



N° d'ordre : 2018LYSEC020

École Doctorale n° 162 : Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Doctorat de l'Université de Lyon

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École centrale de Lyon

Spécialité “Mécanique des fluides”

présentée par

Florian Guillois

soutenue publiquement le 07 septembre 2018

**Simulation d'une zone de mélange turbulente issue
de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov à l'aide d'un
modèle à fonction de densité de probabilité –
Analyse du transport de l'énergie turbulente**

Jury

Dr. Pascal BRUEL,	Université de Pau	Président, Rapporteur
Dr. Salvador NAVARRO-MARTINEZ,	Imperial College London	Rapporteur
Dr. Serge SIMOËNS,	École Centrale de Lyon	Directeur
Dr. Vladimir SABELNIKOV,	ONERA Palaiseau	Examineur
Dr. Nadezda PETROVA,	IMACS, X-TEC	Examinatrice
Dr. Yann DOUTRELEAU,	DGA	Examineur
Dr. Olivier SOULARD,	CEA/DAM	Encadrant

CEA, DAM, DIF, F-91197 Arpajon, France

École Centrale de Lyon, 36 Avenue Guy de Collongue, F-69134 Écully, France

Résumé

Cette thèse a pour objet la simulation d'une zone de mélange turbulente issue de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov à l'aide d'un modèle à fonction de densité de probabilité (PDF). Nous analysons plus particulièrement la prise en charge par le modèle PDF du transport de l'énergie cinétique turbulente dans la zone de mélange.

Dans cette optique, nous commençons par mettre en avant le lien existant entre les statistiques en un point de l'écoulement et ses conditions initiales aux grandes échelles. Ce lien s'exprime à travers le principe de permanence des grandes échelles, et permet d'établir des prédictions pour certaines grandeurs de la zone de mélange, telles que son taux de croissance ou son anisotropie. Nous dérivons ensuite un modèle PDF de Langevin capable de restituer cette dépendance aux conditions initiales. Ce modèle est ensuite validé en le comparant à des résultats issus de simulations aux grandes échelles (LES). Enfin, une analyse asymptotique du modèle proposé permet d'éclairer notre compréhension du transport turbulent. Un régime de diffusion est mis en évidence, et l'expression du coefficient de diffusion associé à ce régime atteste l'influence de la permanence des grandes échelles sur le transport turbulent.

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes appuyés sur des résultats issus de simulations de Monte Carlo du modèle de Langevin. À cet effet, nous avons développé une méthode spécifique eulérienne et nous l'avons comparé à des alternatives lagrangiennes.

Abstract

The aim of the thesis is to simulate a turbulent mixing zone resulting from the Richtmyer-Meshkov instability using a probability density function (PDF) model. An emphasis is put on the analysis of the turbulent kinetic energy transport.

To this end, we first highlight the link existing between the one-point statistics of the flow and its initial conditions at large scales. This link is expressed through the principle of permanence of large eddies, and allows to establish predictions for quantities of the mixing zone, such as its growth rate or its anisotropy.

We then derive a Langevin PDF model which is able to reproduce this dependency of the statistics on the initial conditions. This model is then validated by comparing it against large eddy simulations (LES).

Finally, an asymptotic analysis of the derived model helps to improve our understanding of the turbulent transport. A diffusion regime is identified, and the expression of the diffusion coefficient associated with this regime confirms the influence of the permanence of large eddies on the turbulent transport.

Throughout this thesis, our numerical results were based on Monte Carlo simulations for the Langevin model. In this regard, we proceeded to the development of a specific Eulerian method and its comparison with Lagrangian counterparts.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon encadrant de thèse au CEA, Olivier Soulard, pour la patience et l'investissement personnel dont il a fait preuve tout au long de ma thèse. Cette thèse représentait une épreuve autant pour lui que pour moi, et c'est grâce à son aide précieuse que nous l'avons surmontée.

Je remercie également mon directeur de thèse, Serge Simoëns, qui malgré la distance entre Lyon et Paris s'est régulièrement assuré du bon déroulement de la thèse et à pu y apporter sa contribution lors de nos entretiens.

Je remercie bien sûr Vladimir Sabel'nikov pour son expertise et la justesse de ses remarques concernant les modèles PDF et les méthodes numériques à mettre en place pour les résoudre.

Je remercie l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté quant à ces travaux de thèse, et pour la pertinence de leurs remarques et questions lors de la soutenance. Je voudrais remercier en particulier les rapporteurs Pascal Bruel et Salvador Navarro-Martinez qui, en pleine période de vacances, ont pris sur eux de lire mon manuscrit et de rédiger des rapports détaillés et constructifs.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Jérôme Griffond et Roland Duclous, qui m'ont tous deux apporté les informations et outils nécessaires à l'obtention de certains des résultats clés de cette thèse.

Je remercie Erik Lefèbvre et Alain Moenne-Loccoz, pour m'avoir respectivement accueilli au sein de leur service et laboratoire au CEA. Merci aussi à Monique Bourgain et Claire Boullier pour leur éclairage dans les méandres administratives concernant les conférences, déplacements et autres démarches qui peuvent paraître fastidieuses aux yeux d'un novice. Une mention spéciale pour Claire, dont la bonne humeur, les services et les petites attentions quotidiennes ont illuminé ces trois années de thèse (et celles de nombreux doctorants avant moi).

Un grand merci à tous les collègues doctorants et ex-doctorants avec qui j'ai eu le plaisir de passer tout ou partie de ces trois ans : Alan, mon compatriote breton, vivement nos prochains débats politiques ou économiques autour d'une (ou plusieurs) pinte(s); Thibault, ton humour noir et nos nombreuses discussions vidéoludiques ont grandement participé au maintien de mon moral; Guillaume, tes conseils en achat immobilier ont été déterminants dans l'acquisition de mon premier appartement; Lucile, merci d'avoir souffert avec moi dans le couloir congélateur en hiver et thermostat 8 en été; Alexis, je me souviendrai à jamais de ces soirées Miss France grandioses en ta compagnie; Mathieu, nos (très) nombreuses références communes et autres private jokes vont beaucoup me manquer (Frank Dux for ever!); Marie, le bébé du groupe, merci pour ta gentillesse (parfois), mais aussi pour tes délicieux cookies; Grégoire, aka La Chips, sans toi j'aurais pu dépérir plus

d'une fois coincé dans mon sas ; Jean-Cédric, mon successeur (otôtosan !), je te confie mon bureau et mon encadrant, fais en bon usage ; Corentin, le petit dernier, je te souhaite de trouver ton équilibre et de réussir dans ta quête du doctorat ! Merci également aux stagiaires MSP, Julien, Mathilde, Vianey, Paulo, Léonce et Yoann (Tic et Tac !) : vous avez apporté tout autant à la vie de notre groupe de jeunes étudiants !

Je remercie enfin ma famille et mes amis, pour le soutien qu'ils m'ont prodigué tout au long de ces trois années, mais aussi par le passé, et pour les nombreuses années à venir je l'espère. Je leur sais gré de ne pas m'avoir harcelé de questions quant au déroulement de la thèse, mais au contraire, d'avoir réussi à me permettre de me vider la tête dans les moments où j'en avais le plus besoin.

Je remercie plus particulièrement ma très chère femme Anaëlle, qui partage mon quotidien depuis maintenant plus de huit ans, et qui ne m'a jamais fait défaut, dans le bonheur ou les épreuves, dans la santé ou la maladie. Rarement des vœux de mariage n'ont dû se concrétiser à ce point. Sans ton soutien physique et moral lors des périodes les plus difficiles de la thèse, celle-ci n'aurait certainement jamais abouti, et je t'en serai éternellement reconnaissant. Il en va de même pour notre fils Malo qui, malgré la fatigue qui a suivi sa venue au monde, m'a fourni la volonté, la force et le bonheur nécessaires à l'accomplissement de cette tâche.

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	iii
Table des matières	v
Table des figures	xi
Liste des tableaux	xv
Introduction	1
1 État de l'art	1
1.1 Contexte : Fusion par confinement inertiel et instabilité de Richtmyer-Meshkov	1
1.2 Évolution auto-similaire, grandes échelles	3
1.3 Modélisation statistique de type RANS	5
2 Problématique et moyens mis en œuvre	7
2.1 Problématique : Transport turbulent	7
2.2 Moyens mis en œuvre : Modèles PDF	8
2.2.1 Modèles PDF et grandes échelles	9
2.2.2 Modèles PDF et régime de diffusion	10
2.2.3 Modèles PDF et méthode de Monte Carlo	11
2.3 Plan	12
1 Permanence des grandes échelles dans une turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood	15
1.1 Introduction	15
1.2 Équations d'évolution et conditions initiales	18
1.2.1 Équations d'évolution	18
1.2.2 Conditions initiales	19
1.3 Modélisation de l'évolution des grandes échelles	23
1.3.1 Modélisation des interactions non-linéaires aux grandes échelles	23

1.3.2	Modélisation de E_{33}^G et E_{3c}^G aux grandes échelles	24
1.3.3	Modèle final	25
1.4	Spectre de vitesse	26
1.4.1	Permanence des grandes échelles	26
1.4.2	Évolution en régime turbulent auto-similaire	27
1.4.3	Comparaison aux résultats précédents	28
1.5	Spectres de concentration et de flux de concentration	30
1.5.1	Solutions des équations (1.17b) et (1.17c)	30
1.5.2	Influence des conditions initiales de E_{3c} et E_{cc}	31
1.5.3	Régimes linéaires et de backscattering pour E_{3c}	31
1.5.4	Régimes linéaires et de backscattering pour E_{cc}	32
1.6	Conséquences de la permanence des grandes échelles	32
1.6.1	Anisotropie	33
1.6.2	Variation de la largeur de la zone de mélange avec les conditions initiales	34
1.6.3	Paramètre de mélange	36
1.7	Validation	38
1.7.1	Description des simulations	38
1.7.2	Evolution typique d'une simulation	40
1.7.3	Permanence et évolution linéaire des grandes échelles	42
1.7.4	Conséquences de la permanence des grandes échelles	45
1.8	Conclusion	48
2	Modèle PDF de Langevin appliqué à la turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood	51
2.1	Introduction	51
2.2	Phénoménologie des zones de mélange turbulentes issues de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov	53
2.2.1	Équations fondamentales	53
2.2.2	État turbulent auto-similaire	53
2.2.3	À propos de la permanence des grandes échelles	54
2.3	Le modèle de Langevin généralisé et son comportement en turbulence de Richtmyer-Meshkov	56
2.3.1	Équation PDF exacte et sa modélisation par un modèle de Langevin	57
2.3.2	Évolution correspondante du tenseur de Reynolds et de sa réduction 0D	59
2.3.3	Solution auto-similaire du modèle réduit 0D et principales lacunes du GLM	59
2.3.4	À propos du transport de l'énergie cinétique turbulente	60

2.4	Un modèle de Langevin avec retour partiel à l'isotropie	61
2.4.1	Décomposition à deux échelles du champ de vitesse	61
2.4.2	Modèle de Langevin à deux échelles	62
2.4.3	Fermeture linéaire des moyennes conditionnées	62
2.4.4	Coefficients du modèle	64
2.4.5	Expressions finales du modèle et de sa réduction 0D	66
2.5	Transport par la pression	66
2.5.1	Quelques précisions sur le transport turbulent dans les modèles RSM	67
2.5.2	Expression du modèle PDF de transport par la pression	68
2.6	Validation	68
2.6.1	Description des simulations aux grandes échelles	69
2.6.2	Description des simulations du modèle PDF	69
2.6.3	Évolutions auto-similaires	70
2.6.4	Rôle du terme de transport par la pression	73
2.6.5	Profils spatiaux	74
2.6.6	PDF de la vitesse longitudinale	75
2.7	Conclusion	78
3	Analyse asymptotique du modèle PDF de Langevin - Analyse du transport turbulent	79
3.1	Introduction	79
3.2	Analyse du modèle de Langevin simplifié	80
3.2.1	Modèle SLM	80
3.2.2	Limite quasi-homogène	80
3.2.3	Développement asymptotique	81
3.2.4	Résultat final	82
3.2.5	Vérification	83
3.2.5.1	Simulations avec $C_1 = 4.15$	83
3.2.5.2	Simulations avec $C_1 \leq 4.15$	85
3.3	Analyse du modèle à deux échelles	86
3.3.1	Développement asymptotique	86
3.3.2	Expression du flux d'énergie turbulente	87
3.4	Régime de diffusion pour une zone de mélange de Richtmyer–Meshkov	88
3.5	Conclusion	91
4	Résolution de l'équation de transport de la PDF de la vitesse à l'aide d'une méthode de Monte Carlo	95
4.1	Introduction	95
4.2	Équation de Langevin pour la PDF de la vitesse	98

4.3	Méthode EMC : Approche utilisée dans les précédents travaux et ses limites	100
4.3.1	Dérivation des SPDEs équivalentes à l'équation (4.1) proposée dans les précédents travaux	100
4.3.2	Discontinuités des SPDEs (4.5) pour le cas dissipatif en entropie	101
4.4	Méthode EMC : Interprétation conservative en entropie	103
4.4.1	Description des champs multivalués à l'aide de graphes paramétrés	104
4.4.2	Graphe solution des SPDEs (4.5)	106
4.4.3	PDF de graphe	107
4.4.4	Évolution de la PDF de graphe F_g associée aux SPDEs (4.5)	109
4.5	Méthode numérique	110
4.5.1	Équation PDF et SPDEs simplifiées	110
4.5.2	Description de la méthode numérique	110
4.5.3	Résumé de l'algorithme proposé	113
4.5.4	Ordre de l'algorithme proposé	114
4.5.5	Algorithme complet appliqué aux SPDEs (4.5)	114
4.5.6	Nombre de branches - Nombre de réalisations	115
4.5.7	Variante de la méthode d'échantillonnage	115
4.6	Validation numérique	116
4.6.1	Description du cas test	117
4.6.2	Configuration numérique	117
4.6.3	Convergence spatiale	118
4.6.4	Convergence statistique	120
4.6.5	Illustration de la différence entre les interprétations conservative et dissipative en entropie	120
4.6.6	Validation numérique de la variante de la méthode d'échantillonnage	121
4.7	Passage à l'ordre 2	122
4.7.1	Ordre 2 en temps	122
4.7.2	Difficulté de la montée en ordre en espace	123
4.7.3	Comparaison aux méthodes LMC	123
4.8	Conclusion	124

Conclusions et perspectives 127

1	Permanence des grandes échelles en turbulence de Richtmyer-Meshkov	127
2	Développement d'un modèle PDF multi-échelles	129
3	Analyse du transport turbulent - Régime de diffusion	129
4	Méthodes de Monte Carlo pour la résolution des équations du modèle	130
5	Perspectives de la thèse	131

A	Annexes Chapitre 1	135
1	À propos des spectres 3D, des spectres 2D et des spectres foliés	135
2	Propriétés attendues pour $\hat{u}_3^G$	137
3	Simulations aux grandes échelles : Vérification des hypothèses principales .	139
3.1	Auto-similarité et évolution des spectres turbulents	140
4	Régime de décroissance finale	141
4.1	Décroissance finale du champ de vitesse	141
4.2	Décroissance finale du flux de concentration	142
4.3	Décroissance finale de la variance de concentration	143
B	Annexes Chapitre 4	145
1	Description de la méthode volume fini de résolution de l'équation (4.31) . .	145
2	Extension de la méthode à des équations de PDF jointes de la vitesse et du scalaire	148
3	Description de la LMC pour résoudre l'équation (4.31)	149
4	Passage à l'ordre 2 de la méthode LMC	150
4.1	Ordre 2 en temps	151
4.2	Ordre 2 en espace	151
5	Schéma Runge-Kutta d'ordre 2	151
5.1	Équation à résoudre	152
5.2	Schéma de Runge-Kutta	152
5.3	Conditions sur les coefficients	152
	Bibliographie	155

Table des figures

1	Simulations 3D des phases de développement de l'IRM (a-e - [114] ; f - [151])	2
2	Résumé des étapes clés pour la dérivation et la validation d'un modèle PDF adapté à l'analyse du transport de l'énergie turbulente en turbulence de Richtmyer-Meshkov	9
1.1	Evolution de la zone de mélange au cours du temps pour la simulation avec $s_0 = 4$	41
1.2	Evolution de (a) la largeur de la zone de mélange L et (b) les moments du second ordre adimensionnés de la vitesse et de la concentration pour la simulation avec $s_0 = 2$	42
1.3	Evolution du spectre d'énergie cinétique pour différents s_0	42
1.4	Spectres de vitesses E_{33} et E_{11} aux temps initial et final pour différents s_0	43
1.5	Comparaison entre $\mathbf{e}_{3c}$ et sa contribution linéaire $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ à $t = 6t_{\text{ref}}$ pour $s_0 = 1$ et $s_0 = 2$	44
1.6	Comparaison entre $\mathbf{e}_{cc}$ et sa contribution linéaire $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$ à $t = 6t_{\text{ref}}$ pour $s_0 = 1$ et $s_0 = 2$	45
1.7	Taux de croissance Θ_{inst} : (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation	46
1.8	Constante de la largeur de mélange $g_{2\text{inst}}$: (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation	47
1.9	Rapport d'anisotropie $R = \langle \overline{u_1'^2} \rangle / \langle \overline{u_3'^2} \rangle$: (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation	47
1.10	Paramètre de mélange Ξ : (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation	48
1.11	Taux de croissance Θ en fonction du paramètre de mélange Ξ	48
2.1	Evolution de L_k	71
2.2	Evolution de $\max(\overline{k})$	72
2.3	Evolution de l'anisotropie	72
2.4	Θ et b_{33}^G en fin de simulation, en fonction de s_0	73

2.5	Influence du terme de transport par la pression sur les évolutions de L_k et b_{33}^G pour la simulation avec $s_0 = 2$	74
2.6	Profil de $\overline{u_3'^2}$ en fin de simulation pour la simulation avec $s_0 = 2$	74
2.7	PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 1$	76
2.8	PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 2$	76
2.9	PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 3$	77
2.10	PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 4$	77
3.1	Paramètre asymptotique ℓ/L au temps final de la simulation.	83
3.2	Parties paire et impaire de la PDF f_3 au temps final de la simulation et à deux positions.	84
3.3	Corrélation d'ordre 3 $\overline{u_3^3}$ au temps final de la simulation.	85
3.4	(a) Comparaison des PDF de vitesse pour différentes valeurs de C_1 , au temps final des simulations, en $x_3/L_k = 0.5$. (b) Corrélation d'ordre 3 $\overline{u_3^3}$ au temps final pour la simulation avec $C_1 = 1.2$	86
3.5	Paramètre asymptotique du régime de diffusion ℓ/L au temps final des différentes simulations.	89
3.6	Flux turbulent de l'énergie cinétique au temps final des différentes simulations. Comparaison entre le modèle de Langevin à deux échelles, l'analyse asymptotique et la LES.	90
3.7	Comparaison entre les valeurs de C_k estimées à partir de la simulation LMC, à partir de l'approximation diffusive avec l'anisotropie issue de la simulation LMC et à partir de l'approximation diffusive avec l'anisotropie modélisée.	90
4.1	Condition initiale du champ de vitesse stochastique (gauche) et son évolution après le temps critique t_c (droite), donnée par l'équation (4.8)	103
4.2	Différence entre les interprétations dissipative en entropie (gauche) et conservative en entropie (droite) de l'équation (4.7b) à partir de l'exemple de la section 4.3.2. Ligne grise pleine : condition initiale. Lignes noires pleines : courbes caractéristiques. Ligne noire épaisse sur la figure de gauche : choc	104
4.3	Solution après le croisement des courbes caractéristiques de l'équation (4.7b) à partir de l'exemple donné en section 4.3.2 ($t > t_c$). Gauche : interprétation dissipative en entropie. Droite : interprétation conservative en entropie	104
4.4	Exemple de champ multivalué 1D (gauche) et sa représentation sous forme de graphe paramétré (droite)	105
4.5	Exemple de champ 1D multivalué et sa division en 3 branches	106

4.6	Évolution d'un champ de vitesse u^b initialement constant par morceaux (gauche) selon les SPDEs (4.20). À l'instant $t + \Delta t$ (droite), la maille i contient les contributions des mailles i , $i + 1$ et $i - 1$. La contribution de la maille i , $\mathcal{U}_i^b$, occupe un intervalle de longueur $\Delta x_0 = \Delta x - \mathcal{U}_i \Delta t$, celle de la maille $i + 1$, $\mathcal{U}_{i+1}^b$, un intervalle de longueur $\Delta x_+ = -\min(\mathcal{U}_{i+1}, 0) \Delta t$ et celle de la maille $i - 1$, $\mathcal{U}_{i-1}^b$, un intervalle de longueur $\Delta x_- = \max(\mathcal{U}_{i-1}, 0) \Delta t$	111
4.7	Convergence spatiale de la méthode EMC	119
4.8	Convergence statistique de la méthode EMC pour E_k	120
4.9	PDF de vitesse calculée au temps t_f et à la position $x = 0.9$ à l'aide de trois différentes méthodes : volume fini, EMC multivaluée conservative en entropie, EMC monovaluée dissipative en entropie	121
4.10	Convergence spatiale des méthodes LMC d'ordres 1 et 2 et de la méthode EMC d'ordre 1	124
A.1	Termes adimensionnés non-linéaires de transfert à différents temps supérieurs à t_0 pour la simulation avec $s_0 = 2$	140
A.2	Termes de production linéaires pour la simulation avec $s_0 = 2$ à des temps différents supérieurs à t_0 . (a) rapport $\mathbf{e}_{33}^G/\mathbf{e}_{33}$ et (b) rapport $\mathbf{e}_{3c}^G/\mathbf{e}_{3c}$	140
A.3	Spectres adimensionnés de l'énergie cinétique, de la concentration et du flux de concentration pour $s_0 = 2$, pris à différents temps $t \geq t_0$	141

Liste des tableaux

1	Relations entre Θ et les conditions initiales prédites dans la littérature. Dans ce tableau, m_1 est l'exposant de décroissance de la corrélation longitudinale en deux points de la vitesse à grande séparation, m_2 est l'exposant du spectre de puissance des perturbations interfaciales initiales, m_3 est l'exposant infrarouge du spectre d'énergie cinétique 2D au centre de la zone de mélange, m_4 est l'exposant infrarouge du spectre de la vitesse foliée. Notons que [99] n'affirme pas la prédiction écrite dans ce tableau, mais la suggère uniquement comme point de référence.	5
1.1	Relations entre Θ et les conditions initiales prévues dans la littérature. . .	29
1.2	Principaux paramètres de simulation	39

Introduction

1 État de l'art

1.1 Contexte : Fusion par confinement inertiel et instabilité de Richtmyer-Meshkov

La fusion par confinement inertiel (FCI) est au cœur des activités du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux énergies alternatives (CEA). Son principe repose sur la compression, à l'aide d'un rayonnement laser de haute puissance, d'une capsule cible contenant des éléments fusibles, tels que le deutérium et le tritium. Au terme de cette compression, lorsque la densité et la température au centre de la capsule deviennent suffisamment élevées, les noyaux des éléments légers se combinent pour donner naissance à des noyaux plus lourds[7]. Ces réactions de fusion s'enchaînent et produisent de l'énergie.

Au CEA, l'étude de la FCI s'appuie sur deux composantes principales : une composante expérimentale avec le Laser MégaJoule (LMJ) et une composante de modélisation et simulation numérique, dite "programme simulation". L'un des enjeux majeurs de ces deux composantes concerne l'étude et l'optimisation de la phase de compression de la capsule. L'objectif du CEA est notamment de réduire le rôle joué par un certains nombres d'instabilités hydrodynamiques qui peuvent nuire à l'atteinte de l'ignition. En particulier, la mise en mouvement de la couche externe de la cible faisant suite à l'impulsion laser conduit à la formation de chocs qui se dirigent vers le centre de la cible. Lors de leur propagation, ces chocs sont amenés à traverser les interfaces qui séparent les couches des différents matériaux qui composent la cible. À leur passage, les petits défauts initialement présents aux interfaces sont alors amplifiés. Ces défauts initiaux sont par exemple dus à la non-uniformité du rayonnement laser, ou bien encore à l'usinage de la cible. Si ces défauts se développent trop, ils peuvent réduire le taux de compression de la cible, ou encore, amener des éléments non-fusibles jusqu'au centre et ainsi empêcher les réactions de fusion. La compréhension et la maîtrise du développement de ces défauts sont donc primordiales si l'on souhaite atteindre l'ignition en FCI.

L'instabilité que nous venons de donner en exemple correspond à l'amplification de perturbations d'interface sous l'action d'un choc. Elle se produit dès que les milieux séparés

effets de compressibilité diminuent jusqu'à ce que l'approximation de Boussinesq s'applique [112, 142]. Dans cette approximation, les fluctuations de densité n'agissent sur le champ de vitesse qu'au travers d'un terme de flottaison, i.e. de production barocline. Dans la mesure où, après le passage du choc, l'accélération moyenne est nulle, ces effets sont inexistantes et les fluctuations de densité n'impactent pas le champ de vitesse. Par ailleurs, la divergence de vitesse est nulle. Notons que le contraste de densité entre deux fluides est généralement mesuré à l'aide du nombre d'Atwood :

$$At = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0}$$

où $\rho_{0,1}$ sont les densités des fluides en présence.

1.2 Évolution auto-similaire, grandes échelles

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude la phase turbulente de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov. Cependant, nous ne cherchons pas à résoudre un cas pratique tel que celui rencontré lors des expériences de FCI. Dans ces travaux, nous souhaitons plutôt comprendre et caractériser les mécanismes fondamentaux qui régissent l'évolution de cette phase turbulente dans le cas idéal à faible nombre d'Atwood. Aux temps longs, il est communément admis que cette phase devient auto-similaire. En particulier, la largeur L de la zone de mélange, que l'on peut exprimer comme une fonction de la concentration moyenne $\bar{c}$ ou de l'énergie cinétique turbulente $\bar{k}$ selon les relations :

$$L = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}(1 - \bar{c}) dx_3 \quad \text{ou} \quad L = \frac{3}{4} \frac{\int \bar{k} dx_3}{\max(k)} , \quad (1)$$

évolue comme :

$$L(t) = L_0 t^{\Theta} , \quad (2)$$

avec x_3 la direction inhomogène, t le temps, L_0 un préfacteur et Θ l'exposant de croissance de la zone de mélange. Cet exposant est le paramètre clé de l'évolution auto-similaire d'un écoulement turbulent de Richtmyer-Meshkov. Zhou [174] et Brouillette [12] récapitulent tous deux les travaux théoriques [5, 48, 3, 1, 2, 113, 168, 125, 64, 173, 175, 96, 23, 123, 164], numériques [116, 168, 169, 148, 147, 149, 154, 112, 93, 99] et expérimentaux [31, 124, 32, 33, 163, 165, 67, 82] dédiés à l'étude de cette phase auto-similaire et de l'exposant Θ .

D'un point de vue théorique, plusieurs études pointent la possibilité que Θ n'ait pas une valeur unique mais dépende des conditions initiales. Deux groupes de travaux se distinguent. En premier lieu, certains auteurs [31, 65, 169, 148] ont adopté un point de vue basé sur une description "structurelle" de l'écoulement. Des modèles pour les évolutions

des bulles et aiguilles présentes dans la zone de mélange ont ainsi été proposés. Cette représentation de l'écoulement permet alors d'introduire la notion de "mode juste-saturé". Les modes, ou structures, de plus grande longueur d'onde ont un temps de transition à la non-linéarité et à la turbulence plus long que les modes de petite longueur d'onde. Leur "saturation" arrive donc d'autant plus tard que leur longueur d'onde est grande. Selon la répartition initiale des longueurs d'onde des défauts, certains auteurs affirment que l'évolution de la taille de la ZMT est due à la croissance linéaire des grands modes qui arriverait juste à saturation, plutôt qu'à l'interaction non-linéaire entre les différents modes. Dans la mesure où la croissance de la ZMT est liée à une évolution linéaire, elle garde la trace des conditions initiales. Un lien entre Θ et la répartition initiale des longueurs d'onde des défauts est donc proposé dans ces travaux.

En second lieu, une autre série de travaux propose d'appliquer le principe de permanence des grandes échelles aux écoulements de Richtmyer-Meshkov. Précisons d'emblée que, tout au long de ce manuscrit, les expressions "grandes échelles" et "grands tourbillons" se réfèrent à des échelles beaucoup plus grandes que la taille typique des tourbillons énergétiques et potentiellement beaucoup plus grande que la taille de la zone de mélange. Le concept de permanence des grandes échelles est issu de l'analyse de la turbulence homogène isotrope (THI) [90, 97, 98]. Dans ce cadre plus académique, ce principe a permis de montrer que le régime auto-similaire de la THI dépendait explicitement des conditions initiales de l'écoulement aux grandes échelles. Ce principe est basé sur l'hypothèse selon laquelle, pourvu que les bonnes conditions soient remplies, les processus non-linéaires ont un effet négligeable sur l'évolution des grandes échelles aux temps longs. Cette hypothèse induit l'existence d'invariants aux grandes échelles dont la valeur est fixée par les conditions initiales [98, 80, 85, 130, 97, 29, 89, 90, 106]. Ces invariants peuvent être exprimés en termes d'intégrales aux grandes échelles telles que celles de Loytsyanskii [98, 80, 85] ou Saffman [130]. Ils correspondent plus simplement à l'idée que le spectre turbulent de vitesse est constant aux petits nombres d'onde. Cette constance s'applique en particulier à l'exposant de la loi de puissance à laquelle obéit le spectre pour ces petits nombres d'onde. Cet exposant est appelé exposant infrarouge et sera noté s_0 par la suite :

$$s_0 = \text{exposant infrarouge du spectre de vitesse.}$$

L'utilisation du principe de permanence des grandes échelles ne se restreint pas à la THI. Il a également été utilisé pour analyser d'autres écoulements homogènes, y compris avec des termes de production barocline [139]. D'un plus grand intérêt pour nous, il a également été employé pour décrire des écoulements inhomogènes dont des zones de mélange turbulentes [21, 96]. Une adaptation directe des hypothèses et outils utilisés en THI a ainsi été proposée par [21, 96]. D'autres auteurs ont également utilisés d'autres hypothèses ou façons de décrire les grandes échelles pour exprimer ce principe en turbulence de RM [23, 123, 99].

Tous proposent de relier la valeur de Θ à l'exposant infrarouge s_0 ou à un paramètre équivalent.

Au final, en prenant en compte les études sur les modes juste-saturés et la permanence des grandes échelles, les prédictions résumées dans le tableau 1.1 ont été faites sur la valeur de Θ .

Ref.	Chasnov [21]	Llor [96]	Inogamov, Youngs, Thornber [65, 169, 148]	Clark & Zhou [23]	Poujade & Peybernes [123]	Lombardini <i>et al.</i> [99]
Θ	$\frac{2}{s_0 + 4}$	$\frac{2}{m_1 + 3}$	$\frac{2}{m_2 + 5}$	$\frac{2}{m_3 + 3}$	$\frac{2}{m_4 + 4}$	$\frac{2}{s_0 + 3}$

TABLE 1 – Relations entre Θ et les conditions initiales prédites dans la littérature. Dans ce tableau, m_1 est l'exposant de décroissance de la corrélation longitudinale en deux points de la vitesse à grande séparation, m_2 est l'exposant du spectre de puissance des perturbations interfaciales initiales, m_3 est l'exposant infrarouge du spectre d'énergie cinétique 2D au centre de la zone de mélange, m_4 est l'exposant infrarouge du spectre de la vitesse foliée. Notons que [99] n'affirme pas la prédiction écrite dans ce tableau, mais la suggère uniquement comme point de référence.

On s'aperçoit qu'il n'existe pas de consensus apparent sur la valeur de Θ . Plus précisément, toutes ces approches utilisent une description et un paramétrage des grandes échelles différents les uns des autres et il est difficile de savoir *a priori* si elles sont compatibles entre elles ou bien si elles donnent des résultats différents. Du point de vue de la simulation et de l'expérience, aucune de ces prédictions ne semble avoir été testée. La compréhension générale du régime auto-similaire de la turbulence de Richtmyer-Meshkov reste donc incomplète.

1.3 Modélisation statistique de type RANS

Parallèlement à ces efforts de compréhension théorique du régime auto-similaire de la turbulence de Richtmyer-Meshkov, des modèles statistiques de type RANS (pour Reynolds Averaged Navier-Stokes) ont été proposés spécifiquement pour ce type d'écoulements. Une revue complète de ces modèles peut être trouvée dans [174].

L'objectif de ces modèles RANS est de pouvoir prédire rapidement et correctement le comportement du système étudié, dans notre cas celui d'une ZMT issue de l'IRM. Ces deux notions de promptitude à obtenir des résultats et de fiabilité de ces résultats sont essentielles, mais antagonistes. C'est pourquoi les conjuguer représente un enjeu d'importance capitale. Rappelons que dans le cadre de l'hydrodynamique, et plus précisément de l'étude des écoulements turbulents, trois grandes approches numériques existent :

- les Simulations Numériques Directes (DNS) : elles consistent à résoudre les équations de Navier-Stokes à toutes les échelles de turbulence, sans utiliser de modèle de turbulence. L'écoulement est décrit par ses champs instantanés, dont toutes les autres informations sont déduites. La DNS est l'approche la plus évidente et la plus compétitive en termes de précision des résultats. Cependant, elle a un coût de calcul très élevé, qui augmente très rapidement avec le nombre de Reynolds. Par conséquent, son application à des problèmes d'ingénierie n'est pas encore envisageable, en particulier pour des problèmes à haut nombre de Reynolds.
- les Simulations aux Grandes Échelles (LES) : elles résolvent les équations de Navier-Stokes pour les structures de tailles supérieures ou égales à celles des mailles discrétisant l'écoulement, mais modélisent les effets des échelles plus petites. La LES renvoie des quantités instantanées filtrées en espace. Ces simulations sont moins coûteuses que les DNS.
- les approches Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) : elles décrivent uniquement les champs moyens de l'écoulement et sont adaptées pour des applications industrielles, car elles ont des coûts de calcul largement inférieurs aux DNS et LES. Dans les approches de type RANS, chaque quantité instantanée est décomposée comme la somme de sa moyenne d'ensemble et de sa fluctuation. Les quantités non connues des équations d'évolution doivent être modélisées.

D'un point de vue ingénieur, seule l'utilisation de modèles RANS est envisageable pour restituer les expériences de FCI. Aussi le développement de ces modèles est-il un objectif central pour le CEA. L'un des modèles actuellement utilisé au CEA pour la modélisation de zones de mélange turbulentes issues de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov est le modèle GSG (pour Grégoire-Souffland-Gauthier, voir [52]). Il s'agit d'un modèle aux tensions de Reynolds (RSM). Dans cette approche statistique, on résout une équation de transport pour le tenseur des tensions de Reynolds, qui correspond au tenseur des corrélations d'ordre 2 de la vitesse. Cette équation est issue des équations de Navier-Stokes moyennées, et fait apparaître des termes correspondant à des corrélations d'ordre 3 de la vitesse, qui doivent être modélisés. Les modèles RSM permettent de décrire plus précisément l'anisotropie de l'écoulement. Ils sont plus précis que d'autres modèles de premier ordre tels que les modèles $k-\varepsilon$ ou $k-\omega$, qui expriment le tenseur des tensions de Reynolds à l'aide d'un modèle de viscosité turbulente [73]. Notons qu'avant le modèle GSG, un modèle $k-\varepsilon$ a longtemps été utilisé pour restituer les écoulements Richtmyer-Meshkov [48].

Le modèle GSG diffère de la formulation classique des modèles RSM dans la mesure où il suit non seulement le tenseur de Reynolds, mais aussi la corrélation vitesse-densité ("flux de masse") ainsi que la variance de densité. Ces corrélations supplémentaires jouent un rôle essentiel pour décrire correctement les effets de production barocline. Notons que des

variantes plus évoluées du modèle GSG ont été proposées au fil des années [56, 54, 142]. Notons également que d'autres modèles RSM ont été proposés pour traiter l'instabilité de Richtmyer-Meshkov, avec des descriptions de l'écoulement parfois très proches de celle utilisée dans GSG [134].

2 Problématique et moyens mis en œuvre

2.1 Problématique : Transport turbulent

L'un des points faibles des modèles RANS décrits ci-dessus, et notamment du modèle GSG, est la façon dont ils décrivent le transport turbulent. Ce processus est pourtant l'un des deux seuls qui contribuent à l'évolution de l'énergie cinétique turbulente $\bar{k}$ dans les zones de mélange de Richtmyer-Meshkov, l'autre étant la dissipation de l'énergie turbulente $\bar{\varepsilon}$ (Les définitions précises de $\bar{k}$ et $\bar{\varepsilon}$ seront données plus loin dans le manuscrit). Ce cas particulier explique pourquoi une modélisation correcte du transport turbulent est essentielle à la prédiction des ZMT issues de l'IRM.

À des fins illustratives, restons focalisés sur l'énergie cinétique turbulente $\bar{k}$. Le transport turbulent de cette quantité s'exprime à travers un flux turbulent F_k . Ce flux est lié aux corrélations triples de vitesse et également au flux de pression. Ce dernier est lui-même relié à nouveau aux corrélations triples de vitesse comme l'a montré [101]. Dans les modèles RANS tels que le modèle GSG, le flux turbulent de $\bar{k}$ est fermé par une hypothèse de diffusion en premier gradient. Bien que plusieurs variantes de cette fermeture existent, les résultats fournis par la majorité d'entre elles sont très similaires [170, 158, 27]. En turbulence isotrope, elles se simplifient toutes pour donner l'expression suivante :

$$F_k = -\frac{2}{3}C_k\nu_t\nabla\bar{k}$$

avec $\nu_t = \bar{k}^2/\bar{\varepsilon}$ la viscosité turbulente et C_k un coefficient de modélisation.

Dans la littérature, la valeur de C_k varie classiquement autour de 0.2 [170, 158, 27]. Cette valeur permet de restituer un grand nombre d'expériences et de simulations. Malheureusement, des mesures de C_k réalisées dans des simulations directes de turbulence de Richtmyer-Meshkov montrent que cette valeur est inadaptée à cette configuration [53]. On observe en effet, pour Richtmyer-Meshkov, des valeurs de C_k 3 à 5 fois plus élevées que la valeur usuelle, c'est à dire de l'ordre de 0.7 à 0.9.

Il s'agit d'un écart non négligeable qui soulève un certain nombre de questions. La première d'entre elles est de savoir si l'hypothèse de diffusion en premier gradient est effectivement valide dans le cadre de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. Une variation importante d'un coefficient dans une fermeture peut en effet être indicatif de l'inadéquation de cette dernière. Le cas échéant, si l'on se trouve dans un régime de diffusion, on peut se

demander ce qui explique cette variation, et en particulier, s'il existe une dépendance du coefficient de diffusion à des paramètres non pris en compte habituellement. De ce point de vue, nous avons introduit en section 1.2 l'idée que l'état autosimilaire en turbulence de Richtmyer-Meshkov dépendait des conditions initiales aux grandes échelles. On peut légitimement se demander si le transport turbulent en dépend également, et si cette dépendance peut expliquer la forte variation de C_k .

Apporter une réponse à ces questions est l'objectif principal de cette thèse. Autrement dit, cette thèse a pour but d'étudier le transport turbulent dans les zones de mélange issues de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov. Plus particulièrement, nous souhaitons :

1. déterminer s'il existe un régime de diffusion pour le transport turbulent dans le cadre Richtmyer-Meshkov,
2. et si oui, expliciter la dépendance de ce régime de diffusion aux conditions initiales aux grandes échelles.

2.2 Moyens mis en œuvre : Modèles PDF

Afin de répondre à notre problématique principale, nous allons faire appel aux modèles à fonction de densité de probabilité (PDF).

Depuis leur mise en valeur par les travaux de Pope [119], les modèles PDF sont de plus en plus utilisés, car ils représentent un outil efficace de simulation d'écoulements turbulents. Ce type de méthode consiste à résoudre une équation de transport pour la PDF du champ de fluctuations de vitesse, et potentiellement d'autres variables décrivant l'écoulement, telles que la température ou la concentration. Les termes d'accélération turbulente et de diffusion moléculaire présents dans cette équation doivent être fermés. La plupart des fermetures utilisées aboutissent à une équation dite de Langevin [119, 120], à laquelle nous nous intéressons plus particulièrement dans le cadre de cette thèse. Comme nous l'avons mentionné précédemment, dans les méthodes RSM, le transport turbulent est généralement modélisé par une approximation de diffusion en premier gradient. Notre choix d'utiliser un modèle PDF au cours de cette thèse s'explique par le fait que, dans ces modèles, l'advection turbulente est traitée de façon exacte, dans la mesure où elle ne nécessite pas de fermeture directe. En conséquence, les modèles PDF ne présupposent aucune forme particulière pour le transport turbulent. Ils peuvent rendre compte aussi bien d'un transport dans un régime de diffusion que dans un régime balistique [120]. Cette propriété essentielle des modèles PDF nous laisse à penser qu'ils pourraient apporter une réponse aux questions que nous nous posons.

Cependant, appliquer un modèle de Langevin à une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov n'est pas une opération simple et directe. Un certain nombre d'étapes doivent

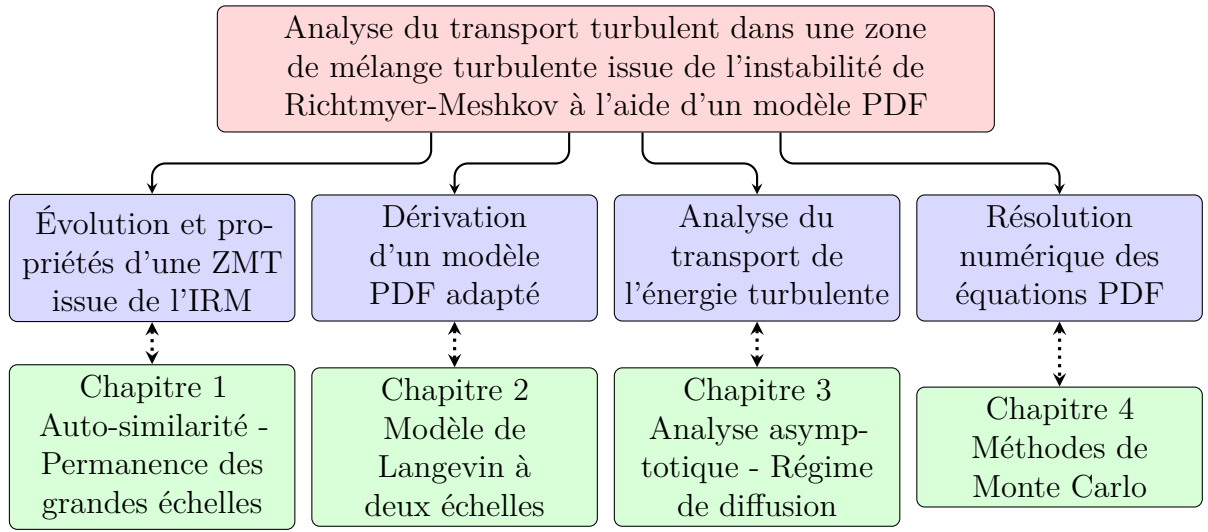


FIGURE 2 – Résumé des étapes clés pour la dérivation et la validation d'un modèle PDF adapté à l'analyse du transport de l'énergie turbulente en turbulence de Richtmyer-Meshkov

être franchies avant que cela ne soit possible. Ces étapes sont résumées sur la figure 2.2 et sont détaillées dans la suite.

2.2.1 Modèles PDF et grandes échelles

Pour analyser le transport turbulent d'une ZMT issue de l'IRM à l'aide d'un modèle PDF, il faut tout d'abord que celui-ci soit en mesure de restituer les statistiques de cet écoulement. Or, nous avons montré au paragraphe 1.2 que ces statistiques n'étaient pas universelles, mais dépendaient des conditions initiales aux grandes échelles.

Ici, deux problèmes se posent.

- Tout d'abord, l'étude bibliographique du paragraphe 1.2 montre qu'il n'y a pas de consensus ni de validation sur la dépendance à ces conditions initiales. Nous devons donc dans un premier temps réaliser une étude des grandes échelles de la turbulence de Richtmyer-Meshkov, de façon à discriminer les résultats de la littérature. Pour cela, nous emploierons un modèle EDQNM pour réaliser une analyse théorique de ce problème et réaliserons des simulations LES dans un but de validation.
- Ensuite, se pose la question de savoir comment intégrer la connaissance acquise sur les grandes échelles de Richtmyer-Meshkov dans un modèle de Langevin. En effet, ce genre de modèle vise à résoudre une équation statistique en un point, et ne contient donc pas les informations en deux points nécessaires pour la prise en compte de la permanence des grandes échelles. Par exemple, le modèle de Langevin usuel prévoit un taux de croissance unique de la ZMT, qui ne dépend pas de s_0 .

Il est donc nécessaire de dériver un modèle qui puisse retranscrire les spécificités inhérentes à la turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Pour cela, nous proposons d'adapter le modèle de Langevin simplifié (SLM) en le décomposant selon deux échelles, dans l'esprit des modèles multi-échelles proposés dans [137, 132]. La partie du modèle décrivant les grandes échelles est alors associée aux conditions initiales à travers le principe de permanence des grandes échelles. La partie du modèle décrivant les petites échelles reste, elle, inchangée par rapport au modèle de Langevin simplifié classique.

Au terme de ces deux premières étapes, nous disposerons donc d'un modèle de Langevin capable, en théorie, de restituer les écoulements de Richtmyer-Meshkov et leur dépendance aux conditions initiales des grandes échelles.

2.2.2 Modèles PDF et régime de diffusion

Dans la mesure où le modèle de Langevin à deux échelles est susceptible de restituer correctement l'évolution d'une zone de mélange turbulente issue de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov, son analyse devient pertinente pour discuter de l'existence ou non d'un régime de diffusion pour ce type d'écoulement.

Dans cette optique, nous montrons dans un premier temps l'existence d'un régime de type diffusif pour le modèle de Langevin dès lors que la largeur intégrale de la turbulence est faible devant l'échelle de gradient de l'énergie turbulente. Cette condition définit ce que l'on appellera par la suite la limite quasi-homogène. Dans cette limite, nous obtenons, grâce à un développement asymptotique de l'équation de transport de la PDF inspiré de [36], une expression pour cette dernière. Nous déduisons de ce développement que, dans cette limite, les corrélations de vitesse d'ordre 3 caractérisant le transport turbulent sont semblables à celle rencontrée habituellement dans les fermetures diffusives au premier gradient.

Un autre constat important ressort de l'analyse asymptotique. En effet, le coefficient de diffusion associé à ce régime peut être exprimé en fonction des coefficients du modèle PDF. Ainsi, l'impact des fermetures du modèle PDF sur l'advection turbulente est démontré. Il apparaît en outre que la valeur de ce coefficient est fixée par deux caractéristiques principales, propres aux zones de mélange de Richtmyer-Meshkov : le taux de croissance de la zone et son anisotropie. Ces deux caractéristiques sont elles-mêmes liées aux conditions initiales de l'écoulement, si bien que le coefficient de diffusion dépend de s_0 .

Au terme de cette troisième étape, nous avons donc identifié et caractérisé un régime de diffusion pour le modèle de Langevin à deux échelles dérivé lors des deux premières

étapes.

Il ne nous reste alors plus qu'à vérifier si ce régime de diffusion s'applique effectivement aux zones de mélange de Richtmyer-Meshkov.

2.2.3 Modèles PDF et méthode de Monte Carlo

Si l'on souhaite valider le modèle de Langevin à deux échelles et étudier le régime de diffusion qui lui est associé, nous devons être en mesure de résoudre l'équation de transport de la PDF qui lui est associée.

Malgré les avantages de l'approche PDF concernant la représentation de transport turbulent, celle-ci présente une contrainte numérique sévère. Elle nécessite en effet la résolution d'une équation de dimension potentiellement élevée, ce qui induit des coûts de calcul élevés. Les méthodes volume/différence fini(e) ne peuvent en particulier pas être utilisées, leur coût de calcul augmentant exponentiellement avec la dimension du problème. Nous avons par conséquent choisi d'utiliser une méthode de Monte Carlo, dont le coût de calcul n'augmente que linéairement avec la dimension.

Dans le domaine de la combustion turbulente, les méthodes de Monte Carlo lagrangiennes sont largement utilisées [119]. Elles sont basées sur l'utilisation de particules stochastiques, qui évoluent selon des équations stochastiques aux dérivées ordinaires (SODEs), statistiquement équivalentes à l'équation PDF initiale. Cependant, elles présentent des limites lorsqu'il s'agit de projeter les statistiques des particules sur des nœuds de mailles en vue de coupler leurs résultats avec des méthodes de simulation, qui sont plus classiquement eulériennes. Aussi, le contrôle de la convergence stochastique peut parfois être difficile à mettre en place.

Cette observation a poussé un certain nombre d'auteurs à se tourner vers le développement de méthodes de Monte Carlo eulériennes (EMC). Ces méthodes sont basées sur des champs eulériens, qui évoluent selon des équations aux dérivées partielles stochastiques (SPDEs) statistiquement équivalentes à l'équation PDF initiale. Elles ont en premier lieu été introduites dans [157, 127, 128] pour la résolution d'équations de PDF de scalaires (concentration, température...). Sous cette forme, elles ont par la suite été exploitées dans un large spectre d'applications et se sont montrées qualitativement comparables aux méthodes LMC [14, 15, 72, 83, 46, 19, 74, 110, 44, 118, 34, 35, 68, 60, 77, 76, 75, 47].

Dans cette thèse, nous cherchons à résoudre non pas l'équation de la PDF du scalaire, mais celle de la PDF du champ de vitesse. La résolution d'une telle PDF à l'aide d'une méthode EMC a été envisagée dans un premier temps dans [143]. Les SPDEs sont alors dérivées et montrées comme étant stochastiquement équivalentes à l'équation PDF initiale du modèle de Langevin, et un schéma numérique permettant de les résoudre a été proposé. Malheureusement, le travail détaillé dans [143] est passé outre une problématique de taille :

l'équivalence entre les équations SPDEs et l'équation PDF a été établie en supposant que les champs stochastiques en jeu étaient des fonctions continues de l'espace et du temps. Néanmoins, l'équation SPDE pour le champ de vitesse comprend une composante de type Burgers qui mène inévitablement à l'apparition de discontinuités. L'équivalence entre les équations SPDEs et l'équation PDF, telle que présentée dans [143], ne peut donc être validée à chaque instant.

Ce problème fondamental a été mis en évidence dans [115]. Dans [115], une méthode alternative à la résolution des SPDEs a été proposée, en se basant sur des champs stochastiques multivalués, et non plus monovalués. Cette méthode a ensuite été validée sur de nombreux cas tests avec succès. Néanmoins, une justification de cette méthode n'avait pu être mise en place dans [115]. D'autre part, les avantages et inconvénients de cette méthode vis-à-vis des approches Lagrangiennes n'ont pas été discutés. Dans cette thèse, nous souhaitons donc poursuivre les travaux de [115] en leur apportant un éclairage basé sur les travaux de [42, 88]. Nous comparerons ensuite cette méthode EMC à une méthode lagrangienne et déterminerons quelle méthode est la mieux adaptée à la résolution de notre problème.

Au terme de cette dernière étape, nous disposerons d'une méthode numérique optimisée pour la résolution de l'équation de transport de la PDF de vitesse. Dans cette optique d'optimisation, nous aurons fait les développements et comparaisons nécessaires pour rester ouverts dans notre décision aux deux approches lagrangienne et eulérienne.

Une fois la méthode de Monte Carlo déterminée, nous procédons alors à la validation du modèle de Langevin à deux échelles que nous avons dérivé auparavant. Pour cela, nous comparons les résultats du modèle aux simulations LES que nous avons déjà réalisées pour étudier la permanence des grandes échelles en turbulence de Richtmyer-Meshkov. Nous avons notamment extrait les évolutions de la largeur de la zone de mélange ou encore de l'énergie cinétique turbulente, mais aussi des PDF de vitesse.

Une fois le modèle validé, nous cherchons ensuite à savoir dans quelle mesure la limite diffusive du modèle de Langevin s'applique aux zones de mélange simulées.

2.3 Plan

Le plan de ce manuscrit suit l'ordre établi dans cette introduction. Le premier chapitre portera sur l'étude de la permanence des grandes échelles dans une zone de mélange turbulente issue de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov, et son influence sur d'autres grandeurs d'intérêt de l'écoulement, à l'aide de simulations LES. Dans le second chapitre, nous prendrons en compte les résultats établis dans le chapitre 1 afin de dériver un modèle PDF multi-échelles adapté à l'étude d'une telle zone de mélange. Le chapitre 3 sera consacré

à une étude analytique détaillée du modèle PDF. Cette étude se focalisera sur la prise en charge du transport turbulent dans le modèle. Enfin, le dernier chapitre traitera des développements liés à la méthode de Monte-Carlo permettant de résoudre l'équation de transport de la PDF de vitesse issue du modèle PDF.

Chapitre 1

Permanence des grandes échelles dans une turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood

L'objectif principal de ce chapitre est de discriminer les différentes théories sur l'évolution auto-similaire des zones de mélange de Richtmyer-Meshkov telles que résumées dans le tableau 1.1. Pour cela, nous nous intéresserons aux grandes échelles de ces ZMT. L'existence d'invariants à grande échelle est prédite pour le spectre de vitesse. En revanche, les spectres de flux de concentration et de concentration ne possèdent pas de tels invariants. Leurs propriétés à grande échelle sont contrôlées soit par le spectre de vitesse, soit par des processus de "backscattering" (rétrodiffusion) non linéaires dépendant des conditions initiales. L'existence d'invariants à grande échelle pour le spectre de vitesse permet de relier le taux de croissance auto-similaire de la zone de mélange turbulent à la pente infrarouge du spectre de vitesse. En outre, elle implique également que les grandes échelles conservent leur anisotropie initiale de sorte que le retour à l'isotropie de la zone de mélange turbulente n'est que partiel. Enfin, elle permet d'estimer les préfacteurs entrant dans les lois de puissance régissant la décroissance de la turbulence de Richtmyer-Meshkov et la croissance de ses échelles de longueur. Les différentes hypothèses et prédictions de ce chapitre sont vérifiées en effectuant des simulations aux grandes échelles implicites d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer - Meshkov.

1.1 Introduction

Nous rappelons que l'instabilité de Richtmyer-Meshkov se produit lorsqu'une onde de choc traverse une interface séparant deux fluides de densités différentes [126, 105, 12,

174]. Suite à l'impact du choc, les perturbations déformant initialement l'interface se développent jusqu'à ce qu'une zone de mélange se forme et atteigne un état turbulent. Dans le même temps, à condition que le contraste initial de densité soit faible, les effets de compressibilité dus au passage du choc diminuent jusqu'à ce que l'approximation de Boussinesq s'applique et que l'écoulement devienne incompressible [112, 142]. Au bout d'un temps suffisamment long, cette zone de mélange turbulente incompressible devient auto-similaire [12, 174], la croissance de la largeur de la zone de mélange obéissant à une loi de puissance. L'exposant de cette loi est un paramètre clé de la turbulence de Richtmyer-Meshkov et a fait l'objet de nombreux travaux que nous avons présentés en introduction.

L'une des principales prédictions sur la valeur de cet exposant vient de l'application du principe de permanence des grandes échelles [21, 96], qui suppose l'existence d'invariants à grande échelle, dont la valeur est fixée par les conditions initiales [98, 80, 85, 130, 97, 29, 89, 90, 106]. La permanence des grandes échelles a ainsi permis de dériver une relation entre le taux de croissance d'une largeur de zone de mélange et l'exposant infrarouge du spectre de vitesse au temps initial. Qui plus est, dans [96], les conditions dans lesquelles la permanence de grandes échelles peut être obtenue pour des écoulements inhomogènes ont été discutées.

Un aspect frappant des études mentionnées [21, 96] est qu'elles s'appuient sur l'analyse à grande échelle du seul champ de vitesse. Pourtant, dans le contexte de Richtmyer-Meshkov, ils sont appliqués pour décrire des quantités qui ne sont pas exclusivement liées à la vitesse. En particulier, la largeur de la zone de mélange est liée à la concentration moyenne et par extension au flux de concentration turbulent. Pourquoi cette quantité, son spectre ou son état initial sont-ils absents de la prédiction de l'exposant de croissance de la largeur de la zone de mélange ? Cette question n'a pas encore été abordée et sa réponse nécessite une analyse à grande échelle du flux de concentration et des spectres de concentration.

Une autre limitation des études détaillées dans [21, 96] est qu'elles ne discutent que des implications de la permanence des grandes échelles sur les exposants des lois de puissance régissant la décroissance de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. Pourtant, l'étude des grands tourbillons peut éventuellement fournir des informations sur d'autres aspects de l'auto-similarité de l'écoulement. Par exemple, dans le contexte de la turbulence homogène anisotrope en décroissance (THA) [20, 30, 107], la permanence des grandes échelles conduit à un retour partiel à l'isotropie du tenseur des contraintes de Reynolds. Un tel retour partiel à l'isotropie est également observé pour la turbulence de Richtmyer-Meshkov [148, 112, 150] et on peut se demander si et comment il est lié aux grandes échelles. Un autre exemple concerne les préfacteurs multipliant les lois de puissance régissant la décroissance de la turbulence Richtmyer-Meshkov. Dans un autre contexte, celui de la turbulence homogène stratifiée instablement (USHT) [139, 54, 55, 17, 18], des estimations de préfacteurs analogues ont été proposées en utilisant le comportement des

grandes échelles [139]. Une telle dérivation n'a pas encore été appliquée à la turbulence de Richtmyer-Meshkov. Un dernier exemple concerne le paramètre de mélange. Dans [51, 141], ce paramètre a été relié à l'évolution linéaire des grandes échelles en USHT et en turbulence de Rayleigh-Taylor. La question se pose de savoir si l'on peut établir un lien similaire en turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Il convient de noter que des variantes du principe de la permanence des grandes échelles ont été proposées pour décrire la turbulence de Richtmyer-Meshkov [23, 123, 99], en plus de ce qui est proposé dans [21, 96]. Ces variantes diffèrent dans leurs prédictions de celles proposées dans [21, 96]. Les raisons de ces divergences n'ont pas encore été analysées et devraient être explicitées. On rappelle également qu'une autre approche a été envisagée pour comprendre l'auto-similarité de Richtmyer-Meshkov [31, 65, 169, 148]. Celle-ci repose sur la décomposition en modes de la perturbation déformant l'interface, avec l'existence d'un "mode juste saturé" qui sépare les grandes échelles linéaires des petites échelles non linéaires. Ce raisonnement permet également d'établir une relation entre Θ et s_0 . Or, bien qu'apparemment issus de deux origines différentes, les notions de permanence des grandes échelles et de modes «juste-saturés» partagent en fait une origine commune. Ces théories reposent sur l'hypothèse que les processus non linéaires ont un effet négligeable sur l'évolution des grandes échelles sur de longues périodes. Sans cette hypothèse, les invariants à grande échelle ou les modes «juste saturés» n'existeraient pas. Étant donné cette origine commune, on s'attendrait à ce que les deux théories produisent des prédictions similaires. Cependant, la comparaison entre les deux n'est pas simple. En effet, elles sont exprimées dans des cadres utilisant des langages différents. En outre, la permanence des grandes échelles établit un lien entre l'auto-similarité et l'état initial juste après le choc tandis que l'approche du mode «juste-saturé» relie l'auto-similarité à la condition initiale avant le choc. Que les deux théories conduisent à des prédictions similaires reste donc une question ouverte.

Ainsi, les objectifs de ce travail sont les suivants. Premièrement, nous cherchons à examiner les résultats existants [21, 96, 23, 123, 99] sur la permanence des grandes échelles appliquée à la turbulence de Richtmyer-Meshkov. Le but est ici de les relier aux prédictions du mode «juste saturé» et de comprendre pourquoi certains d'entre eux diffèrent des autres. Deuxièmement, nous cherchons à comprendre si un équivalent du principe de permanence des grandes échelles s'applique aux spectres de flux de concentration et de concentration, et si leurs conditions initiales à grande échelle ont une quelconque influence. Enfin, nous aimerions explorer d'autres conséquences de la permanence des grandes échelles et en particulier montrer comment elle peut être utilisée pour estimer la dépendance des préfacteurs de loi de puissance, de l'anisotropie et du paramètre de mélange aux conditions initiales.

1.2 Équations d'évolution et conditions initiales

Dans cette section, nous détaillons les équations gouvernant les spectres des champs de vitesse et de concentration d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer - Meshkov. Ces équations d'évolution sont complétées par des conditions initiales, issues de l'interaction choc/interface qui a généré la zone de mélange turbulente.

1.2.1 Équations d'évolution

Nous considérons une zone de mélange turbulente de taille L en expansion dans la direction x_3 et ayant un petit nombre d'Atwood $A_t \ll 1$. Les champs de vitesse et de concentration définissant cet écoulement sont respectivement désignés par $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ et $c = \bar{c} + c'$, où pour toute quantité donnée q , $\bar{q}$ fait référence à sa moyenne d'ensemble et q' à sa fluctuation. L'écoulement obéit à l'approximation de Boussinesq et est gouverné par les équations suivantes :

$$\partial_t c' + u'_j \partial_j c' = -u'_3 \partial_3 \bar{c} + \nu \partial_{jj}^2 c' + \partial_3 \overline{u'_3 c'} \quad , \quad (1.1a)$$

$$\partial_t u'_i + u'_j \partial_j u'_i = -\partial_i p' + \nu \partial_{jj}^2 u'_i + \partial_3 \overline{u'_3 u'_i} \delta_{i3} \quad , \quad (1.1b)$$

$$\partial_j u'_j = 0 \quad , \quad (1.1c)$$

$$\bar{u}_i = 0 \quad , \quad \partial_t \bar{c} + \partial_3 \overline{u'_3 c'} = \nu \partial_{33}^2 \bar{c} \quad , \quad (1.1d)$$

avec p la pression réduite et ν un coefficient de transport moléculaire. Par souci de simplicité, nous supposons que le nombre de Schmidt est égal à 1, de sorte que ν fait référence à la fois à un coefficient de diffusion de viscosité et de concentration.

Pour étudier les propriétés à grande échelle de cet écoulement, nous introduisons $E_{ij}(\mathbf{k}, t)$, $E_{cc}(\mathbf{k}, t)$ et $E_{3c}(\mathbf{k}, t)$ les spectres 3D de la vitesse, de la concentration et du flux de concentration pris au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et à l'instant t . Ces spectres sont définis comme les parties diagonales des corrélations entre $\widehat{\mathbf{u}'}(\mathbf{k}, t)$ et $\widehat{c'}(\mathbf{k}, t)$, les transformées de Fourier de $\mathbf{u}'$ et c' (voir annexe 1). Leur intégration sur le vecteur d'onde donne des corrélations de second ordre moyennées sur la direction inhomogène :

$$\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle(t) = \frac{2\pi}{L(t)} \int E_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad , \quad (1.2a)$$

$$\langle \overline{u'_3 c'} \rangle(t) = \frac{2\pi}{L(t)} \int E_{3c}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad , \quad (1.2b)$$

$$\langle \overline{c'^2} \rangle(t) = \frac{2\pi}{L(t)} \int E_{cc}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad , \quad (1.2c)$$

où $\langle \cdot \rangle$ est la moyenne sur la direction inhomogène :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{L(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot dx_3. \quad (1.3)$$

En prenant la transformée de Fourier des équations de Boussinesq et en combinant les résultats pour obtenir les évolutions des corrélations de Fourier, on déduit que :

$$\partial_t E_{ij}(\mathbf{k}, t) = T_{ij}(\mathbf{k}, t) - 2\nu k^2 E_{ij}(\mathbf{k}, t) \quad (1.4a)$$

$$\partial_t E_{3c}(\mathbf{k}, t) = T_{3c}(\mathbf{k}, t) - 2\nu k^2 E_{3c}(\mathbf{k}, t) + \frac{E_{33}^G(\mathbf{k}, t)}{L(t)} \quad (1.4b)$$

$$\partial_t E_{cc}(\mathbf{k}, t) = T_{cc}(\mathbf{k}, t) - 2\nu k^2 E_{cc}(\mathbf{k}, t) + 2 \frac{E_{3c}^G(\mathbf{k}, t)}{L(t)}. \quad (1.4c)$$

Dans ces équations, T_{ij} , T_{3c} et T_{cc} sont des termes de transfert non linéaires. Ils proviennent des termes d'advection initialement présents dans les équations de Boussinesq et aussi de leur redistribution par la pression pour T_{ij} et T_{3c} . Quant aux termes νk^2 , ils correspondent à la dissipation moléculaire. Enfin, E_{33}^G et E_{3c}^G correspondent à la production de fluctuations de concentration par le gradient de concentration moyen. Plus précisément, E_{33}^G est le spectre de u'_3 et $\widehat{u}_3^G$ et E_{3c}^G est le spectre de c' et $\widehat{u}_3^G$, où $\widehat{u}_3^G$ est défini comme :

$$\widehat{u}_3^G(\mathbf{k}, t) = -L(t) \widehat{u'_3 \partial_3 \bar{c}}(\mathbf{k}, t) = -L(t) \int \widehat{u'_3}(k_1, k_2, p_3, t) \widehat{\partial_3 \bar{c}}(k_3 - p_3, t) dp_3. \quad (1.5)$$

En turbulence homogène (et avec $\partial_3 \bar{c} < 0$), on aurait $\widehat{u}_3^G = \widehat{u'_3}$ et $E_{33}^G = E_{33}$ et $E_{3c}^G = E_{3c}$. Cependant, la taille finie de la zone de mélange empêche la vérification de ces égalités, en particulier à grande échelle. Cet aspect sera discuté plus en détail en section 1.3 et en annexe 2.

1.2.2 Conditions initiales

L'évolution des spectres turbulents donnés par le système (1.4) est valable pour toute zone de turbulence monodimensionnelle en décroissance et en diffusion obéissant à l'approximation de Boussinesq. Ce qui différencie une zone de mélange turbulente de Richtmyer-Meshkov des autres types d'écoulement 1D en décroissance est la façon dont les fluctuations de vitesse et de concentration sont générées au moment initial. Pour la turbulence de Richtmyer-Meshkov, les conditions initiales sont dues au passage d'un choc à travers une interface perturbée séparant deux fluides de densités différentes. Le but de cette section est de montrer comment les valeurs initiales de $E_{ij}(\mathbf{k}, t)$, $E_{3c}(\mathbf{k}, t)$ et $E_{cc}(\mathbf{k}, t)$, respectivement notées $E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k})$, $E_{3c}^{(0)}(\mathbf{k})$ et $E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k})$, peuvent être liées aux propriétés de cette interaction choc/interface.

Pour ce faire, nous considérons que l'interface présente à l'instant initial un petit

déplacement par rapport à la position $x_3 = 0$. Ce déplacement est décrit par la fonction hauteur $h^-(\mathbf{x}_\perp)$, avec $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$ la position dans le plan perpendiculaire à x_3 . Juste après le choc, cette interface est compressée par un facteur $\mathcal{C} = 1 - \Delta u/u_s$, avec Δu le saut de vitesse à travers le choc et u_s sa vitesse. La perturbation de l'interface juste après le choc est alors $h(\mathbf{x}_\perp) = \mathcal{C}h^-(\mathbf{x}_\perp)$.

On note $\hat{h}^{2D}(\mathbf{k}_\perp)$ la transformée de Fourier 2D de h , avec $\mathbf{k}_\perp = (k_1, k_2)$ le vecteur d'onde 2D dans le plan perpendiculaire à x_3 . Nous définissons enfin E_h comme le spectre de h et P_h comme son spectre en module :

$$E_h(\mathbf{k}_\perp)\delta(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}'_\perp) = \overline{\hat{h}^{2D}(\mathbf{k}_\perp)\hat{h}^{2D}(\mathbf{k}'_\perp)} \quad \text{et} \quad P_h(k_\perp) = k_\perp \oint E_h(\mathbf{k}_\perp) dS_\perp ,$$

avec $k_\perp$ le module de $\mathbf{k}_\perp$ et $dS_\perp$ l'élément surfacique du cercle unité. Notons que $k_\perp$ est lié à k , le module du vecteur d'onde 3D $\mathbf{k}$ et à θ , l'angle entre $\mathbf{x}_3$ et $\mathbf{k}$ à valeurs entre 0 et π :

$$k_\perp = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = k \sin \theta \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{k_j k_j} \quad \text{et} \quad \theta = \arccos(k_3/k) .$$

Par définition, la variance de l'amplitude de la déformation est donnée par :

$$\overline{h^2} = \iint E_h(\mathbf{k}_\perp) d\mathbf{k}_\perp = \int_0^\infty P(k_\perp) dk_\perp .$$

L'axisymétrie requiert que E_h soit isotrope, de sorte que :

$$E_h(\mathbf{k}_\perp) = E_h(k_\perp) \quad \text{et} \quad P_h(k_\perp) = 2\pi k_\perp E_h(k_\perp) .$$

Pour finir, précisons que la variance pré-choc $\overline{h^{-2}}$, le spectre E_h^- et le spectre en module P_h^- de la perturbation sont liés aux valeurs post-choc selon $\overline{h^{-2}} = \mathcal{C}^{-2}\overline{h^2}$, $E_h^- = \mathcal{C}^{-2}E_h$ et $P_h^- = \mathcal{C}^{-2}P_h$.

Pour une interface non diffuse, le champ de concentration initial post-choc c est lié à la perturbation de l'interface par la relation :

$$c(\mathbf{x}) = H(x_3 - h(\mathbf{x}_\perp)) ,$$

avec H la fonction de Heaviside. En prenant la transformée de Fourier 3D de cette expression et en soustrayant la moyenne, on obtient :

$$\hat{c}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \frac{e^{-ik_3 h(\mathbf{x}_\perp)} - \overline{e^{-ik_3 h(\mathbf{x}_\perp)}}}{ik_3} d\mathbf{x}_\perp .$$

En conséquence, nous déduisons que, pour $k_\perp \neq 0$:

$$E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_3^2} \iint e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \Psi_{\Delta h}^*(k_3, \mathbf{r}_\perp) d\mathbf{r}_\perp , \quad (1.6a)$$

avec $\Psi_{\Delta h}(k_3, \mathbf{r}_\perp) = \overline{e^{ik_3 \Delta h}}$ la fonction caractéristique de $\Delta h = h(\mathbf{r}_\perp) - h(\mathbf{0})$. (1.6b)

Notons que pour $k_\perp = 0$, on a simplement $E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k}) = 0$. La relation (1.6) lie le spectre de concentration initial à la perturbation de l'interface. À quelques opérations conjuguées près, E_{cc}^0 est la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de la séparation en hauteur Δh . Puisque la fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la fonction de densité de probabilité (PDF) de Δh , elle contient des informations sur tous les moments de cette quantité et pas seulement sur le second ordre $\overline{\Delta h^2}(\mathbf{r}_\perp) = 2\overline{h^2} - 2\overline{h(\mathbf{r}_\perp)h(\mathbf{0})}$. Ainsi, en général, E_{cc}^0 ne dépend pas uniquement de $\overline{h(\mathbf{r}_\perp)h(\mathbf{0})}$ ou de façon équivalente de sa transformée de Fourier $E_h(\mathbf{k}_\perp)$. Cela peut néanmoins être le cas, si la PDF de Δh est paramétrée par sa variance, par exemple si c'est une Gaussienne.

L'équation (1.6) peut être simplifiée pour la limite $k_3\sqrt{\overline{h^2}} \ll 1$, à condition que les moments réduits $\overline{\Delta h^n}/(\overline{\Delta h^2})^{n/2}$ ne divergent pas avec n . En effet, dans ce cas, on peut faire un développement de Taylor de la fonction caractéristique, sachant que $\partial^n \Psi / \partial k_3^n = i^n \overline{\Delta h^n} / n!$. Alors, en ne gardant que le terme dominant ($n = 2$) de ce développement, on obtient que :

$$\text{Pour } |k_3|\sqrt{\overline{h^2}} \ll 1 \quad , \quad E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{P_h(k_\perp)}{k_\perp} . \quad (1.7)$$

La limite $|k_3|\sqrt{\overline{h^2}} \ll 1$ est importante pour notre objectif car elle englobe les grandes échelles. En effet, au moment initial, les grandes échelles sont définies comme $k\sqrt{\overline{h^2}} \ll 1$, ce qui nécessite à la fois $|k_3|\sqrt{\overline{h^2}} \ll 1$ et $k_\perp\sqrt{\overline{h^2}} \ll 1$.

Nous portons maintenant notre attention sur les spectres de vitesse et de concentration. Pour commencer, la vorticité ω cr  e par le choc à l'interface est proportionnelle au produit vectoriel entre la normale du choc, x_3 et le gradient de concentration $\partial_j c(\mathbf{x})$:

$$\omega_i(\mathbf{x}) = -r\varepsilon_{ij3}\partial_j c(\mathbf{x}) \text{ ou de façon équivalente dans l'espace spectral, } \hat{\omega}_i(\mathbf{k}) = -r\varepsilon_{ij3}k_j\hat{c}(\mathbf{k}) .$$

Le préfacteur r est associé au taux de croissance linéaire de la perturbation. Par souci de simplicité, nous pouvons utiliser l'estimation suivante, obtenue à partir de l'approximation impulsive de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov :

$$r = 2\mathbf{A}_t\Delta u \quad ,$$

avec $\mathbf{A}_t$ le nombre d'Atwood post-choc et Δu le saut de vitesse à travers le choc. En inversant la relation entre les transformées de Fourier de la vitesse et de la vorticité, on obtient :

$$\hat{v}_i(\mathbf{k}) = \varepsilon_{ijk} \frac{k_k}{k^2} \hat{\omega}_j = rP_{i3}(\mathbf{k})\hat{c}(\mathbf{k})$$

avec $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$ le projecteur sur les champs incompressibles .

On obtient finalement que :

$$E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) = (2A_t \Delta u)^2 E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k}) P_{i3}(\mathbf{k}) P_{j3}(\mathbf{k}) \text{ et } E_{3c}^{(0)}(\mathbf{k}) = (2A_t \Delta u) E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k}) P_{33}(\mathbf{k}) . \quad (1.8)$$

La valeur de $E_{cc}^{(0)}$ donnée par l'équation (1.6) ou par son approximation (1.7) peut alors être injectée dans ces expressions.

Pour conclure sur cette section, nous nous concentrons maintenant sur la partie à grande échelle des spectres initiaux, la partie qui sera discutée dans le reste de ce texte. Nous considérons le cas où le spectre de la perturbation d'interface est spécifié à grande échelle par une loi de puissance de la forme :

$$\text{pour } k_{\perp} \sqrt{h^2} \ll 1 \quad , \quad P_h(k_{\perp}) = C k_{\perp}^{m_2} \quad ,$$

avec C une constante. Ensuite, en utilisant le fait que $k_{\perp} = k \sin \theta$, et en utilisant l'approximation (1.7), on peut exprimer les différents spectres à grande échelle comme :

$$\text{Pour } k \sqrt{h^2} \ll 1 \quad , \quad E_{cc}^{(0)}(\mathbf{k}) = k^{s_0-2} e_{cc}(\theta) \quad , \quad (1.9a)$$

$$E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) = k^{s_0-2} e_{ij}(\theta) \quad , \quad (1.9b)$$

$$E_{3c}^{(0)}(\mathbf{k}) = k^{s_0-2} e_{3c}(\theta) \quad , \quad (1.9c)$$

$$\text{avec } s_0 = m_2 + 1 . \quad (1.9d)$$

Les valeurs de $e_{cc}(\theta)$, $e_{3c}(\theta)$ et des $e_{ii}(\theta)$ sont données par :

$$\begin{aligned} e_{cc}(\theta) &= \frac{C}{(2\pi)^3} (\sin \theta)^{s_0-2} \quad , \quad e_{3c}(\theta) = \frac{(2A_t \Delta u) C}{(2\pi)^3} (\sin \theta)^{s_0} \quad , \\ e_{33}(\theta) &= \frac{(2A_t \Delta u)^2 C}{(2\pi)^3} (\sin \theta)^{s_0+2} \quad \text{et} \quad e_{11}(\theta) = e_{22}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(2A_t \Delta u)^2 C}{(2\pi)^3} (\sin \theta)^{s_0} \cos^2 \theta . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ces équations montrent que tous les spectres initiaux ont le même exposant spectral à grande échelle s_0 , également appelé exposant infrarouge. Cet exposant est lié au spectre de la loi de puissance supposée de P_h . Les distributions angulaires de $E_{ij}^{(0)}$, $E_{3c}^{(0)}$ et $E_{cc}^{(0)}$, telles que définies par les fonctions e_{ij} , e_{3c} et e_{cc} , dépendent également de cette loi de puissance. Plus s_0 est élevé, plus l'anisotropie angulaire du spectre est forte. En particulier, à grande échelle, l'anisotropie du spectre de vitesse en module est :

$$\text{pour } k \sqrt{h^2} \ll 1 \quad , \quad \gamma_k = \frac{\oint E_{11}^{(0)} dS_k}{\oint E_{33}^{(0)} dS_k} = \frac{1}{2s_0 + 4} \quad , \quad (1.11)$$

avec dS_k l'élément de surface de la sphère unité. Le rapport γ_k des spectres de vitesses horizontale et verticale diminue avec l'exposant infrarouge s_0 , ou de façon équivalente m_2 .

1.3 Modélisation de l'évolution des grandes échelles

Le système (1.4), associé aux conditions initiales (1.9), donne l'évolution des spectres de vitesse et de concentration dans une zone de mélange turbulente de Richtmyer-Meshkov. Cependant, ce système n'est pas fermé : les termes non-linéaires T_{ij} , T_{3c} et T_{cc} incluent des corrélations de vitesse et de concentration de troisième ordre, tandis que E_{33}^G et E_{3c}^G comprennent des parties non-diagonales des corrélations de Fourier. Les deux ensembles de quantités sont inconnus en termes de spectre. Le but de cette section est de détailler les fermetures pour ces termes. Plus précisément, nous allons limiter notre attention aux grandes échelles et fournir des fermetures pour T_{ij} , T_{3c} , T_{cc} , E_{33}^G et E_{cc}^G pour cet intervalle d'échelles seulement.

L'expression "grandes échelles" se réfère ici à des échelles qui sont beaucoup plus grandes que la taille des tourbillons énergétiques. En supposant que les spectres turbulents atteignent un pic au voisinage d'un nombre d'onde $k_e(t)$, nous définissons donc les grandes échelles comme :

$$\text{grandes échelles} \equiv k \ll k_e(t).$$

Notons qu'en pratique, $\ell(t) = 2\pi/k_e(t)$ est environ 2 fois plus petit que L , de sorte que $k \ll k_e$ inclut généralement des échelles beaucoup plus grandes que la taille de la zone de mélange.

1.3.1 Modélisation des interactions non-linéaires aux grandes échelles

Les termes non-linéaires T_{ij} , T_{3c} et T_{cc} apparaissant dans les équations. (1.4) contiennent des moments de troisième ordre des transformées de Fourier de $\mathbf{u}'$ et c' . Ils doivent être fermés en fonction des corrélations du second ordre. Pour ce faire, nous appliquons une fermeture EDQNM [131, 89]. Les fermetures EDQNM ont été principalement conçues et validées pour la turbulence homogène, y compris dans le cas d'écoulements à densité variable [17]. Leur application aux écoulements inhomogènes est cependant moins bien établie et reste un sujet de recherche actif [81, 156, 155, 135]. La difficulté principale consiste à "diagonaliser" efficacement le tenseur de corrélation de Fourier complet, une étape de fermeture supplémentaire qui n'est pas requise pour la turbulence homogène. Cependant, dans ce travail, comme dans [140], nous nous intéressons seulement à l'étude du comportement qualitatif des grandes échelles. Les éléments non diagonaux des spectres turbulents ne constituent pas un obstacle à l'accomplissement de cette tâche, de sorte que

nous n'avons pas besoin de simplifier cet aspect. Par conséquent, comme dans [140], nous appliquons une procédure EDQNM standard à nos équations, avec seulement de légères adaptations par rapport au cas homogène. Les fermetures résultantes sont similaires à celles obtenues dans [140] pour la turbulence de Rayleigh-Taylor. Ils ne sont pas détaillés ici : seules leurs expressions asymptotiques à grande échelle sont nécessaires pour notre objectif.

Ces expressions asymptotiques sont obtenues en supposant que les termes non-linéaires sont dominés par des interactions distantes non-locales à grande échelle. Lorsque $s_0 \geq 2$, l'hypothèse d'interaction distante donne :

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \ll k_e(t) \quad , \quad T_{ij}(\mathbf{k}, t) &= k^2 \mathcal{T}_{ij}(\theta, t) \quad , \\ T_{3c}(\mathbf{k}, t) &= k^2 \mathcal{T}_{3c}(\theta, t) \quad , \\ T_{cc}(\mathbf{k}, t) &= k^2 \mathcal{T}_{cc}(\theta, t) \quad , \end{aligned} \tag{1.12}$$

où $\mathcal{T}_{ij}$, $\mathcal{T}_{3c}$ et $\mathcal{T}_{cc}$ sont indépendants du nombre d'onde k . Lorsque $1 < s_0 < 2$, des termes de viscosité turbulents provenant des développements asymptotiques deviennent prédominants et doivent être pris en compte. Quand $-1 < s_0 \leq 1$, les interactions locales doivent être prises en compte. Bien que cela ne soit pas détaillé ici, aucun de ces termes supplémentaires ne joue un rôle sur le fait que la permanence des grandes échelles soit vérifiée ou non. Ainsi, même si le modèle proposé pour les grandes échelles n'est valable que pour $s_0 \geq 2$, la discussion sur la permanence des grandes échelles et les conséquences qui en découlent sont applicables aux valeurs de s_0 au-delà de cet intervalle. Par conséquent, la condition $s_0 \geq 2$ ne sera pas répétée dans le reste de ce texte.

Les expressions précises de $\mathcal{T}_{ij}$, $\mathcal{T}_{3c}$ et $\mathcal{T}_{cc}$ ne sont pas nécessaires. Une seule de leurs propriétés joue un rôle dans l'analyse suivante : le fait qu'ils dépendent uniquement des échelles énergétiques $k \sim k_e(t)$. Pendant le régime auto-similaire, cette dernière propriété permet d'exprimer les variations temporelles de $\mathcal{T}_{ij}$, $\mathcal{T}_{3c}$ et $\mathcal{T}_{cc}$ en utilisant l'analyse dimensionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}(\theta, t) &\propto V^3(t) L^5(t) \quad , \quad \mathcal{T}_{3c}(\theta, t) \propto V^2(t) L^5(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{cc}(\theta, t) \propto V(t) L^5(t) \quad (1.13) \\ \text{avec} \quad V(t) &= \sqrt{\langle u'_i u'_i \rangle(t)} \quad . \end{aligned}$$

Les préfacteurs dans ces relations de proportionnalité dépendent de θ .

1.3.2 Modélisation de E_{33}^G et E_{3c}^G aux grandes échelles

Les termes de production E_{33}^G et E_{3c}^G apparaissant dans les équations. (1.4) ne sont pas connus en fonctions des spectres turbulents. En effet, du fait du produit de convolution entrant dans la définition de $\hat{u}_3^G$, E_{33}^G et E_{3c}^G incluent des éléments non diagonaux des

corrélations de Fourier. Certaines propriétés de $\hat{u}_3^G$, et donc de E_{33}^G et E_{3c}^G , peuvent néanmoins être déterminées en ajoutant plusieurs approximations. Comme détaillé en annexe 2, quand la vorticité est confinée à la zone de mélange, que les grandes échelles n'affichent pas de variations spatiales rapides et que $\bar{c}$ a un profil linéaire, E_{33}^G et E_{3c}^G peuvent être approchés par :

$$E_{33}^G(\mathbf{k}, t) = \Lambda(kL(t), \theta) E_{33}(\mathbf{k}, t) \quad \text{et} \quad E_{3c}^G(\mathbf{k}, t) = \Lambda(kL(t), \theta) E_{3c}(\mathbf{k}, t) \quad , \quad (1.14)$$

avec Λ vérifiant :

$$\begin{aligned} &\text{pour } kL(t) \gg 1 \quad , \quad \Lambda(kL(t), \theta) = 1 \quad , \\ &\text{pour } kL(t) \ll 1 \quad , \quad \Lambda(kL(t), \theta) = \frac{kL(t)}{2 \sin \theta} . \end{aligned} \quad (1.15)$$

La condition $kL(t) \ll 1$ est différente de la définition de l'intervalle des grandes échelles $k \ll k_e(t)$. En effet, dans la turbulence de Richtmyer-Meshkov, on attend $k_e L(t)/(2\pi) \sim 2$. Par conséquent, l'intervalle $k \ll k_e(t)$ englobe non seulement les échelles vérifiant $kL(t) \ll 1$, mais aussi les échelles qui ont un comportement intermédiaire entre les deux asymptotes $kL(t) \gg 1$ et $kL(t) \ll 1$. Comme illustré dans [140] dans le contexte de la turbulence de Rayleigh-Taylor, cette plage intermédiaire est susceptible d'être celle observée dans les simulations. Compte tenu de cette perspective, nous proposons d'exprimer Λ afin de rendre compte d'un tel intervalle intermédiaire de grandes échelles :

$$\text{pour } k \ll k_e(t) \quad , \quad \Lambda(kL(t), \theta) = (kL(t))^{s_p} \lambda(\theta) \quad (1.16)$$

avec s_p un exposant variant entre 0 et 1 et λ une fonction de θ . Les valeurs précises de s_p et λ ne sont pas nécessaires pour l'analyse de la permanence des grandes échelles. Comme dans [140], le point important ici est que Λ tend vers 0 quand k tend vers 0.

1.3.3 Modèle final

Nous avons à présent dérivé une fermeture pour les termes non-linéaires, définis par l'équation (1.12), et une autre pour les termes de production, définis par l'équation (1.14). En combinant ces deux fermetures dans l'équation d'évolution des spectres turbulents, l'équation (1.4), et en négligeant les effets moléculaires, on obtient que les grandes échelles évoluent selon :

$$\text{Pour } k \ll k_e(t) \quad , \quad \partial_t E_{ij}(\mathbf{k}, t) = k^2 \mathcal{T}_{ij}(\theta, t) \quad , \quad (1.17a)$$

$$\partial_t E_{3c}(\mathbf{k}, t) = k^2 \mathcal{T}_{3c}(\theta, t) + k^{s_p} L^{s_p-1}(t) \lambda(\theta) E_{33}(\mathbf{k}, t) \quad , \quad (1.17b)$$

$$\partial_t E_{cc}(\mathbf{k}, t) = k^2 \mathcal{T}_{cc}(\theta, t) + 2k^{s_p} L^{s_p-1}(t) \lambda(\theta) E_{3c}(\mathbf{k}, t) . \quad (1.17c)$$

Le système (1.17) fournit un modèle pour l'évolution des grandes échelles turbulentes de la turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Dans ce système, l'évolution du spectre de vitesse E_{ij} est indépendante de E_{3c} et E_{cc} . En revanche, E_{3c} dépend de E_{ij} et E_{cc} de E_{3c} et à travers lui de E_{ij} . Par conséquent, nous allons commencer par étudier les propriétés de E_{ij} indépendamment de E_{3c} et E_{cc} . Ensuite, nous étudierons les propriétés de E_{3c} et enfin celles de E_{cc} .

1.4 Spectre de vitesse

1.4.1 Permanence des grandes échelles

Nous commençons par discuter des propriétés du spectre de vitesse E_{ij} . Avec les conditions initiales données par l'équation (1.9) aux grandes échelles, la solution à l'équation (1.17a) est :

$$\text{Pour } k \ll k_e(t) \text{ , } E_{ij}(\mathbf{k}, t) = k^{s_0-2} e_{ij}(\theta) + k^2 \int_0^t \mathcal{T}_{ij}(\theta, s) ds . \quad (1.18)$$

Le spectre de vitesse E_{ij} est la somme de sa condition initiale, proportionnelle à k^{s_0-2} , et d'un terme de backscattering, proportionnel à k^2 . Ainsi, la valeur de s_0 par rapport à 4 détermine si le terme linéaire ou de backscattering est dominant lorsque k tend vers 0, tout comme en turbulence homogène isotrope [89]. Lorsque $s_0 > 4$, le terme de backscattering devient dominant. En conséquence, la pente infrarouge du spectre n'est pas conservée mais passe à $s = 4$, établissant ainsi une pente infrarouge limite. En revanche, lorsque $s_0 < 4$, les conditions initiales sont conservées, y compris la valeur de la pente infrarouge s_0 et leur anisotropie. Les grandes échelles sont dites permanentes. Pour la valeur limite $s_0 = 4$, les deux termes contribuent de façon égale au spectre E_{ij} . La pente infrarouge reste inchangée et égale à 4 mais les grandes échelles ne restent pas nécessairement constantes. En pratique, ce type de comportement mixte est observé pour un intervalle de valeurs de s_0 proche de 4. Par exemple, en turbulence homogène, on observe que la permanence des grandes échelles se produit strictement pour $s_0 < 3,5$, au lieu de 4 [90]. Compte tenu de cette zone grise, nous pouvons écrire que :

$$\text{pour } s_0 \geq 4 : E_{ij}(\mathbf{k}, t) \propto k^2 \text{ ,} \quad (1.19a)$$

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon : E_{ij}(\mathbf{k}, t) \approx E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) = k^{s_0-2} e_{ij}(\theta) . \quad (1.19b)$$

L'intervalle $[4 - \epsilon, 4]$ correspond à l'intervalle où les termes de backscattering et d'évolution linéaire ne sont pas complètement découplés et conduisent à une évolution lente du spectre. D'après les résultats de turbulence homogène [90], on peut s'attendre à ce que ϵ soit de l'ordre de 0.5.

1.4.2 Évolution en régime turbulent auto-similaire

En régime turbulent auto-similaire, la largeur de la zone de mélange croît comme $L \propto t^\Theta$, alors que l'énergie cinétique décroît comme $\langle \bar{k} \rangle = \langle \overline{u'_i u'_i} \rangle / 2 \propto t^{2\Theta-2}$. Quand $s_0 < 4 - \epsilon$, l'exposant du taux de croissance Θ peut être lié à la valeur de s_0 à condition de supposer que les grandes échelles sont auto-similaires. Cette hypothèse supplémentaire est exprimée comme suit :

$$\frac{2\pi}{L(t)} \int_0^{1/L(t)} E_{ii}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \propto \langle \bar{k} \rangle(t). \quad (1.20)$$

Ensuite, en substituant à E_{ij} sa valeur initiale, nous déduisons que le second terme varie comme suit :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon, \quad \frac{2\pi}{L(t)} \int_0^{1/L(t)} E_{ii}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L(t)} \int_0^{1/L(t)} k^{s_0-2} e_{ii}(\theta) d\mathbf{k} \propto L(t)^{-(s_0+2)}. \quad (1.21)$$

De manière équivalente, nous pouvons réécrire les équations (1.20) et (1.21) comme :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon, \quad \langle \bar{k} \rangle L^{s_0+2} = Cst. \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) définit un invariant de la turbulence de Richtmyer-Meshkov dans le régime auto-similaire ($\langle \bar{k} \rangle L^{s_0+2}$ n'est pas censé rester constant dans les étapes de transition menant à cette étape auto-similaire). En incorporant les évolutions temporelles de L et $\langle \bar{k} \rangle$ dans cette expression, nous en déduisons enfin que :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon, \quad \Theta = \frac{2}{s_0 + 4}. \quad (1.23a)$$

Pour s_0 dans l'intervalle $[4 - \epsilon, 4]$, la permanence des grandes échelles n'est pas nécessairement vérifiée et nous ne pouvons pas dériver une relation stricte liant Θ à s_0 . Cependant, si nous faisons une analogie avec les résultats obtenus dans les contextes THA/THI [90, 25, 107], alors nous nous attendons à ce que Θ reste proche de la prédiction de l'équation (1.23a) et prendra une forme similaire à celle proposée dans [25, 107, 90] :

$$\text{pour } s_0 \geq 4 - \epsilon, \quad \Theta = \frac{2}{\min(s_0, 4) - p + 4} \geq \frac{2}{\min(s_0, 4) + 4}, \quad (1.23b)$$

avec p un paramètre qui prend en compte le transfert d'énergie de backscattering. Il est de l'ordre de 0,5 pour les cas de THA/THI et doit être déterminé pour la turbulence de Richtmyer-Meshkov. L'exposant $s = \min(s_0, 4)$ est utilisé dans cette formule car les termes de backscattering, proportionnels à k^4 , deviennent dominants pour $s_0 > 4$. Notons que dans les simulations numériques, les spectres annulaires à petite échelle sont souvent utilisés pour initialiser les perturbations interfaciales. Le taux de croissance correspondant

est par conséquent donné par l'équation (1.23b), avec $\min(s_0, 4) = 4$.

1.4.3 Comparaison aux résultats précédents

Comme expliqué en introduction, ce n'est pas la première fois que le principe de permanence des grandes échelles est appliqué explicitement ou implicitement à la turbulence de Richtmyer-Meshkov et que des relations similaires ou identiques à l'équation (1.23a) sont dérivées. En particulier, l'équation (1.23a) a d'abord été dérivée dans [21], en utilisant exactement les mêmes outils et raisonnements que ceux proposés ici. En outre, une discussion détaillée et approfondie sur les invariants à grande échelle de la turbulence Richtmyer-Meshkov a déjà été proposée dans [96], avec des conclusions similaires à celle proposée ici. Plus précisément, dans [96], la permanence des grandes échelles est analysée en utilisant des corrélations de vitesse à deux points, et une relation est établie entre m_1 , l'exposant de décroissance de ces corrélations et Θ , comme indiqué dans le tableau 1.1. Cette relation est identique à l'équation. (1.23a) sachant que cet exposant de décroissance est égal à $m_1 = s_0 + 1$.

Parallèlement à ces travaux, [65, 169, 148] ont proposé une relation entre Θ et les conditions initiales. Les arguments utilisés dans ces travaux peuvent être compris implicitement comme exprimant une idée de la permanence des grandes échelles. En effet, ils sont basés sur l'hypothèse que les grandes échelles restent non affectées par des effets non linéaires tout au long de la croissance de la zone de mélange. Par rapport à la présente dérivation, à [21] ou à [96], ces travaux ajoutent une étape supplémentaire : ils expriment Θ en fonction de m_2 , l'exposant infrarouge du spectre de perturbation interfacial initial, et pas en fonction de s_0 , l'exposant du spectre de la vitesse après le choc. Pourtant, comme indiqué en section 1.2.2, l'analyse linéaire permet de lier m_2 et s_0 . Nous rappelons que l'équation (1.9d) prédit : $m_2 = s_0 - 1$. Avec cette précision, l'expression dérivée dans [65, 169, 148] et montrée dans le tableau 1.1 est identique à celle proposée ici et dans [21, 96]. Notons que l'expression dérivée dans [169, 148] est arbitrairement limitée aux valeurs de Θ supérieures à 0.24. Cette limite correspond approximativement à la valeur $s_0 = 4$ qui est montrée ici et dans [96] pour correspondre à des effets de backscattering prenant le dessus sur les conditions initiales.

D'autres travaux font également appel au principe de permanence des grandes échelles mais semblent contenir certaines ambiguïtés. Dans [23], le spectre en module 2D $\mathbf{e}_{ii}^{2D}(k, x_3, t)$ est supposé garder une forme auto-similaire à petit nombre d'onde k et être proportionnel à k^{m_3} . Ensuite, les auteurs de [23] supposent que $\mathbf{e}_{ii}^{2D}$ est indépendant du temps et en déduisent la formule proposée dans le tableau 1.1. Cependant, il y a une ambiguïté majeure dans cette dérivation. En effet, comme indiqué en annexe 1, le spectre 2D est lié au spectre 3D en intégrant ce dernier sur k_3 . Cette intégration implique que les informations provenant de toutes les échelles du spectre 3D, y compris les plus petites, affectent les propriétés

du spectre 2D à grande échelle. Un exemple simple est détaillé en annexe 1. Il montre qu'en général, l'exposant infrarouge du spectre 2D n'est pas lié à l'exposant infrarouge s_0 . Suivant cet exemple, il semble impossible de différencier un spectre de Saffman ($s_0 = 2$) d'un spectre de Batchelor ($s_0 = 4$) en ne regardant que la pente infrarouge du spectre 2D. En résumé, m_3 ne reflète pas le seul contenu des grandes échelles et ne peut être associé à un principe de permanence de ces échelles.

Une autre prédiction, proposée dans [123], souffre également d'une ambiguïté mineure. Dans ce travail, Θ est lié à l'exposant du spectre dit folié m_4 . Comme rappelé en annexe 1, cet exposant est lié à la valeur de s_0 par la relation : $s_0 = m_4 + 1$. Par conséquent, la formule proposée dans [123] et rappelée dans le tableau 1.1 est différente de celle proposée ici ou plus tôt dans [65, 169, 148, 96]. Cette différence peut être attribuée à l'absence de corrélation des champs turbulents dans la direction verticale arbitrairement imposée par les auteurs. Si cette hypothèse était supprimée, les résultats proposés dans [123] seraient cohérents avec [65, 169, 148, 96] et ce travail.

Enfin, dans [99], il est suggéré que le taux de décroissance de l'énergie cinétique (et donc Θ) est directement comparable à celui obtenu à partir de la turbulence homogène isotrope à travers le principe de permanence des grandes échelles. Cependant, la valeur de Θ obtenue à partir de cette comparaison est différente de celle dérivée ici car elle ne tient pas compte du fait que le volume occupé par la turbulence est en expansion dans le temps.

Ref.	Chasnov [21]	Llor [96]	Inogamov, Youngs, Thorner [65, 169, 148]	Clark & Zhou [23]	Poujade & Peybernes [123]	Lombardini <i>et al.</i> [99]
Θ	$\frac{2}{s_0 + 4}$	$\frac{2}{m_1 + 3}$	$\frac{2}{m_2 + 5}$	$\frac{2}{m_3 + 3}$	$\frac{2}{m_4 + 4}$	$\frac{2}{m_5 + 3}$
En accord avec l'équa- tion (1.23a)	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non

TABLE 1.1 – Relations entre Θ et les conditions initiales prévues dans la littérature.

Dans ce tableau, $m_1 = s_0 + 1$ est l'exposant de décroissance de la corrélation longitudinale en deux points de la vitesse à grande séparation, $m_2 = s_0 - 1$ est l'exposant du spectre de puissance des perturbations interfaciales initiales, m_3 est l'exposant infrarouge du spectre d'énergie cinétique 2D au centre de la zone de mélange, $m_4 = s_0 - 1$ est l'exposant infrarouge du spectre de la vitesse foliaire et $m_5 = s_0$. Notons que [99] n'affirme pas la prédiction écrite dans ce tableau, mais la suggère uniquement comme point de référence.

1.5 Spectres de concentration et de flux de concentration

Dans cette section, nous analysons les propriétés à grande échelle des spectres concentration et de flux de concentration. L'objectif principal est de comprendre le rôle joué par les conditions initiales de ces deux spectres sur le comportement auto-similaire de la turbulence de Richtmyer-Meshkov.

1.5.1 Solutions des équations (1.17b) et (1.17c)

À partir des conditions initiales dérivées en section 1.2.2, on peut dériver l'expression de $E_{3c}(\mathbf{k}, t)$ et $E_{cc}(\mathbf{k}, t)$ en intégrant les équations (1.17b) et (1.17c), et en y injectant la valeur de $E_{33}(\mathbf{k}, t)$ précédemment obtenue en équation (1.18). Pour $k \ll k_e(t)$, nous obtenons :

$$E_{3c}(\mathbf{k}, t) = F_1(t) [kL(t)]^{s_0-2} e_{3c}(\theta) + F_2(t) [kL(t)]^{s_0+s_p-2} e_{33}(\theta) \lambda(\theta) + F_3(\theta, t) [kL(t)]^2 + F_4(\theta, t) [kL(t)]^{2+s_p}, \quad (1.24a)$$

$$E_{cc}(\mathbf{k}, t) = G_1(t) [kL(t)]^{s_0-2} e_{cc}(\theta) + G_2(t) [kL(t)]^{s_0+s_p-2} e_{3c}(\theta) \lambda(\theta) + G_3(t) [kL(t)]^{s_0+2s_p-2} e_{33}(\theta) \lambda^2(\theta) + G_4(\theta, t) [kL(t)]^2 + G_5(\theta, t) [kL(t)]^{2+s_p} + G_6(\theta, t) [kL(t)]^{2+2s_p}, \quad (1.24b)$$

avec :

$$F_1(t) = L^{-s_0+2}(t) \quad , \quad F_2(t) = L^{-s_0-s_p+2}(t) \int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \quad , \quad (1.25a)$$

$$F_3(\theta, t) = L^{-2}(t) \int_0^t \mathcal{T}_{3c}(\theta, s) ds \quad , \quad F_4(\theta, t) = \lambda(\theta) L^{-2-s_p}(t) \int_0^t L^{s_p-1}(s) \int_0^u \mathcal{T}_{33}(\theta, u) du ds \quad ,$$

et :

$$G_1(t) = F_1(t) \quad , \quad G_2(t) = 2F_2(t) \quad , \quad G_3(t) = L^{-s_0-2s_p+2}(t) \left(\int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \right)^2 \quad , \quad (1.26a)$$

$$G_4(\theta, t) = L^{-2}(t) \int_0^t \mathcal{T}_{cc}(\theta, s) ds \quad , \quad G_5(\theta, t) = 2\lambda(\theta) L^{-2-s_p}(t) \int_0^t L^{s_p+1}(s) F_3(\theta, s) ds \quad ,$$

$$G_6(\theta, t) = 2\lambda(\theta) L^{-2-2s_p}(t) \int_0^t L^{2s_p+1}(s) F_4(\theta, s) ds \quad .$$

Quatre termes contribuent au spectre de flux de concentration E_{3c} à grande échelle. Les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (1.24a) correspondent à l'évolution linéaire des conditions initiales de E_{3c} et E_{33} . Les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (1.24a) correspondent aux effets de backscattering non linéaire présents dans les équations de E_{3c} et E_{33} . Ces différents termes sont respectivement proportionnels à k^{s_0-2} , $k^{s_0+s_p-2}$, k^2 et k^{2+s_p} . En ce qui concerne le spectre de concentration

E_{cc} , six termes y contribuent. Les trois premiers termes du membre de droite de l'équation (1.24b) correspondent à l'évolution linéaire des conditions initiales de E_{cc} , E_{3c} et E_{33} . Les trois derniers termes correspondent aux effets de backscattering non linéaire présents dans les équations de E_{cc} , E_{3c} et E_{33} . Ces différents termes sont respectivement proportionnels à k^{s_0-2} , $k^{s_0+s_p-2}$, $k^{s_0+2s_p-2}$, k^2 , k^{2+s_p} et k^{2+2s_p} .

Une comparaison directe de ces scaling n'est pas suffisante pour discuter des propriétés de E_{3c} et E_{cc} . En effet, il faut également tenir compte des évolutions temporelles des différentes composantes de E_{3c} et E_{cc} . Ces évolutions sont données par les préfacteurs F_1 à F_4 pour E_{3c} et G_1 à G_6 pour E_{cc} . Les propriétés de ces préfacteurs sont examinées dans la sous-section suivante.

1.5.2 Influence des conditions initiales de E_{3c} et E_{cc}

En régime turbulent auto-similaire, les préfacteurs F_1 à F_4 et G_1 à G_6 possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{F_1(t)}{V(t)L(t)^4} &\propto t^{-\frac{s_0+2}{2}\Theta}, \quad \frac{F_2(t)}{V(t)L(t)^4} \propto \text{Cst}, \quad \frac{F_3(\theta,t)}{V(t)L(t)^4} \propto \text{Cst}, \quad \frac{F_4(\theta,t)}{V(t)L(t)^4} \propto \text{Cst}, \\ \frac{G_1(t)}{L(t)^4} &\propto t^{-(s_0+2)\Theta}, \quad \frac{G_2(t)}{L(t)^4} \propto t^{-\frac{s_0+2}{2}\Theta}, \quad \frac{G_3(t)}{L(t)^4} \propto \text{Cst}, \\ \frac{G_4(\theta,t)}{L(t)^4} &\propto \text{Cst}, \quad \frac{G_5(\theta,t)}{L(t)^4} \propto \text{Cst}, \quad \frac{G_6(\theta,t)}{L(t)^4} \propto \text{Cst}. \end{aligned}$$

Ces prédictions reposent sur les estimations auto-similaires de $\mathcal{T}_{ij}$, $\mathcal{T}_{3c}$ et $\mathcal{T}_{cc}$ données par l'équation (1.13). Ils font aussi appel aux évolutions auto-similaires de $C(t)$, $V(t)$ et $L(t)$: $C(t) \propto \text{Cst}$, $V(t) \propto t^{\Theta-1}$, $L(t) \propto t^\Theta$. Les observations principales sont que F_1 s'annule par rapport à F_2 , F_3 et F_4 lorsque le temps augmente, et que G_1 et G_2 disparaissent par rapport à G_3 , G_4 , G_5 et G_6 . Cette propriété est indépendante de la valeur de s_0 , et plus généralement des valeurs initiales de E_{3c} et E_{cc} (tant que nous considérons des variances de concentration finies). Elle est également indépendante du fait que les grandes échelles soient permanentes ou dominées par des termes de backscattering. Cette propriété est le résultat principal de cette section. Cela implique que les conditions initiales des spectres de flux de concentration et de concentration sont toujours oubliées : seules les conditions initiales du spectre de vitesse ont une influence à grande échelle et aux temps longs.

1.5.3 Régimes linéaires et de backscattering pour E_{3c}

La comparaison des termes non-évanescents de l'équation (1.24a), c'est-à-dire ceux associés à F_2 , F_3 et F_4 , nous permet de déduire que l'exposant limite séparant le régime de backscattering du régime d'évolution linéaire est $s_0 = 4 - s_p$. Plus précisément, quand $s_0 > 4 - s_p$, le terme de backscattering $F_3(\theta,t)[kL(t)]^2$ devient dominant par rapport aux autres. En conséquence, la pente infrarouge du spectre passe à $s = 4$, indépendamment

de sa valeur initiale. En revanche, lorsque $s_0 < 4 - s_p$, la contribution linéaire domine les contributions de backscattering : l'information provenant des conditions initiales, mais pas celle du spectre de flux, est préservée. Enfin, pour s_0 proche de $4 - s_p$, on peut s'attendre à un comportement atténué des grandes échelles, similaire à ce qui est observé pour le spectre de vitesse. On devrait observer une déviation par rapport à l'évolution linéaire stricte des grandes échelles. En résumé, nous pouvons écrire que dans le régime auto-similaire, pour des périodes suffisamment importantes, nous avons :

$$\text{pour } s_0 \geq 4 - s_p : E_{3c}(\mathbf{k}, t) \propto k^2, \quad (1.27a)$$

$$\text{pour } s_0 < 4 - s_p - \epsilon : E_{3c}(\mathbf{k}, t) \approx \int_0^t \frac{E_{33}^G(\mathbf{k}, s)}{L(s)} ds \approx k^{s_0+s_p-2} e_{33}(\theta) \lambda(\theta) \int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \quad (1.27b)$$

Nous avons utilisé à nouveau la notation ϵ pour isoler un intervalle $[4 - s_p - \epsilon, 4 - s_p]$ où les effets linéaires et de backscattering ne sont pas complètement découplés.

Notons que dans l'intervalle linéaire, le scaling de E_{3c} devrait être différent de son scaling initial et de celui du spectre de vitesse, même si les grandes échelles évoluent linéairement. Cela est dû au terme de production E_{33}^G qui dépend de l'échelle, en raison de la taille finie de la zone de mélange. En turbulence homogène, E_{3c} conserverait son scaling initial, ou plutôt celui du spectre de vitesse.

1.5.4 Régimes linéaires et de backscattering pour E_{cc}

Les termes de backscattering de l'équation (1.24b) sont proportionnels à k^2 , k^{2+s_p} et k^{2+2s_p} alors que le seul terme linéaire non nul est proportionnel à $k^{s_0+2s_p-2}$. Par conséquent, l'exposant limite séparant le régime de backscattering du régime d'évolution linéaire est $s_0 = 4 - 2s_p$. Avec les mêmes considérations que pour E_{3c} , nous pouvons écrire que :

$$\text{pour } s_0 \geq 4 - 2s_p : E_{cc}(\mathbf{k}, t) \propto k^2, \quad (1.28a)$$

$$\text{pour } s_0 < 4 - 2s_p - \epsilon : E_{cc}(\mathbf{k}, t) \approx 2 \int_0^t \frac{E_{3c}^G(\mathbf{k}, s)}{L(s)} ds \approx k^{s_0+2s_p-2} e_{33}(\theta) \lambda^2(\theta) \left(\int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \right)^2 \quad (1.28b)$$

Dans l'intervalle $[4 - 2s_p - \epsilon, 4 - 2s_p]$, on ne peut pas isoler la contribution du backscattering de la contribution linéaire. De façon analogue à E_{3c} , le scaling de E_{cc} dans l'intervalle linéaire est plus abrupte que le scaling initial de E_{33} . Il est aussi plus raide que celui de E_{3c} .

1.6 Conséquences de la permanence des grandes échelles

Dans cette section, nous aimerions indiquer comment les connaissances nouvellement acquises sur les grandes échelles peuvent être utilisées pour faire des prédictions simples

sur les corrélations des champs de vitesse et de concentration.

1.6.1 Anisotropie

Il y a un aspect de la permanence des grandes échelles qui n'a pas été discuté dans les travaux précédents [21, 96, 65, 169, 148] : cette permanence implique que, pour $s_0 < 4 - \epsilon$, l'anisotropie à grande échelle est préservée. En conséquence, la turbulence de Richtmyer-Meshkov ne montre qu'un retour partiel à l'isotropie pour le tenseur de Reynolds et sa valeur intégrée $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$. Cette isotropisation partielle a été documentée plusieurs fois [148, 112, 150], mais sa connexion aux grandes échelles n'a pas été exploitée. Notons qu'un phénomène similaire est également observé pour la turbulence homogène anisotrope (THA) et a été étudié en profondeur dans [20, 30, 107]. Les conclusions de ces études sont directement applicables à la description de l'anisotropie de Richtmyer-Meshkov.

Pour des raisons pratiques, il est intéressant d'essayer de quantifier l'anisotropie résiduelle de $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$ en fonction des conditions initiales à grande échelle. Nous introduisons $\mathbf{e}_{ij}(k, t)$ le spectre en module de la vitesse :

$$\mathbf{e}_{ij} = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{ij} dS_k$$

avec dS_k l'élément de surface de la sphère unité. Nous supposons par la suite que ce spectre peut être approché par deux intervalles de lois de puissance, un intervalle à grande échelle évoluant en k^{s_0} et un à petite échelle dont les caractéristiques sont de type Kolmogorov. Les deux plages sont séparées par le nombre d'onde du maximum du spectre k_e :

$$\mathbf{e}_{11}(k, t) = \begin{cases} \frac{L}{2\pi} e_1 \left(\frac{k}{k_e} \right)^{s_0}, & \text{pour } k \leq k_e \\ \frac{L}{2\pi} e_k \left(\frac{k}{k_e} \right)^{-5/3}, & \text{pour } k \geq k_e \end{cases} \quad \mathbf{e}_{33}(k, t) = \begin{cases} \frac{L}{2\pi} e_0 \left(\frac{k}{k_e} \right)^{s_0}, & \text{pour } k \leq k_e \\ \frac{L}{2\pi} e_k \left(\frac{k}{k_e} \right)^{-5/3}, & \text{pour } k \geq k_e \end{cases} \quad (1.29)$$

où e_0, e_1, e_k sont des constantes. Dans la partie inertielle du spectre de vitesse, on suppose que les contributions $k^{-5/3}$ sont isotropes. En raison de la permanence des grandes échelles, les deux spectres sont liés à grande échelle par l'équation (1.11). Cela permet de spécifier :

$$e_1 = \frac{e_0}{2s_0 + 4}.$$

En intégrant les spectres d'approximation, nous déduisons que :

$$\text{Pour } s_0 < 4 - \epsilon, \quad R = \frac{\langle \overline{u_1'^2} \rangle}{\langle \overline{u_3'^2} \rangle} = \frac{1}{2s_0 + 4} \left(\frac{\frac{1}{s_0+1} + (2s_0 + 4)a}{\frac{1}{s_0+1} + a} \right) \quad \text{avec} \quad a = \frac{3}{2} \frac{e_k}{e_0}. \quad (1.30)$$

La valeur de a est inconnue et peut être ajustée pour s'adapter aux points expérimentaux ou de simulation. L'aspect intéressant de cette formule réside dans sa description qualitative de l'anisotropie. Elle prédit que R augmente avec s_0 : moins il y a d'énergie à grande échelle

par rapport aux petites échelles, plus le tenseur de Reynolds est isotrope. Ce comportement n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. En effet, nous rappelons que l'augmentation de s_0 augmente également l'anisotropie initiale de l'écoulement (voir la formule (1.11)). Cependant, l'isotropisation due à l'émergence d'un intervalle à petite échelle prend le dessus sur cet effet initial, conduisant à une diminution globale de l'anisotropie avec l'augmentation de s_0 .

Dans la littérature [150, 148], la valeur $\langle \overline{u_1^2} \rangle / \langle \overline{u_3^2} \rangle = 0.6$ est rapportée pour des simulations avec $s_0 \approx 4$. Cela suggère de choisir une valeur de $a \approx 0.3$. Avec cette estimation, R augmente de 0.48 pour $s_0 = 1$ à 0.63 pour $s_0 = 4$.

1.6.2 Variation de la largeur de la zone de mélange avec les conditions initiales

En régime turbulent auto-similaire et à temps long devant t_0 , le temps de début de l'auto-similarité, la largeur de la zone de mélange varie comme suit :

$$\text{Pour } t \gg t_0 \text{ , } L(t) = \mathcal{L}_0 t^\Theta \text{ ,} \quad (1.31)$$

où $\mathcal{L}_0$ est un préfacteur ayant la dimension d'une longueur multipliée par un temps à la puissance $-\Theta$. La permanence des grandes échelles du spectre de vitesse permet de prédire l'exposant de croissance Θ , quand $s_0 < 4 - \epsilon$. Cependant, il ne spécifie rien sur le préfacteur $\mathcal{L}_0$. Cependant, quand $s_0 < 4 - s_p - \epsilon$, le spectre du flux de concentration évolue linéairement à grande échelle et est lié au spectre initial de la vitesse verticale. Cette propriété peut être utilisée pour estimer $\mathcal{L}_0$, comme détaillé ci-dessous.

Pour commencer, nous faisons l'hypothèse que concentration a un profil linéaire dans la zone de mélange et est constante en dehors. En conséquence, le gradient de concentration moyen peut être approximé par :

$$\partial_3 \bar{c} = -\frac{1}{L} H(L/2 - |x_3|) . \quad (1.32)$$

Nous pouvons également exprimer la taille de la zone de mélange comme :

$$L = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}(1 - \bar{c}) dx_3 . \quad (1.33)$$

En injectant les équations. (1.32) et (1.33) dans l'équation (1.1d) et en négligeant les effets moléculaires, on obtient que l'évolution de L est liée au flux de concentration :

$$d_t L = 12 \langle \overline{u_3 c'} \rangle . \quad (1.34)$$

Dans un second temps, nous introduisons $\mathbf{e}_{3c}(k, t)$ le spectre en module du flux de concen-

tration. Nous supposons qu'il peut être approximé par un spectre idéalisé en deux parties consistant en un intervalle inertiel évoluant selon $k^{-7/3}$ [8, 138] et un intervalle de grande échelle anisotrope évoluant selon $k^{s_0+s_p}$, comme prédit par l'équation (1.27) :

$$e_{3c}(k, t) = \begin{cases} \frac{L}{2\pi} f_0 \left(\frac{k}{k_e} \right)^{s_0+s_p} & , \quad \text{pour } k \leq k_e \\ \frac{L}{2\pi} f_0 \left(\frac{k}{k_e} \right)^{-7/3} & , \quad \text{pour } k \geq k_e \end{cases}.$$

En intégrant l'équation (1.27b) sur la sphère unité et en utilisant la valeur de $e_{33}(\theta)$ donnée par les conditions initiales (1.9), on déduit que f_0 vérifie :

$$\frac{L}{2\pi} f_0 k_e^{-s_0-s_p} = \frac{C(\mathbf{A}_t \Delta u)^2}{\pi^2} g_\lambda(s_0) \int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \quad \text{avec} \quad g_\lambda(s_0) = \int_0^\pi (\sin \theta)^{s_0+3} \lambda(\theta) d\theta \quad (1.35)$$

En utilisant cette relation et en intégrant le spectre idéalisé, on obtient que le flux $\langle \overline{u'_3 c'} \rangle$ est égal à :

$$\begin{aligned} \langle \overline{u'_3 c'} \rangle &= g_1(s_0, s_p, x_e) C(\mathbf{A}_t \Delta u)^2 L^{-(s+s_p+2)} \int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \\ \text{avec} \quad g_1(s_0, s_p, x_e) &= 4(2\pi)^{s_0+s_p} x_e^{s_0+s_p+1} g_\lambda(s_0) \left(\frac{1}{s_0 + s_p + 1} + \frac{3}{4} \right) \quad \text{et} \quad x_e = \frac{k_e L}{2\pi}. \end{aligned}$$

Enfin, dans l'expression ci-dessus, nous remplaçons le flux par la dérivée temporelle de L (équation (1.34)) et injectons aussi l'expression auto-similaire de L (équation (1.31)). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= g_2(s_0, s_p, x_e) C^{\Theta/2} (\mathbf{A}_t \Delta u)^\Theta \quad (1.36) \\ \text{avec} \quad g_2(s_0, s_p, x_e) &= \left(\frac{48 (2\pi)^{s_0+s_p}}{\Theta(1 - (1 - s_p)\Theta)} x_e^{s_0+s_p+1} g_\lambda(s_0) \left(\frac{1}{s_0 + s_p + 1} + \frac{3}{4} \right) \right)^{\Theta/2}. \end{aligned}$$

Nous rappelons aussi que $\Theta = 2/(s_0 + 4)$ et que toutes ces expressions sont valides pourvu que $s_0 < 4 - s_p - \epsilon$. Comme expliqué en section 1.3.2, l'exposant s_p n'est pas connu avec précision, pas plus que ne le sont le rapport x_e entre le nombre du maximum et $2\pi/L$, $\lambda(\theta)$ et g_λ . Cependant, ces quantités devraient être indépendantes des conditions initiales. Par conséquent, même si on ne peut obtenir que des estimations approximatives du préfacteur $g_2(s_0, s_p, x_e)$, ce dernier devrait au premier ordre être une fonction de s_0 seulement :

$$g_2(s_0, s_p, x_e) \equiv g_2(s_0).$$

Par conséquent, l'influence des conditions initiales sur L apparaît à travers les préfacteurs $(\mathbf{A}_t \Delta u)^\Theta$ et $C^{\Theta/2}$, et une fonction de l'exposant infrarouge s_0 . Le premier terme traduit l'influence de l'intensité du choc, le second reflète le niveau à grande échelle des perturbations interfaciales initiales et le dernier dépend de leur pente infrarouge. Notons

que la proportionnalité de L à $C^{\Theta/2} (A_t \Delta_{ut})^{\Theta}$ était déjà prédite dans [148] et provient principalement de l'analyse dimensionnelle.

Un point important est que seules les conditions initiales à grande échelle définissent la valeur de $\mathcal{L}_0$, comme c'est le cas pour Θ . Par conséquent, deux simulations ou expériences ayant les mêmes conditions initiales à grande échelle, mais des valeurs différentes de conditions initiales à petite échelle, conduiront toujours à la même valeur de L à des temps longs. Un autre point à noter est que la dépendance à C est plutôt faible. Par exemple, pour un spectre de Saffman ($s_0 = 2$), l'augmentation de la perturbation interfaciale RMS initiale $\sqrt{h^2}$ d'un facteur 2 conduit à une augmentation de seulement 1,3 pour L , et d'un facteur 10 de seulement 2.2.

Pour conclure le commentaire sur l'équation (1.36), nous donnons une estimation de g_2 . En supposant que les échelles qui importent le plus dans l'intégration des spectres sont celles proches du pic et par extrapolation proches de l'intervalle $kL \gg 1$, on choisit $s_p = 0$ et $\lambda = 1$. Quant à x_e , on le choisit égal à 2. Alors, on obtient que g_2 varie de 6 pour $s_0 = 1$ à 7.5 pour $s_0 = 4$. Comme précédemment, l'intérêt principal de cette estimation est qualitatif : elle donne un ordre de grandeur et montre que g_2 est une fonction croissante de s_0 .

1.6.3 Paramètre de mélange

Le paramètre de mélange est un rapport de ségrégation global défini comme :

$$\Xi = \frac{\int \overline{c(1-c)} dx_3}{\int \bar{c}(1-\bar{c}) dx_3}.$$

Il est égal à 1 lorsque les deux fluides en présence sont entièrement mélangés au niveau moléculaire et à 0 lorsqu'ils sont séparés. En utilisant la définition de L donnée par l'équation (1.33), Ξ peut être ré-exprimé sous la forme :

$$\Xi = 1 - 6 \langle \overline{c'^2} \rangle.$$

Ensuite, la valeur de $\langle \overline{c'^2} \rangle$ est obtenue en intégrant $\mathbf{e}_{cc}$, le spectre en module de c' . Supposons, comme précédemment, que $\mathbf{e}_{cc}$ peut être approché par un spectre idéalisé en deux parties consistant en un intervalle inertiel évoluant en $k^{-5/3}$ et un intervalle à grande échelle anisotrope évoluant en $k^{s_0+2s_p}$, comme prédit par l'équation (1.28) :

$$\mathbf{e}_{cc}(k, t) = \begin{cases} \frac{L}{2\pi} p_0 \left(\frac{k}{k_e} \right)^{s_0+2s_p}, & \text{pour } k \leq k_e \\ \frac{L}{2\pi} p_0 \left(\frac{k}{k_e} \right)^{-5/3}, & \text{pour } k \geq k_e \end{cases}.$$

En intégrant ce spectre sur k , on en déduit que :

$$\langle \overline{c'^2} \rangle = p_0 k_e \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{s_0 + 2s_p + 1} \right). \quad (1.37)$$

Selon la théorie de Kolmogorov-Obukhov, le paramètre p_0 prend la forme suivante :

$$p_0 = C_O \langle \bar{\varepsilon}_c \rangle \langle \bar{\varepsilon} \rangle^{-1/3} k_e^{-5/3},$$

avec $\bar{\varepsilon} = \nu \overline{\partial_j u'_i \partial_j u'_i}$ et $\bar{\varepsilon}_c = 2\nu \overline{\partial_j c' \partial_j c'}$ les dissipations respectives de l'énergie cinétique et de la variance scalaire, et avec C_O la constante d'Obukhov. L'idée est alors de trouver comment $\langle \bar{\varepsilon}_c \rangle$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle$ varient avec les conditions initiales. À cette fin, nous exprimons ces deux quantités en utilisant les équations d'évolution de $\langle \bar{k} \rangle$ et de $\langle \overline{c'^2} \rangle$, qui peuvent être déduites de l'équation (1.1) :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = -d_t \langle \bar{k} \rangle - \frac{d_t L}{L} \langle \bar{k} \rangle, \quad \langle \bar{\varepsilon}_c \rangle = -d_t \langle \overline{c'^2} \rangle + \frac{2}{L} \langle \overline{u'_3 c'} \rangle - \frac{d_t L}{L} \langle \overline{c'^2} \rangle.$$

En régime auto-similaire et en utilisant l'équation d'évolution de L , ces équations deviennent :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = (2 - 3\Theta) \frac{\langle \bar{k} \rangle}{t}, \quad \langle \bar{\varepsilon}_c \rangle = \frac{1}{6} \frac{\Theta}{t} (1 - 6 \langle \overline{c'^2} \rangle)$$

Nous souhaitons éliminer $\langle \bar{k} \rangle$ de l'expression de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle$. Nous notons que selon le spectre de vitesse idéalisé de l'équation (1.29), l'énergie cinétique $\langle \bar{k} \rangle = \frac{1}{2} \langle \overline{u'_i u'_i} \rangle$ est égale à :

$$\langle \bar{k} \rangle = \frac{3}{2} e_k k_e \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{s_0 + 1} \frac{1}{2a} \frac{s_0 + 3}{s_0 + 2} \right)$$

En outre, d'après la théorie de Kolmogorov-Obukhov, le paramètre e_k vérifie :

$$\frac{3}{2} e_k = C_K \langle \bar{\varepsilon} \rangle^{2/3} k_e^{-5/3},$$

avec C_K la constante de Kolmogorov. En combinant ces différentes expressions, nous pouvons alors exprimer $\langle \bar{\varepsilon} \rangle$ comme :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = C_K^3 \frac{(2 - 3\Theta)^3}{t^3} k_e^{-2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{s_0 + 1} \right)^3.$$

En injectant cette expression dans l'équation (1.37), on obtient :

$$\langle \overline{c'^2} \rangle = \frac{n}{6} \frac{\Theta}{2 - 3\Theta} (1 - 6 \langle \overline{c'^2} \rangle), \quad \text{avec} \quad n = \frac{C_O}{C_K} \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{s_0 + 1}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{s_0 + 1} \frac{1}{2a} \frac{s_0 + 3}{s_0 + 2}}.$$

Enfin, en utilisant la relation entre Ξ et $\langle \overline{c^2} \rangle$ et l'expression de Θ en fonction de s_0 , nous déduisons que :

$$\Xi = \frac{s_0 + 1}{s_0 + n + 1}. \quad (1.38)$$

Le coefficient n dépend des contributions relatives des grandes et petites échelles aux spectres d'énergie et de concentration. Sa valeur n'est pas connue avec précision. L'idée est donc d'utiliser n pour s'ajuster par rapport aux points expérimentaux ou de simulation. En particulier, la valeur de Ξ pour $s_0 = 4$ devrait être de l'ordre de 0.8 dans les simulations [150]. Cela correspond à $n \approx 1$. Comme précédemment, l'intérêt principal de la formule (1.38) est d'indiquer comment le paramètre de mélange Ξ dépend des conditions initiales. On peut voir que Ξ est une fonction croissante de s_0 . Plus la contribution des grandes échelles est faible, plus il y a de mélange. Avec $n \approx 1$, Ξ varie de 0.65 pour $s_0 = 1$ à 0.8 pour $s_0 = 4$.

D'après [51, 139, 141], il est intéressant d'inverser la relation entre Ξ et s_0 :

$$s_0 = \frac{(n+1)\Xi - 1}{1 - \Xi}.$$

En injectant cette expression dans la valeur de Θ donnée par l'équation (1.23a), on aboutit à :

$$\Theta = \frac{2}{3} \frac{1 - \Xi}{1 - (1 - n/3)\Xi}. \quad (1.39)$$

Ainsi, de façon similaire à ce qui a été fait dans [51, 139, 141] pour la turbulence de Rayleigh-Taylor, nous avons exprimé l'exposant de croissance de l'écoulement en fonction du paramètre de mélange. On peut voir que Θ augmente lorsque Ξ diminue : moins il y a de mélange, plus la croissance de la zone de mélange est rapide. Lorsque $\Xi = 0$, c'est-à-dire sans mélange, Θ atteint sa valeur la plus élevée de $2/3$, correspondant à la prédiction donnée par [5, 125]. Lorsque $\Xi = 1$, c'est-à-dire pour un mélange complet, Θ est égal à 0 : la zone de mélange ne croît pas.

1.7 Validation

1.7.1 Description des simulations

Afin de valider les résultats obtenus dans les sections précédentes, nous effectuons plusieurs simulations aux grandes échelles implicites (ILES) de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. La raison de l'exécution de simulations ILES et non de DNS est que nous ne sommes intéressés que par les grandes échelles et que nous n'avons pas besoin de connaître

le comportement des petites échelles en détail. Comparé à une DNS, la ILES permet d'étendre l'intervalle simulé des grandes échelles et ainsi d'améliorer leur observation.

Les simulations sont réalisées avec le code TRICLADÉ, un code massivement parallèle destiné à résoudre le mélange turbulent de gaz parfaits dans un contexte de densité variable [136]. Les calculs actuels sont du type "ILES". Les équations d'Euler mutimatériaux compressibles sont résolues sans viscosité physique ou diffusivité, avec un schéma de capture de choc fournissant juste assez de viscosité numérique et de diffusivité pour assurer la stabilité. Aucun modèle de sous-grille LES explicite n'est ajouté. Plus précisément, pour ce travail, nous utilisons un schéma de différences finies conservatrices basé sur l'algorithme de propagation d'ondes de LeVeque [91], avec une précision d'ordre élevé apportée par les corrections dues à Daru et Tenaud [28]. Le splitting directionnel est utilisé, et une précision en espace et en temps pour les problèmes unidimensionnels est atteinte grâce à la procédure de Cauchy-Kovalevsky de [28]. Une précision du cinquième ordre est utilisée ici, et un limiteur préservant la monotonie est appliqué, comme décrit par [28].

Le tableau 1.2 résume les principaux paramètres des simulations. Le domaine est de taille $L_{\text{dom}} \times L_{\text{dom}} \times 1,5L_{\text{dom}}$ et est discrétisé par une grille régulière avec $N_p \times N_p \times 1,5N_p$ cellules. Le nombre d'Atwood est choisi petit et le nombre de Mach du choc est fixé à $M_S = 2.8$.

Nombre d'Atwood	$A_t = 0.05$
Nombre de Mach du choc	$M_S = 2.8$
Résolution spatiale	$N_p = 1024$
Taille du domaine	$L_{\text{dom}} = 1$

TABLE 1.2 – Principaux paramètres de simulation

Dans [148], des comparaisons ont été faites entre deux types d'initialisations. Le premier consiste à observer l'évolution d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer-Meshkov en simulant un choc traversant une interface perturbée. Dans le second, le choc n'est pas pris en compte. Au lieu de cela, la simulation est initialisée directement en injectant à l'interface perturbée un champ de vorticité issu de l'analyse linéaire de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov. Ce champ de vorticité est le même que celui décrit dans la section 1.2.2. Les différences entre les deux types d'initialisation ont été jugées négligeables. Par conséquent, dans ce travail, nous optons pour le second type d'initialisation. En effet, cela allège grandement le coût de calcul de la simulation, car la structure de choc n'a pas besoin d'être résolue explicitement et la longueur de domaine peut être réduite dans la direction inhomogène.

Ainsi, au moment initial, la simulation est établie en imposant une interface perturbée et un champ de vorticité perturbé au centre du domaine. L'interface perturbée est donnée

par son spectre de puissance P_h introduit en section 1.2.2. Il est défini par :

$$P_h(k_\perp) = \overline{h^2} k_0^{-1} \frac{2^{(s_0+2)/2}}{\Gamma(\frac{s_0}{2})} \left(\frac{k_\perp}{k_0} \right)^{s_0-1} e^{-2(k_\perp/k_0)^2} ,$$

où $s_0 - 1$ est l'exposant de P_h à grande échelle, $k_0 \frac{2\pi}{\lambda_0}$ est un nombre d'onde de coupure à petite échelle et $\overline{h^2}$ est la variance de la perturbation d'interface. Avec ces notations, la constante C introduite en section 1.2.2 est égale à :

$$C = \overline{h^2} k_0^{-s_0} \frac{2^{(s_0+2)/2}}{\Gamma(\frac{s_0}{2})} .$$

Le champ de vitesse induit par l'instabilité linéaire de Richtmyer-Meshkov est imposé selon la description donnée en section 1.2.2. La même procédure que celle prescrite en annexe B de la référence [148] est utilisé.

Dans toutes les simulations effectuées ci-après, la longueur de coupure λ_0 et la variance de la hauteur de perturbation sont choisies égales à :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = 8\Delta x \quad \text{et} \quad \sqrt{\overline{h^2}} = 2.5 \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{L_{\text{dom}}}{N_p}$$

L'exposant infrarouge s_0 varie de 0 à 4. Plus précisément, 5 simulations sont effectuées avec les valeurs suivantes de s_0 :

$$\text{valeurs de } s_0 : \quad 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 4$$

1.7.2 Evolution typique d'une simulation

Les différentes simulations que nous effectuons se déroulent de la même manière. On peut observer dans un premier temps le bon déroulement du développement de la zone de mélange pour la simulation avec $s_0 = 4$. La figure 1.1 illustre l'interpénétration des deux fluides au cours du temps. Elle représente les isosurfaces de concentration dans l'écoulement, pour des concentrations en fluide lourd allant de 0.1 (en bleu) à 0.9 (en rouge). Les zones blanches correspondent aux fluides purs situés en dehors de la zone de mélange. On remarque notamment sur la figure 1.1(c) qu'à certains endroits, le transport de la matière partiellement mélangée est suffisamment fort pour qu'elle se retrouve au sein d'une zone composée exclusivement de fluide pur.

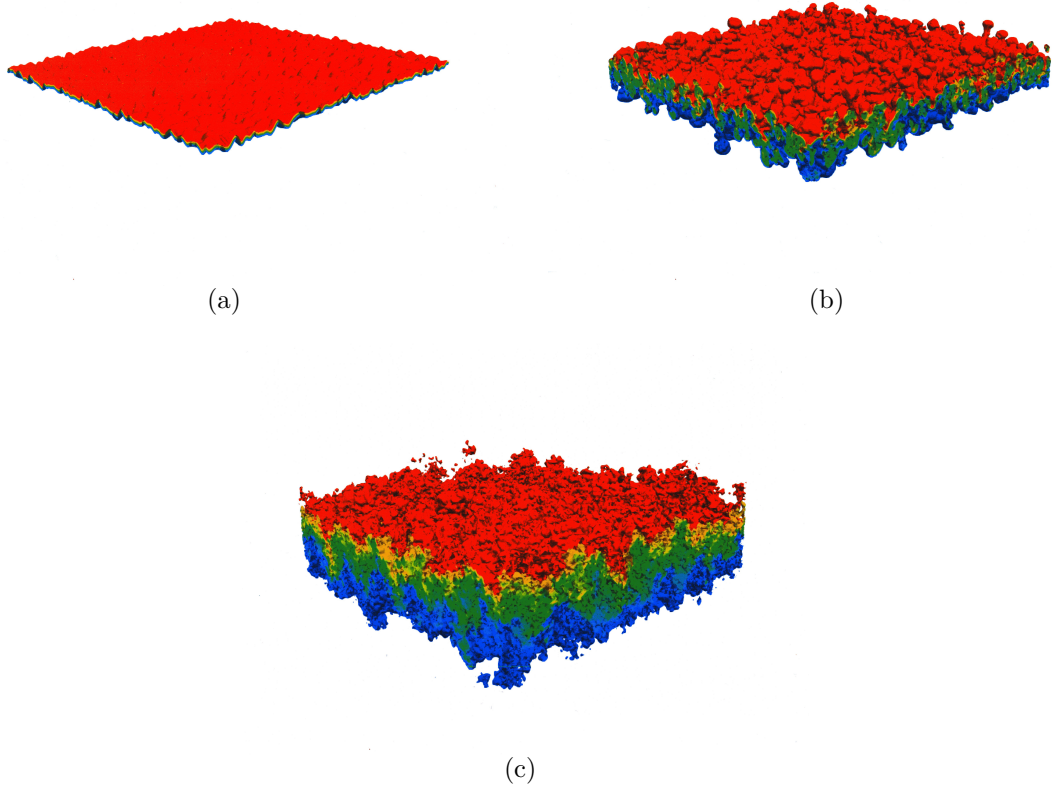


FIGURE 1.1 – Evolution de la zone de mélange au cours du temps pour la simulation avec $s_0 = 4$

Concernant les évolutions des quantités turbulentes au sein de la zone de mélange, on observe à nouveau un comportement identique pour l'ensemble des simulations. Après un transitoire court, incluant une phase linéaire, les simulations approchent un état où la longueur de la zone de mélange $L(t)$ et les différentes corrélations de second ordre de la vitesse et de la concentration obéissent à des lois de puissance approximatives. A titre d'illustration, l'évolution de $L(t)$ définie par l'équation (1.33) est représentée sur la figure 1.2(a) pour la simulation avec $s_0 = 2$, accompagnée d'une estimation de la loi de puissance. De plus, les évolutions des corrélations de second ordre adimensionnées par L et $d_t L$ sont montrées dans la figure 1.2(b) pour la simulation avec $s_0 = 2$. On peut voir que ces quantités atteignent une valeur constante indicative d'un état auto-similaire pour les temps $t \geq t_0$, avec :

$$t_0 \approx 3t_{ref} \quad \text{avec} \quad t_{ref} = \frac{\lambda_0^2}{\sqrt{h^2} A_t \Delta u}.$$

L'auto-similarité est atteinte à des moments équivalents pour les autres simulations.

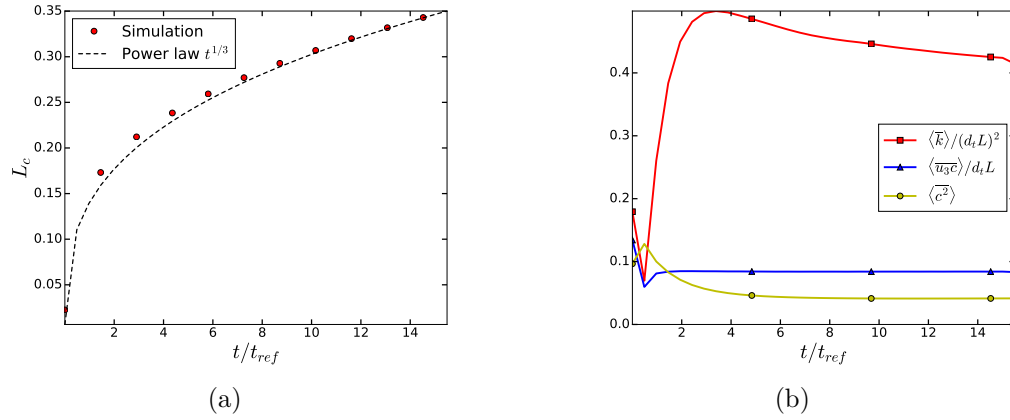


FIGURE 1.2 – Evolution de (a) la largeur de la zone de mélange L et (b) les moments du second ordre adimensionnés de la vitesse et de la concentration pour la simulation avec $s_0 = 2$

1.7.3 Permanence et évolution linéaire des grandes échelles

Spectre de vitesse

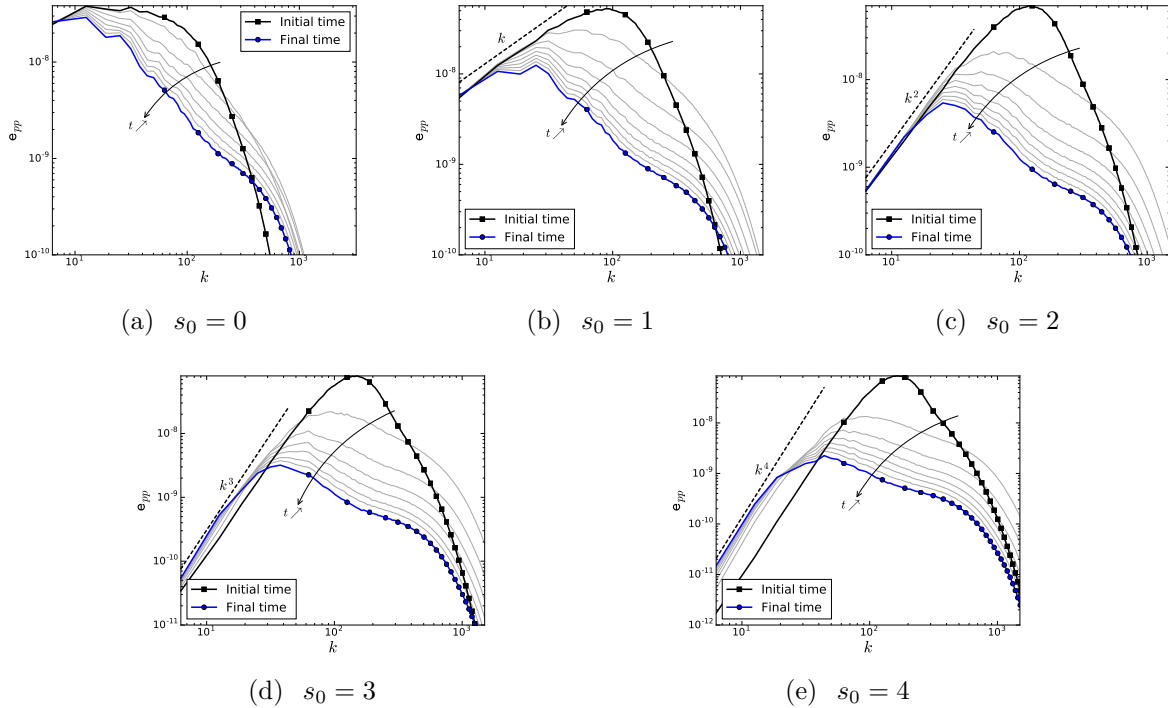


FIGURE 1.3 – Evolution du spectre d'énergie cinétique pour différents s_0

Le résultat de base de ce travail, déduit des hypothèses dérivées en section 1.3, concerne la permanence des grandes échelles, comme exprimée par la formule (1.19). Pour le spectre de vitesse, les conditions initiales à grande échelle devraient être préservées à tout moment lorsque l'exposant infrarouge vérifie $s_0 < 4 - \epsilon$, avec ϵ un paramètre supposé être de l'ordre de 0.5. La figure 1.3 montre le spectre en module de l'énergie cinétique $\mathbf{e}_{pp} = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{pp} dS_k$ à différents moments et pour différentes valeurs de s_0 . On peut voir que pour $s_0 \gtrsim 3$, $\mathbf{e}_{pp}$ reste constant à grande échelle. Pour $s_0 = 3$, un léger écart par rapport aux conditions initiales est déjà observé. Pour $s_0 = 4$, l'exposant infrarouge reste constant mais le préfacteur de la loi de puissance infrarouge affiche une évolution significative dans le temps.

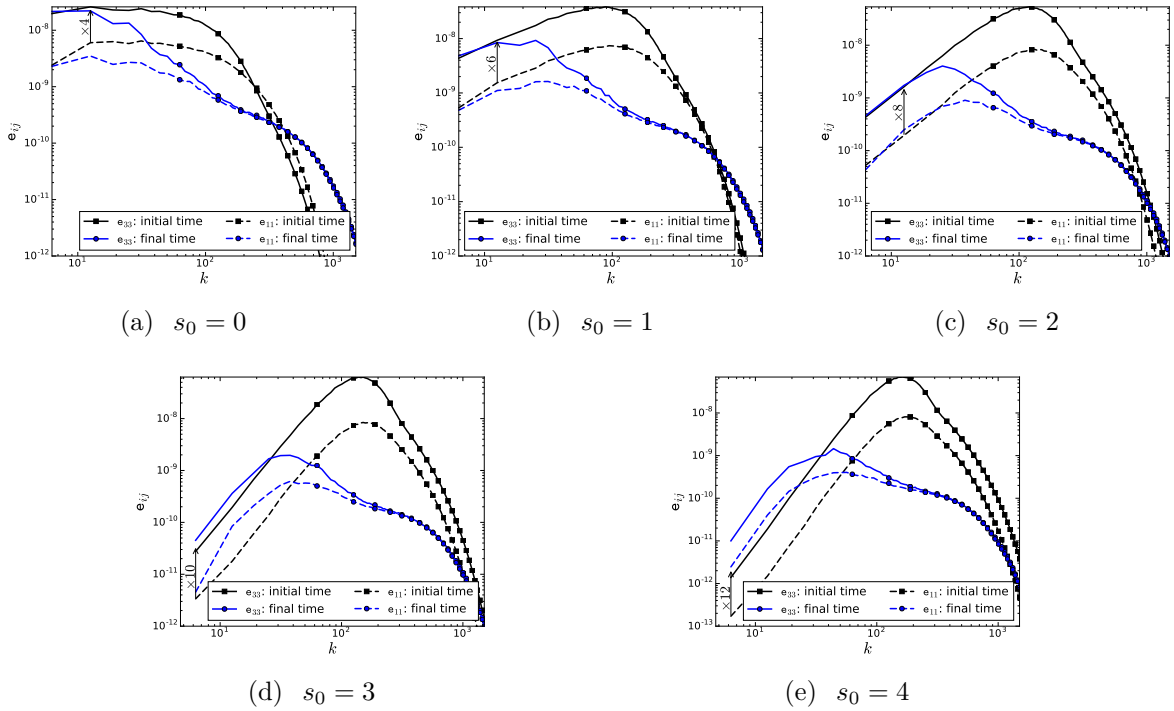


FIGURE 1.4 – Spectres de vitesses E_{33} et E_{11} aux temps initial et final pour différents s_0

La permanence des grandes échelles s'applique à chaque composante du spectre de vitesse E_{ij} et pas seulement à sa trace. La figure 1.4 affiche les composantes longitudinale et transversale du spectre en module $\mathbf{e}_{ij} = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{ij} dS_k$ aux temps initial et final. On peut voir que pour $s_0 \gtrsim 3$, les deux $\mathbf{e}_{33}$ et $\mathbf{e}_{11}$ sont préservés. En corollaire, le rapport entre $\mathbf{e}_{33}$ et $\mathbf{e}_{11}$ reste constant à grande échelle et est approximativement égal à $2s_0 + 4$, comme prédit par la formule (1.11). Pour $s_0 = 4$, la permanence des grandes échelles n'est pas vérifiée et un retour partiel à l'isotropie est observé. Avec les simulations actuelles, on ne peut déterminer si cette isotropisation à grande échelle devient complète pour des temps longs.

Notons qu'au temps final, pour toutes les valeurs de s_0 et pour $kL/(2\pi) \gg 1$, on peut voir dans la figure 1.4 que $\mathbf{e}_{11} \approx \mathbf{e}_{33}$, ce qui implique que les petites échelles sont isotropes.

Spectres de concentration et de flux de concentration

Nous portons maintenant notre attention sur les spectres de concentration et de flux de concentration, E_{cc} et E_{3c} . Pour ces spectres, les grandes échelles ne sont pas permanentes mais subissent une évolution linéaire entraînée par le spectre de vitesse et le gradient de concentration moyen lorsque s_0 est inférieur à 4. Pour vérifier cette prédiction, telle que formulée dans les équations (1.27) et (1.28), nous introduisons les contributions linéaires $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ et $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$ définies comme :

$$\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}} = \mathbf{e}_{3c}^0 + \int_0^t \frac{\mathbf{e}_{33}^G(k, s)}{L(s)} ds \quad , \quad \mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}} = \mathbf{e}_{cc}^0 + 2 \int_0^t \frac{\mathbf{e}_{3c}^G(k, s)}{L(s)} ds \quad ,$$

avec $\mathbf{e}_{3c} = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{3c} dS_k$, $\mathbf{e}_{cc} = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{cc} dS_k$, $\mathbf{e}_{33}^G = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{33}^G dS_k$ et $\mathbf{e}_{3c}^G = \kappa^2 \oint_{S_k} E_{3c}^G dS_k$. Les spectres en module $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ et $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$ correspondent aux valeurs que $\mathbf{e}_{3c}$ et $\mathbf{e}_{cc}$ auraient eu s'ils avaient suivi une évolution purement linéaire.

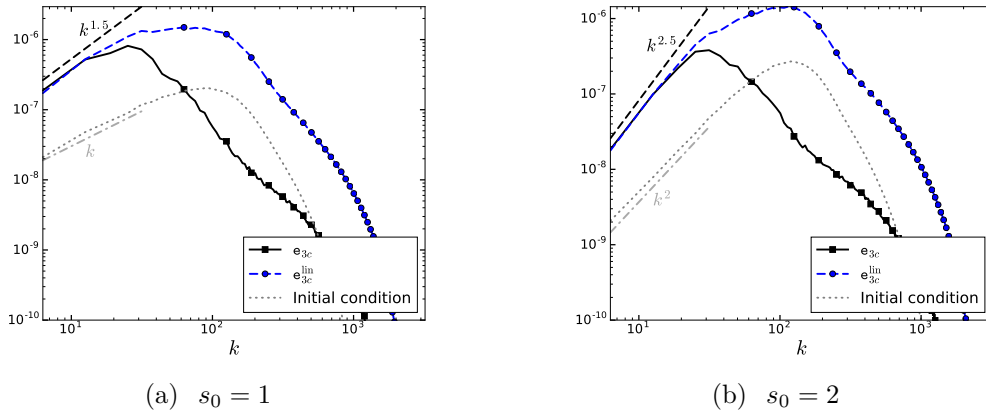


FIGURE 1.5 – Comparaison entre $\mathbf{e}_{3c}$ et sa contribution linéaire $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ à $t = 6t_{\text{ref}}$ pour $s_0 = 1$ et $s_0 = 2$

Les figures 1.5 et 1.6 comparent respectivement, à $t = 6t_{\text{ref}}$, $\mathbf{e}_{3c}$ et $\mathbf{e}_{cc}$ à leurs contributions linéaires $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ et $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$. Pour les deux valeurs de s_0 affichées ici ($s_0 = 1$ et 2), un bon accord est observé entre les spectres complets et leurs contributions linéaires à grande échelle. Des accords similaires sont également observés pour les simulations avec $s_0 = 0$ et $s_0 = 3$. Pour $s_0 = 4$, on observe un écart par rapport au comportement linéaire, semblable à celui observé sur la figure 1.3(e). Les figures 1.5 et 1.6 indiquent aussi qu'à $t = 6t_{\text{ref}}$, les valeurs de $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ et $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$ sont beaucoup plus grandes que leurs conditions initiales. Par conséquent, on vérifie que les parties dominantes de $\mathbf{e}_{3c}^{\text{lin}}$ et $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$ sont respectivement $\int_0^t \frac{\mathbf{e}_{33}^G(k, s)}{L(s)} ds$ et $2 \int_0^t \frac{\mathbf{e}_{3c}^G(k, s)}{L(s)} ds$. Par conséquent, les figures 1.5 et 1.6 permettent de vérifier les prédictions principales données par les équations (1.27) et (1.28) pour $\mathbf{e}_{cc}$ et $\mathbf{e}_{3c}$, i.e. que leurs évolutions sont linéaires à grande échelle et que leurs conditions initiales jouent

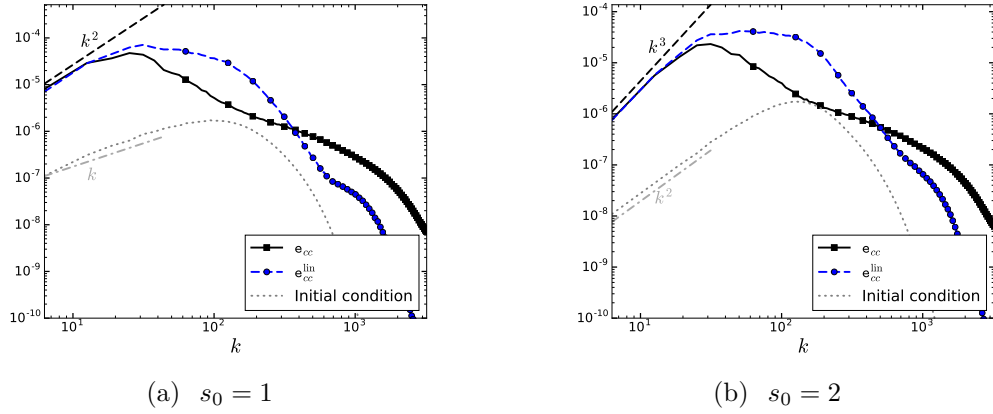


FIGURE 1.6 – Comparaison entre $\mathbf{e}_{cc}$ et sa contribution linéaire $\mathbf{e}_{cc}^{\text{lin}}$ à $t = 6t_{\text{ref}}$ pour $s_0 = 1$ et $s_0 = 2$

un rôle négligeable pour des temps longs.

Enfin, une autre caractéristique mise en avant par les figures 1.5 et 1.6 concernent les exposants infrarouges de $\mathbf{e}_{3c}$ et $\mathbf{e}_{cc}$. Pour les deux spectres, le scaling infrarouge à $t = 6t_{\text{ref}}$ est considéré comme plus raide que le scaling initial. Plus précisément, $\mathbf{e}_{3c}$ est observé comme proportionnel à $k^{s_0+0.5}$ et $\mathbf{e}_{cc}$ à k^{s_0+1} . Cette observation est en accord avec les équations (1.27) et (1.28), qui prédisent un exposant infrarouge égal à $s_0 + s_p$ pour $\mathbf{e}_{3c}$ et à $s_0 + 2s_p$ pour $\mathbf{e}_{cc}$. L'exposant additionnel s_p provient du terme de production qui dépend de l'échelle. Bien que sa valeur ne soit pas connue avec précision, elle devrait être inférieure ou égale à 1. Les figures 1.5 et 1.6 suggèrent une valeur approximativement égale à :

$$s_p \approx 0.5.$$

Une vérification supplémentaire et plus directe de cette valeur est proposée en annexe 3.

1.7.4 Conséquences de la permanence des grandes échelles

Valeur de Θ

La conséquence principale de la permanence des grandes échelles est la prédiction de la valeur de Θ en fonction de s_0 , donnée par l'équation (1.23). Pour vérifier cette prédiction, nous suivons [112] et introduisons une définition instantanée de l'exposant Θ , notée Θ_{inst} et définie comme :

$$\Theta_{\text{inst}}(t) = \frac{1}{1 + \beta} \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{L d_t^2 L}{(d_t L)^2}.$$

L'évolution de cette quantité est affichée dans la figure 1.7(a) pour les différentes simulations effectuées. La valeur atteinte à la fin de la simulation est affichée en figure 1.7(b) en fonction de s_0 et comparée à la prédiction théorique de l'équation (1.23). Un bon accord est observé

entre la théorie et la simulation. Cet accord inclut également le point $s_0 = 4$. Ceci implique qu'en dépit de la lente déviation de la permanence des grandes échelles observée dans ce cas, le taux de croissance Θ reste proche de sa valeur permanente. Ainsi, dans la formule (1.23b), la valeur de p peut être établie à 0.

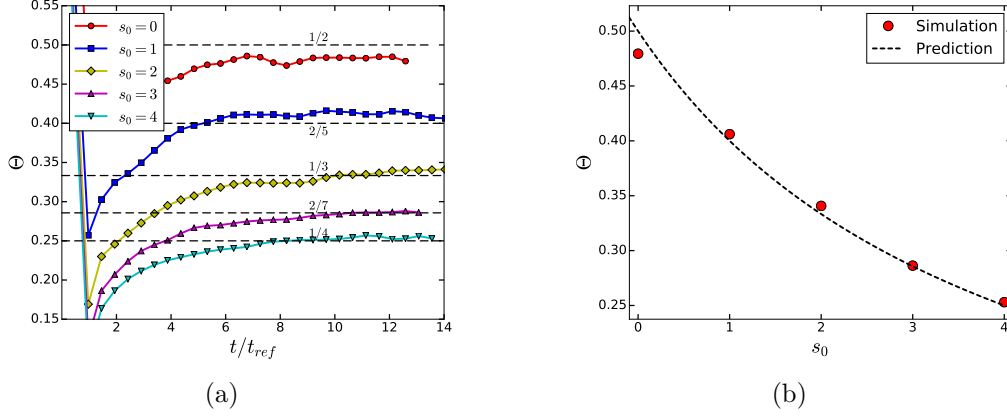


FIGURE 1.7 – Taux de croissance Θ_{inst} : (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation

Préfacteur $\mathcal{L}_0$

La permanence des grandes échelles permet également d'obtenir une estimation pour le préfacteur de la loi de puissance $L(t) = \mathcal{L}_0 t^\Theta$. Pour vérifier la prédiction donnée par l'équation (1.36), on trace dans la figure 1.8 le rapport g_{2inst} défini par :

$$g_{2inst} = \frac{\mathcal{L}_0^{inst}}{C^{\Theta_{inst}/2} (A_t \Delta u)^{\Theta_{inst}}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_0^{inst} = \frac{(d_t L / \Theta_{inst})^{\Theta_{inst}}}{L(t)^{\Theta_{inst}-1}}.$$

Ce rapport est comparé à la valeur prédite par l'équation (1.36) avec $s_p = 0$, $\lambda = 1$ et des valeurs différentes de x_e . On peut voir que les valeurs de x_e comprises entre 1 et 2 circonscrivent les résultats des simulations pour $s_0 \geq 1$. Une estimation acceptable est obtenue avec $x_e \approx 1.5$. Ce résultat est cohérent avec une mesure directe de x_e . Comme indiqué dans la figure A.3 en annexe 3, le nombre d'onde du maximum est en effet de l'ordre de 1,5 fois le nombre d'onde de la zone de mélange. Pour $s_0 = 0$, un écart plus important entre la simulation et la prédiction est observé.

Anisotropie

Lorsque les grandes échelles sont permanentes, le retour à l'isotropie du tenseur des contraintes de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ ne peut pas être complet. Une estimation de l'anisotropie résiduelle correspondante a été proposée avec la formule (1.30). Cette formule est vérifiée

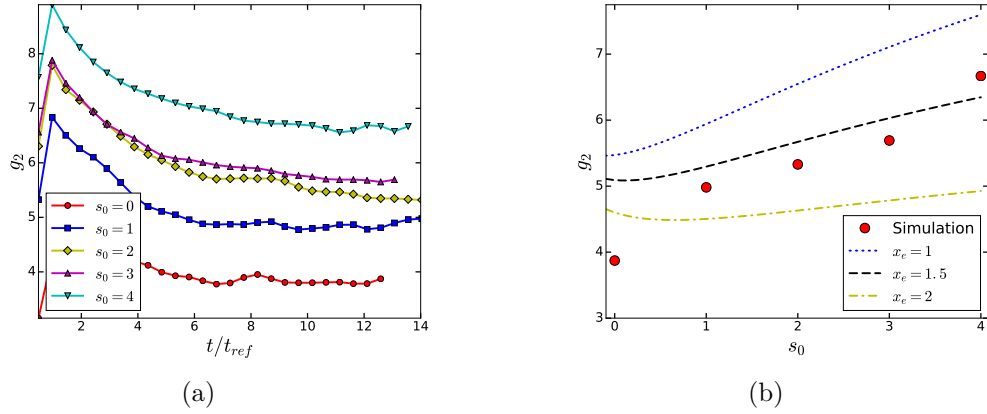


FIGURE 1.8 – Constante de la largeur de mélange $g_{2\text{inst}}$: (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation

par rapport aux résultats de la simulation dans la figure 1.9. Une bonne correspondance entre la prédiction et la simulation est observée.

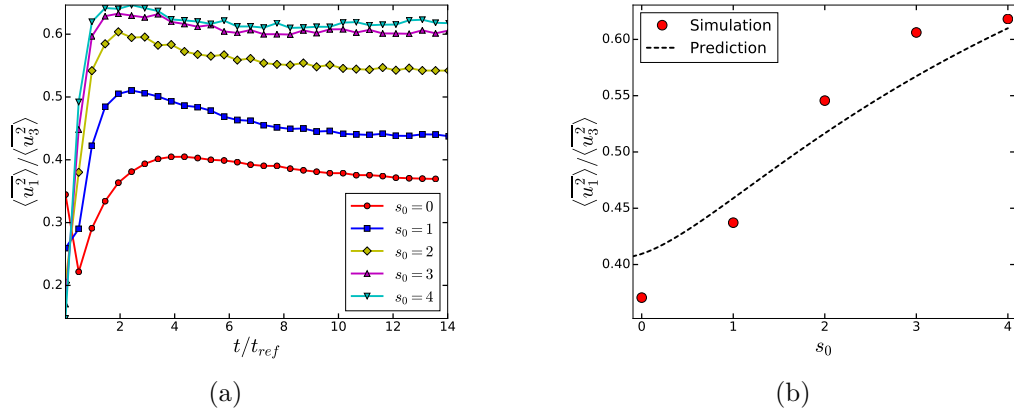


FIGURE 1.9 – Rapport d'anisotropie $R = \langle u_1^2 \rangle / \langle u_3^2 \rangle$: (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation

Paramètre de mélange

Le rapport de ségrégation globale Ξ devrait dépendre des conditions initiales selon l'équation (1.38). Cette dépendance est évaluée dans la figure 1.10. Avec n fixé à 1, l'évolution de Ξ prédite par l'équation (1.38) semble être vérifiée par les simulations.

Un autre aspect de la relation entre s_0 et Ξ est la possibilité qu'il offre de ré-exprimer Θ en fonction de Ξ au lieu de s_0 , comme indiqué par l'équation (1.39). Cette équation est vérifiée par rapport aux simulations sur la figure 1.11. Sur cette figure, les points extraits des différentes simulations pour $t \geq t_0$ sont comparés à la prédiction.

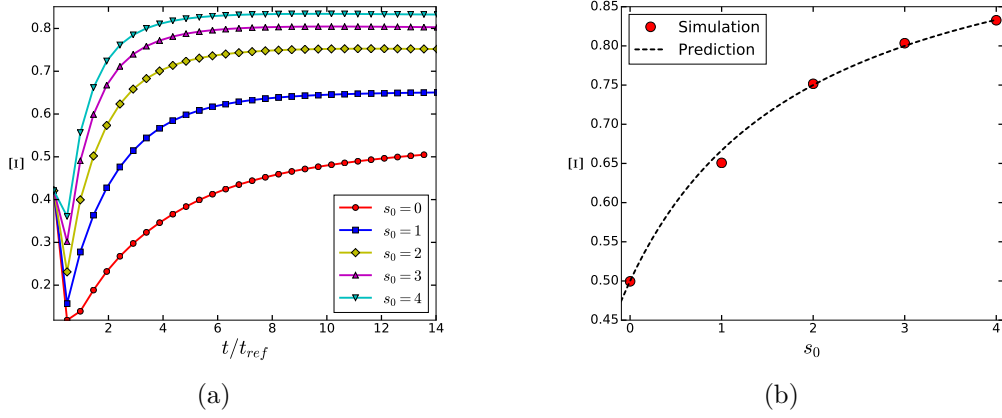


FIGURE 1.10 – Paramètre de mélange Ξ : (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de s_0 à la fin de la simulation

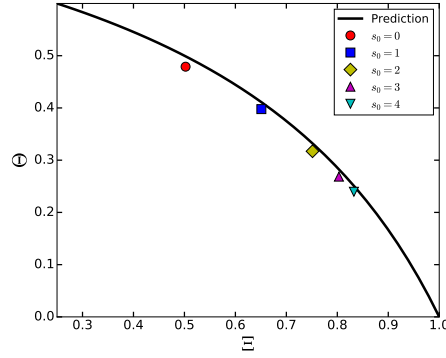


FIGURE 1.11 – Taux de croissance Θ en fonction du paramètre de mélange Ξ

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés des grandes échelles de zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov. À cette fin, nous avons appliqué une fermeture de type EDQNM aux termes non linéaires apparaissant dans les équations d'évolution des spectres turbulents de vitesse et de concentration, et proposé une autre fermeture pour les termes de production liée au gradient de concentration moyen. En utilisant ces fermetures, nous avons retrouvé les propriétés à grande échelle du spectre de vitesse E_{ij} prédites initialement dans [21, 96] : nous avons montré que, si l'exposant infrarouge initial s_0 est inférieur à 4, le spectre de vitesse reste invariant à grande échelle. En plus de ce résultat précédemment établi, nous avons également étudié le comportement à grande échelle des spectres de concentration et de flux de concentration, E_{cc} et E_{3c} . Contrairement à E_{ij} , les grandes échelles de E_{cc} et E_{3c} ne restent pas constantes mais évoluent linéairement lorsque s_0 est inférieur à un exposant limite. En conséquence, les conditions initiales des grandes échelles sont préservées pour le spectre de vitesse mais pas pour les spectres de

concentration et de flux de concentration : pour ces deux derniers spectres, les conditions initiales à grande échelle sont oubliées et remplacées par une contribution linéaire liée au spectre de vitesse. Ceci explique pourquoi la seule connaissance des conditions initiales du spectre de vitesse est suffisante pour caractériser l'auto-similarité de l'écoulement.

À cet égard, et comme déjà montré dans [21, 96], on peut relier l'exposant de croissance Θ de la largeur de la zone de mélange à l'exposant infrarouge initial s_0 du spectre de vitesse. Au-delà de ce résultat important, la permanence de E_{ij} et les évolutions linéaires de E_{cc} et E_{3c} aux grandes échelles permettent de relier plusieurs grandeurs d'intérêt aux conditions initiales. En particulier, nous avons dérivé les relations entre l'exposant infrarouge initial s_0 et le préfacteur de la loi de puissance régissant la largeur de la zone de mélange. Nous avons également exprimé l'anisotropie du tenseur de Reynolds et le paramètre de mélange en fonction de cet exposant infrarouge initial s_0 . Finalement, en inversant la dernière relation, nous avons pu exprimer le taux de croissance Θ en fonction du paramètre de mélange.

Comme mentionné précédemment, les propriétés à grande échelle de E_{ij} (mais pas celles de E_{3c} et E_{cc}) ont déjà été mises en avant dans [21, 96] et le présent travail confirme les résultats de ces deux études. De plus, nous avons également établi un lien entre [21, 96] et ce travail et un autre corpus de la littérature de Richtmyer-Meshkov [31, 65, 169, 148], centré sur les propriétés de la perturbation interfaciale plutôt que les corrélations en deux points et leurs transformées de Fourier. Nous avons montré que toutes ces études fournissaient la même description des grandes échelles de la turbulence de Richtmyer-Meshkov et donnaient les mêmes prédictions sur le taux de croissance Θ . Enfin, nous avons également fourni des arguments clairs permettant de discriminer les formulations alternatives du principe de permanence des grandes échelles [23, 123, 99].

Les différentes prédictions de ce travail ont été vérifiées par des simulations aux grandes échelles implicites (ILES) d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood. Les conditions initiales des simulations ont été modifiées en changeant l'exposant infrarouge du spectre de puissance de la perturbation d'interface initiale. La permanence de E_{ij} et les évolutions linéaires de E_{cc} et E_{3c} aux grandes échelles ont été vérifiées. La prédiction de dépendance à l'exposant infrarouge initial s_0 du taux de croissance et du préfacteur de la largeur de la zone de mélange, de l'anisotropie et du paramètre de mélange ont également été vérifiées.

En guise de perspective, mentionnons que nous avons limité notre attention au régime entièrement turbulent et à haut nombre de Reynolds de l'évolution d'une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov. Cependant, si cette zone de mélange est laissée en décroissance et diffusion libre, son nombre de Reynolds diminuera et les effets visqueux deviendront finalement prédominants. Comme en turbulence homogène, on dit alors que la zone de mélange est dans sa période de décroissance finale. Cette période est rarement considérée dans le contexte de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. En effet, les zones de mélange

de Richtmyer-Meshkov sont dans la plupart des expériences et des simulations soumises à des sollicitations supplémentaires, telles que des re-chocs ou des ondes de raréfaction, avant de pouvoir atteindre leur décroissance finale. Néanmoins, l'étude de la décroissance finale de la turbulence de Richtmyer-Meshkov pourrait s'avérer utile pour comprendre le comportement à long terme des simulations numériques directes, qui commencent très souvent par des nombres de Reynolds modérés. Une analyse préliminaire de cette période de décroissance finale est fournie en annexe 4.

Ainsi, la dépendance aux conditions initiales des grandes échelles représente l'un des principes fondamentaux régissant l'évolution d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer-Meshkov. À partir des résultats que nous venons d'établir, nous allons par la suite être à même de dériver un modèle PDF adapté à l'étude de telles zones de mélange, qui prenne en compte ce principe de permanence des grandes échelles. En effet, comme nous l'avons annoncé en introduction, les modèles PDF utilisés jusqu'à aujourd'hui n'ont jamais pris en compte cette dépendance aux conditions initiales issue du principe de permanence des grandes échelles. Cette "omission" a des conséquences non négligeables sur l'évolution de la zone de mélange, et notamment sur son taux de croissance et son rapport d'anisotropie globale. Ces limites des modèles PDF classiques dans le cadre de la turbulence de Richtmyer-Meshkov seront ainsi illustrées dans la section suivante, puis un modèle adapté sera proposé, puis validé.

Chapitre 2

Modèle PDF de Langevin appliqué à la turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood

2.1 Introduction

Les propriétés des grandes échelles que nous venons de mettre en avant dans le chapitre 1 expliquent pourquoi l'application d'un modèle à fonction de densité de probabilité (PDF) à la turbulence de Richtmyer-Meshkov est une tâche difficile. Les modèles PDF sont des modèles de turbulence d'ingénierie qui tentent de capturer l'ensemble des informations statistiques en un point du champ de vitesse et d'autres quantités régissant l'écoulement [119, 120]. La permanence des grandes échelles est quant à elle reliée à une information en deux points. Elle n'est donc pas prise en compte naturellement dans les modèles PDF.

L'un des modèles PDF les plus utilisés est le modèle de Langevin, soit sous sa forme simplifiée (SLM), soit sous l'une de ses expressions généralisées (GLM) [122]. Le modèle de Langevin permet de capturer les statistiques d'une grande variété d'écoulements turbulents, tout en gardant une forme simple et efficace en termes de coût de calcul. Cependant, s'il est directement appliqué aux zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov, le modèle Langevin sera confronté à plusieurs problèmes. En effet, il n'inclut aucune dépendance vis-à-vis des conditions initiales à grande échelle et ne sera pas capable de reproduire les différents états auto-similaires issus de conditions initiales différentes. Par ailleurs, la plupart des variantes existantes du modèle de Langevin prédisent un retour complet à l'isotropie alors qu'un retour partiel est attendu pour la turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Un autre aspect de la turbulence de Richtmyer-Meshkov empêche une application correcte et directe des modèles de Langevin existants. Si l'on considère l'évolution de l'énergie cinétique turbulente, seuls trois processus sont actifs en turbulence de Richtmyer-Meshkov : la dissipation, l'advection turbulente et le transport par la pression turbulente.

Les deux premiers sont pris en compte dans les modèles de Langevin, le second étant traité de façon exacte. Cependant, le dernier, le transport par la pression, est presque toujours négligé. Dans tous les travaux consacrés aux modèles PDF, seul [160] a proposé un modèle pour le transport par la pression, afin de simuler une couche de cisaillement libre. Dans leur approche, le transport par la pression est modélisé comme une force supplémentaire déplaçant des particules le long du gradient d'énergie cinétique. Bien que physiquement correct, ce modèle ne donne pas de terme de transport sous la forme de la divergence d'un flux. La conservation de l'énergie sur le domaine ne peut être assurée, ce qui limite l'applicabilité de ce modèle. Mis à part ce modèle, la non prise en compte du transport par la pression pourrait être valide dans certains cas [167], mais elle ne peut pas être justifiée pour les écoulements turbulents de Richtmyer-Meshkov. En effet, la dissipation et le transport turbulent ont des ordres de grandeur comparables au transport par la pression. Par conséquent, dans leur formulation actuelle, les modèles de Langevin ne tiennent pas compte d'un aspect important de l'évolution de l'énergie cinétique en turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Ainsi, le but de ce chapitre est de dériver un modèle PDF de Langevin prenant en compte les conditions initiales à grande échelle, le retour partiel à l'isotropie et le transport par la pression dans le cadre de la turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Pour ce faire, nous introduirons une décomposition à deux échelles du modèle PDF de Langevin, dans l'esprit des modèles de turbulence à deux échelles tels que ceux proposés dans les réf. [137, 132]. D'autres modèles PDF multi-échelles existent déjà [43]. Cependant, ils nécessitent un supplément de complexité que nous aimerions éviter dans l'expression finale de notre modèle. En outre, ils ne traitent pas de l'idée de la permanence des grandes échelles et de ses implications. La décomposition proposée à deux échelles permettra de séparer l'évolution des grandes échelles permanentes de celle des plus petites. En ce qui concerne le transport par la pression, nous considérerons la correspondance existant entre les modèles PDF de Langevin et les modèles de contraintes de Reynolds (RSM). Puisque des fermetures explicites pour le transport par la pression turbulente existent pour les modèles RSM, nous proposerons un moyen de les adapter au cas des modèles PDF.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. D'abord, en section 2.2, nous rappellerons plusieurs aspects de la phénoménologie de Richtmyer-Meshkov décrits dans le chapitre 2. Deuxièmement, en section 2.3, nous présenterons les modèles de Langevin existants et indiquerons pourquoi leur formulation est insuffisante pour reproduire la phénoménologie de Richtmyer-Meshkov. En section 2.4, nous présenterons une version modifiée du modèle de Langevin basée sur une décomposition à deux échelles. L'adaptation du modèle pour tenir compte du transport par la pression sera discutée en section 2.5. Enfin, le modèle proposé sera comparé à des simulations en section 2.6.

2.2 Phénoménologie des zones de mélange turbulentes issues de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov

Avant de discuter de l'application d'un modèle PDF de Langevin aux zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov, nous voudrions rappeler quelques aspects de leur phénoménologie. En particulier, nous voudrions insister sur le rôle joué par les grandes échelles sur l'auto-similarité de l'écoulement et sur son anisotropie.

2.2.1 Équations fondamentales

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que celles du chapitre 1, décrites dans la section 1.2. L'évolution du champ de vitesse $\mathbf{u}$ en turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood est indépendante de la concentration. Elle est donnée par l'équation (1.1), que nous rappelons ici :

$$\partial_t u'_i + u'_j \partial_j u'_i = -\partial_i p' + \nu \partial_{jj}^2 u'_i + \partial_3 \overline{u_3'^2} \delta_{i3} \quad , \quad (2.1a)$$

$$\partial_j u'_j = 0 \quad , \quad \overline{u_i} = 0 \quad , \quad (2.1b)$$

où p est la pression réduite, ν un coefficient de transport moléculaire, et où, pour une quantité donnée q , $\bar{q}$ fait référence à sa moyenne d'ensemble et q' à sa fluctuation. La condition $\overline{\mathbf{u}} = 0$ provient de l'axisymétrie de l'écoulement et de l'incompressibilité de la vitesse moyenne qui établit $\partial_3 \overline{u_3} = 0$. Étant donné que $\overline{\mathbf{u}} = 0$, on a $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. Nous utiliserons ci-après la notation $\mathbf{u}$ en gardant à l'esprit que c'est vraiment une fluctuation que nous étudions.

2.2.2 État turbulent auto-similaire

Pour des temps longs et des nombres de Reynolds élevés, les zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov régies par l'équation (2.1) atteignent un état auto-similaire. Cet état est généralement observé et décrit pour la largeur L de la zone de mélange et pour le tenseur des contraintes de Reynolds $\overline{\mathbf{R}}$. Avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, la dernière quantité est définie comme :

$$\overline{R}_{ij}(x_3, t) = \overline{u_i u_j}(x_3, t) \quad .$$

La trace de $\overline{\mathbf{R}}$ donne l'énergie cinétique turbulente :

$$\overline{k}(x_3, t) = \frac{1}{2} \overline{R}_{ii}(x_3, t) \quad .$$

Dans le régime turbulent auto-similaire, L et $\overline{\mathbf{R}}$ évoluent selon des lois de puissance en temps :

$$L \propto t^\Theta \quad \text{et} \quad \langle \overline{\mathbf{R}} \rangle \propto t^{-2(1-\Theta)} \quad , \quad (2.2)$$

avec Θ le taux de croissance de la largeur de la zone de mélange, et $\langle \cdot \rangle$ la valeur moyennée selon la direction inhomogène :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{L} \int \cdot \, dx_3$$

Un autre aspect de l'auto-similarité concerne l'anisotropie. Puisque toutes les composantes de $\langle \overline{\mathbf{R}} \rangle$ ont la même évolution temporelle, le tenseur d'anisotropie de $\langle \overline{\mathbf{R}} \rangle$ tend vers une constante. Ce tenseur d'anisotropie globale est noté $\mathbf{b}^G$ et est généralement différent du tenseur d'anisotropie locale $\mathbf{b}$ basé sur $\mathbf{R}$ ou sa valeur intégrée. Les deux tenseurs $\mathbf{b}^G$ et $\mathbf{b}$ sont définis comme :

$$b_{ij}^G(t) = \frac{\langle \overline{R}_{ij} \rangle}{2\langle \overline{k} \rangle}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad \text{et} \quad b_{ij}(x_3, t) = \frac{\overline{R}_{ij}}{2\overline{k}}(x_3, t) - \frac{1}{3}\delta_{ij} . \quad (2.3)$$

Généralement, $\mathbf{b}^G \neq \langle \mathbf{b} \rangle$. Puisque l'écoulement est axisymétrique, $\mathbf{b}^G$ est diagonal et n'a qu'une seule composante indépendante. Nous allons nous concentrer sur b_{33}^G , sachant que : $b_{11}^G(t) = b_{22}^G(t) = -b_{33}^G(t)/2$. Une relation similaire est valable pour $\mathbf{b}$. L'auto-similarité implique que :

$$b_{33}^G(t) \equiv \text{Cst} .$$

La valeur constante de b_{33}^G est à nouveau liée aux conditions initiales et en particulier à la valeur de s_0 . Mais, pour expliquer ce lien, nous devons d'abord rappeler quelques détails concernant la permanence des grandes échelles.

2.2.3 À propos de la permanence des grandes échelles

Le chapitre 2 a permis d'éclairer le rôle joué par la permanence des grandes échelles en turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood. Nous rappelons brièvement ici les principaux résultats de ce chapitre. La permanence des grandes échelles peut être exprimée en introduisant le spectre turbulent du champ de vitesse $E_{ij}(\mathbf{k}, t)$ au vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Une définition précise de ce spectre est donnée en annexe 1. Il est relié au tenseur de Reynolds par la relation :

$$\langle \overline{R}_{ij} \rangle(t) = \frac{2\pi}{L} \int E_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} . \quad (2.4)$$

Comme indiqué au chapitre 2, le spectre de vitesse généré juste après le passage du choc, à $t = 0$, vérifie :

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t = 0) = E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) \propto k^{s_0-2} \quad \text{pour } k \ll k_{e0} \quad ,$$

avec $k = \sqrt{k_i k_i}$ le module du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et k_{e0} le nombre d'onde associé à la valeur initiale de l'échelle intégrale.

Alors, le principe de permanence des grandes échelles indique que pour des échelles beaucoup plus grandes que l'échelle intégrale de turbulence $\ell(t)$ et pour $s_0 < 4$, E_{ij} reste constant :

$$\text{Pour } k \ll k_e(t) = 2\pi/\ell(t) \quad \text{et} \quad s_0 > 4 \quad , \quad E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) \propto k^{s_0-2} \quad , \quad (2.5)$$

L'échelle intégrale de la turbulence ℓ est représentative des tourbillons contenant de l'énergie et est habituellement de l'ordre de $L/3$ à $L/2$.

Étant donné que les conditions initiales sont conservées aux grandes échelles, elles contraignent le comportement auto-similaire de l'écoulement. En effet, si le spectre doit être auto-similaire et permanent à grande échelle, alors un invariant à grande échelle doit exister. Cet invariant est donné par l'équation (1.22) que l'on rappelle ici :

$$\langle \bar{k} \rangle L^{s_0+2} = \text{Cst} \quad . \quad (2.6)$$

A partir de cette relation, on peut montrer que l'exposant caractéristique de l'état auto-similaire de la turbulence de Richtmyer-Meshkov est directement lié à l'exposant infrarouge s_0 . L'équation (1.23) est également rappelée :

$$\Theta = \frac{2}{s_0 + 4} \quad . \quad (2.7)$$

Plus s_0 est petit, plus la contribution des grandes échelles est grande et plus la croissance de la largeur de la zone de mélange est rapide. La valeur de Θ varie de 0.25 pour $s_0 = 4$ à 0.5 pour $s_0 = 0$. Notons que Θ ne peut pas dépasser $2/3$.

L'équation de l'invariant (2.6) contraint aussi, dans le régime auto-similaire, la valeur du taux de dissipation turbulente défini comme :

$$\bar{\varepsilon} = \nu \overline{\partial_j u_i \partial_j u_i} \quad .$$

En effet, sachant que l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle$ est $\partial_t(L\langle \bar{k} \rangle) = -L\langle \bar{\varepsilon} \rangle$, et que la dérivation de

l'équation (2.6) implique que $\partial_t(L\langle\bar{k}\rangle) = -d_t L(s_0 + 1)\langle\bar{k}\rangle$, on en déduit que :

$$\bar{\omega}^G = \frac{\langle\bar{\varepsilon}\rangle}{\langle\bar{k}\rangle} = -(s_0 + 1)\frac{d_t L}{L}. \quad (2.8)$$

Notons que cette relation est satisfaite dès que le régime est auto-similaire et que Θ est donné par l'équation (2.7).

Une autre conséquence de la permanence des grandes échelles exprimée par l'équation (2.5) concerne l'anisotropie. En effet, les grandes échelles étant permanentes, elles conservent leur anisotropie initiale. Ainsi, même si les échelles restantes du spectre retournent à l'isotropie, ce n'est pas le cas pour les grandes échelles. Par conséquent, l'intégrale du spectre turbulent E_{ij} selon $\mathbf{k}$ donnera un tenseur de contrainte de Reynolds qui est anisotrope à tout moment. Dans le chapitre 2, une estimation de cette anisotropie résiduelle a été proposée pour des conditions initiales représentatives du passage d'un choc sur une interface perturbée linéairement. Cette estimation permet d'exprimer en fonction de s_0 le tenseur d'anisotropie globale b_{ij}^G . D'après l'équation (1.30), on a :

$$b_{33}^G \approx \frac{2}{3} \frac{s_0 + 3/2}{s_0 + 3 + 3(s_0 + 1)(s_0 + 2)a} \quad \text{avec} \quad a \approx 0.3. \quad (2.9)$$

Plus s_0 est petit, plus la contribution des grandes échelles est grande et plus l'anisotropie est forte. La valeur de b_{33}^G varie approximativement de $b_{33}^G = 0.1$ pour $s_0 = 4$ à $b_{33}^G = 0.2$ pour $s_0 = 0$.

Les valeurs de Θ et de b_{33}^G prédites dans les équations (2.7) et (2.9) sont des propriétés fondamentales caractéristiques de l'état auto-similaire de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. Un modèle statistique, tel que le modèle de Langevin généralisé, devrait être capable de reproduire ces propriétés.

2.3 Le modèle de Langevin généralisé et son comportement en turbulence de Richtmyer-Meshkov

Le but de cette section est de présenter le modèle de Langevin généralisé (GLM) et de montrer comment ce modèle se comporte dans le cadre de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. En particulier, nous aimerions comparer les prédictions du GLM aux propriétés attendues des états auto-similaires de la turbulence Richtmyer-Meshkov décrits en section 2.2 et en particulier aux équations (2.7) et (2.9).

2.3.1 Équation PDF exacte et sa modélisation par un modèle de Langevin

On introduit f la PDF de $\mathbf{u}$:

$$f(\mathbf{v}; x_3, t) = \overline{f'(\mathbf{v}; x_3, t)} \quad \text{avec} \quad f'(\mathbf{v}; x_3, t) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)).$$

où f' est appelée la "fine-grained" PDF de $\mathbf{u}$.

L'équation d'évolution de f est déduite de l'équation (2.1) en utilisant des techniques standards issues de [119, 120]. On s'appuie dans un premier temps sur les propriétés des dérivées de la "fine-grained" PDF f' , que l'on ne redémontrera pas ici :

$$\partial_t f' = -\partial_{v_i} f' \partial_t u_i \quad (2.10a)$$

$$\partial_i f' = -\partial_{v_j} f' \partial_i u_j \quad (2.10b)$$

$$u_i \partial_i f' = -v_i \partial_i f' \quad (2.10c)$$

On déduit du système d'équations (2.10) une expression pour la dérivée particulaire de f' :

$$\partial_t f' + v_i \partial_i f' = -\partial_{v_i} [f' D_t u_i] \quad (2.11)$$

La moyenne de cette équation nous donne alors l'expression de la dérivée particulaire de f :

$$\partial_t f + v_i \partial_i f = -\partial_{v_i} \left[\overline{f (D_t u_i | \mathbf{v})} \right] \quad (2.12)$$

$$\text{avec } \forall Q(x, t), \quad \langle f' Q \rangle = \overline{f (Q | \mathbf{v})} \quad (2.13)$$

où $\overline{(\cdot | \mathbf{v})}$ est la moyenne conditionnée par $\mathbf{v}$.

Étant donné que f ne dépend que de x_3 en espace, on peut simplifier $v_i \partial_i f$ par $v_3 \partial_3 f$ dans l'équation (2.12). En injectant ensuite l'équation d'évolution de u_i (2.1), cette dérivée particulaire donne :

$$\begin{aligned} \partial_t f + v_3 \partial_3 f &= -\partial_{v_i} \left[\overline{f (-\partial_i p' + \nu \partial_{jj}^2 u'_i + \partial_3 \overline{u_3'^2} \delta_{i3} | \mathbf{v})} \right] \\ &= -\partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3'^2} \delta_{i3} f - \overline{(\partial_i p' | \mathbf{v})} f \right] - \partial_{v_i} \left[\overline{f (\nu \partial_{jj}^2 u'_i | \mathbf{v})} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

On peut ensuite ré-exprimer le terme de diffusion de l'équation (2.14). Pour cela, on montre dans un premier temps que :

$$\partial_{jj}^2 f' = \partial_{v_i v_k}^2 f' \partial_j u_i \partial_j u_k - \partial_{v_i} f' \partial_{jj}^2 u_i \quad (2.15)$$

En injectant cette égalité dans l'équation (2.14), on en déduit l'équation d'évolution finale de la PDF f :

$$\partial_t f + v_3 \partial_3 f = \nu \partial_{jj}^2 f - \partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3^2} \delta_{i3} f - \overline{(\partial_i p' | \mathbf{v})} f \right] - \partial_{v_i v_k}^2 \left[\overline{(\varepsilon_{ik} | \mathbf{v})} f \right] , \quad (2.16)$$

où $\varepsilon_{ik} = \nu \partial_j u_i \partial_j u_k$. Dans cette équation, l'accélération fluctuante $\overline{(\partial_i p' | \mathbf{v})}$ et la dissipation conditionnelle $\overline{(\varepsilon_{ik} | \mathbf{v})}$ ne sont pas connues explicitement en fonction de la PDF en un point f . Ces quantités comportent des informations statistiques en deux points et doivent être fermées.

L'un des modèles les plus populaires pour la fermeture des termes $\overline{(\partial_i p' | \mathbf{v})}$ et $\overline{(\varepsilon_{ik} | \mathbf{v})}$ est le modèle de Langevin généralisé (GLM). Cette fermeture conduit à l'équation de transport modélisée suivante pour f :

$$\partial_t f + v_3 \partial_3 f = -\partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3^2} \delta_{i3} f + G_{ij} v_j f \right] + \frac{C_0 \bar{\varepsilon}}{2} \partial_{v_j v_j}^2 f , \quad (2.17a)$$

avec G_{ij} et C_0 des coefficients du modèle vérifiant la condition :

$$\left(1 + \frac{3}{2} C_0 \right) \bar{\varepsilon} + G_{ij} \overline{u_i u_j} = 0 . \quad (2.17b)$$

L'équation (2.17) doit être complétée par une équation d'évolution du taux de dissipation turbulente $\bar{\varepsilon}$. Dans ce travail, nous allons nous contenter de l'équation $\bar{\varepsilon}$ d'un modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$, avec un terme de transport turbulent proportionnel à celui de $\bar{k}$:

$$\partial_t \bar{\varepsilon} + \partial_3 (C_\varepsilon \bar{\omega} \overline{u_3 k}) = -C_{\varepsilon 2} \bar{\omega} \bar{\varepsilon} , \quad (2.17c)$$

où C_ε et $C_{\varepsilon 2}$ sont des constantes du modèle, $\overline{u_3 k} = \frac{1}{2} \overline{u_3 u_i u_i}$ le flux d'advection de l'énergie cinétique et $\bar{\omega}$ la fréquence turbulente, définie comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} .$$

Dans la configuration du GLM, on suppose que G_{ij} est une fonction de l'anisotropie $\mathbf{b}$ et de tout terme de production impliqué. Puisque la turbulence de Richtmyer-Meshkov est dépourvue de toute forme de production, le tenseur G_{ij} du GLM peut être exprimé, dans notre cas particulier, en fonction de l'anisotropie seule :

$$G_{ij} = -\frac{1}{2} C_1 \bar{\omega} \delta_{ij} + C_2 \bar{\omega} b_{ij} + C_3 \bar{\omega} b_{ij}^2 .$$

Différentes valeurs de C_1 , C_2 et C_3 conduisent à différentes versions du GLM. Par exemple, définir $C_1 = \text{Cst}$ et $C_2 = C_3 = 0$ correspond au modèle de Langevin simplifié, et aussi, puisqu'il n'y a pas de production pour les différencier, au modèle LRR-IP. Définir

$C_1 = (1 + \frac{3}{2}C_0) - 6C_2\bar{\omega}b_{ii}^3$, $C_0 = 2.1$, $C_2 = 3.5$, $C_3 = -3C_2$ aboutit au modèle LIPM. D'autres variantes du GLM peuvent être trouvées dans [122, 120].

2.3.2 Évolution correspondante du tenseur de Reynolds et de sa réduction 0D

En intégrant l'équation (2.17) selon $\mathbf{v}$ après l'avoir multipliée par $v_i v_j$, on obtient l'évolution du tenseur de contraintes de Reynolds $\bar{R}_{ij}$ associé au GLM.

$$\partial_t \bar{R}_{ij} + \partial_k \bar{u}_k u_i u_j = -2\bar{\varepsilon} \left((C_1 - C_3 b_{kk}^2) b_{ij} - 2(C_2 + C_3/3) \left(b_{ij}^2 - \frac{b_{kk}^2}{3} \delta_{ij} \right) \right) - \frac{2}{3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij}. \quad (2.18)$$

Afin de faciliter l'analyse de cette équation, nous supposons maintenant que la dissipation $\bar{\varepsilon}$ et toutes les composantes de $\bar{u}_i u_j$ ont des profils spatiaux similaires. Par conséquent, la fréquence turbulente et b_{ij} sont indépendants de l'espace et ne dépendent que du temps :

$$\text{Hypothèse 0D : } \bar{\omega} \equiv \bar{\omega}(t) \quad , \quad b_{ij} \equiv b_{ij}(t) = b_{ij}^G(t).$$

Ensuite, en intégrant l'équation GLM pour $\bar{R}_{ij}$ et celle pour $\bar{\varepsilon}$ (équation (2.17c)), on obtient :

$$d_t(L\langle \bar{R}_{ij} \rangle) = -2\bar{\omega}L\langle \bar{k} \rangle \left((C_1 - C_3 b_{kk}^2) b_{ij} - 2(C_2 + C_3/3) \left(b_{ij}^2 - \frac{b_{kk}^2}{3} \delta_{ij} \right) \right) - \frac{2}{3} \bar{\omega}L\langle \bar{k} \rangle \delta_{ij} \quad (2.19)$$

$$d_t(L\langle \bar{\varepsilon} \rangle) = -C_{\varepsilon_2} \bar{\omega} L\langle \bar{\varepsilon} \rangle. \quad (2.20)$$

Ce système constitue la réduction 0D de l'évolution du moment de second ordre du GLM. Il offre un aperçu de la façon dont le modèle se comporte dans le régime auto-similaire, comme cela sera détaillé dans la sous-section suivante. Notons que la réduction 0D des modèles de turbulence est une méthodologie qui a déjà été utilisée largement et avec succès pour analyser les turbulences de Richtmyer-Meshkov et Rayleigh-Taylor. En particulier, les équations 0D pour le modèle $\bar{k}$ - $\bar{\varepsilon}$ peuvent être trouvées dans [95] et se sont avérées utiles pour déterminer les propriétés de ce modèle dans le cadre des zones de mélange turbulentes.

2.3.3 Solution auto-similaire du modèle réduit 0D et principales lacunes du GLM

La réduction 0D du GLM admet une solution auto-similaire telle que :

$$L \propto t^\Theta \quad , \quad \langle \mathbf{R} \rangle \propto t^{2\Theta-2} \quad \text{avec} \quad \Theta = \frac{2C_{\varepsilon_2} - 3}{3C_{\varepsilon_2} - 3} \quad (2.21)$$

Cette solution auto-similaire est comparable à celle obtenue à partir des prédictions théoriques de l'équation (2.2). La valeur de l'exposant auto-similaire Θ est cependant différente : elle dépend de s_0 dans le cas théorique (équation (2.7)) et de la constante C_{ε_2} dans le cas du GLM. Cette différence n'est pas *en soi* un défaut du GLM. En effet, elle peut être résolue en fixant simplement la valeur de C_{ε_2} pour reproduire le taux de décroissance correct de $\bar{k}$ et $\bar{\varepsilon}$, comme nous le verrons dans la section suivante.

Cependant, une divergence plus forte se produit dans la façon dont le GLM traite l'anisotropie. En effet, à partir des équations 0D (2.19), on peut montrer que le tenseur d'anisotropie dans le régime auto-similaire est solution de :

$$b_{33}^G \left(C_1 - 1 - (C_2 + C_3/3)b_{33}^G - \frac{3}{2}C_3(b_{33}^G)^2 \right) = 0$$

Cette équation a au moins une solution $b_{33}^G = 0$ et éventuellement plusieurs, selon le modèle considéré. Par exemple, le LRR-IP et le SLM ont seulement la solution $b_{33}^G = 0$, alors que le LIPM en a une de plus. Lorsque plusieurs solutions existent, b_{33}^G peut aller vers l'une ou l'autre selon les conditions initiales de $\langle \bar{k} \rangle$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle$ et b_{33}^G . Notons que $b_{33}^G = 0$ correspond à un retour complet à l'isotropie.

En revanche, la turbulence de Richtmyer-Meshkov présente un retour partiel à l'isotropie décrit par l'équation (2.9) en fonction de l'exposant infrarouge initial s_0 . Le retour complet à l'isotropie prédit par certaines versions du GLM (SLM, LRR-IP, ...) n'est donc pas satisfaisant. L'état anisotrope supplémentaire prédit par d'autres versions du GLM n'est pas non plus suffisant, même s'il est paramétré pour correspondre au comportement de la turbulence de Richtmyer-Meshkov. En effet, en fonction des conditions initiales du GLM, cette solution supplémentaire peut être atteinte ou non. Dans ce dernier cas, un retour complet à l'isotropie se produit à nouveau.

Par conséquent, on ne peut pas reproduire de manière satisfaisante le retour partiel à l'isotropie de la turbulence de Richtmyer-Meshkov avec les versions existantes du GLM, où G_{ij} ne dépend que de b_{ij} .

2.3.4 À propos du transport de l'énergie cinétique turbulente

L'évolution de $\bar{k}$ déduite des équations de Boussinesq (2.1) est :

$$\text{Évolution exacte : } \partial_t \bar{k} + \partial_3 \left(\overline{u_3 k} + \overline{u_3 p'} - \nu \partial_3 \bar{k} \right) = -\bar{\varepsilon} \quad , \quad (2.22)$$

avec $\bar{\varepsilon} = \nu \overline{\partial_j u_k \partial_j u_k}$ la dissipation turbulente et $\overline{u_3 k} = \frac{1}{2} \overline{u_3 u_i u_i}$ le flux d'advection turbulente. Nonobstant le terme visqueux, l'évolution de $\bar{k}$ est régie par trois processus physiques : la dissipation, l'advection turbulente et le transport par la pression turbulente.

Cependant, le GLM prédit une autre évolution. Si on considère la trace de l'équation

(2.18) pour $\bar{R}_{ij}$, on obtient que :

$$\text{Évolution du GLM : } \partial_t \bar{k} + \partial_3 (\overline{u_3 k}) = -\bar{\varepsilon}. \quad (2.23)$$

Comparer l'évolution de $\bar{k}$ déduite du GLM en équation (2.23) à son évolution exacte en équation (2.22) nous montre que le GLM néglige le transport turbulent dû au flux de pression :

$$\overline{u_3 p'} \Big|_{\text{GLM}} = 0.$$

La non prise en compte du transport par la pression est pertinent pour des situations particulières [167], mais il n'y a aucun argument pour le faire dans les écoulements turbulents de Richtmyer-Meshkov. Par conséquent, dans sa formulation actuelle, il est probable que le GLM manque un aspect important de l'évolution de l'énergie cinétique turbulente.

2.4 Un modèle de Langevin avec retour partiel à l'isotropie

Dans la section précédente, nous avons identifié deux lacunes du GLM : son incapacité à reproduire correctement un retour partiel à l'isotropie et son absence de modélisation pour le flux de pression turbulente. Dans cette section, nous cherchons à aborder le premier de ces inconvénients en introduisant une décomposition à deux échelles du champ de vitesse.

2.4.1 Décomposition à deux échelles du champ de vitesse

Comme expliqué en introduction et en section 2.2.3, le retour partiel à l'isotropie observé en turbulence de Richtmyer-Meshkov est dû à la permanence des grandes échelles. L'anisotropie de ces échelles reste constante tout au long du temps et empêche l'écoulement de devenir complètement isotrope. Afin de rendre compte du comportement des grandes échelles, nous cherchons à isoler leur contribution au champ de vitesse.

A cette fin, nous considérons la transformée de Fourier $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ du champ de vitesse pris à l'instant t et au vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Une définition précise de cette transformée de Fourier est donnée en annexe 1 dans l'équation (A.1). Par définition, nous pouvons écrire la valeur de la vitesse comme :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}.$$

Dans un second temps, nous introduisons un nombre d'onde k_L qui sépare les grandes échelles permanentes des échelles plus petites. Nous divisons ensuite la définition de u_i en

deux contributions, une pour les grandes échelles et une pour les petites :

$$u_i = u_i^L + u_i^S \quad \text{avec} \quad u_i^L = \int_{k \leq k_L} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad , \quad u_i^S = \int_{k \geq k_L} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} . \quad (2.24)$$

2.4.2 Modèle de Langevin à deux échelles

Avec cette décomposition, nous pouvons maintenant proposer une adaptation simple du GLM prenant en compte les effets séparés des grandes et des petites échelles. À cet égard, nous notons que le terme de retour à la moyenne du modèle de Langevin, celui qui contrôle le retour à l'isotropie, peut s'écrire :

$$G_{ij} \mathbf{v}_j = G_{ij} \overline{(u_j | \mathbf{v})} = G_{ij} \overline{(u_j^L | \mathbf{v})} f + G_{ij} \overline{(u_j^S | \mathbf{v})} .$$

L'idée est alors simplement de différencier les coefficients apparaissant devant chacune des moyennes conditionnées. Le modèle que nous proposons prend la forme suivante :

$$\partial_t f + \mathbf{v}_3 \partial_3 f = -\partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3^2} \delta_{i3} f + G_{ij}^L \overline{(u_j^L | \mathbf{v})} f + G_{ij}^S \overline{(u_j^S | \mathbf{v})} f \right] + \frac{C_0 \bar{\varepsilon}}{2} \partial_{v_j v_j}^2 f \quad , \quad (2.25a)$$

avec la condition :

$$\left(1 + \frac{3}{2} C_0 \right) \bar{\varepsilon} + G_{ij}^L \overline{u_i u_j^L} + G_{ij}^S \overline{u_i u_j^S} = 0 . \quad (2.25b)$$

Ainsi, avec cette formulation, nous pouvons contrôler indépendamment le retour à l'isotropie des grandes et des petites échelles tout en gardant la structure simple du GLM.

Bien sûr, ce modèle n'est pas encore fermé : les moyennes conditionnées $\overline{(u_j^L | \mathbf{v})}$ et $\overline{(u_j^S | \mathbf{v})}$ doivent être précisées, ainsi que les coefficients G_{ij}^L et G_{ij}^S .

2.4.3 Fermeture linéaire des moyennes conditionnées

Les deux moyennes conditionnées $\overline{(u_i^L | \mathbf{v})}$ et $\overline{(u_i^S | \mathbf{v})}$ sont liées l'une à l'autre par leur définition (équation (2.24)), de sorte que nous pouvons n'en choisir qu'une sur laquelle nous focaliser :

$$\overline{(u_i^L | \mathbf{v})} + \overline{(u_i^S | \mathbf{v})} = v_i . \quad (2.26)$$

En se focalisant sur $\overline{(u_i^L | \mathbf{v})}$, nous proposons une fermeture linéaire de la forme :

$$\overline{(u_i^L | \mathbf{v})} = M_{ij}^L v_j . \quad (2.27)$$

Afin d'estimer M_{ij}^L , nous partons de la définition exacte de u_i^L (équation (2.24)) et en déduisons que :

$$\text{Relation exacte : } \langle \overline{u_i u_j^L} \rangle = \mathcal{R}_{ij}^L \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_{ij}^L(t) = \frac{2\pi}{L} \int_{k \leq k_L} E_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (2.28)$$

En comparant cette équation à la relation entre le spectre et les contraintes de Reynolds intégrées (équation (2.4)), nous voyons que $\langle \overline{u_i u_j^L} \rangle$ est la contribution à grande échelle de $\langle \overline{R_{ij}} \rangle$. En outre, si nous utilisons maintenant le modèle linéaire pour exprimer u_i^L , nous avons également :

$$\text{Relation modélisée : } \langle \overline{u_i u_j^L} \rangle = \langle M_{ik}^L \overline{R_{kj}} \rangle \quad (2.29)$$

La comparaison des expressions modélisée et exacte de $\langle \overline{u_i u_j^L} \rangle$ permet de définir une contrainte sur M_{ij}^L .

Afin d'exploiter pleinement cette contrainte, nous proposons d'abord une approximation pour $\mathcal{R}_{ij}^L$. Pour ce faire, nous écrivons $\mathcal{R}_{ij}^L$ comme :

$$\mathcal{R}_{ij}^L = 2\mathcal{K}^L \left(b_{ij}^L + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right),$$

avec $\mathcal{K}^L = \mathcal{R}_{pp}^L/2$ et b_{ij}^L le tenseur d'anisotropie de $\mathcal{R}_{ij}^L$.

Ensuite, nous supposons que toutes les composantes du spectre initial $E_{ij}^{(0)}$ ont le même exposant infrarouge s_0 . Par conséquent, b_{ij}^L est indépendant du temps, avec une valeur définie par les conditions initiales. Plus précisément, pour une zone de mélange initiée par un choc traversant une interface perturbée linéairement, on a selon l'équation (1.11) :

$$b_{33}^L = \frac{2}{3} \frac{s_0 + 3/2}{s_0 + 3}. \quad (2.30)$$

Pour estimer l'énergie à grande échelle $\mathcal{K}^L$, nous supposons que le nombre d'onde limite k_L sépare un intervalle à grande échelle d'un intervalle inertiel de Kolmogorov, comme proposé dans le chapitre 2, en section 1.6. En intégrant ce spectre idéalisé, nous obtenons que :

$$\mathcal{K}^L = \mathbf{x}^L \langle \overline{k} \rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^L = \frac{1}{1 + 3a(s_0 + 1)(s_0 + 2)/(s_0 + 3)}, \quad a \approx 0.3. \quad (2.31)$$

En égalisant les deux membres de droite des équations (2.28) et (2.29), avec la fermeture proposée pour $\mathcal{R}_{ij}^L$, on déduit que :

$$\langle M_{ik}^L R_{kj} \rangle = \mathcal{R}_{ij}^L = 2\mathbf{x}^L \langle \overline{k} \rangle \left(b_{ij}^L + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right).$$

Cette relation est notamment vérifiée lorsque :

$$M_{ik}^L R_{kj} = 2\mathbf{x}^L \bar{k} \left(b_{ij}^L + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) .$$

En multipliant cette relation par l'inverse de $\bar{R}_{kj}$, on déduit que :

$$M_{ij}^L = 2\mathbf{x}^L \bar{k} \left(b_{ik}^L + \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) \bar{R}_{kj}^{-1} \quad (2.32)$$

Associée aux équations (2.30) et (2.31), cette expression fournit une fermeture pour M_{ij}^L et donc pour $\overline{(u_j^L | \mathbf{v})}$. Cette fermeture introduit une dépendance explicite envers l'état initial de l'écoulement, comme l'exige la phénoménologie de la turbulence de Richtmyer-Meshkov.

Notons qu'à travers l'équation (2.26), l'expression modélisée pour $\overline{(u_i^S | \mathbf{v})}$ est :

$$\begin{aligned} \overline{(u_i^S | \mathbf{v})} &= M_{ij}^S v_j \quad (2.33) \\ \text{avec } M_{ij}^S &= \delta_{ij} - M_{ij}^L = 2\mathbf{x}^S \bar{k} \left(b_{ik}^S + \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) \bar{R}_{kj}^{-1} \\ \text{et } \mathbf{x}^S &= 1 - \mathbf{x}^L = \frac{3a(s_0 + 1)(s_0 + 2)}{s_0 + 3 + 3a(s_0 + 1)(s_0 + 2)} , \quad b_{ij}^S = \frac{b_{ij} - \mathbf{x}^L b_{ij}^L}{1 - \mathbf{x}^L} . \end{aligned}$$

2.4.4 Coefficients du modèle

Comme dernière étape dans la dérivation de notre modèle, nous devons préciser les valeurs de G_{ij}^L et G_{ij}^S . La valeur de G_{ij}^L est liée à l'évolution des grandes échelles et devrait donner une évolution correcte pour $\mathcal{R}_{ij}^L$ quand $\mathbf{x}^L = 1$. L'évolution exacte peut être déduite en utilisant le principe de permanence des grandes échelles. En effet, compte tenu de sa définition (équation (2.28)), $\mathcal{R}_{ij}^L$ n'implique que des échelles qui sont permanentes. Il peut être réécrit en utilisant le spectre initial

$$\mathcal{R}_{ij}^L(t) = \frac{2\pi}{L} \int_{k \leq k_L} E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} .$$

Puis, en dérivant cette équation par rapport au temps, sachant que $E_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}) \propto k^{s_0-2}$ et en supposant une auto-similarité de sorte que $k_L \propto 1/L$, nous en déduisons que :

$$\partial_t \left(L \mathcal{R}_{ij}^L \right) = -(s_0 + 1) d_t L \mathcal{R}_{ij}^L .$$

Enfin, connaissant la relation entre $\bar{\omega}^G$ et $d_t L$ donnée en équation (2.8), on déduit que :

$$\partial_t \left(L \mathcal{R}_{ij}^L \right) = -L \bar{\omega}^G \mathcal{R}_{ij}^L .$$

Lorsque $\mathbf{x}^L = 1$, cette évolution ne peut être extraite du modèle GLM que si G_{ij}^L vérifie :

$$G_{ij}^L = -\frac{1}{2}C_1^L\bar{\omega}\delta_{ij} \quad \text{avec} \quad C_1^L = 1.$$

En ce qui concerne G_{ij}^S , nous notons que les fermetures utilisées dans le GLM standard sont habituellement proposées pour décrire des processus se produisant à de petites échelles inertielles. Par conséquent, nous proposons d'utiliser les mêmes fermetures que celles utilisées pour le GLM standard pour définir G_{ij}^S . Plus précisément, nous utiliserons le modèle de Langevin simplifié. À ce stade, il n'y a en effet aucune raison de rechercher des fermetures plus complexes. Nous fixons ainsi :

$$G_{ij}^S = -\frac{1}{2}C_1^S\bar{\omega}\delta_{ij} \quad ,$$

Dans la littérature, la valeur de C_1^S varie largement, de $C_1^S \approx 1,8$ à $C_1^S \approx 10$ [121]. Les valeurs les plus élevées sont généralement obtenues en connectant C_1^S à la constante de Kolmogorov définissant le spectre lagrangien en deux temps dans l'intervalle inertiel. D'un autre côté, les valeurs les plus basses sont obtenues en identifiant C_1^S à la constante de retour à l'isotropie apparaissant dans plusieurs RSM, comme le modèle LRR [86]. Dans ce travail, nous ne sommes pas intéressés par la prédiction des statistiques en deux temps de la turbulence isotrope homogène. Nous préférons obtenir une prédiction correcte du retour à l'isotropie des contraintes de Reynolds. Ainsi, nous utiliserons la valeur de C_1^S provenant du modèle RSM du CEA appelé GSG [52]. Celui-ci a été entièrement validé par des expériences et des simulations dans le cadre des turbulences de Richtmyer-Meshkov et Rayleigh-Taylor. En accord avec ce modèle, nous fixons :

$$C_1^S = 1.8.$$

Notons que la valeur de C_0 est liée à C_1^S par l'équation (2.25b). Avec les expressions prescrites de G_{ij}^S et G_{ij}^L , nous déduisons de cette relation que :

$$C_0 = \frac{2}{3}\mathbf{x}^S(C_1^S - 1). \quad (2.34)$$

Avec C_{ε_2} , nous cherchons à obtenir le taux de croissance correct de la zone de mélange. Ainsi, nous fixons la valeur de C_{ε_2} pour que les équations (2.21) et (2.7) concordent. Cela donne :

$$C_{\varepsilon_2} = \frac{1 - \Theta}{\frac{2}{3} - \Theta} = \frac{3}{2} \frac{s_0 + 2}{s_0 + 1}. \quad (2.35)$$

Notons que cette expression a d'abord été dérivée dans [95].

2.4.5 Expressions finales du modèle et de sa réduction 0D

Avec ces différentes spécifications, le GLM modifié à deux échelles peut être écrit comme :

$$\partial_t f + \mathbf{v}_3 \partial_3 f = -\partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3^2} \delta_{i3} f - \frac{1}{2} \overline{\omega} \left(C_1^L M_{ij}^L + C_1^S M_{ij}^S \right) v_j f \right] + \frac{C_0 \overline{\varepsilon}}{2} \partial_{v_j v_j}^2 f, \quad (2.36)$$

avec $C_1^L = 1$, $C_1^S = 1.8$, C_0 donné par l'équation (2.34), M_{ij}^L donné par l'équation (2.32) et M_{ij}^S donné par l'équation (2.33). La valeur de $\overline{\varepsilon}$ est obtenue à partir de l'équation (2.17c) avec $C_\varepsilon = 1$ et C_{ε_2} donnés par l'équation (2.35).

Afin de comparer ce modèle modifié à deux échelles avec la formulation GLM d'origine, nous intégrons l'équation (2.36) selon $\mathbf{v}$ après l'avoir multipliée par $v_i v_j$. Nous obtenons ainsi l'évolution du tenseur de contraintes de Reynolds $\overline{R}_{ij}$ associé au GLM modifié :

$$\partial_t \overline{R}_{ij} + \partial_k \overline{u_k u_i u_j} = -2\overline{\varepsilon} \left(C_1^S b_{ij} - (C_1^S - 1) \mathbf{x}^L b_{ij}^L \right) - \frac{2}{3} \overline{\varepsilon} \delta_{ij}. \quad (2.37)$$

Par rapport à l'équation (2.18), nous voyons que, au lieu de laisser b_{33} tendre vers 0, le GLM modifié laisse b_{33} tendre vers une valeur qui est définie par les conditions initiales des grandes échelles. Cet aspect est mieux illustré lorsque l'on regarde l'équation réduite 0D du modèle proposé. Avec les mêmes hypothèses que celles utilisées pour dériver les équations (2.19) pour le modèle initial, on obtient :

$$d_t b_{ij}^G = -(C^S - 1) \overline{\omega}^G \left(b_{ij}^G - \mathbf{x}^L b_{ij}^L \right).$$

Ainsi, au lieu de laisser b_{ij}^G tendre vers 0, le GLM modifié prédit qu'il tend vers $\mathbf{x}^L b_{ij}^L$. On peut vérifier que $\mathbf{x}^L b_{33}^L = \frac{2}{3} \frac{s_0 + 3/2}{s_0 + 3 + 3(s_0 + 1)(s_0 + 2)a}$, qui est la valeur désirée prédite dans le chapitre 2. Le GLM modifié répond par conséquent à son objectif assigné de prédire correctement l'anisotropie d'une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov. En ce qui concerne le taux de croissance de la zone de mélange, la formule (2.21) s'applique toujours au GLM modifié. Par conséquent, avec C_{ε_2} défini par l'équation (2.35), le GLM modifié prédit la valeur correcte de Θ .

2.5 Transport par la pression

La deuxième faiblesse du GLM que nous avons identifié concerne le fait qu'il ne tient pas compte des effets de la corrélation vitesse-pression $\overline{u'_i p'}$ sur le transport de l'énergie cinétique. Plus précisément, parmi les différentes variantes du GLM qui ont été proposées dans la littérature, seule la réf. [160] propose une fermeture pour ce terme. Mais même cette fermeture n'est pas entièrement satisfaisante puisqu'elle n'est pas conservatrice.

En revanche, $\overline{u'_i p'}$ est pris en compte dans d'autres types de modèles et en particulier

dans les modèles aux contraintes de Reynolds (RSM) qui sont profondément connectés aux fermetures PDF [122]. Par conséquent, l'idée que nous développons dans cette section est la suivante. Premièrement, nous cherchons à identifier comment les formulations RSM gère le terme $\overline{u'_i p'}$. Ensuite, nous proposons une méthode simple pour intégrer certaines fermetures RSM existantes de $\overline{u'_i p'}$ dans le modèle PDF de Langevin (2.36).

2.5.1 Quelques précisions sur le transport turbulent dans les modèles RSM

Dans l'évolution du tenseur des contraintes de Reynolds, le transport turbulent résulte de la corrélation vitesse/gradient de pression :

$$\Pi_{ij} = - \left[\overline{u_i \partial_j p'} + \overline{u_j \partial_i p'} \right] .$$

Cette corrélation peut être divisée en un terme de transport par la pression T_{ij}^p et un terme de redistribution de trace nulle ϕ_{ij} représentant le transfert d'énergie entre les composantes :

$$\Pi_{ij} = T_{ij}^p + \phi_{ij} \quad \text{avec} \quad \phi_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad T_{ii}^p = \partial_i \overline{u_i p'} .$$

Comme indiqué par [101] et [103], cette décomposition n'est pas unique. La décomposition la plus fréquemment utilisée est

$$\phi_{ij} = \overline{p' (\partial_j u_i + \partial_i u_j)} \quad \text{et} \quad T_{ij}^p = -\partial_k \left(\overline{u_i p'} \delta_{jk} + \overline{u_j p'} \delta_{ik} \right) . \quad (2.38a)$$

Une autre proposée dans [101] est :

$$\phi_{ij}^* = \left[\Pi_{ij} + \frac{2}{3} \partial_k \overline{u_k p'} \delta_{ij} \right] \quad \text{et} \quad T_{ij}^{p*} = -\frac{2}{3} \partial_k \overline{u_k p'} \delta_{ij} . \quad (2.38b)$$

Enfin, dans [103], la suivante était suggérée :

$$\phi_{ij}^\dagger = \left[\Pi_{ij} + \frac{R_{ij}}{\bar{k}} \partial_k \overline{u_k p'} \right] \quad \text{et} \quad T_{ij}^{p\dagger} = -\frac{R_{ij}}{\bar{k}} \partial_k \overline{u_k p'} \quad (2.38c)$$

En turbulence homogène, toutes les décompositions sont équivalentes : le terme de transport par la pression disparaît et il reste $\Pi_{ij} = \phi_{ij} = \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^\dagger$.

Cette équivalence conduit à un problème important. En effet, toutes les fermetures pour Π_{ij} sont dérivées pour le cas de la turbulence homogène et peuvent également être considérées comme des fermetures pour ϕ_{ij} , ϕ_{ij}^* ou $\phi_{ij}^\dagger$. Pour les écoulements inhomogènes, cette ambiguïté doit être résolue. Cependant, il n'y a pas d'argument théorique clair qui permettrait de distinguer lequel de ϕ_{ij} , ϕ_{ij}^* ou $\phi_{ij}^\dagger$ est fermé. Certains raisonnements ont été

proposés par [57], [16] ou [78], chacun favorisant l'une des trois différentes interprétations possibles. Mais ils sont quelque peu subjectifs et ne peuvent pas être reçus comme définitifs.

Face à cette confusion, nous adoptons un point de vue pragmatique. Parmi les trois décompositions listées, seule celle proposée par [103] peut être facilement traduite en termes de modèle GLM. [160] a déjà noté la difficulté d'utiliser la première décomposition dans le GLM. Des arguments similaires s'appliquent également à la deuxième décomposition. Nous notons que la décomposition de [103] est aussi celle retenue par [145] et [26], aussi pour des raisons pratiques.

2.5.2 Expression du modèle PDF de transport par la pression

Avec la décomposition (2.38c), il est facile d'adapter le GLM sous sa forme originale ou modifiée (équations (2.17) et (2.36)). En effet, il suffit d'ajouter un terme au GLM pour que l'évolution correspondante de ses contraintes de Reynolds prenne en compte la présence de $T_{ij}^{p\ddagger}$. À partir de l'équation (2.36), ceci peut être fait de la façon suivante :

$$\partial_t f + v_3 \partial_3 f = -\partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3^2} \delta_{i3} f - \frac{1}{2} \overline{\omega} \left(C_1^L M_{ij}^L + C_1^S M_{ij}^S \right) v_j f - \frac{\Omega_P}{2} v_i \right] + \frac{C_0 \overline{\varepsilon}}{2} \partial_{v_j v_j}^2 f \quad , \quad (2.39)$$

avec $\Omega_P = \frac{1}{k} \partial_k \overline{u_k p'}$.

Le terme additionnel est celui proportionnel à la fréquence Ω_P . La valeur de Ω_P dépend du gradient de $\overline{u_k p'}$ et peut être positive ou négative. Afin d'évaluer cette fréquence, nous devons fournir une fermeture pour $\overline{u_k p'}$.

Dans les approches RSM, plusieurs fermetures ont été proposées pour $\overline{u_k p'}$ [102, 167, 145, 158]. La plupart de ces fermetures diffèrent dans la façon dont elles traitent la partie rapide du champ de pression, c'est-à-dire la partie générée par les distorsions de l'écoulement moyen. En turbulence de Richtmyer-Meshkov, il n'y a pas de distorsion et la plupart de ces modèles reviennent à celui initialement proposé par Lumley [102], à savoir :

$$\text{Lumley : } \overline{u_i p'} = -\frac{2}{5} \overline{u_i k} \quad (2.40)$$

Bien que cela ne soit pas montré ici, cette formule se révèle être une prédiction précise pour le flux de pression en turbulence de Richtmyer-Meshkov.

2.6 Validation

Afin de valider le modèle de Langevin à deux échelles déduit dans les sections précédentes, nous le comparons à plusieurs simulations aux grandes échelles (LES) de zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov. Le modèle de Langevin lui-même (équation (2.39)) est résolu numériquement en utilisant la méthode de Monte Carlo lagrangienne

(LMC) décrite dans le chapitre 4. Les LES, les simulations LMC et leurs comparaisons sont détaillées dans le reste de cette section.

2.6.1 Description des simulations aux grandes échelles

Pour nos besoins de validation, nous considérons les mêmes LES de turbulence de Richtmyer-Meshkov que celles utilisées en chapitre 2. Par souci d'exhaustivité, les détails de ces simulations sont répétées ci-après. L'exposant infrarouge s_0 varie de 1 à 4. Plus précisément, 4 simulations sont effectuées avec les valeurs suivantes de s_0 :

$$\text{Valeurs de } s_0 : \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 4$$

Les différentes simulations que l'on effectue se déroulent de la façon suivante : Après un transitoire court, incluant une phase linéaire, les simulations approchent un état où la longueur de la zone de mélange $L(t)$ et les différentes corrélations de second ordre de la vitesse et de la concentration en un point obéissent à des lois de puissance approximatives. Cette évolution est indicative d'un régime auto-similaire et est atteinte approximativement au même temps non-dimensionnel pour toutes les simulations, c'est-à-dire pour $t \geq t_0$ avec $t_0 \approx 3t_{ref}$ avec t_{ref} défini dans le chapitre 2 en section 1.7.2.

2.6.2 Description des simulations du modèle PDF

La même configuration que celle décrite dans la section précédente est également simulée à l'aide du modèle PDF Langevin à deux échelles proposé dans cet ouvrage. Pour ce faire, nous utilisons une méthode de Monte Carlo lagrangienne (LMC) pour résoudre l'équation (2.39). Cette méthode est précise d'ordre 2 en temps et en espace, comme montré dans le chapitre 4. Les simulations LMC rapportées ci-après sont réalisées en suivant les évolutions stochastiques de $N_p = 10^5$ particules lagrangiennes par maille, sur une grille de $N_x = 512$ mailles discrétisant le même domaine que les LES.

Les simulations LMC sont initialisées à $t \approx t_0$, c'est-à-dire lorsque l'écoulement devient auto-similaire. À cet instant, nous extrayons, à partir des simulations LES, des plans perpendiculaires à $\mathbf{x}_3$ et situés aux positions des centres des mailles de la grille de Monte Carlo. Ensuite, nous attribuons à chaque particule lagrangienne dans une cellule donnée un champ de vitesse échantillonné à partir des 1024×1024 points du plan extrait correspondant. Cela garantit que la PDF en un point du champ de vitesse au moment initial converge vers la PDF issue de la simulation LES lorsque N_p augmente.

En outre, pour initialiser les simulations LMC, nous devons également spécifier une valeur pour la dissipation moyenne $\bar{\varepsilon}$. Puisque nous utilisons des LES implicites, nous n'avons pas accès à une valeur explicite de cette quantité. Cependant, nous pouvons déterminer la valeur globale intégrée de la dissipation. En effet, à partir de l'équation

(2.22), nous avons :

$$\partial_t \int \bar{k} dx_3 = - \int \bar{\varepsilon} dx_3 .$$

Connaissant l'évolution temporelle de $\int \bar{k} dx_3$, nous pouvons calculer sa dérivée et estimer $\int \bar{\varepsilon} dx_3$. Pour obtenir une valeur locale de $\bar{\varepsilon}$, on suppose alors que $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{k}$ partagent le même profil spatial. Avec cette hypothèse, nous pouvons initialiser $\bar{\varepsilon}$ comme suit :

$$\text{À } t = t_0 \quad , \quad \bar{\varepsilon}(x_3) = \frac{\int \bar{\varepsilon} dx_3}{\int \bar{k} dx_3} \bar{k}(x_3) .$$

Ceci termine la procédure d'initialisation des simulations LMC.

2.6.3 Évolutions auto-similaires

L'équation (2.39) du modèle PDF de Langevin à deux échelles a été conçue dans le but explicite de reproduire les évolutions auto-similaires de la zone de mélange, de l'énergie cinétique et de l'anisotropie des contraintes de Reynolds en turbulence Richtmyer-Meshkov. Pour vérifier si le premier de ces objectifs est atteint, nous introduisons la demi-largeur de la zone de mélange :

$$L_k = x_{1/2}^+ - x_{1/2}^-$$

avec $x_{1/2}^\pm$ tel que $\bar{k}(x_{1/2}^\pm) = \max \bar{k} / 2$ et $x_{1/2}^+ > 0$, $x_{1/2}^- < 0$.

La figure 2.1 montre l'évolution de L_k pour différentes valeurs de s_0 . On peut voir que le modèle PDF de Langevin à deux échelles donne une évolution de L_k proche de celle obtenue avec les LES. Les plus grandes différences sont observées pour le cas $s_0 = 1$. Les évolutions issues de la LES et du modèle de Langevin restent proches de la loi de puissance prédite $L_k \propto t^\Theta$ avec $\Theta = 2/(s_0 + 4)$.

Des observations similaires sont faites pour la décroissance de l'énergie cinétique, donnée par l'évolution de $\max(\bar{k})$. Le modèle de Langevin à deux échelles suit de près les simulations LES et toutes deux évoluent approximativement comme la loi de puissance attendue $\max(\bar{k}) \propto t^{-2(1-\Theta)}$.

Enfin, des différences plus importantes sont observées pour l'anisotropie globale b_{33}^G telle que définie par l'équation (2.3), surtout pour $s_0 = 1$. Pourtant, le modèle de Langevin à deux échelles retrouve la tendance correcte d'augmentation de l'anisotropie quand s_0 décroît et donne des valeurs qui sont globalement similaires à celles des simulations LES.

Afin d'obtenir une comparaison plus synthétique des propriétés auto-similaires discutées ci-dessus, nous mesurons l'exposant de croissance Θ en effectuant un ajustement par la méthode des moindres carrés d'une loi de puissance sur l'évolution de L_k , à partir de $t \geq t_0$. La valeur de l'exposant de loi de puissance ajusté est affichée pour la LES et le modèle de Langevin à deux échelles dans la figure 2.4(a) en fonction de s_0 . Elle est également

comparée à la prédiction théorique de l'équation (2.7). Un bon accord est observé entre les différents résultats de simulation et la valeur prédite. Notons que les points LES indiqués dans la figure 2.4(a) sont différents de ceux affichés dans le chapitre 2. En effet, la définition de Θ utilisée dans le chapitre 2 est basée sur le profil de concentration moyen et non sur l'énergie cinétique. De même, la figure 2.4(b) montre la valeur de b_{33}^G à la fin des simulations pour la LES et le modèle de Langevin. On peut voir que le modèle de Langevin à deux échelles reproduit les variations de l'anisotropie en fonction de s_0 .

En outre, les figures 2.4(a) et 2.4(b) affichent les résultats obtenus à partir des simulations effectuées avec le modèle de Langevin simplifié standard (SLM). Nous rappelons que ce modèle est donné par l'équation (2.17) avec $G_{ij} = -C_1 \bar{\omega} \delta_{ij}$ ou de manière équivalente en fixant $C_1^L = 0$, $M_{ij}^S = \delta_{ij}$ et $\Omega_P = 0$ dans l'équation à deux échelles (2.39). Les valeurs des constantes du SLM sont fixées à $C_1 = 4.15$ et $C_{\varepsilon_2} = 1.92$, deux des valeurs les plus fréquemment utilisées pour ces coefficients. Les inconvénients du SLM mentionnés dans l'introduction peuvent être clairement observés sur ces figures. On peut voir que l'exposant de croissance Θ ne correspond pas à celui attendu et qu'un fort, presque complet, retour à l'anisotropie se produit. Le modèle Langevin à deux échelles proposé améliore ces deux aspects.

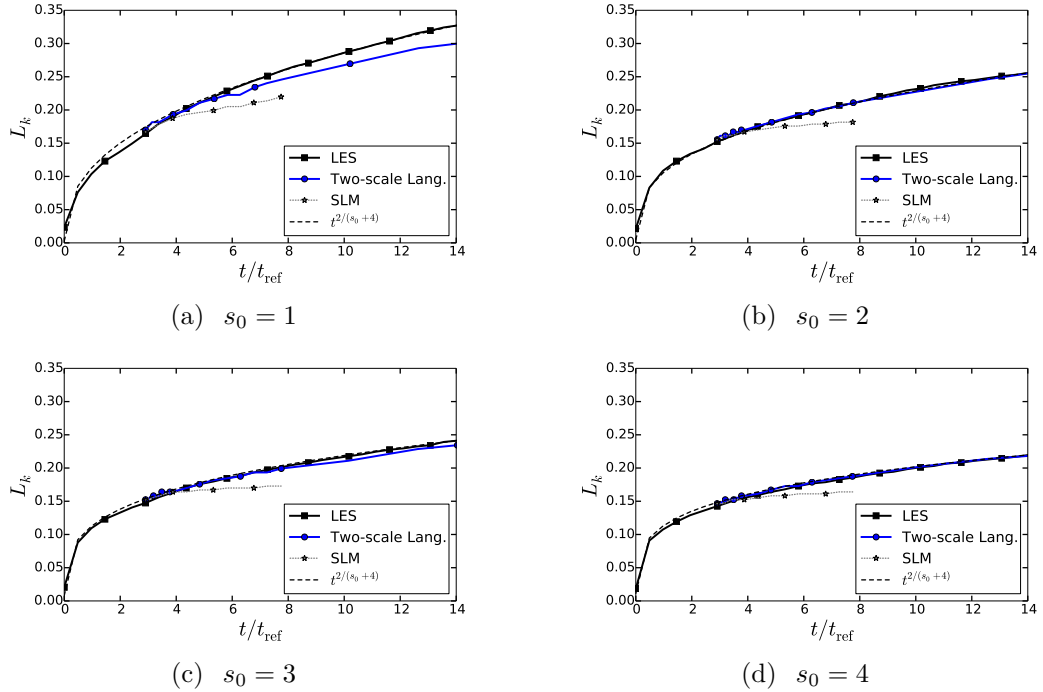


FIGURE 2.1 – Evolution de L_k

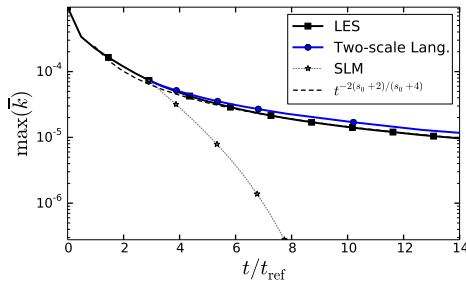
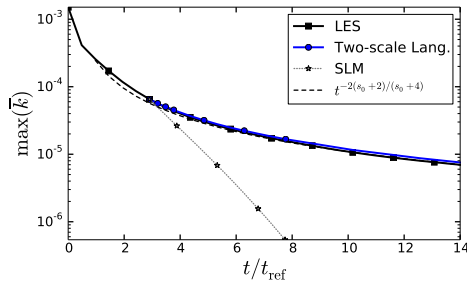
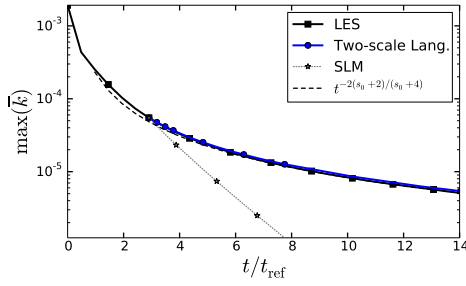
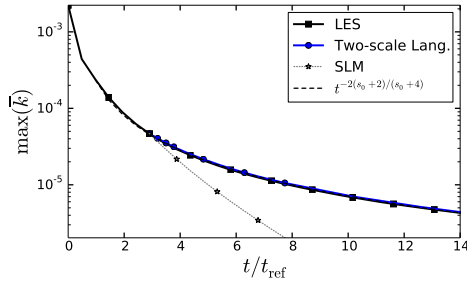
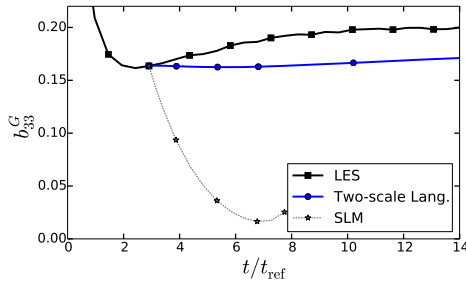
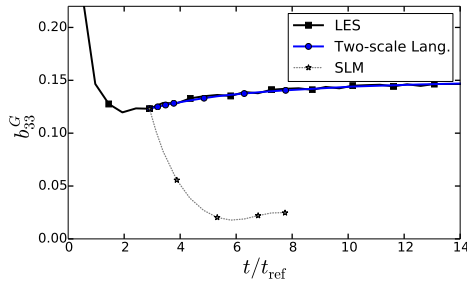
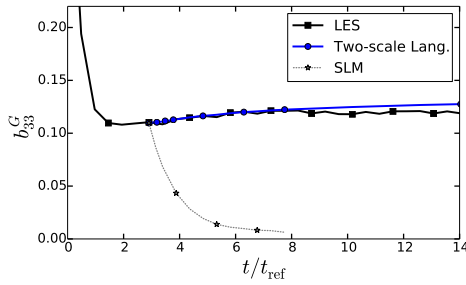
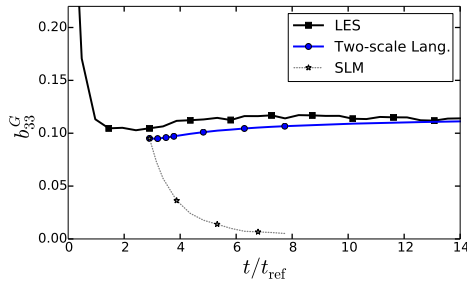
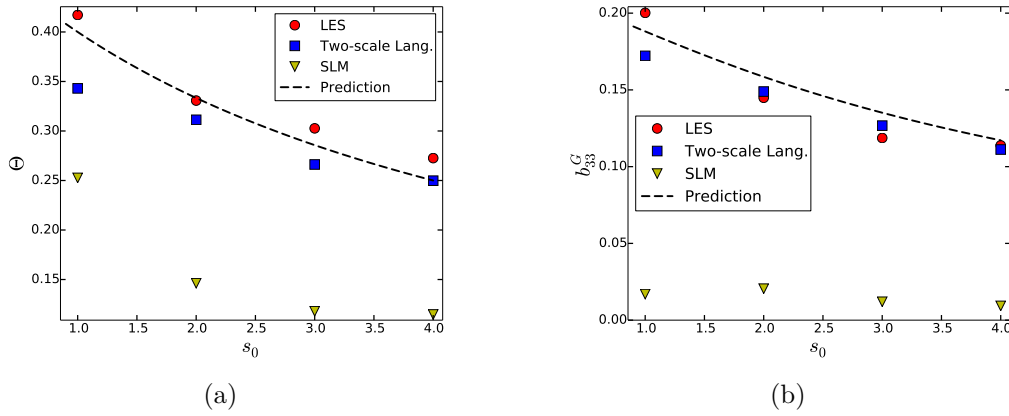
(a) $s_0 = 1$ (b) $s_0 = 2$ (c) $s_0 = 3$ (d) $s_0 = 4$ FIGURE 2.2 – Evolution de $\max(\bar{k})$ (a) $s_0 = 1$ (b) $s_0 = 2$ (c) $s_0 = 3$ (d) $s_0 = 4$

FIGURE 2.3 – Evolution de l'anisotropie

FIGURE 2.4 – Θ et b_{33}^G en fin de simulation, en fonction de s_0

2.6.4 Rôle du terme de transport par la pression

Une autre analyse entreprise dans ce travail est celle du rôle joué par le transport par la pression turbulente. Pour rendre compte de cet effet, nous avons ajouté dans notre modèle (équation (2.39)) un terme proportionnel à la fréquence de pression $\Omega_P = \partial_k \overline{u_k p'} / \overline{k}$. L'effet de ce terme supplémentaire est évalué ci-après en comparant deux ensembles de simulations LMC. Le premier est effectué en incluant le terme de pression et le second en le supprimant, c'est-à-dire en fixant $\Omega_P = 0$.

L'observation principale est que la largeur de la zone de mélange obtenue sans tenir compte du terme de pression est systématiquement plus grande que celle obtenue avec celui-ci. De plus, alors que la largeur prédite par le modèle complet reste proche des résultats LES, ce n'est plus le cas lorsque $\Omega_P = 0$. Ces aspects sont illustrés dans la figure 2.5(a) pour la simulation avec $s_0 = 2$. L'origine de cette propriété peut être attribuée aux différences dans le flux d'énergie cinétique des deux modèles. Quand Ω_P est pris en compte, le flux est égal à $\overline{u_3 k} + \overline{u_3 p'} \approx \frac{3}{5} \overline{u_3 k}$ alors qu'il est égal à $\overline{u_3 k}$ dans le cas contraire. Comme $\overline{u_3 k}$ est initialement le même pour les deux simulations, le flux d'énergie est plus élevé pour le cas avec $\Omega_P = 0$ et la largeur de la zone de mélange augmente plus rapidement, au moins initialement. En conséquence, la diminution de l'énergie cinétique maximale est également plus rapide.

Un autre effet systématique concerne l'anisotropie. Dans la figure 2.5(b), on peut voir que le modèle avec $\Omega_P = 0$ surestime légèrement b_{33}^G par rapport au modèle complet. Ce résultat est montré pour la simulation avec $s_0 = 2$ mais il s'applique aussi bien aux autres. Cette différence peut être attribuée au fait que le terme Ω_P s'apparente à un terme supplémentaire de retour à l'isotropie. De ce fait, sa présence conduit à une diminution de l'anisotropie.

Dans l'ensemble, la prise en compte du terme de pression apparaît fondamentale pour

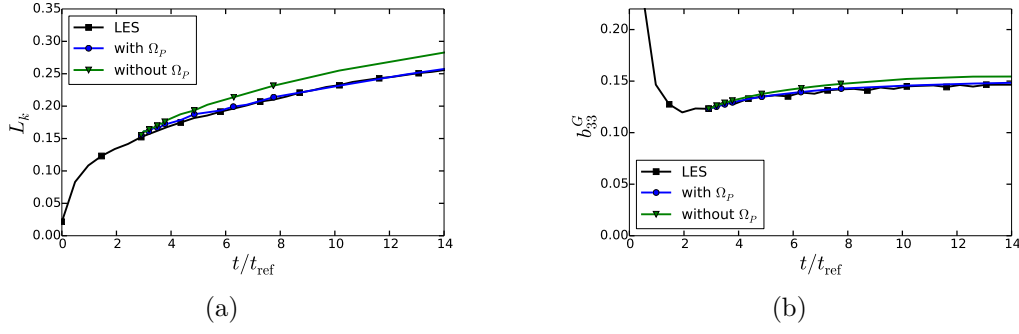


FIGURE 2.5 – Influence du terme de transport par la pression sur les évolutions de L_k et b_{33}^G pour la simulation avec $s_0 = 2$.

assurer la cohérence entre les résultats issus de la LES et ceux issus du modèle de Langevin. Sans cela, des différences de l'ordre de 10% sont observées sur la largeur de la zone de mélange et l'énergie cinétique maximale.

2.6.5 Profils spatiaux

Le modèle de Langevin à deux échelles a été conçu pour reproduire les évolutions auto-similaires $0D$ de la largeur de la zone de mélange, de l'énergie cinétique et de l'anisotropie. Comme indiqué dans les sous-sections précédentes, le modèle remplit correctement cet objectif. La question que nous aimerions examiner ici est de savoir si le modèle peut également prédire des profils spatiaux corrects, et pas seulement certaines de leurs intégrales. La figure 2.6 affiche les profils spatiaux de $\overline{u_3'^2}$ et $\overline{u_1'^2}$ à la fin de la simulation avec $s_0 = 2$. On peut voir que le modèle de Langevin à deux échelles donne des profils spatiaux en bon accord avec les LES. En particulier, le modèle prédit des profils spatiaux qui ne sont pas paraboliques, comme le ferait un modèle RSM, mais qui sont plus étroits au centre et affichent des queues sur les bords. Des comparaisons similaires s'appliquent également aux autres simulations avec des valeurs différentes de s_0 .

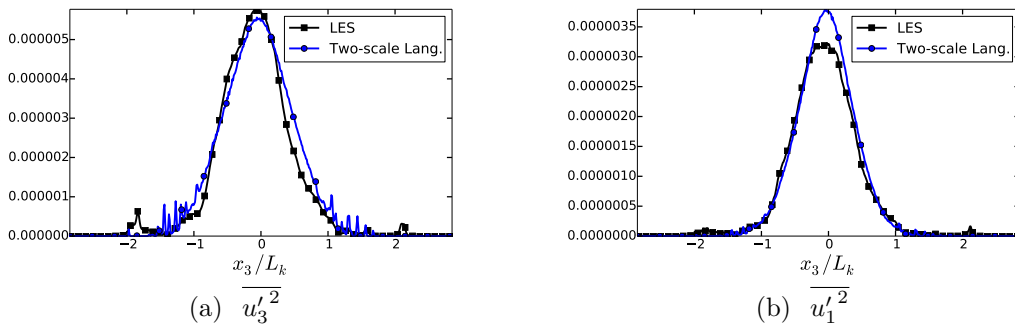


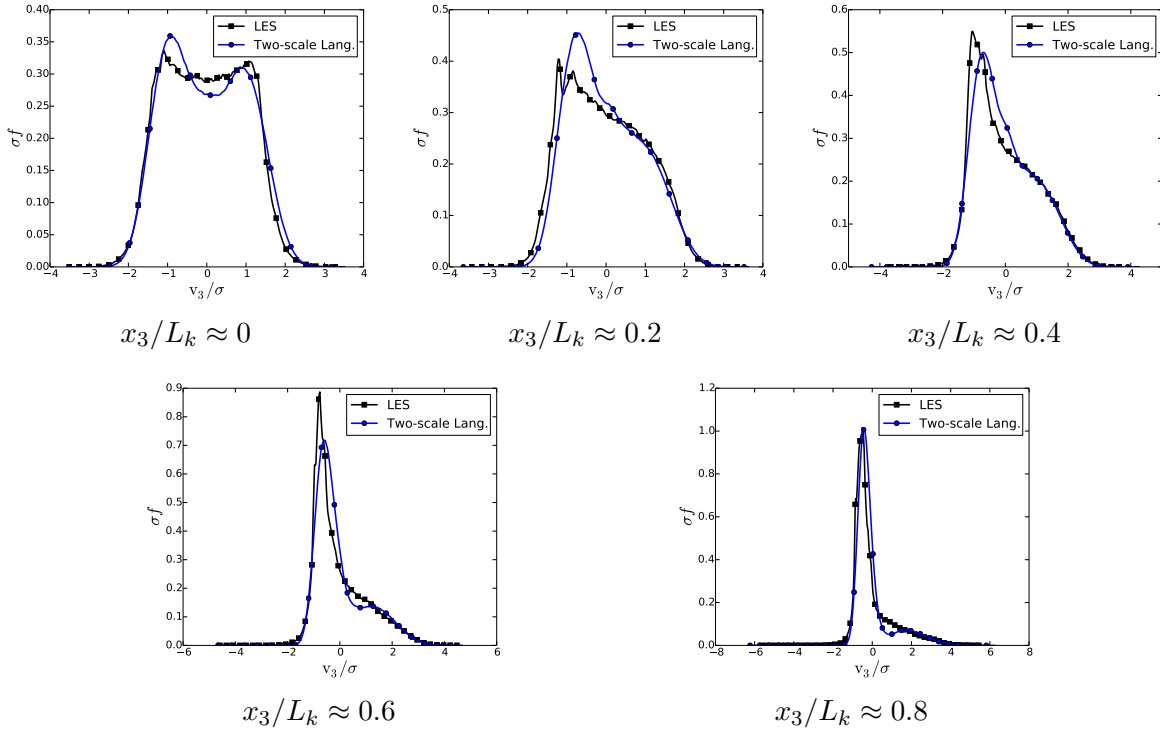
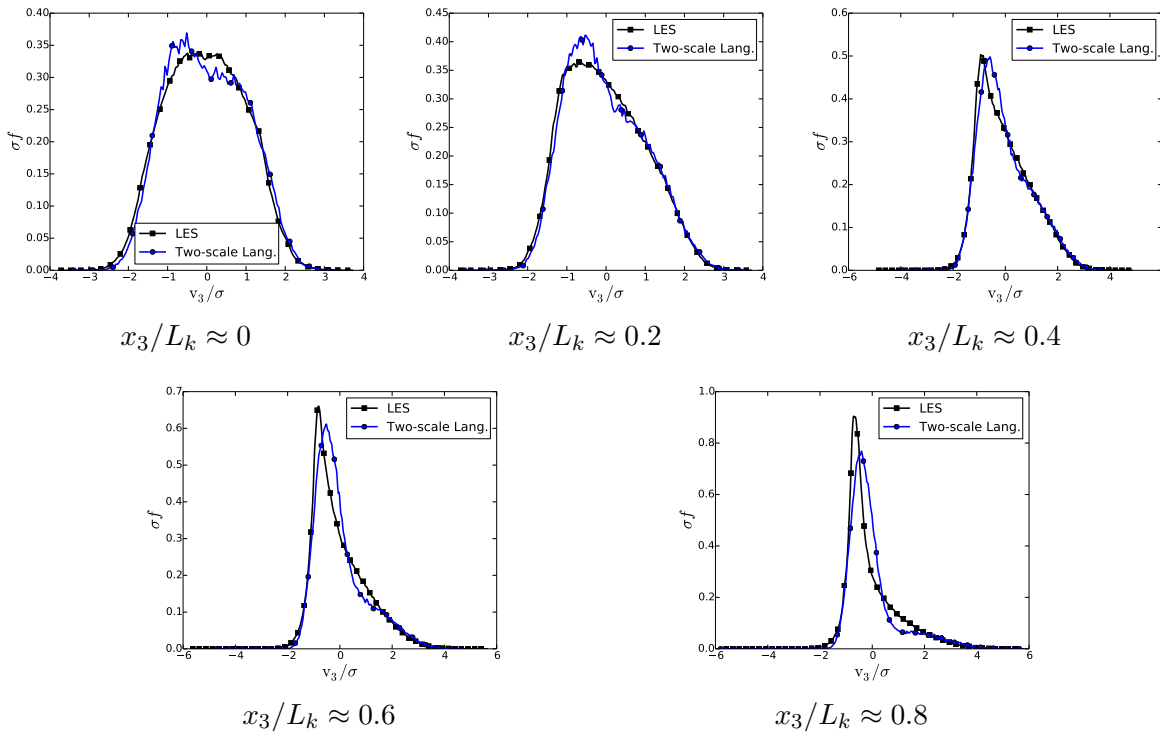
FIGURE 2.6 – Profil de $\overline{u_3'^2}$ en fin de simulation pour la simulation avec $s_0 = 2$.

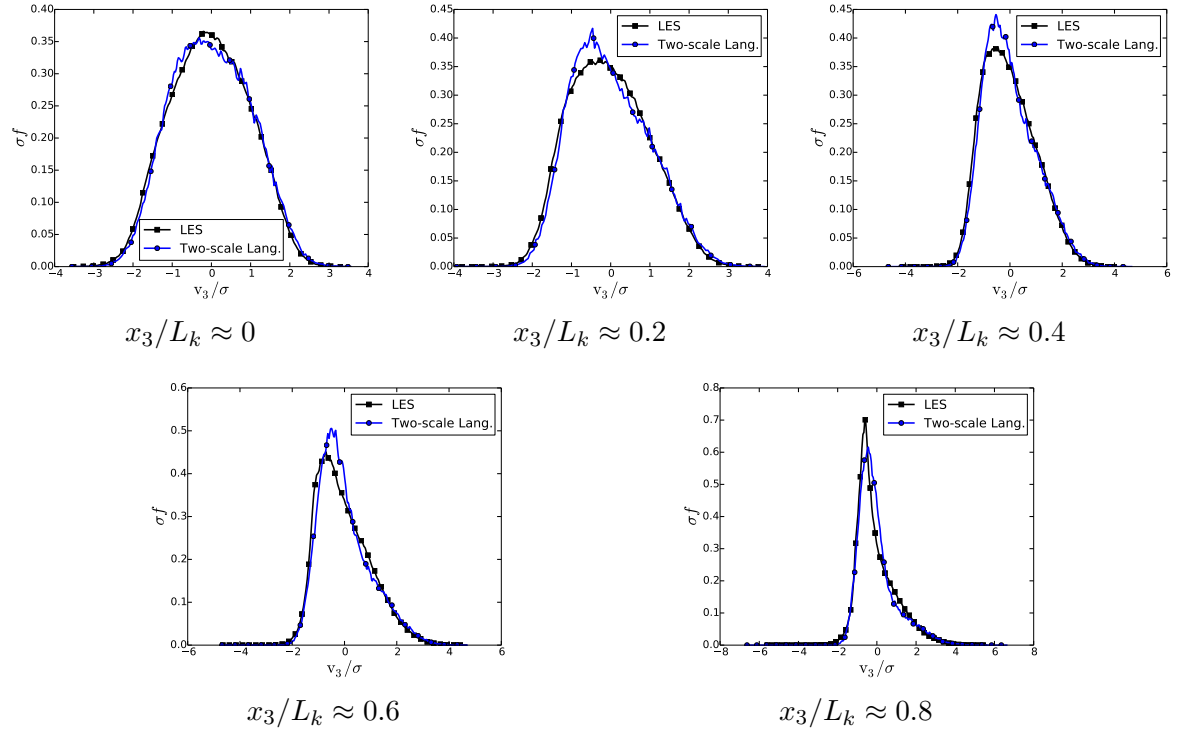
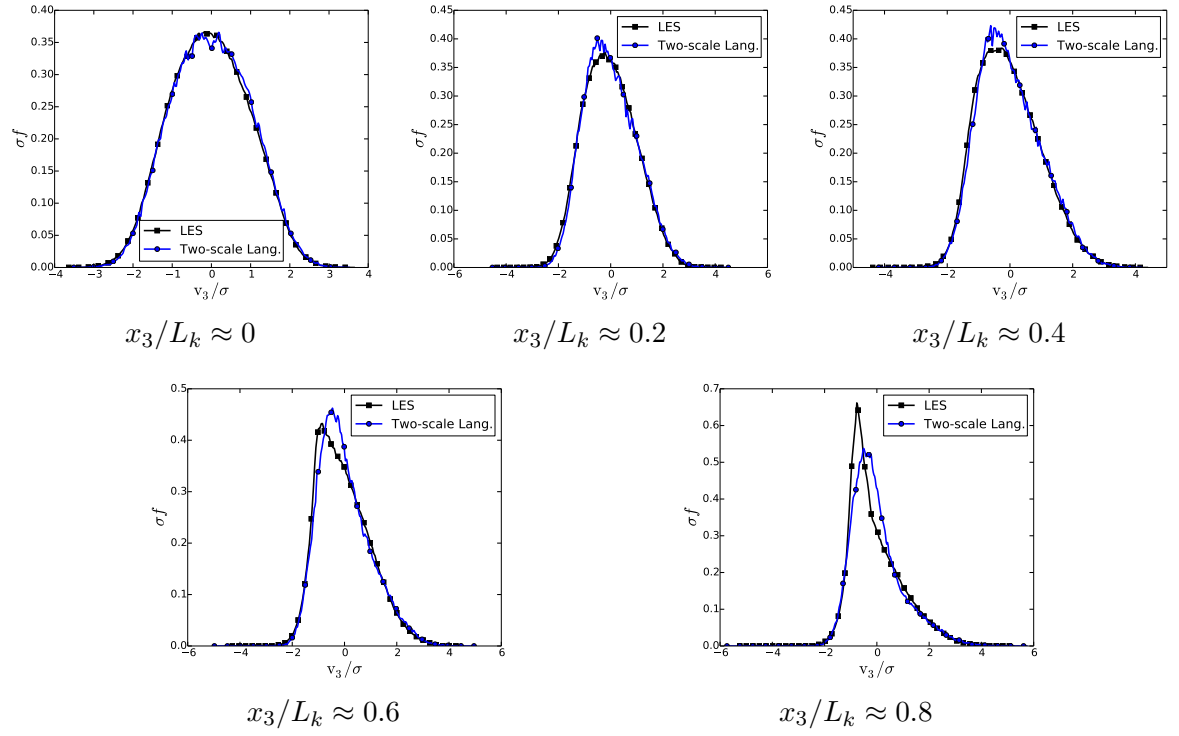
2.6.6 PDF de la vitesse longitudinale

Pour conclure la validation du modèle de Langevin à deux échelles, nous étudions les formes de la PDF de la vitesse longitudinale u_3 . Dans l'ensemble, un bon accord est observé entre la LES et le modèle de Langevin à deux échelles, comme le montrent les figures 2.7 - 2.10. En particulier, l'émergence d'un pic aux vitesses négatives, sa position et son amplitude, sont correctement reproduites par le modèle. Cette propriété de la PDF a été analysée dans [36]. Elle est attribuée aux effets de l'inhomogénéité et plus particulièrement au gradient de l'énergie cinétique. Ces effets sont discutés plus longuement dans le chapitre 3.

Qui plus est, le modèle capture également correctement la dépendance de la forme de la PDF aux conditions initiales. Cette dépendance est la plus visible près du centre de la zone de mélange. Pour $s_0 = 4$, la PDF à $x_3/L_k \approx 0$ est proche d'une gaussienne. Lorsque s_0 diminue, la forme de la PDF devient plus carrée (voir figure 2.7) jusqu'à ce que deux petits pics apparaissent près de $v_3 = 0$, pour $s_0 = 1$. À d'autres positions, la PDF devient plus asymétrique quand s_0 diminue de 4 à 1.

Au-delà de la seule validation du modèle Langevin à deux échelles, nous aimerions souligner que l'évolution de la PDF avec s_0 est, en soi, un résultat significatif. En effet, la permanence des grandes échelles prédit une dépendance aux conditions initiales pour les corrélations de second ordre mais ne dit rien sur les corrélations d'ordre supérieur. Les figures 2.7 - 2.10 montrent que cette dépendance s'étend à l'ensemble de la PDF et de ses statistiques en un point associées.

FIGURE 2.7 – PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 1$.FIGURE 2.8 – PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 2$.

FIGURE 2.9 – PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 3$.FIGURE 2.10 – PDF de la vitesse u_3 à différentes positions en fin de simulation pour $s_0 = 4$.

2.7 Conclusion

Malgré leur apparente simplicité, les zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov sont des écoulements difficiles à modéliser. La raison principale est qu'ils obéissent au principe de permanence des grandes échelles, de sorte que les conditions initiales ont une influence durable sur leur évolution.

Le but principal de ce travail était de rendre compte de cette dépendance aux conditions initiales dans un modèle PDF de Langevin. Pour ce faire, nous avons considéré la méthodologie à deux échelles habituellement envisagée pour les modèles aux tensions de Reynolds [132] et l'avons adaptée au modèle de Langevin simplifié (SLM). En conséquence, nous avons dérivé un modèle de Langevin à deux échelles. Sa partie à grande échelle représente la préservation des conditions initiales, tandis que sa partie à petite échelle est similaire au SLM habituel.

En plus de cet aspect, nous avons également discuté du rôle joué par le terme de transport par la pression. Ce dernier est presque systématiquement négligé dans les modèles Langevin, alors qu'il peut jouer un rôle significatif dans une zone de mélange. Une fermeture pour ce terme a donc été proposée.

Le modèle Langevin à deux échelles, avec transport par la pression, a été validé en le comparant à plusieurs LES de zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov. Dans ces simulations, les conditions initiales ont été modifiées afin d'obtenir différents états auto-similaires. Dans l'ensemble, le modèle proposé donne des résultats qui sont en bon accord avec les LES. La largeur de la zone de mélange, les niveaux d'énergie cinétique et l'anisotropie sont correctement reproduits. Par ailleurs, les formes de la PDF modélisée sont également cohérentes avec celles extraites de la LES. Sur tous ces aspects, le modèle proposé offre une amélioration significative par rapport au SLM standard.

En perspective, on peut noter que la formulation précise du modèle proposé est étroitement liée aux propriétés des zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov. Cependant, la méthodologie globale qui a permis de dériver ce modèle peut être utilisée dans d'autres contextes. En outre, comme pour les modèles aux tensions de Reynolds [132], des formulations à deux échelles pour une gamme plus large d'applications peuvent aussi, en principe, être adaptées à partir de la méthodologie actuelle.

Maintenant que nous disposons d'un modèle PDF fiable pour l'étude d'une ZMT issue de l'IRM, nous allons pouvoir nous pencher sur la problématique clé de cette thèse : l'analyse du transport turbulent, qui est l'un des mécanismes principaux dans le développement d'une telle ZMT. Nous étudierons donc dans le chapitre suivant la façon dont ce transport est pris en charge dans le modèle de Langevin simplifié (SLM), puis plus particulièrement dans le modèle de Langevin multi-échelles que nous venons d'établir.

Chapitre 3

Analyse asymptotique du modèle PDF de Langevin - Analyse du transport turbulent

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous venons de dériver un modèle de Langevin à deux échelles, adapté aux écoulements de Richtmyer-Meshkov. Ce modèle a ensuite été validé à l'aide de simulations aux grandes échelles (LES). Un excellent accord a été obtenu entre les deux approches, notamment sur les formes des PDF de vitesse.

Dans la mesure où le modèle PDF proposé restitue correctement les écoulements de Richtmyer-Meshkov, son analyse devient pertinente pour déterminer l'existence ou non d'un régime de diffusion pour le transport turbulent dans ce type d'écoulement. Pour cela, nous allons identifier un régime de diffusion pour le modèle de Langevin proposé. Puis, nous examinerons dans quelle mesure il s'applique aux zones de mélange de Richtmyer-Meshkov.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps, nous nous intéressons au modèle de Langevin simplifié (SLM) en supposant une turbulence isotrope. Dans ce cadre idéalisé, nous introduisons pour ce modèle la notion de limite quasi-homogène. Nous montrons que dans cette limite particulière, le modèle SLM admet un développement asymptotique de type diffusif. Ce développement en polynôme d'Hermite fixe la forme de la PDF en fonction de l'inhomogénéité de la turbulence et de la constante C_1 du modèle. L'influence de cette constante est discutée, notamment son impact sur les corrélations d'ordre 3 qui conditionnent le transport turbulent.

Dans un second temps, nous appliquons le même raisonnement au modèle de Langevin à deux échelles. Une limite asymptotique diffusive est obtenue dans la même limite quasi-homogène. Un coefficient de diffusion effectif pour le transport turbulent en est déduit. Nous vérifions alors si la limite s'applique aux simulations LES de zones de mélange

de Richtmyer-Meshkov présentées dans le chapitre 1. Nous examinons en particulier la pertinence du coefficient de diffusion analytique pour ces cas.

3.2 Analyse du modèle de Langevin simplifié

Nous reprenons et complétons dans cette section l'article [36] publié suite aux travaux menés en 2013 dans le cadre de l'école d'été du CEMRACS.

3.2.1 Modèle SLM

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le modèle SLM appliqué à une zone de mélange est défini par l'équation (2.17), avec $G_{ij} = -\frac{C_1}{2}\bar{\omega}\delta_{ij}$ et $C_0 = 2/3(C_1 - 1)$. Pour simplifier la présentation de l'analyse asymptotique, nous nous restreindrons ici à la PDF marginale de la vitesse v_3 :

$$f_3(v_3, \mathbf{x}, t) = \iint f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) dv_1 dv_2 .$$

En intégrant l'équation d'évolution de f sur v_1 et v_2 , nous obtenons que f_3 évolue selon :

$$\partial_t f_3 + v_3 \partial_3 f_3 = -\partial_{v_3} \left[\partial_3 \bar{u}_3^2 f_3 - \frac{1}{2} C_1 \bar{\omega} v_3 f_3 \right] + \frac{C_0 \bar{\varepsilon}}{2} \partial_{v_3}^2 f_3 , \quad (3.1a)$$

Cette équation ne peut, en théorie, être résolue sans information sur la PDF complète. On ne peut en effet calculer $\bar{\omega}$ et $\bar{\varepsilon}$ sans connaître les corrélations triples de vitesse et l'anisotropie du tenseur de Reynolds. Pour pallier ces manques, nous supposons arbitrairement que les tenseurs $\overline{u_i u_j}$ et $\overline{u_3 u_i u_j}$ sont isotropes. De la sorte, nous pouvons écrire l'équation suivante pour $\bar{\varepsilon}$, à partir de l'équation (2.17c) :

$$\partial_t \bar{\varepsilon} + \partial_3 \left(C_\varepsilon^* \bar{\omega} \bar{u}_3^3 \right) = -C_{\varepsilon 2} \bar{\omega} \bar{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \bar{\omega} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{u}_3^2} \quad \text{et} \quad C_\varepsilon^* = \frac{3}{2} C_\varepsilon . \quad (3.1b)$$

Ainsi, le système (3.1) devient indépendant des statistiques de v_1 et v_2 . Notons que les approximations d'isotropie faites ici ont pour seul but de formuler un modèle simplifié et ne seront utilisées que dans cette section.

3.2.2 Limite quasi-homogène

Deux échelles principales caractérisent le champ turbulent pour une zone de mélange, l'échelle intégrale ℓ et l'échelle des gradients L . Elles sont définies respectivement par :

$$\ell = \frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad L = \left[\frac{1}{\bar{k}} \partial_3 \bar{k} \right]^{-1} .$$

L'échelle ℓ est représentative de la taille des tourbillons les plus énergétiques, tandis que L mesure l'inhomogénéité du champ turbulent.

Nous supposons à présent que l'écoulement est faiblement inhomogène ou encore quasi-homogène, c'est à dire que les tourbillons sont beaucoup plus petits que L :

$$\frac{\ell}{L} \leq \epsilon_a \ll 1 \quad ,$$

avec ϵ_a un petit paramètre constant. Cette hypothèse peut être insérée dans le système (3.1) en introduisant la coordonnée spatiale suivante :

$$z = \frac{x_3}{\epsilon_a} .$$

Avec cette définition, le système (3.1) devient :

$$\partial_t f_3 + \epsilon_a v_3 \partial_z f_3 = -\partial_{v_3} \left[\epsilon_a \partial_3 \overline{u_3^2} f_3 - \frac{1}{2} C_1 \overline{\omega} v_3 f_3 \right] + \frac{C_0 \overline{\epsilon}}{2} \partial_{v_3^2}^2 f_3 \quad , \quad (3.2a)$$

$$\partial_t \overline{\epsilon} + \epsilon_a \partial_z \left(C_\epsilon^* \overline{\omega} u_3^3 \right) = -C_{\epsilon_2} \overline{\omega} \overline{\epsilon} . \quad (3.2b)$$

avec ∂_z la dérivée par rapport à z .

3.2.3 Développement asymptotique

Nous procédons alors à un développement asymptotique du système (3.2). Nous cherchons f_3 et $\overline{\epsilon}$ sous la forme :

$$f_3 = f_3^{(0)} + \epsilon_a f_3^{(1)} + \epsilon_a^2 f_3^{(2)} + \dots \quad , \quad (3.3)$$

$$\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}^{(0)} + \epsilon_a \overline{\epsilon}^{(1)} + \epsilon_a^2 \overline{\epsilon}^{(2)} + \dots \quad , \quad (3.4)$$

où nous imposons, sans perte de généralité,

$$\int f^{(0)}(v; z, t) dv = 1 \quad ,$$

et

$$\text{pour } i \geq 1, \int f^{(i)}(v; z, t) dv = 0 .$$

L'ordre (0) de ce développement pour f obéit à une équation de Fokker-Planck :

$$\partial_t f_3^{(0)} = \partial_{v_3} \left[\frac{1}{2} C_1 \overline{\omega} v_3 f_3^{(0)} \right] + \frac{C_0 \overline{\epsilon}^{(0)}}{2} \partial_{v_3^2}^2 f_3^{(0)}$$

La solution aux temps longs pour $f^{(0)}$ est une Gaussienne :

$$f_3^{(0)}(v_3; z, t) = \frac{e^{-\frac{v_3^2}{2\sigma^2}}}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \overline{u_3^2}^{(0)}.$$

De plus, les ordres (0) de l'énergie cinétique et de sa dissipation évoluent selon :

$$\partial_t \overline{u_3^2}^{(0)} = -\frac{2}{3} \overline{\varepsilon}^{(0)} \quad , \quad \partial_t \overline{\varepsilon}^{(0)} = -\frac{2}{3} C_{\varepsilon_2} \frac{\overline{\varepsilon}^{(0)^2}}{\overline{u_3^2}^{(0)}}.$$

La dérivation de l'ordre (1) est détaillée dans [36]. Le résultat principal est que, aux temps longs, $f^{(1)}$ prend la forme suivante :

$$f_3^{(1)} = C_g \frac{\sigma}{\overline{\omega}} \frac{\partial_z \sigma^2}{\sigma^2} \frac{v_3}{\sigma} \left(3 - \frac{v_3^2}{\sigma^2} \right) f_3^{(0)} \quad \text{avec} \quad C_g = \frac{1}{3C_1 + 2C_{\varepsilon_2} - 6}. \quad (3.5)$$

L'ordre (1) ne contribue pas au tenseur de Reynolds :

$$\overline{u_3^2}^{(1)} = 0.$$

Par contre, il donne la principale contribution au moment d'ordre 3. La formule précédente implique que :

$$\overline{u_3^3}^{(1)} = -6C_g \frac{\sigma^2}{\overline{\omega}} \partial_z \sigma^2. \quad (3.6)$$

3.2.4 Résultat final

Nous rassemblons les ordres (0) et (1). De plus, nous retournons à l'utilisation de la variable d'espace x_3 . Nous obtenons alors que :

$$\text{Pour } \frac{\ell}{L} \ll 1, \quad f_3(v_3; x_3, t) = \frac{e^{-v_3^2/(2\overline{u_3^2})}}{\sqrt{2\pi\overline{u_3^2}}} \left(1 + C_g \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{u_3^2}\overline{\omega}}} \partial_3 \overline{u_3^2} \right) \frac{v_3}{\sqrt{\overline{u_3^2}}} \left(3 - \frac{v_3^2}{\overline{u_3^2}} \right) \right), \quad (3.7a)$$

où $\overline{u_3^2}$ est solution d'un système de type $\overline{k} - \overline{\varepsilon}$:

$$\text{Pour } \frac{\ell}{L} \ll 1, \quad \partial_t \overline{u_3^2} = \partial_3 \left(C_k \frac{\overline{u_3^2}}{\overline{\omega}} \partial_3 \overline{u_3^2} \right) - \frac{2}{3} \overline{\varepsilon}, \quad (3.7b)$$

$$\partial_t \overline{\varepsilon} = \partial_3 \left(C_\varepsilon^* C_k \frac{\overline{u_3^2}}{\overline{\omega}} \left(\partial_3 \overline{\varepsilon} - \overline{u_3^2} \partial_3 \overline{\omega} \right) \right) - C_{\varepsilon_2} \overline{\omega} \overline{\varepsilon}, \quad (3.7c)$$

avec :

$$C_k = 6C_g = \frac{6}{3C_1 + 2C_{\varepsilon_2} - 6}.$$

La solution (3.7) montre que f est une Gaussienne corrigée par un polynôme d'Hermite d'ordre 3. Le coefficient de ce polynôme est proportionnel au gradient de $\overline{u_3^2}$. Il s'en suit une approximation de type diffusive pour le transport de l'énergie turbulente comme indiqué dans l'équation (3.7b). Un point important est que le coefficient de diffusion effectif C_k est dépendant des constantes du modèle SLM. La présence du coefficient C_{ε_2} dans l'expression de C_k est liée à l'instationnarité de l'écoulement, i.e. à la décroissance de $\overline{u_3^2}$ et $\bar{\varepsilon}$. Celle de C_1 provient du rôle qu'elle joue dans le rappel de la PDF vers une Gaussienne. Plus C_1 est grand, plus vite la PDF tend vers une Gaussienne et moins la perturbation inhomogène et la diffusion qui lui est associée est importante.

3.2.5 Vérification

3.2.5.1 Simulations avec $C_1 = 4.15$

Afin de vérifier le développement asymptotique, nous résolvons les équations du modèle simplifié à l'aide du code Monte Carlo déjà décrit dans le chapitre précédent. Nous nous plaçons dans un domaine $[-6,6]$, discrétisé avec 256 mailles et nous utilisons $4 \cdot 10^5$ particules par maille. En conditions initiales, nous imposons une PDF gaussienne. Les profils de $\overline{u_3^2}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont paraboliques :

$$\overline{u_3^2}(x_3, t = 0) = \bar{k}_0 \left(1 - \left[\frac{x_3}{\Lambda_0}\right]^2\right) \quad , \quad \bar{\varepsilon}(x_3, t = 0) = \bar{\varepsilon}_0 \left(1 - \left[\frac{x_3}{\Lambda_0}\right]^2\right)$$

Les paramètres sont fixés à $\bar{k}_0 = 1$, $\bar{\varepsilon}_0 = 0.5418$ et $\Lambda_0 = 1$. La simulation est menée jusqu'au temps $t = 5.3$. Les constantes du modèle sont dans un premier temps fixées à $C_{\varepsilon_2} = 1.92$ et $C_1 = 4.15$.

Nous examinons alors la pertinence du développement asymptotique en calculant le paramètre asymptotique ℓ/L . Comme indiqué sur la figure 3.1, ce paramètre est petit devant 1 au centre de la zone de mélange et devient de l'ordre de 1 sur les bords. Par conséquent, l'analyse asymptotique est valide pour décrire l'intérieur de la zone de mélange, mais pas ses extrémités.

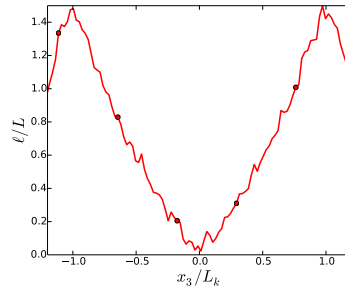


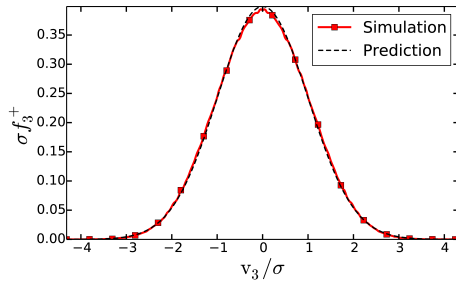
FIGURE 3.1 – Paramètre asymptotique ℓ/L au temps final de la simulation.

Nous comparons alors la prédiction de l'analyse sur la forme de la PDF aux résultats de simulations. Pour cela, nous séparons la PDF en ses parties paire et impaire :

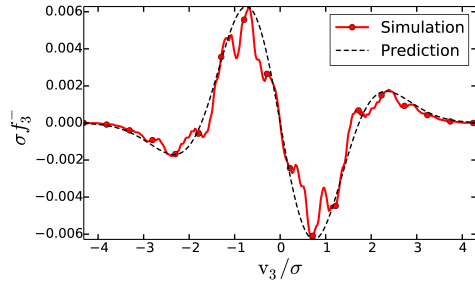
$$f_3^+(v_3) = \frac{f_3(v_3) + f_3(-v_3)}{2} \quad \text{et} \quad f_3^-(v_3) = \frac{f_3(v_3) - f_3(-v_3)}{2}$$

L'intérêt est que la correction diffusive à la forme de la PDF est le terme principal de la partie impaire. D'après la formule (3.7a), nous avons en effet :

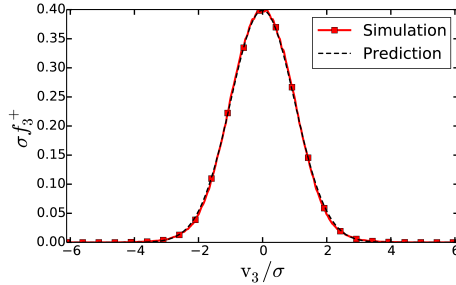
$$f_3^+(v_3) = \frac{e^{-v_3^2/(2\overline{u_3^2})}}{\sqrt{2\pi\overline{u_3^2}}} \quad \text{et} \quad f_3^-(v_3) = \frac{e^{-v_3^2/(2\overline{u_3^2})}}{\sqrt{2\pi\overline{u_3^2}}} C_g \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{u_3^2}\overline{\omega}}} \partial_3 \overline{u_3^2} \right) \frac{v_3}{\sqrt{\overline{u_3^2}}} \left(3 - \frac{v_3^2}{\overline{u_3^2}} \right)$$



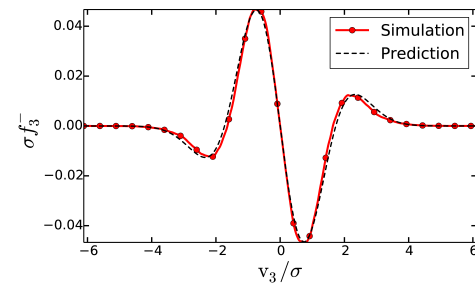
(a) partie paire $x_3/L_k = 0.1$



(b) partie impaire $x_3/L_k = 0.1$



(c) partie paire $x_3/L_k = 0.5$



(d) partie impaire $x_3/L_k = 0.5$

FIGURE 3.2 – Parties paire et impaire de la PDF f_3 au temps final de la simulation et à deux positions.

La figure 3.2 compare les expressions analytiques de f_3^+ et f_3^- à leurs valeurs obtenues dans la simulation Monte Carlo. On observe un bon accord entre les deux. Cet accord est observé non seulement au centre de la zone de mélange, mais également sur ses bords. Ceci suggère une validité du développement asymptotique plus large que celle donnée par le seul critère $\ell/L \ll 1$.

En accord avec ces résultats, les valeurs des corrélations triples de vitesse issues des simulations et de l'analyse asymptotique (équation (3.6)) sont également proches l'une de l'autre sur l'essentiel de la zone de mélange, comme indiqué sur la figure 3.3. Des disparités apparaissent sur les ailes, pour les raisons expliquées précédemment. La figure 3.3 valide

donc l'existence d'un régime de diffusion pour le transport de l'énergie turbulente au cœur de la zone de mélange.

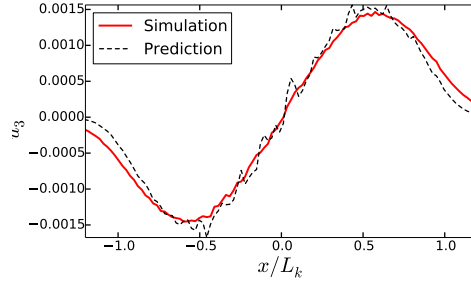


FIGURE 3.3 – Corrélation d'ordre 3 $\overline{u_3^3}$ au temps final de la simulation.

3.2.5.2 Simulations avec $C_1 \leq 4.15$

Les validations précédentes ont été réalisées pour une valeur du coefficient C_1 de 4.15, qui est l'une des valeurs les plus usuelles pour ce coefficient [119]. Cependant, dans la littérature, la valeur de C_1 varie amplement de $C_1 \approx 1.8$ à $C_1 \approx 10$. Les valeurs élevées de C_1 sont habituellement reliées à la constante de Kolmogorov [121], les plus faibles à des problématiques de retour à l'isotropie [86]. Comme expliqué dans le chapitre 2, ce sont ces valeurs faibles qui nous intéressent. Du point de vue de la modélisation, la caractérisation de l'anisotropie de l'écoulement est en effet plus importante qu'un lien présumé avec un spectre de Kolmogorov.

Dans l'équation (3.1), le coefficient C_1 contrôle non seulement le retour à l'isotropie, mais également la tendance de la PDF vers une gaussienne. Plus C_1 est élevé, plus cette tendance est forte. Par conséquent, nous nous attendons à observer des formes de PDF plus éloignées d'une gaussienne pour les valeurs faibles de C_1 . C'est ce qui est effectivement observé sur la figure 3.4. Celle-ci montre les PDF obtenues par simulation Monte Carlo de l'équation (3.1) pour différentes valeurs de C_1 à un temps donné, à la position $x/L_k = 0.5$. Quand C_1 s'approche de 1, l'asymétrie de la PDF devient de plus en plus prononcée. Un pic se forme aux valeurs négatives. Ce pic a également été observé dans les simulations de validation du chapitre précédent, réalisée avec la valeur $C_1 = 1.8$.

On note également sur la figure 3.4 que la forme de la PDF s'éloigne de celle prédite par les premiers termes de la théorie asymptotique. Cet éloignement s'explique par la troncature de la série asymptotique et non par une mauvaise estimation du coefficient du terme correctif retenu jusqu'ici dans l'équation (3.7). La justification de cette assertion est la suivante. Comme mentionné précédemment, le terme correctif apparaissant dans la solution (3.7) correspond à un polynôme d'Hermite d'ordre 3. On peut montrer que la série asymptotique se poursuit par l'ajout de polynôme d'Hermite d'ordres supérieurs.

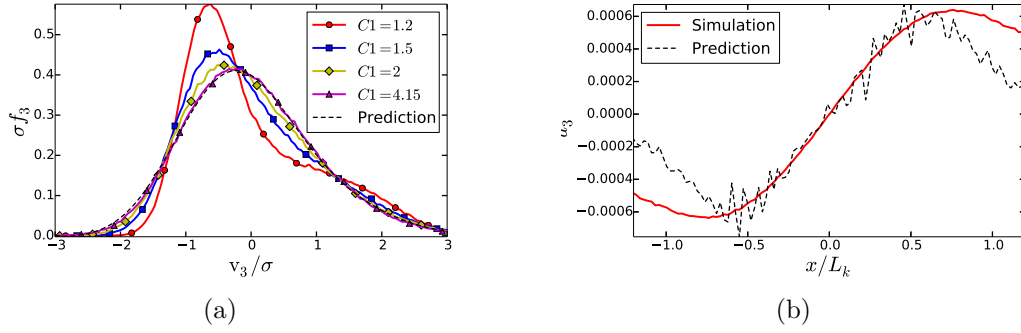


FIGURE 3.4 – (a) Comparaison des PDF de vitesse pour différentes valeurs de C_1 , au temps final des simulations, en $x_3/L_k = 0.5$. (b) Corrélation d'ordre 3 $\overline{u_3^3}$ au temps final pour la simulation avec $C_1 = 1.2$

Le point important ici est que ces polynômes d'ordre supérieur ou égal à 4 ne modifient pas les corrélations d'ordre 3. En conséquence, l'estimation (3.6) de la valeur $\overline{u_3^3}$ obtenue par l'analyse asymptotique reste valide quel que soit l'ordre du développement. La figure 3.4(b) compare la corrélation d'ordre 3 pour la simulation avec $C_1 = 1.2$ avec la valeur attendue de l'équation (3.6). On observe un bon accord entre simulation et prédiction au centre de la zone de mélange. On note également que la différence déjà observée sur les bords de la zone pour $C_1 = 4.15$ est ici accentuée. Le bon accord dans la partie centrale indique que l'équation (3.6) reste toujours prédictive même si la forme de la PDF s'éloigne de celle prédite par la prise en considération des seuls deux premiers termes de la série asymptotique. L'éloignement de la PDF à la solution (3.7) est donc dû à la présence de polynôme d'Hermite d'ordre supérieur à 4.

Pour terminer, nous mentionnons que nous avons réalisé le développement asymptotique complet en polynôme d'Hermite successifs. Cependant, une comparaison de ce développement aux simulations est rendue difficile par le fait que les ordres supérieurs dépendent de dérivées d'ordre de plus en plus élevé. Étant donné l'aspect bruité des simulations Monte Carlo, extraire ces dérivées est très difficile et ne permet pas d'afficher de comparaisons pertinentes.

3.3 Analyse du modèle à deux échelles

3.3.1 Développement asymptotique

Nous appliquons à présent la même analyse asymptotique au modèle à deux échelles complet. Nous redonnons ici son expression :

$$\partial_t f + v_3 \partial_3 f = -\partial_{v_i} \left[\partial_3 \overline{u_3^2} \delta_{i3} f - \frac{1}{2} \overline{\omega} \left(C_1^L M_{ij}^L + C_1^S M_{ij}^S \right) v_j f - \frac{\Omega_P}{2} v_i \right] + \frac{C_0 \overline{\varepsilon}}{2} \partial_{v_j v_j}^2 f, \quad (3.8a)$$

$$\partial_t \bar{\varepsilon} + \partial_3 \left(C_{\varepsilon} \bar{\omega} \left[\overline{u_3 k} + \overline{u_k p'} \right] \right) = -C_{\varepsilon_2} \bar{\omega} \bar{\varepsilon} \quad (3.8b)$$

avec $\Omega_P = \frac{1}{\bar{k}} \partial_3 \overline{u_3 p'}$ et $\overline{u_3 p'} = -\frac{2}{5} \overline{u_3 k}$.

Comme pour le modèle SLM, nous appliquons un développement asymptotique en supposant que :

$$\frac{\ell}{L} = \frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\varepsilon}} \left[\frac{1}{\bar{k}} \partial_3 \bar{k} \right] \ll 1.$$

La difficulté principale vient de la prise en compte de l'anisotropie. Pour faciliter les calculs, nous supposons de façon arbitraire que l'anisotropie du tenseur de Reynolds est constante, par exemple que $\overline{u_1^2}/\overline{u_3^2}$ est constant. Avec ces hypothèses, le développement asymptotique mené de la même façon que pour le modèle SLM donne les résultats suivants. En conservant uniquement les termes d'ordre (0) et (1), nous obtenons que :

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{v_3^2}{u_3^2} + \frac{v_1^2 + v_2^2}{u_1^2} \right)}}{(2\pi)^{3/2} \overline{u_1^2} \sqrt{\overline{u_3^2}}} \left(1 + \frac{v_3}{\sqrt{\bar{k}}} \left(C_{g_1} \ell \frac{\partial_3 \overline{u_3^2}}{\overline{u_3^2}} \left[3 - \frac{v_3^2}{u_3^2} \right] + C_{g_2} \ell \frac{\partial_3 \overline{u_1^2}}{\overline{u_1^2}} \left[2 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{u_1^2} \right] \right) \right) \quad (3.9a)$$

$$\text{avec } C_{g_1} = \frac{1}{2C_{\varepsilon_2} - 2 - C_1^S + \frac{C_1^S - 1}{b_{33} + \frac{1}{3}} \left[\mathbf{x}^L (b_{33}^L + \frac{1}{3}) + \frac{4}{3} (1 - \mathbf{x}^L) \right]} \quad (3.9b)$$

$$C_{g_2} = \frac{1}{2C_{\varepsilon_2} - 2 - C_1^S + \frac{C_1^S - 1}{b_{33} + \frac{1}{3}} \left[\mathbf{x}^L (b_{33}^L + \frac{1}{3}) + \frac{4}{3} (1 - \mathbf{x}^L) \frac{1 + \frac{3}{4} b_{33}}{1 - \frac{3}{2} b_{33}} \right]} \quad (3.9c)$$

La forme de la PDF est similaire à celle obtenue pour le modèle SLM. Il s'agit d'une Gaussienne corrigée par des polynômes d'ordre 3, distincts pour la vitesse longitudinale v_3 et pour les vitesses transverses v_1 et v_2 . Deux constantes apparaissent, C_{g_1} et C_{g_2} . Elles sont exprimées en fonction des coefficients du modèle à deux échelles. En particulier, elles dépendent de C_{ε_2} et C_1^S , de la même manière que le modèle SLM dépendait de C_{ε_2} et C_1 . Par ailleurs, elles dépendent également des grandes échelles à travers le coefficient $\mathbf{x}^L$ qui donne la répartition de l'énergie entre grandes et petites échelles, et à travers l'anisotropie aux grandes échelles b_{33}^L . On remarquera que pour $\mathbf{x}^L = 0$ et $b_{33} = 0$, les coefficients C_{g_1} et C_{g_2} deviennent égaux au coefficient C_g du modèle SLM.

3.3.2 Expression du flux d'énergie turbulente

En intégrant l'équation (3.9), nous obtenons que les moments d'ordre 3 de la vitesse sont égaux à :

$$\text{Pour } \frac{\ell}{L} \ll 1, \quad \overline{u_3^3} = -6C_{g_1} \frac{\overline{u_3^2}}{\bar{\omega}} \partial_3 \overline{u_3^2} \quad \text{et} \quad \overline{u_3 u_1^2} = -2C_{g_2} \frac{\overline{u_3^2}}{\bar{\omega}} \partial_3 \overline{u_1^2}. \quad (3.10)$$

Ainsi, de même que pour le modèle SLM, on trouve que les corrélations d'ordre 3 de vitesse s'expriment en fonction des gradients du tenseur de Reynolds, dans la limite

quasi-homogène.

Nous rappelons que le flux d'énergie turbulente est donné par :

$$F_k = \overline{u_3 k} + \overline{u_3 p'}.$$

En utilisant les expressions précédentes pour $\overline{u_3^2}$ et $\overline{u_3 u_1^2}$, en utilisant la fermeture $\overline{u_3 p'} = -2\overline{u_3 k}/5$ et en prenant en compte que le développement asymptotique suppose que b_{33} est constant, nous obtenons finalement que :

$$\text{Pour } \frac{\ell}{L} \ll 1, \quad F_k = -C_k \frac{\overline{u_3^2}}{\overline{\omega}} \partial_3 \overline{k} \quad \text{avec} \quad C_k = \frac{6}{5}C_{g1} + \frac{12}{15}C_{g2} + b_{33} \left(\frac{18}{5}C_{g1} - \frac{6}{5}C_{g2} \right) \quad (3.11)$$

Il s'agit de l'un des résultats principaux de cette thèse. D'une part, cette expression identifie une limite pour laquelle un régime de diffusion existe pour le modèle de Langevin à deux échelles. D'autre part, elle donne une expression du coefficient de diffusion en fonction des paramètres de ce modèle. Un point important sur lequel nous reviendrons plus tard est que ces paramètres dépendent des conditions initiales (voir le chapitre 2). Par conséquent, le coefficient de diffusion lui-même en dépend.

3.4 Régime de diffusion pour une zone de mélange de Richtmyer–Meshkov

Dans le chapitre 2, nous avons montré que le modèle de Langevin à deux échelles était apte à reproduire les évolutions issues de simulations aux grandes échelles d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer–Meshkov. À l'aide de l'analyse menée dans ce chapitre, nous souhaitons à présent déterminer s'il existe un régime de diffusion dans ces configurations.

La première question à laquelle on souhaite répondre est de savoir si le paramètre asymptotique ℓ/L est effectivement petit devant 1. La figure 3.5 montre la valeur de ce paramètre pour les quatre simulations réalisées à l'aide du modèle de Langevin. On observe, comme pour le modèle SLM, que ℓ/L est effectivement petit au centre de la zone de mélange et devient plus grand sur les bords de cette zone. Par conséquent, les conditions pour qu'un régime de diffusion existe sont effectivement rencontrées au centre de la zone de mélange.

La seconde question est alors de savoir si l'expression asymptotique (3.11) du flux de $\overline{k}$ constitue une bonne approximation. La figure 3.6 compare le flux F_k issu de la simulation LMC à son l'expression asymptotique (3.11). Un bon accord est observé entre les deux : l'expression diffusive (3.11) prédit correctement le flux F_k au centre de la zone de mélange. Notons qu'un bon accord est également obtenu vis à vis de la LES, ce résultat étant déjà connu depuis le chapitre 2.

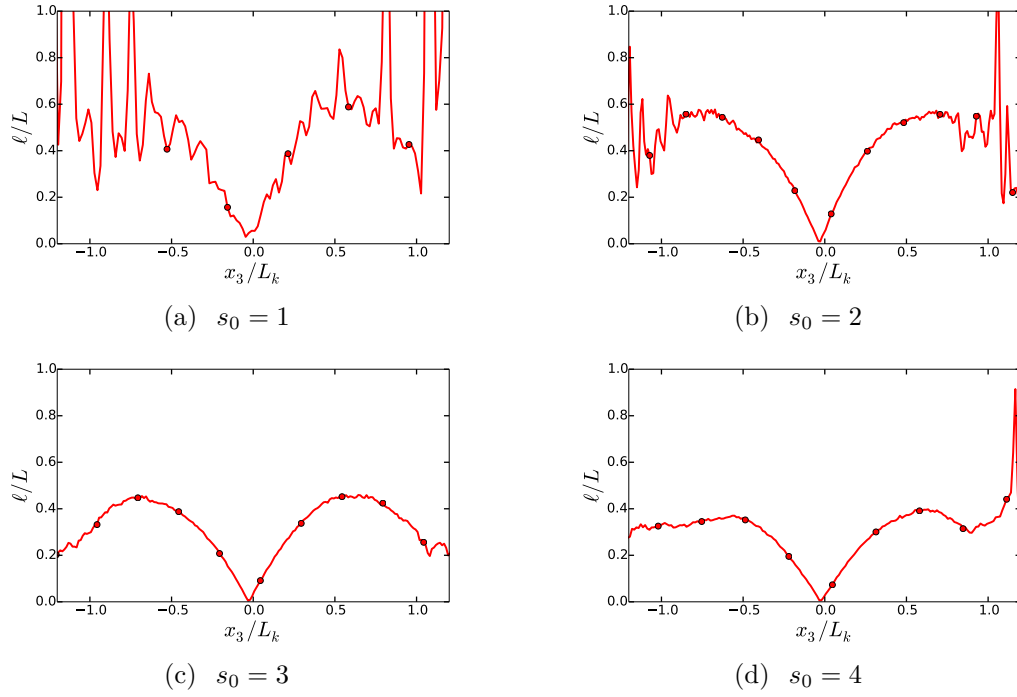


FIGURE 3.5 – Paramètre asymptotique du régime de diffusion ℓ/L au temps final des différentes simulations.

Un dernier point mérite d'être commenté. Le coefficient de diffusion C_k déduit de l'analyse asymptotique dépend des paramètres du modèle de Langevin à deux échelles. Ces paramètres dépendent eux-mêmes des conditions initiales à travers la valeur de s_0 . La question se pose de savoir comment varie C_k en fonction de s_0 . La figure 3.7 montre les valeurs de C_k mesurées dans les simulations LMC à partir du flux réel F_k et du flux issu de l'analyse asymptotique. Ces mesures sont faites en divisant F_k et son approximation par $\frac{\overline{u_3^2}}{\omega} \partial_3 \bar{k}$ et en regardant la valeur de cette quantité au centre de la zone de mélange. Par ailleurs, la figure 3.7 montre également la valeur de C_k obtenue à partir de l'équation (3.11) en utilisant une anisotropie b_{33} modélisée, plutôt que mesurée. Un modèle pour b_{33} a été proposé dans le chapitre 2 et est rappelé ici :

$$b_{33}^{\text{mod}} = \frac{2}{3} \frac{s_0 + 3/2}{s_0 + 3 + 3(s_0 + 1)(s_0 + 2)a} \quad \text{avec} \quad a \approx 0.3.$$

On observe un bon accord entre les valeurs de C_k de la simulation et de l'analyse asymptotique, lorsqu'on prend en compte l'anisotropie issue de la simulation. L'ajout d'un modèle pour l'anisotropie a tendance à fournir des valeurs de C_k plus élevées que dans la simulation, d'environ 15% à 20%.

Un autre point essentiel est la valeur atteinte par le coefficient C_k : aussi bien dans les prédictions que dans les simulations, ce coefficient est de l'ordre de 0.8 à 0.9. Il possède

donc une valeur 3 à 5 fois plus élevée que celle utilisée habituellement dans les modèles RSM. D'autre part, pour s_0 compris entre 1 et 4, on observe peu de variations pour la valeur de ce coefficient. L'analyse asymptotique prédit toutefois une variation rapide lorsque s_0 décroît en dessous de 1.

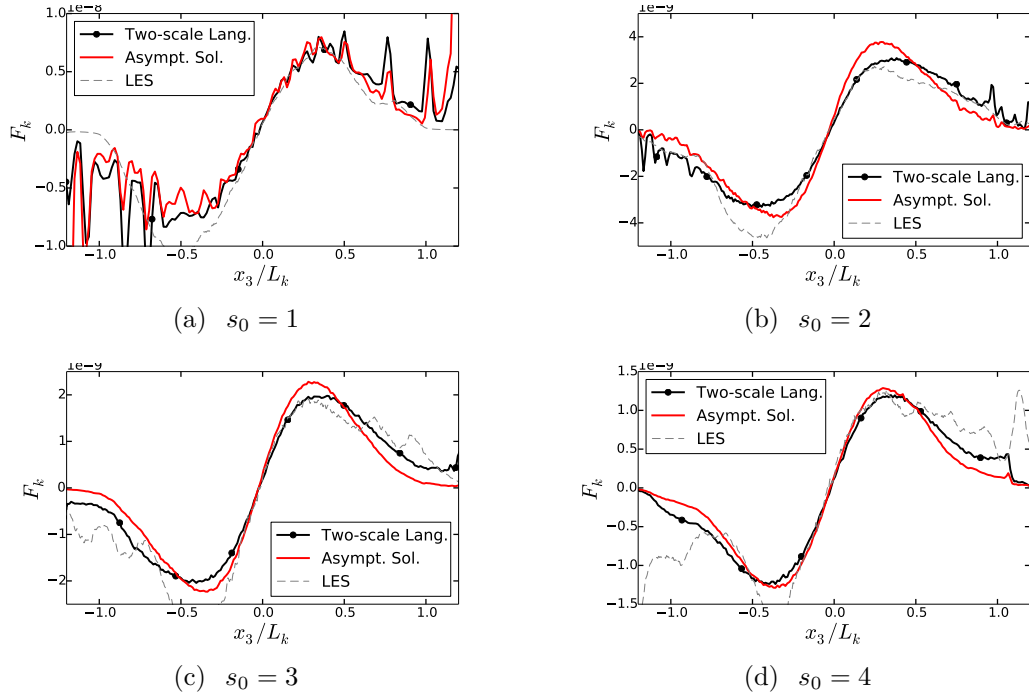


FIGURE 3.6 – Flux turbulent de l'énergie cinétique au temps final des différentes simulations. Comparaison entre le modèle de Langevin à deux échelles, l'analyse asymptotique et la LES.

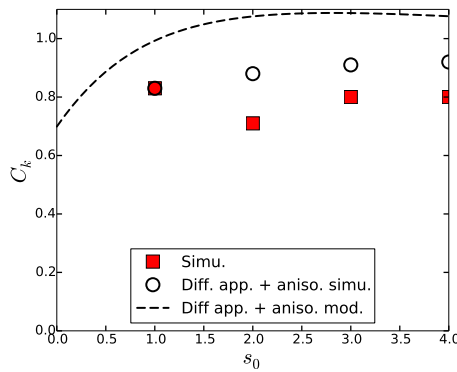


FIGURE 3.7 – Comparaison entre les valeurs de C_k estimées à partir de la simulation LMC, à partir de l'approximation diffusive avec l'anisotropie issue de la simulation LMC et à partir de l'approximation diffusive avec l'anisotropie modélisée.

3.5 Conclusion

Au terme de cette analyse, nous avons établi les résultats suivants :

- Il existe un régime de diffusion pour le modèle de Langevin, que ce soit sous sa forme simplifiée ou sa forme à deux échelles.
- Les conditions de ce régime sont rencontrées au centre des zones de mélange issues de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov, tout au moins celles que nous avons simulées avec le code TRICLADÉ en LES.
- Dans ce régime diffusif, une analyse asymptotique du modèle PDF peut être réalisée. Elle prédit un transport en premier gradient pour le flux de $\bar{k}$.
- La valeur du coefficient de diffusion prédite par cette analyse est en bon accord avec les simulations LES et se trouve être 3 à 5 fois plus élevée que les valeurs habituelles.

L'ensemble de ces résultats permet donc de répondre à la problématique principale de cette thèse. À la question de savoir s'il est légitime d'appliquer une fermeture diffusive en premier gradient pour une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov, nous apportons une réponse positive. La variation significative du coefficient de diffusion C_k n'est pas due à une mise en défaut du régime de diffusion.

La question qui se pose alors est de savoir s'il est possible de comprendre l'origine de la différence entre le C_k requis pour Richtmyer-Meshkov et celui utilisé habituellement. Si l'on considère l'expression de C_k donnée par l'équation (3.11), on observe que C_k dépend de plusieurs paramètres. Tout d'abord, C_k dépend des constantes C_1^S et C_{ε_2} du modèle PDF. Ensuite, C_k dépend de la paramétrisation des grandes échelles, permanentes dans l'écoulement, à travers $\mathbf{x}^L$ et b_{33}^L . Enfin, C_k dépend de l'anisotropie b_{33} .

Pour appréhender le rôle de ces différents termes, supposons tout d'abord que toutes les échelles du spectre sont isotropes. Le coefficient C_k devient alors égal à :

$$C_k^{\text{iso}} = \frac{2}{2C_{\varepsilon_2} + 3C_1^S - 6}.$$

Dans ces conditions, avec les valeurs de C_{ε_2} et C_1^S utilisées pour restituer le calcul avec $s_0 = 2$, C_k demeure élevé, de l'ordre de 0.6. Mais il reste bien inférieur à sa valeur anisotrope théorique, supérieure à 1 (figure 3.7). Ainsi, l'anisotropie de l'écoulement, liée aux grandes échelles et aux conditions initiales, est l'une des raisons expliquant les valeurs élevées du coefficient de diffusion. Notons que l'anisotropie est ici telle que la composante longitudinale u_3 est plus énergétique que les composantes transverses. L'affirmation précédente peut donc se comprendre de manière intuitive, dans la mesure où la composante u_3 est celle qui contribue principalement au transport turbulent.

Dans le même ordre d'idée, on peut illustrer le rôle joué par les grandes échelles en considérant deux limites distinctes. Dans la première, seules les grandes échelles sont présentes $\mathbf{x}^L = 1$ et $b_{33} = b_{33}^L$. Dans la seconde, seules des petites échelles sont présentes

$x^L = 0$ avec la même anisotropie qu'auraient les grandes $b_{33} = b_{33}^L$. On obtient alors deux valeurs limites, données ici pour le cas $s_0 = 2$:

$$\text{Pour } x^L = 1 \text{ et } b_{33} = b_{33}^L \quad , \quad C_k \approx 2.4$$

$$\text{Pour } x^L = 0 \text{ et } b_{33} = b_{33}^L \quad , \quad C_k \approx 0.95$$

Ces deux valeurs sont à nouveaux élevées, du fait de l'anisotropie très forte b_{33}^L . Le point intéressant est que le cas où seules les grandes échelles sont présentes donne un coefficient de transport bien plus élevé que le cas avec les petites échelles. La prise en compte des grandes échelles dans le modèle, indépendamment de la valeur précise de leur anisotropie, accentue donc fortement le transport. Ce résultat est lié au fait que dans le modèle, le retour vers une gaussienne des grandes échelles n'existe pas. Ces échelles conservent donc leur asymétrie initiale, en accord avec l'existence du principe de permanence des grandes échelles.

En ce qui concerne le rôle de C_1^S , il s'agit du même que celui déjà discuté pour le modèle SLM. C_1^S est la constante qui contrôle le retour de la PDF à une Gaussienne. Plus C_1^S sera élevé, plus vite ce retour se fera et plus faibles seront les corrélations d'ordre 3 et le transport. Une augmentation de C_1^S , toutes choses étant égales par ailleurs, conduit effectivement à une diminution de C_k . Notons que dans le cas isotrope, pour obtenir une valeur de C_k de l'ordre 0.2 il faudrait imposer une valeur de C_1^S de l'ordre 5, et pour obtenir $C_k \approx 0.15$, il faudrait $C_1^S \approx 6.6$. Ces valeurs de C_1^S ne permettent pas de restituer les simulations LES. Les PDF demeureraient beaucoup trop proches d'une Gaussienne, comme ce qui est observé pour le modèle SLM avec $C_1 = 4.15$ (fig. 3.4). Ces valeurs de C_1^S poseraient également problème pour restituer le retour à l'isotropie de façon générale.

Le dernier point que nous discuterons concerne C_{ε_2} . Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence que C_{ε_2} était la constante qui contrôlait le régime auto-similaire de la zone de mélange, en particulier la décroissance de $\bar{k}$ et l'élargissement de L_k . C_k dépend donc de cet aspect instationnaire de l'écoulement, lui-même rattaché aux conditions initiales et à s_0 . Cette évolution est propre aux zones de mélanges turbulentes et ne se retrouve pas pour d'autres classes d'écoulements. Par exemple, si l'on considérait un problème de diffusion turbulente stationnaire sans cisaillement [111], on pourrait estimer un coefficient de diffusion par une approche quasi-normale, à la manière de [122], en écrivant l'équation des corrélations triples et en remplaçant les corrélations d'ordre 4 par leur valeur gaussienne. On obtiendrait alors un coefficient $C_k = \frac{2}{3C_1}$. Ce coefficient est indépendant de C_{ε_2} car l'écoulement est stationnaire contrairement à celui qui nous intéresse. D'autre part, sa valeur est bien moindre que celle estimée pour une zone de mélange. Elle vaut environ 0.37 et se rapproche des valeurs habituellement retenues qui sont de l'ordre de 0.2.

Au final, l'anisotropie des zones de mélange de Richtmyer-Meshkov et la présence de grandes échelles non-gaussiennes permanentes contribuent toutes deux à augmenter le transport diffusif de $\bar{k}$. De même, la décroissance auto-similaire de ce type d'écoulement semble également contribuer à une augmentation de C_k vis-à-vis d'un écoulement qui serait stationnaire. Ces différents aspects pourraient être à l'origine de la différence significative du C_k estimé pour Richtmyer-Meshkov par rapport à celui utilisé habituellement. Notons que l'un des écoulements qui est parfois utilisé pour fixer la constante C_k dans la littérature est précisément le problème de diffusion turbulente stationnaire sans cisaillement [111] évoqué plus haut. Une analyse plus détaillée de ce type d'écoulement permettrait donc d'aller plus loin dans la compréhension de la valeur usuelle du C_k .

Au niveau des perspectives, notons enfin que les résultats obtenus dans ce chapitre vont également servir de base pour l'amélioration des modèles statistiques utilisés au CEA pour l'étude de zones de mélange turbulentes. C'est notamment le cas du modèle GSG, pour lequel des pistes d'amélioration sont déjà recherchées à partir de ces travaux.

Chapitre 4

Résolution de l'équation de transport de la PDF de la vitesse à l'aide d'une méthode de Monte Carlo

L'ensemble des calculs que nous avons effectués dans les chapitres précédents pour le modèle de Langevin (simplifié ou multi-échelles) consistent à résoudre l'équation modélisée pour la PDF du champ de vitesse. Or, la résolution numérique de cette équation n'est pas évidente, et nécessite le développement de méthodes numériques adaptées. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la méthode de Monte Carlo eulérienne (EMC) proposée dans [115]. L'objectif est de donner une justification mathématique à cette méthode, et de savoir si elle constitue une alternative viable aux méthodes de Monte Carlo lagrangiennes (LMC).

4.1 Introduction

L'équation d'évolution d'un modèle PDF possède un nombre de dimensions potentiellement élevé. Ceci induit des coûts de calcul élevés. En particulier, les méthodes volume/différence fini(e)s ne peuvent être utilisées, étant donné que leur coût augmente exponentiellement avec le nombre de dimensions. La solution usuelle pour pallier cette difficulté consiste à utiliser des méthodes de Monte Carlo : elles se caractérisent par un effort de calcul qui augmente linéairement avec le nombre de dimensions et sont par conséquent bien adaptées pour la résolution de telles équations.

Comme évoqué en introduction, les méthodes de Monte Carlo lagrangiennes (LMC) [119] sont devenues une composante essentielle de l'approche PDF. De nombreuses publications attestent de leur convergence et leur précision [119, 108, 69, 109]. Néanmoins, la projection des statistiques des particules sur des nœuds de mailles et le contrôle de la convergence stochastique peuvent rester, dans certaines situations, difficiles à mettre en

place [60, 61], ce qui ne facilite pas le couplage des LMC à d'autres méthodes de simulation, plus classiquement eulériennes.

Au vu de ces considérations, plusieurs auteurs se sont tournés vers le développement de méthodes de Monte Carlo eulériennes (EMC) [157, 127, 128]. Indépendamment des difficultés potentielles des méthodes LMC, le développement d'une méthode alternative eulérienne devrait se révéler utile et stimulant, dans la mesure où la compétition entre les deux approches permettrait leur progression commune. Les méthodes EMC ont dans un premier temps été proposées dans [157, 127, 128] afin de calculer la PDF de scalaires turbulents réactifs, i.e. la PDF de champs de concentration et de température ou de toute autre quantité fournissant une information équivalente telle que l'enthalpie ou l'énergie. Dans ce cadre, les méthodes EMC ont été appliquées à un grand nombre de situations et se sont révélées comme une alternative convaincante des méthodes LMC [14, 15, 72, 83, 46, 19, 74, 110, 44, 118, 34, 35, 68, 60, 77, 76, 75, 47].

Cependant, bien que les méthodes EMC se soient révélées efficaces pour la résolution d'équations PDF du scalaire, elles ont été peu appliquées à la résolution d'équations PDF de vitesse. Cette PDF est souvent, pour ne pas dire toujours, modélisée par des fermetures de Langevin [119, 120].

Jusqu'à aujourd'hui, la possibilité de résoudre une équation de Langevin pour la PDF de la vitesse à l'aide d'une méthode EMC a d'abord été envisagée dans [143]. Dans ce travail, les SPDEs ont été dérivées et montrées, en premier lieu, comme étant stochastiquement équivalentes à l'équation PDF de Langevin. En outre, une méthode numérique permettant de résoudre ces SPDEs a été proposée, basée sur un schéma de type Godunov standard pour la discrétisation spatiale et sur un schéma stochastique de Runge-Kutta pour l'intégration en temps. Malheureusement, le travail détaillé dans [143] est passé outre une problématique de taille : l'équivalence entre les SPDEs et l'équation PDF correspondante a été établie en supposant que les champs stochastiques en jeu étaient des fonctions de l'espace et du temps et qu'ils étaient continus. Cependant, l'équation SPDE pour le champ de vitesse proposée dans [143] comprend une composante de type Burgers, impliquant le produit du champ de vitesse et de son gradient, ce qui mènera inévitablement à l'apparition de discontinuités. Par conséquent, l'équivalence entre les SPDEs et l'équation PDF, telle que présentée dans [143], ne peut être validée à chaque instant. Cette considération a été mise en avant pour la première fois dans [115].

Le problème central de la dérivation proposée dans [143] est dû à l'apparition de discontinuités. Ces discontinuités émergent lorsque les courbes caractéristiques des SPDEs se croisent. Mais le problème n'est pas uniquement là. Il y a également la considération implicite que, lorsque ce croisement a lieu, les SPDEs aboutissent à une solution dissipative en entropie qui préserve l'aspect monovalué des champs stochastiques en jeu. Une autre interprétation de ce croisement des caractéristiques est en fait possible : il s'agit d'une interprétation conservative en entropie qui mène à l'apparition de champs multivalués au

lieu de champs monovalués discontinus. Avec cette interprétation, les SPDEs sont dites quasi-linéaires, bien qu'elles impliquent des produits quadratiques qui puissent sembler non linéaires.

La notion de solutions conservatives en entropie peut être moins fréquemment rencontrée dans la littérature que sa contrepartie dissipative en entropie. Cependant, elle recouvre un grand nombre de domaines physiques tels que les ondes de dispersion [40, 87, 166], les ondes optiques [37, 38], les ondes sismiques [152, 41, 146], les limites semi-classiques des équations de Schrödinger [22, 70, 144], ou la physique des plasmas dans les équations d'Euler-Poisson [94, 42]. Les différences entre les interprétations dissipative et conservative en entropie ont été étudiées dans plusieurs travaux [42, 88].

À ce stade, nous devons souligner que le noyau de Burgers problématique des SPDE dérivées dans [143] provient du terme d'advection de l'équation PDF. Il est destiné à fournir une équivalence statistique avec ce terme. Mais dans l'équation PDF, l'advection est un processus conservatif en entropie purement linéaire. Par conséquent, l'interprétation non-linéaire dissipative en entropie des SPDEs dérivées dans [143] est en contradiction avec cette propriété. De ce fait, le fait d'adopter cette interprétation, qui a été retenue dans [143], ne nous permet pas d'établir une équivalence complète entre les SPDEs et l'équation PDF.

Ainsi, la seule alternative est de considérer l'interprétation conservative en entropie des SPDEs dérivées dans [143]. Plusieurs questions résultent de cette considération : l'équivalence SPDEs-PDF est-elle réellement renforcée grâce à cette interprétation ? Comment résoudre numériquement la solution multivaluée des SPDEs proposées dans [143] ? Nous cherchons dans cette étude à répondre à ces questions.

Plus précisément, afin de répondre à la première question, on applique aux SPDEs dérivées dans [143] le formalisme établi dans [42, 88]. En particulier, on cherche des solutions multivaluées sous la forme des graphes paramétrés. On peut alors exprimer la PDF associée à ces solutions multivaluées, et chercher une équivalence entre son évolution et l'équation PDF initiale correspondante.

Pour répondre à la seconde question, on note que plusieurs méthodes existent pour capturer les solutions multivaluées d'équations quasi-linéaires [92, 22, 11, 50, 94, 6, 104]. La plus fréquemment utilisée est la méthode "level-set", introduite pour la première fois dans [92, 22]. Dans cette méthode, les solutions multivaluées sont déterminées comme les zéros d'un ensemble de fonctions scalaires solutions des problèmes de valeur initiale d'une équation aux dérivées partielles dépendante en temps dans un espace augmenté.

Cependant, l'utilisation d'une méthode "level-set" pourrait se révéler inadéquate dans le cadre de notre travail. En effet, la principal avantage lors de l'utilisation d'une méthode de Monte Carlo, qu'elle soit eulérienne ou lagrangienne, est de diminuer la dimension du problème. Utiliser une approche "level-set" impliquerait un retour dans un espace de même dimension que celui du problème initial, pour chaque champ stochastique, ce que l'on ne

souhaite pas. Par ailleurs, l'apparition de nouvelles branches de solutions multivaluées n'est pas toujours facile à suivre dans le cadre d'une méthode "level-set".

Ainsi, au lieu d'une approche "level-set", on propose une autre approche qui bénéficie de la nature statistique du problème étudié et du fait que les SPDEs soient utilisées dans le cadre d'une méthode de Monte Carlo. L'idée est d'échantillonner les différentes branches de la solution multivaluée en utilisant une variante de la méthode de choix aléatoire (RCM) [49]. On recouvre ensuite statistiquement la solution multivaluée en augmentant le nombre de champs statistiques de la méthode de Monte Carlo. Cette méthode a pour la première fois été proposée dans [115]. Elle y a été validée avec succès pour de nombreux problèmes.

Le reste de cette section suit le plan suivant. On décrit tout d'abord l'équation PDF modélisée que l'on souhaite résoudre. Ensuite, on rappelle les résultats obtenus dans [143] et on détaille les SPDEs dérivées dans ce précédent travail. On fournit alors un exemple illustrant le fait que l'interprétation dissipative en entropie de ces SPDEs est inadéquate et on introduit leur interprétation conservative en entropie. On montre qu'avec cette interprétation, les SPDEs dérivées sont en effet équivalentes à l'équation PDF que l'on veut résoudre initialement. Un schéma numérique permettant de résoudre ces SPDEs est enfin proposé, puis évalué dans le cas d'une configuration simplifiée, dans le prolongement des travaux de [115].

4.2 Équation de Langevin pour la PDF de la vitesse

La méthode EMC que l'on souhaite développer a pour objectif de résoudre des équations de PDF de la vitesse. Son extension à la PDF jointe de la vitesse et du scalaire est directe et sera décrite en annexe 2.

Vis-à-vis des modèles développés dans le chapitre précédent, nous adoptons un point de vue plus général. Nous sortons en effet du cadre de l'approximation de Boussinesq et introduisons des variations de densité. Ainsi, on considérera un écoulement turbulent qui peut être complètement décrit par son champ de vitesse $\mathbf{u}$ et sa densité ρ . Pour les écoulements à densité variable, il est usuel de travailler avec les statistiques de Favre, c'est-à-dire les statistiques pondérées par la densité physique ρ . Les statistiques non pondérées sont appelées statistiques de Reynolds. La moyenne et les fluctuations d'une quantité Q selon la définition de Reynolds seront par la suite dénotées $\overline{Q}$ et Q' , tandis que leurs équivalentes selon la définition de Favre seront dénotées $\tilde{Q}$ et Q'' . Afin de bien différencier ces deux statistiques, on change la notation de la PDF de Reynolds utilisée jusque-là : f devient $\bar{f}$. On introduit également une notation pour la PDF de Favre en un point $\tilde{f}$. Les statistiques de Favre sont définies selon les statistiques de Reynolds comme suit :

$$\tilde{f}(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{\overline{\rho(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}}{\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\overline{(\rho|\mathbf{v}; \mathbf{x}, t)}}{\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)} \bar{f}(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t)$$

$$\text{avec } \bar{f}(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \overline{\delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}.$$

Dans cette équation, $\overline{(\rho | \mathbf{v}; \mathbf{x}, t)}$ est la valeur moyenne de ρ conditionnée sur la vitesse au point $\mathbf{x}$ et à l'instant t .

En utilisant des techniques standard [119, 84], il est possible de dériver une équation de transport exacte pour la PDF $\tilde{f}$ à partir des équations de Navier-Stokes, de la même façon que l'équation (2.16) a été dérivée à partir des équations de Boussinesq. Dans cette équation, le processus d'advection est traité de façon exacte, tandis que les effets du gradient de pression et des contraintes visqueuses doivent être fermés. Dans cette étude, on considérera que ces deux processus sont représentés par le modèle de Langevin simplifié (SLM) [119, 120]. Par ailleurs, on négligera les effets de production dus aux fluctuations de densité. En conséquence, on obtient l'équation de Fokker-Planck suivante pour la PDF en un point modélisée :

$$\begin{aligned} \partial_t (\bar{\rho} \tilde{f}) + v_j \partial_j (\bar{\rho} \tilde{f}) = \partial_{v_i} \left(\left(\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_i \bar{P} + \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} (v_i - \tilde{u}_i) \right) \bar{\rho} \tilde{f} \right) \\ + \frac{C_0}{2} \tilde{\varepsilon} \partial_{v_i v_i}^2 (\bar{\rho} \tilde{f}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dans l'équation (4.1), t représente le temps, $\mathbf{x}$ les coordonnées spatiales, $\bar{P}$ la pression moyenne, $\tilde{\omega}$ la fréquence turbulente et $\tilde{\varepsilon}$ la dissipation turbulente. Ces deux dernières quantités sont liées par la relation $\tilde{\omega} = \tilde{\varepsilon} / \tilde{k}$, avec $\tilde{k} = \widetilde{u_i'' u_i''} / 2$ l'énergie cinétique turbulente. C_0 et C_1 sont les constantes du modèle et sont liées par $C_0 = \frac{2}{3}(C_1 - 1)$. C_1 est généralement pris comme étant égal à 4.15.

L'équation (4.1) doit être complétée par une autre équation donnant l'évolution de $\tilde{\omega}$ ou $\tilde{\varepsilon}$. Ici, on considère l'équation d'évolution suivante pour $\tilde{\varepsilon}$:

$$\partial_t (\bar{\rho} \tilde{\varepsilon}) + \partial_j \left(\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{2} \bar{\rho} \tilde{\omega} \widetilde{u_j'' u_k'' u_k''} \right) = C_{\varepsilon_1} \bar{\rho} \tilde{\omega} P_k - C_{\varepsilon_2} \bar{\rho} \tilde{\omega} \tilde{\varepsilon}, \quad (4.2)$$

où C_ε , C_{ε_1} et C_{ε_2} sont les constantes du modèle et où $P_k = -\widetilde{u_i'' u_k''} \partial_k \tilde{u}_i$ est le terme de production apparaissant dans l'équation de $\tilde{k}$. L'équation (4.2) est l'équation standard pour $\tilde{\varepsilon}$ utilisée dans les modèles $\tilde{k} - \tilde{\varepsilon}$ [133], à l'exception près du terme de transport contrôlé par C_ε , qui est ici choisi proportionnel au terme de transport de l'équation de $\tilde{k}$. Les corrélations secondes et triples apparaissant dans $\tilde{k}$, P_k et dans le terme de transport peuvent être calculées en intégrant la PDF $\tilde{f}$.

Le système (4.1)-(4.2) est similaire au système (2.17) obtenu dans la limite de Boussinesq et présenté dans le chapitre 2.

4.3 Méthode EMC : Approche utilisée dans les précédents travaux et ses limites

Dans cette section, on répète les étapes principales de la dérivation proposée dans [143] pour déterminer les SPDEs stochastiquement équivalentes à l'équation PDF (4.1). Il est en effet instructif de comprendre pourquoi cette approche basée sur des champs monovalués ne parvient pas à assurer l'équivalence SPDEs-PDF souhaitée, en utilisant des lignes de raisonnement et des outils mathématiques similaires à ceux utilisés généralement par la communauté des modèles PDF.

4.3.1 Dérivation des SPDEs équivalentes à l'équation (4.1) proposée dans les précédents travaux

Le pilier central de la méthode EMC proposée dans [143] est un champ de vitesse stochastique $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, supposé être une fonction monovaluée de l'espace et du temps. Chaque réalisation de ce champ stochastique est pondérée par une densité stochastique $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$. Dans cette configuration, on peut introduire la PDF f_S pondérée par la densité des champs stochastiques, de façon similaire à la PDF de Favre $\tilde{f}$:

$$f_S(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{\langle \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)) \rangle}{\langle \mathbf{r} \rangle(\mathbf{x}, t)}, \quad (4.3)$$

où $\langle Q \rangle$ représente la moyenne sur les champs stochastiques d'une quantité Q donnée. Le but est de déterminer les évolutions de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{r}$ telles que l'équation de transport de f_S soit identique à l'équation (4.1).

Pourvu que $\mathbf{U}$ et $\mathbf{r}$ soient des champs continus, l'évolution de f_S peut être déduite de sa définition en appliquant des règles simples de dérivation. On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t (\langle \mathbf{r} \rangle f_S) + \mathbf{v}_j \partial_j (\langle \mathbf{r} \rangle f_S) &= \partial_{v_i} \left(\left\langle \frac{\mathbf{r}}{\langle \mathbf{r} | \mathbf{v} \rangle} (\partial_i \mathcal{U}_i + \mathcal{U}_j \partial_j \mathcal{U}_i) \right| \mathbf{v} \right\rangle \langle \mathbf{r} \rangle f_S \right) \\ &+ \left\langle \frac{1}{\langle \mathbf{r} | \mathbf{v} \rangle} (\partial_i \mathbf{r} + \partial_j (\mathbf{r} \mathcal{U}_j)) \right| \mathbf{v} \right\rangle \langle \mathbf{r} \rangle f_S. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En comparant l'équation (4.4) à l'équation (4.1), et en utilisant les propriétés des processus de Wiener [45, 119], on peut alors conclure que les évolutions suivantes pour $\mathbf{U}$ et $\mathbf{r}$ aboutissent à des équations de transport similaires pour f_S et $\tilde{f}$ si :

$$\partial_t \mathbf{r} + \partial_j (\mathbf{r} \mathcal{U}_j) = 0 \quad (4.5a)$$

$$\partial_i \mathcal{U}_i + \mathcal{U}_j \partial_j \mathcal{U}_i = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_i \bar{P} - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} (\mathcal{U}_i - \langle \mathcal{U}_i \rangle) + \sqrt{C_0 \varepsilon} \dot{W}_i, \quad (4.5b)$$

où W_i sont des processus de Wiener indépendants et où $\dot{W}_i$ sont leurs dérivées temporelles

[45, 119]. Ainsi, la densité stochastique $\mathbf{r}$ obéit à une équation de continuité, associée à la vitesse $\mathbf{u}$. Comme indiqué dans [143], $\mathbf{r}$ est différente de la densité physique. Par exemple, même si la densité physique ρ est constante, la densité stochastique $\mathbf{r}$ ne l'est pas car la vitesse stochastique n'a pas une divergence nulle. En ce qui concerne l'équation (4.5b) donnant l'évolution de $\mathbf{u}$, celle-ci n'est rien de plus que la décomposition de l'accélération totale instantanée (la somme des accélérations convective et locale) dans son membre de gauche, en accélération moyenne et fluctuations d'accélération – le premier terme et la somme des deuxième et troisième termes, respectivement. Les fluctuations d'accélération correspondent au modèle de Langevin simplifié donné dans l'équation (4.1).

Avec des équations de transport similaires, l'égalité entre f_S et $\tilde{f}$ est assurée que leurs conditions initiales et limites soient identiques ou non. Comme mentionné précédemment, ce résultat requiert que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{r}$ restent des fonctions continues monovaluées de l'espace. Malheureusement, comme nous le verrons dans la section suivante, cette propriété ne peut être maintenue dans le temps, même dans le cas où elle serait vérifiée initialement.

4.3.2 Discontinuités des SPDEs (4.5) pour le cas dissipatif en entropie

Le membre de gauche de l'équation (4.5b) est similaire à une équation de Burgers et aboutira inévitablement au croisement des courbes caractéristiques des solutions de l'équation (4.5b) en un temps fini. Dans le cadre de la dérivation proposée dans [143], les champs stochastiques doivent rester des fonctions monovaluées de l'espace. De ce fait, dans [143], ce croisement des courbes caractéristiques doit implicitement être interprété dans le sens dissipatif en entropie. En d'autres termes, il correspond à l'apparition d'une discontinuité. Cette propriété est en contradiction avec l'hypothèse de continuité des champs stochastiques utilisée pour dériver l'équation (4.4). Par conséquent, la dérivation décrite dans [143] et répétée en section 4.3 est au mieux consistante pour un temps fini avant de faire face à des contradictions qui lui sont inhérentes.

Pour illustrer cette difficulté, nous reprenons un exemple déjà introduit dans [115]. Nous considérons une équation PDF simplifiée associée à ses SPDEs simplifiées correspondantes. Supposons qu'il n'y a aucun gradient de pression moyenne et que la dissipation est tellement faible qu'elle peut être négligée le long de l'intervalle de temps considéré. Supposons également que l'écoulement n'est inhomogène que dans une direction, x_3 . Alors, seule la PDF marginale de v_3 , $\tilde{f}_3 = \iint \tilde{f}(\mathbf{v}) dv_1 dv_2$, a une évolution non triviale et cette évolution déduite de l'équation (4.1) est :

$$\partial_t (\bar{\rho} \tilde{f}_3) + v_3 \partial_3 (\bar{\rho} \tilde{f}_3) = 0. \quad (4.6)$$

Dans le même temps, les SPDEs (4.5) deviennent, une fois retirées les évolutions de $\mathcal{U}_2$ et

$\mathcal{U}_3$:

$$\partial_t \mathbf{r} + \partial_3 (\mathbf{r} \mathcal{U}_3) = 0 \quad (4.7a)$$

$$\partial_t \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_3 \partial_3 \mathcal{U}_3 = 0. \quad (4.7b)$$

Pour conclure sur ces étapes simplificatrices, supposons qu'au temps initial, $\bar{\rho}$ est constante tandis que $\tilde{f}_3$ est un Dirac centré sur un profil initial correspondant à une rampe descendante :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathbf{x}, 0) &= \rho_0, \quad \tilde{f}_3(\mathbf{v}; \mathbf{x}, 0) = \delta(v_3 - u_0(x)) \\ \text{avec } u_0(x) &= u_0 H(-x/L) + u_0(1 - x/L) H(x/L) H(1 - x/L), \end{aligned}$$

avec $H(x)$ la fonction de Heaviside, L une longueur caractéristique et u_0 une vitesse caractéristique. Les champs stochastiques peuvent être initialisés en cohérence avec cette PDF de la façon suivante :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, 0) = \rho_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_3(\mathbf{x}, 0) = u_0(x)$$

Ces évolutions et conditions initiales simplifiées n'ont pas de signification physique. Elles on simplement pour but d'illustrer l'apparition de discontinuités et leur effet sur la PDF des champs stochastiques.

L'équation d'évolution de la PDF marginale (4.6) a la solution suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle \tilde{f}_3 &= \rho_0 H(u_0 t - x_3) \delta(v_3 - u_0) \\ &+ \rho_0 \delta(v - v_t) \left(H(x_3 - u_0 t) H(L - x_3) + H(u_0 t - x_3) H(x_3 - L) \right) \frac{t_c}{|t_c - t|} \\ &+ \rho_0 H(x_3 - L) \delta(v) \\ \text{avec } v_t &= u_0 \frac{L - x_3}{L - u_0 t} \quad \text{et} \quad t_c = \frac{L}{u_0}. \end{aligned}$$

Avant le temps critique t_c , tout point de l'espace correspond à une unique fonction Dirac : $\delta(v - u_0)$ pour $x_3 < u_0 t$, $\delta(v - v_t)$ pour $u_0 t < x_3 < L$ et $\delta(v)$ pour $x_3 > L$. Après le temps critique t_c , l'intervalle $L < x_3 < u_0 t$ contient trois fonctions Dirac.

Le temps critique t_c joue aussi un rôle dans la solution des SPDEs (4.7). Il correspond au temps où les courbes caractéristiques du système se croisent. Si l'on suppose une solution dissipative en entropie, une discontinuité apparaît à ce temps, même si les conditions initiales étaient continues. En particulier, pour le champ de vitesse, cette solution discontinue prend la forme :

$$\text{Pour } t < t_c, \quad \mathcal{U}_3 = u_0 H(u_0 t - x_3) + u_0 \frac{L}{L - u_0 t} H(x_3 - u_0 t) H(L - x_3), \quad (4.8a)$$

$$\text{Pour } t > t_c, \quad \mathcal{U}_3 = u_0 H(x_{shock}(t) - x_3) \quad \text{avec} \quad x_{shock}(t) = L + \frac{u_0}{2}(t - t_c). \quad (4.8b)$$

Cette solution est montrée en figure 4.1.

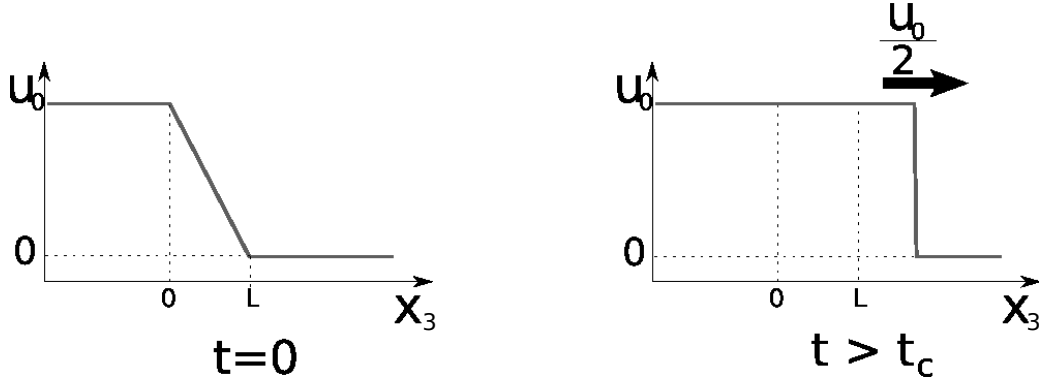


FIGURE 4.1 – Condition initiale du champ de vitesse stochastique (gauche) et son évolution après le temps critique t_c (droite), donnée par l'équation (4.8)

Pour $t < t_c$, la PDF f_S reconstruite depuis la solution est identique à $\tilde{f}_3$. En particulier, elle contient une seule fonction Dirac en tout point. Cependant, pour $t > t_c$, ce n'est plus le cas : f_S est toujours définie par une unique fonction Dirac, tandis que $\tilde{f}_3$ comprend trois fonctions Dirac sur certains intervalles. Par ailleurs, on peut noter que l'information est transportée à une vitesse maximale de $\dot{x}_{shock} = \frac{u_0}{2}$ pour f_S alors qu'elle est transportée à une vitesse maximale de u_0 pour $\tilde{f}_3$.

Par conséquent, cet exemple tiré de [115] illustre la façon dont les discontinuités peuvent apparaître depuis les SPDEs (4.5), et ce même si les champs stochastiques initiaux $\mathbf{r}$ et $\mathbf{u}$ sont continus. En outre, il montre comment la présence d'une telle discontinuité affecte la PDF des champs stochastiques et empêche l'équivalence entre son évolution et celle souhaitée.

4.4 Méthode EMC : Interprétation conservative en entropie

L'exemple précédent montre que l'interprétation dissipative en entropie des SPDEs (4.5) aboutit à la présence de discontinuités dans $\mathbf{r}$ et $\mathbf{u}$, qui rompent l'équivalence entre les SPDEs et la PDF – équivalence qui est par contre obtenue lorsque les champs sont continus.

Comme expliqué en introduction, les discontinuités sont dues au croisement des courbes caractéristiques et à son interprétation dissipative en entropie [42, 88]. Mais cette interprétation n'est pas unique. On peut également considérer une interprétation conservative en entropie de ce croisement [42, 88] : ainsi, au lieu d'une discontinuité, le croisement des courbes caractéristiques aboutit à une solution multivaluée (régime "wave-breaking"). La différence entre les deux interprétations est représentée en figure 4.2, pour l'exemple détaillé en section 4.3.2 et pour les SPDEs simplifiées associées données par l'équation

(4.7). Les solutions après l'instant de croisement t_c des courbes caractéristiques de cet exemple sont également affichées en figure 4.3.

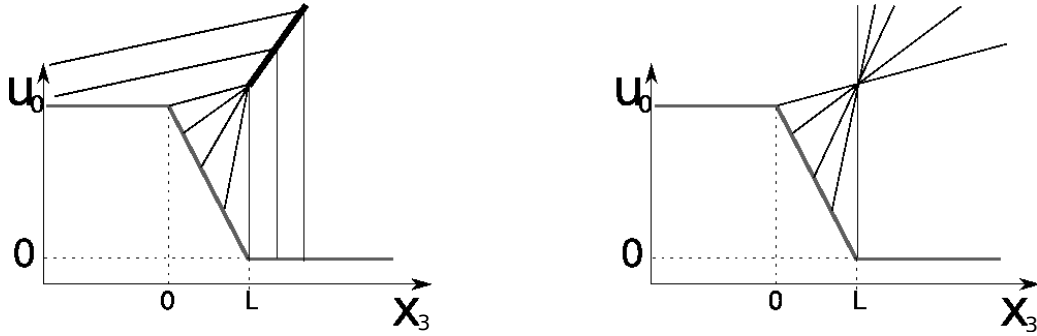


FIGURE 4.2 – Différence entre les interprétations dissipative en entropie (gauche) et conservative en entropie (droite) de l'équation (4.7b) à partir de l'exemple de la section 4.3.2. Ligne grise pleine : condition initiale. Lignes noires pleines : courbes caractéristiques. Ligne noire épaisse sur la figure de gauche : choc

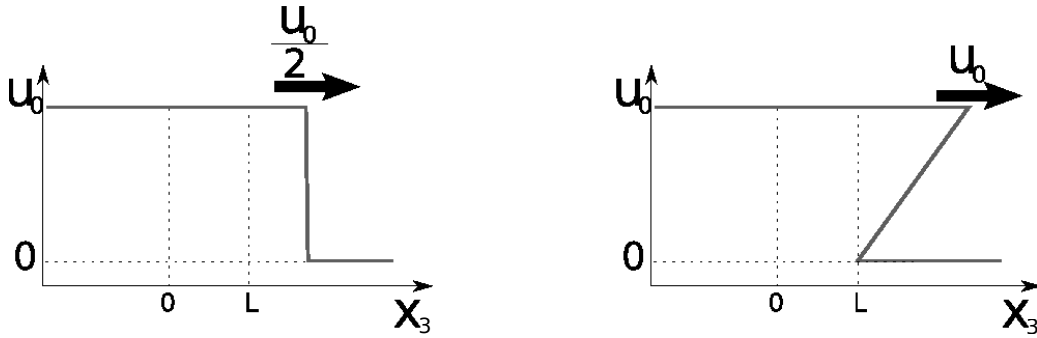


FIGURE 4.3 – Solution après le croisement des courbes caractéristiques de l'équation (4.7b) à partir de l'exemple donné en section 4.3.2 ($t > t_c$). Gauche : interprétation dissipative en entropie. Droite : interprétation conservative en entropie

Dans cette section, on s'intéresse à la question de savoir si les SPDEs (4.5) associées à une interprétation conservative en entropie sont en effet équivalentes à l'équation PDF initiale (4.1).

4.4.1 Description des champs multivalués à l'aide de graphes paramétrés

Avec l'approche conservative en entropie, une difficulté majeure apparaît : les champs stochastiques deviennent multivalués. Par conséquent, on ne peut pas chercher des champs stochastiques de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ comme c'était le cas dans [143] et en section 4.3. Une possibilité pour surmonter cette difficulté est d'exprimer les champs multivalués comme des graphes paramétrés, à l'instar de ce qui est fait dans [42, 88]. Au lieu de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

et $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$, on introduit alors les champs paramétrés suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{s}, t) \quad , \quad \mathbf{r}(\mathbf{s}, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(\mathbf{s}, t) \\ \text{avec} \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in [0, 1]^3 \text{ le paramètre du graphe.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cette description se comprend plus aisément en 1D, comme illustré en figure 4.4. Dans cet exemple, s_3 peut être appréhendé comme la distance d'un point initial de la courbe adimensionnée par la longueur totale de la courbe. Le long de la courbe, $\mathcal{U}_3$ et x_3 peuvent être formulés comme des fonctions de cette distance mesurée même si la solution est multivaluée. Cela est montré dans la partie droite de la figure 4.4.

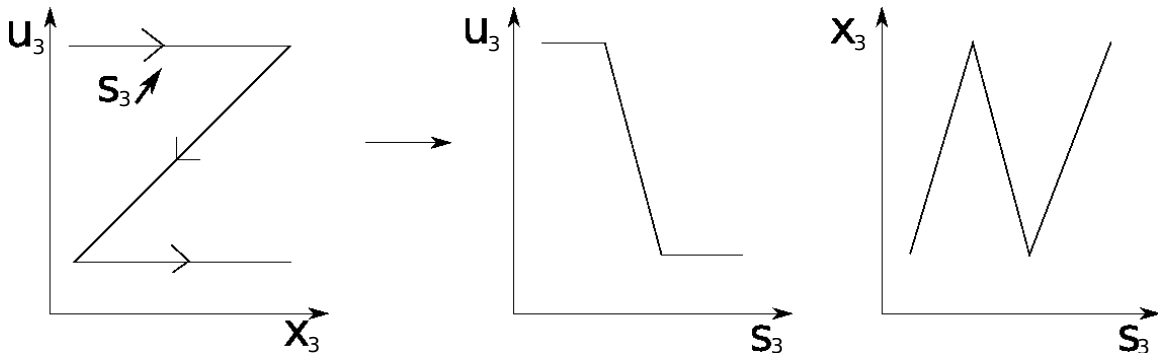


FIGURE 4.4 – Exemple de champ multivalué 1D (gauche) et sa représentation sous forme de graphe paramétré (droite)

Notons que l'expression (4.9) inclue le cas où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{r}$ sont des fonctions monovaluées de l'espace. Dans ce cas particulier, les coordonnées x_i sont chacune des fonctions monotones de s_i de telle sorte que l'on a seulement besoin d'inverser ces relations monotones pour obtenir $\mathbf{U}$ et $\mathbf{r}$ comme des fonctions de x_i .

Plus généralement, introduisons le Jacobien J de la position $\mathbf{x}$ en fonction du paramètre $\mathbf{s}$:

$$J(\mathbf{s}, t) = |\partial_{\mathbf{s}} \mathbf{x}|(\mathbf{s}, t) = \text{Det}(\partial_{s_j} x_i(\mathbf{s}, t)) \quad (4.10)$$

Pour un champ multivalué donné à un instant donné, il existe un nombre fini $N_B(t)$ de régions continues dans l'espace du paramètre dans lesquelles le Jacobien J est différent de zéro. Dans chacune de ces régions, dénotées par $\mathcal{D}_b$, $1 \leq b \leq N_B(t)$, on peut inverser la relation $\mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$ car $J \neq 0$. Ainsi, on peut exprimer $\mathbf{s}$ en fonction de $\mathbf{x}$ et donc $\mathbf{U}$ et $\mathbf{r}$ en fonction de $\mathbf{x}$. Par conséquent, chacune de ces $N_B(t)$ régions $\mathcal{D}_b$ où $J \neq 0$ correspond à une branche monovaluée du champ multivalué.

Nous définissons ci-après $\mathbf{r}^b(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{U}^b(\mathbf{x}, t)$ comme étant les branches solutions monovaluées issues de la région numéro b , $1 \leq b \leq N_b$ où $J \neq 0$. Ce couple solution est valide pour $\mathbf{x}$ dans un domaine D_b correspondant à la transformée du domaine de l'espace paramétré $\mathcal{D}_b$ en utilisant $\mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$. Par exemple, la figure 4.5 montre une solution 1D multivaluée

pouvant être exprimée grâce au formalisme de graphe comme dans la figure 4.4. Elle peut également être divisée en une superposition de 3 branches : $\mathcal{U}_3^1 = 1$ pour $x_3 \leq x_r$, $\mathcal{U}_3^2 = (x - x_l)/(x_r - x_l)$ pour $x_l \leq x_3 \leq x_r$ et $\mathcal{U}_3^3 = 0$ pour $x_3 \geq x_l$.

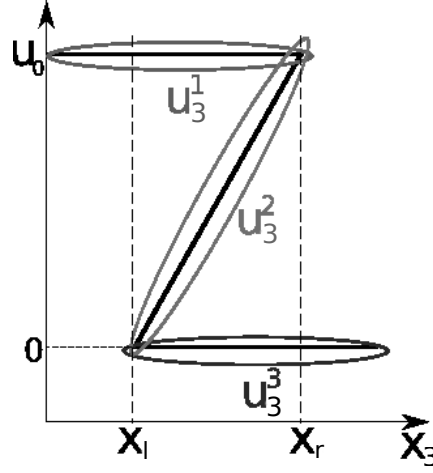


FIGURE 4.5 – Exemple de champ 1D multivalué et sa division en 3 branches

Notons qu'une approche similaire à la description sous forme de graphe paramétré de [42, 88] a été introduite dans [58, 59] où les branches sont définies comme des flux et où un lien avec l'approche lagrangienne est établi. En particulier, dans [58, 59], le rôle joué par les paramètres $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ est attribué aux coordonnées initiales de trajectoires lagrangiennes.

4.4.2 Graphe solution des SPDEs (4.5)

En utilisant des techniques similaires à celles proposées dans [42], on peut montrer que le graphe solution des SPDEs (4.5), interprété dans le sens conservatif en entropie, vérifie :

$$\partial_t x_i(\mathbf{s}, t) = \mathcal{U}_i(\mathbf{s}, t) \quad , \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{U}_i(\mathbf{s}, t) = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_i \bar{P}(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), t) - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega}(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), t) \left(\mathcal{U}_i(\mathbf{s}, t) - \langle \mathcal{U}_i \rangle(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), t) \right) \\ & + \sqrt{C_0 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}(\mathbf{s}, t), t)} \dot{W}_i \quad , \end{aligned} \quad (4.11b)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{s}, t) = \frac{m_0(\mathbf{s})}{J(\mathbf{s}, t)} \quad , \quad (4.11c)$$

où $m_0(\mathbf{s})$ est la condition initiale de $\mathbf{r}(\mathbf{s}, t)|\partial_{\mathbf{s}} \mathbf{x}|$ et où, on le rappelle, $J = |\partial_{\mathbf{s}} \mathbf{x}|$ est le Jacobien de la position $\mathbf{x}$ en fonction du paramètre $\mathbf{s}$.

La solution (4.11) traduit simplement l'évolution de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{u}$ le long des courbes caractéristiques des SPDEs (4.5). En comparant cette solution aux SODEs lagrangiennes utilisées dans les méthodes LMC [119, 120], on peut remarquer qu'elles sont quasiment

identiques. Certaines différences existent néanmoins. La première vient du fait que les SODEs des méthodes LMC ne dépendent pas des paramètres $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ mais sont plutôt liées aux coordonnées initiales de la trajectoire lagrangienne. Par ailleurs, dans les méthodes LMC, il n'y a pas de notion de connectivité spatiale. Tous les points de l'espace sont indépendants les uns des autres, tandis que dans la description actuelle, l'espace est paramétré de façon continue. La seconde est que le bruit de Wiener dépend uniquement du temps dans (4.11), alors que dans les SODEs issues des méthodes LMC, il dépend également de la trajectoire lagrangienne considérée.

Notons enfin que le Jacobien $|\partial_{\mathbf{s}}\mathbf{x}|$ donne la variation volumique d'un domaine infinitésimal le long des trajectoires $\mathbf{x}(\mathbf{s}, t)$ et que la solution de la densité stochastique $\mathbf{r}(s, t)$ à l'équation (4.11c) exprime la conservation de la masse dans ce domaine.

4.4.3 PDF de graphe

Étant donné que nous considérons des champs multivalués de la forme donnée par l'équation (4.9), on ne peut définir une PDF de la même façon que dans (4.3). À la place, on introduit une PDF de graphe pondérée :

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{x}; \mathbf{s}, t) = \frac{\langle m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle}{\langle m \rangle(\mathbf{s}, t)}, \quad (4.12)$$

où m est un poids attribué à chaque graphe. Pour les raisons détaillées ci-dessous, m a la dimension d'une masse.

La PDF $F(\mathbf{v}, \mathbf{x}; \mathbf{s}, t)$ donne la probabilité d'obtenir $\mathbf{v}$ et $\mathbf{x}$ à la position $\mathbf{s}$ du graphe. Intégrer F selon $d\mathbf{s}$ permet de parcourir le graphe et de sommer toutes les contributions des champs stochastiques pour des valeurs de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{v}$ données. Ainsi, la PDF donnant la probabilité d'obtenir $\mathbf{x}$ et $\mathbf{v}$ à un instant donné t est définie par la PDF intégrée F_{int} :

$$F_{int}(\mathbf{v}, \mathbf{x}; t) = \frac{\int \langle m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle d\mathbf{s}}{\int \langle m \rangle(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s}}. \quad (4.13)$$

Mais notre intérêt final porte sur la probabilité d'obtenir la vitesse $\mathbf{v}$ sachant la position $\mathbf{x}$. La PDF associée à cette probabilité sera dénotée F_g et correspond à la PDF conditionnée de $\mathbf{v}$ sachant $\mathbf{x}$ construite à partir de F_{int} , i.e. $F_g = F_{int}(\mathbf{v}, \mathbf{x}; t) / \int F_{int}(\mathbf{v}, \mathbf{x}; t) d\mathbf{v}$. Cette PDF conditionnée peut être exprimée alternativement par l'introduction de la densité moyenne de graphe ρ_g définie par :

$$\rho_g(\mathbf{x}, t) = \int \langle m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle d\mathbf{s}. \quad (4.14)$$

Notons que l'identification de ρ_g comme étant une densité requiert que m ait la dimension

d'une masse. Alors, la PDF conditionnée F_g est définie par :

$$F_g(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho_g(\mathbf{x}, t)} \int \langle m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t))) \rangle d\mathbf{s}. \quad (4.15)$$

Cette définition peut être mise en parallèle avec la PDF lagrangienne utilisée dans les méthodes LMC [120, 119]. On remarque qu'il existe une forte similarité entre la PDF des méthodes LMC et la PDF de graphe. Cela est principalement dû au fait que dans les deux approches, on considère $\mathbf{x}$ comme une variable indépendante, par la définition de trajectoire lagrangiennes dans les méthodes LMC ou de graphe paramétré dans le cas présent.

Une autre expression pour F_g est également possible. En effet, on peut utiliser la description de champs multivalués sous forme de branches, telle qu'introduite à la fin de section 4.4.1. Premièrement, en utilisant les mêmes notations qu'en section 4.4.1 et en divisant la solution multivaluée en ses différentes branches indexées b , on peut exprimer ρ_g telle que :

$$\rho_g(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \int_{D_b} m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) d\mathbf{s} \right\rangle \quad (4.16a)$$

$$= \left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \int_{D_b} \frac{m(\mathbf{s}, t)}{J(\mathbf{s}, t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) J(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \right\rangle \quad (4.16b)$$

$$= \left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \int_{D_b} \frac{m^b(\mathbf{x}, t)}{J^b(\mathbf{x}, t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\rangle \quad (4.16c)$$

$$= \left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \frac{m^b(\mathbf{x}, t)}{J^b(\mathbf{x}, t)} I^b(\mathbf{x}) \right\rangle, \quad (4.16d)$$

où I^b est la fonction caractéristique du domaine D_b dans lequel la branche b est définie, i.e. $I^b(\mathbf{x})$ est égal à 1 si $\mathbf{x} \in D_b$ ou à 0 dans le cas contraire. Le passage de (4.16b) à (4.16c) se fait par un changement de variable de $\mathbf{s}$ à $\mathbf{x}$. Ce changement est permis tant qu'il est restreint à des domaines au sein desquels le Jacobien J de la transformée est différent de 0. De façon similaire, on peut exprimer F_g comme :

$$F_g(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{\left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \frac{m^b(\mathbf{x}, t)}{J^b(\mathbf{x}, t)} I^b(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}^b(\mathbf{x}, t)) \right\rangle}{\left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \frac{m^b(\mathbf{x}, t)}{J^b(\mathbf{x}, t)} I^b(\mathbf{x}) \right\rangle}. \quad (4.17)$$

L'équation (4.17) est équivalente à la définition (4.15) de F_g donnée sous forme de graphe. Avec le formalisme de branche, on peut voir plus facilement que F_g généralise la définition monovaluée (4.3) de la PDF f_S des champs stochastiques. Quand $N_B = 1$, les deux expressions sont en effet identiques.

4.4.4 Évolution de la PDF de graphe F_g associée aux SPDEs (4.5)

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour vérifier si la PDF F_g associée aux champs stochastiques multivalués évoluant selon les SPDEs (4.5) a une équation de transport identique à l'équation (4.1).

D'abord, on dérive l'équation (4.15) selon t et on déduit l'évolution suivante pour F_g :

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_g F_g) = & - \partial_{X_i} \left(\int \langle m(\mathbf{s}, t) \partial_t x_i(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle d\mathbf{s} \right) \\ & - \partial_{v_i} \left(\int \langle m(\mathbf{s}, t) \partial_t \mathcal{U}_i(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle d\mathbf{s} \right) \\ & + \int \langle \partial_t m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Ensuite, injecter la solution multivaluée des SPDEs (4.5) donnée par l'équation (4.9), nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_g F_g) + v_i \partial_{X_i} (\rho_g F_g) = & \partial_{v_i} \left(\left(\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{P} + \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} (v_i - \tilde{u}_i) \right) \rho_g F_g \right) \\ & + \frac{C_0}{2} \tilde{\varepsilon} \partial_{v_i v_i}^2 (\rho_g F_g) + \int \langle \partial_t m(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}(\mathbf{s}, t)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{s}, t)) \rangle d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Ainsi, les évolutions de $\rho_g F_g$ et $\bar{\rho} \tilde{f}$ sont identiques pourvu que :

$$\partial_t m(\mathbf{s}, t) = 0.$$

Avec cette spécification, l'égalité entre F_g et $\tilde{f}$ est assurée dès que leurs conditions initiales et limites sont identiques. Par conséquent, on a montré que lorsque les SPDEs (4.5) sont interprétées dans le sens multivalué conservatif en entropie, elles deviennent statistiquement équivalentes à l'équation PDF (4.1).

Notons qu'en choisissant pour $m(\mathbf{s})$ une valeur constante $m_0(\mathbf{s})$, on peut établir un lien avec la densité stochastique, telle que donnée par l'équation (4.11c) :

$$m(\mathbf{s}, t) = m_0(\mathbf{s}) = \mathbf{r}(\mathbf{s}, t) J(\mathbf{s}, t).$$

Ce choix particulier permet de simplifier l'expression sous forme de branches de la PDF (4.17). En effet, on a alors $\frac{m^b(\mathbf{x}, t)}{J^b(\mathbf{x}, t)} = \mathbf{r}^b(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$F_g(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{\left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \mathbf{r}^b(\mathbf{x}, t) I^b(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{U}^b(\mathbf{x}, t)) \right\rangle}{\left\langle \sum_{b=1}^{N_B(t)} \mathbf{r}^b(\mathbf{x}, t) I^b(\mathbf{x}) \right\rangle}. \quad (4.18)$$

4.5 Méthode numérique

Jusqu'ici, nous avons établi que la solution multivaluée conservative en entropie des SPDEs (4.5), telle que définie par son expression sous forme de graphe (4.9), est statistiquement équivalente à l'équation PDF (4.1). la question à laquelle nous souhaitons apporter des réponses est : Comment résoudre numériquement ces SPDEs multivaluées ?

L'idée est de reprendre la méthode initialement proposée dans [115], puis de la reformuler dans le cadre proposé ici. L'approche proposée dans [115] est basée sur la méthode de choix aléatoire (RCM) [49] : l'idée consiste à échantillonner les différentes branches de la solution multivaluée et de retrouver cette solution multivaluée dans un sens statistique. Cette méthode devrait être adaptée pour un usage au sein d'une méthode de Monte Carlo.

4.5.1 Équation PDF et SPDEs simplifiées

Afin de présenter l'idée derrière ce schéma numérique, on considère la même équation PDF simplifiée que celle de la section 4.3.2, (équation (4.6)). Par souci de complétude, on répète l'équation (4.6) ci-dessous. De plus, on abandonne l'indice 3 faisant référence à la direction inhomogène dans cette équation afin d'alléger les notations. On considère alors l'équation PDF 1D simplifiée :

$$\partial_t (\bar{\rho} \tilde{f}) + v \partial_x (\bar{\rho} \tilde{f}) = 0. \quad (4.19)$$

On reprend également les SPDEs simplifiées correspondantes, en abandonnant de nouveau l'indice 3 :

$$\partial_t \mathbf{r} + \partial_x (\mathbf{r} \mathcal{U}) = 0 \quad (4.20a)$$

$$\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{U} \partial_x \mathcal{U} = 0. \quad (4.20b)$$

L'expression sous forme de graphe multivalué de ces SPDEs est :

$$\partial_t x(\mathbf{s}, t) = \mathcal{U}(\mathbf{s}, t) \quad , \quad (4.21a)$$

$$\partial_t \mathcal{U}(\mathbf{s}, t) = 0 \quad , \quad (4.21b)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{s}, t) = \frac{m_0(\mathbf{s})}{J(\mathbf{s}, t)}. \quad (4.21c)$$

4.5.2 Description de la méthode numérique

On considère un domaine 1D $[0, L]$ discrétisé par un maillage à N_x mailles de taille Δx , centrées en x_i , et s'étendant de $x_{i-1/2} = x_i - \Delta x/2$ à $x_{i+1/2} = x_i + \Delta x/2$. À l'instant t , on suppose qu'il y a un nombre fini de branches $N_B(t)$ et que les champs multivalués peuvent être divisés en leurs branches comme défini en fin de section 4.4.1. Ensuite, dans chaque

maille i et pour chaque branche b , on suppose que les valeurs de $\mathbf{r}$ et $\mathcal{U}$ sont constantes :

$$\text{Pour } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad , \quad \mathbf{r}^b(x, t) = \mathbf{r}_i^b \quad \text{et} \quad \mathcal{U}^b(x, t) = \mathcal{U}_i^b .$$

Cette solution constante par morceaux pour chaque branche est représentée dans la partie gauche de la figure 4.6.

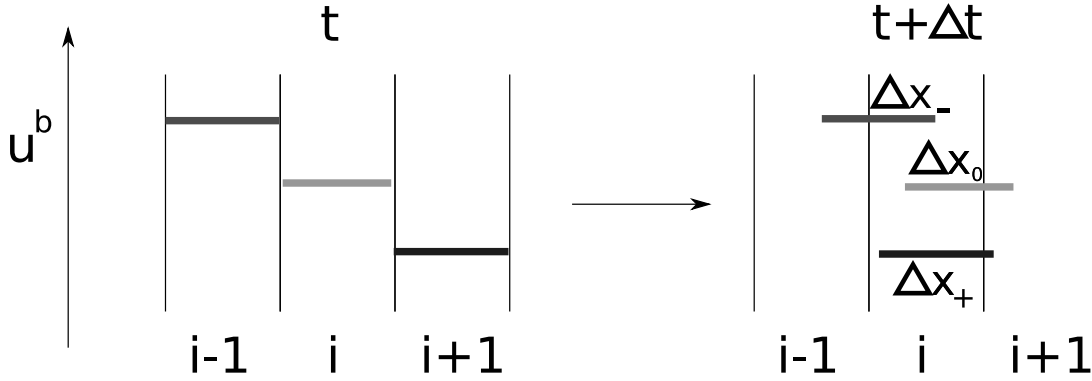


FIGURE 4.6 – Évolution d'un champ de vitesse u^b initialement constant par morceaux (gauche) selon les SPDEs (4.20). À l'instant $t + \Delta t$ (droite), la maille i contient les contributions des mailles i , $i + 1$ et $i - 1$. La contribution de la maille i , $\mathcal{U}_i^b$, occupe un intervalle de longueur $\Delta x_0 = \Delta x - |\mathcal{U}_i^b| \Delta t$, celle de la maille $i + 1$, $\mathcal{U}_{i+1}^b$, un intervalle de longueur $\Delta x_+ = -\min(\mathcal{U}_{i+1}^b, 0) \Delta t$ et celle de la maille $i - 1$, $\mathcal{U}_{i-1}^b$, un intervalle de longueur $\Delta x_- = \max(\mathcal{U}_{i-1}^b, 0) \Delta t$

En partant de cette condition initiale, on avance la solution sur un petit intervalle de temps Δt selon les SPDEs (4.20) ou de façon équivalente leur expression sous forme de graphe (4.21). On suppose que Δt obéit à une condition CFL telle que l'information ne puisse pas se propager au-delà d'une maille pendant Δt :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_{i,b} |\mathcal{U}_i^b|} . \quad (4.22)$$

On déduit ensuite qu'au temps $t + \Delta t$, on a pour $1 \leq b \leq N_B$:

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad , \quad \mathbf{r}^b(x, t + \Delta t) &= (\mathbf{r}_i^b I_0^b(x) \quad , \quad \mathbf{r}_{i+1}^b I_+^b(x) \quad , \quad \mathbf{r}_{i-1}^b I_-^b(x)) \\ \text{et} \quad \mathcal{U}^b(x, t + \Delta t) &= (\mathcal{U}_i^b I_0^b(x) \quad , \quad \mathcal{U}_{i+1}^b I_+^b(x) \quad , \quad \mathcal{U}_{i-1}^b I_-^b(x)) \end{aligned}$$

avec $I_0^b(x) = H(x - (x_{i-1/2} + \mathcal{U}_i^b \Delta t)) H(x_{i+1/2} + \mathcal{U}_i^b \Delta t - x)$, $I_+^b(x) = H(x_{i+1/2} + \mathcal{U}_{i+1}^b \Delta t - x)$ et $I_-^b(x) = H(x - (x_{i-1/2} + \mathcal{U}_{i-1}^b \Delta t))$. Cette solution est illustrée dans la partie droite de la figure 4.6.

À ce point, la méthodologie que l'on suit est identique à celle utilisée pour dériver un schéma de type Godunov. Dans une configuration monovaluée classique, la prochaine étape consisterait à moyenner la solution exacte dérivée dans la maille i et à attribuer cette valeur à l'initialisation du pas de temps suivant. Cependant, cette opération n'est

pas applicable dans notre configuration multivaluée et il nous faut trouver une étape alternative.

Si on retourne à la solution dérivée en maille i , on peut remarquer que le nombre de branches a potentiellement augmenté d'un facteur 3. Pour éviter une augmentation exponentielle du nombre de branches qui rendrait la résolution numérique du problème impossible, on doit appliquer une étape de réduction supplémentaire. Cette étape de réduction doit être dérivée de façon à préserver les statistiques en un point des champs stochastiques. Pour cela, on considère la PDF de ces champs au temps $t + \Delta t$. On a, d'après l'équation (4.18), pour x dans la maille i :

$$\rho_g F_g(v, x; t + \Delta t) = \left\langle \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}_i^b I_0^b(x) \delta(v - \mathcal{U}_i^b) + \mathbf{r}_{i+1}^b I_+^b(x) \delta(v - \mathcal{U}_{i+1}^b) + \mathbf{r}_{i-1}^b I_-^b(x) \delta(v - \mathcal{U}_{i-1}^b) \right\rangle$$

En intégrant cette expression sur la maille i , de $x_{i-1/2}$ à $x_{i+1/2}$, on obtient :

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho_g F_g(v, x; t) dx \quad (4.23a)$$

$$= \left\langle \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}_i^b \frac{\Delta x_0}{\Delta x} \delta(v - \mathcal{U}_i^b) + \mathbf{r}_{i+1}^b \frac{\Delta x_+}{\Delta x} \delta(v - \mathcal{U}_{i+1}^b) + \mathbf{r}_{i-1}^b \frac{\Delta x_-}{\Delta x} \delta(v - \mathcal{U}_{i-1}^b) \right\rangle \quad (4.23b)$$

$$\text{avec } \Delta x_0 = \Delta x - |\mathcal{U}_i| \Delta t, \Delta x_+ = -\min(\mathcal{U}_{i+1}, 0) \Delta t \text{ et } \Delta x_- = \max(\mathcal{U}_{i-1}, 0) \Delta t. \quad (4.23c)$$

Cette expression peut être reformulée en introduisant la densité $\mathbf{r}_*^b$ et les probabilités P_0^b , P_b^+ et P_b^- :

$$\mathbf{r}_*^b = \mathbf{r}_i^b \frac{\Delta x_0}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i+1}^b \frac{\Delta x_+}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i-1}^b \frac{\Delta x_-}{\Delta x} \quad (4.24)$$

$$P_0^b = \frac{\mathbf{r}_i^b \Delta x_0}{\mathbf{r}_*^b \Delta x}, \quad P_b^+ = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^b \Delta x_+}{\mathbf{r}_*^b \Delta x} \quad \text{et} \quad P_b^- = \frac{\mathbf{r}_{i-1}^b \Delta x_-}{\mathbf{r}_*^b \Delta x}. \quad (4.25)$$

Notons que les probabilités $P_{\{0,+, -\}}^b$ sont positives et inférieures à 1 tant que la condition CFL (4.22) est vérifiée. Avec ces définitions, on a :

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \left\langle \sum_b \mathbf{r}_*^b (P_0^b \delta(v - \mathcal{U}_i^b) + P_b^+ \delta(v - \mathcal{U}_{i+1}^b) + P_b^- \delta(v - \mathcal{U}_{i-1}^b)) \right\rangle.$$

L'idée est d'échantillonner les probabilités P_0^b , P_b^+ et P_b^- avec un processus stochastique

$(\xi_0^b, \xi_+^b, \xi_-^b)$ de telle sorte que :

$$(\xi_0^b, \xi_+^b, \xi_-^b) = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{w. p. } P_0^b \\ (0, 1, 0) & \text{w. p. } P_+^b \\ (0, 0, 1) & \text{w. p. } P_-^b \end{cases}$$

Ensuite, on peut remplacer $P_{\{0,+, -\}}^b$ par $\xi_{\{0,+, -\}}^b$ dans l'expression de $\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i$:

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \left\langle \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}_*^b (\xi_0^b \delta(v - \mathcal{U}_i^b) + \xi_+^b \delta(v - \mathcal{U}_{i+1}^b) + \xi_-^b \delta(v - \mathcal{U}_{i-1}^b)) \right\rangle$$

Finalement, en utilisant le fait que les $\xi_{\{0,+, -\}}^b$ sont égaux soit à 1 soit à 0, on peut écrire :

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \left\langle \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}_*^b \delta(v - \mathcal{U}_*^b) \right\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_*^b = \xi_0^b \mathcal{U}_i^b + \xi_+^b \mathcal{U}_{i+1}^b + \xi_-^b \mathcal{U}_{i-1}^b$$

Par conséquent, l'utilisation du processus d'échantillonnage $(\xi_0^b, \xi_+^b, \xi_-^b)$ nous permet d'exprimer $\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i$ comme une moyenne sur une somme de N_B branches. Ainsi, grâce à cet échantillonnage, nous n'avons pas augmenté le nombre de branches entre les temps t et $t + \Delta t$, tout en préservant statistiquement l'intégrale de $\rho_g F_g(v; t + \Delta t)$ dans la maille.

4.5.3 Résumé de l'algorithme proposé

Bien que de nombreuses étapes aient été nécessaires pour pouvoir montrer la consistance de la méthode numérique proposée, celle-ci peut être résumée comme suit :

- Au temps t , les solutions $\mathbf{r}_i^b$ et $\mathcal{U}_i^b$ de chaque branche b dans la maille i sont connues.
- Un pas de temps Δt est choisi pour satisfaire la condition CFL de l'équation (4.22).
- Au temps $t + \Delta t$, la densité stochastique est mise à jour à la valeur $\mathbf{r}_*^b$ donnée par l'équation (4.30) :

$$\mathbf{r}_i^b(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i^b \frac{\Delta x_0}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i+1}^b \frac{\Delta x_+}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i-1}^b \frac{\Delta x_-}{\Delta x}$$

Cette mise à jour correspond à la solution de l'équation (4.20a) obtenue par un schéma déterministe volume fini de Godunov.

- Au temps $t + \Delta t$, la vitesse stochastique est mise à jour comme suit :

$$\mathcal{U}_i^b(t + \Delta t) = \begin{cases} \mathcal{U}_i^b & \text{w. p. } P_0^b \\ \mathcal{U}_{i+1}^b & \text{w. p. } P_+^b \\ \mathcal{U}_{i-1}^b & \text{w. p. } P_-^b \end{cases},$$

où les expressions pour les probabilités $P_{\{0,+,-\}}^b$ sont données par l'équation (4.30).

4.5.4 Ordre de l'algorithme proposé

L'algorithme que l'on propose est tel que la PDF des champs stochastiques au temps $t + \Delta t$ est donnée par la formule (4.29). Insérer les valeurs de $\Delta \mathbf{x}_{\{0,+,-\}}$ dans cette formule et utiliser la propriété de sifting des fonctions Dirac nous permet de déduire que l'algorithme proposé aboutit à :

$$\begin{aligned} \rho_g F_g(\mathbf{v}; t + \Delta t)|_i = & \rho_g F_g(\mathbf{v}; t)|_i + \frac{\Delta t}{\Delta \mathbf{x}} \left(-|\mathbf{v}| \rho_g F_g(\mathbf{v}; t)|_i + \min(\mathbf{v}, 0) \rho_g F_g(\mathbf{v}; t)|_{i+1} \right. \\ & \left. + \max(\mathbf{v}, 0) \rho_g F_g(\mathbf{v}; t)|_{i-1} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cette expression correspond à la discrétisation de l'équation (4.19) à l'aide d'une méthode volume fini de Godunov d'ordre 1. Ainsi, l'algorithme proposé est statistiquement équivalent à cette méthode et possède les mêmes propriétés. En particulier, il est d'ordre 1 en temps et en espace.

4.5.5 Algorithme complet appliqué aux SPDEs (4.5)

L'algorithme proposé résumé dans la sous-section précédente s'applique aux SPDEs simplifiées (4.20). Son extension à la résolution des SPDEs complètes (4.5) est directe. En utilisant une procédure de splitting temporel, il peut être décrit comme suit par un pas de temps allant de t à $t + \Delta t$:

- *Advection* : On applique l'algorithme de la section 4.5.3 dans la direction x_3 , puis dans la direction x_2 , puis dans la direction x_1 .
Les nouvelles valeurs des champs stochastiques à la fin de ces sous-étapes sont dénotées par $\mathbf{r}^*$ et $\mathbf{U}^*$.
- *Termes source* : On utilise un schéma d'Euler-Maruyama pour mettre à jour $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ et $\mathbf{U}(t + \Delta t)$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}^* \quad (4.27)$$

$$\mathcal{U}_i(t + \Delta t) = \mathcal{U}_i^* - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{P} - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} (\mathcal{U}_i - \langle \mathcal{U}_i \rangle) \right) \Big|_t + \sqrt{C_0 \tilde{\varepsilon}|_t} \Delta t \eta_i \quad (4.28)$$

où les η_i sont des bruits Gaussiens indépendants de moyenne 0 et de variance 1. Le schéma d'Euler-Maruyama a des taux de convergence fort et faible de 0.5 et 1, respectivement. Il est également inconditionnellement stable [79].

4.5.6 Nombre de branches - Nombre de réalisations

L'algorithme proposé a été décrit pour une réalisation des champs stochastiques $\mathbf{r}$ et $\mathcal{U}$. Dans une méthode de Monte Carlo, on considère un ensemble de N réalisations de ces champs, dénotés par $\mathbf{r}^{(n)}$ et $\mathcal{U}^{(n)}$, avec $1 \leq n \leq N$. Les branches de chacun de ces champs sont dénotées $\mathbf{r}^{(n,b)}$ et $\mathcal{U}^{(n,b)}$. Pour des raisons de simplicité, on suppose que chaque champ a le même nombre de branches N_B . Un point important est que, avec notre algorithme, N_B restera constant dans le temps.

D'après l'équation (4.18), la PDF F_g est alors calculée comme :

$$F_g(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t)|_N = \frac{\frac{1}{NN_B} \sum_{n=1}^N \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}^{(n,b)}(\mathbf{x}, t) I^{(n,b)}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{v} - \mathcal{U}^{(n,b)}(\mathbf{x}, t))}{\frac{1}{NN_B} \sum_{n=1}^N \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}^{(n,b)}(\mathbf{x}, t) I^{(n,b)}(\mathbf{x})}.$$

En introduisant le nombre total $N_{tot} = NN_B$ et l'indice $j = n + N(b - 1)$ à la place du couple (n, b) , on peut réécrire l'expression précédente comme :

$$F_g(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t)|_N = \frac{\frac{1}{N_{tot}} \sum_{j=1}^{N_{tot}} \mathbf{r}^j(\mathbf{x}, t) I^j(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{v} - \mathcal{U}^j(\mathbf{x}, t))}{\frac{1}{N_{tot}} \sum_{j=1}^{N_{tot}} \mathbf{r}^j(\mathbf{x}, t) I^j(\mathbf{x})}.$$

Ainsi, on peut voir que branches et réalisations se confondent dans l'expression de $F_g(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t)$. Travailler avec 1 branche et N_{tot} réalisations ou travailler avec 1 réalisation et N_{tot} branches aboutira à la même PDF. Pour les applications numériques que l'on détaillera ci-dessous, on supposera que $N_B = 1$.

4.5.7 Variante de la méthode d'échantillonnage

La méthode d'échantillonnage proposée plus haut n'est pas la seule méthode dérivée de la RCM de Glimm valable pour la résolution d'équations aux solutions multivaluées. On propose ainsi pour certaines applications numériques ci-dessous une variante de cette méthode. Dans cette nouvelle méthode, on ne considère plus une densité stochastique $\mathbf{r}_i^b$ propre à chaque branche monovaluée, mais une densité stochastique $\mathbf{r}_i$ commune à l'ensemble des branches de la solution multivaluée. La densité stochastique $\mathbf{r}_i$ n'est donc plus dépendante que de la réalisation considérée. On déduit donc qu'au temps $t + \Delta t$, on a pour $1 \leq b \leq N_B$:

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad , \quad \mathbf{r}(x, t + \Delta t) &= (\mathbf{r}_i I_0^b(x) \quad , \quad \mathbf{r}_{i+1} I_+^b(x) \quad , \quad \mathbf{r}_{i-1} I_-^b(x)) \\ \text{et } \mathcal{U}^b(x, t + \Delta t) &= (\mathcal{U}_i^b I_0^b(x) \quad , \quad \mathcal{U}_{i+1}^b I_+^b(x) \quad , \quad \mathcal{U}_{i-1}^b I_-^b(x)) \end{aligned}$$

Comme précédemment, on considère la PDF de ces champs au temps $t + \Delta t$. On a, d'après l'équation (4.18), pour x dans la maille i :

$$\rho_g F_g(\mathbf{v}, x; t + \Delta t) = \left\langle \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}_i I_0^b(x) \delta(\mathbf{v} - \mathcal{U}_i^b) + \mathbf{r}_{i+1} I_+^b(x) \delta(\mathbf{v} - \mathcal{U}_{i+1}^b) + \mathbf{r}_{i-1} I_-^b(x) \delta(\mathbf{v} - \mathcal{U}_{i-1}^b) \right\rangle$$

L'intégration de cette expression sur la maille i , de $x_{i-1/2}$ à $x_{i+1/2}$, donne :

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \left\langle \sum_{b=1}^{N_B} \mathbf{r}_i \frac{\Delta x_0}{\Delta x} \delta(v - \mathcal{U}_i^b) + \mathbf{r}_{i+1} \frac{\Delta x_+}{\Delta x} \delta(v - \mathcal{U}_{i+1}^b) + \mathbf{r}_{i-1} \frac{\Delta x_-}{\Delta x} \delta(v - \mathcal{U}_{i-1}^b) \right\rangle \quad (4.29)$$

La densité $\mathbf{r}_*$ est alors définie par :

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_i \frac{\Delta x_0}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i+1} \frac{\Delta x_+}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i-1} \frac{\Delta x_-}{\Delta x} \quad (4.30)$$

Avec ces définitions, on a :

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \left\langle \mathbf{r}_* \sum_b (P_0^b \delta(v - \mathcal{U}_i^b) + P_+^b \delta(v - \mathcal{U}_{i+1}^b) + P_-^b \delta(v - \mathcal{U}_{i-1}^b)) \right\rangle.$$

Finalement, en remplaçant $P_{\{0,+, -\}}^b$ par $\xi_{\{0,+, -\}}^b$ dans l'expression de $\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i$ et en utilisant le fait que les $\xi_{\{0,+, -\}}^b$ sont égaux soit à 1 soit à 0, on peut, dans ce cas particulier, écrire :

$$\rho_g F_g(v; t + \Delta t)|_i = \left\langle \mathbf{r}_* \sum_{b=1}^{N_B} \delta(v - \mathcal{U}_*^b) \right\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_*^b = \xi_0^b \mathcal{U}_i^b + \xi_+^b \mathcal{U}_{i+1}^b + \xi_-^b \mathcal{U}_{i-1}^b$$

Les changements dus à cette variante de la méthode numérique proposée initialement peuvent alors être résumés comme suit :

- Au temps t , la solution $\mathbf{r}_i$ connue est commune à chaque branche b dans la maille i .
- Au temps $t + \Delta t$, la densité stochastique est mise à jour à la valeur $\mathbf{r}_*$ donnée par l'équation (4.30) :

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i \frac{\Delta x_0}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i+1} \frac{\Delta x_+}{\Delta x} + \mathbf{r}_{i-1} \frac{\Delta x_-}{\Delta x}$$

L'application de ce nouvel algorithme aux SPDEs complètes (4.5) est inchangée par rapport à la version initialement proposée. Des tests de validation numérique de cet algorithme sont également proposées dans la suite de cette section.

4.6 Validation numérique

L'objectif de cette section est de valider la méthode numérique et son alternative décrites en section 4.5. Dans cette optique, on considère un cas test correspondant à une zone de mélange turbulente isotrope en décroissance libre. Il s'agit d'une idéalisation d'une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov telle que celle étudiée dans les chapitres 1 à 3. Cette zone de mélange idéalisée a déjà été utilisée en section 3.2 pour faire l'analyse asymptotique du modèle de Langevin simplifié. Cette configuration sera résolue avec les

méthodes EMC proposées, ainsi qu'avec un schéma LMC d'ordre 1 décrit en annexe 3. Par ailleurs, une solution de référence sera calculée en résolvant l'équation PDF à l'aide d'un schéma volume fini. Cela est possible pour ce problème particulier du fait de sa faible dimension. L'objectif est de confirmer les taux de convergence statistique et spatiale des méthodes EMC proposées et de comparer leurs performances à celles de la méthode LMC standard.

4.6.1 Description du cas test

Nous nous replaçons dans la configuration étudiée en section 3.2. Nous considérons une densité constante, une vitesse moyenne nulle et supposons de façon arbitraire que l'écoulement est isotrope. En nous restreignant à la PDF de la vitesse dans la direction inhomogène x_3 , nous obtenons alors une PDF évoluant selon l'équation (3.1).

Si on abandonne l'indice 3 pour la direction inhomogène x_3 , les vitesses v_3 et u_3 et la PDF marginale $\tilde{f}_3$, l'équation (3.1) devient :

$$\partial_t \tilde{f} + v \partial_x \tilde{f} = -\partial_v \left(\left(\partial_x \tilde{u}^2 - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} v \right) \tilde{f} \right) + \frac{3C_0}{4} \tilde{\omega} \tilde{u}^2 \partial_v^2 \tilde{f} , \quad (4.31)$$

sachant que $\tilde{\varepsilon} = \frac{3}{2} \tilde{\omega} \tilde{u}^2$.

Cette équation PDF est associée à l'équation (4.2) pour $\tilde{\varepsilon}$. En appliquant l'hypothèse précédente à cette équation, on obtient l'évolution simplifiée suivante pour $\tilde{\varepsilon}$:

$$\partial_t \tilde{\varepsilon} + \partial_x \left(\frac{3C_\varepsilon}{2} \tilde{\omega} \tilde{u}^3 \right) = -C_{\varepsilon_2} \tilde{\omega} \tilde{\varepsilon} . \quad (4.32)$$

La méthode de Monte Carlo proposée est appliquée aux équations (4.31) et (4.32). Elle est basée sur les SPDEs suivantes :

$$\partial_t \mathbf{r} + \partial_x (\mathbf{r} \mathcal{U}) = 0 \quad (4.33a)$$

$$\partial_t \mathcal{U} + \mathcal{U} \partial_x \mathcal{U} = \partial_x \tilde{u}^2 - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} \mathcal{U} + \sqrt{\frac{3}{2} C_0 \tilde{\omega} \tilde{u}^2} \dot{W} \quad (4.33b)$$

Notons que, du fait de la présence de $\partial_x \tilde{u}^2$, les SPDEs (4.33) ne sont pas nécessairement hyperboliques.

4.6.2 Configuration numérique

Nous décrivons ici la configuration numérique adoptée dans le cadre de la méthode numérique proposée dans ce chapitre. Le domaine de calcul $[x_{min}, x_{max}]$ est établi à $[-6, 6]$. Il est discrétisé par N_x points, avec N_x variant de 32 à 1024 d'une simulation à l'autre. Le

nombre de champs stochastiques est de N , avec N variant de 16 à 10^5 d'une simulation à l'autre.

Initialement, la densité stochastique est choisie égale à 1 pour chaque champ, tandis que la vitesse stochastique est distribuée aléatoirement à l'aide d'une distribution Gaussienne :

$$\mathbf{r}(x, t = 0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(x, t = 0) = \mathcal{N}(0, \sigma(x))$$

Les profils initiaux de $\langle \mathcal{U}^2 \rangle = \sigma^2$ et $\tilde{\varepsilon}$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}^2 \rangle &= \sigma^2 = \sigma_0^2 \max \left(\left(1 - \left(\frac{x}{\Lambda} \right)^2 \right), 0 \right) + \sigma_{min}^2, \\ \tilde{\varepsilon}(x, t = 0) &= \tilde{\varepsilon}_0 \max \left(\left(1 - \left(\frac{x}{\Lambda} \right)^2 \right), 0 \right) + \tilde{\varepsilon}_{min} \end{aligned}$$

où $\sigma_0^2 = 1$, $\Lambda = 1$ et où $\tilde{\varepsilon}_0 = 0.542$. La valeur de $\tilde{\varepsilon}_0$ est choisie en accord avec la solution auto-similaire dérivée dans [36].

Les paramètres supplémentaires σ_{min}^2 et $\tilde{\varepsilon}_{min}$ sont choisis respectivement égaux à $\sigma_{min}^2 = 10^{-3}$ et $\tilde{\varepsilon}_{min} = 0.542 \cdot 10^{-3}$. Ils sont nécessaires car les fonctions Dirac ne peuvent pas être représentées dans la méthode déterministe que l'on souhaite utiliser pour obtenir une solution de référence à comparer avec notre méthode EMC.

Dans les simulations, nous utiliserons les valeurs suivantes pour les constantes du modèle, à moins que d'autres valeurs ne soient précisées par la suite :

$$C_1 = 4.15, \quad C_\varepsilon = 0.9, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92.$$

La condition CFL dans la méthode EMC est choisie égale à 0.9.

Les simulations sont lancées jusqu'à un temps final t_f défini par :

$$t_f = 5\tau_0 \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{1}{C_{\varepsilon_2} - 1} \frac{\sigma_0^2}{\tilde{\varepsilon}_0}.$$

Le temps τ_0 a été identifié dans [36] comme le temps caractéristique de la solution auto-similaire atteinte en fin de simulation.

4.6.3 Convergence spatiale

Dans le but de confirmer la convergence spatiale de la méthode EMC, on lance des simulations avec un très grand nombre de champs stochastiques $N = 10^5$. Ensuite, on fait varier le nombre de mailles N_x de 32 à 1024.

Les diagnostics que nous examinons sont des mesures de la largeur de la zone de

mélange L_i et de l'énergie cinétique moyenne k_i définies comme :

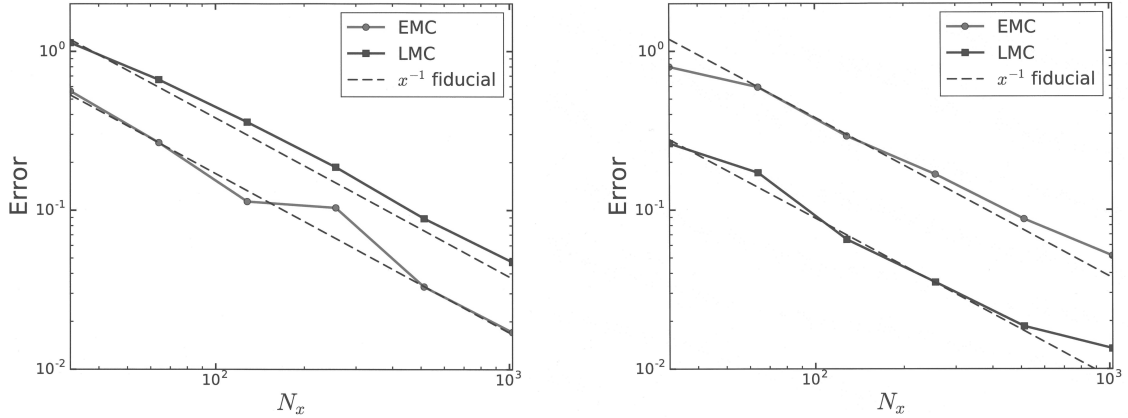
$$L_i(t) = \frac{8}{3} \frac{I_1(t)}{I_0(t)} \quad \text{et} \quad k_i(t) = \frac{3}{4} \frac{I_0(t)}{L_i(t)} \quad (4.34)$$

avec $I_0(t) = \int \langle u^2 \rangle dx$ et $I_1(t) = \int |x| \langle u^2 \rangle dx$.

Lorsque le profil spatial de $\langle u^2 \rangle$ est parabolique, L_i correspond à la demi-largeur de la zone de mélange et k_i à la valeur maximale de $\langle u^2 \rangle$. L'utilisation de diagnostics intégrés nous permet de mieux lisser les fluctuations statistiques des profils et de rendre plus aisée l'observation d'une convergence spatiale.

Les valeurs de L_i et k_i calculées à l'aide de la méthode EMC sont ensuite comparées au temps final $t_f = 5\tau_0$ avec le résultat d'une simulation convergée effectuée à l'aide du code volume fini déterministe détaillé en annexe 1. On introduit les erreurs relatives :

$$E_L = \frac{|L_i^{EMC} - L_i^{ref}|}{L_i^{ref}} \quad \text{et} \quad E_k = \frac{|k_i^{EMC} - k_i^{ref}|}{k_i^{ref}}. \quad (4.35)$$



(a) Erreur relative E_k en fonction de N_x (b) Erreur relative E_L en fonction de N_x

FIGURE 4.7 – Convergence spatiale de la méthode EMC

Ces deux erreurs sont affichées en figure 4.7. Tout d'abord, on peut remarquer que les deux erreurs E_L et E_k diminuent selon un taux proportionnel à N_x^{-1} . La méthode EMC est par conséquent d'ordre 1 en espace.

La figure 4.7 compare également les résultats de la méthode EMC avec ceux de la méthode LMC d'ordre 1 décrite en annexe 3. On peut noter que E_k est plus grande dans le cas de la méthode LMC que dans celui de la méthode EMC, mais que l'inverse est vérifié pour E_L . En conclusion, aucune des deux méthodes ne présente un avantage décisif par rapport à l'autre en termes de convergence spatiale. Elles donnent des taux de convergences similaires, et, selon le diagnostic choisi, les niveaux d'erreurs sont meilleurs pour l'une ou

l'autre.

4.6.4 Convergence statistique

Afin de valider la convergence statistique de la méthode EMC, on lance des simulations à $N_x = 1024$ mailles. Ensuite, on fait varier le nombre de champs stochastiques N de 16 à 10^5 . Pour évaluer le taux de convergence, nous avons utilisé l'erreur relative E_k , telle que définie dans l'équation (4.35), au temps final $t_f = 5\tau_0$ de la simulation.

La figure 4.8 montre E_k en fonction de N . On peut voir que la méthode EMC converge au taux attendu de $N^{-1/2}$. Le même taux est, bien entendu, également observé dans le cas de la méthode LMC. Notons que pour $N < 512$, les simulations LMC n'ont pas pu être lancées car le nombre de particules par maille variait trop et menait à l'apparition de cellules vides ou appauvries. Des algorithmes de correction existent pour pallier ce problème. Ils n'ont cependant pas été implémentés dans cette étude.

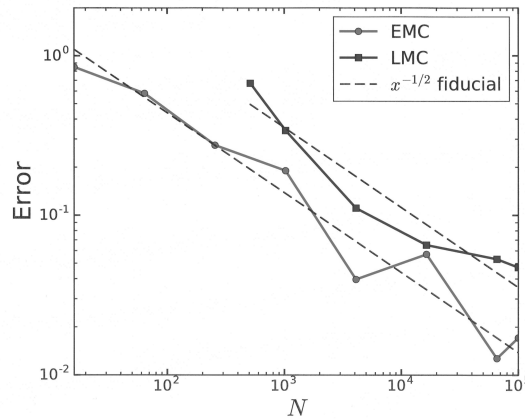


FIGURE 4.8 – Convergence statistique de la méthode EMC pour E_k

4.6.5 Illustration de la différence entre les interprétations conservative et dissipative en entropie

Le but de cette sous-section est d'illustrer l'inadéquation de l'interprétation dissipative en entropie des SPDEs définissant la méthode EMC. Cette inadéquation a déjà été illustrée dans un exemple simple en section 4.3.2 mais cela vaut le coup de renforcer cet argument dans le cas d'une situation plus complexe et réaliste. Dans cette optique, nous avons résolu les SPDEs (4.33) à l'aide d'un schéma volume fini de type Godunov standard au lieu d'utiliser le schéma numérique défini en section 4.5. Ce schéma de Godunov est par construction dissipatif en entropie et aboutit à des solutions monovaluées pour les champs stochastiques. Nous effectuons les différentes simulations avec les mêmes paramètres que

ceux décrits en section 4.6.2 excepté pour la valeur de C_1 qui est choisie égale à 1.2 au lieu de 4.15. Nous choisissons cette valeur afin d'amplifier les différences entre les méthodes.

La figure 4.9 compare la PDF calculée au temps final de la simulation $t_f = 5\tau_0$ et à la position $x = 0.9$ avec la méthode de référence, avec la méthode EMC proposée et avec la méthode EMC dissipative en entropie. Une résolution $N_x = 1024$ et un nombre de champs stochastiques $N = 10^5$ sont utilisés pour les deux méthodes EMC.

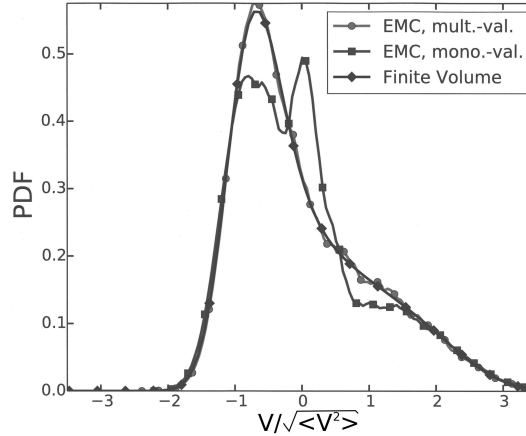


FIGURE 4.9 – PDF de vitesse calculée au temps t_f et à la position $x = 0.9$ à l'aide de trois différentes méthodes : volume fini, EMC multivaluée conservatrice en entropie, EMC monovaluée dissipative en entropie

On peut remarquer que la méthode EMC multivaluée conservatrice en entropie coïncide bien avec la méthode de référence. D'un autre côté, et comme prévu, la méthode EMC monovaluée dissipative en entropie affiche des différences significatives avec la solution de référence. Ces différences ne sont pas dues à un défaut de convergence statistique ou spatiale. Elles sont dues à l'inconsistance de la méthode dissipative en entropie, comme expliqué en section 4.3.2 et par la suite.

4.6.6 Validation numérique de la variante de la méthode d'échantillonnage

Dans cette sous-section, nous illustrons la validation numérique de la variante de la méthode d'échantillonnage proposée en sous-section 4.5.7. La configuration numérique adoptée reste identique à celle proposée dans le cadre de la méthode d'échantillonnage principale.

Dans un premier temps, on fixe le nombre de mailles N_x à 256 et le nombre total de champs stochastiques $N = N_f * N_{val}$ à 16000 tout en faisant varier les nombre de réalisations stochastiques N_f et de valeurs multiples N_{val} entre 4 et 4000.

Les diagnostics que nous examinons sont de nouveau les quantités intégrées L_i et k_i , toujours dans le but de correctement lisser les fluctuations statistiques des profils.

Les valeurs de L_i et k_i calculées à l'aide de la méthode EMC sont une fois de plus comparées au temps final $t_f = 5\tau_0$ avec le résultat d'une simulation convergée effectuée à l'aide du code volume fini déterministe détaillé en annexe 1, par le biais des erreurs relatives E_L et E_k .

Nous avons comparé les évolutions de E_k et E_L en fonction du couple (N_f, N_{val}) pour une valeur de N fixée à 16000. On remarque que la convergence statistique de cette variante de la méthode EMC repose uniquement sur l'évolution des valeurs de N_f . En effet, celle-ci est bien proportionnelle à $N_f^{1/2}$. L'augmentation de la valeur de N_{val} semble en revanche avoir peu d'importance et ne suffit pas à compenser une valeur de N_f trop faible.

Pour confirmer ce propos, on lance également des simulations avec des nombres de mailles et de réalisations fixés respectivement à 256 et 1000, et on fait varier le nombre de valeurs multiples N_{val} entre 1 et 100.

On remarque que l'évolution de la valeur de N_{val} entre 1 et 100 n'a que peu d'influence sur les résultats de la variante de la méthode EMC. Il ne semble pas y avoir de convergence de E_k et E_L au fur et à mesure de l'augmentation de N_{val} .

Au final, on remarque que cette variante présente un intérêt limité par rapport à la méthode numérique présentée initialement en section 4.4.

4.7 Passage à l'ordre 2

À présent que les deux méthodes simples LMC et EMC d'ordre 1 ont été comparées à la fois entre elles, mais également à une méthode volume fini de référence, nous nous intéressons maintenant à leur potentiel d'amélioration. En ce qui concerne les méthodes numériques, la principale source d'amélioration provient de la montée en ordre de la méthode elle-même. Ainsi, nous allons analyser dans cette section les possibilités de passage à l'ordre 2 offertes par les méthodes EMC et LMC, que nous comparerons alors à nouveau.

4.7.1 Ordre 2 en temps

Afin de passer la méthode EMC à l'ordre 2 en temps, nous avons utilisé un schéma Runge-Kutta d'ordre 2. L'application de ce schéma à notre méthode numérique présentée en section 4.5.2 ne représentant pas de difficulté rédhibitoire pour son passage à l'ordre 2, nous ne ferons que l'évoquer dans cette partie. Elle est cependant décrite en détail en annexe 5.

4.7.2 Difficulté de la montée en ordre en espace

C'est dans le passage à l'ordre 2 en espace de la méthode EMC que réside la principale difficulté concernant sa montée en ordre. Nous n'avons en effet pas été en mesure de l'effectuer au cours de la thèse, pour les raisons que nous allons décrire dans la suite de cette partie.

Pour commencer, nous rappelons que le passage à l'ordre 2 se fait en deux étapes principales. La première consiste en un calcul de pentes sur les champs de vitesse au sein d'une maille i . En effet, on ne considère plus un champ de vitesse constant au sein de la maille, mais une évolution linéaire prenant en compte le gradient du champ de vitesse entre la maille i et ses mailles voisines $i - 1$ et $i + 1$.

On peut alors dans un deuxième temps procéder à l'advection des champs de vitesse interpolés entre t et $t + \Delta t$ afin de déterminer la nouvelle valeur de la vitesse dans la maille i à l'instant $t + \Delta t$.

Or, il est très difficile de mettre en place ces deux étapes dans le cadre de la méthode de choix aléatoire (RCM) que nous utilisons. En effet, du fait de notre schéma numérique, les champs de vitesse perdent leur régularité et sont discontinus en chaque point. Les pentes calculées avec des limiteurs d'ordre 2 sont alors nulles, ce qui nous ramène à une méthode numérique d'ordre 1.

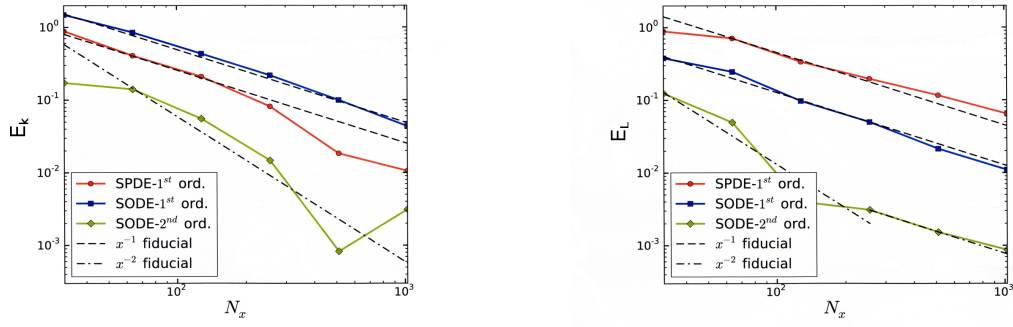
Il n'existe pas de solution simple permettant de pallier ce problème, qui représente aujourd'hui toujours un obstacle à la montée en ordre de notre méthode EMC.

4.7.3 Comparaison aux méthodes LMC

La montée en ordre difficile des méthodes EMC est à contraster avec celle beaucoup plus évidente des méthodes LMC. Pour ces méthodes, les interpolations spatiales se font au niveau des champs moyens et posent donc moins de soucis que pour les méthodes EMC. Cette opération est détaillée en annexe 4. Le résultat de la montée en ordre a un effet très significatif sur la précision des résultats. Pour illustrer cet effet, nous avons procédé à des tests de convergence spatiale pour chacune des trois méthodes (LMC premier ordre, LMC second ordre, EMC premier ordre), en faisant varier la valeur du nombre de mailles N_x entre 32 et 1024.

La configuration numérique reste la même que celle considérée en section 4.6 et les diagnostics que nous examinons sont de nouveau les quantités intégrées L_i et k_i , comparées au temps final $t_f = 5\tau_0$ par le biais des erreurs relatives E_L et E_k .

La figure 4.10 montre les évolutions de E_k et E_L en fonction de N_x pour les deux méthodes LMC d'ordres 1 et 2 et la méthode EMC d'ordre 1. On valide bien le passage à l'ordre 2 de la méthode LMC, puisque les erreurs relatives E_k et E_L sont proportionnelles à N_x^{-2} pour cette méthode, tandis qu'elles sont proportionnelles à N_x^{-1} pour les deux



(a) Erreur relative E_k en fonction de N_x (b) Erreur relative E_L en fonction de N_x

FIGURE 4.10 – Convergence spatiale des méthodes LMC d'ordres 1 et 2 et de la méthode EMC d'ordre 1

méthodes d'ordre 1. On observe surtout que les niveaux d'erreurs sont largement inférieurs dans le cas de la méthode d'ordre 2.

4.8 Conclusion

Dans ce travail, nous avons dérivé une méthode de Monte Carlo eulérienne (EMC) pour la résolution d'une PDF de vitesse dans des écoulements turbulents. Cette méthode est basée sur des champs stochastiques évoluant selon des équations stochastiques aux dérivées partielles (SPDEs) statistiquement équivalentes à l'équation PDF originale. Nous avons montré que l'équivalence SPDEs-PDF ne peut pas être obtenue si les SPDEs sont interprétées dans le sens dissipatif en entropie. Nous avons ensuite démontré que cette équivalence est assurée pour une interprétation conservative en entropie des SPDEs.

La principale conséquence de cette interprétation est que les champs stochastiques solutions des SPDEs deviennent multivalués. Ainsi, les schémas numériques standards ne peuvent être utilisés pour résoudre les SPDEs issues de la méthode EMC. À la place, nous avons dérivé un schéma numérique prenant en compte ce caractère multivalué. Ce schéma échantillonne les différentes branches de la solution multivaluée en utilisant une variante de la méthode de choix aléatoire (RCM) de Glimm [49], comme proposé dans [115]. La solution multivaluée est ensuite recouverte statistiquement lorsque le nombre de réalisations de la méthode de Monte Carlo est augmenté.

Par la suite, nous avons appliqué la méthode EMC incluant ce schéma RCM à une configuration 1D simplifiée correspondant à une zone de mélange décroissante. Pour cette configuration, nous avons confirmé la convergence de notre méthode. Nous avons observé qu'elle est d'ordre 1 en espace et qu'elle converge statistiquement comme l'inverse de la racine carrée du nombre de réalisations des champs stochastiques. Qui plus est, nous avons aussi comparé la méthode EMC à une méthode de Monte Carlo lagrangienne (LMC) standard d'ordre 1. Nous avons observé que ces deux méthodes ne présentent aucun

avantage décisif l'une par rapport à l'autre. Par conséquent, dans sa forme actuelle, la méthode EMC proposée constitue une alternative viable à une méthode LMC d'ordre 1.

Enfin, nous avons porté une attention particulière à l'une des problématiques majeures des méthodes EMC, à savoir l'augmentation de l'ordre du schéma numérique. Cette amélioration est rendue particulièrement difficile par l'étape de réduction de l'algorithme décrit en section 4.5.2. À l'inverse, nous avons montré la possibilité de montée en ordre relativement simple offerte par la méthode LMC. Cette montée en ordre améliore significativement la précision sur les calculs de zones de mélange. Par conséquent, c'est cette méthode que nous avons utilisée dans les chapitres 2 et 3 de la thèse. Le passage à l'ordre 2 de la méthode EMC reste une perspective qui serait à poursuivre à l'avenir, mais qui ne sera pas atteinte au cours de la thèse.

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse consiste à analyser la prise en charge du transport turbulent par un modèle PDF au cours de l'évolution d'une zone de mélange turbulente issue de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov. Cette analyse a requis un certain nombre de développements préalables :

- Tout d'abord, nous avons mis en évidence dans le chapitre 1 le rôle joué par les conditions initiales des grandes échelles sur les statistiques de l'écoulement
- Ensuite, nous avons proposé dans le chapitre 2 un modèle PDF de Langevin capable de restituer cette dépendance de la zone de mélange aux conditions initiales de ses grandes échelles
- Enfin, le chapitre 3 est consacré à l'analyse du modèle afin de mettre en avant les propriétés du transport turbulent dans un écoulement de Richtmyer-Meshkov

Tout au long des chapitres 2 et 3, nous avons utilisé une méthode de Monte Carlo pour résoudre numériquement l'équation de la PDF de vitesse. Cette méthode fait l'objet de développements spécifiques détaillés dans le chapitre 4

Nous revenons ci-dessous sur les principales conclusions établies à chaque étape de cette thèse.

1 Permanence des grandes échelles en turbulence de Richtmyer-Meshkov

Nous avons dans le chapitre 1 fourni une étude détaillée des propriétés des grandes échelles dans le cadre de zones de mélange turbulentes issues de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov. Pour ce faire, nous avons dérivé les équations d'évolution des spectres turbulents de vitesse, de concentration et de flux de concentration. Nous avons fermé ces équations à l'aide d'un modèle EDQNM appliqué aux termes non linéaires et d'un autre modèle pour les termes de production liée au gradient de concentration moyen.

En utilisant ces fermetures et les conditions initiales de l'écoulement définies en sous-section 1.2.2, nous avons d'abord redémontré les propriétés à grande échelle du spectre de vitesse E_{ij} prédites initialement dans [21, 96] : nous avons montré que, si son exposant infrarouge initial s_0 est inférieur à 4, le spectre de vitesse reste invariant à grande échelle.

En plus de ce résultat déjà connu, nous avons poussé notre étude au comportement à grande échelle des spectres de concentration et de flux de concentration, E_{cc} et E_{3c} . Contrairement à E_{ij} , nous montrons que les grandes échelles de E_{cc} et E_{3c} ne restent pas constantes mais évoluent linéairement lorsque s_0 est inférieur à un exposant limite. Ainsi, le principe de permanence des grandes échelles s'applique bien au spectre de vitesse, qui conserve ses conditions initiales, mais pas pour les spectres de concentration et de flux de concentration : pour ces deux derniers spectres, les conditions initiales des grandes échelles sont oubliées et remplacées par une contribution linéaire liée au spectre de vitesse. Ainsi, nous sommes en mesure d'expliquer pourquoi il est légitime de ne s'intéresser qu'à l'évolution du spectre de vitesse lorsqu'on analyse la permanence des grandes échelles en turbulence de Richtmyer-Meshkov : la seule connaissance des conditions initiales du spectre de vitesse est suffisante pour caractériser complètement l'auto-similarité de l'écoulement.

Comme cela a déjà été montré dans [21, 96], nous avons établi une relation entre Θ et s_0 . Par ailleurs, la permanence des grandes échelles de E_{ij} et les évolutions linéaires de celles de E_{cc} et E_{3c} nous ont permis de relier d'autres grandeurs d'intérêt de l'écoulement aux conditions initiales. En particulier, nous avons dérivé les relations entre s_0 et le préfacteur de la loi de puissance de la largeur de la zone de mélange. Nous avons également exprimé l'anisotropie du tenseur de Reynolds et le paramètre de mélange en fonction de s_0 . Finalement, en inversant la dernière relation, nous avons pu exprimer Θ en fonction du paramètre de mélange.

Cette étude des grandes échelles de la turbulence de Richtmyer-Meshkov a abouti à un autre résultat important de cette rhèse : elle nous a permis d'établir un lien entre l'idée de permanence des grandes échelles exploitée dans ce travail et dans [21, 96], et un autre corpus de la littérature de Richtmyer-Meshkov [31, 65, 169, 148], centré sur les propriétés de la perturbation interfaciale plutôt que les corrélations en deux points et leurs transformées de Fourier. Nous avons montré que toutes ces études fournissaient la même description des grandes échelles de la turbulence de Richtmyer-Meshkov et donnaient les mêmes prédictions sur le taux de croissance Θ . Enfin, nous avons également fourni des arguments clairs permettant de discriminer les formulations alternatives du principe de permanence des grandes échelles retrouvées dans [23, 123, 99].

Nos prédictions ont ensuite été validées à l'aide de simulations aux grandes échelles implicites (ILES) d'une zone de mélange turbulente de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood. Nous avons fait varier les conditions initiales des simulations en jouant sur la valeur de l'exposant infrarouge du spectre de puissance de la perturbation d'interface initiale. La permanence des grandes échelles de E_{ij} et les évolutions linéaires de celles de E_{cc} et E_{3c} ont été vérifiées. Les relations prédites entre l'exposant infrarouge initial s_0 du taux de croissance et le préfacteur de la largeur de la zone de mélange, l'anisotropie et le paramètre de mélange ont également été vérifiées.

2 Développement d'un modèle PDF multi-échelles

D'après l'étude préliminaire du chapitre 2, la caractéristique fondamentale des zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov réside dans leur respect du principe de permanence des grandes échelles, qui implique que leurs conditions initiales ont une influence durable sur leur évolution.

L'objectif principal du chapitre 2 était donc de rendre compte de cette dépendance aux conditions initiales des grandes échelles dans un modèle PDF de Langevin. Nous avons pour cela considéré la méthodologie à deux échelles habituellement envisagée pour les modèles aux tensions de Reynolds [132] et l'avons adaptée au modèle de Langevin simplifié (SLM). Ainsi, nous avons dérivé un modèle de Langevin à deux échelles, dont la partie à grande échelle représente la préservation des conditions initiales, tandis que la partie à petite échelle est similaire à celle d'un SLM classique.

En plus de cet aspect, nous avons également discuté du rôle joué par le terme de transport par la pression. Ce dernier est presque systématiquement négligé dans les modèles Langevin, alors qu'il peut jouer un rôle significatif dans une zone de mélange. Une fermeture pour ce terme a donc été proposée.

Nous avons au final validé ce nouveau modèle Langevin à deux échelles prenant en compte le transport par la pression, en le comparant à plusieurs LES de ZMT issues de l'IRM. Par souci d'exhaustivité, nous avons effectué ces comparaisons pour différents états auto-similaires. Pour ce faire, nous avons fixé des conditions initiales différentes pour chaque simulation en jouant sur la valeur de s_0 . Dans l'ensemble, le modèle PDF que nous avons dérivé donne des résultats qui sont en bon accord avec les LES. La largeur de la zone de mélange, les niveaux d'énergie cinétique et l'anisotropie sont correctement reproduits. Par ailleurs, les formes de la PDF modélisée sont également cohérentes avec celles extraites de la LES. Sur tous ces aspects, le nouveau modèle offre une amélioration significative par rapport au SLM standard.

3 Analyse du transport turbulent - Régime de diffusion

La dérivation du modèle PDF de Langevin multi-échelles et sa validation dans le cadre de l'étude de la turbulence de Richtmyer-Meshkov nous ont fourni un outil indispensable pour la réalisation de l'objectif principal de la thèse : l'analyse de la prise en charge du transport turbulent par un modèle PDF en turbulence de Richtmyer-Meshkov. Au terme de cette analyse, menée dans le chapitre 3, nous avons établi les résultats suivants :

- Il existe un régime de diffusion pour le modèle de Langevin, que ce soit sous sa forme simplifiée ou sa forme à deux échelles.

- Les conditions nécessaires à l’obtention de ce régime sont vérifiées au centre des zones de mélange issues de l’instabilité de Richtmyer-Meshkov, ou du moins celles dont nous avons effectué des simulations LES à l’aide du code TRICLADE.
- Dans ce régime diffusif, une analyse asymptotique du modèle PDF peut être réalisée. Elle prédit un transport en premier gradient pour le flux de l’énergie cinétique $\bar{k}$.
- La valeur du coefficient de diffusion C_k prédite par cette analyse est en bon accord avec les simulations LES et se trouve être 3 à 5 fois plus élevée que les valeurs habituellement rencontrées dans les modèles RSM. Cette différence peut s’expliquer par le fait que ce coefficient dépende à la fois des constantes du modèle PDF, des conditions initiales des grandes échelles et de l’anisotropie de l’écoulement.

L’ensemble de ces résultats permet donc de répondre à la problématique principale de la thèse. Nous sommes en mesure de confirmer la légitimité de l’application d’une fermeture diffusive en premier gradient pour une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov. La variation significative de son coefficient de diffusion C_k par rapport à d’autres zones de mélange turbulentes n’est pas due à une mise en défaut du régime de diffusion. Sur ce point, nous avons montré que l’anisotropie des zones de mélange de Richtmyer-Meshkov et la présence de grandes échelles non-gaussiennes permanentes contribuent toutes deux à augmenter le transport diffusif de $\bar{k}$. De même, la décroissance auto-similaire de ce type d’écoulement semble également contribuer à une augmentation de C_k vis-à-vis d’un écoulement qui serait stationnaire.

4 Méthodes de Monte Carlo pour la résolution des équations du modèle

Pour finir, la validation et l’exploitation du modèle PDF multi-échelles ont nécessité le développement de plusieurs méthodes numériques, que nous avons détaillées dans le chapitre 4.

Nous avons plus particulièrement dérivé une méthode de Monte Carlo eulérienne (EMC) pour la résolution d’une équation de PDF de vitesse. Cette méthode est basée sur des champs stochastiques évoluant selon des équations stochastiques aux dérivées partielles (SPDEs) statistiquement équivalentes à l’équation PDF originale. Nous avons démontré que cette équivalence n’existe pas si les SPDEs sont interprétées dans le sens dissipatif en entropie, alors qu’une interprétation conservative en entropie des SPDEs permet de l’obtenir.

La principale conséquence de cette interprétation conservative est que les champs stochastiques solutions des SPDEs deviennent multivalués. Ainsi, les schémas numériques standards ne peuvent être utilisés pour résoudre les SPDEs issues de la méthode EMC. À la place, nous avons dérivé un schéma numérique innovant prenant en compte ce caractère

multivalué. Ce schéma échantillonne les différentes branches de la solution multivaluée en utilisant une variante de la méthode de choix aléatoire (RCM) de Glimm [49]. La solution multivaluée est ensuite recouverte statistiquement lorsque le nombre de réalisations de la méthode de Monte Carlo est augmenté.

Afin de valider ces développements, nous avons appliqué la méthode EMC incluant ce schéma RCM à une configuration 1D simplifiée correspondant à une zone de mélange décroissante. Pour cette configuration, nous avons confirmé la convergence de notre méthode. Nous avons observé qu'elle est d'ordre 1 en espace et qu'elle converge statistiquement comme l'inverse de la racine carrée du nombre de réalisations des champs stochastiques. Qui plus est, nous avons aussi comparé la méthode EMC à une méthode de Monte Carlo lagrangienne (LMC) standard d'ordre 1. Nous avons observé que ces deux méthodes ne présentent aucun avantage décisif l'une par rapport à l'autre. Par conséquent, dans sa forme actuelle, la méthode EMC proposée constitue une alternative viable à une méthode LMC d'ordre 1.

5 Perspectives de la thèse

En guise de perspective, mentionnons d'abord que, dans le chapitre 1 nous avons limité notre attention au régime entièrement turbulent et à haut nombre de Reynolds de l'évolution d'une zone de mélange de Richtmyer-Meshkov. Cependant, si cette zone de mélange est laissée en décroissance et diffusion libre, son nombre de Reynolds diminuera et les effets visqueux deviendront finalement prédominants. Comme en turbulence homogène, on dit alors que la zone de mélange est dans sa période de décroissance finale. Cette période est rarement considérée dans le contexte de la turbulence de Richtmyer-Meshkov, car elle est rarement atteinte dans la plupart des expériences et simulations. Néanmoins, l'étude de la décroissance finale de la turbulence de Richtmyer-Meshkov pourrait s'avérer utile pour comprendre le comportement à long terme des simulations numériques directes, qui commencent très souvent par des nombres de Reynolds modérés. Une analyse préliminaire de cette période de décroissance finale est fournie en annexe 4.

Par ailleurs, dans la mesure où les conditions initiales des grandes échelles ont une influence durable sur l'évolution de l'écoulement, il serait intéressant de pousser cette étude d'influence à d'autres paramètres d'initialisation. En effet, nous avons limité la variation des conditions initiales de la zone de mélange à celle de l'exposant infrarouge initial s_0 du spectre de vitesse. Or, nous avons montré dans le chapitre 3 que l'anisotropie de l'écoulement contribue fortement à l'augmentation du transport turbulent. Par conséquent, le fait de varier la méthode d'initialisation de l'anisotropie devrait avoir une influence non négligeable sur l'évolution de la zone de mélange. De la même façon, nous nous sommes limités à des cas de turbulence de Richtmyer-Meshkov à faible nombre d'Atwood, et la

variation de ce nombre d'Atwood permettrait de rendre compte de l'impact du contraste de densité initial sur l'évolution de l'écoulement.

Concernant le chapitre 2, on peut noter que la formulation précise du modèle proposé est étroitement liée aux propriétés des zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov. Cependant, la méthodologie globale qui a permis de dériver ce modèle peut être utilisée dans d'autres contextes. En outre, comme pour les modèles aux tensions de Reynolds [132], des formulations à deux échelles pour une gamme plus large d'applications peuvent aussi, en principe, être adaptées à partir de la méthodologie actuelle.

Par ailleurs, l'une des conclusions les plus frappantes de ce chapitre est que la permanence des grandes échelles n'impacte pas seulement les corrélations d'ordre 2 ou moins, mais l'ensemble des statistiques en un point de l'écoulement. Par exemple, les formes des PDF varient sensiblement d'une condition initiale à l'autre. Il serait donc intéressant de mieux comprendre cet aspect.

Il serait également intéressant de noter que le modèle proposé s'oppose catégoriquement à l'idée établie que les constantes du modèle de Langevin soient associées uniquement aux petites échelles. De nombreux travaux relient en effet certaines constantes du modèle à la constante de Kolmogorov [121].

Nous avons montré dans le chapitre 3 que les propriétés des grandes échelles et la décroissance auto-similaire des zones de mélange turbulentes de Richtmyer-Meshkov contribuent toutes deux à augmenter le transport diffusif de $\bar{k}$. Ces différents aspects pourraient être à l'origine de la différence significative du coefficient de diffusion C_k estimé pour Richtmyer-Meshkov par rapport à celui utilisé habituellement pour des écoulements stationnaires. Notons en perspective que l'un des écoulements qui est parfois utilisé pour fixer la constante C_k dans la littérature est précisément le problème de diffusion turbulente stationnaire sans cisaillement [111] évoqué plus haut. Une analyse plus détaillée de ce type d'écoulement permettrait donc d'aller plus loin dans la compréhension de la valeur usuelle du C_k .

En outre, nous nous sommes focalisé au cours de cette thèse à l'étude de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov. Or, dans le contexte des expériences de FCI, on assiste également au développement d'une autre instabilité hydrodynamique : l'instabilité de Rayleigh-Taylor. L'évolution de la zone de mélange qui en résulte étant également en grande partie pilotée par le transport de l'énergie cinétique turbulente, l'extension au cas de Rayleigh-Taylor du développement asymptotique proposé dans le chapitre 3 représente un enjeu de taille pour l'amélioration de la compréhension de cette instabilité.

Enfin, dans le chapitre 4, nous avons porté une attention particulière à l'une des problématiques majeures des méthodes EMC, à savoir l'augmentation de l'ordre du schéma

numérique. Cette amélioration est rendue particulièrement difficile par l'étape de réduction de l'algorithme décrit en section 4.5.2. À l'inverse, nous avons montré la possibilité de montée en ordre relativement simple offerte par la méthode LMC. Cette montée en ordre améliore significativement la précision sur les calculs de zones de mélange. Le passage à l'ordre 2 de la méthode EMC reste donc une perspective qui serait à poursuivre à l'avenir, dans la mesure où l'approche eulérienne présente certains avantages intéressants devant l'approche lagrangienne (couplage à d'autres codes de simulation majoritairement eulériens, contrôle de la convergence stochastique).

Annexe A

Annexes Chapitre 1

1 À propos des spectres 3D, des spectres 2D et des spectres foliés

Afin de définir les spectres 3D, nous introduisons $\widehat{\mathbf{u}'}(\mathbf{k}, t)$ et $\widehat{c'}(\mathbf{k}, t)$ les transformées de Fourier de u' et c' au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et temps t :

$$\widehat{u'_i}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u'_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \widehat{c'}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} c'(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} . \quad (\text{A.1})$$

Étant donné que l'écoulement est inhomogène dans la direction x_3 , la représentation de Fourier des différents modes ne se «diagonalisera» pas, autrement dit $\widehat{\mathbf{u}'}(\mathbf{k}, t)$ et $\widehat{c'}(\mathbf{k}, t)$ ne sont pas delta corrélés dans la direction inhomogène. Par conséquent, au lieu de dépendre d'un seul vecteur d'onde, les corrélations entre les transformées de Fourier de u' et c' dépendent d'un vecteur d'onde et de la composante x_3 d'un second vecteur d'onde. En nous concentrant sur le champ de vitesse, nous définissons donc le tenseur de corrélation de Fourier $\mathbb{E}_{ij}$ comme :

$$\mathbb{E}_{ij}(\mathbf{k}, k'_3, t) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) = \overline{\widehat{u'_i}(\mathbf{k}, t) \widehat{u'^*_j}(\mathbf{k}', t)} , \quad (\text{A.2})$$

où l'exposant $*$ fait référence au conjugué d'une quantité donnée et où $\mathbf{k}_\perp = (k_1, k_2)$ est la composante de $\mathbf{k}$ perpendiculaire à x_3 . Suivant la terminologie introduite par Kraichnan [81], nous nous référons aux valeurs de $\mathbb{E}_{ij}(\mathbf{k}, k'_3, t)$ comme étant diagonales lorsque $k'_3 = k_3$ et comme hors-diagonales lorsque $k'_3 \neq k_3$. La partie diagonale symétrisée de $\mathbb{E}_{ij}$ est notée E_{ij} et est définie comme :

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}_{ij}(\mathbf{k}, k_3, t) + \mathbb{E}_{ji}(\mathbf{k}, k_3, t)) .$$

Des définitions similaires s'appliquent à E_{3c} et E_{cc} . L'intégration de E_{ij} sur $\mathbf{k}$ donne :

$$\begin{aligned} \int E_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} &= \frac{1}{2} \iiint \overline{\widehat{u}'_i((\mathbf{k}_\perp, k_3), t) \widehat{u}'_j^*((\mathbf{k}'_\perp, k_3), t)} + \overline{\widehat{u}'_j((\mathbf{k}_\perp, k_3), t) \widehat{u}'_i^*((\mathbf{k}'_\perp, k_3), t)} d\mathbf{k}_\perp d\mathbf{k}'_\perp dk_3 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \iiint \iiint \overline{u'_i(x_1, x_2, x_3, t) u'_j(x_1, x_2, x_3, t)} e^{ik_3(x_3 - x'_3)} e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} e^{i\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{x}'_\perp} d\mathbf{k}_\perp d\mathbf{k}'_\perp d\mathbf{x}_\perp d\mathbf{x}'_\perp dk_3 dx'_3 dx_3 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \overline{u'_i(0, 0, x_3, t) u'_j(0, 0, x'_3, t)} e^{ik_3(x_3 - x'_3)} dk_3 dx'_3 dx_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \overline{u'_i u'_j}(x_3, t) dx_3. \end{aligned}$$

Pour dériver ce résultat, nous avons utilisé les définitions de la transformée de Fourier et la relation $\frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} dk = \delta(x)$. Cela explique comment l'équation (1.2) est dérivée.

Un outil couramment utilisé dans les turbulences de Richtmyer-Meshkov et de Rayleigh-Taylor est le spectre de Fourier 2D de $\mathbf{u}'$ et c' . En se concentrant sur le spectre de vitesse, on définit :

$$E_{ij}^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) = \frac{1}{2} \left(\overline{\widehat{u}'_i^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) \widehat{u}'_j^{2D,*}(\mathbf{k}'_\perp, x_3, t)} + \overline{\widehat{u}'_j^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) \widehat{u}'_i^{2D,*}(\mathbf{k}'_\perp, x_3, t)} \right),$$

où

$$\widehat{u}'_i^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} u'_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}_\perp \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}_\perp = (k_1, k_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2).$$

Les spectres 2D et 3D sont liés les uns aux autres. Ils vérifient :

$$\int E_{ij}^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) dx_3 = 2\pi \int E_{ij}(\mathbf{k}, t) dk_3.$$

En turbulence axisymétrique, $E_{ij}^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t)$ ne dépend que de $k_\perp = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ et le spectre en module de la vitesse est défini par :

$$\mathbf{e}_{ij}^{2D}(k_\perp, x_3, t) = k_\perp \oint E_{ij}^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) dS_{k_\perp} = 2\pi k_\perp E_{ij}^{2D}(k_\perp, x_3, t).$$

Par conséquent, en turbulence axisymétrique, nous pouvons écrire que :

$$\int \mathbf{e}_{ij}^{2D}(k_\perp, x_3, t) dx_3 = (2\pi)^2 k_\perp \int E_{ij}(k, \theta, t) dk_3.$$

À présent, nous aimerions donner un exemple montrant que les propriétés de $\mathbf{e}_{ij}^{2D}$ à grande échelle ne sont pas nécessairement liées à celles de E_{ij} . Concentrons-nous sur les traces de $\mathbf{e}_{ij}$ et E_{ij} et supposons que $E_{ii}(k, \theta)$ est un spectre en deux parties avec $E_{ii}(k, \theta) = e_0(k/k_e)^{s_0-2} \sin^p \theta$ pour $k \leq k_e$ et $E_{ii}(k, \theta) = e_0(k/k_e)^{-11/3}$ pour $k \geq k_e$. La partie à grande échelle a un exposant infrarouge s_0 et une anisotropie contrôlée par l'exposant p , tandis que la partie à petite échelle est un spectre de Kolmogorov isotrope.

Alors, en intégrant ce spectre sur k_3 , on obtient :

$$\text{pour } k_\perp \ll k_e \quad , \quad \int \mathbf{e}_{ij}^{2D}(k_\perp, x_3, t) dx_3 = 8\pi^2 e_0 k_e \left(\frac{3}{8} \frac{k_\perp}{k_e} + f(s_0 - p) \left(\frac{k_\perp}{k_e} \right)^q \right) \quad (\text{A.3})$$

avec $q = p + 1$ si $p < s_0 - 1$, $q = s_0$ sinon .

La fonction $f(s_0 - p)$ n'est pas détaillée ici mais est positive avec $f(0) = \pi/2$. Ce qui peut être vu de cet exemple simple est que l'exposant à grande échelle de $\int \mathbf{e}_{ij}^{2D}(k_\perp, x_3, t) dx_3$ n'est pas nécessairement égal à s_0 . Ce dernier cas se produit uniquement lorsque $s_0 \leq 1$ et quand $p > s_0 - 1$. En turbulence de Richtmyer-Meshkov, la condition $p > s_0 - 1$ devrait être vérifiée (voir section 1.2.2). Cependant, s_0 peut varier librement et la première condition n'est pas nécessairement vérifiée. En particulier, avec un spectre 2D, on ne peut pas distinguer un spectre de Batchelor d'un spectre de Saffman en ne regardant que la pente infrarouge 2D.

Pour conclure sur les définitions des spectres turbulents, nous voudrions souligner la correspondance entre les spectres utilisés ici et les spectres dits foliés introduits dans [123] pour analyser la turbulence de Rayleigh-Taylor. À une constante adimensionnée près, le spectre folié de $\hat{u}'_i$ est défini dans [123] comme :

$$E_{ij}^F \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) = \frac{1}{2} \left(\overline{\hat{u}'_i^F(\mathbf{k}_\perp, t) \hat{u}'_j^{F*}(\mathbf{k}'_\perp, t)} + \overline{\hat{u}'_j^F(\mathbf{k}_\perp, t) \hat{u}'_i^{F*}(\mathbf{k}'_\perp, t)} \right) \quad ,$$

avec $\hat{u}'_i^F(\mathbf{k}_\perp, t) = \mathcal{F}^{2D} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u'_i(\mathbf{x}, t) dx_3 \right] (\mathbf{k}_\perp, t) \quad ,$

où $\mathcal{F}^{2D}$ est la transformée de Fourier 2D par rapport à $\mathbf{x}_\perp$. En inversant l'opérateur intégral et l'opérateur de Fourier dans la définition de $\hat{u}'_i^F$, on peut voir que $\hat{u}'_i^F(k_1, k_2) = 2\pi \hat{u}'_i(k_1, k_2, 0)$. Ainsi, E_{ij}^F est simplement la projection dans le plan équatorial du spectre 3D E_{ij} :

$$E_{ij}^F(k_1, k_2) = 4\pi^2 E_{ij}(k_1, k_2, 0) .$$

Le spectre en module de E_{ij}^F est noté $\mathbf{e}_{ij}^F$. En turbulence axisymétrique, il est égal à :

$$\mathbf{e}_{ij}^F = k_\perp \oint E_{ij}^F(\mathbf{k}_\perp, t) dS_{k_\perp} = 2\pi k_\perp E_{ij}^F(k_\perp, x_3, t) = 8\pi^3 k_\perp E_{ij}(k = k_\perp, \theta = \pi/2) . \quad (\text{A.4})$$

Par conséquent, si $E_{ij}(k, \theta)$ est proportionnel à k^{s_0-2} , alors $\mathbf{e}_{ij}^F$ est proportionnel à $m_4 = s_0 - 1$.

2 Propriétés attendues pour $\hat{u}_3^G$

Afin de clarifier les propriétés de $\hat{u}_3^G$, nous considérons le cas simplifié suivant. Nous supposons que la concentration moyenne $\bar{c}$ est décroissante, a un profil linéaire dans la

zone de mélange et est constante en dehors de celle-ci. En conséquence, le gradient de concentration moyen peut être approximé par :

$$\partial_3 \bar{c} = -\frac{1}{L} H(L/2 - |x_3|) .$$

Ensuite, nous exprimons $\widehat{u}_3^G$ comme une fonction de $\widehat{u}_3'^{2D}$, la transformée de Fourier $2D$ de u_3' dans la direction $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$ perpendiculaire à x_3 :

$$\widehat{u}_3^G(\mathbf{k}, t) = -\frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_3 x_3} \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) \partial_3 \bar{c}(x_3) dx_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_3 x_3} \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) dx_3 . \quad (\text{A.5})$$

La deuxième égalité provient de l'approximation du gradient de concentration. Pour simplifier davantage cette expression, nous supposons que la vorticité a été créée par le choc lors du passage de l'interface et qu'elle est ensuite rest  e contenue dans les limites de la zone de mélange. Par conséquent, on peut montrer qu'en dehors de la zone de mélange $\widehat{u}_3'^{2D}$ vérifie :

$$\widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) = \begin{cases} \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, L/2, t) e^{-k_\perp x_3} & \text{pour } x_3 \geq \frac{L}{2} \\ \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, -L/2, t) e^{k_\perp x_3} & \text{pour } x_3 \leq -\frac{L}{2} \end{cases}$$

Puis, sachant que $\widehat{u}_3' = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik_3 x_3} \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) dx_3$, on en déduit que :

$$\widehat{u}_3^G(\mathbf{k}, t) = \widehat{u}_3'(\mathbf{k}, t) - \frac{e^{-k_\perp L/2}}{2\pi} \left(\widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, L/2, t) \frac{e^{-ik_3 L/2}}{k_\perp L + ik_3 L} + \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, -L/2, t) \frac{e^{ik_3 L/2}}{k_\perp L - ik_3 L} \right) . \quad (\text{A.6})$$

Quand $kL \gg 1$, on s'attend à ce que le deuxième terme du membre de droite de cette expression devienne négligeable par rapport aux autres à cause du préfacteur $e^{-k_\perp L/2}$ qui décroît exponentiellement. En conséquence, nous avons :

$$\text{Pour } kL \gg 1 \quad , \quad \widehat{u}_3^G(\mathbf{k}, t) \approx \widehat{u}_3'(\mathbf{k}, t) . \quad (\text{A.7})$$

Cette valeur est celle qui serait obtenue si le gradient de concentration était uniforme, comme en turbulence homogène stratifiée.

Lorsque $kL \ll 1$, la situation devrait être différente. Pour illustrer ce point, nous faisons une hypothèse supplémentaire : nous supposons que pour les très grandes échelles, le nombre d'onde k est le seul paramètre de dimensionnement pertinent, comme si les grandes échelles se comportaient dans une configuration purement interfaciale. En particulier, nous supposons que $\widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t)$ varie spatialement sur une échelle de longueur donnée par $k_\perp$: $\widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) \equiv \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, k_\perp x_3, t)$. Avec cette hypothèse, on est autorisé à approximer $\widehat{u}_3'^{2D}$ dans la zone de mélange par une valeur constante :

$$\text{pour } kL \ll 1 \text{ et } -L/2 \leq x_3 \leq L/2 \quad , \quad \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, x_3, t) \approx \widehat{u}_3'^{2D}(\mathbf{k}_\perp, 0, t) .$$

En injectant ce résultat dans la définition (A.5) de $\hat{u}_3^G(\mathbf{k}, t)$ et dans l'équation (A.6), on obtient finalement que :

$$\text{Pour } kL \ll 1 \quad , \quad \hat{u}_3^G(\mathbf{k}, t) = \frac{kL}{2 \sin \theta} \widehat{u'_3}(\mathbf{k}, t) . \quad (\text{A.8})$$

Ainsi, aux grandes échelles, $\hat{u}_3^G$ devrait devenir largement inférieur à $\widehat{u'_3}$. En revanche, les deux quantités sont du même ordre aux petites échelles. Notons que des résultats similaires ont déjà été obtenus dans [140] dans le contexte d'une zone de mélange de Rayleigh-Taylor.

Étant donné les expressions simplifiées de $\hat{u}_3^G$ dans les équations (A.7) et (A.8), E_{33}^G et E_{3c}^G peuvent être simplifiés dans les limites $kL \gg 1$ et $kL \ll 1$ comme suit :

$$\text{Pour } kL \gg 1 \quad , \quad E_{33}^G(\mathbf{k}, t) = E_{33}(\mathbf{k}, t) \quad , \quad E_{3c}^G(\mathbf{k}, t) = E_{3c}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Pour } kL \ll 1 \quad , \quad E_{33}^G(\mathbf{k}, t) = \frac{kL}{2 \sin \theta} E_{33}(\mathbf{k}, t) \quad , \quad E_{3c}^G(\mathbf{k}, t) = \frac{kL}{2 \sin \theta} E_{3c}(\mathbf{k}, t) . \quad (\text{A.10})$$

3 Simulations aux grandes échelles : Vérification des hypothèses principales

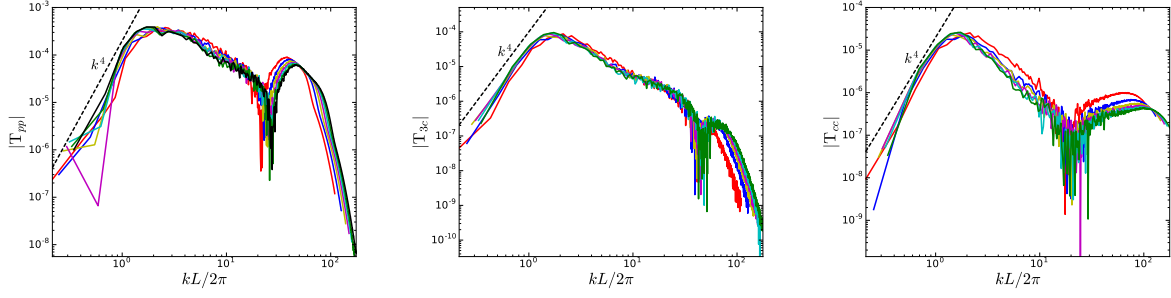
Afin d'obtenir des expressions fermées pour l'évolution des grandes échelles, nous avons fait deux hypothèses principales décrites dans la section 1.3. Premièrement, nous avons supposé que les termes non-linéaires sont proportionnels à k^4 quand $s_0 \leq 2$ et qu'ils sont auto-similaires avec des évolutions temporelles données par l'équation (1.13). Pour évaluer ces propriétés, nous introduisons les spectres en module des termes non-linéaires, adimensionnés par L et $V = \sqrt{\langle u'_i u'_i \rangle}$:

$$\mathsf{T}_{ij} = \frac{k^2}{V^3 L^3} \oint_{S_k} T_{ij} dS_k \quad , \quad \mathsf{T}_{3c} = \frac{k^2}{V^2 L^3} \oint_{S_k} T_{3c} dS_k \quad \text{et} \quad \mathsf{T}_{cc} = \frac{k^2}{V L^3} \oint_{S_k} T_{cc} dS_k .$$

Ces spectres sont montrés en fonction de $kL/(2\pi)$ dans la figure A.1 pour la simulation avec $s_0 = 2$ à différents moments $t \geq t_0$, i.e. après que l'auto-similarité est atteinte. Les "scalings" en k^4 de T_{ij} , T_{3c} et T_{cc} aux grandes échelles peuvent être observées. En outre, les spectres pris à des moments différents sont superposés aux grandes échelles et aux échelles énergétiques, comme attendu lors d'une évolution auto-similaire. Ces caractéristiques sont également observées pour les autres simulations.

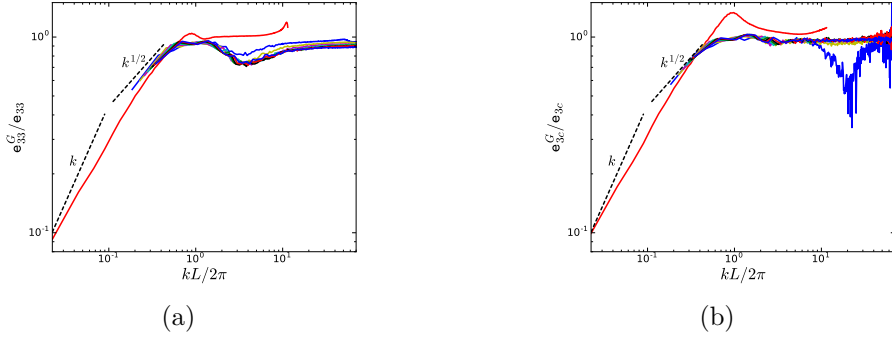
La seconde hypothèse sur laquelle sont basés les résultats de ce travail concerne les termes de production linéaires E_{33}^G et E_{3c}^G et la façon dont ils sont liés à E_{33} et E_{3c} .

La figure A.2 montre les ratios $\mathsf{e}_{33}^G/\mathsf{e}_{33}$ et $\mathsf{e}_{3c}^G/\mathsf{e}_{3c}$ pour la simulation avec $s_0 = 2$. On peut voir que ces ratios sont auto-similaires. Aux grands nombres d'ondes, ils atteignent une valeur constante proche de 1. Aux petits nombres d'ondes, ils augmentent avec k .



(a) Transfert du spectre d'énergie (b) Transfert du spectre de flux de (c) Transfert du spectre de concentration
cinétique concentration

FIGURE A.1 – Termes adimensionnés non-linéaires de transfert à différents temps supérieurs à t_0 pour la simulation avec $s_0 = 2$



(a)

(b)

FIGURE A.2 – Termes de production linéaires pour la simulation avec $s_0 = 2$ à des temps différents supérieurs à t_0 . (a) rapport e_{33}^G/e_{33} et (b) rapport e_{3c}^G/e_{3c}

L'évolution linéaire attendue dans cette plage (voir section 1.3 et annexe 2) n'est observée que pour $kL/(2\pi) \lesssim 0.1$. Pour les échelles intermédiaires $0.1 \lesssim kL/(2\pi) \lesssim 1$, les évolutions de e_{33}^G/e_{33} et e_{3c}^G/e_{3c} peuvent être approximativement ajustées par une loi de puissance avec un exposant s_p égal à :

$$s_p \approx \frac{1}{2}.$$

3.1 Auto-similarité et évolution des spectres turbulents

Enfin, pour faire le lien entre la permanence des grandes échelles et les différents paramètres régissant l'évolution auto-similaire de l'écoulement, nous avons supposé que les spectres turbulents sont auto-similaires. Pour évaluer cette hypothèse, nous montrons dans la figure A.3 les valeurs adimensionnées de e_{pp} , e_{3c} et e_{cc} pour le cas $s_0 = 2$ et à des temps différents $t \geq t_0$. Ces spectres sont représentés en fonction du vecteur d'onde adimensionné $kL/(2\pi)$. L'observation principale est que les spectres pris à différents temps sont superposés. Cela indique leur comportement auto-similaire. Des comportements

analogues sont également observés pour les autres simulations.

Un autre point à mentionner est la valeur du pic spectral. Il semble être de l'ordre de $x_e = k_e L / (2\pi) \approx 1,5$. Ceci est cohérent avec la valeur utilisée dans la figure 1.8.

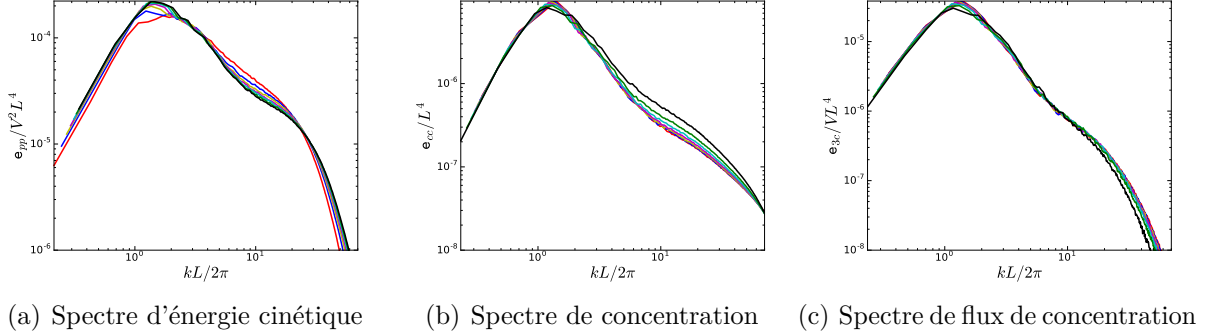


FIGURE A.3 – Spectres adimensionnés de l'énergie cinétique, de la concentration et du flux de concentration pour $s_0 = 2$, pris à différents temps $t \geq t_0$

4 Régime de décroissance finale

Le but de cette annexe est de caractériser les principales propriétés auto-similaires du régime de décroissance finale de la turbulence de Richtmyer-Meshkov (voir la fin des conclusions).

4.1 Décroissance finale du champ de vitesse

Dans le régime de décroissance finale, le rôle joué par les effets visqueux devient prédominant. Alors, d'après [85], l'analyse dimensionnelle implique que, pour des temps suffisamment grands par rapport à t_ν , le temps de début de ce régime :

$$\text{pour } t \gg t_\nu \quad , \quad L \propto \sqrt{\nu t} . \quad (\text{A.11})$$

Si nous supposons à nouveau que les grandes échelles sont auto-similaires (équation (1.20)), alors l'invariant aux grandes échelles (1.22) tient dans ce régime visqueux, mais avec une valeur possiblement différente de celle atteinte dans le cas auto-similaire. Ensuite, on déduit directement des équations (1.22) et (A.11) que :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon \quad , \quad \langle \bar{k} \rangle \propto L^{-(s_0+2)} \propto t^{-(s_0+2)/2} . \quad (\text{A.12})$$

Ces résultats ont une résonance directe avec la THI. En effet, si au lieu de $\langle \bar{k} \rangle$ on considère l'énergie totale $\langle \bar{k} \rangle L = \int \bar{k} dx_3$, alors on obtient que cette quantité décroît en

$t^{-(s_0+1)/2}$. C'est le même taux de décroissance que celui prévu en THI pour l'énergie cinétique. Notons que cette correspondance n'existe pas dans le régime turbulent auto-similaire.

Ce résultat a d'abord été obtenu dans [117] pour la turbulence de Batchelor et a été dérivé à nouveau dans [21] en utilisant des outils plus simples.

Une prédiction peut également être faite concernant l'anisotropie du champ de vitesse. Dans le régime de décroissance finale, les petites échelles ne contribuent pas de manière significative aux spectres. Nous pouvons négliger leur contribution et ne prendre en compte que les grandes échelles. Ensuite, comme noté dans [107], l'anisotropie du tenseur de Reynolds est celle du spectre aux grandes échelles. En utilisant les conditions initiales détaillées dans la section 1.2.2, nous en déduisons que :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon : \frac{\langle \overline{u_1'^2} \rangle}{\langle \overline{u_3'^2} \rangle} = \frac{1}{2s_0 + 4} . \quad (\text{A.13})$$

Cette estimation diminue avec s_0 , passant de 0.17 pour $s_0 = 1$ à 0.083 pour $s_0 = 4$. Ce comportement est l'opposé de celui décrit pour le régime à nombre de Reynolds élevé. De plus, les valeurs obtenues ici sont beaucoup plus petites que dans le régime à nombre de Reynolds élevé. Par conséquent, on s'attend à ce que l'anisotropie augmente fortement lors de la transition du régime de décroissance complètement turbulent au régime de décroissance finale. Cette conclusion est identique à celle obtenue par [107] pour la décroissance de THA.

4.2 Décroissance finale du flux de concentration

Dans le régime de décroissance finale, les termes non linéaires ne jouent pas un rôle direct et ne définissent pas un exposant limite séparant un backscattering d'un régime d'évolution linéaire. Cet exposant limite existe cependant et est lié à la phase précédant la décroissance visqueuse finale. Étant donné que le régime de décroissance finale dépend uniquement du spectre de vitesse, cet exposant limite est égal à 4. L'évolution linéaire des grandes échelles correspond par conséquent à :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon : E_{3c}(\mathbf{k}, t) = k^{s_0+s_p-2} e_{33}(\theta) \lambda(\theta) \int_0^t L^{s_p-1}(s) ds .$$

Par ailleurs, pour $s_0 \geq 4$, $E_{3c}(\mathbf{k}, t)$ affichera un scaling en k^{2+s_p} , i.e. plus raide que le scaling habituel en k^2 du backscattering.

Maintenant, si nous supposons l'auto-similarité des grandes échelles et que nous intégrons E_{3c} entre 0 et $1/L(t)$, nous obtenons l'invariant suivant :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon , \quad \langle \overline{u_3' c'} \rangle L^{s_0+1} = C s t . \quad (\text{A.14})$$

De cette équation, nous déduisons que :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon \quad , \quad \langle \overline{u'_3 c'} \rangle \propto t^{-(s_0+1)/2} . \quad (\text{A.15})$$

Ce taux de décroissance est lié au spectre de vitesse initial. Ce lien est conditionné par le terme de production dû au gradient de concentration moyen. Sans lui, la décroissance finale de $\langle \overline{u'_3 c'} \rangle$ ne dépendrait que de sa valeur initiale et serait égale à $t^{-(s_0+2)/2}$.

4.3 Décroissance finale de la variance de concentration

Dans le régime de désintégration finale, on peut montrer que :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon : \quad E_{cc}(\mathbf{k}, t) = k^{s_0+2s_p-2} e_{33}(\theta) \lambda^2(\theta) \left(\int_0^t L^{s_p-1}(s) ds \right)^2 .$$

En outre, pour $s_0 > 4$, $E_{cc}(\mathbf{k}, t)$ affichera un scaling en k^{2+2s_p} , i.e. plus raide que le scaling habituel en k^2 du backscattering et plus raide que celui du spectre du flux de concentration.

Enfin, si nous intégrons E_{cc} entre 0 et $1/L(t)$ et que nous supposons l'auto-similarité, alors nous dérivons l'invariant suivant :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon \quad , \quad \langle \overline{c'^2} \rangle L^{s_0} = C s t . \quad (\text{A.16})$$

De cette équation, nous déduisons que :

$$\text{pour } s_0 < 4 - \epsilon \quad , \quad \langle \overline{c'^2} \rangle \propto t^{-s_0/2} . \quad (\text{A.17})$$

Encore une fois, ce taux de décroissance est lié à l'existence de termes de production. Sans eux, $\langle \overline{c'^2} \rangle$ aurait une décroissance en $t^{-(s_0+2)/2}$ et ne dépendrait pas du spectre de vitesse.

Annexe B

Annexes Chapitre 4

1 Description de la méthode volume fini de résolution de l'équation (4.31)

La méthode décrite ici a été proposée par Roland Duclous en s'appuyant sur ces travaux précédents [39]. On propose ici une méthode numérique volume fini pour discrétiser l'équation (4.31), où les dimensions de l'espace, des fluctuations de vitesse et du temps sont discrétisées afin d'aboutir à une valeur unique de la PDF $\tilde{f}(\mathbf{v}; x, t)$. Ce schéma numérique devrait permettre de satisfaire les contraintes suivantes :

$$\tilde{f}(\mathbf{v}; x, t) \geq 0 , \quad (\text{B.1a})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\mathbf{v}; x, t) d\mathbf{v} = 1 , \quad (\text{B.1b})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{v} \tilde{f}(\mathbf{v}; x, t) d\mathbf{v} = 0 . \quad (\text{B.1c})$$

On introduit un maillage uniforme cartésien, défini par les volumes de contrôle $\mathcal{C}_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] [u_{j-1/2}, u_{j+1/2}]$, où $(i, j) \in I \times J \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On définit Δx et Δv les tailles respectives des volumes de contrôle d'espace et de vitesse. $x_i = i\Delta x$ et $u_j = j\Delta v$ font ici référence aux centres des mailles, tandis que $x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x$ et $u_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta v$ représentent les frontières des volumes de contrôle.

Soit $f_{i,j}^n$ une approximation moyennée de la PDF dans le volume de contrôle au temps $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta v} \int_{\mathcal{C}_{i,j}} \tilde{f}(u; x, t^n) du dx . \quad (\text{B.2})$$

On part du schéma volume fini initialement dérivé dans [39]. On rappelle les étapes

basiques menant à sa construction dans le cas de l'équation d'advection simplifiée

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0, u > 0, \quad (\text{B.3})$$

pour des raisons de simplicité. Son extension par symétrie à l'espace des vitesses négatives est directe. Son application au terme de glissement de vitesse présent dans le membre de droite de l'équation (4.31) sera discutée ci-après.

Premièrement, un schéma d'Euler explicite en temps est utilisé pour discrétiser l'équation (B.3) telle que :

$$f_i^{n+1} = f_i^n + u \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \quad (\text{B.4})$$

où $F_{i+1/2}^n = F(x_{i+1/2}, t^n)$ représente une approximation conservative discrète de $f(x, t)$ sur la frontière du volume de contrôle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Ensuite, selon [39], une technique de reconstruction MUSCL du second ordre (par primitive), aboutit à l'approximation :

$$F(x, t^n) = \left[f_i^n + \epsilon^+ \frac{x - x_i}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_i^n) \right], \quad \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]. \quad (\text{B.5})$$

Le limiteur de pente ϵ^+ est introduit afin de recouvrir le principe du maximum $0 \leq f_i^n \leq \|f\|_\infty$ sous la condition CFL $u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Son expression, donnée par

$$\epsilon^+ = \begin{cases} 0, & \text{if } (f_{i+1}^n - f_i^n)(f_i^n - f_{i-1}^n) < 0 \\ \min \left(1, \frac{2(\|f\|_\infty - f_i^n)}{f_i^n - f_{i+1}^n} \right), & \text{if } (f_{i+1}^n - f_i^n) < 0 \\ \min \left(1, \frac{2f_i^n}{f_{i+1}^n - f_i^n} \right), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

aboutit à une expression non-linéaire pour le flux numérique.

Cette procédure d'approximation peut être étendue pour évaluer le terme de glissement de vitesse présent dans le membre de droite de l'équation (4.31), qui inclut le gradient de la variance de vitesse $\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x}$. Le terme de glissement devrait compenser le terme d'advection présent dans le membre de gauche de l'équation (4.31), dans le but de garantir la conservation de la moyenne nulle de la vitesse (B.1c). Au niveau discret, ce pré-requis est obtenu si on redéfinit $\left. \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} \right|_i^n$ comme une fonction du flux numérique discret reconstruit obtenu pour le terme d'advection (membre de gauche de l'équation (4.31))

$$\left. \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} \right|_i^n = \sum_j u_j^2 \frac{F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \Delta v \Bigg/ \left(- \sum_j u_j \frac{F_{i,j+1/2}^n - F_{i,j-1/2}^n}{\Delta v} \Delta v \right), \quad (\text{B.7})$$

qui est l'analogue de la relation continue, obtenue par intégration par parties,

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} = \int_{\mathbb{R}} du u^2 \frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \left(- \int_{\mathbb{R}} du u \frac{\partial f}{\partial u} \right) . \quad (\text{B.8})$$

La définition discrète choisie (B.7) mime l'intégration par parties (B.8) requise pour satisfaire la conservation de la moyenne nulle de la vitesse (B.1c), telle que $\bar{u} = 0$.

Une procédure similaire est maintenant appliquée au terme C_1 dans le membre de droite de l'équation (4.31), qui est reformulé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C_1}{2} \tilde{\omega} u f \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C_1}{2} \tilde{\omega} (u - \bar{u}) f \right) . \quad (\text{B.9})$$

On utilise ici une extension du Schéma volume fini (B.4)-(B.5)-(B.6) au cas plus général où les flux dépendent de la variable de glissement u . Cette dépendance est traitée à l'aide d'une discrétisation centrée conservative de la vitesse dans le flux uf . Une définition discrète pour $\bar{u}$ est alors nécessaire dans l'équation (B.9). On introduit une approximation qui satisfait la conservation de la moyenne nulle de la vitesse de façon discrète dans l'analogue discret de l'équation (B.9)

$$\bar{u}_i^n = \sum_j u_j \frac{F_{i,j+1/2}^n - F_{i,j-1/2}^n}{\Delta v} \Delta v \Big/ \left(\sum_j u_j \frac{u_{j+1/2} F_{i,j+1/2}^n - u_{j-1/2} F_{i,j-1/2}^n}{\Delta v} \Delta v \right) , \quad (\text{B.10})$$

qui est l'analogue discret de l'expression continue

$$\bar{u} = \int_{\mathbb{R}} du u \frac{\partial f}{\partial u} \Big/ \int_{\mathbb{R}} du \frac{\partial}{\partial u} (u f) = 0 . \quad (\text{B.11})$$

On obtient finalement une discrétisation non splittée pour tous les termes d'advection de l'équation (4.31). L'analogue discret de la conservation de la densité de probabilité (B.1b) est satisfait si les limiteurs de pente ne sont pas actifs pour le terme d'advection $u \frac{\partial f}{\partial x}$. Dans ce cas, on obtient en effet une discrétisation centrée quel que soit le signe de la vitesse. On accepte une déviation faible de la conservation de la densité de probabilité, où les limiteurs sont actifs pour garantir le principe du maximum.

On procède maintenant à la discrétisation de l'opérateur C_0 dans le membre de droite de l'équation (4.31). Ce terme est splitté et discrétisé à l'aide d'un schéma implicite centré, avec des conditions limites de flux net sur l'espace des vitesses. Cela assure le respect des conservations (B.1b) et (B.1c), au niveau discret. De plus, on obtient une matrice M avec un membre de droite positif, aboutissant à une PDF positive.

Enfin, on remarque que le splitting de l'opérateur C_0 est pratique dans le sens où il permet à la fois l'inclusion de ce terme et une implémentation simple de la parallélisation selon la dimension spatiale x avec une évolution cohérente. Pour ce faire, nous avons utilisé le

protocole de parallélisation MPI.

2 Extension de la méthode à des équations de PDF jointes de la vitesse et du scalaire

Comme expliqué en introduction, la méthode EMC a non seulement pour objectif de résoudre une équation modélisée de PDF de vitesse, mais aussi de façon plus générale toute équation de PDF jointe de la vitesse et du scalaire. Le but de cette section est d'indiquer comment la méthode EMC peut être appliquée à ce cas plus général.

Ainsi, on considère un écoulement turbulent réactif dont l'état est décrit par sa densité ρ , son champ de vitesse $\mathbf{u}$, son enthalpie totale h_t , et par les fractions massiques Y_α des N_s espèces qu'il contient. La PDF de Favre en un point $\tilde{f}$ de ces quantités est maintenant définie par :

$$\tilde{f}(\mathbf{u}, Y_\alpha, h_t) = \frac{\overline{(\rho|\mathbf{u}, Y_\alpha, h_t)}}{\bar{\rho}} \bar{f}(\mathbf{u}, Y_\alpha, h_t) \quad (\text{B.12})$$

où $\overline{(\rho|\mathbf{u}, Y_\alpha, h_t)}$ représente la moyenne de ρ conditionnée par la vitesse et les scalaires. À partir des équations de Navier-Stokes, il est possible de dériver une équation de transport exacte pour la PDF de Favre $\tilde{f}$ [119, 84]. Dans cette équation, les processus d'advection et de réaction chimique sont traités de façon exacte, tandis que les effets du gradient de pression, des contraintes visqueuses et de la diffusion du scalaire doivent être fermés. Comme précédemment, on modélise les termes de pression et de viscosité à l'aide d'un modèle de Langevin simplifié [120]. On choisit de modéliser les effets de la diffusion moléculaire des scalaires par un modèle IEM [161].

En appliquant ces modèles à l'équation de transport exacte de la PDF $\tilde{f}$ de Favre en un point de la vitesse et du scalaire, on obtient l'équation PDF modélisée correspondante. Dans cette étude, on ne considérera que des problèmes monodimensionnels. Par conséquent, on donne directement l'équation de la PDF modélisée en 1D :

$$\begin{aligned} \partial_t (\bar{\rho} \tilde{f}) + \partial_i (\bar{\rho} u_i \tilde{f}) = & \quad (\text{B.13}) \\ & - \partial_{u_i} \left(\left[-\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{P} - C_1 \tilde{\omega} (u_i - \tilde{u}_i) \right] \bar{\rho} \tilde{f} \right) + \frac{1}{2} C_0 \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u_i \partial u_i} \\ & - \partial_{h_t} \left(-\bar{\rho} C_h \tilde{\omega} (h_t - \tilde{h}_t) \tilde{f} \right) - \partial_{Y_\alpha} \left(-\bar{\rho} C_\phi \tilde{\omega} (Y_\alpha - \tilde{Y}_\alpha) \tilde{f} + \bar{\rho} S_\alpha \tilde{f} \right) \end{aligned}$$

Dans l'équation (B.13), les notations sont identiques à celles du texte principal. Par ailleurs, S_α est le terme source pour les espèces α et C_h et C_ϕ sont deux constantes de modèle additionnelles.

Pour résoudre cette équation, l'algorithme EMC proposé est adapté comme suit. Premièrement, on introduit des champs stochastiques supplémentaires pour les scalaires,

notés $\mathcal{Y}_\alpha$ et $\mathcal{H}_t$. Ensuite, pour un pas de temps allant de t à $t + \Delta t$, et dans la maille i , on applique les actions suivantes :

- *Advection dans la direction x_1*
 - Au temps t , dans la maille i , la solution X_i^b de chaque branche b est connue pour tout champ X donné appartenant à l'ensemble de variables $\mathbf{r}, \mathcal{U}, \mathcal{Y}_\alpha$ et $\mathcal{H}_t$.
 - Au temps $t + \Delta t$, la densité stochastique est mise à jour à la valeur $\mathbf{r}_*^b$ donnée par l'équation (4.30).
 - Au temps $t + \Delta t$, les champs stochastiques restants sont mis à jour comme suit. Pour un champ X donné dans l'ensemble des variables $\mathcal{U}, \mathcal{Y}_\alpha$ et $\mathcal{H}_t$:

$$X_i^b(t + \Delta t) = \begin{cases} X_i^b & \text{w. p. } P_0^b \\ X_{i+1}^b & \text{w. p. } P_+^b \\ X_{i-1}^b & \text{w. p. } P_-^b \end{cases} ,$$

où les expressions pour les probabilités $P_{\{0,+, -\}}^b$ sont données par l'équation (4.30).

- *Advection dans les directions x_2 et x_3* : On applique le même algorithme que dans la direction x_1 .

Les nouvelles valeurs des champs stochastiques à la fin de ces sous-étapes sont caractérisées par l'exposant $*$.

- *Termes source* : utilisation d'un schéma d'Euler-Maruyama [79] pour mettre à jour les champs stochastiques.

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}^* \tag{B.14a}$$

$$\mathcal{U}_i(t + \Delta t) = \mathcal{U}_i^* - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{P} - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega} (\mathcal{U}_i - \langle \mathcal{U}_i \rangle) \right) \Big|_t + \sqrt{C_0 \tilde{\varepsilon}|_t} \Delta t \eta_i \tag{B.14b}$$

$$\mathcal{Y}_\alpha(t + \Delta t) = \mathcal{Y}_\alpha^* - \Delta t C_\phi \tilde{\omega} (\mathcal{Y}_\alpha - \langle \mathcal{Y}_\alpha \rangle) \Big|_t \tag{B.14c}$$

$$\mathcal{H}_t(t + \Delta t) = \mathcal{H}_t^* - \Delta t C_h \tilde{\omega} (\mathcal{H}_t - \langle \mathcal{H}_t \rangle) \Big|_t \tag{B.14d}$$

où η_i sont des bruits Gaussiens indépendants de moyenne 0 et de variance 1.

3 Description de la LMC pour résoudre l'équation (4.31)

Dans cette section, on cherche à valider numériquement la méthode EMC proposée. Pour cela, on se propose notamment de la comparer à une méthode LMC d'ordre 1. Le but de cet sous-section est de décrire la méthode LMC utilisée pour résoudre l'équation (4.31).

Elle est basée sur l'évolution de particules lagrangiennes selon les SODEs suivantes

stochastiquement équivalentes à l'équation PDF (4.31) :

$$\frac{dx^+}{dt} = u^+(t) \quad , \quad (\text{B.15a})$$

$$\begin{aligned} \frac{du^+}{dt} = & \partial_x \langle u^{+2} \rangle (x^+(t), t) - \frac{C_1}{2} \tilde{\omega}(x^+(t), t) u^+(t) \\ & + \sqrt{C_0 \tilde{\varepsilon}(x^+(t), t)} \dot{W}_i^+ \end{aligned} \quad (\text{B.15b})$$

Ces équations sont discrétisées à l'aide d'un schéma d'Euler-Maruyama simple [79]. En utilisant les mêmes notations qu'en section 4.5, on résout :

$$x^+(t + \Delta t) = x^+(t) + \Delta t u^+(t) \quad (\text{B.16a})$$

$$\begin{aligned} u^+(t + \Delta t) = & u^+(t) + \Delta t \partial_x \langle u^{+2} \rangle (x^+(t), t) \\ & - \Delta t \frac{C_1}{2} \tilde{\omega}(x^+(t), t) \left(u^+(t) - \langle u^+ \rangle (x^+(t), t) \right) \\ & + \sqrt{C_0 \tilde{\varepsilon}(x^+(t), t)} \Delta t \boldsymbol{\eta}^+ \end{aligned} \quad (\text{B.16b})$$

où η est un bruit Gaussien de moyenne 0 et de variance 1. Les valeurs des quantités moyennes $\tilde{\omega}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\langle u^+ \rangle$ et $\langle u^{+2} \rangle$ sont interpolées à la position de la particule à l'aide d'un interpolateur d'ordre 0. Par exemple :

$$\text{Si } x^+(t) \text{ est dans la maille } i \quad , \quad \langle u^+ \rangle (x^+(t), t) = \langle u^+ \rangle \Big|_i .$$

De façon similaire, des moyennes sont calculées dans chaque maille par sommation de toutes les particules présentes dans cette maille. Par exemple :

$$\langle u^+ \rangle \Big|_i = \frac{1}{N_i} \sum_{p \text{ dans la maille } i} u^{+(p)} \quad ,$$

où N_i est le nombre de particules dans la maille i et où l'exposant (p) réfère à une particule donnée de la simulation.

4 Passage à l'ordre 2 de la méthode LMC

À présent, nous cherchons de façon analogue à passer à l'ordre 2 la méthode LMC décrite en sous-section 3 et utilisée dans la comparaisons de la section 4.6. Nous présenterons de nouveau séparément les méthodes utilisées pour les montées en ordre en espace et en temps.

4.1 Ordre 2 en temps

Comme dans le cas de la méthode EMC, le passage à l'ordre 2 en temps de la méthode LMC est effectuée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, décrit plus en détails en annexe 5.

4.2 Ordre 2 en espace

La montée en ordre en espace se fait par une interpolation spatiale d'ordre 2 sur les moyennes uniquement. Autrement dit, on procède dans un premier temps au calcul des moyennes de vitesses dans chaque maille i , puis on interpole les nouvelles valeurs de vitesses en fonction du gradient du champ de vitesse entre la maille i et ses mailles voisines $i - 1$ et $i + 1$.

La méthode d'interpolation utilisée repose sur l'utilisation d'un terme de flux $S_i(X^+ - X_i) = f\left(\frac{Q_{i+1} - Q_i}{Q_i - Q_{i-1}}\right)$ tel que la nouvelle moyenne interpolée soit égale à :

$$\bar{Q}(X^+) = \bar{Q}_i + \frac{S_i(X^+ - X_i)}{\Delta X} \quad (\text{B.17})$$

Ici, $\bar{Q}$ représente la moyenne de la quantité Q , X^+ et X_i correspondent respectivement aux positions de la particule et de la maille, et ΔX est la largeur de la maille.

On a également besoin d'une interpolation à l'ordre 2 pour la dissipation turbulente ϵ . Pour ce faire, on calcule dans la maille i le terme de flux $F_{\epsilon,i}$ tel que :

$$F_{\epsilon,i} = \frac{F_{\epsilon,i-1/2}^+ + F_{\epsilon,i+1/2}^-}{2} \quad (\text{B.18})$$

Ici, $F_{\epsilon,i-1/2}^+$ et $F_{\epsilon,i+1/2}^-$ représentent respectivement les flux provenant des mailles $i - 1$ et $i + 1$.

5 Schéma Runge-Kutta d'ordre 2 pour le modèle de Langevin

L'objectif de cette annexe est de dériver une famille de schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 permettant de résoudre l'équation de transport de la PDF utilisée dans notre modèle. Cette équation a la particularité d'avoir un coefficient pilotant le bruit Brownien qui dépend uniquement du temps. Cette propriété permet de dériver une famille de schéma à deux étapes dont la formulation est beaucoup plus simple que celle des schémas "généralistes" qui visent à résoudre le cas où le coefficient du bruit Brownien dépend également des variables stochastiques.

Le schéma obtenu est testé sur un cas simple.

5.1 Équation à résoudre

Nous souhaitons résoudre une équation stochastique de la forme :

$$dX_i = a_i(\mathbf{X})dt + b_{ij}(\langle \mathbf{X} \rangle, \langle \mathbf{X} \mathbf{X} \rangle) dW_j \quad (\text{B.19})$$

où le coefficient $\mathbf{b}$ devant les bruits de Wiener dW_j ne dépend que du temps. Dans cette annexe, nous avons choisi de spécifier la dépendance en temps à travers les moyennes et les variances de $\mathbf{X}$, mais l'important est que $\partial_{X_i} \mathbf{b} = 0$.

Nous nous intéressons uniquement à la solution faible de cette équation. Autrement dit, nous cherchons à résoudre l'équation PDF suivante :

$$\partial_t f = -\partial_{X_i} (a_i f) + \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \partial_{X_i X_j}^2 f \quad (\text{B.20})$$

5.2 Schéma de Runge-Kutta

La question que nous nous posons est de savoir s'il est possible d'utiliser un schéma Runge-Kutta à deux étapes pour résoudre cette équation à l'ordre 2. Nous cherchons ce schéma sous la forme :

$$X_i^{(*)} = X_i^{(n)} + \lambda \Delta t a_i^{(n)} + \mu \sqrt{\Delta t} b_{ij}^{(n)} \hat{H}_j \quad (\text{B.21})$$

$$X_i^{(n+1)} = X_i^{(n)} + \Delta t \left(\alpha_1 a_i^{(n)} + \alpha_2 a_i^{(*)} \right) + \sqrt{\Delta t} \left(\beta_1 b_{ij}^{(n)} + \beta_2 b_{ij}^{(*)} \right) \hat{I}_j \quad (\text{B.22})$$

où λ , μ , α_i et β_i sont les coefficients définissant le schéma et où $\hat{H}_j$ et $\hat{I}_j$ sont des bruits vérifiant :

$$\langle \hat{I}_j \rangle = \langle \hat{H}_j \rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{I}_i \hat{I}_j \rangle = \langle \hat{H}_i \hat{H}_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad \langle \hat{H}_i \hat{I}_j \rangle = \gamma \delta_{ij} \quad (\text{B.23})$$

où $0 \leq \gamma \leq 1$ est le coefficient de corrélation entre $\hat{I}$ et $\hat{H}$.

5.3 Conditions sur les coefficients

Les conditions que doit respecter le schéma pour être consistant et précis à l'ordre 1 sont :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad , \quad \beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (\text{B.24})$$

Pour déterminer les conditions nécessaires à l'obtention de l'ordre 2, nous réalisons tout d'abord un développement limité de l'équation PDF (B.20) à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} = & f + \Delta t \left[-\partial_{X_i} (a_i f) + \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \partial_{X_i X_j}^2 f \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\partial_{X_i} (a_i \partial_{X_j} (a_j f)) - \frac{1}{2} b_{j\alpha} b_{k\alpha} \partial_{X_i} (a_i \partial_{X_j X_k}^2 f) - \frac{1}{2} b_{j\alpha} b_{k\alpha} \partial_{X_i X_j X_k}^3 (a_i f) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (b_{i\alpha} \partial_t b_{j\alpha} + b_{j\alpha} \partial_t b_{i\alpha}) \partial_{X_i X_j}^2 f + \frac{1}{4} (b_{i\alpha} b_{j\alpha}) (b_{k\beta} b_{l\beta}) \partial_{X_i X_j X_k X_l}^4 f \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

où tous les termes du second membre sont pris au temps (n) et où :

$$\partial_t b_{ij} = \partial_{\langle x_p \rangle} b_{ij} \langle a_p \rangle + \partial_{\langle x_p x_q \rangle} b_{ij} (\langle a_p X_q \rangle + \langle a_q X_p \rangle + b_{p\alpha} b_{q\alpha})$$

D'autre part, nous pouvons également écrire l'équation pour la PDF de $X_i^{(n+1)}$. Nous avons en effet :

$$f_{rk2}^{(n+1)} = \langle \delta (\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(n+1)}) \rangle \quad (\text{B.26})$$

Sachant que $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} + \Delta \mathbf{X}$ avec $\Delta \mathbf{X}$ d'ordre 1/2, nous pouvons réaliser un développement limité de $f_{rk2}^{(n+1)}$ à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f_{rk2}^{(n+1)} = & f_{rk2} - \frac{\partial}{\partial X_i} (f_{rk2} \langle \Delta \mathbf{X}_i \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} (f_{rk2} \langle \Delta \mathbf{X}_i \Delta \mathbf{X}_j \rangle) \\ & - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k} (f_{rk2} \langle \Delta \mathbf{X}_i \Delta \mathbf{X}_j \Delta \mathbf{X}_k \rangle) \\ & + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k \partial X_l} (f_{rk2} \langle \Delta \mathbf{X}_i \Delta \mathbf{X}_j \Delta \mathbf{X}_k \Delta \mathbf{X}_l \rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

où à nouveau tous les termes du second membre sont pris au temps (n) . De plus, la définition du schéma RK2 conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta X_i \approx & a_i \Delta t + (\alpha_2 \mu) b_{j\alpha} \partial_{x_j} a_i \hat{H}_p \Delta t^{3/2} \\ & + \left[(\alpha_2 \lambda) a_j \partial_{x_j} a_i + \left(\frac{\alpha_2 \mu^2}{2} \right) b_{j\alpha} b_{k\beta} \partial_{x_j x_k} a_i \hat{H}_\alpha \hat{H}_\beta \right] \Delta t^2 \\ & + \left[b_{ij} \sqrt{\Delta t} + \beta_2 \dot{b}_{ij} \Delta t^{3/2} \right] \hat{I}_j \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

où

$$\dot{b}_{ij} = \frac{b_{ij}^{(*)} - b_{ij}^{(n)}}{\Delta t} = \lambda \partial_{\langle x_p \rangle} b_{ij} \langle a_p \rangle + \partial_{\langle x_p x_q \rangle} b_{ij} (\lambda (\langle a_p X_q \rangle + \langle a_q X_p \rangle) + \mu^2 b_{p\alpha} b_{q\alpha})$$

On a alors :

$$\langle \Delta X_i \rangle = a_i \Delta t + \left[(\alpha_2 \lambda) a_j \partial_{x_j} a_i + \left(\frac{\alpha_2 \mu^2}{2} \right) b_{j\alpha} b_{k\alpha} \partial_{x_j x_k} a_i \right] \Delta t^2 \quad (\text{B.29})$$

$$\langle \Delta X_i \Delta X_j \rangle = b_{i\alpha} b_{j\alpha} \Delta t + \left[a_i a_j + \gamma \alpha_2 \mu (b_{i\alpha} b_{k\alpha} \partial_{x_k} a_j + b_{j\alpha} b_{k\alpha} \partial_{x_k} a_i) + \beta_2 (b_{i\alpha} \dot{b}_{j\alpha} + b_{j\alpha} \dot{b}_{i\alpha}) \right] \Delta t^2 \quad (\text{B.30})$$

$$\langle \Delta X_i \Delta X_j \Delta X_k \rangle = b_{i\alpha} b_{j\beta} b_{k\gamma} \langle \hat{I}_\alpha \hat{I}_\beta \hat{I}_\gamma \rangle \Delta t^{3/2} + [a_i b_{j\alpha} b_{k\alpha} + a_j b_{i\alpha} b_{k\alpha} + a_k b_{i\alpha} b_{j\alpha}] \Delta t^2 \quad (\text{B.31})$$

$$\langle \Delta X_i \Delta X_j \Delta X_k \Delta X_l \rangle = b_{i\alpha} b_{j\beta} b_{k\gamma} b_{l\delta} \langle \hat{I}_\alpha \hat{I}_\beta \hat{I}_\gamma \hat{I}_\delta \rangle \Delta t^2 \quad (\text{B.32})$$

En comparant les développements limités de $f^{(n+1)}$ et $f_{rk2}^{(n+1)}$, nous déduisons alors les relations supplémentaires sur les bruits :

$$\langle \hat{I}_\alpha \hat{I}_\beta \hat{I}_\gamma \rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{I}_\alpha \hat{I}_\beta \hat{I}_\gamma \hat{I}_\delta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (\text{B.33})$$

D'autre part, les coefficients doivent vérifier :

$$\alpha_2 \lambda = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_2 \lambda = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_2 \mu^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \gamma \alpha_2 \mu = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha_2 \mu^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{B.34})$$

La solution de ce système est :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\lambda} \quad , \quad \beta_2 = \frac{1}{2\lambda} \quad , \quad \mu = \sqrt{\lambda} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\lambda} \quad (\text{B.35})$$

Ainsi, nous avons trouvé une famille de schéma Runge-Kutta à l'ordre 2. Plusieurs remarques peuvent être faites :

- Si les bruits des deux étapes sont complètement décorrélés ($\gamma = 0$), alors il n'y a pas de solution.
- Avec $\gamma = 1$, on retrouve le schéma RK2 SSP. De plus, un seul bruit est suffisant puisque $\hat{H}$ et $\hat{I}$ sont complètement corrélés.
- Un schéma RK2 déterministe donné (défini par la valeur de λ) peut être complété pour donner un schéma stochastique.

Dans cette thèse, nous utilisons le schéma RK2 SSP avec $\gamma = 1$.

Bibliographie

- [1] U. ALON, J. HECHT, D. MUKAMEL et D. SHVARTS. « [Scale invariant mixing rates of hydrodynamically unstable interfaces](#) ». *Phys. Rev. Lett.* 72 (18 mai 1994), p. 2867–2870 (cf. p. 3).
- [2] U. ALON, J. HECHT, D. OFER et D. SHVARTS. « [Power Laws and Similarity of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov Mixing Fronts at All Density Ratios](#) ». *Phys. Rev. Lett.* 74 (4 jan. 1995), p. 534–537 (cf. p. 3).
- [3] U. ALON, D. SHVARTS et D. MUKAMEL. « [Scale-invariant regime in Rayleigh-Taylor bubble-front dynamics](#) ». *Phys. Rev. E* 48 (2 août 1993), p. 1008–1014 (cf. p. 3).
- [4] B. J. BALAKUMAR, G. C. ORLICZ, J. R. RISTORCELLI, S. BALASUBRAMANIAN, K. P. PRESTRIDGE et C. D. TOMKINS. « [Turbulent mixing in a Richtmyer-Meshkov fluid layer after reshock: velocity and density statistics](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 696 (2012), p. 67–93 (cf. p. 2).
- [5] G.I. BARENBLATT. « Self-similar turbulence propagation from an instantaneous plane source, » *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (1983), p. 48–60 (cf. p. 3, 38).
- [6] J.-D. BENAMOU. « Big Ray Tracing: Multivalued Travel Time Field Computation Using Viscosity Solutions of the Eikonal Equation ». *J. Comp. Phys.* 128.2 (1996), p. 463–474 (cf. p. 97).
- [7] D. BESNARD. « The Megajoule Laser – A High-Energy-Density Physics Facility ». *Lasers and Nuclei: Applications of Ultrahigh Intensity Lasers in Nuclear Science*. Sous la dir. d’Heinrich SCHWOERER, Burgard BELEITES et Joseph MAGILL. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006, p. 67–77 (cf. p. 1).
- [8] W. J. T. BOS, H. TOUIL et J.-P. BERTOGLIO. « Reynolds number dependency of the scalar flux spectrum in isotropic turbulence with a uniform scalar gradient ». *Phys. Fluids* 17 (2005), p. 125108 (cf. p. 35).
- [9] M. BOULET et J. GRIFFOND. « Three dimensional numerical simulation of experiments on Richtmyer-Meshkov induced mixing with reshock ». IWPCMTM. Paris, 2006 (cf. p. 2).

- [10] G. BOUZGARROU. « [Analyse d'un mélange gazeux issu d'une instabilité de Richtmyer-Meshkov](#) ». Thèse de doct. 2014 (cf. p. 2).
- [11] Y. BRENIER et L. CORRIAS. « A kinetic formulation for multi-branch entropy solutions of scalar conservation laws ». *Ann. Inst. Poincaré* 15 (1998), p. 169–190 (cf. p. 97).
- [12] M. BROUILLETTE. « THE RICHTMYER-MESHKOV INSTABILITY ». *Ann. Rev. Fluid Mech.* 34.1 (2002), p. 445–468 (cf. p. 3, 15, 16).
- [13] M. BROUILLETTE et B. STURTEVANT. « [Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability: single-scale perturbations on a continuous interface](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 263 (1994), p. 271–292 (cf. p. 2).
- [14] G. BULAT, W.P. JONES et A.J. MARQUIS. « Large Eddy simulation of an industrial gas-turbine combustion chamber using the sub-grid PDF method ». *Proc. Comb. Inst.* 34 (2013), p. 3155–3164 (cf. p. 11, 96).
- [15] G. BULAT, W.P. JONES et A.J. MARQUIS. « NO and CO formation in an industrial gas-turbine combustion chamber using LES with the Eulerian sub-grid PDF method ». *Comb. Flame* 161 (2014), p. 1804–1825 (cf. p. 11, 96).
- [16] A.D. BURDEN. « The influence of pressure fluctuations on double velocity correlations ». *App. Sci. Res.* 51 (1993), p. 489–494 (cf. p. 68).
- [17] A. BURLOT, B.-J. GRÉA, F.S. GODEFERD, C. CAMBON et J. GRIFFOND. « Spectral modelling of high Reynolds number unstably stratified homogeneous turbulence ». *J. Fluid Mech.* 765 (2015), p. 17–44 (cf. p. 16, 23).
- [18] A. BURLOT, B.-J. GRÉA, F. S. GODEFERD, C. CAMBON et O. SOULARD. « Large Reynolds number self-similar states of unstably stratified homogeneous turbulence ». *Phys. Fluids* 27 (2015), p. 065114 (cf. p. 16).
- [19] M. CASSIANI, J. F. VINUESA, S. GALMARINI et B. DENBY. « Stochastic fields method for sub-grid scale emission heterogeneity in mesoscale atmospheric dispersion models ». *Atmos. Chem. Phys.* 10 (2010), p. 267–277 (cf. p. 11, 96).
- [20] J.R. CHASNOV. « The decay of axisymmetric homogeneous turbulence ». *Phys. Fluids* 7 (1995), p. 600–605 (cf. p. 16, 33).
- [21] J.R. CHASNOV. « On the decay of inhomogeneous turbulence ». *J. Fluid. Mech* 342 (1997), p. 335–354 (cf. p. 4, 5, 16, 17, 28, 29, 33, 48, 49, 127, 128, 142).
- [22] L. CHENG, H. LIU et S. OSHER. « Computational High-Frequency Wave Propagation Using The Level Set Method, With Applications To The Semi-Classical Limit Of Schrödinger Equations ». *Comm. Math. Sci.* 1 (2003), p. 593–621 (cf. p. 97).
- [23] T.T. CLARK et Y. ZHOU. « Growth rate exponents of Richtmyer–Meshkov mixing layers ». *J. Appl. Mech.* 73 (2006), p. 461–468 (cf. p. 3–5, 17, 28, 29, 49, 128).

- [24] B. D. COLLINS et J. W. JACOBS. « [PLIF flow visualization and measurements of the Richtmyer-Meshkov instability of an air/SF6 interface](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 464 (2002), p. 113–136 (cf. p. 2).
- [25] G. COMTE-BELLOT et S. CORRISIN. « The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence ». *J. Fluid Mech.* 25 (1966), p. 657–682 (cf. p. 27).
- [26] T.J. CRAFT et B.E. LAUNDER. « A Reynolds stress closure designed for complex geometries ». *Int. J. Heat Fluid Flow* 17 (1996), p. 245–254 (cf. p. 68).
- [27] B.J. DALY et F.H. HARLOW. « Transport equations of turbulence ». *Phys. Fluids* 13 (1970), p. 2364–2649 (cf. p. 7).
- [28] V. DARU et C. TENAUD. « High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations ». *J. Comp. Phys.* 193 (2004), p. 563–594 (cf. p. 39).
- [29] P.A. DAVIDSON. *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*. Oxford, UK : Oxford University Press, 2004 (cf. p. 4, 16).
- [30] P.A. DAVIDSON, N. OKAMOTO et Y. KANEDA. « On freely decaying, anisotropic, axisymmetric Saffman turbulence ». *J. Fluid Mech.* 706 (2012), p. 150–172 (cf. p. 16, 33).
- [31] G. DIMONTE, C. E. FRERKING et M. SCHNEIDER. « Richtmyer–Meshkov instability in the turbulent regime ». *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), p. 4855–4858 (cf. p. 3, 17, 49, 128).
- [32] G. DIMONTE et M. SCHNEIDER. « [Turbulent Richtmyer-Meshkov instability experiments with strong radiatively driven shocks](#) ». *Physics of Plasmas* 4.12 (1997), p. 4347–4357 (cf. p. 3).
- [33] G. DIMONTE et M. SCHNEIDER. « [Density ratio dependence of Rayleigh-Taylor mixing for sustained and impulsive acceleration histories](#) ». *Physics of Fluids* 12.2 (2000), p. 304–321 (cf. p. 3).
- [34] I.A. DODOULAS et S. NAVARRO-MARTINEZ. « Large eddy simulation of premixed turbulent flames using the probability density function approach ». *Flow, turbulence and combustion* 90.3 (2013), p. 645–678 (cf. p. 11, 96).
- [35] J. DUMOND, F. MAGAGNATO et A. CLASS. « Stochastic-field cavitation model ». *Phys. Fluids* 25 (2013), p. 073302 (cf. p. 11, 96).
- [36] C. EMAKO, V. LETIZIA, N. PETROVA, R. SAINCT, R. DUCLOUS et O. SOULARD. « Diffusion limit of the simplified Langevin PDF model in weakly inhomogeneous turbulence ». *ESAIM Proc. Surv.* 48 (2015), p. 400–419 (cf. p. 10, 75, 80, 82, 118).

- [37] B. ENGQUIST et O. RUNBORG. *Multiphase computations in geometrical optics*. Springer, 1999 (cf. p. 97).
- [38] B. ENGQUIST et O. RUNBORG. « Computational high frequency wave propagation ». *Acta numerica* 12 (2003), p. 181–266 (cf. p. 97).
- [39] F. FILBET, E. SONNENDRÜCKER et P. BERTRAND. « Conservative numerical schemes for the Vlasov equation ». *J. Comp. Phys.* 172.1 (2001), p. 166–187 (cf. p. 145, 146).
- [40] H. FLASCHKA, M. FOREST et D. MCCLAUGHLIN. « Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation ». *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), p. 739–784 (cf. p. 97).
- [41] S. FOMEL et J. A. SETHIAN. « Fast-phase space computation of multiple arrivals ». *Proc. Nat. Acad. Sci.* 99 (2002), p. 7329–7334 (cf. p. 97).
- [42] A. FORESTIER et P. LE FLOCH. « Multivalued Solutions to Some Non-Linear and Non-Strictly Hyperbolic Systems ». *Japan J. Indust. Appl. Math.* 9 (1992), p. 1–23 (cf. p. 12, 97, 103, 104, 106).
- [43] R. O. FOX. « The spectral relaxation model of the scalar dissipation rate in homogeneous turbulence ». *Phys. Fluids* 7.5 (1995), p. 1082–1094 (cf. p. 52).
- [44] D. FREDRICH, W. P. JONES et A. J. MARQUIS. « Application of the Eulerian subgrid Probability Density Function method in the Large Eddy Simulation of a partially premixed swirl flame ». *Combustion Science and Technology* (2018), p. 1–14 (cf. p. 11, 96).
- [45] C.W. GARDINER. *Handbook of Stochastic Methods*. second. Springer, 1985 (cf. p. 100, 101).
- [46] A. GARMORY et E. MASTORAKOS. « Aerosol nucleation and growth in a turbulent jet using the stochastic fields method ». *Chem. Eng. Sci.* 63 (2008), p. 4078–4089 (cf. p. 11, 96).
- [47] A. GARMORY, E. S. RICHARDSON et E. MASTORAKOS. « Micromixing effects in a reacting plume by the stochastic field method ». *Atmospheric Environment* 40 (2006), p. 1078–1091 (cf. p. 11, 96).
- [48] S. GAUTHIER et M. BONNET. « A $k-\epsilon$ model for turbulent mixing in shock-tube flows induced by Rayleigh-Taylor instability ». *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 2.9 (1990), p. 1685–1694 (cf. p. 3, 6).
- [49] J. GLIMM. « Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations ». *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), p. 697–715 (cf. p. 98, 110, 124, 131).
- [50] L. GOSSE. « Using K-Branch Entropy Solutions for Multivalued Geometric Optics Computations ». *J. Comp. Phys.* 180 (2002), p. 155–182 (cf. p. 97).

- [51] B.-J. GRÉA. « The rapid acceleration model and growth rate of a turbulent mixing zone induced by Rayleigh-Taylor instability ». *Phys. Fluids* 25 (2013), p. 015118 (cf. p. 17, 38).
- [52] O. GRÉGOIRE, D. SOUFFLAND et S. GAUTHIER. « A second-order turbulence model for gaseous mixtures induced by Richtmyer-Meshkov instabilities ». *J. of Turbulence* 6.29 (2005) (cf. p. 6, 65).
- [53] J. GRIFFOND. « Personal Communication » (cf. p. 7).
- [54] J. GRIFFOND, B.-J. GRÉA et O. SOULARD. « Unstably stratified homogeneous turbulence as a tool for turbulent mixing modeling ». *J. Fluids Eng.* 136.9 (2014), p. 091201 (cf. p. 7, 16).
- [55] J. GRIFFOND, B.-J. GRÉA et O. SOULARD. « Numerical investigation of self-similar unstably stratified homogeneous turbulence ». *J. Turb.* 16.2 (2015), p. 167–183 (cf. p. 16).
- [56] J. GRIFFOND et O. SOULARD. « Evolution of axisymmetric weakly turbulent mixtures interacting with shock or rarefaction waves ». *Physics of Fluids* 24.11 (2012), p. 115108 (cf. p. 7).
- [57] J. GROTH. « Description of the pressure in the Reynolds stress transport equation ». *Phys. Fluids A* 3.9 (1991), p. 2276–2277 (cf. p. 68).
- [58] S. GURBATOV, A. MALAKHOV et A. SAICHEV. *Nonlinear Random Waves and Turbulence in Non-dispersive Media: Waves, Rays and Particles*. Manchester University Press, 1991 (cf. p. 106).
- [59] S.N. GURBATOV, O.V. RUDENKO et A.I. SAICHEV. *Nonlinear Nondispersive Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics*. Springer-Verlag et HEP, 2012 (cf. p. 106).
- [60] D.C. HAWORTH. « Progress in probability density function methods for turbulent reacting flows ». *Progress in Energy and Combustion Science* 36.2 (2010), p. 168–259 (cf. p. 11, 96).
- [61] D. C. HAWORTH et S. B. POPE. « Transported probability density function methods for Reynolds-averaged and large-eddy simulations ». *Turbulent Combustion*. Sous la dir. de T. ECHEKKI et E. MASTORAKOS. Springer, 2011, p. 119–142 (cf. p. 96).
- [62] M. HERMANN, P. MOIN et S. I. ABARZHI. « Nonlinear evolution of the Richtmyer-Meshkov instability ». *Journal of Fluid Mechanics* 612 (2008), p. 311–338 (cf. p. 2).
- [63] R. L. HOLMES, G. DIMONTE, B. FRYXELL, M. L. GITTINGS, J. W. GROVE, M. SCHNEIDER, D. H. SHARP, A. L. VELIKOVICH, R. P. WEAVER, Q. ZHANG et et AL. « Richtmyer-Meshkov instability growth: experiment, simulation and theory ». *Journal of Fluid Mechanics* 389 (1999), p. 55–79 (cf. p. 2).

- [64] N. A. INOGAMOV. « [Statistics of long-wavelength fluctuations and the expansion rate of Richtmyer-Meshkov turbulence zone](#) ». *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 75.11 (1^{er} juin 2002), p. 547–551 (cf. p. 3).
- [65] N.A. INOGAMOV. « The role of Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instabilities in astrophysics: an introduction ». *Astrophys. Space. Phys.* 10 (1999), p. 1–335 (cf. p. 3, 5, 17, 28, 29, 33, 49, 128).
- [66] J. W. JACOBS et V. V. KRIVETS. « [Experiments on the late-time development of single-mode Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Physics of Fluids* 17.3 (2005), p. 034105 (cf. p. 2).
- [67] J. W. JACOBS, V. V. KRIVETS, V. TSIKLASHVILI et O. A. LIKHACHEV. « [Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability with an imposed, random initial perturbation](#) ». *Shock Waves* 23.4 (1^{er} juil. 2013), p. 407–413 (cf. p. 3).
- [68] J. JAISHREE et D.C. HAWORTH. « Comparisons of Lagrangian and Eulerian PDF methods in simulations of non-premixed turbulent jet flames with moderate-to-strong turbulence-chemistry interactions. » *Combust. Theory Model.* 16 (2012), p. 435–463 (cf. p. 11, 96).
- [69] P. JENNY, S. B. POPE, M. MURADOGLU et D. A. CAUGHEY. « A hybrid algorithm for the joint PDF equation of turbulent reactive flows ». *J. Comp. Phys.* 166 (2001), p. 218–252 (cf. p. 95).
- [70] S. JIN et X. LI. « Multi-phase computations of the semi-classical limit of the Schrodinger equation and related problems: Whitham vs Wigner ». *Physica D* 182 (2003), p. 46–85 (cf. p. 97).
- [71] M. A. JONES et J. W. JACOBS. « [A membraneless experiment for the study of Richtmyer-Meshkov instability of a shock-accelerated gas interface](#) ». *Physics of Fluids* 9.10 (1997), p. 3078–3085 (cf. p. 2).
- [72] W. JONES, A. MARQUIS et F. WANG. « Large eddy simulation of a premixed propane turbulent bluff body flame using the Eulerian stochastic field method ». *Fuel* 140 (2015), p. 514–525 (cf. p. 11, 96).
- [73] W.P JONES et B.E LAUNDER. « [The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence](#) ». *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15.2 (1972), p. 301 –314 (cf. p. 6).
- [74] W.P. JONES, A.J. MARQUIS et V.N. PRASAD. « LES of a turbulent premixed swirl burner using the Eulerian stochastic field method ». *Comb. Flame* 159 (2012), p. 3079–3095 (cf. p. 11, 96).

- [75] W. P. JONES et S. NAVARRO-MARTINEZ. « Large Eddy Simulation of autoignition with a subgrid probability density function method ». *Combustion and Flame* 150 (2007), p. 170–187 (cf. p. [11](#), [96](#)).
- [76] W. P. JONES, S. NAVARRO-MARTINEZ et O. RÖHL. « Large Eddy Simulation of hydrogen auto-ignition with a probability density function method ». T. 31. Combustion Institute. 2007, p. 1765–1771 (cf. p. [11](#), [96](#)).
- [77] W.P. JONES et V.N. PRASAD. « [Large Eddy Simulation of the Sandia Flame Series \(D–F\) using the Eulerian stochastic field method](#) ». *Combustion and Flame* 157.9 (2010), p. 1621 –1636 (cf. p. [11](#), [96](#)).
- [78] S.K. KIM et M.K. CHUNG. « Roles of pressure transport and intermittency for computation of turbulent free shear flows ». *Int. J. Heat Fluid Flow* 16 (1995), p. 194–201 (cf. p. [68](#)).
- [79] P. E. KLOEDEN et E. PLATEN. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. New York : Springer, 2011 (cf. p. [114](#), [149](#), [150](#)).
- [80] A.N. KOLMOGOROV. « On the degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid ». *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 31 (1941), p. 538–541 (cf. p. [4](#), [16](#)).
- [81] R.H. KRAICHNAN. « Diagonalizing approximation for inhomogeneous turbulence ». *Phys. Fluids* 7.8 (1964), p. 1169–1177 (cf. p. [23](#), [135](#)).
- [82] V. V. KRIVETS, K. J. FERGUSON et J. W. JACOBS. « [Turbulent mixing induced by Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *AIP Conference Proceedings* 1793.1 (2017), p. 150003 (cf. p. [3](#)).
- [83] R.M. KULKARNI et W. POLIFKE. « LES of Delft-Jet-In-Hot-Coflow (DJHC) with tabulated chemistry and stochastic fields combustion model ». *Fuel Proc. Tech.* 107 (2013), p. 138–146 (cf. p. [11](#), [96](#)).
- [84] V. R. KUZNETSOV et V. A. SABEL'NIKOV. *Turbulence and Combustion*. London : Hemisphere Publishing Corporation, 1990 (cf. p. [99](#), [148](#)).
- [85] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ. *Continuum mechanics*. Moscou : Gostekhizdat, 1954 (cf. p. [4](#), [16](#), [141](#)).
- [86] B.E. LAUNDER, B.J. REECE et W. RODI. « Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure ». *J. Fluid. Mech.* 68.3 (1975), p. 537–566 (cf. p. [65](#), [85](#)).
- [87] P. D. LAX et C. DAVID LEVERMORE. « The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation ». *Comm. Pure App. Math.* 36 (1983), p. 253–290 (cf. p. [97](#)).

- [88] P.G. LEFLOCH et J.-M. MERCIER. « Revisiting the method of characteristics via a convex hull algorithm ». *J. Comp. Phys.* 298 (2015), p. 95–112 (cf. p. [12](#), [97](#), [103](#), [104](#), [106](#)).
- [89] M. LESIEUR. *Turbulence in fluids*. Fourth. Springer, 2008 (cf. p. [4](#), [16](#), [23](#), [26](#)).
- [90] M. LESIEUR et S. OSSIA. « 3D isotropic turbulence at very high Reynolds numbers: EDQNM study ». *J. Turb* 1 (2000), p. 1–25 (cf. p. [4](#), [16](#), [26](#), [27](#)).
- [91] R.J. LEVEQUE. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problem*. CUP, 2002 (cf. p. [39](#)).
- [92] H. LIU, S. OSHER et R. TSAI. « Multi-valued solution and level-set methods in computational high frequency wave propagation ». *Commun. Comput. Phys.* 1 (2006), p. 765–804 (cf. p. [97](#)).
- [93] H. LIU et Z. XIAO. « [Scale-to-scale energy transfer in mixing flow induced by the Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Phys. Rev. E* 93 (5 mai 2016), p. 053112 (cf. p. [3](#)).
- [94] X. LI, J. G. WOHLBIER, S. JIN et J. H. BOOSKE. « Eulerian method for computing multivalued solutions of the Euler-Poisson equations and applications to wave breaking in klystrons ». *Phys. Rev. E* 70 (2004), p. 016502 (cf. p. [97](#)).
- [95] A. LLOR. *Statistical hydrodynamics models for developed instability flows*. T. 681. Lect. Notes Phys. Berlin Heidelberg : Springer, 2005 (cf. p. [59](#), [65](#)).
- [96] A. LLOR. « Invariants of free turbulent decay ». *arXiv/physics* 0612220 (2006) (cf. p. [3–5](#), [16](#), [17](#), [28](#), [29](#), [33](#), [48](#), [49](#), [127](#), [128](#)).
- [97] A. LLOR. « Langevin equation of big structure dynamics in turbulence ». *Eur. J. Mech. B* 30.5 (2011), p. 480–504 (cf. p. [4](#), [16](#)).
- [98] L.G. LOITSYANSKII. « Some basic laws of isotropic turbulent flow ». *Trudy Tsentr. Aero.-Giedrodin. Inst.* 440 (1939), p. 3–23 (cf. p. [4](#), [16](#)).
- [99] M. LOMBARDINI, D. I. PULLIN et D. I. MEIRON. « [Transition to turbulence in shock-driven mixing: a Mach number study](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 690 (2012), p. 203–226 (cf. p. [2–5](#), [17](#), [29](#), [49](#), [128](#)).
- [100] C. C. LONG, V. V. KRIVETS, J. A. GREENOUGH et J. W. JACOBS. « [Shock tube experiments and numerical simulation of the single-mode, three-dimensional Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Physics of Fluids* 21.11 (2009), p. 114104 (cf. p. [2](#)).
- [101] J.L. LUMLEY. « Pressure strain correlation ». *Phys. Fluids* 18 (1975), p. 750 (cf. p. [7](#), [67](#)).
- [102] J.L. LUMLEY. « Computational Modeling of Turbulent flows ». *Adv. Appl. Mech.* 18 (1978), p. 123–176 (cf. p. [68](#)).

- [103] N.N. MANSOUR, J. KIM et P. MOIN. *Reynolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow*. Rap. tech. 89451. NASA, déc. 1987 (cf. p. [67](#), [68](#)).
- [104] S.L. MARTINELLI. « Eulerian methods for high frequency acoustics ». *Proc. Meet. Acoustics* 26 (2016), p. 045001 (cf. p. [97](#)).
- [105] E.E. MESHKOV. « Instability at the interface of two gases accelerated by a shock wave ». *Fluid Dyn.* 43.5 (1969), p. 101–104 (cf. p. [2](#), [15](#)).
- [106] V. MONS, J.-C. CHASSAING, T. GOMEZ et P. SAGAUT. « Is isotropic turbulence decay governed by asymptotic behavior of large scales ? An eddy-damped quasi-normal Markovian-based data assimilation study ». *Phys. Fluids* 26 (2014), p. 115105 (cf. p. [4](#), [16](#)).
- [107] V. MONS, M. MELDI et P. SAGAUT. « Numerical investigation on the partial return to isotropy of freely decaying homogeneous axisymmetric turbulence ». *Phys. Fluids* 26 (2014), p. 025110 (cf. p. [16](#), [27](#), [33](#), [142](#)).
- [108] M. MURADOGLU, P. JENNY, S. B. POPE et D. A. CAUGHEY. « A consistent hybrid finite-volume/particle method for the PDF equations of turbulent reactive flows ». *J. Comp. Phys.* 154 (1999), p. 342–371 (cf. p. [95](#)).
- [109] M. MURADOGLU, S. B. POPE et D. A. CAUGHEY. « The hybrid method for the PDF equations of turbulent reactive flows: consistency conditions and correction algorithms ». *J. Comp. Phys.* 172 (2001), p. 841–878 (cf. p. [95](#)).
- [110] D. NOH, S. GALLOT-LAVALLÉE, W. P. JONES et S. NAVARRO-MARTINEZ. « [Comparison of droplet evaporation models for a turbulent, non-swirling jet flame with a polydisperse droplet distribution](#) ». *Combustion and Flame* 194 (2018), p. 135–151 (cf. p. [11](#), [96](#)).
- [111] M. OBERLACK et S. GUENTHER. « [Shear-free turbulent diffusion-classical and new scaling laws](#) ». *Fluid Dynamics Research* 33.5-6 (2003), p. 453 (cf. p. [92](#), [93](#), [132](#)).
- [112] T. OGGIAN, D. DRIKAKIS, D.L. YOUNGS et R.J.R. WILLIAMS. « Computing multi-mode shock induced compressible turbulent mixing at late times ». *J. Fluid Mech.* 779 (2015), p. 411–431 (cf. p. [3](#), [16](#), [33](#), [45](#)).
- [113] D. ORON, L. ARAZI, D. KARTOON, A. RIKANATI, U. ALON et D. SHVARTS. « [Dimensionality dependence of the Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instability late-time scaling laws](#) ». *Physics of Plasmas* 8.6 (2001), p. 2883–2889 (cf. p. [3](#)).
- [114] G. PENG, N. J. ZABUSKY et S. ZHANG. « [Vortex-accelerated secondary baroclinic vorticity deposition and late-intermediate time dynamics of a two-dimensional Richtmyer–Meshkov interface](#) ». *Physics of Fluids* 15.12 (2003), p. 3730–3744 (cf. p. [2](#)).

- [115] N. PETROVA. « Turbulence-chemistry interaction models for numerical simulation of aeronautical propulsion systems ». Thèse de doct. Ecole Polytechnique, 2015 (cf. p. 12, 95, 96, 98, 101, 103, 110, 124).
- [116] T. PHAM et D. I. MEIRON. « A numerical study of Richtmyer-Meshkov instability in continuously stratified fluids ». *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 5.2 (1993), p. 344–368 (cf. p. 3).
- [117] O.M. PHILLIPPS. « The final period of decay of non-homogeneous turbulence ». *Proc. Camb. Phil. Soc.* 52 (1956), p. 135–151 (cf. p. 142).
- [118] M. A. PICCIANI, S. NAVARRO-MARTINEZ et E. RICHARDSON. « Resolution requirements in stochastic field simulation of turbulent premixed flames ». 2017 (cf. p. 11, 96).
- [119] S. B. POPE. « PDF methods for turbulent reactive flows ». *Prog. Energ. Combust.* 27 (1985), p. 119–192 (cf. p. 8, 11, 51, 57, 85, 95, 96, 99–101, 106, 108, 148).
- [120] S. B. POPE. *Turbulent flows*. Cambridge Univ. Press, 2000 (cf. p. 8, 51, 57, 59, 96, 99, 106, 108, 148).
- [121] S. B. POPE. « Simple models of turbulent flows ». *Physics of Fluids* 23.1 (2011), p. 011301 (cf. p. 65, 85, 132).
- [122] S.B. POPE. « On the relationship between stochastic Lagrangian models of turbulence and second-moment closures ». *Phys. Fluids* 6 (1994), p. 973–985 (cf. p. 51, 59, 67, 92).
- [123] O. POUJADE et M. PEYBERNES. « Growth rate of Rayleigh-Taylor turbulent mixing layers with the foliation approach ». *Phys. Rev. E* 81 (2010), p. 016316 (cf. p. 3–5, 17, 29, 49, 128, 137).
- [124] J. K. PRASAD, A. RASHEED, S. KUMAR et B. STURTEVANT. « The late-time development of the Richtmyer-Meshkov instability ». *Physics of Fluids* 12.8 (2000), p. 2108–2115 (cf. p. 3).
- [125] J.D. RAMSHAW. « Simple model for linear and non-linear mixing at unstable fluid interfaces with variable acceleration ». *Phys. Rev. E* 58 (1998), p. 5834–5840 (cf. p. 3, 38).
- [126] R.D. RICHTMYER. « Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids ». *Comm. Pure. Appl. Math.* 13 (1960), p. 297–319 (cf. p. 2, 15).
- [127] V. A. SABEL'NIKOV et O. SOULARD. « Rapidly decorrelating velocity field model as a tool for solving Fokker-Planck PDF equations of turbulent reactive scalars ». *Phys. Rev. E* 72 (2005), p. 016301 (cf. p. 11, 96).

- [128] V. A. SABEL'NIKOV et O. SOULARD. « White in time scalar advection model as a tool for solving joint composition PDF equations: derivation and application ». *J. of Flow, Turbulence and Combustion* 77 (2006), p. 333–357 (cf. p. [11](#), [96](#)).
- [129] O. SADOT, L. EREZ, U. ALON, D. ORON, L. A. LEVIN, G. EREZ, G. BEN-DOR et D. SHVARTS. « [Study of Nonlinear Evolution of Single-Mode and Two-Bubble Interaction under Richtmyer-Meshkov Instability](#) ». *Phys. Rev. Lett.* 80 (8 fév. 1998), p. 1654–1657 (cf. p. [2](#)).
- [130] P.G. SAFFMAN. « The large-scale structure of homogeneous turbulence ». *J. Fluid Mech.* 27.3 (1967), p. 581–593 (cf. p. [4](#), [16](#)).
- [131] P. SAGAUT et C. CAMBON. *Homogeneous turbulence dynamics*. Cambridge University Press, 2008 (cf. p. [23](#)).
- [132] R. SCHIESTEL. *Modélisation et simulation des écoulements turbulents*. Hermes, 1993 (cf. p. [10](#), [52](#), [78](#), [129](#), [132](#)).
- [133] R. SCHIESTEL. *Modeling and Simulation of Turbulent Flows*. Wiley, 2008 (cf. p. [99](#)).
- [134] J. D. SCHWARZKOPF, D. LIVESCU, R. A. GORE, R. M. RAUENZAHN et J. M. RISTORCELLI. « [Application of a second-moment closure model to mixing processes involving multicomponent miscible fluids](#) ». *Journal of Turbulence* 12 (2011), N49 (cf. p. [7](#)).
- [135] J. F. SCOTT. « Wave turbulence in a rotating channel ». *J. Fluid Mech.* 741 (2014), p. 316–349 (cf. p. [23](#)).
- [136] S. SHANMUGANATHAN, D.L. YOUNGS, J. GRIFFOND, B. THORNBUR et R.J.R. WILLIAMS. « Accuracy of high-order density-based compressible methods in low Mach vortical flows ». *Int. J. Numer. Meth. Fluids* (2013), DOI: 10.1002/fld.3853 (cf. p. [39](#)).
- [137] D. SOUFFLAND, O. GRÉGOIRE, S. GAUTHIER et R. SCHIESTEL. « [A Two-Time-Scale Model for Turbulent Mixing Flows Induced by Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov Instabilities](#) ». *Flow, Turbulence and Combustion* 69.2 (1^{er} nov. 2002), p. 123–160 (cf. p. [10](#), [52](#)).
- [138] O. SOULARD et B.-J. GRÉA. « Influence of zero-modes on the inertial-range anisotropy of Rayleigh–Taylor and unstably stratified homogeneous turbulence ». *Phys. Rev. Fluids* 2 (2017), p. 074603 (cf. p. [35](#)).
- [139] O. SOULARD, J. GRIFFOND et B.-J. GRÉA. « Large-scale analysis of self-similar unstably stratified homogeneous turbulence ». *Phys. Fluids* 26 (2014), p. 015110 (cf. p. [4](#), [16](#), [17](#), [38](#)).

- [140] O. SOULARD, J. GRIFFOND et B.-J. GRÉA. « Large-scale analysis of unconfined self-similar Rayleigh–Taylor turbulence ». *Phys. Fluids* 27 (2015), p. 095103 (cf. p. [23–25](#), [139](#)).
- [141] O. SOULARD, J. GRIFFOND et B.-J. GRÉA. « Influence of the mixing parameter on the second order moments of velocity and concentration in Rayleigh–Taylor turbulence ». *Phys. Fluids* 28.6 (2016), p. 065107 (cf. p. [17](#), [38](#)).
- [142] O. SOULARD, J. GRIFFOND et D. SOUFFLAND. « Pseudocompressible approximation and statistical turbulence modeling: Application to shock tube flows ». *Phys. Rev. E* 85 (2012), p. 026307 (cf. p. [3](#), [7](#), [16](#)).
- [143] O. SOULARD et V. SABEL’NIKOV. « A new Eulerian Monte Carlo method for the joint velocity-scalar PDF equations in turbulent flows ». *ECCOMAS CFD*. 2006 (cf. p. [11](#), [12](#), [96–98](#), [100](#), [101](#), [104](#)).
- [144] C. SPARBER, P. A. MARKOWICH et N. J. MAUSER. « Wigner functions versus WKB-methods in multivalued geometrical optics ». *Asympt. Anal.* 33 (2003), p. 153–187 (cf. p. [97](#)).
- [145] K. SUGA. « Improvement of second moment closure for turbulent obstacle and heat transfer ». *Int. J. Heat and Fluid Flow* 25 (2004), p. 776–784 (cf. p. [68](#)).
- [146] W. W. SYMES et J. QIAN. « A slowness matching Eulerian method for multivalued solutions of eikonal equations ». *J. Sci. Comp.* 19 (2003), p. 501–526 (cf. p. [97](#)).
- [147] B. THORNER. « [Impact of domain size and statistical errors in simulations of homogeneous decaying turbulence and the Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Physics of Fluids* 28.4 (2016), p. 045106 (cf. p. [3](#)).
- [148] B. THORNER, D. DRIKAKIS, D. L. YOUNGS et R. J. R. WILLIAMS. « The influence of initial conditions on turbulent mixing due to Richtmyer–Meshkov instability ». *J. Fluid Mech.* 654 (2010), p. 99–139 (cf. p. [3](#), [5](#), [16](#), [17](#), [28](#), [29](#), [33](#), [34](#), [36](#), [39](#), [40](#), [49](#), [128](#)).
- [149] B. THORNER, D. DRIKAKIS, D. L. YOUNGS et R. J. R. WILLIAMS. « [Growth of a Richtmyer-Meshkov turbulent layer after reshock](#) ». *Physics of Fluids* 23.9 (2011), p. 095107 (cf. p. [3](#)).
- [150] B. THORNER, J. GRIFFOND, O. POUJADE, N. ATTAL, H. VARSHOCHI, P. BIGDELOU, P. RAMAPRABHU, B. OLSON, J. GREENOUGH, Y. ZHOU, O. SCHILLING, K.A. GARSIDE, R.J.R. WILLIAMS, C.A. BATHA, P.A. KUCHUGOV, M.E. LADONKINA, V.F. TISHKIN, N.V. ZMITRENKO, V.B. ROZANOV et D.L. YOUNGS. « Late time growth rate, mixing and anisotropy in the multimode narrowband Richtmyer–Meshkov instability: the θ -group collaboration ». *Phys. Fluids* 29 (2017), p. 105107 (cf. p. [16](#), [33](#), [34](#), [38](#)).

- [151] B. THORNER, A. MOSEDALE, D. DRIKAKIS, D. YOUNGS et R.J.R. WILLIAMS. « [An improved reconstruction method for compressible flows with low Mach number features](#) ». *Journal of Computational Physics* 227.10 (2008), p. 4873–4894 (cf. p. 2).
- [152] J. van TRIER et W. W. SYMES. « Upwind finite-difference calculation of travel-times ». *Geophysics* 56 (1991), p. 812–821 (cf. p. 97).
- [153] V. K. TRITSCHLER, S. HICKEL, X. Y. HU et N. A. ADAMS. « [On the Kolmogorov inertial subrange developing from Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Physics of Fluids* 25.7 (2013), p. 071701 (cf. p. 2).
- [154] V. K. TRITSCHLER, B. J. OLSON, S. K. LELE, S. HICKEL, X. Y. HU et N. A. ADAMS. « [On the Richtmyer-Meshkov instability evolving from a deterministic multimode planar interface](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 755 (2014), p. 429–462 (cf. p. 3).
- [155] L. TURNER. « Using helicity to characterize homogeneous and inhomogeneous turbulent dynamics ». *J. Fluid Mech.* 408 (2000), p. 205–238 (cf. p. 23).
- [156] M. ULITSKY, T. CLARK et L. TURNER. « Testing a random phase approximation for bounded turbulent flow ». *Phys. Rev. E* 59.5 (1999), p. 5511–5522 (cf. p. 23).
- [157] L. VALIÑO. « A field Monte Carlo formulation for calculating the probability density function of a single scalar in a turbulent flow ». *Flow, turbulence and combustion* 60 (1998), p. 157–172 (cf. p. 11, 96).
- [158] I. VALLET. « Reynolds Stress modeling of three-dimensional secondary flows with emphasis on turbulent diffusion closure ». *J. App. Mech.* 74 (nov. 2007), p. 1142–1155 (cf. p. 7, 68).
- [159] M. VANDENBOOMGAERDE, S. GAUTHIER et C. MÜGLER. « [Nonlinear regime of a multimode Richtmyer-Meshkov instability: A simplified perturbation theory](#) ». *Physics of Fluids* 14.3 (2002), p. 1111–1122 (cf. p. 2).
- [160] P.R. VAN SLOOTEN, JAYESH et S.B. POPE. « Advances in PDF modeling for inhomogeneous turbulent flows ». *Phys. Fluids* 10.1 (1998), p. 246–265 (cf. p. 52, 66, 68).
- [161] J. VILLERMAUX et J.C. DEVILLON. « Représentation de la redistribution des domaines de ségrégation dans un fluide par un modèle d’interaction phénoménologique ». *2nd Int. Symp. Chem. React. Engng. Amsterdam*. T. B-1-13. 1972 (cf. p. 148).
- [162] C. WEBER, N. HAEHN, J. OAKLEY, M. ANDERSON et R. BONAZZA. « [Richtmyer–Meshkov instability on a low Atwood number interface after reshock](#) ». *Shock Waves* 22.4 (1^{er} juil. 2012), p. 317–325 (cf. p. 2).

- [163] C. WEBER, N. HAEHN, J. OAKLEY, D. ROTHAMER et R. BONAZZA. « [Turbulent mixing measurements in the Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Physics of Fluids* 24.7 (2012), p. 074105 (cf. p. 2, 3).
- [164] C. R. WEBER, A. W. COOK et R. BONAZZA. « [Growth rate of a shocked mixing layer with known initial perturbations](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 725 (2013), p. 372–401 (cf. p. 3).
- [165] C. R. WEBER, N. S. HAEHN, J. G. OAKLEY, D. A. ROTHAMER et R. BONAZZA. « [An experimental investigation of the turbulent mixing transition in the Richtmyer-Meshkov instability](#) ». *Journal of Fluid Mechanics* 748 (2014), p. 457–487 (cf. p. 3).
- [166] G.B. WHITHAM. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, 2011 (cf. p. 97).
- [167] A. YOSHIKAWA. « Statistical analysis of mean-flow effects on the pressure-velocity correlation ». *Phys. Fluids* 14.5 (2002), p. 1736–1744 (cf. p. 52, 61, 68).
- [168] D. YOUNGS. « Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities ». *Laser Part. Beams* 12 (1994), p. 725–750 (cf. p. 3).
- [169] D.L. YOUNGS. « Effect of initial conditions on self-similar turbulent mixing ». *IWPCTM-9*. available online at: <http://www.iwpctm.org>. 2004 (cf. p. 3, 5, 17, 28, 29, 33, 49, 128).
- [170] B.A. YOUNIS, T.B. GATSKI et C.G. SPEZIALE. *Towards a rational model for the triple velocity correlations of turbulence*. Rap. tech. TM-2000-209134. NASA, avr. 2000 (cf. p. 7).
- [171] Q. ZHANG et S.-I. SOHN. « [Nonlinear theory of unstable fluid mixing driven by shock wave](#) ». *Physics of Fluids* 9.4 (1997), p. 1106–1124 (cf. p. 2).
- [172] Q. ZHANG et S.-I. SOHN. « [Quantitative theory of Richtmyer-Meshkov instability in three dimensions](#) ». *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 50.1 (1^{er} jan. 1999), p. 1–46 (cf. p. 2).
- [173] Y. ZHOU. « A scaling analysis of turbulent flows driven by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities ». *Phys. Fluids* 13 (2001), p. 538 (cf. p. 3).
- [174] Y. ZHOU. « Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instability induced flow, turbulence, and mixing, parts I and II ». *Phys. Rep.* 723-725 (2017), p. 1–160 (cf. p. 3, 5, 16).
- [175] Y. ZHOU, H.F. ROBEY et A.C. BUCKINGHAM. « Onset of turbulence in accelerated high-Reynolds-number flow ». *Phys. Rev. E* 67 (2003), p. 056305 (cf. p. 3).

Résumé

Cette thèse a pour objet la simulation d'une zone de mélange turbulente issue de l'instabilité de Richtmyer-Meshkov à l'aide d'un modèle à fonction de densité de probabilité (PDF). Nous analysons plus particulièrement la prise en charge par le modèle PDF du transport de l'énergie cinétique turbulente dans la zone de mélange.

Dans cette optique, nous commençons par mettre en avant le lien existant entre les statistiques en un point de l'écoulement et ses conditions initiales aux grandes échelles. Ce lien s'exprime à travers le principe de permanence des grandes échelles, et permet d'établir des prédictions pour certaines grandeurs de la zone de mélange, telles que son taux de croissance ou son anisotropie. Nous dérivons ensuite un modèle PDF de Langevin capable de restituer cette dépendance aux conditions initiales. Ce modèle est ensuite validé en le comparant à des résultats issus de simulations aux grandes échelles (LES). Enfin, une analyse asymptotique du modèle proposé permet d'éclairer notre compréhension du transport turbulent. Un régime de diffusion est mis en évidence, et l'expression du coefficient de diffusion associé à ce régime atteste l'influence de la permanence des grandes échelles sur le transport turbulent.

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes appuyés sur des résultats issus de simulations de Monte Carlo du modèle de Langevin. À cet effet, nous avons développé une méthode spécifique eulérienne et nous l'avons comparé à des alternatives lagrangiennes.

Mots-clés : Turbulence ; Instabilité de Richtmyer-Meshkov ; Fonctions de densité de probabilité ; Permanence des grandes échelles ; Modèle de Langevin multi-échelles ; Méthodes de Monte Carlo ; Équations aux dérivées partielles stochastiques

Abstract

The aim of the thesis is to simulate a turbulent mixing zone resulting from the Richtmyer-Meshkov instability using a probability density function (PDF) model. An emphasis is put on the analysis of the turbulent kinetic energy transport.

To this end, we first highlight the link existing between the one-point statistics of the flow and its initial conditions at large scales. This link is expressed through the principle of permanence of large eddies, and allows to establish predictions for quantities of the mixing zone, such as its growth rate or its anisotropy.

We then derive a Langevin PDF model which is able to reproduce this dependency of the statistics on the initial conditions. This model is then validated by comparing it against large eddy simulations (LES).

Finally, an asymptotic analysis of the derived model helps to improve our understanding of the turbulent transport. A diffusion regime is identified, and the expression of the diffusion coefficient associated with this regime confirms the influence of the permanence of large eddies on the turbulent transport.

Throughout this thesis, our numerical results were based on Monte Carlo simulations for the Langevin model. In this regard, we proceeded to the development of a specific Eulerian method and its comparison with Lagrangian counterparts.

Keywords : Turbulence ; Richtmyer-Meshkov instability ; Probability density functions ; Permanence of large eddies ; Multi-scale Langevin model ; Monte Carlo methods ; Stochastic partial differential equations