



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Développement de nouvelles politiques de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de diverses contraintes opérationnelles.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 6 Décembre 2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Automatique, Traitement de signal et des images, Génie informatique)

par

Amal GOUIAA-MTIBAA

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	M. Abdelhakim ARTIBA, Professeur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis M. François PERES, Professeur, Ecole nationale d'ingénieurs de Tarbes
<i>Examineurs :</i>	M. Abderrahman EL MHAMDI, Professeur, Université Paris 8 Mme Alice YALAOUI, Maître de conférences-HDR, Université de Technologie de Troyes M. Anis CHELBI, Professeur, École nationale supérieure d'ingénieurs de Tunis Mme Zineb SIMEU-ABAZI, Maître de conférences-HDR, Université Grenoble Alpes
<i>Invité :</i>	M. Walid ERRAY, Responsable de l'équipe Data science ,Crédit Agricole SA, France
<i>Directeur de thèse :</i>	M. Sofiene DELLAGI, Maître de conférences-HDR, Université de Lorraine
<i>Co-Encadreur de thèse :</i>	M. Zied ACHOUR, Maître de conférences, Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé au sein de l'équipe « management de la production et de la maintenance (MPM) » du laboratoire de génie industriel, production et maintenance de Metz (LGIPM).

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de thèse M. Sofiene Dellagi, maître de conférences/HDR à l'université de Lorraine qui n'aura ménagé aucun effort pour faire aboutir cette thèse. Je lui suis reconnaissante de sa patience, ses orientations, sa disponibilité et ses encouragements.

J'adresse aussi mes remerciements à M. Zied Achour, maître de conférences à l'université de Lorraine, et M. Walid Erray, responsable de l'équipe Data Science à Crédit Agricole, pour leurs efforts et leurs aides.

J'exprime ma gratitude aux membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en évaluant mes travaux.

Merci à Pr. Abdelhakim Artiba président de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis et Pr. François Pérès de l'Ecole nationale d'ingénieurs de Tarbes d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Leurs remarques et suggestions me permettront d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Merci Pr. Abderrahman El Mhamdi de l'université Paris 8, Mme. Alice Yalaoui de l'Université de Technologie Troyes, M. Anis Chelbi de l'université de Tunis et Mme Zineb Simeu-Abazi de l'université de Grenoble pour avoir acceptés d'examiner mon travail de recherche et de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie aussi l'ensemble du corps enseignant qui m'a permis d'atteindre ce niveau et aussi l'ensemble des doctorants sans qui tout ce travail n'aurait pas été aussi enrichissant qu'agréable.

J'adresse tous mes remerciements à ma famille et notamment à mes chers parents et mes sœurs pour leurs sacrifice et leurs soutien inconditionnels durant toutes ces années. Tout ceci ne serait rien sans eux. Un énorme merci à ma mère pour son amour, son dévouement et sa générosité. Encore un grand merci à mon père qui m'a appris à me dépasser et qui m'a toujours soutenu dans mes choix.

Mes derniers remerciements sont pour Nabil, mon époux, qui tient une part essentielle dans ma vie. Merci de me remonter le moral, de me supporter et de m'encourager. Je tenais à ce que les derniers mots de cette page soient pour lui.

à mes très chers parents,
à mon époux,
à mes soeurs,
J'ai toujours pensé que ces lignes auraient été les plus faciles à écrire,
Mais, après une mûre réflexion,
Je me rends compte que tout ce que j'ai pu réaliser jusqu'à là n'a pu se faire que grâce à votre
soutien,
Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables
sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez,
Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie.

Table des matières

Introduction générale

xiii

Chapitre 1

Etat de l'art et problématique de la thèse

1

1.1	Introduction	2
1.2	La maintenance	2
1.2.1	Maintenance- Généralités	2
1.2.2	Les types de maintenance	3
1.2.3	Les politiques de maintenance	8
1.3	Classification des défaillances des systèmes de production	12
1.4	Optimisation de la maintenance	15
1.5	Stratégies de maintenance intégrée	17
1.5.1	Intégration maintenance et production	17
1.5.2	Intégration Production et qualité	20
1.5.3	Intégration Maintenance et qualité	21
1.5.4	Intégration Maintenance production et qualité	22
1.6	Motivation industrielle	23
1.7	Objectif général et problématiques de la thèse	24
1.8	Conclusion	26

Chapitre 2

Développement d'une stratégie de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de la dégradation du système de production et la qualité du produit fini

27

2.1	Introduction	28
2.2	Description du problème et hypothèses de travail	28
2.2.1	Exemple industriel	28
2.2.2	Description du problème	30
2.2.3	Expression analytique du taux de régression de la qualité α_i	31

2.2.4	Les hypothèses de l'étude	32
2.2.5	Notations	33
2.3	Etude analytique	34
2.3.1	Modélisation analytique de la stratégie (Horizon infini)	34
2.3.2	Modélisation analytique de la stratégie (Horizon fini)	38
2.4	Etude numérique	43
2.4.1	Etude de sensibilité	44
2.5	Conclusion	45

Chapitre 3

Développement d'une stratégie de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte l'impact économique des actions de retouche " rework activities".

3.1	Introduction	48
3.2	Description du problème et hypothèses de travail	48
3.2.1	Exemple industriel	48
3.2.2	Description du problème	49
3.2.3	Expression analytique du taux de retouche φ_i	51
3.2.4	Les hypothèses de l'étude	51
3.2.5	Notations	51
3.3	Etude de la première stratégie "Retouche appliquée à tous les produits qui ne sont pas du premier choix" pour les deux horizons infini et fini	52
3.3.1	Développement analytique de la première stratégie	52
3.3.2	Etude numérique	61
3.4	Etude de la deuxième stratégie « Retouche appliquée à un pourcentage de produits qui ne sont pas du premier choix » pour les deux horizons fini et infini	63
3.4.1	Développement analytique de la deuxième stratégie	64
3.4.2	Procédure numérique itérative	65
3.4.3	Exemple numérique	69
3.4.4	Etude de sensibilité	71
3.5	Conclusion	72

Chapitre 4

Développement des stratégies de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de l'effet économique des activités de retouche « rework activities » dans un contexte de stratégies de maintenance imparfaite et modifiée. 75

4.1	Introduction	76
4.2	Etude de la première stratégie « Stratégie de maintenance préventive semi-parfaite »	77

4.2.1	Description du problème et hypothèses de travail	77
4.2.2	Notations	79
4.2.3	Développement analytique de la première stratégie	80
4.3	Etude de la deuxième stratégie « Stratégie de maintenance préventive modifiée »	87
4.3.1	Description du problème et hypothèses de travail	87
4.3.2	Notations	88
4.3.3	Développement analytique de la deuxième stratégie	89
4.4	Etude numérique	98
4.4.1	Résultats numériques	99
4.4.2	Etude de sensibilité	99
4.5	Conclusion	101
Conclusion générale		103
Bibliographie		107

Table des figures

1.1	Les différents types de maintenances.	4
1.2	Quelques activités de la fonction maintenance	5
1.3	L'impact des différents types des actions de maintenance sur l'évolution de taux de défaillance	8
1.4	Politique de maintenance et ses facteurs d'influence ([Ba2015])	11
1.5	La courbe baignoire	12
1.6	Classification des défaillances par type	13
1.7	Classification des défaillances par cause	14
1.8	Equilibre entre les actions de maintenance préventives et correctives	15
1.9	Coupe 2D d'une machine de coulée continue verticale avec cintrage	24
2.1	Machine d'injection plastique	29
2.2	Description du problème	31
2.3	Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon infini).	38
2.4	Description du premier cas	39
2.5	Description du deuxième cas	40
2.6	Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon fini).	43
3.1	Description de la stratégie 1	50
3.2	Description de la stratégie 2	50
3.3	Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon infini).	56
3.4	Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon fini)	61
3.5	Etude comparative entre les deux stratégies sans et avec retouche pour différentes valeurs des coûts de retouche	63
3.6	Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon infini).	66
3.7	Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon fini).	69
4.1	Variation du nombre moyen de panne selon la première stratégie	78
4.2	Description de la première stratégie	80
4.3	Description de la deuxième stratégie.	90

Liste des tableaux

2.1	Données numériques	44
2.2	Les résultats numériques des deux stratégies	44
2.3	Etude de sensibilité de la variation du prix de vente (P_{max})	45
2.4	Etude de sensibilité de la variation du coût de setup (C_{setup})	45
3.2	Données numériques	62
3.3	Les résultats numériques de la première stratégie pour les deux horizons infini et fini	62
3.4	Les résultats numériques de la stratégie sans retouche pour un horizon infini . . .	63
3.5	Les résultats numériques de la stratégie avec retouche pour un horizon infini pour deux valeurs différentes de C_{rku}	63
3.6	Données numériques	70
3.7	Les résultats numériques de la première stratégie pour les deux horizons infini et fini	70
3.8	Variation du rapport entre P_{max} et $C_{rku}(R = \frac{P_{max}}{C_{rku}})$	71
3.9	Etude de sensibilité de la variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c)	71
3.10	Etude de sensibilité de la variation du coût de setup (C_{setup})	72
3.11	Synthèse de l'étude de sensibilité	72
4.3	Données numériques	98
4.4	Les résultats numériques de la première et la deuxième stratégie	99
4.5	Résultat de variation de la constante de dégradation pour la première stratégie .	100
4.6	Résultat de variation de la constante de dégradation pour la deuxième stratégie	100
4.7	Etude de sensibilité de la variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c) pour la première stratégie	100
4.8	Etude de sensibilité de la variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c) pour la deuxième stratégie	101
4.9	Variation du rapport entre P_{max} et $C_{rku}(R = \frac{P_{max}}{C_{rku}})$	101

Introduction générale

Dans un environnement fortement concurrentiel, les entreprises sont face à de nombreux défis. Par conséquent, elles s'intéressent de plus en plus à la recherche des stratégies innovantes afin d'améliorer leurs performances et d'assurer leurs pérennités et leurs compétitivités. Dans toutes les entreprises de production et de services, la fonction maintenance constitue un enjeu socio-économique décisif. En effet, cette fonction joue un rôle crucial pour répondre aux exigences de leurs clients en contribuant au respect des délais de livraison de produits de bonne qualité et au moindre coût. Sa mission primordiale consiste, d'une part, à réduire la durée et la fréquence des pannes des systèmes de production et d'autre part, à maintenir les équipements dans un état garantissant une qualité supérieure des produits finis. De nos jours, les industriels et les chercheurs ont confirmé que les approches modernes de gestion de l'entreprise doivent s'appuyer sur des visions intégrées et que toute stratégie traitant la maintenance, la qualité et la planification de production indépendamment n'est plus efficiente. Suite à ce constat, il devient indispensable de développer des nouvelles stratégies de maintenance intégrée tenant compte de l'interdépendance entre ces différentes fonctions ainsi que de certaines contraintes opérationnelles et environnementales telles que les coût de vente variant selon la qualité « premier choix, deuxième choix » et les coûts de retouche « reworking activities ».

Il est fortement constaté en industrie qu'il existe une relation fondamentale entre la dégradation avancée des systèmes de production et la qualité des produits finis. En effet, l'une des causes possibles de la perte de qualité réside, souvent, à l'état de dégradation du système de production. En effet, le degré de perte de qualité peut être souvent révélateur de l'évolution de la dégradation du système de production. De plus, la maintenance préventive contribue à diminuer la fréquence des pannes des machines et limiter les impacts de ces dégradations sur la qualité des produits.

Dans cette perspective, nous avons développé dans cette thèse des nouvelles politiques de maintenance intégrée à la qualité mettant en évidence la relation fondamentale entre la dégradation des équipements et la qualité des produits finis en tenant compte de plusieurs contraintes opérationnelles. Notre démarche consiste, alors, à définir analytiquement des fonctions objectives tenant compte des paramètres liés à maintenance, production et la qualité. La possibilité de vendre les produits à des prix variables « premier choix et/ou deuxième choix » selon la qualité du produit ou de prévoir des actions de retouche « reworking activities » afin de valoriser le prix des produits de deuxième choix sera également prise en considération. La décision stratégique étudiée dans cette thèse consiste à trouver un enjeu économique entre les activités de maintenance rétablissant le système à son état neuf pour avoir des produits de bonne qualité et/ou commercialiser des produits de qualité inférieure sous l'étiquette de deuxième choix et/ou adopter des activités de retouche pour améliorer la qualité des produits de deuxième choix pour revaloriser leurs prix de vente. Il est clair que les données fiabilistes du système de production, liées à son état de dégradation, et l'impact de cette dégradation sur la qualité du produit fini ainsi que les coûts liés

aux ventes de différents types de produit, les activités de maintenance, les activités de retouches seront les facteurs fondamentaux de notre étude. Formellement, la mise en équation de cette problématique nous emmène à développer des nouvelles stratégies de maintenance intégrée à la qualité. Ces stratégies seront présentées et modélisées analytiquement le long de cette thèse.

Ce manuscrit sera organisé de la manière suivante :

Dans un premier temps, nous présenterons une étude bibliographique contenant des travaux de recherche qui ont étudié des stratégies de maintenance, production et qualité permettant de situer notre contribution et notre problématique par rapport aux travaux existants dans la littérature. Par la suite, nous exposerons la problématique ainsi que les objectifs de nos travaux de recherche.

Dans le deuxième chapitre, nous proposerons une stratégie de maintenance préventive intégrée à la qualité tenant compte de l'effet de la dégradation du système de production sur la qualité des produits finis. Nous considérons une unité de production sujette à des pannes aléatoires. Cette dégradation progressive impacte l'état du système de production ainsi que la qualité des produits finis. La dégradation du système de production engendre la production de produits de qualité inférieure dites « produits de second choix » et des produits non-conformes. Les produits de second choix seront vendus à un prix réduit et les produits non-conformes seront rejetés. Une expression d'un taux de dégradation mettant en évidence ce lien étroit entre le taux de défaillance du système et la dégradation de la qualité des produits finis sera développée. Dans le but de réduire le risque de défaillance et l'impact de la dégradation du système de production sur la qualité des produits finis, une politique de maintenance préventive, de type bloc, à réparations minimales avec des durées des actions de maintenance préventive et corrective non-négligeables ont été considérées. Une action de maintenance préventive, considéré parfaite, est effectué après la production de N lots permettant la restauration du système à l'état « as good as new ». En cas de panne, des actions des réparations minimales seront effectuées. La variable de décision caractérisant cette stratégie est le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite. Cette stratégie a été étudiée pour les deux horizons infini et fini. Des modèles analytiques seront développés et une étude d'existence d'une solution optimale sera élaborée pour chaque horizon. Des procédures numériques seront présentées afin de déterminer la solution optimale. Un exemple numérique et une étude de sensibilité viendront illustrer les modèles analytiques proposés.

Dans le troisième chapitre, nous proposerons d'effectuer des actions de retouches pour les produits de second choix et les produits non-conformes afin d'améliorer leurs qualité et les vendre à un prix qui correspond au niveau de qualité atteint après l'amélioration. Deux stratégies ont été proposées. Pour la première, on considère que tous les défauts de qualité peuvent être corrigés et que tous les produits seront vendus au meilleur prix. Pour la deuxième stratégie, on suppose que la qualité des produits de second choix peut atteindre la meilleure qualité après une activité de retouche. Quant aux produits non-conformes, ils seront vendus soit à un prix correspondant au niveau de qualité atteint ou bien rejetés. La variable de décision caractérisant cette stratégie est le nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite. Ces deux stratégies vont être étudiées pour les deux horizons infini et fini. Des modèles analytiques vont être développés afin d'illustrer les stratégies proposées et une étude d'existence d'une solution optimale pour chaque stratégie sera élaborée. Une étude comparative entre les stratégies, sans et avec retouche, sera effectuée afin de déterminer les conditions dans lesquelles la stratégie avec retouche est plus économique que celle sans retouche. Des procédures numériques seront présentées afin de déterminer les solutions optimales. Une étude numérique

viendra illustrer ces stratégies. En effet, un exemple numérique et une étude de sensibilité seront présentés afin d'illustrer les modèles proposés et étudier l'impact de la variation de quelques paramètres sur la solution optimale.

Le quatrième chapitre, nous continuerons à étudier les stratégies de maintenance préventive intégrée à la qualité en tenant compte de l'aspect économique des actions de retouche mais tout en considérant le concept de la maintenance imparfaite. Dans ce chapitre, nous investiguons l'impact technico-économiques des activités de maintenance parfaites/imparfaites. En effet, d'une part, nous étudierons l'impact des actions de maintenance préventive imparfaite sur l'état de dégradation du système et son effet sur la variation du nombre moyen de panne, et d'autre part, nous considérerons des coûts des actions de maintenance préventive parfaite croissants afin de faire face à la dégradation du système de production due à l'usage et le temps. Des modèles analytiques seront présentés et une étude d'existence d'une solution optimale sera élaborée. Un exemple numérique et une étude de sensibilité viendront illustrer les modèles proposés et étudier l'impact de la variation de quelques paramètres sur la solution optimale.

Enfin une conclusion générale et des perspectives seront présentées à la fin de ce manuscrit.

Les travaux présentés dans cette thèse ont fait l'objet de publication d'une revue scientifique (Gouiaa-Mtibaa et al.(2017)) et 3 conférences internationales (IESM 2015, IFAC-MIM 2016 et MOSIM 2016) et une deuxième revue en cours de révision.

Chapitre 1

Etat de l'art et problématique de la thèse

« Ne pas prévoir, c'est déjà gémir » (Léonard de Vinci)

Résumé

Dans ce chapitre, une introduction générale sur la fonction maintenance, ses différents types et ses différentes stratégies est présentée. Une étude bibliographique est effectuée afin de situer les travaux de cette thèse par rapport à la littérature. Dans cette étude, nous avons rencontré de nombreux modèles illustrant, les différentes hypothèses qui peuvent être posées sur le système, la stratégie de maintenance à mettre en place, les types d'actions de maintenance et les fonctions à tenir en compte. En effet, une étude bibliographique détaillée des modèles mathématiques traitant seulement la fonction maintenance et d'autres traitant des modèles d'intégration entre la fonction maintenance, production et qualité est développée. Enfin, nous présentons la problématique étudiée et les objectifs de nos travaux de thèse.

1.1 Introduction

Dans un environnement industriel de plus en plus concurrentiel, les entreprises sont face à des défis de taille et ils sont toujours à la recherche des nouvelles méthodes et stratégies afin de satisfaire des contraintes externes comme le respect des délais de livraison, la qualité des produits et les prix, en plus d'autres contraintes internes. En effet, les systèmes de production utilisés sont généralement sujets à des phénomènes aléatoires affectant l'état de la machine, la qualité des produits et perturbent les plans de productions et de livraison. Le vieillissement et les pannes des équipements de production, la dégradation de la qualité et les durées aléatoires de maintenance sont des exemples de ces phénomènes aléatoires souvent observés dans les systèmes de production. En quelques années, la fonction « maintenance » est devenue une des fonctions stratégiques de l'entreprise. En effet, elle s'est transformée de la fonction traditionnelle d'entretien considérée comme une charge financière à une activité nécessaire et considérée comme génératrice de profit [Alsyouf2007], permettant de minimiser les coûts de maintenance et de maximiser les disponibilité des systèmes de production.

Dans ce chapitre nous présentons un état de l'art de la littérature scientifique traitant les thématiques de maintenance ainsi que le problème d'intégration entre les différentes fonctions (Maintenance, qualité, production...). En premier temps, nous commençons par la fonction maintenance en présentant ses différents types, stratégies, et politiques. La deuxième partie est dédiée à présenter quelques travaux existants dans la littérature étudiant d'une part la modélisation de la fonction maintenance et d'autre part la modélisation intégrée entre la maintenance et d'autres fonctions comme la production et la qualité.

1.2 La maintenance

Selon [Dunn1987], le coût de la maintenance représente de 15 à 40% du coût total de production. Par conséquent, l'activité de maintenance ne peut plus se limiter à des réparations ordinaires effectuées sur les équipements en cas de panne mais elle doit occuper une place de plus en plus importante en entreprise. L'activité actuelle de la maintenance s'inscrit dans un cadre de participation à la réalisation des objectifs de productivité, de qualité, de rentabilité et de croissance de l'entreprise. En effet, la maintenance est devenue une composante essentielle et stratégique du système productif d'une entreprise et le rôle du service de maintenance consiste désormais à améliorer la disponibilité des systèmes de production, réduire la fréquence des pannes et par conséquent garantir une qualité meilleure de produit fini tout en minimisant les coûts des opérations et les pertes engendrées par les pannes.

1.2.1 Maintenance- Généralités

La première définition normative de la maintenance a été donnée par l'AFNOR en 1994 (norme NFX 60-010) comme étant « *ensemble des actions permettant de maintenir ou de rétablir un bien dans un état spécifié ou en mesure d'assurer un service déterminé* ». Elle a été remplacé par une nouvelle définition en 2010 (norme NF EN 13306) comme étant « *Ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise* ».

La définition de la maintenance fait apparaître 3 notions clés : « Maintenir », « rétablir » et

« un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise ». La première notion « Maintenir » fait référence à la notion de surveillance et le suivi et par conséquent à la notion de la maintenance préventive. La deuxième notion « Rétablir » fait référence à une activité corrective pour réagir juste après l'occurrence d'une panne. La troisième notion fait référence à l'état du bien après avoir effectué une action de maintenance (préventive ou corrective).

Une étude détaillée de ces trois notions sera présentée dans la section suivante.

1.2.2 Les types de maintenance

On distingue deux catégories principales de maintenance : La maintenance préventive et la maintenance corrective.

• La maintenance préventive

La maintenance préventive est définie par la norme (NF EN 13306) par *la maintenance exécutée à intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinés à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien*. A partir de cette définition générale, on distingue trois variantes de maintenance préventive : Systématique, conditionnelle et prévisionnelle (ref. technique de l'ingénieur).

- Maintenance préventive systématique : définit selon la norme (NF EN 13306) par *une maintenance préventive exécutée à intervalles de temps préétablis ou selon un nombre défini d'unité d'usage mais sans contrôle préalable de l'état du bien*. Ce type de maintenance est très pratiqué dans le monde industriel.
- Maintenance préventive programmée : définit selon la norme (NF EN 13306) comme étant *une maintenance préventive exécutée selon un calendrier préétabli ou selon un nombre défini d'unités d'usage*.
- Maintenance préventive conditionnelle : définit selon la norme (NF EN 13306) par *maintenance préventive qui comprend une combinaison de surveillance en fonctionnement et/ou d'inspection et/ou d'essai, d'analyse et les actions de maintenance qui en découlent*. Cette maintenance est considérée comme étant celle que l'on réalise uniquement lorsque l'état du bien le nécessite. Elle est basée sur une surveillance et un suivi des paramètres significatifs du fonctionnement du bien afin de qualifier d'une façon précise l'état du bien afin d'optimiser les actions de maintenance et intervenir uniquement lorsque cela s'avère nécessaire. La surveillance en fonctionnement et/ou d'inspection et/ou d'essai peut être programmé, sur demande ou continue.
- Maintenance préventive prévisionnelle : définit selon la norme précitée par *maintenance conditionnelle exécutée suite à une prévision obtenue grâce à une analyse répétée ou à des caractéristiques connues et une évaluation des paramètres significatifs de la dégradation du bien*.

• La maintenance corrective

La maintenance corrective est définie par la norme (NF EN 13306) comme étant *Maintenance exécutée après détection d'une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il*

peut accomplir une fonction requise. Selon l'état du système après l'intervention corrective, on distingue deux types : palliative et curative. L'action corrective est dite palliative si elle donne lieu à un dépannage et à une réparation provisoire mais elle peut être curative si la réparation restitue le système à son état de fonctionnement nominal. Ces deux types de maintenance corrective peuvent être exécuté immédiatement après la détection de la panne ou retardé. Par conséquent, on distingue deux variantes de maintenance corrective :

- Maintenance corrective différée : *maintenance corrective qui n'est pas exécutée immédiatement après la détection d'une panne mais est retardée en accord avec des règles de maintenance données.* Une action de maintenance corrective différée peut être programmée.
- Maintenance corrective d'urgence : *maintenance corrective qui est exécuté sans délai après détection d'une panne afin d'éviter des conséquences inacceptables.*

La figure suivante (1.1) résume les différentes catégories mentionnées précédemment.

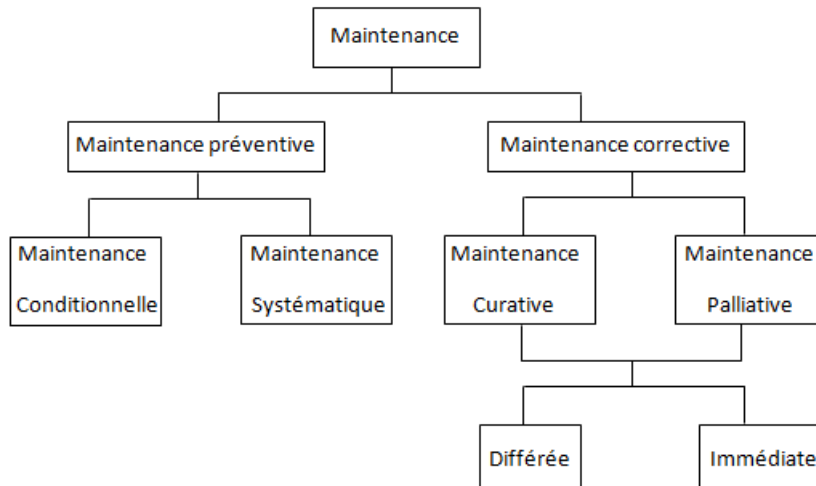


FIGURE 1.1 – Les différents types de maintenances.

En se basant sur la définition des différents types de maintenance, la fonction maintenance requiert à la fois des activités techniques et des compétences métiers d'une part et des activités de management et de gestion d'autre part. Les activités techniques peuvent contenir, à titre d'exemple, des actions de diagnostic, réparation, dépannage et de prévention. Les activités de management et de gestion consistent principalement à gérer le budget, les interventions, les ressources, les informations et la documentation. La figure suivante (1.2) résume ces différents types d'activités.

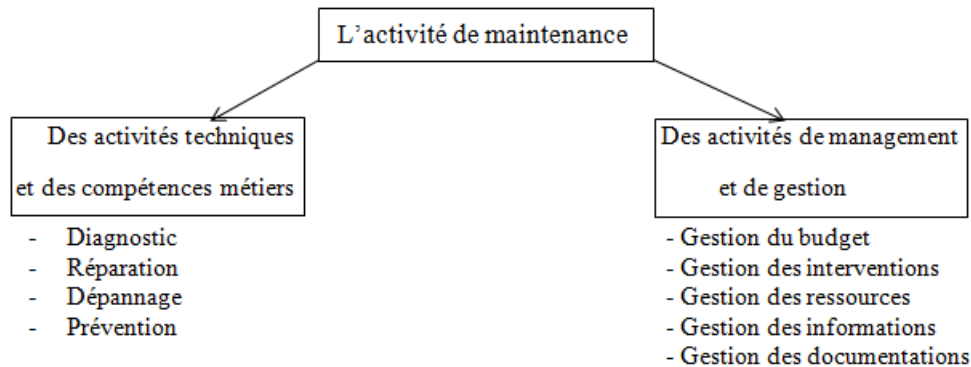


FIGURE 1.2 – Quelques activités de la fonction maintenance

La troisième notion très importante évoquée par la définition donnée par la norme AFNOR est « *état dans lequel il peut accomplir la fonction requise* ». Cette notion fait référence à l'état de la machine suite à une action de maintenance préventive ou corrective. En effet, l'état de la machine après une action de maintenance détermine le type de l'action effectuée. Dans la littérature, on distingue principalement trois types d'action de maintenance. La maintenance parfaite, minimale et imparfaite.

- Maintenance parfaite :

Après une action de maintenance parfaite, le système est restauré à l'état neuf « As Good As New » ce qui peut être traduit littéralement par « Aussi bon que neuf » et la distribution des durées de vie et la fonction du taux de défaillance sont les mêmes que celles d'une nouvelle unité. La révision complète d'un moteur ayant une bielle brisée peut être considérée comme une réparation parfaite.

- Maintenance minimale :

Ces actions de maintenance ont pour but de restaurer le système dans un état opérationnel et plus précisément l'état qui précède la défaillance. Cet état est connu dans la littérature par « As Bad As Old » ce qui peut être traduit littéralement par « Aussi mauvais que vieux ». [Barlow and Proschan1965] ont été les premiers à étudier ce type de maintenance. Après une action de maintenance minimale, le taux de défaillance reste inchangé. De ce fait, ce type de maintenance minimale n'est utilisé que pour modéliser des actions de maintenance correctives. Le changement d'un pneu à plat pour une voiture ou la courroie de ventilateur cassée d'un moteur peuvent être considérés comme des actions de réparation minimale parce que le nombre moyen de panne du système reste inchangé ([Pham and Wang1996a]).

- Maintenance imparfaite :

Ce type d'action de maintenance ne restaure pas le système à l'état neuf mais à un état intermédiaire entre le « aussi bon que neuf » et le « aussi mauvais que vieux ». La mise au point d'un moteur est un exemple d'une action de maintenance imparfaite parce qu'elle ne permet pas sa restauration à l'état parfait mais améliore considérablement sa performance. Plusieurs

causes peuvent être à l'origine d'une action de maintenance imparfaite comme par exemple ([Brown and Proschan1983], [Samet *et al.*2010]) :

- La réparation de la mauvaise pièce
- La réparation partielle de la pièce défectueuse
- La réparation partielle ou totale de la pièce défectueuse mais en endommageant des pièces adjacentes
- Le choix du moment de l'intervention
- Des techniciens non-qualifiés
- Des pièces de rechange appropriées non-disponibles

La maintenance imparfaite a été étudiée par plusieurs chercheurs. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour modéliser la maintenance preventive imparfaite. Les méthodes présentées dans la littérature peuvent être classées en trois catégories : les méthodes basées sur une réduction du taux de défaillance, les méthodes basées sur une réduction arithmétique d'âge et les modèles hybrides qui représentent une combinaison entre les deux méthodes précédemment citées.

([Nakagawa1979a], [Nakagawa1979b]) a étudié la modélisation de la maintenance preventive (MP) imparfaite. En effet, il a considéré que suite à une action de maintenance le système peut être restauré à l'état parfait (maintenance parfaite) avec une probabilité p et à l'état minimal avec la probabilité complémentaire $q=1-p$. Si $p=1$, l'action effectuée coïncide avec une MP parfaite et si $p=0$, l'action effectuée coïncide avec une action minimale. Dans ce cas, les actions de maintenance préventive parfaite et minimale peuvent être considérées comme des cas particuliers de la maintenance préventive imparfaite. En se basant sur ce modèle de MP imparfaite, ([Nakagawa1979a], [Nakagawa1979b], [Nakagawa1979c]) a proposé une stratégie de maintenance préventive optimale minimisant le coût total de maintenance pour un « *one unit* » système de production pour les deux politiques de type âge et bloc. Ces deux politiques seront détaillées dans la section suivante. [Brown and Proschan1983] ont considéré le même modèle mais pour étudier l'efficacité des actions de maintenance corrective. Une action de maintenance corrective (MC) est effectuée chaque fois que le système tombe en panne. Cette action de MC peut être parfaite avec une probabilité p et minimale avec la probabilité complémentaire $q = 1 - p$ tout en considérant que les durées des MC sont négligeables. Les auteurs ont obtenu un résultat très important : si F représente la fonction de distribution du système et r son taux de défaillance alors la fonction de distribution correspondante à la durée entre deux actions de maintenance corrective parfaites est : $F_p = 1 - (1 - F)^p$ et le taux de défaillance associé est $r_p = pr$ (où p est la probabilité que la maintenance corrective soit parfaite). En utilisant ces résultats obtenus, [Pham and Wang1996b] et [Wang and Pham1996] ont réussi à obtenir des politiques de maintenance optimal pour un « *one-component* » système de production. Une extension de cette méthode a été proposée par [Block *et al.*1985] et elle est connue sous le nom de « $(p(t),q(t))$ Rule ». Les auteurs supposent que l'action de maintenance corrective est parfaite avec une probabilité $p(t)$ et minimale avec la probabilité complémentaire $q(t) = 1-p(t)$. [Brown and Proschan1983] et [Block *et al.*1985] assume dans leurs modèles proposés que la durée des actions de maintenance corrective est négligeable. Cette hypothèse a été relaxée quelque année plus tard par ([Iyer1992]) qui a étudié la « $(p(t),q(t))$ Rule » avec des durées des actions de maintenance corrective non-négligeables.

Une approche qui se repose sur une modification du taux de défaillance a été développée par ([Nakagawa1988a]). Elle se caractérise par une augmentation de l'intensité de la fonction de taux

de défaillance après chaque action de maintenance préventive imparfaite. En effet, le taux de défaillance est ramené à la valeur zéro comme si le système est restauré à l'état neuf à cet instant précis mais l'évolution de la variation de taux de défaillance n'est plus pareille. Autrement dit le nombre moyen de panne durant $]T, 2T]$ est supérieur à celui durant $[0, T]$, avec T est l'instant à lequel l'action de maintenance préventive est effectuée. Formellement :

$$\lambda_1(t = 0) = \lambda_2(t = T) = \lambda_3(t = 2T) = 0$$

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3 \quad \forall t > 0$$

Avec

$\lambda_1(t)$: Le nombre moyen de panne durant $[0, T]$

$\lambda_2(t)$: Le nombre moyen de panne durant $]T, 2T]$

$\lambda_3(t)$: Le nombre moyen de panne durant $[2T, 3T]$

Une autre approche de modification de taux de défaillance a été étudiée par [Chan and Shaw1993]. Elle se caractérise par une réduction du taux de défaillance après chaque action de maintenance préventive. De plus, cette réduction de l'intensité de défaillance dépende du nombre des actions ainsi que de l'âge du système de production. Deux types de réduction du taux de défaillance ont été présentés : 1) l'intensité de défaillance sera réduite d'une quantité constante après chaque action de maintenance 2) l'intensité de défaillance sera réduite d'une quantité proportionnelle à sa valeur juste avant la défaillance.

La notion de maintenance imparfaite basée sur l'âge virtuel a été initialement proposée par [Malik1979]. Cette notion consiste à supposer qu'après la $i^{ème}$ action de maintenance, le système fonctionne comme un système neuf qui aurait vécu un âge A_i sans avoir tombé en panne. Cet âge A_i est appelé l'âge effectif.

En se basant sur ce concept, Kijima a défini deux classes de modèles d'âge virtuel, connus dans la littérature sous le nom de modèles de Kijima de type I et II.

- Modèle Kijima de type I ([Kijima *et al.*1988]) : L'effet de la $i^{ème}$ maintenance consiste à réduire l'âge virtuel du système avant la défaillance ($A_{i-1} + X_i$) d'une quantité proportionnelle à la durée écoulée depuis la dernière maintenance ($B_i.X_i$, avec $B_i \in [0,1]$). Mathématiquement, l'âge du système est donné par :

$$A_i = A_{i-1} + (1 - B_i).X_i \quad \forall i \geq 1$$

Avec

X_i : Durée entre la $(i - 1)^{me}$ maintenance et la $i^{ème}$ maintenance

B_i : Facteur de réduction de la durée X_i .

- Modèle Kijima de type II ([Kijima1989]) : L'effet de la i^{me} maintenance consiste à réduire l'âge virtuel global du système d'une quantité qui lui est proportionnelle (B_i , avec $B_i \in [0,1]$). Mathématiquement l'âge du système est donnée par :

$$A_i = (1 - B_i).(A_{i-1} + X_i) \quad \forall i \geq 1$$

Pour ces deux types de modèle, B_i représente l'efficacité de l'action de maintenance. Si tous les $B_i = 0$, les actions de maintenance effectuées sont minimales (aussi mauvais que vieux). Si tous les $B_i = 1$, les actions de maintenance effectuées sont parfaites (Aussi bon que neuf).

[Doyen and Gaudoin2004] ont proposé une classe de modèle dits à réduction arithmétique de l'âge de mémoire m (ARA_m) dont le principe est que la réduction de l'âge dépend de l'effet des m dernières maintenances. La mémoire m correspond au nombre maximal d'instant de défaillance précédents qui peuvent influencer l'intensité de défaillance.

La figure suivante (1.3) résume l'évolution du taux de défaillance en fonction du type de l'action de maintenance appliquée.

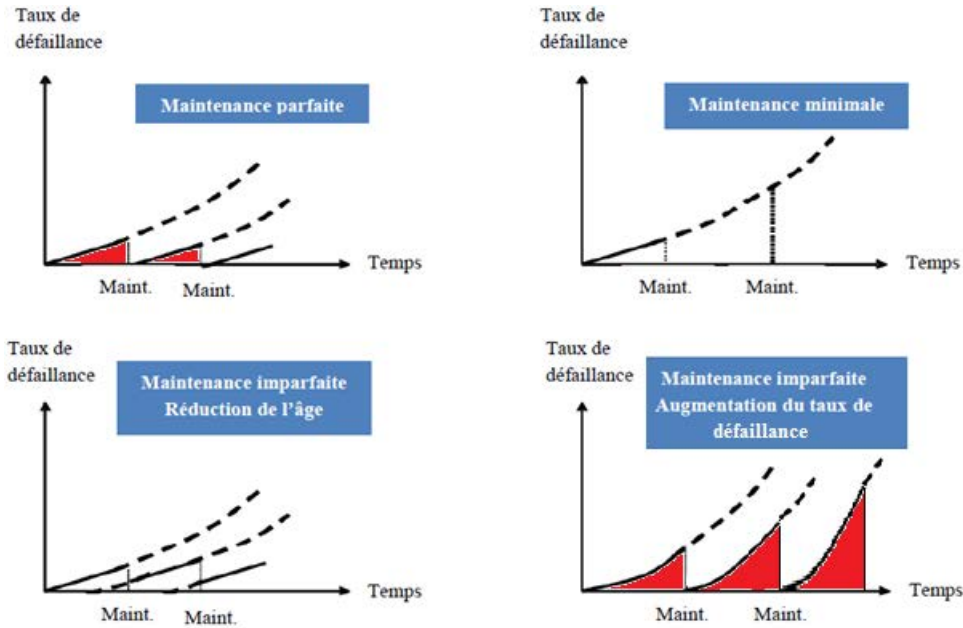


FIGURE 1.3 – L'impact des différents types des actions de maintenance sur l'évolution de taux de défaillance

1.2.3 Les politiques de maintenance

Ce thème de recherche a fait l'objet de nombreux travaux et plusieurs articles de synthèse largement référencés. La classification des politiques de maintenance proposée dans ce manuscrit est inspirée principalement des travaux de [Wang2002].

La maintenance de type âge

Introduite initialement par [Barlow and Proschan1965] et connue dans la littérature sous le nom « age replacement policy (ARP) ». Elle suggère de remplacer l'unité de production soit après une durée prédéterminée constante de bon fonctionnement (l'âge T) ou dès l'apparition d'une défaillance. Bien évidemment, les coûts liés à un remplacement planifié sont inférieure à ceux dû à une défaillance. Avec l'apparition des actions de maintenance de type minimal et imparfait, plusieurs extensions ont été étudiées et plusieurs modifications ont été proposées. Désormais, cette stratégie consiste à effectuer une action de maintenance préventive à l'âge prédéterminé T ou une action de réparation en cas de défaillance. Il est important de mentionner que les actions de MP à l'âge T et les actions de MC en cas de panne peuvent être minimales, imparfaites et parfaites. Par conséquent, plusieurs modèles ont été proposés selon le type des actions de maintenance préventive et corrective choisis et la structure des coûts des actions de maintenance (Ex : constant, variable, dépend de l'âge du système). Ce qui résulte des différentes combinaisons possibles. Par exemples, une action de maintenance préventive à l'instant T peut être un remplacement (MP parfaite ou imparfaite). Une action de maintenance corrective peut être minimale ou imparfaite ainsi que pour les coûts de maintenance qui peuvent être constants, dépendent par exemple de l'âge du système ou du nombre des réparations. Plusieurs travaux([Nakagawa *et al.*2011], [Park and Pham2016], [Ben-Daya *et al.*2012]) ont été effectués basées sur cette stratégie de maintenance de type âge afin de développer de nouvelles politiques de maintenance tenant compte de la cadence de production et diverses contraintes opérationnelles.

La maintenance de type bloc

Introduite initialement par [Nakagawa1979b] connue dans la littérature sous le nom « bloc replacement policy (BRP) ». Dans cette stratégie, l'unité est remplacée à une périodicité fixe et lors de chaque défaillance sans tenir compte de l'âge du système de production et l'historique de défaillance. Similairement à la stratégie de type âge, le coût d'un remplacement planifié est moins chère qu'un remplacement suite à une défaillance. Cette politique est couramment employée. Une extension de cette politique est connue sous le nom de « Politique de type bloc avec réparation minimale ». Cette politique consiste à remplacer l'unité à une périodicité fixe et en cas de panne, une réparation minimale sera effectuée ([Barlow and Hunter1960], Politique 2). Suite à l'apparition du concept de réparation minimale et la maintenance imparfaite, plusieurs extensions ont été étudiées et plusieurs modifications ont été effectuées pour cette stratégie. Une des extensions est proposée par [Xiao-Gao *et al.*1995] consiste à effectuer un remplacement après $(O+1)T$ avec O est le nombre des actions de maintenance préventive imparfaite. Le cas de $O = 0$ est autorisé et signifie que le système est remplacé à chaque T unité de temps et qu'il n'y a pas d'action de maintenance préventive imparfaite. Par conséquent, on est dans le cas de la stratégie de type bloc avec réparation minimale. Les variables de décision de cette stratégie sont O et T . ([Nakagawa1981b], [Nakagawa1981a]) a présenté 3 modifications à la stratégie de type bloc avec réparation minimale. Ces modifications ont été effectuées afin de s'approcher au maximum des situations pratiques. Il considère deux paramètres : le premier est le temps de référence T_0 et le second est la durée périodique T^* . On distingue trois cas possibles :

- Si la panne se produit avant T_0 , une action de réparation sera effectuée.
- Si le système de production est opérationnel à l'instant T^* , un remplacement sera effectué à cet instant.

- Si la panne se produit entre T_0 et T^* , alors on a trois politiques différentes :
 1. Politique 1 : Le système de production ne sera pas réparé et il reste non opérationnel jusqu'à l'instant T^* .
 2. Politique 2 : La pièce défectueuse sera remplacée par une pièce de rechange autant de fois qu'elle tombe en panne jusqu'à $t = T^*$.
 3. Politique 3 : Le système de production est remplacé par un nouveau.

Les variables de décision pour ces trois politiques sont T_0 et T^* . Evidemment, si $T_0 = T^*$, les politiques 1, 2 et 3 sont équivalentes à la politique de type bloc avec réparation minimale. Et si $T_0 = 0$, on est dans le cas de la politique de type bloc avec un remplacement à une périodicité fixe et lors de chaque panne.

Les stratégies de maintenance basées sur la limitation du taux de défaillance

Cette stratégie suggère que l'action de maintenance préventive n'est effectuée que lorsque le taux de panne atteint une limite prédéterminée et en cas de panne, des actions de réparations seront effectuées ([Wang2002]). [Lie and Chun1986] ont proposé un modèle de maintenance où des actions de maintenance préventive sont effectuées quand le système atteint la limite prédéterminée et en cas de panne des actions de réparation seront effectuées. Il existe d'autres travaux traitant le problème de stratégies de maintenance basées sur la limitation du taux de défaillance. On peut citer, à titre d'exemple, [Malik1979], [Pham and Wang1996a], [Monga *et al.*1997], [Chan and Shaw1993]. D'autres travaux et plus de détails peuvent être trouvés dans la revue de littérature de [Wang2002].

Les stratégies de maintenance de type séquentiel

Contrairement à la politique de type bloc où le système est remplacé à une périodicité fixe et lors de chaque panne, pour les stratégies de type séquentiel, les interventions de maintenance préventive sont exécutées à des intervalles de temps inégaux et qui deviennent de plus en plus petits au cours de temps. En effet, quand l'âge de système augmente, le système de production nécessite plus d'action de maintenance. Dans la littérature plusieurs travaux ont étudié les stratégies de maintenance de type séquentiel ([Barlow and Proschan1965], [Nguyen and Murthy1981], [Nakagawa1986], [Nakagawa1988b])

Les stratégies de maintenance basées sur la limitation du coût (de la durée) des actions de maintenance

La stratégie de maintenance basée sur la limitation du coût de réparation consiste à prendre les décisions selon le coût estimé d'une action de réparation. En effet, lorsqu'un système de production tombe en panne, un coût de réparation est estimé. Si ce coût de réparation ne dépasse pas une limite prédéterminée, une action de réparation sera effectuée sinon le système sera remplacé. Cette politique a été introduite dans la littérature par [Gardent and Nonant1963] et [Drinkwater and Hastings1967]. L'inconvénient de cette politique est que la décision dépend du coût d'une seule réparation. Pour ce fait, [Frank1982] a utilisé le critère du coût de réparation par unité de temps comme un critère de décision. Par conséquent, une action de réparation sera

effectuée si le coût de réparation par unité de temps ne dépasse pas une limite prédéterminée sinon le système sera remplacé. [Nakagawa and Osaki1974] ont étudié la stratégie de maintenance basée sur la limitation de la durée des actions de réparation. Si la durée d'une action de réparation dépasse une limite T , une action de remplacement sera effectuée sinon le système sera réparé. Pour résumer, dans la littérature il existe deux types de politique de limitation : la limitation du coût de réparation et la limitation de la durée de réparation

Les stratégies de maintenance basées sur la limitation du nombre des réparations effectuées

Comme son nom l'indique, Le nombre des réparations effectuées est un critère décisif pour la stratégie de maintenance basée sur la limitation du nombre des réparations effectuées. [Makabe and Morimura1963] ont étudié cette stratégie. En effet, après les $(k-1)$ premières défaillances, une action de réparation minimale sera effectuée. Et après la $k^{\text{ème}}$ défaillance, une action de remplacement aura lieu. Dans leur étude, la variable de décision est k . Plusieurs travaux ont traité la problématique des stratégies de maintenance basées sur la limitation du nombre des réparations et plusieurs extensions ont été proposées. [Morimura1969] a proposé une extension en introduisant une nouvelle variable T (temps de référence). Selon cette nouvelle politique, et comme la stratégie de base, les $(k-1)$ premières défaillances seront corrigées avec une action de réparation minimale. Si la $k^{\text{ème}}$ défaillance a eu lieu avant le temps de bon fonctionnement cumulé T , elle sera corrigée avec une action de réparation minimale et une action de remplacement sera effectuée après la panne suivante $((k+1)^{\text{ème}})$. Mais si la $k^{\text{ème}}$ défaillance a lieu après le temps de bon fonctionnement cumulé T , une action de réparation sera effectuée. Les variables de décision de cette stratégie sont k et T .

La figure 1.4 résume les différentes politiques de maintenance et ses facteurs d'influence.



FIGURE 1.4 – Politique de maintenance et ses facteurs d'influence ([Ba2015])

1.3 Classification des défaillances des systèmes de production

Le comportement des systèmes industriels passe généralement par trois phases durant son cycle de vie. On observe tout d'abord une période de jeunesse (zone A) caractérisé par un taux de défaillance décroissant où les défaillances sont dues à des défauts de conception. Puis une période de vie utile (zone B) caractérisée par un taux de défaillance constant où le comportement du système est optimal. Enfin, une période de vieillissement (zone C) connue par son taux de défaillance croissant où les défaillances sont liées à la dégradation du système de production d'où la nécessité d'effectuer des actions de maintenance préventive. La courbe liée à la dégradation des systèmes de production et la variation de son taux de défaillance est communément appelée « courbe baignoire ». La figure suivante (1.5) illustre les trois phases mentionnées.

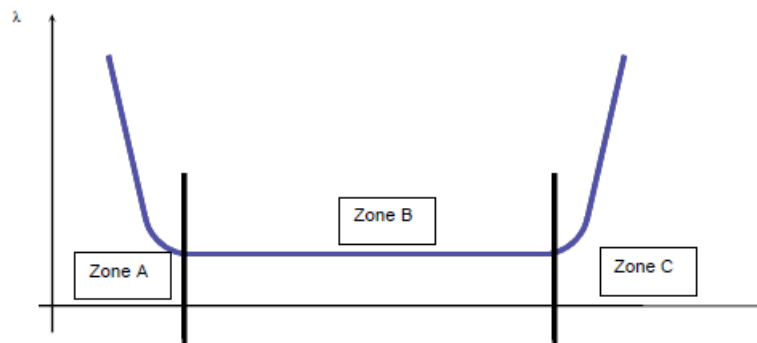


FIGURE 1.5 – La courbe baignoire

La défaillance est définie dans la norme (NF EN 13306) par "*la cessation de l'aptitude d'un bien à accomplir une fonction requise. Après une défaillance le système est en panne complète ou partielle*". Dans la littérature, on peut trouver plusieurs classifications de défaillance. Dans la suite de cette partie et en s'inspirant des travaux de [Rausand and Høyland2004], nous proposons la classification des défaillances par type, par cause et par impact sur l'état du système.

• Classification des défaillances par type

La classification par type, distingue entre les défaillances endogènes et les défaillances exogènes (figure 1.6).

- Les défaillances endogènes : ce sont des défaillances physiques c'est-à-dire que la performance du système diminue à cause d'une dégradation physique. Dans ce type de défaillance, on distingue :

- Les défaillances dues à l'usure : *Défaillance dont la probabilité d'occurrence augmente avec la durée d'utilisation, le nombre d'unités d'usage ou bien avec les sollicitations auxquelles il est soumis*. Ce type de défaillance est dit aussi « dépendant des opérations ». Il peut seulement survenir quand la machine est opérationnelle et il dépend du taux de production, du volume de production durant un cycle donné ou du nombre de cycles de production ([Bouslah2015]). [Hanifin1975] a montré, dans une étude des arrêts des lignes de production dans l'industrie automobile, que 84% des défaillances sont dépendantes des opérations.
- Les défaillances dues au vieillissement : *Défaillance dont la probabilité d'occurrence augmente au cours du temps calendaire*. Ce type de défaillance est dit « dépendant du temps »

une panne de ce type peut survenir même quand la machine est en état d'arrêt. Le taux de pannes augmente avec l'avancement du temps et est due aux phénomènes autres que l'usure ([Bouslah2015]).[Hanifin1975] a montré, dans la même étude, que seulement 16% des défaillances sont dépendantes du temps.

- Les défaillances exogènes : ce sont des défaillances non-physiques c'est à dire que la performance du système de production diminue malgré que le système n'est pas physiquement dégradé. Ce type de défaillance peut être éliminé, à titre d'exemple, par changement de la conception du système de production, le processus de fabrication ou le mode opératoire. Dans les défaillances exogènes, on distingue :

- Les défaillances dues à la conception : des défaillances dues à la phase d'étude préliminaires, la fabrication ou l'installation.
- Les défaillances dues aux interactions : des défaillances dues aux erreurs humaines durant les phases d'opération, de maintenance ou de test.

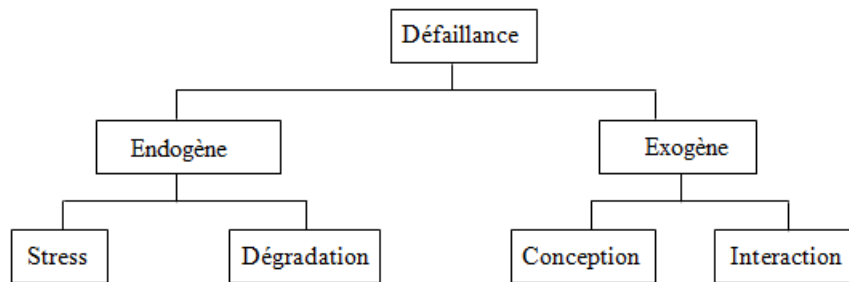


FIGURE 1.6 – Classification des défaillances par type

Selon les résultats de [Hanifin1975], qui a montré que, en pratique, 84% des défaillances sont dues à l'usure contre seulement 16% qui sont dues au vieillissement, il est plus logique d'utiliser les modèles de défaillances aléatoires dues à l'usure pour modéliser la fiabilité des systèmes de production.

Dans ce manuscrit, on s'intéresse en premier temps uniquement aux défaillances aléatoires et en particuliers à celles dues à l'usure. En effet, dans nos travaux, notre objectif consiste principalement à déterminer le nombre de lot à produire avant d'effectuer des actions de maintenance préventive. Implicitement, dans notre modélisation, on tient uniquement compte des temps où la machine est opérationnelle. Puis, en deuxième partie, on considère les défaillances systématiques et plus spécifiquement celles dues aux interactions en prenant la maintenance imparfaite comme exemple.

• Classification des défaillances par cause

Les défaillances peuvent être également classées en fonction des causes de leurs apparitions. Les causes de défaillances sont définies dans la norme (NF EN 13306) par "*les circonstances au cours de spécification, conception, fabrication, de l'utilisation ou de la maintenance qui entraînent la défaillance*".

- *Spécification* : des défaillances dues à la définition de base des besoins du client. Autrement dit, le cahier des charges ne respecte pas les exigences définies par le client.
- *Conception* : des défaillances dues à une conception inadaptée au fonctionnement attendu du système.
- *Fabrication* : des défaillances dues à une non-conformité au niveau de la fabrication par rapport à la conception du produit ou au niveau du procédé de fabrication.
- *Utilisation* : des défaillances dues à une mauvaise manipulation, un mauvais usage dépassant la capacité du système de production ou dues au vieillissement (*défaillance dont la probabilité d'occurrence augmente au cours du temps calendaire*).
- *Maintenance* : des défaillances dues au non-respect du planning de maintenance ou dues au déroulement de l'activité de maintenance.

Cette classification des défaillances par cause est illustrée par la figure suivante (1.7).

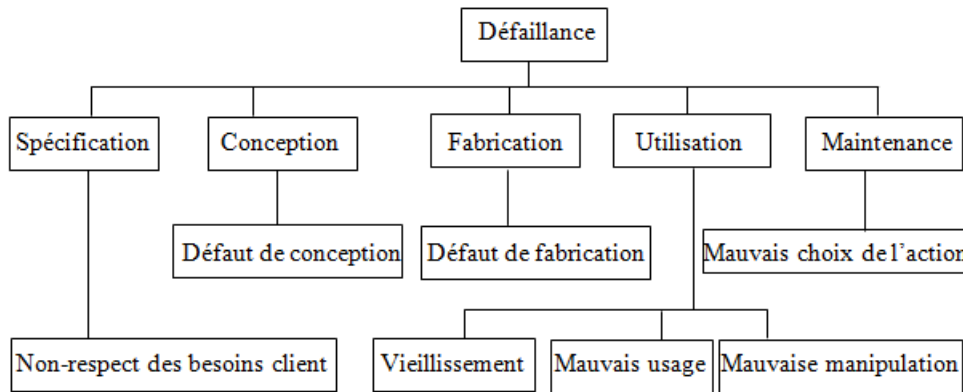


FIGURE 1.7 – Classification des défaillances par cause

●Classification des défaillances par impact sur l'état du système (mode de défaillance)

Les défaillances peuvent aussi être classées selon le mode de défaillance. Ce dernier est défini dans la norme (NF EN 13306), d'une part, par "*la manière dont l'incapacité d'un bien à accomplir une fonction*" et, d'autre part, par "*la fonction perdue ou la transition d'état qui s'est produite*". Trois classes de défaillances sont identifiées :

- Défaillance intermittente : définie par la norme (NF X-06-501) comme étant une défaillance d'un dispositif pour une période de temps limitée après laquelle le dispositif retrouve son aptitude à accomplir sa fonction requise sans avoir été soumis à une action corrective extérieure. Ce mode de défaillance est souvent répétitif.
- Défaillance complète : Définie par la norme (NF X-06-501) comme étant une défaillance résultant de déviations d'une ou des caractéristiques au-delà des limites spécifiées telle qu'elle entraîne une disparition complète de la fonction requise.
- Défaillance partielle : Définie par la norme (NF X-06-501) comme étant une défaillance résultant de déviations d'une ou des caractéristiques au-delà des limites spécifiées telle

qu'elle n'entraîne pas une disparition complète de la fonction requise.

En fonction de la rapidité de manifestation de la défaillance, les deux défaillances complète et partielle peuvent elle-même être divisées en deux types :

- Défaillance soudaine : ce mode de défaillance a été défini par la norme (NF EN 13306) comme étant une défaillance qui ne peut pas être prévue par un examen ou une surveillance de fonctionnement préalable. Une défaillance, en même temps, complète et soudaine est dite « Défaillance catastrophique ».
- Défaillance graduelle ou progressive : une défaillance progressive est définie par la norme (NF X-06-501) comme étant une défaillance qui aurait pu être prévue par un examen. Une défaillance, en même temps, partielle et graduelle est dite « défaillance dégradée »

1.4 Optimisation de la maintenance

L'optimisation de la maintenance consiste à trouver la balance entre les actions de maintenance préventive et corrective tout en respectant des objectifs préalablement fixés (Minimisation des coûts, maximisation de la disponibilité, etc.).

La figure (1.8) illustre les effets de la fréquence des actions de maintenance préventive et corrective sur le coût total. En effet, l'augmentation du nombre des interventions préventives résulte une diminution au niveau des effets indésirables engendrés par une panne mais peut entraîner une augmentation du coût global d'exploitation du système dans la mesure où chaque opération de maintenance engendre un coût. L'objectif est alors de déterminer l'équilibre permettant d'obtenir un coût minimal d'exploitation.

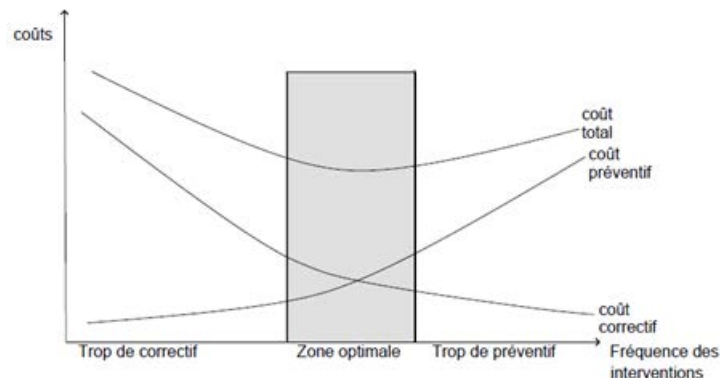


FIGURE 1.8 – Equilibre entre les actions de maintenance préventives et correctives

Depuis 1950, plusieurs travaux de recherche ont porté sur la modélisation de la maintenance. Plusieurs modèles mathématiques ont été développés afin de : trouver le bon compromis entre les deux actions de maintenance, minimiser les coûts de maintenance et maximiser la durée de bon fonctionnement des systèmes de production.

On peut distinguer deux classes de modèle de maintenance : a) modèles de maintenance dont les durées de vie sont connues et b) modèles de maintenance dont la dégradation est connue. Dans la première classe, les modèles se reposent sur la connaissance du temps de bon fonctionnement et la fonction de fiabilité du système. Les stratégies de type âge et bloc sont deux familles de stratégies basées sur la connaissance du temps de bon fonctionnement. Dans la deuxième classe, les modèles de maintenance, dont la dégradation est connue, se reposent sur la connaissance du niveau de dégradation du système afin de prendre les décisions de maintenance.

Les études sur la maintenance ont commencé depuis les années 60 avec [Barlow and Hunter1960]. Depuis, le développement des modèles de maintenance a fait l'objet de plusieurs travaux et publications de plusieurs articles largement référencés ([Aït-Kadi *et al.*2003], [Barlow and Proschan1965], [Dekker1996], [McCall1965], [Pierskalla and Voelker1976], [Sherif and Smith1981], [Cho and Parlar1991], [Wang2002]).

Dans [Aït-Kadi *et al.*2003], les auteurs proposent une nouvelle stratégie de remplacements périodiques utilisant des équipements neufs et usagés. Les équipements neufs seront utilisés pour effectuer les remplacements préventifs aux instants T , indépendamment de l'âge et de l'état de l'équipement. Tandis que les équipements usagés seront utilisés en cas de panne. En effet, si une défaillance aura lieu, l'équipement défaillant sera remplacé par un équipement usagé d'âge x . L'objectif est de maximiser la disponibilité stationnaire et minimiser le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini en déterminant simultanément les instants optimaux de remplacement T^* ainsi que l'âge optimal de l'équipement usagé x^* .

Tous les travaux mentionnés au-dessus assument que les actions de maintenance préventives effectuées sont parfaites et après l'activité de maintenance préventive le système est restauré à l'état neuf. D'autres chercheurs considèrent que l'hypothèse de la maintenance parfaite ne peut pas être appliquée à tous les cas industriels. Ils considèrent des actions de maintenance préventive imparfaite où le système est restauré à un état entre le « aussi bon que neuf » et le « aussi mauvais que vieux ». [Mabrouk *et al.*2016] ont étudié le problème de l'optimisation de la maintenance pour les équipements loués pour une période limitée L . Les deux types d'actions préventives et correctives sont considérées imparfaites, de durées non-négligeables et leur coût est pris en charge par le loueur. Le principe de (p,q) a été utilisé pour modéliser les actions de maintenance préventive imparfaite. En effet, une action de maintenance est parfaite avec une probabilité p et minimale avec une probabilité $q=1-p$. Un processus de quasi-renouvellement décroissant a été utilisé pour modéliser les actions de maintenance corrective imparfaite. L'objectif est de déterminer un plan de maintenance préventive optimal minimisant les coûts prévus durant la période de location. Un algorithme numérique a été proposé afin de déterminer la stratégie optimale de maintenance.

[Schutz and Rezg2013] ont également étudié la thématique des stratégies de maintenance pour les équipements loués. L'équipement est considéré comme neuf au début de chaque période de location. Le coût des actions de maintenance préventive et corrective est pris en charge par le bailleur. Les actions de maintenance préventive, de durées négligeables, sont imparfaites et sont

représentées par le modèle de réduction d'âge virtuel de type II proposé par [Kijima1989]. En cas de panne, une réparation minimale de durée négligeable sera effectuée afin de rétablir le système dans un état opérationnel. Les auteurs proposent deux stratégies différentes. La première consiste à effectuer des actions de maintenance préventive quand la fiabilité atteint une limite bien déterminée fixée par le client (R_{TH-I}). L'objectif de cette première stratégie est de déterminer le facteur de réduction de la stratégie optimal de maintenance minimisant le coût de maintenance. Pour la deuxième stratégie, basée sur la première, les actions de réparations sont remplacées par des actions d'amélioration durant un intervalle $[R_{TH-I}, R_{TH-P}]$ dont la valeur de R_{TH-P} est à déterminer en plus du facteur de réduction afin de minimiser le coût total de maintenance. Ces actions d'améliorations ont le même facteur de réduction que les actions de maintenance préventive. La première stratégie a été résolue à l'aide d'une procédure numérique et la deuxième a été résolue à l'aide d'un algorithme de simulation à événements discrets.

De nos jours, les approches modernes de gestion de l'entreprise dans le cadre d'une vision systémique intégrée font que la planification et la gestion des activités de maintenance ne peuvent plus se faire indépendamment des autres activités de l'entreprise. Suite à ce constat, plusieurs travaux ont été menés afin de développer des nouvelles stratégies de maintenance intégrée tenant compte d'autres fonctions comme la qualité, la production et la gestion de stock.

Dans les dernières décennies, plusieurs chercheurs ont noté que le lien étroit entre la maintenance et d'autres fonctions comme la production, la gestion de stock et la qualité ne devrait plus passer inaperçu [Rahim and Ben-Daya2012].

Dans la partie suivante, nous présentons quelques travaux qui s'intéressent à l'intégration de la maintenance avec d'autres disciplines comme la production, la gestion de stock, la sous-traitance et la qualité.

1.5 Stratégies de maintenance intégrée

Le problème d'intégration de la maintenance avec d'autres fonctions comme la production et la qualité a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche.

La maintenance, la production et la qualité sont trois fonctions principales dans n'importe quel système industriel. Dans la pratique, ces trois fonctions sont souvent gérées séparément malgré qu'elles soient en réalité étroitement inter-liées.

Ces différentes fonctions ont été largement traitées dans la littérature séparément mais ces dernières années une attention particulière a été portée aux politiques de maintenance intégrées à l'une de ces fonctions ou les deux simultanément. Cette tendance est motivée par le fait que les politiques d'intégration de plus qu'une fonction permettent d'améliorer, la productivité, la qualité des produits finis et de réduire considérablement les coûts.

1.5.1 Intégration maintenance et production

Depuis les années 1990, plusieurs recherches sur l'intégration des politiques de maintenance préventive et de production ont été publiées dans la littérature et plusieurs chercheurs ont traité la problématique d'intégration de maintenance et production de différents points de vue. Certains ont étudié l'intégration entre la maintenance et la planification de la production, d'autres ont traité l'intégration entre la maintenance et la gestion des stocks et d'autres la maintenance et la quantité économique de production. Autrement dit cette approche consiste à considérer

simultanément les paramètres de production (taux de production, niveau de stock, demande..) et ceux de maintenance (durée des réparations, le taux de défaillance, coût des actions de maintenance) afin d'optimiser le fonctionnement global du système. Selon [Aghezzaf and Najid2008], une planification intégrée de la maintenance préventive et de la production permet de réduire les arrêtes, les retards et la re-planification de la production et par conséquent permet d'augmenter la productivité et réduire les différents coûts.

- Planification de la production

[Zied *et al.*2011] ont proposé un modèle mathématique basé sur le modèle HMMS ([Holt *et al.*1960]) considéré par ([Bertsekas *et al.*1995]) comme l'un des modèles pionniers dans le traitement de la certitude d'équivalence de problèmes quadratiques, linéaires et dynamiques. Une fonction de défaillance pour une dégradation linéaire de la machine qui dépend de la variation du taux de production durant un horizon de production fini a été développée. Ils proposent une méthode séquentielle pour résoudre ce problème. En effet, la première étape consiste à déterminer un plan de production optimal en minimisant une fonction objective contenant les coûts de production et de stockage. Puis, en tenant compte des résultats obtenus, un plan optimal de maintenance préventive est déterminé. Une procédure numérique basée sur la programmation dynamique a été développée afin de déterminer le plan de production optimal.

[Wang2013] a étudié la problématique d'intégration entre la maintenance préventive imparfaite et la planification de la production pour un système de production composé d'une seule machine et sujet à des pannes aléatoires. Afin de réduire les risques de défaillance, des actions de maintenance préventive et des actions de révision sont effectuées d'une façon périodique. Les actions de maintenance préventive sont supposées imparfaites et les actions de révision « *Overhaul* » sont considérées comme parfaites. En cas de pannes, des actions de réparations minimales seront effectuées. L'auteur traite un problème de dimensionnement de lot multi-produit avec capacité limitée. L'approche proposée se base sur la formulation par programmation linéaire en nombre entier (PLNE). L'objectif consiste à déterminer simultanément la durée optimale du cycle de la maintenance préventive ainsi que la durée optimale du cycle de révision en minimisant une fonction du coût total intégrant le coût des actions de maintenance préventive, corrective et de « *overhaul* », le coût de setup, le coût de production et les coûts de stockage et de pénurie. En se basant sur des exemples numériques, il prouve l'efficacité économique de la stratégie intégrant la maintenance et la production.

[Dellagi *et al.*2017] ont étudié la problématique de planification de la production en tenant compte de l'influence de la variation du taux de production sur le taux de défaillance du système de production. Les auteurs proposent une stratégie de maintenance périodique avec réparations minimales en cas de pannes. Ils considèrent un système de production constitué d'une seule machine produisant un seul type de produit et doit satisfaire une demande aléatoire suivant la loi normale. La machine est sujette à des pannes aléatoires. L'objectif est de déterminer un plan de production et de maintenance optimal tout en minimisant une fonction objective contenant un coût de production, de stockage et de pénurie, d'une part, et les coûts de maintenance et de setup d'autre part. Une fonction de nombre moyen de panne a été développée et dépend de la variation du taux de production. La solution optimale consiste à déterminer simultanément la quantité optimale à produire chaque période durant un horizon H ainsi que la période optimale pour effectuer l'action de maintenance préventive.

- Gestion de stock

[Rezg *et al.*2004] ont étudié l'optimisation conjointe entre une politique de maintenance préventive et la gestion du stock dans le cas d'une ligne de production série constituée de N machines sujettes à des pannes aléatoires et sans stock intermédiaire. Une stratégie de type âge a été considéré. Les demandes arrivent avec un taux constant d et chaque machine à une capacité de production maximale $U_{max} > d$. En vue de pallier aux perturbations de production causées par les pannes et les interventions de maintenance préventive et corrective, les machines fonctionnent à leur capacité maximale afin de bâtir un stock de sécurité. Si le niveau du stock de sécurité souhaité est atteint, les machines produisent à la demande. En cas d'interruption de production, la demande sera satisfaite à partir du stock de sécurité. Dans le cas où le stock de sécurité est vide, les demandes seront perdues et un coût de pénurie est engendré. Ces travaux sont menés en trois étapes. La première étape consiste à s'intéresser uniquement à la fonction maintenance et un coût total moyen par unité de temps sur un horizon fini intégrant les coûts des actions de maintenance préventive et corrective a été établi. L'objectif de cette première étape est de déterminer l'âge optimal de la maintenance préventive minimisant le coût total. La deuxième étape consiste à étudier uniquement l'aspect production et une expression du coût moyen par unité de temps intégrant les coûts des inventaires et les demandes perdues. L'objectif est de déterminer le niveau de stock de sécurité optimal minimisant. Une étude analytique montrant l'existence d'une solution optimale a été établie. La troisième étape consiste à étudier les deux fonctions maintenance et production simultanément et un coût moyen contenant les coûts de maintenance, l'inventaire et les demandes perdus. Afin de déterminer simultanément l'âge optimal de maintenance et le niveau optimal de stock de sécurité dans le cas d'une seule machine, une approche hybride basée sur l'utilisation de la simulation et les algorithmes génétiques a été proposée. Une étude comparative entre ces trois étapes montre que l'étude traitant simultanément les deux fonctions est plus performante que le traitement des fonctions séparément. Ces travaux ont été étendus à n machines.

- Quantité économique de production

[Groenevelt *et al.*1992] sont les premiers à étudier la problématique d'intégration entre les politiques de maintenance préventive et la quantité économique de production et à chercher à déterminer la taille optimale du lot de production en tenant compte des pannes aléatoires. Le critère d'optimisation était de minimiser le coût total moyen. Ce dernier inclue le coût de stockage, les coûts de maintenance corrective et préventive et le coût de mise en course. Sous les hypothèses du taux de production déterministe et constant, de délai de réparation négligeable, une rupture de stock non-permise et une distribution exponentielle de temps inter-pannes, les auteurs ont proposés deux politiques de contrôle de production. Pour la première stratégie, ils assument qu'il n'y a pas de reprise de production d'un lot si elle a été interrompu pour une réparation et pour la deuxième stratégie, il assume que la production d'un lot peut être reprise après l'interruption pour une réparation si le niveau de stock disponible est inférieure à certain seuil. Dans les deux cas la taille optimale de lot obtenu est toujours supérieure à la taille de lot classique ce qui montre l'importance de tenir compte des pannes aléatoires afin de faire face aux pertes de production. D'autres travaux plus récentes ont été publiés traitant l'intégration entre les politiques de maintenance préventive et la quantité économique de production (Sana (2012), Liao (2013))

Tous les travaux mentionnés précédemment se basent sur l'hypothèse que tous les produits obtenus

nus sont conformes aux spécifications exigées. En réalité, les systèmes manufacturiers ne peuvent pas toujours produire des produits de bonne qualité. Dans la partie suivante, nous présentons des études tenant compte de la possibilité de l'apparition des produits non-conformes.

1.5.2 Intégration Production et qualité

Les études traitant l'intégration entre la production et la qualité remonte aux années 1970. Plusieurs chercheurs ont développé des modèles de dimensionnement de lot et la gestion de stock tenant compte de la possibilité de l'apparition des produits défectueux.

Plusieurs modèles ont été utilisés pour modéliser la dégradation du niveau de la qualité. Le mode de dégradation de la qualité le plus utilisé en littérature est celui qui consiste à décrire le système de production par deux états : l'état sous-contrôle et l'état hors contrôle. En générale, le système commence le cycle sous l'état « sous-contrôle » où tous les produits fabriqués sont conformes. Le système passe à l'état hors contrôle au moment où le système commence à produire des produits non-conformes. Ce passage de l'état « sous-contrôle » à l'état « hors-contrôle » est généralement supposé être aléatoire. [Rosenblatt and Lee1986] sont, selon nos connaissances, les premiers qui ont étudié différentes formes de dégradation de la qualité et leur impact sur la quantité économique de la production. [Rosenblatt and Lee1986] ont considéré 4 types de dégradations du niveau de la qualité. Une fois le système est à l'état « hors contrôle », on distingue 4 modes de dégradation de la qualité en fonction de l'évolution de la proportion des produits non-conformes fabriqués au cours du temps : 1) production d'une proportion constante de produits non-conformes, 2) une dégradation linéaire en fonction du temps, 3) une dégradation exponentielle de la qualité en fonction du temps, et finalement 4) une dégradation multi-niveau de la qualité avec un passage aléatoire d'un niveau à un autre plus élevé. Dans notre étude, un lien entre le taux de défaillance du système de production et la qualité des produits fini a été proposé. Ce lien sera détaillé et une expression analytique du taux de régression de la qualité sera développée dans le prochain chapitre. [Rosenblatt and Lee1986] montrent dans leur étude qu'il est préférable de produire des lots de taille plus petit que celui prévu par le modèle classique EMQ (Economic Manufacturing Quantity).

[Khan *et al.*2011] ont présenté une revue de littérature des travaux étudiant des extensions du modèle de la quantité économique de commande classique, connue sous le nom « Economic Order Quantity » pour des systèmes de production imparfaits. Depuis la contribution de [Salameh and Jaber2000], considérée comme l'un des travaux les plus importants dans ce domaine, cet axe de recherche a attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant la dernière décennie et plusieurs extensions ont été proposées. Les travaux ont été organisés dans le papier de [Khan *et al.*2011] sur six catégories selon l'extension étudiée (retour des produits, pénurie, Qualité « retouche, rebut.. », chaîne logistique ». En effet, plusieurs travaux ont été publiés traitant l'extension du modèle de la quantité économique de production tenant compte des actions de retouche ([Lo *et al.*2007], [Sarker *et al.*2008], [Cárdenas-Barrón2008], [Chung2011]). [Sarkar *et al.*2014] ont revisité le modèle de la quantité économique de production en tenant compte du processus de retouche. Les auteurs considèrent un système de production imparfait avec un taux de défaillance aléatoire et produit une proportion des produits non-conforme suivant différentes fonctions de distribution (Uniforme, triangulaire et Beta). Ils assument que tous les produits défectueux peuvent être retouché et qu'ils seront restauré à la meilleure qualité. Ils proposent trois modèles différents correspond chacun à une distribution différente des produits défectueux.

[Porteus1986] a étudié la problématique de la quantité économique de commande pour un système de production qui passe à l'état « hors contrôle » avec une probabilité fixe q . Ils ont estimé que le nombre moyen des unités non-conformes dans un lot de taille Q est $d(Q) = Q - (1 - q)(1 - (1 - q)^Q)/q$. En effet, si la probabilité de passage à l'état « hors contrôle » est estimée à 2% et la taille de lot $Q=100$. Alors le nombre moyen d'unités non-conformes est égale à $d(Q = 100) = 100 - (1 - 0.02)(1 - (1 - 0.02)^{100})/0.02 = 57$ unités. Dans le cas où la probabilité de passage vers l'état hors contrôle est assez petite alors le nombre moyen d'unités non-conforme est approximé par $d(Q) = qQ^2/2$.

1.5.3 Intégration Maintenance et qualité

Le lien entre la maintenance et la qualité est bien perceptible. En effet, un équipement mal entretenu produit de la « non-qualité » et finit par tomber en panne et inversement, si un équipement se met à produire de la non-qualité, on peut en déduire que l'état de système se dégrade et nécessite une intervention de maintenance. Cette interdépendance entre ces deux fonctions a été mis en évidence par plusieurs papiers. En effet, [Ollila and Malmipuro1999] ont révélé dans leur étude que la maintenance a un impact majeur sur la qualité du produit final et ils ont montré, à l'aide d'une étude de cas, que la maintenance est parmi les trois principales causes de la perte de la qualité. Ils ont discuté les différents impacts de la maintenance sur la qualité pour des différents types d'industries. [Ben-Daya and Duffuaa1995] ont proposé deux approches de modélisation du lien entre la qualité et la maintenance. La première réside dans le concept de la maintenance imparfaite et le second évoque l'approche de Taguchi.

Dans ce même contexte d'intégration entre la maintenance et la qualité, certains chercheurs ont dirigé leurs travaux vers des modèles joignant la maintenance et la Maîtrise Statistique des Procédés (MSP) ([Ben-Daya and Rahim2000], [Rahim1994], [Ben-Daya and Rahim2001]). En effet, la Maîtrise Statistique des Procédés, dénommée aussi Statistical Process Control (SPC) en anglais, est défini dans la norme NF X06-030 par « l'ensemble des méthodes et des actions permettant d'évaluer de façon statistique les performances d'un processus de production (au sens large), et de décider de le régler, si nécessaire, pour maintenir les caractéristiques des produits stables et conformes aux spécifications retenues. C'est un des éléments dynamiques du système qualité qui concourt à l'amélioration permanente des productions ». Elle ne se limite pas à l'établissement des cartes de contrôle et à leur exploitation pour régler des machines et maîtriser un processus mais c'est une suite d'analyses qui comprennent : une réflexion sur le processus, l'identification des caractéristiques significatifs du processus, du produit et des tolérances nécessaires, la validation des outils de production et de leurs aptitudes à fournir ce qu'on attend d'eux et enfin la mise en place des cartes. Elle est considérée comme une méthode préventive qui vise à amener le processus au niveau de la qualité requis et à l'y maintenir grâce à un système de surveillance qui permet de réagir rapidement et efficacement à toute dérive, en évitant ainsi la production massive de non conformes. Elle s'appuie principalement sur les méthodes statistiques [Norme X06-030].

[Linderman *et al.*2005] ont développé un modèle intégré qui joint la méthode MSP et la planification de la maintenance afin de prouver l'avantage économique de l'approche intégrée par rapport à celle séparée. Ils ont supposé que l'état de l'équipement est supervisé par une carte de contrôle « X-control-chart » qui indique deux états du système : un état « sous contrôle » et un état « hors contrôle ». Les auteurs ont considéré trois scénarios : la déviation du système à un

état «hors contrôle» résulte en une action immédiate de maintenance. Cette déviation peut être dans certains cas détectée ou non (scénarios 1 et 2). Sinon, des actions de maintenance préventive sont prévues chaque période T (scénario 3). En se basant sur le travail de [Linderman *et al.*2005], les auteurs [Zhou and Zhu2008] et [Panagiotidou and Nenes2009] ont étendu leurs modèles pour inclure quatre et six scénarios, respectivement. Ils ont ajouté la considération de la fausse alarme, le signal d'avertissement et la non-détection de l'état «hors contrôle».

1.5.4 Intégration Maintenance production et qualité

L'impact de la variation de la cadence de production sur l'intensité des défaillances et l'intensité de la dégradation de la qualité a été démontré dans plusieurs études industrielles et a incité plusieurs chercheurs à développer des modèles analytiques intégrant la maintenance, la production et la qualité. Cet effet direct du taux de production a été observé dans plusieurs contextes industriels tels que dans l'industrie automobile et les processus d'usinage et de découpage des métaux ([Bouslah2015]).

[Ben-Daya1999] a développé un modèle intégré pour l'optimisation conjointe de la quantité économique de production, la conception de la carte de contrôle $\bar{X}$ et du niveau de la maintenance préventive imparfaite à considérer. L'auteur considère un système de production imparfait qui commence à produire des produits non-conformes quand il passe à l'état hors contrôle après une période aléatoire de fonctionnement sous-contrôle. Après une action de maintenance préventive, l'âge du système est réduit proportionnellement à la qualité de la maintenance préventive. La distribution du temps de passage de l'état sous-contrôle à l'état hors contrôle est impacté par cette réduction d'âge et par conséquent, les limites de la carte de contrôle seront affectées ainsi que la durée du cycle et la quantité économique à produire. L'objectif est de déterminer simultanément les variables de décisions suivantes : m : le nombre d'intervalles d'inspection par cycle, n : la taille du lot à inspecter, k : la limite de contrôle de la carte de contrôle « $\bar{X}$ ».

[Radhoui *et al.*2010] ont aussi travaillé sur une politique de maintenance intégrée à la qualité pour un système manufacturier produisant des pièces conformes et autres non-conformes. Le nombre d'articles non-conformes est considéré comme une variable de décision pour les opérations de maintenance. En outre, un stock tampon est construit à chaque fois que le taux de non-conformité atteint un seuil spécifique. L'objectif principal était de déterminer les valeurs optimales des seuils et de la taille du stock tampon minimisant le coût total moyen par unité de temps, y compris les coûts de maintenance, le coût de la qualité et le coût de stockage.

[Nourelfath *et al.*2016] ont proposé une stratégie intégrant la maintenance, la production et la qualité dans le contexte d'un problème de dimensionnement de lot multi-produits et multi-périodes à capacité finie et formulé par une programmation non- linéaire mixte. Le système de production est considéré imparfait qui commence à produire une fraction des items non-conforme dès qu'il passe à l'état « hors contrôle ». Des inspections et des actions de maintenance préventive sont effectuées d'une façon périodique. Les actions de maintenance préventive sont supposées parfaites et permettent de réduire l'âge du système de production proportionnellement au niveau de l'action. L'objectif est de minimiser le coût total contenant des coûts liés à la maintenance, la production et la qualité. Cette optimisation permet de déterminer simultanément un plan optimal de production ainsi que le niveau optimal de l'action de maintenance en tenant compte des coûts liés à la qualité. Un algorithme de résolution a été proposé et illustré par des exemples numériques. Les auteurs ont constaté que l'augmentation du niveau de l'action de la maintenance

préventive entraîne une diminution des coûts de contrôle qualité. Par ailleurs, si le coût des actions de la maintenance préventive n'est pas compensé par la réduction des coûts de contrôle qualité, l'action de la maintenance préventive n'est plus justifiable.

1.6 Motivation industrielle

ArcelorMittal est le leader mondial de la production sidérurgique et de l'exploitation minière, avec une empreinte industrielle dans 19 pays et une présence dans 60 pays. Le groupe est le premier fournisseur d'acier de qualité pour de grands secteurs d'activité tels que l'automobile, le bâtiment, l'énergie et l'emballage. En France, ArcelorMittal est le premier producteur d'acier avec ses 40 sites de production, des centres de distribution et de services et les quatre sites de recherche et développement (R&D) ([A11]). La recherche et développement (R&D) d'ArcelorMittal a une présence significative en France, avec 780 chercheurs sur les 1300 chercheurs employés par le groupe ArcelorMittal dans le monde et plus de 65 millions d'euros investis en 2015. Le plus grand site mondial de RD du groupe se situe en France, à Maizières-lès-Metz ([A11]).

Une collaboration de recherche est initiée en 2010 entre le LGIPM et le centre de recherche d'Arcelor-Mittal à Maizières-Lès-Metz. En particulier entre M.Sofiene Dellagi mon directeur de thèse et M. Walid Erray qui a été ingénieur de recherche au sein du centre et co-encadrant de ma thèse. Cette collaboration tourne autour du développement d'une nouvelle politique optimale d'inspection pour déceler les défauts sur les brames d'acier. On note que l'idée générale de la problématique de la présente thèse est un fruit de cette collaboration. En effet, mes travaux de recherche ont été inspirés d'une problématique industrielle observée chez ArcelorMittal et plus particulièrement à la fin de phase du laminage de la machine de coulée continue (figure 1.9) où des défauts de qualité ont été détectés. A cause des coûts directs et indirects très élevés des arrêts de production, la stratégie considérée par l'entreprise consiste à se permettre de retarder les interventions de maintenance préventive, produire des produits de deuxième choix et les vendre par la suite à un prix inférieur ou dans des marchés qui acceptent ce niveau de qualité.

Cette stratégie nous a amenés à poser les questions suivantes :

- Est-ce que on arrête la production dès qu'on observe l'apparition des défauts de qualité ?
- Est-ce que on peut se permettre de continuer à produire des produits de deuxième choix et les vendre après avec un prix inférieur ?
- Quels est le nombre de lots à produire avant d'effectuer des actions de maintenance préventive ?

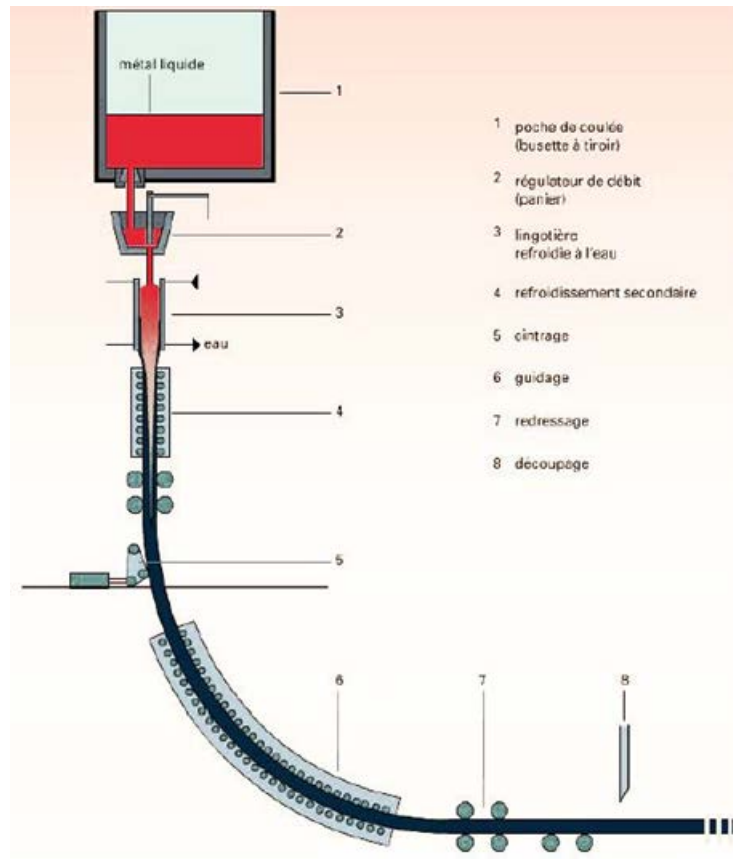


FIGURE 1.9 – Coupe 2D d'une machine de coulée continue verticale avec cintrage

1.7 Objectif général et problématiques de la thèse

Cette thèse a pour objectif général le développement et l'optimisation de nouvelles stratégies de maintenance intégrée à la qualité tenant compte de l'effet de la dégradation des systèmes de production sur la qualité du produit fini et l'impact économique des actions de retouche. Ces différentes stratégies sont étudiées pour les horizons fini et infini et sous différents types de maintenance préventive (parfaite et imparfaite). Pour les différents chapitres, Le système de production considéré est constitué d'une seule machine sujette à des pannes aléatoires. On assume que la qualité du produit fini est influencée par l'état de dégradation de la machine qui engendre la production de 3 types de produits : des produits conformes, des produits de second choix et des produits non-conformes. La décision vis-à-vis des produits de second choix et des produits non-conformes dépend de la stratégie considérée. Le reste de ce manuscrit est structuré en trois chapitres organisés comme suit :

- Le deuxième chapitre porte sur le développement d'une stratégie de maintenance intégrée à la qualité tenant compte de la dégradation du système de production et son impact sur la qualité des produits finis. En effet, une étude du lien étroit entre la dégradation du système de production et la qualité des produits finis sera effectuée en développant une expression analytique d'un taux de regression de qualité faisant le lien entre le prix de vente des produits et le taux de défaillance du système de production en considération. Afin de minimiser cet effet de détérioration, une stratégie de maintenance préventive avec réparation minimale sera considérée. Notre

objectif consiste à déterminer le nombre de lot optimal à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite ramenant le système à l'état neuf maximisant le profit total par unité de temps. Cette stratégie a été étudiée pour les deux horizons infini et fini. Deux modèles mathématiques seront développés et une étude analytique d'existence de la solution optimale, pour chaque stratégie, sera présentée. Une procédure numérique itérative permettant de déterminer le nombre de lot optimal à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive sera présentée ainsi qu'une étude numérique afin d'illustrer les modèles analytiques proposés. Le contenu de ce chapitre a fait partie d'un article journal publié en Avril 2017 dans « International Journal of systems sciences : Operations and Logistics ». ([Gouiaa-Mtibaa *et al.*2017])

- Le troisième chapitre présente une nouvelle stratégie qui consiste à effectuer des actions de retouche sur les produits de second choix et les produits jugés non-conformes si cela est possible. En effet, deux approches seront étudiées. La première consiste à supposer que tous types de défaut de qualité peuvent être corrigés et tous les produits de second choix et non-conformes seront restaurés à la meilleure qualité et, par conséquent, vendus au meilleur prix. Les conditions pour lesquelles cette première approche est plus économique par rapport à la stratégie sans activités de retouche sont ensuite déterminées. La deuxième approche consiste à considérer qu'il existe certaines non-conformités qui ne peuvent pas être corrigées et par conséquent les produits non-conformes ne seront pas tous restaurés à la meilleure qualité et leurs prix de vente dépend du niveau de qualité atteint après l'activité de retouche. Notre objectif consiste, toujours, à déterminer le nombre de lot optimal à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite. Une modélisation analytique et une preuve d'existence de la solution optimale seront développées pour chaque approche. Une procédure numérique itérative sera développée afin de déterminer notre variable de décision. Une étude numérique sera présentée afin d'illustrer les modèles analytiques proposés. La première partie de ce chapitre (approche 1) a fait partie du même article journal publié en Avril 2017 dans « International Journal of systems sciences : Operations and Logistics ». ([Gouiaa-Mtibaa *et al.*2017])

- Le quatrième chapitre porte sur l'étude de la deuxième approche présentée dans le précédent chapitre mais cette fois-ci en considérant le concept de la maintenance imparfaite. Deux stratégies ont été proposées. Pour la première stratégie, on propose d'effectuer durant un cycle un nombre bien déterminé d'action de maintenance préventive imparfaite et finir le cycle par une action préventive parfaite ramenant le système à l'état neuf. L'effet de la maintenance préventive imparfaite est modélisé dans notre étude par une augmentation du nombre moyen de panne. Notre objectif est de déterminer simultanément le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive imparfaite ainsi que le nombre des actions imparfaite durant un cycle. Quant à la deuxième stratégie, elle consiste à considérer un coût d'une action de maintenance préventive parfaite croissant ainsi que la durée associée afin de faire face à la dégradation progressive du système de production due à l'usage et le temps. Pour cette stratégie, on propose d'effectuer durant un cycle un nombre bien déterminé d'action de maintenance préventive parfaite et finir le cycle par une activité de renouvellement. Notre objectif est de déterminer simultanément le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite ainsi que le nombre des actions durant un cycle. Une modélisation mathématique et une preuve d'existence de solution optimale sont proposées. Une étude numérique est présentée afin d'illustrer les modèles mathématiques proposés. La première partie de ce chapitre "stratégie semi-parfaite" a fait l'objet d'un article journal soumis en juillet 2017 dans le journal « Reliability Engineering and System Safety » et actuellement en cours de révision.

Dans ce manuscrit, nous avons adopté le même plan de rédaction pour tous les chapitres, soit - résumé - introduction - description du problème et hypothèses de travail - étude analytique - étude numérique - conclusion. Cette démarche a pour but d'uniformiser les différents chapitres et faciliter la lecture.

La dernière partie de cette thèse sera dédiée à la conclusion générale qui reprendra les grandes lignes de nos travaux et qui dégagera des perspectives futures de recherche.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons souligné la nécessité d'étudier la problématique de la maintenance intégrée à la qualité et la production. Nous avons constaté qu'il y a une forte interdépendance entre l'état de la machine et la qualité des produits finis. Par conséquent, il est nécessaire de modéliser la dégradation de la qualité en tenant compte de la dégradation du système et de proposer des nouvelles stratégies intégrant ces différentes fonctions. Dans ce chapitre, quelques travaux existants dans la littérature ont été présentés afin de mieux cadrer les travaux présentés de cette thèse. En effet, une introduction générale sur la fonction maintenance, ses différents types et ses différentes politiques. Lors de cette étude bibliographique, nous avons rencontré de nombreux modèles mathématique et des stratégies différentes visant à optimiser les actions de maintenance préventive. Certains se sont concentré à étudier seulement la fonction maintenance et ont proposé des modèles mathématiques ayant comme fonction objective la minimisation des coûts ou la maximisation de la disponibilité. D'autres sont convaincu que toute stratégie ne tient pas compte des autres fonctions n'est plus efficiente. D'où l'apparition d'autres modèles, dites de maintenance intégrée, tiennent compte d'autres fonctions comme la qualité, la production et la gestion des stocks. La problématique ainsi que l'objectif de nos contributions ont été ensuite exposés. Dans les chapitres suivants, nous détaillons la problématique étudiée ainsi que les hypothèses considérées et nous présentons les modèles mathématiques proposés.

Chapitre 2

Développement d'une stratégie de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de la dégradation du système de production et la qualité du produit fini

Résumé

Le présent chapitre porte sur le développement d'une stratégie de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de la dégradation du système de production et son impact sur la qualité des produits finis. Le système de production en considération est constitué d'une seule machine produisant un seul type de produit et sujette à des pannes aléatoires avec un taux de défaillance strictement croissant. Afin de réduire la probabilité des défaillances et leurs impacts sur la qualité des produits finis, une stratégie de maintenance préventive de type bloc à réparation minimale a été considérée avec des durées des actions de maintenance préventive et corrective non-négligeables. Cette stratégie a été étudiée pour un horizon infini et un horizon fini. L'originalité de notre travail consiste à tenir compte analytiquement de l'impact de la dégradation progressive de l'équipement sur la qualité du produit fini. En effet, une expression analytique d'un taux de régression de la qualité a été développée faisant un lien direct entre la dégradation du système de production traduite par son taux de défaillance et la qualité du produit fini exprimé par la décroissance de son prix de vente. Deux modèles mathématiques, un pour l'horizon infini et l'autre pour l'horizon fini ont été présentés. Afin d'optimiser les modèles mathématiques développés, une procédure numérique itérative a été adoptée afin d'établir un plan de maintenance optimal, tenant compte de la dégradation progressive du système de production et son impact sur la qualité du produit fini, tout en maximisant un profit total intégrant les prix de vente et les différents coûts de maintenance et de production. Pour les deux stratégies présentées, le plan de maintenance optimal établi est illustré par le nombre de lots à produire avant chaque action de maintenance préventive parfaite. Formellement, ce nombre représente notre variable de décision. Un exemple numérique et une étude de sensibilité ont été présentés afin d'illustrer les modèles proposés et étudier l'impact de la variation de quelques paramètres sur la solution optimale.

2.1 Introduction

L'environnement dans lequel les entreprises évoluent a beaucoup changé ces dernières décennies en raison de la compétition sans cesse croissante à laquelle elles sont confrontées. Cette forte concurrence a entraîné les entreprises à investiguer des voies d'amélioration de performance afin de répondre aux mieux aux exigences de leurs clients. La clé de réussite de toute entreprise réside à la méthode de gérer les différentes fonctions. Les industriels et les chercheurs ont constaté qu'il existe une relation fondamentale entre la maintenance, la production et la qualité et que toute approche traitant ces aspects d'une façon indépendantes n'est plus efficiente. Suite à ce constat, il devient indispensable de développer des nouvelles stratégies tenant compte de la forte interdépendance entre ces différentes fonctions afin de minimiser les coûts liés à la maintenance, la production et la non-qualité et maximiser les profits des entreprises. Dans ce chapitre, on s'intéresse particulièrement à la relation entre la maintenance et la qualité. Malgré leur forte interdépendance, ces deux fonctions ont été largement étudiées séparément. En effet, les travaux de recherche s'intéressant à la maintenance ont été commencés depuis les années 60 avec [Barlow and Hunter1960]. A cette époque, ils se limitaient au développement des stratégies optimales de maintenance en prenant en considération seulement la fiabilité du système, le coût de maintenance et la disponibilité ([Aït-Kadi *et al.*2003] ; [Dekker1996] ; [Liao *et al.*2010] ; [McCall1965]). Ces travaux présentaient une riche base pour développer des modèles de maintenance plus sophistiqués tenant compte des problèmes de planification de production, de qualité, de gestion de stock et de sous-traitance. Dans ce chapitre, nous proposons une stratégie liant la maintenance à la qualité. En effet, la qualité du produit fini peut être considérée comme un indicateur de dégradation du système de production et par conséquent un indicateur pour planifier les actions de maintenance préventive systématiques. En effet dans ce chapitre, on considère un système de production constitué d'une seule machine et produisant des produits conformes (Premier et deuxième choix) et des produits non-conformes. Cette dégradation de la qualité des produits finis est supposée due à la dégradation progressive du système de production. Notre objectif, est de déterminer le nombre de lot optimal à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive en tenant compte de l'évolution de la qualité du produit fini suite à la dégradation du système de production. Un modèle analytique est développé et optimisé afin de réaliser notre objectif.

La section suivante présente une description détaillée du problème, en se basant sur un exemple industriel, et présente les hypothèses de travail. Dans la section 3, nous présentons le développement des modèles analytiques permettant de mettre en équation notre objectif selon différents scénarios. La section 4 est dédiée à une étude numérique dans laquelle nous présentons un exemple numérique inspiré d'un exemple industriel et une étude de sensibilité pour valider le modèles analytiques développés.

2.2 Description du problème et hypothèses de travail

2.2.1 Exemple industriel

Notre étude est inspirée d'un exemple industriel qui concerne une entreprise de fabrication des moules et injection plastique située en Afrique de nord et qui est spécialisée dans l'injection des pièces en plastique pour les deux secteurs automobile et médical. L'injection plastique, appelée aussi moulage par injection, est un procédé permettant d'obtenir des pièces de formes simples ou complexes pour la petite à la grande série. La machine est alimentée par des granulés plastiques

à travers la trémie. Ces granulés servent à alimenter la vis de plastification. Cette dernière est chauffée et thermo régulée via la résistance chauffante. La rotation de la vis de plastification et l'action conjuguée de la température de la résistance permettent de ramollir les granulés de matière plastique qui consiste au passage des granulés en plastique à l'état fluide. Cette matière est acheminée à l'avant de la vis de plastification, donnant ainsi une réserve de matière prête à être injectée : c'est la phase de dosage. Puis la phase d'injection dynamique, où la matière présente à l'avant de la vis de plastification est injectée sous forte pression dans les cavités du moule présentant la forme de la pièce souhaitée. Le moule est réglé à une température inférieure à la température de transformation. Une pression constante a été appliquée durant un temps déterminé afin de continuer à alimenter les cavités pour qu'elles soient remplies. Enfin, la pièce est refroidie durant quelques secondes puis éjectée. Le processus d'injection plastique décrit est illustré par la figure de la machine d'injection (2.1).

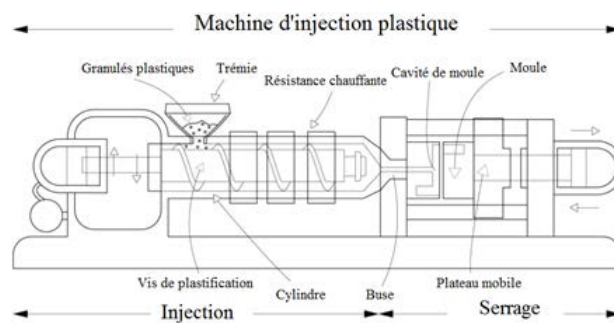


FIGURE 2.1 – Machine d'injection plastique

La qualité des pièces obtenues est très importante pour les deux secteurs automobile et médical. Il est clair que plusieurs étapes peuvent impacter directement la qualité du produit fini. Puisque la qualité des produits finis est influencée par l'état de la machine et l'état du moule, un plan de maintenance préventive optimal pour le système de production considéré (Moule + machine d'injection plastique) peut être une solution pour améliorer la qualité des produits finis. Cette problématique a été étudiée pour les deux horizons infini et fini. Ce choix est expliqué par le fait que ces deux situations peuvent exister en réalité en industrie. En effet, si l'entreprise est la propriétaire principale de la machine d'injection et le moule, on est dans le cas de l'horizon infini et c'est la responsabilité de l'entreprise de gérer sa production et les actions de maintenance préventive et corrective associées durant la durée de vie de la machine et du moule. Par contre, dans le cas de l'horizon fini, l'entreprise joue le rôle d'un sous-traitant et elle n'utilise pas son propre moule. En effet, ce moule sera loué pour une période bien déterminée (un horizon fini) afin d'injecter les pièces plastiques. Durant cette période, l'entreprise doit gérer la production et les différentes actions de maintenance préventive et corrective afin d'assurer le niveau de qualité souhaité par le client. Dans notre étude, on suppose qu'une inspection régulière est effectuée par les employés (Ex : pression hydraulique, fluide hydraulique, graissage, nettoyage) et on optimise les actions de maintenance préventive nécessitant l'arrêt de la machine. Les actions de maintenance corrective consistent à faire des actions de réparation de la machine ou du moule (Ex : soudage de moule).

On distingue 3 types de produit fini :

1. Produit conforme de premier choix : ce sont des produits avec des bonnes dimensions et un excellent aspect de qualité. Ils seront vendus au meilleur prix.
2. Produit de second choix : ce sont des produits avec des dimensions acceptables et un aspect

de qualité moyen. Ils seront vendus à un prix réduit.

3. Produit non-conforme : ce sont des produits avec des dimensions incorrectes et ils seront rejetés.

Une description détaillée de la problématique étudiée sera présentée dans la section suivante. Selon l'exemple industriel décrit, cette étude a été conduite afin d'étudier la problématique de la maintenance intégrée à la qualité tenant compte de la dégradation du système de production et son impact sur la qualité du produit fini. Notre problématique consiste principalement à répondre à la question suivante : Est-ce que on arrête la production et on effectue la maintenance préventive ? Ou on peut se permettre de produire des produits de second choix et les vendre à un prix réduit ?

2.2.2 Description du problème

On considère un système de production constitué d'une seule machine et produisant un seul type de produit. Cette machine est sujette à une dégradation progressive avec un taux de défaillance strictement croissant suivant la loi de Weibull avec un paramètre de forme $\beta > 1$ et un paramètre d'échelle ϵ . Cette dégradation impacte l'état du système de production ainsi que la qualité des produits finis. Par conséquent, on distingue alors 3 différents types de produit : Un premier type de produit fini dit « Des produits du premier choix » ayant la meilleure qualité et seront vendus avec le meilleur prix. Un deuxième type de produit fini dit « Des produits de second choix ». Ce sont des produits de qualité inférieure dont les défauts de qualité n'impactent pas la fonction principale et répondent à l'exigence d'une partie de notre clientèle. Ce deuxième type de produit sera vendu à un prix réduit. Finalement, des produits non-conformes qui seront rejetés. Cette classification des différents types de produits est une classification interne faite selon les exigences des clients. En effet, une entreprise doit être toujours à l'écoute du marché international pour répondre aux exigences de ses clients. Un produit considéré de second choix dans un pays peut être considéré comme premier choix dans un autre. Cette différence au niveau des exigences peut être une opportunité et un nouveau marché pour les entreprises. Dans ce travail, on suppose que la dégradation de la machine représente la cause principale de la production des produits de second choix et des produits non-conformes et toutes causes reliées, par exemple, à l'opérateur, matières premières ou autres sont négligeables. Dans le but de réduire l'occurrence des défaillances et l'impact de la dégradation du système sur la qualité des produits finis, une politique de maintenance préventive, de type bloc, à réparation minimale avec des durées de maintenance préventive et corrective non-négligeables a été considérée. Une action de maintenance préventive, de durée moyenne μ_p exponentiellement distribuée de paramètre η_1 , est effectuée après la production de N lots. Cette action de maintenance est considérée comme parfaite, le système de production est restauré à l'état neuf et la qualité du produit fini est restituée à la meilleure qualité suite à cet action. Les actions de maintenance corrective auront lieu en cas de panne avec une durée moyenne de réparation minimale μ_c exponentiellement distribuée de paramètre η_2 . Après une action de réparation minimale, le nombre moyen de panne reste inchangeable et l'état de système est restauré à celui avant la défaillance. Dans cette étude, et afin de garantir un niveau de qualité acceptable, on assume que le coût de vente d'un lot ne doit en aucun cas dépasser son coût de production. En effet, la qualité du produit fini subit une dégradation suite à la détérioration progressive du système de production et chaque lot produit perd de la qualité et contient plus de produit de second choix et non-conformes par rapport au précédent. Par conséquent, il se vend à un prix réduit. Le prix de vente d'un lot SP_i est exprimé comme suit :

$$SP_i = \alpha_i \times P_{max} \quad (2.1)$$

Avec

P_{max} : Le prix de vente d'un lot 100% conforme.

α_i : Le taux de régression de qualité du $i^{ème}$ lot.

Une étude analytique sera effectuée dans la section suivante afin de développer une expression analytique du taux de régression de qualité en fonction de la dégradation du système de production.

Le cycle de production commence avec un système à l'état neuf suite à une action de maintenance préventive supposée parfaite et inclut la durée de production de N lots, la durée moyenne d'une action de maintenance préventive et la durée moyenne des réparations minimales. Le problème décrit est illustré par la figure suivante (Figure 2.2).

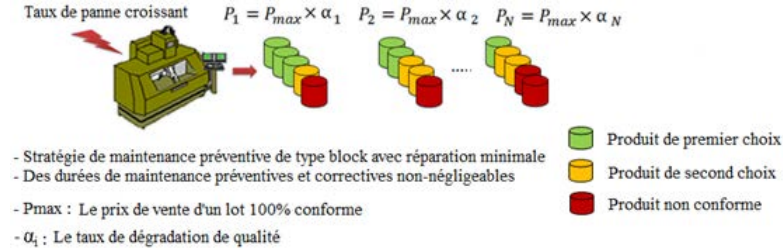


FIGURE 2.2 – Description du problème

2.2.3 Expression analytique du taux de régression de la qualité α_i

D'après une étude faite par ([Ben-Daya and Duffuaa1995]), l'état du système de production impacte directement la qualité du produit fini. En effet, un système de production bien entretenu produit moins de produits de second choix et non-conformes.

On définit, alors, un taux de régression de qualité noté α_i qui représente le taux des produits conformes et les produits de second choix. Il est important de rappeler que les produits conformes seront vendus avec un meilleur prix et les produits de second choix seront vendus avec un prix réduit et bien sûr les produits non conformes seront rejetés. Par conséquent, le prix de vente d'un lot i dépend de son taux de régression de qualité α_i et il est donné par l'expression (2.1).

Ce taux de régression de qualité α_i est calculé par la méthode de normalisation en relation avec la dégradation du système de production exprimé par son taux de défaillance. Par conséquent on propose que :

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \quad \forall i \in 1..N \text{ avec}$$

$$\beta > 1 \quad (2.2)$$

Avec λ_i représente le taux de défaillance du système de production, après la production de i lots, suivant la loi de Weibull de paramètre de forme β et paramètre d'échelle ϵ , N représente le nombre de lots à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive parfaite et $Proc$ représente la durée moyenne de production d'un lot. Le taux de défaillance est donné par l'expression suivante :

$$\lambda_i = \frac{\beta}{\epsilon} \times \left(\frac{N \times Proc}{\epsilon} \right)^{\beta-1} \quad \forall i \in 1..N \quad (2.3)$$

Avec β et ϵ sont respectivement les paramètres de forme et d'échelle de la loi de Weibull associée au taux de défaillance du système de production et Proc représente la durée moyenne de la production d'un lot.

On obtient, alors, l'expression analytique du taux de régression de la qualité α_i , donnée par une fonction décroissante entre 0 et 1 et mettant en évidence le lien entre la dégradation de la machine et la qualité du produit fini.

Preuve. Dans notre étude on assume qu'on a un taux de panne strictement croissant suivant la loi de Weibull ($\beta > 1$). Par conséquent, $\forall i \in 1..N$, on a $\lambda_{i+1} > \lambda_i$. Appliquons maintenant la méthode de normalisation qui consiste à diviser le taux de panne à l'instant $(i \times \text{Proc})$ par le taux de panne à l'instant $((N+1) \times \text{Proc})$. On obtient, alors, $\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{N+1}} > \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \forall i \in 1..N$.

Ainsi, on obtient une fonction croissante, $\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}$ dont les valeurs sont entre 0 et 1.

Donc, il est clair que, $\alpha_i = 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}$ est une fonction décroissante dont les valeurs sont entre 0 et 1 $\forall i \in 1..N$. $\square$

2.2.4 Les hypothèses de l'étude

Les hypothèses adoptées pour le développement du modèle analytique afin d'établir la valeur optimale N^* , le nombre de lots à produire avant d'exécuter une action de maintenance préventive restaurant le système à un état neuf afin de maximiser le profit total par unité de temps sur un horizon infini sont les suivantes :

- Le système de production est considéré comme un système monolithique.
- Les ressources, tant d'un point de vue humain que matériel, seront considérées comme suffisantes.
- En cas de panne du système de production, une maintenance corrective est effectuée immédiatement.
- Les actions de maintenance corrective seront considérées comme minimales et le seul but est de rétablir le système dans son état avant la panne.
- L'action de maintenance préventive est supposée parfaite et restaure le système à l'état neuf.
- Les différents coûts et les distributions de probabilité sont supposés être connus.
- La taille de lot est connue et constante.

Il est important de mentionner que ces hypothèses ne sont pas figées et évolueront dans les prochains chapitres de cette thèse.

2.2.5 Notations

Les notations suivantes sont utilisées :

H	: La durée de l'horizon.
T	: La durée moyenne d'un cycle.
T_1	: La période supplémentaire entre la fin de la dernière action de maintenance préventive et la fin de l'horizon H .
PT_{1-IH}	: Le profit total par unité de temps pour un horizon infini.
PT_{1-FH}	: Le profit total par unité de temps pour un horizon fini.
SP	: Le prix de vente total durant un cycle.
SP_{T_1}	: Le prix de vente total durant la période supplémentaire.
SP_i	: Prix du vente du $i^{ème}$ lot.
M_p	: Le coût moyen d'une action de maintenance préventive.
C_{pm}	: Le coût total des actions de maintenance préventive durant un cycle.
M_c	: Le coût moyen d'une action de maintenance corrective.
C_{cm}	: Le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle.
C_{cm1}	: Le coût total des actions de maintenance corrective durant la période supplémentaire T_1 .
$Proc$	: La durée moyenne de production d'un lot.
μ_p	: La durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
μ_c	: La durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
P_{max}	: Le prix de vente d'un lot 100% conforme.
C_p	: Le coût total de production.
C_{pu}	: Le coût total de production durant la période supplémentaire T_1 .
C_{setup}	: Le coût de setup.
$F(t)$	: La fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système.
$g(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
$h(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
$\lambda(t)$	: Le taux de défaillance.
β	: Le paramètre de forme de la loi Weibull.
ϵ	: Le paramètre d'échelle de la loi Weibull.
η_1	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de maintenance préventive.
η_2	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de maintenance corrective.
Nb_f	: Le nombre moyen de panne durant un cycle T .
Nb_{f1}	: Le nombre moyen de panne durant la période supplémentaire T_1 , entre la dernière action de MP réalisée et la fin du cycle H .
Nb_{pm}	: Le nombre des actions de maintenance préventive durant un horizon H .
$\lfloor X \rfloor$	: La partie entière du réel X .

On note que deux modèles analytiques seront développés, un premier modèle concerne notre stratégie selon un horizon infini et le deuxième selon un horizon fini.

2.3 Etude analytique

2.3.1 Modélisation analytique de la stratégie (Horizon infini)

Le profit total par unité de temps de cette première stratégie (PT_{1-IH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm}).
- Le coût de production (C_p)

Un cycle de production commence après une action de maintenance préventive parfaite et inclut la durée moyenne de production, la durée moyenne des actions de maintenance corrective et la durée moyenne d'une action de maintenance préventive. Par conséquent l'expression de la durée moyenne d'un cycle T est exprimée ainsi :

$$T = N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f \quad (2.4)$$

On rappelle que N représente le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive et qui est notre variable de décision, $Proc$ représente la durée moyenne de production d'un lot. μ_p et μ_c représentent respectivement la durée moyenne d'une action de maintenance préventive et corrective. Finalement, Nb_f représente le nombre moyen de panne durant un cycle T.

Le profit total par unité de temps PT_{1-IH} de cette stratégie est calculé en déterminant la différence entre le prix de vente total et les différents coûts de production et de maintenance divisée par la durée moyenne d'un cycle. De plus, en se basant sur des cas industriels, on suppose que le prix de vente d'un lot doit toujours être supérieur à son coût de production. Formellement,

$$SP_i \geq C_{pu} \quad (2.5)$$

Avec SP_i représente le prix de vente du $i^{ème}$ lot et C_{pu} son coût unitaire de production.

En utilisant l'expression (2.1), cette contrainte peut être écrite comme suit :

$$P_{max} \times \alpha_i \geq C_{pu} \quad (2.6)$$

L'expression du profit total par unité de temps PT_{1-IH} est donnée par :

$$PT_{1-IH}(N) = \frac{SP - (C_{pm} + C_{cm} + C_p)}{T} \quad (2.7)$$

Avec

$$SP_i \geq C_{pu} \quad \forall i \in 1..N \quad (2.8)$$

Nous développons maintenant les différents coûts apparus dans les expressions (2.7) et (2.8).

• Prix total de vente (SP)

Le prix de vente du $i^{ème}$ lot est donné par :

$$SP_i = P_{max} \times \alpha_i \quad \forall i \in 1..N \quad (2.9)$$

On rappelle qu'on a établi l'expression analytique du taux de régression de qualité α_i exprimé en fonction du taux de défaillance du système de production et présenté par :

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \quad \forall i \in 1..N \quad (2.10)$$

Durant un cycle T, on produit N lots. Le prix total de vente est donné, alors, par l'expression suivante :

$$SP = \sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \quad (2.11)$$

- Coût de la maintenance préventive durant le cycle T

Durant un cycle T, une seule action de maintenance préventive sera effectuée à la fin du cycle pour restaurer le système à son état neuf. Donc le coût de la maintenance préventive durant un cycle T est équivalent au coût unitaire moyen d'une action de maintenance préventive.

$$C_{pm} = M_p \quad (2.12)$$

- Coût des actions de maintenance corrective durant le cycle T

Durant a cycle, on effectue (Nb_f) actions de maintenance corrective. Le coût total des réparations durant un cycle est le produit du coût moyen d'une action de maintenance corrective et le nombre de réparation.

$$C_{cm} = M_c \times Nb_f \quad (2.13)$$

Dans ce travail, nous considérons que les durées des actions de maintenance préventive et corrective sont non-négligeables. Ainsi, en se basant sur les travaux de [Lim *et al.*2005], le nombre moyen de panne (Nb_f) est donné par un produit de convolution entre la fonction de distribution de probabilités associée à la défaillance du système et densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective. Le nombre moyen de panne durant $[0, t]$ est, alors, exprimé comme suit :

$$Nb_f = -\text{Log}(1 - \int_0^t F(t-x) \times g(x) dx) \quad (2.14)$$

Notre objectif est de déterminer le nombre moyen de panne durant $[0, N \times \text{Proc}]$. Le nombre de réparations Nb_f est exprimé par :

$$Nb_f = -\text{Log}(1 - \int_0^t F(t-x) \times g(x) dx) \quad (2.15)$$

Avec

$F(t)$: la fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système.

$g(t)$ représente la densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective.

Notre objectif est de déterminer Le nombre moyen de panne durant $[0, N \times \text{Proc}]$. Le nombre de réparation Nb_f est exprimé par :

$$Nb_f = -\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} F(N \times \text{Proc} - x) \times g(x) dx) \quad (2.16)$$

L'expression du coût total des actions correctives durant un cycle T est donnée par :

$$C_{cm} = M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} F(N \times \text{Proc} - x) \times g(x) dx)) \quad (2.17)$$

- Coût total de production durant un cycle T

Durant un cycle T, on produit N lots. Il est clair, alors, que le coût total de production peut être exprimé par l'expression suivante :

$$C_p = C_{pu} \times N \quad (2.18)$$

En utilisant les expressions (2.4), (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.17) et (2.18), le profit total par unité de temps PT_{1-IH} pour cette première stratégie pour un horizon infini est exprimé comme suit :

$$PT_{1-IH}(N) = \frac{\sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) - (M_p + C_{pu} \times N)}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} - \frac{M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \quad (2.19)$$

Avec

$$P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \geq C_{pu} \quad \forall i \in 1..N \quad (2.20)$$

On rappelle que la condition (2.20) exprime le fait que le prix de vente d'un lot ne doit dépasser en aucun cas son coût de production.

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Pour cette politique, la seule variable de décision recherchée correspond au nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (N). On obtient une fonction discrète à une seule variable de décision. On ne peut pas, alors, déterminer la solution optimale en utilisant la méthode traditionnelle ([Khatab *et al.* 2017]) qui consiste à déterminer les zéros du dérivé. Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive N sera obtenu alors à l'aide d'une procédure numérique. Le lemme suivant a été développé afin de montrer l'existence d'un maximum global.

Lemme 1. *Il existe une solution optimale $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1-IH} et $0 < N1^* \leq N_{max}$.*

Preuve. Puisque on a $P_{max} \times \alpha_i \geq C_{pu} \forall i \in 1..N$ et α_i est une fonction décroissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive est délimité par N_{max} . N_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité. Formellement,

$$P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_{N_{max}+1}}{\lambda_{N_{max}+2}}) < C_{pu} \quad (2.21)$$

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = 1..N_{max}$.

De plus on a,

- $PT_{1-IH}[0] = -\frac{M_p}{\mu_p}$
- $PT_{1-IH}[1] = \text{Constante}$

- $PT_{1-IH}[N_{max}] = \text{Constante}$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{1IH}^*[N1] = PT_{1IH}[N_{max}]$.

- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N1^* < N_{max}$ et $PT_{1IH}^*[N1] > PT_{1IH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1-IH}^* et $0 < N1^* \leq N_{max}$ □

• Procédure numérique itérative

La résolution de cette politique de maintenance à l'aide d'une procédure numérique s'effectue en incrémentant le nombre de lot de $N=1$ jusqu'à l'apparition de la relation suivante :

$$P_{max} \times \alpha_i < C_{pu}$$

La dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité correspond à la valeur de N_{max} . On calcule les différents profits pour $N=1$ jusqu'à $N=N_{max}$ et on détermine le profit maximal correspondant à $N1^*$. La procédure numérique utilisée pour déterminer le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N1^*$ est présentée par la figure suivante (Figure 2.3)

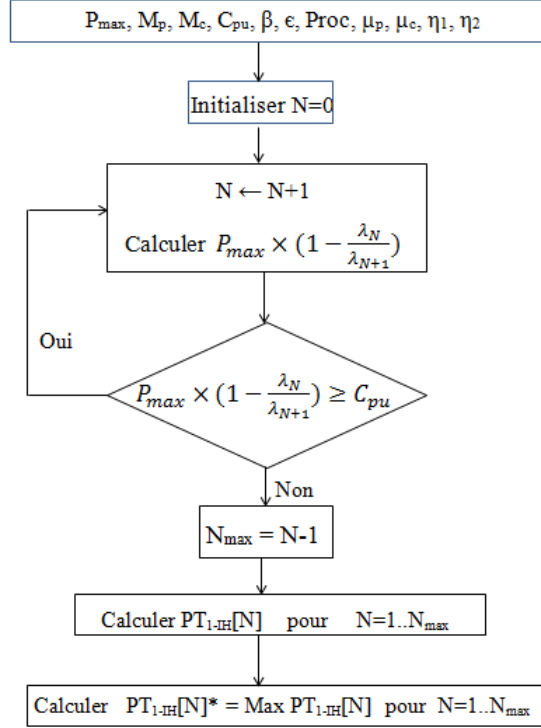


FIGURE 2.3 – Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produite avant d’effectuer une action de maintenance préventive (Horizon infini).

2.3.2 Modélisation analytique de la stratégie (Horizon fini)

Le profit total par unité de temps de cette deuxième stratégie pour un horizon fini (PT_{1-FH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm}).
- Le coût de production (C_p)
- Le coût de setup (C_{setup})

Dans le cas d’un horizon fini, on ajoute un coût de setup, appelé aussi coût fixe de production. C’est un coût qui ne dépend pas de la quantité produite. Il peut être un coût de changement de lot ou un coût de réglage. Cette activité est effectuée après l’action de maintenance préventive (après la production de N lot). Ces actions de maintenance préventive et de setup seront effectuées qu’à la fin d’un cycle complet T . En effet, On définit une période complémentaire T_1 représentant la durée entre la fin de la dernière action de maintenance préventive et la fin de l’horizon H et elle inclut la durée moyenne de production de N_1 produits et la durée moyenne des actions de maintenance corrective durant $[0, N_1 \times Proc]$. Formellement :

$$T_1 = N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}$$

Avec N_1 représente le nombre de lot à produire durant la période supplémentaire entre la fin de dernière action de maintenance préventive et la fin de l’horizon.

Durant cette période complémentaire T_1 , si elle existe, aucune action de maintenance préventive

et de setup n'est effectuée. On distingue, alors, deux cas possibles :

1) Cas 1 : La fin de la dernière action de maintenance préventive est effectuée avant la fin de l'horizon H.

Formellement, $T_1 = H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0$

Ce premier cas est décrit par la figure suivante (Figure 2.4).

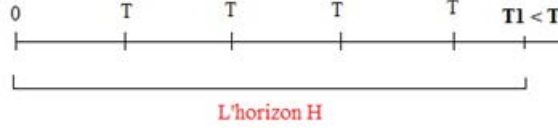


FIGURE 2.4 – Description du premier cas

Le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie $PT_{1-FH_{cas1}}$ est donné par :

$$PT_{1-FH_{cas1}}(N) = \left(\frac{SP - (C_{pm} + C_{cm} + C_p + C_{setup})}{T} \right) \times \left\lfloor \frac{H}{T} \right\rfloor + \frac{SP_1 - (C_{cm1} + C_{p1})}{T_1} \quad (2.23)$$

Les expressions analytiques du nombre de lot produit durant la période complémentaire T_1 (N_1), du nombre moyen de panne durant T_1 (Nb_{f1}), du prix de vente des lots produits durant T_1 (SP_{T1}), du coût moyen des actions de maintenance corrective (C_{cm1}) et du coût de production des N_1 lots (C_{p1}) sont développées au-dessous.

- Le nombre de lot produit durant la période complémentaire T_1 (N_1)

$$N_1 = \left\lfloor \frac{T_1 - \mu_c \times Nb_{f1}}{Proc} \right\rfloor \quad (2.24)$$

- Le nombre moyen de panne durant la période complémentaire T_1 (Nb_{f1})

$$Nb_{f1} = -\text{Log}\left(1 - \int_0^{N1*Proc} F(N1 * Proc - x) \times g(x) dx\right) \quad (2.25)$$

- Le prix de vente des lots produits durant la période complémentaire T_1 (SP_{T1})

$$SP_{T1} = \sum_{i=1}^{N1} P_{max} \times \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N1+1}}\right) \quad (2.26)$$

- Le coût moyen des actions de maintenance corrective (C_{cm1})

$$C_{cm1} = M_c \times \left(-\text{Log}\left(1 - \int_0^{N1*Proc} F(N1 * Proc - x) \times g(x) dx\right)\right) \quad (2.27)$$

En utilisant les expressions de SP, C_{cm} , C_p et T développées dans la section précédente (2.3.1), le profit de total par unité de temps pour ce premier cas $PT_{1-FH_{cas1}}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
 PT_{1-FH_{cas1}}(N) = & \left(\frac{\sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) - (M_p + M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\
 & - \frac{C_{pu} \times N + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \Big) \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right] \\
 & + \frac{\sum_{i=1}^{N1} P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N1+1}})}{N1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \\
 & - \frac{M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N1*Proc} F(N1*Proc - x) \times g(x) dx)) + C_{pu} \times N1}{N1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

2) Cas 2 : La fin de la dernière action de maintenance préventive coïncide avec la fin de l'horizon H. Formellement, $T_1 = H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0$. Ce deuxième cas est décrit par la figure suivante (Figure 2.5).

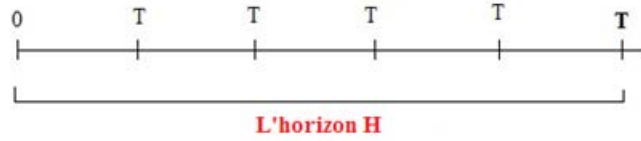


FIGURE 2.5 – Description du deuxième cas

Le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie $PT_{1-FH_{cas2}}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 PT_{1-FH_{cas2}}(N) = & \left(\frac{\sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) - (M_p + M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\
 & - \frac{C_{pu} \times N + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \Big) \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right] \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

En utilisant la fonction indicatrice, le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie PT_{1-FH} peut être écrit sous la forme :

$$PT_{1-FH} = PT_{1FH_{cas1}} \times 1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0)} + PT_{1-FH_{cas2}} \times 1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0)} \quad (2.30)$$

Avec

$$1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0)} = 1 \text{ si } H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$$1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0)} = 1 \text{ si } H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Ainsi, le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie PT_{1-FH} est donné par :

$$\begin{aligned}
PT_{1-FH}(N) = & \left[\frac{\sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) - (M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \right. \\
& - \frac{M_p + C_{pu} \times N + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
& \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \right] \\
& + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N_1+1}}) - (M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N_1 \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N_1 \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx)))}{N_1 \times Proc + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N_1 \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N_1 \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
& - \frac{C_{pu} \times N_1}{N_1 \times Proc + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N_1 \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N_1 \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \Big] \times (1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T \neq 0)}) \\
& + \left[\frac{\sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) - (M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \right. \\
& - \frac{M_p + C_{pu} \times N + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
& \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \right] \Big] \\
& \times 1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T = 0)} \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Avec

$$P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \geq C_{pu} \quad \forall i \in 1..N \tag{2.32}$$

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Pour cette politique, la seule variable de décision recherchée correspond au nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive. On obtient une fonction discrète à une seule variable de décision, il est impossible, alors, de déterminer la solution optimale en utilisant la méthode traditionnelle qui consiste à déterminer les zéros du dérivé. Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive (N) sera obtenu, alors, à l'aide d'une procédure numérique. Le lemme suivant a été développé afin de montrer l'existence d'un maximum global.

Lemme 2. *Il existe une solution optimale $N2^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1-FH} et $0 < N2^* \leq N_{max}$.*

Preuve. Puisque on a $(P_{max} \times \alpha_i \geq C_{pu}) \forall i \in 1..N$ et α_i est une fonction décroissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive est délimité, d'une part, par N'_{max} . N'_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité. Formellement,

$$P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_{N'_{max}+1}}{\lambda_{N'_{max}+2}}) < C_{pu} \tag{2.33}$$

D'autre part, cette problématique a été étudiée pour un horizon fini H. Par conséquent, le nombre de lot à produire est délimité par N''_{max} . N''_{max} correspond au nombre de lot qu'on peut produire durant un horizon H si on suppose qu'on a ni panne ni des actions de maintenance préventive. Formellement,

$$N''_{max} = \left\lfloor \frac{H}{Proc} \right\rfloor \tag{2.34}$$

Le nombre maximal de lot à produire est limité, alors, d'une part par la contrainte de qualité et d'autre part par la longueur de l'horizon H. Le nombre de lot maximal qu'on peut produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive est donné par :

$$N_{max} = \text{Min}[N'_{max}, N''_{max}] \quad (2.35)$$

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = \{1..N_{max}\}$. De plus on a,

- $PT_{1-IH}[0] = -\frac{M_p}{\mu_p}$
- $PT_{1-IH}[1] = \text{Constante}$
- $PT_{1-IH}[N_{max}] = \text{Constante}$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N2^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{1-FH}^*[N2] = PT_{1-FH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N2^* < N_{max}$ et $PT_{1-FH}^*[N2] > PT_{1-FH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N2^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1-FH}^* et $0 < N2^* \leq N_{max}$

□

• Procédure numérique itérative

La résolution de cette politique de maintenance à l'aide d'une procédure numérique s'effectue en incrémentant le nombre de lot de $N=1$ jusqu'à l'apparition de la relation suivante ($P_{max} \times \alpha_i < C_{pu}$). La dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité correspond à la valeur de N'_{max} . Puis, On détermine N''_{max} en calculant la partie entière du rapport entre la longueur du l'horizon H et la durée moyenne de la production d'un lot ($Proc$) ($N''_{max} = \lfloor \frac{H}{Proc} \rfloor$). N_{max} correspond, alors, à la valeur minimale entre N'_{max} et N''_{max} ($N_{max} = \text{Min}[N'_{max}, N''_{max}]$). On calcule les différents profits pour $N=1$ jusqu'à $N=N_{max}$ et on détermine le profit maximal correspondant à $N2^*$. La procédure numérique utilisée pour déterminer le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N2^*$ est présentée par la figure suivante (Figure 2.6)

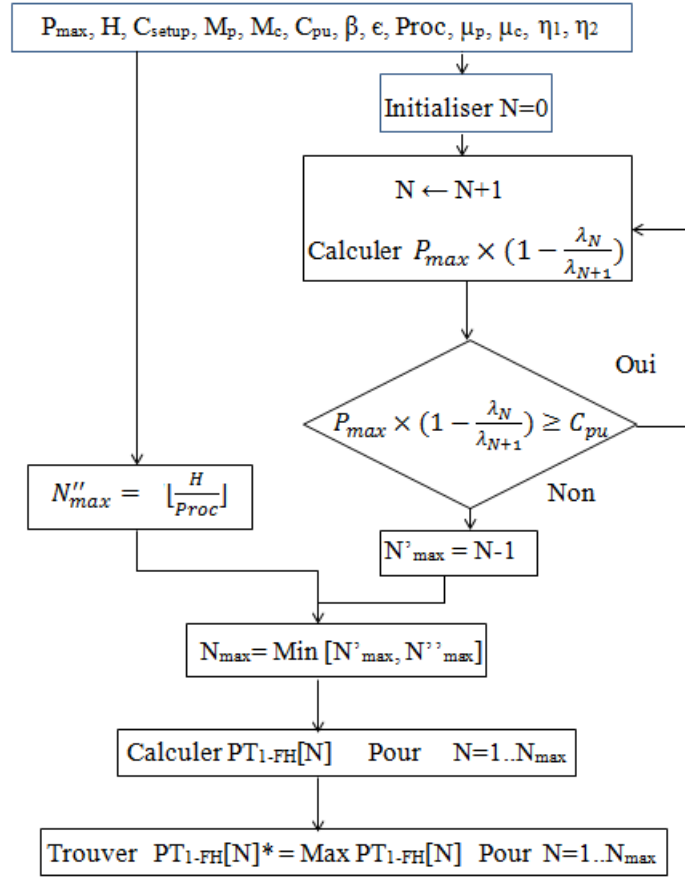


FIGURE 2.6 – Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produite avant d’effectuer une action de maintenance préventive (Horizon fini).

2.4 Etude numérique

Dans cette section, une étude numérique, basée sur un exemple industriel, a est présentée pour illustrer les deux modèles mathématiques (2.19) et (2.31) présentés dans la section précédente. L’objectif est de déterminer une stratégie optimale de maintenance en déterminant le nombre de lot à produire avant chaque action de maintenance préventive, en tenant compte de la dégradation du système de production et son impact sur le niveau de qualité des produits finis tout en maximisant le profit total par unité de temps. Les données d’entrée de la procédure numérique sont récapitulées dans le tableau (2.1). MATHEMATICA software a été utilisé pour déterminer un plan de maintenance optimal. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (2.2).

Selon le tableau (2.2), le plan de maintenance optimale pour un horizon infini consiste à effectuer une action de maintenance préventive parfaite après chaque 9 lots produit. Le résultat numérique obtenu confirme le lemme (2.1). En effet, le nombre de lot optimal à produire avant d’effectuer l’action de maintenance préventive $N1^*$ coïncide avec le dernier lot satisfaisant la contrainte qualité (Premier cas du lemme (2.1) : $N1^* = N_{max}$). En effet au-delà du 9^{me} lot le coût de production dépasse le coût de vente du lot selon notre modèle de régression par conséquent l’itération de recherche d’optimum est arrêté pour donner comme valeur optimal 9 lot et qui satisfait bien la contrainte de qualité.

Dans le cas d’un horizon fini, l’action de maintenance préventive sera effectuée chaque 5 lots. Durant l’horizon H, 12 actions de maintenance préventive seront effectuées. Contrairement au premier modèle, la solution optimale obtenue ne coïncide pas avec le dernier lot satisfaisant la contrainte qualité. En effet, la solution obtenue satisfait le deuxième cas du lemme (2.2) (Premier cas du lemme (2.2) ($N2^* \leq N_{max}$)).

TABLE 2.1 – Données numériques

Défaillance du système	$F(t)$: Loi de Weibull β : Paramètre de forme ϵ : Paramètre d'échelle
Durée des réparations	$g(t)$: Loi exponentielle η_2 : facteur d'échelle
Durée des maintenances préventives	$h(t)$: Loi exponentielle η_1 : facteur d'échelle
$P_{max}(mu)$	2000
$M_p(mu)$	450
$M_c(mu)$	2200
β	2
ϵ	100
Proc (tu)	3
$C_{pu}(mu)$	200
η_1	0.1
$\mu_p(tu)$	10
η_2	0.06
$\mu_c(tu)$	16.66
$C_{setup}(mu)$	500
H (tu)	360

TABLE 2.2 – Les résultats numériques des deux stratégies

Première stratégie (Horizon infini)	N1*	9	PT _{1-IH}	178.631
Deuxième stratégie (Horizon fini)	N2*	5	PT _{1-FH}	1961.37

2.4.1 Etude de sensibilité

Dans cette section, nous étudions la sensibilité du modèle par rapport à la variation du prix de vente (P_{max}) et le coût de setup (C_{setup})

- Variation du prix de vente (P_{max}) (Horizon infini)

Le prix de vente est un paramètre fixé en général par le marché concurrentiel. Afin de rester compétitif, il est important d'étudier l'effet de la variation du prix de vente sur la solution optimale. En effet, la diminution de ce prix résulte une décroissance du nombre optimal de lot à produire ($N1^*$) avant d'effectuer l'action de la maintenance préventive. Ceci est expliqué, en premier temps, par le fait que le nombre de lot maximal (N_{max}) diminue ce qui réduit la marge des solutions possibles. De plus, en diminuant le prix de vente, on produit moins de lot qui peuvent être vendus à un prix rentable tout en garantissant la qualité souhaitée par le client. Le résultat obtenu est présenté dans le tableau (2.3)

TABLE 2.3 – Etude de sensibilité de la variation du prix de vente (P_{max})

P_{max}	N1*	PT _{1-IH}
2000	9	178.631
1500	6	100.535

- Variation du coût de setup (C_{setup}) (Horizon fini)

L'augmentation du coût de setup résulte une augmentation au niveau du nombre de lot optimal à produire ($N2^*$) avant d'effectuer l'action de maintenance préventive. En effet, cette variation de coût nous oblige à effectuer moins de maintenance préventive et moins d'activité de setup durant l'horizon H et par conséquent produire plus de lots avant d'effectuer les activités de maintenance et de setup. Le résultat obtenu est présenté dans le tableau suivant (2.4).

TABLE 2.4 – Etude de sensibilité de la variation du coût de setup (C_{setup})

C_{setup}	N2*	PT _{1-FH}
500	5	1961.37
1500	8	1547.81

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une stratégie joignant simultanément les deux fonctions, la maintenance et la qualité, pour un horizon infini et fini. Notre étude est inspirée d'une problématique industrielle qui concerne un système de production dont la dégradation progressive impacte la qualité des produits finis. En effet, afin de mettre en équation la problématique industrielle, nous avons considéré un système de production constitué d'une seule machine, produisant un seul type de produit, sujette à des pannes aléatoire avec un taux de défaillance croissant. Cette dégradation progressive du système de production a une forte influence sur la qualité du produit fini. Pour mettre en évidence ce lien étroit entre l'état de la machine et la qualité des produits fini, nous avons développé une expression analytique du «*taux de régression de qualité du produit fini* » en relation direct avec le taux de défaillance de la machine. Dans ce chapitre, nous avons proposé deux modèles mathématiques permettant de déterminer un plan de maintenance optimal en tenant compte de la qualité de produits finis maximisant le profit total par unité de temps. Le profit estimé intègre le prix de vente et les différents coûts des maintenances préventive et corrective et le coût de production. Notre objective est d'optimiser ce profit afin de déterminer le nombre de lot optimal à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive. Une étude analytique a été faite afin de démontrer l'existence d'un maximum pour nos deux modèles mathématiques et une procédure numérique a été proposée afin de déterminer la solution optimale. Un exemple numérique, inspiré d'un cas industriel, a été présenté et une étude de sensibilité a été développée afin de valider les modèles analytiques proposés.

Face à la régression de la qualité des produits finis, certains industriels adoptent la stratégie de retouche. Cette stratégie peut coûter moins chère en la sous-traitant dans certains pays ou la main d'œuvre est moins chère. A la lumière de cette stratégie, nous proposons dans le chapitre suivant d'intégrer les actions de retouche à la place de vendre les produits à second choix. En effet, dans le prochain chapitre nous proposons des actions de retouches pour les produits du second choix et non-conformes afin d'améliorer la qualité des produits finis et les vendre avec des meilleurs prix. Notre objectif pour le chapitre suivant

sera alors de déterminer un plan de maintenance préventive en tenant compte de la qualité du produit fini ainsi que l'impact économique des actions de retouche tout en maximisant le profit total par unité de temps.

Chapitre 3

Développement d'une stratégie de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte l'impact économique des actions de retouche " rework activities".

Résumé

Dans ce présent chapitre, on continue toujours avec les stratégies de maintenance intégrée à la qualité, traitant l'impact de la dégradation du système de production sur la qualité des produits finis, mais en tenant compte d'une nouvelle contrainte opérationnelle : les actions de retouche « rework activities ». En effet, en modélisant une problématique industrielle, on considère un système de production constitué d'une seule machine sujette à des pannes aléatoires avec un taux de panne croissant et produisant des produits conformes (produits de meilleure qualité dits de premier choix et des produits de qualité inférieure dits de deuxième choix) et d'autres non-conformes. Dans ce présent chapitre, et face à la régression progressive de la qualité des produits finis, nous proposons de faire des actions de retouche afin d'améliorer, si c'est possible, la qualité des produits de second choix et non-conformes. Contrairement au chapitre précédent, où on fait face à la dégradation de la qualité des produits par des actions de maintenance préventive appliquées au système de production, un appel à des actions de retouche pour les produits de second choix et les produits non conformes pourrait être, sous certaines conditions, plus économique que d'arrêter le système de production pour des actions de maintenance préventive afin qu'il reprenne un cycle de production avec des produits de bonne qualité. Un modèle analytique faisant le lien mathématiquement entre le taux de défaillance du système de production, la qualité des produits finis et l'évolution des coûts de vente et de retouche en adéquation avec la perte de qualité du produit fini a été proposé. Une fonction objectif de profit total par unité de temps a été développée intégrant les prix de vente, les coûts de maintenance, de production et de retouche. L'objectif est de déterminer notre unique variable de décision, le nombre de lots à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite, maximisant le profit total par unité de temps. Une étude analytique est menée afin de prouver l'existence de la solution optimale. Un exemple numérique issu d'une problématique industrielle ainsi qu'une étude de sensibilité sont présentés afin d'illustrer les modèles analytiques développés.

3.1 Introduction

La concurrence industrielle incite les entreprises à développer des nouvelles stratégies pour garantir la qualité de leurs produits tout en minimisant les coûts. L'impact de l'état des systèmes de production sur la qualité des produits finis n'est plus à démontrer aujourd'hui dans l'industrie. Il est important, alors, de développer des nouvelles stratégies tenant compte de l'impact de la dégradation de l'état de la machine sur la qualité des produits finis. Dans le précédent chapitre, nous avons étudié une stratégie de maintenance intégrée à la qualité tenant compte de la dégradation de la machine et la qualité des produits finis sans tenir compte de la possibilité des activités de retouche. Par conséquent, on souhaite dans ce chapitre tenir compte d'un nouvel aspect opérationnel tel que les activités de retouche. En effet, dans ce chapitre, nous proposons d'effectuer des activités de retouche afin d'améliorer la qualité des produits de second choix et les produits jugés non-conformes et les vendre avec des prix appropriés dans le but de minimiser les coûts de perte de qualité et maximiser le profit total. L'idée derrière cette stratégie est qu'au lieu de rejeter les produits non-conformes et vendre les produits de second choix à un prix réduit, ou d'envisager rapidement des actions de maintenance préventive pour rétablir l'équipement à un état neuf pour avoir des produits de premier choix, on effectue des actions de retouche améliorant la qualité de ces produits finis afin de les vendre à un meilleur prix. Il est clair que le rapport entre les coûts de retouches et les coûts de vente ainsi que les coûts des actions de maintenance préventive impactera l'efficacité économique de la nouvelle stratégie proposée.

Deux approches différentes pour la stratégie avec retouche vont être étudiées. Pour la première approche, on suppose que tout type de non-qualité peut être corrigé et que tous les produits, après retouche, sont restaurés à la meilleure qualité et seront vendus au meilleur prix. Quant à la deuxième approche, on suppose qu'on ne peut pas corriger tout type de non-qualité et que seulement les produits de second choix seront restaurés à la meilleure qualité par contre les produits non-conformes seront soit rejetés soit améliorés tous dépend de leur niveau de qualité, c'est-à-dire que les produits non conformes peuvent subir des actions de retouche mais ne peuvent en aucun cas être vendus au prix des pièces de premier choix. Des modèles mathématiques et des procédures numériques itératives ont été développés dans le but de déterminer le plan de maintenance optimal pour chaque stratégie maximisant le profit total par unité de temps. Toujours notre plan de maintenance sera exprimé par le nombre de lots à produire avant chaque maintenance préventive.

Ce chapitre est organisé comme suit : une première partie est consacrée à décrire la problématique proposée et l'exemple industriel considéré. Dans cette partie, on présente également les hypothèses de travail ainsi que les notations utilisées. Les deux sections 3 et 4 sont dédiés à développer les quatre modèles analytiques. Une étude comparative entre les deux stratégies sans et avec retouche pour un horizon infini sera présentée afin de déterminer la stratégie la plus économique sous certaines conditions liées aux données industriels. Des exemples numériques et une étude de sensibilité, inspirés des cas industriels, seront présentés afin d'illustrer les modèles mathématiques proposés et étudier l'impact de la variation de quelques paramètres clé sur la solution optimale.

3.2 Description du problème et hypothèses de travail

3.2.1 Exemple industriel

Le cas industriel étudié concerne une entreprise dans le domaine du textile située à l'Afrique de nord et spécialisée à la confection des tenus de travail. L'industrie de textile inclut de très nombreux métiers tout au long de la chaîne de fabrication (Ex : fabricant de tissu, fabricant des produits finis, la logistique). Dans notre étude, nous nous concentrons sur l'activité de fabrication des produits finis. Cette activité compte plusieurs étapes depuis la commande du client jusqu'à l'expédition des produits finis. L'activité en considération dans ce chapitre est la confection des vêtements. Elle représente l'une des dernières étapes de la fabrication d'un produit textile. Il s'agit d'assembler et maintenir plusieurs pièces à l'aide de fils. Elle peut être réalisée avec une machine à coudre ou via des automates de confection. Afin de s'assurer que la qualité des produits finis respecte les standards et les exigences des clients, un contrôle qualité à

100% des produits finis est effectué à la fin de la ligne de couture.

A la fin de la ligne de couture, on distingue 3 types de produits finis :

1. Produits conformes de premier choix : des produits avec les bonnes dimensions et un bon aspect qualité et qui seront vendus au meilleur prix.
2. Produits de second choix : des produits avec les bonnes dimensions avec quelques problèmes de qualité et qui seront retouchés et vendus au meilleur prix.
3. 3) Produits non-conformes : des produits avec des mauvaises dimensions qui seront améliorés et vendus au meilleur prix (stratégie 1) ou à un prix correspondant au niveau de qualité obtenu (stratégie 2).

Dans le cas d'un produit de second choix, le produit sera renvoyé au personnel approprié afin de déterminer le défaut et le corriger pour restaurer le produit à la meilleure qualité. Dans le cas d'un produit non-conforme, on distingue deux différentes stratégies. Pour la première stratégie, on suppose que le défaut sera déterminé et la qualité du produit sera restaurée à la meilleure qualité et le vendre au meilleur prix et par conséquent, un lot sera vendu au meilleur prix P_{max} . Pour la deuxième stratégie, on suppose que la qualité du produit fini est restaurée à un niveau acceptable afin de le vendre, en « Outlet », à un prix réduit ou le rejeter si le niveau de qualité est tellement dégradé. Par conséquent, après une activité de retouche, un lot sera vendu à un prix de vente moyen P'_{max} représentant une fraction du prix de vente d'un lot dont les produits sont conformes P_{max} .

Avec la compétition croissante dans le secteur de l'industrie de textile, les entreprises sont confrontées à des défis énormes. Puisque la qualité des tenus de travail est influencée par l'état des machines à coudre, un plan de maintenance préventive approprié peut être une solution pour améliorer l'état de la machine et par conséquent, la qualité des produits finis.

Suite à l'exemple industriel décrit, cette étude a été conduite afin d'étudier la problématique de la maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de la dégradation du système de production ainsi que son impact sur la qualité du produit fini et la possibilité des activités de retouche. Notre objectif dans ce chapitre est de déterminer le plan de maintenance préventive optimal en calculant le nombre de lots optimal à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite en tenant compte de la fonction de dégradation de la machine et les coûts liés à la maintenance, vente des produits finis et retouche.

Une mise en équation du problème industriel décrit nous emmène à une description détaillée de la problématique étudiée et qui sera présentée dans la section suivante.

3.2.2 Description du problème

On considère un système de production constitué d'une seule machine et produisant un seul type de produit. Ce système est sujet à un processus de dégradation progressive avec un taux de défaillance strictement croissant suivant la loi de Weibull avec un paramètre de forme $\beta > 1$ et un paramètre d'échelle ϵ . On assume que la qualité des produits finis est parfaitement liée au processus de dégradation de la machine. De plus, on suppose que la dégradation de la machine représente la cause principale de la régression de la qualité des produits finis et toutes causes reliées, par exemple, à l'opérateur, matières premières ou autres sont négligeables. La dégradation progressive du système de production fait apparaître aléatoirement des produits dits de second choix et des produits non-conformes. On distingue alors 3 types de produits finis : Un premier type de produit fini dit « Des produits du premier choix » ayant la meilleure qualité et seront vendus avec le meilleur prix. Un deuxième type de produit fini dit « Des produits de second choix ». Ce sont des produits de qualité inférieure dont la dégradation n'impacte pas la fonction principale. Ce deuxième type de produit subit des actions de retouches afin d'améliorer le niveau de

qualité et les vendre au meilleur prix. Finalement, des produits non-conformes. Pour ce type de produit, on distingue deux différentes stratégies. Pour la première stratégie, on suppose que tous types de non-conformité peuvent être corrigés et par conséquent, la qualité de ces produits atteint la meilleure qualité et, par conséquent, ils seront vendus au meilleur prix. Cette hypothèse ne peut pas être appliquée à tous types de produits finis. En effet, dans certains cas, la qualité des produits non-conformes ne peut être que légèrement améliorée et dans d'autres cas, la qualité de ces produits ne peut pas être améliorée et par conséquent, ils seront rejetés. Ceci a fait l'objet de notre deuxième stratégie. En effet, on estime qu'il n'est pas toujours possible d'améliorer la qualité des produits non-conformes.

Dans le but de réduire le risque des défaillances et l'impact de la dégradation du système sur la qualité des produits finis et par conséquent sur le coût de retouche, une politique de maintenance préventive, de type bloc, à réparation minimale a été considérée. Les durées des actions de maintenance sont non négligeables. L'action de maintenance préventive, avec une durée moyenne exponentiellement distribuée de paramètre η_1 , est effectuée chaque N lots. Cette action de maintenance préventive est supposée être parfaite et le système de production est restauré à l'état neuf et la qualité du produit fini est restituée à la meilleure qualité. Les actions de maintenances correctives auront lieu en cas de panne avec une durée moyenne exponentiellement distribuée de paramètre η_2 . L'action de maintenance corrective est considérée comme minimale; l'état de dégradation de l'équipement est maintenu le même après une action de maintenance corrective contrairement aux actions de maintenance préventive. En effet, après une action de réparation minimale, le nombre moyen de panne reste inchangeable et l'état de système est restauré à celui avant la défaillance. Le problème décrit est illustré par les figures suivantes (3.1) et (3.2).

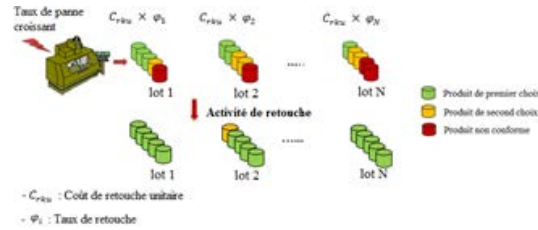


FIGURE 3.1 – Description de la stratégie 1

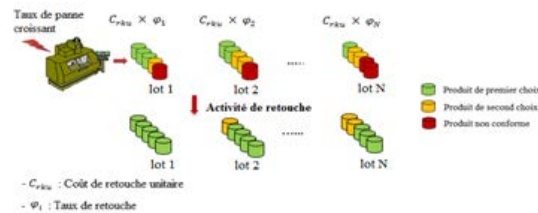


FIGURE 3.2 – Description de la stratégie 2

3.2.3 Expression analytique du taux de retouche φ_i

On rappelle que dans le premier chapitre, on a défini le taux de régression de qualité α_i qui représente le taux des produits conformes et les produits de second choix. Ce taux a été déterminé en utilisant la méthode de normalisation afin d'obtenir l'expression d'une fonction décroissante, mettant en évidence le lien entre la dégradation de la machine (taux de défaillance) et la qualité du produit fini (Prix de vente). Dans ce chapitre, on propose de faire des activités de retouches pour les produits de second choix et non-conformes en essayant d'améliorer leur qualité et les vendre avec les prix les plus appropriés. En se basant sur le principe du fait que le taux de retouche est en rapport avec le taux de perte de qualité et suivant la même logique de modélisation analytique, on définit alors un taux de retouche « φ_i » comme le complémentaire au taux de régression de qualité α_i défini dans le chapitre précédent. Analytiquement, on définit φ_i par :

$$\varphi_i = 1 - \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \quad (3.1)$$

Avec α_i représente le taux de régression de qualité et λ_i représente le taux de défaillance du système de production, après la production du i^{me} lot, suivant la loi de Weibull. On rappelle que le taux de défaillance λ_i est donné par l'expression suivante :

$$\lambda_i = \frac{\beta}{\epsilon} \times \left(\frac{N \times Proc}{\epsilon} \right)^{\beta-1} \forall i \in 1..N \quad (3.2)$$

On obtient, alors, l'expression analytique du taux de retouche « φ_i » exprimée par une fonction croissante, liée à la dégradation de la machine. En effet, la croissance du taux de défaillance λ_i implique la décroissance du taux de régression de qualité α_i , donné par l'expression (2.11), et par conséquent, la croissance du taux de retouche « φ_i ».

3.2.4 Les hypothèses de l'étude

Les hypothèses adoptées pour le développement du modèle en vue de déterminer la valeur optimale de N maximisant le profit total par unité de temps sur un horizon infini sont les suivantes :

- Le système de production est considéré comme un système monolithique .
- Les ressources, tant d'un point de vue humain que matériel, seront considérées comme suffisantes.
- En cas de panne du système de production, une maintenance corrective est effectuée immédiatement.
- Les actions de maintenance correctives seront considérées comme minimales et le seul but est de rétablir le système dans son état avant la panne.
- L'action de maintenance préventive est supposée parfaite et restaure le système à l'état neuf.
- Les différents coûts et les distributions de probabilité sont supposés être connus.
- La qualité des produits de second choix sera améliorée et les produits retouchés seront vendus au meilleur prix.
- La taille de lot est connue et constante.

Il est important de mentionner que ces hypothèses ne sont pas figées et évolueront dans le prochain chapitre de cette thèse.

3.2.5 Notations

Les notations suivantes sont utilisées :

H	: La durée de l'horizon.
T	: La durée moyenne d'un cycle.
T ₁	: La période supplémentaire entre la fin de la dernière action de maintenance préventive et la fin de l'horizon H.
PT _{1r-IH}	: Le profit total par unité de temps de la première stratégie pour un horizon infini.
PT _{1r-FH}	: Le profit total par unité de temps de la première stratégie pour un horizon fini.
PT _{2r-IH}	: Le profit total par unité de temps de la deuxième stratégie pour un horizon infini.

$PT_{2'r-FH}$	: Le profit total par unité de temps de la deuxième pour un horizon fini.
SP	: Le prix de vente total durant un cycle.
SP_{T_1}	: Le prix de vente total durant la période supplémentaire.
SP_i	: Prix du vente du $i^{ème}$ lot.
M_p	: Le coût moyen d'une action de maintenance préventive.
C_{pm}	: Le coût total des actions de maintenance préventive durant un cycle.
M_c	: Le coût moyen d'une action de maintenance corrective.
C_{cm}	: Le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle.
C_{cm1}	: Le coût total des actions de maintenance corrective durant la période supplémentaire T_1 .
$Proc$	: La durée moyenne de production d'un lot.
μ_p	: La durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
μ_c	: La durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
P_{max}	: Le prix de vente d'un lot 100% conforme.
C_{pu}	: Le coût unitaire de production
C_p	: Le coût total de production.
C_{p1}	: Le coût total de production durant la période supplémentaire T_1 .
C_{setup}	: Le coût de setup.
$F(t)$	: La fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système.
$g(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
$h(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
$\lambda(t)$	: Le taux de défaillance.
β	: Le paramètre de forme de la loi Weibull.
ϵ	: Le paramètre d'échelle de la loi Weibull.
η_2	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de réparations.
η_1	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de maintenance préventive.
Nb_f	: Le nombre moyen de panne durant un cycle T .
Nb_{f1}	: Le nombre moyen de panne durant la période supplémentaire T_1 , entre la dernière action de MP réalisée et la fin du cycle H .
Nb_{pm}	: Le nombre des actions de maintenance préventive durant un horizon H .
$[X]$	: La partie entière du réel X .

3.3 Etude de la première stratégie "Retouche appliquée à tous les produits qui ne sont pas du premier choix" pour les deux horizons infini et fini

3.3.1 Développement analytique de la première stratégie

• Cas de l'horizon infini

Le profit total par unité de temps de cette première stratégie (PT_{1r-IH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm}).
- Le coût de production (C_p)
- Le coût de retouche (C_{rk})

On rappelle que un cycle de production commence après une action de maintenance préventive parfaite et inclut la durée moyenne de production, la durée moyenne des actions de maintenance corrective et la durée moyenne d'une action de maintenance préventive. Par conséquent l'expression de la durée moyenne d'un cycle T est exprimée ainsi :

$$T = N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f \quad (3.3)$$

On rappelle que N représente le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive et qui est notre variable de décision, $Proc$ représente la durée moyenne de production d'un lot. μ_p et μ_c représentent respectivement la durée moyenne d'une action de maintenance préventive et corrective. Finalement, Nb_f représente le nombre moyen de panne durant un cycle T .

Le profit total par unité de temps pour cette première stratégie à horizon infini PT_{1r-IH} est déterminé en calculant la différence entre le prix de vente total et les différents coûts de production, de retouche et de maintenance divisée par la durée moyenne d'un cycle. On tiendra compte dans nos calculs analytiques de la durée moyenne de production ainsi que les durées moyennes des actions de maintenance. De plus, en se basant sur la réalité industrielle, on suppose que le prix de vente d'un lot doit toujours être supérieur à la somme de son coût de production et son coût de retouche. Cette contrainte sera prise en considération dans la résolution. Formellement,

$$C_{pu} + C_{rk,i} \leq SP_i \quad (3.4)$$

Avec SP_i représente le prix de vente du $i^{ème}$ lot, $C_{rk,i}$ représente son coût de retouche et C_{pu} son coût unitaire de production.

Dans cette première stratégie, on a supposé que la qualité de tous les produits de second choix et non-conformes sera améliorée et ces produits seront vendus au meilleur prix. L'inéquation (3.4) peut être écrite, alors, comme suit :

$$C_{pu} + C_{rk,i} \leq P_{max} \quad (3.5)$$

L'expression du profit total par unité de temps PT_{1r-IH} est donnée par :

$$PT_{1r-IH}(N) = \frac{SP - (C_{pm} + C_{cm} + C_p + C_{rk})}{T} \quad (3.6)$$

Avec

$$C_{pu} + C_{rk,i} \leq P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad (3.7)$$

Nous développons maintenant les différents coûts apparus dans les expressions (3.6) et (3.7).

- Prix total de vente (SP)

Pour cette première stratégie, on a supposé que tout type de régression de qualité peut être corrigé et que tous les produits de second choix et non-conformes peuvent être retouchés afin de les vendre au meilleur prix. Par conséquent, tous les lots seront vendus au meilleur prix P_{max} . Le prix de vente total est exprimé comme suit :

$$SP = N \times P_{max} \quad (3.8)$$

- Coût de retouche (C_{rk})

La dégradation progressive du système de production impacte directement la qualité des produits finis et par conséquent le coût de l'activité de retouche. On a défini un taux de retouche φ_i mettant le lien entre l'état du système de production modélisé par son taux de défaillance et le niveau de la qualité des produits finis modélisé par le prix de vente. Le coût de retouche d'un lot i est donné, alors, par :

$$C_{rk,i} = C_{rku} \times \varphi_i \quad \forall i \in 1..N \quad (3.9)$$

Durant un cycle, on produit N lots. Il est clair que le coût de retouche peut être exprimé par l'expression suivante :

$$C_{rk} = \sum_{i=1}^N C_{rk,i} = \sum_{i=1}^N C_{rku} \times \varphi_i \quad \forall i \in 1..N \quad (3.10)$$

En remplaçant le taux de retouche φ_i par son expression, Le coût de retouche est écrit comme suit ,

$$C_{rk} = \sum_{i=1}^N C_{rk,i} = \sum_{i=1}^N C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \right) \quad \forall i \in 1..N \quad (3.11)$$

- Coût total de production durant un cycle T (C_p)

Durant un cycle T, on produit N lots. Il est clair, alors, que le coût total de production peut être exprimé par l'expression suivante :

$$C_p = C_{pu} \times N \quad (3.12)$$

- Coût de la maintenance préventive durant le cycle T (C_{pm})

Durant un cycle T, une seule action de maintenance préventive sera effectuée à la fin du cycle pour restaurer le système à son état neuf. Donc, le coût de la maintenance préventive durant un cycle T est équivalent au coût unitaire moyen d'une action de maintenance préventive.

$$C_{pm} = M_p \quad (3.13)$$

- Coût des actions de maintenance corrective durant le cycle T (C_{cm})

Durant un cycle, on effectue (Nb_f) actions de maintenance corrective. Le coût total des réparations durant un cycle est le produit entre le coût moyen d'une action de maintenance corrective et le nombre moyen de réparation.

$$C_{cm} = M_c \times Nb_f \quad (3.14)$$

Dans ce travail, nous considérons que les durées des actions de maintenance préventive et corrective sont non-négligeables. Ainsi, en se basant sur les travaux de [Lim *et al.* 2005], le nombre moyen de panne (Nb_f) est donné par un produit de convolution entre la fonction de distribution de probabilités associée à la défaillance du système et densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective. Le nombre moyen de panne durant $[0, t]$ est, alors, exprimé comme suit :

$$Nb_f = -\text{Log}(1 - \int_0^t F(t-x) \times g(x) dx) \quad (3.15)$$

Notre objectif est de déterminer Le nombre moyen de panne durant $[0, N \times \text{Proc}]$. Le nombre moyen de réparation (Nb_f) est exprimé par :

$$Nb_f = -\text{Log}(1 - \int_0^t F(t-x) \times g(x) dx) \quad (3.16)$$

Avec

$F(t)$: la fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système.

$g(t)$: la densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective.

Notre objectif est de déterminer Le nombre moyen de panne durant $[0, N \times \text{Proc}]$. Le nombre moyen de réparation (Nb_f) est exprimé par :

$$Nb_f = -\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} F(N \times \text{Proc} - x) \times g(x) dx) \quad (3.17)$$

L'expression du coût total des actions correctives durant un cycle T est donnée par :

$$C_{cm} = M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} F(N \times \text{Proc} - x) \times g(x) dx)) \quad (3.18)$$

En utilisant les expressions (3.3), (3.8), (3.11), (3.12), (3.13) et (3.18), le profit total par unité de temps PT_{1r-IH} pour cette première stratégie pour un horizon infini est exprimé comme suit :

$$PT_{1r-IH}(N) = \frac{N \times P_{max} - (M_p + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{N \times \text{Proc} + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} (1 - e^{-(\frac{N \times \text{Proc} - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} - \frac{M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} (1 - e^{-(\frac{N \times \text{Proc} - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))}{N \times \text{Proc} + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} (1 - e^{-(\frac{N \times \text{Proc} - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \quad (3.19)$$

Avec

$$C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \right) + C_{pu} \leq P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad (3.20)$$

On rappelle que la condition (3.20) exprime le fait que la somme du coût de retouche d'un lot i et son coût de production ne doit pas dépasser son prix de vente.

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Pour cette politique, la seule variable de décision recherchée correspond au nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive (N). On obtient une fonction discrète à une seule variable de décision. Puisque notre fonction est discrète, on ne peut pas déterminer la solution optimale en utilisant la méthode traditionnelle ([Khatab *et al.* 2017]) qui consiste à déterminer les zéros du dérivé. Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive N sera obtenu alors à l'aide d'une procédure numérique. Le lemme suivant (lemme 3) a été développé afin de montrer l'existence d'un maximum global.

Lemme 3. *Il existe une solution optimale $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1r-IH} et $0 < N1^* \leq N_{max}$.*

Preuve. Puisque on a $C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} \leq P_{max} \quad \forall i \in 1..N$ et φ_i est une fonction croissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive est délimité par N_{max} . N_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité. Formellement,

$$C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_{N_{max}+1}}{\lambda_{N_{max}+2}} \right) + C_{pu} > P_{max}.$$

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = 1..N_{max}$. De plus, on a,

$$\begin{aligned} -PT_{1r-IH}[0] &= -\frac{M_p}{\mu_p} \\ -PT_{1r-IH}[1] &= \text{Constante} \\ -PT_{1r-IH}[N_{max}] &= \text{Constante} \end{aligned}$$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{1r-IH}^*[N1] = PT_{1r-IH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N1^* < N_{max}$ et $PT_{1r-IH}^*[N1] > PT_{1r-IH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1r-IH}^* et $0 < N1^* \leq N_{max}$

□

Le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ sera obtenue, alors, à l'aide d'une procédure numérique en adoptant la méthode d'itération complète.

Procédure numérique itérative

La résolution de cette politique de maintenance à l'aide d'une procédure numérique s'effectue en incrémentant le nombre de lot de $N=1$ jusqu'à l'apparition de la relation suivante :

$$C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} > P_{max}$$

La dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité correspond à la valeur de N_{max} . On calcule les différents profits pour $N=1$ jusqu'à $N=N_{max}$ et on détermine le profit maximal correspondant à $N1^*$. La procédure numérique utilisée pour déterminer le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N1^*$ est présentée par la figure suivante (Figure 3.3)

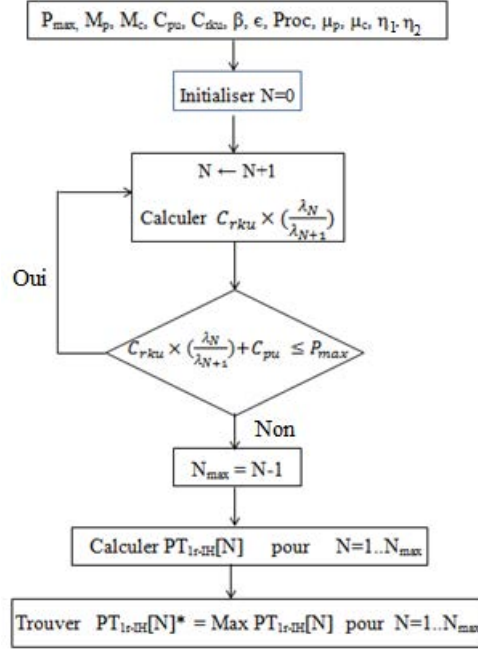


FIGURE 3.3 – Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon infini).

• Etude comparative entre les deux stratégies "sans et avec retouche" pour un horizon infini

Lemme 4. La stratégie avec retouche est plus économique que la stratégie sans retouche si le meilleur prix de vente « P_{max} » est plus grand que le coût unitaire de retouche « C_{rku} ».

Preuve. Pour comparer ces deux stratégies, il suffit de calculer la différence entre PT_{1r-IH} et PT_{1-IH} .

$$\begin{aligned}
 PT_{1r-IH}(N) - PT_{1-IH}(N) &= \frac{\sum_{i=1}^N P_{max} \times (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) - (M_p + C_{pu} \times N)}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
 &\quad - \frac{M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
 &\quad - \frac{N \times P_{max} - (M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
 &\quad + \frac{M_p + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}})}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \\
 &= \frac{(C_{rku} - P_{max})(\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}})}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Il est clair que $N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx)) > 0$ et $\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} > 0$.

Donc pour étudier le signe de $PT_{1r-IH}(N) - PT_{1-IH}(N)$, il suffit d'étudier le signe de $P_{max} - C_{rku}$

On distingue deux cas possibles :

- **Cas 1** : $P_{max} > C_{rku}$: La stratégie avec retouche est plus économique.
- **Cas 2** : $P_{max} < C_{rku}$: La stratégie sans retouche est plus économique.

□

On rappelle que P_{max} représente le meilleur prix de vente d'un lot et C_{rku} représente le coût unitaire de retouche. Inspiré d'une réalité industrielle, dans la majorité des cas, le prix de vente d'un lot est supérieur au coût de retouche. Donc, dans la majorité des cas, la stratégie de retouche est plus économique que la stratégie sans retouche.

• Cas de l'horizon fini

Le profit total par unité de temps de cette première stratégie pour un horizon fini ($PT_{1'r-FH}$) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm})
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm})
- Le coût de production (C_p)
- Le coût de retouche (C_{rk})
- Le coût de setup (C_{setup})

On rappelle que dans le cas d'un horizon fini, on ajoute un coût de setup, appelé aussi coût fixe de production. C'est un coût qui ne dépend pas de la quantité produite. Il peut être un coût de changement de lot ou un coût de réglage. Cette activité est effectuée après l'action de maintenance préventive (après la production de N lot). Ces actions de maintenance préventive et de setup seront effectuées qu'à la fin

d'un cycle complet T . Avec N_1 représente le nombre de lot à produire durant la période supplémentaire entre la fin de dernière action de maintenance préventive et la fin de l'horizon.

sivons le même raisonnement fait dans le chapitre 2 (section 2.3.2), on distingue alors deux cas possibles :

1) Cas 1 : La fin de la dernière action de maintenance préventive est effectuée avant la fin de l'horizon H .

Formellement, $T_1 = H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0$

Le profit total par unité de temps pour cette première stratégie $PT_{1r-FH_{cas1}}$ est donnée par :

$$PT_{1r-FH_{cas1}}(N) = \left(\frac{SP - (C_{pm} + C_{cm} + C_p + C_{rk} + C_{setup})}{T} \right) \times \left\lfloor \frac{H}{T} \right\rfloor + \frac{SP_1 - (C_{cm1} + C_{p1} + C_{rk})}{T_1} \quad (3.22)$$

Nous utilisons les mêmes expressions analytiques du nombre de lot produit durant la période complémentaire T_1 (N_1), du nombre moyen de panne durant T_1 (Nb_{f1}), du prix de vente des lots produits durant T_1 (SP_{T1}), du coût moyen des actions de maintenance corrective (C_{cm1}) et du coût de production des N_1 lots (C_{p1}) développées dans le chapitre 2 (section 2.3.2) et nous développons au dessous l'expression du coût de retouche C_{rk1} durant la période complémentaire T_1 .

• Le coût de retouche total C_{rk1} durant la période complémentaire T_1

$$C_{rk1} = \sum_{i=1}^{N_1} C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N_1+1}} \right) \quad (3.23)$$

En utilisant les expressions de SP , C_{cm} , C_p , C_{rk} et T développées dans la section précédente (cas de l'horizon infini), et les expressions de SP_1 , C_{cm1} , C_{p1} , T_1 et N_1 développées dans le chapitre précédent, le profit de total par unité de temps pour ce premier cas $PT_{1r-FH_{cas1}}$ est donné par :

$$\begin{aligned} PT_{1r-FH_{cas1}}(N) = & \left(\frac{N \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N * Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\ & - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \right) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \left. \right) \times \left\lfloor \frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right\rfloor \\ & + \frac{N_1 \times P_{max} - (M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N_1*Proc} F(N_1 * Proc - x) \times g(x) dx)))}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \\ & - \frac{C_{pu} \times N_1 + \sum_{i=1}^{N_1} C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N_1+1}} \right)}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Avec N_1 représente le nombre de lot à produire durant la période complémentaire T_1 et donné par l'expression suivante (3.25) :

$$N_1 = \left\lfloor \frac{T_1 - \mu_c \times Nb_{f1}}{Proc} \right\rfloor \quad (3.25)$$

2) Cas 2 : La fin de la dernière action de maintenance préventive coïncide avec la fin de l'horizon H .

Formellement, $T_1 = H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0$.

Le profit total par unité de temps pour ce deuxième cas $PT_{1r-FH_{cas2}}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} PT_{1r-FH_{cas2}}(N) = & \left(\frac{N \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N * Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\ & - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \right) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \left. \right) \times \left\lfloor \frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right\rfloor \end{aligned} \quad (3.26)$$

En utilisant la fonction indicatrice, le profit total par unité de temps pour cette stratégie à horizon fini PT_{1r-FH} peut être écrit sous la forme :

$$PT_{1r-FH} = PT_{1r-FH_{cas1}} \times 1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0)} + PT_{1r-FH_{cas2}} \times 1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0)} \quad (3.27)$$

Avec

$$1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0)} = 1 \text{ si } H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$$1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0)} = 1 \text{ si } H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Ainsi, le profit total par unité de temps pour cette stratégie PT_{1r-FH} est donné par :

$$\begin{aligned} PT_{1r-FH}(N) = & \left[\frac{N \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\ & - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \left. \right] \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right] \\ & + \frac{N_1 \times P_{max} - (M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N_1*Proc} F(N_1*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \\ & - \frac{C_{pu} \times N_1 + \sum_{i=1}^{N_1} C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}})}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \left. \right] \times 1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T \neq 0)} \\ & + \left[\frac{N \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\ & - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \left. \right] \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right] \times 1_{(H - \lfloor \frac{H}{T} \rfloor \times T = 0)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Avec

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{pu} \leq P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad (3.29)$$

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Pour cette politique, la seule variable de décision recherchée correspond au nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive. On obtient une fonction discrète à une seule variable de décision. Il est impossible, alors, de déterminer la solution optimale en utilisant la méthode traditionnelle qui consiste à déterminer les zéros du dérivé ([Khatab *et al.* 2017]). Le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive N sera obtenu, alors, à l'aide d'une procédure numérique. Le lemme suivant (Lemme 5) a été développé afin de montrer l'existence d'un maximum global.

Lemme 5. *Il existe une solution optimale $N1'^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1r-FH} et $0 < N1'^* \leq N_{max}$.*

Preuve. Puisque on a $(C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} \leq P_{max}) \forall i \in 1..N$ et φ_i est une fonction croissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive est délimité, d'une part, par N'_{max} . N'_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité. Formellement,

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_{N'_{max}+1}}{\lambda_{N'_{max}+2}}) + C_{pu} > P_{max} \quad (3.30)$$

D'autre part, cette problématique a été étudiée pour un horizon fini H . Par conséquent, le nombre de lot à produire est délimité par N''_{max} . N''_{max} correspond au nombre de lot qu'on peut produire durant un horizon H si on suppose qu'on a ni panne ni des actions de maintenance préventive. Formellement,

$$N''_{max} = \left\lfloor \frac{H}{Proc} \right\rfloor \quad (3.31)$$

Le nombre maximale à produire est limité, alors, d'une part par la contrainte de qualité et d'autre part par la longueur de l'horizon H . Le nombre de lot maximal qu'on peut produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive est donné par :

$$N_{max} = \text{Min}[N'_{max}, N''_{max}] \quad (3.32)$$

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = \{1..N_{max}\}$. De plus on a,

- $PT_{1r-FH}[0] = -\frac{M_p}{\mu_p}$
- $PT_{1r-FH}[1] = \text{Constante}$
- $PT_{1r-FH}[N_{max}] = \text{Constante}$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1'^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{1r-FH}^*[N2] = PT_{1r-FH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N1'^* < N_{max}$ et $PT_{1r-FH}^*[N2] > PT_{1r-FH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N1'^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{1r-FH}^* et $0 < N1'^* \leq N_{max}$

□

Procédure numérique itérative

La résolution de cette politique de maintenance à l'aide d'une procédure numérique s'effectue en incrémentant le nombre de lot de $N=1$ jusqu'à l'apparition de la relation suivante ($C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} > P_{max}$). La dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité correspond à la valeur de N'_{max} . Puis, On détermine N''_{max} en calculant la partie entière du rapport entre la longueur du l'horizon H et la durée moyenne de la production d'un lot ($Proc$) ($N''_{max} = \lfloor \frac{H}{Proc} \rfloor$). N_{max} correspond, alors, à la valeur minimale entre N'_{max} et N''_{max} ($N_{max} = \text{Min}[N'_{max}, N''_{max}]$). On calcule les différents profits pour $N=1$ jusqu'à $N=N_{max}$ et on détermine le profit maximal correspondant à $N1'^*$. La procédure numérique utilisée pour déterminer le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N1'^*$ est présentée par la figure suivante (Figure 3.4)

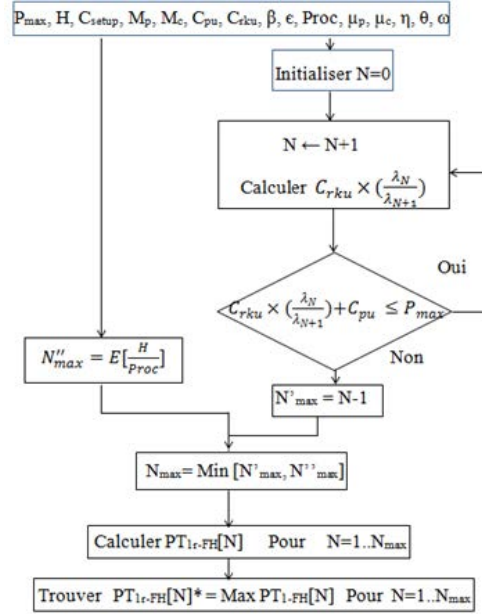


FIGURE 3.4 – Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon fini)

3.3.2 Etude numérique

Dans cette section, une étude numérique, basée sur un exemple industriel, a été présentée pour illustrer les deux modèles mathématiques présentés dans la section précédente par les équations (3.19) et (3.28). L'objectif est de déterminer une stratégie optimale de maintenance en tenant compte de la dégradation du système de production, la qualité du produit fini et l'impact économique des actions de retouche maximisant le profit total par unité de temps. Les données d'entrée de la procédure numérique sont récapitulées dans le tableau (3.2). Le logiciel MATHEMATICA software a été utilisé pour déterminer un plan de maintenance optimal. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (3.3).

Selon le tableau (3.3), le plan de maintenance optimal pour un horizon infini consiste à effectuer une action de maintenance préventive parfaite après chaque 25 lot produit et retouché. Le résultat numérique obtenu confirme le lemme 1. En effet, le nombre de lot optimal à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ satisfait le deuxième cas du lemme 1 ($N1^* < N_{max}$) avec un profit total par unité de temps de $PT_{1r-IH} = 412.603$. Ce résultat obtenu confirme aussi le lemme 2. En effet, en regardant les données numériques utilisées ($Crku < P_{max}$), la stratégie avec retouche est plus économique que la stratégie sans retouche. On rappelle que pour la stratégie sans retouche consiste à effectuer une action de maintenance préventive chaque 9 stratégies avec un profit total par unité de temps $PT_{1-IH} = 178.631$. Dans le cas d'un horizon fini, l'action de maintenance préventive sera effectuée chaque 4 lots. Durant l'horizon H , 16 actions de maintenance préventive seront effectuées. Conformément au premier modèle, la solution optimale obtenue satisfait le deuxième cas du lemme 3 (Premier cas du lemme 3 ($N1^* < N_{max}$)).

TABLE 3.2 – Données numériques

Défaillance du système	F(t) : Loi de Weibull β : Paramètre de forme ϵ : Paramètre d'échelle
Durée de réparation	g(t) : Loi exponentielle η_2 : facteur d'échelle
Durée des MP	h(t) : Loi exponentielle η_1 : facteur d'échelle
$P_{max}(mu)$	2000
$M_p(mu)$	450
$M_c(mu)$	2200
Proc (tu)	3
$C_{pu}(mu)$	200
η_1	0.1
$\mu_p(tu)$	10
η_2	0.06
$\mu_c(tu)$	16.66
$C_{rku}(mu)$	500
$C_{setup}(mu)$	500
H (tu)	360

TABLE 3.3 – Les résultats numériques de la première stratégie pour les deux horizons infini et fini

Horizon infini	N1*	25	PT _{1r-IH}	412.603
Horizon fini	N1'*	4	PT _{1r-FH}	4393.68

• **Etude numérique comparative entre les deux stratégies sans et avec retouche**

On rappelle que, pour une stratégie de maintenance préventive sans activités de retouche, le plan de maintenance préventive consiste à effectuer une action de maintenance préventive après chaque 9 lots produits avec un profit total $PT_{1-IH} = 178.361$ (Voir le tableau 3.4). Le tableau (3.5) présente les résultats obtenus pour la stratégie avec retouche pour différentes valeurs de coût de retouche C_{rku} . Les résultats obtenus confirment le lemme 4 présenté dans la section (3.3) de ce chapitre. En effet, dans le cas où le coût unitaire de retouche est plus petit que le prix de vente maximale, alors la stratégie avec retouche est plus économique (les trois premières lignes du tableau (3.5)). Mais, si l'activité de retouche devient plus coûteuse et dépasse le prix de vente maximal d'un lot alors, la stratégie sans retouche devient la plus économique (figure 3.5).

3.4. ETUDE DE LA DEUXIÈME STRATÉGIE « RETOUCHE APPLIQUÉE À UN POURCENTAGE DE PRODUITS QUI NE SONT PAS DU PREMIER CHOIX » POUR LES DEUX HORIZONS FINI ET INFINI

TABLE 3.4 – Les résultats numériques de la stratégie sans retouche pour un horizon infini

$N1^*$	PT_{1-IH}
9	178.631

TABLE 3.5 – Les résultats numériques de la stratégie avec retouche pour un horizon infini pour deux valeurs différentes de C_{rku}

$C_{rku}(< P_{max})$	500	$N1^*$	25	PT_{1r-IH}	412.603
$C_{rku}(< P_{max})$	1700	$N1^*$	24	PT_{1r-IH}	247.643
$C_{rku}(< P_{max})$	1900	$N1^*$	18	PT_{1r-IH}	217.381
$C_{rku}(> P_{max})$	2100	$N1^*$	6	PT_{1r-IH}	143.163

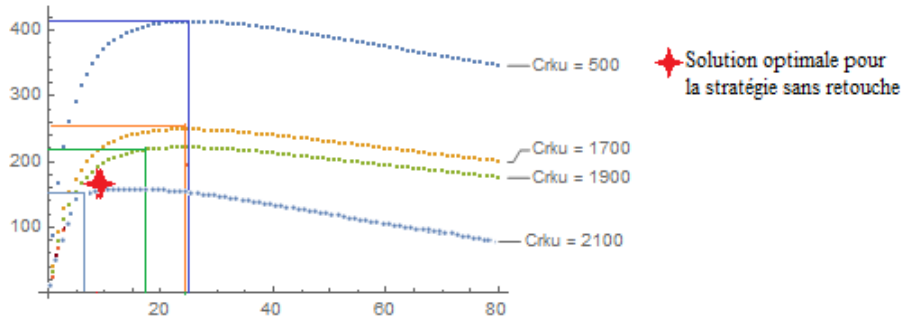


FIGURE 3.5 – Etude comparative entre les deux stratégies sans et avec retouche pour différentes valeurs des coûts de retouche

3.4 Etude de la deuxième stratégie « Retouche appliquée à un pourcentage de produits qui ne sont pas du premier choix » pour les deux horizons fini et infini

• Motivation

Dans la section précédente, on a étudié la stratégie avec retouche en considérant que tous les types de dégradation de qualité de produits finis peuvent être corrigés. En réalité, ramener tous les produits à la meilleur qualité n'est pas toujours possible. Pour ces raisons, nous proposons d'étudier dans la deuxième partie de ce chapitre une deuxième stratégie en considérant l'hypothèse que les activités de retouche ne peuvent pas améliorer la qualité de tous les produits de second choix et non-conformes. En effet, les produits de second choix seront restaurés à la meilleure qualité, en revanche, la qualité des produits non-conformes sera améliorée afin des les vendre à un prix adéquat au niveau de qualité atteint.

3.4.1 Développement analytique de la deuxième stratégie

• Cas de l'horizon infini

Le profit total par unité de temps de cette deuxième stratégie pour un horizon infini (PT_{2r-IH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm}).
- Le coût de production (C_p)
- Le coût de retouche (C_{rk})

Dans cette deuxième stratégie, on suppose qu'on ne peut pas retoucher tous les types de régression de qualité. En effet, on suppose que la qualité des produits de second choix est restaurée à la meilleure qualité dans le but d'être vendu au meilleur prix. Concernant les produits non-conformes, l'amélioration de la qualité des produits finis dépend de son niveau de qualité initial. La qualité des produits non-conformes peut être améliorée sans atteindre la meilleure qualité donc ils seront par la suite vendues à un prix approprié ou bien rejetés en cas de régression de qualité majeur. Par conséquent, les lots produits et retouchés ne peuvent pas être vendus au meilleur prix. On propose alors de vendre les produits à un prix moyen P'_{max} . P'_{max} représente une fraction du meilleur prix P_{max} . Formellement,

$$P'_{max} = \tau \times P_{max} \quad (3.33)$$

Avec τ une fonction positive strictement décroissante dépend du nombre de lot produit et retouché. Elle a été utilisée afin de tenir compte des lots dont la qualité ne peut pas être restaurée à la meilleure qualité et par conséquent, ces produits ne peuvent pas être vendus au meilleur prix. La croissance du nombre de lot produits et retouchés résulte l'augmentation du taux des produits non-conformes ce qui induit la diminution du τ en fonction des nombre de lots produits et retouchés. Nous proposons que τ est exprimé par une fonction exponentielle décroissante. Formellement,

$$P'_{max} = \tau \times P_{max} = e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad (3.34)$$

Avec N représente le nombre de lots à produire et à retoucher et ρ est un paramètre strictement positive.

• Prix de vente total (SP)

Durant un cycle, on produit N lots. Tous les lots seront vendus à un prix moyen de vente P'_{max} . Le prix de vente total est exprimé, alors, comme suit :

$$SP = N \times P'_{max} = N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad (3.35)$$

En utilisant les expressions de C_{pm} , C_{mc} , C_p , C_{rk} et T développées dans la section précédente, le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie pour un horizon infini $PT_{2r-IH}(N)$ est exprimé comme suit :

$$PT_{2r-IH}(N) = \frac{N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} - (M_p + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} - \frac{M_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times (-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta_2 \times e^{-\eta_2 \times x} dx))} \quad (3.36)$$

Avec

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad (3.37)$$

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Simultanément à la première stratégie, la seule variable de décision recherchée pour cette politique correspond au nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive (N). L'expression de la fonction objective proposée correspond à une fonction discrète à une seule variable de décision. Par conséquent, la méthode traditionnelle qui consiste à déterminer les zéros du dérivé ne peut plus être appliquée ([Khatab *et al.* 2017]). Le lemme suivant (lemme 4) a été développé afin de montrer l'existence d'un maximum global.

Lemme 6. *Il existe une solution optimale $N2^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{2r-IH} et $0 < N2^* \leq N_{max}$.*

Preuve. On a $C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max} \forall i \in 1..N$, φ_i une fonction croissante et $e^{-\rho \times N}$ est une fonction décroissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive est délimité par N_{max} . N_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte (3.37).

Formellement,

$$C_{rku} \times \frac{\lambda_{N_{max}+1}}{\lambda_{N_{max}+2}} + C_p > e^{-\rho \times (N_{max}+1)} \times P_{max} \quad (3.38)$$

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = \{1..N_{max}\}$. De plus on a,

- $PT_{2r-IH}[0] = -\frac{M_p}{\mu_p}$
- $PT_{2r-IH}[1] = \text{Constante}$
- $PT_{2r-IH}[N_{max}] = \text{Constante}$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N2^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{2r-IH}^*[N2] = PT_{2r-IH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N2^* < N_{max}$ et $PT_{2r-IH}^*[N2] > PT_{2r-IH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N2^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{2r-IH}^* et $0 < N2^* \leq N_{max}$ $\square$

Le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N2^*$ sera obtenue alors à l'aide d'une procédure numérique.

3.4.2 Procédure numérique itérative

La résolution de cette politique de maintenance à l'aide d'une procédure numérique s'effectue en incrémentant le nombre de lot de $N=1$ jusqu'à l'apparition de la relation suivante ($C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} > e^{-\rho \times N} \times P_{max}$). La dernière valeur satisfaisant la contrainte de qualité correspond à la valeur de N_{max} . Nous calculons les différents profits pour $N=1$ jusqu'à $N = N_{max}$ et on détermine le profit maximal correspondant à $N2^*$. La procédure numérique utilisée pour déterminer le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N2^*$ est présentée par la figure suivante (3.6).

• Cas de l'horizon fini

Le profit total par unité de temps de cette deuxième stratégie pour un horizon fini (PT_{2r-FH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm}).

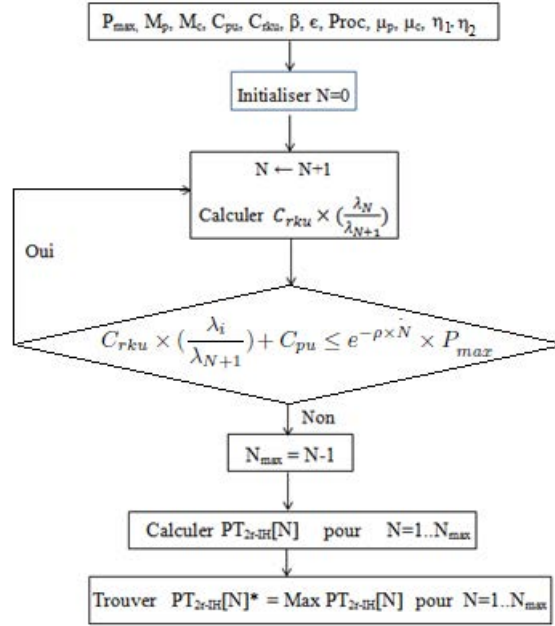


FIGURE 3.6 – Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon infini).

- Le coût de production (C_p)
- Le coût de retouche (C_{rk})
- Le coût de setup (C_{setup})

Nous suivons le même raisonnement fait dans le chapitre 2 (section 2.3.3). On rappelle qu'on distingue deux cas possibles :

1) Cas 1 : La fin de la dernière action de maintenance préventive est effectuée avant la fin de l'horizon H .

Formellement, $T_1 = H - E(\frac{H}{T}) \times T \neq 0$

Le profit total par unité de temps pour ce premier cas $PT_{2r-FHcas1}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
 PT_{2r-FHcas1}(N) = & \left(\frac{N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N \times Proc} F(N \times Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right. \\
 & - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \Big) \times \left[\frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right] \\
 & + \frac{N_1 \times e^{-\rho \times N_1} \times P_{max}}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \\
 & - \frac{M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N_1 \times Proc} F(N_1 \times Proc - x) \times g(x) dx)) + C_{pu} \times N_1 + \sum_{i=1}^{N_1} C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N_1+1}})}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

2) Cas 2 : La fin de la dernière action de maintenance préventive coïncide avec la fin de l'horizon H .
Formellement, $T_1 = H - E(\frac{H}{T}) \times T = 0$.

Le profit total par unité de temps pour ce premier cas $PT_{2r-FHcas2}$ est donné par :

$$PT_{2r-FH_{cas2}}(N) = \left(\frac{N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right) \times \left\lfloor \frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right\rfloor \quad (3.40)$$

En utilisant la fonction indicatrice, le profit total par unité de temps pour cette seconde stratégie PT_{2r-FH} peut être écrit sous la forme :

$$PT_{2r-FH} = PT_{2r-FH_{cas1}} \times 1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T \neq 0)} + PT_{2r-FH_{cas2}} \times 1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T = 0)} \quad (3.41)$$

Avec

$$1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T = 0)} = 1 \text{ si } H - E(\frac{H}{T}) \times T = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$$1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T \neq 0)} = 1 \text{ si } H - E(\frac{H}{T}) \times T \neq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Ainsi, En utilisant les expressions (3.39) et (3.40), le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie PT_{2r-FH} est donné par :

$$\begin{aligned} PT_{1-FH}(N) = & \left[\left(\frac{N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right) \times \left\lfloor \frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right\rfloor \right. \\ & + \frac{N_1 \times e^{-\rho \times N_1} \times P_{max}}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \\ & - \frac{M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N_1*Proc} F(N_1*Proc - x) \times g(x) dx)) + C_{pu} \times N_1 + \sum_{i=1}^{N_1} C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N_1+1}})}{N_1 \times Proc + \mu_c \times Nb_{f1}} \left. \right] \\ & \times (1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T \neq 0)}) \\ & + \left[\left(\frac{N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} - (M_p + M_c \times (-\log(1 - \int_0^{N*Proc} F(N*Proc - x) \times g(x) dx)))}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} - \frac{C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{setup}}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right) \times \left\lfloor \frac{H}{N \times Proc + \mu_p + \mu_c \times Nb_f} \right\rfloor \right] \\ & \times 1_{(H-E(\frac{H}{T}) \times T = 0)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Avec

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad (3.43)$$

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Similairement aux stratégies précédentes, la seule variable de décision recherchée, pour cette politique, correspond au nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N2'$. On obtient une fonction discrète à une seule variable de décision. Le lemme (Lemme 5) a été développé afin de montrer l'existence d'un maximum global.

Lemme 7. *Il existe une solution optimale $N2'^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{2r-FH} et $0 < N2'^* \leq N_{max}$.*

Preuve. On a $(C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max}) \forall i \in 1..N$, φ_i est une fonction croissante et $(e^{-\rho \times N} \times P_{max})$ est une fonction décroissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive est délimité, d'une part, par N'_{max} . N'_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte (3.43). Formellement,

$$(C_{rku} \times \varphi_{N'_{max}+1} + C_{pu} \leq e^{-\rho \times (N_{max}+1)} \times P_{max}) \quad (3.44)$$

D'autre part, cette problématique a été étudiée pour un horizon fini H. Par conséquent, le nombre de lot à produire est délimité par N''_{max} . N''_{max} correspond au nombre de lot qu'on peut produire durant un horizon H si on suppose qu'on a ni pannes ni des actions de maintenance préventive. Formellement,

$$N''_{max} = \left\lfloor \frac{H}{Proc} \right\rfloor \quad (3.45)$$

Le nombre maximal à produire et à retoucher est limité, alors, d'une part par la contrainte (3.43) et d'autre part par la longueur de l'horizon H. Le nombre de lot maximal qu'on peut produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive est donné par : $N_{max} = \min[N'_{max}, N''_{max}]$.

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = \{1..N_{max}\}$.

De plus on a,

- $PT_{2r-FH}[0] = -\frac{M_p}{\mu_p}$
- $PT_{2r-FH}[1] = \text{Constante}$
- $PT_{2r-FH}[N_{max}] = \text{Constante}$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N2'^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{2r-FH}'[N2'] = PT_{2r-FH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N2'^* < N_{max}$ et $PT_{2r-FH}^*[N2'] > PT_{2r-FH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N2'^*$ maximisant le profit total par unité de temps PT_{2r-FH}^* et $0 < N2'^* \leq N_{max}$ □

Le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N2'^*$ sera obtenue alors à l'aide d'une procédure numérique.

Procédure numérique itérative

La résolution de cette politique de maintenance à l'aide d'une procédure numérique s'effectue en incrémentant le nombre de lot de $N=1$ jusqu'à l'apparition de la relation suivante $(C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} > e^{-\rho \times N} \times P_{max})$. La dernière valeur satisfaisant la contrainte (3.43) correspond à la valeur de N'_{max} . Puis, On détermine N''_{max} en calculant la partie entière du rapport entre la longueur du l'horizon H et la durée moyenne de la production d'un lot (Proc) $(\lfloor H/Proc \rfloor)$. N_{max} correspond, alors, à la valeur minimale entre N'_{max} et N''_{max} . On calcule les différents profits pour $N=1$ jusqu'à $N = N_{max}$ et on détermine le profit maximal correspondant à $N2'^*$. La procédure numérique utilisée pour déterminer le nombre optimal de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer une action de maintenance préventive $N2'^*$ est présentée par la figure suivante (3.7)

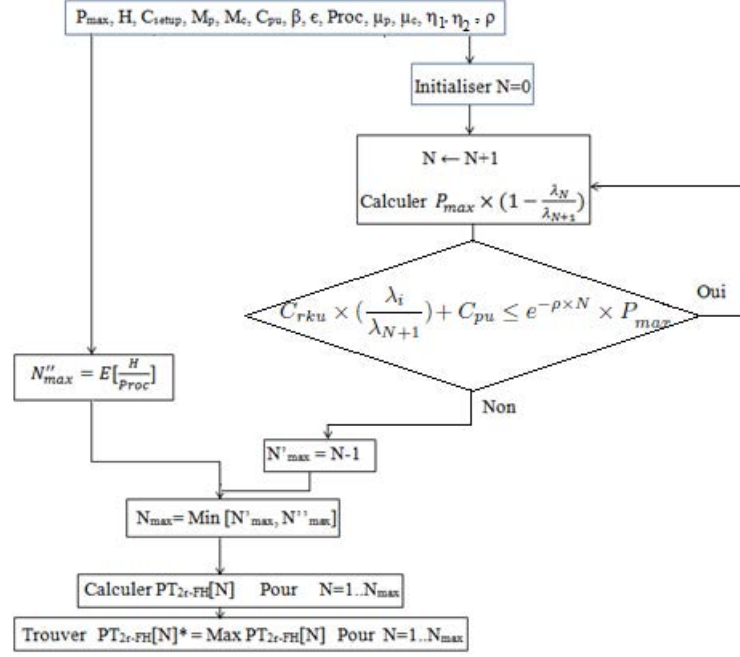


FIGURE 3.7 – Procédure numérique pour obtenir le nombre optimal de lot à produite avant d'effectuer une action de maintenance préventive (Horizon fini).

3.4.3 Exemple numérique

Dans cette section, une étude numérique, basée sur un exemple industriel, a été présentée pour illustrer les deux modèles mathématiques présentés dans la section précédente par les équations (3.36) et (3.42). L'objectif est de déterminer une stratégie optimale de maintenance en tenant compte de la dégradation du système de production, la qualité du produit fini et l'impact économique des actions de retouche maximisant le profit total par unité de temps. Les données d'entrée de la procédure numérique sont récapitulées dans le tableau (3.6). MATHEMATICA software a été utilisé pour déterminer un plan de maintenance optimal. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (3.7).

TABLE 3.6 – Données numériques

Défaillance du système	F(t) : Loi de Weibull β : Paramètre de forme ϵ : Paramètre d'échelle
Durée des réparations	g(t) : Loi exponentielle η_2 : facteur d'échelle
Durée des mainenances préventives	h(t) : Loi exponentielle η_1 : facteur d'échelle
$P_{max}(mu)$	2000
$M_p(mu)$	450
$M_c(mu)$	2200
β	2
ϵ	100
Proc (tu)	3
$C_{pu}(mu)$	200
η_1	0.1
$\mu_p(tu)$	10
η_2	0.06
$\mu_c(tu)$	16.66
ρ	0.005
$C_{rku}(mu)$	500
$C_{setup}(mu)$	500
H (tu)	360

Selon le tableau (3.7), le plan de maintenance optimal pour un horizon infini consiste à effectuer une action de maintenance préventive parfaite après chaque 16 lot produit et retouché. Le résultat numérique obtenu confirme le lemme (3). En effet, le nombre de lot optimal à produire et retouché avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ satisfait le deuxième cas du lemme (3) ($N1^* < N_{max}$) avec un profit total par unité de temps de $PT_{2r-IH} = 366.232$. Dans le cas d'un horizon fini, l'action de maintenance préventive sera effectuée chaque 4 lots. Durant l'horizon H, 16 actions de maintenance préventive seront effectuées. Conformément au premier modèle, la solution optimale obtenue satisfait le deuxième cas du lemme (5) (Premier cas du lemme (5) ($N'2^* < N_{max}$)).

TABLE 3.7 – Les résultats numériques de la première stratégie pour les deux horizons infini et fini

Horizon infini	N2*	16	PT _{2r-IH}	366.232
Horizon fini	N2*	4	PT _{2r-FH}	4534.41

3.4.4 Etude de sensibilité

Dans cette section, nous étudions la sensibilité des deux modèles proposés pour chaque stratégie par rapport à la variation de quelques paramètres. Nous étudions la variation de ces modèles par rapport aux trois paramètres suivant $R = \frac{P_{max}}{C_{rku}}$, M_c et C_{setup} .

- Variation du rapport entre P_{max} et C_{rku} ($R = \frac{P_{max}}{C_{rku}}$) (Horizon infini)

Le prix de vente (P_{max}) et le coût unitaire de retouche (C_{rku}) sont deux paramètres ayant un effet significatif sur la solution optimale. Il est intéressant, alors, d'étudier comment la variation du rapport entre Le prix de vente (P_{max}) et le coût unitaire de retouche (C_{rku}) affecte la solution optimale. En effet, l'augmentation de la valeur de ce rapport, en augmentant (P_{max}) ou en minimisant (C_{rku}), résulte l'augmentation de nombre de lot produit et retouché avant d'effectuer une action de maintenance préventive. Ceci est expliqué par le fait que, quand on a un coût de retouche qui n'est pas élevé ou un prix de vente plus élevé, on peut se permettre de produire plus de produit et retoucher plus de produit avant d'effectuer l'action de maintenance préventive. Le résultat obtenu est présenté dans le tableau suivant (3.8).

TABLE 3.8 – Variation du rapport entre P_{max} et C_{rku} ($R = \frac{P_{max}}{C_{rku}}$)

P_{max}	C_{rku}	R	N2'*	PT _{2r-IH}
1500	500	3	15	243.357
2000	500	4	16	366.232
2000	100	20	17	419.577

- Variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c) (Horizon infini)

La croissance du coût unitaire des actions de maintenance corrective résulte la diminution du nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive. En effet, si l'action de maintenance corrective devient coûteuse, il est avantageux d'effectuer l'action de maintenance le plus tôt possible afin d'éviter les pannes ce qui explique la diminution du nombre de lot à produire et retoucher avant d'effectuer les actions de maintenance préventive. Le résultat obtenu est présenté dans le tableau suivant (3.9).

TABLE 3.9 – Etude de sensibilité de la variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c)

M_c	N2'*	PT _{2r-FH}
2200	16	372.899
4000	15	369.433

- Variation du coût de setup (C_{setup}) (Horizon fini)

L'augmentation du coût de setup résulte une augmentation au niveau du nombre de lot optimal à produire et à retoucher (N'2*) avant d'effectuer l'action de maintenance préventive. En effet, cette variation de coût nous oblige à effectuer moins de maintenance préventive et moins d'activité de setup durant l'horizon H et par conséquent produire plus de lots avant d'effectuer les activités de maintenance et de setup. Le résultat obtenu est présenté dans le tableau suivant (3.11).

Une synthèse des résultats de l'étude de sensibilité a été présentée dans le tableau suivant (3.11) :

TABLE 3.10 – Etude de sensibilité de la variation du coût de setup (C_{setup})

C_{setup}	$N2'^*$	Nb_{pm}	PT_{2r-FH}
500	4	16	4534.41
1500	5	14	3874.5

TABLE 3.11 – Synthèse de l'étude de sensibilité

R	↗	$N2^*$	↗
M_c	↗	$N2^*$	↘
C_{setup}	↗	$N2'^*$	↗

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux stratégies de maintenance intégrée à la qualité tenant compte de la dégradation progressive du système de production et son influence sur la qualité des produits finis et la possibilité d'effectuer des actions de retouche afin d'améliorer la qualité des produits finis. En effet, par rapport au chapitre précédent, nous avons ajouté la possibilité d'effectuer des actions de retouche connu en littérature par « reworking activities ». L'objectif de ces activités de retouches sur les produits de second choix ou non conformes est d'améliorer leurs niveaux de qualité dans la mesure du possible afin de les vendre au prix des produits de premier choix ou au moins mieux que leur prix à leur état actuel. L'enjeu économique visé dans ce chapitre à travers l'appel aux activités de retouche et de voir si on prévoit des actions de maintenance préventive pour rétablir le système de production à un état neuf rapidement afin de redémarrer la production de pièce de premier choix ou adopter moins d'action de maintenance préventive mais en contre partie effectuer des activités de retouche sur les pièces de second choix et les pièces non conformes. Il est clair que le degré de dégradation de l'équipement et son impact sur la qualité des pièces produites ainsi que les coûts des actions de maintenance et de retouche jouent un rôle fondamental sur le plan de maintenance intégrée à la qualité optimal à établir. Une mise en équation de cette idée nous a permis de formuler le problème de ce chapitre. En effet, le système de production en considération est constitué d'une seule machine et produisant un seul type de produit. Cette machine est sujette à des pannes aléatoires avec un taux de panne strictement croissant. Cette dégradation progressive du système de productions impacte la qualité de produit fini ce qui résulte l'obtention de 3 types de produit selon leur niveau de qualité (produit de premier choix, produit de second choix et des produits non-conformes). La première stratégie consiste à supposer que tous types de non-conformité et de défaut de qualité peuvent être corrigés et par conséquent, après une action de retouche, les produits seront vendus au meilleur prix. Cette première stratégie a été étudiée pour les deux horizons infini et fini et une étude comparative a été effectué afin de déterminer laquelle des deux stratégies, sans ou avec des activités de retouche est la plus économique. Concernant la deuxième stratégie, on a relaxé l'hypothèse concernant l'amélioration de la qualité de tous les produits en supposant que seulement les produits de second choix peuvent être ramenés à la meilleure qualité par contre les produits non-conforme dépendent de leur niveau de qualité initial. Cette stratégie a été aussi étudiée, aussi, pour les deux horizons infini et fini. L'objectif de ces deux stratégies est de déterminer le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite ramenant le système de production à l'état parfait et les produits finis à la meilleure qualité tout en maximisant le profit total par unité de temps.

Dans toutes les stratégies de maintenance étudiées jusqu'à maintenant dans les deux chapitres 2 et 3, nous avons considéré que l'action de maintenance préventive est parfaite et ramène le système de production à l'état parfait et il recommence à produire des produits de meilleure qualité. En réalité,

ramener le système à l'état parfait n'est pas toujours possible. Pour ces raisons, nous proposons dans le 4^{ème} chapitre d'étudier le concept de la maintenance préventive imparfaite et l'effet de la dégradation progressive due à l'usage et le temps sur le coût des actions de maintenance préventive.

Chapitre 4

Développement des stratégies de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de l'effet économique des activités de retouche « rework activities » dans un contexte de stratégies de maintenance imparfaite et modifiée.

Résumé

Dans ce chapitre, on continue toujours à investiguer les stratégies de maintenance intégrée à la qualité tenant compte de l'impact économique des activités de retouche mais en considérant le concept de la maintenance imparfaite. L'originalité de ce chapitre consiste à investiguer l'impact technico-économique des activités de maintenance parfaites et/ou imparfaites sur le système de production. Par conséquent deux nouvelles stratégies de maintenance intégrée à la qualité ont été développées : La première, notée « stratégie de maintenance semi-parfaite », considère le concept de la maintenance imparfaite et son impact sur le nombre moyen de panne. La deuxième, notée « stratégie de maintenance modifiée », est basée sur l'évolution progressive des coûts des actions de maintenance au cours du temps afin de faire face à la dégradation progressive du système de production du à l'usage et le temps. Ces deux stratégies ont été détaillées dans ce chapitre. Deux modèles analytiques ont été présentées afin de mettre en équation les deux stratégies proposées. Un exemple numérique et une étude de sensibilité ont été présentés afin d'illustrer les modèles proposés.

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une stratégie de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de l'impact de la dégradation du système de production sur la qualité des produits finis ainsi que l'impact économique des actions de retouche « Reworking activities ». Nous avons considéré une stratégie de maintenance préventive, de type bloc, avec réparations minimales. Les actions de maintenance préventive effectuées sont considérées parfaites et permettent de restaurer le système de production à l'état parfait (« as good as new »).

Dans cette partie, nous proposons d'étendre notre étude faite dans le chapitre précédent en considérant d'une part, des actions de maintenance préventive imparfaite et leurs effets sur l'état de dégradation du système et d'autre part, des coûts de maintenance préventive croissants qui font face aux dégradations du système de production dues à l'usage et le temps. En effet, dans la première partie de ce présent chapitre, nous présentons une nouvelle stratégie de maintenance notée semi-parfaite qui combine les deux stratégies de maintenance parfaite et imparfaite. Notre nouvelle stratégie consiste à effectuer un certain nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite et finir par une action de maintenance préventive parfaite qui rétablit le système à un état neuf. D'autre part, on note que dans la littérature, l'impact des actions de maintenance imparfaite sur le système de production peut être exprimé par une croissance progressive du nombre moyen de panne entre deux actions de maintenance préventive imparfaite successives. Dans la deuxième partie de ce chapitre et en tenant compte de la dégradation progressive du système de production, nous avons proposé une nouvelle stratégie de maintenance notée « politique de maintenance modifiée » dans laquelle on considère un coût et une durée de maintenance préventive croissants au cours du temps pour faire face à l'évolution de la dégradation du système de production.

Par conséquent, ce chapitre est constitué de deux grandes parties. Chacune des deux parties sera consacrée à la description et la modélisation analytique de chacune des deux stratégies. Par la suite, une étude numérique des deux stratégies sera présentée à la fin de ce chapitre. Chaque stratégie est caractérisée par deux variables de décision qui sont d'une part le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite ou imparfaite, et d'autre part, le nombre de ces actions imparfaite/ou parfaite avant effectuer l'action de maintenance préventive parfaite ou de renouvellement du système de production selon la stratégie étudiée.

On considère le même système de production étudié dans les deux précédents chapitres. Le cas industriel étudié concerne toujours une entreprise de textile spécialisée dans la confection des tenus de travail. En effet, ce système de production est constitué d'une seule machine, produisant un seul type de produit et sujet à des pannes aléatoires avec un taux de pannes strictement croissant suivant la loi de Weibull avec un paramètre de forme $\beta > 1$ et un paramètre d'échelle ϵ . Cette dégradation progressive du système de production impacte directement la qualité des produits finis. En effet, on distingue trois types de produits finis :

- Les produits de premier choix : Ce sont des produits ayant la meilleure qualité et seront vendus au meilleur prix.
- Les produits de second choix : Ce sont des produits de qualité moyenne dont la dégradation n'impacte pas la fonction principale. Ce deuxième type de produit subit des actions de retouche afin d'améliorer sa qualité et le vendre au meilleur prix.
- Les produits non-conformes : ce sont des produits avec une qualité inférieure et des défauts de fabrication (dimensions erronées, mauvaises coutures...). Ces produits seront retouchés. Si la qualité de ces produits est améliorée, ils seront vendus à un prix approprié, sinon, ils seront rejetés. Par conséquent, les lots retouchés ne peuvent pas être toujours vendus au meilleur prix P_{max} . On propose, alors, de vendre les lots retouchés à un prix moyen P'_{max} qui représente une fraction du prix de vente maximal $P_{max}(P'_{max} = \tau \times P_{max})$ où τ est une fonction positive strictement décroissante qui dépend du nombre des lots produits et retouchés. Cette fonction a été ajoutée afin

de considérer les lots qu'on ne peut pas restaurer à la meilleure qualité et les vendre au meilleur prix. La croissance du nombre des lots produits et retouchés engendre l'augmentation du taux des produits non-conformes ce qui induit à la diminution du taux en fonction du nombre de lots produits et retouchés. Il est exprimé par une fonction exponentielle décroissante. Formellement,

$$\tau = e^{-\rho \times N}$$

et,

$$P'_{max} = \tau \times P_{max} = e^{-\rho \times N} \times P_{max}$$

Où N représente le nombre de lots produits et retouchés et ρ un paramètre strictement positif.

4.2 Etude de la première stratégie « Stratégie de maintenance préventive semi-parfaite »

4.2.1 Description du problème et hypothèses de travail

On considère un système de production sujet à un processus de dégradation avec un taux de panne strictement croissant. Cette dégradation progressive du système de production engendre la production des produits de second choix et des produits non-conformes. On rappelle que les produits de second choix et non-conformes seront retouchés afin d'améliorer leur qualité et les vendre à un prix qui correspond au niveau de qualité obtenu. Il est évident que l'activité de retouche dépend du niveau de dégradation de la qualité des produits. Vu la forte interdépendance entre l'état du système de production et la qualité des produits finis, l'activité de retouche et le coût associé (C_{rk}) dépendent de la dégradation progressive du système de production.

Afin de réduire le risque de défaillance et son impact sur la qualité des produits finis, une stratégie de maintenance préventive notée « semi-parfaite » à réparations minimales a été considérée. Les durées des actions correctives et préventives parfaites ou imparfaites sont non-négligeables. Une action de maintenance préventive imparfaite, possède un coût moyen et une durée moyenne constants. Une action de maintenance préventive parfaite possède également un coût moyen constant et une durée μ_{p1} exponentiellement distribuée de paramètre η_1 mais supérieurs à ceux de l'action imparfaite. Notre stratégie de maintenance « semi-parfaite » consiste à effectuer un nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite avant de finir par une action de maintenance parfaite qui rétablit le système à un état neuf. On note que les actions de maintenance imparfaite sont réalisées après chaque N lots produits. Suite à une panne une action de maintenance corrective avec réparation minimal est adoptée. Il est clair que le nombre de lots produits avant chaque action de maintenance préventive imparfaite ainsi que le nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite effectués avant la maintenance préventive parfaite représenteront nos variables de décisions.

Dans la littérature, plusieurs travaux ont modélisé l'impact des actions de maintenance préventive imparfaite par une augmentation du nombre moyen de panne après chaque action de maintenance imparfaite. On s'est inspiré de cette modélisation pour mettre en équation notre problématique. Par analogie, on en déduit que les coûts de retouche augmentent après chaque action de maintenance préventive imparfaite. En effet, après une action de maintenance préventive imparfaite, le nombre moyen de panne augmente d'une fraction de (e^α) par rapport à celui du précédent sous-cycle ([Gertsbakh2000]). De même, on suppose que le coût des activités de retouche augmente d'une fraction (e^α) après chaque action de maintenance préventive imparfaite. α est une constante positive représentant la constante de dégradation. La figure (4.1) illustre la variation du taux de défaillance selon cette stratégie. Après un certain nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite, une action de maintenance préventive parfaite de durée μ_{p1} sera effectuée à la fin du cycle. Après cette action de maintenance préventive parfaite, le système sera restauré à l'état « as good as new » et la qualité des produits finis sera restaurée à la meilleure qualité. En cas de panne, une action de maintenance corrective « réparation minimale » sera effectuée afin de restaurer

le système à son état avant la panne sans affecter la fonction du nombre moyen de panne associée au système de production . La durée des réparations suit la loi exponentielle avec une moyenne μ_c .

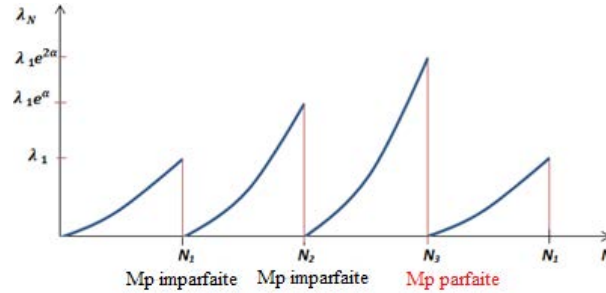


FIGURE 4.1 – Variation du nombre moyen de panne selon la première stratégie

On rappelle que, similairement aux études des stratégies développées dans les chapitres précédents, on suppose que la somme du coût total de production et de retouche d'un lot ne doit en aucun cas dépasser son prix de vente.

Le profit total par unité de temps est calculé en considérant la différence entre le prix de vente (SP) d'une part, et les coûts de maintenance, de production et de retouche d'autre part. Le tout est divisé par la durée moyenne d'un cycle incluant la durée moyenne de production, la durée moyenne des actions de maintenance préventive, parfaite et imparfaite, ainsi que la durée moyenne des actions de maintenance corrective.

Les hypothèses adoptées pour le développement du modèle en vue de déterminer les variables de décisions, qui sont le nombre de lots à produire avant chaque action de maintenance préventive imparfaite et le nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite à réalisés avant de finir avec l'action de maintenance préventive parfaite, sont les suivantes :

- Le système de production est considéré comme un système monolithique .
- Les ressources, tant d'un point de vue humain que matériel, seront considérées comme suffisantes.
- En cas de panne du système de production, une maintenance corrective est effectuée immédiatement.
- Les actions de maintenance corrective seront considérées comme minimales et le seul but est de rétablir le système dans son état avant la panne.
- L'action de maintenance préventive effectuée à la fin du cycle est supposée parfaite et restaure le système à l'état neuf.
- Les actions de maintenance préventive effectuées à la fin des sous-cycles sont considérées imparfaites.
- Les différents coûts et les distributions de probabilité sont supposés être connus.
- La qualité des produits de second choix sera améliorée et les produits retouchés seront vendus au meilleur prix.
- la qualité des produits non-conformes sera améliorée et les produits retouchés seront vendus selon le niveau de qualité atteint après l'activité de retouche.

- La taille des lots est connue et constante.

4.2.2 Notations

Les notations suivantes seront utilisées afin de développer le modèle analytique de cette première stratégie :

T	: La durée moyenne d'un cycle.
T'	: La durée moyenne d'un sous-cycle.
$PT_{3r-IH}[N, h]$	: Le profit total par unité de temps de la première stratégie pour un horizon infini.
$PT_{3r-IH}[N]$	: Le profit total par unité de temps de la première stratégie pour un horizon infini quand la deuxième variable de décision h est fixe.
$PT_{3r-IH}[h]$	: Le profit total par unité de temps de la première stratégie pour un horizon infini quand la deuxième variable de décision N est fixe.
SP	: Le prix de vente total durant un cycle.
SP_i	: Prix du vente du $i^{ème}$ lot.
M_p	: Le coût moyen d'une action de maintenance préventive imparfaite.
$M_{p,\omega}^h$	: Le coût unitaire d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée après h actions de maintenance préventive.
$C_{imparfaite}$	: Le coût total des actions de maintenance préventive imparfaite.
$C_{parfaite}$	: Le coût d'une action de maintenance préventive parfaite.
C_{pm}	: Le coût total des actions de maintenance préventive durant un cycle.
M_c	: Le coût moyen d'une action de maintenance corrective.
C_{cm}	: Le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle.
$Proc$	: La durée moyenne de production d'un lot.
μ_p	: La durée moyenne d'une action de maintenance préventive imparfaite.
μ_{p1}	: La durée moyenne d'une action de maintenance préventive parfaite.
μ_c	: La durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
P_{max}	: Le prix de vente d'un lot 100% conforme.
P'_{max}	: Le prix moyen de vente d'un lot après une activité de retouche.
C_{pu}	: Le coût unitaire de production
C_p	: Le coût total de production durant un cycle T .
C_{rk}	: Le coût total des actions de retouche.
$C_{r,i}^k$	: Le coût moyen des actions de retouche du $i^{ème}$ lot après la $k^{ème}$ action de maintenance préventive imparfaite.
C_{rk}^k	: Le coût moyen des actions de retouche du $k^{ème}$ sous-cycle.
C_{rku}	: Le coût unitaire d'une action de retouche
$F(t)$	: La fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système.
$g(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
$h(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
$\lambda(t)$	: Le taux de défaillance.
β	: Le paramètre de forme de la loi Weibull.
ϵ	: Le paramètre d'échelle de la loi Weibull.
η_2	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de réparations.
η_1	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de maintenance préventive imparfaite.
Nb_k	: Le nombre moyen de panne durant le $k^{ème}$ sous-cycle T' .
α	: La constante de dégradation liée à l'augmentation du nombre moyen de panne
φ_i	: Le taux de retouche du $i^{ème}$ lot.
f_{mp}	: La fréquence des actions de maintenance préventive parfaite (par lots produits)

4.2.3 Développement analytique de la première stratégie

Le profit total par unité de temps de cette première stratégie (PT_{3r-IH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm}).
- Le coût de production (C_p)
- Le coût de retouche (C_{rk})

On rappelle que le profit total par unité de temps PT_{3r-IH} de cette stratégie est calculé en déterminant la différence entre le prix de vente total et les différents coûts de production, maintenance (corrective et préventive parfaite et imparfaite) et le coût des actions de retouche divisée par la durée moyenne d'un cycle T . De plus, on suppose que la somme des actions de retouche d'un lot i ($C_{r,i}^k$) et son coût de production (C_p) ne doivent pas dépasser son prix de vente SP_i . Cette condition est exprimée par la contrainte (4.2). Le profit total par unité de temps PT_{3r-IH} de cette stratégie est donné par l'expression suivante (4.1) :

$$PT = \frac{SP - (C_{cm} + C_{pm} + C_p + C_{rk})}{T} \quad (4.1)$$

Avec

$$C_{r,i}^k + C_{pu} \leq SP_i \quad \forall i \in 1..N \quad \text{and} \quad k \in 1..h \quad (4.2)$$

Nous développons maintenant les différents coûts apparus dans les équations (4.1) et (4.2).

• Description et estimation analytique de la durée moyenne d'un cycle (T)

Un cycle de production commence après une action de maintenance préventive parfaite et inclut la durée de production totale, la durée moyenne des actions de maintenance corrective, la durée moyenne des actions de maintenance préventive imparfaite et la durée moyenne d'une action de maintenance préventive parfaite. Un cycle (T) contient h sous-cycle (T'). Le sous-cycle (T') inclut la durée moyenne de production de N lots et la durée moyenne des actions de maintenance corrective. A la fin de chaque sous-cycles (T'), une action de maintenance préventive imparfaite, de durée μ_p , sera effectuée. En revanche, à la fin du dernier sous-cycle (T'), une action de maintenance préventive parfaite, de durée μ_{p1} , sera effectuée. Pendant un cycle (T) à $(h-1)$ actions de maintenance préventive imparfaite et une action de maintenance préventive parfaite.

Un exemple de cette stratégie est illustrée par la figure (4.2) où $N=4$ (une action de maintenance préventive est réalisée après 4 lots produits) et $h=4$ (une action de maintenance préventive parfaite est effectuée après 3 actions de maintenance préventive imparfaite).

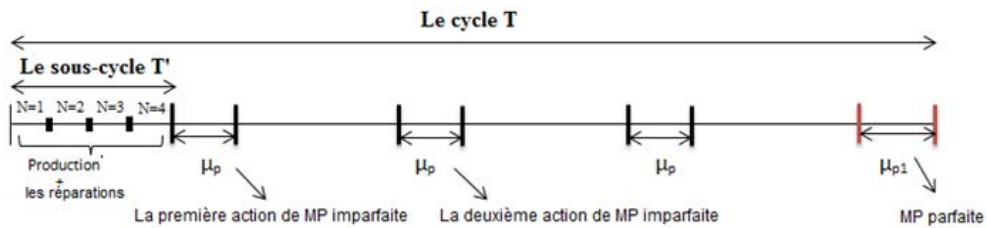


FIGURE 4.2 – Description de la première stratégie

L'expression de la durée moyenne d'un cycle T est donnée alors par l'expression suivante (4.3) :

$$T = \mu_{p1} + (h - 1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k) \quad (4.3)$$

On rappelle que N représente le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive et h représente quand l'action de maintenance préventive parfaite sera effectuée. Ces deux variables représentent nos variables de décision. $Proc$ représente la durée moyenne de production d'un lot. μ_p , μ_{p1} et μ_c représentent respectivement la durée moyenne d'une action de maintenance préventive imparfaite, parfaite et corrective. Finalement, Nb_k représente le nombre moyen de panne durant le $k^{ème}$ sous-cycle.

- Coût des actions de maintenance préventive durant un cycle T (C_{pm})

Durant un cycle, on effectue $(h-1)$ actions de maintenance préventive imparfaite et une seule action de maintenance préventive parfaite à la fin du cycle. On considère un coût d'une action maintenance préventive parfaite dépendant du nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite réalisées avant. En effet, le coût d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée après h actions de maintenance préventive imparfaite est plus élevé que le coût d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée après $(h-1)$ actions de maintenance préventive imparfaite. Afin de mettre en équation cette approche, on a supposé que le coût d'une action de maintenance préventive parfaite suit une suite géométrique de paramètre e^ω avec le premier terme est estimée à M_{p1} . Formellement, $M_{p,\omega}^h = M_{p,\omega}^{h-1} \times e^\omega$.

Avec

$M_{p,\omega}^h$: le coût d'une action de maintenance préventive effectuée après $(h-1)$ actions de maintenance préventive imparfaite.

$M_{p,\omega}^{h-1}$: le coût d'une action de maintenance préventive effectuée après $(h-2)$ actions de maintenance préventive imparfaite.

Ainsi on peut en déduire une équation générale (4.4) exprimant le coût de la maintenance parfaite durant un cycle :

$$C_{perfect} = M_{p1} \times e^{(h-1) \times \omega} \quad \forall h \geq 1 \quad (4.4)$$

Le coût total des actions de maintenance préventive est donné par la somme des coûts des actions de maintenance préventive parfaite et imparfaite. Il est donné par l'expression (4.5) suivante :

$$C_{pm} = C_{imperfect} + C_{perfect} \quad (4.5)$$

Avec

$$C_{imperfect} = M_p \times (h - 1) \quad (4.6)$$

Le coût total des actions de maintenance préventive (C_{pm}) est donné, alors, par :

$$C_{pm} = M_p \times (h - 1) + M_{p1} \times e^{(h-1) \times \omega} \quad (4.7)$$

- Coût des actions de maintenance corrective durant un cycle T (C_{cm})

Une action de maintenance corrective est effectuée en cas de défaillance avec une durée moyenne μ_c exponentiellement distribuée de paramètre η_2 . Nous estimons que ces actions de maintenance corrective sont minimales et ont pour but de restituer le système à son état avant la défaillance, connu dans la littérature sous « As bad as old » ce qui signifie « Aussi mauvais que vieux ». En effet, suite à une action

de réparation, le taux de défaillance reste inchangeable et l'état de système est restauré à celui avant la défaillance. Il est important de rappeler que le cycle (T) est divisé en h sous-cycles (T'). Le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle T est donné par :

$$C_{cm} = \sum_{k=1}^h M_c \times Nb_k \quad (4.8)$$

Avec Nb_k est le nombre moyen de panne durant le $k^{ème}$ sous-cycle.

Durant un cycle, on effectue (h-1) actions de maintenance préventive imparfaite. Ces actions de maintenance préventive imparfaite, effectuées à la fin d'un sous-cycle T', améliore l'état du système sans le ramener à l'état neuf. En d'autres termes, après une action de maintenance préventive imparfaite, le système de production est restauré à un état intermédiaire entre l'état parfait et l'état minimal. On rappelle que, selon cette première stratégie, les actions de maintenance préventive imparfaite impactent le nombre moyen de panne du système de production. Par conséquent, le nombre moyen de panne d'un sous-cycle 5T'est supérieur à celui du sous-cycle précédent. On considère le modèle de « réduction de l'intensité de défaillance » proposé par [Gertsbakh2000]. En effet, le nombre moyen de panne d'un sous-cycle (T') correspond au nombre moyen de panne du précédent sous-cycle multiplié par un facteur de dégradation e^α . Où α est une constante strictement positive ($\alpha > 0$). Par exemple, T'_k représente le $k^{ème}$ sous-cycle, si le nombre moyen de panne du premier sous-cycle T'_1 (correspondant à $k=1$) est égale à Nb_1 alors le nombre moyen de panne du deuxième sous-cycle T'_2 , après une action de maintenance préventive imparfaite, est égal à $Nb_2 = Nb_1 \times e^\alpha$. Et par conséquent, le nombre moyen de panne du troisième sous-cycle $T'_3 = Nb_2 \times e^\alpha = Nb_1 e^{2 \times \alpha}$. Alors, le nombre moyen de panne du $k^{ème}$ sous-cycle T'_k est donné par l'expression suivante :

$$Nb_k = Nb_1 \times e^{(k-1) \times \alpha}. \quad (4.9)$$

Dans notre travail, on considère que les durées des actions de maintenance préventive et corrective sont non-négligeables. Le nombre moyen de panne (Nb_f) est donné, alors, par un produit de convolution entre la fonction de distribution de probabilités associée à la défaillance du système et la densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective [Lim *et al.*2005]. Le nombre moyen de panne durant $[0, t]$ est, alors exprimé comme suit :

$$Nb_1 = -\text{Log}(1 - \int_0^t F(t-x) \times g(x) dx) \quad (4.10)$$

Notre objectif est de déterminer le nombre moyen de panne durant $[0, N \times \text{Proc}]$ du $k^{ème}$ sous-cycle. Le nombre moyen de réparation est exprimé par l'expression suivante :

$$Nb_k = [-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} F(N \times \text{Proc} - x) \times g(x) dx)] \times e^{(k-1) \times \alpha} \quad (4.11)$$

Avec $F(t)$ représente la fonction de distribution de probabilités associée à la défaillance du système avec un paramètre de forme $\beta > 1$ et paramètre d'échelle ϵ et $g(t)$ représente la densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective de paramètre η_2 . Alors, le nombre moyen de réparation durant $[0, N \times \text{Proc}]$ du $k^{ème}$ sous-cycle T'_k est donné par :

$$Nb_k = [-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} (1 - e^{-(\frac{N \times \text{Proc} - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta e^{-\eta x} dx)] \times e^{(k-1) \times \alpha} \quad (4.12)$$

Par conséquent, le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle T est exprimé par :

$$C_{cm} = \sum_{k=1}^h M_c \times [-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times \text{Proc}} (1 - e^{-(\frac{N \times \text{Proc} - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta e^{-\eta x} dx)] \times e^{(k-1) \times \alpha} \quad (4.13)$$

- Prix total de vente (SP)

Un cycle T inclut h sous-cycles T'. Ce dernier inclut la durée de production de N lots. Le prix de vente total est donné alors par :

$$\begin{aligned} SP &= \sum_{k=1}^h N \times P'_{max} \\ &= h \times N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Coût de retouche (C_{rk})

Durant un cycle T, on effectue (h-1) actions de maintenance préventive imparfaite et une seule action de maintenance préventive parfaite réalisée à la fin du cycle afin de restaurer le système de production à l'état neuf. Après une action de maintenance préventive imparfaite, le système de production est restauré à un état intermédiaire entre l'état parfait et minimal. Cette dégradation du système de production résulte une augmentation du nombre moyen de panne d'un sous-cycle à un autre. En effet, le nombre moyen de panne après une action de maintenance préventive imparfaite est égale au nombre moyen de panne du précédent sous-cycle multiplié par le facteur de dégradation e^α . Cette augmentation du nombre moyen de panne affecte directement le coût total des actions de retouche. Par conséquent, le coût des actions de retouche d'un sous-cycle T' sera égal au coût des actions de retouche du précédent sous-cycle multiplié par le facteur de dégradation e^α . Formellement,

$$C_{rk}^k = C_{rk}^{k-1} \times e^\alpha \quad (4.15)$$

On rappelle que le coût moyen des actions de retouche est obtenu en multipliant le coût unitaire des actions de retouche par le taux de retouche φ_i . On rappelle que le développement de l'expression de ce taux de retouche a été détaillé dans le chapitre (3) et représente le complémentaire du taux de régression de qualité α_i . Formellement φ_i est donné par :

$$\varphi_i = 1 - \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \forall i \in 1..N \quad (4.16)$$

Où α_i représente le taux de régression de qualité et λ_i représente le taux de défaillance du système de production, après la production du $i^{ème}$ lot, suivant la loi de Weibull. Le taux de défaillance λ_i est donné par l'expression suivante :

$$\lambda_i = \frac{\beta}{\epsilon} \times \left(\frac{i \times Proc}{\epsilon} \right)^{\beta-1} \quad \forall i \in 1..N \quad (4.17)$$

Le coût moyen des actions de retouche d'un lot i durant le $k^{ème}$ sous-cycle est exprimé alors comme suit :

$$C_{r,i}^k = C_{rku} \times \varphi_i \times e^{(k-1) \times \alpha} = C_{rku} \times \frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \times e^{(k-1) \times \alpha} \forall i \in 1..N \text{ et } \forall k \in 1..h \quad (4.18)$$

Par conséquent, le coût total des actions de retouche durant un cycle T est exprimé par :

$$C_{rk} = \sum_{k=1}^h \left(\sum_{i=1}^N C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}} \right) \right) \times e^{(k-1) \times \alpha} \quad (4.19)$$

- Coût de production total (C_p)

Durant un cycle T, on a h sous-cycle T' et durant un sous-cycle, N lots seront produits. Le coût total de production C_p est exprimé par :

$$C_p = \sum_{k=1}^h C_{pu} \times N = h \times C_{pu} \times N \quad (4.20)$$

Le profit total par unité de temps pour cette stratégie $PT_{3r-IH}[N, h]$ est donné par :

$$PT_{3r-IH}[N, h] = \frac{\sum_{k=1}^h N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} - (M_c \times Nb_k + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(k-1) \times \alpha})}{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)} - \frac{(h-1) \times M_p + M_{p1} \times e^{(h-1) \times \omega}}{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)} \quad (4.21)$$

Avec

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}) \times e^{(k-1) \times \alpha} + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad \text{et} \quad \forall k \in 1..h \quad (4.22)$$

Notre objectif est de déterminer, simultanément, le nombre de lots à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive imparfaite (N^*) et quand l'action de maintenance préventive parfaite doit avoir lieu (h^*) tout en maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}[N, h]$.

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Pour cette politique, les deux variables de décision recherchées correspondent au nombre N de lots à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive et quand l'action de maintenance préventive parfaite doit être effectuée (h). On obtient, alors, une fonction discrète à deux variables de décision. Deux propositions (lemme 4.1 et lemme 4.2) ont été développées afin de montrer l'existence d'une solution optimale $[N^*, h^*]$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}[N, h]$. La première proposition prouve l'existence d'une solution optimale N^* quand la deuxième variable de décision est fixe. Quant à la deuxième proposition montre l'existence d'une solution optimale h^* quand N est fixe.

Lemme 8. *Il existe une solution optimale N^* maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}[N]$ et $0 < N^* \leq N_{max}$.*

Preuve. Puisque $C_{rku} \times \varphi_i + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad \forall i \in 1..N$, φ_i une fonction croissante et $e^{-\rho \times N}$ est une fonction décroissante. Par conséquent, le nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive est délimité par N_{max} . N_{max} correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte (4.22).

Formellement,

$$C_{rku} \times \frac{\lambda_{N_{max}+1}}{\lambda_{N_{max}+2}} + C_{pu} > e^{-\rho \times (N_{max}+1)} \times P_{max} \quad (4.23)$$

Il est important de mentionner que le domaine de définition de notre fonction objective $D_f = \{1..N_{max}\}$. De plus on a,

- $PT_{3r-IH}[0] = -\frac{M_p + M_{p1}}{\mu_p}$
- $PT_{3r-IH}[1] = \text{Constante}$
- $PT_{3r-IH}[N_{max}] = \text{Constante}$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{3r-IH}^*[N] = PT_{3r-IH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N^* < N_{max}$ et $PT_{3r-IH}^*[N] > PT_{3r-IH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale N^* maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}^*[N]$ et $0 < N^* \leq N_{max}$ □

Lemme 9. Il existe une solution optimale h^* maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}[h]$ et,

$$\xi[N] < PT[h^*] < \frac{N_{max} \times P'_{max}}{\mu_p} \quad (4.24)$$

Avec

$$\xi[N] = \frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_2 + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_2} \quad (4.25)$$

Preuve. Quand on fixe la valeur de N, la fonction du profit total par unité de temps sera une fonction à une seule variable de décision notée $PT_{3r-IH}[h]$.

Une valeur de h est considérée optimale si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) $PT_{3r-IH}[h] > PT_{3r-IH}[h-1]$
- 2) $PT_{3r-IH}[h] > PT_{3r-IH}[h+1]$

La première condition implique :

$$PT_{3r-IH}[h] > \frac{\sum_{k=1}^{h-1} N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_k + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(k-1) \times \alpha})}{\mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)} - \frac{(h-2) \times M_p + M_{p1} \times e^{(h-2) \times \omega}}{\mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}$$

Qui peut être écrite comme suit :

$$PT_{3r-IH}[h] > PT_{3r-IH}[h] \times \frac{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}{\mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)} - \frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_h + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)} \times \frac{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}{\mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)} \quad (4.26)$$

Par conséquent,

$$PT_{3r-IH}[h] (1 - \frac{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}{\mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}) > -(\frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_h + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}) \times \frac{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}{\mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}$$

Cette inéquation(??) peut être simplifiée et exprimée comme suit :

$$PT_{3r-IH}[h] (1 - \frac{(B)}{(C)}) > -(A) \times \frac{(B)}{(C)} \quad (4.27)$$

Avec

$$(B) = \mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)$$

$$(C) = \mu_{p1} + (h-2) \times \mu_p + \sum_{k=1}^{h-1} (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)$$

$$(A) = \frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_h + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_{p1} + (h-1) \times \mu_p + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k)}$$

L'équation précédente peut être alors écrite comme suit :

$$PT_{3r-IH}[h]((C) - (B)) > -(A) \times (B)$$

Ce qui conduit à

$$-PT_{3r-IH}[h](\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_h) > -(A) \times (B) \quad (4.28)$$

On obtient alors,

$$PT_{3r-IH}[h](\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_h) < (A) \times (B) \quad (4.29)$$

On a $\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_h > 0$, alors, l'équation au-dessus peut être exprimée comme suit :

$$PT_{3r-IH}[h] < \frac{(A) \times (B)}{\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_h} \quad (4.30)$$

Remplaçons (A) et (B) par leurs expressions, on obtient,

$$PT_{3r-IH}[h] < \frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_h + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_h}$$

Puisque on a $M_c \times Nb_h + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p,w}^1 \times e^\omega > 0$
 et $N \times Proc + \mu_c \times Nb_h > 0$, l'équation (4.31) devient finalement :

$$PT_{3r-IH}[h] < \frac{N \times P'_{max}}{\mu_p} \quad (4.31)$$

Par conséquent,

$$PT_{3r-IH}[h] < \frac{N \times P_{max}}{\mu_p} \quad (4.32)$$

Un développement similaire a été fait pour la condition (2) d'optimalité et on obtient alors :

$$PT_{3r-IH}[h] > \frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_{h+1} + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_{h+1}}$$

Supposons,

$$F[h] = \frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_{h+1} + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) \times e^{(h-1) \times \alpha} + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_{h+1}} \quad (4.33)$$

Il est évident que $F[h]$ est une fonction décroissante selon h . En effet, on a $F[h+1] \leq F[h] \forall h \in [1, +\infty]$.

Et on a,

$$PT_{3r-IH}[h] > F[h] \quad \forall h \in [1, +\infty] \quad (4.34)$$

Par conséquent,

$$PT_{3r-IH}[h] > MaxF[h] \quad \forall h \in [1, +\infty] \quad (4.35)$$

Puisque $F[h]$ est une fonction décroissante sur $[1, +\infty]$, alors la valeur maximale de F est obtenue pour $h=1$.

Par conséquent,

$$PT_{3r-IH}[h] > F[h = 1] \quad \forall h \in [1, +\infty] \quad (4.36)$$

En combinant les deux inéquations (4.32) et (4.36), il existe alors une solution optimale h^* maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}[h]$.

Avec

$$\frac{N \times P'_{max} - (M_c \times Nb_2 + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + M_p + M_{p1} \times e^\omega)}{\mu_p + N \times Proc + \mu_c \times Nb_2} < PT_{3r-IH}[h^*] < \frac{N \times P_{max}}{\mu_p} \quad (4.37)$$

□

D'après les lemmes (8) et (9), il existe alors une solution optimale $[N^*, h^*]$, maximisant le profit total par unité de temps $PT_{3r-IH}[h]$.

4.3 Etude de la deuxième stratégie « Stratégie de maintenance préventive modifiée »

4.3.1 Description du problème et hypothèses de travail

Pour cette deuxième stratégie, on considère le même système de production sujet à un processus de dégradation avec un taux de défaillance strictement croissant dont la dégradation engendre la production de trois types de produits finis : premier choix, second choix, non conformes. Dans cette deuxième partie, on propose d'étudier une stratégie dite « stratégie de maintenance imparfaite modifiée ». En effet, on suppose que le système de production se dégrade avec l'usage et le temps. Donc, pour ramener le système de production à l'état parfait et avoir le même nombre moyen de panne pour tous les sous-cycles, une action de maintenance préventive parfaite avec un coût et une durée associés croissants au cours du temps sera effectuée. En effet, Le coût et la durée de ces actions de maintenance préventive d'un sous cycle augmente d'une fraction de (e^α) par rapport à celle effectuée à la fin du précédent sous-cycle proportionnellement à la dégradation du système de production. Où α est une constante positive représentant la constante de dégradation. Puisque le coût de l'activité de retouche dépend du niveau de dégradation de la qualité des produits finis qui dépend à son tour du niveau de dégradation de système de production. Par conséquent, pour tous les sous-cycles, on a le même coût des actions de retouche. Après un certain nombre d'actions de maintenance préventive ramenant le système de production à l'état parfait, une activité de renouvellement sera effectuée. En cas de panne, une action de maintenance corrective sera effectuée afin de restaurer le système à son état avant la panne sans affecter la fonction du nombre moyen de panne associée au système de production. La durée des réparations suit la loi exponentielle avec une moyenne μ_c . Pour cette stratégie, on assume que la somme du coût total de production et du retouche d'un sous-cycle ne doit en aucun cas dépasser son prix de vente et que le coût des actions de maintenance préventive parfaite ne doit pas atteindre le coût de renouvellement.

Le profit total par unité de temps est calculé en considérant la différence entre le prix de vente (SP), d'une part, et les coûts de maintenance, de production, de retouche et de renouvellement d'autre part. Le tout est divisé par la durée moyenne d'un cycle incluant la durée moyenne de production, la durée moyenne des actions de maintenance parfaite et les actions de maintenance corrective, ainsi que la durée

moyenne des activités de renouvellement.

Notre objectif est de déterminer les deux variables de décisions qui sont le nombre de lot à produire avant chaque action de maintenance préventive parfaite et le nombre d'action de maintenance préventive parfaite à réaliser avant de finir avec l'action de renouvellement.

Les hypothèses adoptées pour le développement du modèle en vue de déterminer ces variables de décisions sont les suivantes :

- Le système de production est considéré comme un système monolithique .
- Les ressources, tant d'un point de vue humain que matériel, seront considérées comme suffisantes.
- En cas de panne du système de production, une maintenance corrective est effectuée immédiatement.
- Les actions de maintenance corrective seront considérées comme minimales et le seul but est de rétablir le système dans son état avant la panne.
- L'action de renouvellement effectuée à la fin du cycle permet le renouvellement du système.
- Les actions de maintenance préventive effectuées à la fin des sous-cycles sont considérées parfaites.
- La durée des actions de maintenance préventive parfaite effectuées à la fin des sous-cycles est considérée croissante.
- Les différents coûts et les distributions de probabilité sont supposés être connus.
- La qualité des produits de second choix sera améliorée et les produits retouchés seront vendus au meilleur prix.
- la qualité des produits non-conformes sera améliorée et les produits retouchés seront vendu selon le niveau de qualité atteint après l'activité de retouche.
- La taille de lot est connue et constante.

4.3.2 Notations

Les notations suivantes seront utilisées afin de développer le modèle analytique de cette première stratégie :

T	: La durée moyenne d'un cycle.
T'	: La durée moyenne d'un sous-cycle.
$PT_{4r-IH}[N, h]$	: Le profit total par unité de temps de la deuxième stratégie pour un horizon infini.
$PT_{4r-IH}[N]$	: Le profit total par unité de temps de la deuxième stratégie pour un horizon infini quand la deuxième variable de décision h est fixe.
$PT_{4r-IH}[h]$	: Le profit total par unité de temps de la deuxième stratégie pour un horizon infini quand la deuxième variable de décision N est fixe.
SP	: Le prix de vente total durant un cycle.
SP_i	: Prix du vente du $i^{ème}$ lot.
M_p	: Le coût moyen d'une action de maintenance préventive imparfaite.
$M'_{p,k}$	: Le coût d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du $k^{ème}$ sous cycle.
α	: La constante de dégradation liée à l'augmentation du coût de l'action de maintenance préventive parfaite)

C_{pm}	Le coût total des actions de maintenance préventive parfaite.
M_c	: Le coût moyen d'une action de maintenance corrective.
C_{cm}	: Le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle.
C_{rw}	: Le coût de renouvellement
$Proc$	: La durée moyenne de production d'un lot.
μ_{p1}'	: La durée moyenne d'une action de renouvellement.
$\mu_{p,k}'$	: La durée moyenne d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du $k^{ème}$ sous cycle.
μ_c	: La durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
P_{max}	: Le prix de vente d'un lot 100% conforme.
P_{max}'	: Le prix moyen de vente d'un lot après une activité de retouche (stratégie 2).
C_{pu}	: Le coût unitaire de production
C_p	: Le coût total de production durant un cycle T.
C_{rk}	: Le coût total des actions de retouche.
$C_{rk,i}$	: Le coût moyen des actions de retouche du $i^{ème}$ lot.
C_{rku}	: Le coût unitaire d'une action de retouche
$F(t)$	: La fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système.
$g(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective.
$h(t)$	: La densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance préventive.
$\lambda(t)$	: Le taux de défaillance.
β	: Le paramètre de forme de la loi Weibull.
ϵ	: Le paramètre d'échelle de la loi Weibull.
η_2	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de réparations.
η_1	: Facteur d'échelle de la loi exponentielle correspondante à la durée des actions de maintenance préventive imparfaite.
Nb_f	: Le nombre moyen de panne durant un sous-cycle T'.
φ_i	: Le taux de retouche du $i^{ème}$ lot.
f_{mp}	: La fréquence des actions de maintenance préventive parfaite (par lots produits)

4.3.3 Développement analytique de la deuxième stratégie

Le profit total par unité de temps de cette deuxième stratégie (PT_{4r-IH}) inclut :

- Le prix de vente total (SP)
- Le coût total de la maintenance corrective (C_{cm}).
- Le coût total de la maintenance préventive (C_{pm})(parfaite).
- Le coût de production (C_p)
- Le coût de retouche (C_{rk})
- Un coût de renouvellement (C_{rw})

On rappelle que le profit total par unité de temps PT_{4r-IH} de cette stratégie est calculé en déterminant la différence entre le prix de vente total et les différents coûts de production, maintenance (corrective et préventive), le coût des actions de retouche et le coût de renouvellement divisée par la durée moyenne d'un cycle T. De plus, on suppose, d'une part, que la somme du coût des actions de retouche d'un lot i ($C_{rk,i}$) et son coût de production (C_p) ne doit dépasser en aucun cas son prix de vente SP_i et, d'autre part, le coût d'une action de maintenance préventive parfaite ($M'_{p,k}$) ne doit en aucun cas dépasser le coût de renouvellement. Ces deux conditions sont exprimées, successivement, par les deux contraintes (4.39) et (4.40). Le profit total par unité de temps PT_{4r-IH} de cette stratégie est donné alors par l'expression suivante :

$$PT_{4r-IH} = \frac{SP - (C_{pm} + C_{cm} + C_p + C_{rk} + C_{rw})}{T} \quad (4.38)$$

Avec

$$C_{rk,i} + C_{pu} \leq SP_i \quad \forall i \in 1..N \quad (4.39)$$

et

$$M'_{p,k} \leq C_{rw}^k \quad \forall k \in 1..h \quad (4.40)$$

Nous développons maintenant les différents coûts apparus dans les équations (4.38), (4.39) et (4.40)

• Description et estimation analytique de la durée moyenne du cycle (T)

Un cycle de production commence après une action de renouvellement et il inclut la durée moyenne de production, la durée moyenne des actions de maintenance corrective, la durée moyenne des actions de maintenance préventive et la durée moyenne de l'activité de renouvellement. Un cycle T contient h sous-cycles (T'). Le sous-cycle inclut la durée moyenne de production de N lots et la durée moyenne de réparation. A la fin des (h-1) premiers sous-cycles T', une action de maintenance préventive parfaite, ramenant le système à l'état neuf, sera effectuée. Par conséquent, puisque notre système subit une dégradation progressive due à l'usage et le temps, on suppose que la durée de ces actions de maintenance préventive parfaite est croissante et elle correspond à la durée du précédent sous-cycle multiplié par le même facteur de dégradation e^α défini dans la section précédente. Avec α est une constante strictement positive ($\alpha > 0$). En effet, si la durée d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du premier sous-cycle T'_1 (correspondant à $k=1$) est égale à $\mu'_{p,1}$ alors la durée de l'action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du deuxième sous-cycle T'_2 , est égal à $\mu'_{p,2} = \mu'_{p,1} \times e^\alpha$. Afin de mettre en équation cette approche, on a supposé que la durée d'une action de maintenance préventive parfaite suit une suite géométrique de paramètre e^α avec un premier terme estimé à μ'_p . Formellement, $\mu'_{p,k} = \mu'_{p,k-1} \times e^\alpha$

Avec

$\mu'_{p,k}$: la durée d'une action de maintenance préventive parfaite effectué après le $k^{ème}$ sous-cycle.

$\mu'_{p,(k-1)}$: la durée d'une action de maintenance préventive parfaite effectué après le $(k-1)^{ème}$ sous-cycle.

Par conséquent, la durée d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du $k^{ème}$ sous-cycle T'_k est donnée par l'expression suivante :

$$\mu'_{p,k} = \mu'_p \times e^{(k-1) \times \alpha} \quad (4.41)$$

En revanche, à la fin du dernier sous-cycle T', une action de renouvellement de durée μ_{p1} , sera effectuée. Cette stratégie, dite « stratégie de maintenance imparfaite modifiée » est illustrée par la figure (4.3) dans laquelle on présente un exemple pour $N=4$, $h=4$ et le nombre des actions de maintenance préventive imparfaite = 4.

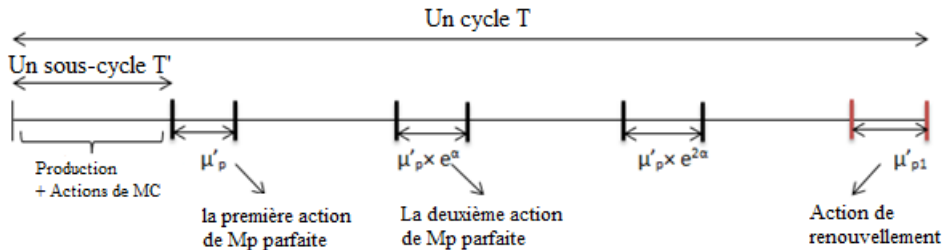


FIGURE 4.3 – Description de la deuxième stratégie.

L'expression de la durée moyenne d'un cycle T est donnée alors par l'expression suivante :

$$T = \mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h (N \times Proc + \mu_c \times Nb_k) + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} \quad (4.42)$$

- Coût des actions de maintenance préventive durant un cycle T (C_{pm})

Durant un cycle, on effectue (h-1) actions de maintenance préventive parfaite. On assume que le système de production considéré se dégrade par l'usage et par le temps. Ce qui explique qu'il se dégrade d'un sous-cycle à un autre. Par conséquent, on a un coût de maintenance préventive parfaite qui augmentent d'un sous-cycle à un autre. En effet, le coût d'une action de maintenance préventive parfaite d'un sous-cycle (T') correspond à celui du précédent sous-cycle multiplié par le même facteur de dégradation e^α défini dans la section précédente. Avec α est une constante strictement positive ($\alpha > 0$). Par exemple, T'_k représente le $k^{ème}$ sous-cycle, si le coût d'une action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du premier sous-cycle T'_1 (correspondant à $k=1$) est égale à M'_{p1} alors le coût de l'action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du deuxième sous-cycle T'_2 , est égal à $M'_{p,2} = M'_{p,1} \times e^\alpha$. Et par conséquent, le coût de l'action de maintenance préventive parfaite effectuée à la fin du troisième sous-cycle $M'_{p,3} = M'_{p,2} \times e^\alpha = M'_{p,1} \times e^{2 \times \alpha}$. Formellement, $M'_{p,k} = M'_{p,(k-1)} \times e^\alpha$.

Alors, l'équation générale du coût d'une action de maintenance préventive effectuée à la fin du $k^{ème}$ sous-cycle T'_k est donnée par l'expression suivante :

$$M'_{p,k} = M'_{p1} \times e^{(k-1) \times \alpha} \quad (4.43)$$

Le coût total des actions de maintenance préventive parfaite durant un cycle T est obtenu en déterminant la somme des coûts des différentes actions de maintenance préventive parfaite effectuées à la fin des (h-1) premiers sous-cycles. Il est donné, alors, par :

$$C_{pm} = \sum_{k=2}^h M'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} \quad (4.44)$$

- Coût des actions de maintenance corrective durant un cycle T (C_{cm})

Les actions de maintenance préventive seront effectuées en cas de défaillance avec une durée moyenne μ_c exponentiellement distribuée de paramètre η_2 . Ces actions sont supposées minimales et permettent de restaurer le système à son état avant la défaillance sans changer son taux de défaillance. On rappelle que le cycle T est divisé à h sous-cycles T' . Le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle T est donné par :

$$C_{cm} = \sum_{k=1}^h M_c \times Nb_k \quad (4.45)$$

Avec Nb_k est le nombre moyen de panne durant le $k^{ème}$ sous-cycle. Durant cette stratégie, on a le même nombre moyen de panne pour tous les sous-cycles T' .

Formellement,

$$Nb_k = Nb_f \quad \forall k \in 1..h$$

Par conséquent, le coût total des actions de maintenance corrective est donné par :

$$C_{cm} = h \times M_c \times Nb_f \quad (4.46)$$

Similairement aux précédentes stratégies, Les durées des actions de maintenance corrective sont considérées non-négligeables. Le nombre moyen de panne est exprimé, alors, par un produit de convolution entre la fonction de distribution de probabilité associée à la défaillance du système et densité de probabilité associée à la durée moyenne d'une action de maintenance corrective ([Lim *et al.* 2005]). Par conséquent, le coût total des actions de maintenance corrective durant un cycle T est exprimé par :

$$C_{cm} = h \times M_c \times [-\text{Log}(1 - \int_0^{N \times Proc} (1 - e^{-(\frac{N \times Proc - x}{\epsilon})^\beta}) \times \eta e^{-\eta x} dx)] \quad (4.47)$$

- Prix de vente total (SP)

Un cycle T inclut h sous-cycles T'. Ce dernier inclut la durée de production de N lots. Conformément à la première stratégie, les différents lots produits et retouchés seront vendus à un prix moyen P'_{max} représentant une fraction du prix de vente d'un lot 100% conforme (P_{max}). Le prix de vente total est donnée alors par :

$$SP = \sum_{k=1}^h N \times P'_{max} \quad (4.48)$$

$$= h \times N \times e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad (4.49)$$

- Coût total des actions de retouche (C_{rk})

Dans un cycle, on a h sous-cycles et on doit effectuer des actions de retouches pour les produits de second choix et les produits non-conformes afin d'améliorer leur qualité et les vendre à des prix qui correspondent au niveau de la qualité obtenu. Selon cette stratégie, on a le même nombre moyen de panne pour tous les sous-cycles. Puisque, l'activité de retouche est impactée directement par la dégradation du système de production, par conséquent, on a le même coût de retouche pour tous les sous-cycles. Le coût de retouche pour chaque sous-cycle T'est obtenu en multipliant le coût unitaire de retouche par le taux de retouche φ_i .

Le taux de retouche φ_i est donné par :

$$\varphi_i = \frac{\lambda_i}{\lambda N + 1} \quad (4.50)$$

Par conséquent, le coût total des actions de retouche est obtenu par :

$$\begin{aligned} C_{rk} &= \sum_{k=1}^h \sum_{i=1}^N C_{rku} \times \varphi_i \\ &= \sum_{k=1}^h \left(\sum_{i=1}^N C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda N + 1} \right) \right) \\ &= h \times \sum_{i=1}^N C_{rku} \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda N + 1} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

- Coût de production total (C_p)

Durant un cycle T, on a h sous-cycles T' et durant un sous-cycle, N lots seront produits. Le coût total de production C_p est exprimé par :

$$C_p = \sum_{k=1}^h C_{pu} \times N = h \times C_{pu} \times N \quad (4.52)$$

- Coût de renouvellement (C_{rw})

Durant un cycle, on effectue une seule action de renouvellement à la fin du cycle de durée μ'_{p1} . On considère un coût de renouvellement croissant, En effet, le coût d'une activité de renouvellement dépend de quand l'action a eu lieu. Autrement dit, une action de renouvellement effectuée après h actions de maintenance préventive parfaite est plus chère qu'une action de renouvellement effectuée après (h-1) actions de maintenance préventive parfaite. Plus précisément, le coût d'une action de renouvellement si

elle est effectuée après h actions de maintenance préventive parfaite est obtenu en multipliant le coût de renouvellement si elle est effectuée après $(h-1)$ actions de maintenance préventive parfaite par un facteur e^θ . Avec θ une constante strictement positive. Formellement $C_{rw}^h = C_{rw}^{h-1} \times e^\theta$. L'expression du coût de renouvellement est donnée par :

$$C_{rw} = C_{rwu} \times e^{(h-1) \times \theta} \quad (4.53)$$

Le profit total par unité de temps pour cette deuxième stratégie $PT4r - IH[N, h]$ est donné par

$$PT4r - IH[N, h] = \frac{\sum_{k=1}^h N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} - \frac{\sum_{k=2}^h M'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^{(h-1) \times \theta}}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \quad (4.54)$$

Avec

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{pu} \leq e^{-\rho \times N} \times P_{max} \quad \forall i \in 1..N \quad (4.55)$$

et

$$M'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} \leq C_{rwu} \times e^{(k-1) \times \theta} \quad \forall k \in 2..h$$

Notre objectif est de déterminer, simultanément, le nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive parfaite (N^*) et quand l'action de renouvellement doit avoir lieu (h^*) tout en maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[N, h]$.

• Existence d'une solution optimale et résolution numérique

Similairement à la précédente stratégie, les deux variables de décision recherchées correspondent au nombre de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive (N) et quand l'action de maintenance préventive parfaite doit être effectuée (h). On obtient, alors, une fonction discrète à deux variables de décision. Deux propositions (lemme 10 et lemme 11) ont été développées afin de montrer l'existence d'une solution optimale $[N1^*, h1^*]$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[N, h]$. La première proposition prouve l'existence d'une solution optimale $N1^*$ quand la deuxième variable de décision h est fixe. Quant à la deuxième proposition, elle montre l'existence d'une solution optimale $h1^*$ quand N est fixe.

Lemme 10. *Il existe une solution optimale $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[N]$ et $0 < N1^* \leq N_{max}$.*

Preuve. Nous suivons la même démarche suivie dans la partie précédente pour montrer l'existence d'une solution $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[N]$. En effet, le nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive est délimité par N_{max} qui correspond à la dernière valeur satisfaisant la contrainte (4.55) exprimée par l'expression suivante :

$$C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + C_{pu} \leq e^{-\rho \times i} \times P_{max} \quad \forall i \in 1..N$$

De plus on a :

$$- PT_{4r-IH}[0] = \frac{-C_{rw} \times e^{\theta(-1+h)} + M_p \times (1 - e^{\alpha(-1+h)})}{\mu_p \times (-1 + e^{\alpha(-1+h)}) + \mu_{p1} \times (-1 + e^{\alpha})}$$

$$PT_{4r-IH}[1] = \text{constante}$$

$$PT_{4r-IH}[N_{max}] = \text{constante}$$

On distingue, alors, deux cas possibles :

- **Cas 1** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $N1^*$ coïncide avec la valeur de N_{max} et $PT_{4r-IH}^*[N1] = PT_{4r-IH}[N_{max}]$.
- **Cas 2** : Le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive $0 < N1^* < N_{max}$ et $PT_{4r-IH}^*[N1] > PT_{4r-IH}[N_{max}]$.

Il existe, alors, une solution optimale $N1^*$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}^*[N1]$ et $0 < N1^* \leq N_{max}$ $\square$

Lemme 11. *Il existe une solution optimale $h1^*$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[h]$ et,*

$$\zeta[N] < PT[h1^*] < \frac{P_{max}}{Proc} \quad (4.56)$$

Avec

$$\zeta[N] = \frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + M'_p + C_{rwu} \times e^\theta)}{N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \mu'_p} \quad (4.57)$$

Preuve. Quand on fixe la valeur de N, la fonction du profit total par unité de temps sera une fonction à une seule variable de décision notée $PT_{4r-IH}[h]$.

Une valeur de h est considérée optimale si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) $PT_{4r-IH}[h] > PT_{4r-IH}[h-1]$
- 2) $PT_{4r-IH}[h] > PT_{4r-IH}[h+1]$

La première condition implique :

$$PT_2[4r-IH] > \frac{\sum_{k=1}^{h-1} N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-1} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} - \frac{\sum_{k=2}^{h-1} M'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^{(h-2) \times \theta}}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-2} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \quad (4.58)$$

Qui peut être écrite comme suit :

$$PT_{4r-IH}[h] > PT_{4r-IH}[h] \times \left(\frac{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-1} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \right) - \left(\frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \right) + \frac{M'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \times \frac{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-1} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \quad (4.59)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 & PT_{4r-IH}[h] \times \left(1 - \frac{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-1} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}}\right) \\
 & > - \left(\frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{M'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \right) \\
 & \times \frac{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-1} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

Cette inéquation(4.60) peut être simplifiée et exprimée comme suit :

$$PT_{4r-IH}[h] \left(1 - \frac{(B)}{(C)}\right) > -(A) \times \frac{(B)}{(C)} \quad (4.61)$$

Avec

$$(A) = \frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}})) + M'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta}{\mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha}} \quad (4.62)$$

$$(B) = \mu'_{p1} + \sum_{k=1}^h N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^h \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} \quad (4.63)$$

$$(C) = \mu'_{p1} + \sum_{k=1}^{h-1} N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \sum_{k=2}^{h-1} \mu'_p \times e^{(k-2) \times \alpha} \quad (4.64)$$

Ce qui conduit à

$$PT_{4r-IH}[h] \times (-N \times Proc - \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} - \mu_c \times Nb_f) > -(A) \times (B) \quad (4.65)$$

On obtient alors,

$$PT_{4r-IH}[h] \times (N \times Proc + \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} - \mu_c \times Nb_f) < (A) \times (B) \quad (4.66)$$

On a $(N \times Proc + \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} - \mu_c \times Nb_f) > 0$, alors, l'équation au-dessus peut être exprimée comme suit :

$$PT_{4r-IH}[h] < \frac{(A) \times (B)}{N \times Proc + \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + \mu_c \times Nb_f} \quad (4.67)$$

Remplaçons (A) et (B) par leurs expressions, on obtient,

$$\begin{aligned}
 PT_{4r-IH}[h] & < \frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{N \times Proc + \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + \mu_c \times Nb_f} \\
 & \quad - \frac{M'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta}{N \times Proc + \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + \mu_c \times Nb_f} \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

Puisque on a $(M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + M'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta) > 0$ et $N \times Proc + \mu'_p \times e^{(h-2) \times \alpha} + \mu_c \times Nb_f > 0$, l'équation (4.68) devient finalement,

$$PT_{4r-IH}[h] < \frac{P_{max}}{Proc} \quad (4.69)$$

Un développement similaire a été fait pour la condition (2) d'optimalité et on obtient alors :

$$PT_{4r-IH}[h] > \frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \mu'_p \times e^{(h-1) \times \alpha}} - \frac{M'_p \times e^{(h-1) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta}{N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \mu'_p \times e^{(h-1) \times \alpha}} \quad (4.70)$$

Supposons,

$$F[h] = \frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}))}{N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \mu'_p \times e^{(h-1) \times \alpha}} - \frac{M'_p \times e^{(h-1) \times \alpha} + C_{rwu} \times e^\theta}{N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \mu'_p \times e^{(h-1) \times \alpha}} \quad (4.71)$$

Il est évident que $F[h]$ est une fonction décroissante selon h . En effet, on a $F[h+1] \leq F[h] \forall h \in [1, +\infty]$.

Et on a,

$$PT_{4r-IH}[h] > F[h] \quad \forall h \in [1, +\infty]$$

Par conséquent, $PT_{4r-IH}[h] > \text{Max } F[h]$

Puisque $F[h]$ est une fonction décroissante sur $[1, +\infty]$, alors la valeur maximale de F est obtenue pour $h=1$.

Par conséquent,

$$PT_{4r-IH}[h] > F[h=1] \quad \forall h \in [1, +\infty] \quad (4.72)$$

Combinons les deux actions (4.69) et (4.72), on obtient alors,

$$F[1] < PT_{4r-IH}[h] < \frac{P_{max}}{Proc} \quad (4.73)$$

Il existe alors une solution optimale $h1^*$ maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[h]$,

Avec

$$\frac{N \times P_{max} \times e^{-\rho \times N} - (M_c \times Nb_f + C_{pu} \times N + \sum_{i=1}^N C_{rku} \times (\frac{\lambda_i}{\lambda_{N+1}}) + M'_p + C_{rwu} \times e^\theta)}{N \times Proc + \mu_c \times Nb_f + \mu'_p} < PT_{4r-IH}[h] \quad (4.74)$$

et,

$$PT_{4r-IH}[h] < \frac{P_{max} \times e^{-\rho \times N}}{Proc} \quad (4.75)$$

D'après les lemmes (10) et (11), il existe alors une solution optimale $[N1^*, h1^*]$, maximisant le profit total par unité de temps $PT_{4r-IH}[h]$

4.4 Etude numérique

Dans cette section, une étude numérique, basée sur un exemple industriel, a été présentée pour illustrer les modèles mathématiques présentés dans les deux sections précédentes par les équations (4.21) et (4.54). L'objectif est de déterminer une stratégie optimale de maintenance en tenant compte de la dégradation du système de production et la qualité des produits finis ainsi que l'impact économique des actions de retouche maximisant le profit total par unité de temps. Les données d'entrée de la procédure numérique sont récapitulées dans le tableau (table4.1). MATHEMATICA software a été utilisé pour déterminer un plan de maintenance optimal.

TABLE 4.3 – Données numériques

Défaillance du système	F(t) : Loi de Weibull β : Paramètre de forme ϵ : Paramètre d'échelle
Durée de réparation	g(t) : Loi exponentielle η_2 : facteur d'échelle
Durée des MP	h(t) : Loi exponentielle η_1 : facteur d'échelle
$P_{max}(mu)$	1500
$M_p(mu)$	100
$M_{p1}(mu)$	400
$M_c(mu)$	1500
Proc (tu)	3
$C_{pu}(mu)$	350
$C_{rku}(mu)$	750
$C_{rw}(mu)$	2500
$\mu_p(tu)$	10
$\mu_{p1}(tu)$	25
$\mu_c(tu)$	
α	0.1
ω	0.05
ρ	0.005
θ	0.05

4.4.1 Résultats numériques

En résolvant les équations (4.21) et (4.54) en utilisant la fonction « NMaximise », nous obtenons les résultats présentés dans le tableau (4.4). On rappelle que N^* et $N1^*$ représentent, respectivement, le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive imparfaite (stratégie 1) et le nombre optimal de lot à produire avant d'effectuer une action de maintenance préventive parfaite (stratégie 2). En plus, h^* et $h1^*$ représente, respectivement, quand la maintenance préventive parfaite aura lieu et quand l'activité de renouvellement doit être effectuée.

TABLE 4.4 – Les résultats numériques de la première et la deuxième stratégie

Première stratégie	N^*	16	h^*	3	PT_{3r-IH}	189.737
Deuxième stratégie	$N1^*$	17	$h1^*$	6	PT_{4r-FH}	196.269

Selon les résultats obtenus, pour la première stratégie, la stratégie de maintenance optimale est obtenue pour $N^* = 16$ et $h^* = 3$. Cela signifie que durant un cycle, les actions de maintenance préventive imparfaite seront effectuées chaque 16 lots produits et retouchés. Les deux premières actions de maintenance préventive sont imparfaites et la troisième action de maintenance préventive est parfaite. Cette dernière restore le système de production à l'état « aussi bon que neuf », et un nouveau cycle commence. En ce qui concerne la deuxième politique, la stratégie de maintenance optimale consiste à avoir $N1^* = 17$ et $h1^* = 6$. Cela signifie que durant un cycle, les actions de maintenance préventive parfaite seront effectuées chaque 17 lots produits et retouchés. Les cinq premières actions de maintenance préventive seront parfaites et la sixième action sera consacrée à un renouvellement.

4.4.2 Etude de sensibilité

Dans cette section, nous étudions la sensibilité des deux modèles proposés par rapport à la variation de quelques paramètres. Nous étudions la variation de la solution optimale par rapport aux trois paramètres suivants : la constante de dégradation α , le coût moyen d'une action de maintenance corrective (M_c) et finalement, le rapport entre le prix de vente (P_{max}) et le coût moyen de retouche (C_{rku}). ($R = \frac{P_{max}}{C_{rku}}$).

- Variation de la constante de dégradation α

Tout en gardant la même combinaison des données numériques, nous varions la valeur de la constante de dégradation α . Toute augmentation de cette constante de dégradation engendre la diminution du nombre des actions de maintenance imparfaite durant un cycle ce qui induit à la diminution de la fréquence de l'action de maintenance préventive parfaite par lots produits. En effet, l'augmentation de la constante de dégradation α implique que l'action de maintenance préventive imparfaite est moins performante et que le système de production est restauré à un état plus dégradé. Cette augmentation de ce facteur de dégradation engendre un nombre moyen de panne plus grand et par conséquent un coût de retouche plus élevé. Ainsi, une action de maintenance préventive parfaite restaurant le système à l'état neuf et la qualité des produits finis à la meilleure qualité doit être effectuée ce qui explique la diminution de la fréquence des actions de maintenance préventive parfaite (Voir 4.5). De même pour la deuxième stratégie, nous remarquons que toute augmentation de la constante de dégradation résulte une diminution de la fréquence de l'activité de renouvellement (Voir 4.6).

TABLE 4.5 – Résultat de variation de la constante de dégradation pour la première stratégie

α	N*	h*	PT _{3r-IH}	f _{mp}
0.05	16	4	196.84	64
0.1	16	3	189.737	48
0.2	17	2	182.077	34

TABLE 4.6 – Résultat de variation de la constante de dégradation pour la deuxième stratégie

α	N1*	h1*	PT _{4r-IH}	f _{mp}
0.05	17	9	200.991	596.499
0.1	17	6	196.269	381.663
0.2	18	4	190.749	260

• Variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c)

La croissance du coût unitaire des actions de maintenance corrective résulte la diminution du nombre de lot à produire et à retoucher avant d'effectuer l'action de maintenance préventive imparfaite et par conséquent la diminution du nombre de lot total à produire, durant un cycle, avant d'effectuer l'action de maintenance préventive parfaite. En effet, si l'action de maintenance corrective devient coûteuse, il est avantageux d'effectuer l'action de maintenance préventive imparfaite le plus tôt possible ce qui résulte plus de maintenance préventive parfaite afin d'éviter les pannes ce qui explique la diminution du nombre de lot à produire et retoucher avant d'effectuer les actions de maintenance préventive, d'une part, et d'autre part la diminution de la fréquence des actions parfaites par lots produits et retouchés. Le résultat obtenu est présenté dans le tableau suivant (4.7). Le même sens de variation a été remarqué pour la deuxième stratégie (4.8).

TABLE 4.7 – Etude de sensibilité de la variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c) pour la première stratégie

M_c	N*	h*	PT _{3r-FH}	f _{mp}
1000	17	3	191.838	51
2000	16	3	189.737	48
3500	15	3	186.774	45

TABLE 4.8 – Etude de sensibilité de la variation du coût unitaire des actions de maintenance corrective (M_c) pour la deuxième stratégie

M_c	$N1^*$	$h1^*$	PT_{4r-FH}	f_{mp}
1000	18	6	198.472	401.785
2000	17	6	196.269	381.663
4000	16	6	192.242	361.704

- Variation du rapport entre P_{max} et C_{rku} ($R = \frac{P_{max}}{C_{rku}}$) (stratégie 1)

On a montré dans le précédent chapitre l'effet significatif de la variation du rapport entre P_{max} et C_{rku} sur la solution optimale. Il est alors intéressant d'étudier l'effet de cette variation dans le cas d'une stratégie de maintenance préventive semi-parfaite. En effet, l'augmentation de la valeur de rapport, en augmentant (P_{max}) ou en minimisant (C_{rku}), engendre l'augmentation du nombre de lots produits et retouchés avant d'effectuer une action de maintenance préventive ainsi que le nombre des actions de maintenance préventive imparfaite ce qui conduit à l'augmentation de la fréquence des actions de maintenance préventive parfaite. En effet, quand on a un coût de retouche qui n'est pas cher ou un prix de vente plus élevé deux scénarios sont possibles, le premier scénario consiste à l'augmentation du nombre de lots à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive imparfaite tout en gardant le même nombre d'activité de maintenance imparfaite. Le deuxième scénario consiste à avoir une diminution du nombre de lot à produire avant d'effectuer l'action imparfaite accompagnée d'une augmentation du nombre des actions de maintenance imparfaite. Ces deux cas possibles peuvent être résumé par le fait que quand la valeur du rapport entre le prix de vente et le coût de retouche augmente, il est plus économique de produire et de retoucher plus de produits durant un cycle T ce qui explique l'augmentation de la fréquentation des actions parfaites par lot produits. (voir 4.9)

TABLE 4.9 – Variation du rapport entre P_{max} et C_{rku} ($R = \frac{P_{max}}{C_{rku}}$)

P_{max}	C_{rku}	R	N^*	h^*	PT_{3r-IH}	f_{mp}
1500	750	2	15	3	144.55	45
1700	750	2.26	16	3	189.737	48
1700	500	3.4	16	4	224.503	64

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons continué à étudier des stratégies de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de la dégradation progressive du système de production, l'effet de cette dégradation sur la qualité des produits finis et de l'impact économique des activités de retouche. Nous avons choisi d'étudier la stratégie "Retouche appliquée à un pourcentage de produits qui ne sont pas du premier choix" mais en considérant, d'une part, le concept de la maintenance préventive imparfaite et son impact sur l'état de dégradation du système de production traduit par le taux de panne et d'autre part, un coût de maintenance préventive croissant afin de faire face à la dégradation progressive due à l'usage et au temps. La considération de ces deux concepts a fait l'objet de développement de deux nouvelles stratégies tenant compte de l'impact des actions de maintenance imparfaite sur la performance économique réalisée. Deux modèles mathématiques ont été développés suivis d'une étude analytique d'existence de la solution optimale. Un exemple numérique et une étude de sensibilité ont été proposés afin d'illustrer les modèles analytiques proposés et étudier l'impact de la variation de certains paramètres sur la solution optimale.

Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la maintenance intégrée à la qualité. La clé de notre étude consiste à explorer le lien entre la dégradation progressive du système de production et son impact sur la qualité des produits finis.

En effet, notre contribution consiste au développement de nouvelles stratégies de maintenance intégrée à la qualité tenant compte de l'effet de la dégradation des systèmes de production sur la qualité des produits finis et l'impact économique des actions de retouche en proposant plusieurs types de maintenance combinant les politiques de maintenance parfaite et imparfaite.

Pour bien mener ces travaux de recherche, nous avons commencé par une étude approfondie de la littérature. Cette partie a fait l'objet d'un premier chapitre, dans lequel nous avons présenté plusieurs travaux réalisés autour de la fonction maintenance. Certains chercheurs se sont focalisés sur l'étude de la fonction maintenance sous critère technique et/ou économique, sans tenir compte des autres fonctions comme la qualité, la planification de la production ou de la gestion des stocks. Vu l'existence d'un lien étroit entre ces différentes fonctions, plusieurs chercheurs et industriels considèrent que toute approche qui néglige cette interdépendance n'est pas efficiente. Dans le premier chapitre, nous avons présenté et analysé plusieurs travaux traitant la problématique de la maintenance intégrée à l'une des fonctions comme la qualité, la planification de la production et/ou la gestion des stocks.

On note que dans notre étude on s'est intéressé à trois aspects fondamentaux parmi celles présentés dans la littérature :

- La planification de la maintenance en tenant compte de la dégradation du système de production et son effet sur la qualité des produits finis en considérant les actions de maintenance préventive parfaite.
- La planification de la maintenance en tenant compte de la dégradation du système de production, son effet sur la qualité des produits finis et l'impact économique des actions de retouche en considérant, toujours, les actions de maintenance préventives parfaite.
- La planification de la maintenance en tenant compte de la dégradation du système de production, son effet sur la qualité des produits finis et l'impact économique des actions de retouche en tenant compte d'une part, du concept de la maintenance préventive imparfaite et son impact sur l'état de dégradation du système et d'autre part, de l'augmentation du coût des actions de maintenance préventive afin de faire face à une dégradation progressive due à l'usage et le temps dans le but de ramener le système à l'état parfait.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes concentrés sur l'étude et la modélisation de la première problématique. En effet, un taux de régression de la qualité faisant un lien direct entre la qualité des produits finis, traduit dans notre étude par leur prix de vente, et l'état du système de production traduit par son taux de panne a été défini et modélisé analytiquement. En effet, on distingue trois types de produits finis : des produits finis de premier choix, des produits finis de second choix et des produits non-conformes. Ainsi, un produit de second choix sera vendu à un prix réduit et un produit non-conforme sera rejeté. Une fonction objective, maximisant le profit total et incluant le prix de vente, les différents coûts des actions de maintenance préventive et corrective, le coût de production, a été développée. Notre objectif

consiste à proposer un plan de maintenance optimal en déterminant une seule variable de décision de notre modèle : le nombre de lot optimal à produire avant d'effectuer l'action de maintenance préventive. Afin de réduire les risques de défaillance du système de production et son impact sur la qualité des produits finis, une stratégie de maintenance préventive de type bloc à réparations minimales a été considérée. Une étude d'existence de la solution optimale (un maximum) ainsi qu'une procédure numérique itérative permettant de la déterminer ont été proposées. Finalement, et afin d'illustrer notre modèle analytique et étudier l'effet de la variation de certains paramètres sur la solution optimale, un exemple numérique et une étude de sensibilité ont été présentés. Cette stratégie a été étudiée pour les deux horizons infini et fini.

Le troisième chapitre concerne l'étude de deux stratégies traitant l'impact économique des actions de retouche. En effet, nous avons proposé d'effectuer des actions de retouche afin d'améliorer la qualité des produits qui ne sont pas de premier choix. Pour la première stratégie, nous avons supposé que tous les défauts de qualité peuvent être corrigés, et par conséquent, tous les produits seront vendus au meilleur prix moyennant un coût de retouche. Pour la deuxième stratégie et pour se rapprocher de la réalité industrielle, cette hypothèse a été relaxée. En effet, on a considéré que certaines non-conformités ne peuvent pas être corrigées et par conséquent la qualité de certains produits peut ne pas être améliorée. On considère toujours une stratégie de maintenance préventive de type bloc à réparations minimales. On a utilisé la même méthodologie pour présenter nos deux stratégies, à savoir, un modèle analytique avec une fonction objective de maximisation de profit intégrant le prix de vente et les différents coûts, de maintenance, de production et de retouche. On note que notre unique variable de décision est la même que celle du deuxième chapitre, à savoir, le nombre de lots à produire avant chaque action de maintenance préventive. Par la suite, une preuve d'existence d'une solution optimale (maximum) et une procédure numérique itérative ont été proposées. Finalement, une étude numérique a été présentée afin d'illustrer le modèle mathématique proposé. Les deux stratégies ont été étudiées pour les deux horizons infini et fini.

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de la deuxième stratégie du chapitre 3 « Retouche appliqué à un pourcentage de produits non conformes », mais pour un concept de stratégies de maintenance parfaite ou imparfaite. Ce choix est basé sur le fait que cette deuxième stratégie est jugée comme la plus proche de la réalité industrielle. Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact technico-économique des activités de maintenance parfaite et/ou imparfaite sur le système de production. En effet, deux stratégies ont été proposées : La première, notée « stratégie de maintenance semi-parfaite », considère le cas de la maintenance imparfaite et son impact sur le nombre moyen de panne. Elle consiste à effectuer un nombre d'action de maintenance préventive imparfaite avant de finir par une action de maintenance parfaite qui rétablit le système à un état comme neuf. Pour cette stratégie, deux variables de décision sont à déterminer : le nombre de lot produit avant chaque action de maintenance préventive imparfaite ainsi que le nombre d'action de maintenance préventive imparfaite effectués avant la maintenance préventive parfaite. La deuxième stratégie, noté « stratégie de maintenance modifiée », est basée sur l'évolution progressive des coûts des actions de maintenance au cours du temps afin de palier à la dégradation progressive due à l'usage et le temps. Donc, pour ramener le système de production à l'état parfait et avoir le même nombre moyen de panne pour tous les sous-cycles, une action de maintenance préventive parfaite avec un coût et une durée associée croissants sera effectuée.

Similairement à la stratégie précédente, deux variables à décision sont à déterminer : le nombre de lot produit avant chaque action de maintenance préventive parfaite ainsi que le nombre d'action de maintenance préventive parfaite effectués avant l'activité de renouvellement. On note que la fonction objective à maximiser afin de déterminer les variables de décisions est représentée par un profit intégrant les prix de vente et les différents coûts, de maintenance parfaite et/ou imparfaite, de production et des coûts de retouche. Ces deux stratégies ont été étudiées pour un horizon infini uniquement. Pour chacune des deux stratégies, un développement analytique a été proposé suivi par une preuve d'existence d'une solution optimale. Finalement, une étude numérique a été développée afin d'illustrer les modèles mathématiques et étudier la sensibilité de la solution vis-à-vis la variation de quelques paramètres.

Cette recherche a débouché sur plusieurs contributions originales dans le domaine du génie industriel : Un premier article journal déjà publié en avril 2017 (Gouiaa-Mtibaa et al.(2017)), Un deuxième article journal en cours de révision et 3 conférences internationales (IESM 2015, IFAC-MIM 2016 et MOSIM

2016).

Il est vrai que les différents modèles développés dans ce manuscrit ne considèrent qu'un système de production constitué d'une seule machine et produisant un seul type de produit, mais les résultats prometteurs obtenus dans cette thèse peuvent aboutir à des perspectives intéressantes. Cependant, plusieurs perspectives de ce travail peuvent être entreprises dans le futur. En effet, il est intéressant d'étudier le cas d'un système de production constitué de plusieurs machines. Les résultats intéressants obtenus dans les travaux de [Mifdal *et al.* 2015], nous ont encouragés à explorer cette piste. Une autre perspective intéressante consiste à considérer un système de production produisant plusieurs produits. Le fait de considérer plusieurs types de produits ou le cas de plusieurs machines conduit à une augmentation au niveau de la complexité de la résolution du modèle analytique correspondant. Par conséquent, il est intéressant, dans ce cas, de faire appel à des méthodes de la recherche opérationnelle (algorithmes exactes ou heuristiques) et/ou de proposer des nouveaux algorithmes adaptés permettant de résoudre la problématique étudiée. Finalement, nous pouvons considérer d'autres types de modélisation de la maintenance préventive imparfaite telle que l'âge virtuel et la modélisation hybride (réduction d'âge et augmentation du taux de fiabilité) afin de développer de nouvelles stratégies de maintenance intégrée à la qualité. En effet, l'importance de cette étude consiste à proposer des modèles qui s'approche encore plus de la réalité industrielle.

Bibliographie

- [A11] Site de l'entreprise de arcelormittal en france.
- [Aghezzaf and Najid2008] El-Houssaine Aghezzaf and Najib M Najid. Integrated production planning and preventive maintenance in deteriorating production systems. *Information Sciences*, 178(17) :3382–3392, 2008.
- [Aït-Kadi *et al.*2003] Daoud Aït-Kadi, Mohamed Anouar Jamali, and Abdelhakim Artiba. Optimal periodic replacement strategy using new and used items. *Journal of decision systems*, 12(1) :67–77, 2003.
- [Alsyouf2007] Imad Alsyouf. The role of maintenance in improving companies' productivity and profitability. *International Journal of production economics*, 105(1) :70–78, 2007.
- [Ba2015] Kader Ba. *Développement de politiques de maintenance efficientes intégrant la gestion de la production et la gestion des pièces de rechange*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2015.
- [Barlow and Hunter1960] Richard Barlow and Larry Hunter. Optimum preventive maintenance policies. *Operations research*, 8(1) :90–100, 1960.
- [Barlow and Proschan1965] Richard E Barlow and Frank Proschan. *Mathematical theory of reliability*. John Wiley sons, 1965.
- [Ben-Daya and Duffuaa1995] Mohamed Ben-Daya and SO Duffuaa. Maintenance and quality : the missing link. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 1(1) :20–26, 1995.
- [Ben-Daya and Rahim2000] Mohamed Ben-Daya and MA Rahim. Effect of maintenance on the economic design of x-control chart. *European Journal of Operational Research*, 120(1) :131–143, 2000.
- [Ben-Daya and Rahim2001] M Ben-Daya and MA Rahim. Integrated production, quality & maintenance models : an overview. In *Integrated Models in Production Planning, Inventory, Quality, and Maintenance*, pages 3–28. Springer, 2001.
- [Ben-Daya *et al.*2012] Mohamed Ben-Daya, Salih O Duffuaa, and Abdul Raouf. *Maintenance, modeling and optimization*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Ben-Daya1999] M Ben-Daya. Integrated production maintenance and quality model for imperfect processes. *IIE transactions*, 31(6) :491–501, 1999.
- [Bertsekas *et al.*1995] Dimitri P Bertsekas, Dimitri P Bertsekas, Dimitri P Bertsekas, and Dimitri P Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control*, volume 1. Athena scientific Belmont, MA, 1995.
- [Block *et al.*1985] Henry W Block, Wagner S Borges, and Thomas H Savits. Age-dependent minimal repair. *Journal of applied probability*, 22(2) :370–385, 1985.
- [Bouslah2015] Bassem Bouslah. *Conception conjointe des politiques de contrôle de production, de qualité et de maintenance des systèmes manufacturiers en dégradation*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2015.
- [Brown and Proschan1983] Mark Brown and Frank Proschan. Imperfect repair. *Journal of Applied probability*, pages 851–859, 1983.
- [Cárdenas-Barrón2008] Leopoldo Eduardo Cárdenas-Barrón. Optimal manufacturing batch size with rework in a single-stage production system—a simple derivation. *Computers & Industrial Engineering*, 55(4) :758–765, 2008.

- [Chan and Shaw1993] J-K Chan and Leonard Shaw. Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, 42(4) :566–571, 1993.
- [Cho and Parlar1991] Danny I Cho and Mahmut Parlar. A survey of maintenance models for multi-unit systems. *European Journal of Operational Research*, 51(1) :1–23, 1991.
- [Chung2011] Kun-Jen Chung. The economic production quantity with rework process in supply chain management. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(6) :2547–2550, 2011.
- [Dekker1996] Rommert Dekker. Applications of maintenance optimization models : a review and analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 51(3) :229–240, 1996.
- [Dellagi et al.2017] S. Dellagi, A. Chelbi, and W. Trabelsi. Joint integrated production-maintenance policy with production plan smoothing through production rate control. *Journal of Manufacturing Systems*, 42 :262–270, 2017.
- [Doyen and Gaudoin2004] Laurent Doyen and Olivier Gaudoin. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering & System Safety*, 84(1) :45–56, 2004.
- [Drinkwater and Hastings1967] RW Drinkwater and N AmJ Hastings. An economic replacement model. *Operational Research Quarterly*, 18 :121–138, 1967.
- [Dunn1987] RL Dunn. Advanced maintenance technologies. *Plant Engineering*, 41(12) :80–93, 1987.
- [Frank1982] Beichelt Frank. A replacement policy based on limits for the repair cost rate. *IEEE Transactions on Reliability*, R-31(4) :401–403, 1982.
- [Gardent and Nonant1963] P Gardent and L Nonant. Entretien et renouvellement d’un parc de machines. *Revue Française de Recherche Operationnelle*, 7 :5–19, 1963.
- [Gertsbakh2000] Ilya Gertsbakh. *Reliability theory : with applications to preventive maintenance*. Springer, 2000.
- [Gouiaa-Mtibaa et al.2017] A. Gouiaa-Mtibaa, S. Dellagi, Z. Achour, and W. Erray. Integrated maintenance-quality policy taking into account the economical impact of reworking activities. *International Journal of systems science : Operations and Logistics*, 0 :1–17, 2017.
- [Groenevelt et al.1992] Harry Groenevelt, Liliane Pintelon, and Abraham Seidmann. Production lot sizing with machine breakdowns. *Management Science*, 38(1) :104–123, 1992.
- [Hanifin1975] L. E. Hanifin. *Increased transfer line productivity utilizing systems simulation*. PhD thesis, University of Detroit, 1975.
- [Holt et al.1960] C.C Holt, F Modigliani, J. F Muth, and H. A Simon. planning production, inventory and work force. *Prentice Hall*, 1960.
- [Iyer1992] Srinivas Iyer. Availability results for imperfect repair. *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics, Series B*, pages 249–256, 1992.
- [Khan et al.2011] M Khan, MY Jaber, AL Guiffrida, and S Zolfaghari. A review of the extensions of a modified eqq model for imperfect quality items. *International Journal of Production Economics*, 132(1) :1–12, 2011.
- [Khatab et al.2017] A. Khatab, C. Diallo, and I.B. Sidibe. Optimizing upgrade and imperfect preventive maintenance in failure-prone second-hand systems. *Journal of Manufacturing Systems*, 43 :58–78, 2017.
- [Kijima et al.1988] Masaaki Kijima, Hidenori Morimura, and Yasusuke Suzuki. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. *European Journal of Operational Research*, 37(2) :194–203, 1988.
- [Kijima1989] Masaaki Kijima. Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied probability*, 26(1) :89–102, 1989.
- [Liao et al.2010] W. Liao, E. Pan, and L. Xi. Preventive maintenance scheduling for repairable system with deterioration. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 21(6) :875–884, 2010.
- [Lie and Chun1986] Chang Hoon Lie and Young Ho Chun. An algorithm for preventive maintenance policy. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(1) :71–75, 1986.

-
- [Lim *et al.*2005] Jae-Hak Lim, Dae-Kyung Kim, and Dong Ho Park*. Cost evaluation for an imperfect-repair model with random repair time. *International journal of systems science*, 36(11) :717–726, 2005.
- [Linderman *et al.*2005] Kevin Linderman, Kathleen E McKone-Sweet, and John C Anderson. An integrated systems approach to process control and maintenance. *European Journal of Operational Research*, 164(2) :324–340, 2005.
- [Lo *et al.*2007] Sh-Tyan Lo, Hui-Ming Wee, and Wen-Chang Huang. An integrated production-inventory model with imperfect production processes and weibull distribution deterioration under inflation. *International Journal of Production Economics*, 106(1) :248–260, 2007.
- [Mabrouk *et al.*2016] A. Ben Mabrouk, A. Chelbi, and M. Radhoui. Optimal imperfect maintenance strategy for leased equipment. *International Journal of Production Economics*, 178 :57–64, 2016.
- [Makabe and Morimura1963] Hajime Makabe and HIDENORI Morimura. A new policy for preventive maintenance. *Journal of Operations Research Society of Japan*, 5 :110–124, 1963.
- [Malik1979] Mazhar Ali Khan Malik. Reliable preventive maintenance scheduling. *AIIE transactions*, 11(3) :221–228, 1979.
- [McCall1965] John J McCall. Maintenance policies for stochastically failing equipment : a survey. *Management science*, 11(5) :493–524, 1965.
- [Mifdal *et al.*2015] Lahcen Mifdal, Zied Hajej, and Sofiene Dellagi. Joint optimization approach of maintenance and production planning for a multiple-product manufacturing system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015.
- [Monga *et al.*1997] Amit Monga, Ming J Zuo, and Roger W Toogood. Reliability-based design of systems considering preventive maintenance and minimal repair. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 4(01) :55–71, 1997.
- [Morimura1969] Hidenori Morimura. *On Some Preventive Maintenance Policies for IFR*. University of North Carolina, Department of Statistics, 1969.
- [Nakagawa and Osaki1974] Toshio Nakagawa and Shunji Osaki. The optimum repair limit replacement policies. *Operational Research Quarterly*, 25 :311–317, 1974.
- [Nakagawa *et al.*2011] Toshio Nakagawa, Xufeng Zhao, and Won Young Yun. Optimal age replacement and inspection policies with random failure and replacement times. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 18(05) :405–416, 2011.
- [Nakagawa1979a] Toshio Nakagawa. imperfect preventive maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, R 28(5) :402, 1979.
- [Nakagawa1979b] Toshio Nakagawa. Optimum policies when preventive maintenance is imperfect. *IEEE Transactions on Reliability*, R 28 :331–332, 1979.
- [Nakagawa1979c] Toshio Nakagawa. A summary of imperfect maintenance policies with minimal repair. *RAIRO, Recherche Operationnelle*, 14 :249–255, 1979.
- [Nakagawa1981a] Toshio Nakagawa. Modified periodic replacement with minimal repair at failure. *IEEE Transactions on Reliability*, 30(2) :165–168, 1981.
- [Nakagawa1981b] Toshio Nakagawa. A summary of periodic replacement with minimal repair at failure. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 24(3) :213–227, 1981.
- [Nakagawa1986] Toshio Nakagawa. Periodic and sequential preventive maintenance policies. *Journal of Applied Probability*, 23(2) :536–542, 1986.
- [Nakagawa1988a] Toshio Nakagawa. Sequential imperfect preventive maintenance policies. *IEEE Transactions on Reliability*, 37(3) :295–298, 1988.
- [Nakagawa1988b] Toshio Nakagawa. Sequential imperfect preventive maintenance policies. *IEEE Transactions on Reliability*, 37(3) :295–298, 1988.
- [Nguyen and Murthy1981] DG Nguyen and DNP Murthy. Optimal preventive maintenance policies for repairable systems. *Operations Research*, 29(6) :1181–1194, 1981.

- [Nourelfath *et al.*2016] Mustapha Nourelfath, Nabil Nahas, and Mohamed Ben-Daya. Integrated preventive maintenance and production decisions for imperfect processes. *Reliability Engineering & System Safety*, 148 :21–31, 2016.
- [Ollila and Malmipuro1999] Antero Ollila and Markku Malmipuro. Maintenance has a role in quality. *The TQM magazine*, 11(1) :17–21, 1999.
- [Panagiotidou and Nenes2009] Sofia Panagiotidou and George Nenes. An economically designed, integrated quality and maintenance model using an adaptive shewhart chart. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(3) :732–741, 2009.
- [Park and Pham2016] Minjae Park and Hoang Pham. Cost models for age replacement policies and block replacement policies under warranty. *Applied Mathematical Modelling*, 40(9) :5689–5702, 2016.
- [Pham and Wang1996a] Hoang Pham and Hongzhou Wang. Imperfect maintenance. *European journal of operational research*, 94(3) :425–438, 1996.
- [Pham and Wang1996b] Hoang Pham and Hongzhou Wang. Imperfect maintenance. *European journal of operational research*, 94(3) :425–438, 1996.
- [Pierskalla and Voelker1976] William P Pierskalla and John A Voelker. A survey of maintenance models : the control and surveillance of deteriorating systems. *Naval Research Logistics (NRL)*, 23(3) :353–388, 1976.
- [Porteus1986] Evan L Porteus. Investing in new parameter values in the discounted eoq model. *Naval Research Logistics (NRL)*, 33(1) :39–48, 1986.
- [Radhoui *et al.*2010] Mehdi Radhoui, Nidhal Rezg, and Anis Chelbi. Integrated maintenance and control policy based on quality control. *Computers & Industrial Engineering*, 58(3) :443–451, 2010.
- [Rahim and Ben-Daya2012] M Abdur Rahim and Mohamed Ben-Daya. *Integrated models in production planning, inventory, quality, and maintenance*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Rahim1994] MA Rahim. Joint determination of production quantity, inspection schedule, and control chart design. *IIE transactions*, 26(6) :2–11, 1994.
- [Rausand and Høyland2004] Marvin Rausand and A Høyland. System analysis event tree analysis. *System reliability theory : models, statistical methods, and applications*, 2004.
- [Rezg *et al.*2004] N Rezg, X Xie, and Y Mati. Joint optimization of preventive maintenance and inventory control in a production line using simulation. *International Journal of Production Research*, 42(10) :2029–2046, 2004.
- [Rosenblatt and Lee1986] Meir J Rosenblatt and Hau L Lee. Economic production cycles with imperfect production processes. *IIE transactions*, 18(1) :48–55, 1986.
- [Salameh and Jaber2000] MK Salameh and MY Jaber. Economic production quantity model for items with imperfect quality. *International journal of production economics*, 64(1) :59–64, 2000.
- [Samet *et al.*2010] Slah Samet, Anis Chelbi, and Fayçal Ben Hmida. Optimal availability of failure-prone systems under imperfect maintenance actions. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 16(4) :395–412, 2010.
- [Sarkar *et al.*2014] Biswajit Sarkar, Leopoldo Eduardo Cárdenas-Barrón, Mitali Sarkar, and Moses Laksono Singgih. An economic production quantity model with random defective rate, rework process and backorders for a single stage production system. *Journal of Manufacturing Systems*, 33(3) :423–435, 2014.
- [Sarker *et al.*2008] Bhaba R Sarker, AMM Jamal, and Sanjay Mondal. Optimal batch sizing in a multi-stage production system with rework consideration. *European Journal of Operational Research*, 184(3) :915–929, 2008.
- [Schutz and Rezg2013] Jérémie Schutz and Nidhal Rezg. Maintenance strategy for leased equipment. *Computers & Industrial Engineering*, 66(3) :593–600, 2013.
- [Sherif and Smith1981] YS Sherif and ML Smith. Optimal maintenance models for systems subject to failure—a review. *Naval Research Logistics (NRL)*, 28(1) :47–74, 1981.

- [Wang and Pham1996] Hongzhou Wang and Hoang Pham. Optimal age-dependent preventive maintenance policies with imperfect maintenance. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 3(02) :119–135, 1996.
- [Wang2002] Hongzhou Wang. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European journal of operational research*, 139(3) :469–489, 2002.
- [Wang2013] Shijin Wang. Integrated model of production planning and imperfect preventive maintenance policy for single machine system. *International Journal of Operational Research*, 18(2) :140–156, 2013.
- [Xiao-Gao *et al.*1995] Liu Xiao-Gao, Makis Viliam, and Andrew K. S. Jardine. A replacement model with overhauls and repairs. *Naval Research Logistics*, 42 :1063–1079, 1995.
- [Zhou and Zhu2008] Wen-Hui Zhou and Gui-Long Zhu. Economic design of integrated model of control chart and maintenance management. *Mathematical and computer Modelling*, 47(11) :1389–1395, 2008.
- [Zied *et al.*2011] Hajej Zied, Dellagi Sofiene, and Rezg Nidhal. Optimal integrated maintenance/production policy for randomly failing systems with variable failure rate. *International Journal of Production Research*, 49(19) :5695–5712, 2011.

Résumé

Ces dernières décennies ont vu une évolution remarquable du contexte économique des entreprises. Ceci est dû certainement à la compétition fortement croissante à laquelle elles sont confrontées. Cette forte concurrence a entraîné les entreprises à investiguer des voies pour améliorer leurs performances économiques tout en répondant aux mieux aux exigences de leurs clients. La clé de la réussite de la majorité des entreprises réside dans la mise en place d'une méthode de gestion économique des différentes fonctions. Les industriels et les chercheurs ont prouvé l'existence d'une forte interaction entre trois fonctions fondamentales de l'entreprise; la maintenance, la production et la qualité. Ils ont démontrés qu'une gestion indépendante de ces trois fonctions n'est plus efficiente. Suite à ce constat, nous nous sommes intéressés dans ce projet de recherche au développement de nouvelles stratégies de maintenance intégrée à la production et à la qualité. En tenant compte du prix de vente, des coûts de retouche, de la maintenance et ceux de la production, une analyse de l'interdépendance des trois fonctions a permis de réaliser notre objectif qui consiste à maximiser les profits des entreprises. Le but de cette thèse consiste, à proposer de nouvelles approches de maintenance intégrée à la qualité en tenant compte de la dégradation progressive du système de production, son impact sur la qualité des produits finis et l'impact économique des actions de retouche. Des modèles analytiques ont été développés afin d'illustrer les stratégies proposées. L'effet de la dégradation du système de production sur la perte de qualité du produit fini et son impact économique ont été mis en équation par le biais des modèles mathématiques. Dans ce contexte, différentes politiques de maintenance (parfaite, imparfaite, semi parfaite) ont été traitées. L'existence des solutions optimales liées aux variables de décision a été démontrée analytiquement. Enfin, des résolutions numériques, basées sur des cas industriels, ont été présentées afin de valider les résultats théoriques obtenus. La robustesse des modèles analytiques développés a été prouvée par des études de sensibilité.

Mots-clés: Maintenance, Qualité, dégradation.

Abstract

The last few decades have been marked by a remarkable change in the economic environment of companies. It is due certainly to the increasing competition that they face. This strong competition has led companies to investigate new ways to improve their economic performance while meeting their customers' requirements. The key to the success of the majority of companies lies in the implementation of an economic management method of various functions. Industry and researchers have demonstrated a strong interaction between the three fundamental functions of the company; maintenance, production and quality. They have demonstrated that an independent management of these three functions is no more efficient. Following this observation, we were interested in this research project in the development of new maintenance strategies integrated production and quality. Taking into account sales prices, reworking costs, maintenance costs and production costs, an analysis of the interdependence of the three functions enabled us to achieve our goal of maximizing the profits of companies. The purpose of this thesis is to propose new approaches integrated quality and maintenance taking into account the progressive degradation of the production system, its impact on the quality of output products and the economic impact of reworking actions. Analytical models have been developed to illustrate the proposed strategies. The effect of the degradation of the production system on the degradation of quality of output products and its economic impact has been modeled using mathematical models. In this context, various maintenance policies (perfect, imperfect, semi-perfect) have been studied. The existence of optimal solutions related to the decision variables has been analytically demonstrated. Finally, numerical resolutions, based on industrial cases, have been presented in order to illustrate the theoretical results obtained. The robustness of the analytical models developed has been proved by sensitivity studies.

Keywords: Maintenance, Quality, Degradation.

