne tient compte que de l'effet de géométrie.

## CHAPITRE IV

# CALCULS NUMERIQUE ET ANALYTIQUE DU COEFFICIENT DE PORTANCE

## **Introduction**

La détermination du champ de vitesse dans un écoulement de fluide parfait autour d'un obstacle est particulièrement difficile à aborder dans la mesure où elle nécessite la résolution complète de l'équation d'Euler. Cependant, il est possible d'obtenir des solutions dans le cas où le cisaillement reste faible, autrement dit le cas où la vitesse induite par la vorticité à travers la surface de l'obstacle reste faible devant la vitesse relative entre l'écoulement et l'obstacle, ceci afin de traiter le problème par une méthode de perturbation. Quelques auteurs, adoptant cette approche, ont esquissé des solutions dans le cas d'une sphère (seul cas traité jusqu'à présent) soit analytiques (Lighthill, 1956 ; Hall, 1956 ; Lance, 1986), soit numériques (Cousins, 1971 ; Auton, 1983).

Partant des travaux effectués par Goldstein et Atassi (1976), on déterminera le coefficient de portance par une méthode numérique dans le cas d'un ellipsoïde (pour différents aplatissements : 1, 2/3, 1/3 et 2/5) et trouver une relation le liant au coefficient de masse ajoutée.

Une étude analytique sera menée en partant du théorème de la quantité du mouvement, qui va confirmer la relation entre les coefficients de portance et de masse ajoutée déduite numériquement non seulement dans le cas d'un ellipsoïde mais pour tout corps axisymétrique.

**IV-1- Position du problème**

Considérons un obstacle quelconque placé dans un écoulement stationnaire et rotationnel de fluide parfait de champ de vitesse  $\vec{U}$ , le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  satisfait localement l'équation de Helmholtz :

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \quad (\text{IV.1})$$

et le champ de vitesse vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{U} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{U} = \vec{U}_\infty & \text{à l'infini amont,} \\ \vec{U} \cdot \vec{n} = 0 & \text{à la surface de l'obstacle.} \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

où  $\vec{U}_\infty$  est un champ de vitesse connu imposé à l'infini amont.

Il est clair que le problème ainsi posé est impossible à aborder analytiquement et pose de sérieuses difficultés sur le plan numérique. Cependant, ceci devient possible lorsque le champ de vorticité est d  à une faible perturbation d'un écoulement potentiel de champ de vitesse  $\vec{U}_0$ , autrement dit le cas où la vitesse induite par la vorticité à la surface de l'obstacle ( $L\Omega$ ) (où L est une longueur liée à l'obstacle) reste faible devant la vitesse relative entre l'écoulement moyen et l'obstacle  $\vec{U}_\infty$ , c'est-à-dire :

$$\varepsilon = \frac{L \cdot \Omega}{U_\infty} \ll 1 \quad (\text{IV.3})$$

Cette condition nous permet de traiter le problème par une méthode de perturbation en cherchant les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{U} = \vec{U}_0 + \varepsilon \cdot \vec{u} + O(\varepsilon^2) \\ \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \varepsilon \cdot \vec{\omega} + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

avec  $\vec{U}_0$  le champ de vitesse dérivant d'un potentiel  $\phi$ , par conséquent  $\vec{\Omega}_0 = \vec{0}$ , ce qui réduit l'équation de Helmholtz au premier ordre :

$$(\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 \quad (\text{IV.5})$$

et le champ de vitesse  $\vec{u}$  vérifie :

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 & \text{  la surface de l'obstacle,} \\ \vec{u} \rightarrow \vec{u}_\infty & \text{  l'infini amont.} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

$\vec{u}_\infty$  est le champ de vitesse perturbée à l'infini amont.

Pour résoudre le problème ainsi posé, une méthode consiste à chercher tout d'abord le vecteur tourbillon  $\vec{\omega}$  autour de l'obstacle et par la formulation de Biot-Savart, à remonter au champ de vitesse  $\vec{u}$ . Cependant, cette méthode présente des difficultés dans la mesure où le vecteur tourbillon devient infini sur la ligne du point de stagnation arrière. Pour lever cette difficulté, Lighthill (1957), traitant le cas de la sphère, a pris pour la vitesse  $\vec{u}$  à l'aval de l'obstacle celle créée par un système de tourbillons en fer à cheval ayant la même distribution que  $\vec{\omega}$  ; malheureusement cet artifice ne permet d'obtenir que le comportement asymptotique de  $\vec{u}$  loin de l'obstacle.

Goldstein (1979) a traité le problème autrement en résolvant l'équation linéarisée de la fluctuation de vitesse ; il est arrivé au résultat que le champ de vitesse  $\vec{u}$  peut être décomposé en une partie rotationnelle et une partie potentielle :

$$\vec{u} = \vec{u}^{(r)} + \vec{\nabla}\varphi \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{avec } u_i^{(r)} = \bar{A} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial x_i}$$

où  $\bar{A} = \bar{A}(\bar{X} - \bar{i} \cdot U_\infty \cdot t)$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$  un système de coordonnées cartésiennes,  $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3)$ , les  $X_i$  étant les coordonnées langrangiennes correspondant au mouvement de convection pour la vitesse  $\bar{U}_0$ . Celles-ci sont des fonctions des intégrales premières du mouvement, solutions du système :

$$dt = \frac{dx}{U_{0x}} = \frac{dy}{U_{0y}} = \frac{dz}{U_{0z}} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} X_i = x_i, X_1 = t \cdot U_\infty \text{ où } t \text{ est la fonction "de dérive", introduite}$$

par Darwin (1953), définie par :

$$t = x + \int_{-\infty}^x \left( \frac{1}{U_{0x}} - 1 \right) \cdot dx$$

Il est clair que cette méthode n'enlève pas la difficulté du problème dans la mesure où la fonction "de dérive" devient singulière sur la surface de l'obstacle. Cependant, ayant en vue une méthode pour lever cette singularité dans le cas d'un ellipsoïde aplati, nous avons adapté cette approche. Le système (IV.5) est ramené ainsi à la résolution de l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{(r)}, \\ \vec{\nabla} \varphi \rightarrow \vec{u}_{-\infty} - \vec{u}_{-\infty}^{(r)} & \text{à l'infini amont,} \\ \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{n} = -\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{n} & \text{à la surface de l'obstacle.} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

Pour lever cette singularité on introduit le potentiel  $\varphi_1$  tel que :

$$\vec{u} = \vec{u}^{(r)} + (\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\varphi_1) - \vec{\nabla}\varphi_1$$

avec les deux conditions à la surface de l'obstacle :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u}^{(r)} - \nabla^2 \varphi_1 = 0 \qquad \bar{u}^{(r)} \cdot \bar{n} = \bar{\nabla} \varphi_1 \cdot \bar{n}$$

En posant  $\varphi_2 = \varphi^* + \varphi_1$ , ceci nous donne une nouvelle équation de Poisson dont le second membre est maintenant régulier dans tout l'espace :

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi^* = -\bar{\nabla} \cdot \bar{u}^{(r)} + \nabla^2 \varphi_1, \\ \bar{\nabla} \varphi^* \rightarrow \bar{u}_{-\infty} - \bar{u}_{-\infty}^{(r)} + \bar{\nabla} \varphi & \text{à l'infini amont,} \\ \bar{\nabla} \varphi^* \cdot \bar{n} = 0 & \text{à la surface de l'obstacle.} \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

## IV-2- Cas d'un ellipsoïde aplati

### IV-2-a- Cas d'un cisaillement faible

Dans cette partie, nous allons déterminer le champ de vitesse tridimensionnel autour d'un ellipsoïde aplati placé dans un écoulement de fluide parfait faiblement cisailé, par une méthode de perturbation relative au paramètre  $\varepsilon = S.L/U_\infty$  où  $S$  est l'intensité de cisaillement,  $L$  une échelle de longueur liée à l'ellipsoïde ( $L = K.\alpha_0$ , où  $K$  et  $\alpha_0$  sont fonction du petit axe  $a$  et du grand axe  $b$  de l'ellipsoïde :  $a = K.\alpha_0$ ,  $b = K.(1+\alpha_0^2)^{1/2}$  et  $U_\infty$  la vitesse de l'écoulement moyen à l'infini amont. Notons que pour une bulle sphérique de diamètre 5 mm, avec  $U_\infty = 0.2$  m/S,  $\varepsilon = S/40$ , la limitation  $\varepsilon \ll 1$  autorise dans ce cas des cisaillements importants.

La déformation d'une bulle par l'écoulement moyen dépend de la valeur du coefficient de Weber  $W_b = \rho \frac{L.U_\infty^2}{\sigma}$ , alors que l'effet de déformation induit par le cisaillement moyen est quantifié par le rapport des effets de cisaillement aux effets de tension superficielle, c'est à dire le rapport  $W_{bs} = \rho \frac{L^3.S^2}{\sigma}$ . Dans le cadre de l'approximation de faible cisaillement on a  $\frac{W_{bs}}{W_b} = \varepsilon^2 \ll 1$ , ce qui permet de négliger l'effet du cisaillement devant celui du champ non perturbé.

On sait, Moore [6], qu'une bonne approximation de la forme de la bulle, placée dans un écoulement uniforme, est celle d'un ellipsoïde aplati. C'est ces considérations qui ont motivé le choix d'une telle géométrie.

Nous allons adopter un système de coordonnées ellipsoïdales adimensionnelles défini par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha_0} \alpha \cdot \cos \theta \\ y = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{1 + \alpha^2} \sin \theta \cos \lambda \\ z = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{1 + \alpha^2} \sin \theta \sin \lambda \end{cases}$$

L'abscisse curviligne étant donnée par :

$$ds^2 = k_\alpha^2 d\alpha^2 + k_\theta^2 d\theta^2 + k_\lambda^2 d\lambda^2$$

$\alpha_0$  est la valeur de  $\alpha$  à la surface de l'obstacle.

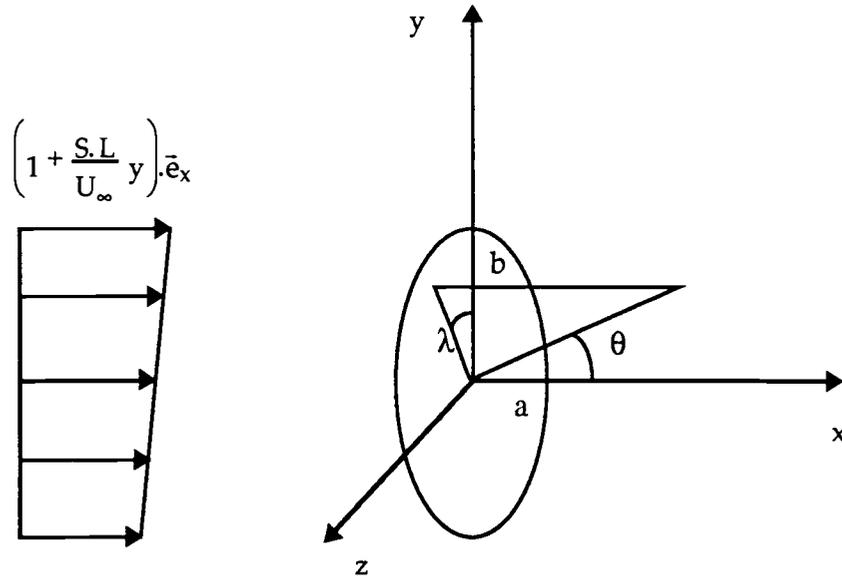


Figure IV.1 : Position du problème et système de coordonnées

avec les facteurs de proportionnalité :

$$\begin{cases} k_\alpha = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \cos^2 \theta}{1 + \alpha^2}} \\ k_\theta = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \theta} \\ k_\lambda = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{1 + \alpha^2} \sin \theta \end{cases}$$

Le champ de vitesse loin en amont de l'ellipsoïde est décrit par l'équation adimensionnelle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{U} = \left( 1 + \frac{S.L}{U_\infty} y \right) \cdot \vec{e}_x = (1 + \varepsilon \cdot y) \cdot \vec{e}_x \quad (\text{IV.10})$$

Sur la surface de l'obstacle, la composante normale du champ de vitesse est nulle.

Le champ de vitesse à l'ordre zéro  $\vec{U}_0$  est celui d'un ellipsoïde placé dans un écoulement uniforme dérivant d'un potentiel  $\phi$  :

$$\phi = \frac{1}{\alpha_0} \cos \theta [\alpha + \delta \cdot (1 - \alpha \cdot \text{Arccot } g\alpha)] \quad (\text{IV.11})$$

la fonction de courant étant donnée par  $\psi = \frac{1}{2 \cdot \alpha_0^2} q \sin^2 \theta$ , par commodité on introduira la

quantité  $\rho_0 = \sqrt{2 \cdot \psi}$ .

en posant

$$q(\alpha) = \delta \cdot \alpha + (1 + \alpha^2) \cdot (1 - \delta \cdot \text{Arccot } g\alpha) \text{ et } \delta = \left( \text{Arccot } g\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0^2} \right)^{-1}$$

les composantes du champ de vitesse  $\bar{U}_0$  dans le repère choisi sont les suivantes:

$$\begin{cases} U_{0\alpha} = \sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{\alpha^2 + \cos^2 \theta}} \frac{q(\alpha)}{1 + \alpha^2} \cos \theta \\ U_{0\theta} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \theta}} \frac{\delta + \alpha \cdot q(\alpha)}{1 + \alpha^2} \sin \theta \\ U_{0\lambda} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Rappelons que l'on cherche le champ de vitesse perturbée  $\bar{u}$  vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \text{rot } \bar{u} & , & \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{u} \cdot \bar{n} = 0 & & \text{à la surface de l'obstacle,} \\ \bar{u} \rightarrow \bar{u}_\infty = y \cdot \bar{e}_x & & \text{à l'infini amont.} \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{avec } \bar{u} = \bar{u}^{(r)} + \bar{\nabla} \phi^* - \bar{\nabla} \phi_1$$

Dans ce cas, on a  $\bar{X} = (t, \rho_0 \cdot \cos \lambda, \rho_0 \cdot \sin \lambda)$ , ce qui nous donne pour la partie rotationnelle de la vitesse :

$$\bar{u}^{(r)} = \rho_0 \cdot \cos \lambda \cdot \bar{\nabla} t \quad (\text{IV.14})$$

#### IV-2-b- Fonction "de dérive"

La fonction "de dérive"  $t$  est définie comme solution de l'équation du mouvement :

$$dt = \frac{k_\alpha \cdot d\alpha}{U_{0\alpha}} = \frac{k_\theta \cdot d\theta}{U_{0\theta}} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} (t - x) = 0$$

où  $U_{0\alpha}$  et  $U_{0\theta}$  sont les composantes de la vitesse de l'écoulement potentiel moyen.

$$dt = \left[ -\frac{\rho_0}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\rho_0}{\sin^2 \theta} + \frac{k_\theta}{U_{0\theta}} \right) \right] d\theta$$

On intègre suivant une ligne de courant  $\rho_0 = \text{constante}$  et on a l'expression suivante :

$$t = \rho_0 \cdot \cot g \theta + \int_\pi^{\theta} \left( \frac{\rho_0}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\alpha_0} \frac{\alpha^2 + \cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{1 + \alpha^2}{\delta + \alpha \cdot q} \right) d\theta \quad (\text{IV.15})$$

ou bien

$$t = \rho_0 \cdot \cot g \theta - \int_\alpha^\infty \frac{1}{\alpha_0} \frac{\alpha^2 + \cos^2 \theta}{q \cdot \cos \theta} \left( 1 - \frac{\sqrt{q}}{\alpha^2 + \cos^2 \theta} \frac{\delta + \alpha \cdot q}{1 + \alpha^2} \right) d\alpha \quad (\text{IV.16})$$

On présente ci-dessous la fonction "de dérive" à  $\theta = 90$  pour différents aplatissements :

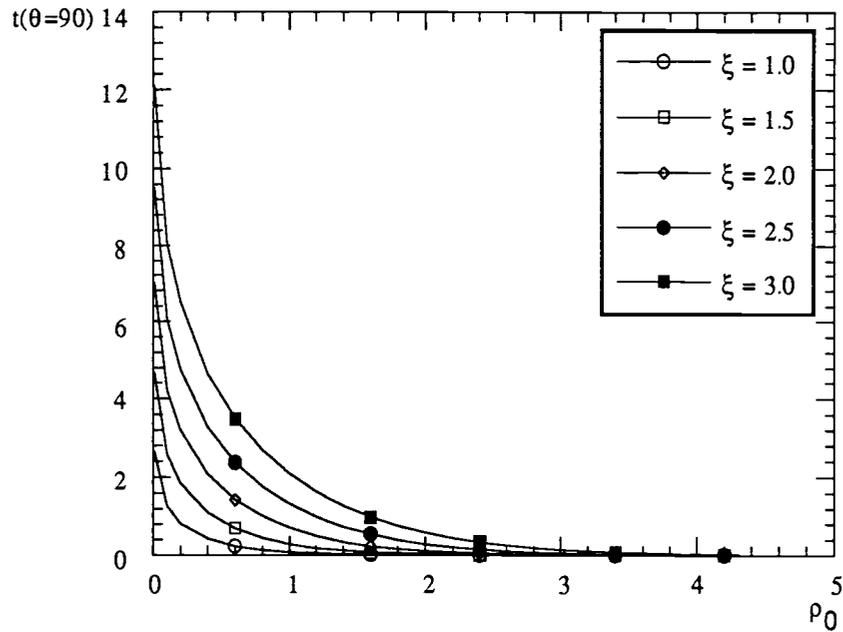


Figure IV.2 : Evolution de la fonction "de dérive" en fonction de  $\rho_0$  à  $\theta=90^\circ$

#### IV-2-c- Détermination de $\varphi_1$

Au voisinage de l'obstacle, la fonction de courant modifiée  $\rho_0$  est petite et représente un paramètre adéquat pour le développement de la fonction "de dérive"  $t$  qui s'écrit :

$$t = A_0 \cdot \left[ (1 + \alpha_0^2) \cdot \log(\operatorname{tg} \theta / 2) + \cos \theta \right] + A_1 \cdot \log \rho_0 + A_2 \cdot \rho_0^2 \cdot \log \rho_0 \quad (\text{IV.17})$$

avec :

$$\begin{cases} A_0 = -\frac{1}{\alpha_0} \frac{1 + \alpha_0^2}{\delta} \\ A_1 = -\frac{1}{\alpha_0} \frac{1 + \alpha_0^2}{\delta + \alpha_0 (1 - \delta \cdot \operatorname{Arccot} \operatorname{tg} \alpha_0)} \\ A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_0^2}{(\delta + \alpha_0 (1 - \delta \cdot \operatorname{Arccot} \operatorname{tg} \alpha_0))^2} \end{cases}$$

Rappelons que l'on cherche le potentiel  $\varphi_1$ , de telle sorte que :

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \left[ \vec{\nabla}(\rho_0 \cdot \cos \lambda \cdot \vec{\nabla} t) - \nabla^2 \varphi_1 \right] = 0 \quad (\text{IV.18})$$

En remplaçant, dans cette expression, la fonction "de dérive"  $t$  par sa valeur au voisinage de l'obstacle et en intégrant par rapport à  $\rho_0$ , on peut vérifier facilement non seulement que le potentiel  $\varphi_1$  donné par :

$$\varphi_1 = \rho_0 \cdot \cos \lambda \cdot \left( A_1 + \frac{2}{3} A_2 \cdot \rho_0^2 \cdot \log \rho_0 + \frac{1}{9} A_2 \cdot \rho_0^2 \right) \quad (\text{IV.19})$$

satisfait la condition (IV.18), mais en plus la quantité  $(\rho_0 \cdot \cos \lambda \cdot \vec{\nabla} t - \vec{\nabla} \varphi_1)$  tend vers zéro lorsque  $\rho_0$  tend vers zéro.

#### IV-2-d- Conditions aux limites

Pour déterminer complètement le potentiel  $\varphi^*$ , il reste à chercher les conditions aux limites correspondant à l'équation de Poisson (IV.9). On a vu dans le présent cas que  $\vec{u}_{-\infty} = y \cdot \vec{e}_x$  et la partie rotationnelle se met sous la forme :

$$\vec{u}^{(r)} = \rho_0 \cdot \cos \lambda \cdot \vec{\nabla} t$$

Or comme  $\rho_0 \cdot \cos \lambda \rightarrow y$  et  $(t-x) \rightarrow 0$  à l'infini amont, ceci nous donne la condition :

$$\vec{\nabla} \varphi^* \rightarrow \vec{\nabla} \varphi_1 \quad \text{à l'infini amont.}$$

Lighthill (1957), traitant le cas d'un corps axisymétrique, donne le vecteur tourbillon sous la forme :

$$\begin{cases} \omega_x = U_x \frac{\partial t}{\partial z} \\ \omega_y = U_y \frac{\partial t}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \omega_z = U_x \frac{\partial t}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

où  $Y$  et  $Z$  sont les fonctions de lignes de courant.

A l'infini aval dans la région du sillage, le comportement de chacun de ces termes se présente comme suit :

$$\begin{cases} U_x \rightarrow U_\infty & ; & U_y \rightarrow 0 & ; & U_z \rightarrow 0 \\ (t-x) \rightarrow \chi & ; & Y \rightarrow y & ; & Z \rightarrow z \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Ceci nous donne :

$$\omega_x = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Ce qui induit un champ de vitesse sous la forme :

$$\bar{u}_{+\infty} = \rho \cdot \cos \lambda \cdot \bar{e}_x + \bar{V} \varphi_2 \quad (\text{IV.23})$$

$$\text{avec } \varphi_2 = \rho \cdot \cos \lambda \cdot \left( \frac{I}{\rho^2} - \chi \right), \quad I = \int_0^\rho \rho' \cdot \chi(\rho') \cdot d\rho'$$

$(\rho, \lambda, \chi)$  un système de coordonnées cylindriques.

On présente sur la figure IV.3 l'évolution de la quantité  $\rho \cdot \chi$  pour différentes excentricités.

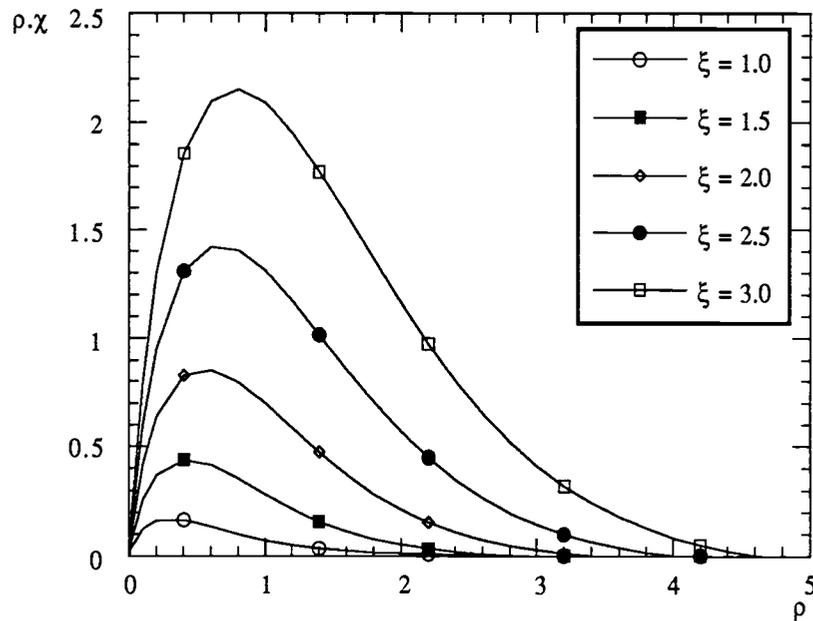


Figure IV.3 : Evolution de  $\rho \cdot \chi$  en fonction de  $\rho$

En dehors de la région du sillage, Lighthill donne pour le champ de vitesse la contribution de deux termes :

- le champ de vitesse induit par un système de tourbillons "en fer à cheval" ayant la même distribution que  $\bar{\omega}$ ,
- la contribution du comportement asymptotique de  $\bar{\omega}$  donnée par Biot et Savard.

Le champ de vitesse est alors donné sous la forme :

$$\bar{u} = \rho \cdot \cos \lambda \cdot \bar{e}_x + \bar{V} \varphi_3 \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{avec : } \varphi_3 = \frac{1 \cos \lambda}{6 \rho} \left( 1 + \frac{x}{r} \frac{2 \rho^2 + r^2}{r^2 - \rho^2} \right)$$

ceci nous donne la condition :

$$\bar{V} \varphi \rightarrow \bar{V} \varphi_1 + \bar{V} \varphi_3 \quad (\text{IV.25})$$

En résumé, on cherche le champ de vitesse  $\vec{U}$  sous la forme :

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \varepsilon \cdot \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \rho_0 \cdot \cos\theta \cdot \vec{\nabla}t + \vec{\nabla}\varphi^* - \vec{\nabla}\varphi_1$$

le potentiel  $\varphi^*$  vérifie le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \varphi^* = -\vec{\nabla}(\rho_0 \cdot \cos\theta \cdot \vec{\nabla}t) + \nabla^2 \varphi_1, & \\ \vec{\nabla}\varphi^* \cdot \vec{n} = 0 & \text{à la surface de l'obstacle,} \\ \vec{\nabla}\varphi^* \rightarrow \vec{\nabla}\varphi_1 & \text{à l'infini amont,} \\ \vec{\nabla}\varphi^* \rightarrow \vec{\nabla}\varphi_1 + \vec{\nabla}\varphi_2 & \text{à l'infini aval dans la région du sillage,} \\ \vec{\nabla}\varphi^* \rightarrow \vec{\nabla}\varphi_1 + \vec{\nabla}\varphi_3 & \text{en dehors de la région du sillage.} \end{array} \right. \quad (\text{IV.26})$$

où  $\rho_0$ ,  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  sont des fonctions connues.

**IV-3- Calcul du coefficient de portance**

Selon le théorème de Bernoulli, la quantité (en négligeant la gravité)

$$h = p + \frac{1}{2}\rho^* |\vec{u}|^2$$

est une constante le long d'une ligne de courant. Appliquons ceci le long de la ligne de courant  $\rho_0 = 0$ .

A l'ordre 1 en  $\varepsilon$  on obtient :

$$p = p_0 - \varepsilon \cdot \rho^* \cdot \vec{U}_0 \cdot \vec{u} \quad (\text{IV.27})$$

En intégrant la pression sur la surface de l'obstacle, on obtient l'expression de la force de portance :

$$\vec{F}_L = -\varepsilon \cdot \rho^* \frac{\delta}{1 + \alpha_0^2} \int_S \frac{\sin \theta}{\sqrt{\alpha_0^2 + \cos^2 \theta}} u_\theta(\alpha_0, \theta, \lambda) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{IV.28})$$

En utilisant la relation de symétrie (Auton 1987) :

$$u_\theta(\alpha_0, \theta, \lambda) = u_\theta(\alpha_0, \theta, 0) \cdot \cos \lambda \quad (\text{IV.29})$$

on obtient l'unique composante de la force de portance :

$$F_{Ly} = -\varepsilon \cdot \rho^* \frac{1}{\alpha_0} \frac{\delta \cdot \pi}{\sqrt{1 + \alpha_0^2}} I \quad (\text{IV.30})$$

$$\text{avec } I = \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{\sqrt{\alpha_0^2 + \cos^2 \theta}} u_\theta(\alpha_0, \theta, 0) \cdot d\theta$$

On présente ci-dessous (Figure IV.4) la vitesse tangentielle dans le plan diamétral ( $\lambda = 0$ ) à la surface de l'ellipsoïde pour différents aplatissements  $\xi$ , en faisant remarquer que dans le cas de la sphère, on obtient les mêmes résultats que ceux donnés par Auton (1987) (Figure IV.5).

Comparons  $F_{Ly}$  avec l'expression vectorielle :

$$\vec{F}_L = \rho^* \cdot V \cdot C_L \cdot \vec{U}_0 \times \vec{\omega}_0 \quad (\text{IV.31})$$

où  $V$  est le volume de l'ellipsoïde.

On obtient alors le coefficient de portance :

$$C_L = -\frac{3}{4} \frac{\delta}{1 + \alpha_0^2} I \quad (\text{IV.32})$$

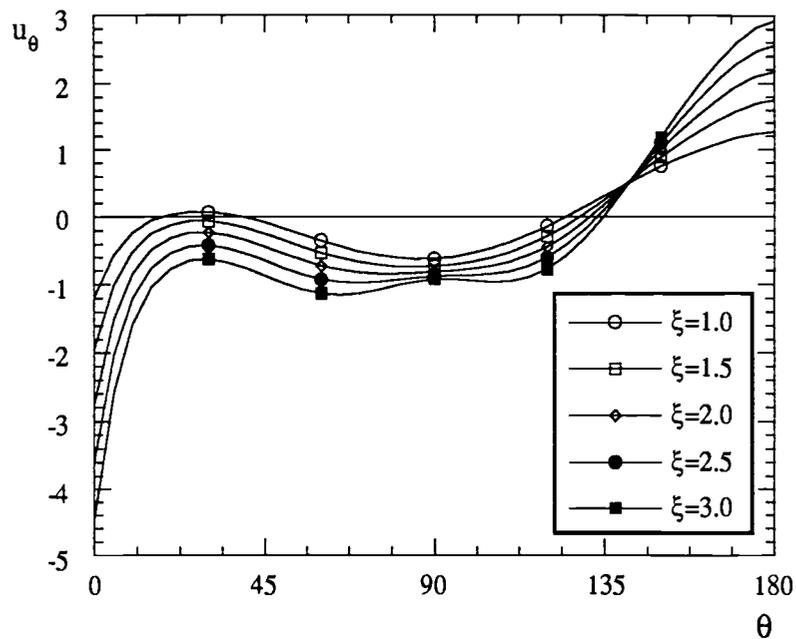


Figure IV.4 : Evolution de la vitesse tangentielle en fonction de  $\theta$  dans le plan  $\lambda = 0$  pour différents aplatissements de l'ellipsoïde.

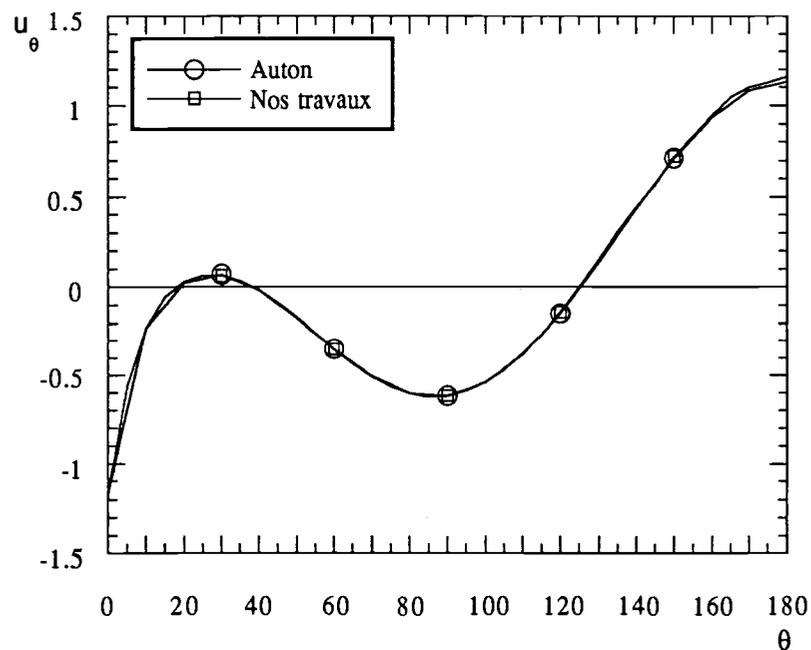


Figure IV.5 : Evolution de la vitesse tangentielle en fonction de  $\theta$  dans le plan  $\lambda = 0$  dans le cas de la sphère, comparaison avec les résultats de Auton.

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de  $C_L$  pour différentes valeurs de l'aplatissement de l'ellipsoïde :

$\xi$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$C_L$	.500	.796	1.105	1.417	1.730

Tableau I : Valeurs du coefficient de portance en fonction de  $\xi$

Dans la littérature (Lamb), l'expression du coefficient de masse ajoutée relatif à un ellipsoïde se déplaçant uniformément et parallèlement à son petit axe est donnée par :

$$C_{11} = \frac{\gamma_0}{2 - \gamma_0}$$

$$\text{avec } \gamma_0 = \frac{2}{e^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \text{Arcsin } e \right) \text{ et } e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

a et b étant respectivement le petit et le grand axe de l'ellipsoïde.

En comparant ces deux résultats, on constate une parfaite égalité entre le coefficient de portance et le coefficient de masse ajoutée comme le montre la figure suivante :

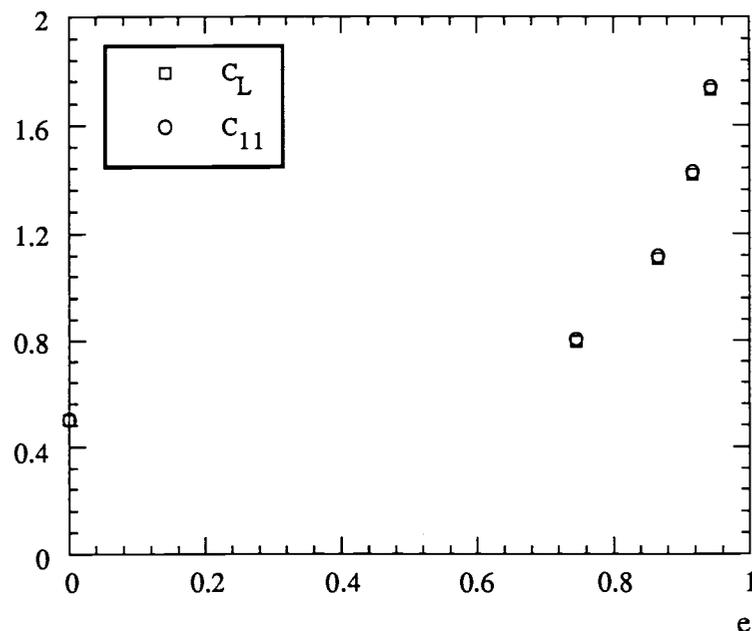


Figure IV.6 : Evolution des coefficients de portance et de masse ajoutée en fonction de l'excentricité de l'ellipsoïde.

#### IV-4- Calcul analytique du coefficient de portance

##### IV-4-a- Expression de la force

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré numériquement l'égalité entre les coefficients de portance et de masse ajoutée dans le cas d'un ellipsoïde aplati. Nous allons maintenant chercher un argument analytique pour cette égalité. Insistons sur le fait que le raisonnement qui sera tenu ici est valable pour tout corps axisymétrique.

Nous avons vu que l'on peut mettre la vitesse et la pression sous la forme :

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \varepsilon \cdot \vec{u} \quad \text{et} \quad P = P_0 + \varepsilon \cdot p \quad (\text{IV.33})$$

$$\text{avec} \quad \vec{u} = \vec{u}^{(r)} + \vec{\nabla} \varphi ; \quad \vec{U}_0 = \vec{U}_\infty + \vec{\nabla} \varphi_0$$

$$\text{où} \quad \varphi_0 = \frac{\vec{C} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$$

La perturbation de pression étant liée au potentiel  $\varphi$  par :

$$p = -\rho^* \frac{D\varphi}{Dt} = -\rho^* \cdot \vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{IV.34})$$

L'expression de la force est donnée par le théorème de la quantité de mouvement :

$$\vec{F}_L = - \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S [\rho^* (\vec{U} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U} + P \cdot \vec{n}] \cdot dS \quad (\text{IV.35})$$

$$\text{posons} \quad \vec{I}_S = \frac{1}{\rho^* \cdot \varepsilon} \int_S [\rho^* (\vec{U} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U} + P \cdot \vec{n}] \cdot dS \quad (\text{IV.36})$$

où  $\rho^*$  est la masse volumique du liquide,  $S$  une surface englobant le corps.

Dans notre cas on va prendre pour  $S$  (figure IV.7) un cylindre de longueur  $2X$  et de rayon  $\Sigma$  tel que :  $X \gg L$  et  $\Sigma \gg L$ , où  $L$  est une longueur liée au corps.

Au premier ordre en  $\varepsilon$  on a :

$$\rho^* (\vec{U} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U} + P \cdot \vec{n} = \varepsilon \rho^* \cdot \left[ (\vec{U}_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U}_0 + \frac{p}{\rho^*} \vec{n} \right]$$

d'où :

$$\vec{I}_S = \iint_S [(\vec{U}_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{U}_0 - (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{n}] \cdot dS$$

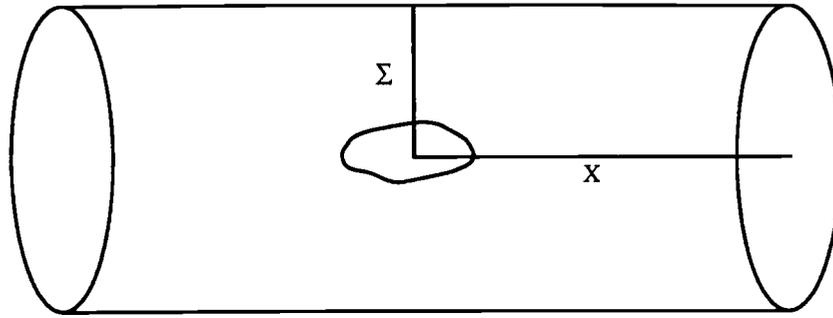


Figure IV.7 : Schéma du domaine d'intégration.

On montre dans l'annexe I, après projection de  $\vec{l}_S$  sur l'axe des  $y$  et en faisant tendre  $S$  vers l'infini, que la force se met sous la forme :

$$\frac{F_{Ly}}{\varepsilon \rho} = -V_D + H \quad (\text{IV.37})$$

où :  $V_D$  est le volume "de dérive" (Lighthill, 1957) défini par :

$$V_D = 2 \cdot \pi \int_0^{\infty} \rho \cdot \chi(\rho) \cdot d\rho$$

et  $H$  est donnée par :

$$H = \iint [y - f(y)] \frac{\partial \chi}{\partial y} dy dz + 6 \cdot C_x \cdot X \iint f(y) \frac{y}{r^{5/2}} dy dz$$

$f(y)$  étant une fonction définissant le profil de perturbation de vitesse imposé à l'infini amont.

En comparant avec l'expression vectorielle :

$$\vec{F}_L = \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{U}_0 \times \vec{\omega}_0 \quad (\text{IV.38})$$

on a la relation suivante:

$$C_L = \frac{V_D}{V} + \frac{1}{V} H \quad (\text{IV.39})$$

En définissant le coefficient de masse ajoutée comme étant le rapport du volume "de dérive"  $V_D$  au volume du corps  $V$ , on a alors la relation entre les coefficients de portance et de masse ajoutée :

$$C_L = C_{11} + \frac{1}{V} H \quad (\text{IV.40})$$

#### IV-4-b- Cas d'une perturbation en cisaillement linéaire à l'infini amont

Lorsque l'on impose, à l'infini amont, un profil de perturbation de vitesse sous la forme d'un cisaillement linéaire, c'est-à-dire  $f(y) = y$ ,

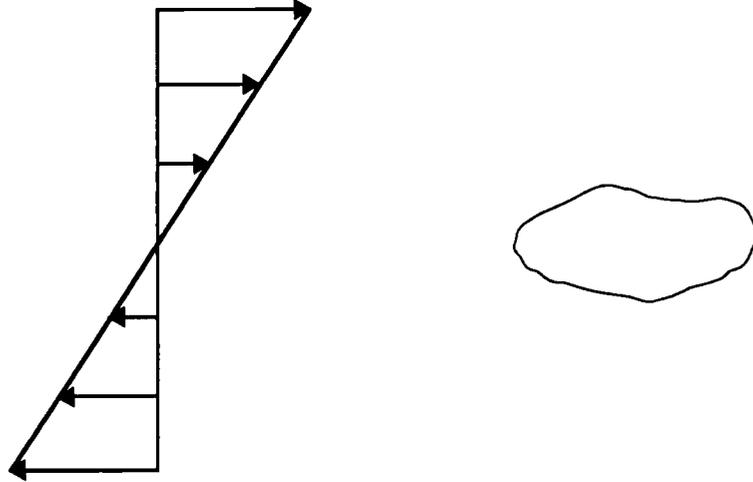


Figure IV.8 : Cas d'une perturbation sous forme d'un cisaillement linéaire

On montre dans l'annexe I que  $H$  prend l'expression suivante :

$$H = -2\pi \cdot C_x \cdot \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ \Sigma \rightarrow \infty}} \left[ \frac{X \cdot \Sigma^2}{(X^2 + \Sigma^2)^{3/2}} + 2 \frac{X}{(X^2 + \Sigma^2)^{1/2}} - 2 \right] \quad (\text{IV.41})$$

On remarque que lorsque l'on fait tendre  $S$  vers l'infini, c'est-à-dire  $X$  vers l'infini et  $\Sigma$  vers l'infini, le résultat de  $H$  dépend du chemin suivi et varie entre la valeur minimale 0 (qui donnerait l'égalité  $C_L = C_{11}$ ) et la valeur maximale  $4\pi C_x$ . La raison de la divergence de cette intégrale vient du fait que nous avons pris comme perturbation à l'infini amont un cisaillement linéaire en  $y$  :

$$\bar{U}_\infty = \bar{U}_0 + \varepsilon \cdot y \cdot \bar{e}_x \quad (\text{IV.42})$$

L'expression de  $H$  provient exactement de l'interaction entre le cisaillement ( $\varepsilon y e_x$ ) et le potentiel de l'écoulement moyen  $\nabla \phi_0$ . Or lorsque l'on commence par faire tendre  $S$  vers l'infini dans la direction  $y$ , le terme  $(\varepsilon y)$  devient important de telle sorte que l'on ne peut plus traiter le problème par une méthode de perturbation. Par contre, lorsque l'on commence par faire tendre  $S$  vers l'infini dans la direction de  $x$ , l'intégration se fait en gardant le terme  $\varepsilon \cdot y$  borné, ce qui donne bien l'égalité entre  $C_L$  et  $C_{11}$ .

On montre dans le paragraphe suivant qu'un choix plus approprié de la perturbation de vitesse amont, permet de lever cette difficulté.

#### IV-4-c- Cas d'une perturbation en tangente hyperbolique à l'infini amont

Afin d'éviter ce problème de convergence, nous avons choisi comme perturbation à l'infini amont un cisaillement en tangente hyperbolique, ceci afin de borner ce terme et respecter l'hypothèse de faible cisaillement :

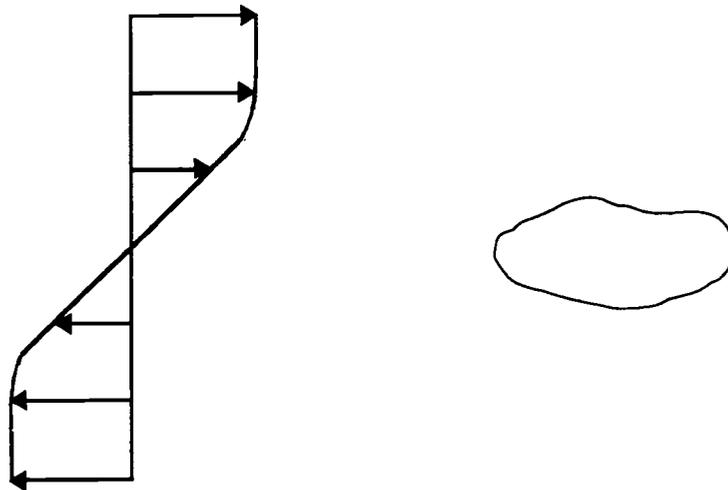


Figure IV.9 : Cas d'une perturbation en tangente hyperbolique

La vitesse à l'infini amont ayant pour expression :

$$\bar{U}_\infty = \bar{U}_0 + \varepsilon \cdot \lambda \cdot \text{th}(y/\lambda) \cdot \bar{e}_x \quad \text{avec } \lambda \text{ très grand} \quad (\text{IV.43})$$

$$f(y) = \lambda \cdot \text{th}(y/\lambda)$$

On montre cette fois-ci (annexe I) que la quantité H est nulle, ce qui nous conduit à l'égalité recherchée :

$$C_L = C_{11} \quad (\text{IV.44})$$

**Conclusion**

Partant des équations linéarisées pour un écoulement de fluide parfait faiblement cisailé, nous avons pu dans ce chapitre :

- déterminer la perturbation du champ hydrodynamique liée à la présence d'un ellipsoïde aplati,
- par intégration numérique de la pression à la surface de l'obstacle, nous avons montré l'égalité numérique entre les coefficients de portance et de masse ajoutée.

D'autre part, une analyse en champ lointain et un choix approprié de la perturbation de vitesse amont, nous ont permis, par un calcul fondé sur le théorème de la quantité de mouvement, de montrer que l'égalité entre les coefficients de portance et de masse ajoutée est valable pour tout corps axisymétrique.

## CHAPITRE V

# INTERACTION HYDRODYNAMIQUE ENTRE DEUX BULLES

**Introduction**

Les expériences précédentes avaient pour but de clarifier la force exercée par le liquide sur une bulle isolée. Dans les situations pratiques, on a à prédire le comportement d'une population de bulles. Lorsque la concentration est faible, on se contente généralement de considérer que les bulles évoluent indépendamment les unes des autres. Lorsque le taux de vide devient plus élevé, il est nécessaire de prendre en compte les interactions hydrodynamiques entre bulles. Nous nous sommes attachés, dans cette partie, à l'étude de ces interactions, dans le cadre restreint de deux bulles de même diamètre (5 mm), évoluant dans un liquide réel au repos. L'analyse des trajectoires permet d'obtenir une estimation de la force mutuelle d'interaction entre ces bulles.

### V-1- Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé ici se compose de deux parties principales :

- un réservoir en verre rempli d'eau de robinet de dimension  $40 \times 40 \times 60$  cm<sup>3</sup> au fond duquel sont placés deux injecteurs de bulles en inox dont la hauteur et la distance qui les séparent peuvent être ajustées,

- un distributeur de bulles qui permet l'injection simultanée de deux bulles de même diamètre (5 mm) que l'on va décrire ci-dessous.

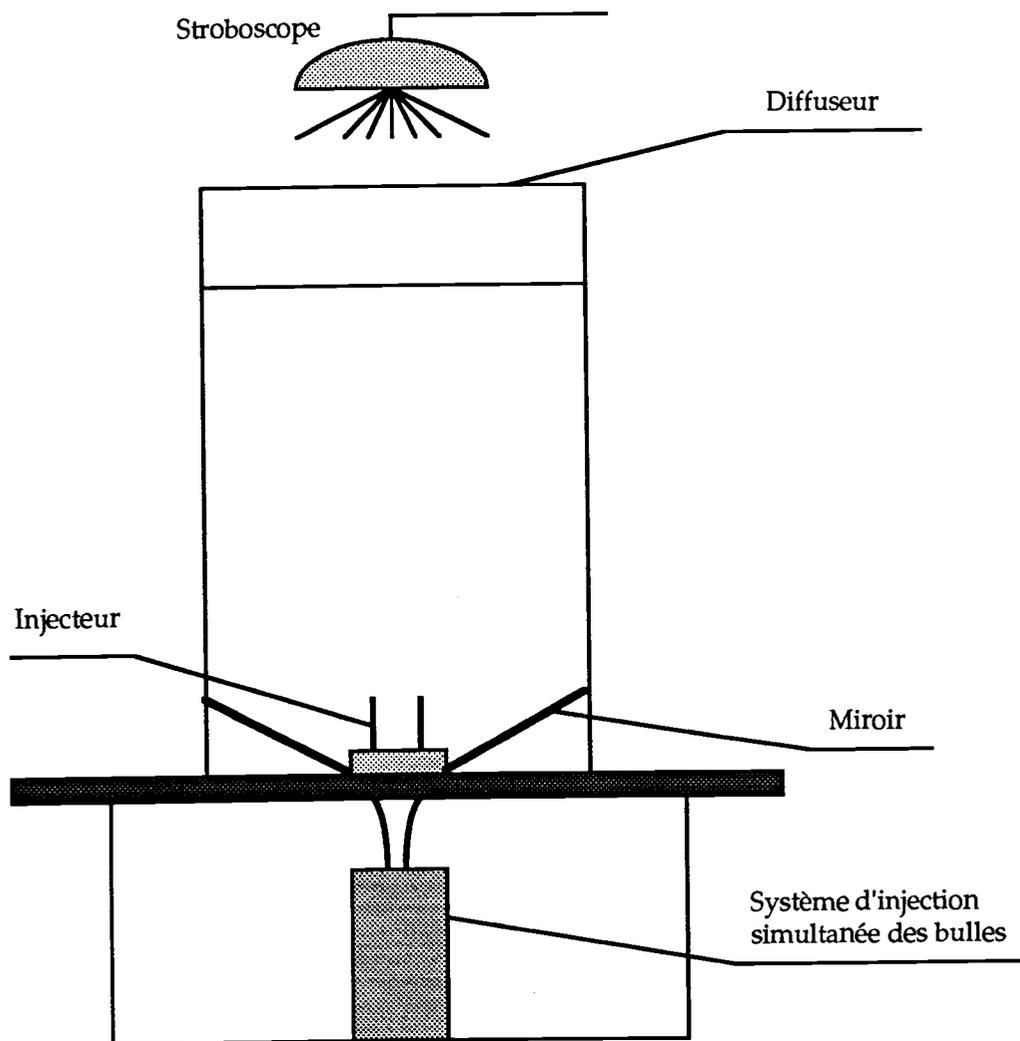


Figure V.1 : Schéma de l'installation

La difficulté majeure rencontrée dans cette expérience a été de trouver un système d'injection qui permette d'une part le contrôle du volume des bulles et d'autre part leur injection simultanée. A cette fin, nous avons mis au point un système constitué de deux distributeurs rotatifs,  $D_1$  et  $D_2$ , à trois positions qui fonctionnent parallèlement comme le montre le schéma V.2.

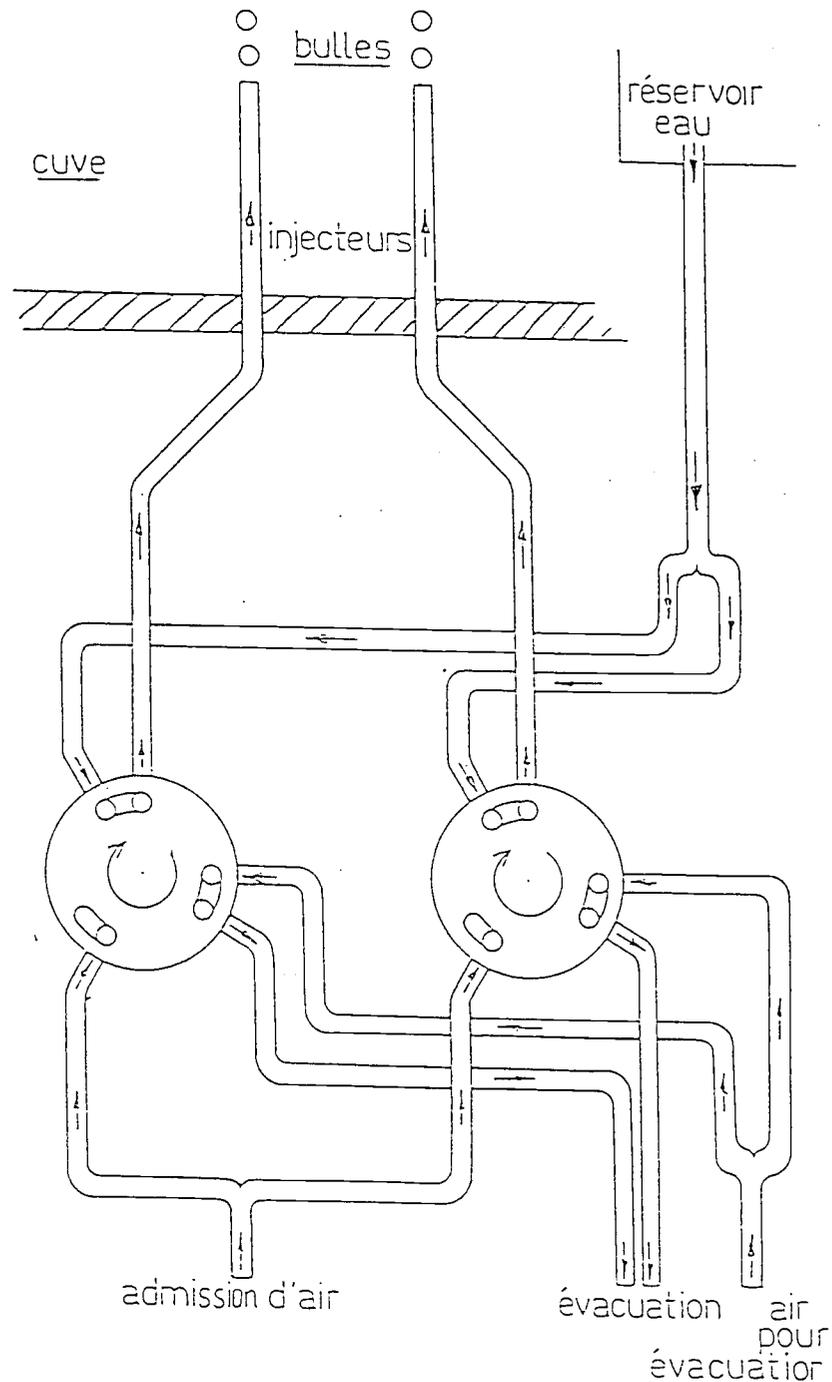


Figure V.2 : Distributeurs rotatifs

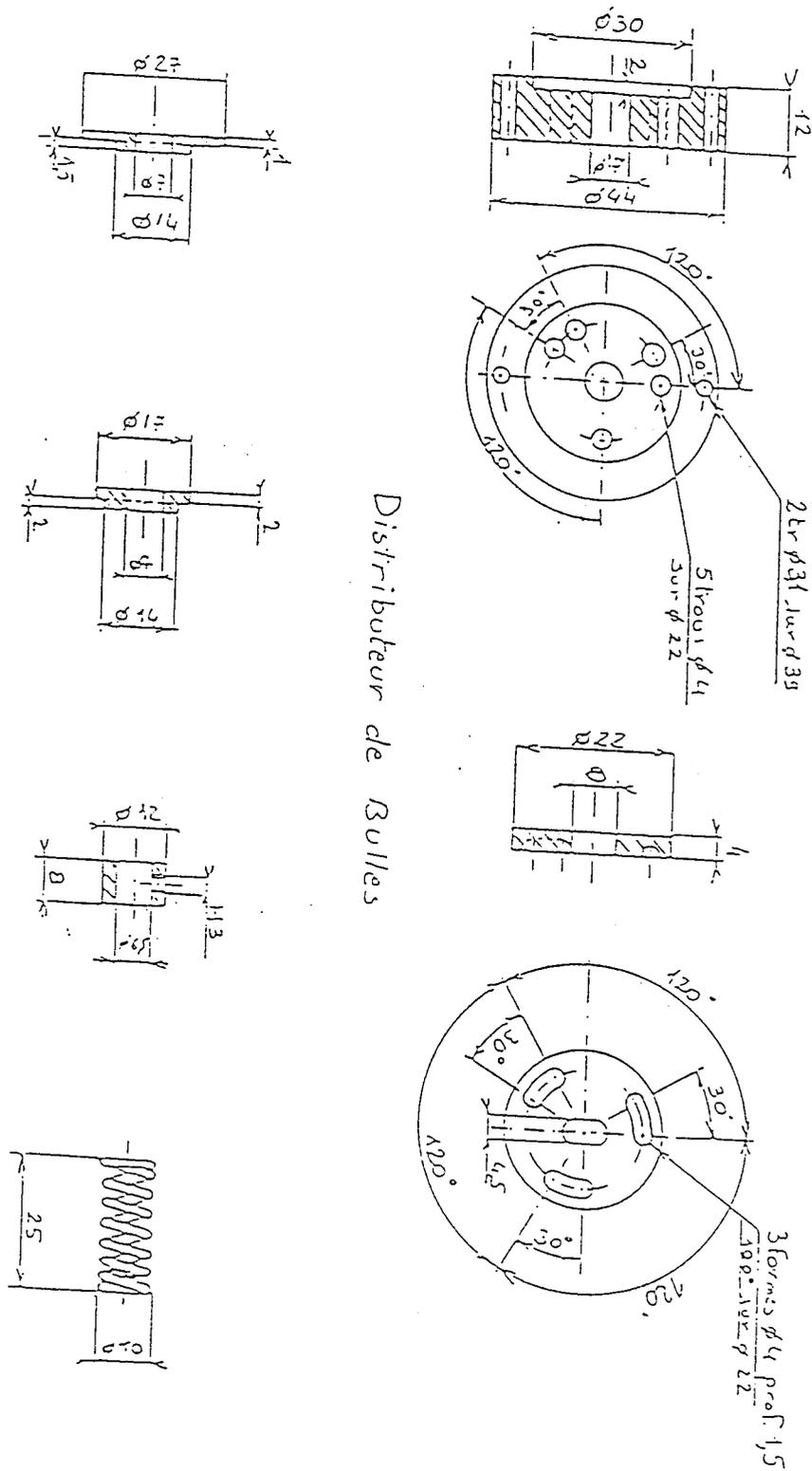


Figure V.3 : Schéma de l'élément coaxial

Chacune de ces parties est constituée par deux éléments cylindriques coaxiaux ( $c_1$ ) et ( $c_2$ ) :

- l'élément ( $c_1$ ), qui est entraîné par un moteur pas à pas, contient trois cavités qui permettent de calibrer le volume de la quantité d'air à injecter selon la pression imposée en (1) et les dimensions de la cavité ;

- l'élément ( $c_2$ ), qui est fixe, contient cinq trous placés de telle sorte que le cycle suivant soit réalisé :

- une phase d'admission d'air : la cavité de l'élément ( $c_1$ ) est placée en position (1) où elle est remplie d'air à 1.5 bars,

- une phase de refoulement : la cavité de l'élément ( $c_1$ ) est placée en position (2) où la quantité d'air qui est y emmagasinée est acheminée vers l'injecteur à l'aide d'un débit d'eau arrivant par le tuyau (d.e.) d'un réservoir extérieur,

- et enfin une phase de purge (3) qui permet l'évacuation de l'eau résiduelle dans la cavité pour une nouvelle opération.

La distance relative initiale entre les deux bulles est imposée par l'ajustement de la distance entre les injecteurs et les hauteurs séparant leurs extrémités. Nous avons relevé des trajectoires pour des distances relatives initiales allant de 2 à 8 fois le diamètre de la bulle  $D$ . Les mesures pour des distances inférieures à  $2 \cdot D$  ont été impossibles à réaliser car la méthode photographique utilisée ne permet pas de séparer les deux bulles de manière univoque lorsque celles-ci sont trop proches.

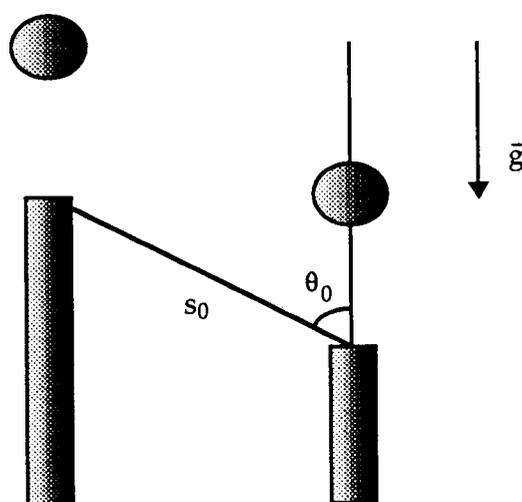


Figure V.4

On a relevé les trajectoires à l'aide de techniques photographiques à expositions multiples. Les bulles sont éclairées par le haut, à l'aide d'un stroboscope à fréquence variable, à travers un écran diffuseur. Deux miroirs étaient placés au fond du réservoir afin d'avoir un éclairage maximum de la surface des bulles. La sensibilité du film nous a obligé à fixer la fréquence du stroboscope à 1500 flashes par minute, ce qui correspond à une distance de moins de 1 cm entre positions successives. A l'aide de deux appareils photographiques placés à angle droit, l'un étant placé dans la ligne reliant les deux injecteurs, nous avons pu obtenir la trajectoire tridimensionnelle.

Les coordonnées ont été relevées à l'aide d'une table traçante reliée à un ordinateur. Les effets d'aberration optique due aux objectifs des appareils photographiques utilisés ont été corrigés à partir des distorsions angulaires mesurées sur une grille de référence.

## V-2- Résultats expérimentaux

Une étude systématique des trajectoires des deux bulles a été faite pour des distances relatives initiales allant de 2 à 8 fois le diamètre de la bulle  $D$ . La séparation et l'orientation initiales ont été calculées à partir de la position relative des bulles à une distance de 4 cm des injecteurs, ceci d'une part pour éviter toute influence qui peut être due au débit d'eau permettant d'acheminer les bulles vers les injecteurs, et d'autre part à cette distance, chacune des bulles aurait atteint sa vitesse terminale si elle était isolée.

Auparavant, l'étude des trajectoires pour une bulle isolée a été effectuée avec la même méthode décrite ci-dessus. On trouve ainsi, pour la valeur du diamètre choisi ici ( $D = 5\text{ mm}$ ), que la trajectoire de la bulle peut être décrite approximativement par l'équation d'une hélice  $z = a.\theta$ , avec  $a = 0,56\text{ cm}$  et un diamètre équivalent de l'hélice de 6 mm. La projection de la vitesse de la bulle sur l'axe des  $z$  donne une vitesse terminale de l'ordre de  $0,22 \pm 0,01\text{ m/s}$ .

Lorsque deux bulles sont injectées, leur trajectoire relative est modifiée en fonction de leur position relative initiale. A de faibles distances de séparation initiale, inférieures à  $4*D$ , on observe une forte interaction : lors de leur déplacement, les bulles s'attirent et effectuent une rotation vers une orientation parallèle au mouvement. Pour des distances comprises entre  $4*D$  et  $6*D$ , l'interaction devient faible. Au delà de  $6*D$ , on n'observe pas de modification significative des trajectoires. Malgré la distance relativement faible sur laquelle celles-ci ont pu être déterminées (25 cm), on peut en conclure que les interactions sont certainement négligeables. Les principaux résultats sont résumés dans le tableau V.1. Les figures V.10 et V.11 représentent le mouvement relatif type entre les deux bulles pour quelques valeurs de la position relative initiale.

Il est intéressant de comparer ces résultats à ceux obtenus par Kok (1989) dans le cas de bulles de faible diamètre se déplaçant dans de l'eau pure, et ceux donnés par Fortes et alii (1987) dans le cas de sphères solides.

Kok a étudié la trajectoire de deux bulles de petit diamètre (0,5 mm) se déplaçant dans de l'eau très pure. Cet auteur constate que les bulles s'attirent lorsque l'angle, formé entre la ligne reliant les centres et l'accélération gravitationnelle, est compris entre  $50^\circ$  et  $130^\circ$ . Durant leur déplacement, les bulles effectuent une rotation vers une direction transversale au mouvement. En comparant ces trajectoires expérimentales avec celles obtenues dans le cas de la théorie de l'écoulement potentiel décrite dans le premier paragraphe de ce chapitre, Kok arrive au résultat que dans le cas de l'eau très pure, le déplacement relatif des

bulles n'est pas induit par le sillage, mais par la répartition de la pression dans le champ d'écoulement irrotationnel autour des bulles.

La dynamique d'une paire de sphères solides est différente de celle des bulles. Fortes et alii montrent que dans ce cas, la ligne reliant les centres des sphères effectue plutôt une rotation parallèle au sens du mouvement de telle sorte que la deuxième bulle est entraînée dans le sillage de l'autre. Par conséquent, l'interaction entre sphères solides peut être attribuée essentiellement à l'effet de sillage.

Comme dans notre expérience l'eau utilisée contient des impuretés, on observe un comportement intermédiaire entre ces deux situations extrêmes : en effet, tant que l'une des bulles est loin du sillage de l'autre, le comportement se rapproche plutôt du cas étudié par Kok ; lorsqu'une bulle est proche du sillage de la précédente, l'influence de celui-ci devient importante et son effet prépondérant. Ceci est montré dans la figure V.4 où on a présenté les trajectoires des deux bulles dans le cas d'une séparation initiale de  $2 \cdot D$  et un angle de  $60^\circ$ .

Dans le tableau V.1, on résume les principaux résultats obtenus pour différents cas.

$\theta_0$	$s_0/D$	Aspiration par le sillage	$\theta_0$	$s_t/D$
$90^\circ$	2.5	non	$90^\circ$	1.1
	3.5	non	$90^\circ$	2.4
	6	non	$90^\circ$	6
$60^\circ$	2.5	oui	$0^\circ$	1.2
	3.5	non	$45^\circ$	2.2
	6	non	$60^\circ$	6
$40^\circ$	2.5	oui	$0^\circ$	1.3
	3.5	oui	$20^\circ$	2
	6	non	$40^\circ$	6

Tableau V.1 : Résumé des résultats

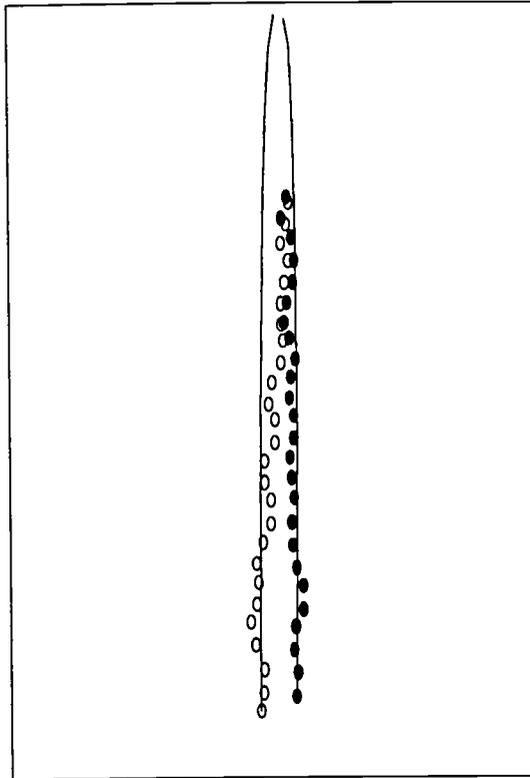


Figure V.4 : Trajectoire des deux bulles pour une séparation initiale ( $s_0=2 \cdot D$  et  $\theta_0=60^\circ$ )  
 ----- : Théorie de fluide parfait

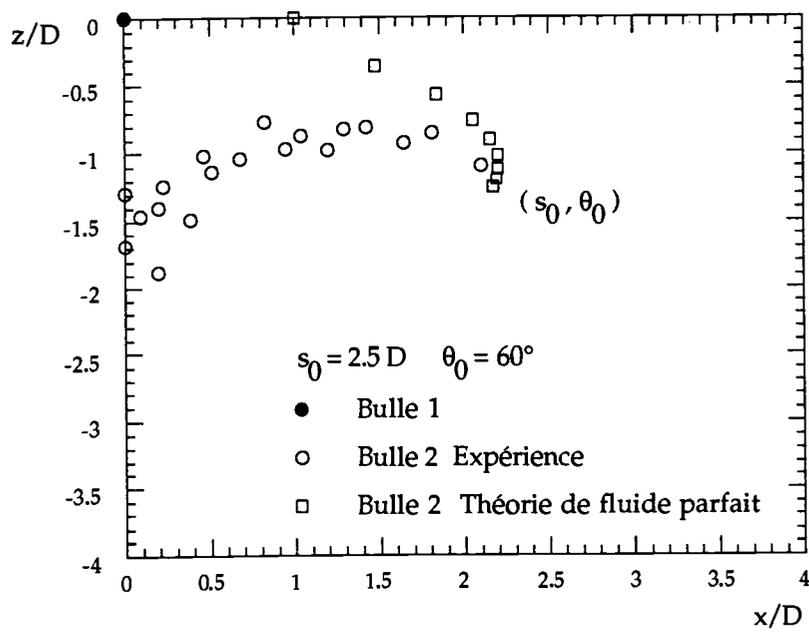


Figure V : Mouvement relatif des deux bulles pour une séparation initiale  
 ( $s_0=2.5 \cdot D$  et  $\theta_0=60^\circ$ )

Conformément à l'approche adoptée au cours de cette étude, qui consiste à représenter la force à l'aide d'un découplage en différentes contributions, on cherche à représenter l'effet des interactions hydrodynamiques en introduisant dans l'équation du mouvement d'une bulle une force supplémentaire décrivant ces interactions. Comme la méthode photographique utilisée permet d'accéder à la loi horaire du mouvement, cette force peut en principe être obtenue par simple différenciation. Compte tenu des imprécisions sur la position des bulles, ceci nécessite une procédure de lissage (ici, lissage polynômial).

On écrit alors la force exercée sur la bulle sous la forme :

$$\vec{F} = \vec{F}_{VM} + \vec{F}_D + \vec{F}_B + \vec{F}_{INT}$$

où  $F_{INT}$  est la force d'interaction entre les deux bulles.

Afin de faire une comparaison avec la théorie de fluide parfait, nous allons prendre le cas où l'angle de séparation initiale est de  $90^\circ$ , ce qui correspond à la situation où les effets du sillage ne sont pas ressentis par les deux bulles. On présente sur les courbes V.6 et V.8 les cas d'une séparation initiale respectivement de  $2.5 \cdot D$  et  $3.5 \cdot D$ . A l'erreur de la mesure près, les deux courbes montrent un bon accord qualitatif avec la théorie de fluide parfait dans le cas des petites distances. Cependant, à grandes distances, l'effet de cette force d'interaction a une portée plus grande dans le cas de notre expérience que dans celui du fluide parfait.

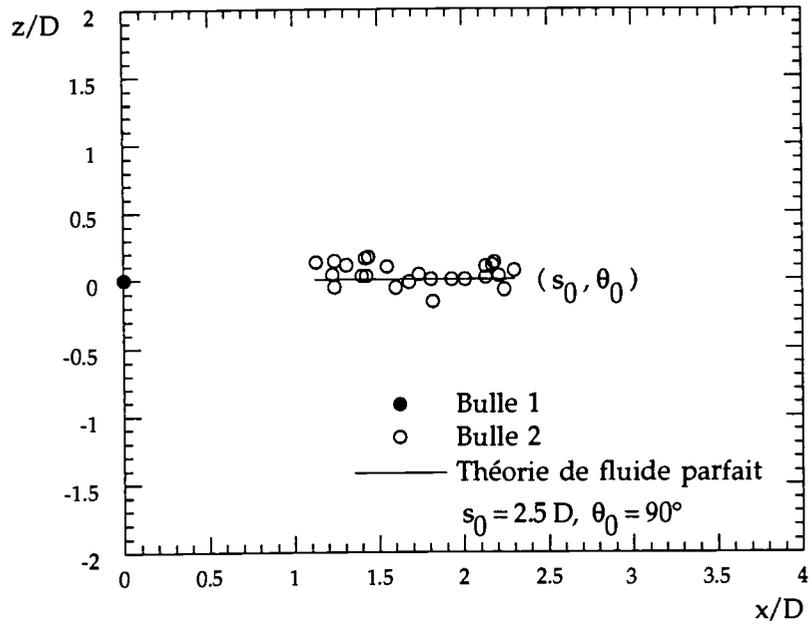


Figure V.5 : Mouvement relatif des deux bulles

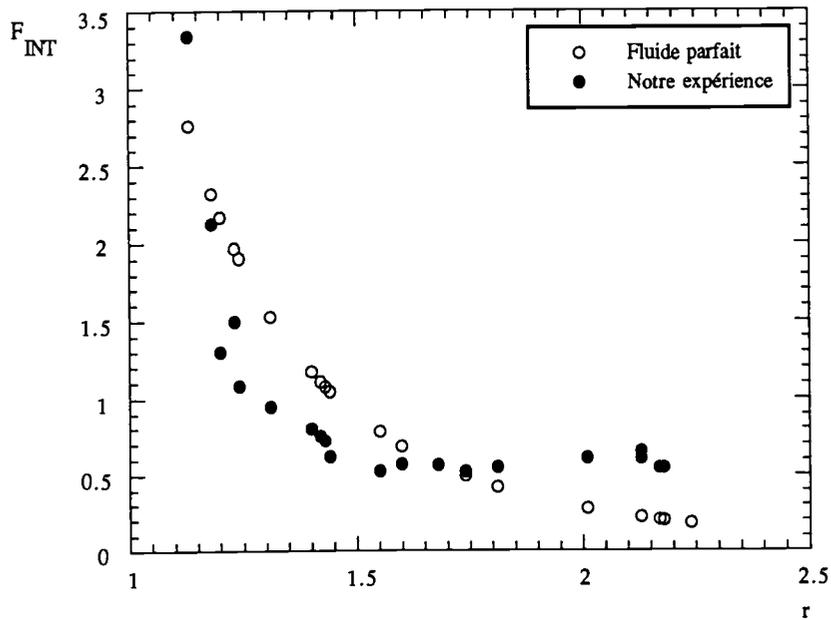


Figure V.6 : Valeur de la force d'interaction dans le cas  $r_0 = 2.5 \cdot D$  et  $\theta_0 = 90^\circ$

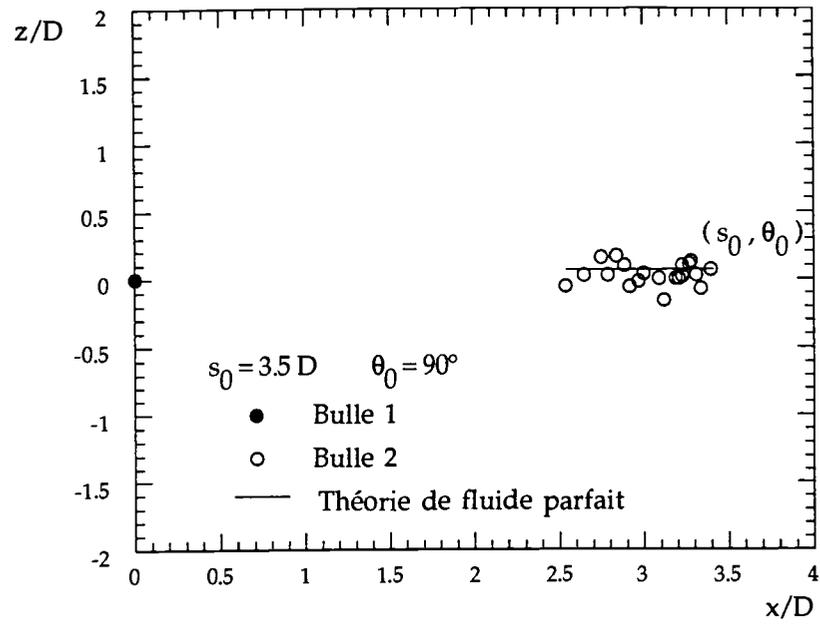


Figure V.7 : Mouvement relatif des deux bulles

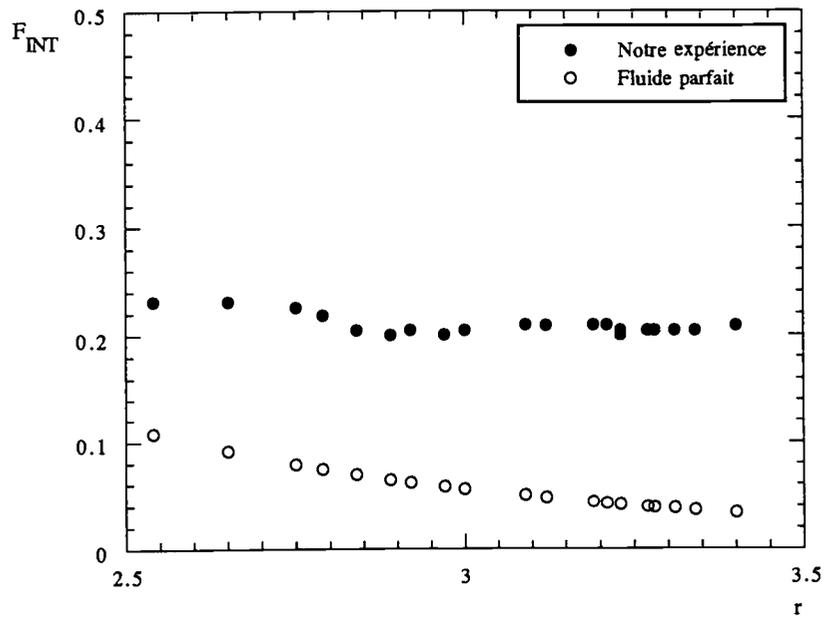


Figure V.8 : Valeur de la force d'interaction dans le cas  $r_0 = 3.5 \cdot D$  et  $\theta_0 = 90^\circ$

La situation est complètement différente lorsqu'il y a un angle de séparation différent de  $90^\circ$  où les effets du sillage deviennent importants. On présente sur la figure V.9 la valeur de cette force en fonction de l'abscisse  $x$  dans le cas d'une séparation initiale de  $2.5 \cdot D$  avec un angle de  $60^\circ$ , en comparaison avec le cas de fluide parfait.

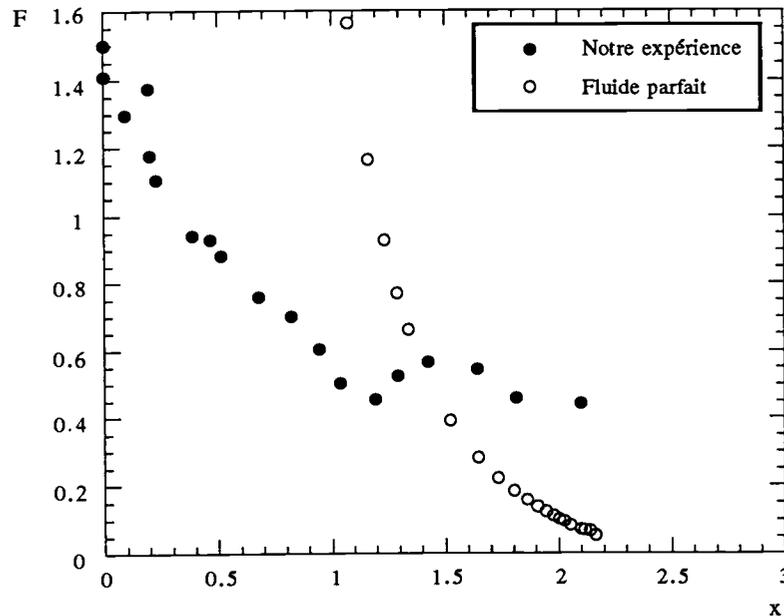
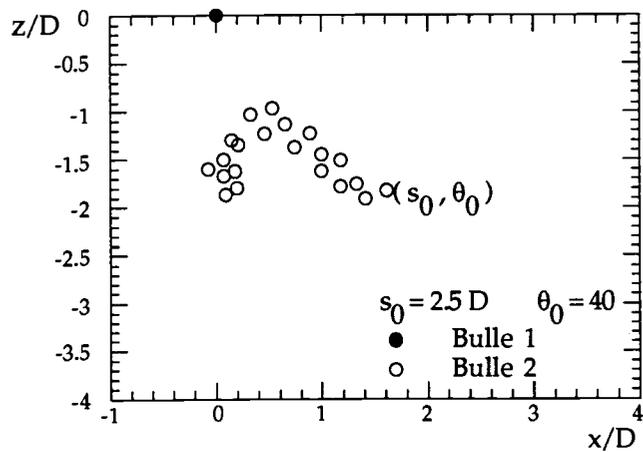
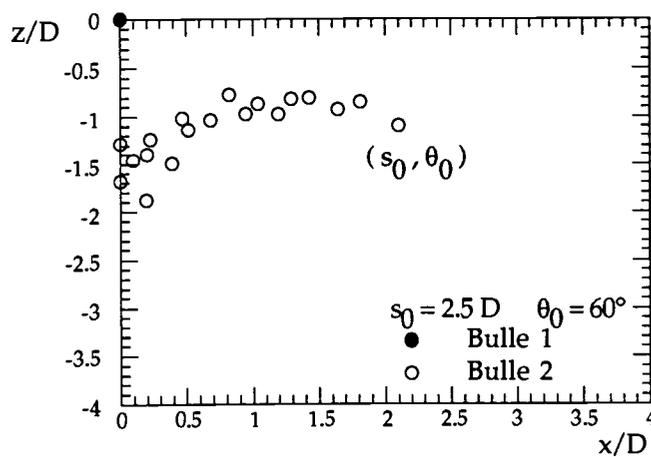
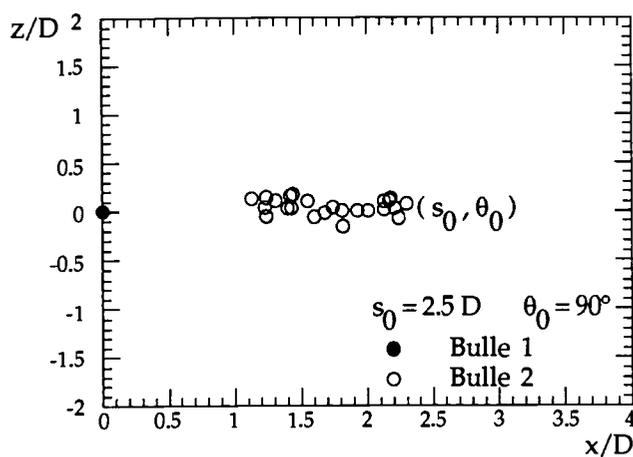
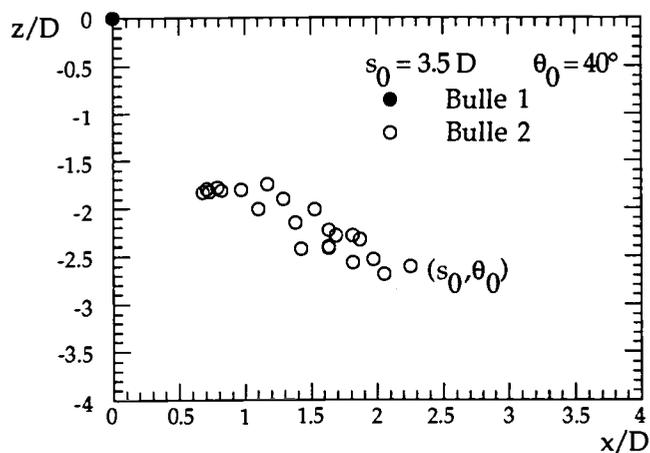
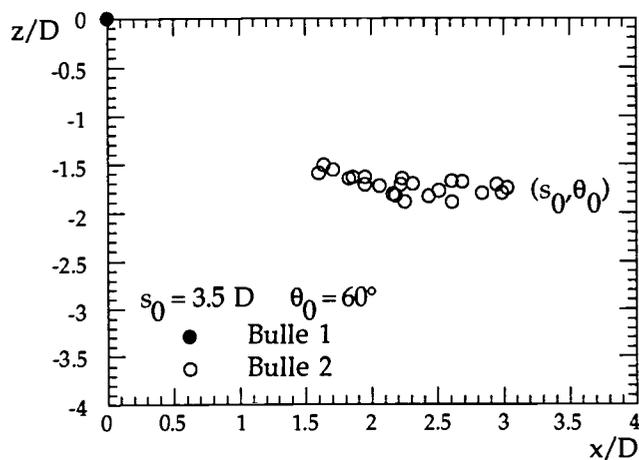
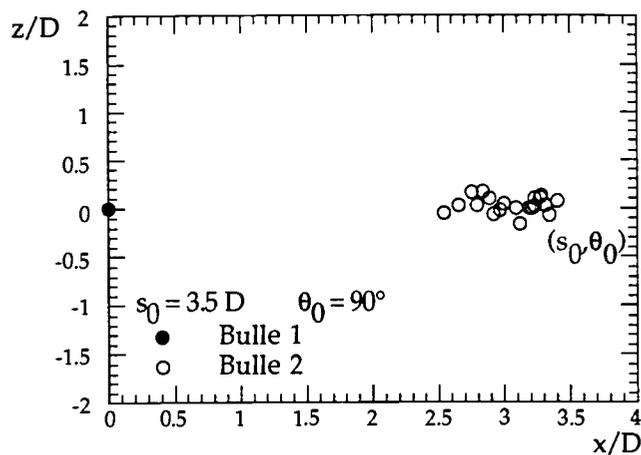


Figure V.9 : Valeur de la force d'interaction dans le cas  $r_0 = 2.5 \cdot D$  et  $\theta_0 = 60^\circ$

Malheureusement, nous n'avons pas pu déterminer une expression évidente de cette force dans le cas d'un angle de séparation quelconque, la force devant être une fonction compliquée de  $(r, \theta)$ .



Figures V.10 : Mouvements relatifs des deux bulles pour  $s_0 = 2.5 \cdot D$  et  $\theta_0 = 90^\circ, 60^\circ$  et  $40^\circ$



Figures V.11 : Mouvements relatifs des deux bulles pour  $s_0 = 3.5 \cdot D$  et  $\theta_0 = 90^\circ, 60^\circ$  et  $40^\circ$

### Conclusion

Dans cette expérience on a pu mettre au point un système permettant l'injection simultanée de deux bulles avec une séparation initiale que l'on peut contrôler. Bien que l'on ait présenté ici des résultats pour une seule valeur du diamètre des bulles, ce système permet de faire varier ce facteur en changeant la valeur de la pression à l'entrée du distributeur. L'utilisation d'une série de ces distributeurs peut permettre l'étude du comportement d'une ligne de bulles (cette étude s'insère dans un programme ultérieur).

A l'aide d'une technique photographique à expositions multiples, on a pu déterminer les trajectoires de deux bulles en interaction hydrodynamique pour différents cas de la position relative initiale entre les deux bulles. Ceci nous a permis de déterminer la force d'interaction. La comparaison avec la théorie de fluide parfait nous a conduit aux deux conclusions suivantes :

- dans le cas où la ligne reliant les centres des deux bulles est perpendiculaire à la direction du déplacement, l'interaction peut très bien être décrite par la théorie de fluide parfait,
- dans le cas d'un angle quelconque, l'interaction entre les deux bulles est due essentiellement aux effets du sillage.

## CONCLUSION GENERALE

---

Bien que des progrès considérables aient été accomplis ces dernières années dans le développement de méthodes numériques pour décrire les écoulements diphasiques, il s'avère qu'il subsiste encore des lacunes quant à la modélisation des termes de transferts interfaciaux apparaissant dans les équations moyennées régissant ces écoulements faute d'informations expérimentales à l'échelle de la bulle.

Par ce travail nous avons voulu apporter une contribution à la modélisation du terme de transfert interfacial représentant les forces que la phase liquide exerce sur la surface d'une bulle de gaz. Vu la complexité du problème, nous avons été amené à chercher des modèles physiques simplifiés permettant de déduire des informations concernant cette force à l'échelle d'une bulle isolée placée dans des configurations bien précises :

- L'étude du comportement d'une bulle placée dans un écoulement de rotation solide, dans une gamme de Reynolds allant de 10 à 2600 nous a permis de déduire les principaux résultats suivant :

1- La valeur du coefficient de traînée n'est pas affectée par la rotation et correspond à celle donnée dans la littérature dans le cas d'un écoulement uniforme et stationnaire,

2- la valeur expérimentale du coefficient de portance est comprise entre celle prédite par la théorie de fluide parfait et celle donnée numériquement dans le cas des Reynolds petits,

3- la sensibilité du coefficient de portance aux effets de géométrie.

- La mesure de la quantité de fluide déplacé par une bulle isolée s'est avérée égale à la masse hydrodynamique pour une gamme de diamètres compris entre 2.7 et 3.6 mm. Au delà de cette dernière, cette valeur s'éloigne nettement de la valeur donnée dans le cadre de fluide parfait.

- L'effet de la géométrie de la bulle sur la valeur du coefficient de portance a été mis en évidence par l'étude consacrée à la détermination du champ de vitesse autour d'un ellipsoïde par une méthode numérique dans le cadre de fluide parfait. On a ainsi montré que la valeur de ce coefficient est égale à la valeur du coefficient de masse ajoutée. Ce résultat a été généralisé par une méthode analytique à tout corps axisymétrique.

- Et enfin l'étude de l'interaction hydrodynamique entre deux bulles nous a permis de conclure que la théorie de fluide parfait reste valable tant que l'une des deux bulles est loin du sillage de l'autre.

Bien que la gamme des paramètres étudiés ici reste limitée, nous pensons que ces résultats aideront à l'amélioration des lois de fermeture utilisées dans les modélisations des

écoulements à bulles. Une première tentative dans ce sens a été effectuée au laboratoire par K. Petersen, qui a montré que la valeur expérimentale du coefficient de portance obtenue dans ce travail permettait de prédire correctement la distribution du taux de vide dans la couche limite à bulles sur une plaque plane explorée par Marié et Moursali ( 1991).

Cette démarche fondée sur des expériences simples s'est avérée donc fructueuse. Cependant, compte tenu des difficultés expérimentales, liées en partie au contrôle de la pureté des liquides, il semble qu'une voie d'avenir pour compléter ces informations soit la simulation numérique, qui permettrait en particulier de quantifier les effets de déformation de l'interface.

# ANNEXES

## ANNEXE I

ANALYSE DIMENSIONNELLE

En recensant tous les paramètres du problème les coefficients  $C_T$  et  $C_N$  se mettent nécessairement sous la forme :

$$\begin{cases} C_T = C_T(V_E, \omega, D, \mu, \rho, \sigma) \\ C_N = C_N(V_E, \omega, D, \mu, \rho, \sigma) \end{cases}$$

ou encore, sous la forme adimensionnelle :

$$\begin{cases} C_T = C_T\left(\frac{V_E \cdot D}{\nu}, \rho \frac{V_E^2 \cdot D}{\sigma}, \frac{\omega \cdot D}{V_E}\right) \\ C_N = C_N\left(\frac{V_E \cdot D}{\nu}, \rho \frac{V_E^2 \cdot D}{\sigma}, \frac{\omega \cdot D}{V_E}\right) \end{cases}$$

$C_T$ :

L'expérience nous montre que  $C_T$  est équivalent à  $C_D$ . Or on sait que dans le cas d'une bulle en mouvement uniforme sous l'effet de la force de flottabilité on les relations suivantes :

$$\begin{cases} C_D = C_D\left(\frac{V_T \cdot D}{\nu}, \rho \frac{V_T^2 \cdot D}{\sigma}\right) \\ C_D = \frac{4 \cdot g \cdot D}{3 \cdot V_T^2} \end{cases}$$

En éliminant  $V_T$  dans la première relation à partir de la deuxième relation on a :

$$C_D = F(M, B_0)$$

où  $M$  et  $E$  sont le nombre de Morton et d'Eötvös définis par :

$$M = \frac{g \cdot \mu^4}{\rho \cdot \sigma^3} \quad , \quad B_0 = \sqrt{E} \quad , \quad E = \frac{\rho \cdot g \cdot D^2}{\sigma}$$

où la quantité  $M$  ne fait intervenir que les caractéristiques du milieu où évolue la bulle.

$M$  : le nombre de Morton,                       $E$ : le nombre d'Eötvös,

$B_0$  : le nombre de Bond.

$C_N$ :

$$C_N = C_N \left( \frac{V_E \cdot D}{v}, \rho \frac{V_E^2 \cdot D}{\sigma}, \frac{\omega \cdot D}{V_E} \right)$$

En multipliant l'argument 1 par l'argument 3, en divisant l'argument 1 par l'argument 2 et en gardant l'argument 1 on a :

$$C_N = C_N \left( \frac{V_E \cdot D}{v}, \frac{\mu^2}{\rho \sigma D}, \frac{\omega \cdot D^2}{v} \right)$$

Or lorsque la bulle atteint son point d'équilibre on a :

$$C_T = \frac{4}{3} \frac{g \cdot D}{V_E^2} \cos \theta_E \quad ; \quad C_N = \frac{1}{2} \frac{g \cdot r_E}{V_E^2} \sin \theta_E$$

Ceci nous permet donc d'éliminer la vitesse  $V_E$  :

$$V_E = V_E(g, D, \omega, C_T, C_N)$$

ou bien 
$$\frac{V_E}{\omega D} = V_E \left( C_T, C_N, \frac{g}{\omega^2 D} \right)$$

d'où :

$$C_N = C_N \left( \frac{D}{v} \omega D \cdot V_E \left( C_T, C_N, \frac{g}{\omega^2 D} \right), \frac{\mu^2}{\rho \sigma D}, \frac{\omega D^2}{v} \right)$$

ou bien :

$$C_N = C_N \left( \frac{\omega D^2}{v}, C_T, \frac{g}{\omega^2 D}, \frac{\mu^2}{\rho \sigma D} \right)$$

En remplaçant  $C_T$  par sa valeur donnée ci-dessus on a :

$$C_N = C_N \left( \frac{\omega D^2}{v}, \frac{g D^3}{v^2}, \rho \frac{g D^2}{\sigma}, \frac{g}{\omega^2 D}, \frac{\mu^2}{\rho \sigma D} \right)$$

On peut montrer facilement que les deux derniers argument s'obtiennent à partir des trois premiers, on a donc :

$$C_N = C_N \left( \frac{\omega D^2}{v}, \frac{g D^3}{v^2}, \rho \frac{g D^2}{\sigma} \right)$$

Or notre expérience nous montre que  $C_N$  est indépendant de  $v$  et de  $\omega$ . On a enfin :

$$C_N = C_N(M, B_0)$$

## ANNEXE II

CALCUL DE LA FORCE DE PORTANCE :

$$\bar{I}_S = \int_S \left[ (\bar{U}_0 \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u} + (\bar{u} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{U}_0 - (\bar{U}_0 \cdot \bar{\nabla} \varphi) \cdot \bar{n} \right] \cdot dS$$

comme  $\bar{u} = \bar{u}^{(r)} + \bar{\nabla} \varphi$  et  $\bar{U}_0 = \bar{U}_\infty + \bar{\nabla} \varphi_0$  avec  $\varphi_0 = \frac{\bar{C} \cdot \bar{r}}{r^3}$  et  $\bar{C} = (C_x, C_y, C_z)$

on a alors :

$$\begin{aligned} \bar{I}_S = & \int_S (\bar{U}_\infty \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u}^{(r)} \cdot dS + \int_S (\bar{\nabla} \varphi_0 \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u}^{(r)} \cdot dS + \int_S (\bar{u} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{U}_\infty \cdot dS + \int_S (\bar{u}^{(r)} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{\nabla} \varphi_0 \cdot dS \\ & + \int_S (\bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{n}) \cdot \bar{\nabla} \varphi_0 \cdot dS + \int_S \bar{U}_\infty \times (\bar{\nabla} \varphi \times \bar{n}) \cdot dS + \int_S \bar{\nabla} \varphi_0 \times (\bar{\nabla} \varphi \times \bar{n}) \cdot dS \end{aligned}$$

or 
$$\int_S (\bar{u} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{U}_\infty \cdot dS = \bar{U}_\infty \cdot \int_S (\bar{u} \cdot \bar{n}) \cdot dS = \bar{U}_\infty \cdot \int_S \text{div } \bar{u} \cdot dS = 0$$

et 
$$\int_S \bar{U}_\infty \times (\bar{\nabla} \varphi \times \bar{n}) \cdot dS = \bar{U}_\infty \times \int_S (\bar{\nabla} \varphi \times \bar{n}) \cdot dS = \bar{U}_\infty \times \int_V \text{rot}(\bar{\nabla} \varphi) \cdot dV = \vec{0}$$

ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \bar{I}_S = & \int_S (\bar{U}_\infty \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u}^{(r)} \cdot dS + \int_S (\bar{\nabla} \varphi_0 \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u}^{(r)} \cdot dS + \int_S (\bar{u}^{(r)} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{\nabla} \varphi_0 \cdot dS \\ & + \int_S (\bar{\nabla} \varphi \cdot \bar{n}) \cdot \bar{\nabla} \varphi_0 \cdot dS + \int_S \bar{\nabla} \varphi_0 \times (\bar{\nabla} \varphi \times \bar{n}) \cdot dS \end{aligned}$$

Or comme  $\nabla \varphi_0$  est en  $1/r^3$  et la condition de décroissance à l'infini de  $\varphi$ , les deux dernières intégrales tendent asymptotiquement vers zéro à l'infini.

Il reste donc :

$$\bar{I}_S = \int_S (\bar{U}_\infty \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u}^{(r)} \cdot dS + \int_S (\bar{\nabla} \varphi_0 \cdot \bar{n}) \cdot \bar{u}^{(r)} \cdot dS + \int_S (\bar{u}^{(r)} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{\nabla} \varphi_0 \cdot dS$$

Projetons sur l'axe y :

$$\begin{aligned} I_{Sy} = & \int_S (\bar{U}_\infty \cdot \bar{n}) \cdot (\bar{u}^{(r)} \cdot \bar{e}_y) \cdot dS + \int_S (\bar{\nabla} \varphi_0 \cdot \bar{n}) \cdot (\bar{u}^{(r)} \cdot \bar{e}_y) \cdot dS + \int_S (\bar{u}^{(r)} \cdot \bar{n}) \cdot (\bar{\nabla} \varphi_0 \cdot \bar{e}_y) \cdot dS \\ = & I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Le calcul de ces trois intégrales se fait en tenant compte du comportement des intégrands sur la surface du domaine d'intégration :

$$\text{Sur } S_0 \quad \vec{U}_\infty \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{Sur } S_1 \quad \vec{U}_\infty \cdot \vec{n} = 1 \text{ et } \vec{u}^{(r)} = f(y) \cdot \vec{e}_x$$

$$\text{Sur } S_2 \quad \vec{U}_\infty \cdot \vec{n} = -1, \quad \vec{u}^{(r)} = f(y) \cdot \vec{e}_x + f(y) \cdot \vec{\nabla} \chi \text{ et } \vec{\nabla} \chi \text{ est perpendiculaire à } \vec{e}_x$$

### Calcul de $I_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_S (\vec{U}_\infty \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS \\ &= \int_{S_0} (\vec{U}_\infty \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS + \int_{S_1} (\vec{U}_\infty \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS + \int_{S_2} (\vec{U}_\infty \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS \end{aligned}$$

Comme  $S_1$  est équivalent à  $S_2$  et  $f$  ne dépend que de  $y$  :

$$I_1 = - \int_{S_2} f(y) \frac{\partial \chi}{\partial y} dS$$

### Calcul de $I_2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_S (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS \\ &= \int_{S_0} (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS + \int_{S_1} (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS + \int_{S_2} (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{n}) (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{e}_y) \cdot dS \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $S_0$  tend asymptotiquement vers zéro à l'infini, il reste donc :

$$I_2 = - \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} f(y) \frac{\partial \chi}{\partial y} dS$$

### Calcul de $I_3$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_S (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{n}) (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{e}_y) \cdot dS \\ &= \int_{S_0} (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{n}) (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{e}_y) \cdot dS + \int_{S_1} (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{n}) (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{e}_y) \cdot dS + \int_{S_2} (\vec{u}^{(r)} \cdot \vec{n}) (\vec{\nabla} \varphi_0 \cdot \vec{e}_y) \cdot dS \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $S_3$  tend asymptotiquement vers zéro à l'infini et comme  $\vec{V}_\chi$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_x$ , on a donc :

$$I_3 = \int_{S_1} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS - \int_{S_2} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS$$

Il reste enfin :

$$\begin{aligned} I_{Sy} &= - \int_{S_2} f(y) \frac{\partial \chi}{\partial y} dS - \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} f(y) \frac{\partial \chi}{\partial y} dS + \int_{S_1} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS - \int_{S_2} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS \\ &= \int_{S_2} y \frac{\partial \chi}{\partial y} dS - \int_{S_2} (y - f(y)) \frac{\partial \chi}{\partial y} dS - \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} f(y) \frac{\partial \chi}{\partial y} dS \\ &\quad + \int_{S_1} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS - \int_{S_2} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \int_{S_2} y \frac{\partial \chi}{\partial y} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\Sigma \rho \cdot \cos^2 \theta \frac{d\chi}{d\rho} \rho \cdot d\rho d\theta \\ &= \pi \cdot \int_0^\Sigma \rho^2 \frac{d\chi}{d\rho} d\rho \\ &= \pi \cdot \left\{ [\rho^2 \cdot \chi(\rho)]_0^\Sigma - 2 \cdot \int_0^\Sigma \rho \cdot \chi(\rho) \cdot d\rho \right\} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cdot \chi(\rho) = 0$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \cdot \chi(\rho) = 0$  et  $V_D = 2\pi \cdot \int_0^\infty \rho \cdot \chi(\rho) \cdot d\rho$

Ceci nous donne donc :

$$\lim_{S_2 \rightarrow \infty} \int_{S_2} y \frac{\partial \chi}{\partial y} dS = -V_D$$

On peut facilement montrer que la troisième intégrale dans l'expression de  $I_{Sy}$  est nulle .

De même on montre que :

$$\int_{S_1} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS - \int_{S_2} f(y) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dS = 6 \cdot C_x \cdot X \iint f(y) \frac{y}{r^{5/2}} dy dz$$

On a enfin :

$$\frac{F_{Ly}}{\rho \cdot \varepsilon} = \lim_{S \rightarrow \infty} I_{Sy} = -V_D + H$$

$$\text{avec } H = \iint [y - f(y)] \frac{\partial \chi}{\partial y} dy dz + 6 \cdot C_x \cdot X \iint f(y) \frac{y}{r^{5/2}} dy dz$$

CAS D'UN CISAILLEMENT LINÉAIRE :

Dans le cas d'un cisaillement linéaire c'est à dire  $f(y) = y$ , la première intégrale dans l'expression de H étant nulle on a:

$$H = 6.C_x.X \iint f(y) \frac{y}{r^{5/2}} dy dz = -2.\pi.C_x. \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ \Sigma \rightarrow \infty}} \left[ \frac{X.\Sigma^2}{(X^2 + \Sigma^2)^{3/2}} + 2 \frac{X}{(X^2 + \Sigma^2)^{1/2}} - 2 \right]$$

On voit bien que H dépend du chemin suivi pour effectuer l'intégration.

CAS D'UN CISAILLEMENT TANGENTE HYPERBOLIQUE :

Dans le cas d'un cisaillement en th, c'est-à-dire  $f(y) = \lambda.th(y/\lambda)$ , qui tend vers un cisaillement linéaire lorsque l tend vers l'infini, on va donc choisir l très grand. Dans ce cas on montre que :

$$6.C_x.X \int_{S_2} f(y) \frac{y}{r^{5/2}} dS < 6.\pi.C_x. \left[ -\frac{1}{3} \frac{X.\Sigma}{(X^2 + \Sigma^2)^{3/2}} + \frac{1}{3} \frac{1}{X} \frac{\Sigma}{(X^2 + \Sigma^2)^{1/2}} \right]$$

Le deuxième terme de cette inégalité tend vers zéro lorsque X et  $\Sigma$  tendent vers l'infini, on a alors :

$$\lim_{S \rightarrow \infty} 6.C_x.X \int_{S_2} f(y) \frac{y}{r^{5/2}} dS = 0$$

$$\text{D'où } H = \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Sigma} \left[ \rho.\cos\theta - \lambda.th\left(\frac{\rho.\cos\theta}{\lambda}\right) \right] \frac{d\chi}{d\rho} \cos\theta \, d\rho \, d\theta$$

$$= \lim_{\Sigma \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Sigma_1} \left[ \rho.\cos\theta - \lambda.th\left(\frac{\rho.\cos\theta}{\lambda}\right) \right] \frac{d\chi}{d\rho} \cos\theta \, d\rho \, d\theta +$$

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma} \left[ \rho.\cos\theta - \lambda.th\left(\frac{\rho.\cos\theta}{\lambda}\right) \right] \frac{d\chi}{d\rho} \cos\theta \, d\rho \, d\theta$$

Choisissons  $\Sigma_1$  de telle sorte que  $\Sigma_1 < \lambda.\pi/2$ , on peut donc développer le th dans la première intégrale :

$$th\left(\frac{\rho}{\lambda} \cos\theta\right) = \frac{\rho}{\lambda} \cos\theta - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^3 \cos^3\theta + \dots$$

La première intégrale donne :

$$\frac{1}{3} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Sigma_1} \cos^4 \theta \rho^4 \frac{d\chi}{d\rho} d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\Sigma_1} \rho^4 \frac{d\chi}{d\rho} d\rho$$

qui est un terme négligeable pour  $\lambda$  très grand.

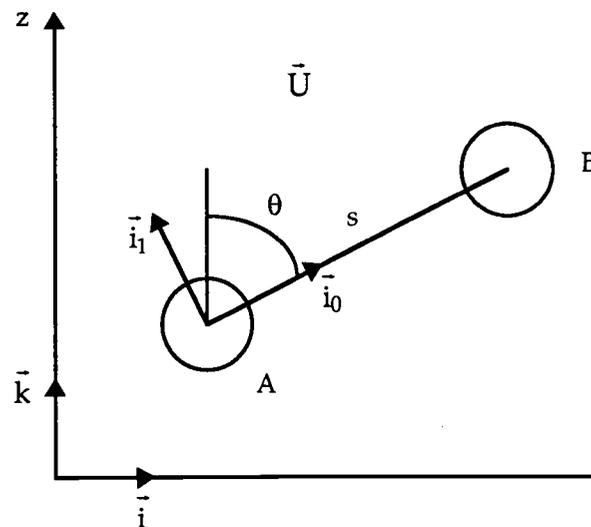
Dans la deuxième intégrale, le terme  $\rho \cdot d\chi/d\rho$  décroît rapidement (il varie comme  $1/\rho^5$ ), donc pour  $\Sigma_1$  très grand cette intégrale est pratiquement nulle.

On arrive donc au résultat  $H = 0$

## ANNEXE III

FORCE D'INTERACTION, THEORIE DE FLUIDE PARFAIT

Considérons une paire de bulles sphériques et de même diamètre A et B se déplaçant dans un fluide illimité ne contenant pas de contaminant. Dans ce cas, nous savons par la littérature, que le champ d'écoulement induit par le déplacement d'une bulle de gaz est presque complètement irrotationnel. Il existe seulement une couche limite très fine autour de la bulle et son sillage est très fin (Moore, 1963). Par conséquent, dans une première approximation, on peut supposer le fluide non visqueux et utiliser la théorie de l'écoulement potentiel. Le problème de la détermination du potentiel  $\phi$  est décrit dans la littérature par plusieurs auteurs : Van Vijnigarden, 1976 ; Miloh, 1977 et Biesheuvel, 1982.



Dans ce paragraphe, on va faire un bref rappel donnant les principaux points de l'analyse faite par Biesheuvel qui établit le potentiel  $\phi$ , solution de l'équation de Laplace, comme la superposition de deux contributions complémentaires  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , où  $\phi_1$  décrit le cas où les deux bulles ont des vitesses égales et de valeurs :

$$\vec{G} = \vec{U} - \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$$

et le potentiel  $\phi_2$  décrit le cas où les deux bulles ont une vitesse de sens opposée et de valeur :

$$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

$\bar{v}_A$  et  $\bar{v}_B$  étant respectivement les vitesses de A et B.

Le potentiel  $\phi$  ainsi déterminé induit un champ de vitesse constitué par une partie régulière  $\bar{u}_r$  et une partie singulière  $\bar{V}\phi_s$ . Or dans ce cas, le théorème de Lagally nous dit que lorsque le potentiel  $\phi_s$  est donné par :

$$\phi_s = -\frac{1}{4\pi} \sum_q (-1)^q M_q \frac{\partial^q}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \left( \frac{1}{|\bar{r}|} \right)$$

Un corps plongé dans ce champ de vitesse subit une force sous la forme :

$$\bar{F}_A = \rho \cdot V \frac{d}{dt} \left( \bar{v}_A - \frac{4\pi}{V} \sum_q M_q \frac{\partial^q}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} (\bar{r}_0) \right) - 4\pi \cdot \rho \sum_q M_q \frac{\partial^q}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} (\bar{u}_r)_0$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $q$  des entiers tels que  $\alpha + \beta + \gamma = q$ ,  $M_q$  est l'intensité de la singularité d'ordre  $q$ ,  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $V$  le volume de la bulle et l'indice 0 signifie que la quantité doit être prise au centre de la sphère.

Une expression similaire vaut également pour la force exercée sur la sphère B. On obtient ainsi l'expression de la force dans le repère  $(\bar{i}_0, \bar{i}_1)$  :

$$\begin{aligned} \bar{F}_A = \rho \cdot V \frac{d}{dt} \left\{ \begin{pmatrix} v_{A0} \\ v_{A1} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} D_{01} \\ -D_{11} \end{pmatrix} \right\} \\ + 2\pi \cdot a^2 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^1 \sum_{p=0}^1 n^m (n+2)^{p+1} D_{mn} D_{p(n+1)} \begin{pmatrix} 2\delta_{0m}\delta_{0p} + \delta_{1m}\delta_{1p} \\ -\delta_{0m}\delta_{1p} + \delta_{1m}\delta_{0p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{mn} &= G_m \cdot g_{mn} - W_m \cdot f_{mn} \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Le tableau des fonctions  $f_{mn}$  et  $g_{mn}$  est donné ci-dessus.

A l'ordre 4 et dans le repère  $(\bar{i}, \bar{j})$  on peut mettre cette force d'interaction sous la forme :

$$F_{Ax} = -\frac{1}{2} (U - v_{Az}) \cdot \dot{\theta} + \frac{9 \cdot a^3}{2} (K_0 \cdot \sin \theta - K_1 \cdot \cos \theta) \frac{1}{s^4}$$

$$F_{Ax} = -\frac{1}{2} v_{Ax} \cdot \dot{\theta} + \frac{9 \cdot a^3}{2} (K_0 \cdot \cos \theta + K_1 \cdot \sin \theta) \frac{1}{s^4}$$

avec :

$$\begin{aligned} K_0 &= -[(U - v_{Bz}) \cdot \cos \theta - v_{Bx} \cdot \sin \theta]^2 \\ &+ \frac{1}{2} [v_{Ax} \cdot \cos \theta + (U - v_{Az}) \cdot \sin \theta] \cdot [v_{Bx} \cdot \cos \theta + (U - v_{Bz}) \cdot \sin \theta] \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} K_1 &= -[(U - v_{Bz}) \cdot \cos \theta - v_{Bx} \cdot \sin \theta]^2 \\ &\quad \left\{ -\frac{1}{2}(v_{Ax} + v_{Bx}) \cdot \cos \theta + \left[ U + \frac{1}{2}(v_{Az} + v_{Bz}) \right] \cdot \sin \theta \right\} \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{S} [(v_{Ax} - v_{Bx}) \cdot \cos \theta - (v_{Az} - v_{Bz}) \cdot \sin \theta] \end{aligned}$$

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-2	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-3	0	0	0	0	0
6	1	0	0	-4	0	0	0	0
7	0	2	0	0	-5	0	0	0
8	3	0	3	0	0	-6	0	0
9	-1	8	0	4	0	0	-7	0
10	6	-2	15	0	5	0	0	-8
11	-6	20	-3	24	0	6	0	0
12	11	-14	45	-4	35	0	7	0

Tableau A1 : Valeur des coefficients  $K_{xnp}$ 

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-667	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-75	0	0	0	0	0
6	-25	0	0	-8	0	0	0	0
7	0	-333	0	0	-833	0	0	0
8	-1	0	-375	0	0	-857	0	0
9	-125	-1.778	0	-4	0	0	-875	0
10	-2.25	-1.67	-2.5	0	-417	0	0	-889
11	-1	-5	-1.86	-3.2	0	-429	0	0
12	-4.063	-1.556	-8.438	-2	-3.889	0	-438	0

Tableau A2 : Valeur des coefficients  $K_{y_{np}}$  et  $K_{z_{np}}$

$\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	2	0	0	0	0	0	0
5	0	0	3	0	0	0	0	0
6	1	0	0	4	0	0	0	0
7	0	2	0	0	5	0	0	0
8	3	0	3	0	0	6	0	0
9	1	8	0	4	0	0	7	0
10	6	2	15	0	5	0	0	8
11	6	20	-3	24	0	6	0	0
12	11	14	45	4	35	0	7	0

Tableau A3 : Valeur des coefficients  $L_{xnp}$ 

$\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	.5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	.667	0	0	0	0	0	0
5	0	0	.75	0	0	0	0	0
6	-.25	0	0	.8	0	0	0	0
7	0	-.333	0	0	.833	0	0	0
8	-1	0	-.375	0	0	.857	0	0
9	.125	-1.778	0	-.4	0	0	.875	0
10	-2.25	.167	-2.5	0	-.417	0	0	.889
11	1	-5	.186	-3.2	0	-.429	0	0
12	-4.063	1.556	-8.438	.2	-3.889	0	-.438	0

Tableau A4 : Valeur des coefficients  $L_{y_{np}}$  et  $L_{z_{np}}$

## BIBLIOGRAPHIE

- 
- ATASSI H.M. and GRZEDZINSKI J.\* "Unsteady disturbances of streaming motions around bodies".
- AUTON T.R., HUNT J.C.R. and M. PRUD'HOMME "The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow". *J. Fluid Mech.*, 197, 241-257 (1988)
- AUTON T.R. "The dynamics of bubbles, drops and particles in motion in liquids". Ph. D. Dissertation, University of Cambridge (1983)
- AUTON T.R. "The lift force on a spherical body in a rotational flow". *J. Fluid Mech.*, 183, 199-218 (1987)
- BATCHELOR G.K. "An Introduction to Fluid Dynamics". Cambridge University Press (1967)
- BIESHEUVEL A. and GORISSEN W.C.M. "Void fraction disturbances in a uniform bubbly fluid". *Int. J. Multiphase Flow*, 16, 2, 211-231 (1990)
- BIESHEUVEL A. and SPOELSTRA S. "The added mass coefficient of a dispersion of spherical gas bubbles in liquid". *Int. J. Multiphase Flow*, 15, 6, 911-924 (1989)
- BIESHEUVEL A. and VAN WIJNGAARDEN L. "The motion of pairs of gas bubbles in a perfect liquid". *J. of Engineering Math.*, 16, 349-365 (1982)
- BRABSTON D.C. and KELLER H.B. "Viscous flows past spherical gas bubbles". *J. Fluid Mech.*, 69, 1, 179-189 (1975)
- BROOKE BENJAMIN T. "Note on added mass and drift". *J. Fluid Mech.*, 169, 251-256 (1986)
- CHARLES D. HENDRIX., SHASHIKANT B. DAVE, and HOMER F. JOHNSON "Translation of Continuous Phase in the wakes of single rising drops". *AIChE Journal* 13, 6, 1072-1077 (1967).
- CLIFT R., GRACE J.R. and WEBER M.E. "Bubbles, drops and particles". Academic Press, New York (1978)
- COOK THOMAS L. and HARLOW FRANCIS H. "Virtual mass in multiphase flow". *Int.J. Multiphase Flow*, 10, 6, 691-696 (1984)
- COUSINS R.R. "A note on shear flow past a sphere". *J. Fluid Mech.* 40, 3, 543-547 (1970)
- DANDY D.S. and DWYER H.A. "A sphere in shear flow at finite Reynolds number : effect of shear on particle lift, drag, and heat transfer" *J. Fluid Mech.* 216, 381-410 (1990)
- DARWIN C. "Note on hydrodynamics". *Proc. Camb. Phil. Soc.* 49, 342 (1953)
-

- 
- DAVIS M.J. and BRENNER H. "Steady rotation of a tethered sphere a small, non-zero Reynolds and Taylor numbers : wake interference effects on drag". *J. Fluid Mech.*, 168, 151-167 (1986)
- DENNIS S.C.R. and WALKER J.D.A. "Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers". *J. Fluid Mech.*, 48, 4, 771-789 (1971)
- DREW D. A. and LAHEY Jr R. T. "Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations". *Int J. Multiphase Flow*, 5, 243-264 (1979)
- DREW D., CHENG L. and LAHEY Jr R.T. "The analysis of virtual mass effects in two-phase flow". *Int. J. Multiphase Flow*, 5, 233-242 (1979)
- DREW D.A., LAHEY Jr R.T. "The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow". *Int J. Multiphase flow*, 13, 1, 113-121 (1987)
- DREW D.A., LAHEY Jr R.T. "Some supplemental analysis concerning the virtual masse and lift force on a sphere in a rotating and straining flow". *Int J. Multiphase flow*, 16, 6, 1127-1130 (1990)
- EICHHORN R. and SMALL S. "Experiments on the lift and drag of spheres suspended in a Poiseuille flow". *J. Fluid Mech.*, 20, 3, 513-527 (1964)
- FORTES A.F., JOSEPH D.D. and LUNDGREN T.S. "Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles". *J. Fluid Mech.*, 177, 467-483 (1987)
- GATIGNOL R. "The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow". *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 1, 2, 143-160 (1983)
- GOLDMAN A.J., COX R.G. and BRENNER H. "Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - II Couette flow". *Chemical Engineering Science*, 22, 653-660 (1967)
- GOLDSTEIN M.E. "Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles". *J. Fluid Mech.*, 89, 3, 433-468 (1978)
- GOLDSTEIN M.E. and ATASSI H. "A complete second-order theory for the unsteady flow about an airfoil due to a periodic gust". *J. Fluid Mech.*, 74, 4, 741-765 (1976)
- GOREN S.L. "The normal force exerted by creeping flow on a small sphere touching a plane". *J. Fluid Mech.*, 41, 3, 619-625 (1970)
-

- 
- GOREN S.L. and O'NEILL M.E. "On the hydrodynamic resistance to a particle of a dilute suspension when in the neighbourhood of a large obstacle". *Chemical Engineering Science*, 26, 325-338 (1971)
- HALL I.M. "The displacement effect of a sphere in a two-dimensional shear flow". *J. Fluid Mech.*, 1, 142-161 (1956)
- HARPER J.F. "On bubbles rising in line at large Reynolds numbers". *J. Fluid Mech.*, 41, 4, 751-758 (1970)
- HO B.P. and LEAL L.G. "Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows". *J. Fluid Mech.*, 65, 2, 365-400 (1974)
- HUNT J.C.R. "A theory of turbulent flow round two-dimensional bluff bodies". *J. Fluid Mech.*, 61, 4, 625-706 (1973)
- HUNT J.C.R. , AUTON T.R. , SENE K. , THOMAS N.H. , KOWE R.\* "Bubble motions in large eddies and turbulent flows".
- KOWE R. , HUNT J.C.R. , HUNT A. , COUET B. and BRADBURY L.J.S. "The effects of bubbles on the volume fluxes and the pressure gradients in unsteady and non-uniform flow of liquids". *Int. J. Multiphase Flow*, 14, 5, 587-606 (1988)
- KUO J.T. and WALLIS G.B. "Flow of bubbles through nozzles". *Int J. Multiphase Flow*, 14, 5, 547-564 (1988)
- LAHEY Jr R.T., CHENG L.Y., DREW D.A. and FLAHERTY J.E. "The effect of virtual mass on the numerical stability of accelerating two-phase flows". *Int. J. Multiphase Flow* , 6, 281-294 (1980)
- LAMB H. "Hydrodynamics". Cambridge University Press (1932)
- LANCE M. "Etude de la turbulence dans les écoulements diphasiques dispersés". Thèse de Doctorat es Sciences, Lyon (1986)
- LANDAU L. et LIFCHITZ E. "Mécanique des Fluides". Editions MIR (1959)
- LANDWEBER L. and MILOH T. "Unsteady Lagally theorem for multipoles and deformable bodies". *J. Fluid Mech.*, 96, 1, 33-46 (1980)
- LIGHTHILL M.J. "Contributions to the theory of the Pitot-tube displacement effect". *J. Fluid Mech.*, 2, 493-512, (1957)
- LIGHTHILL M.J. "Corrigenda to "Drift"". *J. Fluid Mech.*, 2, 311, (1957)
-

- 
- LIGHTHILL M.J. "Drift". *J. Fluid Mech.*, 1, 31-53 (1956)
- LIGHTHILL M.J. "The image system of a vortex element in a rigid sphere". *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 52, 31 (1956)
- LIGHTHILL M.J.\* "The fundamental solution for small steady three-dimensional disturbances to a two-dimensional parallel shear flow".
- MAMORU ISHII and NOVAK ZUBER "Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particule flows". *AIChE Journal*, 25, 5, 843-855 (1979)
- MAXEY M.R. and RILEY J.J. "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow". *Phys. Fluids*, 26, 4, 883-889 (1983)
- MILNE-THOMSON L.M. "Theoretical Hydrodynamics". Macmillan Publishing Co (1968)
- MOORE D.W. "The boundary layer on a spherical gas bubble". *J. Fluid Mech.*, 16, 161-176, (1963)
- MOORE D.W. "The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity". *J. Fluid Mech.*, 23, 4, 749-766, (1965)
- PAUCHON C. and BANERJEE S. "Interphase momentum interaction effects in the averaged multifield model". Part I : "Void propagation in bubbly flows". *Int. J. Multiphase Flow*, 12, 4, 559-573 (1986)
- PHAM DAN TAM "De la traînée instationnaire sur une petite bulle". Thèse de Doctorat es Sciences, Grenoble (1981)
- RIVERO Mayela "Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré". Thèse de doctorat, INP Toulouse (1991)
- RUBINOW S.I. and KELLER JOSEPH B.\* "The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid".
- RUSHTON E. and DAVIES G.A. "The slow motion of two spherical particles along their line of centres". *Int. J. Multiphase Flow*, 4, 357-381 (1978)
- SAFFMAN P.G. "The lift on a small sphere in a slow shear flow". *J. Fluid Mech.*, 22, 2, 385-400 (1965)
- SEGRE G. and SILBERBERG A. \* "Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow". Part I : "Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams".
-

- 
- SIEKMANN J. and DITTRICH K. "Computer study of bubble motion in a rotating liquid". *Computer methods in applied mechanics and engineering* 10, 291-301 (1977)
- VAN WIJNGAARDEN L. and KAPTEYN C. "Concentration waves in dilute bubble/liquid mixtures". *J. Fluid Mech.*, 212, 111-137 (1990)
- VAN WIJNGAARDEN L. "Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid". *J. Fluid Mech.*, 77, 1, 27-44 (1976)
- VASSEUR P. and COX R.G. "The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows". *J. Fluid Mech.*, 78, 2, 385-413 (1976)
- WANG S.K., LEE S.J., JONES Jr O.C. and LAHEY Jr R.T. \* "3-D turbulence structure and phase distribution measurements in bubbly two-phase flows".
- WHITE B.R. "Two-phase measurements of saltating turbulent boundary layer flow". *Int. J. Multiphase Flow*, 8, 5, 459-473 (1982)
- YIH C.S. "New derivations of Darwin's theorem". *J. Fluid Mech.*, 152, 163-172 (1985)
- YIH C.S. "Stream functions in three-dimensional flows". *La Houille Blanche*, n° 3 445-450 (1957)
- YUTAKA TSUJI, YOSHINOBU MORIKAWA and KOZO TERASHIMA \* "Fluid-dynamic interaction between two spheres".

dernière page de la thèse

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr M. LANCE            Professeur - Mécanique des Fluides - ECOLE CENTRALE  
DE LYON,

et les rapports de

Mr J. BATAILLE    Professeur - Université Claude Bernard - LYON I -  
69622 VILLEURBANNE Cedex,

Mr J. FABRE            Professeur - IMFT - Laboratoire de Banlève - 31400  
TOULOUSE,

Monsieur **NACIRI Ahmed**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention  
du titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

Fait à Ecully, le 20 juillet 1992

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur  
de l'Administration de la  
Recherche



F. LEBOEUF



