

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE  
ED 352 – PHYSIQUE ET SCIENCES DE LA MATIERE

UFR Sciences

Laboratoire d'Astrophysique de Marseille / R&D Optique et Instrumentation

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Astrophysique et Cosmologie

Olivier FAUVARQUE

**Optimisation des analyseurs de front d'onde à  
filtrage optique de Fourier**

Soutenue le 11/09/2017 devant le jury :

Gérard ROUSSET	LESIA - Paris	Rapporteur
Roberto RAGAZZONI	INAF - Padova	Rapporteur
Enrico PINNA	INAF - Arcetri	Examineur
Christophe VÉRINAUD	IPAG - Grenoble	Examineur
Magali DELEUIL	LAM - Marseille	Examineur
Thierry FUSCO	ONERA - Châtillon	Directeur de thèse
Benoit NEICHEL	LAM - Marseille	Co-directeur de thèse



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France](#).

# Résumé

L'Europe prépare actuellement le plus grand télescope du monde : l'E-ELT (*European Extremely Large Telescope*). Prévu vers 2026, ce télescope géant (diamètre : 39 m) permettra de répondre à des questions fondamentales de l'astrophysique contemporaine, depuis l'imagerie d'exoplanètes jusqu'à l'étude des grandes échelles de l'univers. Cependant, l'imagerie d'objets astrophysiques depuis des télescopes au sol est fortement perturbée par l'effet des mouvements de masses d'air dans l'atmosphère réduisant ainsi la capacité des instruments au sol à distinguer deux objets proches.

L'Optique Adaptative (OA) permet de restaurer cette résolution angulaire en corrigeant les effets de la turbulence atmosphérique. Cette technique, en plein essor en astronomie, s'exporte d'ailleurs actuellement aux nombreux autres domaines où l'imagerie pâtit d'un milieu inhomogène spatialement et temporellement comme la microscopie cellulaire, l'ophtalmologie, l'imagerie fonctionnelle, etc. Cette technologie s'appuie sur un (ou plusieurs) miroir(s) déformable(s) qui corrige(nt) en temps réel le front d'onde incident en utilisant les données provenant d'un (ou plusieurs) instrument(s) de mesure de la phase turbulente appelé « Analyseur de Surface d'Onde » (ASO).

Jusqu'à très récemment, la grande majorité des systèmes d'OA utilisaient des ASO de type Shack-Hartmann. Des concepts concurrents basés sur le filtrage optique de Fourier viennent cependant d'être mis en fonctionnement dans plusieurs observatoires professionnels et leurs résultats semblent surpasser les performances du Shack-Hartmann. On mentionne notamment le senseur *Pyramide* qui a fourni des images d'une qualité sans précédent depuis le sol au *Large Binocular Telescope* ou l'analyseur Zernike qui a permis d'améliorer considérablement les performances de l'imageur d'exoplanètes du *Very Large Telescope*.

En dépit de ces prouesses instrumentales, ces senseurs manquent encore de maturité et le retour sur expérience des systèmes opérationnels reste très faible. En vue de leur potentielle utilisation sur les *Extremely Large Telescopes*, cette thèse vise à consolider leur compréhension théorique ainsi qu'à optimiser ces ASO basés sur le filtrage de Fourier.

Est développé dans un premier temps un cadre mathématique où les théories de diffraction optiques sont appliquées à l'analyse de front d'onde par filtrage de Fourier. Les équations très générales qui en émergent permettent de décrire tous les ASO basés sur ce principe (tels les ASO *Pyramide* et *Zernike*) qui se

trouvent ainsi pour la première fois rassemblés sous un unique formalisme. Dans un second temps sont développés des critères de performance communs inspirés des besoins de l'optique adaptative astronomique en vue d'une comparaison rigoureuse de ces senseurs.

Une conséquence logique de l'effort théorique précédent est ensuite présentée : puisqu'un cadre de comparaison existe pourquoi ne pas en profiter pour tester de nouveaux ASO qui seraient par exemple générés à partir des designs préexistants ? De ce questionnement apparaît ainsi naturellement la notion de « classe d'analyseurs de front d'onde » qui consiste en une généralisation des senseurs existants pour lesquels des grandeurs à l'origine fixées deviennent des degrés de liberté : des deux ASO Zernike et Pyramide, se dégage une infinité de dispositifs en les classes d'ASO de Zernike et de la Pyramide.

Celles-ci sont ensuite explorées analytiquement et via des simulations numériques. L'objectif est d'identifier quel paramètre de classe joue sur quel critère de performance afin d'envisager une optimisation des designs optiques au regard des attentes instrumentales. Des configurations inédites de la classe Pyramide-ASO que l'on appelle « Pyramides aplaties »- s'avèrent notamment très prometteuses et font l'objet d'une étude plus poussée.

L'exposé se conclut par la présentation d'un banc optique capable de simuler la quasi-totalité des ASO à filtrage de Fourier ce qui permettrait de valider expérimentalement les résultats théoriques prédits.

Mots clés : Analyse de surface d'onde, Analyseur Pyramide, Optique de Fourier, Optique Adaptative, *Extremely Large Telescopes*.

# Abstract

Europe is currently preparing the largest telescope of the world : the E-ELT (European Extremely Large Telescope). Planned by 2026, this huge telescope (diameter : 39 m) will allow to answer fundamental questions of contemporary astrophysics by imaging exoplanets or studying large scales of universe. However, images of astrophysical objects done by ground based telescopes suffer from the distortion caused by the atmospheric turbulence which reduces the capacity of instruments to distinguish objects too close to each other.

The Adaptive Optics (AO) is a technique which allows to restore this loss of angular resolution by correcting the effects of atmospheric turbulence. In operation on several astronomical observatories for almost 20 years, it is now applied to other domains where imaging suffers from inhomogeneous media as cellular microscopy, ophthalmology, functional imaging, etc. This technology is based on a deformable mirror which corrects in real time the incoming wave front by using information coming from a sensor which measures the turbulent phase called « WaveFront Sensor » (WFS).

Until very recently, the great majority of AO systems had used the Shack-Hartmann WFS. New concepts based on Fourier filtering have however just been put in operation in several professional observatories and their results seem to outperform the Shack-Hartmann. We mention in particular the Pyramid WFS which provides images with an astonishing quality at the Large Binocular Telescope or the Zernike WFS which allows to considerably improve the performance of the exoplanets imager at the Very Large Telescope.

In spite of these instrumental achievements, these Fourier based WFSs are still lacking of maturity. Since they would potentially be chosen for the AO systems of the future Extremely Large Telescopes, this thesis aims to consolidate their theoretical understanding and to optimize these Fourier based WFSs.

We firstly developed a mathematical framework where the optical theories of diffraction are applied to the Fourier based wave front sensing. Resulting in general equations, it allows to describe all the WFSs based on this concept (as Pyramid and Zernike WFSs). They are, for the first time, unified under the same formalism. Secondly we developed a common performance criteria following the usual requirements of astronomical adaptive optics in order to rigorously compare these sensors.

Another consequence of this theoretical framework's development is then in-

troduced to test new WFSs which derive from the pre-existent designs. It allows us to introduce the notion of « WFSs class » which consists in a generalization of the existing sensors with original parameters which become flexible : from two Zernike and Pyramid WFSs we get an infinity of sensors in the Zernike's and Pyramid's WFSs classes.

We then explored these two classes using both numerical simulations and analytical approach. The objective was to identify the influence of class' parameters on performance criteria in order to optimize optical designs with regard to the instrumental requirements. New configurations of the Pyramid class –that we called « Flattened pyramids »– show promising behaviors and are studied in details.

The thesis ends with the presentation of an optical bench able to generate almost all of the Fourier based WFSs which would allow to validate experimentally the predicted theoretical results.

Keywords : Wavefront sensing, Pyramid wave front sensor, Fourier optics, adaptive optics.

# Remerciements

J'entame l'écriture des fameux *Remerciements* deux semaines tout juste avant ma soutenance de thèse. Je m'y attelle dans l'appartement de vacances de mes grands-parents où, durant mes trois années de doctorat, je suis venu me ressourcer tout près de la grande Bleue, sur une presqu'île bien connue. Le ciel est en cette heure absolument limpide, j'y cherche sans succès quelques brumes d'altitude mais le vent d'Ouest léger refuse aux cirrus de s'attarder. Je regarde le large pin qui ombrage le balcon. Je m'y suis attablé pour écrire ces mots. Je le connais bien ce balcon, j'y ai passé des centaines d'heures ; je peux même affirmer que s'il fallait rester quelque part, ici m'irait bien.

Pendant ces trois ans de thèse, j'ai donc passé un week-end sur deux à rendre mien ce territoire quasi insulaire. Par la terre d'abord, couvrant de mes pas les sentiers qui courent sous la pinède et s'escarpent dans les falaises ; et sous l'eau aussi, avec masque et tuba, trouvant grottes, cathédrales, tunnels, épiant les poissons, taquinant les poulpes, volant les oursins... J'y ai été chaque fois très heureux. Alors, à bien réfléchir –et puisqu'il faut commencer ces *Remerciements* par quelqu'un– je vous remercie vous, Papi. Mamie. Merci de m'avoir permis de profiter de cette retraite paisible et de m'y adonner à mes activités favorites. Cette sérénité a été le terreau fertile de mes travaux de recherche.

Dans un registre semblable, j'en profite pour également remercier le reste de ma famille (ainsi que Juju). Je ne suis pas souvent remonté à la maison, dans le Nord mais sachez que rêvassant dans le TGV Marseille-Lille, aucune fois je ne me suis inquiété : c'est chez moi que je rentrais. Ces courts retours ont été de parfaites bouffées d'oxygène.

Au confort de l'esprit, il faut bien associer un confort plus matériel. Celui-ci m'a été assuré par le système scolaire français, sa dernière incarnation étant l'École Normale Supérieure. Voilà maintenant huit ans qu'elle m'accompagne. J'y ai reçu une formation irréprochable : ses professeurs ont affuté ma sensibilité physique et m'ont laissé autonome pour l'activité de recherche. Dans ses murs j'ai fait des rencontres qui m'ont changé la vie ; sans commune mesure, mon monde s'en est trouvé élargi. Je devrais citer –et remercier!– tous ces enseignants disponibles et excellents, ces amis chers et influents mais je dois me limiter en mentionnant d'abord celui qui fut le plus en rapport avec mes activités scientifiques, à savoir Erwan. Merci à toi l'ami. Tu as relu mon manuscrit avec une attention des plus

extrêmes et inspiré par ta curiosité insatiable des modifications essentielles à la bonne compréhension de mes travaux. J'ai hâte de flâner à nouveau avec toi sur le vieux Port, à observer les sars cachés contre le tombant du quai tout en discourant sur la raison mathématique de la limite de diffraction... Je nomme également deux autres personnes qui m'ont grandement aidé au début de ma thèse. Il s'agit de mon professeur Serge Varjabédian et d'un ami matheux, Loic. Ils ont su promptement répondre à des questions théoriques complexes attenantes au couteau de Foucault. Sans leur aide conjointe, ma thèse aurait eu une toute autre nature.

Mais je me suis quelque peu –et utilement– égaré. Je voudrais préciser les raisons de ma gratitude envers le "système scolaire français" car il s'agit de vanter un aspect du fonctionnement de l'ENS. Je ne veux pas par là susciter une quelconque polémique : je sais être un privilégié. Il n'empêche que le confort financier octroyé par l'ENS durant mes quatre premières années de formation a été un allié fondamental lors de mes études : j'ai simplement pu m'y consacrer sans retenue. Il est à regretter –taxez-moi d'idéaliste ou mieux, de naïf– que ce système ne se systématisé ou, *a minima*, ne s'étende pas plus largement pour la population étudiante. J'ajoute que la bourse, systématiquement accordée par l'ENS pour les thèses en province et dont j'ai donc profité m'a permis de définir en toute liberté mon sujet de thèse. Je sais que cela est, de nos jours, un luxe des plus extrêmes aussi je me répète : merci à ce système

Mon arrivée au LAM s'est fait sans la moindre difficulté. L'équipe du LOOM –Kacem en tête– s'est montré très accueillante et le reste du personnel du laboratoire charmant et disponible. J'ai ressenti d'emblée une atmosphère tant sérieuse que décontractée, mélange qui, de ma conception, est idéal pour s'attaquer à cette chose si sérieuse qu'est la Science. J'ai eu l'impression –et elle se confirma– qu'on faisait au LAM de la recherche de haut niveau sans pour autant que l'humain en pâtisse. (Je tiens ce discours un peu patelin en connaissance de cause : mes amis thésards ne sont pas toujours si élogieux en ce qui concerne leur labo.) Je tiens donc à remercier d'un coup toute l'équipe du LOOM ainsi que la direction du LAM (Marc, Jean-Gabriel notamment) et son service administratif.

Dès les premiers jours, mes deux chefs de thèse, Benoit et Thierry ont très vite installé une ambiance de franchise et de rigolade studieuse. Elle n'a jamais disparu tout au long de la thèse. Benoit, tu m'as toujours fait confiance, laissant libre cours à mes approches parfois fantasques et toi Thierry, tu as toujours cherché à canaliser mes idées pour les rendre utiles et compréhensibles à la communauté. Ce mélange de style m'a beaucoup plu au point que je cherche en vain la moindre tension entre nous. Peut-être avez-vous été parfois inquiets ou plutôt dubitatifs, je n'en ai rien ressenti, aussi j'aime à croire que cette thèse a été tout aussi agréable pour vous qu'elle l'a été pour moi. Un immense merci à vous deux. D'autant que vous m'avez très rapidement fourni un coloc de choix en la personne de Jeff' ! Sa franche bonhomie et son expertise tant informatique



que scientifique ont rendu notre premier contact très facile. Ont suivi de longues semaines durant lesquelles les questions candides ont commencé par fuser pour finalement se tarir peu-à-peu. Jeff', tu m'as fait gagner un temps considérable en m'évitant une large partie de la fastidieuse bibliographie ainsi que les errements de la prise en main des codes numériques. Merci, pour ce départ tonitruant et pour les nombreuses discussions scientifiques qui ont continué par la suite. C'est ça la vraie science ! Et merci aussi pour le Rove, tu m'as donné l'impulsion. L'année prochaine, on se le fait d'un bout à l'autre en kayak !

À ce stade des remerciements, je me rends compte que si je continue comme cela, il va me falloir faire un paragraphe pour chacun. Est-ce bien raisonnable ? car j'ai peur que cette section en devienne démesurée... j'avoue en être un peu embêté... Le ciel d'ailleurs s'est largement couvert et le vent passé Est. Les marins doivent s'amuser sur leur voiliers bariolés... Quoiqu'il en soit, un vrai vertige me tient à me remémorer tous ces moments passés à vos côtés : mes vies professionnelle et privée se sont tellement mélangées pendant ces trois ans qu'il m'est infiniment difficile de parler de l'une sans parler de l'autre... Essayons tout de même. En n'oubliant personne.

Parlons de... parlons de... Sabri ! Tu seras un peu le guide de ce paragraphe décousu. Pour Sabri donc, c'est très simple. On associera facilement des discussions sur l'impression 3D et le polissage sous contrainte aux matchs au Vélodrome. Mais Sabri, c'est aussi un carnet d'adresse bien fourni : je pense donc à Alix, à Fanny, à leur maison à la campagne et aux parties de pétanque ! Comme j'ai pensé à l'OM, Nico s'impose dans ma tête ; le meilleur souvenir avec lui, c'est la *Remontada* du Barça (Sabri, fallait pas rentrer chez toi ce jour-là...) Comme je pense à Nico, je pense à Batman et si je pense à Batman il faut que je parle de Fred. Combien de discussions sur la physique on a eues, Fred ? Dans ton bureau bien rangé ou pendant les pauses interminables. J'aurais aimé travailler un peu plus avec toi. Qui sait ? on aura peut-être l'occasion à l'avenir de collaborer ! Cela me fait penser que tu venais au Barbu en deuxième année ! Il y avait Orion à l'époque, c'était agréable de t'avoir comme stagiaire : tu as éclairci des points fondamentaux avec tes travaux et c'était bien de t'avoir comme élève ensuite : les montages de l'agrég c'était un vrai régal ! Au Barbu, il y avait souvent Amandine. Amandine, tu es la seule dans le Sud qui a, ce que j'appellerais *l'esprit du Nord*. Je ne me sentais jamais plus chez moi qu'à évoquer avec toi le Carnaval de Dunkerque. Puisqu'on parle de Carnaval, il n'est guère compliqué de se retrouver à la Plaine. La Plaine... il faut la remercier elle aussi ! Combien de fois ai-je trainé mes tongs avinées sur ton macadam sale ? Combien de fois tu ne nous as pas aidé à choisir qui du Champ de Mars ou du 31, qui du Surcouf ou du Petit Nice allait entendre nos propos bruyants, joyeux et parfois cohérents ? Heureusement, le Longchamp lui, nous rendait la tâche plus aisée ! C'est toi qui m'a convaincu, Longchamp, de me plaire à Marseille. Fiable fournisseur de Perriers et de Picons. Le premier sans parcimonie, le second

avec Modération ; c'est du moins ce qu'on se disait jusqu'à ce qu'arrivent d'un coup Carlos, Charlotte, Olive, Arthur et Émeline. C'était l'heure alors d'envoyer les pintes pour discuter PSF, cinéma et bien sûr corono... Du Longchamp à chez moi, on passe par la Ruche alors je pense à toi, Sara, qui de longs mois habita presque chez moi. Ballade belle et étrange qu'a été cette époque... C'est Sabri encore qui m'a fait te rencontrer ! Sacré Sabri. Je te remercierai jamais assez de m'avoir présenté Marseille –et Martigues!– comme tu l'as fait. Sache d'ailleurs qu'il y a un *kakemphaton* caché dans ma thèse ! Merci aussi de m'avoir corrigé mon article ! J'avais inversé l'axe  $x$  et l'axe  $y$ , c'est vrai. Tiens, tant que j'y pense –et étant donné que tu es un acteur hors du commun– j'en profite pour dire combien j'ai été content de jouer dans *Swing in Marseille*. Merci Lulu pour l'initiative. Excuse moi de ne pas avoir été enthousiaste dès le début. Merci Gui, merci Thibault pour avoir immortalisé l'expérience ; je regarderai ça dans quelques années et lâcherai sûrement une petite larme de nostalgie ! C'est pratique de penser à ce clip, tout le monde ou presque y a participé. Qui donc ai-je oublié ? Ah oui, il y a Yannick. Cela ne fait pas bien longtemps qu'on se connaît mais on va se côtoyer après la thèse. À Fresnel, et au vélodrome évidemment. M'est avis que l'on va bien se marrer à l'avenir. J'en profite en passant pour te dire que j'ai été content de discuter de ton stage avec toi. C'était bien instructif que tu me partages tes questionnements sur la modulation. Il s'agissait là de problèmes assez subtils. Qui d'autre dans le clip... ah oui ! Will ! Will, je te souhaite une bonne continuation dans tes choix de supporteurisme ! Toulouse a, à mon humble avis, une bien moins bonne équipe que le RCT ! Mais quoiqu'il en soit, je me souviendrai de nos matchs de foot le midi qui nous mettaient de si bonne humeur ! et aussi aux soirées au Shamrock avec Manu. Manu, merci pour tout. Tu m'as montré un aspect de la recherche qui jusque là m'était inconnu. Je ne manquerai pas de venir quémander quelques conseils s'il m'arrive dans le futur d'avoir plus de responsabilités. Puisqu'on est au Shamrock, il faut forcément que je parle de Prosper. Tu me manques l'ami... Quand je propose de partir à Malmousque après le labo, plus personne ne répond d'un grand oui enthousiaste ! La demie heure de vélo effraye tout le monde... J'avoue aussi que tes petits montages photos me faisaient bien rire. Mettre ma tête sur le corps de Balmont, il fallait oser ! Allez Lens ! Sache Taï, que j'utilise à fond les chaussons de plongée que tu m'as offerts, mon confort en chasse s'en est trouvé bien amélioré. Un mulet idiot en a d'ailleurs fait les frais, c'était la semaine dernière. Par qui terminer ce paragraphe chaotique ? ... .. Mélanie ! Touche fraîcheur de la fin de thèse. De la jeunesse, de la répartie et une infatigable envie de faire la fête. Je suis content que tu restes au LAM, tu pourras t'occuper de Sabri et on se reverra souvent !

Restent Roro, Mich' et NaN. Je vous extrais du paragraphe cafouillage par envie de contraste. Roro, il m'a suffi de te voir écrire dans ton carnet pour savoir que nous allions nous entendre à merveille. Et cela n'a pas loupé ! Combien de

débats haletants sur la Canebière, combien de soirées fortuites chez moi à finir mes bières belges, combien de discussions sur la Création, sur l'Écriture... Ton livre d'ailleurs s'ennuie dans mon sac, je le lirai dès que cette thèse sera terminée. Sois fier d'y avoir mis un point final. Peu de gens ont ton énergie. Si un jour tu te cherches du boulot, celui-là t'ira. Crois moi. Continue. Écris.

Mich'. J'ai rarement rencontré quelqu'un d'aussi humble et d'aussi zen. Je te vois, je suis moi. Tu as été un compagnon de tous les instants. Tu m'as suivi à la pêche lors de froides soirées d'hiver, à user les turlutes pour leurrer ces idiots de calamars. Sous l'eau, tu étais aussi avec moi à traquer les poulpes ! Vivement l'ouverture ; avec ta veine et ton œil de chasseur, on va s'en faire des salades délicieuses. On utilisera la recette de la grand-mère à (sic !) Nico... Tu m'as emmené à 3000. J'avais oublié que notre travail c'était de regarder les étoiles. Ce retour aux sources m'a fait un bien fou. J'espère que tout cela se répètera encore de nombreuses fois. Merci pour tout.

NaN. Enfin. On peut dire que j'en ai mis du temps à te rencontrer... Un an entier perdu à ne pas te côtoyer. Heureusement qu'AO4ELT t'a présentée à moi. Je voudrais isoler quelque anecdote idoine pour illustrer ce que je te dois mais je suis absolument incapable de choisir parmi les centaines de moments de partage que nous avons vécus ces deux dernières années... Je regarde au-dessus du pin qui toujours obstrue la vue de mon balcon et m'aperçoit que le temps est passé à l'orage. De lourds cumulus bourgeonnent en cohorte grossissante. Je me dis que tu n'es pas très loin, sur le bateau avec Val' et Alex –merci à vous les gars, pour la voile et l'apnée, pour la grimpe, pour les grues...– et qu'aussitôt ces *Remerciements* achevés, je vous rejoindrais pour continuer nos aventures... Oui, voilà l'anecdote, elle reste à écrire ! À tout de suite Anaïs !

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Remerciements</b>	<b>11</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>17</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>26</b>
<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>1 Analyse de Surface d'Onde</b>	<b>35</b>
1.1 Analyse de surface d'onde et bijectivité	35
1.1.1 « Tout est ASO, rien n'est ASO. »	35
1.1.2 Bijectivité	36
1.1.3 Notion de méta-intensité	36
1.1.4 Reconstruction du front d'onde	37
1.2 L'importance d'être linéaire	38
1.2.1 Linéarité, calibration et matrice d'interaction	39
1.2.2 Phases descriptibles – Phases invisibles	40
1.2.3 Reconstruction en présence de perturbation	43
1.2.4 Reconstruction avec variation de système	45
1.3 Méta-intensités	46
1.3.1 Conséquences sur les critères de performance	47
<b>2 Trois systèmes optiques</b>	<b>50</b>
2.1 Cadre théorique	50
2.1.1 Énergie d'un champ électromagnétique	51
2.1.2 Propagation libre	51
2.1.3 Passage à travers des éléments diffractants	52
2.1.4 Division du faisceau	53
2.1.5 Intensité sur le détecteur	54
2.2 Imagerie en plan focal	55
2.2.1 Système optique	56

2.2.2	Opérateur Système Optique	57
2.2.3	Plan pupille - Plan Focal	57
2.3	Filtrage de Fourier	57
2.3.1	Système optique	58
2.3.2	Opérateur Système Optique	58
2.3.3	Expérience historique d'Abbe	59
2.4	Coronographie	60
2.4.1	Système optique	60
2.4.2	Opérateur Système Optique	61
<b>3</b>	<b>Filtrage de Fourier</b>	<b>63</b>
3.1	Relation entrée-sortie d'un système à Filtrage de Fourier	63
3.1.1	Interprétation via la réponse impulsionnelle	64
3.1.2	Interprétation via l'opérateur de filtrage	65
3.2	Description des masques	66
3.2.1	Pavage du plan de Fourier	66
3.2.2	Réponse impulsionnelle du masque	67
3.2.3	Opérateur de Filtrage	68
3.3	Pavages remarquables	69
3.3.1	Pavage cartésien	69
3.3.2	Pavage polaire	71
3.3.3	Opérateurs remarquables	71
3.4	Extension à la modulation	73
3.4.1	Phases de modulation	73
3.4.2	Fonction de poids	73
3.4.3	Intensité modulée	74
3.4.4	Modulation tip/tilt	74
<b>4</b>	<b>Analyse de surface d'onde par filtrage de Fourier</b>	<b>80</b>
4.1	Espace des phases descriptibles	81
4.1.1	Aberration de piston	81
4.1.2	Flux localement nul	81
4.2	Développement de Taylor de l'intensité	82
4.2.1	$p$ -ième moment de la phase à travers le masque	82
4.2.2	$q$ -intensités	83
4.2.3	Graphe entrée/sortie de l'ASO	83
4.2.4	Une condition nécessaire à la bijectivité	84
4.2.5	Applications	85
4.3	Lumière polychromatique	87
4.3.1	Dépendances avec la longueur d'onde	88
4.3.2	Intensités monochromatiques	90
4.3.3	Conditions d'achromatisme.	91
4.3.4	Masques achromatiques	92

4.3.5	Conséquences sur les intensités	93
4.4	Présence de bruit	94
<b>5</b>	<b>Méta-intensités</b>	<b>97</b>
5.1	Vers la linéarité	97
5.1.1	Opération de tare	98
5.1.2	Normalisation par rapport au spectre	100
5.1.3	Propagation du bruit des intensités vers les méta-intensités	101
5.2	Autres opérations sur la méta-intensité	101
5.2.1	Opération de <i>binning</i>	102
5.2.2	Une transformation TO notable	103
<b>6</b>	<b>Un cadre pour comparer et optimiser les ASO à filtrage de Fourier</b>	<b>105</b>
6.1	Degrés de libertés	106
6.1.1	Étage optique	106
6.1.2	Détecteur	106
6.1.3	<i>Post-Processing</i>	107
6.2	Cadre des simulations numériques	107
6.2.1	Source	107
6.2.2	Champ incident	108
6.2.3	Propagation	112
6.2.4	Masque de Fourier	112
6.2.5	Intensités	112
6.2.6	Opérations matricielles	113
6.2.7	Matrices d'interaction	113
6.3	Critères de Performance	113
6.3.1	Modes Propres, Modes vus	114
6.3.2	Sensibilité et Dynamique	114
6.3.3	Propagation des bruits	117
6.3.4	Méta-pixels pertinents	118
6.3.5	Robustesse de l'ASO vis-à-vis de la source	119
<b>7</b>	<b>Des ASO à filtrage de Fourier</b>	<b>122</b>
7.1	Masques utilisés en Filtrage de Fourier	122
7.1.1	Couteau de Foucault	122
7.1.2	Masques de Hilbert	125
7.1.3	Masque Pyramide	127
7.1.4	Masques " <i>rooftop</i> "	129
7.1.5	Masque de Zernike	131
7.1.6	<i>Point Diffraction Interferometer</i>	132
7.1.7	<i>Optical Differentiation</i>	133
7.2	Masques utilisés en Coronographie	134
7.2.1	Masque de Lyot	135

7.2.2	Masque de Roddier&Roddier	136
7.2.3	Masque 4-quadrants	138
7.2.4	Masque Vortex	139
<b>8</b>	<b>La classe des ASO de Zernike</b>	<b>142</b>
8.1	Approche analytique	143
8.1.1	$q$ -intensités	143
8.1.2	Opérateur de Zernike	145
8.2	Sensibilité, Dynamique et paramètres de la classe Zernike	148
8.2.1	Influence du paramètre $\delta$	148
8.2.2	Influence du paramètre $r$	150
8.3	Autres critères de performance	155
8.3.1	Méta-pixels pertinents	155
8.3.2	Modes propres, Modes vus	156
8.3.3	Propagation des bruits	157
8.3.4	Robustesse vis-à-vis de la source	159
<b>9</b>	<b>La classe des ASO Pyramide</b>	<b>169</b>
9.1	La Classe Pyramide	171
9.1.1	Masques considérés	171
9.1.2	Modulation tip/tilt	173
9.1.3	Réponses impulsionnelles, opérateurs de Filtrage	174
9.1.4	Intensité constante.	175
9.2	Critères de performances	178
9.2.1	Intensités linéaire et quadratique	178
9.2.2	Sensibilité et Dynamique	179
9.2.3	Propagation bruit	187
9.2.4	Zone d'intérêt	188
9.2.5	Chromatisme	190
9.2.6	Fabrication	191
9.2.7	Synthèse de l'étude	192
9.3	Implémentation expérimentale	193
9.4	Figures	197
<b>10</b>	<b>Analyseur Pyramide : compléments analytiques</b>	<b>213</b>
10.1	Description analytique des masques pyramidaux à 4 faces	213
10.1.1	Formalisme des pavages	213
10.1.2	Champ sur le détecteur	214
10.1.3	Pyramide à angle infini	215
10.2	De nouvelles méta-intensités	217
10.2.1	Un premier exemple	217
10.2.2	Cartes de pente	218
10.2.3	Autres cartes des pentes	221

<b>11 Analyse de front d'onde par filtrage de Fourier et déconvolution</b>	<b>223</b>
11.1 Déconvolution	223
11.2 Fonction de transfert d'un ASO	224
11.2.1 Approximation de la pupille infinie	225
11.2.2 Approximation de la pupille glissante	226
11.2.3 Application à la Pyramide modulée	228
11.3 Reconstruction de la phase	228
11.4 Applications	235
11.4.1 Quel rayon de modulation ?	235
11.4.2 Limitation du nombre de mode à corriger	237
<b>Conclusion</b>	<b>243</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>244</b>
A Notations	244
A.1 Opérateurs	244
A.2 Produit scalaire et normes	246
A.3 Fonctions remarquables	246
B Un exemple de transformation <b>TO</b>	247
C Un senseur Vortex ?	248
D Couteau de Foucault à une dimension	256
<b>Bibliographie</b>	<b>261</b>



# Liste des figures

1.1	Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction lorsque la méta-intensité est sur-échantillonné vis à vis du nombre de phases injectées. $m > b$ .	41
1.2	Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction lorsque la base de phase injectée est surabondante vis à vis du nombre de méta-pixels : $m < b$ .	41
1.3	Transformation matricielle <b>TO</b> effectuée sur une méta-intensité.	47
2.1	Description générale d'un système optique	51
2.2	Modélisation d'un système optique à deux branches.	54
2.3	En haut : passage d'un échantillonnage 4x4 vers un échantillonnage 2x2 pixels. En bas, matrice de <i>binning</i> associée à cette opération.	56
2.4	Système d'imagerie en plan focal.	56
2.5	Système de filtrage de Fourier.	58
2.6	Expérience d'Abbe. En haut (resp. en bas), filtrage des fréquences spatiales sur la direction verticale (resp. horizontale).	59
2.7	Filtrage de Fourier d'une plume placée en plan pupille. En haut le filtre de Fourier ne laisse passer que les hautes fréquences, l'image résultante ne contient que les détails de la plume. En bas, seule la forme globale de celle-ci subsiste puisque le filtre n'a laissé passer que les basses fréquences spatiales.	60
2.8	Système optique de la coronographie	61
3.1	Schéma de principe d'un système à filtrage de Fourier. Le masque $m$ est l'unique paramètre du design.	63
3.2	Pavage cartésien du plan focal.	69
3.3	Pavage polaire du plan focal. Le paramètre $r$ règle le rayon du disque central.	71
3.4	Système de filtrage de Fourier <b>avec dispositif de modulation</b> .	73
3.5	Équivalence entre modulation tip/tilt et filtrage de Fourier avec source étendue. Les coefficients tip/tilt codent la position angulaire d'un point de l'objet. La fonction de poids $w$ code la brillance de ce point.	76

3.6	À gauche : Type de modulation tip/tilt –hélas statique– qui admet un masque équivalent. À droite : masque équivalent correspondant au masque précédent translaté.	79
4.1	Graphe typique entrée/sortie d'un ASO. L'entrée correspond à l'amplitude d'une phase arbitraire. La sortie est la valeur de l' <b>intensité en un point du détecteur</b> .	84
5.1	Opération de tare illustrée sur les graphes typiques d'entrée/sortie de l'intensité et de la méta-intensité minimale pour un mode de phase quelconque en un point arbitraire du détecteur.	99
5.2	En haut, opération méta-intensité minimale normalisée pour l'échantillonnage 4x4. La norme 2 de $mI(\phi_0)$ vaut 1/4. En bas, même chose pour après <i>binning</i> . La norme 2 de $mI'(\phi)$ vaut 1/2.	102
5.3	En haut, opération méta-intensité pour l'échantillonnage 4x4. En bas, même chose après <i>binning</i> . On observe que le mode $\Phi_0$ est bien codé dans la configuration 4x4 tandis qu'elle est équivalente à la phase nulle en 2x2. Autrement dit, $\Phi_0$ est invisible pour un ASO en échantillonnage 2x2.	103
5.4	Illustration du choix des pixels pertinents via la transformations <b>TP</b> sur un détecteur 2x2 dans lequel on ne souhaiterait garder que les pixels $\pi_1$ et $\pi_4$ . <b>P</b> est la matrice de permutation permettant de mettre dans les deux premiers indices les pixels d'intérêts. <b>T</b> vient ensuite les sélectionner.	104
6.1	Pupille d'entrée considérée pour la totalité de l'exposé. Le support fait 256x256 pixels. La pupille à un diamètre de 64 pixels. Les pixels noirs sont à 0. Les pixels blancs valent $1/\sqrt{3228}$ assurant ainsi un flux total du champ incident unitaire.	108
6.2	Quatre premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike (on oublie le piston qui est invisible aux senseurs à filtrage de Fourier) qui correspondent donc à 14 modes. La structure pyramidal suit la structure $Z_n^m$ précédente.	111
6.3	Gauche. Relation entrée/sortie typique d'un senseur présentant une saturation. La courbe en pointillé présente une grande sensibilité et une faible dynamique. La courbe en continue a un comportement opposé. Droite : Relation entrée/sortie typique d'un méta-pixel arbitraire $i$ vis-à-vis d'un mode de Zernike $Z_j$ pour un ASO à filtrage de Fourier.	115
7.1	Différentes configurations pratiques utilisant le principe du couteau de Foucault pour déterminer des phases aberrantes. Crédit [Wilson, 1975].	123
7.2	Les 4 Couteaux de Foucault	123

7.3	Effet d'un filtrage de Fourier par le masque $m_x^+$ du couteau de Foucault sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.	125
7.4	Effet d'un filtrage de Fourier par le masque $m_x$ de Hilbert sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.	127
7.5	Photographie d'une pyramide transparente et description dans le formalisme des pavages. $m_\Delta$ est la fonction de transparence du masque Pyramide. $\alpha$ code l'angle de son sommet.	128
7.6	Effet d'un filtrage de Fourier par un masque pyramidal sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.	129
7.7	Effet d'un filtrage de Fourier par le masque en toit sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.	131
7.8	Effet d'un filtrage de Fourier par un masque de Zernike sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré. $2r = 1.06\lambda/D$ où $D$ est le diamètre de la pupille circulaire.	132
7.9	Gauche : Principe de fonctionnement du <i>Point Diffraction Interferometer</i> . Crédit [Smartt and Steel, 1975]. Droite : Description schématique du masque utilisé par le <i>PDI</i> et paramètres de pavage associés. $a \in ]0, 1[$ code l'atténuation globale du front d'onde. $(x_y, y_t)$ est le centre du <i>pinhole</i> . $r$ code son diamètre qui est petit devant la taille de la tâche de diffraction.	133
7.10	Schéma de principe d'un système optique de coronographie.	135
7.11	Description originale du coronographe de Lyot.	135
7.12	Effet d'un filtrage de Fourier par un <b>masque de Lyot</b> sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ <b>juste avant le stop de Lyot</b> puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.	136

- 7.13 Effet d'un filtrage de Fourier par un **masque de Roddier&Roddier** sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré. 137
- 7.14 Effet d'un filtrage de Fourier par un **masque 4 quadrants** sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré. 139
- 7.15 Épaisseur optique d'un masque vortex. 139
- 7.16 Effet d'un filtrage de Fourier par un **masque de vortex** sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré. 140
- 8.1 De gauche à droite : Intensité linéaire sur le détecteur entier. Pixels pertinents. Intensité linéaire tronquée sur les pixels pertinents. Le mode de Zernike pris pour cet exemple est le focus  $Z_2^0$ . 144
- 8.2 De gauche à droite : Intensité quadratique sur le détecteur entier ; on notera la présence de photons hors du support de la pupile d'entrée. Pixels pertinents car ils contiennent toute l'information linéaire. Intensité quadratique tronquée sur les pixels pertinents. Le mode de Zernike pris pour cet exemple est le focus  $Z_2^0$ . 145
- 8.3 Opérateur de Zernike appliqué à la pupille d'entrée pour différentes valeurs de rayon :  $2rD/f\lambda$  vaut successivement 0.53 (a), 1.06 (b), 2.12 (c), 3.60 (d) et l'**infini** (e). On représente ici une coupe dans la diagonale de  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]$ . On remarquera que la courbe rouge correspond également à la coupe de la pupille d'entrée puisque  $\mathcal{Z}_\infty = \mathcal{I}$ . 147
- 8.4 Intensité constante pour trois configurations de masques de Zernike.  $r$  assure l'**équipartition de l'énergie** dans les trois cas et  $\delta$  vaut de gauche à droite 0,  $\lambda/4$  et  $\lambda/2$ . On note l'extinction sur le support de la pupille dans la dernière configuration. 148
- 8.5 Gains scalaires des **sensibilité, dynamique** et **facteur SD** en fonction du piston différentiel  $\delta$  des masques de la classe d'ASO de Zernike. L'analyseur historique de Zernike correspond à  $\delta/\lambda = 0.25$  tandis que le Roddier&Roddier correspond à  $\delta/\lambda = 0.5$  149
- 8.6 Sensibilité normalisée mode-à-mode pour les 14 premiers Zernike. Les symboles correspondent aux trois cas de rayon :  $2rD/1.06f\lambda = 0.5$ (o), 1.0 (\*) et 2 ( $\Delta$ ). 150
- 8.7 Coupe dans la diagonale des quantités  $\mathbb{I}_P\phi$  **en rouge**,  $\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P]\phi$  **en noir** et  $\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P\phi]$  **en bleu**. À gauche,  $\phi = Z_1^1$  et à droite  $\phi = Z_2^0$ . 152

- 8.8 Comparaison entre la phase au carré (1<sup>ère</sup> colonne) et les intensités quadratiques normalisées simulées pour 3 valeurs de rayon (trois autres colonnes). En haut, le mode testé est le tip  $Z_1^1$ ; en bas c'est le focus  $Z_2^0$ . 153
- 8.9 Dynamique normalisée mode-à-mode pour les 14 premiers Zernike. Les symboles correspondent aux trois cas de rayon :  $2rD/1.06f\lambda = 0.5(\circ)$ ,  $1.0(*)$  et  $2(\Delta)$ . 154
- 8.10 **Sensibilité, dynamique et facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux trois cas de rayon :  $2rD/1.06f\lambda = 0.5(\circ)$ ,  $1.0(*)$  et  $2(\Delta)$ . 155
- 8.11 Coefficients de propagation de bruit de **lecture** et photon vis-à-vis des fréquences spatiales exprimées en termes de degré radial de Zernike. La configuration optique considérée est celle de l'ASO historique de Zernike. Le flux est unitaire  $s = 1$  et le détecteur à un  $\sigma_{RON}^2$  égal à  $= 1$ . 158
- 8.12 Image de gauche : Pastille de Zernike de rayon  $0.53f\lambda/D$ . Les quatre autres images correspondent à l'intensité en plan focal associées à des sources étendues. La première simule un objet ponctuel ; c'est la référence. Les suivants sont élargis via l'étage de modulation en tip/tilt pour former des anneaux de plus en plus large :  $0.5$ ,  $1$  et  $2f\lambda/D$ . 159
- 8.13 Coupe dans la diagonale des intensités focales de la figure 8.12. Les rayons de modulation suivent le code couleur suivant : **0**, **0.5**, **1** et **2**  $f\lambda/D$ . Les barres verticales indiquent la taille de la pastille de Zernike qui fait effectivement  $1.06f\lambda/D$  de diamètre. 160
- 8.14 Matrices **RB**<sub>mI</sub> (en haut) et **RB**<sub>mI</sub> - **I** (en bas) pour les différentes sources évoquées précédemment. Elles sont générées de gauche à droite par des modulations de rayon  $0$ ,  $0.5$ ,  $1$  et  $2 f\lambda/D$ . La reconstruction est exacte (à gauche) lorsque le reconstituteur correspond à la matrice d'interaction. 160
- 8.15 Intensités linéaires normalisées par rapport au gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $2r/f\lambda=1/2 \times 1.06/D$ . On rappelle que ces structures spatiales sont variables quelque soit la valeur de  $\delta$ . 163
- 8.16 Intensités linéaires normalisées par rapport au gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $r$  assure l'**équipartition de l'énergie**, à savoir :  $2r/f\lambda = 1.06/D$ . 164
- 8.17 Intensités linéaires normalisées par rapport au gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $2r/f\lambda=2 \times 1.06/D$ . 165

8.18 Intensités quadratiques normalisées vis-à-vis du gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. $2r/f\lambda=1/2 \times 1.06/D$ . On rappelle que ces structures spatiales sont variables quelque soit la valeur de $\delta$ .	166
8.19 Intensités quadratiques normalisées pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. $r$ assure l' <b>équipartition de l'énergie</b> : $2r/f\lambda = 1.06/D$ .	167
8.20 Intensités quadratiques normalisées vis-à-vis du gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. $2r/f\lambda=2 \times 1.06/D$ .	168
9.1 Analyseur Pyramide couplé à un étage de modulation tip/tilt. Crédits. Esposito.	169
9.2 Forme optique de masques pyramidaux. De gauche à droite, le nombre de faces vaut : 3, 4, 6 et $\infty$ . La pyramide à 4 faces correspond à la configuration historique. Le dernier masque conique est appelé <i>axicon</i> .	171
9.3 Filtrage optique par un objet pyramidal lorsque l'angle de son sommet diminue. En bas : intensités constantes correspondantes sur le détecteur dans le cas d'une pyramide à 4 faces non modulée.	172
9.4 Différents types de pavage du plan de Fourier pour la classe Pyramide : 3, 4 et 6 faces.	173
9.5 Exemples de modulation tip/tilt. Les quatre chemins de modulation en haut correspondent à une modulation <b>circulaire</b> avec un rayon de modulation croissant de gauche à droite. Ils sont compatibles avec tous les masques de la classe Pyramide. Les quatre chemins du bas ne sont adaptés qu'au masque 4 faces.	174
9.6 De gauche à droite : Forme optique des masques pyramidaux pour $n=3, 4, 6$ et $\infty$ . Module et argument des réponses impulsionnelles associées.	176
9.7 Module des réponses impulsionnelles de la pyramide à 4 faces pour des angles de plus en plus petits.	177
9.8 Intensités constantes pour la pyramide à 4 faces sans modulation avec un angle vérifiant de gauche à droite $2f\alpha/D = 1.5, 1, 0.5$ et $0.1$	177
9.9 Intensités constantes pour les pyramides à 3, 4, 6 faces et le cône sans modulation avec un angle au sommet vérifiant $2f\alpha/D = 1.5$	178
9.10 Intensités constantes pour la pyramide à 4 faces avec un angle séparant les images lorsque le rayon de modulation circulaire $r_m/f$ vaut de gauche à droite : 0, 1, 2 et $5f\lambda/D$ .	178
9.11 <b>Sensibilité</b> et <b>dynamique</b> pour les 14 premiers polynômes de Zernike lorsque le <b>nombre de faces varie</b> . $n = 3(\Delta), 4(\circ)$ et $\infty(*)$ . L'angle permet la totale séparation des pupilles.	181

- 9.12 **Sensibilité, dynamique et facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux trois nombres de faces :  $n=3$  ( $\Delta$ ), 4 (\*) et  $\infty$  ( $\circ$ ). Les courbes vertes donnent le comportement de l'ASO de Zernike historique. Elles permettent de faire le lien avec le chapitre 8. 182
- 9.13 **Sensibilité et dynamique** pour les 14 premiers polynômes de Zernike lorsque le **rayon de modulation varie**.  $r_m/f/f = 0$ ( $\circ$ ), 2 (\*) et 5 ( $\Delta$ )  $\lambda/D$ . Pyramide à 4 faces avec un angle séparant les images de la pupille. 184
- 9.14 **Sensibilité, dynamique et facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux rayons de modulation :  $r_m/f/f=0$  ( $\circ$ ), 2 (\*) et 5 ( $\Delta$ )  $\lambda/D$ . 184
- 9.15 **Sensibilité et dynamique** pour les 14 premiers polynômes de Zernike lorsque l'**angle du sommet varie**.  $2f\alpha/D = 1.5$ ( $\circ$ ), 0.15 (\*) et 0.05 ( $\Delta$ ). On a choisi une pyramide à 4 faces sans modulation. 186
- 9.16 **Sensibilité, dynamique et facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent à trois angles vérifiant :  $2f\alpha/D=1.5$  ( $\circ$ ), 0.15 (\*) et 0.05 ( $\Delta$ ). 186
- 9.17 Coefficients de propagation de bruit de **lecture** (à gauche) et de photon (à droite) vis-à-vis des fréquences spatiales exprimées en termes de degré radial de Zernike. Le flux est unitaire  $s = 1$  et le détecteur à un  $\sigma_{RON}^2$  égal à  $= 1$ . Les courbes vertes correspondent à l'ASO historique de Zernike. 187
- 9.18 Support des intensités linéaires (en haut) et quadratiques (en bas). De gauche à droite : pyramide 4 faces sans modulation ; avec modulation ; à 3 faces ; pyramide aplatie. 189
- 9.19 Zone d'intérêt du détecteur pour une pyramide 4 faces modulée ou non avec un angle vérifiant de gauche à droite :  $\frac{2f\alpha}{D}=1.5, 1$  and 0.5 et 0.1. 189
- 9.20 Zone d'intérêt du détecteur pour les pyramides à 3, 4 et 6 faces ainsi que pour le cône. 190
- 9.21 Nombre minimal de méta-pixels par mode de phase en fonction de l'angle de la pyramide pour trois nombres de faces différentes : 3 faces (courbe continue), 4 faces (tirets) et 6 faces (pointillées). 190
- 9.22 Réalisations pratiques de pyramides en **transmission**. À gauche, une pyramide 4-faces chromatiques. À droite, une pyramide rendue **achromatique**. 191
- 9.23 Exemples d'imperfections de "toit" (gauche) et d'asymétrie (droite) pour la pyramide à 4 faces. 192

9.24	Passage de la forme optique d'un masque pyramidal (ici $n = 4$ ) à sa forme de "Fresnel" via l'opération modulo $\lambda$ puis à sa forme discrétisée. Le <i>SLM</i> devra reproduire cette dernière.	194
9.25	Banc optique	195
9.26	Montage déplié.	196
9.27	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 4 faces sans modulation. $2f\alpha/D = 1.5$	197
9.28	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 4 faces sans modulation.	198
9.29	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 3 faces sans modulation.	199
9.30	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 3 faces sans modulation.	200
9.31	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Cône sans modulation.	201
9.32	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Cône sans modulation.	202
9.33	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec $r_m/f = 1\lambda/D$ .	203
9.34	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec $r_m/f = 1\lambda/D$ .	204
9.35	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec $r_m/f = 2\lambda/D$ .	205
9.36	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec $r_m/f = 2\lambda/D$ .	206
9.37	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec $r_m/f = 5\lambda/D$ .	207
9.38	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec $r_m/f = 5\lambda/D$ .	208
9.39	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces sans modulation. $2f\alpha/D = 0.05$	209
9.40	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces sans modulation. $2f\alpha/D = 0.05$	210
9.41	Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces sans modulation. $2f\alpha/D = 0.15$	211
9.42	Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces sans modulation. $2f\alpha/D = 0.15$	212
10.1	Partie réelle et partie imaginaire du champ sur le détecteur lors d'un filtrage par l'élément $\Omega^{++}$ .	215



11.1 Fonctions de poids, réponses impulsionnelles de l'ASO et <b>FTA</b> pour la pyramide à 4 faces à grand angle et pour une modulation circulaire donc le rayon $r_m$ augmente du haut vers le bas : 0, 2, 5 et $10f\lambda/D$ .	229
11.2 Moyennes orthoradiales de la <b>FTA</b> (rouge) et de la fonction de poids (noir) pour des modulations circulaires de rayon égaux à 0, 2, 5 et $10f\lambda/D$ (de haut en bas, de gauche à droite) en fonctions des fréquences spatiales radiales exprimées en $f\lambda/D$ .	230
11.3 Ingrédients nécessaires à la fabrication du filtre de Wiener <b>W</b> (carte de droite). Les pixels blancs (resp. noirs) de la carte de régularisation valent l'infini (resp zéro).	230
11.4 Passage d'une phase $\phi$ à travers la pyramide modulée ( $r_m = 10f\lambda/D$ ) et déconvolution de la méta-intensité résultante.	232
11.5 Fonction d'étalement de point associée à la phase $\phi$ (gauche). Phase résiduelle (milieu) et phase associée (droite).	232
11.6 Phase aberrante $\phi_0$ à estimer et sa fonction d'étalement de point.	233
11.7 De gauche à droite. Phase estimée, résiduelle et FEP associée au bout de 20 itérations.	234
11.8 Évolution de la norme RMS de la phase résiduelle $\phi_n$ en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de déconvolution.	234
11.9 Signal typique obtenu par déconvolution de la méta-intensité.	234
11.10 Phase turbulente à mesurer (gauche) ainsi que sa fonction d'étalement de moins associée.	236
11.11 Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon $r_m = 10f\lambda/D$	236
11.12 Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon $r_m = 5f\lambda/D$	236
11.13 Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon $r_m = 2f\lambda/D$	237
11.14 Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon $r_m = 0f\lambda/D$	237
11.15 Norme RMS des résidus pour une phase initiale à 2 radians. Le code couleur est le suivant : $r_m = 10, 5, 2$ et $0f\lambda/D$ .	238
11.16 De haut en bas, de gauche à droite : filtre passe-bas utilisé, filtre de Wiener tronqué, phase estimée, résidus et FEP.	239
11.17 De haut en bas, de gauche à droite : filtre passe-bas utilisé, filtre de Wiener tronqué, phase estimée, résidus et FEP.	239
11.18 Interprétation de l'effet du dioptre incliné via un décalage de l'axe optique. Les lignes bleues correspondent au front d'onde.	245

.19	Effet d'un filtrage de Fourier par les 4 premiers <b>masques vortex</b> (de haut en bas, $k=1, 2, 3$ et 4) sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré (qui correspond également à l'intensité constante).	249
.20	Sensibilité mode-à-mode pour les 14 premiers Zernike. Le masque vortex $k = 1$ correspond à la courbe (*); le masque coronographique $k = 2$ à la courbe ( $\Delta$ ) et le masque $k = 3$ à la courbe ( $\circ$ ).	250
.21	Support de l'information linéaire pour les ASO associés aux masques vortex $k = 1, 2$ et 3.	251
.22	<b>Sensibilité, dynamique et facteur SD</b> fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux trois masque vortex : $k = 1$ (*), 2 ( $\Delta$ ) et 3 ( $\circ$ ).	252
.23	Intensités linéaires pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. Le paramètre $k$ du vortex vaut 1.	253
.24	Intensités linéaires pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. Le paramètre $k$ du vortex vaut 2 et correspond donc au <b>masque vortex coronographique</b> .	254
.25	Intensités linéaires pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. Le paramètre $k$ du vortex vaut 3.	255
.26	Dispositif du Couteau de Foucault à 1 dimension.	256
.27	Polynômes de Legendre de première espèce $P_n$ (gauche) et de seconde espèce $Q_n$ (droite). Le code couleur est le suivant : $P_1, Q_0, P_2, Q_1, P_3, Q_2, P_4, Q_3$ et $P_5, Q_4$	258

## Liste des tableaux

4.1	Coefficients devant les intensités constante, linéaire et quadratiques monochromatiques suivant la nature du spectre. 1 <sup>ère</sup> ligne, source monochromatique adaptée à la longueur d'onde de référence ; 2 <sup>nde</sup> ligne, source monochromatique à $\lambda_a \neq \lambda_0$ ; 3 <sup>ème</sup> ligne, source polychromatique.	94
5.1	Intensités sur le détecteur pour des ASO à filtrage de Fourier et modulation suivant le spectre de la source et le chromatisme de l'ASO.	97

5.2	<b>Intensités linéaires</b> associées à la <b>méta-intensité minimale</b> pour des ASO à filtrage de Fourier et modulation suivant le spectre de la source et le chromatisme de l'ASO.	99
5.3	<b>Intensités linéaires</b> pour la <b>méta-intensité normalisée par rapport au spectre</b> définie par l'équation (5.5) pour des ASO à filtrage de Fourier et modulation suivant le spectre de la source et le chromatisme de l'ASO.	100
7.1	Résumé des caractéristiques des masques associés au <b>Couteau de Foucault</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	126
7.2	Résumé des caractéristiques des masques de <b>Hilbert</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	127
7.3	Résumé des caractéristiques du masque <b>Pyramide</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	129
7.4	Résumé des caractéristiques des masques <b>rooftop</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	130
7.5	Résumé des caractéristiques du masque de <b>Zernike</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	132
7.6	Résumé des caractéristiques du masque du <b>Point Diffraction Interferometer</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	133
7.7	Résumé des caractéristiques des masques du <b>Optical differentiation wave front sensor</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	134

7.8	Résumé des caractéristiques du masque de <b>Lyot</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	136
7.9	Résumé des caractéristiques du masque de <b>Roddier&amp;Roddier</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	137
7.10	Résumé des caractéristiques du masque <b>4 quadrants</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	138
7.11	Résumé des caractéristiques du masque <b>vortex</b> . De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.	140
8.1	Jeux de paramètre $(\delta, r)$ correspondant à deux masques historiques de la <b>Classe Zernike</b> . La pupille d'entrée est ici considérée circulaire de rayon $D$ . La source est monochromatique à la longueur d'onde $\lambda$ .	143
8.2	Bruit cumulé de reconstruction.	158
8.3	Norme de Frobenius de la matrice estimant l'efficacité du reconstruc-teur sur les matrices d'interaction établies pour des sources de plus en plus établies.	161
9.1	Correspondance <b>jeux de paramètres</b> et <b>figures</b> des cartes d'inten-sités linéaires et quadratiques.	179
9.2	Correspondance <b>paramètre étudié</b> et <b>figures</b> lors de l'étude des sensibilités et dynamiques mode-à-mode et fréquentielle.	180
9.3	Bruits de lecture et de photons cumulés sur 24 degrés radiaux et moyennés pour l'ASO de Zernike, la pyramide à 4 faces non modu-lée à grand angle, la pyramide aplatie non modulée et la pyramide modulée à grand angle.	188

# Introduction

Tout système optique destiné à l'imagerie est intrinsèquement limité par la diffraction : sa capacité à distinguer deux objets proches –sa résolution angulaire– est en effet contrainte par la taille de sa pupille d'entrée et sa longueur d'onde d'observation. Un système qui aurait par exemple une pupille de diamètre  $D$  et observerait à la longueur d'onde  $\lambda$  ne pourrait en aucun cas espérer voir des détails plus petits que  $\lambda/D$  en angle apparent. Cette loi s'appelle le critère de Rayleigh et peut être appliquée à profit au système d'imagerie le plus utilisé dans le monde : l'œil. L'ordre de grandeur de la pupille humaine est de 0.5cm et il observe à 600nm, c'est le milieu du spectre visible. Le pouvoir de résolution de l'œil vaut donc 50 secondes d'arc. Cette résolution angulaire signifie que l'humain est normalement capable de séparer les phares d'un voiture à une distance de 10 km. Si ce résultat ne choque personne, certains préciseront à très juste titre que cela n'est vrai qu'à condition d'avoir une bonne vue. Là se cache justement la subtilité du critère de Rayleigh : il donne la résolution angulaire **optimale** impossible à dépasser à  $D$  et  $\lambda$  fixés. Quiconque porte des lunettes s'en rend bien compte : lorsqu'il ne les porte pas, la limitation de résolution angulaire n'est pas imposée par la diffraction mais bien par la gravité de la myopie ou de l'astigmatisme qui rend tout "flou".

Les astronomes qui ont construit les grands observatoires terrestres s'en sont, eux aussi, aperçus. Les quatre télescopes du *Very Large Telescope* font par exemple chacun 8,2 mètres de diamètre, ce qui leur octroie une résolution angulaire maximale théorique de 0.03" à 0.6 $\mu$ m. Pourtant, les premières images issues de ces géants n'avaient pas une telle finesse mais tout au plus celle d'un télescope amateur de 30cm, c'est-à-dire 1 seconde d'arc... Pour expliquer ces performances amoindries, on peut se permettre une légère digression qui demande de prendre une grande respiration.

Ceux qui font de la plongée sous marine connaissent sûrement cet effet. Au début de l'été quand la mer est calme et que les eaux de surface commencent à être d'une température agréable, l'envie de s'aventurer à de plus grandes profondeurs se fait souvent insoutenable. Le canard effectué, les doigts pincés sur le nez, on descend alors dans l'eau claire pour se retrouver parfois devant un étrange mur trouble. Le traversant bien vite –il fait tout au plus un demi-mètre– on sent au dessous l'eau glaciale glisser dans le dos.

L'explication physique de ce phénomène est assez simple : deux masses d'eau, de température et de salinité différentes, sont superposées. Leur indice optique est différent mais uniforme en leur sein : les rayons lumineux s'y propagent de façon rectiligne, ces eaux sont limpides. Entre ces deux couches se trouve une interface. Les deux eaux s'y côtoient mais ne se mélangent pas complètement, c'est une zone de turbulence. L'indice optique y varie spatialement et temporellement. Suivant le principe de Fermat, les rayons lumineux sont fortement déviés, la vue devient trouble.

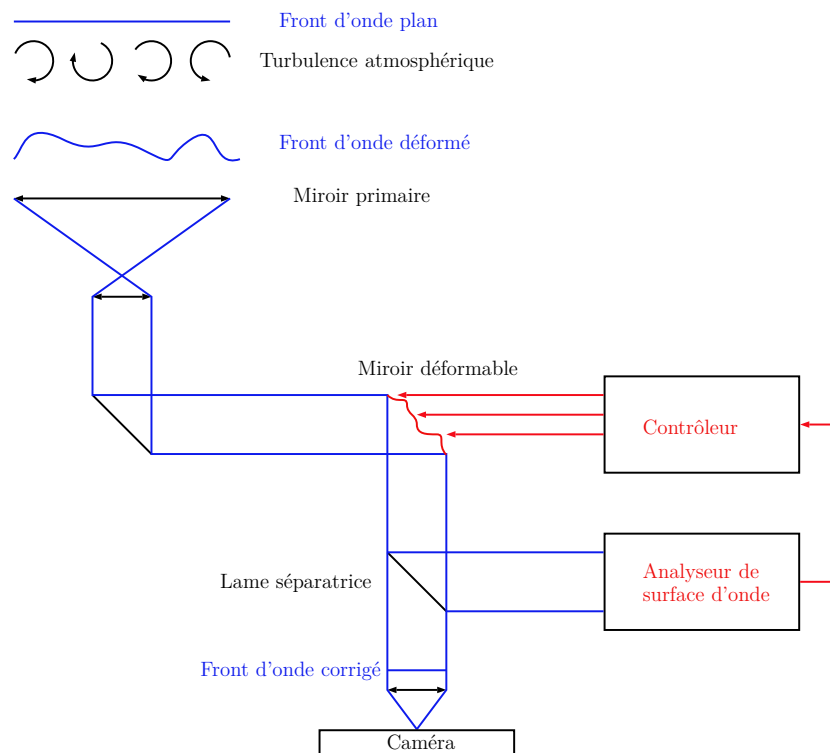
De tels effets existent également dans l'atmosphère. Des couches d'air de densité et de température différentes se superposent. Chacune a son vent propre. À chaque interface, de la turbulence s'établit, les airs peinent à se mélanger et les indices optiques deviennent variables. La lumière qui provient des étoiles, passant à travers ces couches inhomogènes est déviée et quand elle arrive sur le miroir primaire du télescope, la qualité de l'imagerie en souffre considérablement. C'est ce qui limite la résolution angulaire des grands télescopes terrestres. Heureusement, une solution existe.

Si les myopes, astigmatés ou autres presbytes voient mal sans lunettes c'est que leur cornée n'a pas la forme exacte de la lentille. On dit qu'elle présente une aberration de phase. Pour corriger ce problème, le verre de la lunette a une forme dite "complémentaire" qui permet de revenir à une lentille parfaite, la lumière ainsi redressée peut alors focaliser sur la rétine. D'un point de vue formel, la situation n'est pas différente pour les télescopes terrestres, la déviation induite par la turbulence atmosphérique peut se résumer à une phase aberrante. Pour rendre la vue à ces immenses yeux tournés vers le ciel il faut donc leur trouver un ophtalmologue, pour déterminer quelle correction appliquer, ainsi qu'un bon opticien, pour leur fabriquer le verre de lunette adéquat.

Cela paraîtra anecdotique mais sachez qu'au début de ma vie, je voyais très bien. Vers mes sept ans ma vue a commencé à décliner. Heureusement cette évolution était assez lente, un examen ophtalmologique tous les deux ans, de nouvelles lunettes et je voyais à nouveau les plus petits caractères même du fond de la classe. Les médecins diront que le temps caractéristique d'évolution de l'aberration de phase de ma cornée est de l'ordre de l'année. En ce qui concerne l'atmosphère, les choses se compliquent considérablement : le temps caractéristique d'évolution est de l'ordre de la milliseconde... Pas d'autres solutions donc que de trouver un ophtalmologue et un opticien très réactifs. C'est la raison essentielle de l'avènement "tardif" de la technologie dite d'Optique Adaptative qui depuis 1990 révolutionne l'observation au sol.

Voici son principe historique. Un astronome identifie un objet digne d'intérêt scientifique. Il peut avoir diverses natures : nébuleuse, amas, galaxie, etc., mais doit cependant avoir dans son voisinage proche au moins une étoile assez brillante –ou étoile guide– qui sert de source de référence. La lumière qui

provient de l'objet chemine à travers l'espace, est perturbée par l'atmosphère et finit par atteindre le télescope. Celui-ci en crée dans son plan focal une image grâce à une caméra. Si on ne fait rien, cette image est affectée par la turbulence atmosphérique. Pour corriger la perturbation, on analyse d'abord la lumière provenant de la source de référence grâce à une lame séparatrice qui l'isole et prélève un peu de son flux pour l'envoyer vers un "Analyseur de Surface d'Onde (ASO)" –l'ophtalmologue– qui va coder la phase aberrante en un signal électronique. Un ordinateur en temps réel transforme ensuite ce signal en une liste d'ordre –sorte d'ordonnance– pour contrôler un miroir déformable –l'opticien– qui s'adapte ainsi à la turbulence en prenant la forme complémentaire du front d'onde déformé. Via une structure en boucle d'asservissement fonctionnant un peu plus vite que la turbulence (quelques kHz) la lumière qui se dirige vers la caméra scientifique se trouve ainsi redressée en temps réel. Le pouvoir de résolution s'améliore alors considérablement.



Principe de l'optique adaptative en astronomie.

L'efficacité d'une boucle d'Optique Adaptative basique comme celle décrite dans le schéma précédent se juge selon deux critères, à savoir la qualité de la reconstruction (quelle résolution angulaire est finalement atteinte ? atteint-on la limite de diffraction ?) et la couverture du ciel (on a vu la nécessité d'une source de référence assez brillante pour effectuer l'analyse de front d'onde, or certaines parties du ciel ne possèdent pas de telles étoiles, l'OA ne peut s'exercer pour des

objets astronomiques dans ces régions "vides").

On donne un bref historique de l'Optique Adaptative en astronomie [Davies and Kasper, 2012]. Tout commence en 1990 à l'observatoire de La Silla : le système ComeON [Boyer et al., 1990] fait fonctionner pour la première fois une boucle d'OA sur le ciel. 10 ans plus tard, le système NAOS [Rousset et al., 2003] au *Very Large Telescope* concrétise le rêve des astronomes puisque pour la première fois, un télescope terrestre offre une meilleure résolution angulaire que le télescope spatial Hubble. En 2005, une solution astucieuse permet d'étendre considérablement la couverture du ciel : on atténue la magnitude limite des étoiles guides en leur associant des étoiles artificielles créées grâce à des LASER. Les observatoires Keck [Wizinowich et al., 2006], Gemini [Neichel et al., 2014], Subaru et le *VLT* profitent de cette avancée. En 2012, grâce à un grand nombre de sources de références (naturelles comme LASER), de plusieurs analyseurs de surface d'onde et miroirs déformables, il devient possible de compenser la turbulence atmosphérique sur un champ de vue très large. Un nouveau critère de performance émerge de cette technologie : la taille du champ de vue corrigé. 2014 voit la mise en service de l'instrument SPHERE [Beuzit et al., 2008] au *VLT* qui associe l'OA et la coronographie<sup>a</sup> ouvrant ainsi la voie à l'imagerie des exoplanètes.

Outre ces francs succès, l'Optique Adaptative s'est également épanouie dans des domaines où l'imagerie souffre de milieux transparents inhomogènes spatialement et temporellement tels la microscopie biologique, l'imagerie fonctionnelle ou l'ophtalmologie [Roorda et al., 2002]. Pour ce dernier cas, il est maintenant possible de compter les cellules de la rétine malgré les mouvements erratiques des yeux et le film lacrymal sans cesse renouvelé recouvrant la cornée. Ceci permet la détection précoce de la DMLA<sup>b</sup>.

En ce qui concerne l'avenir de l'OA astronomique, la communauté scientifique porte son attention vers les colossaux projets d'*Extremely Large Telescopes*. À titre d'exemple, l'*E-ELT* [Gilmozzi and Spyromilio, 2007] pour *European-Extremely Large Telescope*, d'ores-et-déjà en construction au Chili, mesurera 39 mètres de diamètre ! Le Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, dans lequel j'ai travaillé durant ma thèse, est justement co-responsable d'un des deux instruments de première lumière (prévue en 2024) de l'*E-ELT* : l'instrument HARMONI<sup>c</sup> [Thatte et al., 2010]. Cette thèse n'est pas sans lien avec la forte implication du LAM dans ce projet, ses équipes préparent d'ailleurs activement le dimensionnement et le design de cet instrument de l'*E-ELT*.

Cette thèse ne porte pas sur l'optique adaptative dans son entièreté. On ne se

---

a. La coronographie est une discipline observationnelle qui a pour vocation d'imager des objets ténus cachés dans le halo d'une source voisine très brillante.

b. Dégénérescence maculaire liée à l'âge.

c. *High Angular Resolution Monolithic Optical and Near-infrared Integral field spectrograph*



focalise que sur le module d'analyse de surface d'onde. Autrement dit, on étudie le dispositif optique qui utilise les photons de la source de référence pour coder l'information portant sur la phase aberrante.

Historiquement, cette analyse était assurée par le senseur de Shack-Hartmann [[Shack and Platt, 1971](#)] qui offrit ses bons et loyaux services pour les premières générations d'OA. Les attentes en termes de performance (couverture du ciel quasi-totale et qualité de la correction) des futures boucles d'OA pour les *ELTs* semblent cependant inadaptées à ce senseur tant la rupture technologique qui accompagne ces géants est profonde.

Heureusement, de nouveaux ASO fournissent des performances très prometteuses sur les OA actuelles les plus avancées. Ainsi le senseur "Pyramide" a fourni des corrections impressionnantes au *Large Binocular Telescope* [[Esposito et al., 2012](#)] et dans d'autres observatoires renommés [[Close et al., 2012](#)], [[Jovanovic et al., 2014](#)]. Le concept de ce senseur pyramide, développé depuis une quinzaine d'année d'après une idée originale de R. Ragazzoni [[Ragazzoni, 1996](#)], permet en effet de combiner de très bonnes performances avec une robustesse au bruit plus importante que le Shack-Hartmann. La robustesse au bruit permet d'asservir la boucle d'OA sur des sources faibles et donc d'augmenter la couverture de ciel, enjeu majeur pour l'astronomie à haute résolution au sol. Par ailleurs, le senseur pyramide présente une simplicité de calcul permettant de gérer le grand nombre de degrés de liberté, ce qui le rend très attractif dans le contexte applicatif de l'*E-ELT*.

Un autre ASO, le senseur de Zernike [[Zernike, 1934](#)] a prouvé dans l'instrument SPHERE du *VLT* sa grande efficacité en tant que second étage d'OA pour la mesure fine des phases résiduelles ou autres aberrations non corrigées par le système d'OA principal. Cela fait de lui un candidat parfait pour composer l'OA dite "extrême" qui veut atteindre des niveaux de correction à la limite de la diffraction.

Si ces deux senseurs ont été développés séparément, il apparaît que leur design est en réalité assez semblable. Ils sont en effet basés sur le principe de filtrage optique de Fourier. Si l'objectif initial de cette thèse était essentiellement de consolider le savoir-faire théorique et technique de l'analyseur Pyramide. Le rapprochement fait entre ce senseur et l'ASO de Zernike m'a poussé à développer une théorie générale sur les ASO basés sur le Filtrage de Fourier. Il apparaît d'ailleurs que de nombreux autres designs rentrent dans cette catégorie. L'exposé se structure de la façon suivante :

Un premier chapitre présente de façon très générale ce qu'est l'analyse de surface d'onde. On y propose une définition du dispositif "ASO". On évoque également l'intérêt des systèmes linéaires avec la phase aberrante pour l'estimation de cette dernière. Le second chapitre présente trois systèmes optiques récurrents en astronomie dont fait partie le système de filtrage de Fourier. On s'y attarde en détail dans le chapitre 3 dans lequel on présente un formalisme mathématique puissant basé sur la notion de pavage du plan focal. Cet effort permet de décrire

l'entièreté des ASO à filtrage de Fourier dans un cadre unique. Le chapitre suivant fait la synthèse entre l'analyse de surface d'onde et le filtrage de Fourier. Ce travail a permis la publication de l'article [Fauvarque et al., 2016]. Le chapitre 5 introduit la notion de "méta-intensité" qui est une quantité construite numériquement et qui permet de manipuler les ASO de façon linéaire. Des critères de performance communs à tous les ASO à filtrage de Fourier sont présentés dans le chapitre 6. Ils rendent possibles la comparaison et l'optimisation dans la suite de la thèse. On décrit dans le chapitre 7 le panorama des ASO à filtrage de Fourier en utilisant le formalisme développé précédemment. On s'attaque enfin dans le chapitre 8 et 9 à l'étude des ASO inspirés par le Zernike et la Pyramide. Ces deux designs ont en effet permis de définir des "classes" de senseurs présentant de nombreux paramètres libres qui permettent d'ajuster les comportements des ASO vis-à-vis des attentes instrumentales. Ces études ont abouti à la publication de deux articles [Fauvarque et al., 2015] et [Fauvarque et al., 2017]. Le premier présente notamment un senseur très prometteur appelé "Pyramide aplatie". On fournit dans le chapitre 10 des compléments analytiques très éclairants sur le senseur Pyramide pour évoquer dans un dernier chapitre une méthode de reconstruction de phase inédite basée sur la déconvolution. Un article dédié à cette approche qui est une conséquence directe des développements théoriques présentés au long de l'exposé est en préparation [Fauvarque et al., prep].

Précisons enfin que cette thèse qui porte exclusivement sur des capteurs ne comporte pourtant aucun aspect à proprement parler expérimental. L'objectif initial était au contraire de dégager un maximum de prédictions, ainsi qu'un cadre robuste en vue de faciliter les futures validations expérimentales. Conséquemment les mathématiques y jouent un grand rôle même si les outils invoqués restent assez simples. La première moitié de l'exposé –où est exposé ce cadre théorique– est donc assez formelle tandis que la seconde n'est qu'applications ; les simulations numériques y sont légions et les conclusions pratiques exploitables très nombreuses. J'ai mis en annexe les trois articles publiés lors de cette thèse, ils résument de façon satisfaisante mes travaux en étant bien plus concis, les mathématiques étant passées sous silence.

# 1 Analyse de Surface d'Onde

On introduit dans ce premier chapitre ce qui constituera la ligne directrice de cette thèse, à savoir : l'**analyse de front d'onde**. Dans un souci de généralité on présente cette notion dans un cadre physique minimal et à l'aide d'outils mathématiques aussi simples que possible. Le lecteur désireux de compléter cette approche pourra se référer à l'ouvrage [Roddier, 1999].

Le contexte physique est le suivant : une source lumineuse émet une collection de champs électromagnétiques incohérents, chacun décrits par leur amplitude complexe. Ceux-ci se propagent et subissent durant cette propagation une perturbation de leur front d'onde qu'on peut caractériser par une **phase dite aberrante**, on la note  $\phi$ . Les champs perturbés par  $\phi$  rentrent ensuite dans un système optique, traversent ses divers éléments et sont enfin convertis en une intensité  $I$  via un détecteur.

Un système optique sera dit "**Analyseur de Surface d'Onde**" (ASO) si il fournit une intensité principalement dépendante de la phase aberrante  $\phi$  ; la lumière provenant de la source, via les champs qu'elle émet, n'est alors qu'un porteur d'information. Autrement dit, un ASO est un dispositif optique qui utilise des photons pour coder une phase aberrante en une intensité. On peut résumer la situation grâce au schéma suivant :

$$\text{Phase } \phi \xrightarrow[\text{Propagation optique}]{\text{ASO}} \text{Intensité } I(\phi) \quad (1.1)$$

## 1.1 Analyse de surface d'onde et bijectivité

### 1.1.1 « Tout est ASO, rien n'est ASO. »

On essaye de raffiner la notion de "dépendance de l'intensité vis-à-vis de la phase" afin de définir plus rigoureusement l'analyseur de front d'onde. On propose la définition suivante :

**Définition : Analyseur de Surface d'onde.**

*Un dispositif optique est dit "Analyseur de Surface d'Onde (ASO)" si il existe un sous-ensemble non vide de l'espace des phases qui est en bijection avec son image –au sens mathématique– à travers le système optique. On appelle alors ce*

sous-ensemble "ensemble des phases descriptibles" et le note  $\mathbb{E}_\phi$ . Son complémentaire dans l'espace des phases tout entier est noté  $\bar{\mathbb{E}}_\phi$  et dit "espace des phases invisibles".

Le point essentiel de cette définition est qu'en soi tout système optique ou presque peut constituer un analyseur de front d'onde si on cautionne qu'il ne décrive qu'un nombre très restreint de phases aberrantes. À l'inverse, tous les systèmes optiques actuels reconnus comme "analyseurs de front d'onde" présentent des limitations intrinsèques les rendant incapables de décrire l'ensemble des phases possibles et imaginables. Aussi nous affirmons par l'aphorisme « Tout est ASO, rien n'est ASO » qu'un analyseur de surface d'onde doit toujours être considéré par rapport aux phases qu'il décrit. Le meilleur des ASO dans un contexte donné sera celui qui a un ensemble  $\mathbb{E}_\phi$  en adéquation avec les attentes expérimentales.

Pour mieux appréhender l'espace des phases descriptibles  $\mathbb{E}_\phi$  associé à un ASO, on précise la notion mathématique de bijectivité d'après laquelle il a été défini.

### 1.1.2 Bijectivité

La fonction qui lie l'entrée et la sortie d'un système optique est la fonction Intensité. Pour savoir si celui-ci constitue un ASO, il faut donc se demander si il existe un espace  $\mathbb{E}_\phi$  non vide telle que sa fonction intensité :

$$\begin{aligned} I & : \mathbb{E}_\phi \rightarrow I(\mathbb{E}_\phi) \\ \phi & \mapsto I(\phi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

est bijective. Cette fonction étant par essence surjective –l'espace d'arrivée est l'image de l'espace de départ– il ne reste qu'à s'assurer de son injectivité ce qui revient à vérifier que :

$$I(\phi_1)=I(\phi_2) \implies \phi_1=\phi_2 \quad (1.3)$$

Autrement dit, si un système optique est un ASO pour l'espace  $\mathbb{E}_\phi$  non vide, il associe à chacune des phases de cet ensemble une intensité unique. Dans l'espace complémentaire  $\bar{\mathbb{E}}_\phi$ , l'ASO est par contre aveugle : des phases différentes peuvent donner des réponses identiques, on ne sait alors distinguer sans ambiguïté des phases aberrantes en observant leur intensité.

### 1.1.3 Notion de méta-intensité

On peut trouver pertinent –on verra pourquoi très vite– d'effectuer des transformations numériques sur l'intensité. On modifie ainsi l'espace de sortie de l'ASO. Néanmoins, afin de préserver la bijectivité entre ce nouvel espace et l'espace des phases descriptibles  $\mathbb{E}_\phi$ , on ne considère que des transformations elles-mêmes bijectives. On les note  $mI$  pour **méta-intensité**, signifiant ainsi qu'elles dérivent des intensités. On précise d'ailleurs que cette distinction sera faite égale-

ment entre les *pixels* qui décrivent les coefficients de l'intensité et les *méta-pixels* qui décrivent ceux de la méta-intensité. Ce *distinguo* permet de traduire le fait qu'un pixel est forcément associé à un réel positif puisqu'il compte le nombre de photons le percutant tandis que le méta-pixel ne présente pas cette contrainte. On prolonge le schéma entrée/sortie de l'introduction (équation (1.1)) :

$$\text{Phase } \phi \xrightarrow[\text{Propagation optique}]{\text{ASO}} \text{Intensité } I(\phi) \xrightarrow[\text{Traitement numérique}]{\text{Transformation } mI} \text{Méta-intensité } mI(\phi) \quad (1.4)$$

Un exemple parlant de transformation  $mI$  est le calcul du centre de gravité des tâches focales des sous-pupilles d'un senseur Shack-Hartmann [Shack and Platt, 1971].

### 1.1.4 Reconstruction du front d'onde

Enfin, il ne faut pas perdre de vue que l'obtention d'une méta-intensité codant la phase n'est qu'une étape dans l'analyse de surface d'onde. L'objectif essentiel d'un ASO reste de remonter à la phase aberrante. Dans l'absolu, cette étape ne présente qu'une difficulté mathématique puisque les espaces des phases et des intensités sont en parfaite bijection. Il suffit donc, en théorie, de connaître la fonction réciproque de la méta-intensité que l'on nomme légitimement le "reconstructeur" pour assurer la mesure du front d'onde. Nous allons voir cependant qu'une telle reconstruction est dans la quasi-totalité des cas impossible.

Il faut pour cela **distinguer la calibration** de l'analyseur **de l'analyse** de surface d'onde à proprement parler. La première vise à connaître un comportement théorique de l'analyseur dans le but d'en déduire l'algorithmie du reconstructeur. La seconde consiste en l'utilisation de ce reconstructeur sur la sortie de l'ASO mesurée pour une phase inconnue dans le but de déterminer cette dernière.

Toutes les difficultés inhérentes à l'analyse de surface d'onde tiennent au fait que les étapes de calibration et d'analyse ne se font pas la plupart du temps dans un cadre physique ou théorique identique.

**Calibration.** On appelle *calibration*<sup>a</sup> d'un ASO, l'étape visant à connaître le comportement de celui-ci lorsque la phase parcourt l'ensemble des phases descriptibles. Ceci a pour but d'en déduire un algorithme numérique de reconstruction. Deux approches cohabitent.

La première se veut **analytique**. Elle explicite, en se basant sur les lois de la physique, la relation entre l'entrée  $\phi$  et la sortie  $mI(\phi)$  lorsque les paramètres du système (nature de la source, design optique de l'ASO, etc.) sont parfaitement connus. Dans le meilleur des cas, cette relation qui se veut bijective est facilement inversible et le reconstructeur correspond alors à la fonction réciproque de la

---

a. Cette appellation de "calibration" s'avère être un anglicisme puisque le terme français consacré est plutôt "étalonnage". On prie le lecteur de nous pardonner ce léger impair.

méta-intensité. Malheureusement, bien souvent, l'inversion de  $mI$  ne peut se faire qu'au prix d'hypothèses simplificatrices, limitant ainsi le champ de validité du reconstituteur.

La seconde approche consiste à recueillir, pour un jeu de paramètres donné, la réponse de l'analyseur lorsque des phases **connues** sont injectées dans le système. L'ensemble de ces associations entrées/sorties est ensuite traité numériquement afin de constituer un reconstituteur. On note que cette approche ne nécessite aucune modélisation physique : les paramètres du système sont certes donnés, ils n'ont pas besoin d'être connus. Un souci inhérent à ce genre de méthode se cache dans le choix des entrées choisies pour calibrer le système. L'espace des phases descriptibles peut contenir en effet une infinité de phases et il n'est pas raisonnable d'envisager de calibrer l'ASO sur cette infinité. Il faudra donc choisir judicieusement celles qui représenteront au mieux cet espace en se disant qu'il y a de grande chance pour que le reconstituteur ne soit efficace que dans un voisinage de ces phases ayant servi à la calibration.

**Analyse.** Lors de l'*analyse*, une phase  $\phi$  inconnue est codée par l'ASO en une méta-intensité. Le reconstituteur utilisé pour estimer cette phase est issu de l'étape de calibration précédente. De nombreuses raisons peuvent induire une différence entre la phase en entrée et la phase reconstruite :

- Du bruit est présent sur le détecteur lors de l'analyse alors qu'il n'y en avait sensiblement moins lors de la calibration. Il peut sembler en effet logique que l'analyse se fasse parfois à faible flux quand la calibration, protocole maîtrisé, se fasse avec une source puissante.

- Le signal de sortie  $mI(\phi)$  n'est pas compatible avec les hypothèses faites pour obtenir un reconstituteur. Celui-ci serait par exemple valable pour les faibles phases alors que la phase à mesurer serait de grande amplitude.

- Un des paramètres du système (par exemple l'extension spatiale de la source ou son spectre) a changé entre la calibration et l'analyse.

On distinguera donc la méta-intensité obtenue lors de l'analyse de la méta-intensité utilisée pendant la calibration. Les performances d'un ASO tiendront donc essentiellement à la "robustesse" de son reconstituteur vis-à-vis des différentes sources de perturbation tout juste évoquées.

## 1.2 L'importance d'être linéaire

On construit dans cette partie des critères de performance basés sur les réflexions générales précédentes dans l'hypothèse où la méta-intensité contient un

terme linéaire<sup>b</sup> avec la phase. Ceci constituera l'**hypothèse linéaire**. Ce terme sera d'ailleurs utilisé pour construire (on verra comment très vite) le reconstruc-teur. En d'autres termes, on suppose que :

$$mI(\phi) = mI_{\text{linéaire}}(\phi) + b(\phi) \quad (1.6)$$

$b(\phi)$  reste le terme venant **perturber** la **modélisation linéaire**. Comme exposée dans la partie précédente, ce terme de perturbation  $b$  aura essentiellement deux natures. La première tiendra à la présence inévitable de **bruit sur le détecteur** qui se sera propagé vers la méta-intensité. La seconde proviendra des erreurs de modèle, à savoir dans notre cas de la présence d'une **dépendance non-linéaire** de la méta-intensité avec la phase.

### 1.2.1 Linéarité, calibration et matrice d'interaction

On commence par exploiter la linéarité supposée au sein de la méta-intensité en utilisant le formalisme matriciel. On munit pour cela l'espace des phases tout entier (phases mesurables comme phases invisibles) d'une base que l'on notera  $\mathbf{B}_\phi = \{\phi_i\}_{i \in [[1, +\infty]]}$ . Toute phase  $\phi$  peut donc s'écrire :

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i \quad (1.7)$$

où les coefficients  $a_i$  correspondent à l'amplitude du mode  $\phi_i$ . On remarque bien évidemment que  $A_\phi \hat{=} (a_1, a_2, \dots)$  décrit exactement la phase  $\phi$ . La linéarité suppo-sée de  $mI_{\text{linéaire}}$  implique ensuite que :

$$mI_{\text{linéaire}}(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i mI_{\text{linéaire}}(\phi_i) \quad (1.8)$$

Si l'on définit  $\mathbf{B}_{mI}$  comme l'image de la base de l'espace des phase par  $mI_{\text{linéaire}}$ , c'est-à-dire :  $\mathbf{B}_{mI} \hat{=} mI_{\text{linéaire}}(\mathbf{B}_\phi)$ , on peut réécrire la relation entrée-sortie (1.6) précédente sous la forme matricielle suivante :

$$mI_{\text{linéaire}}(A_\phi) = \mathbf{B}_{mI} A_\phi \quad (1.9)$$

La matrice  $\mathbf{B}_{mI}$  **caractérise complètement la dépendance linéaire de l'ASO** avec la phase puisqu'elle contient les réponses linéaires de celui-ci à tous les vecteurs de base de l'espace des phases. On remarque que cette étape correspond exactement à la calibration évoquée dans la partie précédente. On appellera  $\mathbf{B}_{mI}$ ,

---

b. Une fonction  $f$  est linéaire sur l'espace des phases si et seulement si elle vérifie :

$$f(\phi_1 + \mu\phi_2) = f(\phi_1) + \mu f(\phi_2) \quad \forall \phi_1, \phi_2 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

la **matrice d'interaction**. Avec ces notations, la méta-intensité perturbée aura la forme suivante :

$$mI(A_\phi) = \mathbf{B}_{mI} A_\phi + B(A_\phi) \quad (1.10)$$

où  $B$  sera le vecteur de perturbation projeté sur la base des méta-intensités. (L'usage des minuscules est consacré aux scalaires, des majuscules aux vecteurs et des majuscules en gras aux matrices.)

On essaye maintenant de distinguer les phases mesurables des phases invisibles en exploitant la forme matricielle de la relation entrée/sortie de l'ASO dans le cas où aucune perturbation ne serait présente.

### 1.2.2 Phases descriptibles – Phases invisibles

Bien qu'il n'y ait aucune raison pour que l'espace des phases entier soit descriptible par une base de dimension finie, on le suppose tout de même afin de pouvoir représenter graphiquement les matrices et fixer les idées. On suppose donc que la base des phases  $\mathbf{B}_\phi$  est de dimension  $b$ . On suppose que l'espace des méta-intensités est descriptible quant à lui par une base de dimension finie égale à  $m$ . La matrice d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}$  a donc une taille  $m \times b$ . On peut d'ores-et-déjà affirmer que son rang vérifiera la relation :

$$\text{rang}(\mathbf{B}_{mI}) \leq \min(m, b) \quad (1.11)$$

qui ne signifie rien d'autre que le nombre de méta-pixels contraint le nombre de phases descriptibles : au mieux un méta-pixel code un mode, c'est à dire  $m=b$ .

Pour connaître quels sont les modes descriptibles et comment ils sont codés par l'ASO, il faut écrire la *décomposition en valeurs singulières* de la matrice d'interaction :

$$\mathbf{B}_{mI} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^t \quad (1.12)$$

$\mathbf{V}$  est une matrice unitaire qui contient les modes de phases propres de l'analyseur de front d'onde que l'on appellera "modes propres d'entrée". Ils sont exprimés comme des combinaisons linéaires des vecteurs de la base  $\mathbf{B}_\phi$  et on les notera  $\{\phi_i^p\}$  avec  $i$  variant de 1 jusqu'à  $b$ . La matrice  $\Sigma$  est diagonale de dimension  $m \times b$ , elle contient les valeurs singulières  $\lambda_i$  associées aux modes  $\{\phi_i^p\}$  qui sont supposées rangées dans l'ordre décroissant :  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_q|$ . La matrice  $\mathbf{U}$  est elle-aussi unitaire, elle fait le passage entre l'espace des phases et l'espace des méta-intensités. Ses vecteurs correspondent à la réponse de l'ASO à chacun des modes de phases propres, on les appellera "modes propres de sortie". Sa dimension est  $m \times m$ . Les schémas 1.1 et 1.2 clarifient ces résultats dans les cas où  $m > b$  et  $m < b$ .

Si cette décomposition est intéressante, c'est qu'elle fait émerger naturelle-



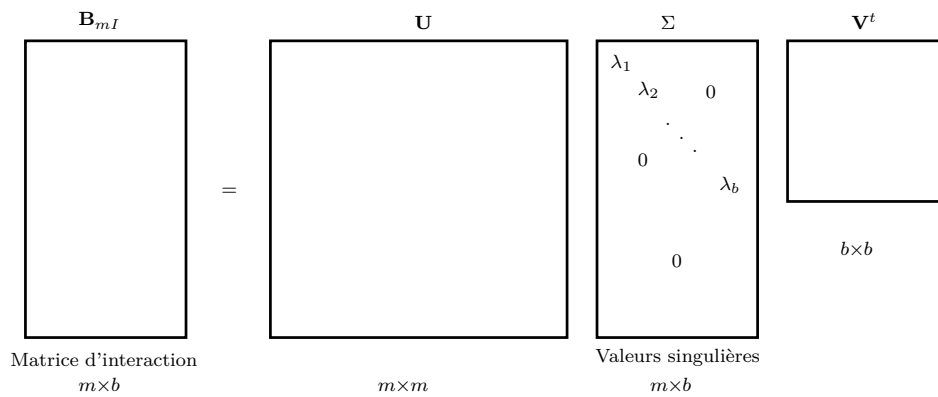


Figure 1.1 – Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction lorsque la méta-intensité est sur-échantillonné vis à vis du nombre de phases injectées.  $m > b$ .

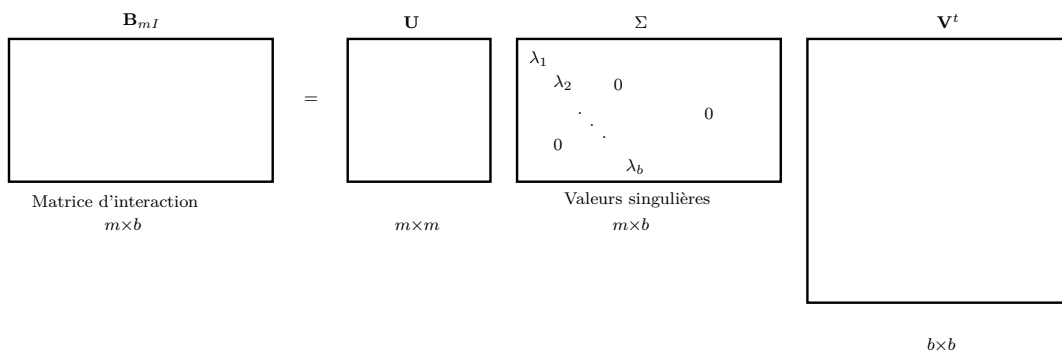


Figure 1.2 – Décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction lorsque la base de phase injectée est surabondante vis à vis du nombre de méta-pixels :  $m < b$ .

ment l'espace des phases mesurables  $\mathbb{E}_\phi$  ainsi que son complémentaire, l'espace des phases invisibles. Les phases mesurables auront en effet pour base les modes propres d'entrée dont les valeurs singulières ne seront pas nulles. Les modes invisibles quant à eux auront pour base les modes propres d'entrée dont les valeurs singulières sont nulles.

Notons un fait important : avec la formulation actuelle les modes propres  $\{\phi_i^p\}$  ne sont calculés que vis-à-vis de la base  $\{\phi_i\}$ . Si cette base ne décrit qu'un sous espace de l'espace des phases tout entier, les modes propres ne caractérisent pas rigoureusement le comportement linéaire de l'ASO puisqu'ils sont contraints d'appartenir à ce sous-espace restreint. En d'autres termes, les modes propres de l'ASO deviennent indépendants de la base  $\{\phi_i\}$  choisie dès lors que celle-ci décrit l'espace des phases **tout entier**. Ajoutons évidemment qu'afin d'échantillonner correctement la réponse à ces phases, on se devra de décrire l'espace des méta-intensités avec une grande résolution. On aura donc intérêt à utiliser des bases de grandes dimensions ( $b, m \rightarrow \infty$ ) lorsque l'on cherchera les modes propres d'un ASO.

À la lumière de ce premier paragraphe on voit donc qu'une conséquence du formalisme matriciel est de faire émerger naturellement, grâce à la décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction, les modes de phases vus ou non vus par un ASO lorsqu'il est modélisé de façon linéaire. Avant d'entamer des réflexions attenantes à la reconstruction de la phase via le formalisme matriciel, on s'attarde un court instant sur le choix de la base des phases  $\mathbf{B}_\phi$  utilisée pour construire la matrice d'interaction.

**Choix de la base des phases.** L'étude d'un ASO **en particulier** peut être un objectif tout-à-fait défendable. Pour cela, on vient de voir que l'attitude la plus sensée consiste à se munir d'une base complète de l'espace des phases pour en construire la matrice d'interaction. On en fait ensuite la décomposition en valeurs singulières pour obtenir, via la matrice  $\mathbf{V}$ , une base des modes de phases propres de l'ASO. Physiquement, celle-ci peut être comprise comme la base des phases la plus adaptée à la nature de l'ASO.

Cependant, dans bien des cas un ASO ne s'étudie pas isolément. Il est en effet comparé à d'autres designs. Et qui dit plusieurs designs dit également plusieurs bases de phases propres (il n'y a aucune raison pour que plusieurs ASO "diagonalisent" sous la même base). On comprend donc que pour comparer des ASO entre eux, il est bien plus pertinent de fixer une base des phases communes à tous plutôt que de privilégier un ASO en particulier en travaillant avec sa base de modes de phases propres. D'autant qu'il existe une base – celles des polynômes de Zernike – très pertinente tant d'un point de vue de l'analyse en fréquences spatiales que de sa compatibilité avec les aberrations optiques habituellement rencontrées par les opticiens. On en reparlera en détails dans le chapitre 6.

On poursuit donc l'exploitation du formalisme matriciel dans cette optique de comparaison entre eux des ASO et on ne travaille pas avec la base des phases propre mais avec une base laissée indéterminée pour le moment que l'on suppose simplement orthonormée. On s'intéresse pour cela aux effets du terme de perturbation  $B(A_\phi)$  dans la reconstruction de la phase à mesurer.

### 1.2.3 Reconstruction en présence de perturbation

On rappelle la forme de la méta-intensité en présence de perturbation :

$$mI(A_\phi) = \mathbf{B}_{mI} A_\phi + B(A_\phi) \quad (1.13)$$

L'objectif de la reconstruction consiste à remonter au vecteur  $A_\phi$  en inversant l'équation précédente. La meilleure façon de le faire dépend la nature et de notre connaissance de la perturbation.

**Reconstructeurs.** Sans aucun *a priori* quant à la nature du bruit, le reconstructeur le plus simple est égal à la *pseudo-inverse* de la matrice d'interaction :

$$(\mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{B}_{mI})^{-1} \mathbf{B}_{mI}^t \quad (1.14)$$

Si la perturbation est d'ordre statistique (du bruit sur le détecteur propagé vers les intensités) et que cette statistique est connue, un meilleur reconstructeur est l'*estimateur de maximum de vraisemblance* [Cubalchini, 1979] qui est défini comme :

$$(\mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{C}_B^{-1} \mathbf{B}_{mI})^{-1} \mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{C}_B^{-1} \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{C}_B$  est la matrice de covariance de la perturbation définie comme  $\langle BB^t \rangle$  où les bra-kets signifie que la quantité  $BB^t$  est moyennée sur toutes les réalisations de la perturbation.

Puisque ce chapitre se veut le plus général possible, on ne tranchera pas quant à la forme de ce reconstructeur et on le décrira simplement par une matrice  $\mathbf{R}$ . On supposera cependant qu'il vérifie :

$$\mathbf{R} \mathbf{B}_{mI} = \mathbf{I}_b \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{I}_b$  est la matrice identité de dimension  $b \times b$ . On pourra donc *assimiler* le reconstructeur, avec toutes les précautions nécessaires, à l'inverse de la matrice d'interaction.

**Erreur d'estimation.** On cherche à estimer une phase  $\phi$  codée par son vecteur  $A_\phi$  qui aurait été codée par l'ASO en une méta-intensité via l'équation :

$$mI(A_\phi) = \mathbf{B}_{mI} A_\phi + B(A_\phi) \quad (1.17)$$

On appelle  $\hat{\phi}$  la phase estimée et son vecteur projeté  $A_{\hat{\phi}}$ . On l'obtient par application du reconstruteur sur la méta-intensité :

$$A_{\hat{\phi}} = \mathbf{R}mI(A_{\phi}) = A_{\phi} + \mathbf{R}B(A_{\phi}) \quad (1.18)$$

L'erreur de reconstruction pour la perturbation  $B$  se résume donc à :

$$A_{\hat{\phi}} - A_{\phi} = \mathbf{R}B(A_{\phi}) \quad (1.19)$$

Pour quantifier l'erreur de reconstruction –que l'on souhaite évidemment la plus faible possible– il faudra donc estimer le terme  $\mathbf{R}B$ . On se souviendra pour cela que le reconstruteur peut être vu comme l'inverse de la matrice d'interaction. Aussi, on souhaitera une matrice d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}$  de norme la plus grande possible. On voudra par contre une perturbation la plus faible possible. Si l'on ne peut rien dire d'absolument général sur ces perturbations puisqu'elles dépendent fortement du design des ASO on peut par contre donner une méthode systématique de quantification de la matrice d'interaction.

**Norme de la matrice d'interaction.** L'efficacité d'un ASO linéaire est fortement corrélée à la norme de sa matrice des méta-intensités  $\mathbf{B}_{mI}$ . On utilise en l'occurrence la norme matricielle dite de Frobenius<sup>c</sup> définie comme :

$$\|\mathbf{B}_{mI}\|_F \hat{=} \text{Tr}(\mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{B}_{mI}) \quad (1.20)$$

On voit que cette norme fait intervenir une matrice carrée de taille  $b \times b$  **réelle symétrique et positive** qui s'avère être riche d'un point de vue physique puisque en posant :

$$\mathbf{S} \hat{=} \mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{B}_{mI} \quad (1.21)$$

on s'aperçoit que les coefficients de  $\mathbf{S}$  correspondent au produit scalaire entre les vecteurs de sortie d'ASO  $mI(\phi_i)$  et  $mI(\phi_j)$  :

$$\mathbf{S}_{ij} = \langle mI(\phi_i) | mI(\phi_j) \rangle, \quad (1.22)$$

en particulier :

$$\mathbf{S}_{ii} = \|mI(\phi_i)\|_2^2 \quad (1.23)$$

On peut donc voir les coefficients diagonaux de  $\mathbf{S}$  comme les sensibilités au carré de l'ASO vis-à-vis des différents modes  $\phi_i$ . Plus un tel coefficient est élevé mieux est donc codé le mode  $\phi_i$ . La comparaison de ces grandeurs pour différents ASO permet de savoir lequel d'entre eux est le plus sensible à tel ou tel mode de phase. On appelle pour cette raison  $\mathbf{S}$  la matrice de sensibilité. Les coefficients non diagonaux témoignent quant à eux du mélange dans l'espace des méta-intensités entre les modes de phase de l'espace d'entrée.

---

c. Toutes les normes sont de toute façon équivalentes en dimension finie.

## 1.2.4 Reconstruction avec variation de système

On évoque dans ce paragraphe l'éventualité où les paramètres du système (essentiellement des paramètres attendant à la source : flux, spectre, forme) évolueraient entre la calibration et l'analyse. Afin de bien séparer les cas, on suppose qu'aucune autre perturbation n'est présente (ni bruit ni non-linéarité). On appelle  $\mathbf{B}_{mI}^c$  la matrice d'interaction élaborée lors de la calibration et  $\mathbf{R}^c$  le reconstruteur que l'on déduit de celle-ci.

Lors de l'analyse, un des paramètres du système change. En toute vraisemblance, la matrice d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}^c$  n'est donc plus en capacité de lier la phase incidente et sa méta-intensité :

$$mI(A_\phi) \neq \mathbf{B}_{mI}^c A_\phi \quad (1.24)$$

De part l'hypothèse de linéarité, il existe cependant une autre matrice *inconnue* qui lie l'entrée et la sortie. On la note simplement  $\mathbf{B}^a$  et on a alors :

$$mI(A_\phi) = \mathbf{B}^a A_\phi \quad (1.25)$$

$\mathbf{B}^a$  est évidemment la matrice d'interaction de l'ASO pour les paramètres de système en place lors de l'analyse mais nous prenons soin de la différencier d'une matrice d'interaction car aucune calibration n'a été menée pour l'obtenir. Sous ces notations on comprend bien en quoi le reconstruteur risque de se tromper : il n'y a aucune raison de remonter à  $A_\phi$  si on l'applique à  $mI(A_\phi)$ .

La robustesse d'un ASO vis-à-vis d'un de ces paramètres tiendra à la possibilité d'utiliser le reconstruteur  $\mathbf{R}^c$  –quitte à le modifier un peu– sur  $mI$  pour remonter tout de même à la phase à mesurer. On ira du cas idéal où "il est possible d'utiliser le reconstruteur tel quel pour une grande variété de paramètres différents" au cas catastrophique où "le reconstruteur est caduque dès lors que le système subit une légère modification". Entre deux, on devra et on pourra adapter le reconstruteur.

On peut quantifier la robustesse d'un ASO vis-à-vis d'un paramètre de deux manières complémentaires. L'une est analytique, l'autre nécessite une calibration.

La première vise à expliciter la dépendance de la matrice d'interaction vis-à-vis du paramètre auquel on s'intéresse afin de comprendre comment on peut le prendre en compte pour adapter le reconstruteur. Ce genre de raisonnements analytiques permettent d'estimer la robustesse d'un design au sens où ils montrent explicitement comment les paramètres jouent sur la méta-intensité et quelles sont les modifications à apporter à sa définition pour l'adapter à une nouvelle situation. Ceci permet alors d'avoir des matrices d'interactions "normalisées" et donc des reconstruteurs intrinsèquement adaptés à un grand nombre

de jeu de paramètres.

La seconde méthode nécessite d'avoir accès à la matrice d'interaction pour les paramètres de l'analyse, ce qui est dans la pratique assez peu courant (le problème disparaîtrait de fait puisqu'on pourrait refabriquer le reconstruteur à partir de cette matrice) mais qui est facilement faisable dans un contexte de simulation numérique. Conservant les notations précédentes (cette matrice est  $\mathbf{B}_a$ ), l'étude de la robustesse de l'ASO vis à vis du paramètre qui a varié consiste à quantifier l'écart entre la matrice issue de l'application du reconstruteur sur  $\mathbf{B}_a$  et la matrice identité  $\mathbf{I}$  :

$$\mathbf{R}^c \mathbf{B}^a - \mathbf{I} \quad (1.26)$$

Cette quantification pourra tout à fait se faire grâce à la norme de Frobenius. Si l'écart est nul, le paramètre en question n'a pas d'impact sur la reconstruction. Si ce n'est pas le cas, il faudra s'interroger sur la possibilité d'adapter le reconstruteur pour, au mieux annuler l'écart, sinon le diminuer.

## 1.3 Méta-intensités

Dans cette section, on explore les possibilités offertes par le traitement numérique des méta-intensités introduites dans le paragraphe 1.1.3 dans le but d'améliorer l'analyse de surface d'onde. On rappelle qu'une telle méta-intensité est sensée créer une bijection entre l'espace des intensités et un nouvel espace dans lequel on peut espérer une linéarité avec la phase. Cette propriété assure notamment que les espaces des phases visibles et invisibles restent stables sous la transformation numérique  $mI$ .

L'amélioration éventuelle de la méta-intensité tient essentiellement à la "condensation" de l'information encodant la phase. On peut par exemple imaginer que certains pixels du détecteur ne varient que très peu avec la phase et qu'il est donc inutile de les traiter lors de la reconstruction du front d'onde. Dans d'autres cas, des coefficients de  $mI$  peuvent réagir de façon fortement non-linéaire avec la phase, il est donc pertinent de les négliger pour améliorer la linéarité de l'ASO. D'une façon générale, l'enjeu consiste à consentir à une perte d'information sur la phase pour privilégier sa "qualité" d'autant qu'il y a toujours intérêt à minimiser le nombre de données à traiter pour accélérer l'algorithmie de la reconstruction.

On peut d'ores et déjà restreindre la nature des opérations numériques autorisées puisqu'elles ne doivent pas dégrader la linéarité de la méta-intensité avec la phase. On privilégie donc des transformations induites par des opérateurs eux-mêmes linéaires, à savoir des opérateurs matriciels. Ils se décomposent d'abord en une "mise en forme de l'information" puis en une élimination des coefficients non pertinents.

Pour illustrer ces opérations d'un point de vue mathématique, on se munit d'un

signal de sortie  $mI$  lié à la phase incidente par la relation :

$$mI(A_\phi) = \mathbf{B}_{mI}A_\phi + B(A_\phi) \quad (1.27)$$

On pose  $m$  la dimension de  $mI$ ,  $b$  celle de  $A_\phi$ . La matrice d'interaction a donc une taille de  $m \times b$ . On rappelle de plus l'inégalité sur son rang :

$$\text{rang}(\mathbf{B}_{mI}) \leq \min(m, b) \quad (1.28)$$

La matrice de transformation s'appliquant sur cette méta-intensité peut se décomposer par hypothèses en deux matrices, l'une unitaire  $\mathbf{O}$  qui combine les méta-pixels du vecteur  $mI$  pour réarranger l'information et l'autre de troncature  $\mathbf{T}$  venant recueillir cette information en tronquant le vecteur  $\mathbf{O}mI$  de dimension  $m$  en un vecteur de dimension  $m'$ . Mathématiquement, on a donc :

$$mI'(A_\phi) \hat{=} \mathbf{TO}mI(A_\phi) = \mathbf{TOB}_{mI}A_\phi + \mathbf{TO}B \quad (1.29)$$

On posera évidemment la nouvelle matrice d'interaction  $\mathbf{B}'_{mI} \hat{=} \mathbf{TOB}_{mI}$  et le nouveau bruit  $B' \hat{=} \mathbf{TO}B$ . Cette équation est illustrée par le schéma 1.3. On note que

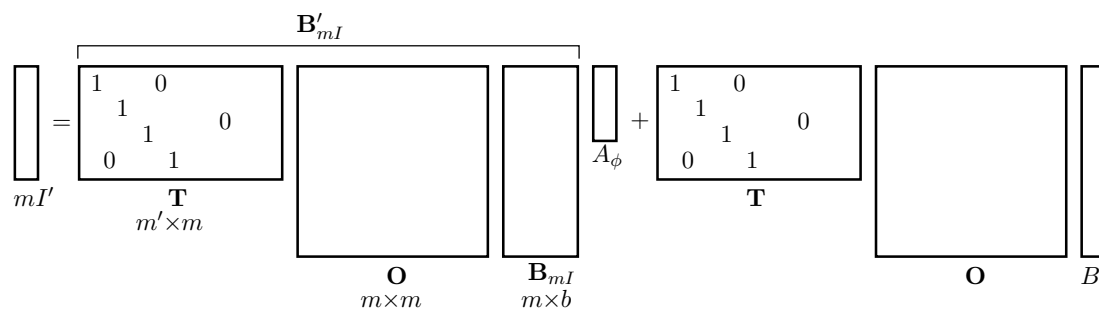


Figure 1.3 – Transformation matricielle  $\mathbf{TO}$  effectuée sur une méta-intensité.

la matrice unitaire  $\mathbf{O}$  laisse inchangé le rang de la matrice d'interaction, il n'y a aucune perte d'information sous cette seule opération :

$$\text{rang}(\mathbf{OB}_{mI}) = \text{rang}(\mathbf{B}_{mI}) \quad (1.30)$$

La matrice de troncature  $\mathbf{T}$  (de rang  $m' \leq m$ ) peut quant à elle faire baisser le rang de la nouvelle matrice d'interaction :

$$\text{rang}(\mathbf{B}'_{mI}) \leq \text{rang}(\mathbf{B}_{mI}) \quad (1.31)$$

### 1.3.1 Conséquences sur les critères de performance

**Nombre de méta-pixels.** L'association d'opérations  $\mathbf{TO}$  assure une diminution du nombre de méta-pixels. Ceci va dans le sens de l'efficacité numérique puisque

des gestions de plus petits tableaux assurent une plus grande rapidité de calcul. En revanche, on a vu que cette diminution était associée à une diminution du rang de la matrice d'interaction. Ceci peut faire que certains modes de phase ne soient plus vus après la transformation **TO**. On notera cependant que cela peut aussi permettre d'évacuer les redondances en cherchant à atteindre le ratio idéal d'un méta-pixel par un mode phase ! Cas qui correspond à  $m' = \text{rang}(\mathbf{B}_{mI}) = b$ .

**Erreur d'estimation.** L'erreur d'estimation après transformation **TO** sera égale à  $\mathbf{R}'\mathbf{B}'$  où  $\mathbf{R}'$  est le reconstruteur déduit de  $\mathbf{B}'_{mI}$ . On peut donc quantifier l'efficacité de ce reconstruteur en étudiant la matrice de sensibilité associée à la nouvelle matrice d'interaction :

$$\mathbf{S}' = \mathbf{B}'_{mI}{}^t \mathbf{B}'_{mI} = \mathbf{B}_{mI}{}^t \mathbf{O}{}^t \mathbf{T}{}^t \mathbf{TO} \mathbf{B}_{mI} \quad (1.32)$$

On remarque en premier lieu qu'en l'absence de troncature, la matrice de sensibilité ne change pas. On retrouve là le fait qu'une transformation purement unitaire, il n'y a aucune perte d'information mais simplement un réarrangement de celle-ci. Cela veut aussi dire que c'est l'association **conjointe** d'une matrice unitaire et d'une troncature qui permet de modifier les performances de l'ASO. Pour connaître l'influence d'une transformation **TO** avec une matrice de troncature, on étudie la trace de la matrice de sensibilité qui quantifie la capacité globale de l'ASO à transformer le flux lumineux en information sur la phase. On peut notamment montrer qu'elle vérifie :

$$\text{Tr}(\mathbf{S}') \leq \text{Tr}(\mathbf{S}) \quad (1.33)$$

**Autrement dit, il est absolument illusoire de croire améliorer la sensibilité globale d'un ASO via des opérations numériques. La méta-intensité contenant le plus d'information sera toujours celle qui est la plus proche de l'intensité sur le détecteur.**

Si la sensibilité pâtit visiblement des opérations **TO**, chose essentiellement néfaste au bon fonctionnement de l'ASO, il faut mettre cette baisse de performance en balance avec l'atténuation conjointe des termes de perturbations. On se souvient en effet que l'erreur d'estimation est conditionnée tant par la norme de la matrice d'interaction (que l'on veut aussi grande que possible –mais qui baisse sous **TO**) que par la force de la perturbation. Et heureusement, ces transformations **TO** peuvent drastiquement faire diminuer ces perturbations, si bien que la performance globale de l'ASO peut être améliorée. Ceci est notamment le cas quand la transformation **O** est capable de mettre sur des méta-pixels disjoints le signal utile –c'est-à-dire la partie linéaire de la méta-intensité– et les perturbations d'autre part car alors la matrice de troncature permet de ne conserver que les pixels présentant un bon comportement. Ce point sera évoqué



dans le chapitre 10 ainsi que dans l'annexe B.

\*  
\*   \*

Ce premier chapitre très général a permis d'appréhender les analyseurs de front d'onde comme des dispositifs optiques créant des bijections entre des phases et des intensités. À chaque design est associé un espace de phases descriptibles qu'il est capable de mesurer sans ambiguïté. On a vu que cette estimation est facilitée par la possibilité de construire, à partir de l'intensité, une quantité –appelée *méta-intensité*– qui contient un terme *linéaire* avec la phase. Le formalisme matriciel qui peut alors s'appliquer permet de construire des reconstitueurs simples ainsi que de définir des critères de performance clairs et indispensables à la comparaison des ASO. Enfin, on a indiqué quel était le potentiel du traitement numérique des méta-intensités quant à l'amélioration éventuelle de leur performance.

On appliquera ces concepts très généraux aux ASO à filtrage de Fourier dans les chapitres 4 et 6. Notons que cette démarche qui vise à établir un cadre unifié pour l'analyse de front d'onde est à mettre en parallèle avec celle de [Guyon, 2005].

## 2 Trois systèmes optiques

Le précédent chapitre se veut une introduction au concept d'*analyse de front d'onde*. On y manipule des dispositifs optiques –les ASO– qui permettent de transformer des variations de phase en variations d'intensité. Néanmoins, aucune description physique n'est donnée quant à leur design optique. Ceci constitue justement l'objet de ce second chapitre.

Si cette thèse porte dans sa quasi-totalité sur un système optique appelé "Filtrage de Fourier", ce chapitre ne s'y focalise pas seulement et présente deux autres systèmes optiques : l'imagerie en plan focal et la coronographie. Cette approche qui peut sembler divergente apparaît néanmoins comme parfaitement cohérente tant ces trois systèmes optiques présentent des traits communs et s'articulent de façon linéaire.

### 2.1 Cadre théorique

Tous les systèmes optiques étudiés dans cette partie possèdent des caractéristiques communes que nous présentons ici. En premier lieu, ils ont la particularité de ne comporter que trois composants assez simples : des éléments diffractants, des milieux de propagation libre et un détecteur. Ces systèmes optiques possèdent également tous un axe optique. Nous supposons que cet axe particulier a pour direction le vecteur  $\vec{e}_z$  et que la lumière s'y propage dans le sens des  $z$  croissants. De plus, la description de cette lumière se fait dans des plans orthogonaux à cet axe optique selon les deux autres axes  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . Nous notons également qu'ils ne sont pas des dispositifs interférentiels : si le faisceau lumineux est parfois divisée par des lames séparatrices, elle n'est jamais ensuite recombinaée. Par ailleurs, nous ne nous intéressons pas à la polarisation de la lumière. Celle-ci sera donc décrite par un champ complexe scalaire qui correspond à l'amplitude complexe de la vibration lumineuse que l'on notera systématiquement  $\psi$ . Enfin, nous faisons l'hypothèse que ces systèmes optiques n'influencent pas la cohérence des champs qui les traversent. Pour cette raison, nous regrouperons derrière la notation  $\psi$  une classe de champs cohérents entre eux.

Cette remarque à propos de la cohérence de la lumière permet de **caractériser complètement un système optique via l'opérateur linéaire dit "opérateur sys-**

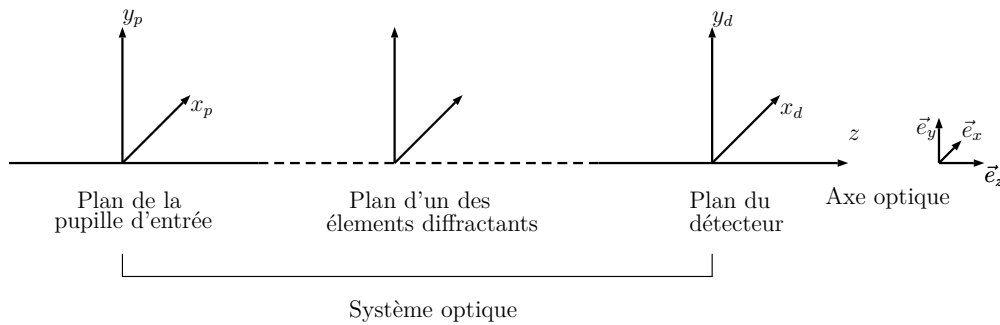


Figure 2.1 – Description générale d'un système optique

"**tème optique**" qui lie le champ incident noté  $\psi_i$  qui correspond au champ dans le plan qui précède juste la pupille d'entrée au champ dans le plan du détecteur noté  $\psi_d$ . Les prochaines sections présentent les règles élémentaires permettant de calculer cet opérateur système optique, à savoir les lois qui décrivent la propagation libre, les éléments diffractants ainsi que la division en plusieurs faisceaux.

### 2.1.1 Énergie d'un champ électromagnétique

Précisons avant toute chose une propriété physique des champs indispensable à leur manipulation mathématique, à savoir que leur énergie est finie ; mathématiquement, on a donc :

$$\|\psi\|_2^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy |\psi(x,y)|^2 < \infty \quad (2.1)$$

Ceci a pour conséquence de placer les champs dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

### 2.1.2 Propagation libre

Afin d'obtenir l'opérateur système optique, on s'intéresse en premier lieu à la propagation libre du champ ÉlectroMagnétique (EM). La problématique est la suivante : connaissant le champ EM pour un  $z$  donné, quel sera ce champ EM dans le plan  $z'$  ( $>z$ ) sachant qu'aucun élément diffractant n'est présent entre ces deux plans ? La réponse à cette question nous est donnée par la diffraction de Fresnel :

$$\psi_{z'}(x',y') = \frac{e^{ik(z'-z)}}{i\lambda(z'-z)} \iint_{\mathbb{R}^2} \psi_z(x,y) e^{\frac{ik}{2(z'-z)}[(x-x')^2+(y-y')^2]} dx' dy' \quad (2.2)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la vibration lumineuse et  $k=2\pi/\lambda$  son nombre d'onde. Il est important de noter que ce résultat est valable sous la condition

suivante appelée "approximation de Fresnel" :

$$\frac{1}{8} \frac{\rho^4}{(z'-z)^3 \lambda} \ll 1 \quad (2.3)$$

où  $\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ . Physiquement, cela signifie que la distance entre le champ initial et le champ propagé doit être grande devant la taille typique de la zone dans laquelle les champs EM doivent être considérés dans des plans espacés d'une distance assez les champs prennent des valeurs significatives. Plus concrètement, les éléments diffractants ne doivent laisser passer le champ électromagnétique que sur des zones de tailles caractéristiques petites devant les distances entre ces éléments.

Notons que l'équation 2.2 peut s'écrire très simplement grâce à l'utilisation du produit de convolution et d'une quantité appelée "propagateur de Fresnel", en effet celle-ci prend la forme suivante :

$$\psi_{z'} = \psi_z \star G_{z'-z} \quad (2.4)$$

avec

$$G_d(x,y) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{\frac{ik}{2d}(x^2+y^2)} \quad (2.5)$$

que l'on nomme donc propagateur de Fresnel le long de  $\vec{e}_z$  sur une distance  $d$ . Dans la pratique, il y a équivalence entre "convoluer un champ avec  $G_d$ " et "le propager le long de l'axe optique d'une distance  $d$ ".

Ces résultats ne traduisent rien d'autre que le principe de Huyghens-Fresnel qui affirme que la propagation du champ EM se passe comme si chacun des points de ce champ réémettait une onde sphérique dont l'amplitude serait proportionnelle au champ initial ; le propagateur de Fresnel correspondant justement à la propagation d'onde sphérique dans le voisinage de l'axe optique.

### 2.1.3 Passage à travers des éléments diffractants

On s'intéresse maintenant ici aux règles calculatoires traduisant le passage à travers les éléments diffractants dans la limite où ils sont infiniment fins. Étudions le cas d'un tel élément de fonction de transparence est notée  $t$  et prenons pour convention d'appeler  $\psi^-$  le champ EM juste avant l'élément diffractant et  $\psi^+$  le champ juste après. Il est très facile de relier  $\psi^-$  et  $\psi^+$  via la formule :

$$\psi^+ = t \cdot \psi^- \quad (2.6)$$

La règle calculatoire de passage à travers un élément diffractant est donc des plus simples puisqu'il suffit de multiplier le champ entrant par la fonction de transparence de cet élément pour obtenir le champ sortant.

Nous profitons de cette section pour présenter trois éléments diffractants présents de façon récurrentes lors de l'exposé : la pupille d'entrée, la lentille et le dioptré.

**Définition : Pupille d'entrée.**

La pupille d'entrée constitue le premier plan d'un système optique. Sa forme géométrique indique quelle partie de la lumière incidente pénètre à l'intérieur de celui-ci. Puisque cette forme est nécessairement de taille finie, la fonction de transparence de la pupille d'entrée a un support compact et s'écrit donc :

$$p(x_p, y_p) = \mathbb{I}_P(x_p, y_p) \tag{2.7}$$

où  $\mathbb{I}_P$  est la fonction indicatrice de la forme géométrique de la pupille d'entrée. Notons qu'il arrive –en coronographie notamment– qu'une densité (ou apodiseur) soit associée à  $\mathbb{I}_P$ , aussi par soucis de généralité, on utilise dans ce chapitre la notation générique :

$$p(x_p, y_p) \tag{2.8}$$

**Définition : Élément focalisant de focale  $f$ .**

L'élément focalisant correspond à la version idéale de la lentille. Sa fonction de transparence sera notée  $l_f$  où  $f$  est la focale de cet élément focalisant. Son expression est la suivante :

$$l_f(x, y) = \exp\left(-\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) \tag{2.9}$$

**Définition : Dioptré incliné.**

Le dioptré incliné est un élément diffractant transparent. Il est plan et sa pente selon  $x$  est codée par un angle  $\alpha$ , tandis que selon  $y$ , elle l'est par un angle  $\beta$ . Sa fonction de transparence est notée  $d^{\alpha, \beta}$  et a pour expression :

$$d^{\alpha, \beta}(x, y) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)\right) \tag{2.10}$$

### 2.1.4 Division du faisceau

On évoque la cas où le champ est divisé à l'intérieur du système optique. L'élément optique effectuant cette opération est appelée "lame séparatrice". Elle sépare le champ en deux, en ne modifiant que son amplitude –et non à sa phase– qu'elle divise, par exemple, par  $\sqrt{2}$  lorsque le faisceau est scindé en deux faisceaux identiques. Ce facteur assure une conservation de l'énergie entre l'amont et l'aval de la séparatrice. L'étude de tels systèmes optiques contenant plusieurs chemins ne présente aucune difficulté dès lors que l'on utilise un "opérateur sys-

tème optique" pour chaque branche. L'ensemble de ces opérateurs caractérisera le système optique.

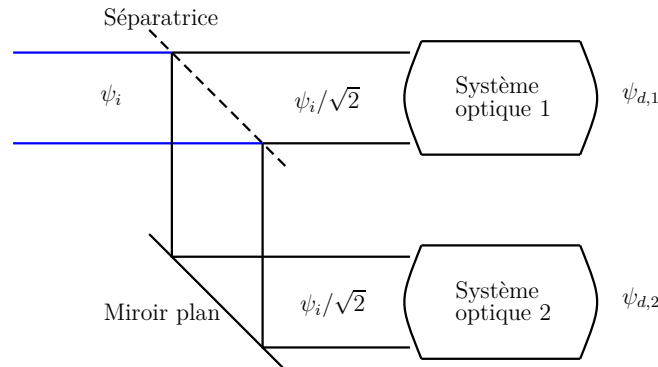


Figure 2.2 – Modélisation d'un système optique à deux branches.

### 2.1.5 Intensité sur le détecteur

**Intensité continue.** Il nous reste à parler du signal effectivement obtenu à la sortie du système optique. Jusqu'ici, nous n'avons en effet évoqué que le champ au niveau du détecteur. Malheureusement, ce détecteur n'est pas en capacité de mesurer directement le champ électromagnétique et n'est sensible qu'à la valeur intégrée de son module au carré. Pour une collection de champs incidents incohérents, on a donc une intensité égale à :

$$I = \sum_{\psi_d \text{ incohérents}} |\psi_d|^2 = \sum_{\psi_i \text{ incohérents}} \left| \text{Opérateur S.O.}[\psi_i] \right|^2 \quad (2.11)$$

On note en passant que l'intensité n'est pas linéaire avec les champs incidents et qu'elle est par essence une quantité réelle, positive ou nulle :

$$\forall (x_d, y_d) \in \mathbb{R}^2 \quad I(x_d, y_d) \geq 0 \quad (2.12)$$

**Intensité pixelisée.** Si l'on souhaite pousser jusqu'au bout l'effort de modélisation il faut enfin remarquer que les détecteurs actuels ne sont capables de fournir qu'une version pixelisée de l'intensité. Explicitons donc comment se fait le passage entre  $I$  et sa version discrète en nous basant sur une définition mathématique du détecteur.

**Définition : Détecteur.**

*Le support physique d'un détecteur est une surface fermée  $\Omega_{\text{détect}}$  de l'espace 3D. Même si a priori cette surface peut être courbe, on se restreint au cas d'un détecteur plan. Cette surface est découpée en éléments appelés pixels et notés  $\pi_i$  avec  $i$  variant dans  $[[1, d]]$  où  $d$  est le nombre de pixels. Dans la grande majorité des cas ce*

découpage suit le système de coordonnées cartésien et est régulier. Notons qu'il peut y avoir des "trous" au sein du détecteur au sens où il n'y a pas forcément égalité entre  $\cup_i \pi_i$  et  $\Omega_{\text{detect}}$  mais simplement une inclusion. On précise enfin que les pixels ne se superposent pas :  $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

L'intensité pixelisée s'obtient ensuite via l'opération d'échantillonnage qui consiste en l'intégration de l'intensité continue sur les pixels  $\pi_i$  dont les fonctions indicatrices associées sont notées  $\mathbb{I}_{\pi_i}$ . L'intensité pixelisée est alors définie par la collection des intensités locales indicées  $\{I_i\}_{i \in [[1,d]]}$  égales à :

$$I_i = \iint \mathbb{I}_{\pi_i}(x_d, y_d) I(x_d, y_d) dx_d dy_d \quad (2.13)$$

On remarque que l'opération d'échantillonnage est une opération **linéaire** mais qu'elle n'est pas bijective. L'intensité discrétisée comporte en effet moins d'information que l'intensité continue puisque la pixellisation agit comme un filtre spatial passe-bas. Toutes les fréquences spatiales plus petites que la taille du pixel ne seront plus accessibles. De plus, l'information au dehors du support est également perdue.

On mentionne en passant un mode de fonctionnement commun à de nombreux détecteurs actuels qui leur permet de regrouper des pixels voisins pour n'en faire qu'un. C'est l'opération de *binning*. Cette manipulation a l'avantage d'être simplement descriptible par une matrice présentant les propriétés suivantes :

- Elle transforme des vecteurs de taille  $d$  en vecteurs de taille  $d'$ , nouveau nombre de pixels.
- Ses coefficients valent soit 0 soit 1.
- Son rang vaut  $d'$ .
- Dans chaque colonne, il n'y a qu'un et un seul coefficient valant 1. Autrement dit, chaque pixel ne participe qu'une et unique fois au *binning*.

La figure 2.3 illustre le passage d'un détecteur initialement en 4x4 pixels vers du 2x2 pixels.

Notons qu'en prenant le *binning* limite, à savoir celui qui regroupe tous les pixels en un seul, on obtient simplement le flux total sur le détecteur. La matrice de *binning* est alors simplement une matrice ligne de largeur  $d$  où tous les coefficients sont égaux à 1.

## 2.2 Imagerie en plan focal

On est désormais en capacité de décrire des systèmes optiques, via leur opérateur, qui rentrent dans le cadre défini au paragraphe 2.1. La toute première

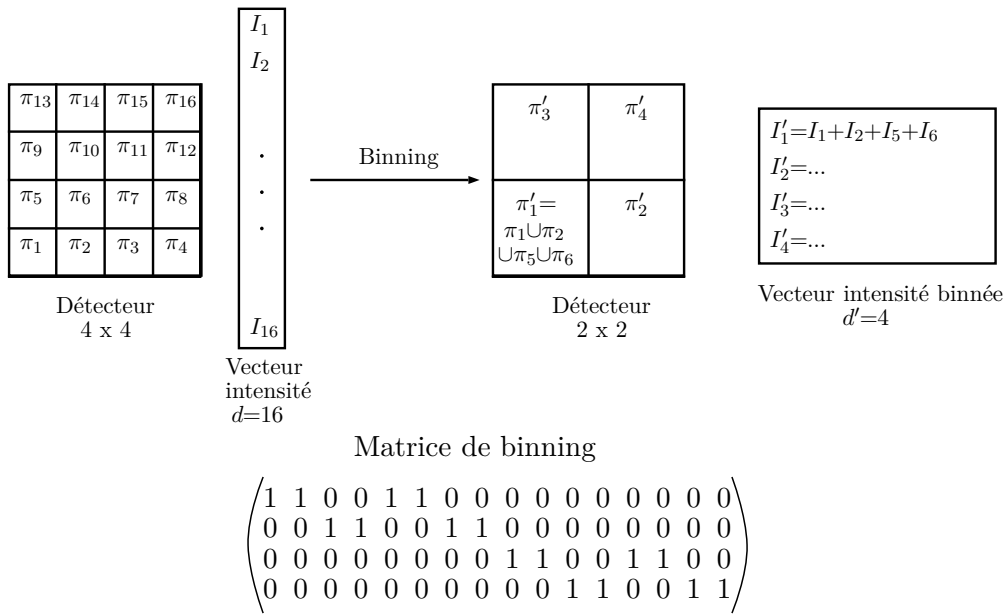


Figure 2.3 – En haut : passage d'un échantillonnage 4x4 vers un échantillonnage 2x2 pixels. En bas, matrice de *binning* associée à cette opération.

étape –la plus simple– consiste en l'*imagerie en plan focal*.

### 2.2.1 Système optique

Le système optique se réduit à un élément focalisant  $f$  diaphragmé par la pupille d'entrée et à un détecteur situé à une distance  $f$  de cet élément focalisant.

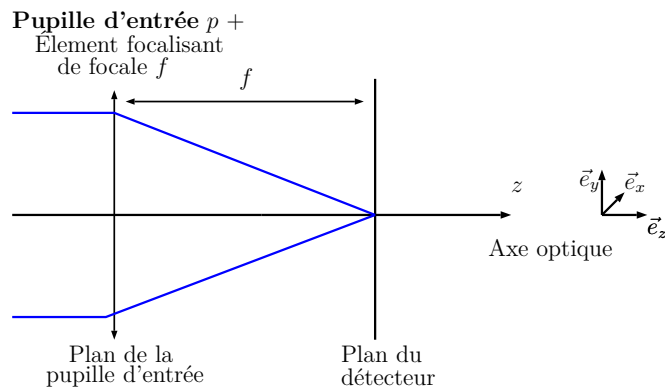


Figure 2.4 – Système d'imagerie en plan focal.



## 2.2.2 Opérateur Système Optique

Appliquant les lois de propagations au design optique précédent, le champ détecteur  $\psi_d$  est relié au champ incident  $\psi_i$  par la relation :

$$\psi_d = (\psi_i \star p \star l_f) \star G_f \quad (2.14)$$

Explicitant cette équation on obtient :

$$\psi_d(x_d, y_d) = \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_d^2 + y_d^2)\right) \iint dx_p dy_p \psi_i(x_p, y_p) p(x_p, y_p) \exp\left(\frac{-ik}{f}[x_p x_d + y_p y_d]\right) \quad (2.15)$$

ce qui s'écrit à l'aide de la transformée de Fourier 2D :

$$\psi_d = -i\lambda f e^{ikf} \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_d^2 + y_d^2)\right) \times \mathcal{G}_{\lambda f} \circ \mathcal{F}[p \psi_i] \quad (2.16)$$

$$\propto \mathcal{G}_{\lambda f} \circ \mathcal{F}[p \psi_i] \quad (2.17)$$

où  $\mathcal{G}$  est l'opérateur grandissement défini dans l'annexe A. On retrouve avec cette équation les résultats habituels de la diffraction de Fraunhofer (qui est assurée par la présence de la lentille) : le champ  $\psi_d$  est proportionnel à la transformée de Fourier du champ incident diaphragmé dilatée d'un facteur  $f\lambda$ . Autrement dit, plus la longueur d'onde est grande ou plus la focale est grande, plus la tâche focale sera large.

## 2.2.3 Plan pupille - Plan Focal

Nous profitons de ce premier exemple de système optique pour introduire les notions de plan pupille et plan focal. Un plan focal est, par définition, un plan dans lequel intervient la transformée de Fourier de la pupille d'entrée. Pour le système optique présenté ici, le plan du détecteur est un plan focal. On note d'ailleurs que le plan focal est aussi appelé "plan de Fourier". *A contrario*, un plan pupille fait intervenir directement la pupille d'entrée. Dans la cas présent, le seul plan pupille est le plan de la lentille  $l_f$ . On peut d'ores-et-déjà remarquer que les éléments focalisant ne sont rien d'autre que des convertisseurs de plan pupille en plan focal et réciproquement.

## 2.3 Filtrage de Fourier

## 2.3.1 Système optique

On présente maintenant le système optique qui sera utilisé pour faire de l'analyse de front d'onde. Il se nomme *filtrage de Fourier*<sup>a</sup> et est une extension de l'imagerie en plan focal. On décale le détecteur "un plan plus loin" – en plan pupille donc – grâce à un élément focalisant de focale  $f/2$  placé dans le plan focal. On associe à cet élément un masque donc nous noterons la fonction de transparence  $m(x_m, y_m)$ .

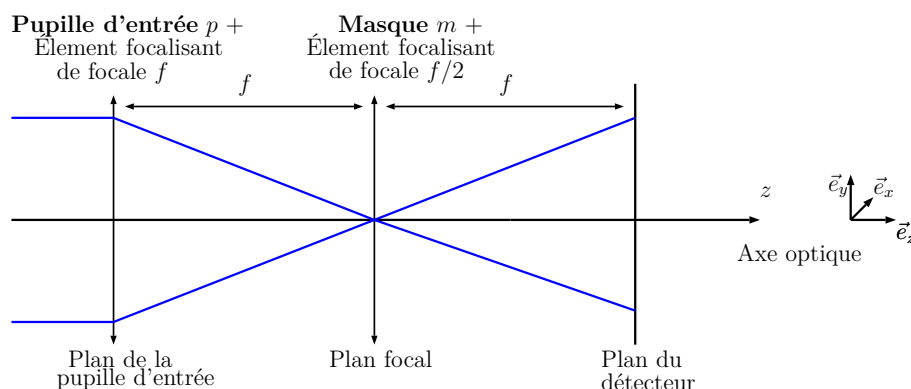


Figure 2.5 – Système de filtrage de Fourier.

## 2.3.2 Opérateur Système Optique

Appliquant les lois de propagations au design optique précédent, on obtient que le champ au niveau du détecteur s'écrit :

$$\psi_d = \left[ \left( (\psi_i p l_f) \star G_f \right) m l_{f/2} \right] \star G_f \quad (2.18)$$

Explicitant cette équation on obtient :

$$\psi_d(x_d, y_d) = \frac{e^{2ikf}}{i^2 \lambda^2 f^2} \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_d^2 + y_d^2)\right) \iint dx_p dy_p \psi_i(x_p, y_p) p(x_p, y_p) \iint dx_m dy_m m(x_m, y_m) \exp\left(\frac{-ik}{f}[x_p x_m + x_m x_d + y_p y_m + y_m y_d]\right) \quad (2.19)$$

a. Le lecteur désirant compléter sa connaissance du filtrage optique de Fourier – il n'est considéré dans cette thèse que vis-à-vis de l'analyse de front d'onde – pourra se référer à l'ouvrage [Goodman, 2005].

En termes d'opérateurs, la relation entre le champ incident et le champ détecteur est donc :

$$\psi_d = -e^{2ikf} \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_d^2 + y_d^2)\right) \times \mathcal{G}_{-1}[p \psi_i] \star (\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m]) \quad (2.20)$$

$$\propto \mathcal{G}_{-1}[p \psi_i] \star (\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m]) \quad (2.21)$$

En l'absence de masque  $-m$  vaut la fonction identité– on observe que le champ détecteur correspond au champ incident diaphragmé et renversé, fait tout-à-fait logique –d'un point de vue de l'optique géométrique– au regard du design de ce système.

### 2.3.3 Expérience historique d'Abbe

L'expérience d'Abbe [Sextant, 1997] met en lumière ce principe de façon unique. Le champ incident est un front d'onde plan diaphragmé par un grille à maille carrée. Dans le plan focal, le champ est lié à la transformée de Fourier de cette grille. L'expérience d'Abbe (voir la figure 2.6) consiste à appliquer à ce champ un filtre qui ne laisse passer que les fréquences selon  $x$  (resp. selon  $y$ ) grâce à une fente. Expérimentalement, on observe dans le plan suivant non plus une grille mais seulement des traits selon  $x$  (resp. selon  $y$ ). Concrètement le masque agit comme un filtre ne laissant passer que certaines fréquences.

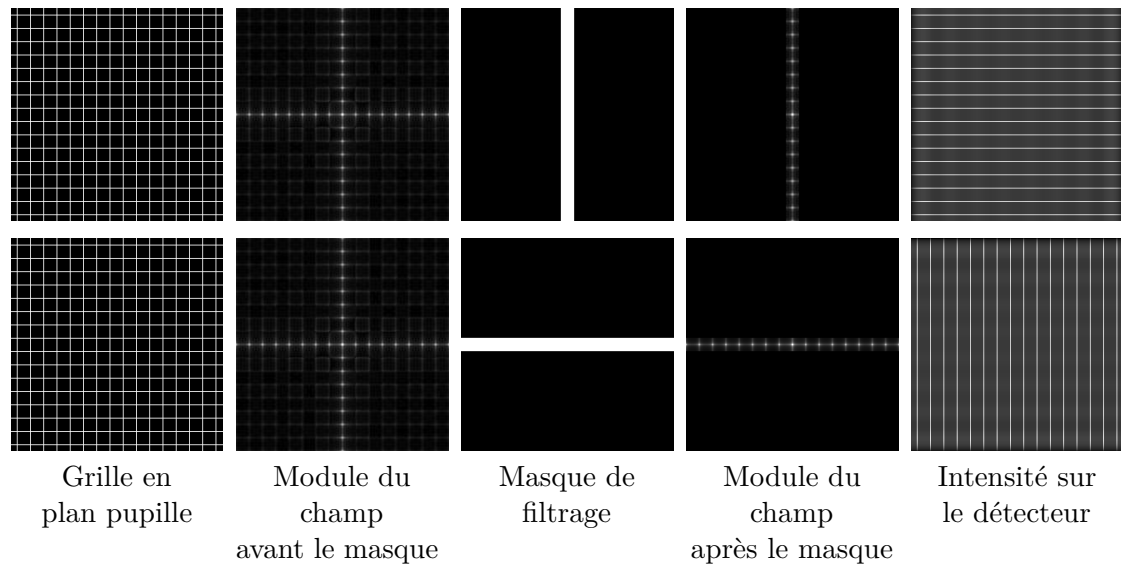


Figure 2.6 – Expérience d'Abbe. En haut (resp. en bas), filtrage des fréquences spatiales sur la direction verticale (resp. horizontale).

Ce principe peut être exporté au traitement optique d'images. En plaçant un objet contenant une grande variété de fréquences spatiales, une plume par

exemple (figure 2.7), et en choisissant de ne laisser que les hautes fréquences en coupant les basses grâce à une pastille opaque autour du voisinage de l'axe optique, il est possible de ne récupérer que les détails de la plume. Réciproquement si on ne laisse passer que les basses fréquences (le masque n'est opaque qu'à partir d'une certaine distance – c'est la fréquence de coupure – de l'axe optique) on ne verra de l'objet que les contours... Notons également qu'il est possible d'étudier de cette façon les objets de phase en coupant les basses fréquences contenant l'essentiel de la luminosité, correspondant au plan uniformément éclairé. C'est la raison d'être de la strioscopie qui permet de visualiser grâce à un design optique de type "filtrage de Fourier" les inhomogénéités d'indice de l'air dans les flux turbulents [Toepler, 1864].

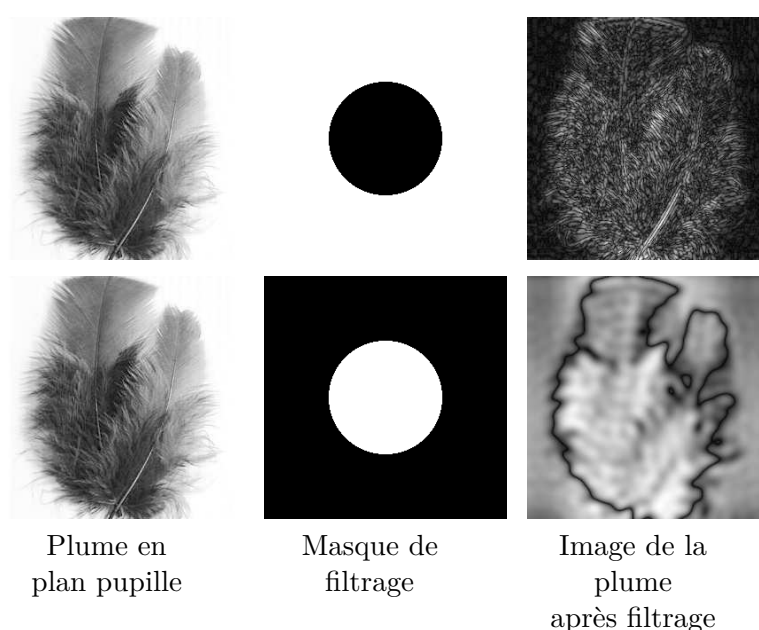


Figure 2.7 – Filtrage de Fourier d'une plume placée en plan pupille. En haut le filtre de Fourier ne laisse passer que les hautes fréquences, l'image résultante ne contient que les détails de la plume. En bas, seule la forme globale de celle-ci subsiste puisque le filtre n'a laissé passer que les basses fréquences spatiales.

## 2.4 Coronographie

### 2.4.1 Système optique

Le filtrage de Fourier a été obtenu par prolongement "un plan plus loin" de l'imagerie en plan focal. Ce processus peut être répété une nouvelle fois : on décale le détecteur dans un nouveau plan focal tandis qu'on place dans le plan

pupille dans lequel il se trouvait un nouvel élément diffractant appelé historiquement "stop" –qui est lui aussi un masque– et que l'on note  $s(x_s, y_s)$ . On lui associe une lentille de focale  $f/2$ . La partie amont du système optique est inchangée : une pupille d'entrée dans le premier plan pupille et un masque de filtrage en plan focal.

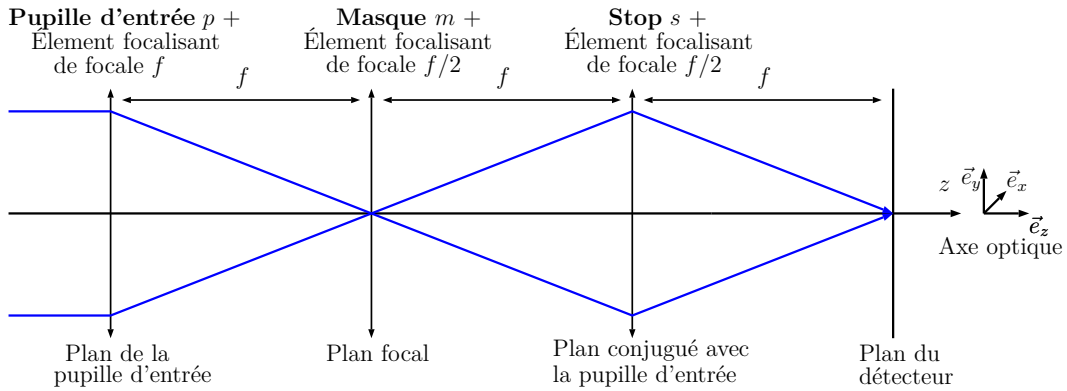


Figure 2.8 – Système optique de la coronographie

Ce type de design est principalement utilisé en astronomie. Il se nomme coronographie et il a pour but, grâce à un masque et un stop bien choisis, d'éteindre des sources de lumière trop intenses proches de l'axe optique pour discerner dans leur voisinage des objets plus faibles. De là vient d'ailleurs ce nom de "coronographie" puisque, historiquement [Lyot, 1931], il s'agissait d'observer la couronne solaire, objet extrêmement ténu comparée au disque solaire lui-même.

Nous n'entrerons pas dans les détails en ce qui concerne les masques et stops utilisés en coronographie dans ce paragraphe, nous aurons l'occasion d'en reparler. Nous préférons simplement montrer que la propagation de la lumière à travers ce nouveau système est dans la continuité logique des deux exemples précédemment évoqués.

## 2.4.2 Opérateur Système Optique

Appliquant les lois de propagations au design optique précédent, on obtient que le champ au niveau du détecteur s'écrit :

$$\psi_d = \left[ \left( \left[ \left( (\psi_i \ p \ l_f) \star G_f \right) m \ l_{f/2} \right] \star G_f \right) l_{f/2} s \right] \star G_f \quad (2.22)$$

Explicitant cette équation on obtient :

$$\psi_d(x_d, y_d) = \frac{e^{3ikf}}{i^3 \lambda^3 f^3} \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_d^2 + y_d^2)\right) \iint dx_p dy_p \psi_i(x_p, y_p) p(x_p, y_p) \iint dx_m dy_m m(x_m, y_m) \iint dx_s dy_s s(x_s, y_s) \exp\left(\frac{-ik}{f}[x_p x_m + x_m x_s + x_s x_d + y_p y_m + y_m y_s + y_s y_d]\right) \quad (2.23)$$

En termes d'opérateurs, la relation entre le champ incident et le champ détecteur est donc :

$$\psi_d \propto \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[s] \left( \mathcal{G}_{-1}[m] \star (\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\psi_i p]) \right) \quad (2.24)$$

\*  
\*   \*

Les lois de la diffraction de Fresnel ont permis de caractériser rigoureusement trois systèmes optiques grâce à des opérateurs linéaires reliant le champ incident et le champ au niveau du détecteur. Les trois systèmes en question correspondent à des problématiques instrumentales très différentes mais s'articulent dans un prolongement très naturel : à mesure que le détecteur s'éloigne de la pupille d'entrée, il devient possible de manipuler de plus en plus le champ lumineux grâce à un nombre croissant d'éléments diffractants. En témoigne l'élégante progression des formules (2.15), (2.19) et (2.23) qui illustre à merveille la continuité formelle liée à la communication entre les plans pupille et focal. En cela réside probablement la plus grande originalité de ce chapitre même si des travaux similaires existent déjà, notamment [Dohlen, 2004] qui unifie nombre de designs optiques en plaçant la notion de "masque" au centre de la réflexion.

### 3 Filtrage de Fourier

On s'intéresse dans ce chapitre plus en détail au système optique de Filtrage de Fourier. On y propose notamment un formalisme mathématique compatible avec l'objectif imminent d'utiliser ce système à des fins d'analyse de front d'onde. La figure 3.1 rappelle le schéma de principe d'un tel design.

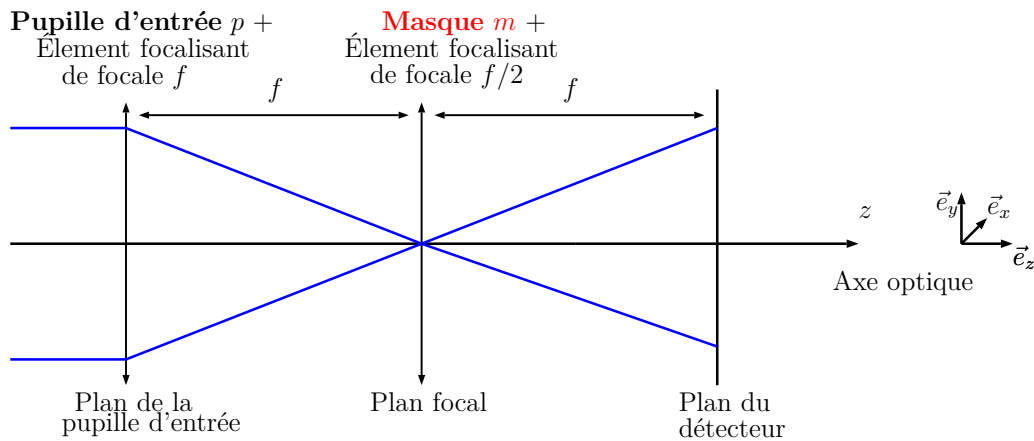


Figure 3.1 – Schéma de principe d'un système à filtrage de Fourier. Le masque  $m$  est l'unique paramètre du design.

#### 3.1 Relation entrée-sortie d'un système à Filtrage de Fourier

Notre étude démarre de la relation entre le champ incident et le champ au niveau du détecteur obtenue dans le chapitre précédent (équation (2.21)) qui caractérise, on le rappelle, complètement ce système :

$$\psi_d = \mathcal{G}_{-1}[\psi_i p] \star (\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m]) \tag{3.1}$$

dans laquelle on a omis un facteur de phase sans importance qui disparaît par passage à l'intensité. Avant toute chose, nous simplifions le problème en négligeant le retournement du champ –traduit par l'opérateur grandissement  $\mathcal{G}_{-1}$ –

qui ne témoigne que d'un aspect purement géométrique. Nous considérons donc l'équation :

$$\psi_d = (\psi_i p) \star (\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m]) \quad (3.2)$$

De cette équation (3.2) dite "équation fondamentale de propagation", on remarque que –fors l'opération de diaphragme par la pupille d'entrée– la relation entre l'entrée et la sortie est entièrement déterminée le masque de Filtrage  $m$ . Ce n'est d'ailleurs pas le masque lui-même qui semble y jouer un rôle significatif mais plutôt la transformée de Fourier du masque dilatée d'un facteur  $\lambda f$ . On s'évertue donc dans ce chapitre à décrire ce masque dans un formalisme compatible avec les propriétés notables de la transformée de Fourier (rappelées dans l'annexe A).

On précise tout de suite un point essentiel : le plan dans lequel est contenu le masque est un plan focal. On a vu précédemment que celui-ci constituait l'espace des fréquences spatiales du champ incident. Aussi, il faut considérer les coordonnées  $(x_m, y_m)$  comme les coordonnées fréquentielles associées à  $(x_p, y_p)$ . En d'autres termes, la position du masque dans le plan focal fait qu'il affecte le champ incident dans son espace des fréquences. Ceci a également la conséquence suivante : l'opérateur  $\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}$  appliqué sur le masque consiste physiquement à ramener le masque dans un plan pupille. Cela veut dire que les coordonnées  $(x_d, y_d)$ , réciproques de  $(x_m, y_m)$ , sont dans le même espace que les coordonnées  $(x_p, y_p)$  décrivant le champ en entrée.

### 3.1.1 Interprétation via la réponse impulsionnelle

Une première interprétation du filtrage de Fourier se base sur le fait que la relation entre les champs incident et détecteur est linéaire. On peut en effet s'apercevoir que la réponse à une somme de deux champs est la somme des réponses pour chacun des deux champs pris indépendamment. Ce fait est d'ailleurs peu surprenant puisque les lois de propagation sont issues dans l'absolu des équations de Maxwell, linéaires pour les champs électriques et magnétiques.

On peut donc définir la réponse impulsionnelle du système, que l'on notera  $\delta_m^\psi$ , comme le champ détecteur quand le champ incident est un Dirac. De par les propriétés de convolution on obtient immédiatement que :

$$\delta_m^\psi = \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m] \quad (3.3)$$

La relation fondamentale de propagation du filtrage de Fourier se réduit donc, sous ce formalisme, à :

$$\psi_d = (\psi_i p) \star \delta_m^\psi \quad (3.4)$$

La théorie de la réponse linéaire assure que la réponse impulsionnelle caractérise entièrement le filtrage optique puisque qu'un Dirac contient par essence toutes les fréquences spatiales.



D'une manière générale on retient donc que, pour un masque arbitraire  $m$  donné, une approche tout-à-fait pertinente pour comprendre le filtrage consiste à visualiser la quantité complexe  $\psi_m^\delta$  soit via ses parties réelles ou imaginaires, soit via son module et son argument. Pour connaître la réponse à un champ incident donné, il "suffira" de se figurer sa convolution avec cette réponse impulsionnelle.

**Définition : Réponse impulsionnelle généralisée.**

On profite de l'occasion pour généraliser la notation de la réponse impulsionnelle  $\delta_f^\psi$  tant que celle-ci correspond à l'action de l'opérateur  $\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}$  sur la fonction quelconque  $g$  :

$$\delta_g^\psi \triangleq \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[g] \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2) \tag{3.5}$$

Précisons, afin de simplifier la tâche à un lecteur qui voudrait vérifier la cohérence dimensionnelle des équations qui suivront que la réponse impulsionnelle a la dimension de  $g$  divisée par une longueur au carré :

$$[\delta_g^\psi] = [g] L^{-2} \tag{3.6}$$

### 3.1.2 Interprétation via l'opérateur de filtrage

Une autre interprétation consiste à formuler le filtrage via un opérateur linéaire. En effet, l'action effective du système optique sur le champ incident consiste à la convolution avec la réponse impulsionnelle. On définit donc l'opérateur de Filtrage associé au masque  $m$  et que l'on note  $\mathcal{W}_m$  comme :

$$\mathcal{W}_m[\psi] \triangleq \psi \star \delta_m^\psi \quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \tag{3.7}$$

L'équation fondamentale de propagation du filtrage de Fourier (3.2) se réduit cette fois à :

$$\psi_d = \mathcal{W}_m[\psi_i \cdot p] \tag{3.8}$$

**Quelques propriétés de l'opérateur de filtrage :**

- L'opérateur de filtrage laisse invariante la dimension de la fonction sur laquelle il s'applique : dans notre cas, il convertit des champs EM en champs EM.
- L'opérateur de filtrage est linéaire, en particulier :

$$\mathcal{W}_m[\psi] = \mathcal{W}_m[\Re[\psi]] + i\mathcal{W}_m[\Im[\psi]] \tag{3.9}$$

- L'opérateur de filtrage va de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , en particulier<sup>a</sup> :

$$\|\psi_p\|_2^2 \geq \|\mathcal{W}_m[\psi_p]\|_2^2 \quad (3.10)$$

qui traduit le fait que l'énergie du champ détecteur ne peut être supérieure à l'énergie du champ incident. Il y a d'ailleurs égalité si et seulement si le masque est de phase uniquement. Cette propriété se montre mathématiquement via l'égalité de Parseval puisque le passage d'un plan focal à un plan pupille (et vice versa) se fait par une transformée de Fourier.

- L'opérateur de filtrage peut être décomposé en deux opérateurs linéaires représentant ses parties réelle et imaginaire. On les note  $\mathcal{W}_m^{\Re}$  et  $\mathcal{W}_m^{\Im}$ . Ces opérateurs vont également de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Ils ont de plus la propriété de laisser stable les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On peut donc écrire :

$$\mathcal{W}_m[\psi] = (\mathcal{W}_m^{\Re}[\Re[\psi]] - \mathcal{W}_m^{\Im}[\Im[\psi]]) + i(\mathcal{W}_m^{\Re}[\Im[\psi]] + \mathcal{W}_m^{\Im}[\Re[\psi]]) \quad (3.11)$$

où les deux fonctions de cette décomposition sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Description des masques

Nous proposons dans cette partie une classification générale des masques de filtrage. Considérés comme des éléments diffractants, ils sont caractérisés par leur fonction de transparence. Cette fonction étant complexe, on peut la décomposer via son module et son argument :

$$m(x_m, y_m) = a(x_m, y_m) \exp(i\phi_{\text{masque}}(x_m, y_m)) \quad (3.12)$$

où  $a$  est le module de la fonction de transparence.  $\phi_{\text{masque}}$  est la phase du masque induite par sa géométrie et son indice optique. On précise tout de suite que la fonction  $a$  prend des valeurs dans  $[0, 1]$  puisque le masque est considéré comme passif – à notre connaissance nous ne connaissons aucun masque ajoutant de l'énergie de façon cohérente à un front d'onde, ce serait pourtant bien pratique...

On dira d'un masque qu'il est "de phase" si il est complètement transparent, c'est-à-dire si  $a=1$  sur la totalité du plan focal. Un masque dit d'"amplitude" aura quant à lui une phase constante sur l'ensemble du plan focal. C'est par exemple le cas d'une densité.

### 3.2.1 Pavage du plan de Fourier

On propose dans ce paragraphe un formalisme adapté à la description de la majorité des masques utilisés pour le Filtrage de Fourier. Celle-ci se base sur la

---

a. Le masque est supposé passif, cf. le prochain paragraphe.

notion de pavage.

**Définition : Pavage.**

$\{\Omega_i\}_i$  est un pavage du plan  $\mathbb{R}^2$  si ces éléments vérifient la condition :

$$\cup_i \Omega_i = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (3.13)$$

où l'indice  $i$  varie dans un ensemble fini ou dénombrable.

La plupart de ces masques présentent en effet la propriété d'être descriptible **localement** par une **amplitude** et des aberrations de phase de **piston** et de **tip/tilt** constants. Ils sont donc descriptibles via une collection de cinq paramètres appelés "paramètres de pavage" que l'on note :

$$\{\Omega_i, a_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i\}_i \quad (3.14)$$

où l'ensemble des  $\Omega_i$  forment un pavage du plan de Fourier. Le paramètre  $a_i$  décrit l'amplitude locale du masque sur l'élément  $\Omega_i$ . Le paramètre  $\delta_i$  code le *piston* local de la phase sur ce même élément tandis que les deux derniers  $(\alpha_i, \beta_i)$  codent la pente locale, c'est-à-dire les coefficients associés aux aberrations de *tip* et *tilt*. Sous ces conditions le masque a une fonction de transparence de la forme :

$$m(x_m, y_m) = \sum_i a_i \mathbb{I}_{\Omega_i}(x_m, y_m) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} (\delta_i + x_m \alpha_i + y_m \beta_i)\right) \quad (3.15)$$

où  $\mathbb{I}_{\Omega_i}$  est la fonction indicatrice de l'élément  $\Omega_i$  du pavage. Notons que l'on pourrait, afin de décrire plus de masques, envisager d'augmenter le nombre de "paramètres de pavage" grâce par exemple aux aberrations de phase suivantes, à savoir : *focus*, *astigmatismes*, etc. Nous verrons dans les parties suivantes que la description proposée est dans l'immense majorité des cas suffisante.

### 3.2.2 Réponse impulsionnelle du masque

Puisque le masque de filtrage agit via sa réponse impulsionnelle sur le champ incident nous nous intéressons maintenant à cette quantité en supposant que le masque est descriptible via le formalisme du pavage du plan de Fourier. Usant des propriétés notables de la transformée de Fourier (annexe A) on obtient que :

$$\delta_m^\psi = \sum_i a_i \exp\left(\frac{2i\pi \delta_i}{\lambda}\right) \mathcal{T}_{\alpha_i, \beta_i} \circ \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_i}] \quad (3.16)$$

où  $\mathcal{T}$  est l'opérateur de translation défini dans la même annexe. La formule précédente peut également s'écrire via les réponses impulsionnelles des éléments

du pavage :

$$\delta_m^\psi = \sum_i a_i \exp\left(\frac{2i\pi\delta_i}{\lambda}\right) \mathcal{T}_{f\alpha_i, f\beta_i} \left[ \delta_{\mathbb{I}_{\Omega_i}}^\psi \right] \quad (3.17)$$

L'équation 3.17 est fondamentale au sens où elle illustre que la seule difficulté mathématique consiste en l'obtention des réponses impulsionnelles et donc des transformées de Fourier des éléments du pavage du plan de Fourier puisqu'on le rappelle :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_i}}^\psi = \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_i}] \quad (3.18)$$

### 3.2.3 Opérateur de Filtrage

Dans l'interprétation via l'opérateur de Filtrage et sous l'hypothèse que le masque est descriptible grâce au formalisme du pavage, on a :

$$\psi_d = \sum_i a_i \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\delta_i\right) \left( (\psi_i \star p) \star \left( \mathcal{T}_{f\alpha_i, f\beta_i} \circ \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_i}] \right) \right) \quad (3.19)$$

De par la compatibilité de l'opérateur translation avec le produit de convolution, cette équation peut aussi s'écrire :

$$\psi_d = \sum_i a_i \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\delta_i\right) \mathcal{T}_{f\alpha_i, f\beta_i} \left[ (\psi_i \star p) \star \left( \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_i}] \right) \right] \quad (3.20)$$

On s'aperçoit donc que l'action de filtrage de l'élément  $\Omega_i$  sur le champ incident est caractérisée par un opérateur que l'on note  $\mathcal{W}_{\Omega_i}$  et qui est défini comme :

$$\mathcal{W}_{\Omega_i}[\psi] \hat{=} \psi \star \left( \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_i}] \right) = \psi \star \delta_{\mathbb{I}_{\Omega_i}}^\psi \quad (3.21)$$

Physiquement, cet opérateur de filtrage indique l'action d'un filtre qui ne laisserait passer que les fréquences spatiales appartenant au domaine  $\Omega_i$ .

Munis de ces résultats, il est maintenant possible de comprendre l'action d'un masque descriptible dans le formalisme des pavages. En effet, avec l'aide des opérateurs de filtrage  $\mathcal{W}_{\Omega_i}$ , l'équation fondamentale de propagation (3.2) prend une forme tout à fait intelligible :

$$\psi_d \propto \left( \sum_i a_i \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\delta_i\right) \mathcal{T}_{f\alpha_i, f\beta_i} \circ \mathcal{W}_{\Omega_i} \right) [\psi_i \star p] \quad (3.22)$$

Sous cette forme, on retrouve naturellement l'opérateur de filtrage du masque, noté  $\mathcal{W}_m$  qui vaut ici :

$$\mathcal{W}_m = \sum_i a_i \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\delta_i\right) \mathcal{T}_{f\alpha_i, f\beta_i} \circ \mathcal{W}_{\Omega_i} \quad (3.23)$$

L'opération de filtrage pour un masque quelconque se passe donc de la façon suivante : chaque élément  $\Omega_i$  du pavage va d'abord sélectionner une partie des fréquences spatiales du champ incident, ce champ filtré s'obtient par l'application de l'opérateur filtrage de l'élément  $\Omega_i$  sur le champ incident. Le champ filtré subit ensuite une atténuation via le coefficient d'amplitude locale  $a_i$ . Il est ensuite déphasé grâce à l'aberration de piston codée par  $\delta_i$ . Ce champ filtré, atténué, déphasé est enfin décalé dans le plan du détecteur grâce à l'opérateur translation. Le champ total dans le plan du détecteur correspond à la somme de toutes ces contributions des divers éléments du pavage.

### 3.3 Pavages remarquables

Bien que tous les pavages soient *a priori* possibles, deux seulement présentent une importance majeure. D'abord parce qu'ils permettent de construire par union de leurs éléments un grand nombre d'autres pavages et aussi parce qu'ils décrivent directement les masques optiques les plus pertinents (ils seront listés dans le chapitre 7). Ces deux pavages sont directement associés au type de repère utilisé pour décrire le masque, à savoir : les repères cartésien ou polaire.

#### 3.3.1 Pavage cartésien

Le pavage cartésien du plan focal consiste à diviser ce plan en 4 quadrants symétriques par rapport à l'axe optique. Chaque quadrant sélectionne un quart des fréquences spatiales. La figure 3.2 illustre ce découpage. L'élément  $\Omega^{++}$  filtre

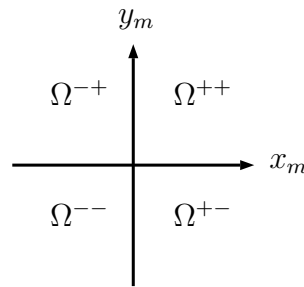


Figure 3.2 – Pavage cartésien du plan focal.

en ne laissant passer que les fréquences spatiales positives à la fois selon  $x$  et  $y$  tandis que le quadrant  $\Omega^{+-}$  ne sélectionne que les fréquences positives selon  $x$  et négatives selon  $y$ . Il est assez facile d'exprimer les fonctions indicatrices des

ces quatre quadrants à l'aide de la fonction Heaviside  $\Theta$  :

$$\mathbb{I}_{\Omega^{++}}(x_m, y_m) = \Theta(x_m)\Theta(y_m) \quad (3.24)$$

$$\mathbb{I}_{\Omega^{+-}}(x_m, y_m) = \Theta(x_m)\Theta(-y_m) \quad (3.25)$$

$$\mathbb{I}_{\Omega^{-+}}(x_m, y_m) = \Theta(-x_m)\Theta(y_m) \quad (3.26)$$

$$\mathbb{I}_{\Omega^{--}}(x_m, y_m) = \Theta(-x_m)\Theta(-y_m) \quad (3.27)$$

La résolution analytique de l'équation 3.18 aboutit aux résultats suivants :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega^{++}}}^{\psi}(x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) - \frac{\imath}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} + \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right) \quad (3.28)$$

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega^{+-}}}^{\psi}(x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) + \frac{\imath}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} - \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right) \quad (3.29)$$

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega^{-+}}}^{\psi}(x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) - \frac{\imath}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} - \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right) \quad (3.30)$$

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega^{--}}}^{\psi}(x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) + \frac{\imath}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} + \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right) \quad (3.31)$$

On peut s'inquiéter de l'apparente inhomogénéité des quatre réponses impulsionnelles tout juste calculées. Il n'en est rien, elles sont bien de dimension  $L^{-2}$  puisque les Dirac manipulés sont de dimension  $L^{-1}$  et que les fonctions indicatrices n'ont aucune dimension.

Comme je l'ai souligné plus haut, il est possible de générer d'autres pavages à partir du pavage cartésien. On peut par exemple considérer deux nouveaux pavages. Le pavage dit "d'analyse selon  $x$ " (resp. "d'analyse selon  $y$ ") qui est constitué de deux éléments ne laissant passer que les fréquences positives ou négatives selon  $x$  (resp.  $y$ ), on note  $\Omega_x^+$  (resp.  $\Omega_y^+$ ) et  $\Omega_x^-$  (resp.  $\Omega_y^-$ ) ces deux éléments. On remarque bien évidemment que :

$$\Omega_x^+ = \Omega^{++} \cup \Omega^{+-} \quad \text{et} \quad \Omega_x^- = \Omega^{--} \cup \Omega^{-+} \quad (3.32)$$

ce qui nous donne accès très rapidement à la transformée de Fourier de leur fonction indicatrice :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_x^+}}^{\psi}(x_d, y_d) = \frac{1}{2} \delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{\imath}{2} \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \quad (3.33)$$

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_x^-}}^{\psi}(x_d, y_d) = \frac{1}{2} \delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{\imath}{2} \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \quad (3.34)$$

Nous n'explicitons pas le cas du pavage "d'analyse suivant  $y$ " puisqu'il suffit d'inverser les variables  $x_d$  et  $y_d$  dans les équations précédentes pour obtenir sa résolution.

### 3.3.2 Pavage polaire

Le second pavage remarquable est associé aux masques à symétrie circulaire. Il comporte deux éléments : un disque de rayon  $r$  paramètre du pavage et son complémentaire. La figure 3.3 illustre ce découpage.

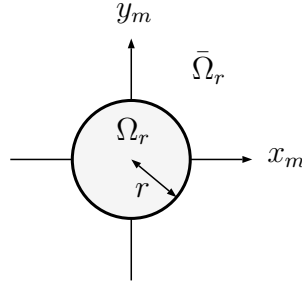


Figure 3.3 – Pavage polaire du plan focal. Le paramètre  $r$  règle le rayon du disque central.

La fonction indicatrice du disque central s'écrit aisément :

$$\mathbb{I}_{\Omega_r}(x_m, y_m) = \Theta\left(r - \sqrt{x_m^2 + y_m^2}\right) \quad (3.35)$$

Contrairement au pavage cartésien, le pavage polaire n'est pas achromatique puisque l'opérateur  $\mathcal{G}_{1/\lambda}$  appliqué sur sa fonction indicatrice introduit une dépendance en  $\lambda$ . La résolution de l'équation 3.17 consiste donc à l'obtention de la réponse impulsionnelle associée à  $\Omega_r$  :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_r}}^\psi = \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_r}] \quad (3.36)$$

L'utilisation des fonctions de Bessel de première espèce (dont les expressions sont rappelées dans l'annexe A) permet alors de remarquer que :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_r}}^\psi(x_d, y_d) = \frac{r}{f\lambda\sqrt{x_d^2 + y_d^2}} J_1\left(2\pi \frac{r}{f\lambda} \sqrt{x_d^2 + y_d^2}\right) \quad (3.37)$$

On obtient trivialement pour le complémentaire de  $\Omega_r$  :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\bar{\Omega}_r}}^\psi(x_d, y_d) = \delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{r}{f\lambda\sqrt{x_d^2 + y_d^2}} J_1\left(2\pi \frac{r}{f\lambda} \sqrt{x_d^2 + y_d^2}\right) \quad (3.38)$$

### 3.3.3 Opérateurs remarquables

Observant les transformées de Fourier obtenues dans la section précédente il apparaît que certains opérateurs jouent un rôle important dans le filtrage de

Fourier. Nous les détaillons ici.

**Définition : Opérateur identité.**

Il laisse intacte la fonction qui le subit. Il correspond à la convolution avec un double Dirac :

$$\mathcal{I}[g] \hat{=} g \quad (3.39)$$

**Définitions : Opérateurs de Hilbert.**

Ils sont définis pour illustrer les opérations de filtrage créées par le pavage cartésien. Ils correspondent à des convolutions avec les trois fonctions suivantes :

$$h_x(x,y) \hat{=} \frac{\delta(y)}{\pi x} \quad (3.40)$$

$$h_y(x,y) \hat{=} \frac{\delta(x)}{\pi y} \quad (3.41)$$

$$h_{xy}(x,y) \hat{=} \frac{1}{\pi^2 xy} \quad (3.42)$$

Les trois opérateurs de Hilbert, selon  $x$ ,  $y$  ou les deux directions à la fois sont définis par :

$$\mathcal{H}_x[g](x,y) \hat{=} f \star h_x = v.p. \left\{ \frac{1}{\pi} \int \frac{g(u,y)}{x-u} du \right\} \quad (3.43)$$

$$\mathcal{H}_y[g](x,y) \hat{=} f \star h_y = v.p. \left\{ \frac{1}{\pi} \int \frac{g(x,v)}{y-v} dv \right\} \quad (3.44)$$

$$\mathcal{H}_{xy}[g](x,y) \hat{=} f \star h_{xy} = v.p. \left\{ \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{g(u,v)}{(x-u)(y-v)} dudv \right\} \quad (3.45)$$

où *v.p.* signifie "valeur principal de Cauchy".

Illustrons l'utilité de ces opérateurs en déterminant, par exemple l'action du filtrage sur le quadrant  $\Omega^{++}$ . Il faut pour cela en expliciter l'opérateur de filtrage  $\mathcal{W}_{\Omega^{++}}$ . En se souvenant que la fonction indicatrice  $\mathbb{I}_{\Omega^{++}}$  est achromatique, et en utilisant les résultats et définitions précédents on obtient finalement que :

$$\mathcal{W}_{\Omega^{++}} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}) - \frac{i}{4}(\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y) \quad (3.46)$$

**Définition : Opérateur de Zernike.**

On mentionne enfin l'opérateur de Zernike utile lorsque le masque est décrit dans le repère polaire. Il dépend du rapport entre le rayon du disque central et la longueur



d'onde et est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{Z}_{r/f\lambda}[g] \hat{=} g \star \delta_{\Omega_r}^\psi \quad (3.47)$$

### 3.4 Extension à la modulation

Le filtrage de Fourier peut être couplé à un étage optique supplémentaire variable dans le temps et placé dans le plan de la pupille d'entrée. Ce dispositif crée une aberration oscillante et change la forme et la taille de la tâche focale qui arrive sur le masque de Fourier. Le détecteur est synchronisé avec cette oscillation régulière dans l'objectif d'avoir une image par cycle d'aberration. Il est important de préciser que dans le cadre de notre étude le champ incident est considéré comme statique durant le cycle. Ce système est appelé *modulation* et permet d'ajouter des degrés de liberté au design du filtrage de Fourier.

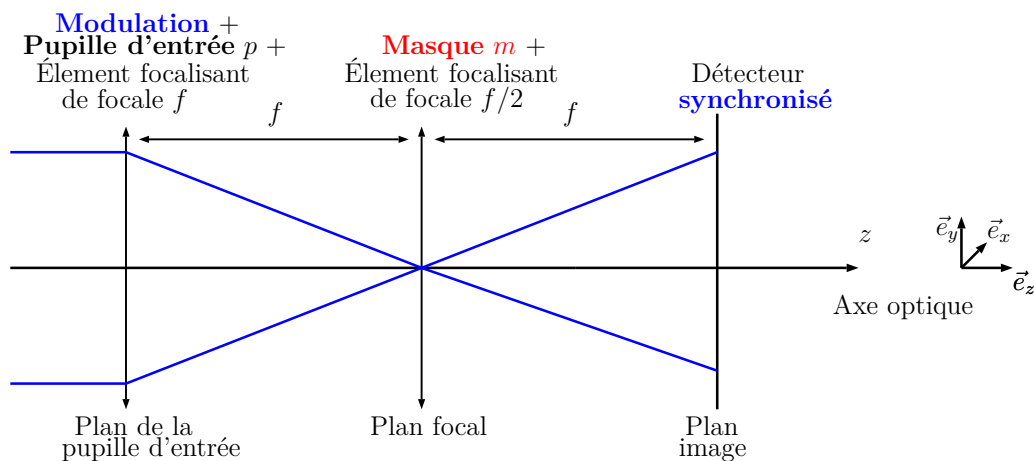


Figure 3.4 – Système de filtrage de Fourier **avec dispositif de modulation**.

#### 3.4.1 Phases de modulation

On considère un dispositif de modulation capable de générer  $N$  modes d'aberrations, que l'on note  $\phi_i$ . L'amplitude de ces modes est codée via les scalaires réels  $a_i$ . Le vecteur  $\vec{a} \hat{=} (a_1, \dots, a_N)$  décrit donc complètement la phase de modulation.

#### 3.4.2 Fonction de poids

Le temps passé pour chaque aberration possible est codé via une fonction de poids que l'on note  $w$  (pour *weighting*). Cette fonction va de l'espace des phases

de modulation vers les réels positifs. Par ailleurs, afin d'assurer la conservation de l'énergie, l'intégrale de cette fonction de poids doit être unitaire. On a donc mathématiquement :

$$w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \, d^N \vec{a} = 1 \quad (3.48)$$

$$\vec{a} \mapsto w(\vec{a})$$

### 3.4.3 Intensité modulée

Pour obtenir l'intensité sur le détecteur, il faut préciser ici un point assez subtil sur le temps caractéristique de la modulation correspondant à la durée de son cycle. Celui-ci est en effet considéré comme très grand devant le temps typique de cohérence de la source lumineuse utilisée pour faire l'analyse de surface d'onde. En d'autres termes, les champs électromagnétiques qui arrivent sur le détecteur à chaque instant du cycle de modulation doivent être sommés en intensité : leur lumière est considérée comme **incohérente**. Cela a pour conséquence physique que l'intensité totale sera la somme des intensités instantanées (et non des champs) pendant le cycle de modulation. Chacune de ces intensités est obtenue via la propagation à travers le système de filtrage de Fourier du champ incident affecté par l'aberration de modulation traduit via la fonction de transparence de la pupille :

$$p \rightarrow p \, e^{i\phi_m(\vec{a})} \quad (3.49)$$

L'intensité sur le détecteur devient donc :

$$I(\psi_i) = \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \left| \mathcal{W}_m[\psi_i, p \, e^{i\phi_m(\vec{a})}] \right|^2 d^N \vec{a} \quad \text{où} \quad \phi_m(\vec{a}) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \quad (3.50)$$

### 3.4.4 Modulation tip/tilt

Nous explorons dans cette section, le cas le plus commun de la modulation, à savoir une modulation utilisant deux modes de phase uniquement : le tip et le tilt. Dans ce cas on a donc  $N=2$  et les deux modes de phases sont :

$$\phi_1(x_p, y_p) = \frac{2\pi}{\lambda} x_p \quad \text{et} \quad \phi_2(x_p, y_p) = \frac{2\pi}{\lambda} y_p \quad (3.51)$$

On notera  $a_1$  et  $a_2$  leur amplitude respective. On remarquera que la modulation tip/tilt correspond exactement à l'application d'un dioptre d'inclinaison variable dans le plan de la pupille d'entrée :

$$d^{a_1, a_2}(x_p, y_p) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(a_1 x_p + a_2 y_p)\right) \quad (3.52)$$

La solution technique pour faire cette modulation en tip/tilt s'en inspire fortement puisque l'on utilise un miroir plan oscillant placé dans le plan de la pupille

d'entrée du système optique de filtrage de Fourier.

**Interprétation de la modulation via l'imagerie d'objets étendus.** Oublions dans un premier temps l'étage de filtrage et imaginons que le détecteur est placé juste devant le masque de filtrage. On a alors un système optique de type "imagerie en plan focal". Utilisant le formalisme développé dans le premier chapitre on obtient que l'intensité sur le détecteur notée  $I^{foc}$  vaut :

$$I^{foc} = \int_{\mathbb{R}^2} w(a_1, a_2) \left| \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F} [\psi_i p d^{a_1, a_2}] \right|^2 da_1 da_2 \quad (3.53)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} w(a_1, a_2) \mathcal{T}_{fa_1, fa_2} \left[ \left| \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F} [\psi_i p] \right|^2 \right] da_1 da_2 \quad (3.54)$$

$$= \mathcal{G}_f[w] \star \left| \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F} [\psi_i p] \right|^2 \quad (3.55)$$

Le module au carré de la transformée de Fourier du champ incident diaphragmé est communément appelé Fonction d'Étalement de Point (FEP) et ne dépend pas de la modulation tip/tilt. L'intensité du champ électrique juste avant le masque de filtrage peut donc s'écrire :

$$I^{foc} = \mathcal{G}_f[w] \star \text{FEP}(\psi_i p) \quad (3.56)$$

Formellement, il y a donc une analogie parfaite entre l'imagerie d'objets étendus et statiques et la modulation, la fonction de poids pouvant être vue comme le profil surfacique d'un objet. Il est d'ailleurs possible de modéliser des objets volumiques –qui ne seraient donc pas tous focalisés dans le même plan– en ajoutant un mode à la modulation tip/tilt, à savoir le mode de focus. On insistera cependant sur le fait que cette analogie entre modulation et imagerie d'objets étendus n'est possible qu'à la condition que chaque point de ces objets soit affecté par la même phase<sup>b</sup>.

Le message véritablement important de ce paragraphe est de se rendre compte qu'on peut se permettre de ne pas distinguer l'analyse de surface d'onde usant une source étendue de celle fonctionnant avec une modulation tip/tilt, la fonction de poids  $w$  faisant le lien entre ces deux cas sous un unique formalisme.

**On replace le détecteur dans le plan pupille** situé en aval du filtrage et on réécrit l'intensité modulée dans le cadre d'une modulation en tip/tilt :

$$I(\psi_i p) = \int_{\mathbb{R}^2} w(a_1, a_2) \mathcal{W}_m[d^{a_1, a_2} \psi_i p] \overline{\mathcal{W}_m[d^{a_1, a_2} \psi_i p]} da_1 da_2 \quad (3.57)$$

Cette relation est difficile à étudier en l'état, aussi on va l'exprimer à partir d'un opérateur bilinéaire plus général qui sera plus aisé à manipuler. On l'appelle **opérateur de couplage** puisqu'il témoigne de la communication entre les

---

b. Si ce n'était pas le cas, on parlerait d'*anisoplanétisme*.

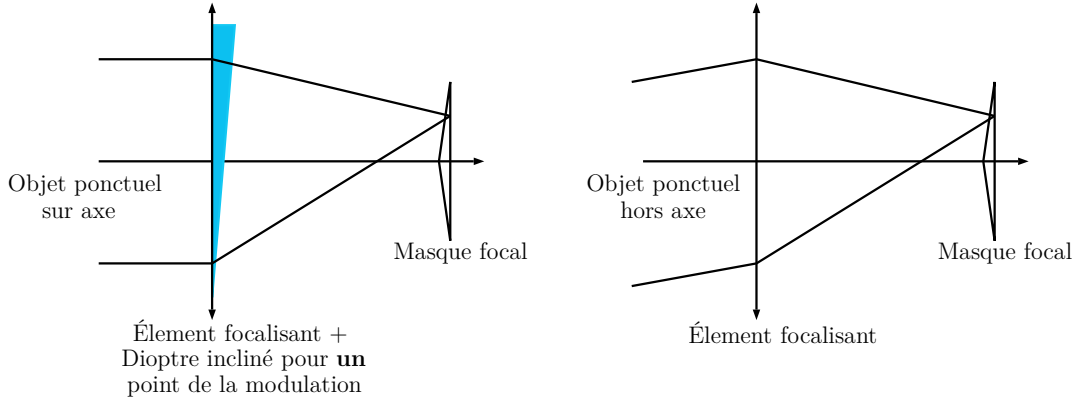


Figure 3.5 – Équivalence entre modulation tip/tilt et filtrage de Fourier avec source étendue. Les coefficients tip/tilt codent la position angulaire d'un point de l'objet. La fonction de poids  $w$  code la brillance de ce point.

champs induite par la modulation.

**Définition : Opérateur de couplage.**

L'opérateur bilinéaire de couplage, noté  $\mathcal{C}_m^w$ , s'applique sur deux champs à la fois. Il ne dépend que du masque et de la fonction de poids. Il caractérise donc complètement les dispositifs de filtrage de Fourier associés à une modulation tip/tilt. Il est défini comme :

$$\mathcal{C}_m^w[\psi_1, \psi_2] \hat{=} \int_{\mathbb{R}^2} w(a_1, a_2) \mathcal{W}_m[\psi_1 d^{a_1, a_2}] \overline{\mathcal{W}_m[\psi_2 d^{a_1, a_2}]} \mathbf{d}a_1 \mathbf{d}a_2 \quad (3.58)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} w(a_1, a_2) (\psi_1 d^{a_1, a_2} \star \delta_m^\psi) (\overline{\psi_2 d^{-a_1, -a_2} \star \delta_m^\psi}) \mathbf{d}a_1 \mathbf{d}a_2 \quad (3.59)$$

Développant explicitement les produits de convolution à l'intérieur de  $\mathcal{C}_m^w$ , on s'aperçoit également que l'opérateur de couplage fait intervenir la transformée de Fourier de la fonction de poids :

$$\mathcal{C}_m^w[\psi_1, \psi_2](X, Y) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{d}x_1 \mathbf{d}y_1 \mathbf{d}x_2 \mathbf{d}y_2 \psi_1(x_1, y_1) \delta_m^\psi(X - x_1, Y - y_1) \times \overline{\psi_2(x_2, y_2) \delta_m^\psi(X - x_2, Y - y_2)} \times \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[w](x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (3.60)$$

La présence de cette transformée de Fourier permet d'introduire formellement<sup>c</sup>

c. Attention, pour des raisons subtiles de variables d'intégration  $(a_1, a_2)$  sans dimension,  $\delta_w^\psi$  a la même dimension que  $w$ .

la réponse impulsionnelle (définie dans le chapitre 2) de la fonction de poids  $\delta_w^\psi$  :

$$\mathcal{C}_m^w[\psi_1, \psi_2](X, Y) = \int_{\mathbb{R}^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \psi_1(x_1, y_1) \delta_m^\psi(X - x_1, Y - y_1) \times \overline{\psi_2(x_2, y_2)} \overline{\delta_m^\psi(X - x_2, Y - y_2)} \times \delta_w^\psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad (3.61)$$

La première utilité de l'opérateur de couplage est d'exprimer très facilement l'intensité modulée de (3.57) :

$$I(\psi_i, p) = \mathcal{C}_m^w[\psi_i, p, \psi_i, p] \quad (3.62)$$

**Cas limites de la modulation.** Afin de comprendre la physique contenue dans l'opérateur de couplage. On s'intéresse en premier au cas limite correspondant à l'**absence de modulation**. La fonction de poids se résume donc à un Dirac centré sur l'origine. Sa transformée de Fourier est égale à la fonction identité. L'opérateur modulation devient donc :

$$\mathcal{C}_m^{w=\delta}[\psi_1, \psi_2] = (\psi_1 \star \delta_m^\psi) \overline{(\psi_2 \star \delta_m^\psi)} \quad (3.63)$$

Injectant ce résultat dans la formule de l'intensité modulée (3.62), on retombe bien sur l'intensité sans modulation :

$$I(\psi_i, p) = \mathcal{C}_m^{w=\delta}[\psi_i, p, \psi_i, p] = |(\psi_i \star \delta_m^\psi)|^2 \quad (3.64)$$

Le second cas s'intéresse à une **modulation "complète"**. Autrement dit la fonction de poids vaut 1 en tout point du plan. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de conservation de l'énergie mais on oublie pour ce cas extrême ce pré-requis. La transformée de Fourier de  $w$  se résume donc à un Dirac et l'opérateur modulation devient :

$$\mathcal{C}_m^{w=\mathbb{I}}[\psi_1, \psi_2] = (\psi_1 \overline{\psi_2}) \star |\delta_m^\psi|^2 \quad (3.65)$$

Ce qui a notamment pour conséquence :

$$I(\psi_i, p) = \mathcal{C}_m^{w=\mathbb{I}}[\psi_i, p, \psi_i, p] = |\psi_i| \star |\delta_m^\psi|^2 \quad (3.66)$$

Ces deux cas extrêmes montrent une propriété tout sauf triviale de la modulation. La fonction de poids dont elle dépend agit en effet comme un curseur qui déplace le produit de multiplication entre les champs interférent sur le détecteur :

$$(\psi_1 \star \delta_m^\psi) \times \overline{(\psi_2 \star \delta_m^\psi)} \leftrightarrow (\psi_1 \times \overline{\psi_2}) \star |\delta_m^\psi|^2 \quad (3.67)$$

**Un masque équivalent à la modulation ?** On cherche dans cet ultime paragraphe à savoir si le degré de liberté apporté par la modulation tip/tilt n'est pas

redondant avec celui apporté par le masque de filtrage. Autrement dit, est-il possible de trouver un masque de filtrage qui serait équivalent à de la modulation ? Pour répondre à cette question on réécrit l'opérateur de couplage sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_m^w[\psi_1, \psi_2](X, Y) = \int_{\mathbb{R}^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \psi_1(X-x_1, Y-y_1) \overline{\psi_2}(X-x_2, Y-y_2) \times \\ \delta_m^\psi(x_1, y_1) \overline{\delta_m^\psi}(x_2, y_2) \times \delta_w^\psi(x_2-x_1, y_2-y_1) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Trouver un masque équivalent à la modulation revient donc à découper la réponse impulsionnelle de la modulation  $\delta_w^\psi$  en deux contributions de sorte à avoir :

$$\delta_{m_w}^\psi(x_1, y_1) \overline{\delta_{m_w}^\psi}(x_2, y_2) = \delta_w^\psi(x_2-x_1, y_2-y_1) \quad (3.69)$$

où  $m_w$  serait le masque équivalent à la modulation. On peut montrer qu'un tel masque existe à condition que la réponse impulsionnelle de la fonction de poids ait une forme bien particulière, à savoir :

$$\delta_w^\psi(x, y) = A^2 \exp(i(Bx + Cy)) \quad \text{avec} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (3.70)$$

La réponse impulsionnelle du masque équivalent vaut alors :

$$\delta_{m_w}^\psi(x, y) = A \exp(i(Bx + Cy)) \quad \text{avec} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (3.71)$$

Malheureusement ces cas de modulation sont fort peu intéressants. En effet, on s'aperçoit que la fonction de poids associée à la fonction (3.70), vaut :

$$w = \mathcal{G}_{1/f\lambda} \circ \mathcal{F}^{-1} [A^2 \exp(i(Bx + Cy))] \quad (3.72)$$

$$= \delta(x + \tilde{B}) \delta(x + \tilde{C}) \quad \text{avec} \quad \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathbb{R} \quad (3.73)$$

Autrement dit, les modulations décrites par (3.70) sont statiques ! Elles ne font que déplacer la FEP du centre du plan focal vers un autre point. On comprend alors facilement pourquoi il existe un masque équivalent à cette modulation puisque celui-ci correspond simplement à la translation du masque initial assurant que la FEP tombe bien à l'endroit décrit par la modulation. La figure 3.6 illustre cette équivalence. On retiendra donc qu'une modulation non statique ne peut être décrite par un masque de Fourier. Le degré de liberté apporté par ce dispositif est donc tout-à-fait pertinent et permet d'étendre substantiellement les possibilités du Filtrage de Fourier.

\*  
\*   \*

**Ce chapitre dédié au Filtrage de Fourier a permis d'en expliciter de très nombreuses et intéressantes propriétés inhérentes. Ont été précisées les**

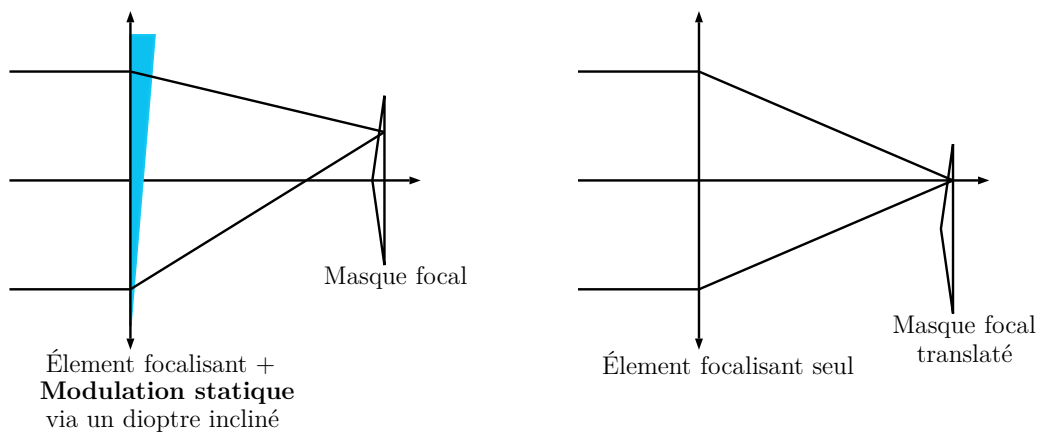


Figure 3.6 – À gauche : Type de modulation tip/tilt –hélas statique– qui admet un masque équivalent. À droite : masque équivalent correspondant au masque précédent translaté.

notions de réponse impulsionnelle et opérateur de Filtrage à la lumière du formalisme puissant et inédit basé sur le pavage du plan focal. Celui-ci assume parfaitement l'aspect "filtrage" inhérent à ce système optique puisqu'il décrit chaque masque de Fourier comme un élément permettant de sélectionner puis de combiner et/ou séparer les fréquences spatiales du champ incident. Cet effort théorique est consolidé par la maîtrise d'opérateurs mathématiques (Hilbert et Zernike) de manipulation aisée. Le filtrage de Fourier a également été enrichi par un étage optique supplémentaire –la modulation– qui n'est pas redondant avec le filtrage. Cette modulation a été présentée de façon très générale même si une attention particulière a été portée à la modulation tip/tilt. Les prochains chapitres verront ces efforts théoriques récompensés au sens où ils permettront de comprendre l'analyse de front par filtrage de Fourier de façon analytique.

## 4 Analyse de surface d'onde par filtrage de Fourier

Dans ce chapitre, on s'intéresse (enfin) à l'**analyse de surface d'onde** basée sur le filtrage de Fourier avec ou sans étage de modulation. On s'attache à expliciter la dépendance de l'intensité avec la phase afin d'en construire des critères de performance en accord avec ceux présentés au chapitre 1.

On commence par faire l'hypothèse que la fonction de transparence de la pupille d'entrée ne consiste qu'en la fonction indicatrice de sa forme géométrique :

$$p = \mathbb{I}_P \quad (4.1)$$

D'autre part, on suppose que la source est monochromatique. La quantité entrante dans le système optique, à savoir son champ incident, peut s'écrire :

$$\psi_i = f \mathbb{I}_P \exp(i\phi), \quad (4.2)$$

Cette décomposition permet de distinguer sa répartition spatiale d'énergie codée via la fonction  $f$  (pour flux) de la forme de son front d'onde codée via sa phase  $\phi$ . La fonction  $f$  est à support compact (l'énergie du front d'onde incident est finie) et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . La phase quant à elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Ce champ se propage à travers le système optique puis se trouve converti par le détecteur en une intensité que l'on note  $I$ . Cette intensité dépend *a priori* autant du flux que de la phase. Dans le cadre de l'analyse de front d'onde, le flux  $f$  (tout comme la fonction de transparence de la pupille  $p$ ) est considéré comme une donnée du problème tandis que la phase  $\phi$  est l'inconnue. On écrira donc désormais la fonction intensité  $I$  non comme variable du champ incident  $\psi_i$  mais comme dépendante de  $\phi$  :

$$I(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \left| \mathcal{W}_m [f e^{i\phi} \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})}] \right|^2 \mathbf{d}^N \vec{a} \quad (4.3)$$



## 4.1 Espace des phases descriptibles

On peut commencer l'étude des ASO à filtrage de Fourier par une analyse générale des phases qu'ils sont capables de décrire.

### 4.1.1 Aberration de piston

Un système optique de Filtrage de Fourier peut-il "voir" une phase de type piston ? Si l'on suit son sens physique, il y a assez peu d'espoir à avoir. En effet, le piston est un mode qui témoigne d'un retard uniforme du front d'onde. Celui-ci n'est en rien déformé par sa présence. Il existe bien des procédés optiques – typiquement des interféromètres – mesurant une telle aberration mais ils fonctionnent tous par rapport à une référence fixée par l'expérimentateur : le piston mesuré est alors un piston différentiel. Comme le filtrage de Fourier n'a pas de telle référence, il semble donc peu probable qu'il soit sensible à l'aberration de piston. Vérifions cette intuition à l'aide des développements précédents.

La propriété notable de l'aberration piston est d'être assimilable à un scalaire complexe passant sans modification à travers les opérateurs linéaires de filtrage :

$$I(\phi + \phi_{\text{piston}}) = \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \left| \mathcal{W}_m [f e^{i\phi + \phi_{\text{piston}}} \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})}] \right|^2 d^N \vec{a} \quad (4.4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \left| e^{i\phi_{\text{piston}}} \mathcal{W}_m [f e^{i\phi} \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})}] \right|^2 d^N \vec{a} \quad (4.5)$$

$$= I(\phi) \quad (4.6)$$

Un analyseur de surface d'onde utilisant le filtrage de Fourier ne distingue donc pas les pistons. Il faut en conséquence éloigner d'emblée ces aberrations de l'espace des phases descriptibles. On considère donc les phases modulo leur piston global. Autrement dit, leur moyenne spatiale peut être prise nulle.

### 4.1.2 Flux localement nul

On peut tenir le même type de raisonnement lorsque le flux  $f$  présente des zones où il est localement nul (ou en dehors du support de la pupille). Une phase qui serait uniquement définie sur ces parties du plan d'entrée ne saurait être codée par l'analyseur de front d'onde. Ce résultat n'est pas très surprenant physiquement et on aurait pu le prévoir d'emblée. Dans la catégorie "phases invisibles" on ajoute donc aux pistons les phases définies uniquement là où il n'y a aucun flux et on retient qu'il n'y a pas d'analyse locale de la phase sans flux local.

Pour pousser plus loin les investigations on se doit d'étudier plus en détail la variation de l'intensité avec la phase.

## 4.2 Développement de Taylor de l'intensité

Une des approches pertinentes pour expliciter la dépendance de cette l'intensité consiste à effectuer un développement de Taylor sur l'exponentiel qui la contient. Pour ne pas perdre en généralité, ce développement de Taylor se fait autour d'une phase *référence a priori* arbitraire que l'on note  $\phi_r$  :

$$\exp(i(\phi_r + \phi)) = \exp(i\phi_r) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \phi^p \quad (4.7)$$

Cette phase de référence peut être vue comme une aberration présente dans la pupille d'entrée du système optique quelque soit la phase  $\phi$  à analyser. Elle est donc équivalente à une modulation statique. Puisque nous considérons dans un premier temps la modulation de façon générale (c'est-à-dire pas forcément en tip/tilt), nous incluons donc cette phase de référence dans la phase modulée :

$$\phi_m(\vec{a}) \rightarrow \phi_m(\vec{a}) + \phi_r \quad (4.8)$$

Ceci étant dit, on peut substituer le développement limité précédent dans l'expression générale de l'intensité :

$$I(\phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \mathcal{W}_m \left[ f \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})} \frac{i^p}{p!} \phi^p \right] \overline{\mathcal{W}_m \left[ f \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})} \frac{i^q}{q!} \phi^q \right]} d^N \vec{a} \quad (4.9)$$

Usant des lois sur les produits de Cauchy, on peut réécrire la précédente équation pour classer la dépendance en phase suivant ses puissances :

$$I(\phi) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i)^q}{q!} \left( \sum_{n=0}^q (-1)^n \binom{q}{n} \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \mathcal{W}_m \left[ f \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})} \phi^p \right] \overline{\mathcal{W}_m \left[ f \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})} \phi^{q-p} \right]} d^N \vec{a} \right) \quad (4.10)$$

### 4.2.1 $p$ -ième moment de la phase à travers le masque

L'équation (4.10) peut sembler quelque peu complexe, heureusement il est assez aisé d'y repérer une quantité bien connue. En effet si l'on définit  $\phi^{p*}(\vec{a})$  de la façon suivante :

$$\phi^{p*}(\vec{a}) \triangleq \mathcal{W}_m \left[ f \mathbb{I}_P e^{i\phi_m(\vec{a})} \phi^p \right], \quad (4.11)$$

on s'aperçoit que cette quantité n'est rien d'autre que la réponse en terme de champ du système de filtrage de Fourier quand le champ incident  $\psi_i$  est égal à  $f \phi^p$ , au moment de la modulation  $\phi_m(\vec{a})$ . Ici apparaît donc l'intérêt du travail théorique précédent puisque la connaissance de l'opérateur filtrage permet d'explicitier le développement de Taylor de l'intensité en puissances de phase. Vu la signification physique de l'opérateur filtrage on nomme la quantité complexe

$\phi^{p^*}(\vec{a})$  le  $p$ -ième moment de la phase à travers le masque pour la modulation  $\vec{a}$ .

### 4.2.2 $q$ -intensités

L'intensité totale se décompose donc de la façon suivante :

$$I(\phi) = \sum_{q=0}^{\infty} I_q(\phi) \quad \text{avec} \quad I_q(\phi) \triangleq \frac{(-i)^q}{q!} \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{q}{p} \int_{\mathbb{R}^N} w(\vec{a}) \phi^{n^*}(\vec{a}) \overline{\phi^{q-p^*}(\vec{a})} d^N \vec{a} \quad (4.12)$$

où l'on appelle  $q$ -intensité la quantité  $I_q$ . Une  $q$ -intensité n'est variable que des  $q$ -premières puissances de la phase. Notons qu'une autre façon d'obtenir ces intensités consiste à obtenir les dérivées successives de l'intensité. On a en effet la relation suivante :

$$I_q(\phi) = \frac{1}{q!} \left. \frac{\partial^q I(a\phi)}{\partial a^q} \right|_{a=0} \quad (4.13)$$

On note d'ailleurs que la "0-intensité" correspond à l'intensité lorsque le champ incident a un front d'onde plan, c'est-à-dire lorsque  $\phi=0$ . On nomme pour cette raison la "0-intensité" *intensité constante*. De la même façon, on appelle *intensité linéaire* et notera  $I_{\text{linéaire}}$  la "1-intensité" et *intensité quadratique*  $I_{\text{quadratique}}$  la "2-intensité".

### 4.2.3 Graphe entrée/sortie de l'ASO

Illustrer graphiquement la relation entre la sortie –l'intensité– et l'entrée –la phase– de l'ASO est assez complexe du fait que ces quantités sont des cartes à deux dimensions. De plus l'espace d'entrée peut être de dimension infinie. Il reste néanmoins possible de se faire une idée de l'évolution de l'intensité en fonction de la phase en raisonnant de la manière suivante. On veut tout d'abord restreindre l'espace d'entrée à une seule dimension, pour cela on se munit d'une phase arbitraire  $\phi$  de l'espace des phases descriptibles et on lui associe un scalaire  $a$  qui code son amplitude. Ce scalaire permet d'explorer le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}\phi$  de l'espace des phases  $\mathbb{E}_\phi$ . Dans l'espace de sortie, le développement de Taylor de l'intensité prend une forme assez simple :

$$I(a\phi) = \sum_{q=0}^{\infty} a^q I_q(\phi) \quad (4.14)$$

$$= I_{\text{constante}} + a I_{\text{linéaire}}(\phi) + a^2 I_{\text{quadratique}}(\phi, \phi^2) + \dots \quad (4.15)$$

Il apparaît donc que la collection des cartes à deux dimensions des  $q$ -intensités calculées pour  $\phi$  caractérise complètement la relation entrée/sortie de l'ASO pour la phase arbitraire  $\phi$ . Par ailleurs, si l'on se fixe à un certain point du détecteur on peut même représenter un véritable graphe entrée/sortie pour l'ASO.

L'amplitude de la phase  $\phi$  sera la variable d'entrée et l'intensité au niveau de ce point du détecteur représentera la sortie de l'ASO. Il est alors assez facile de comprendre le précédent développement de Taylor (figure 4.1).

On se souvient notamment que l'intensité est une quantité strictement positive ce qui fait qu'elle ne peut se résumer à ses intensités impaires qui prennent des valeurs négatives. L'intensité constante correspond à une amplitude de phase nulle. L'intensité linéaire code le comportement linéaire autour de  $a=0$ . Le terme quadratique quantifie au premier ordre l'écart entre le comportement réel et le comportement linéaire.

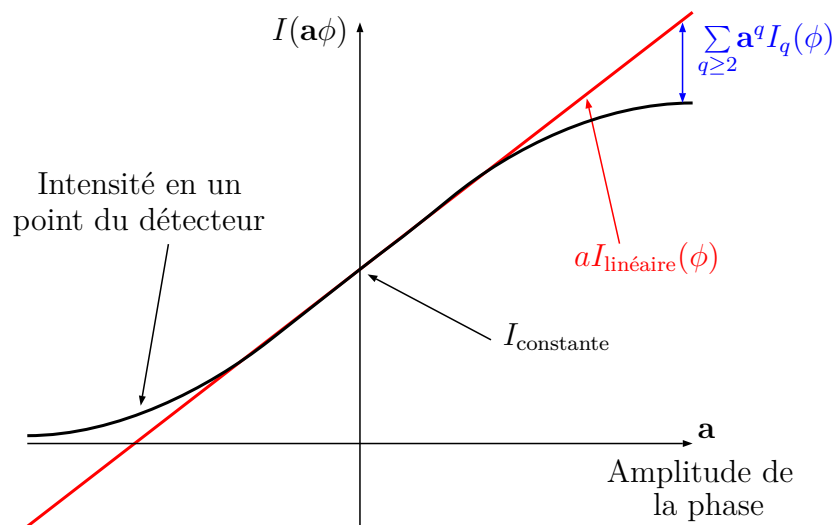


Figure 4.1 – Graphe typique entrée/sortie d'un ASO. L'entrée correspond à l'amplitude d'une phase arbitraire. La sortie est la valeur de l'**intensité en un point du détecteur**.

#### 4.2.4 Une condition nécessaire à la bijectivité

L'obtention des  $q$ -intensités permet d'explorer un peu plus en profondeur les conditions de bijectivité entre espace des phases et espace des intensités. Considérons pour cela  $\phi$  une phase appartenant à l'espace des phases et son opposée  $-\phi$ . On remarque que :

$$I(-\phi) = \sum_{q \text{ pair}} I_q(\phi) - \sum_{q \text{ impair}} I_q(\phi) \quad (4.16)$$

Il apparaît donc qu'un analyseur de front d'onde par filtrage de Fourier devra avoir **au moins une intensité impaire non nulle** pour être bijectif. Si ce n'était pas le cas, on aurait en effet une même intensité sur le détecteur pour une

phase et son opposée. Ceci étant vrai pour n'importe quelle phase, l'ensemble des phases descriptibles serait réduit à l'ensemble vide...

## 4.2.5 Applications

### 4.2.5.1 Filtrage de Fourier sans modulation ni phase de référence

On explicite tout d'abord les  $q$ -intensités lorsque  $\phi_r=0$  et que la modulation n'est pas en action. Les  $q$ -intensités peuvent alors se clarifier suivant la parité de  $q$ . On s'aperçoit notamment que les intensités d'ordre pair font intervenir les opérateurs module et partie réelle tandis que les ordres impairs font intervenir l'opérateur partie imaginaire :

$$\text{Intensités paires} \quad I_{2q}(\phi) = \frac{1}{q!^2} |\phi^{q*}|^2 + \frac{2(-1)^q}{(2q)!} \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^p \binom{2q}{p} \Re[\phi^{p*} \overline{\phi^{2q-p*}}] \quad (4.17)$$

$$\text{Intensités impaires} \quad I_{2q+1}(\phi) = \frac{2(-1)^q}{(2q+1)!} \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{2q+1}{p} \Im[\phi^{p*} \overline{\phi^{2q+1-p*}}] \quad (4.18)$$

où  $\phi^{n*} = \mathcal{W}_m[f \mathbb{I}_P \phi^n]$  est le  $p$ -ième moment de la phase à travers le masque sans modulation. Pour trouver les conditions assurant l'existence d'une intensité impaire, chose on le rappelle nécessaire au système optique pour être un ASO, nous explicitons la quantité générique qui intervient dans l'expression des intensités impaires, à savoir :

$$\Im[\phi^{p*} \overline{\phi^{n*}}] = \mathcal{W}_m^{\Re}[f \mathbb{I}_P \phi^n] \mathcal{W}_m^{\Im}[f \mathbb{I}_P \phi^p] - \mathcal{W}_m^{\Re}[f \mathbb{I}_P \phi^p] \mathcal{W}_m^{\Im}[f \mathbb{I}_P \phi^n] \quad (4.19)$$

où  $\mathcal{W}_m^{\Re}$  (resp.  $\mathcal{W}_m^{\Im}$ ) est la partie réelle (resp. imaginaire) de l'opérateur de filtrage et  $n$  et  $p$  des entiers naturels arbitraires. L'existence d'intensités impaires tient donc à l'**existence conjointe d'une partie réelle et d'une partie imaginaire** pour l'opérateur de Filtrage. On donne aussi les relations nécessaires à la constructions des intensités paires :

$$\Re[\phi^{p*} \overline{\phi^{n*}}] = \mathcal{W}_m^{\Re}[f \mathbb{I}_P \phi^n] \mathcal{W}_m^{\Re}[f \mathbb{I}_P \phi^p] - \mathcal{W}_m^{\Im}[f \mathbb{I}_P \phi^p] \mathcal{W}_m^{\Im}[f \mathbb{I}_P \phi^n] \quad (4.20)$$

$$|\phi^{n*}|^2 = \left( \mathcal{W}_m^{\Re}[f \mathbb{I}_P \phi^n] \right)^2 + \left( \mathcal{W}_m^{\Im}[f \mathbb{I}_P \phi^n] \right)^2 \quad (4.21)$$

On profite de ce paragraphe pour donner les quatre premiers termes du développement en puissances de phase d'un filtrage de Fourier sans modulation ni phase

de référence :

$$I_{\text{constante}} = |\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P]|^2 \quad (4.22)$$

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P\phi]}] \quad (4.23)$$

$$I_{\text{quadratique}}(\phi, \phi^2) = |\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P\phi]|^2 - \Re[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P\phi^2]}] \quad (4.24)$$

$$I_{\text{cubique}}(\phi, \phi^2, \phi^3) = \Im[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P\phi]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P\phi^2]}] - \frac{1}{3}\Im[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P\phi^3]}] \quad (4.25)$$

#### 4.2.5.2 Filtrage de Fourier sans modulation avec une phase de référence

L'expression des q-intensités ne change pas si l'on prend en compte la phase de référence dans le p-ième moment de la phase à travers le masque :

$$\phi^{p*} = \mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi^p] \quad (4.26)$$

La condition d'existence d'intensités impaires tient au caractère non nul de la quantité générique suivante :

$$\begin{aligned} \Im[\phi^{p*}\overline{\phi^{n*}}] = & \left( \mathcal{W}_m^{\Re}[f\mathbb{I}_P \cos(\phi_r)\phi^n] - \mathcal{W}_m^{\Im}[f\mathbb{I}_P \sin(\phi_r)\phi^n] \right) \times \\ & \left( \mathcal{W}_m^{\Re}[f\mathbb{I}_P \sin(\phi_r)\phi^p] + \mathcal{W}_m^{\Im}[f\mathbb{I}_P \cos(\phi_r)\phi^p] \right) - \\ & \left( \mathcal{W}_m^{\Re}[f\mathbb{I}_P \cos(\phi_r)\phi^p] - \mathcal{W}_m^{\Im}[f\mathbb{I}_P \sin(\phi_r)\phi^p] \right) \times \\ & \left( \mathcal{W}_m^{\Re}[f\mathbb{I}_P \sin(\phi_r)\phi^n] + \mathcal{W}_m^{\Im}[f\mathbb{I}_P \cos(\phi_r)\phi^n] \right) \quad (4.27) \end{aligned}$$

Il devient donc possible d'utiliser des masques à opérateur purement réel ou purement imaginaire dès lors qu'une phase de référence est présente dans le plan de la pupille d'entrée. Une nouvelle fois, on explicite les premiers termes du développement en puissance de phases :

$$I_{\text{constante}} = |\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}]|^2 \quad (4.28)$$

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}\phi]}] \quad (4.29)$$

$$I_{\text{quadratique}}(\phi, \phi^2) = |\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}\phi]|^2 - \Re[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}\phi^2]}] \quad (4.30)$$

$$I_{\text{cubique}}(\phi, \phi^2, \phi^3) = \Im[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}\phi]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}\phi^2]}] - \frac{1}{3}\Im[\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}]\overline{\mathcal{W}_m[f\mathbb{I}_P e^{i\phi_r}\phi^3]}] \quad (4.31)$$

### 4.2.5.3 Filtrage de Fourier avec modulation en tip/tilt et une phase de référence

On explicite enfin les "q-intensités" lorsque la modulation est de type tip/tilt et qu'une phase de référence peut être présente. On illustre par là l'intérêt de l'opérateur de couplage  $C_m^w$  puisque les q-intensités s'écrivent :

$$I_q(\phi) = \frac{(-i)^q}{q!} \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{q}{p} C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi^p, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi^{q-p}] \quad (4.32)$$

La question de l'existence d'intensités impaires ne se résout pas facilement du fait de la présence de la modulation aussi nous ne nous hasarderons pas à des conclusions générales, par contre nous explicitons les quatre premières q-intensités :

$$I_{\text{constante}} = C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r}, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r}] \quad (4.33)$$

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im [C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r}, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi]] \quad (4.34)$$

$$I_{\text{quadratique}}(\phi, \phi^2) = C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi] - \Re [C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r}, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi^2]] \quad (4.35)$$

$$I_{\text{cubique}}(\phi, \phi^2, \phi^3) = \Im [C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi^2]] - \frac{1}{3} \Im [C_m^w [f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r}, f \mathbb{I}_P e^{i\phi_r} \phi^3]] \quad (4.36)$$

## 4.3 Lumière polychromatique

On suppose dans cette section que la source ponctuelle est polychromatique et que le détecteur est sensible de façon uniforme à toutes ses longueurs d'onde.

La source émet désormais sur une bande spectrale élargie. Mathématiquement, la fonction flux  $f$  dépend donc de la longueur d'onde :

$$f(x_p, y_p; \lambda) \quad (4.37)$$

Afin de centrer l'étude sur l'aspect chromatique, on fait l'hypothèse forte que cette fonction n'est en fait variable que de la longueur d'onde ; en d'autres termes la répartition énergétique du champ incident est uniforme. Ceci est notamment valable dans le cadre de l'optique adaptative en astronomie : l'étoile source étant à très grande distance, son champ est plan juste avant l'entrée de l'atmosphère et celle-ci ne le perturbe qu'en phase. Ces suppositions permettent d'introduire facilement le spectre de la source noté  $s(\lambda)$  qui correspond simplement au carré de  $f$  :

$$s(\lambda) = f(\lambda)^2 \quad (4.38)$$

Puisque des champs à des longueurs d'onde différentes sont incohérents entre eux, l'intensité totale sur le détecteur est la somme des intensités monochromatiques. On cherche donc à obtenir ces intensités monochromatiques en cherchant

toutes les dépendances en longueur d'onde du système.

### 4.3.1 Dépendances avec la longueur d'onde

**Phase aberrante.** Pour connaître la dépendance en longueur d'onde de la phase aberrante, il faut s'intéresser à la façon dont elle est modélisée. On rappelle pour cela que celle-ci correspond à la somme d'aberrations accumulées lors d'une propagation. Ces aberrations ne sont pas identiques en tout point de l'espace si bien que dans le plan de la pupille d'entrée la phase aberrante est une fonction dépendant des coordonnées  $(x_p, y_p)$ . La quantité physique qui permet de décrire l'accumulation des aberrations est le **chemin optique**. Il correspond au produit entre l'indice optique local et un élément infinitésimal de distance. Intégré le long de la propagation, il donne l'épaisseur optique que chaque partie du champ a traversé. On peut donc écrire la phase sous la forme :

$$\phi(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} e_o(\lambda) \quad (4.39)$$

$e_o$  est l'épaisseur optique, elle dépend donc de l'indice optique du milieu dans lequel passe l'onde lumineuse ainsi que de la distance physique effective traversée. Précisons encore une fois que ces quantités ( $\phi$  et  $e_o$ ) sont des fonctions à valeurs réelles définies dans le plan de la pupille d'entrée, il faut donc se les représenter comme des cartes 2D.

On voit qu'il est impossible, en lumière polychromatique, de parler d'une seule et unique phase à mesurer –celle-ci dépendant de la longueur d'onde– il faut trouver la quantité à mesurer qui ne présente aucune ambiguïté. On fait pour cela l'hypothèse forte que l'épaisseur optique  $e_o$  ne dépend pas de la longueur d'onde. Cette hypothèse est notamment vérifiée pour la turbulence atmosphère pour des longueurs d'onde visible et proche infra-rouge. On peut donc écrire que :

$$\phi(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} e_o \quad (4.40)$$

Afin de se ramener au formalisme monochromatique dans lequel on estimait une phase, on choisit une longueur d'onde de référence que l'on note  $\lambda_0$  qui permet de convertir l'épaisseur optique  $e_o$  en une phase notée  $\phi_0$  et définie comme :

$$\phi_0 \hat{=} \frac{2\pi}{\lambda_0} e_o \quad (4.41)$$

On peut donc noter la dépendance de la phase vis-à-vis de la longueur d'onde via la relation suivante :

$$\phi(\lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_0 \quad (4.42)$$

On remarque avec cette formule que le caractère polychromatique a pour simple



effet de dilater la phase aberrante proportionnellement au scalaire  $\lambda_0/\lambda$ . La forme en elle-même de la phase ne change pas avec la longueur d'onde. La phase est juste d'autant plus forte que la longueur d'onde est faible.

**Modulation.** On suppose l'étage de modulation capable d'introduire des aberrations via des épaisseurs optiques indépendantes de la longueur d'onde. Ceci est notamment le cas lorsque la modulation en tip/tilt est générée via un miroir plan oscillant placé dans le plan de la pupille d'entrée. On prend ainsi pour référence la longueur d'onde  $\lambda_0$  pour poser :

$$\phi_{m,0}(\vec{a}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} e_{o,m}(\vec{a}) \quad (4.43)$$

On appelle  $\phi_{m,0}$  la phase modulée à la longueur d'onde de référence. Par ailleurs, on insiste sur le fait que le vecteur  $\vec{a}$  correspond à l'amplitude des modes de phases de modulation pour la longueur d'onde  $\lambda_0$ . Car, on le rappelle, l'amplitude de la phase varie avec la longueur d'onde. Avec ces notations, la phase modulée pour n'importe quelle longueur d'onde s'écrit :

$$\phi_m(\vec{a};\lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}(\vec{a}) \quad (4.44)$$

On en profite pour expliciter cette phase de modulation lorsqu'elle est la somme d'une phase de référence et d'une modulation en tip/tilt :

$$\phi_m(a_1, a_2; \lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}(a_1, a_2) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \left( \phi_{r,0} + a_1 \frac{2\pi x}{\lambda_0} + a_2 \frac{2\pi y}{\lambda_0} \right) \quad (4.45)$$

**Masque de filtrage.** La fonction de transparence du masque dépend *a priori* de la longueur d'onde tant dans son amplitude que dans sa phase :

$$m(x_m, y_m; \lambda) = a(x_m, y_m; \lambda) \exp(i\phi_{\text{masque}}(x_m, y_m; \lambda)) \quad (4.46)$$

Nous ne faisons pas d'hypothèses particulières supplémentaires quant à cette dépendance en longueur d'onde mais l'explicitons dans le cas où le masque est descriptible via le formalisme des pavages :

$$m(x_m, y_m; \lambda) = \sum_i a_i(\lambda) \mathbb{I}_{\Omega_i}(x_m, y_m) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{n(\lambda)}{n(\lambda_0)} (\delta_i + x_m \alpha_i + y_m \beta_i)\right) \quad (4.47)$$

L'amplitude locale du masque  $a_i$  dépend *a priori* de la longueur d'onde. Certaines densités ont en effet des réponses spectrales non uniformes. Les fonctions indicatrices du plan sont quant à elles indépendantes de la longueur d'onde puisqu'elles sont imposées par la géométrie du masque. Nous avons choisi de décomposer l'épaisseur optique du masque pour expliciter la dépendance en longueur

d'onde de l'indice optique du milieu diélectrique dont il est constitué afin de prendre en compte d'éventuel effet de dispersion. Avec ces notations, le piston  $\delta_i$  et les angles de tip et de tilt  $(\alpha_i, \beta_i)$  locaux sont quantifiés vis-à-vis de la longueur d'onde de référence. On remarque que ces notations sont en accord avec la description monochromatique des masques dès lors que l'analyse de surface d'onde redevient monochromatique à la longueur d'onde  $\lambda_0$ .

### 4.3.2 Intensités monochromatiques

On appelle "intensité monochromatique à  $\lambda$ " l'intensité sur le détecteur lorsque le champ incident se propage à la longueur d'onde  $\lambda$  et que son **flux est unitaire** :  $f(\lambda)=1$ . Cette intensité monochromatique est notée  $I_\lambda(\phi_0)$ . La collection de ces intensités pour toutes les longueurs d'onde permet ensuite d'obtenir l'intensité polychromatique pour une source de spectre  $s(\lambda)=f(\lambda)^2$  via la formule :

$$I(\phi_0)=\int s(\lambda)I_\lambda(\phi_0)d\lambda \quad (4.48)$$

On cherche donc à expliciter la dépendance de ces intensités monochromatiques en fonction de la longueur d'onde. Le champ incident, à flux unitaire, monochromatique à  $\lambda$  et perturbé par la phase aberrante  $\phi_0$  s'écrit :

$$\psi_i(x_p, y_p; \lambda) = \exp\left(i\phi_0(x_p, y_p) \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \quad (4.49)$$

L'obtention de l'intensité monochromatique associé à  $\psi_i$  tient ensuite aux effets de la modulation via la phase modulée  $\phi_m(\vec{a})$  puis à la propagation à travers le système de Fourier via son opérateur de filtrage  $\mathcal{W}_m \hat{=} \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m]$ . Dans le cas le plus général (filtrage de Fourier + modulation quelconque), on a donc mathématiquement une intensité monochromatique égale à :

$$I_\lambda(\phi_0) = \int_{\mathbb{R}^2} w(\vec{a}) \left| \left( \mathbb{I}_P e^{i\frac{\lambda_0}{\lambda}(\phi_0 + \phi_{m,0}(a_1, a_2))} \right) \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda] \right|^2 d^N \vec{a} \quad (4.50)$$

où l'indice  $\lambda$  associé au masque de filtrage est là pour rappeler la dépendance possible de celui-ci avec la longueur d'onde. On sait que cette intensité monochromatique est complètement déterminée par la donnée de ses "q-intensités" aussi on les explicite immédiatement en mettant en exergue les dépendances avec  $\lambda$  :

$$I_{q,\lambda}(\phi_0) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^q \frac{(-i)^q}{q!} \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{q}{p} \int_{\mathbb{R}^2} w(\vec{a}) \left( \mathbb{I}_P \phi_0^p e^{i\frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}(\vec{a})} \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda] \right) \overline{\left( \mathbb{I}_P \phi_0^{q-p} e^{i\frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}(\vec{a})} \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda] \right)} d^N \vec{a} \quad (4.51)$$

Il convient de distinguer les effets chromatiques en termes de **gain scalaire** de ceux qui se traduisent par des variations de **forme** de l'intensité. En l'occurrence, le préfacteur  $(\lambda_0/\lambda)^q$  est pur scalaire. On note qu'il provient directement du développement de Taylor de l'exponentiel contenant la phase. Celle-ci a en effet une amplitude en  $\lambda/\lambda_0$ , il est donc légitime qu'un tel facteur apparaisse à la puissance  $q$  dans l'expression des  $q$ -intensités.

Les autres chromatismes présents dans l'expression de ces  $q$ -intensités témoignent par contre d'une dépendance de la forme des intensités vis-à-vis de  $\lambda$ . Elles sont en effet associées à des cartes 2D et impliquées dans des transformations spatiales via les opérateurs convolution, transformée de Fourier ou grandissement. Il faut donc se persuader que les caractéristiques chromatiques d'un ASO à filtrage de Fourier tiennent à la dépendance en longueur d'onde de la quantité :

$$\mathbb{I}_P \phi_0^p e^{i \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}(\vec{a})} \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda] \quad (4.52)$$

Plus la dépendance de ce terme est importante plus l'ASO est sensible au paramètre "spectre de la source".

### 4.3.3 Conditions d'achromatisme.

Dans la perspective d'étudier prochainement l'impact du polychromatisme sur les performances des ASO à filtrage de Fourier, on s'interroge sur les conditions qui assurent que le terme :

$$\mathbb{I}_P \phi_0^p e^{i \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}(\vec{a})} \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda] \quad (4.53)$$

ne dépende pas de la longueur d'onde.

Puisque la modulation est supposée induite par une épaisseur optique achromatique, il est inévitable que  $\phi_{m,0}$  le soit également. En d'autres termes, la phase modulée  $\phi_m = \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi_{m,0}$  ne peut être indépendante de la longueur que si  $\phi_{m,0}$  est nulle. **La modulation est donc source inhérente de chromatisme** pour les designs optiques à l'étude. On rappelle en passant que la présence d'une phase de référence est formellement équivalente à une modulation statique, un ASO qui ne fonctionne pas autour de la phase nulle est donc inévitablement chromatique.

Il reste à étudier la dépendance en longueur d'onde de la propagation qui se résume mathématiquement à un produit de convolution avec  $\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda]$ . Ni la convolution, ni le grandissement par  $f$ , ni la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  n'ont d'influence sur la dépendance en longueur d'onde, ce sont des opérateurs construits pour être adimensionnés vis-à-vis de la physique du système, en d'autres termes la dépendance en longueur d'onde est invariante sous leurs actions. Or on sait

que :

$$\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m_\lambda] = \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{G}_f \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}_{1/\lambda}[m_\lambda] \quad (4.54)$$

Le chromatisme de l'ASO tient donc au chromatisme de la quantité :

$$\frac{1}{\lambda^2} \mathcal{G}_{1/\lambda}[m_\lambda] \quad (4.55)$$

La condition pour qu'une telle quantité ne varie pas avec la longueur d'onde –cf. la définition de l'opérateur de grandissement dans l'annexe A– tient au fait que la fonction de transparence du masque vérifie :

$$m(x_m, y_m; \lambda) = m\left(\frac{x_m}{\lambda}, \frac{y_m}{\lambda}\right) \quad (4.56)$$

Physiquement, cela signifie que la fonction de transparence du masque est **invariante d'échelle**. Ceci se comprend finalement assez bien : deux champs qui ont la même forme mais pas la même longueur d'onde dans le plan de la pupille d'entrée ne sont différents dans le plan focal (et juste avant le masque) que d'un simple grandissement rapport de leurs longueurs d'onde :

$$\psi \xrightarrow[\text{Pupille entrée} \rightarrow \text{Plan masque}]{\text{Propagation à } \lambda_1} \mathcal{G}_{f\lambda_1} \circ \mathcal{F}[\psi] \quad (4.57)$$

$$\psi \xrightarrow[\text{Pupille entrée} \rightarrow \text{Plan masque}]{\text{Propagation à } \lambda_2} \mathcal{G}_{f\lambda_2} \circ \mathcal{F}[\psi_p] = \mathcal{G}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left[ \mathcal{G}_{f\lambda_1} \circ \mathcal{F}[\psi] \right] \quad (4.58)$$

En d'autres termes, les champs en plan focal se dilatent linéairement avec  $\lambda$  ; si le masque est également proportionné, le filtrage de Fourier sera donc achromatique !

#### 4.3.4 Masques achromatiques

Étudions maintenant plus en détail les conditions pour qu'un masque soit achromatique. D'après le paragraphe précédent, il suffit d'appliquer à sa fonction de transparence l'opérateur  $\frac{1}{\lambda^2} \mathcal{G}_{1/\lambda}$  et d'ensuite regarder si un terme  $\lambda$  subsiste. Si oui, le masque est hélas chromatique, si non il sera adapté à une analyse polychromatique.

Appliquons une telle démarche aux masques descriptibles dans le formalisme des pavages. La fonction de transparence de tels masques peut s'écrire sous la forme :

$$m(x_m, y_m; \lambda) = \sum_i a_i(\lambda) \mathbb{I}_{\Omega_i}(x_m, y_m) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{n(\lambda)}{n(\lambda_0)} (\delta_i + x_m \alpha_i + y_m \beta_i)\right) \quad (4.59)$$

Posant les variables adimensionnées  $(u, v) \hat{=} (x_m/\lambda, y_m/\lambda)$ , cette fonction de trans-

parente devient :

$$m(u,v;\lambda)=\sum_i a_i(\lambda)\mathbb{I}_{\Omega_i}(\lambda u,\lambda v)\exp\left(2i\pi\frac{n(\lambda)}{n(\lambda_0)}\left(\frac{\delta_i}{\lambda}+u\alpha_i+v\beta_i\right)\right) \quad (4.60)$$

La disparition de la dépendance en  $\lambda$  nécessite donc tout d'abord des densités locales  $a_i$  achromatiques ainsi qu'un pavage du plan invariant d'échelle. En ce qui concerne la présence d'un piston, il faut que la quantité  $n(\lambda)/\lambda$  soit indépendante de la longueur d'onde. Or pour les matériaux diélectriques "classiques", l'indice optique a plutôt tendance à suivre la loi empirique de Cauchy :

$$n(\lambda)=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}+\dots, \quad (4.61)$$

autrement dit, il est inutile d'espérer pouvoir utiliser des pistons achromatiques. Il faudra donc que  $\delta_i=0$ . En ce qui concerne les aberrations de tip/tilt, la situation est plus heureuse. On remarque en effet que la seule condition pour avoir des masques achromatiques consiste en l'utilisation de matériaux très peu dispersifs ( $B,C,\dots\ll A$ ) ou de designs compensant cette dispersion ( $B,C,\dots=0$ ), on en reparlera dans le chapitre 9.

On résume les conditions assez sévère pour avoir un ASO achromatique :

- Pas de phase de référence
- Modulation inactive
- Amplitudes locales du masque achromatiques
- Matériau du masque non dispersif
- Pistons locaux nuls
- **Aucune contrainte sur les tip/tilt locaux**

### 4.3.5 Conséquences sur les intensités

Les conditions d'achromatisme pour les ASO à filtrage de Fourier étant connues, on les suppose désormais vérifiées pour en étudier les conséquences. En absence de modulation et avec une réponse impulsionnelle de masque indépendante de la longueur d'onde on a donc des  $q$ -intensités monochromatiques et intégrées de la forme :

$$I_{q,\lambda}(\phi_0)=\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^q I_{q,\lambda_0}(\phi_0) \quad I_q(\phi_0)=\left(\int s(\lambda)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^q d\lambda\right) I_{q,\lambda_0}(\phi_0) \quad (4.62)$$

qui donnent finalement à une intensité totale :

$$I(\phi_0)=\sum_q \left(\int s(\lambda)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^q d\lambda\right) I_{q,\lambda_0}(\phi_0) \quad (4.63)$$

	$I_{\text{constant},\lambda_0}$	$I_{\text{lineaire},\lambda_0}$	$I_{\text{quadratique},\lambda_0}$
Monochromatique $\lambda_0$	$s(\lambda_0)$	$s(\lambda_0)$	$s(\lambda_0)$
Monochromatique $\lambda_a$	$s(\lambda_a)$	$\frac{\lambda_0}{\lambda_a} s(\lambda_a)$	$\frac{\lambda_0^2}{\lambda_a^2} s(\lambda_a)$
Polychromatique	$\int s(\lambda) d\lambda$	$\int s(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda$	$\int s(\lambda) \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} d\lambda$

Table 4.1 – Coefficients devant les intensités constante, linéaire et quadratiques monochromatiques suivant la nature du spectre. 1<sup>ère</sup> ligne, source monochromatique adaptée à la longueur d’onde de référence ; 2<sup>nd</sup>e ligne, source monochromatique à  $\lambda_a \neq \lambda_0$  ; 3<sup>ème</sup> ligne, source polychromatique.

On donne dans le tableau 4.1 les trois premiers termes de cette intensité totale pour trois spectres particuliers. Le premier permet de retrouver le cas monochromatique. Le second simule une source monochromatique mais dont la longueur d’onde ne serait adaptée à  $\lambda_0$ . Le dernier cas explicite ces coefficients pour un spectre quelconque.

## 4.4 Présence de bruit

Cette dernière et courte section s’intéresse à la présence de bruits induits lors la conversion photon-électron sur le détecteur. On se souvient en effet (cf. le chapitre 1) que ceux-ci posent des problèmes lors de la reconstruction de la phase.

Afin de simplifier au maximum le problème, on se place dans le cas d’une calibration et d’une analyse monochromatiques à la même longueur d’onde  $\lambda_0$ . On considère de plus que les bruits présents dans l’intensité n’ont que deux natures, à savoir bruit de lecture et bruit de photon. Le premier est uniforme sur le détecteur et indépendant de la phase injectée, il ne dépend que des caractéristiques technologiques du détecteur. On le notera  $b_{\text{lect}}$ . Le second bruit est de type grenaille et donc de statistique poissonnienne, il croit localement avec la **racine de l’intensité** et dépend donc de la phase puisque celle-ci influence l’intensité. On le notera  $b_{\text{photon}}$ . On pourra donc écrire :

$$I_{\text{bruitée}}(\phi_0) = I(\phi_0) + b_{\text{photon}} \left( \sqrt{I(\phi_0)} \right) + b_{\text{lect}} \quad (4.64)$$

$$= s(\lambda_0) \sum_{q=0}^{\infty} I_{q,\lambda_0}(\phi_0) + \sqrt{s(\lambda_0)} b_{\text{photon}} \left( \sqrt{\sum_{q=0}^{\infty} I_{q,\lambda_0}(\phi_0)} \right) + b_{\text{lect}} \quad (4.65)$$

La quantité qui décrit la statistique des bruits est la "matrice de covariance de

bruit" notée  $\mathbf{C}$  et définie comme :

$$\mathbf{C} = \langle bb^t \rangle \quad (4.66)$$

où les bra-kets signifient que l'on moyenne sur les réalisations statistiques du bruit. Si l'on veut caractériser rigoureusement les deux bruits précédents, il faut donc connaître leur matrice de covariance. La chose est aisée pour le bruit de lecture –*Read Out Noise* en anglais– puisqu'il ne dépend pas de la phase. Si l'on note  $\sigma_{\text{RON}}$  l'écart type associée à ce bruit, sa matrice de covariance vaut :

$$\mathbf{C}_{\text{lect}} = \sigma_{\text{RON}}^2 \mathbf{I} \quad (4.67)$$

La matrice de covariance du bruit de lecture **dans l'espace des intensités** est donc proportionnelle à l'identité via un facteur dépendant uniquement de la nature du détecteur.

Obtenir la matrice de covariance du bruit de photon est moins aisé puisque celui-ci dépend de la phase... Or celle-ci est *a priori* inconnue. Deux approches se présentent alors : soit l'on connaît la statistique des phases aberrantes à mesurer, auquel cas on étend la notation des bra-kets  $\langle . \rangle$  à "moyenne sur les réalisations statistiques du bruit **et de la phase aberrante**"; soit on n'a aucune idée de cette statistique des phases à mesurer et il faut alors faire quelques hypothèses. Pour cela, on remarque que le premier terme de l'intensité  $I_{0,\lambda_0}$  ne dépend pas de la phase. On suppose donc que ce seul terme subsiste si l'on moyenne sur les réalisations de la phase aberrante. La matrice de covariance vaut donc simplement :

$$\mathbf{C}_{\text{photon}} \hat{=} s(\lambda_0) \langle b_{\text{photon}}(\sqrt{I_{0,\lambda_0}}) b_{\text{photon}}(\sqrt{I_{0,\lambda_0}})^t \rangle = s(\lambda_0) \mathbf{diag}(I_{0,\lambda_0}) \quad (4.68)$$

La matrice de covariance du bruit de photon **dans l'espace des intensités** est donc diagonale mais non proportionnelle à l'identité.

\*  
\*   \*

Ce chapitre a mis en lumière la dépendance de l'intensité avec la phase en explicitant les "*q*-intensités", composantes de  $I$  qui dépendent de la phase à la puissance  $q$ . Si il est fréquent de rencontrer dans la littérature des linéarisations de l'intensité ( $q$  va jusqu'à 1), c'est la première fois qu'un développement de Taylor donne toutes les dépendances en puissances de phase. Celui-ci est de plus valable pour n'importe quel masque et n'importe quelle modulation. Cette percée théorique tient essentiellement à la puissance des outils développés –opérateurs de filtrage et de couplage– dans les chapitres précédents qui facilitent considérablement les calculs d'un point de vue formel.

Une conséquence immédiate de ce développement en puissances de phase a trait à la bijectivité de l'intensité. On s'aperçoit en effet que celle-ci tient à l'existence d'au moins une intensité impaire. Ceci impose à l'opérateur de filtrage du masque d'avoir de façon conjointe une partie réelle et une partie imaginaire. Ce résultat aura une importance cruciale pour déterminer si un design génère ou non un ASO.

Ce chapitre a aussi été l'occasion de préciser le cadre de l'analyse de front d'onde en lumière polychromatique. On a notamment proposé pour définition de l'ASO *achromatique* que son intensité ne change pas de structure spatiale avec le spectre de la source. On verra que cette propriété permet de définir des matrices d'interactions –et donc des reconstruteurs– normalisés vis-à-vis du spectre. Il a été ensuite très facile de donner –via les  $q$ -intensités polychromatiques– les conditions portant sur la modulation et sur le masque pour s'assurer d'un tel design achromatique. Celles-ci se résument simplement à l'absence de modulation et à un masque invariant d'échelle.

Précisons que ce chapitre clôt la description optique des ASO à filtrage de Fourier. On a en effet donné la dépendance des intensités avec la phase dans un très grand nombre de cas : avec ou sans modulation, lorsque la source est étendue, polychromatique et même lorsque du bruit est présent. Les prochains chapitres s'intéresseront conséquemment aux traitements numériques de ces diverses intensités dans l'objectif d'en récupérer l'information sur la phase.



## 5 Méta-intensités

L'introduction à l'analyse de surface d'onde du chapitre 1 a montré combien l'estimation de la phase pouvait être simplifiée pour les ASO vérifiant l'*hypothèse linéaire*. Pour de tels ASO, on rappelle qu'il est possible de fabriquer une méta-intensité qui est **linéaire au premier ordre avec la phase**. Usant des expressions des intensités du chapitre précédents (rappelées dans le tableau 5.1), on cherche dans ce chapitre à construire une telle méta-intensité. On essaye également de prendre en compte dans sa définition le flux et le spectre de la source en vue de rendre l'ASO robuste vis-à-vis de variations éventuelles entre la calibration et l'analyse de ces deux quantités.

Spectre de la source	Nature de l'ASO	Développement en $q$ -intensités
Monochromatique $\lambda_0$		$I(\phi_0) = s(\lambda_0) \sum_q I_{q,\lambda_0}(\phi_0)$
Monochromatique $\lambda_a$		$I(\phi_0) = s(\lambda_a) \frac{\lambda_0}{\lambda_a} \sum_q I_{q,\lambda_0}(\phi_0)$
Polychromatique	Achromatique	$I(\phi_0) = \sum_q \left( \int s(\lambda) \frac{\lambda_0^q}{\lambda^q} d\lambda \right) I_{q,\lambda_0}(\phi_0)$
Polychromatique	Chromatique	$I(\phi_0) = \sum_q \left( \int s(\lambda) \frac{\lambda_0^q}{\lambda^q} I_{q,\lambda}(\phi_0) d\lambda \right)$

Table 5.1 – Intensités sur le détecteur pour des ASO à filtrage de Fourier et modulation suivant le spectre de la source et le chromatisme de l'ASO.

### 5.1 Vers la linéarité

Rappelons en premier lieu la définition d'une fonction arbitraire  $g$  linéaire sur l'espace des phase :

$$g(\phi_0 + \mu \Phi_0) = g(\phi_0) + \mu g(\Phi_0) \quad \forall \phi_0, \Phi_0 \in \mathbb{E}_\phi, \mu \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

Ceci implique que toute fonction linéaire doit pouvoir être tant positive que négative mais également tendre vers l'infini. Ce constat indique déjà qu'il est illusoire

d'espérer utiliser directement une intensité détecteur comme quantité linéaire avec la phase puisque que cette intensité est positive ou nulle et bornée du fait de l'énergie finie des champs incidents. Prenant  $\phi_0 = \Phi_0$  et  $a = -1$  dans l'équation précédente, on remarque aussi que la linéarité impose que la réponse à phase nulle soit nulle.

### 5.1.1 Opération de tare

Afin de satisfaire à cette dernière condition, on va donc commencer par une opération de *tare* sur l'intensité en lui soustrayant l'intensité à phase nulle :

$$mI(\phi_0) \hat{=} I(\phi_0) - I(0) \quad (5.2)$$

De cette façon on est bien assuré d'avoir une sortie nulle pour une entrée nulle. Notons que l'opération de tare est identique pour tous les systèmes optiques à Filtrage de Fourier et valable quelque soit le spectre de la source. Lorsque l'on observe le développement en puissances de phase de cette méta-intensité, on voit apparaître naturellement un terme linéaire en la "1-intensité" :

$$mI(\phi_0) = \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\phi_0) = I_{\text{linéaire}}(\phi_0) + \sum_{q=2}^{\infty} I_q(\phi_0) \quad (5.3)$$

On peut donc dire que les systèmes à Filtrage de Fourier rentrent dans le cadre de l'*hypothèse linéaire*. L'intensité  $q=1$  constitue le terme linéaire avec la phase tandis que la somme des  $q$ -intensités de 2 jusqu'à l'infini correspond à la perturbation non-linéaire. Dans le formalisme matriciel du chapitre 1, la matrice d'interaction est donc établie à partir de l'intensité linéaire tandis que la somme des  $q$ -intensités de  $q=2$  jusqu'à l'infini constitue le terme de perturbation :

$$\mathbf{B}_{mI} = I_{\text{linéaire}}(\mathbf{B}_\phi) \quad B(\phi_0) = \sum_{q=2}^{\infty} I_q(\phi_0) \quad (5.4)$$

On peut d'ores-et-déjà affirmer qu'un bon ASO –au sens de la linéarité– maximise le terme  $q=1$  tout en minimisant les termes  $q \geq 2$ .

On appellera *méta-intensité minimale*, cette méta-intensité constituant simplement en l'*intensité ramenée autour de zéro* par l'opération de tare. Celle-ci est légitimement considérée comme la quantité contenant le plus d'information sur la phase puisqu'elle ne diffère de l'intensité sur le détecteur que d'une intensité constante.

On donne dans le tableau 5.2 les intensités linéaires associées à la méta-intensité linéaire pour les différentes configurations chromatiques présentées dans le chapitre 3. D'autre part, on illustre l'opération de tare sur la relation entrée/sortie de l'ASO avec la figure 5.1.

Spectre de la source	Nature de l'ASO	Intensité linéaire : $I_{\text{linéaire}}(\phi_0)$
Monochromatique $\lambda_0$		$s(\lambda_0)I_{1,\lambda_0}(\phi_0)$
Monochromatique $\lambda_a$		$s(\lambda_a)\frac{\lambda_0}{\lambda_a}I_{1,\lambda_0}(\phi_0)$
Polychromatique	Achromatique	$\left(\int s(\lambda)\frac{\lambda_0}{\lambda}d\lambda\right)I_{1,\lambda_0}(\phi_0)$
Polychromatique	Chromatique	$\int s(\lambda)\frac{\lambda_0}{\lambda}I_{1,\lambda}(\phi_0)d\lambda$

Table 5.2 – **Intensités linéaires** associées à la **méta-intensité minimale** pour des ASO à filtrage de Fourier et modulation suivant le spectre de la source et le chromatisme de l'ASO.

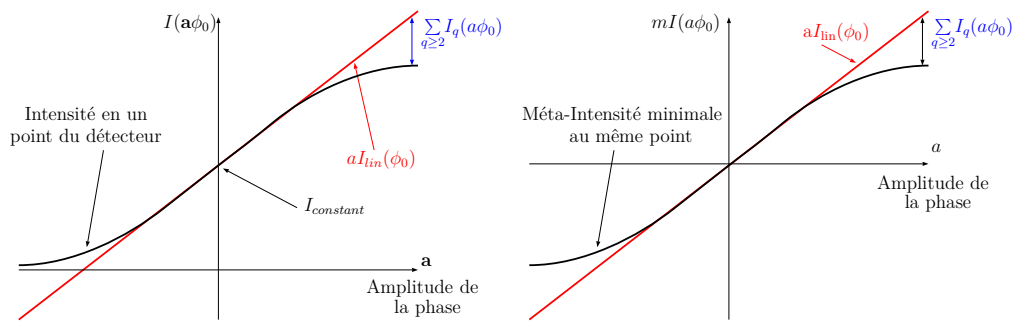


Figure 5.1 – Opération de tare illustrée sur les graphes typiques d'entrée/sortie de l'intensité et de la méta-intensité minimale pour un mode de phase quelconque en un point arbitraire du détecteur.

### 5.1.2 Normalisation par rapport au spectre

On peut ajouter à l'opération de tare une étape supplémentaire afin de rendre la méta-intensité indépendante du spectre dans les cas les plus favorables. En observant le tableau donnant les intensités linéaires 5.2, on remarque en effet qu'une méta intensité définie de la façon suivante :

$$mI(\phi_0) \doteq \frac{I(\phi_0) - I(0)}{\int s(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda} \quad (5.5)$$

permet d'obtenir une intensité linéaire associée indépendante du spectre dans les cas où la source est monochromatique ou même si elle est polychromatique et que l'ASO est achromatique. Le tableau 5.3 en donne l'illustration.

Spectre de la source	Nature de l'ASO	Intensité linéaire : $I_{\text{lineaire}}(\phi_0)$
Monochromatique $\lambda_0$		$I_{1,\lambda_0}(\phi_0)$
Monochromatique $\lambda_a$		$I_{1,\lambda_0}(\phi_0)$
Polychromatique	Achromatique	$I_{1,\lambda_0}(\phi_0)$
Polychromatique	Chromatique	$\frac{\int s(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} I_{1,\lambda}(\phi_0) d\lambda}{\int s(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda}$

Table 5.3 – **Intensités linéaires** pour la **méta-intensité normalisée par rapport au spectre** définie par l'équation (5.5) pour des ASO à filtrage de Fourier et modulation suivant le spectre de la source et le chromatisme de l'ASO.

On peut donc dire que les ASO à Filtrage de Fourier **achromatiques** sont *robustes* (au sens évoqué dans le chapitre 1) vis-à-vis du spectre de la source. Mentionnons également que la normalisation par rapport au spectre fait également office de normalisation par rapport au flux. Profitons enfin de ce paragraphe pour expliciter la dépendance des termes non-linéaires avec la phase de la méta-intensité minimale normalisée lorsque l'ASO est **achromatique** :

$$mI(\phi_0) = I_{1,\lambda_0}(\phi_0) + \sum_{q \geq 2} \left( \frac{\int s(\lambda) \frac{\lambda_0^q}{\lambda^q} d\lambda}{\int s(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda} \right) I_{q,\lambda_0}(\phi_0) \quad (5.6)$$

On remarque ainsi que si l'intensité linéaire est indépendante du spectre, la perturbation non-linéaire ne le devient pas par la normalisation de la méta-intensité minimale.

De par la grande généralité de la méta-intensité minimale normalisée –elle est

valable pour tous les ASO à filtrage de Fourier avec modulation– et sa robustesse vis-à-vis du flux et du spectre dans la plupart des cas, on choisit cette quantité comme méta-intensité de référence. À partir de maintenant, chaque occurrence  $mI$  y fait allusion.

### 5.1.3 Propagation du bruit des intensités vers les méta-intensités

Un des critères de performance exposés dans le chapitre 1 concerne la propagation des bruits de lecture et de photon lors de la reconstruction de la phase. Celle-ci dépend de leur matrice de covariance **dans l'espace des méta-intensités**. Puisque la méta-intensité minimale normalisée est une transformation **affine** de l'intensité, il est assez aisé de les obtenir puisque nous avons déjà en notre possession les matrices de covariances de bruit dans l'espace des intensités : équations (4.67) et (4.68). Renouvelant l'hypothèse d'une calibration et d'une analyse monochromatiques à la même longueur d'onde  $\lambda_0$ , on obtient que :

$$\mathbf{C}_{\text{lecture}} = \frac{\sigma_{\text{RON}}^2}{s(\lambda_0)^2} \mathbf{I} \quad \mathbf{C}_{\text{photon}} = \frac{1}{s(\lambda_0)} \text{diag}(I_{0,\lambda_0}) \quad (5.7)$$

On note que ces matrices de covariance de bruit dans l'espace des méta-intensités ne diffèrent de celles dans l'espace des intensités que d'un scalaire dépendant du flux  $s(\lambda_0)$ . Ceci s'explique par la normalisation opérée par l'équation 5.5. D'autre part, on retrouve que le bruit de lecture décroît avec l'inverse du flux et donc plus rapidement que le bruit de photon qui lui décroît avec l'inverse de la racine carrée du flux.

## 5.2 Autres opérations sur la méta-intensité

On s'intéresse dans cette partie à deux opérations récurrentes que l'on peut effectuer sur la méta-intensité minimale normalisée dans le but de changer le comportement des ASO à filtrage de Fourier. Toute deux se décrivent matriciellement. La première, déjà évoquée dans le chapitre 2 est l'opération de *binning* qui consiste à regrouper plusieurs pixels voisins pour n'en former qu'un. La seconde décrit la transformation **TO** qui sélectionne certains pixels du détecteur.

Remarquons avant toute chose que les pixels du détecteur et les méta-pixels de la méta-intensité minimale normalisée sont rigoureusement comparables puisque la transformation méta-intensité est affine avec l'intensité. Les opérations matricielles effectuées sur  $I$  sont donc invariables sous la transformation  $mI$  (5.5).

## 5.2.1 Opération de *binning*

On veut illustrer les divers modes de fonctionnement des détecteurs qui permettent de regrouper plusieurs pixels voisins pour n'en faire qu'un. On a vu (paragraphe 2.1.5) que cette opération pouvait être modélisée par l'action d'une matrice de *binning*, notée  $\mathbf{B}$ , sur l'intensité. Partant d'une intensité  $I$ , on aboutissait à une intensité *binnée*  $I'$  par la simple relation :  $I' = \mathbf{B}I$ . De part le fait que les méta-pixels de la méta-intensité sont équivalents à des pixels détecteurs, cette relation matricielle reste valide pour la méta-intensité :

$$mI' = \mathbf{B}mI \quad (5.8)$$

La figure 5.2 illustre l'opération méta-intensité minimale normalisée pour un échantillonnage 4x4 pixels qui subit un *binning* vers de l'échantillonnage 2x2 via la matrice de *binning* suivante<sup>a</sup> :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On y suppose que le flux total vaut 16, que l'intensité à phase nulle donne une intensité uniforme, et que la phase arbitraire considérée fait migrer tous les photons vers la partie droite du capteur. On observe que la norme 2 de la méta-intensité augmente lorsque le *binning* regroupe les pixels.

$$I(0) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad I(\phi_0) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \implies mI(\phi_0) = \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$I'(0) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} \quad I'(\phi_0) = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 8 \\ \hline 0 & 8 \\ \hline \end{array} \implies mI'(\phi_0) = \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|} \hline -4 & 4 \\ \hline -4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Figure 5.2 – En haut, opération méta-intensité minimale normalisée pour l'échantillonnage 4x4. La norme 2 de  $mI(\phi_0)$  vaut 1/4. En bas, même chose pour après *binning*. La norme 2 de  $mI'(\phi)$  vaut 1/2.

On profite de ce paragraphe pour illustrer avec la figure 5.3 la perte en résolution spatiale due à l'opération de *binning*. Le mode injecté  $\Phi$  qui reste descriptible en échantillonnage 4x4 ne l'est plus en 2x2 puisqu'il est vu comme une phase nulle. On comprend par là que l'augmentation du rapport signal sur bruit octroyé par l'opération de *binning* se fait au détriment du nombre de modes vus par l'ASO.

a. Les intensités initialement obtenues sur un détecteur carré sont évidemment transformées en vecteurs colonne pour être manipulées par les matrices.

Là est finalement illustré le compromis : "voir mieux peu de modes ou en voir plus moins bien ?"

$$\begin{array}{ccc}
 I(0) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & I(\Phi_0) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow mI(\Phi_0) = \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 I'(0) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} & I'(\Phi_0) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} & \Rightarrow mI'(\Phi_0) = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Figure 5.3 – En haut, opération méta-intensité pour l'échantillonnage 4x4. En bas, même chose après *binning*. On observe que le mode  $\Phi_0$  est bien codé dans la configuration 4x4 tandis qu'elle est équivalente à la phase nulle en 2x2. Autrement dit,  $\Phi_0$  est invisible pour un ASO en échantillonnage 2x2.

## 5.2.2 Une transformation TO notable

On a évoqué dans le paragraphe 1.3 du chapitre général sur l'analyse de front d'onde les opérations autorisées sur les méta-intensités. On les avait appelées "transformations **TO**" de par le fait qu'elles se résument à l'association de deux matrices, l'une orthogonale qui a pour but de mettre en forme l'information sur la phase tandis que l'autre, matrice de troncature, vient ensuite sélectionner l'information pertinente. On décrit dans ce paragraphe une de ces transformations **TO** fréquemment utilisée dans le cadre de l'analyse de front d'onde par Filtrage de Fourier. Elle permet de ne conserver qu'une partie des pixels du détecteur afin par exemple de ne garder que les pixels contenant de l'information linéaire avec la phase. La matrice orthogonale **O** est dans ce cas simplement une matrice de permutation –on utilise la lettre **P** pour désigner de telles matrices– qui range dans les premiers indices les pixels que l'on souhaite conserver, tandis que la matrice de troncature vient éliminer les autres. La figure 5.4 donne un exemple qui permet de comprendre très simplement comment construire les matrices **P** et **T**. Encore une fois, de par l'équivalence entre les méta-pixels de la méta-intensité minimale et les pixels du détecteur on pourra écrire que la restriction de l'analyse de front d'onde à une certaine zone du détecteur revient à appliquer une transformation "**TP**" sur la méta-intensité minimale normalisée ou non :

$$mI' = \mathbf{TP}mI \tag{5.9}$$

$$\begin{array}{c}
 * \\
 * \quad *
 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \pi_3 & \pi_4 \\ \hline \pi_1 & \pi_2 \\ \hline \end{array}
\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \pi_4 \\ \hline \pi_1 & \cdot \\ \hline \end{array}$$

Figure 5.4 – Illustration du choix des pixels pertinents via la transformations  $\mathbf{TP}$  sur un détecteur  $2 \times 2$  dans lequel on ne souhaiterait garder que les pixels  $\pi_1$  et  $\pi_4$ .  $\mathbf{P}$  est la matrice de permutation permettant de mettre dans les deux premiers indices les pixels d'intérêts.  $\mathbf{T}$  vient ensuite les sélectionner.

Ce chapitre assez court est néanmoins fondamental. On a pu en effet montrer que les dispositifs optiques à filtrage de Fourier rentrent dans le cadre de l'hypothèse linéaire. La méta-intensité minimale normalisée est en effet linéaire au premier ordre avec la phase et présente l'énorme avantage d'être valide pour n'importe quel système optique (quelque soient le masque, la modulation ou la nature de la source de référence). Cette méta-intensité est de plus normalisée vis-à-vis du spectre dès lors que l'ASO est achromatique puisqu'elle génère des matrices d'interactions indépendantes de ce paramètre ce qui stabilise la reconstruction de la phase lorsque les conditions de calibration et d'analyse sont différentes. On a explicité de plus les deux termes de perturbation, à savoir les termes non-linéaires et les bruits de lecture et de photon, qui parasitent la reconstruction du front d'onde et témoignent subséquemment de la performance des dispositifs étudiés. On note enfin que l'on a su décrire deux transformations numériques très utiles –le *binning* et le choix de la zone d'intérêt sur le détecteur– en termes d'opérations matricielles compatibles avec le formalisme présenté dans le chapitre 1. On a donc en notre possession un cadre très général qui va permettre dans les prochains chapitres de comparer et d'optimiser les ASO à filtrage de Fourier.



## 6 Un cadre pour comparer et optimiser les ASO à filtrage de Fourier

Ce chapitre a vocation de synthèse. Nous y précisons le cadre ainsi que la démarche qui permettent la comparaison et à l'optimisation des ASO à filtrage de Fourier. Pour cela, nous présentons conjointement les nombreux degrés de liberté offerts par ce design ainsi que les critères de performance explicités dans le cadre de l'analyse de front d'onde par filtrage de Fourier.

Même si nous privilégierons dans les prochains chapitres les approches analytiques grâce notamment au formalisme mathématique développé précédemment, nous aurons aussi recours à de nombreuses simulations numériques. Aussi nous profitons de ce chapitre pour présenter les conditions de telles simulations.

\*\*\*Avant de commencer permettez-moi toutefois un petit aparté car le lecteur ayant eu le courage de lire cette thèse très formelle jusqu'ici doit se retrouver quelque peu perplexe. Pourquoi donc recourir à des simulations numériques quand tout un formalisme donnant des formules explicites a été développé ? Toutes ces quantités mathématiques apparues au fil de l'analyse (transformée de Fourier, opérateurs de Hilbert, fonctions de Bessel...) ont été étudiées en long, en large et en travers par le passé ; ne serait-il pas possible de par la connaissance de leurs propriétés d'en extirper les critères de performances en se cantonnant à une étude du continu et en évitant ainsi le passage au discret du numérique ?

Un tel souhait est bien légitime et je me suis efforcé durant mes investigations de retarder au maximum ce passage au discret. Je peux même affirmer que cette lubie a été la pierre angulaire nécessaire à la construction dudit formalisme. Un exemple – j'espère qu'on ne me tiendra pas rigueur de son caractère assez personnel – illustrera plus efficacement cet état d'esprit. Au début de ma thèse, souhaitant étudier la sensibilité d'un senseur  $\lambda$ , je m'étais attaqué à la construction de sa matrice d'interaction. Les méthodes habituellement usitées consistaient à injecter des *faibles phases* à travers ledit ASO dont la propagation optique était modélisée numériquement pour en récupérer une intensité puis une méta-intensité. Cette méthode fonctionnait très bien à condition de prendre une phase d'amplitude *suffisamment* faible. Afin de m'en assurer je fixais celle-ci en jouant avec les zéro du clavier : 0.0000001 rad RMS... Mais ceci ne me satisfaisait pas. Pourquoi un tel niveau ? Pourquoi pas 0.001 ou 0.000000000001 ou encore 10 ?

Qu'étaient-ce donc que ces *faibles phases* ? À partir de quelle amplitude les effets non-linéaires se manifestaient-ils ? À ces questionnements s'en superposaient d'autres : cette amplitude limite dépendait-elle du mode injecté, de l'ASO considéré, etc. etc.

C'est pour résoudre ces interrogations élémentaires que je me suis lancé dans l'analyse mathématique du comportement des ASO à filtrage de Fourier. Et il me semble avoir trouvé quelques résultats intéressants puisqu'en la quantité de l'intensité linéaire, j'ai par exemple isolé le *vrai* comportement linéaire de ces senseurs : sans simuler de propagation à proprement parler, il m'est possible de construire une matrice d'interaction en me servant uniquement de l'expression de l'intensité linéaire. De la même façon, les  $q$ -intensités suivantes ont grandement clarifié la notion de gamme de linéarité –ou régime des faibles phases– des senseurs.

J'espère rester humble en affirmant que cette approche *synthétique*<sup>a</sup> constitue la grande originalité de mon travail. Cependant, je n'ai su pousser l'analyse aussi loin que je l'aurais souhaiter : certaines intégrales sont restées récalcitrantes –étant au sens mathématique "non-analytiques"<sup>b</sup>– et m'ont forcé à user du rouleau compresseur numérique. Il ne faut d'ailleurs pas être si surpris que cela : si le formalisme aboutissait à une résolution complète du problème, à savoir à une inversion parfaite des méta-intensités pour en retrouver la phase, le discret ne serait pas nécessaire, l'hypothèse linéaire superflue, le formalisme matriciel inutile, bref, l'analyse de front d'onde serait une sinécure. L'existence d'une légion d'ASO de formes et d'objectifs variés, d'outils numériques puissants, etc. atteste évidemment du contraire...\*\*\*

## 6.1 Degrés de liberté

### 6.1.1 Étage optique

Un système optique à filtrage de Fourier auquel on a rajouté une modulation, est entièrement caractérisé par son masque ainsi que par ses paramètres de modulation. Par soucis de simplicité, nous ne nous intéresserons cependant qu'à de la modulation tip/tilt. Nous pouvons donc résumer les **degrés de liberté de la partie optique** aux quantités **masque** via sa fonction de transparence  $m(x_m, y_m; \lambda)$  et **fonction de poids** de modulation codée via  $w(a_1, a_2)$ .

### 6.1.2 Détecteur

La conversion du champ électromagnétique en signal électronique est assurée par le **détecteur**. Celui-ci sera considéré comme continu lors des approches

---

a. Sémantiquement : issue d'un raisonnement qui va des notions, des propositions les plus simples vers les plus complexes.

b. On mentionne notamment le complexe et fondamental "Opérateur de couplage" (3.59) dont l'intégrale pose énormément de problèmes. De substantiels progrès –il résume à lui seul toute l'analyse de surface d'onde par filtrage de Fourier et modulation– pourraient être faits dans la reconstruction de la phase si l'on était capable de l'explicitier plus avant.

analytiques mais pixelisé lors des simulations numériques. Le seul degré de liberté de cet étage est donc l'échantillonnage et il est déterminé par la **matrice de binning** associée.

### 6.1.3 *Post-Processing*

Après l'acquisition, on sait qu'il est indispensable, en vue d'obtenir une quantité essentiellement linéaire avec la phase et indépendante du spectre (pour les ASO achromatiques), de construire la **méta-intensité minimale normalisée**. Néanmoins, on sait qu'il est possible d'effectuer sur cette méta-intensité des transformations **TP** pour choisir la zone d'intérêt du détecteur mais aussi d'autres transformations **TO** si celles-ci semblent pertinentes. On voit donc dans ces opérations numériques de nouveaux degrés de libertés.

## 6.2 Cadre des simulations numériques

Nous explicitons dans cette section les conditions de simulations numériques qui permettent l'obtention des diverses cartes d'intensités (monochromatique,  $q$ -intensités, modulée, etc.) et de la méta-intensité minimale normalisée. Précisons en premier lieu que les tableaux manipulés ont pour taille standard 256x256. Ils sont donc décrits par des vecteurs colonnes de taille  $256^2=65536$  pixels. On commence par expliquer les étapes numériques qui permettent de simuler la propagation de la lumière.

### 6.2.1 Source

La source est supposée à l'infini et ponctuelle. La première de ces deux hypothèses implique que le front d'onde avant perturbation est plan, la seconde assez restrictive ne l'est finalement pas tant que ça lorsque l'on se souvient que la modulation est capable de simuler des objets étendus. L'analyse de front d'onde par source étendue est donc gérée via l'étage de modulation.

L'aspect polychromatique sera essentiellement étudiée d'un point de vue analytique via les critères de chromatisme des ASO aussi toutes les simulations seront monochromatiques. On fixe d'ailleurs la longueur d'onde de calibration  $\lambda_0$  égale à la longueur d'onde d'analyse  $\lambda_a$ . Par ailleurs, puisque la méta-intensité minimale normalisée gère les variations de flux, on suppose que celui est unitaire. Ces hypothèses assurent que le champ avant perturbation peut s'écrire :

$$\psi_{\text{avant perturbation}} = \mathbb{I} \quad (6.1)$$

où  $\mathbb{I}$  est la fonction identité.

## 6.2.2 Champ incident

Ce champ va subir, avant de rentrer dans le système de filtrage de Fourier, une délimitation spatiale par une pupille d'entrée ainsi qu'une perturbation en phase effectuée sur le support de celle-ci.

La **pupille d'entrée** est supposée circulaire. Ce choix qui peut sembler arbitraire –les pupilles d'entrée, notamment en astronomie, sont d'une grande diversité du fait notamment de la présence d'*araignée* pour soutenir les miroirs secondaires– se justifie néanmoins comme la forme générique la plus représentative des pupilles d'entrée. Mathématiquement, cela implique que le champ avant perturbation est affecté par la fonction de transparence de la pupille définie mathématiquement comme :

$$\mathbb{I}_P \hat{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}D} \mathbb{I}_{\Omega_{D/2}} \quad (6.2)$$

où  $\Omega_{D/2}$  correspond à l'élément circulaire central de diamètre  $D$  du pavage polaire. On note la normalisation de la fonction de transparence par rapport à sa surface si bien que l'énergie totale passant par cette pupille est unitaire :

$$\|\mathbb{I}_P \psi_i\|_2^2 = 1 \quad (6.3)$$

Cette quantité est l'énergie maximale que l'on peut obtenir dans les plans successifs de propagation. Numériquement, la pupille d'entrée a un diamètre de 64 pixels si bien qu'elle est exactement décrite par un vecteur colonne de 3228 pixels. Chaque pixel contenant dans le disque vaut donc  $1/\sqrt{3228}$ .

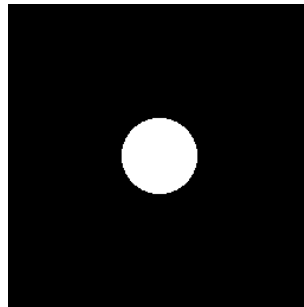


Figure 6.1 – Pupille d'entrée considérée pour la totalité de l'exposé. Le support fait 256x256 pixels. La pupille a un diamètre de 64 pixels. Les pixels noirs sont à 0. Les pixels blancs valent  $1/\sqrt{3228}$  assurant ainsi un flux total du champ incident unitaire.

Notons que le fait de choisir une pupille quatre fois moins grande que le support est lié à l'omniprésence dans les simulations de l'algorithme de Fast Fourier Transform (FFT) qui peut créer des repliements de spectre lorsque le critère de Shannon n'est pas respecté. D'où ce choix d'être à deux fois Shannon dans les simulations.

La pupille d'entrée étant définie, on peut désormais décrire la **phase aberrante**. Celle-ci est définie sur le support de la pupille puisque, on le rappelle, il est impossible de faire de l'analyse de front d'onde là où le flux est nul (cf. chapitre 4). On choisit comme base de l'espace des phases la **base des polynômes de Zernike**. Cette base a pour propriété d'être orthonormée pour le produit scalaire suivant :

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho f(\rho, \theta) \bar{g}(\rho, \theta) \quad (6.4)$$

où  $(\rho, \theta)$  sont les variables radiale et angulaire du repère polaire. Notons que les polynômes de Zernike sont définis pour une pupille de rayon unitaire mais qu'ils se mettent à l'échelle d'une pupille de rayon  $D$  par simple homothétie. Par ailleurs, ce produit scalaire définit une norme appelée norme Root Mean Square (RMS). Les polynômes de Zernike ont donc une norme RMS unitaire. Ces polynômes sont rangés via deux indices  $n$  et  $m$  représentant leur degré radial et leur degré azimuthal. La dépendance radiale de ces polynômes est donnée par l'équation :

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k} \quad (6.5)$$

La dépendance angulaire est ensuite assurée par les règles suivantes :

$$Z_n^m(\rho, \theta) = R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \quad (6.6)$$

$$Z_n^{-m}(\rho, \theta) = R_n^m(\rho) \sin(m\theta) \quad (6.7)$$

L'ensemble des polynômes de Zernike est ensuite facilement visualisable sous la forme pyramidale suivante :

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & Z_0^0 \\ & & & & & \\ & & & & & Z_1^{-1} \quad Z_1^1 \\ & & & & & \\ & & & & & Z_2^{-2} \quad Z_2^0 \quad Z_2^2 \\ & & & & & \\ & & & & & Z_3^{-3} \quad Z_3^{-1} \quad Z_3^1 \quad Z_3^3 \\ & & & & & \\ & & & & & Z_4^{-4} \quad Z_4^{-2} \quad Z_4^0 \quad Z_4^2 \quad Z_4^4 \end{array}$$

Nous donnons également l'expression explicite des premiers polynômes :

$$Z_0^0(\rho, \theta) = 1 \quad (6.8)$$

$$Z_1^1(\rho, \theta) = 2\rho \cos(\theta) \quad (6.9)$$

$$Z_1^{-1}(\rho, \theta) = 2\rho \sin(\theta) \quad (6.10)$$

$$Z_2^0(\rho, \theta) = \sqrt{3}(2\rho^2 - 1) \quad (6.11)$$

$$Z_2^2(\rho, \theta) = \sqrt{6}\rho^2 \cos(2\theta) \quad (6.12)$$

$$Z_2^{-2}(\rho, \theta) = \sqrt{6}\rho^2 \sin(2\theta) \quad (6.13)$$

Physiquement, ces polynômes correspondent aux aberrations optiques classiques. Le degré radial 0 décrit le piston. Le degré 1 décrit le tip et le tilt, le degré 2 les deux astigmatismes et l'aberration en focus, etc. On ajoute que les polynômes de Zernike ont (à l'exception du piston  $Z_0^0$ ) une moyenne spatiale nulle. Ceci est parfaitement compatible avec le formalisme du filtrage de Fourier qui, on le rappelle, est insensible au niveau moyen de la phase aberrante, c'est-à-dire à sa composante sur le mode piston.

Pour dénommer les polynômes de Zernike on choisit selon les cas la notation précédente  $Z_n^m$  mais aussi une notation à un seul indice  $Z_j$  qui correspond à l'exploration de la précédente pyramide du haut vers le bas et de gauche à droite. On donne l'indice 0 au piston si bien que dans le cadre de l'étude on utilise comme base des phases la collection des polynômes  $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ . On peut d'ailleurs restreindre immédiatement le nombre de polynômes requis pour décrire exactement la phase aberrante puisque celle-ci ne possède au mieux que 3228 pixels, aussi la base numérique maximale pertinente sera  $\{Z_j\}_{j \in [[1, 3228]]}$ . Le degré radial maximal des polynômes de cette base sera donc de 80. Néanmoins on manipulera des bases de plus faible dimension à savoir typiquement de 1000, ceci afin de sur-échantillonner largement la phase pour coller à son caractère physique continu.

Outre l'orthogonalité des polynômes de Zernike, ceux-ci présentent finalement une autre propriété très pratique pour analyser le réponse des ASO en termes de **fréquences spatiales**. Il est en effet assez facile de relier le **degré radial** des polynômes de Zernike  $n$  à une **fréquence spatiale** notée  $f_n$  via la relation proposée dans [Conan, 1995] :

$$f_n = \frac{2}{\pi D_e}(n+1) \quad (6.14)$$

On a donc désormais en notre possession le champ incident diaphragmé et perturbé, c'est-à-dire  $\psi_i \mathbb{I}_P$ , qui rentre dans le système optique à Filtrage de Fourier. Il a pour l'instant la forme :

$$\mathbb{I}_P e^{i\phi} \quad \text{avec } \phi \text{ décrite sur la base des Zernike.} \quad (6.15)$$

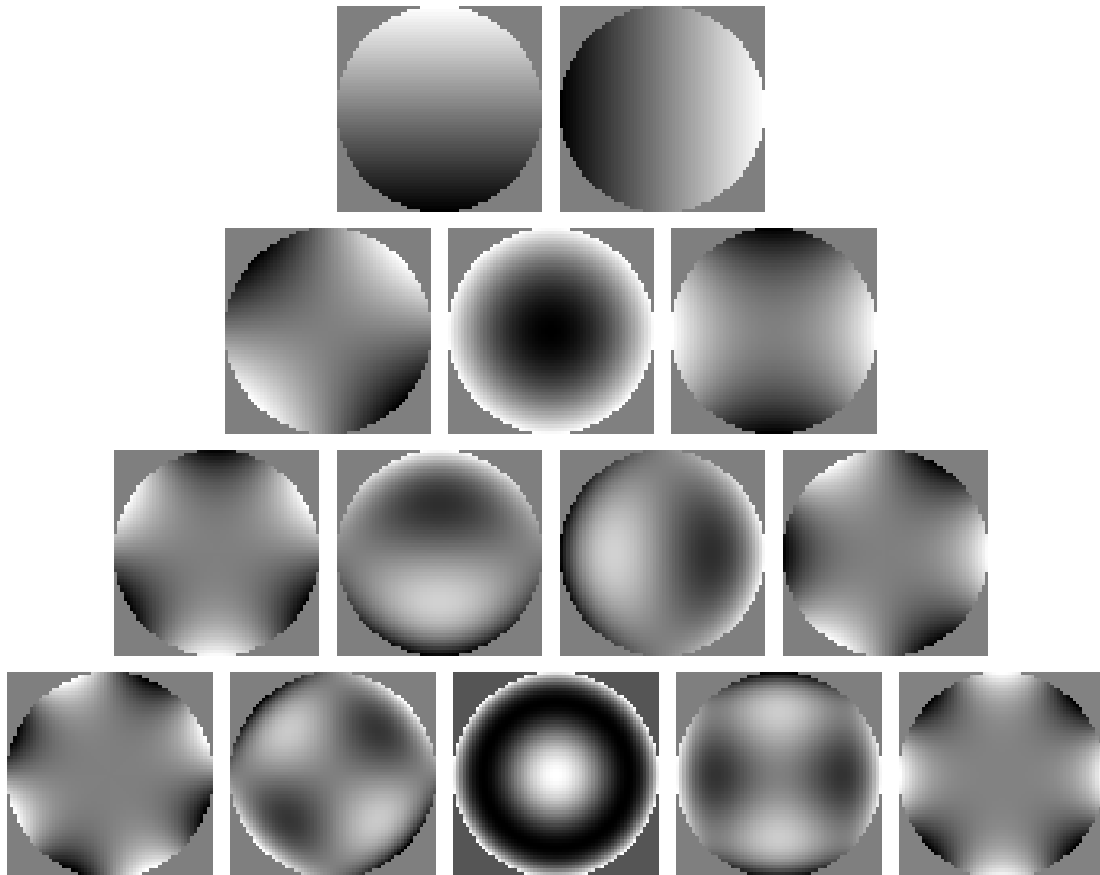


Figure 6.2 – Quatre premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike (on oublie le piston qui est invisible aux senseurs à filtrage de Fourier) qui correspondent donc à 14 modes. La structure pyramidal suit la structure  $Z_n^m$  précédente.

Notons que l'effet d'une modulation tip/tilt sur ce champ perturbé se traduira simplement par l'ajout d'une phase modulée exprimée sur les deux premiers Zernike :

$$\phi_m(a_1, a_2) = a_1 Z_1^{-1} + a_2 Z_1^1 \quad (6.16)$$

### 6.2.3 Propagation

Lorsque l'on observe les diverses intensités et méta-intensités qui émergent de la physique du système de Filtrage de Fourier, on s'aperçoit que la simulation numérique de ceux-ci nécessite d'avoir des algorithmes effectuant des transformées de Fourier 2D, des produits de convolution 2D, ainsi que des intégrales non analytiques pour la modulation.

La transformée de Fourier est facilement réalisable d'un point de vue numérique via l'utilisation de la FFT à condition, on le répète, de prendre garde au critère de Shannon. Le produit de convolution numérique dérive quant à lui de cette FFT puisque convoluer dans l'espace direct revient à multiplier dans l'espace de Fourier. Pour deux tableaux  $A$  et  $B$  carrés, de taille identiques, on a donc :

$$A \star B = FFT^{-1}(FFT(A) \cdot FFT(B)) \quad (6.17)$$

En ce qui concerne les intégrales non analytiques liées à la modulation, il n'y a malheureusement pas d'autres solutions que de les transformer en sommes discrètes. Le pas de ces sommes est choisi de telle sorte à échantillonner la fonction de poids à la moitié de la tâche de diffraction ce qui assure une modélisation de la modulation continue.

### 6.2.4 Masque de Fourier

Le masque de Fourier sera décrit sur un tableau de même taille que la pupille d'entrée, c'est-à-dire 256x256. Le fait que la modélisation de celle-ci soit à deux fois Shannon assure que le masque sera vu comme continu par le champ dans le plan focal.

### 6.2.5 Intensités

Partant du tableau "champ perturbé" discret 256x256 et lui appliquant des opérations de types "FFT, multiplication, ou somme", on arrive naturellement à des signaux dans le plan détecteur représentés en tableaux de même taille 256x256 (ces opérations laissent invariante la taille des objets sur lesquels elles agissent). Aussi on est en droit d'espérer que de telles intensités numériques discrètes correspondent aux intensités effectives associées à un détecteur réel de pareille structure 256x256. Pourtant, il reste une différence subtile entre le détecteur réel et le détecteur simulé, il faut en effet noter que le détecteur réel coupe, du fait de sa taille finie, une partie du flux. Il y a par contre conservation



de l'énergie entre les plans lors de la simulation<sup>c</sup>. Ceci est intrinsèque à l'algorithme de FFT. Il faut donc être assez précautionneux pour s'arranger que l'écart entre le réel et le simulé ne soit pas trop prononcé. Une manière de s'en assurer consiste à simuler des systèmes pour lesquels l'énergie des champs reste cantonnée dans des zones proches de l'axe optique<sup>d</sup>. On a alors une correspondance satisfaisante entre la discrétisation numérique et la discrétisation due au design des détecteurs. Bien évidemment, l'architecture des simulations a été élaborée pour assurer cette correspondance, on peut donc confondre "dans l'idée" la discrétisation des tableaux numériques et la pixellisation des détecteurs réels.

L'espace des intensités et donc de la méta-intensité minimale normalisée est ainsi défini sur un tableau  $256 \times 256 = 65536$  pixels. Les systèmes optiques simulés dans l'étude étant à grandissement unitaire, une phase décrite initialement sur 3228 pixels dans la plan de la pupille d'entrée est donc largement sur-échantillonnée dans le plan du détecteur. Sous cette configuration  $256 \times 256$  on peut donc considérer que l'ASO est très peu affecté par la discrétisation et est décrit avec un maximum de résolution spatiale.

## 6.2.6 Opérations matricielles

Profitons-en pour ajouter que les transformations **TP** et **TO** ne posent aucun problème en simulation puisque le calcul matriciel se marie on ne peut mieux avec les tableaux et vecteurs discrétisés.

## 6.2.7 Matrices d'interaction

Les simulations permettent donc d'aboutir à des matrices d'interactions de taille  $m \times b$  où  $m$  est la taille d'une méta-intensité (ici  $256 \times 256 = 65536$  pixels) et  $b$  le nombre de polynômes de Zernike utilisés pour la base d'entrée (fixé typiquement autour 1000).

## 6.3 Critères de Performance

On évoque dans cette section, la méthode qui sera suivie systématiquement lors des futures caractérisations et comparaisons d'ASO. Elle consiste en premier lieu en une exploitation de la méta-intensité minimale normalisée sans troncatures afin de commencer l'étude avec toute l'information sur la phase *a priori* disponible. On y présente de nombreux critères de performance qui permettent de **comparer** les ASO entre eux. La seconde partie aborde quant-à-elle la marche à suivre pour améliorer ces performances via des transformations **TP** et **TO**.

---

c. Si le masque est transparent évidemment.

d. Ce qui est finalement proche de l'approximation de Fresnel (2.3).

### 6.3.1 Modes Propres, Modes vus

On aborde la problématique des modes vus ou non vus par les ASO à filtrage de Fourier d'un point de vue analytique. On utilise pour cela le critère de l'**existence d'une intensité impaire** qui est nécessaire à la bijectivité de la fonction  $I$  (cf. chapitre 4). On précise la nature des modes propres d'entrée et de sortie par analyse de l'expression de l'intensité linéaire.

### 6.3.2 Sensibilité et Dynamique

On expose dans ce paragraphe deux critères absolument récurrents lorsqu'il s'agit de caractériser et comparer des senseurs. Le premier consiste en la **sensibilité** et indique le rapport entre les variations de l'entrée et celles de la sortie ; le second que l'on nomme **dynamique** –ou gamme de linéarité– renseigne quant à la taille du sous-espace d'entrée sur lequel le senseur est linéaire. L'encart de gauche de la figure 6.3 illustre ces deux notions : la relation entrée/sortie en pointillé témoigne d'une grande sensibilité (la pente dans le régime linéaire entre la sortie et l'entrée est forte) mais d'une faible dynamique (ce régime de linéarité est restreint) ; la courbe continue présente un comportement opposé. On retiendra de ce graphe schématique l'**antagonisme** de ces deux quantités : dès lors qu'il y a un phénomène de saturation pour un capteur (et c'est le cas pour nous puisque le flux est fini), il faut s'attendre à ce que la dynamique baisse lorsque la sensibilité augmente et *vice versa*. Ceci témoigne du compromis hélas habituel sensibilité vs. dynamique. On précise en passant que ces deux critères de performance quantifient en vérité l'impact des **perturbations non-linéaires** évoquées dans le premier chapitre de l'exposé.

**Cartes 2D de sensibilité et dynamique.** Pour faire le lien entre ces concepts généraux, les notations matricielles (paragraphe 1.2.1) et l'analyse de surface d'onde à filtrage de Fourier (équation (4.32)), il faut revenir à l'expression (5.4) de la méta-intensité minimale normalisée :

$$mI(A_\phi) = \mathbf{B}_{mI} A_\phi + \sum_{q=2}^{\infty} I_q(A_\phi) \quad (6.18)$$

Afin de caractériser les effets non-linéaires de l'ASO, on définit des matrices de calibration pour toutes les puissances de phase  $q$  :

$$\mathbf{B}_q \hat{=} I_q(\mathbf{B}_\phi) = \{I_q(Z_1), I_q(Z_2), \dots\} \quad \text{pour } q \geq 2 \quad (6.19)$$

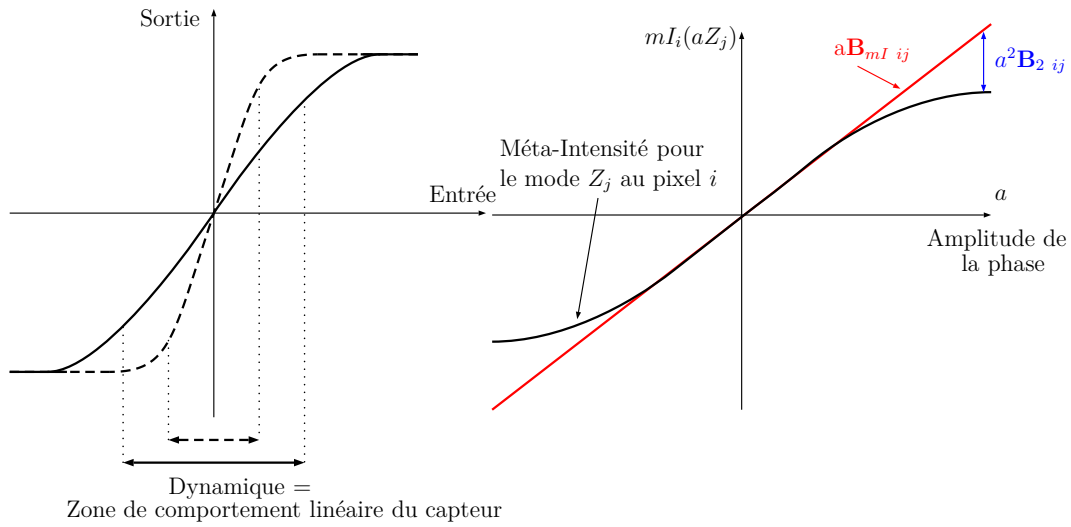


Figure 6.3 – Gauche. Relation entrée/sortie typique d'un capteur présentant une saturation. La courbe en pointillé présente une grande sensibilité et une faible dynamique. La courbe en continue a un comportement opposé. Droite : Relation entrée/sortie typique d'un méta-pixel arbitraire  $i$  vis-à-vis d'un mode de Zernike  $Z_j$  pour un ASO à filtrage de Fourier.

Les matrices  $\mathbf{B}_q$ , que l'on pourrait presque qualifier de matrices d'interaction des termes non-linéaires<sup>e</sup>, contiennent les réponses non-linéaires de la méta-intensité pour chaque polynôme de Zernike. L'encart de droite de la figure 6.3 donne une idée de la relation entrée/sortie typique d'un ASO à filtrage de Fourier pour un Zernike arbitraire d'indice  $j$ , en un point arbitraire du détecteur  $i$ . On y observe que les coefficients de la matrice d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}$  donnent les variations locales linéaires (via l'indice  $i$ ) du détecteur associées aux variations en amplitude du Zernike  $Z_j$ . Le vecteur  $B_j$  correspond donc à la sensibilité 2D de l'ASO vis-à-vis du mode  $Z_j$ .

Par ailleurs, on observe que l'écart à la linéarité est directement corrélé aux coefficients des matrices  $\mathbf{B}_q$ . Si l'on restreint la perturbation au terme quadratique, on peut remarquer que plus le coefficient  $\mathbf{B}_{2 ij}$  est grand, moins la dynamique du pixel  $i$  vis-à-vis du mode  $Z_j$  est grande. La carte  $\mathbf{B}_{2 j}$  est donc un indicateur de la gamme de linéarité 2D de l'ASO : les zones du détecteur où il sera le plus linéaire correspondent aux minima de  $\mathbf{B}_{2 j}$ .

e. Même si on sera très précautionneux quant à cette interprétation en remarquant que la méta-intensité ne peut pas s'écrire via les matrices  $\mathbf{B}_q$  :

$$mI(A_\phi) \neq \mathbf{B}_{mI} A_\phi + \sum_{q=2}^{\infty} \mathbf{B}_q A_\phi^q \quad (6.20)$$

**Sensibilité et Dynamique modes à modes.** Si l'observation des cartes 2D peut être instructive de par son aspect visuel (on confronte une phase 2D à une méta-intensité 2D), l'exploitation se complique dès lors que l'on veut comparer les sensibilités (ou les dynamiques) entre chaque mode de Zernike. Afin de faciliter cette comparaison, on va condenser l'information 2D en un unique scalaire via une opération d'intégration sur les méta-pixels. Autrement dit, les sensibilité et dynamique pour un Zernike donné seront calculées comme les normes des sensibilité ou dynamique 2D. Se souvenant de la définition, équation (1.21), de la matrice de sensibilité :

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{B}_{mI}, \quad (6.21)$$

la sensibilité vis-à-vis du mode  $Z_j$  notée  $s(Z_j)$  est par exemple :

$$s(Z_j) \hat{=} \|\mathbf{B}_{mI} j\|_2 = \sqrt{\mathbf{S}_{jj}} \quad (6.22)$$

On étend donc le concept de matrice de sensibilité en définissant les matrices de "q-sensibilité" de taille  $b \times b$  et égales à :

$$\mathbf{S}_q \hat{=} \mathbf{B}_q^t \mathbf{B}_q \quad \text{pour } q \geq 2 \quad (6.23)$$

D'où on pourra tirer l'importance des termes non-linéaires :

$$\sqrt{\mathbf{S}_q jj} = \|\mathbf{B}_q j\|_2 = \|I_q(Z_j)\|_2 \quad (6.24)$$

Puisque que ceux-ci vont à l'encontre de la linéarité de l'ASO, on définira la dynamique d'un ASO vis-à-vis du mode  $Z_j$ , que l'on notera  $d(Z_j)$  comme l'inverse de la norme 2 du premier terme non-linéaire non nul, c'est-à-dire le terme quadratique  $q=2$  dans l'immense majorité des cas :

$$d(Z_j) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}_2 jj}} = \frac{1}{\|I_{\text{quadratique}}(Z_j)\|_2} \quad (6.25)$$

Notons en passant qu'il peut être pertinent de faire passer les matrices  $\mathbf{B}_q$  à travers le reconstituteur issu de la matrice d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}$  afin de voir comment sont "vus" les termes non-linéaire et à quel point ils participent à la confusion des modes lors de la reconstruction.

**Facteur sensibilité dynamique.** Des deux quantités sensibilité et dynamique, on peut fait apparaitre leur antagonisme en définissant le critère dit "facteur SD" et noté  $s.d$  correspondant simplement au produit entre la sensibilité et la

dynamique :

$$s.d(Z_j) \hat{=} \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{jj}}}{\sqrt{\mathbf{S}_{2,jj}}} = \frac{\|I_{\text{linéaire}}(Z_j)\|_2}{\|I_{\text{quadratique}}(Z_j)\|_2} \quad (6.26)$$

L'enjeu essentiel de la comparaison et de l'optimisation des ASO consiste en l'amélioration de  $s.d$ . On peut d'ailleurs choisir d'optimiser l'aspect sensibilité ou l'aspect dynamique en pondérant  $s$  ou  $d$  avec un paramètre  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$  de la façon suivante :

$$s^\eta . d^{1/\eta}(Z_j) = \frac{\|I_{\text{linéaire}}(Z_j)\|_2^\eta}{\|I_{\text{quadratique}}(Z_j)\|_2^{1/\eta}} \quad (6.27)$$

Si l'on souhaite un ASO très linéaire (grande dynamique) on cherchera les designs qui maximisent  $s^\eta . d^{1/\eta}$  avec  $\eta < 1$ . Le cas inverse  $\eta > 1$  met évidemment l'accent sur la sensibilité.

On est assez proche finalement, avec cette approche via le compromis sensibilité/dynamique, de pouvoir optimiser les ASO à filtrage de Fourier en "dérivant" le facteur SD par rapport aux degrés de liberté des ASO pour trouver le jeu de paramètres {masque, fonction de poids} optimal et donc le design le plus performant.

**Étude fréquentielle.** Si l'on peut observer les sensibilité, dynamique et facteur  $s.d$  pour chaque polynôme de Zernike –on parlera alors d'*étude mode-à-mode*– il est aussi possible de ramener ces critères de performances dans l'espace des fréquences spatiales –et on parlera cette fois d'*étude fréquentielle*– via la relation qui relie chaque degré radial des polynômes de Zernike à une fréquence spatiale (équation (6.14)). Il suffit pour cela de moyenner les sensibilité, dynamique et facteur  $s.d$  sur leur degré azimutal :

$$s(f_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{j \leftrightarrow \text{degré } n} s(Z_j) \quad (6.28)$$

$$d(f_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{j \leftrightarrow \text{degré } n} d(Z_j) \quad (6.29)$$

$$s.d(f_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{j \leftrightarrow \text{degré } n} s(Z_j)d(Z_j) \quad (6.30)$$

### 6.3.3 Propagation des bruits

La propagation du bruit (cf. les paragraphes 4.4 et 5.1.3) lors de la reconstruction sera quantifiée via la matrice de covariance d'erreur d'estimation notée  $\mathbf{C}_E$  dont les nombreuses occurrences dans la littérature –qui s'inspirent de l'article [Rigaut and Gendron, 1992]– témoigne de la pertinence.

$$\mathbf{C}_E = \left( \mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}_{mI} \right)^{-1} \quad (6.31)$$

où la matrice  $\mathbf{C}$  vaudra les matrices de covariance de bruit de lecture ou de photon suivant que l'on étudie l'un ou l'autre de ces bruits. On les rappelle d'ailleurs dans le contexte de simulations numériques qui est le notre :

$$\mathbf{C}_{\text{lecture}} = \frac{\sigma_{\text{RON}}^2}{s^2} \mathbf{I} \quad \mathbf{C}_{\text{photon}} = \frac{1}{s} \mathbf{diag}(I_{0,\lambda_0}) \quad (6.32)$$

On a ici précisé la dépendance de cette matrice de covariance avec le flux  $s$  mais il est supposé unitaire dans les simulations. Les coefficients diagonaux de la matrice  $\mathbf{C}_E$  donnent la **variance d'erreur d'estimation** selon chaque mode de phase. On peut les représenter en parallèle de la sensibilité, de la dynamique ou du facteur  $s.d$ , c'est-à-dire **mode-à-mode** ou vis-à-vis des **fréquences spatiales**. On veut bien sûr ces coefficients diagonaux les plus faibles possibles puisqu'ils témoignent de l'erreur d'estimation. Si on explicite ces deux matrices de covariance d'erreur d'estimation pour les deux sources de bruit qui nous concernent, on obtient :

$$\mathbf{C}_{E,\text{lecture}} = \frac{\sigma_{\text{RON}}^2}{s^2} \mathbf{S}^{-1} \quad \mathbf{C}_{E,\text{photon}} = \frac{1}{s} \left( \mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{diag}(I_{0,\lambda_0})^{-1} \mathbf{B}_{mI} \right)^{-1} \quad (6.33)$$

La matrice de covariance d'erreur d'estimation liée au bruit de lecture est donc directement fonction de la sensibilité de l'ASO via sa matrice  $\mathbf{S}$  : plus le senseur est sensible, moins la reconstruction est sensible au bruit de lecture. Cette loi reste valable pour le bruit de photon.

**Variance totale d'erreur d'estimation.** On mentionne pour terminer que la **trace** des matrices de covariance d'erreur d'estimation correspond à la **variance totale** d'erreur d'estimation. Ces quantités peuvent être pertinentes pour estimer de façon globale les performances des ASO.

### 6.3.4 Méta-pixels pertinents

On expose dans ce paragraphe une méthode assez intuitive permettant de savoir où est répartie l'information en phase sur le détecteur. Le **ratio** entre la **surface** de cette zone et celle de la pupille d'entrée est un critère de performance de l'ASO au sens où elle quantifie le nombre de méta-pixels nécessaires pour coder chaque pixel de la phase. C'est donc un indicateur du **ratio méta-pixel par mode**.

On entend par "information en phase" tout signal linéaire avec celle-ci. La zone pertinente sera donc l'union des supports des réponses de *l'intensité linéaire* à chaque vecteur de base des phases. En d'autres termes, la zone pertinente correspond au support de la moyenne de la matrice d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}$  sur l'indice

des modes  $j$  :

$$\text{Zone pertinente} = \text{Support} \left( \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mathbf{B}_{mI} \text{ }_{ij} \right) \quad (6.34)$$

Dans la pratique, on définit le "support" du vecteur précédent comme l'ensemble des indices de méta-pixels  $i$  pour lesquels le signal est au dessus d'un certain seuil (typiquement 1% du maximum). Cette zone isolée, on pourra créer de nouvelles méta-intensités tronquées via une transformation **TP** (voir le paragraphe 5.2.2). Il faut ensuite renouveler les tests exposés précédemment (sensibilité, dynamique, facteur  $s.d$ ) et voir si la nouvelle configuration de l'ASO convient aux attentes technologiques ou expérimentales...

Notons que l'on peut de la même manière identifier les zones non-linéaires en observant la moyenne des matrices  $\mathbf{B}_q$ . On peut subséquemment envisager des transformations **TP** qui éjectent les zones les moins linéaires et calculer à nouveau les critères de performances associés à ces nouvelles méta-intensités.

### Transformations **TO**.<sup>f</sup>

Il est difficile d'évoquer de façon générale les transformations **TO** au sens où elles dépendent fortement du design du système optique. Nous précisons juste que la méthode à mener après une telle transformation est absolument identique à celle présentée pour les transformations **TP** : on calcule à nouveau les critères de performance et on observe si il y a une **amélioration sur les compromis** typiques (Sensibilité/Nombre de modes vus & Sensibilité/Dynamique). Le chapitre 10 illustrera l'utilité d'une telle transformation **TO** pour l'ASO Pyramide qui sera décrit dès le prochain chapitre.

### 6.3.5 Robustesse de l'ASO vis-à-vis de la source

Pour estimer la robustesse de l'ASO vis-à-vis d'un des paramètres de la source (spectre, profil), nous suivons la méthode exposée dans le chapitre 1, à savoir : soit il est possible de fabriquer des méta-intensités qui rendent la matrice d'interaction indépendante de ce paramètre, auquel cas l'ASO sera dit **robuste** vis-à-vis de celui-ci. Soit la matrice d'interaction dépend inévitablement de ce paramètre, on en choisira alors une comme référence (typiquement celle utilisée avec la source de calibration) et on estime la robustesse de l'ASO en observant l'évolution de l'écart à celle-ci (noté  $e$ ) en fonction du paramètre étudié noté  $a$ . On s'intéressera donc à la quantité mathématique suivante :

$$e(a) = \|\mathbf{R}^c \mathbf{B}^a - \mathbf{I}\|_F \quad (6.35)$$

où  $\mathbf{R}^c$  est le reconstituteur *pseudo-inverse* issu de la matrice d'interaction de calibration et  $\mathbf{B}^a$  la matrice d'interaction établie pour le paramètre  $a$ .  $\|\cdot\|_F$  réfère à la

f. Ces transformations sont introduites au paragraphe 1.3.

norme matricielle de Frobenius. On notera évidemment que  $e(a=c)=0$  : si l'analyse se fait sur la même source que la calibration, la reconstruction est parfaite.

**Paramètre spectre.** La robustesse vis-à-vis du spectre sera surtout abordée d'un point de vue analytique. Tout le travail a d'ailleurs déjà été fait puisque nous avons en notre possession un critère d'achromaticité des ASO basé sur la disparition du paramètre spectre dans l'expression de la méta-intensité minimale normalisée. Aussi nous ne mènerons pas de simulations supplémentaires supplémentaires sur ce point.

**Paramètre profil.** Nous étudierons l'influence du profil de la source sur les matrices d'interaction grâce à l'étage de modulation tip/tilt. On rappelle en effet que l'on peut confondre formellement la fonction de poids de modulation et le profil angulaire d'une source à l'infini. On choisira comme matrice de référence la matrice d'interaction construite pour une source ponctuelle et on l'élargira via une fonction de poids qui simulera un objet circulaire ou ellipsoïde de plus en plus large.

**Paramètre modulation.** On pourra également tester la robustesse vis-à-vis de la modulation<sup>g</sup>. Celle-ci peut en effet varier entre la calibration et l'analyse. On choisira par exemple comme référence une calibration établie avec une fonction de poids parfaitement circulaire et on étudiera l'évolution des matrices d'interactions lorsque ce cercle parfait subit des variations de rayon de plus en plus erratique.

\*  
\* \*

**Ce chapitre assez technique a permis de présenter le cadre et la démarche qui seront utilisés dans les chapitres 8 et 9 pour comparer et optimiser les ASO de type Zernike et Pyramide. Ce cadre se base sur un espace d'entrée présentant les degrés de libertés potentiels des ASO à filtrage de Fourier ainsi qu'un espace de sortie constitué de l'ensemble des critères de performances en lien avec l'analyse de front d'onde.**

---

g. Même si, faute de temps, une telle étude n'a pas pu être menée.



<b>Espace d'entrée</b>	<b>Espace de sortie</b>
Degré de libertés des ASO basés sur le Filtrage de Fourier	Critères de performances de l'analyse de front d'onde
<ul style="list-style-type: none"> <li>— Masque focal</li> <li>— Fonction de poids de la modulation tip/tilt</li> <li>— Transformation <i>binning</i></li> <li>— Transformations <b>TO</b></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Espace des phases descriptibles</li> <li>— Sensibilité, Dynamique et Facteur SD</li> <li>— Coefficients de propagation de bruit</li> <li>— Nombre de méta-pixels par mode de phase</li> <li>— Chromatisme</li> <li>— Robustesses (spectre, profil de la source, modulation)</li> </ul>

# 7 Des ASO à filtrage de Fourier

Ce chapitre dresse une liste exhaustive des masques utilisés pour l'analyse de front d'onde par filtrage de Fourier ainsi que ceux utilisés en coronographie. On les décrit via le formalisme du pavage du plan de Fourier présenté dans le chapitre 3. On voit que celui-ci permet de décrire la quasi totalité de ces masques prouvant ainsi sa grande généralité.

On donne pour chaque design quelques propriétés élémentaires directement déduites des développements analytiques des chapitres 3 et 4, à savoir : de combien de masques est composé le design étudié, coupe-t-il une partie de la lumière à cause d'amplitudes locales, quelle géométrie le décrit, est-il achromatique et enfin possède-t-il une intensité impaire ?

## 7.1 Masques utilisés en Filtrage de Fourier

### 7.1.1 Couteau de Foucault

Nous décrivons en premier lieu l'exemple historique du Couteau de Foucault. Foucault élaborait ce dispositif en vue de tester la qualité des miroirs focalisant qu'il polissait.

Sans prétendre entrer dans l'esprit de ce génial opticien, on peut supputer qu'il raisonna à peu-près de la façon suivante : dans le cadre de l'optique géométrique, un front d'onde plan passant à travers un élément focalisant parfait doit générer dans le plan focal de cet élément une image rigoureusement ponctuelle. Par contre, si l'objet focalisant présente des imperfections de forme, ce point se transformera en une tâche étendue. La forme de cette tâche focale sera bien évidemment liée à la nature des imperfections du système focalisant. Ce lien n'est malheureusement pas immédiat du fait notamment de la taille réduite de cette tâche focale aussi l'observer directement n'est pas une bonne approche. Pour résoudre ce problème, Foucault imagina un système où il pourrait observer dans un plan directement conjugué avec le miroir. Par ailleurs, afin de "sonder" la forme de la tâche focale, il plaça dans son plan un objet mobile – un couteau – qui lui permettait de couper ou de laisser passer la lumière. La figure 7.1, tiré d'un article théorique de Wilson [Wilson, 1975] sur le Couteau de Foucault montre les différentes configurations de ce dispositif.

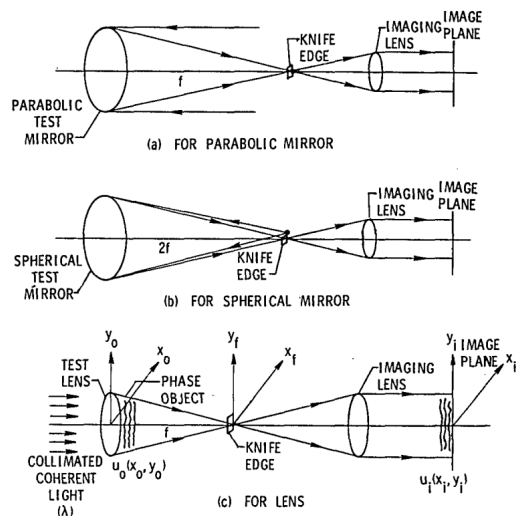


Fig. 1. Simple optical configurations for Foucault test: (a) for parabolic mirror; (b) for spherical mirror; (c) for lens.

Figure 7.1 – Différentes configurations pratiques utilisant le principe du couteau de Foucault pour déterminer des phases aberrantes. Crédit [Wilson, 1975].

Il apparaît donc que le Couteau de Foucault rentre parfaitement dans le cadre du filtrage de Fourier, le masque étant le couteau lui-même. Nous avons précisé plus haut que l'analyse des imperfections dans le plan de la pupille d'entrée est faite via un déplacement du couteau. Dans l'absolu, le dispositif du couteau de Foucault ne comporte donc pas un unique masque focal mais plusieurs. En l'occurrence, il en faudra 4 et ce, afin de sonder tout l'espace des fréquences spatiales du plan focal. On les présente dès à présent. Optiquement, un "couteau" sépare en deux le plan focal suivant un bord rectiligne. Le pavage pertinent est donc de type cartésien. Plus particulièrement, on utilise les deux pavages "d'analyse selon  $x$  et  $y$ ".

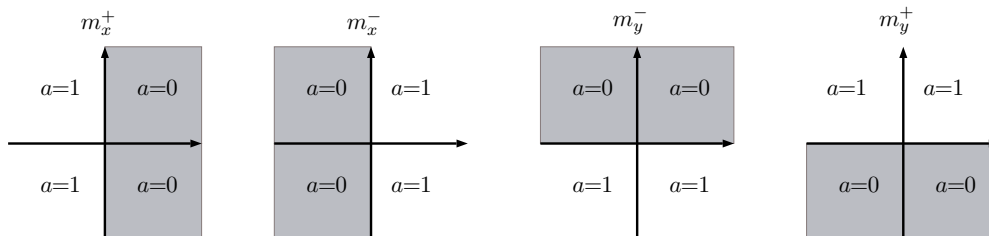


Figure 7.2 – Les 4 Couteaux de Foucault

Les paramètres de pavages associés à chacun de ces masques sont :

$$m_x^+ : \{\Omega_x^+, 1, 0, 0, 0\} \quad \{\Omega_x^-, 0, 0, 0, 0\} \quad (7.1)$$

$$m_x^- : \{\Omega_x^+, 0, 0, 0, 0\} \quad \{\Omega_x^-, 1, 0, 0, 0\} \quad (7.2)$$

$$m_y^+ : \{\Omega_y^+, 1, 0, 0, 0\} \quad \{\Omega_y^-, 0, 0, 0, 0\} \quad (7.3)$$

$$m_y^- : \{\Omega_y^+, 0, 0, 0, 0\} \quad \{\Omega_y^-, 1, 0, 0, 0\} \quad (7.4)$$

À l'aide des équations du paragraphe 3.3, ces paramètres permettent d'obtenir très facilement les réponses impulsionnelles et les opérateurs de filtrage associés à chacun d'eux :

$$\delta_{\mathbb{I}\Omega_x^+}^\psi(x_d, y_d) = \frac{1}{4}\delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{i}{4}\frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \quad (7.5)$$

$$\delta_{\mathbb{I}\Omega_x^-}^\psi(x_d, y_d) = \frac{1}{4}\delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{i}{4}\frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \quad (7.6)$$

$$\delta_{\mathbb{I}\Omega_y^+}^\psi(x_d, y_d) = \frac{1}{4}\delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{i}{4}\frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} \quad (7.7)$$

$$\delta_{\mathbb{I}\Omega_y^-}^\psi(x_d, y_d) = \frac{1}{4}\delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{i}{4}\frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} \quad (7.8)$$

$$\mathcal{W}_{m_x^+} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} - i\mathcal{H}_x) \quad (7.9)$$

$$\mathcal{W}_{m_x^-} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} + i\mathcal{H}_x) \quad (7.10)$$

$$\mathcal{W}_{m_y^+} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} - i\mathcal{H}_y) \quad (7.11)$$

$$\mathcal{W}_{m_y^-} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} + i\mathcal{H}_y) \quad (7.12)$$

Un lecteur attentif restera peut-être circonspect quant à la présence d'une facteur 1/2 supplémentaire devant les fonctions et opérateurs précédents. Il se rassurera en songeant que le flux lumineux est divisé en 4 de par le fait que le Couteau de Foucault nécessite 4 masques. Notons en passant que ces derniers ne sont que d'amplitude et on peut d'ailleurs montrer que le flux total reçu en sortie –qui est égal à la somme des intensités intégrées associées à chacun des 4 masques– correspond à la **moitié du flux incident**. En d'autres termes, le Couteau de Foucault "gaspille" une partie de la lumière. On sera néanmoins magnanime avec son inventeur puisque celui-ci avait à sa disposition autant de lumière qu'il le souhaitait, travaillant évidemment dans son laboratoire avec des sources d'intensité réglable. Hélas dans d'autres contextes d'analyse de front d'onde, les sources sont parfois bien ténues –typiquement en Optique adaptative

pour l'astronomie— et on se doit d'exploiter chaque photon incident. Nombre des masques qui seront évoqués par la suite furent d'ailleurs présentés pour pallier à ce problème. Quoiqu'il en soit, on revient à la description du Couteau de Foucault en remarquant que les opérateurs de filtrage ou les réponses impulsionnelles ne dépendant pas de la longueur d'onde. Le Couteau de Foucault est donc un masque rigoureusement **achromatique**. Ceci provient du fait que les deux pavages "d'analyse selon  $x$  et  $y$ " sont invariants d'échelle.

Nous illustrons sur la figure 7.3, l'effet d'un filtrage par le masque  $m_x^+$  sur un front d'onde plan diffracté par une pupille circulaire. On remarque notamment que la partie réelle de l'opérateur de filtrage associé à ce masque ne change pas la forme du champ, chose logique puisque celle-ci est proportionnelle à l'identité  $\mathcal{I}$ . En revanche, on voit pour sa partie imaginaire l'effet de la transformée de Hilbert selon  $x$  notée  $\mathcal{H}_x$  sur le champ incident. Le module au carré du champ dans le plan du détecteur qui n'est rien d'autre que l'intensité perçue par celui-ci, montre l'effet diffractif qu'a le masque  $m_x^+$  sur le champ incident : un partie du flux s'en va du centre de la pupille pour ses bords. Ceci tient au fait que la transformée de Hilbert d'une fonction prend ses plus grandes valeurs là où cette fonction varie le plus. On mentionne que la présence conjointe chez l'opérateur de filtrage d'une partie réelle et d'une partie imaginaire assure l'existence d'intensités impaires dans le développement en puissance de phase de l'intensité. Le Couteau de Foucault porte donc en lui la bijectivité nécessaire à l'analyse de surface d'onde.

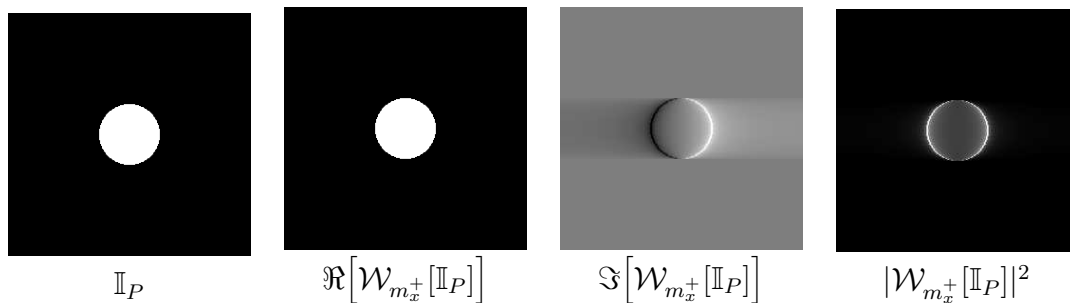


Figure 7.3 – Effet d'un filtrage de Fourier par le masque  $m_x^+$  du couteau de Foucault sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

### 7.1.2 Masques de Hilbert

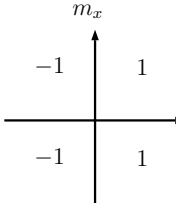
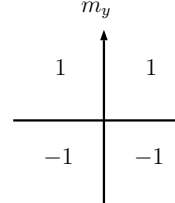
On expose dans ce paragraphe une variante du couteau de Foucault introduite dans l'article [Belvaux and Vareille, 1971] qui se veut moins "énergivore"

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
4	Amplitude	Cartésienne	Oui	Oui

Table 7.1 – Résumé des caractéristiques des masques associés au **Couteau de Foucault**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

en flux. On se souvient en effet que les masques de Foucault ne laissent passer que la moitié du flux incident de par le fait qu'ils sont opaques sur la moitié du plan focal. Le filtrage par masques de Hilbert n'utilise quant à lui deux masques qui sont tous les deux complètement transparents. Ils sont tout deux basés sur les pavages "d'analyse selon  $x$  et  $y$ ". L'idée physique consiste à créer une différence de phase de  $\pi$  entre les deux éléments de ces pavages via un piston différentiel bien choisi. Celui-ci noté  $\delta$  devra vérifier  $\delta/\Lambda=1/2$ . On remarquera donc que ce design ne sera adapté qu'à une seule longueur d'onde, à savoir  $\Lambda$  et ôtera irrémédiablement aux masques de Hilbert tout espoir d'achromaticité. On explicite maintenant les "paramètres de pavages" ainsi que les réponses impulsionnelles et les opérateurs de filtrage pour les deux masques de Hilbert lorsque la **lumière est monochromatique de longueur d'onde  $\Lambda$** .

$$\begin{aligned}
m_x: \{\Omega_x^+, 1, 0, 0, 0\} & \quad \{\Omega_x^-, 1, \delta, 0, 0\} \\
m_y: \{\Omega_y^+, 1, 0, 0, 0\} & \quad \{\Omega_y^-, 1, \delta, 0, 0\}
\end{aligned}
\quad \text{avec} \quad \frac{\delta}{\Lambda} = \frac{1}{2} \quad (7.13)$$

Masques de Hilbert

$$\delta_{m_x}^\psi(x_d, y_d) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \quad (7.14)$$

$$\delta_{m_y}^\psi(x_d, y_d) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} \quad (7.15)$$

$$\mathcal{W}_{m_x} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \mathcal{H}_x \quad (7.16)$$

$$\mathcal{W}_{m_y} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \mathcal{H}_y \quad (7.17)$$

On observe que les opérateurs de filtrage sont purement imaginaires. Sans modulation ou phase de référence, il n'y aura donc pas d'intensités impaires. La figure

7.4 illustre l'action de filtrage par le masque de Hilbert  $m_x$ . Il est intéressant de remarquer que le niveau de l'intensité sur le détecteur à l'intérieur de la pupille (images de droite) est quasi nul comparé à celles obtenues avec le masque de Foucault  $m_x^+$  (images de droite de la figure 7.3). Ceci témoigne directement de la disparition de l'opérateur identité dans  $\mathcal{W}_{m_x}$  qui était présent pour l'opérateur de filtrage de Foucault  $\mathcal{W}_{m_x^+}$ .

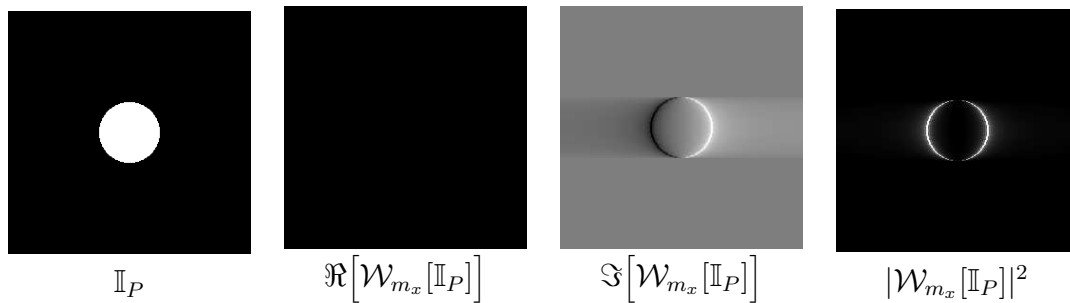


Figure 7.4 – Effet d'un filtrage de Fourier par le masque  $m_x$  de Hilbert sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
2	Phase	Cartésienne	Non	Non

Table 7.2 – Résumé des caractéristiques des masques de **Hilbert**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

### 7.1.3 Masque Pyramide

On évoque maintenant une autre généralisation du couteau de Foucault qui ne requiert qu'un seul masque, elle a été proposée par Ragazzoni en 1996 [Ragazzoni, 1996]. Ce masque utilise des tip/tilt locaux pour séparer sur un **même détecteur** les différents filtrages du champ incident. Celui-ci va être décomposé par la pavage cartésien en quatre puis étalé sur le détecteur par des dioptries plans d'inclinaisons différentes. Optiquement un tel effet est permis via l'utilisation en plan focal d'une pyramide transparente. Cet objet sera étudié de manière exhaustive tout au long de cette thèse aussi, on n'en fera ici qu'une

brève description. On évoque ses "paramètres de pavages" et son opérateur de filtrage sur la figure 7.5.



$$m_{\Delta}(x_m, y_m) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \alpha (|x_m| + |y_m|)\right) \quad (7.18)$$

$$m_{\Delta} : \{\Omega^{++}, 1, 0, \alpha, \alpha\} \quad (7.19)$$

$$\{\Omega^{--}, 1, 0, -\alpha, -\alpha\} \quad (7.20)$$

$$\{\Omega^{+-}, 1, 0, \alpha, -\alpha\} \quad (7.21)$$

$$\{\Omega^{-+}, 1, 0, -\alpha, \alpha\} \quad (7.22)$$

$$\mathcal{W}_{\Delta} = \mathcal{T}_{f\alpha, f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{++}} + \mathcal{T}_{-f\alpha, -f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{--}} + \mathcal{T}_{-f\alpha, f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{-+}} + \mathcal{T}_{f\alpha, -f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{+-}} \quad (7.23)$$

Figure 7.5 – Photographie d'une pyramide transparente et description dans le formalisme des pavages.  $m_{\Delta}$  est la fonction de transparence du masque Pyramide.  $\alpha$  code l'angle de son sommet.

Encore une fois, on illustre l'effet d'un tel filtrage dans la figure 7.6. On remarque que l'angle  $\alpha$  permet une complète séparation des quatre images de la pupille, c'est-à-dire  $2f\alpha > D$  où  $D$  est le diamètre de la pupille d'entrée. C'est le design proposée historiquement par Ragazzoni. On verra par la suite (chapitre 9) que d'autres configurations peuvent être envisagées. Chacune des quatre contributions correspond à un filtrage du champ incident par un quadrant du pavage cartésien. Par exemple, la contribution en haut à droite correspond à un champ incident dont on aurait gardé que les fréquences présentes dans  $\Omega^{++}$ , c'est-à-dire les fréquences positives selon  $x$  et positives selon  $y$ . Les opérateurs de filtrage qui interviennent dans l'expression de l'opérateur global  $\mathcal{W}_{\Delta}$  sont les opérateurs identité  $\mathcal{I}$  et de Hilbert :  $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_{xy}$ . Ils sont décrits dans le chapitre 1. On se convainc de leur présence en observant les effets de condensation de lumière sur les bords des quatre images typiques des transformées de Hilbert (image de droite de la figure 7.6).



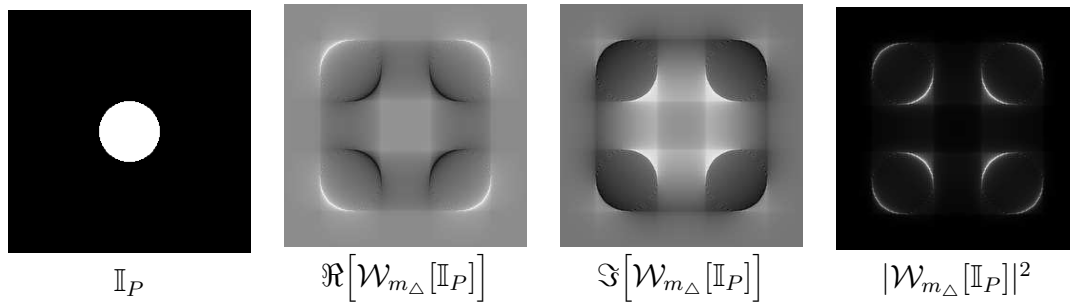


Figure 7.6 – Effet d'un filtrage de Fourier par un masque pyramidal sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

L'observation de la figure 7.6 assure de la présence conjointe chez l'opérateur de filtrage d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Le masque pyramidal génère donc un **analyseur bijectif**. En ce qui concerne le chromatisme de ce masque, la description actuelle de celui-ci via le formalisme des pavages assure qu'il est rigoureusement **achromatique**. On peut s'en persuader en remarquant qu'une pyramide est invariante d'échelle. Cependant il faut être précautionneux quant à la réalisation pratique de l'objet pyramide. La photographie de la figure 7.5 suggère par exemple qu'elle est parfois constituée de verre, milieu qui est dispersif ; l'achromaticité en pâtit inévitablement. Heureusement, des designs optiques astucieux permettent de se soustraire de ces problèmes de dispersion. Ceux-ci seront décrits en détail dans le chapitre 9 dédié au senseur pyramide. Aussi, on incline le lecteur à rester persuadé que le masque pyramidal peut être achromatique.

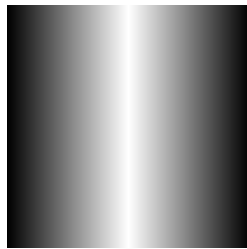
Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Phase	Cartésienne	Oui	Oui

Table 7.3 – Résumé des caractéristiques du masque **Pyramide**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

#### 7.1.4 Masques "rooftop"

Une autre généralisation du couteau de Foucault propose de filtrer la lumière grâce à deux "toits" transparents *-rooftop* en anglais– afin de séparer les fré-

quences spatiales en deux endroits du détecteur. Ce concept initialement proposé dans l'article [Phillion and Baker, 2006] a été comparé expérimentalement à la pyramide [Wang et al., 2010b] et [van Dam et al., 2012]. L'usage de deux masques est requis afin d'analyser ces fréquences selon  $x$  et  $y$ . Mathématiquement, les quatre images de pupille seront identiques –modulo de ténues contributions de la diffraction qui diminuent à mesure que les images de la pupille s'éloignent l'une de l'autre– à celles obtenues pour le couteau de Foucault. On donne encore une fois les paramètres de pavage ainsi que les opérateurs de filtrage de ces deux masques :

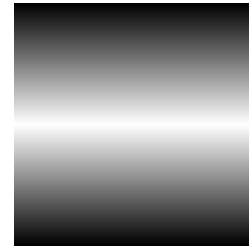


Épaisseur optique du masque  $m_{\Delta_x}$

$$m_{\Delta_x}(x_m, y_m) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \alpha |x_m|\right)$$

$$m_{\Delta_x} : \left\{ \begin{array}{l} \Omega_x^+, 1, 0, \alpha, 0 \\ \Omega_x^-, 1, 0, -\alpha, 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{W}_{\Delta_x} = \mathcal{T}_{f\alpha, 0} \circ \mathcal{W}_{\Omega_x^+} + \mathcal{T}_{-f\alpha, 0} \circ \mathcal{W}_{\Omega_x^-}$$



Épaisseur optique du masque  $m_{\Delta_y}$

$$m_{\Delta_y}(x_m, y_m) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \alpha |y_m|\right)$$

$$m_{\Delta_y} : \left\{ \begin{array}{l} \Omega_y^+, 1, 0, 0, \alpha \\ \Omega_y^-, 1, 0, 0, -\alpha \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{W}_{\Delta_y} = \mathcal{T}_{0, f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega_y^+} + \mathcal{T}_{0, -f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega_y^-}$$

On invoquera la grande similitude mathématique avec le couteau de Foucault pour expliquer que l'analyse via des masques "rooftop" assure l'**existence d'intensités impaires** toute comme l'évidente ressemblance pratique entre l'objet pyramide et les masques "rooftop" permettent d'affirmer qu'il existe des designs achromatiques à condition de s'y prendre intelligemment.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
2	Phase	Cartésienne	Oui	Oui

Table 7.4 – Résumé des caractéristiques des masques **rooftop**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

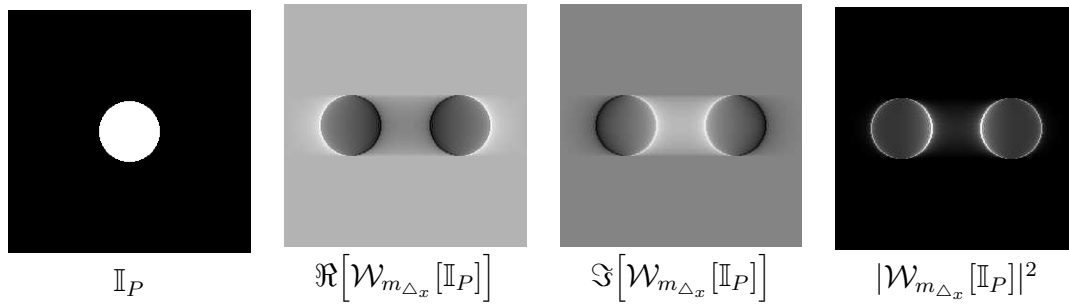
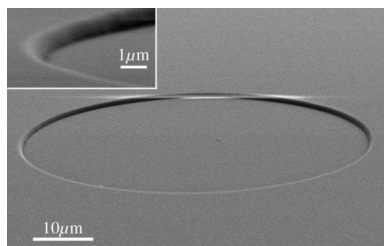


Figure 7.7 – Effet d'un filtrage de Fourier par le masque en toit sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

### 7.1.5 Masque de Zernike

Une autre méthode utilisée en filtrage de Fourier consiste à exploiter le principe physique du "contraste de phase". Celui-ci fut développé par Zernike [Zernike, 1934] qui reçut pour ses travaux le prix Nobel en 1930. On présente dans ce paragraphe un masque basé sur ce principe. Celui-ci fait interférer deux parties du champ incident ayant subi un déphasage de  $\pi/2$  grâce à un piston différentiel  $\delta/\Lambda=1/4$  modulo 2. Les deux parties sont délimitées grâce au pavage polaire  $\Omega_r$  et  $\bar{\Omega}_r$ . Le paramètre  $r$  est généralement ajusté afin d'assurer une équipartition de l'énergie entre ces deux parties du plan de Fourier. Pour une pupille circulaire, cela correspond à prendre  $2r/f=1.06\Lambda/D$  où  $D$  est le diamètre de la pupille. Cette configuration correspond au masque historique de Zernike. On remarquera que cette configuration est doublement **chromatique** puisque tant le décalage en phase de  $\pi/2$  et l'équipartition de l'énergie ne sont valables que pour la seule longueur d'onde  $\Lambda$ . On donne tout de suite les paramètres de pavages ainsi que l'opérateur de filtrage pour une lumière monochromatique à  $\Lambda$  :



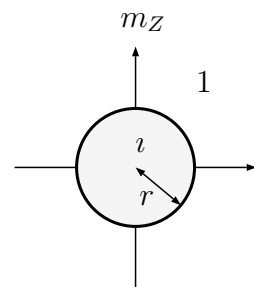
Masque de Zernike. Crédit N'Diaye.

$$m_Z : \begin{cases} \{\Omega_r, 1, \delta, 0, 0\} \\ \{\bar{\Omega}_r, 1, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{avec } \frac{\delta}{\Lambda} = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } \frac{2r}{f} = 1.06 \frac{\Lambda}{D}$$

$$\mathcal{W}_Z = \mathcal{I} + (i-1)\mathcal{Z}_{r/f\Lambda}$$



Masque de Zernike

L'opérateur de Zernike étant purement réel, on est assuré de l'existence conjointe d'une partie réelle et d'une partie imaginaire chez l'opérateur de filtrage  $\mathcal{W}_Z$ . Ceci

se voit d'ailleurs sur la figure 7.8 qui illustre l'effet du filtrage par un tel masque de Zernike sur une pupille circulaire.

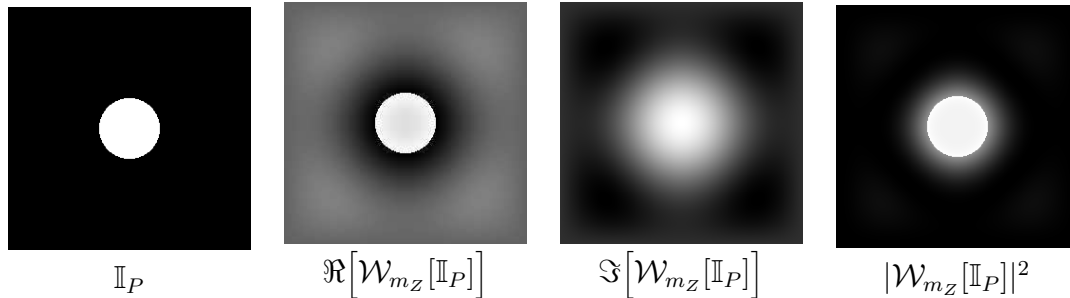


Figure 7.8 – Effet d'un filtrage de Fourier par un masque de Zernike sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.  $2r=1.06\lambda/D$  où  $D$  est le diamètre de la pupille circulaire.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Phase	Polaire	Non	Oui

Table 7.5 – Résumé des caractéristiques du masque de **Zernike**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

On précise qu'en dépit d'une invention précoce (1934) et de son utilisation en microscopie à contraste de phase, le masque de Zernike ne fut appliqué à des fins d'analyse de front d'onde que très récemment et ceci en raison de son rôle dans l'instrument SPHERE au *VLT* [Beuzit et al., 2008]. Sa théorie a en effet été révisée dans l'article [N'Diaye et al., 2013], puis validée sur banc optique un an plus tard [N'Diaye et al., 2014]. Il fut d'ailleurs à la hauteur des attentes puisqu'il a démontré des performances impressionnantes sur ciel. Elles sont résumées dans l'article [N'Diaye et al., 2016].

### 7.1.6 Point Diffraction Interferometer

Un autre système optique qui utilise le principe du contraste de phase a été proposé par Smartt dans l'article [Smartt and Steel, 1975]. Le masque est, contrairement au masque de Zernike, de pure amplitude. Il atténue uniformément le front d'onde sauf à un endroit très localisé où il le laisse complètement

passer. En d'autres termes, le masque consiste en une densité où a été percé un petit trou. On notera que ce design fait perdre une partie des photons incidents, il est donc à prescrire lorsque la source est tenue. Physiquement, le champ émis par le petite ouverture peut être assimilé à une onde purement sphérique. Le champ au niveau du détecteur correspondra donc à l'interférence entre le champ incident atténué et une onde sphérique. On remarquera que le masque du *PDI* n'est pas descriptible via les géométries cartésienne ou polaire mais qu'il admet tout de même des paramètres de pavage. L'invariance d'échelle n'étant pas respectée, ce masque est évidemment **chromatique**.

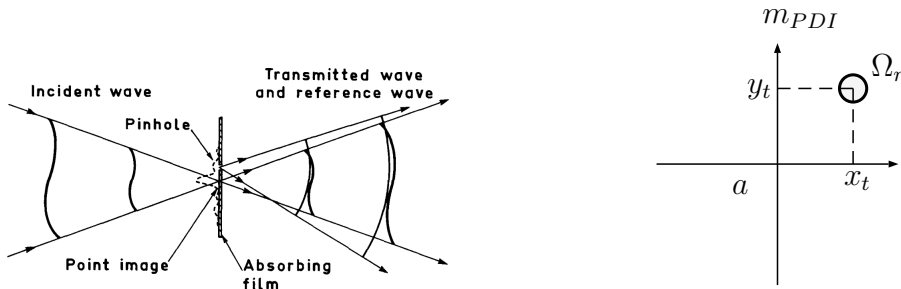


Fig. 1. Principle of the point-diffraction interferometer. An incident wave, attenuated by the absorbing film at its focal plane, interferes with a spherical wave diffracted by a discontinuity in the film.

$$m_{PDI} : \left\{ \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{T}_{x_t, y_t}[\Omega_r], a, 0, 0, 0 \right\} \\ \left\{ \mathcal{T}_{x_t, y_t}[\Omega_r], 1, 0, 0, 0 \right\}$$

Figure 7.9 – Gauche : Principe de fonctionnement du *Point Diffraction Interferometer*. Crédit [Smartt and Steel, 1975]. Droite : Description schématique du masque utilisé par le *PDI* et paramètres de pavage associés.  $a \in ]0, 1[$  code l'atténuation globale du front d'onde.  $(x_y, y_t)$  est le centre du *pinhole*.  $r$  code son diamètre qui est petit devant la taille de la tâche de diffraction.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Amplitude	Mixte	Non	Oui

Table 7.6 – Résumé des caractéristiques du masque du **Point Diffraction Interferometer**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

### 7.1.7 Optical Differentiation

On évoque enfin un design qui n'est pas du tout descriptible via le formalisme de pavage puisque l'amplitude de son masque varie continument avec les

variables spatiales. Il s'agit de l'ASO à "dérivation optique" –*optical differentiation wave front sensor* en anglais– proposé dans [Oti et al., 2003]. Il utilise une propriété de la transformée de Fourier qui veut que la multiplication par une rampe dans l'espace réel correspond à une dérivation dans l'espace de Fourier. Deux masques sont requis pour opérer la dérivation dans les deux directions de l'espace, les rampes sont assurées par des densités linéaires avec les coordonnées spatiales  $x_m$  et  $y_m$ . On donne les deux fonctions de transparence ainsi que les opérateurs de filtrage associés :

$$m_{OD_x}(x_m, y_m) = a + 2\pi b x_m \quad m_{OD_y}(x_m, y_m) = a + 2\pi b y_m \quad (7.24)$$

$$\mathcal{W}_{OD_x} = a\mathcal{I} - i\lambda f b \mathcal{D}_x \quad \mathcal{W}_{OD_y} = a\mathcal{I} - i\lambda f b \mathcal{D}_y \quad (7.25)$$

où  $\mathcal{D}_x$  et  $\mathcal{D}_y$  sont les opérateurs de dérivation selon  $x$  et  $y$ . Notons en passant que les fonctions de transparence ne peuvent être valides en l'état puisqu'elles induisent des densités plus grandes que 1. Il faudra donc garder en tête que leur expression n'a de sens que si elles prennent des valeurs dans  $[0,1]$ .

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
2	Amplitude	Mixte	Non	Oui

Table 7.7 – Résumé des caractéristiques des masques du **Optical differentiation wave front sensor**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

## 7.2 Masques utilisés en Coronographie

On présente dans cette dernière section des masques utilisés en coronographie. On rappelle que ces systèmes optiques ont pour objectif d'atténuer les objets alignés avec l'axe optique au profit d'objets qui ne le seraient pas. Ils nécessitent deux étages de filtrage : un premier en plan focal via l'utilisation d'un *masque* qui aura pour objectif de modifier le champ issu de l'objet sur l'axe pour le rendre facile à couper via un *stop* dans un second plan qui est souvent le plan pupille suivant. On rappelle ce principe dans la figure 7.10. Si nous nous intéressons à la coronographie, c'est donc dans l'idée d'utiliser cette lumière coupée à des fins d'analyse de front d'onde.

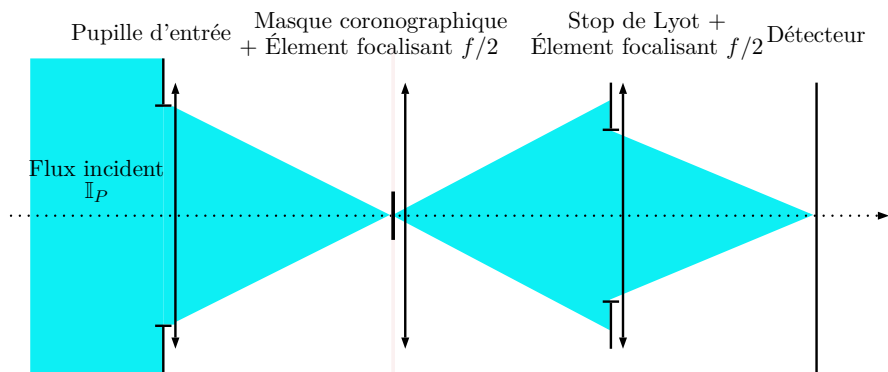


Figure 7.10 – Schéma de principe d'un système optique de coronographie.

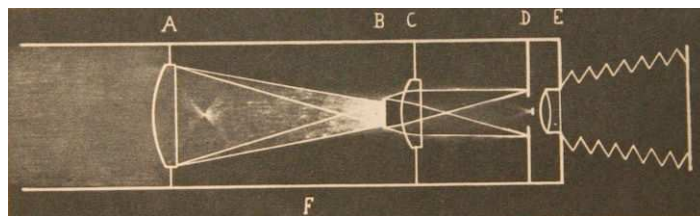


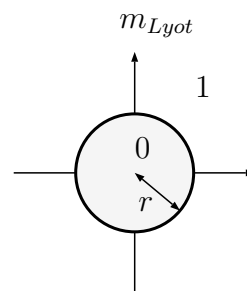
Figure 7.11 – Description originale du coronographe de Lyot.

### 7.2.1 Masque de Lyot

Le coronographe historique fut introduit par Bernard Lyot en 1931 [Lyot, 1931]. La figure 7.11 présente son design original. Le masque proposé par Lyot était de pure amplitude. Il coupait simplement la lumière indésirable grâce à une pastille complètement opaque. Dans le cas où l'objet serait une étoile et la pupille d'entrée du télescope circulaire, le masque de Lyot se décrit aisément via le pavage polaire. On a généralement  $2r/f \approx 1.6\lambda/D$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la source sur axe. On donne immédiatement les paramètres de pavages, ainsi que l'opérateur de Filtrage à cette longueur d'onde  $\lambda$ .

$$m_{Lyot} : \begin{cases} \{\Omega_r, 0, 0, 0, 0\} \\ \{\bar{\Omega}_r, 1, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\mathcal{W}_{Lyot} = \mathcal{I} - \mathcal{Z}_{r/f\lambda}$$



Masque de Lyot

On note que l'opérateur de filtrage est purement réel ce qui empêche tout espoir d'analyse de front d'onde bijective puisque les systèmes coronographiques fonctionnent sans modulation. Par ailleurs, le masque n'étant évidemment invariant

d'échelle, l'ASO associé ne pourra être que **chromatique**.

La figure 7.12 illustre l'effet du filtrage de Fourier pour une pupille circulaire lorsque qu'un détecteur *fictif* est placé juste avant le stop de Lyot. On observe notamment sur l'image de droite que le masque joue parfaitement son rôle puisque la lumière se trouve éloignée de l'axe optique et donc facilement filtrable par un stop de type "complémentaire de pupille circulaire". La partie imaginaire de l'opérateur de filtrage est comme prévu nulle.

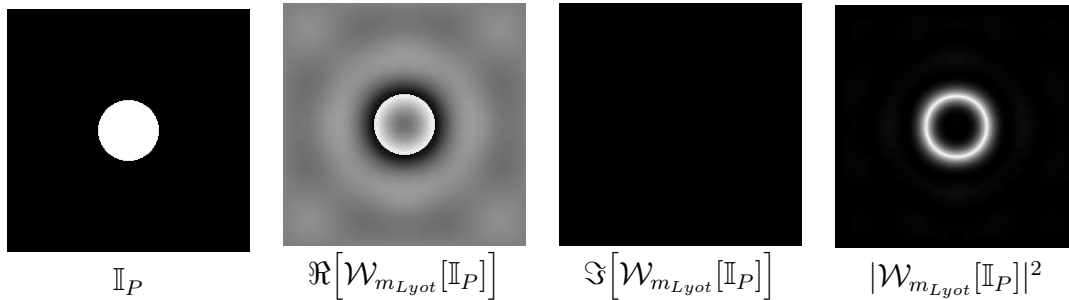


Figure 7.12 – Effet d'un filtrage de Fourier par un **masque de Lyot** sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Amplitude	Polaire	Non	Non

Table 7.8 – Résumé des caractéristiques du masque de **Lyot**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

## 7.2.2 Masque de Roddier&Roddier

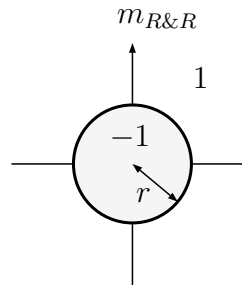
Un autre masque de coronagraphie se base sur le contraste de phase. Il a essentiellement le même design que le masque de Zernike à ceci près que le déphasage entre les deux éléments du pavage vaut  $\pi$  afin de générer des interférences destructrices. Cette idée fut proposée par Roddier et Roddier [Roddier and Roddier, 1997]. Quand la pupille est parfaitement circulaire on a toujours  $2r/f=1.06\Lambda/D$  afin d'égaliser rigoureusement l'énergie entre les deux parties du plan de Fourier. Les "paramètres de pavage" ainsi que l'opérateur de filtrage à la longueur d'onde  $\Lambda$  sont :



$$m_{R\&R} : \begin{cases} \{\Omega_r, 1, \delta, 0, 0\} \\ \{\bar{\Omega}_r, 1, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{avec } \frac{\delta}{\Lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{W}_{R\&R} = \mathcal{I} - 2\mathcal{Z}_{r/f\Lambda}$$



Masque de Roddier&Roddier

Une nouvelle fois l'opérateur de filtrage est purement réel ce qui empêche l'existence d'intensités impaires et donc une bijectivité entre l'espace des phases et l'espace des intensités. La figure 7.13 illustre l'éjection de la lumière par filtrage avec un masque de Roddier&Roddier. Du fait de l'adéquation du rayon de la pastille centrale  $r$  avec la taille de la pupille, on voit que cette éjection se fait de manière plus nette qu'avec le coronographe de Lyot.

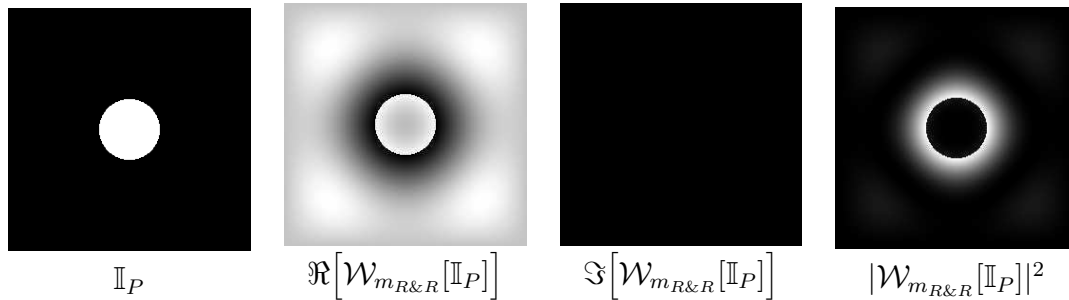


Figure 7.13 – Effet d'un filtrage de Fourier par un **masque de Roddier&Roddier** sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Phase	Polaire	Non	Non

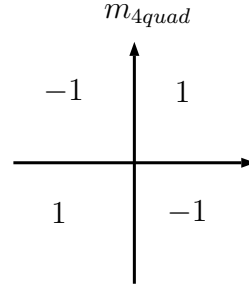
Table 7.9 – Résumé des caractéristiques du masque de **Roddier&Roddier**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

### 7.2.3 Masque 4-quadrants

Un autre exemple de masque coronographique est celui introduit par Rouan [Rouan et al., 2000]. Tout comme le Roddier&Roddier, il éjecte la lumière en faisant interférer le champ avec lui-même de façon destructive. Mais le pavage cette fois-ci utilisé est le cartésien : chaque quadrant est déphasé de ses voisins de  $\pi$  grâce à un piston différentiel  $\delta/\Lambda=1/2$ . Une nouvelle fois ce masque sera donc **chromatique**. Les "paramètres de pavage" sont les suivants :

$$m_{4quad} : \begin{cases} \{\Omega^{++}, 1, 0, 0, 0\} \\ \{\Omega^{--}, 1, 0, 0, 0\} \\ \{\Omega^{+-}, 1, \delta, 0, 0\} \\ \{\Omega^{-+}, 1, \delta, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{avec } \frac{\delta}{\Lambda} = \frac{1}{2}$$



Masque 4-quadrant

On obtient une réponse impulsionnelle et un opérateur de filtrage à la longueur d'onde  $\Lambda$  de la forme :

$$\psi_{m_{4quad}}^\delta(x_d, y_d) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{x_d y_d} \quad \mathcal{W}_{4quad} = -\mathcal{H}_{xy} \quad (7.26)$$

encore une fois on remarque que le masque de coronographie a un opérateur purement réel. L'action de filtrage du masque 4 quadrants est illustré sur la figure 7.14. On voit sur l'image de droite l'éjection de la lumière produite par l'action de la transformée de Hilbert  $\mathcal{H}_{xy}$  sur le champ incident. On comprend que celle-ci est permise de par la propriété de cet opérateur qui n'est sensible qu'aux variations du champ et non à son niveau global : là où le champ ne varie pas, il n'y a pas de signal.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Phase	Cartésien	Non	Non

Table 7.10 – Résumé des caractéristiques du masque **4 quadrants**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

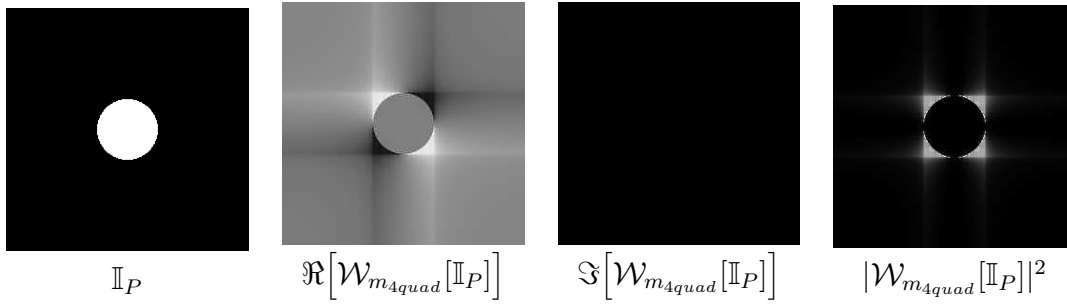


Figure 7.14 – Effet d’un filtrage de Fourier par un **masque 4 quadrants** sur un front d’onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

## 7.2.4 Masque Vortex

On évoque enfin le masque de coronagraphie le plus récemment introduit [Foo et al., 2005] qui se base également sur des phénomènes d’interférences destructrices. Cependant, il diffère des exemples précédents au sens où ces interférences ne se font pas de domaine à domaine ( $\Omega_r$  interfère avec  $\bar{\Omega}_r$  pour le R&R ;  $\Omega^{++}\cup\Omega^{--}$  interfère avec  $\Omega^{+-}\cup\Omega^{-+}$  pour le 4 quadrant) mais de façon radiale : en coordonnées polaires, le champ le long de la direction  $\theta$  va interférer avec le champ le long de  $\theta+\pi$ . Le masque vortex associé effectuant une tel décalage de phase orthoradial aura une fonction de transparence égale à :

$$m_V(r,\theta) = \exp(2i\theta) \quad (7.27)$$

$$= \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{\Lambda}{\pi}\theta\right) \quad \text{avec } \Lambda=\lambda \quad (7.28)$$

Le masque vortex sera donc optimisé pour une seule longueur d’onde et subseqüemment **chromatique**. L’épaisseur optique associée à celui-ci sera de structure **hélicoïdale** et créera en un tour un décalage de  $2\Lambda$ . Celle-ci est représentée sur la figure 7.15.

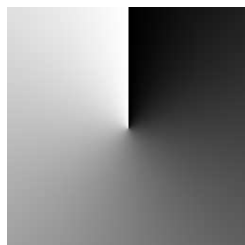


Figure 7.15 – Épaisseur optique d’un masque vortex.

On donne sur la figure 7.16 l'effet du filtrage de Fourier par un masque vortex. On observe une nouvelle fois l'éjection de la lumière hors de la pupille. On notera également un fait extrêmement intéressant puisque ce masque a un opérateur de filtrage présentant et une partie réelle et une partie imaginaire ce qui atteste cette fois-ci d'une dépendance de l'intensité en puissance impaire de la phase ! Ce masque coronographique est donc assurément le meilleur candidat pour effectuer de l'analyse de front d'onde sur la lumière éjectée par le stop de Lyot ! L'annexe C s'intéresse plus en détails à cette intéressante propriété.

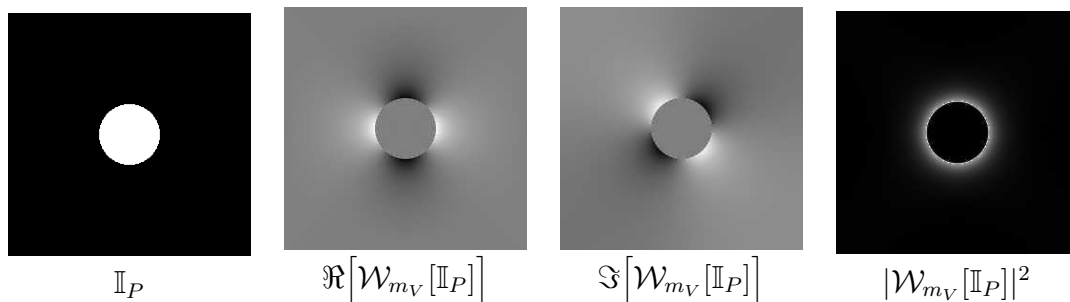


Figure 7.16 – Effet d'un filtrage de Fourier par un **masque de vortex** sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ **juste avant le stop de Lyot** puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré.

Nombre	Type	Géométrie	Achromatique ?	Intensité linéaire ?
1	Phase	Mixte	Non	<b>Oui !</b>

Table 7.11 – Résumé des caractéristiques du masque **vortex**. De gauche à droite : nombre de masques, nature de leur fonction de transparence (amplitude, phase ou mixte), géométrie du pavage utilisé pour les décrire, chromatisme des masques et présence ou non d'une intensité linéaire.

\*  
\* \*

On est rentré dans le vif du sujet dans ce chapitre en décrivant de nombreux designs de filtrage de Fourier et de coronographie. Tous les masques impliqués ou presque ont pu être décrits via le formalisme des pavages qu'ils soient dérivés du concept historique du Couteau de Foucault ou basé sur le contraste de phase. Cette description a suffi pour trancher quant à leur comportement en lumière polychromatique. Il a également été possible de donner leur réponse impulsionnelle ainsi que leur opérateur de

filtrage ouvrant la voie à une étude analytique poussée. On a pu notamment déduire s'ils étaient ou non adaptés à l'analyse de front d'onde en se servant du critère de l'existence d'une intensité impaire. Il est apparu qu'aucun masque coronographique ne satisfaisait à cette condition à l'exception du coronographe vortex. Il est donc possible d'avoir une information non ambiguë sur la phase en recueillant la lumière coupé par son stop.

On a volontairement été succincts en ce qui concerne les ASO Pyramide et Zernike. Les deux prochains chapitres leur sont dédiés puisqu'on va généraliser leur design et étudier leurs critères de performance en suivant la méthode décrite dans le chapitre 6. Précisons cependant que les éléments présentés dans ce chapitre permettent tout de même de dire que le masque pyramide est achromatique tandis que le masque de Zernike est ne l'est pas. Tous deux néanmoins semblent adaptés à l'analyse de front d'onde à faible flux (c'est le cas en optique adaptative pour l'astronomie) puisqu'ils utilisent tout deux un masque de phase qui laisse passer tout le flux incident.

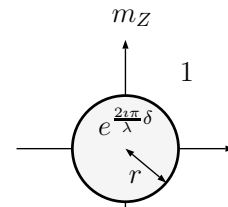
## 8 La classe des ASO de Zernike

Ce chapitre est entièrement dédié à l'ASO de Zernike qui a été présenté brièvement dans le paragraphe 7.1.5. Celui-ci utilise le masque de Zernike qui est un élément optique essentiel de la microscopie à contraste de phase [Zernike, 1934]. Si l'ASO de Zernike était décrit dans ce paragraphe comme un design unique, on va étendre son concept en relâchant les contraintes pesant sur ses **deux paramètres** de pavage  $r$  et  $\delta$  de son masque. D'un seul ASO on en génère ainsi une infinité. On les rassemble sous l'appellation "**classe des ASO de Zernike**". Cette partie a pour objectif d'explicitier l'évolution des critères de performance vis-à-vis des deux paramètres  $r$  et  $\delta$ . Notons que l'on n'associe **pas de modulation** à cette classe.

**Classe des ASO de Zernike.** Rattachée à une description polaire du plan de Fourier, la classe des ASO de Zernike est mathématiquement définie de la façon suivante :

$$m_Z : \begin{cases} \{\Omega_r, 1, \delta, 0, 0\} \\ \{\bar{\Omega}_r, 1, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_Z &= \mathcal{I} + \left( \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\delta\right) - 1 \right) \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}} \\ &= \left[ \mathcal{I} + \left( \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) - 1 \right) \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}} \right] + i \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}} \right] \end{aligned}$$



Masque de Zernike

On peut déjà s'apercevoir que la classe des ASO de Zernike contient deux designs "historiques" à savoir l'ASO de Zernike lui-même mais aussi le masque coronographique de Roddier&Roddier [Roddier and Roddier, 1997]. Les jeux de paramètres associés à ces deux configurations sont rappelées dans le tableau 8.1.

**Une classe d'ASO chromatique.** Notons d'ores-et-déjà que tous les masques de la classe de Zernike sont hélas **chromatiques**. On peut s'en convaincre en observant que ceux-ci ne sont pas invariants d'échelle et cela par deux fois puisque et la profondeur du puits générant le piston  $\delta$ , et sa largeur  $r$  ne sont pas vu pareillement par toutes les longueurs d'onde. On se borne donc dans ce chapitre à une étude monochromatique à la longueur d'onde  $\lambda$ .

Masque	Piston $\delta$	Diamètre $2r/f$
Zernike	$\lambda/4$	$1.06\lambda/D$
Roddier&Roddier	$\lambda/2$	$1.06\lambda/D$

Table 8.1 – Jeux de paramètre  $(\delta, r)$  correspondant à deux masques historiques de la **Classe Zernike**. La pupille d'entrée est ici considérée circulaire de rayon  $D$ . La source est monochromatique à la longueur d'onde  $\lambda$ .

## 8.1 Approche analytique

On commence par aborder l'analyse de front d'onde d'un point de vue analytique en étudiant notamment le développement en puissance de phase de l'intensité. Notons que l'on suppose qu'**aucune phase de référence** n'est présente aussi le développement de Taylor se fera autour de la phase nulle. On utilise donc les équations du paragraphe 4.2.5.1 dans lesquelles le flux  $f$  est unitaire.

### 8.1.1 $q$ -intensités

**Intensité constante.** Le premier terme du développement en puissance de phase ne dépend pas de la phase. Il correspond à l'intensité sur le détecteur lorsque celle-ci est nulle.

$$I_{\text{constant}} = |\mathcal{W}_Z[\mathbb{I}_P]|^2 \quad (8.1)$$

$$= (\mathbb{I}_P)^2 + 4\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\left(\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P] - \mathbb{I}_P\right) \quad (8.2)$$

De cette équation on remarque en premier lieu que  $\delta$  intervient en tant que scalaire tandis que le paramètre  $r$  influe via l'opérateur de Zernike sur la répartition spatiale de l'intensité. On verra que cette propriété reste valable pour les autres  $q$ -intensités.

**Intensité linéaire.** On s'intéresse désormais au terme le plus important à l'analyse du front d'onde puisqu'il témoigne du comportement linéaire idéal de l'ASO étudié et qu'il est utilisé pour construire sa matrice d'interaction.

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im\left[\mathcal{W}_Z[\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_Z[\mathbb{I}_P\phi]}\right] \quad (8.3)$$

$$= 2\mathbb{I}_P\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\left[\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi - \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi]\right] \quad (8.4)$$

Cette équation est par de nombreux aspects très instructive. On remarque en premier lieu que **l'entière du signal linéaire a le même support que la pu-**

**pille d'entrée.** On peut donc restreindre drastiquement le nombre de pixels du détecteur à exploiter en ne conservant que ceux présents dans le support de la pupille. Ceci est illustré sur la figure 8.1.

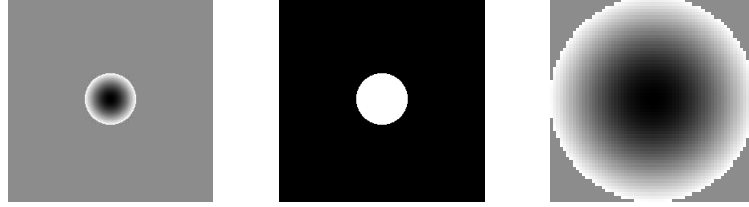


Figure 8.1 – De gauche à droite : Intensité linéaire sur le détecteur entier. Pixels pertinents. Intensité linéaire tronquée sur les pixels pertinents. Le mode de Zernike pris pour cet exemple est le focus  $Z_2^0$ .

Par ailleurs, on observe que **le paramètre  $r$  joue sur la répartition spatiale de l'intensité tandis que le paramètre  $\delta$  règle un gain scalaire global indépendant de la phase  $\phi$ .** Ceci veut notamment dire que les **modes propres** d'entrée comme de sortie tels qu'ils l'ont été définis grâce à la décomposition en valeurs singulières **ne dépendent que de  $r$ .** On rappelle en passant comment l'intensité linéaire permet d'aboutir à la sensibilité vis-à-vis du mode  $i$  des polynômes de Zernike :

$$s(Z_j) = \|I_{\text{linéaire}}(Z_j)\|_2 = 2 \left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) \right| \left\| \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi - \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi] \right\|_2 \quad (8.5)$$

**Première intensité non-linéaire.** On donne désormais l'expression du premier terme non-linéaire du développement en puissance de phase qui est l'intensité quadratique.

$$I_{\text{quadratique}}(\phi) = |\mathcal{W}_Z[\mathbb{I}_P\phi]|^2 - \Re\left[\mathcal{W}_Z[\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_Z[\mathbb{I}_P\phi^2]}\right] \quad (8.6)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right) \left( 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi]^2 - 2\mathbb{I}_P\phi\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi] + \mathbb{I}_P\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi^2] \right) \quad (8.7)$$

$$+ \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\mathbb{I}_P\phi^2 - 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi^2] \quad (8.8)$$

L'analyse de cette équation permet d'observer une nouvelle fois que les paramètres  $r$  et  $\delta$  ont des rôles essentiellement différents : tandis que le premier influence la répartition spatiale de l'intensité, le second règle un gain scalaire global. On note d'ailleurs que l'intensité quadratique n'est nulle que pour  $\delta = \lambda$ , c'est-à-dire lorsque le déphasage provoqué par le piston différentiel est de  $2\pi$ . L'opérateur de filtrage se restreint alors à l'identité et ôte tout espoir d'analyse de front d'onde. On retient donc que pour les ASO de la classe de Zernike, le premier terme non-linéaire est assurément le terme quadratique.

Contrairement à l'intensité linéaire, l'intensité quadratique prend des valeurs non-nulles à l'extérieur du support de la pupille (image de gauche de la figure



8.2) et ce à cause des deux termes :  $2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi]^2$  et  $-2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p]\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi^2]$ . Néanmoins, on oubliera complètement cette partie du signal du fait que toute l'information linéaire est de toute façon à l'intérieur de la pupille.

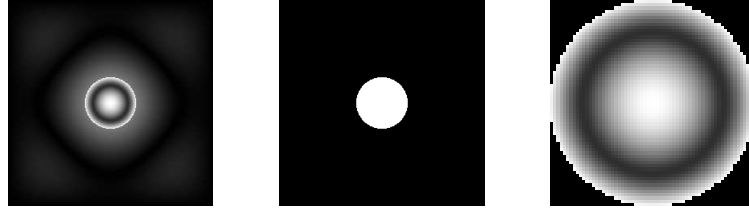


Figure 8.2 – De gauche à droite : Intensité quadratique sur le détecteur entier ; on notera la présence de photons hors du support de la pupille d'entrée. Pixels pertinents car ils contiennent toute l'information linéaire. Intensité quadratique tronquée sur les pixels pertinents. Le mode de Zernike pris pour cet exemple est le focus  $Z_2^0$ .

On explicite enfin la dynamique qui est, on le rappelle, définie comme l'inverse de la norme du premier terme non linéaire :

$$d(Z_j) = \|I_{\text{quadratique}}(Z_j)\|_2^{-1} \quad (8.9)$$

$$= \frac{1}{2|\sin(\frac{\pi}{\lambda}\delta)|} \left\| \left( 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi]^2 - 2\mathbb{I}_p\phi\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi] + \mathbb{I}_p\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi^2] \right. \right. \quad (8.10)$$

$$\left. \left. + \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p]\mathbb{I}_p\phi^2 - 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p]\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi^2] \right) \right\|_2^{-1} \quad (8.11)$$

### 8.1.2 Opérateur de Zernike

Les équations précédentes montrent le rôle primordial joué par l'opérateur de Zernike  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}$ . Insistons sur le fait que celui-ci n'est associé qu'à un seul paramètre à savoir,  $r$  le rayon de la dépression centrale du masque et qu'il correspond au filtrage par ce qu'on appellera la "pastille de Zernike" dont la fonction de transparence est égale à la fonction indicatrice de l'élément  $\Omega_r$  du pavage polaire. On donne les paramètres de pavage, la réponse impulsionnelle et l'opérateur de Zernike associé : immédiatement :

$$\mathbb{I}_{\Omega_r} : \begin{cases} \{\Omega_r, 1, 0, 0, 0\} \\ \{\bar{\Omega}_r, 1, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_r}}^\psi(x_d, y_d) = \frac{r}{f\lambda\sqrt{x_d^2 + y_d^2}} J_1\left(2\pi\frac{r}{f\lambda}\sqrt{x_d^2 + y_d^2}\right)$$

$$\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[g] \hat{=} g \star \delta_{\mathbb{I}_{\Omega_r}}^\psi$$

Pastille de Zernike

Afin d'avoir une idée du comportement mathématique de l'opérateur de Zernike, on commence par étudier les deux cas limite :  $r$  tend vers l'infini et vers 0. Le premier cas fait tendre la pastille de Zernike vers le masque trivial. On a en effet :

$$\mathbb{I}_{\Omega_r} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{I} \quad (8.12)$$

La réponse impulsionnelle associée à la fonction identité  $\mathbb{I}$  étant un Dirac 2D, on déduit que l'opérateur de Zernike tend vers l'opérateur identité lorsque  $r$  tend vers l'infini :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_r}}^{\psi} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \delta \implies \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{I} \quad (8.13)$$

Physiquement cela est parfaitement compréhensible : pour le masque trivial, il n'y a aucun filtrage.

Le second cas limite concerne  $r \rightarrow 0$ . La fonction indicatrice de l'élément  $\Omega_r$  tend alors vers un Dirac auquel on associe un facteur scalaire  $o(r)$  qui tend vers 0 pour témoigner de la décroissance de l'énergie laissée passer par la pastille de Zernike de plus en plus petite :

$$\mathbb{I}_{\Omega_r} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} o(r) \times \delta \quad (8.14)$$

La réponse impulsionnelle associée correspond à la fonction identité, toujours affectée d'un facteur scalaire qui tend vers 0. On continuera de l'appeler  $o(r)$  :

$$\delta_{\mathbb{I}_{\Omega_r}}^{\psi} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} o(r) \times \mathbb{I} \quad (8.15)$$

L'opérateur de Zernike lorsque  $r$  tend vers 0 est donc assimilable –comme celui qui "convolve avec la fonction identité"– à un intégrateur pondéré par un scalaire tendant vers 0<sup>a</sup> :

$$\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} o(r) \times \iint \quad (8.16)$$

Ces résultats s'illustrent parfaitement lorsque l'on applique l'opérateur de Zernike à la pupille d'entrée  $\mathbb{I}_P$  et que l'on en observe une coupe sur la diagonale. La figure 8.3 explicite la fonction résultant  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]$  pour plusieurs valeurs de  $r$ . La courbe rouge correspond à la pupille d'entrée mais également à l'application de l'opérateur de Zernike sur celle-ci lorsque  $r$  tend vers l'infini. La courbe bleue correspond au cas très particulier où l'énergie est également répartie à l'intérieur

---

a. On peut d'ores-et-déjà utiliser ces résultats asymptotiques pour donner les opérateurs de filtrage des deux représentants de la classe de Zernike que sont les masques à  $r$  tend vers l'infini et vers 0 :

$$\mathcal{W}_Z = \mathcal{I} + \left( \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \delta\right) - 1 \right) \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}} \implies \mathcal{W}_Z \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{I} \quad \mathcal{W}_Z \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \delta\right) \mathcal{I}$$

et à l'extérieur du support de la pupille d'entrée ;  $2r/f\lambda$  vaut alors  $1.06/D$ . C'est la configuration du masque de Zernike *historique*.

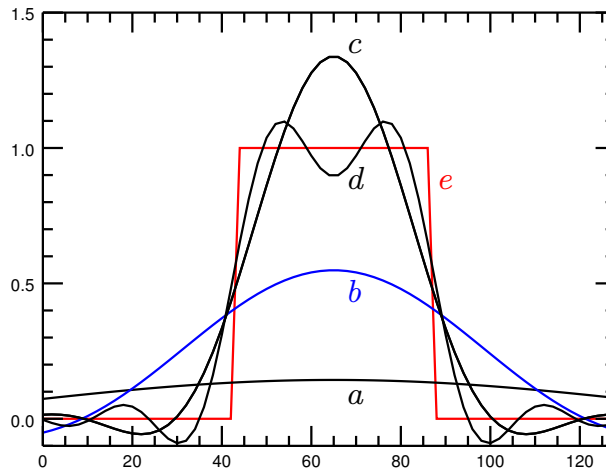


Figure 8.3 – Opérateur de Zernike appliqué à la pupille d'entrée pour différentes valeurs de rayon :  $2rD/f\lambda$  vaut successivement 0.53 (a), 1.06 (b), 2.12 (c), 3.60 (d) et l'infini (e). On représente ici une coupe dans la diagonale de  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]$ . On remarquera que la courbe rouge correspond également à la coupe de la pupille d'entrée puisque  $\mathcal{Z}_{\infty}=\mathcal{I}$ .

La courbe (a) montre le phénomène d'intégration de la pupille d'entrée assorti à l'atténuation. La fonction résultante est en effet de plus en plus plate en même temps que son support s'élargit. Physiquement, l'opérateur de Zernike à très petit  $r$  dilue l'énergie de la fonction sur lequel il s'applique pour la répartir dans tout l'espace.

Ce processus d'intégration a une conséquence notable sur l'application de l'opérateur de Zernike sur des **fonctions à moyenne nulle** comme le sont les phases. Lorsque  $r$  tend vers 0, les fonctions résultantes deviennent donc négligeables devant les fonctions résultantes de l'application de  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}$  à des fonctions de moyenne non nulle. Ceci a une conséquence directe lorsque l'on regarde la dépendance spatiale de l'intensité linéaire, on a en effet :

$$2\mathbb{I}_P \left[ \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi - \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi] \right]_{r \rightarrow 0} \sim 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\mathbb{I}_P\phi, \quad (8.17)$$

puisque  $\iint \mathbb{I}_P\phi = 0$  tandis que  $\iint \mathbb{I}_P > 0$ . **Ce résultat rend les ASO de la classe de Zernike à faible  $r$  directement proportionnel à la phase !** Nous gardons néanmoins en tête que cette proportionnalité bien pratique s'accompagne d'une atténuation progressive du signal témoignée par la présence du terme  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]$  dont le niveau global baisse avec  $r$ .

Profitons de ce paragraphe pour exposer une approximation pratique à bien des égards qui consiste à considérer que dans le cas de l'équipartition de l'énergie, c'est-à-dire  $2r/f\lambda=1.06/D$ , on a :

$$\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P] \approx 0.5\mathbb{I}_P \quad \text{sur le support de la pupille} \quad (8.18)$$

**Application à l'intensité constante.** Dans le cas particulier de l'équipartition de l'énergie :  $2r/\lambda=1.06/D$ , on peut simplifier l'expression de l'intensité constante via l'approximation précédente (équation 8.18) :

$$I_{\text{constant}} \approx (\mathbb{I}_P)^2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)\right) \quad \text{sur le support de la pupille} \quad (8.19)$$

Cette équation permet de comprendre mathématiquement le phénomène d'interférences destructives ayant lieu dans un coronographe de Roddier&Roddier puisque l'intensité dans le support de la pupille est quasiment nulle lorsque  $\delta=\lambda/2$ . On illustre sur la figure 8.4 l'intensité constante pour trois valeurs significatives de  $\delta$ .



Figure 8.4 – Intensité constante pour trois configurations de masques de Zernike.  $r$  assure l'**équipartition de l'énergie** dans les trois cas et  $\delta$  vaut de gauche à droite 0,  $\lambda/4$  et  $\lambda/2$ . On note l'extinction sur le support de la pupille dans la dernière configuration.

Notons en passant que pour l'ASO historique de Zernike ( $\delta=\lambda/4$ ), l'intensité sur le support de la pupille peut s'approximer comme :

$$I_{\text{constant}} \approx 0.29(\mathbb{I}_P)^2 \quad (8.20)$$

## 8.2 Sensibilité, Dynamique et paramètres de la classe Zernike

### 8.2.1 Influence du paramètre $\delta$

On étudie dans ce paragraphe l'influence du paramètre  $\delta$  sur la performance des ASO de la classe de Zernike. On répète que celui-ci ne joue aucun rôle sur

la structure spatiale des réponses linéaires ou quadratiques mais en règle les niveaux globaux. On trace sur la figure 8.5 ces gains scalaires pour la sensibilité, la dynamique et le facteur SD (qui témoigne du compromis sensibilité/dynamique) lors  $\delta$  varie de 0 jusqu'à  $\lambda/2$ .

$$\mathbf{s}(\delta) \triangleq \left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) \right| \quad \mathbf{d}(\delta) \triangleq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right) \right|} \quad \mathbf{s.d}(\delta) \triangleq \left| \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)} \right| \quad (8.21)$$

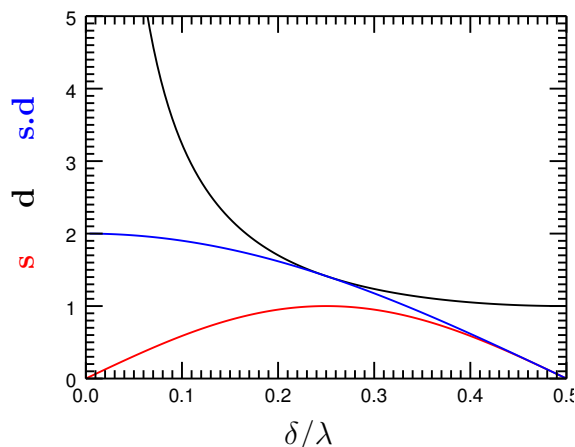


Figure 8.5 – Gains scalaires des **sensibilité**, **dynamique** et **facteur SD** en fonction du piston différentiel  $\delta$  des masques de la classe d'ASO de Zernike. L'analyseur historique de Zernike correspond à  $\delta/\lambda=0.25$  tandis que le Roddier&Roddier correspond à  $\delta/\lambda=0.5$

On observe sur la figure 8.5 que la sensibilité (courbe rouge) est symétrique autour de son maximum à  $\delta=\lambda/4$ , c'est-à-dire pour la configuration historique de Zernike. L'intuition physique devance en cela la raison mathématique. La sensibilité s'annule pour le masque trivial  $\delta=0$  et la configuration Roddier&Roddier  $\delta=\lambda/2$ . Dans ces deux cas, il n'y a donc aucune dépendance linéaire de la méta-intensité avec la phase ce qui exclue une description matricielle des ASO associés. La dynamique (courbe noire) est décroissante sur l'intervalle  $[0;\lambda/2]$ . Elle est infinie pour le masque trivial ce qui témoigne du fait que toutes les  $q$ -intensités (sauf le terme  $q=0$ ) sont nulles. Le facteur SD (courbe bleue) est très instructive puisqu'elle montre que cette quantité est décroissante avec  $\delta$ . Si l'on souhaite obtenir une sensibilité donnée, on choisira donc un  $\delta$  situé dans l'intervalle  $[0;\lambda/4]$  afin de maximiser le produit SD. Le fait de dévier du masque historique de Zernike pour ajuster la sensibilité avait déjà été proposé par N'Diaye [N'Diaye et al., 2014] qui suggérerait d'envisager un piston différentiel  $\delta$  pris entre  $0.1\lambda$  et  $0.4\lambda$ .

## 8.2.2 Influence du paramètre $r$

On s'intéresse désormais à l'impact du paramètre  $r$  sur les performances des ASO de la classe de Zernike. Celui-ci, on le rappelle, ne joue que sur la **structure spatiale** des réponses linéaires et quadratiques. On normalise conséquemment celles-ci par leur gain scalaire afin de leur en faire disparaître la dépendance en  $\delta$ . On étudie donc les quantités :

$$\frac{I_{\text{linéaire}}(\phi)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)} = 2\mathbb{I}_P \left[ \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi - \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi] \right] \quad (8.22)$$

$$\frac{I_{\text{quadratique}}(\phi)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)} = 4\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi]^2 - 4\mathbb{I}_P\phi\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi] + 2\mathbb{I}_P\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi^2] + 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\mathbb{I}_P\phi^2 \quad (8.23)$$

$$-4\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi^2] \quad (8.24)$$

**Intensité linéaire et sensibilité** On commence par donner la structure des réponses linéaires normalisées pour trois valeurs de  $r$ . On prendra pour référence le rayon assurant l'équipartition de l'énergie pour une pupille circulaire de diamètre  $D$ , c'est-à-dire  $2r/f\lambda=1.06/D$ . On testera également les  $r$  correspondant à la moitié et au double de ce rayon de référence. Les figures 8.15, 8.16 et 8.17 représentent ces structures pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike tandis que le graphe de la figure 8.6 en donne les sensibilités mode-à-mode associées.

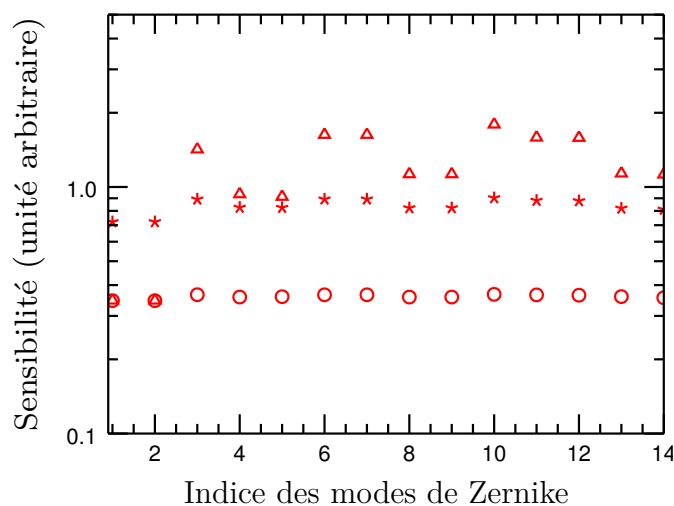


Figure 8.6 – Sensibilité normalisée mode-à-mode pour les 14 premiers Zernike. Les symboles correspondent aux trois cas de rayon :  $2rD/1.06f\lambda=0.5(\circ)$ , 1.0 ( $*$ ) et 2 ( $\Delta$ ).

Avant de nous lancer dans l'interprétation des courbes de la figure 8.6, notons que si l'on avait en notre possession un **ASO parfait** – on l'imagine comme ayant

une intensité linéaire exactement égale à la phase incidente – sa sensibilité associée serait plate et égale à 1 pour tous les modes de Zernike :

$$s_{\text{ASO parfait}}(Z_i) = \|Z_i\|_2 = 1 \quad (8.25)$$

Ce résultat tient au fait que les polynômes de Zernike forment une **base orthonormée** des phases. On retient donc que plus la sensibilité est plate, moins l'intensité linéaire dévie de la proportionnalité à la phase.

Ceci étant dit, on peut commencer l'analyse des graphes précédents. Examinons la courbe (o) de graphe de gauche de la figure 8.6. On observe que celle-ci est quasiment plate mais de niveau moyen inférieur à 1. Augmentons la valeur de  $r$  jusqu'à atteindre l'équipartition de l'énergie avec la courbe (\*) pour observer que la sensibilité moyenne s'améliore tandis que la sensibilité mode-à-mode est moins plate. La courbe ( $\Delta$ ) quant-à-elle est encore moins plate mais globalement plus sensible. Ces observations peuvent évidemment s'expliquer mathématiquement. À la lumière des résultats portant sur l'opérateur de Zernike on peut en effet affirmer que lorsque  $r$  est faible, le terme  $2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi$  est prépondérant dans l'expression de la structure spatiale de l'intensité linéaire. Lorsque  $r$  augmente le terme  $-2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi$  devient de moins en moins négligeable. Or on voit que celui-ci n'est plus strictement proportionnel à la phase puisqu'il fait intervenir la transformée –via l'opérateur de Zernike– de celle-ci, modifiant ainsi sa structure spatiale ! De façon synthétique, on peut se figurer les choses de la façon suivante :

$$\frac{I_{\text{linéaire}}(\phi)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} 2\mathbb{I}_P \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi \qquad \frac{I_{\text{linéaire}}(\phi)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -2\mathbb{I}_P \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi \quad (8.26)$$

On a donc expliqué la forme des sensibilités : à mesure que  $r$  augmente, elles sont de moins en moins proportionnelles à la phase. Intéressons-nous maintenant à l'évolution de la sensibilité moyenne, celle-ci augmentant visiblement avec le rayon  $r$ . Pour expliquer ce fait, il faut invoquer le phénomène d'atténuation inhérent à l'intégration à faible rayon. On se souvient en effet que  $\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]$  voit sa moyenne sur le support de la pupille diminuer avec  $r$ .

**Application à la configuration historique d'équipartition de l'énergie :** On se focalise maintenant sur le cas où  $2r/f\lambda = 1.06/D$  ou  $r/f\lambda = 0.53/D$ . On analyse pour cela la structure spatiale de la réponse linéaire à une phase  $\phi$  :

$$2\mathbb{I}_P \left[ \mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P]\phi - \mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P]\phi \right] \quad (8.27)$$

On est dans le cas intermédiaire où  $r$  ne tend ni vers 0 ni vers l'infini, aussi on se propose de comparer ces deux termes en observant sur la figure 8.7 une coupe

dans la diagonale de ceux-ci pour les modes de tip et de focus. On expose en rouge la phase injectée  $\mathbb{I}_P\phi$ , en noir le terme  $\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P]\phi$  et en bleu le terme  $\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P\phi]$ .

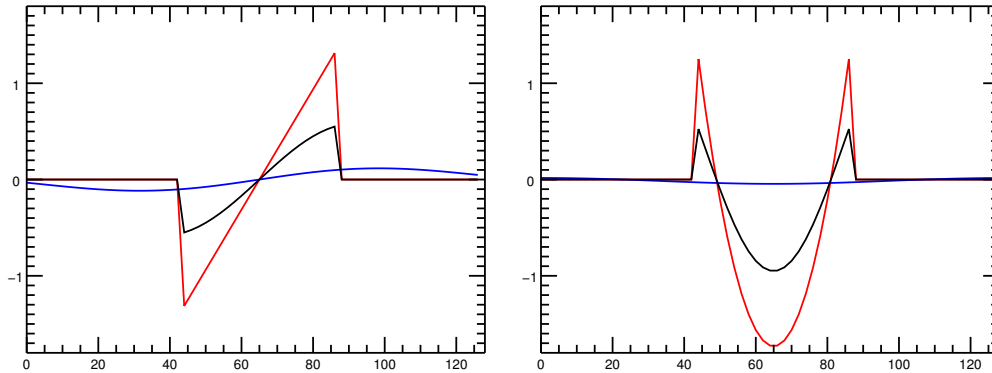


Figure 8.7 – Coupe dans la diagonale des quantités  $\mathbb{I}_P\phi$  en rouge,  $\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P]\phi$  en noir et  $\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P\phi]$  en bleu. À gauche,  $\phi=Z_1^1$  et à droite  $\phi=Z_2^0$ .

Il semble donc que pour ces deux modes, le terme proportionnel à la phase soit prépondérant et si l'exemple n'a jamais valeur de preuve, on prie tout de même le lecteur de se laisser convaincre que la situation se généralise pour tous les autres Zernike :

$$\mathcal{Z}_{1.06/D}[\mathbb{I}_P]\phi \gg \mathcal{Z}_{1.06/D}[\mathbb{I}_P\phi] \quad \forall \phi \quad (8.28)$$

Ceci explique pourquoi les courbes de sensibilité (\*) sont quasi plates et voisines de 1. On a en effet, en utilisant l'approximation 8.18 la relation :

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) \approx (\mathbb{I}_P)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \phi \quad (8.29)$$

On peut conclure de cette étude générale de la sensibilité vis-à-vis du paramètre  $r$  que celui-ci est le curseur du compromis **sensibilité/proportionnalité à la phase**. Un faible rayon laisse quasi intacte la phase mais l'atténue fortement tandis qu'un grand  $r$  donne un signal fort mais différent de la phase en terme de structure spatiale.

**Intensité quadratique et dynamique.** On donne maintenant la structure des réponses quadratiques normalisées pour trois valeurs de  $r$ . On continue à prendre pour référence le rayon assurant l'équipartition de l'énergie pour une pupille circulaire de diamètre  $D$ , c'est-à-dire  $r/f\lambda=0.53/D$  en testant également les  $r$  correspondant à la moitié et au double de ce rayon de référence. Les figures 8.18, 8.19 et 8.20 représentent ces structures pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike tandis que le graphe de la figure 8.9 en donne les dynamiques mode-à-mode associées.



Si une étude purement analytique de l'intensité quadratique normalisée :

$$\frac{I_{\text{quadratique}}(\phi)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\delta\right)} = 4\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi]^2 - 4\mathbb{I}_p\phi\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi] + 2\mathbb{I}_p\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi^2] + 2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p]\mathbb{I}_p\phi^2 - 4\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p]\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_p\phi^2] \quad (8.30)$$

s'avère compliquée on peut néanmoins s'aider des simulations numériques pour comprendre grossièrement sa structure spatiale. On s'intéresse pour cela aux réponses quadratiques pour deux modes de Zernike, le tip et le focus lorsque le rayon  $r$  prend les trois valeurs testées jusqu'ici. Ces intensités sont regroupées sur la figure 8.8. On y a associé également l'image de la **phase au carré** puisque de toute évidence celle-ci joue un rôle primordiale au sein de l'intensité quadratique.

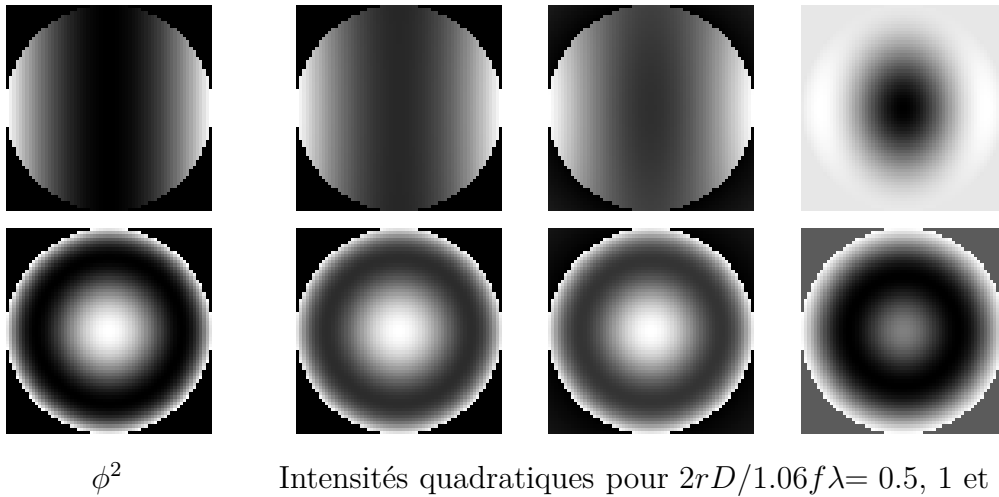


Figure 8.8 – Comparaison entre la phase au carré (1<sup>ère</sup> colonne) et les intensités quadratiques normalisées simulées pour 3 valeurs de rayon (trois autres colonnes). En haut, le mode testé est le tip  $Z_1^1$  ; en bas c'est le focus  $Z_2^0$ .

L'observation de la structure spatiales des intensités quadratiques incite à conclure de la même façon que pour l'intensité linéaire : pour des rayons inférieurs ou égal au rayon d'équipartition de l'énergie, la forme de la réponse quadratique est très proche de celle de la phase au carré. Lorsque le rayon augmente, la structure spatiale se déforme.

Si la figure 8.8 nous renseignait sur la forme des réponses quadratiques, il faut nous intéresser au graphe de la dynamique (figure 8.9) pour avoir une idée de l'évolution du niveau global des intensités quadratiques en fonction du paramètre  $r$ .

La meilleure dynamique correspond au rayon le plus faible (courbe (o)) tandis que la moins bonne correspond au rayon le plus grand (courbe ( $\Delta$ )). On voit

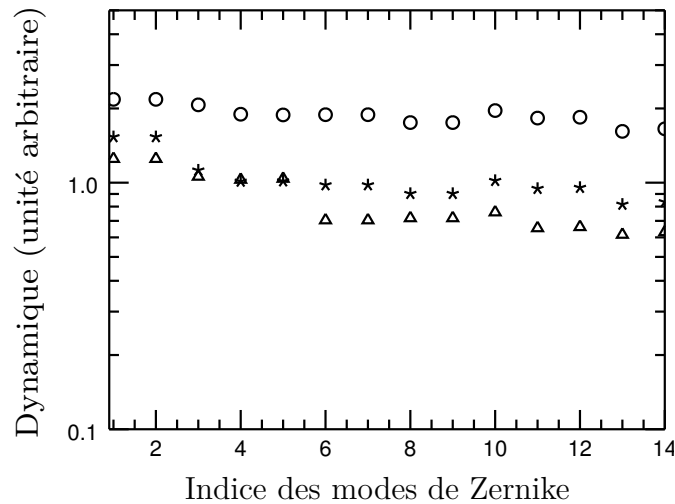


Figure 8.9 – Dynamique normalisée mode-à-mode pour les 14 premiers Zernike. Les symboles correspondent aux trois cas de rayon :  $2rD/1.06f\lambda=0.5$ (○),  $1.0$  (\*) et  $2$  (△).

donc ici s'illustrer le compromis classique **sensibilité/dynamique** puisque ces tendances étaient exactement opposées pour la sensibilité : la sensibilité augmentait avec  $r$ .

**Étude fréquentielle** Afin de trancher quant à la meilleure configuration, on passe en représentation fréquentielle (via la correspondance fréquence spatiale / degré radial) en traçant (figure 8.10) les sensibilités, dynamiques et facteurs SD pour les trois rayons jusqu'ici étudiés . Le nombre de polynômes de Zernike utilisés pour tracer ces courbes est sensiblement supérieur aux figures précédentes 8.6 et 8.9 puisqu'on va jusqu'au degré radial  $n=44$  ce qui correspond à 989 modes de Zernike.

Les graphes de sensibilité et de dynamique illustrent parfaitement l'antagonisme entre ces deux quantités puisque lorsque la dynamique est grande, la sensibilité est faible et *vice versa*. Le graphe de droite de la figure 8.10 donne le facteur SD tracé lorsque autant de poids est accordé à  $s$  et à  $d$ , c'est-à-dire  $\eta=1$  dans les notations du chapitre 6. On y remarque qu'il vaut mieux utiliser un grand rayon puisque la courbe (△) est largement supérieure aux deux autres courbes des plus petits rayons (○) et (\*). On nuancera tout de même cet avis en précisant que les grands rayons font perdre la proportionnalité à la phase : l'intensité linéaire associé à une phase n'a pas la même structure spatiale que cette dernière.

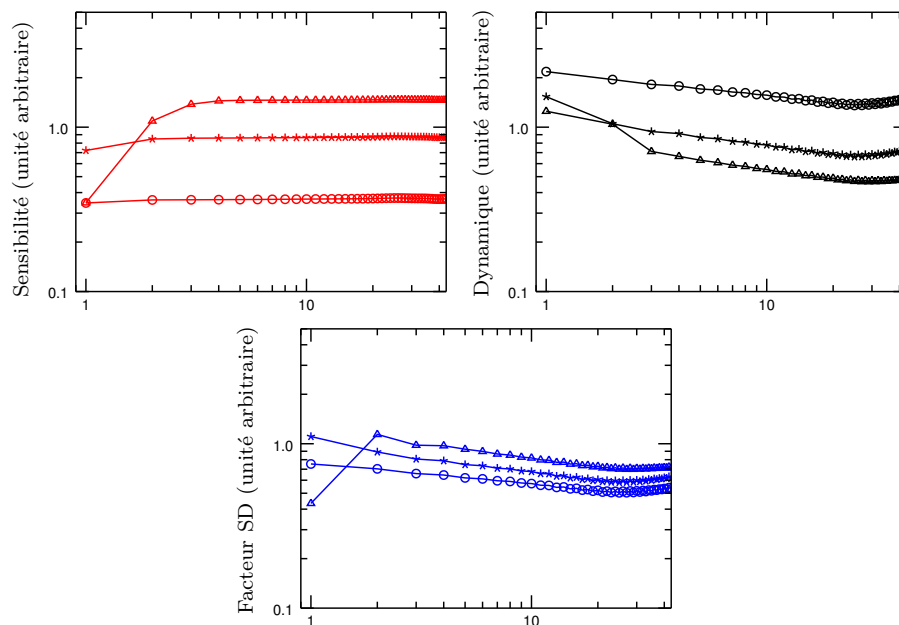


Figure 8.10 – **Sensibilité**, **dynamique** et **facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux trois cas de rayon :  $2rD/1.06f\lambda = 0.5(\circ)$ ,  $1.0(*)$  et  $2(\triangle)$ .

## 8.3 Autres critères de performance

On évoque dans cette partie les autres critères de performance évoqués dans les chapitres généraux précédents.

### 8.3.1 Méta-pixels pertinents

On répète tout d'abord que les pixels pertinents du détecteur correspondent à l'image géométrique de la pupille. On a en effet vu qu'ils étaient les seuls à contenir de l'information linéaire avec la phase. On a alors une parfaite correspondance entre l'espace des phases et l'espace des méta-intensités. Le ratio entre la zone d'intérêt du détecteur et le support des phases est donc unitaire. Les ASO de la classe de Zernike atteignent conséquemment le **ratio méta-pixel par mode de phase idéal** de 1.

### 8.3.2 Modes propres, Modes vus

La détermination des modes propres et des modes vus se base sur l'étude de l'expression de l'intensité linéaire :

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\mathbb{I}_P \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) \left[ \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi - \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P\phi] \right] \quad (8.31)$$

On observe notamment que tant que le gain scalaire n'est pas nul, c'est-à-dire que  $\delta \neq \lambda/2$ , toutes les phases sont codées de façon unique dans l'espace des méta-intensités. On comprend donc que, excepté la configuration Roddier&Roddier, les ASO de la classe de Zernike voient tous les modes de Zernike à partir du degré radial 1.

Les modes propres, on le répète, sont indépendants de  $\delta$ . Si on les détermine habituellement par *décomposition en valeurs singulières* de la matrice d'interaction construite en injectant les polynômes de Zernike dans l'intensité linéaire normalisée, nous proposons ici une approche plus analytique. On se restreint pour cela au ASO présentant un rayon  $r$  assez faible. On a vu en effet que dans de tels cas, l'intensité linéaire normalisée peut être considérée comme **proportionnelle à la phase** :

$$\frac{I_{\text{linéaire}}(\phi)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)} \approx 2\mathbb{I}_P \mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]\phi \quad \text{pour } 2r/\lambda \leq 1.06/D \quad (8.32)$$

On rappelle que la *décomposition en valeurs singulières* consiste à trouver une base des phases dans laquelle l'ASO diagonalise. Par exemple, l'ASO idéal qui code exactement la phase, admet pour modes propres d'entrée les polynômes de Zernike eux-mêmes puisqu'ils forment d'ores-et-déjà une base orthonormée ! On en conclut que les modes propres d'entrée associées à l'intensité normalisée précédente et notés  $\{\phi_i^p\}$  sont :

$$\phi_i^p = \frac{Z_i}{2\mathcal{Z}_{\frac{r}{f\lambda}}[\mathbb{I}_P]} \quad \text{où } Z_i \text{ est le } i\text{-ième Zernike} \quad (8.33)$$

puisqu'on a en effet :

$$\frac{I_{\text{linéaire}}(\phi_i^p)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)} \approx \mathbb{I}_P Z_i \quad (8.34)$$

dont la matrice d'interaction est évidemment diagonale. On note d'ailleurs que les modes propres de sortie sont alors simplement les polynômes de Zernike codés en intensité sur le détecteur.

Dans la configuration historique de Zernike, on peut utiliser l'approximation 8.18 :

$$2\mathcal{Z}_{0.53/D}[\mathbb{I}_P] = \mathbb{I}_P \quad (8.35)$$

pour s'apercevoir que les modes propres de l'ASO de Zernike peuvent être quasiment confondus avec les polynômes de Zernike eux-mêmes.

**On conclut ce court paragraphe en insistant sur le fait que ce raisonnement ne peut plus se tenir pour les grands rayons puisque les modes de sortie, en s'éloignant des polynômes de Zernike, empêche l'orthogonalité de la matrice d'interaction. Ceci est connexe au fait que l'approche analytique précédente est impuissante vu la complexité de l'intensité linéaire qui contient désormais un terme non proportionnel à la phase.**

### 8.3.3 Propagation des bruits

On aborde désormais les erreurs de reconstruction dues à la présence de bruits d'intensité sur le détecteur (cf. paragraphe 6.3.3). On se borne au cas de l'ASO historique de Zernike. On se souvient que celles-ci sont quantifiées via les **matrices de covariance d'erreur d'estimation** :

$$\mathbf{C}_{E,\text{lecture}} = \frac{\sigma_{\text{RON}}^2}{s^2} \mathbf{S}^{-1} \quad \mathbf{C}_{E,\text{photon}} = \frac{1}{s} \left( \mathbf{B}_{mI}^t \mathbf{diag}(I_{\text{constant}})^{-1} \mathbf{B}_{mI} \right)^{-1} \quad (8.36)$$

où  $s$  est le flux total de la source utilisée pour faire l'analyse de front d'onde. On rappelle que les termes diagonaux de ces matrices sont les *coefficients de propagation de bruit*. On les donne en représentation fréquentielle (pour les 44 premiers degrés radiaux) sur la figure 8.11. On y a supposé  $s=1$  et  $\sigma_{\text{RON}}^2=1$ . On insiste donc sur le fait que les positions relatives de ces courbes ne veulent pas dire grand chose puisqu'il faudra les pondérer dans la pratique via le flux  $s$  et la variance du bruit de lecture  $\sigma_{\text{RON}}^2$ .

On observe tout d'abord que les deux courbes ont la même forme. Cela signifie que la matrice  $\mathbf{diag}(I_{\text{constant}})$  est très proche de l'identité. Ceci s'explique d'ailleurs analytiquement puisque on a pour l'ASO historique de Zernike :

$$I_{\text{constant}} \approx 0.29 (\mathbb{I}_P)^2 \quad (8.37)$$

On observe également que les bruits de lecture et de photon se propagent dans l'ensemble de façon uniforme sur toutes les fréquences spatiales. Ceci est typique des senseurs dit de "phase".

On donne également dans le tableau 8.2 la trace des matrices de covariance qui correspond à l'erreur de reconstruction totale lorsque le bruit est blanc dans l'espace des fréquences spatiales des phases. Celui-ci est d'abord donné sur l'ensemble des 989 Zernike considérés mais aussi normalisé par rapport à ce nombre de modes injectés ; on a alors accès au bruit moyen propagé selon chaque mode.

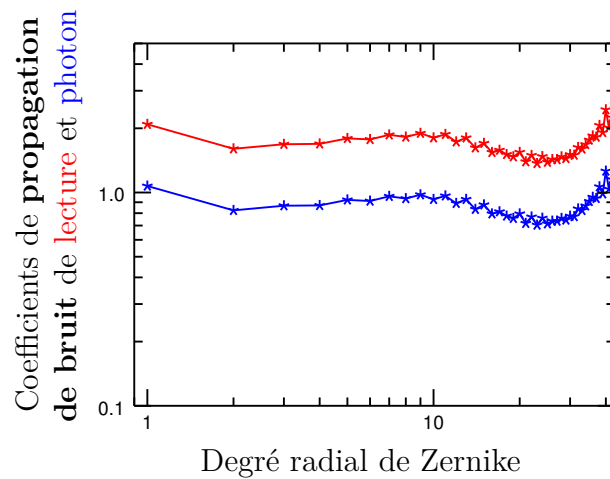


Figure 8.11 – Coefficients de propagation de bruit de **lecture** et **photon** vis-à-vis des fréquences spatiales exprimées en termes de degré radial de Zernike. La configuration optique considérée est celle de l'ASO historique de Zernike. Le flux est unitaire  $s=1$  et le détecteur à un  $\sigma_{RON}^2$  égal à 1.

Bruit	Lecture	Photon
Cumul sur les 989 modes	1713	882
Moyenne par mode	1.73	0.89

Table 8.2 – Bruit cumulé de reconstruction.

### 8.3.4 Robustesse vis-à-vis de la source

On aborde enfin le critère de robustesse vis-à-vis de l'extension de la source. On travaille pour cela sur une base de Zernike à 119 modes ce qui correspond à 14 degrés radiaux. La matrice d'interaction de référence est établie pour une source ponctuelle dans la configuration historique de l'ASO de Zernike. On appellera  $\mathbf{R}$  son reconstruteur construit comme sa pseudo-inverse.

Les sources étendues testées sont générées via l'étage de modulation. On les considère circulaires avec un rayon de plus en plus grand, celui-ci les caractérise donc et est exprimé en taille de diffraction  $\lambda/D$ . On teste des anneaux de rayons successifs égaux à 0, 0.5, 1 et  $2 f\lambda/D$ . La figure 8.12 donne les intensités **en plan focal** associées à ces différents cas. On y a apposé (image de gauche) la pastille de Zernike de diamètre  $1.06 f\lambda/D$ .

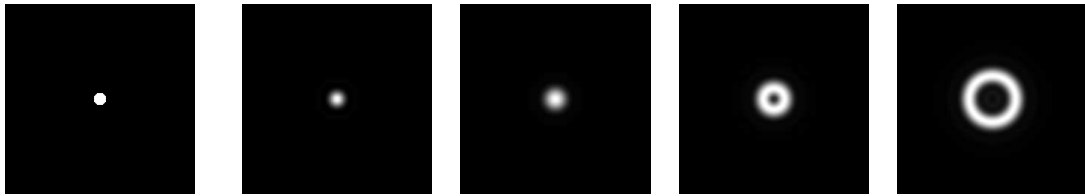


Figure 8.12 – Image de gauche : Pastille de Zernike de rayon  $0.53 f\lambda/D$ . Les quatre autres images correspondent à l'intensité en plan focal associées à des sources étendues. La première simule un objet ponctuel ; c'est la référence. Les suivants sont élargis via l'étage de modulation en tip/tilt pour former des anneaux de plus en plus large : 0.5, 1 et  $2 f\lambda/D$ .

On donne également avec la figure 8.13 la coupe dans la diagonale de ces intensités focales. La courbe rouge correspond à un objet ponctuel ; la bleue témoigne d'une modulation à  $0.5 f\lambda/D$ , la verte à  $1 f\lambda/D$  et l'orange à 2. Les deux traits verticaux noirs indiquent la taille de la pastille de Zernike de rayon  $0.53 f\lambda/D$ .

Afin de quantifier la robustesse de l'ASO de Zernike, on construit des matrices d'interaction  $\mathbf{B}_{mI}$  pour chacune des sources étendues évoquées plus haut. On leur appliquera le reconstruteur  $\mathbf{R}$  pour les comparer ensuite à la matrice identité :

$$\mathbf{RB}_{mI} - \mathbf{I} \quad (8.38)$$

On donne sur la figure 8.14 les matrices  $\mathbf{RB}_{mI}$  (en haut) ainsi que  $\mathbf{RB}_{mI} - \mathbf{I}$  (en bas) pour les quatre cas de sources : ponctuelle et élargie à 0.5, 1, et  $2 f\lambda/D$ . On quantifiera les matrices  $\mathbf{RB}_{mI} - \mathbf{I}$  via leur norme de Frobenius que l'on normalisera au regard du nombre de modes de phases utilisés pour établir les matrices

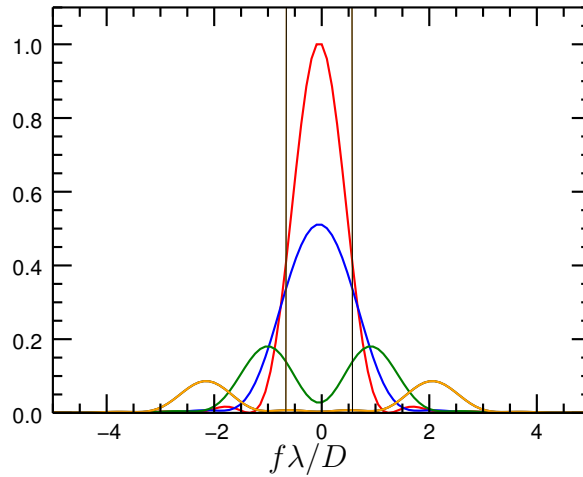


Figure 8.13 – Coupe dans la diagonale des intensités focales de la figure 8.12. Les rayons de modulation suivent le code couleur suivant : 0, 0.5, 1 et 2  $f\lambda/D$ . Les barres verticales indiquent la taille de la pastille de Zernike qui fait effectivement  $1.06f\lambda/D$  de diamètre.

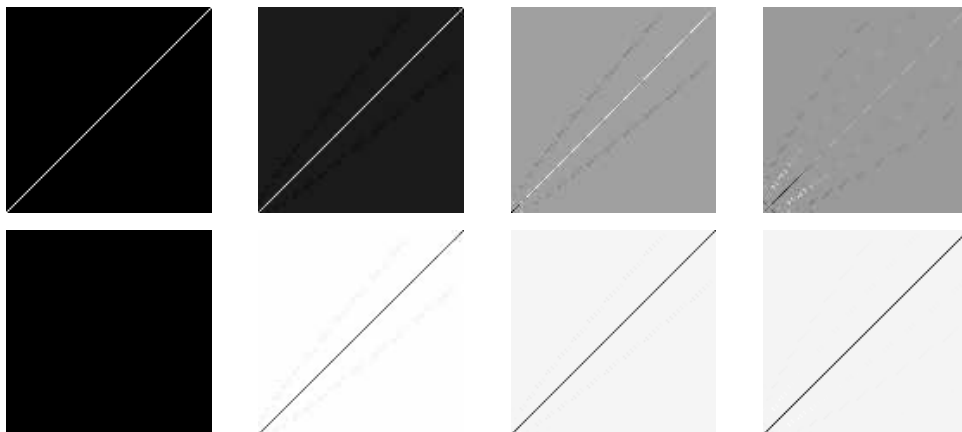


Figure 8.14 – Matrices  $\mathbf{RB}_{mI}$  (en haut) et  $\mathbf{RB}_{mI} - \mathbf{I}$  (en bas) pour les différentes sources évoquées précédemment. Elles sont générées de gauche à droite par des modulations de rayon 0, 0.5, 1 et 2  $f\lambda/D$ . La reconstruction est exacte (à gauche) lorsque le reconstructeur correspond à la matrice d'interaction.



d'interactions, c'est-à-dire 119.

$$\frac{\|\mathbf{RB}_{mI} - \mathbf{I}\|_F}{119} \quad (8.39)$$

Plus cette quantité sera grande, moins le reconstituer sera adapté à la source utilisée pour faire l'analyse de front d'onde. Le tableau 8.3 donnent ces normes.

Rayon Modulation ( $f\lambda/D$ )	0	0.5	1	2
$\frac{\ \mathbf{RB}_{mI} - \mathbf{I}\ _F}{b}$	0	0.21	0.89	1.01

Table 8.3 – Norme de Frobenius de la matrice estimant l'efficacité du reconstituer sur les matrices d'interaction établies pour des sources de plus en plus établies.

Ce tableau permet de visualiser que l'extension de la source a un effet délétère sur l'efficacité du reconstituer. L'ASO de Zernike est donc peu robuste à ce paramètre. Cela s'explique physiquement puisque dès lors que les objets "sortent" du support de la pastille de Zernike centrale, ils ne profitent plus des phénomènes d'interférences qui codent la phase en intensité. En d'autres termes, l'ASO restera efficace à condition que l'intensité en plan focal reste majoritairement dans la zone centrale. C'est ce qui apparaît d'ailleurs pour le cas où le rayon de modulation vaut  $0.5f\lambda/D$  : le reconstituer appliqué à la matrice d'interaction  $\mathbf{RB}_{mI}$  reste en structure proportionnel à l'identité et laisse espoir –moyennant une normalisation bien choisie– à une adaptation de celui-ci.

\*  
\*   \*

Les ASO de la classe de Zernike permettent une approche analytique assez poussée. Les paramètres de cette classe jouent un rôle tout à fait distinct puisque le piston différentiel  $\delta$  agit sur des gains scalaires et permet d'ajuster le niveau global de la sensibilité et de la dynamique. La meilleure sensibilité est obtenue pour le configuration historique  $\delta = \lambda/4$  et s'annule dans la configuration coronographique, rendant le Roddier&Roddier inapte à l'analyse de front d'onde. La dynamique décroît avec le piston différentiel aussi on aura soin afin de maximiser le compromis sensibilité/dynamique de choisir des pistons inférieurs à  $\lambda/4$ .

Le paramètre  $r$ , rayon de la pastille de Zernike joue quant-à-lui sur la structure spatiale de l'intensité. Plus le rayon est faible, plus l'intensité correspond en terme de forme à la phase incidente. La sensibilité néanmoins en pâtit. De grands rayons  $r$  procurent un codage plus marqué mais ont tendance à fournir des intensités n'ayant plus la même forme que la phase

incidente. Le cas d'équipartition d'énergie  $r/f\lambda=0.53/D$  est un bon compromis puisqu'on peut quasiment affirmer que l'intensité linéaire correspond à la phase incidente.

Les ASO de Zernike sont par essence chromatiques de par le fait que les deux paramètres de leur classe introduisent des échelles spatiales. On note juste que le piston différentiel est bien moins néfaste que le rayon  $r$  puisqu'il ne joue pas sur la forme de la réponse linéaire mais seulement sur son niveau global. Aussi on pourra considérer qu'un ASO de Zernike est quasiment achromatique si les longueurs de la source vérifient toutes l'inégalité  $r/f\lambda\leq 0.53/D$ . On se souvient en effet que dans de telles conditions, la sortie varie peu en terme de forme et est quasi proportionnelle à la phase.

Les ASO de Zernike ont ensuite l'avantage de ne contenir de l'information sur la phase que dans l'image géométrique de la pupille d'entrée. Ceci permet d'envisager un ratio méta-pixel par mode de phase unitaire et donc idéal.

On insiste enfin sur un point important. La classe de Zernike contient à la fois un excellent analyseur de front d'onde via la configuration historique de Zernike et un coronographe très efficace en la configuration Roddier&Roddier. On remarquera que c'est en jouant sur le piston différentiel qu'on a pu les unifier. L'annexe C reprend cette idée en transformant le coronographe vortex en un ASO inédit.

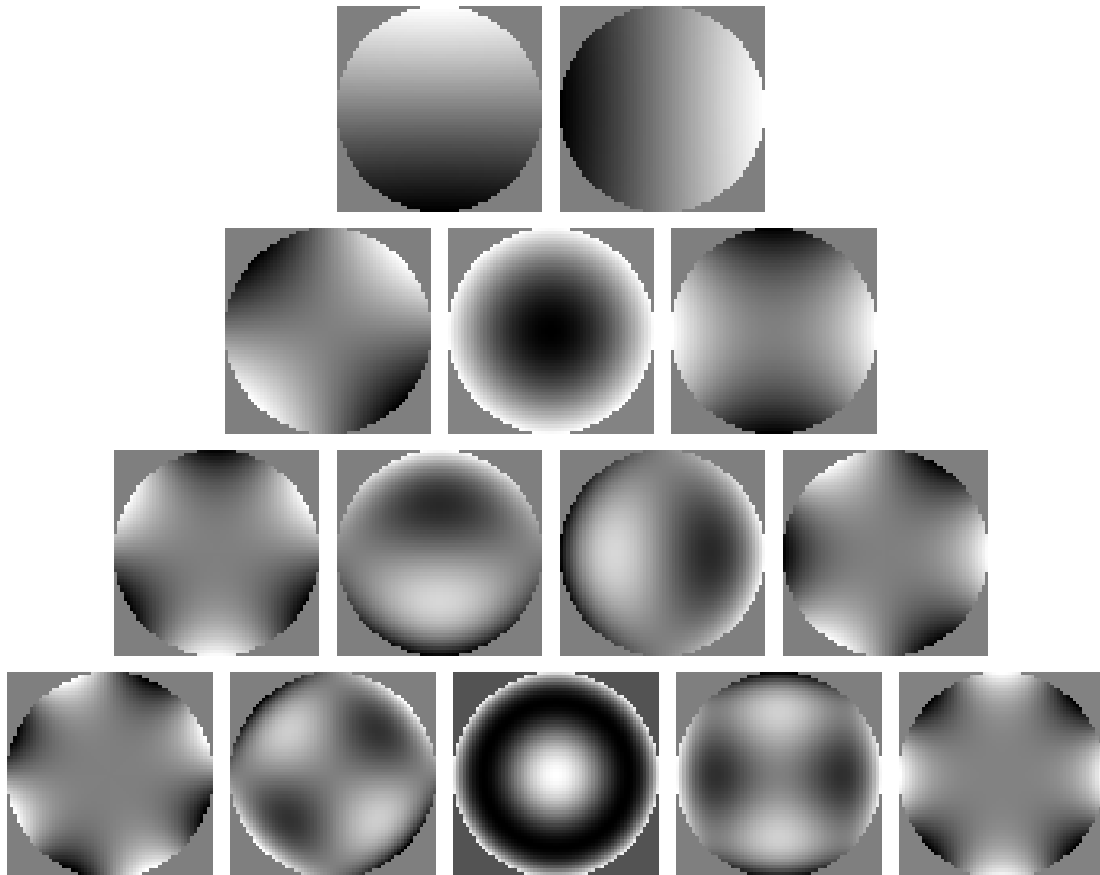


Figure 8.15 – Intensités linéaires normalisées par rapport au gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $2r/f\lambda=1/2 \times 1.06/D$ . On rappelle que ces structures spatiales sont valables quelque soit la valeur de  $\delta$ .

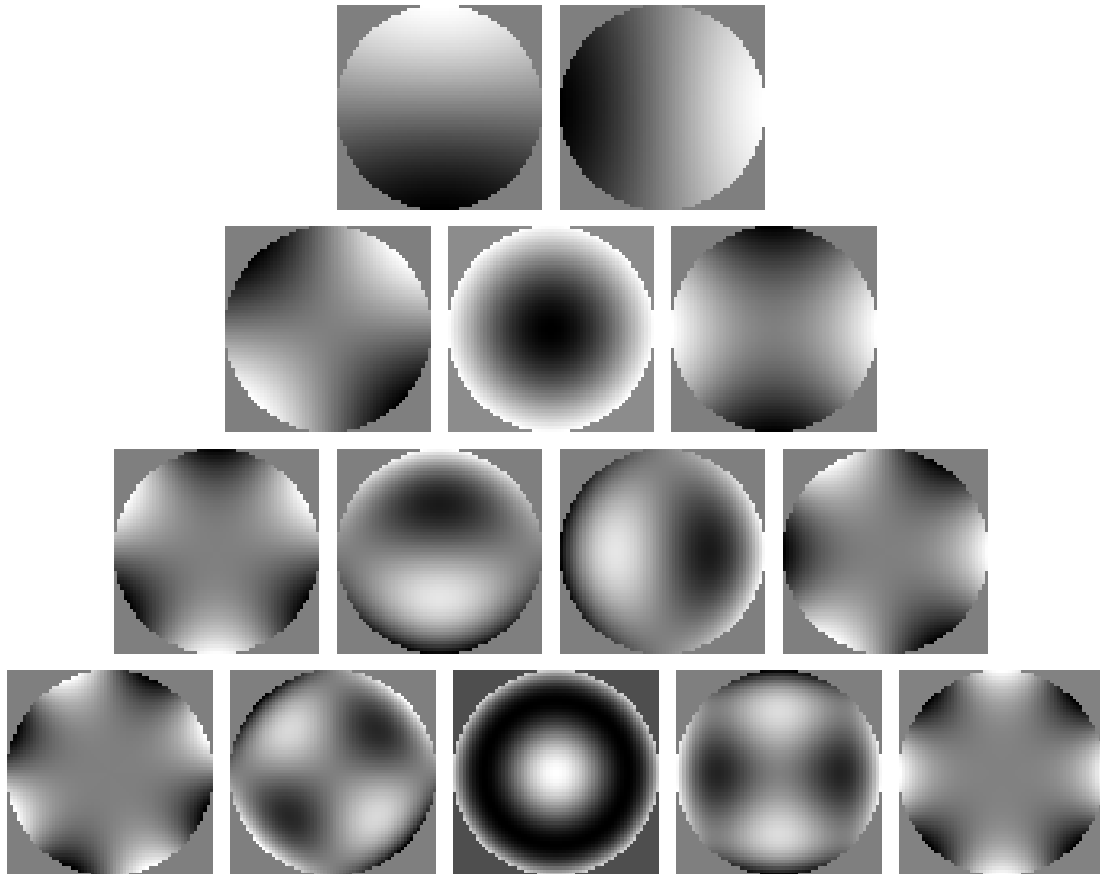


Figure 8.16 – Intensités linéaires normalisées par rapport au gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $r$  assure l'**équipartition de l'énergie**, à savoir :  $2r/f\lambda=1.06/D$ .

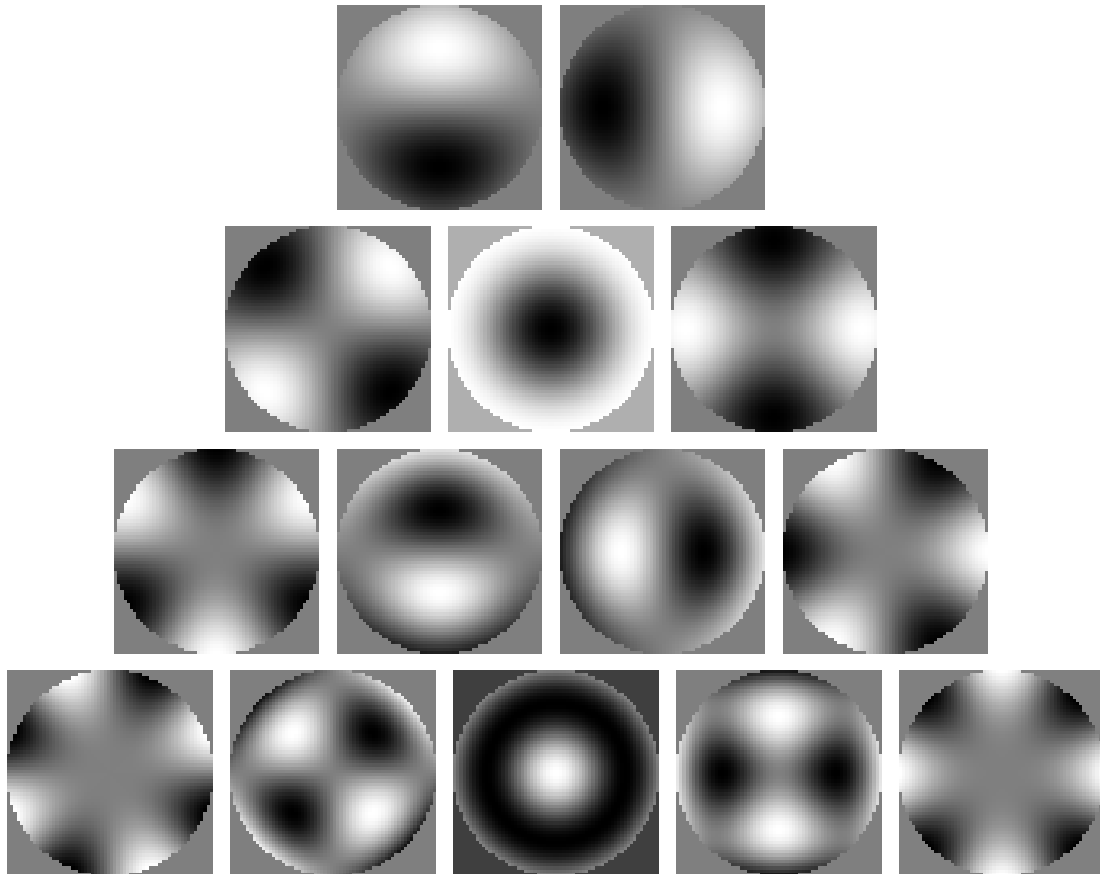


Figure 8.17 – Intensités linéaires normalisées par rapport au gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $2r/f\lambda=2\times 1.06/D$ .

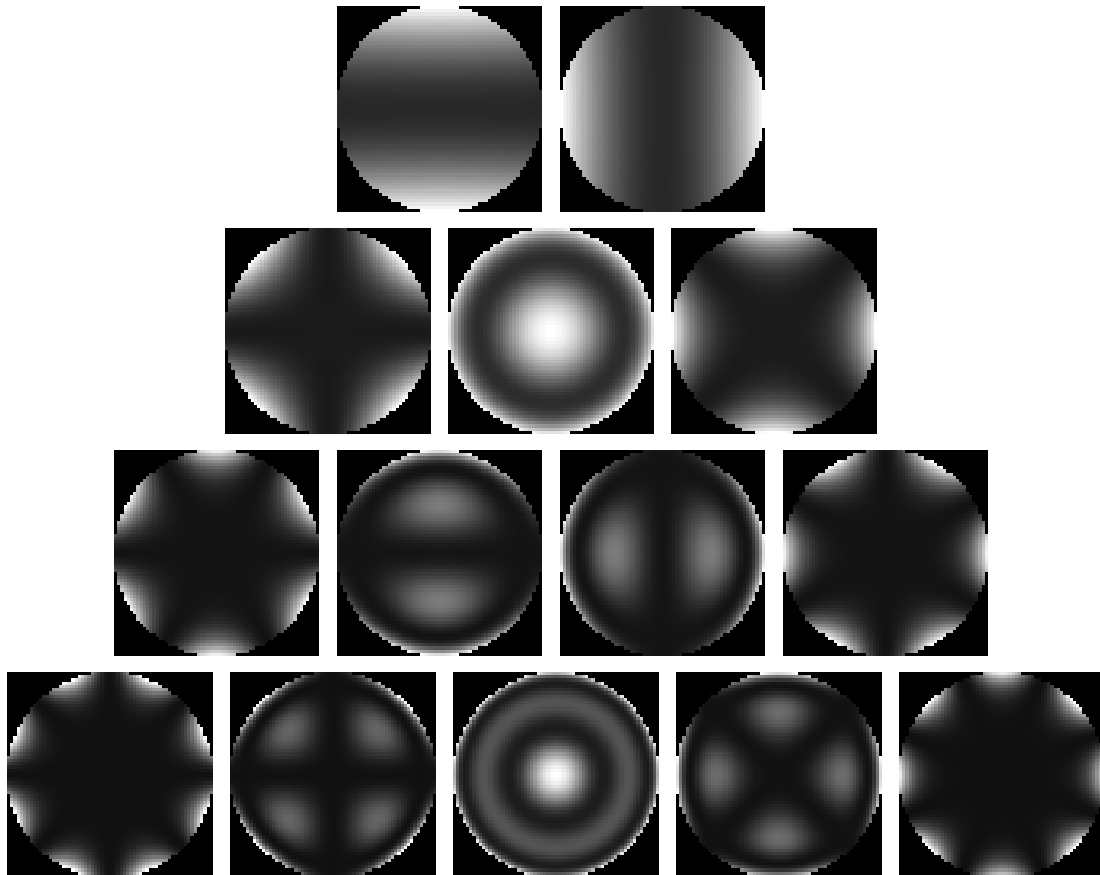


Figure 8.18 – Intensités quadratiques normalisées vis-à-vis du gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $2r/f\lambda=1/2 \times 1.06/D$ . On rappelle que ces structures spatiales sont valables quelque soit la valeur de  $\delta$ .

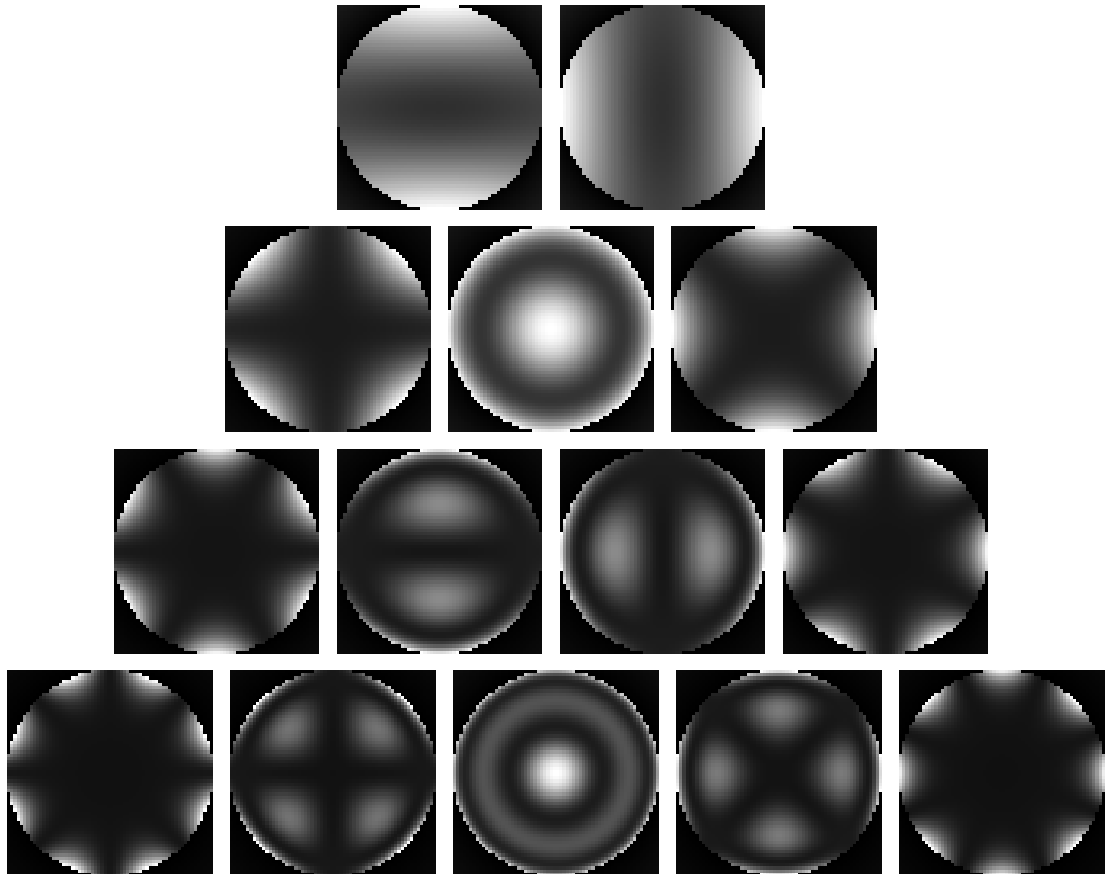


Figure 8.19 – Intensités quadratiques normalisées pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $r$  assure l'**équipartition de l'énergie** :  $2r/f\lambda=1.06/D$ .

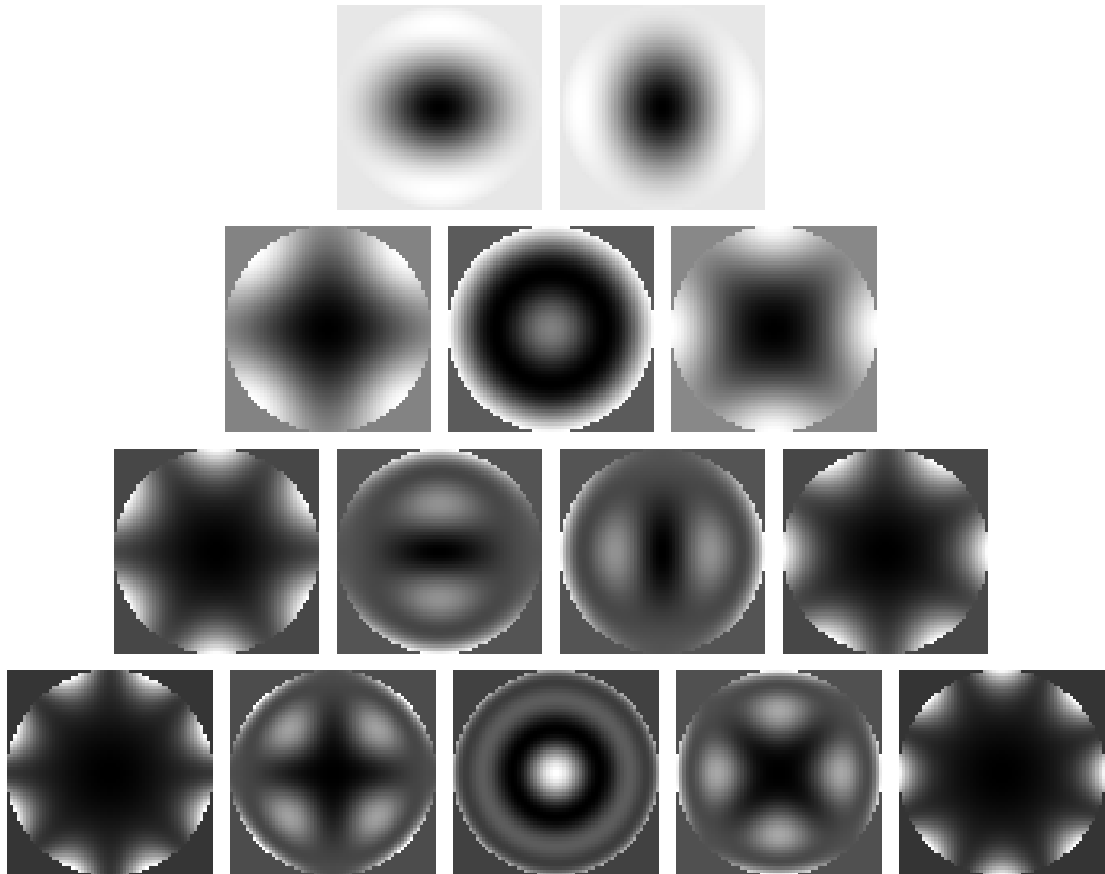


Figure 8.20 – Intensités quadratiques normalisées vis-à-vis du gain scalaire pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike.  $2r/f\lambda=2\times 1.06/D$ .



## 9 La classe des ASO Pyramide

Ce chapitre est consacré à l'analyseur Pyramide (trop) rapidement présenté dans le chapitre 7. L'article fondateur [Ragazzoni, 1996] l'introduit comme une variante du couteau de Foucault qui ne nécessite qu'un seul masque complètement transparent. C'est donc un design à la fois épuré –il ne nécessite pas de divisions du faisceau– et optimisé pour l'analyse de front d'onde à faible flux –le masque est de pure phase. Il est donc un candidat fort prometteur pour l'optique adaptative pour l'astronomie.

Dans l'article de 1996, l'auteur présente une méthode pour améliorer la dynamique de ce senseur. Elle consiste à élargir artificiellement la tâche focale arrivant au niveau du masque pyramidal en le faisant osciller dans son plan suivant des trajectoires circulaires ou carrées. Or, formellement une translation du masque focal dans son plan revient à l'introduction d'une aberration tip/tilt dans le plan pupille précédent. Cette solution est d'ailleurs proposée dans [Esposito and Riccardi, 2001] puisque bien plus pratique à réaliser d'un point de vue technique (figure 9.1). Elle y est nommée *modulation tip/tilt*. C'est la raison pour laquelle cet étage optique supplémentaire a été présenté conjointement au filtrage de Fourier dans le chapitre 3.

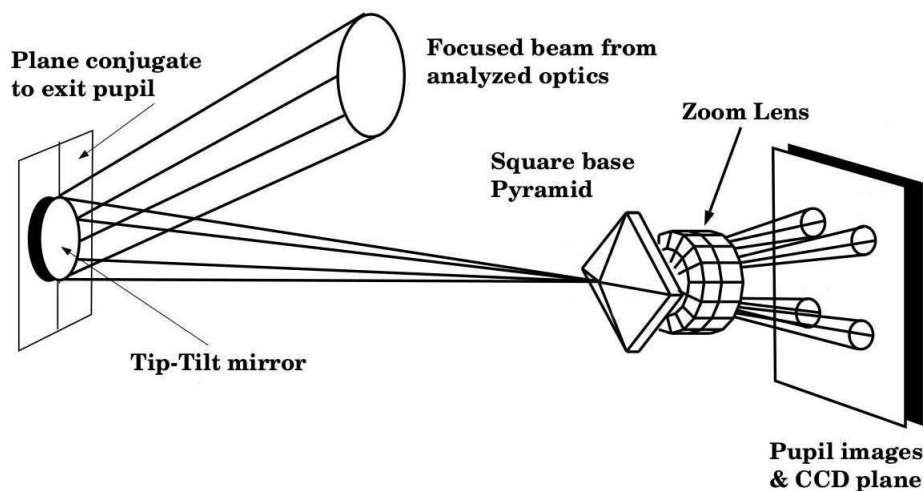


Figure 9.1 – Analyseur Pyramide couplé à un étage de modulation tip/tilt. Crédits. Esposito.

Les diverses études théoriques menées dans les années qui suivent 1996 montrent que la Pyramide non modulée est bien plus sensible que le Shack-Hartmann, ASO alors le plus utilisé en Optique adaptative. La reconstruction s'en trouve nettement améliorée. Néanmoins la gamme de linéarité du senseur Pyramide sans modulation est bien moindre que le Shack-Hartmann, rendant son utilisation difficile pour une turbulence forte. Heureusement, l'étage de modulation permet de solutionner ce problème en ajustant la fonction de poids pour que la dynamique du senseur soit en accord avec les conditions d'analyse. On peut dire que l'ASO "Pyramide modulée" est adaptatif : ses paramètres de modulation sont réglés pour satisfaire au contexte d'analyse de front d'onde.

Cette flexibilité est absolument inédite dans le monde des analyseurs de surface d'onde à filtrage de Fourier<sup>a</sup>. Elle a inspiré la prise de liberté vis-à-vis du design des ASO rencontrée dans le chapitre précédent avec la classe de Zernike et que l'on renouvelle dans celui-ci dédié à la Pyramide. Il faut d'ailleurs préciser que de nombreux concepts connexes à ce senseur ont été proposés. Outre l'ASO *rooftop* présenté dans le chapitre 7, de nombreuses autres pyramides ont été suggérées. Les articles [Akondi et al., 2013], [Akondi et al., 2014], [Clare and Lane, 2003] et [Clare and Lane, 2005] évoquent des pyramides avec un nombre de faces différent de 4. Le cas limite du masque conique – l'*axicon* – est présenté dans [Vohnsen et al., 2011]. On a proposé dans l'article [Fauvarque et al., 2015] d'utiliser des pyramides à faibles angles. Enfin, la Pyramide a été testée pour l'OA sur source de référence étendue pour l'astronomie dans [Pinnala et al., 2011] et pour l'ophtalmologie dans [Iglesias et al., 2002].

Ce chapitre est l'occasion d'unifier tous ces concepts sous un même formalisme en introduisant la "classe des ASO Pyramide". Ses degrés de liberté sont le nombre de faces du masque, l'angle de son sommet ainsi que la fonction de poids de la modulation tip/tilt. Ce chapitre a pour vocation d'identifier le rôle joué par chacun de ces paramètres sur les critères de performances. On se borne dans ce chapitre à une étude basée sur les simulations numériques. Le prochain chapitre abordera le cas particulier de la pyramide 4 faces de façon analytique.

Notons que la Pyramide modulée fonctionne depuis quelques années avec brio sur le ciel dans de nombreux observatoires professionnels : au *Large Binocular Telescope*, [Esposito et al., 2003] et [Esposito et al., 2012] ; au télescope Subaru [Jovanovic et al., 2014] ou au télescope Magellan [Close et al., 2012]. C'est ce qui justifie l'étude menée ici puisque la qualité de correction atteinte pour ces télescopes est telle que la Pyramide modulée est le candidat le plus sérieux pour le futur système d'OA de l'*E-ELT*.

---

a. L'analyseur de courbure [Roddi, 1988] –qui n'est pas basé sur le filtrage de Fourier– est un ASO qui présente également une grande flexibilité.

## 9.1 La Classe Pyramide

On commence par présenter la classe des ASO Pyramide en décrivant ses degrés de liberté. Ceux-ci concernent le masque de filtrage : **nombre de face**, angle **angle du sommet** ainsi que la fonction de poids seul paramètre de la modulation tip/tilt.

### 9.1.1 Masques considérés

**Nombre de faces** Le plan focal, on le rappelle, correspond à un plan de Fourier. Le nombre de faces des ASO Pyramide paramètre le découpage des fréquences spatiales de la phase. Dans le cas de la classe Pyramide, on ne considère que des pavages du plan de Fourier qui sont centrés sur le point focal et qui assurent une équipartition de l'énergie. Par ailleurs, puisque l'on veut décrire sans ambiguïté le plan focal de Fourier, nous avons besoin d'au moins deux vecteurs non colinéaires de ce plan, ce qui est équivalent à trois points non alignés. Subséquentement, le pavage minimal de la classe Pyramide correspond à une pyramide à **3 faces**. La figure 9.2 montre la forme optique de pyramides à 3, 4 et 6 faces ainsi qu'un cône, configuration limite correspondant à une infinité du nombre de faces. Notons, que ce dernier design à l'avantage de ne privilégier aucun axe particulier.

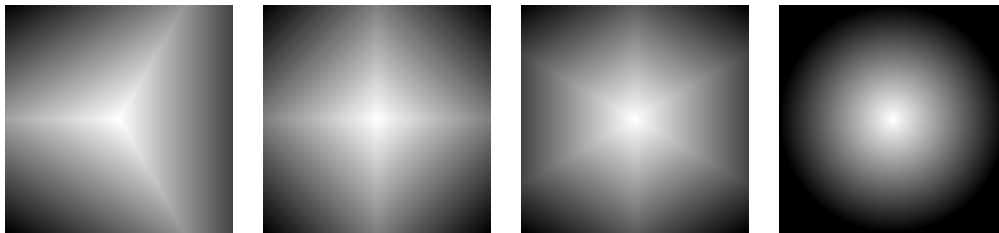


Figure 9.2 – Forme optique de masques pyramidaux. De gauche à droite, le nombre de faces vaut : 3, 4, 6 et  $\infty$ . La pyramide à 4 faces correspond à la configuration historique. Le dernier masque conique est appelé *axicon*.

**Angle de la pyramide** Le nombre de faces permet de comprendre comment les fréquences spatiales sont sélectionnées, l'angle au sommet de la pyramide est le paramètre qui permet comprendre comment ces fréquences sont éloignées les uns par rapport aux autres. On remarque en effet que la pente de chacune des faces (qui correspond à un tip/tilt local) va régler la place du détecteur où sera situé l'image de la pupille sur le détecteur. Ce principe est illustré sur le schéma 9.3.

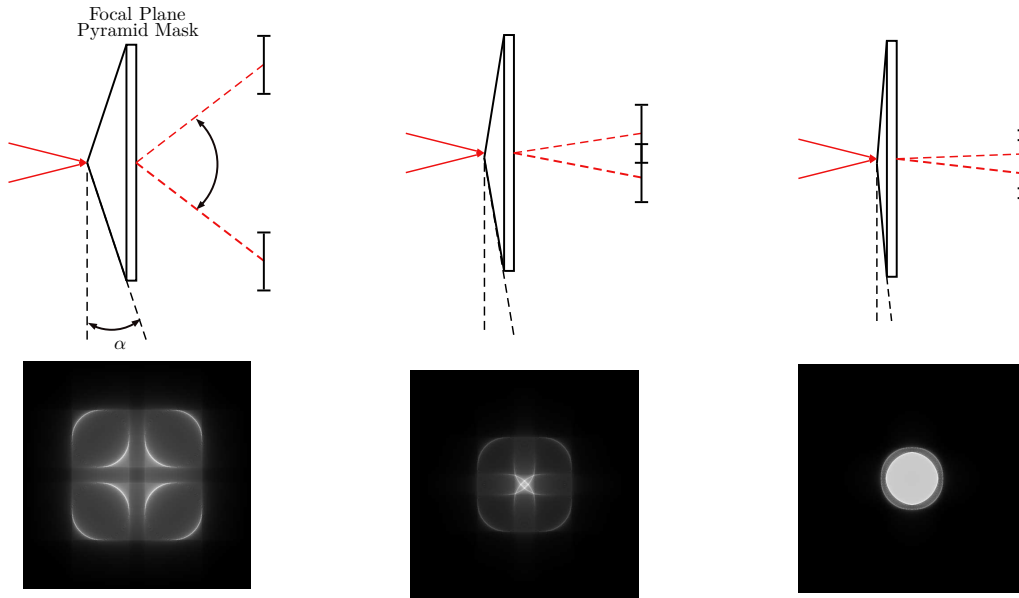


Figure 9.3 – Filtrage optique par un objet pyramidal lorsque l'angle de son sommet diminue. En bas : intensités constantes correspondantes sur le détecteur dans le cas d'une pyramide à 4 faces non modulée.

Si l'angle au sommet est suffisamment grand <sup>b</sup>, les fréquences spatiales filtrées par le pavage sont complètement séparées. On parlera alors de "**pyramides classiques**" en référence au fait qu'elles furent historiquement désignées de la sorte.

Si l'angle est petit, les images de la pupille vont se superposer et résulter d'interférences entre les fréquences spatiales des champs associés à chaque  $\Omega_{i/n}$ . Ces masques seront qualifiés de "**pyramides aplaties**" <sup>c</sup>.

**Paramètres de pavage.** Les masques de la Classe Pyramide étant décrits sans ambiguïté, on en donne immédiatement les paramètres de pavages. Lorsque le nombre de faces est fini et égal à  $n$ , le plan de Fourier est découpé en  $n$  éléments notés  $\Omega_{i/n}$ , centrés sur le point focal et de surfaces égales. On donne trois exemples avec le schéma 9.4.

Les paramètres de pavages associés aux masques pyramides, notés  $m_{\Delta_n}$  sont alors :

$$m_{\Delta_n} : \left\{ \Omega_{i/n}, 1, 0, \alpha \cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right), \alpha \sin\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \right\}_{i=1..n} \quad (9.1)$$

On note que ces masques sont transparents, qu'ils n'utilisent pas de piston différentiels et que les tip/tilt locaux assurent que l'éjection est faite perpendiculairement aux faces de la pyramide. Le paramètre  $\alpha$ , angle du sommet de la

b.  $1 \leq 2\alpha/D \leq \infty$  pour la pyramide à 4 faces

c.  $0 < 2\alpha/D < 1$  pour la pyramide à 4 faces

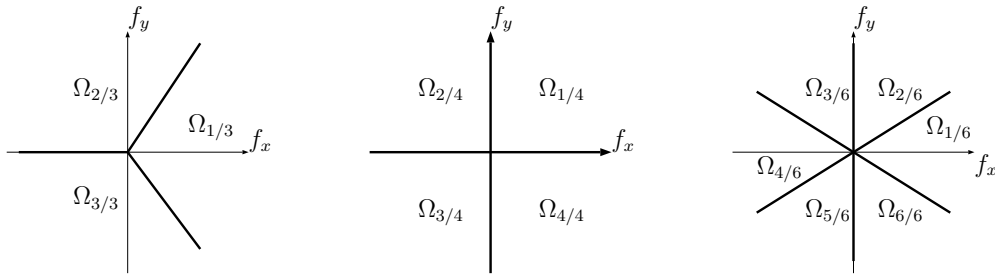


Figure 9.4 – Différents types de pavage du plan de Fourier pour la classe Pyramide : 3, 4 et 6 faces.

pyramide, code la distance de cette éjection sur le détecteur. On profite pour donner la fonction de transparence dans deux cas particulier : la pyramide classique à 4 faces et le cône ou *axicon* qui n'est descriptible dans le formalisme des pavages que comme le cas asymptotique d'un nombre infini de faces :

$$m_{\Delta_4}(x,y)=\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\alpha(|x|+|y|)\right) \quad m_{\Delta_\infty}(x,y)=\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\alpha\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad (9.2)$$

### 9.1.2 Modulation tip/tilt

Nous évoquons le dernier degré de liberté de la Classe Pyramide en le paramètre de la modulation tip/tilt qu'est la fonction de poids  $w$ . Si nous avons déjà imposé qu'elle devait vérifier les propriétés suivantes :

$$w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^2} w(a_1,a_2) da_1 da_2 = 1 \quad (9.3)$$

$$(a_1,a_2) \mapsto w(a_1,a_2)$$

On contraint aussi sa nature afin qu'elle assure une équipartition de l'énergie entre toutes les images de la pupille. En d'autres termes, elle doit avoir les mêmes symétries que le masque pyramidal. Quelques exemples de modulation pour le masque pyramide à 4 faces sont données sur la figure 9.5.

Les fonctions de poids à symétrie circulaires sont à privilégier de par le fait qu'elles sont compatibles avec tous les masques de la classe Pyramide. On en donne trois exemples, à savoir la modulation circulaire, en disque et gaussienne. **Modulation circulaire** : Le dispositif de modulation fait tourner la tache focal autour du centre du plan focal. Cette modulation a pour paramètre le rayon  $r_m/f$  du cercle ainsi généré.

$$w_o(a_1,a_2)=\frac{1}{2\pi r_m/f}\delta\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}-r_m/f\right) \quad (9.4)$$

**Modulation en disque** : Le dispositif fait passer la FEP par tous les points à

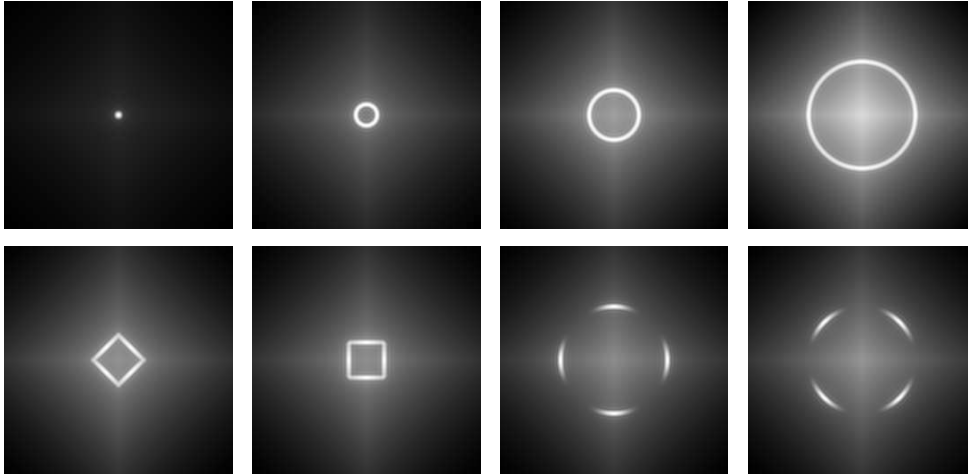


Figure 9.5 – Exemples de modulation tip/tilt. Les quatre chemins de modulation en haut correspondent à une modulation **circulaire** avec un rayon de modulation croissant de gauche à droite. Ils sont compatibles avec tous les masques de la classe Pyramide. Les quatre chemins du bas ne sont adaptés qu’au masque 4 faces.

l’intérieur d’un disque de rayon  $r_m/f$ .

$$w_{\bullet}(a_1, a_2) = \frac{1}{\pi r_m / f^2} \Theta(r_m / f - \sqrt{a_1^2 + a_2^2}) \quad (9.5)$$

On peut s’interroger quant au caractère *a priori* irréaliste de cette modulation puisque d’un point de vue technique il faut théoriquement un temps infini pour remplir le disque ; néanmoins on envisage tout de même ce cas comme modèle théorique d’une modulation effective suffisamment *dense* à l’intérieur du disque.

**Modulation en gaussienne** : Le dispositif fait suivre à la FEP un profil gaussien d’écart type  $\sigma$ .

$$w_g(a_1, a_2) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a_1^2 + a_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9.6)$$

### 9.1.3 Réponses impulsionnelles, opérateurs de Filtrage

On continue la description de la classe Pyramide en donnant les réponses impulsionnelles ainsi que les opérateurs, (équation (3.23)) associés aux masques décrits via les paramètres de pavages (9.1). Notons qu’on se borne dans ce chapitre à une étude purement basée sur la simulation numérique ; le chapitre 10 sera dédié au seul cas résoluble analytiquement à savoir la Pyramide à 4 faces non modulée.

$$\delta_{m_{\Delta n}}^{\psi}(x_d, y_d) = \sum_{i=1}^n \delta_{\Omega_{i/n}}^{\psi}(x_d - \alpha f \cos(2\pi i/n), y_d - \alpha f \sin(2\pi i/n)) \quad (9.7)$$

$$\mathcal{W}_{m_{\Delta n}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{\alpha f \cos(2\pi i/n), \alpha f \sin(2\pi i/n)} \circ \mathcal{W}_{\Omega_{i/n}} \quad (9.8)$$

On donne sur la figure 9.6 le module et l'argument de la réponse impulsionnelle pour des masques pyramides à différents nombre de face. On observe qu'à chaque face est associé un point significativement brillant. De par le fait que le champ incident est convolué avec la réponse impulsionnelle, il y a autant d'images de la pupille qu'il y a de points brillants. Ils en seront le centre. On observe également des structures élégantes en reliant chacun des points brillants. Celles-ci sont dues à la diffraction par les arêtes des masques pyramidaux. On remarque en effet qu'elles disparaissent dans le cas où le masque est un cône. L'argument de la réponse impulsionnelle est difficile à interpréter et c'est pourtant lui qui est majoritairement responsable du filtrage de Fourier.

On donne sur la figure 9.7 le module et l'argument de la réponse impulsionnelle pour la pyramide à 4 faces lorsque l'angle au sommet varie. On observe que les quatre points brillants se rapprochent à mesure que  $\alpha$  diminue. Pour un angle nul, ils seraient complètement confondus. De par la convolution entre la réponse impulsionnelle et le champ incident, on comprend que le paramètre  $\alpha$  va régler l'écartement en les images de la pupille. Il peut même, le cas échéant, ne plus les séparer mais les superposer, on est alors dans le cas des Pyramides aplaties.

### 9.1.4 Intensité constante.

On applique désormais ces résultats afin d'obtenir l'intensité constante associée aux ASO de la Classe Pyramide. On rappelle leur expression dans le cas le plus général, c'est-à-dire avec modulation (9.9), ainsi que sans modulation (9.10) :

$$I_{\text{constante}} = \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P] \quad \text{avec modulation} \quad (9.9)$$

$$I_{\text{constante}} = |\mathcal{W}_m[\mathbb{I}_P]|^2 \quad \text{sans modulation} \quad (9.10)$$

On remarque que la phase de référence a été considérée comme nulle. Cela sera le cas pour la suite de l'étude. On donne sur la figure 9.8, l'intensité constante pour un pyramide à 4 faces, sans modulation lorsque l'angle de son sommet varie. Si l'on note  $D$  le diamètre de la pupille, l'angle minimal limite pour qu'il n'y ait pas de superposition des images de la pupille vérifie  $2f\alpha = D$ . De ces quatre images on remarque que la diffraction par les arêtes éjecte de la lumière hors des images de la pupille, ceci étant particulièrement marqué **entre** les images. Cela explique d'ailleurs pourquoi la configuration à faible angle est celle qui condense

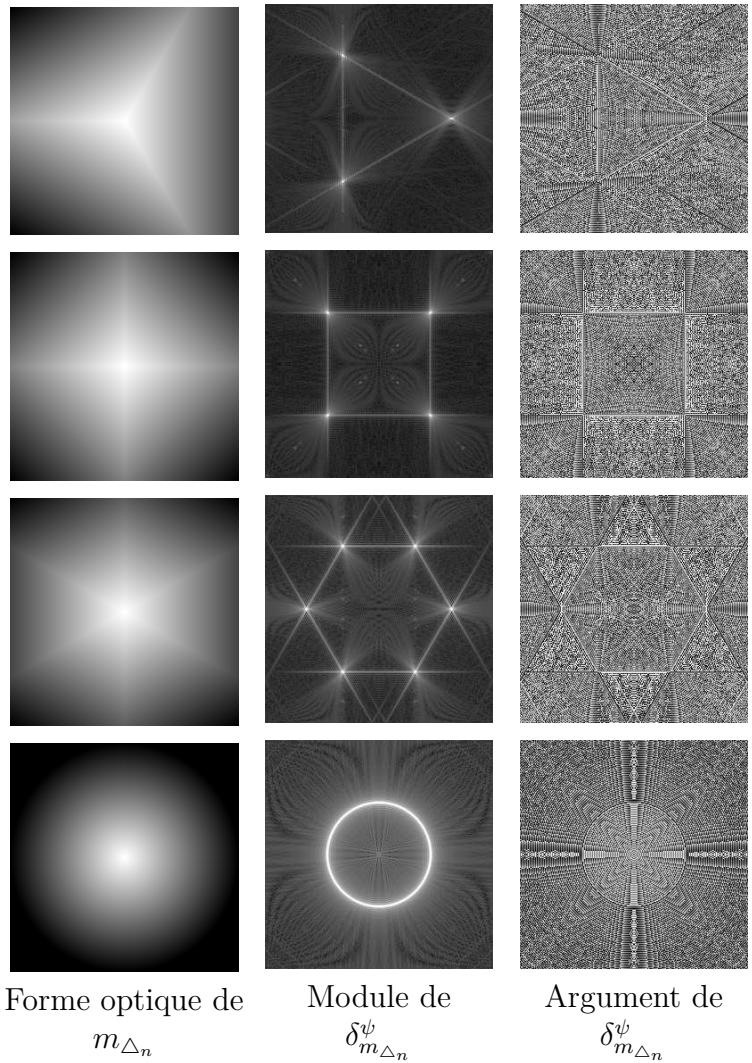


Figure 9.6 – De gauche à droite : Forme optique des masques pyramidaux pour  $n=3, 4, 6$  et  $\infty$ . Module et argument des réponses impulsionnelles associées.



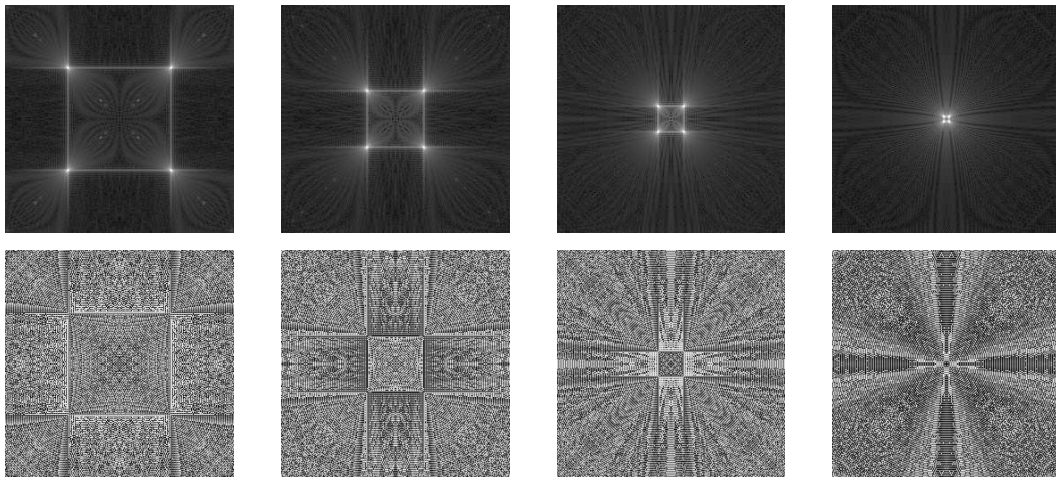


Figure 9.7 – Module des réponses impulsionnelles de la pyramide à 4 faces pour des angles de plus en plus petits.

le maximum d'énergie dans les images de la pupille.

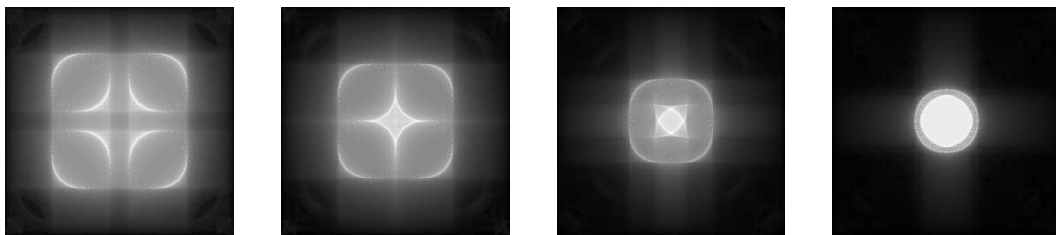


Figure 9.8 – Intensités constantes pour la pyramide à 4 faces sans modulation avec un angle vérifiant de gauche à droite  $2f\alpha/D=1.5, 1, 0.5$  et  $0.1$

On fait varier sur la figure 9.9 le nombre de faces. L'angle au sommet vérifie  $2f\alpha=1.5D$  et la modulation est inactive. On observe que cet angle est insuffisant pour séparer les images de la pupille d'entrée dans la configuration 6 faces.

On évoque enfin l'intensité constante lorsque la modulation fonctionne (figure 9.10). On suppose que la pyramide est à 4 faces et que l'angle permet une séparation totale des images de la pupille. La modulation est circulaire et paramétrée par  $r_m/f$  son rayon de modulation. Il sera quantifié en tâche de diffraction  $f\lambda/D$ . On observe que plus  $r_m/f$  est grand, plus les effets de diffractions sont faibles : la modulation permet de remettre l'énergie lumineuse dans les images de la pupille. Seul 43% du flux est à l'intérieur des images de la pupille sans modulation. Ce taux monte à 88% pour  $r_m/f=3f\lambda/D$ . D'autre part, on voit également qu'à mesure que le rayon augmente, l'intensité au sein des images de la pupille s'uniformise de plus en plus ; ceci tient au fait qu'à l'augmentation du rayon  $r_m/f$  est associée une augmentation du ratio du *temps passé sur les faces vs. temps passé sur les arêtes*.

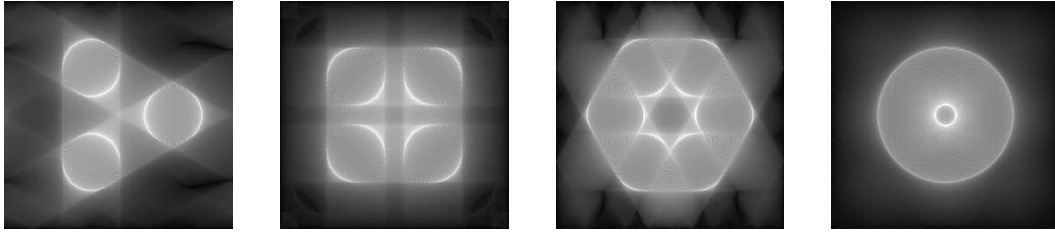


Figure 9.9 – Intensités constantes pour les pyramides à 3, 4, 6 faces et le cône sans modulation avec un angle au sommet vérifiant  $2f\alpha/D=1.5$

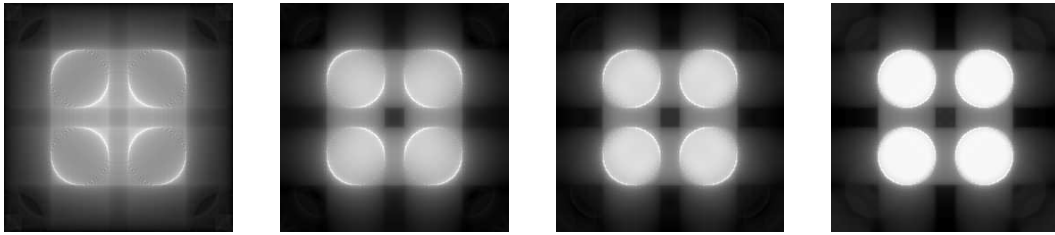


Figure 9.10 – Intensités constantes pour la pyramide à 4 faces avec un angle séparant les images lorsque le rayon de modulation circulaire  $r_m/f$  vaut de gauche à droite : 0, 1, 2 et  $5f\lambda/D$ .

## 9.2 Critères de performances

Les degrés de liberté de la classe Pyramide étant désormais connus, on étudie l'effet de leurs variations sur les performances des ASO.

### 9.2.1 Intensités linéaire et quadratique

Nombre de critères de performance étant basés sur les intensités linéaires et quadratiques, on rappelle ici leurs expressions.

**Intensité linéaire.** L'intensité linéaire  $q=1$  constitue la pierre angulaire de l'analyse de front d'onde puisqu'elle permet la construction des matrices d'interactions. Elle a pour expression :

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im\left[\mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P\phi]\right] \quad \text{avec modulation} \quad (9.11)$$

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im\left[\mathcal{W}_m[\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_m[\mathbb{I}_P\phi]}\right] \quad \text{sans modulation} \quad (9.12)$$

On note que la phase de référence est supposée nulle dans les deux cas.

**Intensité quadratique.** L'intensité quadratique  $q=2$  correspond à la première dépendance non-linéaire de la méta-intensité avec la phase. Son expression est :

$$I_{\text{quadratique}}(\phi) = \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P\phi, \mathbb{I}_P\phi] - \Re[\mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P\phi^2]] \quad \text{avec modulation} \quad (9.13)$$

$$I_{\text{quadratique}}(\phi) = |\mathcal{W}_m[\mathbb{I}_P\phi]|^2 - \Re[\mathcal{W}_m[\mathbb{I}_P]\overline{\mathcal{W}_m[\mathbb{I}_P\phi^2]}] \quad \text{sans modulation} \quad (9.14)$$

On donne dans la section 9.4 la **structure spatiale** des intensités linéaire et quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike pour de nombreux jeux de paramètres  $(n, \alpha, r_m/f)$ . Le tableau 9.1 donne la correspondance entre ceux-ci et les figures où sont tracées les  $I_{\text{linéaire}}$  et  $I_{\text{quadratique}}$  associées.

$n$	$\frac{2f\alpha}{D}$	$r_m/f/f$ en $\lambda/D$	$I_{\text{linéaire}}$	$I_{\text{quadratique}}$
4	1.5	0	Fig. 9.27	Fig. 9.28
3	1.5	0	Fig. 9.29	Fig. 9.30
$\infty$	1.5	0	Fig. 9.31	Fig. 9.31
4	1.5	1	Fig. 9.33	Fig. 9.34
4	1.5	2	Fig. 9.35	Fig. 9.36
4	1.5	5	Fig. 9.37	Fig. 9.38
4	0.05	0	Fig. 9.39	Fig. 9.40
4	0.15	0	Fig. 9.41	Fig. 9.42

Table 9.1 – Correspondance **jeux de paramètres** et **figures** des cartes d'intensités linéaires et quadratiques.

## 9.2.2 Sensibilité et Dynamique

On peut maintenant étudier l'évolution de la sensibilité et la dynamique avec les paramètres de la classe des ASO Pyramide. On scinde l'étude en trois chacune étant dédiée à un paramètre. On donnera la sensibilité et la dynamique **mode-à-mode** pour les 14 premiers polynômes de Zernike ainsi que la sensibilité, la dynamique et le facteur SD **fréquentiels** pour les 44 premiers degrés radiaux des mêmes polynômes. Le tableau 9.2 indique la correspondance entre ces graphes et les paramètres étudiés.

Paramètre étudié	Étude mode-à-mode	Étude fréquentielle
Nombre de faces $n$	Fig. 9.11	Fig.9.12
Rayon de modulation $r_m/f$	Fig.9.13	Fig.9.14
Angle $\alpha$	Fig. 9.15	Fig.9.16

Table 9.2 – Correspondance **paramètre étudié** et **figures** lors de l'étude des sensibilités et dynamiques mode-à-mode et fréquentielle.

**Influence du nombre de faces.** Les paramètres de classe testés sont :

$$n=3,4,\infty \quad 2f\alpha/D=1.5 \quad r_m/f=0 \quad (9.15)$$

Les **structures** sont assez difficiles à analyser car les réponses linéaires comme quadratiques sont assez éloignées des polynômes de Zernike injectés. On note cependant que la pyramide à 4 faces et le cône respectent les symétries des polynômes de Zernike. Cela n'est pas surprenant pour le cône puisqu'il ne privilégie aucune direction d'analyse mais s'avère fortuit pour la 4 faces. Ses arêtes sont en effet alignées dans la même direction que les polynômes de Zernike. Pour la pyramide à 3 faces, le tip et le tilt ne sont pas codés de la même façon. L'orientation de la pyramide a donc un effet sur l'analyse de front d'onde. On généralisera cette observation aux autres nombres de faces : pour un codage optimal il faut respecter une symétrie entre la pyramide et la géométrie de la base des phases. Ceci dit, ces effets se gomment lors de la reconstruction de la phase.

**En termes de niveau global, on peut dire que la sensibilité et la dynamique tant –mode-à-mode qu'en fréquences– ne varient que très peu avec le nombre de faces.  $n$  n'est pas donc pas un paramètre important en ce qui concerne ces critères de performance.**

On a superposé aux comportements fréquentiels des ASO Pyramide (figure 9.12) la sensibilité, la dynamique et le facteur SD (courbes vertes) de l'ASO historique de Zernike. On note qu'il présente une sensibilité meilleure pour toutes les fréquences à toutes les pyramides à grand angle  $\alpha$ . Sa dynamique est cependant comparable ce qui lui confère un meilleur facteur SD.

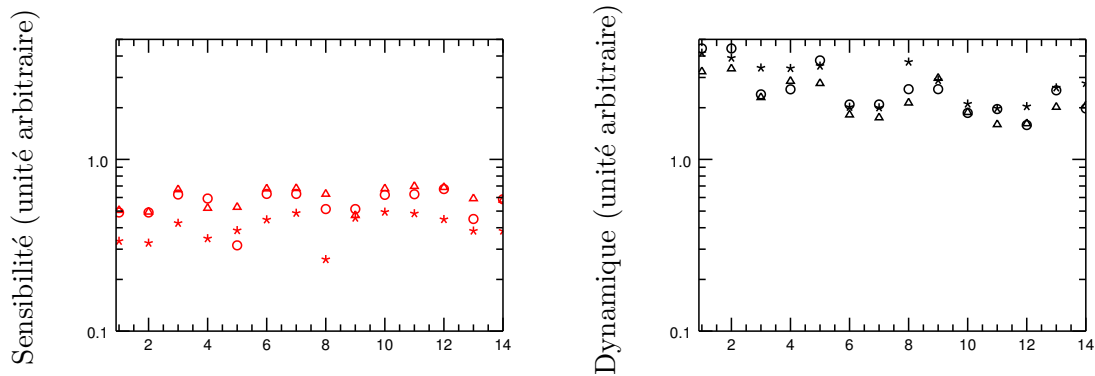


Figure 9.11 – **Sensibilité** et **dynamique** pour les 14 premiers polynômes de Zernike lorsque le **nombre de faces varie**.  $n=3(\Delta)$ ,  $4(\circ)$  et  $\infty(*)$ . L'angle permet la totale séparation des pupilles.

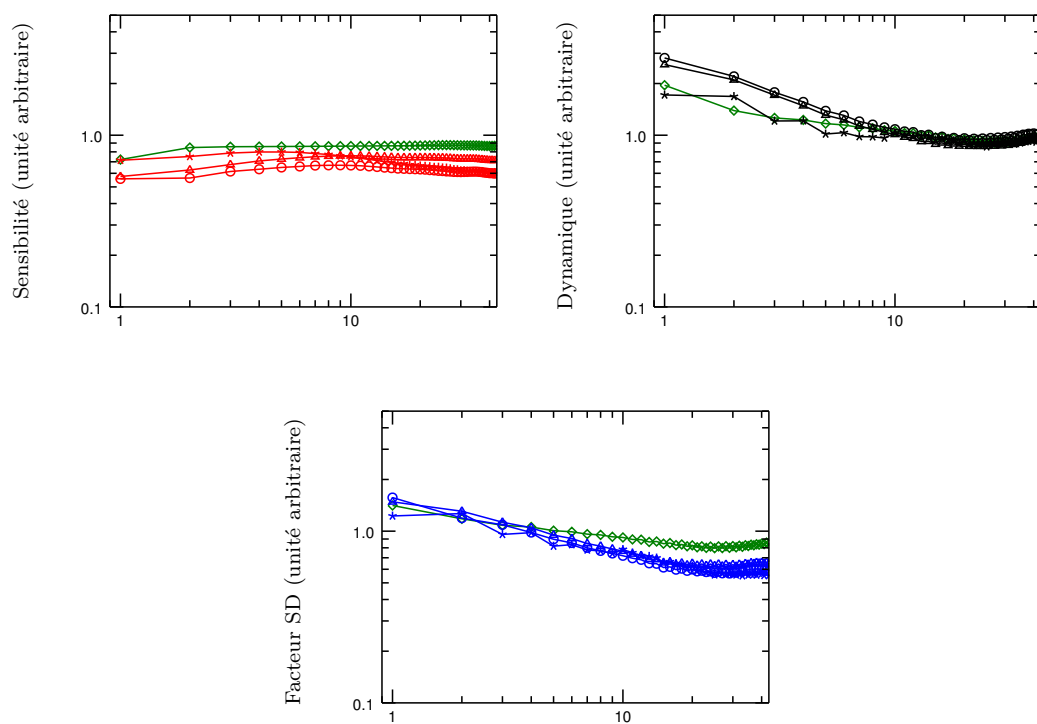


Figure 9.12 – **Sensibilité**, **dynamique** et **facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux trois nombres de faces :  $n=3$  ( $\Delta$ ), 4 ( $*$ ) et  $\infty$  ( $\circ$ ) . Les courbes vertes donnent le comportement de l'ASO de Zernike historique. Elles permettent de faire le lien avec le chapitre 8.

**Influence du rayon de modulation.** Les paramètres de classe testés sont :

$$n=4 \quad 2f\alpha/D=1.5 \quad r_m/f=0, 2, 5f\lambda/D \quad (9.16)$$

En ce qui concerne la **structure** des intensités linéaires et quadratiques, on s'aperçoit que le signal se trouve de plus en plus dans les images de la pupille à mesure que le rayon de modulation augmente. Ceci est en accord avec l'observation faite pour l'intensité constante : la modulation remet l'intensité dans les images de la pupille et limite les effets de la diffraction.

L'étude de la sensibilité et dynamique est bien plus intéressante. Le niveau global de la première chute avec le rayon tandis que la seconde s'en trouve améliorée et cela significativement. On retrouve là des résultats bien connus qui sont d'ailleurs la raison d'être de la modulation : ajuster  $r_m/f$  afin d'améliorer la dynamique du senseur pyramide.

Par ailleurs si la sensibilité et la dynamique sont relativement plates sans modulation, elles se déforment à mesure que  $r_m/f$  augmente. Les polynômes à faible indice sont d'ailleurs plus affectés que ceux à grand indice.

L'étude fréquentielle nous indique également que **deux régimes** existent lorsque la modulation circulaire est en fonction. Pour les basses fréquences, la sensibilité croissante et linéaire<sup>d</sup> avec les fréquences spatiales tandis que pour les hautes fréquences la sensibilité reste constante<sup>e</sup>. La **fréquence de coupure** entre ces deux régimes est **proportionnelle au rayon de modulation**. Ces résultats bien connus ont été observés en simulations [Ragazzoni and Farinato, 1999], [Esposito and Riccardi, 2001], [Burvall et al., 2006], [Plantet et al., 2015] et expliqués théoriquement dans [Vérinaud, 2004].

Le graphe du facteur SD montre que la modulation est bénéfique du point de vue du compromis sensibilité/dynamique particulièrement là où la modulation a le plus d'impact (au dessous de la fréquence de coupure).

On note qu'une étude plus poussée de la modulation a été menée dans l'article [Fauvarque et al., 2017] reproduit à la fin de cette thèse. On y teste des modulations carrées ainsi que des modulations non-uniformes qui s'attardent soit sur les arêtes soit sur les faces.

---

d. On dit alors que l'ASO est un senseur de "pentés" car il code la dérivée première de la phase.

e. L'ASO est simplement un senseur de phase.

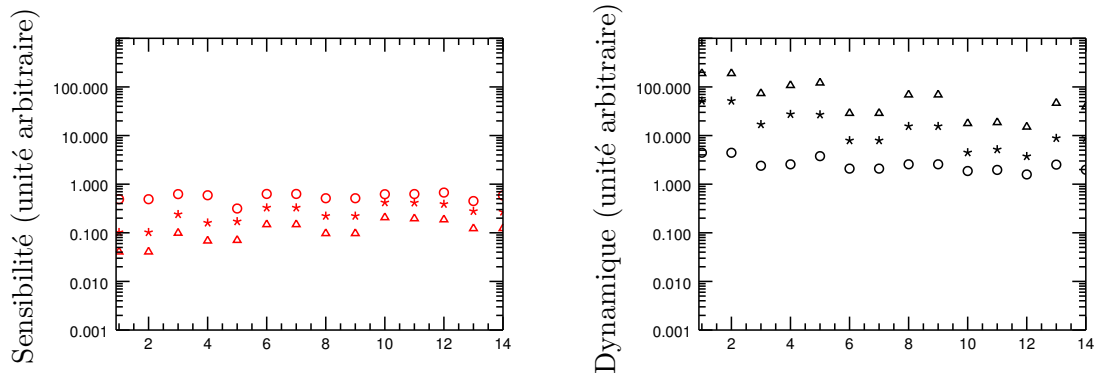


Figure 9.13 – **Sensibilité** et **dynamique** pour les 14 premiers polynômes de Zernike lorsque le **rayon de modulation varie**.  $r_m/f/f=0$  (○), 2 (\*) et 5 (△)  $\lambda/D$ . Pyramide à 4 faces avec un angle séparant les images de la pupille.

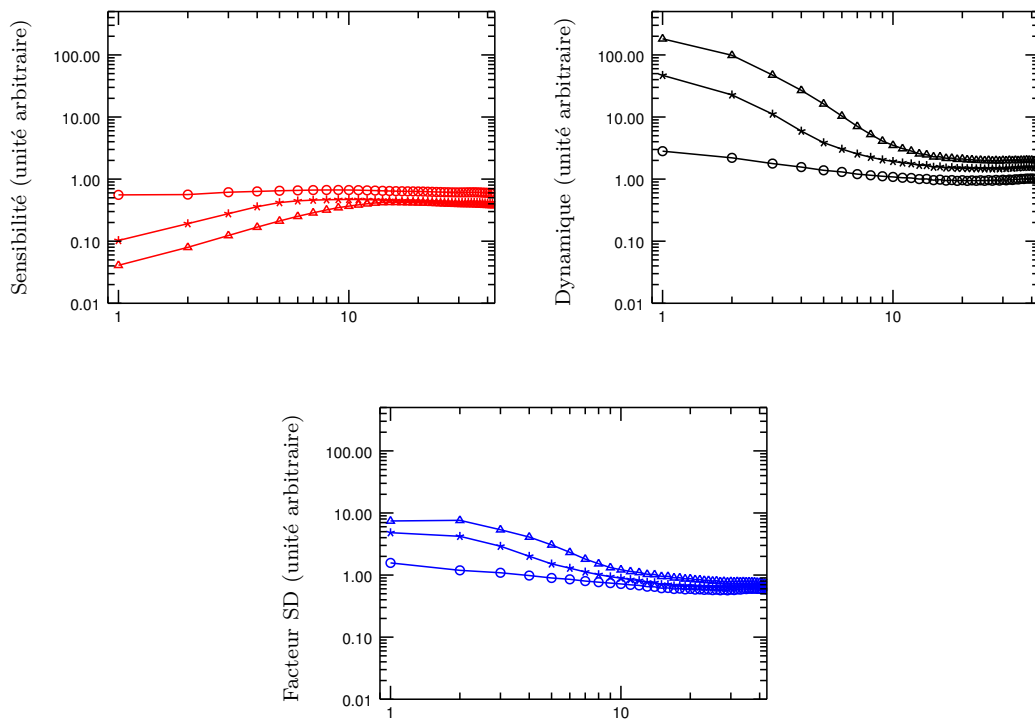


Figure 9.14 – **Sensibilité**, **dynamique** et **facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux rayons de modulation :  $r_m/f/f=0$  (○), 2 (\*) et 5 (△)  $\lambda/D$ .



**Influence de l'angle au sommet.** Les paramètres de classe testés sont :

$$n=4 \quad 2f\alpha/D=0.05, 0.15, 1.5 \quad r_m/f=0 \quad (9.17)$$

On compare ici la pyramide non modulée à très grand angle –les images de la pupille sont donc largement séparées– à deux configurations à très petits angles : les images y sont quasiment superposées. Visuellement le signal de sortie se rapproche donc de la pupille d'entrée à l'exception d'une couronne "floue" dans laquelle toutes les images ne se superposent pas. En termes de **structures**, les intensités linéaires ressemblent donc très fortement aux Zernike injectés.

Physiquement, la superposition des champs issus des quatre quadrants du pavage cartésien permet de recombinaison l'information en phase avant de la conversion en intensité. Cette recombinaison est cependant à distinguer de l'interférométrie dite de *shearing* [Primot and Sogno, 1995] qui consiste à diviser le champ incident en quatre champs identiques via des séparatrices, à ensuite les décaler légèrement, puis à les recombinaison. La pyramide *aplatie* superpose des champs décalés mais aussi *filtrés*.

En ce qui concerne les courbes de sensibilité et de dynamique, on observe des comportements comparables à ceux de la modulation. La sensibilité (resp. la dynamique) diminue (resp. augmente) lorsque l'angle  $\alpha$  diminue et cela plus particulièrement pour les Zernike à bas indice.

Cependant on note grâce à l'étude fréquentielle un très net **gain de sensibilité aux hautes fréquences** par rapport à la pyramide à grand angle. Celle-ci présente même un **maximum de sensibilité** qui dépend de  $\alpha$ . Il est donc possible de choisir grâce à ce paramètre un gamme fréquentielle où l'ASO code au mieux les fréquences spatiales. La dynamique suit globalement le comportement inverse de la sensibilité et illustre encore une fois le fait que ces quantités sont antagonistes. Le facteur SD montre cependant que le compromis sensibilité dynamique s'améliore quand  $\alpha$  diminue.

On ajoute que la modulation peut fonctionner conjointement à la pyramide *aplatie*. De telles simulations ont été menées dans l'article [Fauvarque et al., 2017] reproduit à la fin de la thèse.

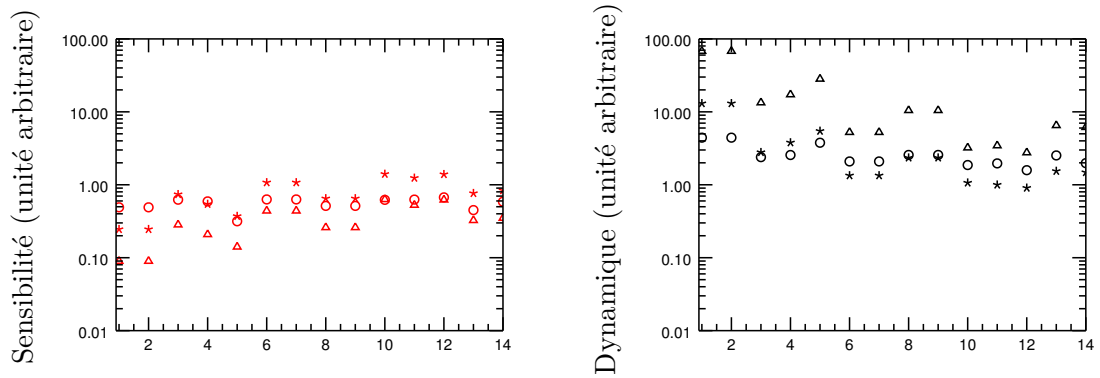


Figure 9.15 – **Sensibilité** et **dynamique** pour les 14 premiers polynômes de Zernike lorsque l'angle du sommet varie.  $2f\alpha/D=1.5(\circ)$ , 0.15 (\*) et 0.05 ( $\Delta$ ). On a choisi une pyramide à 4 faces sans modulation.

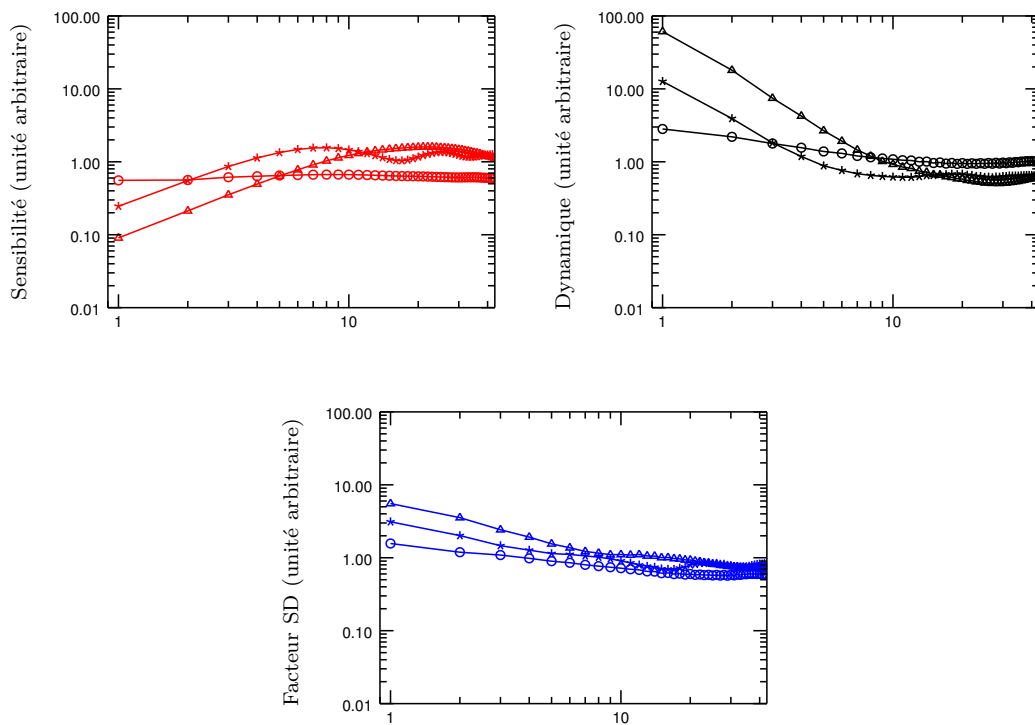
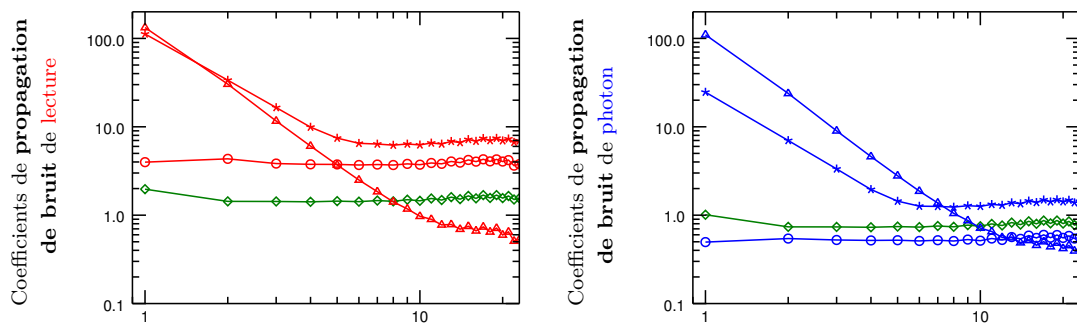


Figure 9.16 – **Sensibilité**, **dynamique** et **facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent à trois angles vérifiant :  $2f\alpha/D=1.5(\circ)$ , 0.15 (\*) et 0.05 ( $\Delta$ ).

### 9.2.3 Propagation bruit

Ce paragraphe s'intéresse à la propagation des bruits de lecture et de photon lors de la reconstruction du front d'onde (cf. paragraphe 6.3.3). On y confronte quatre ASO. Le premier est l'ASO de Zernike, il sert de lien entre la classe de Zernike et la classe Pyramide. Les trois autres ASO sont la pyramide historique non modulée, la pyramide aplatie et la pyramide modulée. La figure 9.17 donne les **coefficients de propagation de bruit** de lecture et de photon pour ces quatre ASO tandis que le tableau 9.3 donne les bruits cumulés sur l'ensemble des modes de phase étudiés.



Courbes	ASO	$n$	$2f\alpha/D$	$r_m/fD/f\lambda$
○	Pyramide classique	4	1.5	0
△	Pyramide aplatie	4	0.05	0
*	Pyramide modulée	4	1.5	2
◇	Zernike			

Figure 9.17 – Coefficients de propagation de bruit de **lecture** (à gauche) et de **photon** (à droite) vis-à-vis des fréquences spatiales exprimées en termes de degré radial de Zernike. Le flux est unitaire  $s=1$  et le détecteur à un  $\sigma_{RON}^2$  égal à  $= 1$ . Les courbes vertes correspondent à l'ASO historique de Zernike.

**Bruit de lecture.** Les coefficients de propagation de bruit de **lecture** du Zernike et de la pyramide classique sont constants dans l'espace des fréquences. Le Zernike est cependant plus performant que la pyramide puisque ses coefficients sont inférieurs à ceux de la pyramide d'un facteur 2.

La Pyramide modulée montre une nouvelle fois deux régimes : un premier régime où l'ASO se comporte en senseur de *pentas* puis, au delà de la fréquence de coupure, un senseur de *phase* associé à des coefficients constants avec la fréquence. Ses coefficients de propagation de bruit sont les plus élevés des 4 ASO

ASO	Z	P	PA	PM
Bruit de <b>lecture</b> cumulé	465	1185	<b>679</b>	2400
Bruit de <b>lecture</b> moyenné	1.55	3.96	2.27	8.02
Bruit de <b>photon</b> cumulé	240	<b>165</b>	528	490
Bruit de <b>photon</b> moyenné	0.8	0.55	1.76	1.63

Table 9.3 – Bruits de lecture et de photons cumulés sur 24 degrés radiaux et moyennés pour l’ASO de Zernike, la pyramide à 4 faces non modulée à grand angle, la pyramide aplatie non modulée et la pyramide modulée à grand angle.

considérés. La pyramide modulée propage donc le plus fortement le bruit de lecture. On peut montrer que la situation se détériore à mesure que le rayon de modulation augmente.

La pyramide aplatie vérifiant  $2f\alpha/D=0.05$  a à peu près les mêmes coefficients de propagation de bruit que la pyramide modulée à  $r_m/f/f=2\lambda/D$  pour les basses fréquences. Cependant, pour les hautes fréquences la pyramide aplatie présente un très bon comportement puisque ses coefficients sont largement inférieurs à ceux des autres ASO Pyramide et même aussi à ceux du Zernike.

L’observation des bruits cumulés permettent enfin d’affirmer que, globalement, le Zernike est le meilleur ASO en ce qui concerne la propagation du bruit de lecture. Au sein de la classe Pyramide, la pyramide aplatie a le comportement le plus satisfaisant.

**Bruit de photon.** La hiérarchie des ASO concernant la propagation du bruit de photon est différente de celle pour le bruit de lecture. Le meilleur d’entre eux est la Pyramide classique non modulée, suivie de très près par l’ASO historique de Zernike. La pyramide modulée continue de présenter deux régimes et d’être moins performante que sa version non modulée. La pyramide aplatie conserve son bon comportement pour les hautes fréquences en présentant les plus faibles coefficients de propagation de bruit mais souffre de son comportement à basse fréquence et présente finalement le bruit cumulé le plus important.

## 9.2.4 Zone d’intérêt

Un autre critère de performance des ASO est le nombre de méta-pixels nécessaire à l’analyse de front d’onde. Afin de quantifier celui-ci, on observe le support moyen de la matrice d’interaction. On en profite pour effectuer cette même opération sur les intensités quadratiques afin d’avoir une idée de la répartition des perturbations non-linéaires. La figure 9.18 donne ces supports moyens. L’analyse

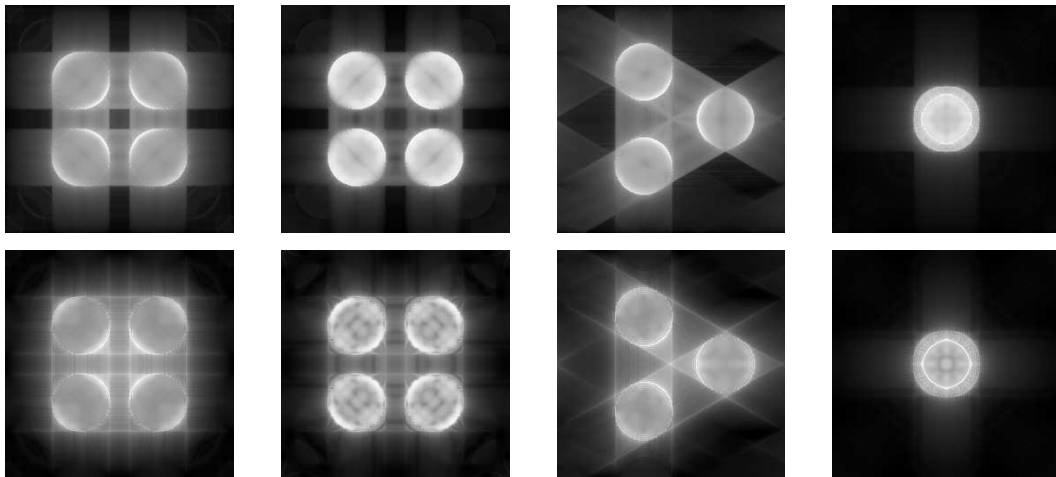


Figure 9.18 – Support des intensités linéaires (en haut) et quadratiques (en bas). De gauche à droite : pyramide 4 faces sans modulation ; avec modulation ; à 3 faces ; pyramide aplatie.

de ces cartes montre que le support de l'information linéaire correspond essentiellement au support des images géométriques de la pupille d'entrée. Ceci est d'autant plus vrai pour la pyramide modulée ainsi que la pyramide aplatie : les effets de diffraction y sont bien moindres. On se convainc donc que la zone d'intérêt du capteur correspond à l'union des images géométriques de la pupille. On remarque hélas que l'information non-linéaire parasite a le même support. Il n'y a donc pas de moyen, par restriction de zone, d'améliorer significativement la dynamique des senseurs. Les figures 9.19 et 9.20 donnent ces zones en fonction de l'angle de la pyramide et du nombre de faces.

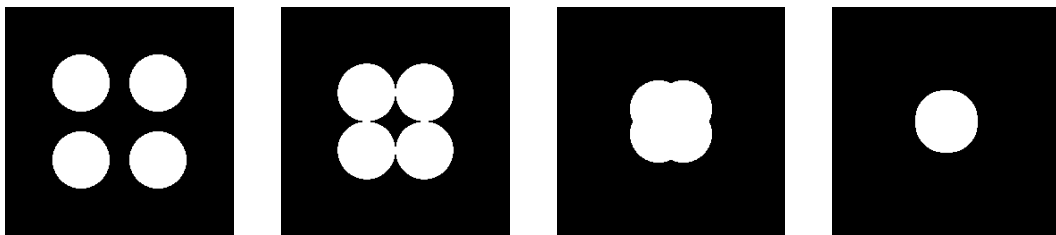


Figure 9.19 – Zone d'intérêt du détecteur pour une pyramide 4 faces modulée ou non avec un angle vérifiant de gauche à droite :  $\frac{2f\alpha}{D}=1.5, 1$  and  $0.5$  et  $0.1$ .

On peut tirer de ces cartes le ratio entre la surface du détecteur contenant l'information pertinente et la surface de la pupille d'entrée (figure 9.21). L'angle à partir duquel il y a saturation correspond à l'angle minimal pour avoir complète séparation des images de la pupille. Puisque ce ratio code le nombre de métapixels nécessaires au codage d'un pixel de la phase et donc d'un mode de phase,

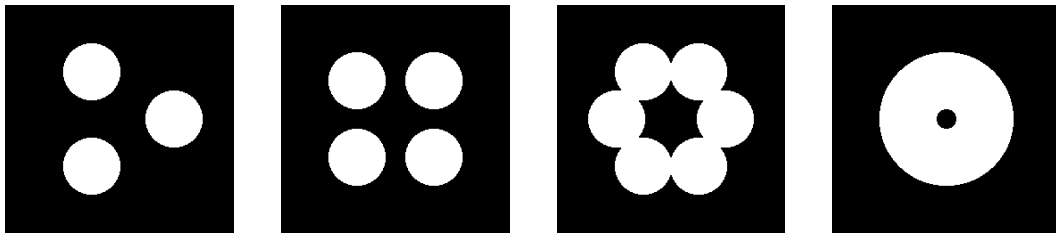


Figure 9.20 – Zone d'intérêt du détecteur pour les pyramides à 3, 4 et 6 faces ainsi que pour le cône.

on choisira afin de le minimiser un nombre de faces et un angle aussi faible que possible sachant évidemment que cette conclusion devra être nuancée vis-à-vis des autres critères de performance.

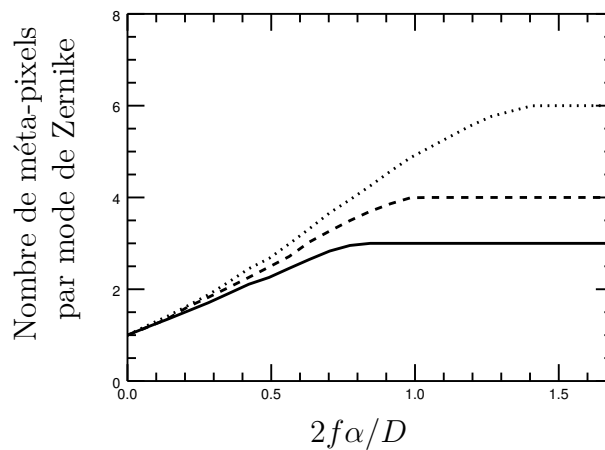


Figure 9.21 – Nombre minimal de méta-pixels par mode de phase en fonction de l'angle de la pyramide pour trois nombres de faces différentes : 3 faces (courbe continue), 4 faces (tirets) et 6 faces (pointillées).

### 9.2.5 Chromatisme

La description de la classe Pyramide via le formalisme des pavages permet de discuter du caractère chromatique ou non des ASO qui en font partie. On rappelle déjà que dès lors que la modulation est utilisée, ou qu'il y a une phase de référence non nulle, les ASO sont hélas chromatiques. En revanche, **sans modulation** ou phase de référence, les masques pyramidaux décrits via les paramètres (9.1) s'avèrent **achromatiques**. Trois raisons équivalentes le montrent. Leur forme optique est invariante d'échelle : que l'on zoome ou dé-zoome, le masque pyramidal aura toujours le même aspect. D'autre part, le changement de variable  $(u,v) = (\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$  appliqué par exemple sur la fonction de transparence de la

pyramide à 4 faces :

$$m_{\Delta_4}(x,y)=\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\alpha(|x|+|y|)\right) \implies m_{\Delta_4}(u,v)=\exp(2i\pi\alpha(|u|+|v|)) \quad (9.18)$$

rend la fonction de transparence indépendante de  $\lambda$ . Enfin aucune grandeur "métrée" n'est requise pour décrire un masque pyramidal. Le nombre de faces  $n$  (sans dimension donc) et l'angle  $\alpha$  (sans dimension non plus) suffisent. Les ASO Pyramide tolèrent donc l'utilisation d'une source polychromatique pour l'analyse de surface d'onde.

**De la pyramide théorique à la pyramide réelle.** Si le modèle théorique ne laisse aucun doute quant au caractère achromatique des masques pyramides, il faut toutefois se demander si ceux-ci sont réalisables dans la pratique. Autrement dit, quelles sont les manières de fabriquer des tip/tilt locaux achromatiques? L'approche intuitive consiste à utiliser un dioptre composé de matériau transparent comme du verre (image de gauche de la figure 9.22). Ces matériaux sont par essence dispersifs et ont servi historiquement –avec le prisme de Newton– à décomposer la lumière. Heureusement deux approches ont permis de fabriquer des masques pyramidaux achromatiques. Une première en transmission consiste à attacher ensemble deux pyramides transparentes (image de droite de la figure 9.22) pour annuler au premier ordre –et cela s'avère suffisant– la dépendance en  $\lambda$  de la fonction de transparence (voir [Tozzi et al., 2008]). Une seconde est plus radicale [Wang et al., 2010a] et suggère d'utiliser une pyramide en réflexion, de cette manière le dioptre est créé par un miroir et aucun problème de dispersion n'apparaît.

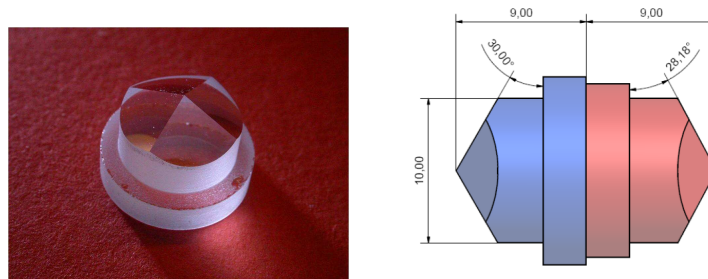


Figure 9.22 – Réalisations pratiques de pyramides en **transmission**. À gauche, une pyramide 4-faces chromatiques. À droite, une pyramide rendue **achromatique**.

## 9.2.6 Fabrication

On mentionne ici un autre critère attendant au processus de fabrication des masques pyramidaux. Lorsque ceux-ci sont en transmission, on peut se figurer

leur fabrication comme des découpes successives d'un bloc transparent selon chacune des faces du masque. Il y aura autant de découpes qu'il y a de faces. Durant ce processus plusieurs imperfections peuvent surgir. On les distingue en trois catégories :

1. Les **arêtes** de la pyramide ne sont **pas**, parfois, suffisamment  **fines** vis-à-vis de la longueur d'onde de l'analyse. Ceci introduit alors une taille caractéristique dans l'expression de la fonction de transparence et lui ôte son invariance d'échelle. Le masque en devient chromatique. Il y a également une perte en sensibilité.
2. De par le fait qu'un point est l'intersection de trois plans seulement, il peut arriver pour les pyramides à 4 faces ou plus que le sommet de la pyramide ne soit pas unique. On parle alors d'**imperfection "toit"** (image de gauche de la figure 9.23). Il en résulte évidemment que la fonction de transparence n'est plus invariante d'échelle ôtant ainsi l'achromatisme au masque mais également une perte de l'équipartition de l'énergie entre les éléments du pavage ce qui détériore l'analyse de surface d'onde.
3. Enfin, il se peut que les faces n'aient pas le même angle. Le pavage associé ne sépare donc plus la lumière de façon symétrique et comme dans le cas des imperfections de toit, l'analyse de front d'onde en pâtit. Cette **imperfection d'asymétrie** est décrite sur l'image de droite de la figure 9.23.

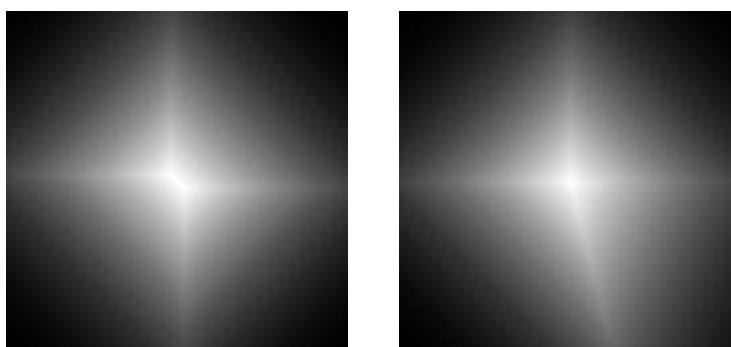


Figure 9.23 – Exemples d'imperfections de "toit" (gauche) et d'asymétrie (droite) pour la pyramide à 4 faces.

On note que les procédés de fabrication de pyramides sont désormais fiables, on peut se référer à l'article [Pérennès et al., 2003] pour avoir une idée de la caractérisation d'un masque pyramidal réel obtenu par lithographie rayons X.

### 9.2.7 Synthèse de l'étude

La comparaison des différents senseurs de la classe Pyramide, suivant des critères de performances communs, ont montré que :



- Le **nombre de faces** de la pyramide est un paramètre essentiellement géométrique et technologique. Il n'a en effet aucun effet sur la sensibilité ou la dynamique des senseurs. Si les images de la pupille sont complètement séparées, la pyramide 3-faces correspond à la meilleure configuration puisqu'elle minimise le ratio méta-pixels par mode et est la plus facile à fabriquer. Le cône est particulièrement pertinent pour les petits angles. Il est en effet achromatique de par l'absence d'arêtes, ne nécessite que peu de méta-pixels par mode et a une géométrie compatible avec celle de la pupille d'entrée.
- La **modulation** tip/tilt présente deux avantages essentiels. Elle permet premièrement de replacer la quasi totalité du flux de photons dans les images de la pupille. D'autre part, elle améliore considérablement la dynamique pour les basses fréquences spatiales. Malheureusement, une perte de sensibilité est associée à ce gain. Les simulations montrent que la forme de la modulation (circulaire ou carrée) n'a pas d'influence significative. Cependant, on observe que la sensibilité est lié au temps passé sur les arêtes tandis que la dynamique est corrélé au temps passé sur les faces. Enfin, on note que la modulation rend les ASO inévitablement chromatiques quand ils sont achromatiques sont modulation.
- L'**angle du sommet** s'avère être le paramètre le plus prometteur de la classe Pyramide. Deux régimes apparaissent. Le premier correspond aux "pyramides classiques" qui séparent complètement les images de la pupille. Dans ce régime, les critères de performance sont stables avec l'angle  $\alpha$ . Sans modulation, ils témoignent d'une sensibilité et d'une dynamique "plates" quelque soit le nombre de faces. Le second régime correspond aux petits angles. Dans ce domaine d'angles, les critères de performance permettent de choisir où le gain en sensibilité est maximal. De plus, les configurations à petits angles permettent de considérablement améliorer l'efficacité des photons incidents et cela sans modulation. Dans le même temps, on note que le ratio méta-pixels par mode est proche de l'idéal.

### 9.3 Implémentation expérimentale

Une étape évidemment fondamentale dans la validation de concepts d'analyseurs de front d'onde consiste à confronter les prédictions théoriques à des résultats obtenus sur banc optique. Si nous n'avons pas eu le temps, hélas, de faire de telles expériences, on propose ici un design expérimental qui permettrait de comparer tous les ASO à filtrage de Fourier. Il se base sur un dispositif optique nommé *Spatial Light Modulator* qui peut modifier localement (dans une matrice pixelisée) la phase et l'amplitude d'un champ lumineux. Cette idée a été testée avec succès pour certains masques de la classe Pyramide dans l'article [Akondi et al., 2013].

Il est donc possible de créer n'importe quel masque en projetant sa fonction de transparence sur cette matrice pixelisée. Il faut cependant noter que le *SLM* ne peut modifier la phase qu'en termes de pistons locaux. Ceux-ci ont une course limitée aussi il faudra décrire la phase de la fonction de transparence modulo la course des pistons. Ceci amène à considérer la phase des fonctions de transparences modulo  $2\pi$ . D'autre part, il faudra s'assurer que le champ modifié par le *SLM* le voie de façon continue. Il faudra donc que la taille du pixel du *SLM* soit très petit devant la taille caractéristique du champ à modifier. On notera celle-ci  $l$ .

Le *SLM* disponible au Laboratoire d'Astrophysique de Marseille est le "SLM Hamamatsu HOLOEYE" et a des pixels  $8\mu\text{m}$ . Le critère à vérifier pour que le champ voie le *SLM* de façon continue sera :

$$l > 20 \times 8\mu\text{m} \quad (9.19)$$

On illustre la méthode de projection sur le *SLM* de la phase de la fonction de transparence sur la figure 9.24.

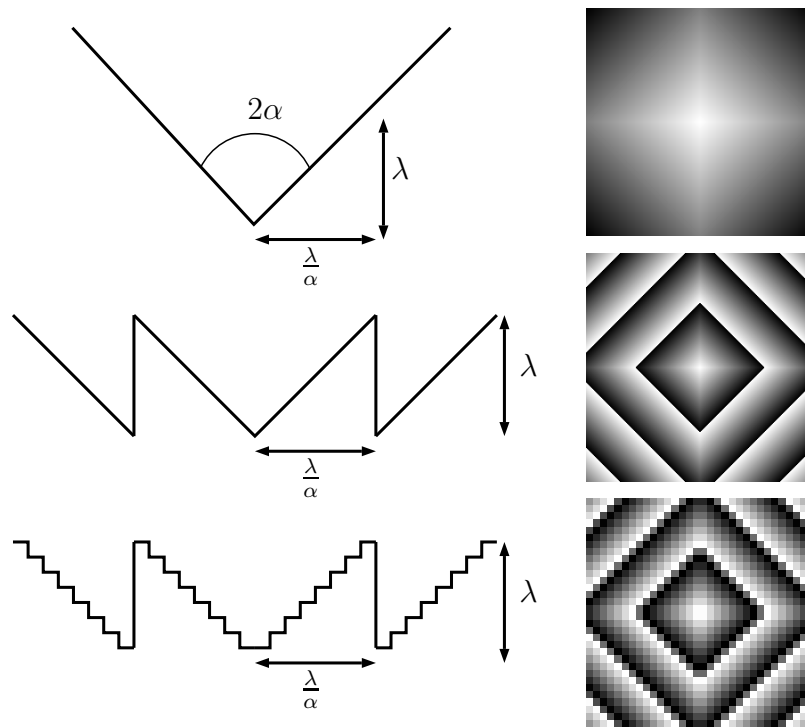


Figure 9.24 – Passage de la forme optique d'un masque pyramidal (ici  $n=4$ ) à sa forme de "Fresnel" via l'opération modulo  $\lambda$  puis à sa forme discrétisée. Le *SLM* devra reproduire cette dernière.

Le banc optique proposé pour tester les ASO à filtrage de Fourier (figure 9.25) s'inspire en très grande partie du démonstrateur de l'équipe *Advanced Optical*

*Imaging Group, School of Physics de l'University College Dublin* présenté dans l'article [Akondi et al., 2014]. Il a juste été modifié pour correspondre au matériel disponible au Laboratoire d'Astrophysique de Marseille. Ce système permet de générer des phases grâce à un miroir déformable, de vérifier et connaître leur forme à l'aide de l'ASO bien connu de Shack-Hartmann [Shack and Platt, 1971] (HASO sur le schéma) puis de les envoyer dans un système à filtrage de Fourier pour en récupérer une intensité sur le détecteur.

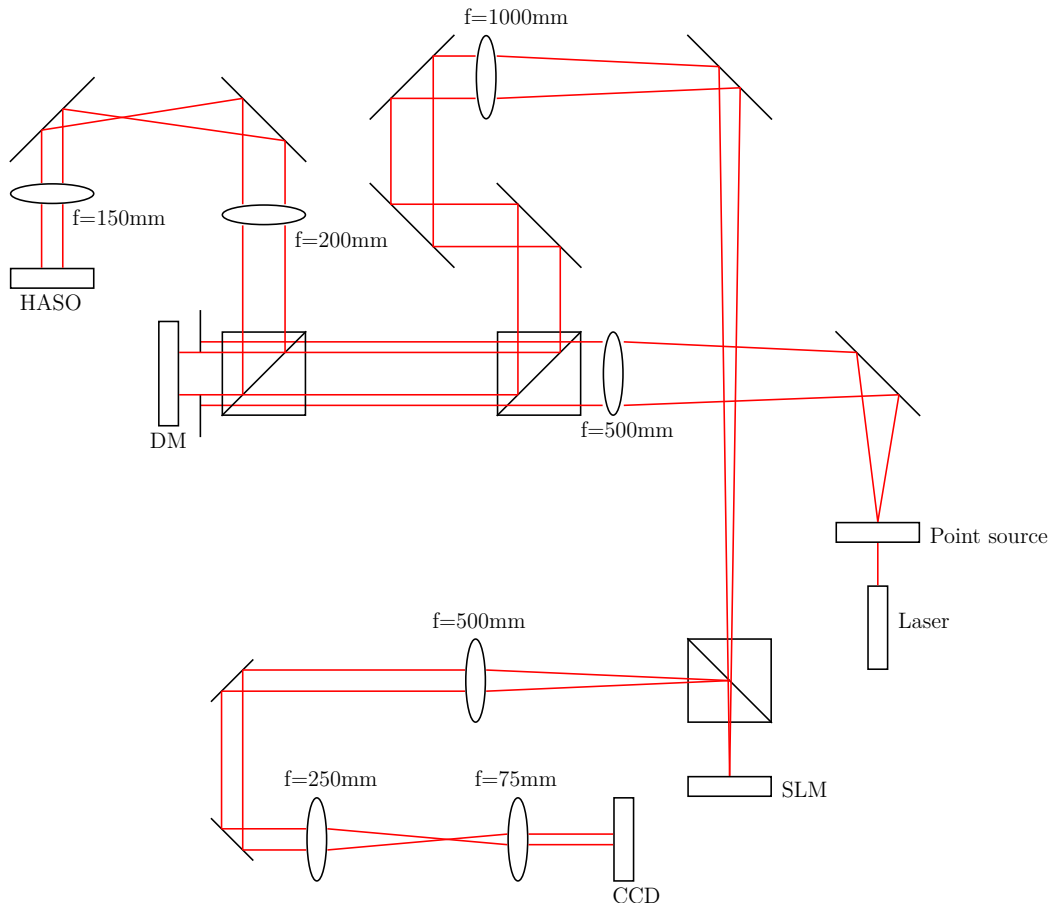


Figure 9.25 – Banc optique

L'élément central de ce dispositif est évidemment le *SLM* qui est capable de créer une grande variété de masque de Fourier. Tel qu'il est conçu, la taille caractéristique du champ arrivant sur celui-ci vaut  $f\lambda/D$  où  $D$  est le diamètre de la pupille d'entrée du système optique c'est-à-dire  $4\text{mm}$ ,  $f$  la focale d'une lentille qui permet d'élargir la tâche focale, ici  $1\text{m}$  et  $\lambda$  la longueur d'onde de la source utilisée sur le banc, typiquement  $630\text{nm}$ . On a donc :

$$\frac{f\lambda}{D} \approx 160\mu\text{m} = 20 \times 8\mu\text{m} \quad (9.20)$$

Le critère de continuité du *SLM* est donc bien respecté.

Le miroir déformable de marque Boston a les propriétés suivantes :

- 12x12 actuateurs
- Pitch 0.450 *mm*
- Diaphragmé à 4 *mm* ce qui donne 140 actuateurs effectifs

La caméra de référence Hamamatsu, ORCA Flash 4.0 a pour caractéristiques techniques :

- Pixel : 6.5  $\mu\text{m}$
- Taille : 2048x2048 ce qui donne 1.3*cm* x 1.3*cm*

Le grandissement total du système optique, noté  $\gamma$ , est facilement déductible du schéma 9.26 qui donne une vision dépliée du dispositif expérimental :

$$\gamma = \frac{500}{1000} \cdot \frac{250}{500} \cdot \frac{75}{250} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40} = 0.075$$

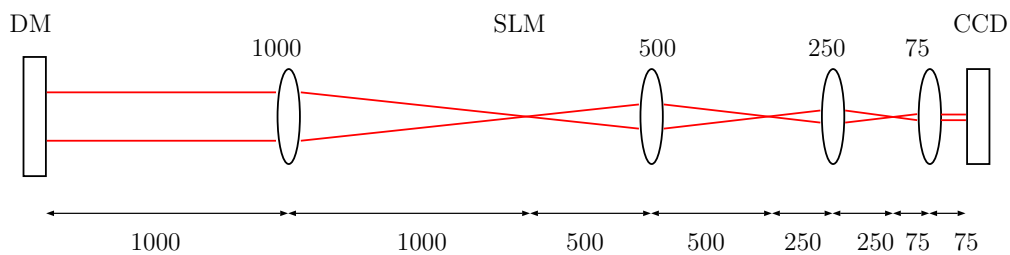


Figure 9.26 – Montage déplié.

La pupille mesure donc  $4\text{mm} \times 0.075 = 300 \mu\text{m}$  ce qui correspond à un échantillonnage de 46x46 pixels et donc à environ 2000 pixels par pupille. La pupille d'entrée est donc largement sur échantillonnée par rapport au miroir déformable.

## 9.4 Figures

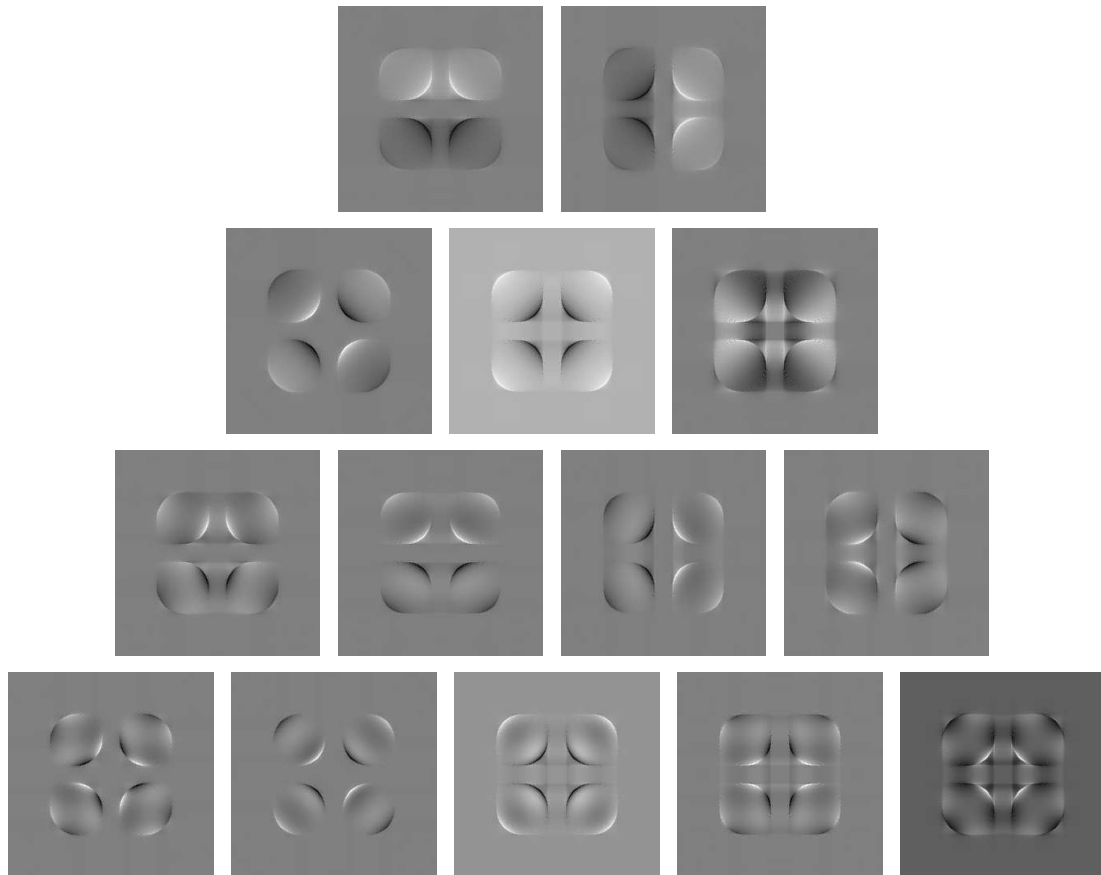


Figure 9.27 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 4 faces sans modulation.  $2f\alpha/D=1.5$

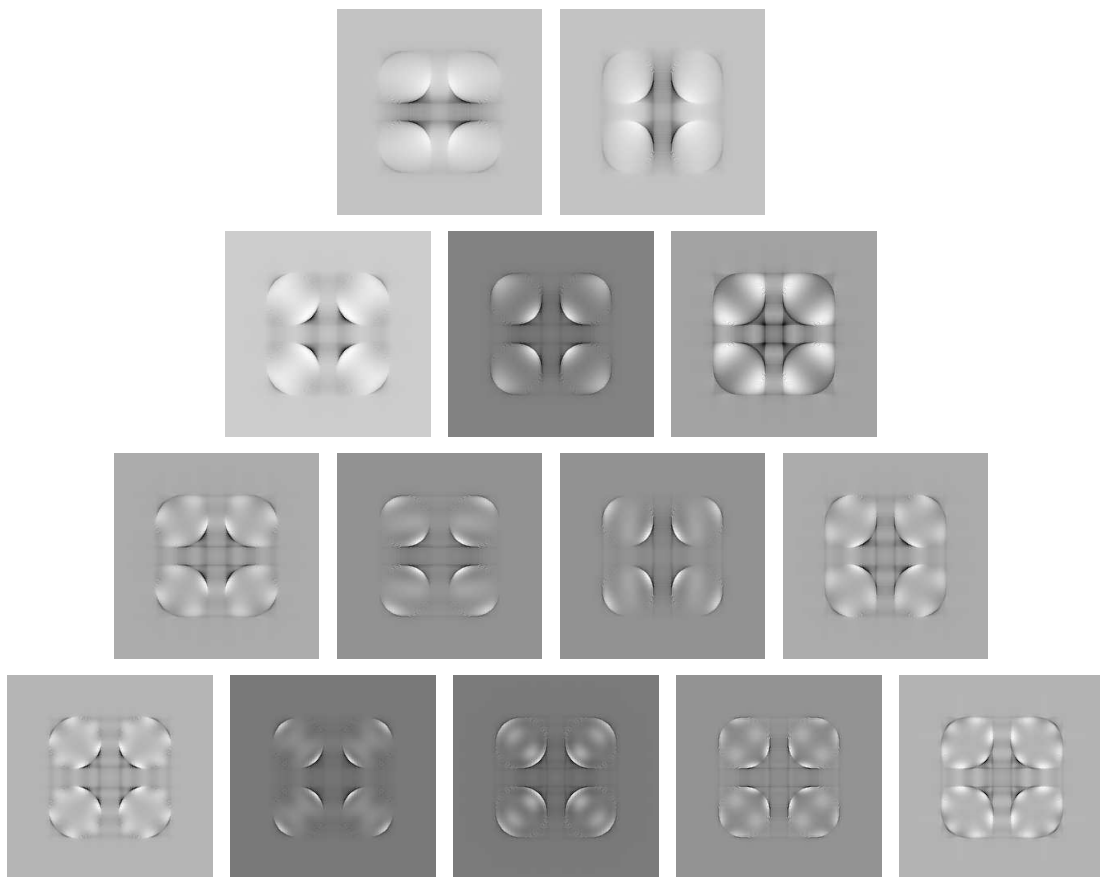


Figure 9.28 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike.  
Pyramide 4 faces sans modulation.

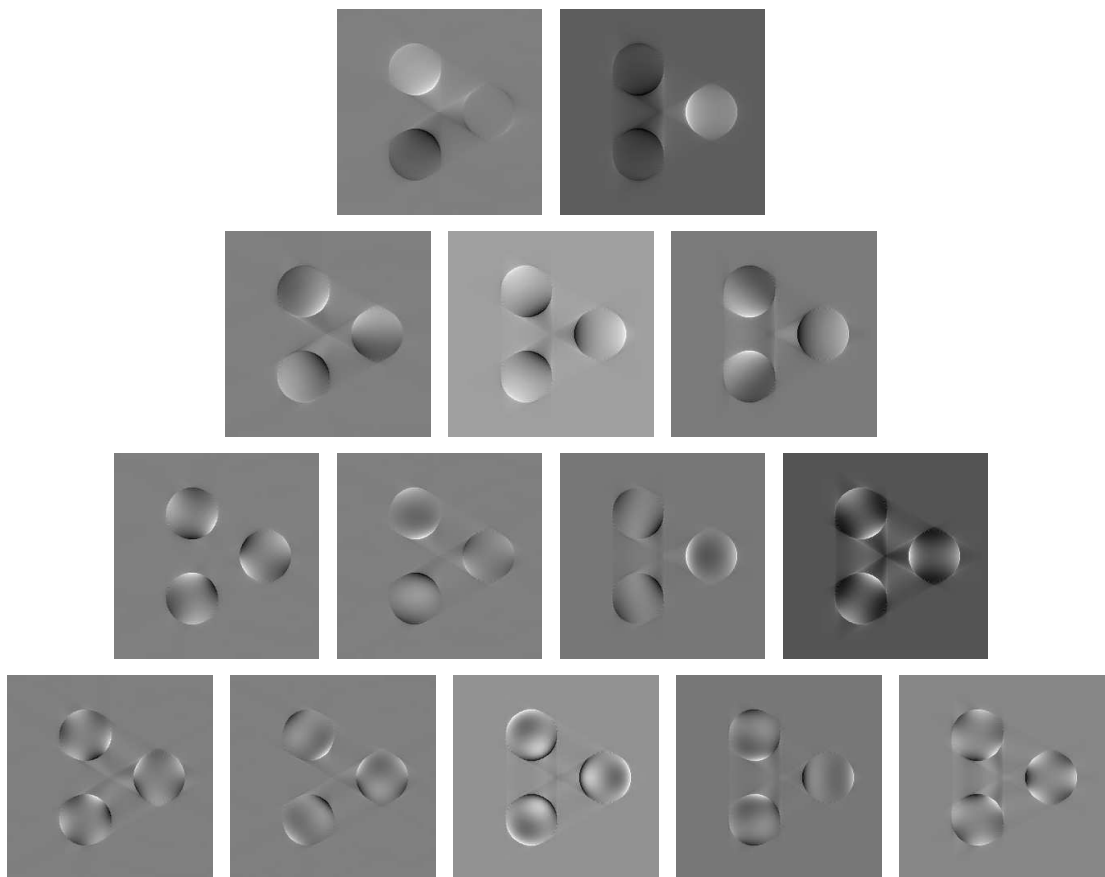


Figure 9.29 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 3 faces sans modulation.

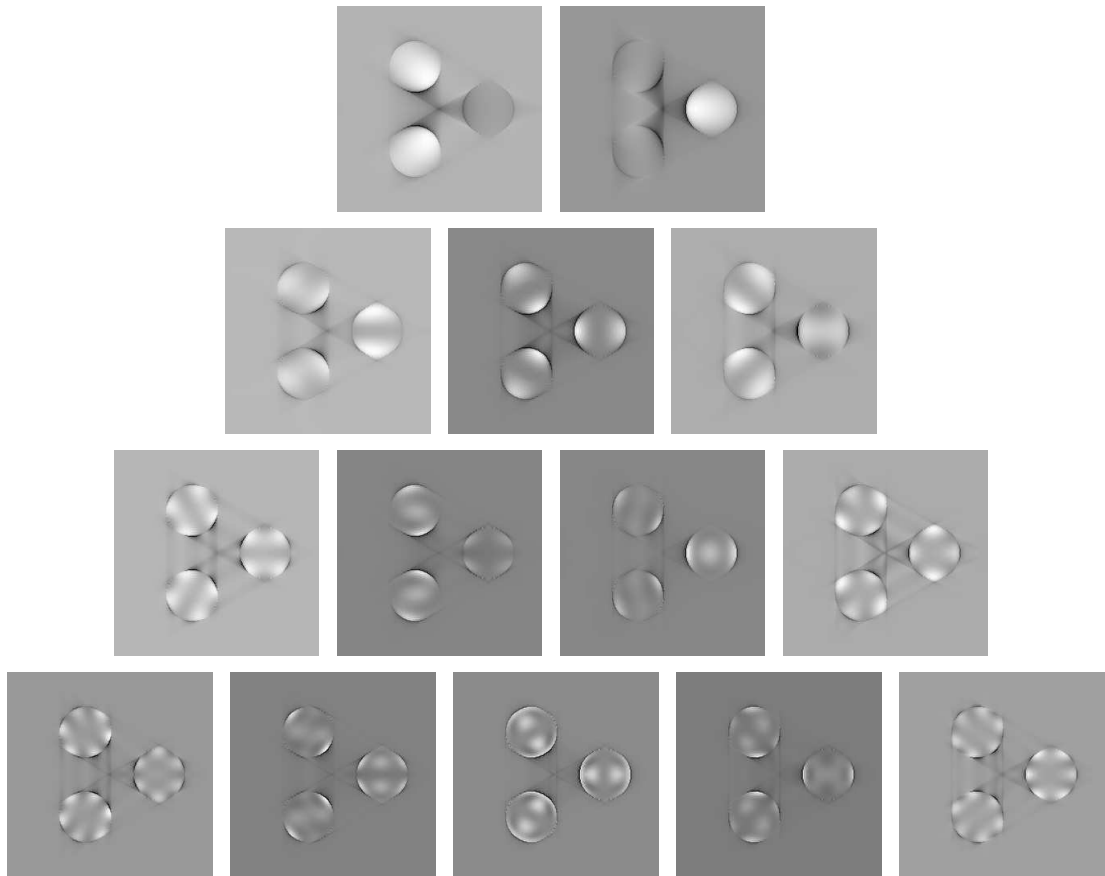


Figure 9.30 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide 3 faces sans modulation.



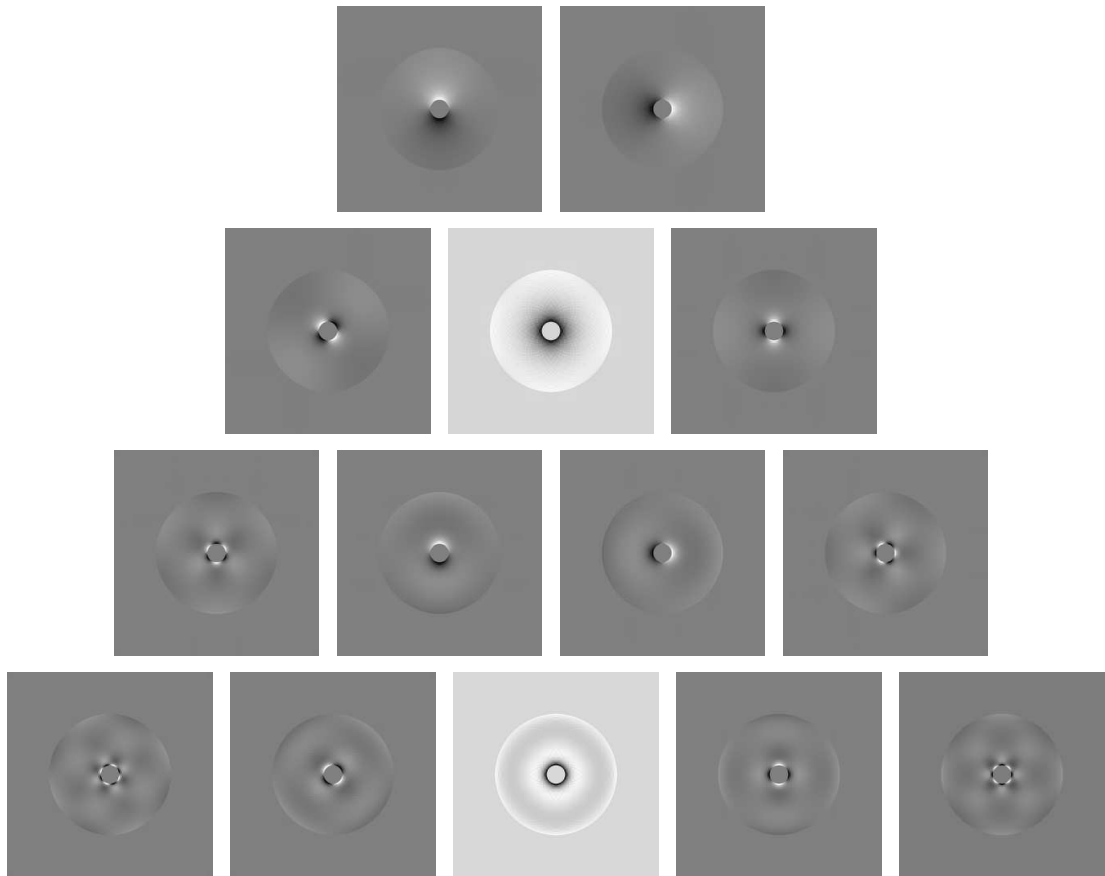


Figure 9.31 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Cône sans modulation.

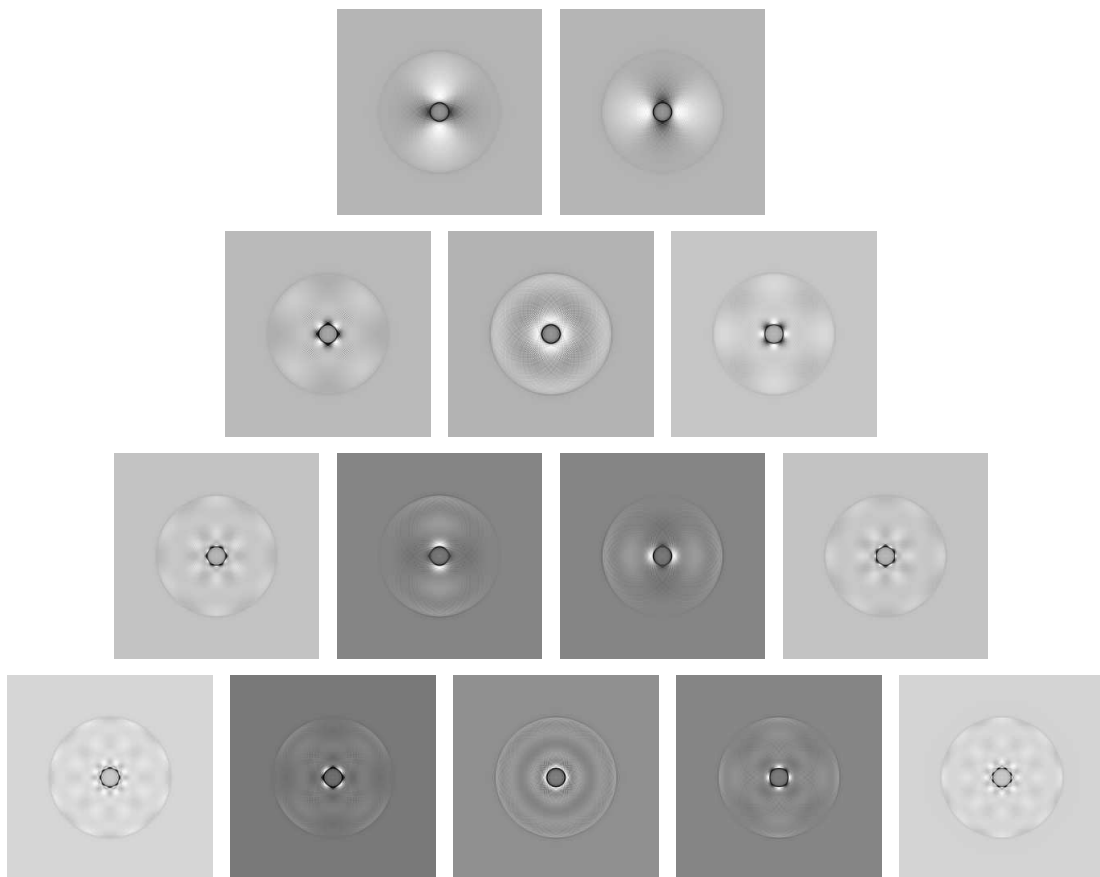


Figure 9.32 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike.  
Cône sans modulation.

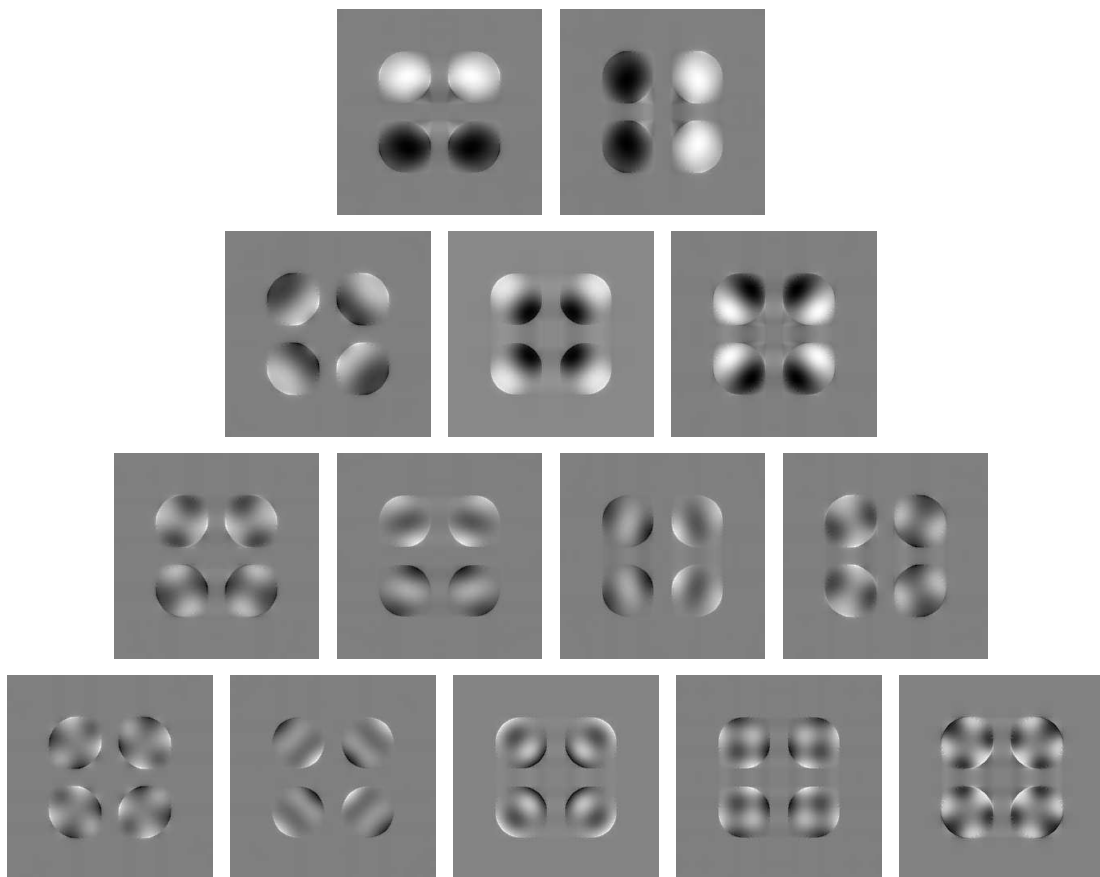


Figure 9.33 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec  $r_m/f=1\lambda/D$ .

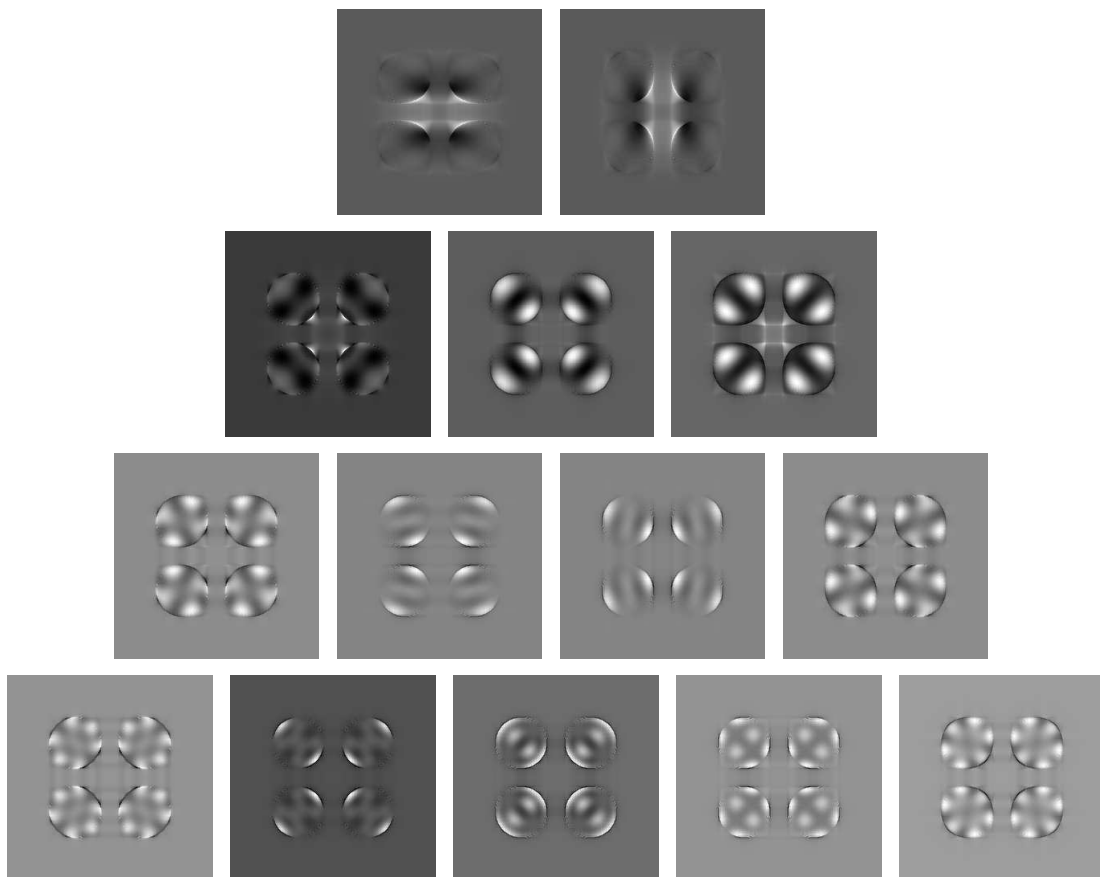


Figure 9.34 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec  $r_m/f=1\lambda/D$ .

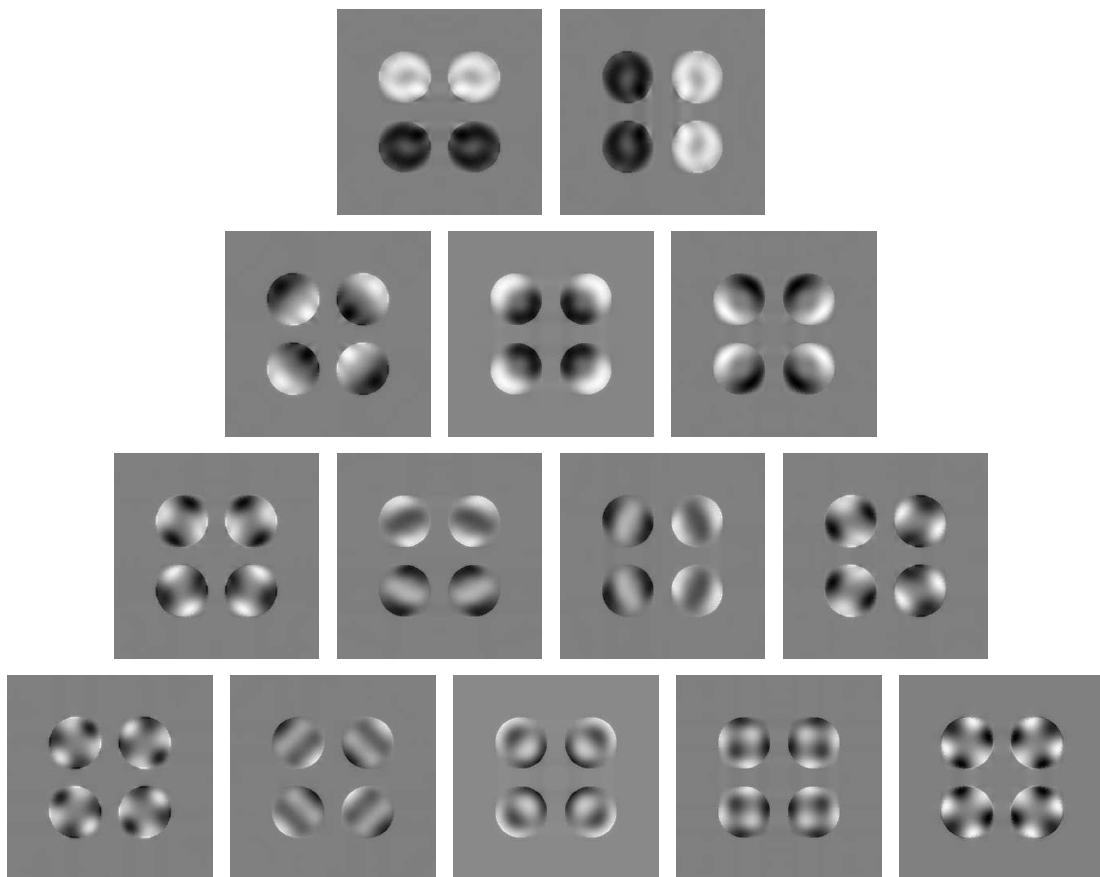


Figure 9.35 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec  $r_m/f=2\lambda/D$ .

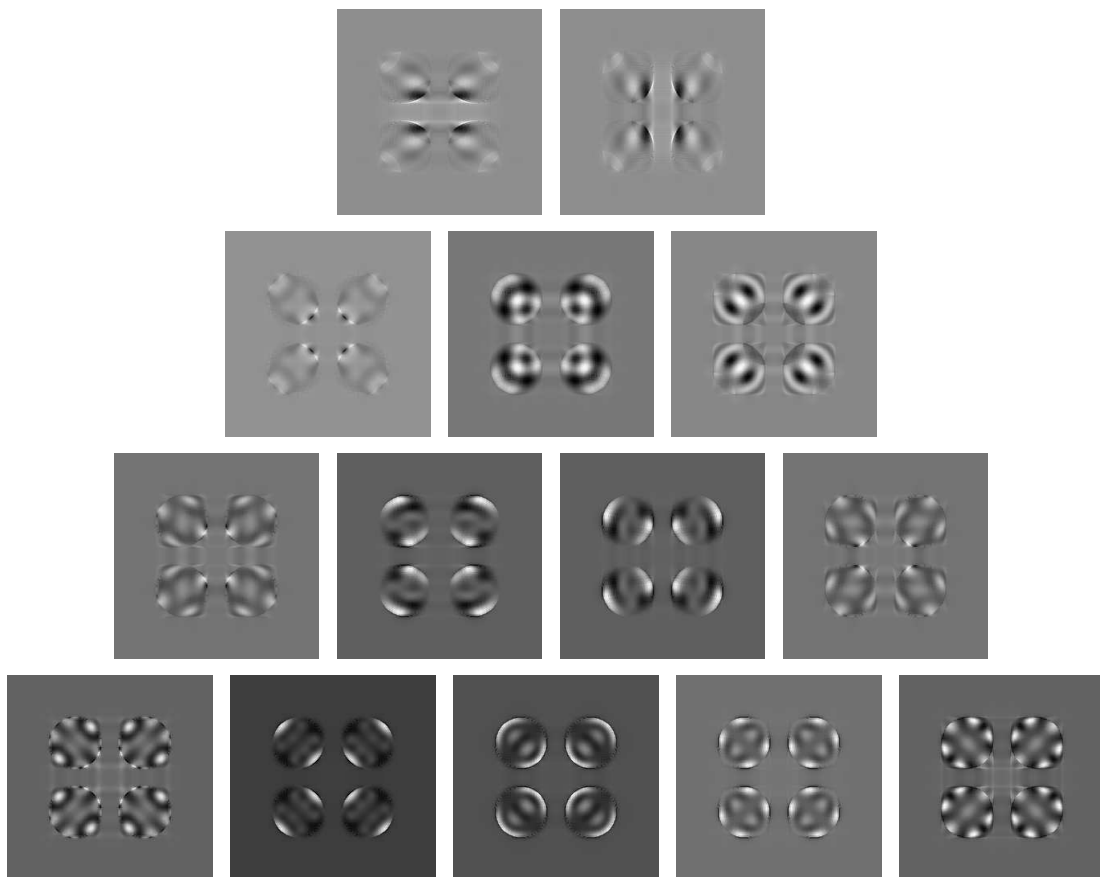


Figure 9.36 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec  $r_m/f=2\lambda/D$ .

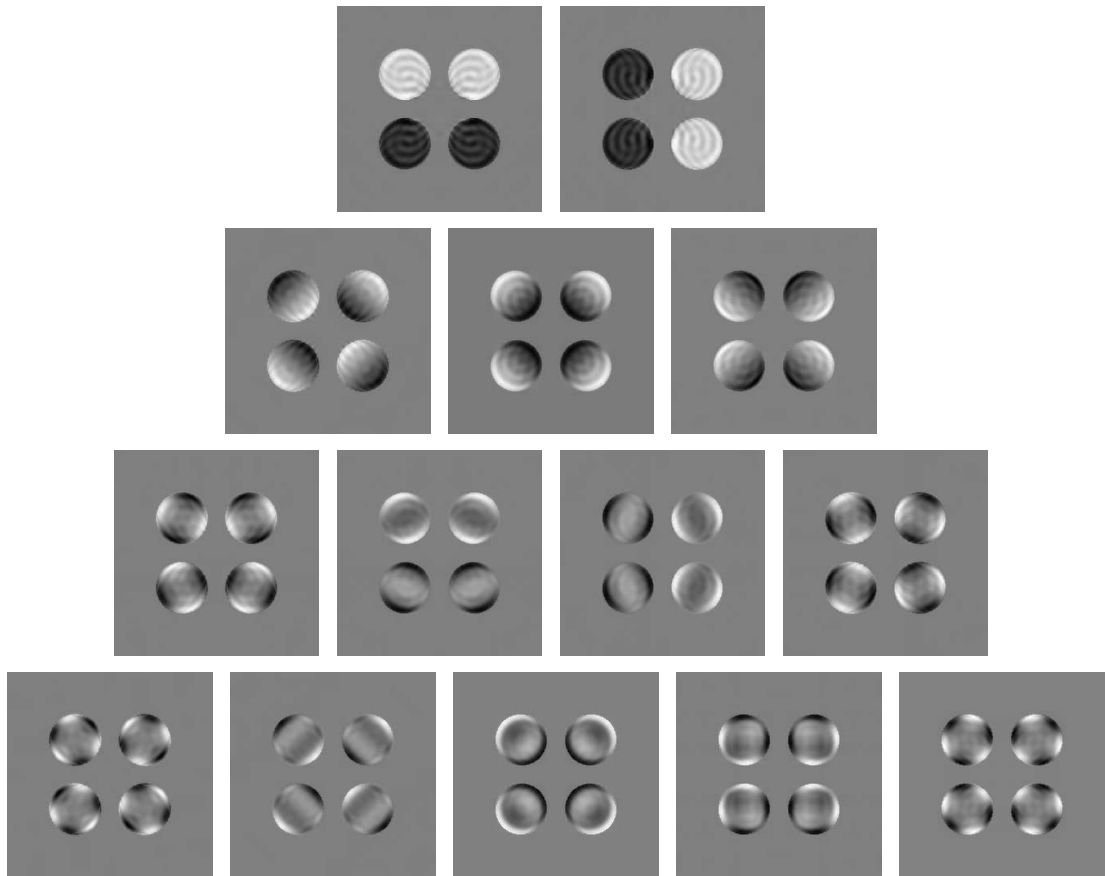


Figure 9.37 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec  $r_m/f=5\lambda/D$ .

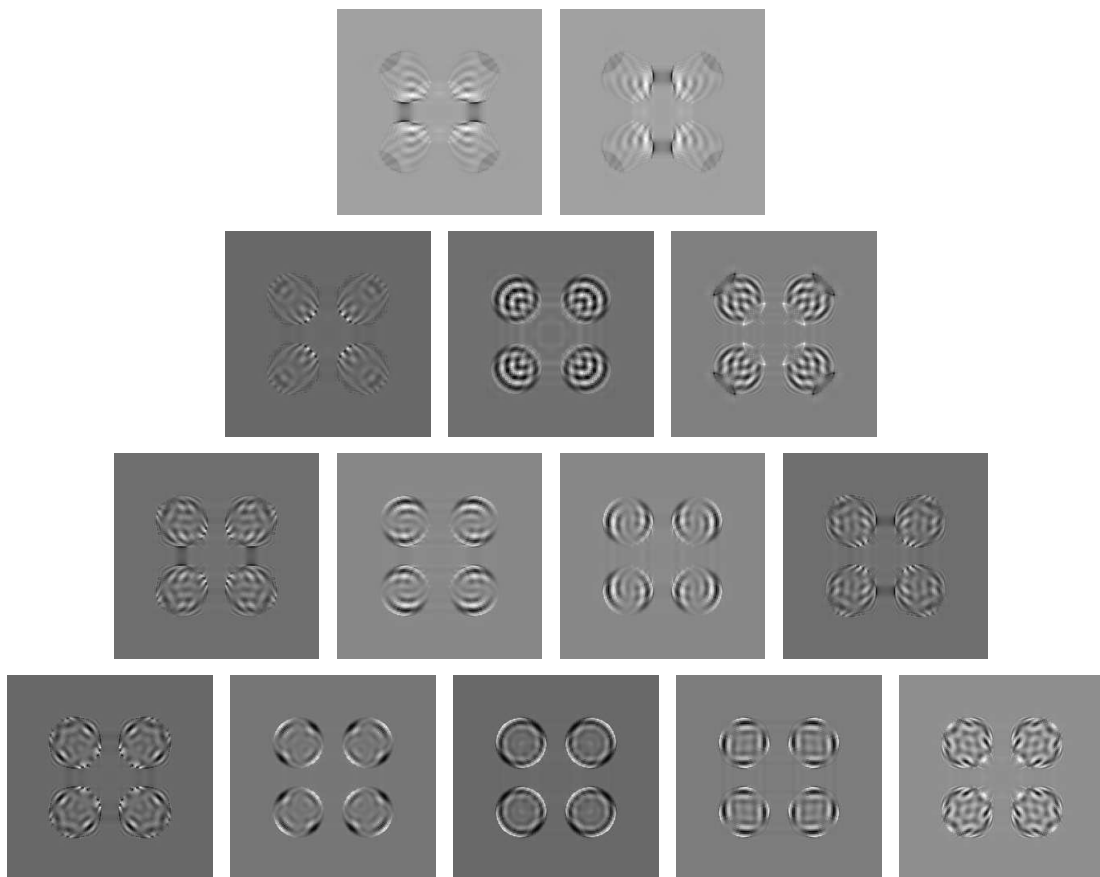


Figure 9.38 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces. Modulation avec  $r_m/f=5\lambda/D$ .



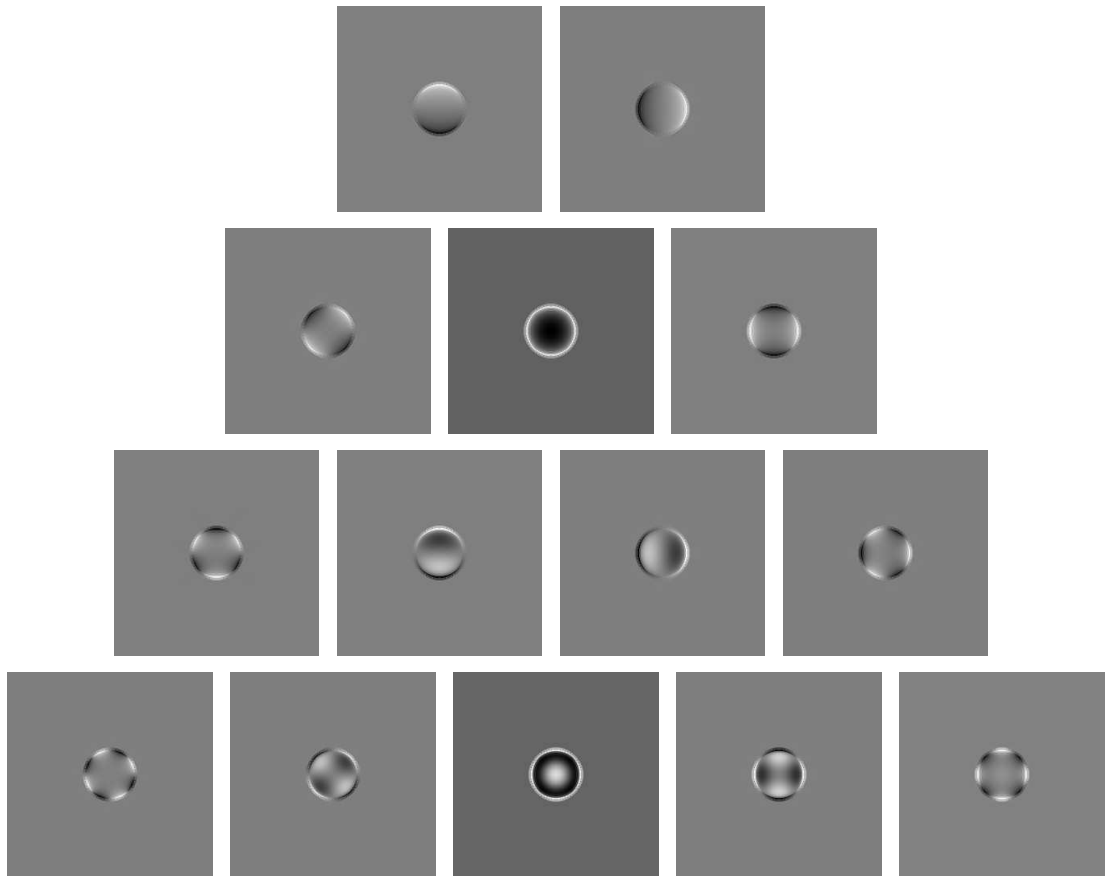


Figure 9.39 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces sans modulation.  $2f\alpha/D=0.05$

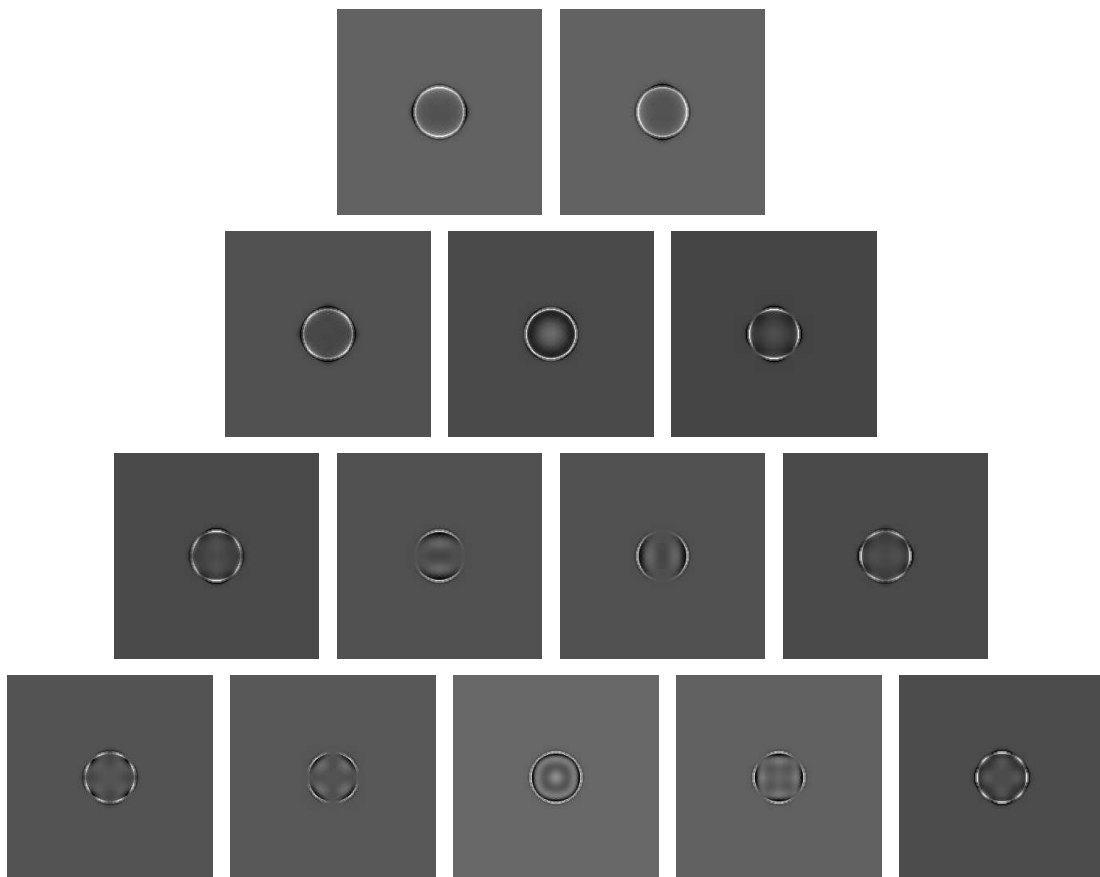


Figure 9.40 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike.  
 Pyramide à 4 faces sans modulation.  $2f\alpha/D=0.05$

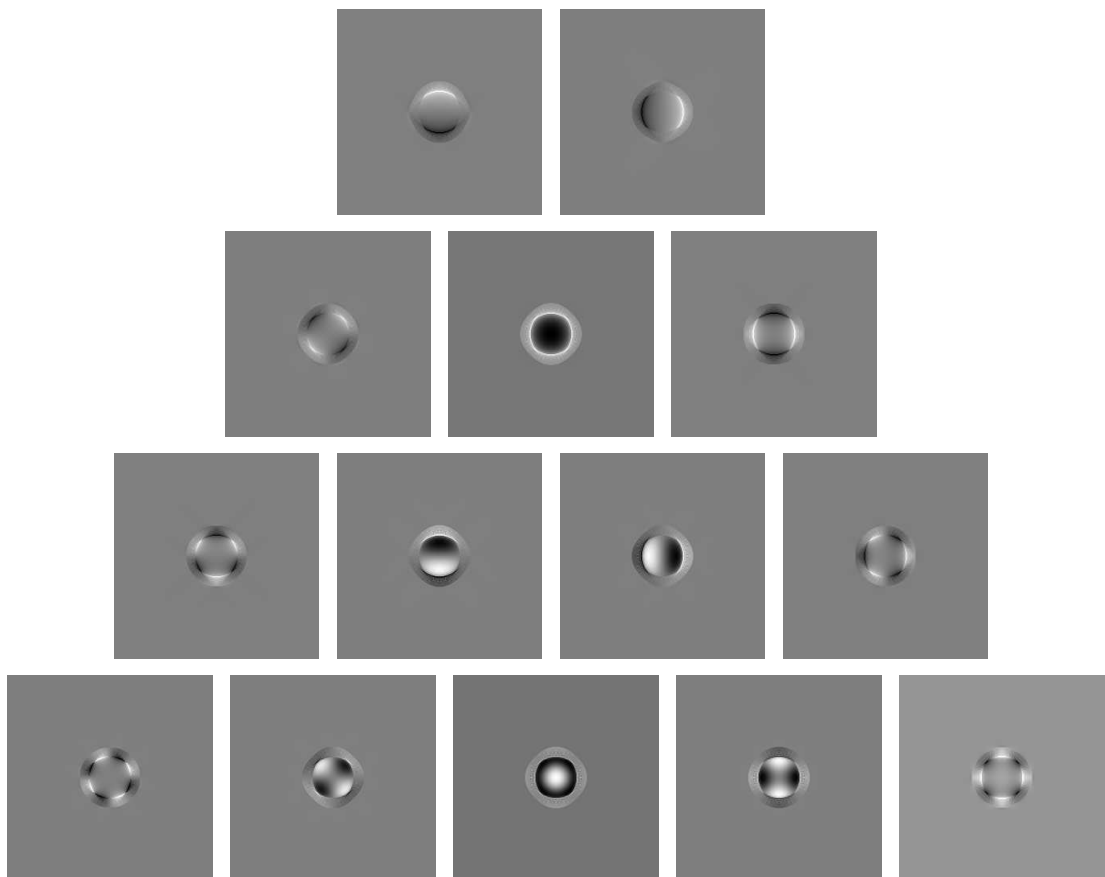


Figure 9.41 – Intensités linéaires pour les 14 premiers polynômes de Zernike. Pyramide à 4 faces sans modulation.  $2f\alpha/D=0.15$

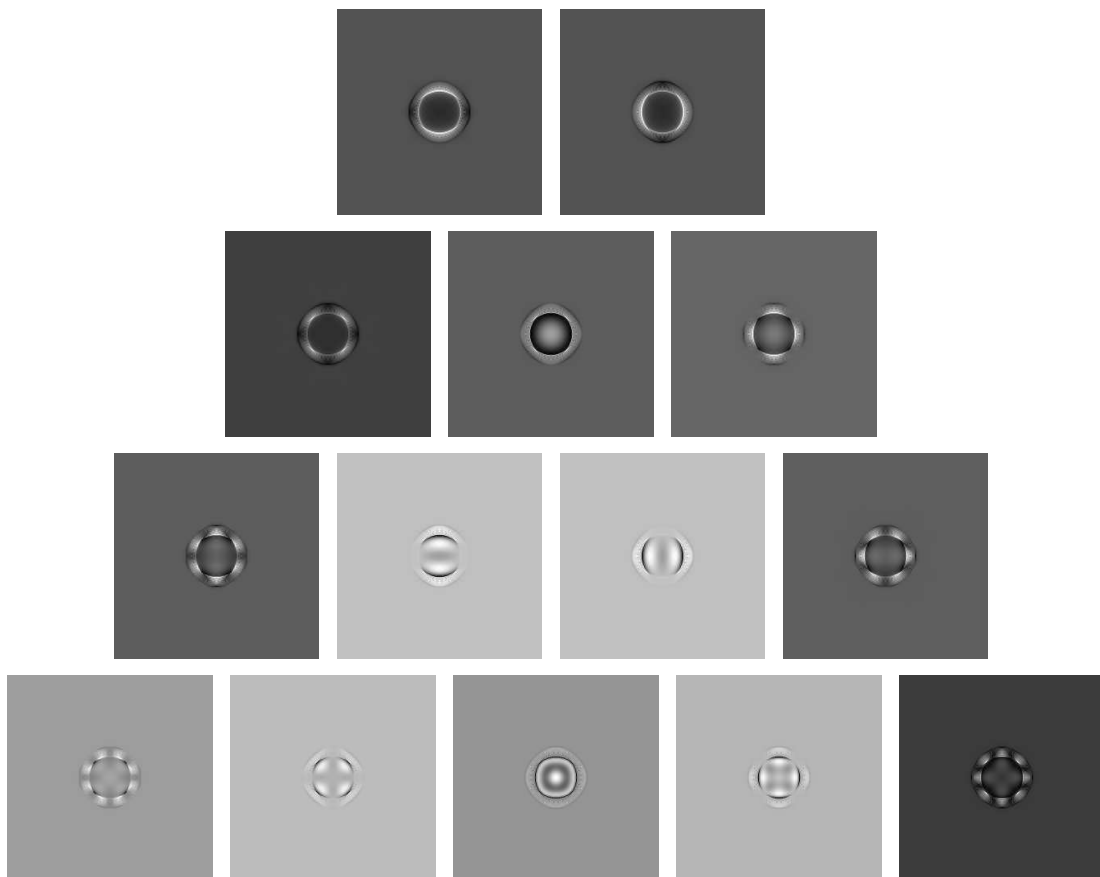


Figure 9.42 – Intensités quadratiques pour les 14 premiers polynômes de Zernike.  
 Pyramide à 4 faces sans modulation.  $2f\alpha/D=0.15$

# 10 Analyseur Pyramide : compléments analytiques

Ce chapitre complète le précédent au sens où il apporte des éléments analytiques concernant la classe Pyramide. Du fait de la grande difficulté mathématique d'obtenir les réponses impulsionnelles associées aux éléments de pavages  $\Omega_{i/n}$  lorsque  $n \neq 4$ , on limite notre étude aux ASO usant d'un **masque pyramidal à 4 faces**. Les résultats issus de ce chapitre sont à mettre dans la continuité de ceux obtenus dans les articles [Ragazzoni and Farinato, 1999], [Vérinaud, 2004] et [Guyon, 2005].

## 10.1 Description analytique des masques pyramidaux à 4 faces

### 10.1.1 Formalisme des pavages

Les paramètres de pavages sont :

$$m_{\Delta_4} : \begin{aligned} & \{\Omega^{++}, 1, 0, \alpha, \alpha\} \\ & \{\Omega^{--}, 1, 0, -\alpha, -\alpha\} \\ & \{\Omega^{+-}, 1, 0, \alpha, -\alpha\} \\ & \{\Omega^{-+}, 1, 0, -\alpha, \alpha\} \end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle associée à  $m_{\Delta_4}$  est donc de la forme :

$$\begin{aligned} \delta_{m_{\Delta_4}}^\psi(x_d, y_d) = & \delta_{\Omega^{++}}^\psi(x_d - \alpha, y_d - f\alpha) + \delta_{\Omega^{--}}^\psi(x_d + \alpha, y_d + f\alpha) + \\ & \delta_{\Omega^{-+}}^\psi(x_d + \alpha, y_d - f\alpha) + \delta_{\Omega^{+-}}^\psi(x_d - \alpha, y_d + f\alpha) \end{aligned} \quad (10.1)$$

L'expression des réponses impulsionnelles des éléments du pavage cartésien  $\delta_{\Omega^{\pm\pm}}^\psi$  est donnée dans le chapitre 3. De l'équation (10.1) on peut déduire l'**opérateur de filtrage** associé au masque pyramidal à 4 faces :

$$\mathcal{W}_{\Delta_4} = \mathcal{T}_{f\alpha, f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{++}} + \mathcal{T}_{-f\alpha, -f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{--}} + \mathcal{T}_{-f\alpha, f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{-+}} + \mathcal{T}_{f\alpha, -f\alpha} \circ \mathcal{W}_{\Omega^{+-}} \quad (10.2)$$

où les  $\mathcal{T}_{\pm f\alpha, \pm f\alpha}$  sont les opérateurs de translation associés aux pentes des 4 faces de la pyramide et les  $\mathcal{W}_{\Omega^{\pm\pm}}$  sont les opérateurs de filtrage associés aux quatre éléments du pavage cartésien (cf. paragraphe 3.3) :

$$\mathcal{W}_{\Omega^{++}} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}) - \frac{i}{4}(\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x) \quad (10.3)$$

$$\mathcal{W}_{\Omega^{+-}} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy}) + \frac{i}{4}(\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x) \quad (10.4)$$

$$\mathcal{W}_{\Omega^{-+}} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy}) - \frac{i}{4}(\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x) \quad (10.5)$$

$$\mathcal{W}_{\Omega^{--}} = \frac{1}{4}(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}) + \frac{i}{4}(\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x) \quad (10.6)$$

Les seuls opérateurs nécessaires au filtrage de Fourier par un masque pyramidal à 4 faces sont donc l'opérateur identité  $\mathcal{I}$  et les trois opérateurs de Hilbert  $\mathcal{H}_x$ ,  $\mathcal{H}_y$  et  $\mathcal{H}_{xy}$ . D'autre part on remarque que les parties réelles et imaginaires des opérateurs de filtrage  $\mathcal{W}_{\Omega^{\pm\pm}}$  vérifient :

$$\mathcal{W}_{\Omega^{++}}^{\Re} = \mathcal{W}_{\Omega^{--}}^{\Re} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\Omega^{++}}^{\Im} = -\mathcal{W}_{\Omega^{--}}^{\Im} \quad (10.7)$$

$$\mathcal{W}_{\Omega^{+-}}^{\Re} = \mathcal{W}_{\Omega^{-+}}^{\Re} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\Omega^{+-}}^{\Im} = -\mathcal{W}_{\Omega^{-+}}^{\Im} \quad (10.8)$$

Ces relations s'expliquent par le fait que les éléments de pavage  $\Omega^{++}$  et  $\Omega^{--}$  (ainsi que  $\Omega^{+-}$  et  $\Omega^{-+}$ ) sont symétriques par rapport à l'origine du plan focal :

$$\mathbb{I}_{\Omega^{--}} = \mathcal{G}_{-1}[\mathbb{I}_{\Omega^{++}}] \quad \text{et} \quad \mathbb{I}_{\Omega^{-+}} = \mathcal{G}_{-1}[\mathbb{I}_{\Omega^{+-}}] \quad (10.9)$$

### 10.1.2 Champ sur le détecteur

On donne l'exemple sur la figure 10.1 des parties réelles et imaginaires du champ détecteur lorsque le champ incident (sans phase aberrante) est filtré par l'élément de pavage  $\Omega^{++}$ . Physiquement, ce champ détecteur ne contient que les fréquences spatiales de l'élément  $\Omega^{++}$  du plan de Fourier, c'est-à-dire les  $f_x > 0$  et  $f_y > 0$ .

On note que ce champ  $\mathcal{W}_{\Omega^{++}}[\mathbb{I}_P]$  prend des valeurs sur le support de l'image géométrique de la pupille mais également sur une croix qui l'entoure. Autrement dit, le **champ incident filtré** par l'élément  $\Omega^{++}$  a une **extension infinie sur le détecteur**. Ce signal hors pupille provient de l'action des opérateurs de Hilbert sur le champ incident.

Or on sait que le champ total sur le détecteur (pour les 4 faces du masque) consiste en la superposition des champs filtrés  $\mathcal{W}_{\Omega^{\pm\pm}}[\mathbb{I}_P]$  décalés par les opérateurs de translation  $\mathcal{T}_{\pm f\alpha, \pm f\alpha}$ . Ces champs filtrés vont ainsi interférer de par l'extension infinie de chacun d'eux. En d'autres termes, dans l'image de la pupille associée par exemple au quadrant  $\Omega^{++}$ , il y aura également des fréquences issues des quadrants  $\Omega^{+-}$  et  $\Omega^{-+}$ . Il y a donc **communication entre les fré-**

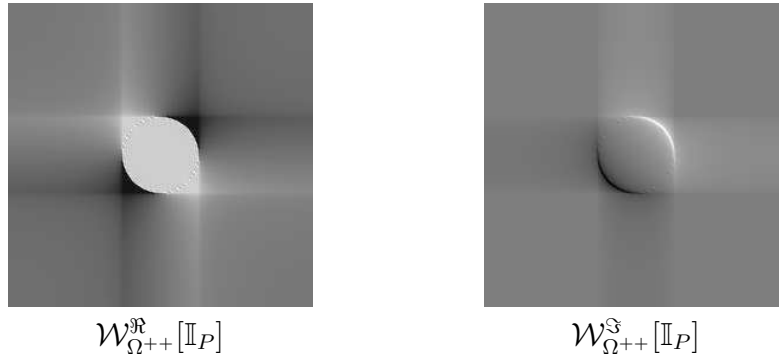


Figure 10.1 – Partie réelle et partie imaginaire du champ sur le détecteur lors d'un filtrage par l'élément  $\Omega^{++}$ .

**quences spatiales** à cause de ces effets de diffraction.

Les pyramides aplaties ( $0 < 2f\alpha/D < 1$ ) subiront un maximum de communication entre les fréquences des 4 quadrants tandis qu'elle est nettement moins marquée pour les pyramides classiques et cela d'autant plus que  $\alpha$  sera grand. On note que le cas asymptotique d'un angle infini et qui sépare absolument les fréquences spatiales est impossible à réaliser en transmission, c'est-à-dire avec des pyramides transparentes mais qu'il est tout-à-fait réalisable pour une pyramide en réflexion (voir [Wang et al., 2010a]). Les quatre images de la pupille d'entrée sont alors créées sur quatre détecteurs différents. Ce design évite toute communication entre les fréquences spatiales des différents quadrants du pavage et a l'avantage d'être descriptible analytiquement. C'est d'ailleurs ce à quoi on s'attèle dans le paragraphe suivant.

### 10.1.3 Pyramide à angle infini

On étudie analytiquement le cas de la pyramide réflexive, ce qui revient à considérer son angle  $\alpha$  comme infini. À chaque quadrant est donc associé une intensité. On suppose par ailleurs que la modulation est inactive et que la phase de référence est nulle, si bien que les quatre intensités ont pour expressions :

$$I^{++} = |\mathcal{W}_{\Omega^{++}}[\mathbb{I}_P e^{i\phi}]|^2 \quad (10.10)$$

$$I^{+-} = |\mathcal{W}_{\Omega^{+-}}[\mathbb{I}_P e^{i\phi}]|^2 \quad (10.11)$$

$$I^{-+} = |\mathcal{W}_{\Omega^{-+}}[\mathbb{I}_P e^{i\phi}]|^2 \quad (10.12)$$

$$I^{--} = |\mathcal{W}_{\Omega^{--}}[\mathbb{I}_P e^{i\phi}]|^2 \quad (10.13)$$

À ces quatre quantités on peut associer des  $q$ -intensités (cf. paragraphe 4.2.5.1).  
On obtient pour l'ordre  $q=0$  :

$$I_{\text{constante}}^{++} = \frac{1}{16} \left( (\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \right)^2 + \frac{1}{16} \left( (\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right)^2 \quad (10.14)$$

$$I_{\text{constante}}^{+-} = \frac{1}{16} \left( (\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \right)^2 + \frac{1}{16} \left( (\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right)^2 \quad (10.15)$$

$$I_{\text{constante}}^{-+} = \frac{1}{16} \left( (\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \right)^2 + \frac{1}{16} \left( (\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right)^2 \quad (10.16)$$

$$I_{\text{constante}}^{--} = \frac{1}{16} \left( (\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \right)^2 + \frac{1}{16} \left( (\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right)^2 \quad (10.17)$$

$$(10.18)$$

On remarque notamment que :

$$I_{\text{constante}}^{++} = I_{\text{constante}}^{--} \quad \text{et} \quad I_{\text{constante}}^{+-} = I_{\text{constante}}^{-+} \quad (10.19)$$

Pour les intensités linéaires  $q=1$ , on obtient :

$$I_{\text{linéaire}}^{++}(\phi) = \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \times (\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P \phi] \right) - \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P \phi] \times (\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right) \quad (10.20)$$

$$I_{\text{linéaire}}^{+-}(\phi) = \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \times (-\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P \phi] \right) + \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P \phi] \times (\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right) \quad (10.21)$$

$$I_{\text{linéaire}}^{-+}(\phi) = \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \times (\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P \phi] \right) - \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P \phi] \times (\mathcal{H}_y - \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right) \quad (10.22)$$

$$I_{\text{linéaire}}^{--}(\phi) = -\frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P] \times (\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P \phi] \right) + \frac{1}{8} \left( (\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy})[\mathbb{I}_P \phi] \times (\mathcal{H}_y + \mathcal{H}_x)[\mathbb{I}_P] \right) \quad (10.23)$$

On remarque encore une fois un lien entre les intensités associées à des quadrants symétriques :

$$I_{\text{linéaire}}^{++} = -I_{\text{linéaire}}^{--} \quad \text{et} \quad I_{\text{linéaire}}^{+-} = -I_{\text{linéaire}}^{-+} \quad (10.24)$$



Ceci se généralise d'ailleurs pour la suite des  $q$ -intensités, on a en effet :

$$I_{2q}^{++} = I_{2q}^{--} \quad \text{et} \quad I_{2q}^{+-} = I_{2q}^{-+} \quad (10.25)$$

$$I_{2q+1}^{++} = -I_{2q+1}^{--} \quad \text{et} \quad I_{2q+1}^{+-} = -I_{2q+1}^{-+} \quad (10.26)$$

On sera cependant très prudent sur la validité des relations (10.25) et (10.26) puisque pour les obtenir nous avons supposé une phase de référence nulle. Ces relations de symétrie portant sur les intensités paires et impaires sont extrêmement intéressantes puisqu'elles permettent d'envisager des traitements numériques linéaires qui annuleraient les dépendances de l'intensité en puissances paires de la phase.

## 10.2 De nouvelles méta-intensités

### 10.2.1 Un premier exemple

Pour annuler les dépendances en puissances paires, on va suivre la démarche des transformations **TO** présentées dans le chapitre 1. On rappelle qu'elle consiste à trier l'information suivant l'intérêt qu'on lui porte via une matrice orthogonale pour n'en garder ensuite que l'information pertinente via une matrice de troncature. Dans notre cas, l'information utile correspond aux intensités impaires puisque l'intensité linéaire en fait partie et l'information indésirable correspond aux intensités paires. Observant les équations (10.25) et (10.26), la solution la plus simple pour scinder les supports des intensités paires et impaires consiste à effectuer :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{++} \\ I^{+-} \\ I^{-+} \\ I^{--} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \sum_{q=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{2q}^{++} \\ I_{2q}^{+-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{2q+1}^{++} \\ I_{2q+1}^{+-} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.27)$$

On rajoute ensuite l'étape de troncature à la suite de la transformation de l'équation (10.27), on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{++} \\ I^{+-} \\ I^{-+} \\ I^{--} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \sum_{q=0}^{\infty} \begin{pmatrix} I_{2q+1}^{++} \\ I_{2q+1}^{+-} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.28)$$

On reconnaît là une transformation typique **TO** :

$$\mathbf{TO} \begin{pmatrix} I^{++} \\ I^{+-} \\ I^{-+} \\ I^{--} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_{\text{linéaire}}^{++} \\ I_{\text{linéaire}}^{+-} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} I_{\text{cubique}}^{++} \\ I_{\text{cubique}}^{+-} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (10.29)$$

Partant des 4 intensités, on est donc capable de fabriquer une quantité linéaire au premier ordre avec la phase et dont la première dépendance non-linéaire n'est pas quadratique mais cubique ! De plus, elle ne requiert aucune opération de tare : il suffit juste de combiner les intensités sur les 4 détecteurs pour coder efficacement la phase aberrante. On insiste sur les deux hypothèses assez fortes qui ont permis d'aboutir à ce résultat très prometteur : il faut d'abord travailler avec une pyramide réfléchive qui évite les communications entre les quadrants mais aussi avoir une phase de référence nulle.

## 10.2.2 Cartes de pente

On peut améliorer un peu le traitement de l'équation (10.28) en combinant les intensités  $I^{\pm\pm}$  via une autre matrice orthogonale pour profiter des symétries du problème et gérer éventuellement des communications entre les fréquences spatiales ce qui rendra possible l'usage des masques pyramidaux transparents à angle fini. Une telle transformation se présente comme une opération matricielle **TO** de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{++} \\ I^{+-} \\ I^{-+} \\ I^{--} \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{\infty} \begin{pmatrix} I_{2q+1}^{++} + I_{2q+1}^{+-} \\ I_{2q+1}^{+-} - I_{2q+1}^{++} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

On pose légitimement :

$$S^x \hat{=} \frac{1}{2}(I^{++} + I^{+-} - I^{-+} - I^{--}) \quad (10.31)$$

$$= I_{\text{linéaire}}^{++} + I_{\text{linéaire}}^{+-} + I_{\text{cubique}}^{++} + I_{\text{cubique}}^{+-} + \dots \quad (10.32)$$

$$S^y \hat{=} \frac{1}{2}(I^{++} - I^{+-} + I^{-+} - I^{--}) \quad (10.33)$$

$$= I_{\text{linéaire}}^{++} - I_{\text{linéaire}}^{+-} + I_{\text{cubique}}^{++} - I_{\text{cubique}}^{+-} + \dots \quad (10.34)$$

L'utilisation de la lettre "S" pour désigner ces deux cartes tient à ce qu'elles se nomment dans la littérature "pentes" ou *Slopes* en anglais. Elles furent introduites dans l'article fondateur de Ragazzoni [Ragazzoni, 1996] en association à la pyramide à 4 faces modulée. Leur appellation de "pente" tient au fait que la quantité  $S^x$  (resp.  $S^y$ ) correspond à un **taux d'accroissement** selon les fré-

quences spatiales  $f_x$  (resp.  $f_y$ ). On peut en effet réécrire les cartes  $S^x$  et  $S^y$  de la façon suivante :

$$S^x = \frac{1}{2}(I^{++}+I^{+-}-I^{-+}-I^{--}) \quad (10.35)$$

$$= \frac{1}{2}((I^{++}+I^{+-})-(I^{-+}+I^{--})) \quad (10.36)$$

$$= \frac{1}{2}(I(f_x>0)-I(f_x<0)) \quad (10.37)$$

$$S^y = \frac{1}{2}(I(f_y>0)-I(f_y<0)) \quad (10.38)$$

**Pentes linéaires.** On peut également s'intéresser au terme linéaire de  $S^x$  et  $S^y$ . On obtient alors les équations déjà apparues dans [Shatokhina et al., 2011] qui correspondent à une généralisation à deux dimensions des calculs de l'article [Vérinaud, 2004] :

$$S_{\text{linéaire}}^x = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_P \mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P \phi] - \mathbb{I}_P \phi \mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P] - \mathcal{H}_{xy}[\mathbb{I}_P] \mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P \phi] + \mathcal{H}_{xy}[\mathbb{I}_P \phi] \mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P]) \quad (10.39)$$

$$S_{\text{linéaire}}^y = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_P \mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P \phi] - \mathbb{I}_P \phi \mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P] - \mathcal{H}_{xy}[\mathbb{I}_P] \mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P \phi] + \mathcal{H}_{xy}[\mathbb{I}_P \phi] \mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P]) \quad (10.40)$$

Se souvenant que les opérateurs de Hilbert prennent des valeurs notables là où la quantité sur laquelle ils s'appliquent varie, on peut supposer que tous les termes contenant  $\mathcal{H}[\mathbb{I}_P]$  sont négligeables. Aussi les pentes linéaires peuvent s'approxi-mer comme :

$$S_{\text{linéaire}}^x \approx \frac{1}{4} \mathbb{I}_P \mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P \phi] \quad (10.41)$$

$$S_{\text{linéaire}}^y \approx \frac{1}{4} \mathbb{I}_P \mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P \phi] \quad (10.42)$$

Le signal pertinent dans les deux cartes de pente est donc majoritairement contenu dans l'image de la pupille d'entrée et directement lié à la transformée de Hilbert (selon  $x$  ou  $y$ ) de la phase.

**Résumé.** Les avantages des cartes de pente  $S^x$  et  $S^y$  sont nombreux :

- Elles ne nécessitent **pas d'opération de tare**. L'intensité sur le détecteur suffit à la construction d'une quantité linéaire au premier ordre avec la phase.
- Elles fonctionnent tant pour la pyramide réflexive que pour la pyramide à angle fini. La transformation **TO**, de par la symétrie des combinaisons qu'elle effectue **prend en compte les effets de diffraction**.
- Les cartes des pentes ont une **interprétation physique aisée** puisqu'elles correspondent au premier ordre aux transformées de Hilbert selon  $x$  et  $y$

de la phase.

- Les cartes  $S^x$  et  $S^y$  ne contiennent aucune dépendance en puissance paire de la phase. La **première dépendance non-linéaire est cubique**.
- Le **nombre de méta-pixels** nécessaires à l'analyse de front d'onde est **divisé par 2** par rapport à une utilisation plein capteur : on passe de 4 images de la pupille d'entrée à seulement 2. L'algorithme numérique de reconstruction s'en trouve accéléré.
- Il n'y a **aucune perte de sensibilité** conséquente au traitement des cartes de pente puisque la matrice de troncature ne coupe aucun signal linéaire avec la phase.

**Cas d'une phase de référence non nulle.** Il faut malheureusement noter que ces intéressantes propriétés ne sont plus valides lorsque la phase de référence n'est pas nulle. Celle-ci rompt les symétries du système et rendent les équations (10.25) et (10.26) caduques : il n'existe plus d'équations simples pour relier les intensités paires ou impaires associées aux quatre faces. Il est néanmoins possible de construire des cartes de pente linéaires au premier ordre si l'on prend soin d'effectuer l'opération de tare au préalable. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{++}-I^{++}(0) \\ I^{+-}-I^{+-}(0) \\ I^{-+}-I^{-+}(0) \\ I^{--}-I^{--}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^x \\ S^y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.43)$$

Ce qui peut s'écrire directement à l'aide de la **méta-intensité minimale** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mI^{++} \\ mI^{+-} \\ mI^{-+} \\ mI^{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^x \\ S^y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

Notons que cette formule reste valide si la phase de référence est nulle. Elle montre que dans l'absolu l'opération de tare est toujours la première opération à effectuer sur une intensité. Par ailleurs on retrouve avec l'équation (10.44) l'exact cadre du chapitre 1 définissant les transformations **TO**.

### 10.2.3 Autres cartes des pentes

Historiquement –c'est-à-dire dans l'article [Ragazzoni, 1996]–, la définition des cartes de pente n'était pas celle des équations (10.35) et (10.38) mais :

$$S^x = \frac{I^{++}+I^{+-}-I^{-+}-I^{--}}{I^{++}+I^{+-}+I^{-+}+I^{--}} \quad (10.45)$$

$$S^y = \frac{I^{++}+I^{-+}-I^{+-}-I^{--}}{I^{++}+I^{+-}+I^{-+}+I^{--}} \quad (10.46)$$

Une étape de normalisation était donc rajoutée en plus de l'opération des taux d'accroissement selon  $x$  et  $y$ . Celle-ci était faite grâce à une carte égale à la somme des quatre intensités  $I^{\pm\pm}$ . Elle permettait d'une part de prendre en compte le flux mais aussi d'assurer que les méta-pixels soient de valeur absolue bornée, on a en effet :

$$0 \leq |S^x|, |S^y| \leq 1 \quad (10.47)$$

On restera toutefois un peu dubitatif quant à une telle saturation. Ce phénomène fait rarement bon ménage avec la linéarité qui est par essence non bornée. On s'attend donc à ce que ces cartes de pentes soient moins linéaires que celles définies dans les équations (10.35) et (10.38). Les termes au numérateur viennent d'être étudiés aussi on se focalise sur le dénominateur :

$$I^{++}+I^{+-}+I^{-+}+I^{--} = 2 \sum_{q=0}^{\infty} (I_{2q}^{++} + I_{2q}^{+-}) \quad (10.48)$$

On note donc que la **carte de normalisation dépend de la phase injectée**, et cela quadratiquement ! Et du fait qu'elle agit en tant que dénominateur, se rajoute l'opération "inverse" qui n'est pas linéaire. En d'autres termes, normaliser par la carte (10.48) va à l'encontre de la linéarité puisqu'elle rajoute une dépendance quadratique quand les opérations au numérateur l'avaient annulée. On préfère donc les cartes de pentes n'utilisant pas la carte de normalisation précédente mais une carte uniforme, indépendante de la phase et égale au flux total, ce qui est équivalent à faire suivre l'opération **TO** :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.49)$$

à la transformation "méta-intensité minimale normalisée".

\*  
\* \*

Ce chapitre assez formel a fait le lien entre les méta-intensités générales utilisées tout le long de l'exposé et les cartes des pentes habituellement manipulées avec l'ASO Pyramide. On a noté que les pentes découlent des méta-intensités via une simple transformation TO. On note que cette opération numérique présente de nombreux intérêts : elle fait disparaître les non-linéarités d'ordre pair sans perdre d'information linéaire. Le nombre de méta-pixels à gérer est donc divisé par deux sans aucune perte de sensibilité. D'autre part aucune opération de tare n'est nécessaire en absence de phase de référence. L'intensité sur le capteur se suffit à elle-même pour effectuer l'analyse de front d'onde.

On précise que cette étude analytique peut être poussée un peu plus loin lorsque l'on restreint la pyramide à 1 dimension. Ce cas est évoqué dans l'annexe D. Y sont donnés des résultats qui, de l'humble avis de l'auteur, sont d'une élégance mathématique surprenante même si leur intérêt pratique est probablement discutable.

# 11 Analyse de front d'onde par filtrage de Fourier et déconvolution

Cet ultime chapitre est à part puisqu'on y aborde une **méthode de reconstruction** du front d'onde **qui n'est pas basée sur le formalisme matriciel** mais sur la déconvolution. Celle-ci s'applique aux systèmes **linéaires** ayant une relation entrée/sortie de la forme :

$$\text{Sortie} = \text{Entrée} \star \text{Réponse impulsionnelle du système} \quad (11.1)$$

L'aspect fondamental de cette équation tient au fait que l'opération convolution  $\star$  est inversible dès lors que la réponse impulsionnelle du système est connue. Dans le cadre qui est le nôtre, on cherche donc à savoir si il est possible d'exprimer la sortie d'un ASO à filtrage de Fourier, c'est-à-dire son *méta-intensité*, comme un produit de convolution entre la *phase* et une quantité qui correspondrait à la *réponse impulsionnelle de l'ASO*

## 11.1 Déconvolution

On commence par décrire l'opération de déconvolution en prenant la transformée de Fourier de la relation 11.1 :

$$\mathcal{F}[\text{Sortie}] = \mathcal{F}[\text{Entrée}] \times \mathcal{F}[\text{Réponse impulsionnelle du système}] \quad (11.2)$$

La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle est appelée **fonction de transfert du système** que l'on notera **FTA**. On aura donc :

$$\mathcal{F}[\text{Sortie}] = \mathcal{F}[\text{Entrée}] \times \mathbf{FTA} \quad (11.3)$$

La méthode la plus intuitive pour remonter à l'entrée en partant de la sortie consiste donc à effectuer l'opération dite de **déconvolution** :

$$\text{Entrée} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{F}[\text{Sortie}]}{\mathbf{FTA}} \right] \quad (11.4)$$

On s'inquiète cependant de la nécessité pour déconvoluer de diviser par la fonction de transfert. Il peut en effet arriver que des infinis émergent là où la **FTA** prend des valeurs nulles ou très faibles. Une approche plus robuste consiste donc à préférer l'approche suivante :

$$\text{Entrée} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\overline{\text{FTA}} \times \mathcal{F}[\text{Sortie}]}{|\text{FTA}|^2 + \text{Régularisation}} \right] \quad (11.5)$$

où le terme "Régularisation" est une carte de la même taille que la **FTA** qui vaut l'infini là où les pixels de cette dernière sont trop faibles, typiquement 1% de la moyenne de la **FTA**. Cette technique initialement proposé par Wiener introduit légitimement le filtre *inverse* de la **FTA**, appelé filtre de Wiener, noté **W** et défini comme :

$$\mathbf{W} \triangleq \frac{\overline{\text{FTA}}}{|\text{FTA}|^2 + \text{Régularisation}} \quad (11.6)$$

L'opération de déconvolution s'écrira alors simplement :

$$\text{Entrée} = \mathcal{F}^{-1} [\mathbf{W} \times \mathcal{F}[\text{Sortie}]] \quad (11.7)$$

## 11.2 Fonction de transfert d'un ASO

On se place dans le cas d'une analyse **monochromatique** avec modulation tip/tilt sans phase de référence. Le champ incident perturbé et diaphragmé est donc supposé de la forme :

$$\mathbb{I}_P e^{i\phi} \quad (11.8)$$

Dans ces conditions, la méta-intensité minimale normalisée s'écrit :

$$mI(\phi) = I(\phi) - I(0) \quad (11.9)$$

$$= \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P e^{i\phi}, \mathbb{I}_P e^{i\phi}] - \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P] \quad (11.10)$$

De rapides investigations montrent qu'il est illusoire d'espérer mettre cette dernière équation sous la forme (11.1) notamment de par le fait que la méta-intensité n'est pas linéaire avec la phase. On se place donc dans le régime des faibles phases et on confond donc la méta-intensité avec l'intensité linéaire. Celle-ci a pour expression :

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) = 2\Im \left[ \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi] \right] \quad (11.11)$$



On se doit donc d'étudier la quantité  $C_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi]$  dont on rappelle l'expression ici :

$$C_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi](X, Y) = \int_{\mathbb{R}^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \mathbb{I}_P(X-x_1, Y-y_1) \mathbb{I}_P(X-x_2, Y-y_2) \phi(X-x_2, Y-y_2) \overline{\delta_m^\psi}(x_2, y_2) \delta_m^\psi(x_1, y_1) \delta_w^\psi(x_2-x_1, y_2-y_1) \quad (11.12)$$

On remarque hélas que cette équation ne permet pas non plus de faire émerger le produit de convolution qui aboutirait à une relation entrée/sortie du type (11.1). On se résigne donc à quelques approximations supplémentaires.

### 11.2.1 Approximation de la pupille infinie

La première s'inspire de l'approximation dite de "pupille infinie" faite dans l'article [Vérinaud, 2004] lors de l'étude de la pyramide modulée à une dimension. Elle consiste à supposer que :

$$C_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi] \approx C_m^w[\mathbb{I}, \mathbb{I}_P \phi] \quad (11.13)$$

Il devient donc possible d'intégrer la seconde partie de l'intégrale (11.12) sur les variables  $x_1$  et  $y_1$ . On remarque alors que l'on peut faire apparaître un produit de convolution entre  $\delta_m^\psi$  et  $\delta_w^\psi$  :

$$C_m^w[\mathbb{I}, \mathbb{I}_P \phi](X, Y) \approx \int_{\mathbb{R}^2} dx_2 dy_2 \mathbb{I}_P(X-x_2, Y-y_2) \phi(X-x_2, Y-y_2) \overline{\delta_m^\psi}(x_2, y_2) (\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi)(x_2, y_2) \quad (11.14)$$

Équation qui peut encore se simplifier en :

$$C_m^w[\mathbb{I}, \mathbb{I}_P \phi] \approx \overline{\delta_m^\psi} (\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi) \quad (11.15)$$

Si l'on revient à l'intensité linéaire, on a donc :

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) \approx (\mathbb{I}_P \phi) \star 2\Im \left[ \overline{\delta_m^\psi} (\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi) \right] \quad (11.16)$$

On peut ainsi identifier la **réponse impulsionnelle de l'ASO** dans le cadre de l'approximation de la pupille infinie comme :

$$2\Im \left[ \overline{\delta_m^\psi} (\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi) \right]$$

Pour comprendre un peu le contenu physique de cette équation, on rappelle les expressions des champs mis en jeu :

$$\begin{aligned}\delta_m^\psi &= \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m] \\ \delta_m^\psi \star \delta_w^\psi &= \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[m] \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[w]\end{aligned}$$

On remarque donc que :

$$\overline{\delta_m^\psi} (\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi) = \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F} [\mathcal{G}_{-1}[\bar{m}] \star (mw)]$$

Cette relation est doublement intéressante. D'abord elle montre que l'obtention numérique de la réponse impulsionnelle de l'ASO sera éminemment aisée et directement déductible de la fonction de transparence du masque  $m$  ainsi que de la fonction de poids de la modulation  $w$ . D'autre part, elle permet d'avoir une double vision "plan focal/plan pupille" de la réponse impulsionnelle. En effet, on se souvient que l'opérateur  $\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}$  est celui qui propage d'un plan focal à un plan pupille et *vice versa*. On retiendra donc que la réponse impulsionnelle dans le cadre de l'approximation de la pupille infinie peut se comprendre<sup>a</sup> soit en plan focal, soit en plan pupille via les deux formules suivantes :

**Plan pupille**

**Plan focal**

$$\overline{\delta_m^\psi} (\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi)$$

$$\mathcal{G}_{-1}[\bar{m}] \star (mw)$$

On comprend donc que le champ  $\delta_m^\psi \star \delta_w^\psi$  correspond à la propagation d'ondelettes sphériques issues des points où  $mw$  est non nul. Le masque  $m$  est ainsi "filtré" par la fonction de poids  $w$ .

On note enfin que la réponse impulsionnelle ne dépend que de  $m$  et de  $w$  mais en aucun cas de la fonction indicatrice de la pupille. On présente dans le paragraphe suivant une approximation plus raffinée qui permet justement de prendre en compte  $\mathbb{I}_P$  dans la réponse impulsionnelle de l'ASO.

## 11.2.2 Approximation de la pupille glissante

On reprend pour cela l'expression de l'opérateur de couplage précédent :

$$\begin{aligned}C_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi](X, Y) &= \int_{\mathbb{R}^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \mathbb{I}_P(X-x_1, Y-y_1) \mathbb{I}_P(X-x_2, Y-y_2) \\ &\quad \phi(X-x_2, Y-y_2) \delta_m^\psi(x_1, y_1) \overline{\delta_m^\psi}(x_2, y_2) \delta_w^\psi(x_2-x_1, y_2-y_1) \quad (11.17)\end{aligned}$$

On y applique l'**approximation de la pupille glissante** qui consiste à supposer que  $\mathbb{I}_P(X-x_1, Y-y_1) = \mathbb{I}_P(x_2-x_1, y_2-y_1)$ . Elle revient à considérer que la pupille

a. Attention, il reste à prendre en compte la partie imaginaire.

glisse avec  $\psi_w^\delta$ . On obtient sous cette hypothèse :

$$C_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi] \approx \mathbb{I}_P \phi \star \overline{\delta_m^\psi} \left( \delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi) \right) \quad (11.18)$$

La nouvelle réponse impulsionnelle de l'ASO est donc :

$$2\mathfrak{S} \left[ \overline{\delta_m^\psi} \left( \delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi) \right) \right] \quad (11.19)$$

On observe cette fois-ci qu'elle dépend bel et bien de la fonction  $\mathbb{I}_P$ . La forme de la pupille est donc prise en compte dans le cadre de l'approximation de la pupille **glissante**.

Un autre façon d'obtenir une telle réponse impulsionnelle découle directement du formalisme exposé dans la première section de ce chapitre. On peut en effet remarquer que la façon la plus simple de remonter à la réponse impulsionnelle en partant de l'équation (11.1) consiste à supposer que l'entrée est égale à un Dirac. Notons en passant que de là vient d'ailleurs l'appellation réponse *impulsionnelle* puisqu'un Dirac n'est rien d'autre qu'une impulsion. Dans le cadre qui est le nôtre, il s'agit donc de considérer que l'entrée est un Dirac de phase. On pourra alors observer que :

$$I_{\text{linéaire}}(\delta) = 2\mathfrak{S} \left[ \overline{\delta_m^\psi} \left( \delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi) \right) \right] \quad (11.20)$$

En d'autres termes, la réponse impulsionnelle dérivée de l'approximation de la pupille glissante est celle qui est la plus proche du formalisme sous-jacent à l'équation 11.1. On peut renouveler l'interprétation "plan focal/plan pupille" du paragraphe précédent :

**Plan pupille**

**Plan focal**

$$\overline{\delta_m^\psi} \left( \delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi) \right) \quad \mathcal{G}_{-1}[\bar{m}] \star \left( m(w \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_P]) \right)$$

Cette fois-ci, la fonction indicatrice de la pupille intervient dans la réponse impulsionnelle. Les champs sélectionnés par la fonction de poids sont maintenant augmentés via le produit de convolution avec  $\mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_P]$ . Cela revient à prendre en compte l'extension spatiale des champs due à la diffraction par la pupille d'entrée qui a un support fini.

**Fonction de transfert.** Elle correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle obtenue dans le cadre de l'approximation de la pupille glissante 11.19. Celle-ci témoignera directement du filtrage spatial de la phase incidente. On peut expliciter sa forme à l'aide de  $m$  et  $w$  :

$$\mathbf{FTA} = \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_P] \left[ \overline{\delta_m^\psi} \left( \delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi) \right) \right] \quad (11.21)$$

$$= \iota(\bar{\mathcal{P}} - \mathcal{I}) \left[ \mathcal{G}_{-1}[\bar{m}] \star \left( m(w \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_P][\mathbb{I}_P]) \right) \right] \quad (11.22)$$

où  $\bar{\mathcal{P}}$  est l'opérateur conjugaison parité<sup>b</sup>. On ne poussera pas plus loin les calculs au vu de la complexité de l'expression précédente et préférons nous lancer dans des simulations numériques portant sur l'ASO Pyramide modulée.

### 11.2.3 Application à la Pyramide modulée

On applique les développements précédents à la pyramide à **4 faces** dans le cas où l'angle sépare les quatre images de la pupille d'entrée  $2f\alpha/D=1.5$ . La modulation est supposée **circulaire** et codée via son rayon de modulation  $r_m/f$  exprimé via l'unité  $\lambda/D$ .

La figure 11.1 donne les fonctions de poids, les réponses impulsionnelles ainsi que les fonctions de transfert pour quatre rayons de modulation : 0, 2, 5 et  $10f\lambda/D$ . Les réponses impulsionnelles sont difficiles à analyser se ressemblant toutes plus ou moins. On notera toutefois qu'elles font apparaître quatre points brillants où seront convoluées les phases ce qui donnera bien quatre images de la pupille. Les croix qui lient ces quatre points sont à l'origine des effets de diffraction. Elles sont de moins en moins brillantes à mesure que le rayon de modulation augmente ce qui corrobore les observations du chapitre précédente : la modulation replace l'énergie lumineuse au sein des quatre images de la pupille d'entrée.

L'examen des fonctions de transfert (colonne de droite) est plus riche en contenu physique. Pour chacune des faces, on observe une oscillation qui est liée à l'angle de la pyramide : plus celui est grand plus l'oscillation est rapide. Il faut en effet se souvenir qu'une épaisseur optique de pente  $\alpha$  donne une phase qui oscille avec une période spatiale de  $\lambda/\alpha$ . Ceci est dû au fait que la phase est toujours vue modulo  $2\pi$ . On remarque par ailleurs une déplétion progressive de la zone centrale avec le rayon de modulation. En songeant au sens physique de la **FTA**, on comprend que les basses fréquences sont de moins en moins bien vues à mesure que la modulation se fait de plus en plus forte. Ce résultat est très rassurant puisqu'il correspond aux comportements classiques de la pyramide. On montre d'ailleurs sur la figure 11.2 la moyenne orthoradiale de la **FTA** à laquelle on superpose la moyenne orthoradiale de la fonction de poids. La fréquence de coupure chez la première correspond exactement à la position du maximum de la seconde.

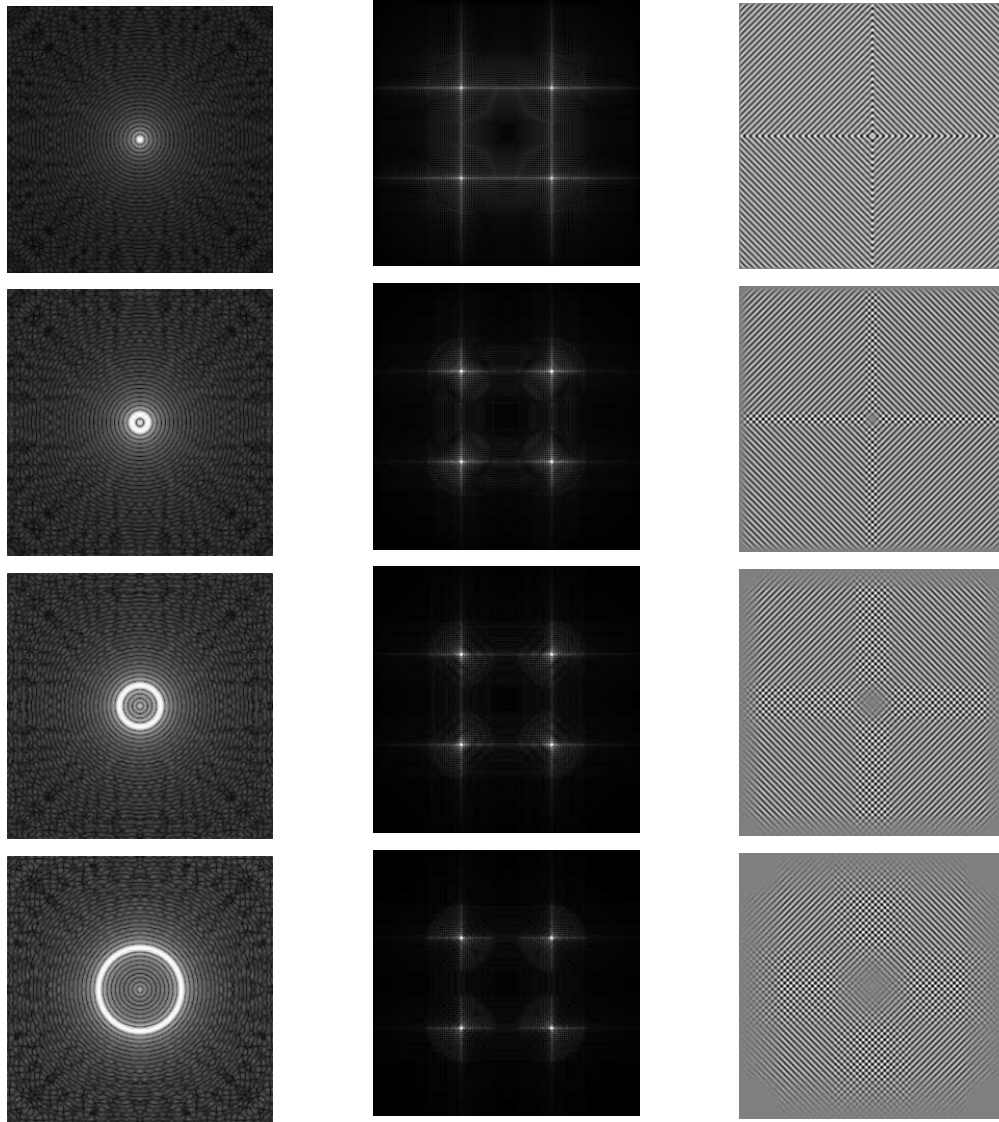
On donne enfin le filtre de Wiener associé à la pyramide à 4 faces, grand angle et modulée à  $10\lambda/D$  sur la figure 11.3.

## 11.3 Reconstruction de la phase

Nous sommes maintenant en capacité de tester l'efficacité de la reconstruction par **déconvolution** via le filtre de Wiener **W**. Mais avant toute chose, on

---

b.  $\bar{\mathcal{P}}[f](x,y) \hat{=} \bar{f}(x,y)$



Fonction de poids  
 $|w \star \mathcal{G}_{f\lambda} \circ \mathcal{F}[\mathbb{I}_P]|^2$

Réponse impulsionnelle  
 $2\Im[\overline{\delta_m^\psi}(\delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi))]$

Fonction de transfert  
 $\mathcal{F}[2\Im[\overline{\delta_m^\psi}(\delta_m^\psi \star (\mathbb{I}_P \delta_w^\psi))]]$

Figure 11.1 – Fonctions de poids, réponses impulsionnelles de l'ASO et **FTA** pour la pyramide à 4 faces à grand angle et pour une modulation circulaire donc le rayon  $r_m$  augmente du haut vers le bas : 0, 2, 5 et  $10f\lambda/D$ .

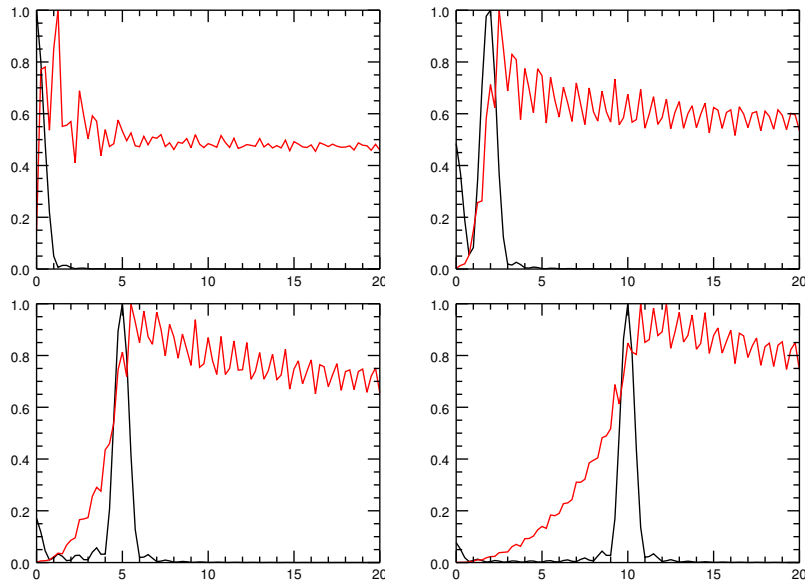


Figure 11.2 – Moyennes orthoradiales de la **FTA** (rouge) et de la fonction de poids (noir) pour des modulations circulaires de rayon égaux à 0, 2, 5 et  $10f\lambda/D$  (de haut en bas, de gauche à droite) en fonctions des fréquences spatiales radiales exprimées en  $f\lambda/D$ .

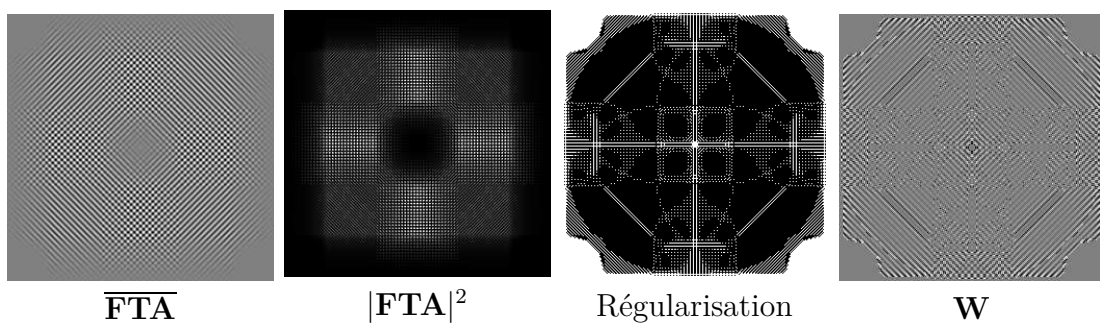


Figure 11.3 – Ingrédients nécessaires à la fabrication du filtre de Wiener **W** (carte de droite). Les pixels blancs (resp. noirs) de la carte de régularisation valent l'infini (resp. zéro).

insiste sur le fait que pour parvenir à des ASO compatibles avec la notion de réponse impulsionnelle, **deux approximations** ont du être faites. La première était celle des **petites phases** qui permettait de confondre la méta-intensité minimale normalisée  $mI$  avec l'intensité linéaire dans le développement de Taylor de l'intensité en puissances de phase. La seconde est celle de la pupille glissante. On distinguera donc la méta-intensité  $mI$ , l'intensité linéaire  $I_{\text{linéaire}}$  et l'**intensité de convolution** notée  $I_{\text{conv}}$  issue de l'approximation de la pupille glissante :

$$mI(\phi) = \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P e^{i\phi}, \mathbb{I}_P e^{i\phi}] - \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P] \quad (11.23)$$

$$I_{\text{linéaire}}(\phi) \underset{\phi \ll 1}{=} 2\Im \left[ \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \mathbb{I}_P \phi] \right] \quad (11.24)$$

$$I_{\text{conv}}(\phi) \underset{\text{Pupille glissante}}{\hat{=}} (\mathbb{I}_P \phi) \star 2\Im \left[ \mathcal{C}_m^w[\mathbb{I}_P, \delta] \right] \quad (11.25)$$

Dans l'absolu, seule l'**intensité de convolution** peut être efficacement inversée par l'opération décrite dans l'équation 11.7. Le signal effectivement accessible à la sortie de l'ASO, à savoir  $mI$ , ne sera hélas pas égal à cette intensité de convolution. On écrira d'ailleurs que :

$$mI(\phi) = I_{\text{conv}}(\phi) + b(\phi) \quad (11.26)$$

où  $b$  est un terme de perturbation d'écart au modèle. Il contiendra les termes non linéaires mais aussi un terme témoignant de la différence entre  $I_{\text{linéaire}}$  et  $I_{\text{conv}}$ . L'enjeu des prochains paragraphes est de montrer qu'en dépit de cet écart au modèle, l'inversion par la méthode de déconvolution est tout de même efficace.

On considère donc une phase  $\phi$  arbitraire que l'on va chercher à retrouver après son passage à travers l'ASO et l'opération de déconvolution. On ne fait aucune hypothèse particulière quant à cette phase, aussi elle ne rentre pas dans le cadre des petites phases et a, pour l'exemple, une norme RMS de 2 radians. Sa structure est donnée sur l'image de gauche de la figure 11.4. La fonction d'étalement de point (FEP) associée à cette phase est donnée sur la figure de gauche de la figure 11.5. On notera celle-ci est très fortement détériorée par la phase aberrante  $\phi$ .

Cette phase passe ensuite par l'ASO et se trouve convertie en une intensité  $I(\phi)$  dont la structure est donnée sur la deuxième image en partant de la gauche de la figure 11.4. On lui soustrait l'intensité constante pour obtenir la méta-intensité minimale  $mI(\phi)$  (image centrale). On applique à  $mI(\phi)$  l'opération de déconvolution basé sur le filtre de Wiener de l'ASO. On obtient alors  $\hat{\phi}$  (image suivante de la figure 11.4). Alors que l'on s'attend à ce que cette phase estimée soit seulement sur le support de la pupille, on s'aperçoit qu'au contraire, elle est définie bien au delà de  $\mathbb{I}_P$ . Ce fait est une conséquence de l'écart entre la méta-intensité  $mI$  et l'intensité de convolution  $I_{\text{conv}}$ . Puisque seule l'information sur

le support de la pupille nous intéresse, on applique donc à la phase estimée la fonction indicatrice de la pupille (image de droite de la figure 11.4).

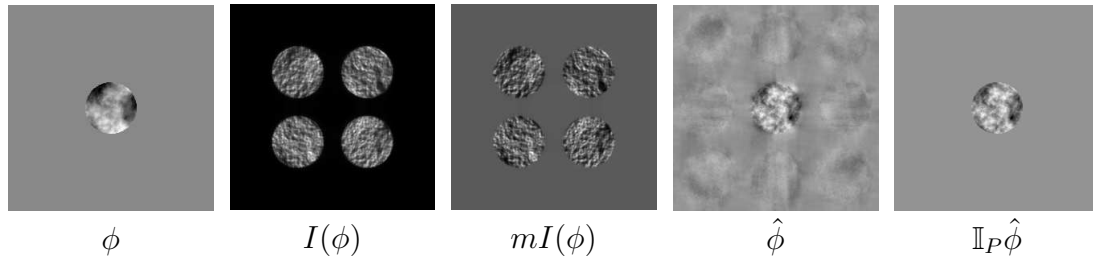


Figure 11.4 – Passage d’une phase  $\phi$  à travers la pyramide modulée ( $r_m=10f\lambda/D$ ) et déconvolution de la méta-intensité résultante.

On estime l’efficacité de la reconstruction en étudiant la phase résiduelle définie comme la différence entre la phase injectée  $\phi$  et la phase estimée  $\mathbb{I}_P\hat{\phi}$  :

$$\phi - \mathbb{I}_P\hat{\phi} \quad (11.27)$$

On donne sur les deux images de droite de la figure 11.5, la structure de cette phase résiduelle ainsi que la FEP associée. Il apparaît d’abord que la reconstruction est loin d’être parfaite puisque la norme RMS du résidu vaut  $1.43 \text{ rad}$  alors qu’on l’espèrerait proche de 0. De plus, on observe que la phase résiduelle semble essentiellement composée de basses fréquences, ceci peut se comprendre de par le fait que l’ASO considéré est une pyramide modulée à grand rayon et donc peu sensible aux basses fréquences spatiales.

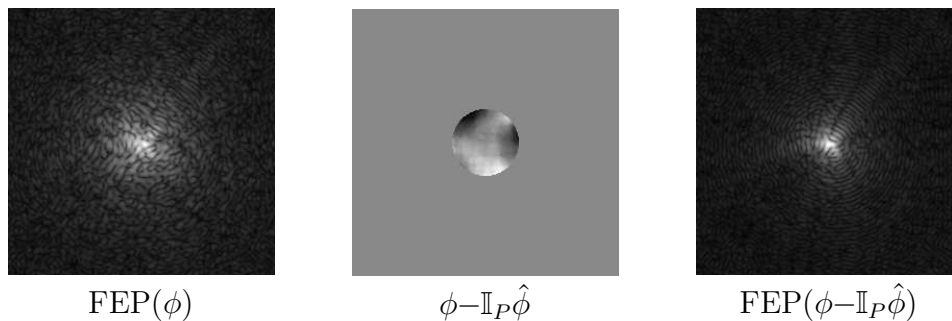


Figure 11.5 – Fonction d’étalement de point associée à la phase  $\phi$  (gauche). Phase résiduelle (milieu) et phase associée (droite).

Puisque la déconvolution n’est pas aussi efficace qu’on le souhaiterait, on construit dans le paragraphe suivant un algorithme de reconstruction inspiré de l’optique adaptative : le test de *bootstrap*. L’idée, somme toute assez simple, consiste à itérer l’opération décrite précédemment : on refait passer la phase résiduelle dans l’ASO et déconvoluer la méta-intensité résultante pour obtenir



une nouvelle phase estimée et le processus se répète. Mathématiquement, cet algorithme se décrit comme une suite de phases  $(\phi_n)$  :

$$\phi_0 = \phi \quad (11.28)$$

$$\hat{\phi}_n = \text{gain} \times \mathbb{I}_P \times \mathbf{R}[mI(\phi_n)] \quad (11.29)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \hat{\phi}_n \quad (11.30)$$

où  $\mathbf{R}$  est le reconstituteur de déconvolution présenté dans le paragraphe précédent. On a introduit dans cette suite un gain (il vaudra 0.9 dans les simulations qui vont suivre) qui permet de contenir des phases artificiellement reconstruites par  $\mathbf{R}$ . On dira que l'algorithme converge si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \hat{\phi}_m = \phi_0 \quad (11.31)$$

et on pourra estimer la vitesse de convergence en observant la norme RMS de  $\phi_n$  en fonction de l'itération  $n$ . On illustre l'efficacité d'un tel algorithme avec les figures 11.6, 11.7 et 11.8. L'ASO considéré est une pyramide modulée à  $r_m/f = 5\lambda/D$ . La première figure regroupe la phase initiale  $\phi_0$  ainsi que sa FEP. La norme RMS de cette phase initiale vaut 5 radians. La seconde donne la phase estimée, la phase résiduelle et la FEP associée au bout de 20 itérations. On y observe que l'algorithme a bien convergé : la FEP est très proche de la tâche idéale d'Airy. Ceci est corroboré par la dernière figure qui montre que la norme RMS de la phase résiduelle  $\|\phi_n\|_2$  tend bien vers 0.

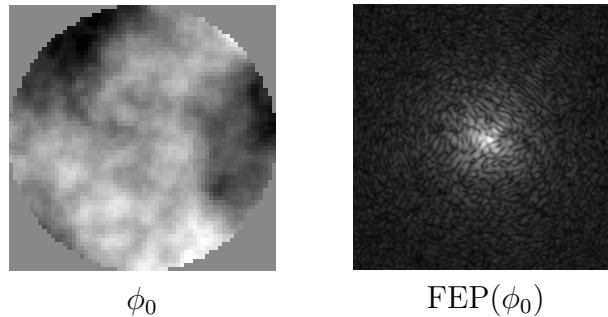


Figure 11.6 – Phase aberrante  $\phi_0$  à estimer et sa fonction d'étalement de point.

**Améliorations envisageables.** Avant de donner quelques exemples d'applications, on évoque deux améliorations possibles à l'algorithme de déconvolution. Elles portent toutes deux sur le filtre de Wiener  $\mathbf{W}$ . La première part du constat que le signal issu de la déconvolution d'une méta-intensité n'a pas le même support que la pupille d'entrée (figure 11.9). Or, le signal à l'extérieur de la pupille n'a aucune utilité par la suite puisque la phase est forcément définie dans le support de la pupille d'entrée. Il serait donc

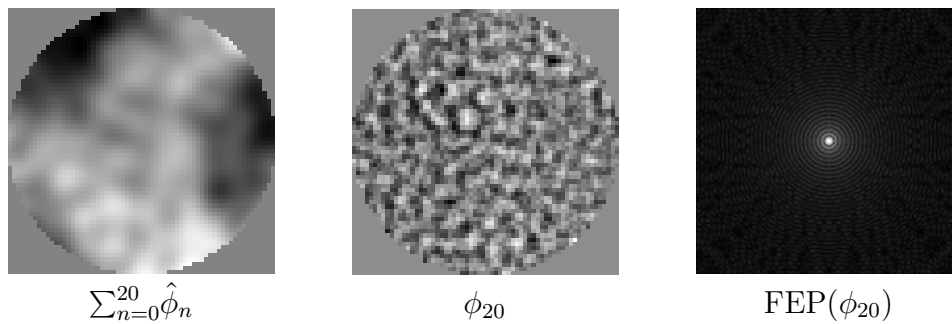


Figure 11.7 – De gauche à droite. Phase estimée, résiduelle et FEP associée au bout de 20 itérations.

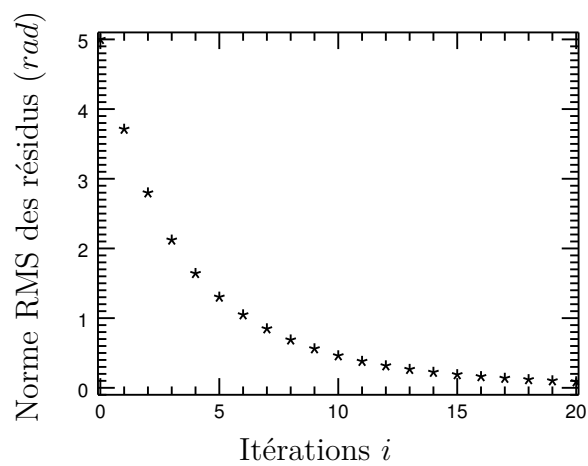


Figure 11.8 – Évolution de la norme RMS de la phase résiduelle  $\phi_n$  en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de déconvolution.

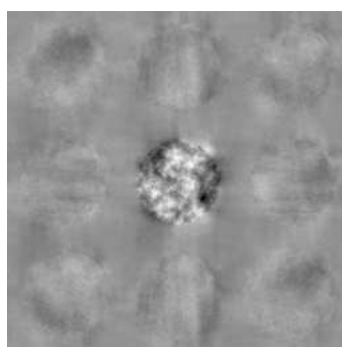


Figure 11.9 – Signal typique obtenu par déconvolution de la méta-intensité.

tout-à-fait pertinent de contraindre la déconvolution et son filtre de Wiener afin que le signal soit naturellement de support  $\mathbb{I}_P$ . Nous n'avons hélas pas trouvé la solution mathématique à ce problème dans la littérature.

La seconde amélioration se base sur le fait que l'écart entre la méta-intensité effective  $mI$  et le modèle de l'intensité de convolution  $I_{\text{conv}}$ , noté  $b$  dans l'équation (11.26), est analytiquement connu. Il doit donc être possible d'user de la connaissance *a priori* de cette perturbation pour améliorer la déconvolution. Cette problématique est déjà largement évoquée dans la littérature : il s'agit en substance de construire une carte de régularisation dépendante de la densité spectrale de puissance de la perturbation. Si une telle amélioration n'a pas été effectuée, cela tient au seul fait qu'une thèse ne dure que trois ans.

## 11.4 Applications

On donne dans cette ultime partie quelques exemples d'application de l'algorithme de déconvolution mais exposons d'abord les particularités de cette méthode. On note premièrement qu'elle ne nécessite pas la construction de matrices d'interactions. La réponse impulsionnelle contient par essence la réponse à tous les modes de phases puisque le Dirac contient toutes les fréquences spatiales. Ceci a pour conséquence de drastiquement **accélérer les simulations** numériques.

D'autre part, la réponse impulsionnelle, équation (11.19), dépend du masque, de la modulation tip/tilt et du support de la pupille d'entrée. Elle est donc **applicable** en principe à **tous les ASO basés sur le filtrage de Fourier**. Ceci veut aussi dire qu'il est indispensable d'avoir une **bonne modélisation de l'ASO** étudié pour fabriquer l'algorithme de reconstruction : d'abord pour obtenir  $\mathbf{R}$ , mais aussi pour propager la phase  $\phi_n$  à travers l'ASO.

### 11.4.1 Quel rayon de modulation ?

On passe à une première application qui aborde une problématique récurrente en optique adaptative. Il s'agit de se demander quel est le rayon de modulation optimal vis-à-vis de l'amplitude RMS de la phase aberrante. On comprend que plus celle-ci est importante, plus l'ASO devra être linéaire et donc plus le rayon de modulation devra être grand. Cependant à mesure que ce rayon augmente, la sensibilité pour les basses fréquences spatiales diminue et celles-ci mettront de plus en plus de temps à être estimées. Le meilleur rayon de modulation sera donc celui qui assure la **convergence** la plus **rapide**.

On part d'une phase arbitraire qui suit la statistique de la turbulence atmosphérique. Son niveau initial est de 2 radians RMS. La figure 11.10 donne sa structure ainsi que la FEP associée.

On va appliquer l'algorithme de déconvolution à cette phase  $\phi_0$  pour plusieurs

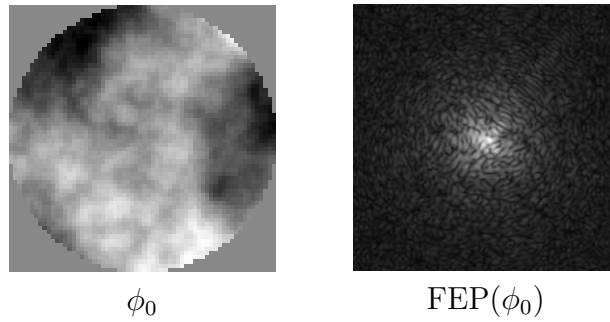


Figure 11.10 – Phase turbulente à mesurer (gauche) ainsi que sa fonction d'étalement de moins associée.

rayons de modulation : 10, 5, 2 et  $0f\lambda/D$ . Les figures 11.11, 11.12, 11.13 et 11.14 donnent la phase estimée (image de gauche), la phase résiduelle (au centre) et la FEP résiduelle (droite) pour chacun de ces cas.

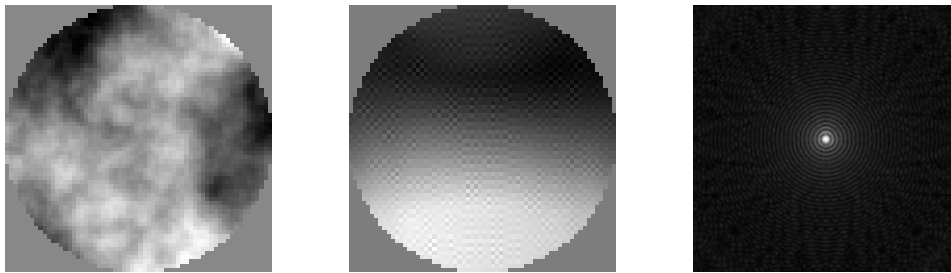


Figure 11.11 – Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon  $r_m=10f\lambda/D$

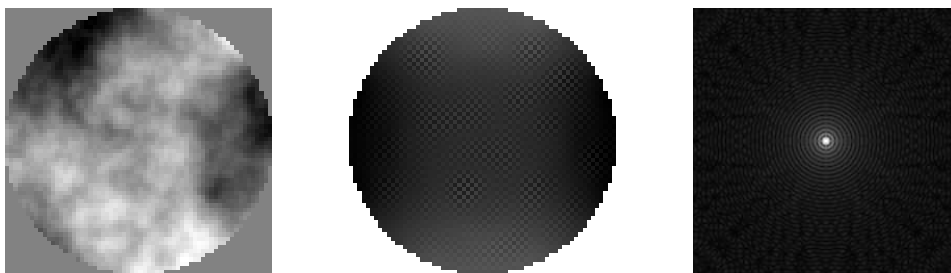


Figure 11.12 – Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon  $r_m=5f\lambda/D$

On donne également sur la figure 11.15 la norme RMS de la phase résiduelle pour les 20 premiers itérations de l'algorithme de déconvolution dans les quatre cas de modulation susmentionnés. Pour la plus grande modulation, l'algorithme fait bel et bien baisser la norme RMS de la phase résiduelle mais semble stagner autour de 0.3 radians. La figure 11.11 permet de comprendre que ce résidu

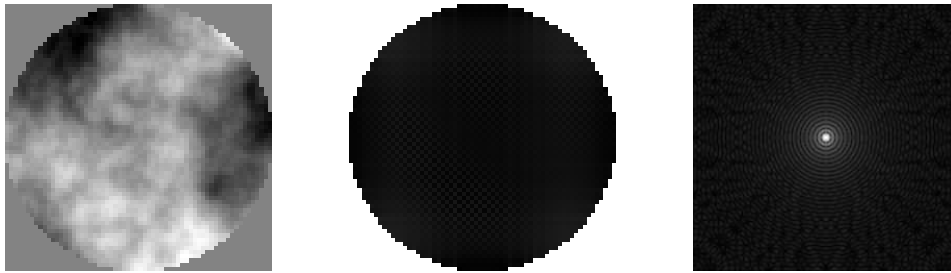


Figure 11.13 – Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon  $r_m=2f\lambda/D$

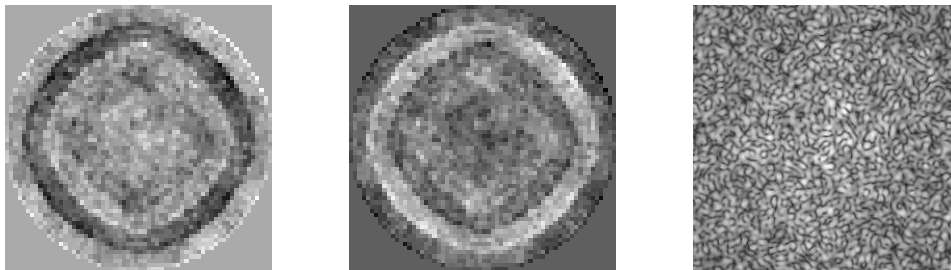


Figure 11.14 – Phase estimée, résiduelle et FEP pour l'ASO pyramide à modulation circulaire de rayon  $r_m=0f\lambda/D$

correspond à un tip qui n'est pas vu par l'ASO. Ceci s'explique par le fait qu'à de grandes modulations, les basses fréquences spatiales sont très mal codées par l'ASO. En absence de modulation, l'algorithme est tout-à-fait divergent : dès la troisième itération la norme RMS du résidu est plus grande que la norme initiale. Il apparait donc que seuls deux rayons de modulation ( $r_m=2$  et  $5f\lambda/D$ ) font effectivement converger la phase résiduelle vers 0, attestant de l'efficacité de la reconstruction. On note d'ailleurs que le rayon  $r_m=2f\lambda/D$  permet la convergence la plus rapide ce qui suggère que ce rayon est le plus adapté parmi les quatre testés.

### 11.4.2 Limitation du nombre de mode à corriger

Un des gros avantages de la méthode de déconvolution est de permettre une estimation de la phase sur un très large espace fréquentiel. *A priori*, toutes les fréquences non concernées par la régularisation pourront être mesurées au sein de la phase. On peut se figurer ce fait en observant que lorsqu'il y a convergence, la FEP résiduelle correspond quasiment à la tâche idéale d'Airy sur toute l'image. Pour obtenir une correction de cette qualité dans l'approche matricielle le nombre de polynômes de Zernike à utiliser devient très rapidement gigantesque ce qui rend les étapes de calibration extrêmement coûteuses en temps de calculs.

Pour comparer l'approche matricielle et l'approche convolutive, on peut donc

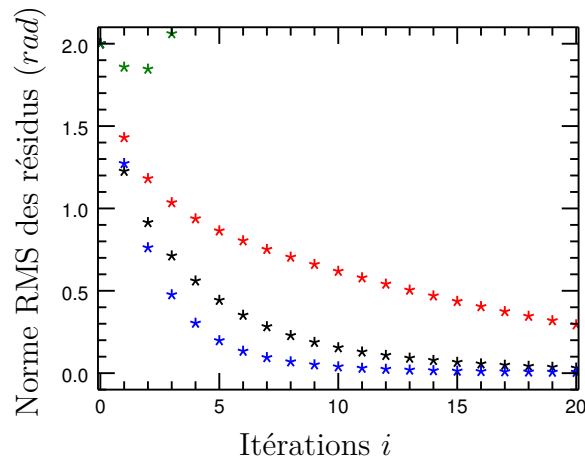


Figure 11.15 – Norme RMS des résidus pour une phase initiale à 2 radians. Le code couleur est le suivant :  $r_m=10$ , 5, 2 et  $0f\lambda/D$ .

vouloir *brider* cette dernière pour faire coïncider le nombre de modes sur lesquels la phase est estimée. Pour cela l'idée consiste à restreindre l'action du filtre de Wiener en coupant les hautes fréquences spatiale grâce à un filtre passe-bas de taille ajustable. Ce principe est illustré sur les figures 11.16 et 11.17. Y sont présentés le filtre passe-bas, le filtre de Wiener tronqué, la phase estimée, résiduelle et enfin la FEP. On observe une parfaite correspondance entre la zone de correction de la FEP et la taille du filtre passe-bas testé. Ceci est tout-à-fait logique lorsqu'on se rappelle que le filtre de Wiener est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle de l'ASO. On peut donc se figurer qu'il vit en plan focal, dans le même espace donc que la FEP. Ces résultats sont validés par l'observation des phases résiduelles puisqu'on peut y identifier des tailles caractéristiques de variabilité inversement proportionnelles à la fréquence de coupure du filtre passe-bas testés.

\*  
\*   \*

**Cette approche via la convolution est pleine de promesses. Elle permet d'éviter l'étape délicate et couteuse en temps de calculs de la construction des matrices d'interaction. Elle nécessite cependant d'avoir un modèle assez précis de l'ASO considéré pour obtenir sa fonction de transfert. Si beaucoup de nombreuses études supplémentaires seront probablement nécessaires pour fermer véritablement une boucle d'optique adaptative uniquement basée sur la déconvolution, il est d'ores-et-déjà possible de l'utiliser pour faire de nombreux diagnostics dans le cadre de simulations numériques.**

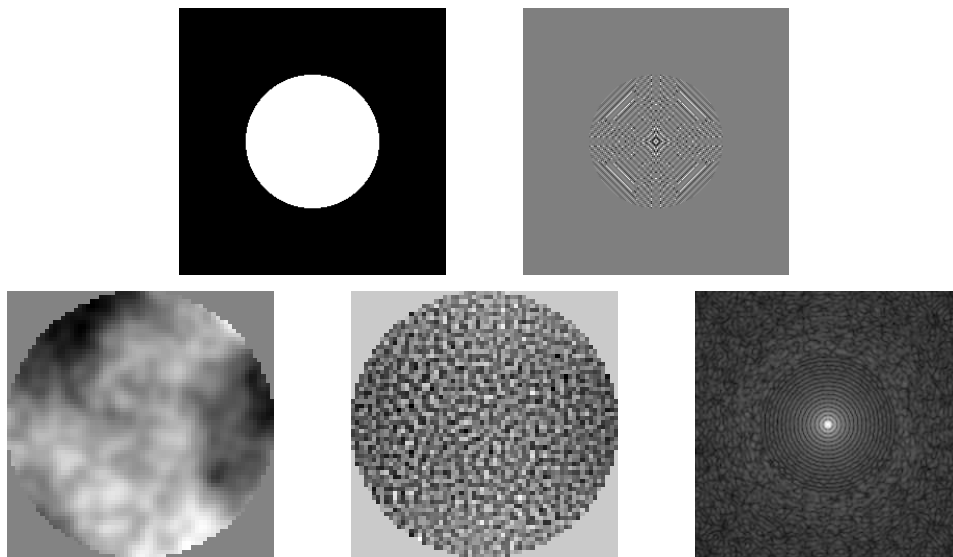


Figure 11.16 – De haut en bas, de gauche à droite : filtre passe-bas utilisé, filtre de Wiener tronqué, phase estimée, résidus et FEP.

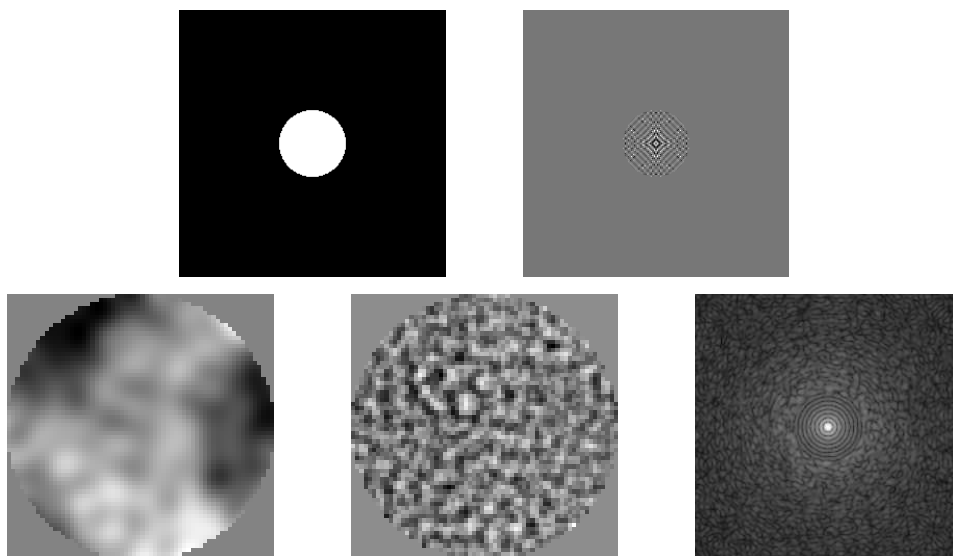


Figure 11.17 – De haut en bas, de gauche à droite : filtre passe-bas utilisé, filtre de Wiener tronqué, phase estimée, résidus et FEP.

# Conclusion

Cette thèse prend pour point de départ la définition du concept d'Analyseur de Surface d'Onde suivante : sont considérés comme ASO tous les dispositifs optiques capables de transformer sans ambiguïté les variations de phases en variations d'intensités. Ceci permet d'envisager la détermination d'une phase inconnue à partir d'une carte d'intensité. Une telle reconstruction, si elle est difficile à appréhender de façon systématique, est grandement facilitée lorsqu'il est possible de construire, à partir d'une intensité, une quantité nommée méta-intensité qui contient une dépendance linéaire avec la phase. Le formalisme matriciel est alors applicable et sa puissance permet d'appréhender le problème de reconstruction comme une simple inversion matricielle. Pour de tels ASO "linéaires", il est de plus très facile d'établir de nombreux critères de performances en adéquation avec la problématique de l'Optique Adaptative en astronomie.

Si de nombreux systèmes optiques peuvent être considérés comme des ASO, on se borne à type de dispositif en particulier : le filtrage de Fourier. Un détecteur est placé dans un plan pupille après filtrage par un masque en plan focal des fréquences spatiales de la phase. Ce système est exactement situé entre l'imagerie en plan focal et la coronagraphie. Ces trois systèmes sont décrits de façon exacte et concise grâce à des opérateurs linéaires mathématiquement simple et physiquement riches de sens.

Une étude poussée est menée en ce qui concerne le filtrage de Fourier. Une description innovante des masques via le formalisme du pavage du plan de Fourier permet de les considérer comme des éléments qui sélectionnent les fréquences spatiales du champ lumineux pour ensuite les séparer ou les faire interférer. Un étage optique supplémentaire a été ajouté au filtrage de Fourier –la modulation– pour associer au traitement cohérent de la lumière procurée par le filtrage, un traitement incohérent. Parmi les nombreux avantages apportés par la modulation, on montre notamment qu'elle est formellement équivalente à de l'analyse de front d'onde sur source étendue.

Cette description très générale est ensuite appliquée à la problématique de l'analyse de front d'onde puisqu'on explicite la dépendance de l'intensité sur le détecteur avec la phase grâce à un développement de Taylor de celle-ci en puissances de phase. Il est explicité pour toutes les configurations, c'est-à-dire pour toutes les modulations et tous les masques. Le cas où la source est polychromatique est également décrit. De ces équations tout-à-fait inédites sont déduits les



comportements linéaires et non-linéaires des ASO à filtrage de Fourier, un critère élémentaire de bijectivité ainsi qu'une manière extrêmement simple pour savoir si un ASO voit ses performances décliner du fait l'usage d'une source polychromatique lors de l'analyse de front d'onde.

Avec la détermination de la dépendance en phase de l'intensité pour l'ensemble des ASO à filtrage de Fourier et modulation, la partie optique de ces dispositifs peut être considérée comme totalement décrite. L'étape suivante consiste à envisager un traitement numérique de cette intensité pour en construire la fameuse méta-intensité linéaire au premier ordre avec la phase et indispensable au formalisme matriciel. On la présente sous l'appellation "méta-intensité minimale normalisée" qui correspond l'association d'opérations de tare et de normalisation vis-à-vis du spectre de la source de l'intensité. Cette méta-intensité présente l'avantage d'avoir une définition commune à tous les dispositifs optiques étudiés. On précise également la nature et la raison d'être d'éventuelles transformations numériques supplémentaires qui se rajouteraient à la suite de la construction de la construction de la méta-intensité minimale normalisée.

Ces développements liminaires introduisent donc un système optique à haut degrés de liberté (nature du masque et de la modulation, transformations numériques) ainsi que de nombreux critères de performance en accord avec le contexte de l'optique adaptative en astronomie (côté pratique du design, efficacité de la reconstruction, robustesses diverses). Ce cadre est donc parfaitement adapté à la comparaison et à l'optimisation des ASO à filtrage de Fourier.

Cette étude commence par une description exhaustive et uniformisée des dispositifs à Filtrage de Fourier déjà existants. Sont décrits, grâce au formalisme des pavages, tous les designs dérivant du Couteau de Foucault (tels que l'ASO Pyramide) ainsi que les dispositifs basés sur le contraste de phase (comme l'analyseur de Zernike). Sont également évoqués les masques coronographiques qui s'avèrent, à l'exception du coronographe Vortex, inadaptés à l'analyse de front d'onde.

Deux chapitres sont ensuite dédiés aux ASO Pyramide et Zernike qui sont généralisés et considérés comme des designs flexibles à grand nombre de degrés de liberté. Se trouve ainsi introduit le concept de "classe d'ASO". L'étude de comparaison et d'optimisation se présente comme une identification des liens entre les degrés de liberté et les critères de performance. Sur quel paramètre doit-on agir pour améliorer une performance identifiée ? Cette démarche montre que la classe des ASO de Zernike a deux paramètres dont les rôles sont absolument distincts : le premier agit en tant que gain scalaire sur la sensibilité et la dynamique tandis que le second règle la répartition spatiale de la méta-intensité. Autrement dit, un paramètre est local, tandis que l'autre est spatial. La classe Pyramide a beaucoup plus de degrés de libertés. Le nombre de faces du masque joue essentiellement sur les critères "géométriques" de l'ASO (zone d'intérêt du détecteur, facilité de fabrication, etc.) tandis que l'angle de la pyramide joue sur la qualité de reconstruction de la phase puisqu'elle permet d'améliorer la gamme

de mesure des phases –dynamique– aux basses fréquences spatiales ainsi que la précision de mesure –sensibilité– aux hauts ordres. Il est d’ailleurs possible de choisir la gamme fréquentielle où l’estimation est la plus précise en réglant finement l’angle du masque. En ce qui concerne la modulation, elle a globalement les mêmes effets sur la qualité de reconstruction. Le paramètre véritablement pertinent est le ratio entre le temps passé sur les arêtes –qui améliore la sensibilité– et le temps passé sur les faces– qui améliore la dynamique. On ajoute que la pyramide non modulée, quelque soit son nombre de faces ou son angle est rigoureusement achromatique.

On complète l’étude numérique de la pyramide par l’apport de résultats analytiques qui émergent sur la possibilité d’améliorer considérablement la dynamique de ce senseur sans perte de sensibilité via une transformation numérique supplémentaire à l’opération de méta-intensité. Celle-ci correspond à la transformation des pentes qui déjà largement utilisée par la communauté scientifique et qui voit ici sa grande efficacité dans la pratique expliquée d’un point de vue théorique. Un développement inédit poursuit ces résultats pour la pyramide à une dimension et s’avère potentiellement au sens où il expose une méthode de reconstruction systématique, analytique et exacte.

Une méthode de reconstruction qui n’a pas besoin du formalisme matriciel est enfin présentée. Elle se base sur une description de la relation entrée/sortie de l’ASO dans le cadre de la théorie linéaire. On y décrit ce qu’est la réponse impulsionnelle ainsi que la fonction de transfert d’un ASO à filtrage de Fourier avec modulation. La phase peut alors être reconstruite par une déconvolution basée sur la méthode de Wiener. Cette technique encore en développement représente de grands espoirs en termes de simulations numériques de système d’OA de par son coût faible en temps de calculs.

Les conclusions conséquentes à l’ensemble de cette étude sont nombreuses et potentiellement cruciales pour le développement des futures générations d’optique adaptative. On retiendra principalement le fait que l’ASO Pyramide, en plus d’être extrêmement performant dans sa version historique s’enrichit considérablement lorsqu’on le considère comme un design flexible. Ces travaux rendent en effet envisageable la possibilité d’adapter l’ASO aux conditions d’analyse de front d’onde au sein même de la boucle d’OA. Si c’était déjà le cas avec le rayon de modulation, cela le devient aussi en ce qui concerne l’angle du masque pyramidal.

En guise de perspectives, nous donnons enfin quelques pistes de réflexion tout-à-fait dans la continuité logique des développements précédents :

- Une validation expérimentale des prédictions théoriques précédentes serait la bienvenue. On a déjà présenté le banc optique qui permettrait de générer la quasi totalité des masques de filtrage possibles et imaginables.
- Une boucle d’OA usant de masques pyramidaux avec angle adapté aux condi-

tions de turbulence pourrait être simulée en vue de remplacer la technologie de modulation complexe à mettre en œuvre pour de nombreuses raisons pratiques.

- L'impact d'une modulation instable sur les performances d'analyse de front d'onde devra être étudié si la pyramide modulée est choisie pour les OA des *Extremely Large Telescope*. L'approche en terme de "robustesse" suivie durant l'exposé ainsi que les résultats généraux sur la modulation seront très utiles pour cette étude.
- De la même façon, il faudra s'intéresser l'impact des phases résiduelles –c'est-à-dire non corrigées par l'OA– sur la qualité d'analyse de front d'onde. Le formalisme mathématique présenté ici est quasiment en l'état d'effectuer cette étude puisque ces phases résiduelles peuvent être décrites comme des phases de référence erratiques.
- Enfin, on pourrait apprécier une boucle d'OA uniquement basée sur la déconvolution et non sur les matrices d'interactions.

# ANNEXES

## A Notations

### A.1 Opérateurs

Opérateur identité.

$$\mathcal{I}[f](x,y)=f(x,y) \quad (.32)$$

Opérateur Grandissement.

$$\mathcal{G}_\gamma[f](x,y)\hat{=}\frac{1}{\gamma^2}f\left(\frac{x}{\gamma},\frac{y}{\gamma}\right) \quad (.33)$$

Le facteur  $\gamma$  est le scalaire grandissement. Physiquement une image à qui on ferait subir l'opérateur grandissement subirait une dilatation d'un facteur  $\gamma$ . La conservation de l'énergie est assurée par le préfacteur  $\gamma^{-2}$ . Cet opérateur est très utile de par sa capacité à effectuer des changement de variables linéaires dans les intégrales.

On note qu'il interagit avec la transformée de Fourier 2D  $\mathcal{F}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{G}_\gamma[f]=\frac{1}{\gamma^2}\mathcal{G}_{1/\gamma}\circ\mathcal{F}[f] \quad (.34)$$

Opérateur translation.

On pose  $\mathcal{T}_{x_t,y_t}$  l'opérateur de translation de  $x_t$  suivant l'axe des  $x$  et de  $y_t$  suivant l'axe  $y$  :

$$\mathcal{T}_{x_t,y_t}[f](x,y)\hat{=}\mathcal{f}(x-x_t,y-y_t), \quad (.35)$$

Transformées de Fourier à 2 dimensions.

$$\mathcal{F}[f](\mu,\nu) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-2i\pi(x\mu+y\nu)} dx dy \quad (.36)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(\mu,\nu)e^{2i\pi(\mu x+\nu y)} d\mu d\nu \quad (.37)$$

Cette transformation est linéaire :

$$\mathcal{F}[f+\epsilon g]=\mathcal{F}[f]+\epsilon\mathcal{F}[g] \quad \forall\epsilon\in\mathbb{R},\forall f,g\in L^2(\mathbb{R}^2) \quad (.38)$$

Elle vérifie également :

$$\mathcal{G}_{f\lambda}\circ\mathcal{F}[m\times d^{\alpha,\beta}]=\mathcal{T}_{f\alpha,f\beta}\circ\mathcal{G}_{f\lambda}\circ\mathcal{F}[m] \quad (.39)$$

où  $d^{\alpha,\beta}$  est la fonction de transparence du *dioptré incliné* défini dans le chapitre 2. L'effet d'un dioptré dans un plan donné correspond donc à une translation un plan de Fourier plus loin. Ce décalage est directement codé par l'inclinaison du dioptré. Optiquement, c'est comme si le dioptré changeait la direction de l'axe optique. La figure .18 illustre ce résultat.

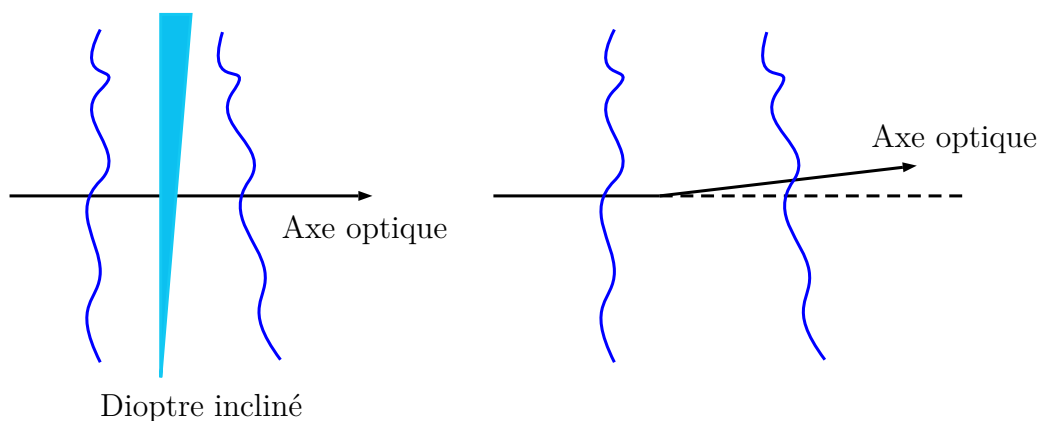


Figure .18 – Interprétation de l'effet du dioptré incliné via un décalage de l'axe optique. Les lignes bleues correspondent au front d'onde.

### Opérateurs de Hilbert.

$$\mathcal{H}_x[f](x,y) = p.v.\left\{\frac{1}{\pi}\int\frac{f(t,y)}{x-t}dt\right\} \quad (.40)$$

$$\mathcal{H}_y[f](x,y) = p.v.\left\{\frac{1}{\pi}\int\frac{f(x,t)}{y-t}dt\right\} \quad (.41)$$

$$\mathcal{H}_{xy}^2[f](x,y) = p.v.\left\{\frac{1}{\pi^2}\iint\frac{f(t,t')}{(x-t)(y-t')}dtdt'\right\} \quad (.42)$$

Quelques propriétés :

$$\mathcal{H}_x \circ \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{xy} \quad (.43)$$

$$\mathcal{H}_x \circ \mathcal{H}_{xy} = -\mathcal{H}_y \quad (.44)$$

$$\mathcal{H}_y \circ \mathcal{H}_{xy} = -\mathcal{H}_x \quad (.45)$$

$$\mathcal{H}_x \circ \mathcal{H}_x = -\mathcal{I} \quad (.46)$$

$$\mathcal{H}_y \circ \mathcal{H}_y = -\mathcal{I} \quad (.47)$$

$$\mathcal{H}_{xy} \circ \mathcal{H}_{xy} = \mathcal{I} \quad (.48)$$

## A.2 Produit scalaire et normes

$$\|f\|_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy \quad (.49)$$

$$\langle f|g \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \bar{g}(x,y) dx dy \quad (.50)$$

$$\|f\|_2 = \left( \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \quad (.51)$$

## A.3 Fonctions remarquables

Fonctions de Bessel de premières espèces :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \tau - n\tau)} d\tau \quad (.52)$$

Fonctions indicatrices :

$$\mathbb{I}_{\Omega}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{if } (x,y) \notin \Omega \end{cases} \quad (.53)$$

## B Un exemple de transformation TO

On illustre dans cette annexe le principe des transformations **TO** introduit dans le chapitre 1 grâce au concept du *conditionnement*. Celui-ci consiste à considérer qu'au-dessous d'une certaine sensibilité un mode de phase n'est pas du tout vu. Il faut en effet garder en tête qu'une faible sensibilité induit une forte propagation du bruit sur ce mode. Aussi il vaut mieux simplement l'oublier et ne pas estimer la phase sur ce vecteur. Pour effectuer un tel conditionnement, il faut connaître la décomposition en valeurs singulières de la matrice d'interaction :

$$\mathbf{B}_{mI} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^t \quad (.54)$$

On rappelle ici que les valeurs singulières contenu dans  $\Sigma$  sont rangées de sorte à ce que leur module soient décroissant :  $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_b|$ .

Le conditionnement de la matrice d'interaction consiste d'abord à choisir un réel supérieur à 1, on le note  $c$ . Il règle le rapport maximal entre le mode le mieux vu et le mode le moins vu. Posons donc  $m'$  l'unique entier vérifiant :

$$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_m|} \leq c < \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_{m'+1}|} \quad (.55)$$

On veut ensuite couper les modes ne respectant pas le conditionnement, on pose donc  $\mathbf{T}$  la matrice de troncature de rang  $m'$  et on comprend évidemment que la matrice  $\mathbf{O}$  sera simplement l'inverse de la matrice unitaire :  $\mathbf{U}^t$ . La transformation **TO** de conditionnement sera donc égale à  $\mathbf{TU}^t$  et la nouvelle matrice d'interaction vaudra :

$$\mathbf{B}'_{mI} = \mathbf{TU}^t\mathbf{B}_{mI} = \mathbf{TV}^t \quad (.56)$$

## C Un senseur Vortex ?

Cette annexe s'inspire de l'unification faite, via la classe des ASO de Zernike, entre le coronographe de Roddier&Roddier et l'ASO historique de Zernike. On a en effet vu que les masques associés à ces deux dispositifs optiques ne différaient que du point de vue du paramètre  $\delta$  codant le piston différentiel entre les deux éléments du pavage polaire. Le coronographe de Roddier&Roddier utilisait un déphasage de  $\pi$  via  $\delta=\lambda/2$  tandis que l'ASO de Zernike se basait sur un déphasage de  $\pi/2$  avec évidemment  $\delta=\lambda/4$ . Suivant ce raisonnement, on étudie ici l'éventualité d'un ASO dérivé du coronographe vortex [Foo et al., 2005].

**La classe vortex.** Pour cela, on définit la **classe vortex** en généralisant le dispositif de coronographie vortex à tous les masques présentant une **épaisseur optique hélicoïdale**. On imposera cependant à celle-ci qu'elle fournisse une **phase continue** modulo  $2\pi$ . On note que cette condition sous-entend une étude monochromatique que l'on supposera à la longueur d'onde  $\lambda$ . Les fonctions de transparence des masques vortex pourront donc s'écrire :

$$m_V(r,\theta)=\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{k\lambda}{2\pi}\theta\right)=\exp(ik\theta) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (.57)$$

$k$  sera le seul paramètre de la classe vortex. Pour le coronographe vortex historique, il sera égal à 2.

**Opérateurs de filtrage.** Une étude analytique de dispositifs étant assez compliquée du fait notamment de la difficulté à calculer la réponse impulsionnelle associée à ces masques vortex, on commence par simuler les parties réelle et imaginaire ainsi que le module de l'opérateur de filtrage appliqué à la pupille d'entrée pour les quatre premiers masques (figure .19).

On peut noter que tous les masques ont un opérateur de filtrage possédant à la fois une partie réelle et une partie imaginaire. Ceci assure l'existence d'une intensité linéaire et laisse espoir quant à une utilisation de ceux-ci pour faire de l'analyse de front d'onde. Ceci est notamment vrai pour le coronographe vortex  $k=2$ . Il est jusqu'à présent l'unique coronographe à présenter cette propriété. On remarque également que cette configuration  $k=2$  semble être la seule à fournir une extinction au niveau de l'image géométrique compatible avec le filtrage par un stop de Lyot. Dit autrement, le cas  $k=2$  seul est à même de générer un coronographe.

**Intensités linéaires et sensibilité.** Afin de savoir si l'on peut effectivement utiliser les masques vortex pour l'analyse de front d'onde, on s'intéresse mainte-



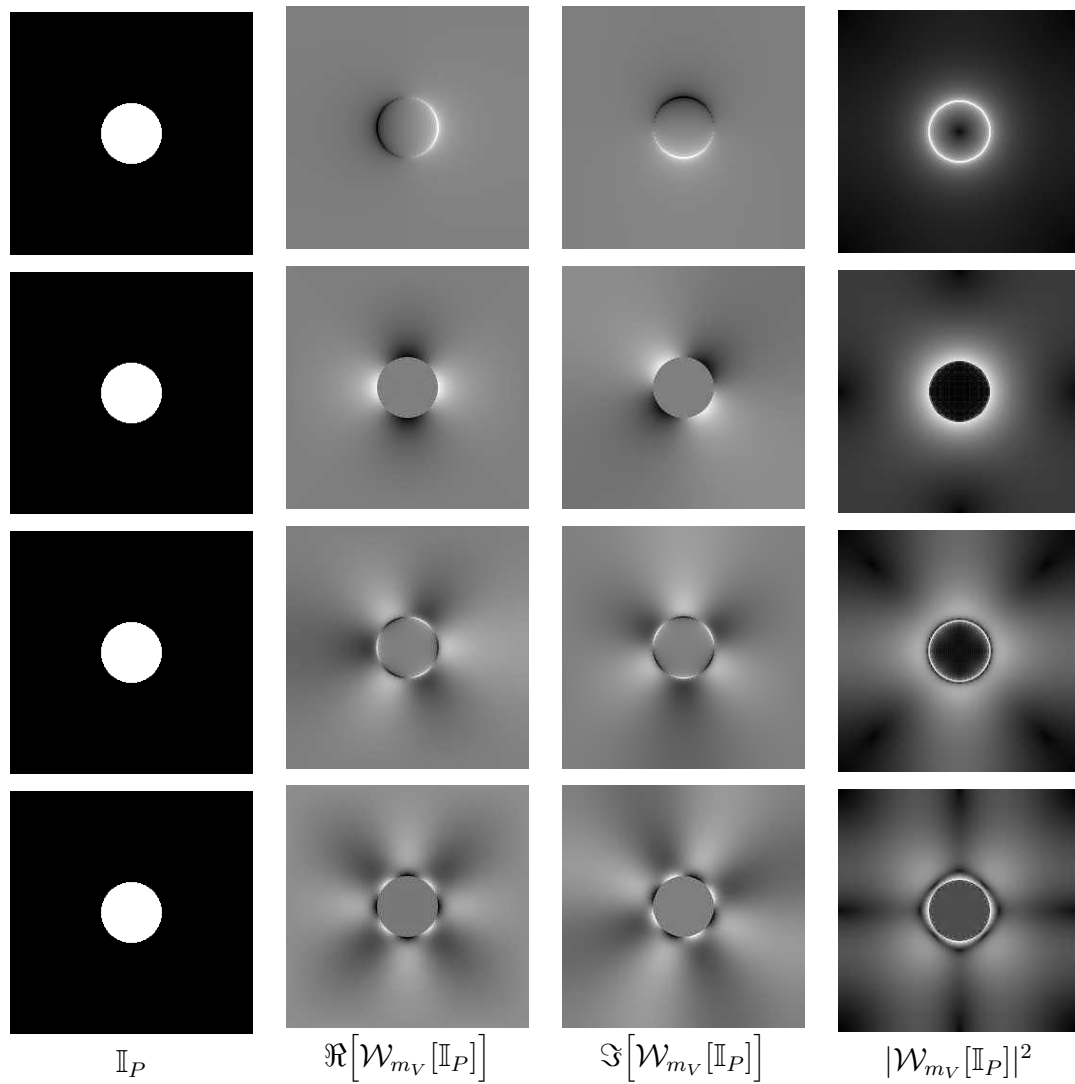


Figure .19 – Effet d'un filtrage de Fourier par les 4 premiers **masques vortex** (de haut en bas,  $k=1, 2, 3$  et  $4$ ) sur un front d'onde plan arrivant sur une pupille circulaire. De gauche à droite, on observe la fonction indicatrice de la pupille, la partie réelle du champ au niveau du détecteur puis sa partie imaginaire et enfin son module au carré (qui correspond également à l'intensité constante).

nant aux intensités linéaires. Sur les figures .23, .24 et .25, sont ainsi données ces quantités pour les 3 premiers masques vortex ( $k=1, 2$  et  $3$ ) lorsque les phases parcourent les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. On affiche également avec la figure .20, les sensibilités associées.

Le cas où  $k=1$  est très intéressant. On note en premier lieu que le signal est globalement contenu dans le support de la pupille. D'autre part, on observe que les modes à **degré azimutal nul**  $Z_n^0$  ne sont pas codés par le dispositif optique et constituent donc des **modes invisibles**. À mesure que le degré azimutal augmente, les modes sont ensuite de mieux en mieux vus pour finir par parfaitement coïncider avec la phase injectée sur les bords de la structure pyramidale des Zernike, c'est-à-dire pour les modes  $Z_n^n$  et  $Z_n^{-n}$ . Ces observations se confirment sur le graphe de sensibilité (courbe (\*)).

Pour le masque coronographique  $k=2$ , les choses se détériorent drastiquement. Il semble que seuls les modes à degré azimutal maximal  $Z_n^n$  et  $Z_n^{-n}$  sont visibles. Par ailleurs, les réponses linéaires pour ces modes vus ont des structures spatiales très différentes des phases injectées. Ceci est notamment du au fait que le signal linéaire est globalement hors de la pupille. La courbe de sensibilité ( $\Delta$ ) est en parfait accord avec les intensités linéaires observées.

Pour  $k=3$ , la situation est encore pire : les sensibilités mode à mode (courbe ( $\circ$ )) sont toutes inférieures à celles pour  $k=1$ . De plus le signal linéaire est situé sur le bord de l'image géométrique de la pupille.

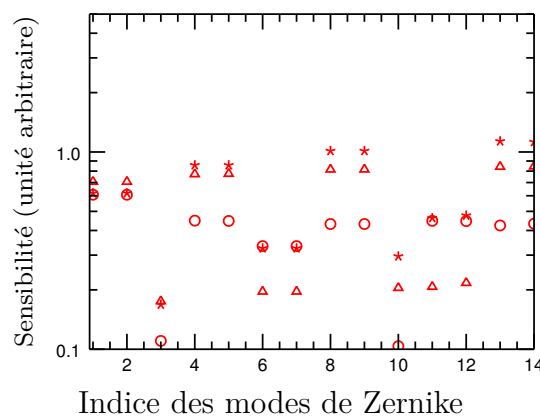


Figure .20 – Sensibilité mode-à-mode pour les 14 premiers Zernike. Le masque vortex  $k=1$  correspond à la courbe (\*); le masque coronographique  $k=2$  à la courbe ( $\Delta$ ) et le masque  $k=3$  à la courbe ( $\circ$ ).

**Méta-pixels pertinents.** On peut préciser un peu le lieu du signal linéaire en observant le support moyen des  $I_{\text{linéaire}}$ . Cela revient en substance à moyenner la matrice d'interaction sur les vecteurs de base des phases. La figure .21 donne ces cartes pour les trois masques  $k=1, 2$  et  $3$ . Les pixels les plus lumineux sont ceux

qui contiennent le plus de signal utile car linéaire. Pour  $k=1$ , on a la confirmation que le signal linéaire est globalement contenu dans l'image géométrique de la pupille. Pour le masque coronographie, on observe qu'il se trouve par contre à l'extérieur de la pupille. Pour le dernier cas ( $k=3$ ), tout se joue visiblement dans le voisinage du bord de la pupille.

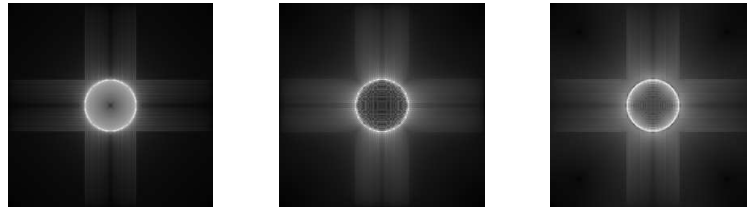


Figure .21 – Support de l'information linéaire pour les ASO associés aux masques vortex  $k=1, 2$  et  $3$ .

**Sensibilité, dynamique et facteur SD.** On termine l'étude de la classe vortex par les courbes de sensibilité, dynamique et facteur SD vis-à-vis des fréquences spatiales exprimées en degrés radiaux de Zernike (figure .22). Les unités sur les axes des ordonnées sont identiques à celles des courbes pour la classe d'ASO de Zernike. Avant toute chose on note que les facteurs SD des trois configurations vortex sont hélas bien en dessous des facteurs SD de la classe de Zernike et cela spécialement pour les hautes fréquences spatiales. On retient cependant que l'ASO  $k=1$  est de loin le meilleur des trois en observant notamment une bonne sensibilité de celui-ci dans les hautes fréquences. On ne saurait cependant envisager son utilisation que dans des cas extrêmement particuliers puisqu'il ne sait voir, on le rappelle, les modes à degré azimutal nul.

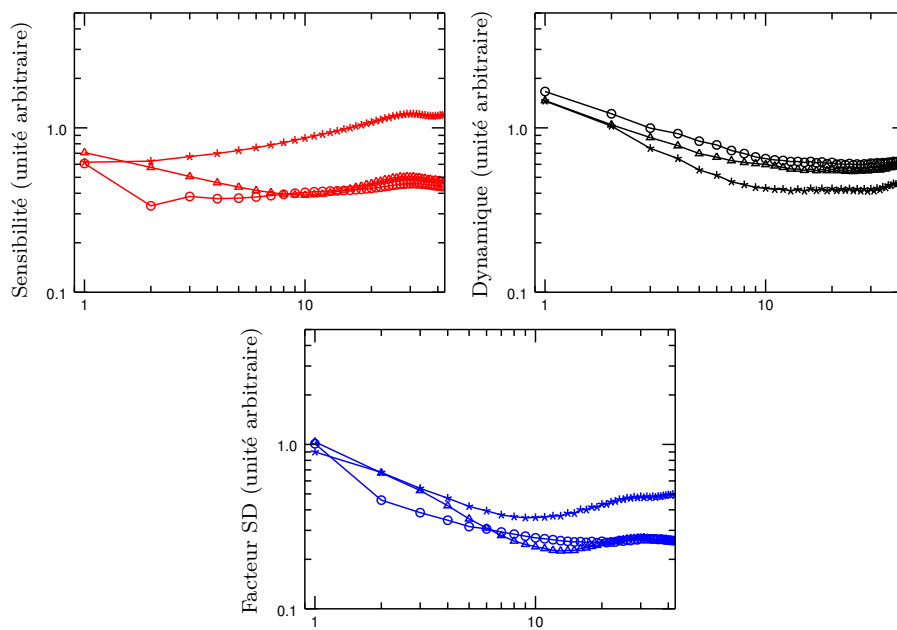


Figure .22 – **Sensibilité**, **dynamique** et **facteur SD** fréquentiels en terme de degré radial de polynômes de Zernike (44 degrés pour 989 modes). Les symboles correspondent aux trois masque vortex :  $k=1$ (\*), 2 ( $\Delta$ ) et 3 (o).

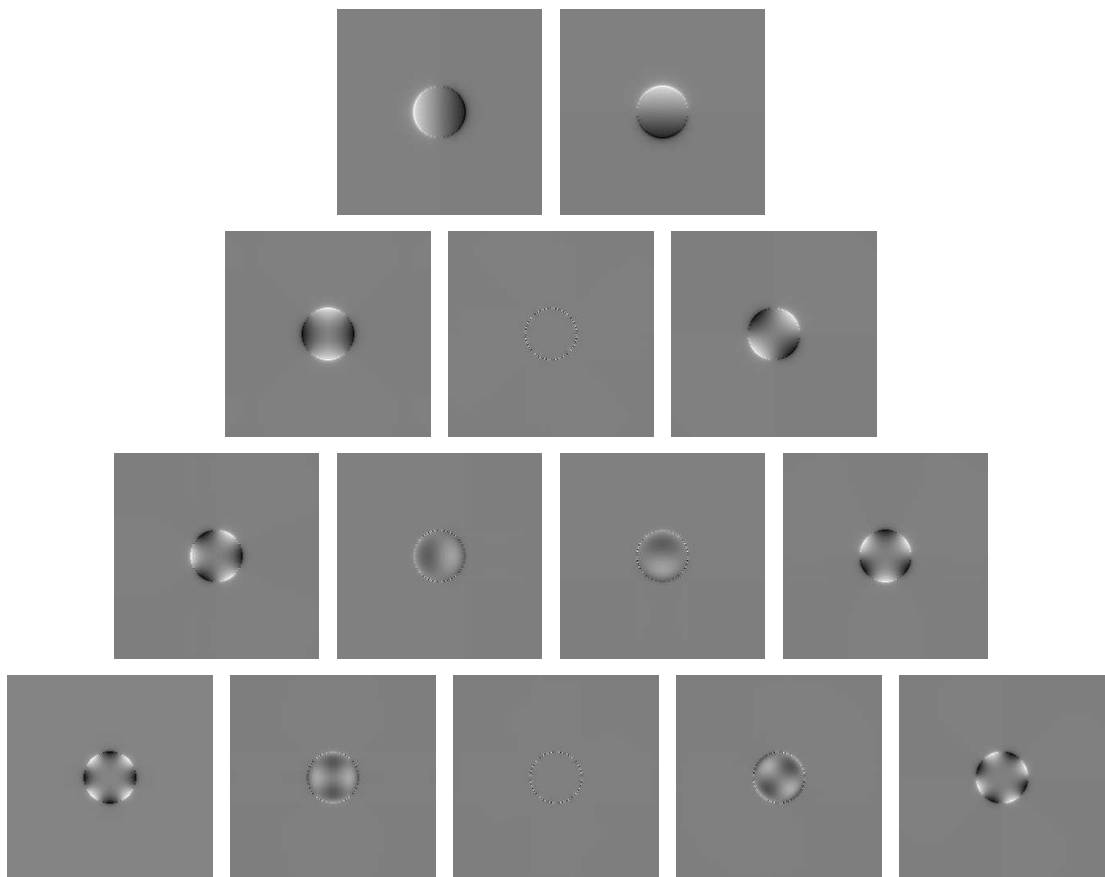


Figure .23 – Intensités linéaires pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. Le paramètre  $k$  du vortex vaut 1.

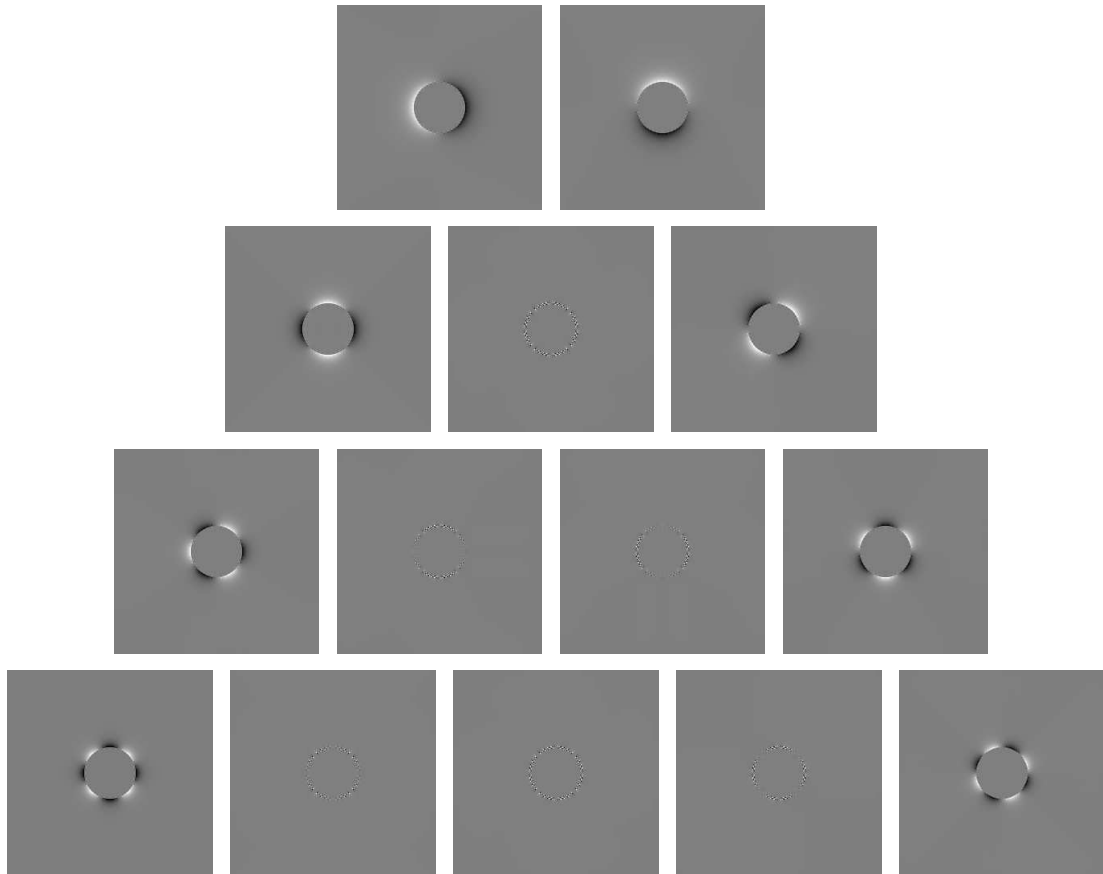


Figure .24 – Intensités linéaires pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. Le paramètre  $k$  du vortex vaut 2 et correspond donc au **masque vortex coronographique**.

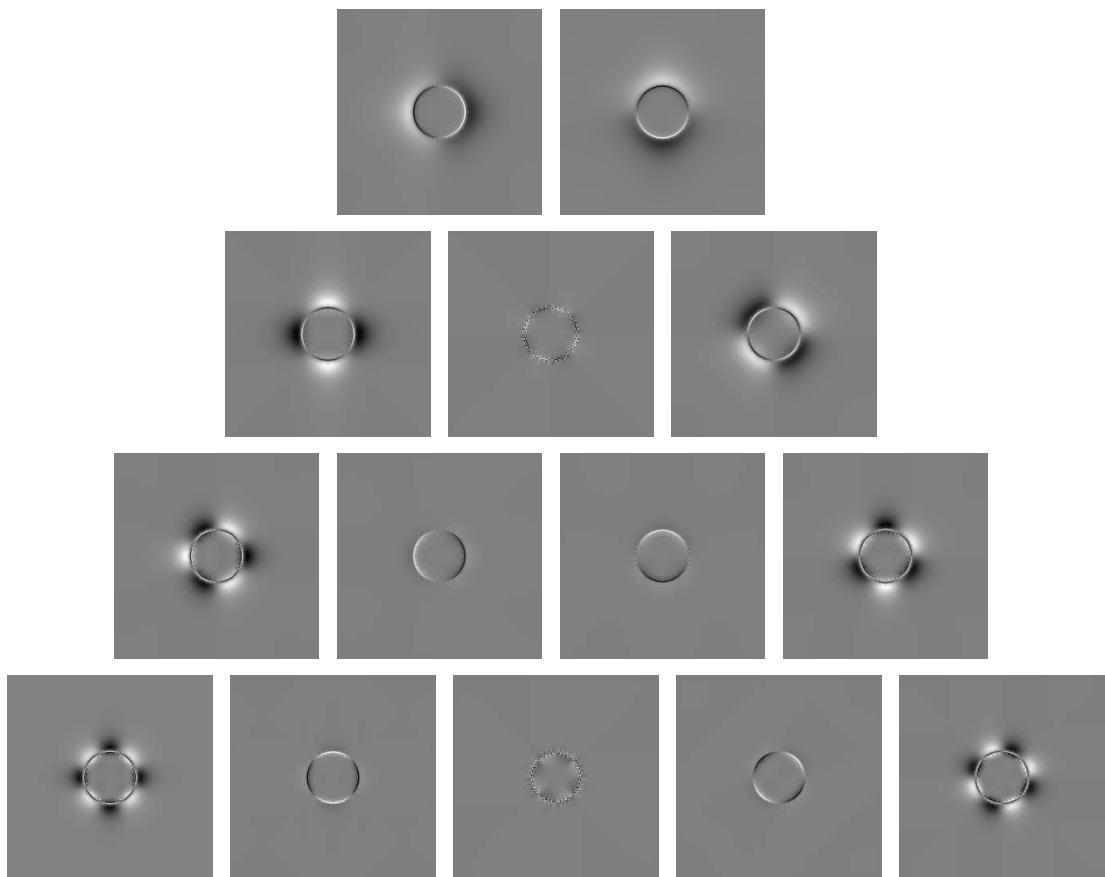


Figure .25 – Intensités linéaires pour les 4 premiers degrés radiaux des polynômes de Zernike. Le paramètre  $k$  du vortex vaut 3.

## D Couteau de Foucault à une dimension

Cette annexe présente des développements mathématiques qui prolongent l'étude théorique de la **Pyramide à une dimension** menée par Vérinaud dans l'article [Vérinaud, 2004]. La Pyramide y est assimilée à un couteau de Foucault 1D, ce qui revient à considérer son angle comme infini, séparant ainsi complètement les deux images de la pupille d'entrée. On utilise donc deux masques  $m^-$  et  $m^+$  laissant passer respectivement les fréquences spatiales négatives et positives. Il en résultera deux intensités que l'on notera  $I^-$  et  $I^+$ . La figure .26 résume le dispositif optique considéré.

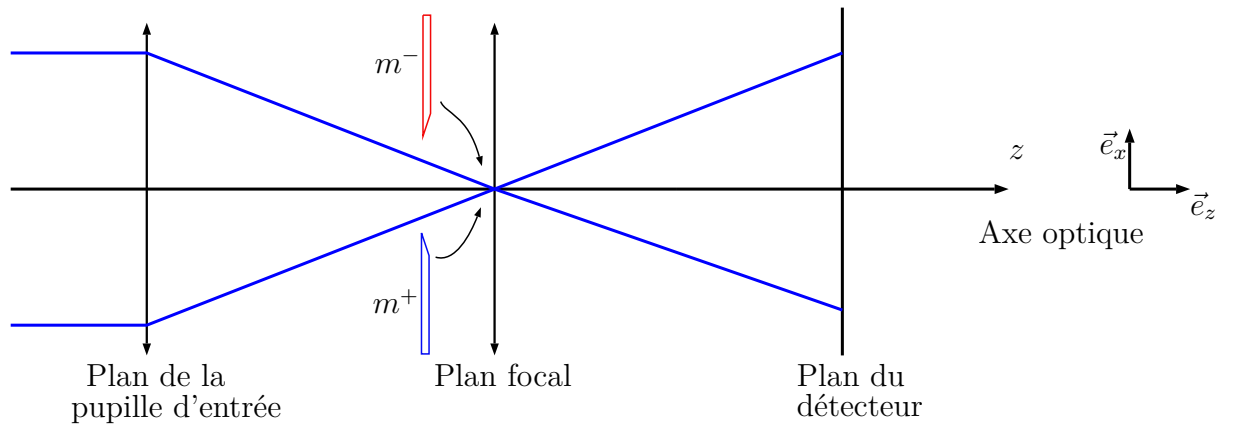


Figure .26 – Dispositif du Couteau de Foucault à 1 dimension.

On décrit le système optique considéré dans le formalisme des pavages et on donne les deux opérateurs de filtrage associés :

$$\begin{aligned} m^+ : \{\mathbb{R}_+, 1, 0, 0, 0\} & \quad \{\mathbb{R}_-, 0, 0, 0, 0\} \\ m^- : \{\mathbb{R}_+, 0, 0, 0, 0\} & \quad \{\mathbb{R}_-, 1, 0, 0, 0\} \end{aligned} \quad \mathcal{W}_{m^\pm} = \frac{1}{2} (\mathcal{I} \mp i\mathcal{H})$$

Le champ incident sera considéré de la forme :

$$\mathbb{I}_P(x_p) e^{i\phi(x_p)} \quad \text{avec} \quad \mathbb{I}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{I}_{[-1,1]} \quad (.58)$$

Les intensités associées à chacun des deux masques de filtrage s'expriment facilement à l'aide des opérateurs identité et de Hilbert :

$$I^\pm(\phi) = \left| \frac{1}{2} (\mathcal{I} \mp i\mathcal{H}) [\mathbb{I}_P e^{i\phi}] \right|^2 \quad (.59)$$

$$= \frac{1}{4} \left( (\mathbb{I}_P)^2 + |\mathcal{H}[\mathbb{I}_P e^{i\phi}]|^2 \pm 2\Im [\mathcal{H}[\mathbb{I}_P e^{-i\phi}] \mathbb{I}_P e^{i\phi}] \right) \quad (.60)$$



La méta-intensité historique de l'analyseur Pyramide est la "carte des pentes" et dérive des intensités  $I^+$  et  $I^-$  suivant la formule :

$$S(\phi) \hat{=} \frac{I^+ - I^-}{\int (I^+ + I^-)} \quad (.61)$$

On aura donc besoin des somme et différence de  $I^+$  et  $I^-$  :

$$I^+ + I^- = \frac{1}{2} \left( (\mathbb{I}_P)^2 + |\mathcal{H}[\mathbb{I}_P e^{i\phi}]|^2 \right) \quad I^+ - I^- = \Im \left[ \mathcal{H}[\mathbb{I}_P e^{-i\phi}] \mathbb{I}_P e^{i\phi} \right] \quad (.62)$$

On aboutit finalement à :

$$S(\phi)(x_d) = \frac{1}{\pi} \mathbb{I}_P(x_d) \int_{-1}^1 \frac{\sin(\phi(x_d) - \phi(x_p))}{x_d - x_p} dx_p \quad (.63)$$

Cette équation, évidemment présente dans l'article de Vérinaud, est fondamentale. Elle donne la dépendance exacte (sans aucune hypothèse particulière) de la carte des pentes avec la phase aberrante. Si il était possible de l'inverser, c'est-à-dire de trouver  $\phi$  en fonction de  $S$ , on aurait alors un reconstituteur qui prendrait en compte le comportement effectif (non-linéarités comprises) de la Pyramide à 1D. Ceci fournirait indéniablement de solides indications quant à la marche à suivre pour faire la même chose avec la Pyramide réelle à 2D. Hélas, aucune technique n'a pour le moment été trouvée. Aussi, on propose dans la suite de l'exposée une **méthode de reconstruction exacte** dans le cadre des faibles phases. Autrement dit, on se place dans le régime de linéarité de l'ASO Pyramide. La formule (.63) se résume alors à :

$$S_{\text{linéaire}}(\phi)(x_d) = \frac{1}{\pi} \mathbb{I}_P(x_d) \int_{-1}^1 \frac{\phi(x_d) - \phi(x)}{x_d - x} dx \quad (.64)$$

que l'on pourra également écrire à l'aide de l'opérateur de Hilbert :

$$S_{\text{linéaire}}(\phi) = \mathbb{I}_P \mathcal{H}[\mathbb{I}_P \phi] - \mathbb{I}_P \phi \mathcal{H}[\mathbb{I}_P] \quad (.65)$$

Dans la suite de l'étude, on va s'évertuer à inverser ces deux précédentes équations. On commence par suivre la méthode matricielle utilisée jusqu'ici : on se munit d'une base de l'espace des phases que l'on fait passer à travers le Couteau de Foucault à 1D pour recueillir les réponses à chaque mode qui servent à l'établissement d'une matrice d'interaction qui inversée fait office de reconstituteur.

Puisque la phase est définie sur le segment  $[-1, 1]$ , on va utiliser les polynômes de Legendre  $P_n(x)$  qui sont l'équivalent 1D des polynômes de Zernike. Les  $P_n$  constituent une base orthonormée de polynômes de degré étagé. Le produit scalaire associé est le suivant :

$$\langle f | g \rangle \hat{=} \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx \quad (.66)$$

On aura donc :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n | \phi \rangle P_n(x) \implies S_{\text{linéaire}}(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n | \phi \rangle S_{\text{linéaire}}(P_n)(x) \quad (.67)$$

Pour construire la matrice d'interaction, on fait désormais passer chacun de ces polynômes de Legendre à travers l'ASO :

$$S_{\text{linéaire}}(P_n)(x_d) = \frac{1}{\pi} \mathbb{I}_P(x_d) \int_{-1}^1 \frac{P_n(x_d) - P_n(x)}{x_d - x} dx \quad (.68)$$

Or on reconnaît dans l'intégrale de la formule précédente une nouvelle base de polynômes de degré étagé en les **polynômes de Legendre de seconde espèce**, notés  $Q_n$  définis vis-à-vis des premiers via la formule :

$$Q_{n-1}(x) \hat{=} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} dy \quad (.69)$$

En terme de structure spatiale, la réponse à un mode de phase  $P_n$  aura donc la forme de  $Q_{n-1}$ . On donne sur la figure .27 la forme des polynômes de Legendre de première espèce  $P_n$  (à gauche) ainsi que ceux de seconde espèce  $Q_{n-1}$  qui leur sont associés.

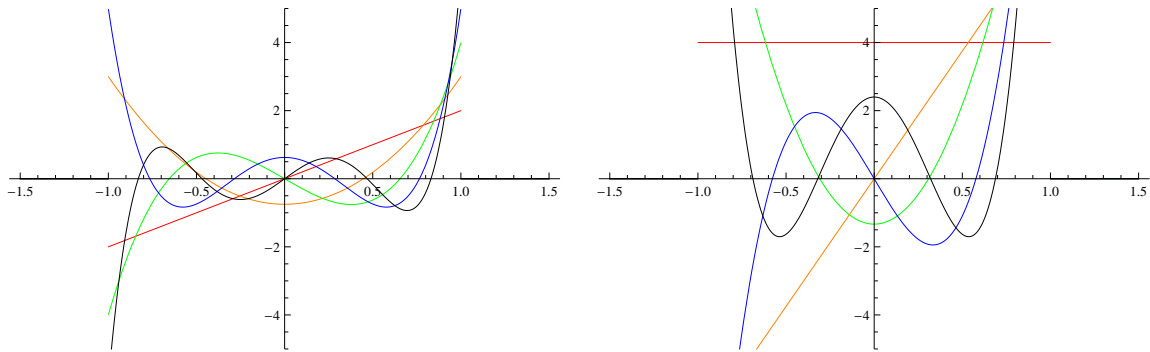


Figure .27 – Polynômes de Legendre de première espèce  $P_n$  (gauche) et de seconde espèce  $Q_n$  (droite). Le code couleur est le suivant :  $P_1, Q_0$   $P_2, Q_1$   $P_3, Q_2$   $P_4, Q_3$  et  $P_5, Q_4$

La propriété véritablement intéressante des polynômes de Legendre de seconde espèce tient au fait qu'ils forment eux-aussi une **base orthonormée** pour un produit scalaire différent de celui défini dans l'équation (.66).

Avant d'évoquer le produit scalaire qui rend orthonormée la base des  $(Q_n)$ , on généralise la notion de produit scalaire sur le segment  $[-1; 1]$ . Il en existe en effet une infinité pouvant être paramétré par une fonction de poids  $\omega$  de la façon suivante :

$$\langle f | g \rangle_{\omega} \hat{=} \int_{-1}^1 f(x)g(x)\omega(x)dx \quad (.70)$$

On prendra évidemment des fonctions de poids qui assurent que la forme  $\langle . | . \rangle_\omega$  est **bilinéaire symétrique définie positive**.

La fonction de poids associée au produit scalaire qui rend orthogonaux les polynômes de Legendre  $P_n$ , équation (.66), est par exemple la fonction identité :

$$\omega_{\text{Legendre},1}(x) = \mathbb{I}_{[-1;1]}(x) \quad (.71)$$

Celle associée aux Legendre de seconde espèce ( $Q_n$ ) la fonction de poids est :

$$\omega_{\text{Legendre},2}(x) = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} \quad (.72)$$

Ce résultat, fourni dans l'article [[Mastroianni and Occorsio, 1996](#)], est fondamental puisqu'il permet d'inverser exactement la formule (.67). On a en effet :

$$\phi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \langle Q_{n-1}, S_{\text{linéaire}} \rangle_{\omega_{\text{Legendre},2}} P_n \quad (.73)$$

En d'autres termes, si l'on connaît la carte des pentes  $S$ , il devient possible de remonter à la décomposition de la phase sur la base de Legendre de première espèce via un simple produit scalaire :

$$\langle P_n, \phi \rangle_{\omega_{\text{Legendre},1}} = \langle Q_{n-1}, S_{\text{linéaire}} \rangle_{\omega_{\text{Legendre},2}} \quad (.74)$$

On a fait des progrès substantiels dans l'étude théorique de l'ASO Pyramide à une dimension cependant il reste un arrière-goût d'arbitraire dans les résultats obtenus. Nous avons en effet réussi à inverser l'équation entrée/sortie (.64) en décomposant la phase sur la base des Legendre. Ce choix n'est pas justifié au delà du fait que les Legendre forment bel et bien une base de l'espace des phases. Il en existe pourtant d'autres et l'on vient même d'en rencontrer une en la base des polynômes de Legendre de seconde espèce ; ceux-ci pourraient tout autant servir de base à l'espace des phases.

On va donc prendre un peu de distance vis-à-vis de ce choix de base en se servant de la fonction de poids  $\omega$ . On sait en effet que celle-ci paramétrise les produits scalaires sur  $[-1;1]$  et donc leur base associée. On peut montrer que si l'on considère en entrée une base orthonormée vis-à-vis d'une fonction de poids arbitraire  $\omega$ , le produit scalaire dans l'espace de la carte des pentes aura une fonction de poids  $\tilde{\omega}$  égale à :

$$\tilde{\omega} = \frac{w}{1 + \mathcal{H}(\omega)^2}, \quad (.75)$$

relation qui est évidemment vérifiée pour le cas précédemment étudié des polynômes de Legendre. L'équation (.75) est probablement celle qui illustre le plus profondément la problématique de reconstruction de phase lors de l'analyse de

front d'onde pour la Pyramide à 1 dimension.

# Bibliographie

- [Akondi et al., 2013] Akondi, V., Castillo, S., and Vohnsen, B. (2013). Digital pyramid wavefront sensor with tunable modulation. *Optics express*, 21(15) :18261–18272.
- [Akondi et al., 2014] Akondi, V., Castillo, S., and Vohnsen, B. (2014). Multifaceted digital pyramid wavefront sensor. *Optics Communications*, 323 :77–86.
- [Belvaux and Vareille, 1971] Belvaux, Y. and Vareille, J. (1971). Visualisation d’objets de phase par transformation de hilbert. *Nouvelle Revue d’Optique Appliquée*, 2(3) :149.
- [Beuzit et al., 2008] Beuzit, J.-L., Feldt, M., Dohlen, K., Mouillet, D., Puget, P., Wildi, F., Abe, L., Antichi, J., Baruffolo, A., Baudoz, P., et al. (2008). Sphere : a ‘planet finder’ instrument for the vlt. In *SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation*, pages 701418–701418. International Society for Optics and Photonics.
- [Boyer et al., 1990] Boyer, C., Michau, V., Rousset, G., et al. (1990). Adaptive optics. interaction matrix measurements and real time control algorithms for the come-on project. In *Proceedings of SPIE- The International Society for Optical Engineering.*, volume 1237, pages 406–421.
- [Burvall et al., 2006] Burvall, A., Daly, E., Chamot, S. R., and Dainty, C. (2006). Linearity of the pyramid wavefront sensor. *Optics Express*, 14 :11925–11934.
- [Clare and Lane, 2003] Clare, R. M. and Lane, R. G. (2003). Wavefront sensing from spatial filtering at the focal plane. volume 5169, pages 43–54.
- [Clare and Lane, 2005] Clare, R. M. and Lane, R. G. (2005). Wave-front sensing from subdivision of the focal plane with a lenslet array. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(1) :117–125.
- [Close et al., 2012] Close, L. M., Males, J. R., Kopon, D. A., Gasho, V., Follette, K. B., Hinz, P., Morzinski, K., Uomoto, A., Hare, T., Riccardi, A., Esposito, S., Puglisi, A., Pinna, E., Busoni, L., Arcidiacono, C., Xompero, M., Briguglio, R., Quiros-Pacheco, F., and Argomedo, J. (2012). First closed-loop visible AO test results for the advanced adaptive secondary AO system for the Magellan Telescope : MagAO’s performance and status. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447 of *Proc. SPIE*, page 84470X.

- [Conan, 1995] Conan, J.-M. (1995). *Etude de la correction partielle en optique adaptative*. PhD thesis.
- [Cubalchini, 1979] Cubalchini, R. (1979). Modal wave-front estimation from phase derivative measurements. *J. Opt. Soc. Am.*, 69(7) :972–977.
- [Davies and Kasper, 2012] Davies, R. and Kasper, M. (2012). Adaptive optics for astronomy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 50 :305–351.
- [Dohlen, 2004] Dohlen, K. (2004). Phase masks in astronomy : From the Mach-Zehnder interferometer to coronagraphs. In Aime, C. and Soummer, R., editors, *EAS Publications Series*, volume 12 of *EAS Publications Series*, pages 33–44.
- [Esposito and Riccardi, 2001] Esposito, S. and Riccardi, A. (2001). Pyramid wavefront sensor behavior in partial correction adaptive optic systems. *Astronomy and Astrophysics*, 369(2) :L9–L12.
- [Esposito et al., 2012] Esposito, S., Riccardi, A., Pinna, E., Puglisi, A. T., Quirós-Pacheco, F., Arcidiacono, C., Xompero, M., Briguglio, R., Busoni, L., Fini, L., Argomedo, J., Gherardi, A., Agapito, G., Brusa, G., Miller, D. L., Guerra Ramon, J. C., Boutsia, K., and Stefanini, P. (2012). Natural guide star adaptive optics systems at LBT : FLAO commissioning and science operations status. In *Adaptive Optics Systems III*, volume 8447 of *Proc. SPIE*, page 84470U.
- [Esposito et al., 2003] Esposito, S., Tozzi, A., Ferruzzi, D., Carbillet, M., Riccardi, A., Fini, L., Verinaud, C., Accardo, M., Brusa, G., Gallieni, D., Biasi, R., Baffa, C., Biliotti, V., Foppiani, I., Puglisi, A., Ragazzoni, R., Ranfagni, P., Stefanini, P., Salinari, P., Seifert, W., and Storm, J. (2003). First-light adaptive optics system for large binocular telescope. volume 4839, pages 164–173.
- [Fauvarque et al., 2015] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., and Sauvage, J.-F. (2015). Variation around a pyramid theme : optical recombination and optimal use of photons. *Optics Letters*, 40(15) :3528–3531.
- [Fauvarque et al., 2016] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., and Girault, O. (2016). General formalism for fourier-based wave front sensing. *Optica*, 3(12) :1440–1452.
- [Fauvarque et al., 2017] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., and Girault, O. (2017). General formalism for fourier-based wave front sensing : application to the pyramid wave front sensors. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 3(1) :019001–019001.
- [Fauvarque et al., prep] Fauvarque, O., Neichel, B., Fusco, T., Sauvage, J.-F., and Girault, O. (in prep.). General deconvolution method for fourier-based wave front sensor. *Optica*.
- [Foo et al., 2005] Foo, G., Palacios, D. M., and Swartzlander, G. A. (2005). Optical vortex coronagraph. *Opt. Lett.*, 30(24) :3308–3310.

- [Gilmozzi and Spyromilio, 2007] Gilmozzi, R. and Spyromilio, J. (2007). The european extremely large telescope (e-elt). *The Messenger*, 127(11) :3.
- [Goodman, 2005] Goodman, J. W. (2005). *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers.
- [Guyon, 2005] Guyon, O. (2005). Limits of adaptive optics for high-contrast imaging. *The Astrophysical Journal*, 629(1) :592.
- [Iglesias et al., 2002] Iglesias, I., Ragazzoni, R., Julien, Y., and Artal, P. (2002). Extended source pyramid wave-front sensor for the human eye. *Optics express*, 10(9) :419–428.
- [Jovanovic et al., 2014] Jovanovic, N., Guyon, O., Martinache, F., Clergeon, C., Singh, G., Kudo, T., Newman, K., Kuhn, J., Serabyn, E., Norris, B., Tuthill, P., Stewart, P., Huby, E., Perrin, G., Lacour, S., Vievard, S., Murakami, N., Fumika, O., Minowa, Y., Hayano, Y., White, J., Lai, O., Marchis, F., Duchene, G., Kotani, T., and Woillez, J. (2014). Development and recent results from the Subaru coronagraphic extreme adaptive optics system. In *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy V*, volume 9147 of *Proc. SPIE*, page 91471Q.
- [Lyot, 1931] Lyot, B. (1931). Photographie de la couronne solaire en dehors des eclipses. *CR Acad. Sci. Paris*, 193(1169) :48.
- [Mastroianni and Occorsio, 1996] Mastroianni, G. and Occorsio, D. (1996). Legendre polynomials of the second kind, fourier series and lagrange interpolation. *Journal of computational and applied mathematics*, 75(2) :305–327.
- [N'Diaye et al., 2014] N'Diaye, M., Dohlen, K., Caillat, A., and Costille, A. (2014). Design optimization and lab demonstration of ZELDA , a Zernike sensor for near-coronagraph quasi-static measurements. 9148 :16–18.
- [N'Diaye et al., 2013] N'Diaye, M., Dohlen, K., Fusco, T., and Paul, B. (2013). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a Zernike phase-mask sensor. *Astron. Astrophys.*, 555 :A94.
- [Neichel et al., 2014] Neichel, B., Vidal, F., Rigaut, F., Carrasco, E. R., Arriagada, G., Serio, A., Pessev, P., Winge, C., Van Dam, M., Garrel, V., et al. (2014). Gems first science results. *arXiv preprint arXiv :1401.2009*.
- [N'Diaye et al., 2016] N'Diaye, M., Vigan, A., Dohlen, K., Sauvage, J.-F., Caillat, A., Costille, A., Girard, J., Beuzit, J.-L., Fusco, T., Blanchard, P., et al. (2016). Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a zernike phase-mask sensor-ii. concept validation with zelda on vlt/sphere. *Astronomy & Astrophysics*, 592 :A79.
- [Oti et al., 2003] Oti, J. E., Canales, V. F., and Cagigal, M. P. (2003). Analysis of the signal-to-noise ratio in the optical differentiation wavefront sensor. *Opt. Express*, 11(21) :2783–2790.

- [Pérennès et al., 2003] Pérennès, F., Ghigo, M., and Cabrini, S. (2003). Characterisation of adaptive optic pyramid wavefront sensors fabricated by deep x-ray lithography. *Microelectronic engineering*, 67 :566–573.
- [Phillion and Baker, 2006] Phillion, D. W. and Baker, K. (2006). Two-sided pyramid wavefront sensor in the direct phase mode. volume 6272, pages 627228–627228–12.
- [Pinnala et al., 2011] Pinnala, E., Puglisi, A., Argomedo, J., Quiros-Pacheco, F., Riccardi, A., and Esposito, S. (2011). The pyramid wavefront sensor with extended reference source. *AO4ELT2 Conference*.
- [Plantet et al., 2015] Plantet, C., Meimon, S., Conan, J.-M., and Fusco, T. (2015). Revisiting the comparison between the Shack-Hartmann and the pyramid wavefront sensors via the Fisher information matrix. *Optics Express*, 23(22) :28619.
- [Primot and Sogno, 1995] Primot, J. and Sogno, L. (1995). Achromatic three-wave (or more) lateral shearing interferometer. *JOSA A*, 12(12) :2679–2685.
- [Ragazzoni, 1996] Ragazzoni, R. (1996). Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of Modern Optics*, 43(2) :289–293.
- [Ragazzoni and Farinato, 1999] Ragazzoni, R. and Farinato, J. (1999). Sensitivity of a pyramidal wave front sensor in closed loop adaptive optics. *Astronomy and Astrophysics*, 350 :L23–L26.
- [Rigaut and Gendron, 1992] Rigaut, F. and Gendron, E. (1992). Laser guide star in adaptive optics. The tilt determination problem. *Astron. Astrophys.*, 261 :677–684.
- [Roddier, 1988] Roddier, F. (1988). Curvature sensing and compensation : a new concept in adaptive optics. *Applied Optics*, 27(7) :1223–1225.
- [Roddier, 1999] Roddier, F. (1999). *Adaptive optics in astronomy*. Cambridge university press.
- [Roddier and Roddier, 1997] Roddier, F. and Roddier, C. (1997). Stellar Coronagraph with Phase Mask. *Astronomical Society of the Pacific*, 109 :815–820.
- [Roorda et al., 2002] Roorda, A., Romero-Borja, F., Donnelly III, W. J., Queener, H., Hebert, T. J., and Campbell, M. C. (2002). Adaptive optics scanning laser ophthalmoscopy. *Optics express*, 10(9) :405–412.
- [Rouan et al., 2000] Rouan, D., Riaud, P., Boccaletti, A., Clénet, Y., and Labeyrie, A. (2000). The Four-Quadrant Phase-Mask Coronagraph. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 112 :1479–1486.
- [Rousset et al., 2003] Rousset, G., Lacombe, F., Puget, P., Hubin, N. N., Gendron, E., Fusco, T., Arsenault, R., Charton, J., Feautrier, P., Gigan, P., et al. (2003). Naos, the first ao system of the vlt : on-sky performance. In *Astronomical Telescopes and Instrumentation*, pages 140–149. International Society for Optics and Photonics.



- [Sextant, 1997] Sextant (1997). *Optique expérimentale*. Collection enseignement des sciences. Hermann.
- [Shack and Platt, 1971] Shack, R. B. and Platt, B. C. (1971). Production and use of a lenticular Hartmann Screen. *J. \ Opt. \ Soc. \ Am.*, 61 :656.
- [Shatokhina et al., 2011] Shatokhina, I., Zhariy, M., and Ramlau, R. (2011). Wavefront reconstruction for eXtreme Adaptive Optics. *AO4ELT2 Conference*.
- [Smartt and Steel, 1975] Smartt, R. N. and Steel, W. H. (1975). Theory and Application of Point-Diffraction Interferometers. *Japanese Journal of Applied Physics*, 14 :14–1.
- [Thatte et al., 2010] Thatte, N., Tecza, M., Clarke, F., Davies, R. L., Remillieux, A., Bacon, R., Lunney, D., Arribas, S., Mediavilla, E., Gago, F., et al. (2010). Harmoni : a single-field wide-band integral-field spectrograph for the european elt. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 77352I–77352I. International Society for Optics and Photonics.
- [Toepler, 1864] Toepler, A. (1864). Beobachtung nach einer neuen optischen Method.
- [Tozzi et al., 2008] Tozzi, A., Stefanini, P., Pinna, E., and Esposito, S. (2008). The double pyramid wavefront sensor for lbt. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 701558–701558. International Society for Optics and Photonics.
- [van Dam et al., 2012] van Dam, M. A., Conan, R., Bouchez, A. H., and Espeland, B. (2012). Design of a truth sensor for the gmt laser tomography adaptive optics system. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 844717–844717. International Society for Optics and Photonics.
- [Vérinaud, 2004] Vérinaud, C. (2004). On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor. *Optics Communications*, 233(1) :27–38.
- [Vohnsen et al., 2011] Vohnsen, B., Castillo, S., and Rativa, D. (2011). Wavefront sensing with an axicon. *Optics letters*, 36(6) :846–848.
- [Wang et al., 2010a] Wang, A., Yao, J., Cai, D., and Ren, H. (2010a). Design and fabrication of a pyramid wavefront sensor. *Optical Engineering*, 49(7) :073401–073401–5.
- [Wang et al., 2010b] Wang, J., Bai, F., Ning, Y., Huang, L., and Wang, S. (2010b). Comparison between non-modulation four-sided and two-sided pyramid wavefront sensor. *Optics express*, 18(26) :27534–27549.
- [Wilson, 1975] Wilson, R. G. (1975). Wavefront-error evaluation by mathematical analysis of experimental Foucault-test data. *Applied optics*, 14(9) :2286–97.
- [Wizinowich et al., 2006] Wizinowich, P. L., Le Mignant, D., Bouchez, A. H., Campbell, R. D., Chin, J. C., Contos, A. R., van Dam, M. A., Hartman, S. K.,

- Johansson, E. M., Lafon, R. E., et al. (2006). The w m keck observatory laser guide star adaptive optics system : overview. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 118(840) :297.
- [Zernike, 1934] Zernike, F. (1934). Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method. *Royal Astronomical Society*, 94 :377–383.

## Variation around a pyramid theme: optical recombination and optimal use of photons

OLIVIER FAUVARQUE,<sup>1,\*</sup> BENOIT NEICHEL,<sup>1</sup> THIERRY FUSCO,<sup>1,2</sup> AND JEAN-FRANCOIS SAUVAGE<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, 38 rue Joliot Curie, 13388 Marseille cedex 13, France

<sup>2</sup>ONERA—the French Aerospace Laboratory, F-92322 Châtillon, France

\*Corresponding author: olivier.fauvarque@lam.fr

Received 22 May 2015; revised 26 June 2015; accepted 7 July 2015; posted 8 July 2015 (Doc. ID 241299); published 23 July 2015

We propose a new type of wave-front sensor (WFS) derived from the pyramid WFS (PWFS). This new WFS, called the flattened pyramid-WFS (FPWFS), has a reduced pyramid angle in order to optically overlap the four pupil images into a unique intensity. This map is then used to derive the phase information. In this Letter, this new WFS is compared to three existing WFSs, namely the PWFS, the modulated PWFS (MPWFS), and the Zernike WFS (ZWFS) following tests about sensitivity, linearity range, and low-photon-flux behavior. The FPWFS turns out to be more linear than a modulated pyramid for the high-spatial order aberrations, but it provides an improved sensitivity compared to the non-modulated pyramid. The noise propagation may even be as low as the ZWFS for some given radial orders. Furthermore, the pixel arrangement being more efficient than for the PWFS, the FPWFS seems particularly well suited for high-contrast applications. © 2015 Optical Society of America

**OCIS codes:** (010.1080) Active or adaptive optics; (010.7060) Turbulence; (010.7350) Wave-front sensing; (110.6770) Telescopes.

<http://dx.doi.org/10.1364/OL.40.003528>

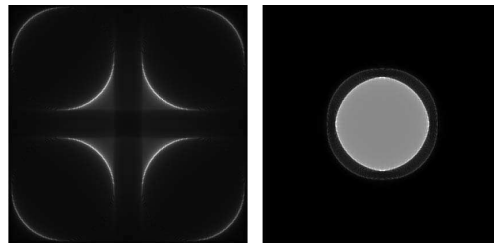
The aim of a wave-front sensor (WFS) is to code the phase information using an incoming photon flux. WFSs are usually divided into two main classes: those working in the pupil plane like, e.g., the Shack-Hartmann [1], and those performing this operation by imaging the pupil after a Fourier filtering in the focal plane. The Foucault's knife (see [2]) is a first example of this later approach. In that case, the focal plane mask is simply a Heaviside function, with half of the light passing through, while the other half is blocked. By re-imaging a pupil plane, one can derive the phase information by analyzing the intensity distribution. This principle has latter been generalized by Ragazzoni *et al.* [3] with the *pyramid*-WFS (PWFS). In the case of the PWFS, the filtering is made by a transparent square pyramid, its summit being positioned on the focal point of the optical system. The prism shape of this optical object spreads

the complex amplitude into four parts coding differently the spatial frequencies. The differential information computed from the four resulting intensities allows to easily code the phase information.

We propose here a variation around the pyramid concept, the idea being to recombine the phase information before the detection. To do so, we propose to reduce significantly the pyramid angle so that the four images, which were, in the original concept, completely separated, move closer and overlap. This is illustrated in Fig. 1 where we show two configurations: a full pupil separation (left insert; classical PWFS configuration) and an overlap rate of 90% (right insert). This resulting intensity distribution is then used as a phase information coding. Due to the shape of the pyramid, this new WFS will be called FPWFS for flattened pyramid wave-front sensor.

The FPWFS considered here will use a constant overlap rate of 90%. This choice results from a first trade-off between the main performance criteria introduced in this Letter, namely sensitivity and linearity range. Note that we found that the influence of this parameter regarding these performance criteria was not critical, and will be detailed in a next paper.

The aim of this Letter is to derive the main characteristics of this new WFS in terms of linearity, sensitivity, and noise propagation, and to compare them with existing WFSs. To do so, three WFSs have been chosen, respectively:



**Fig. 1.** Intensity on the detector for a circular pupil with no aberration for two different pyramid angles. The overlap rate of the four pupil images equals to: 0% for the left image, which is the usual PWFS case and 90% for the right one, which is the typical FPWFS case.

- the PWFS already introduced above;
- the modulated PWFS (introduced by Ragazzoni in the same paper [3]) which improves the PWFS linearity range, as a trade-off with sensitivity. In this Letter, a circular tip/tilt modulation with an amplitude going from 1 to  $6\lambda/D$  (in radius) will be considered; and
- the Zernike WFS (ZWFS), introduced by N'Diaye in [4], and known as a reference sensor in term of noise propagation as illustrated by Guyon in [5].

In order to study the performance of a WFS, the first step is to know how to compute the intensity directly coming from the detector to create a quantity (called meta-intensity) that should be linear with the optical path difference (OPD). We assume that the incoming flux is uniform (i.e., we neglect scintillation effects) and defined by  $\psi = \sqrt{n}Pe^{2i\pi\delta}$ , where  $\psi$  is the complex amplitude of the light just in the pupil,  $n$  is the number of incoming photons in the full pupil,  $P$  is the indicator function of the pupil that informs about the geometry of the pupil, and  $\delta$  is the OPD of the incoming light. The aim of any WFS is to measure this latter quantity. The intensity on the detector  $I(\delta, n)$  depends on the OPD and is proportional to the flux.

In the case of the PWFS and the MPWFS, the meta-intensities usually defined (see [3]) are the classical *slopes* maps  $S_x$  and  $S_y$  defined by

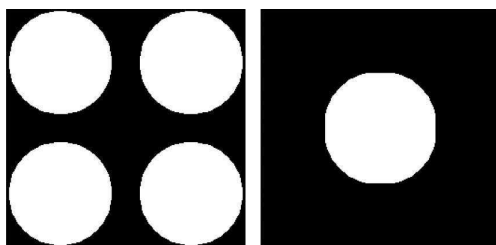
$$S_x = \frac{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} \quad \text{and} \quad S_y = \frac{I_3 + I_2 - I_1 - I_4}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}, \tag{1}$$

where  $I_1, I_2, I_3$  and  $I_4$  are the intensity in the four pupil images. Note that these meta-intensities could be chosen differently, see [6]. Only the photons inside the geometrical pupil footprint are taken into account. This is illustrated by the mask shown in the left image of Fig. 2.

Concerning the FPWFS and the ZWFS, the chosen meta-intensity consists in a return-to-reference and a normalization:

$$mI(\delta) = \frac{I(\delta, n) - I(\text{ref}, n)}{I(\text{ref}, n)}, \tag{2}$$

where  $I(\text{ref}, n)$  is the intensity on the detector when the optical aberration corresponds to the reference phase. Such a meta-intensity, although basic, is the simplest way to recode the intensity and can be used for every WFS that optically codes the phase into intensity. In our case, the reference phase is the zero-OPD, but in practice, it may contain WFS path aberrations. In addition, and in order to follow the same computation

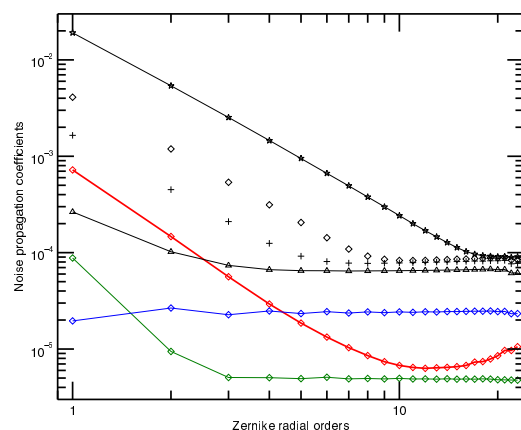


**Fig. 2.** Valid pixels on the detector for the PWFS and MPWFS (left) and FPWFS (right). Note the non-circular shape of the flattened pyramid's mask.

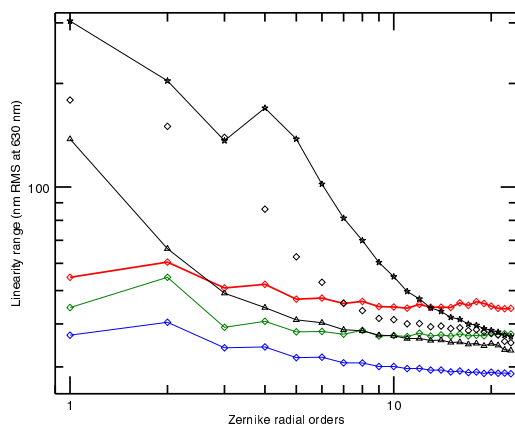
as for the PWFS, photons that are diffracted outside the geometrical footprint of the pupil on the detector are removed from computation. For the FPWFS, it corresponds to the pupils overlap area, illustrated by the right image of Fig. 2. For the ZWFS, this area is simply the unique geometrical pupil image (see N'Diaye *et al.* [4]).

In this first *performance test* paragraph, we will focus on the sensitivity of the FPWFS in terms of noise propagation. Following the results of Rigaut and Gendron [7], the diagonal elements of  $(M'M)^{-1}$ , where  $M$  is the interaction matrix of the system, have to be studied. The interaction matrix is defined on the first 24 Zernike radial orders that correspond to the first 299 Zernike modes. Each mode has the same amplitude: 10 nm RMS at  $\lambda = 630$  nm (which corresponds to a 0.1 rad RMS phase amplitude). Moreover, we will use a very high number of pixels on the detector (i.e., 4096) so that any effects of pupil sampling on the noise propagation coefficients, i.e., aliasing effects, can be neglected. For each WFS case, the interaction matrix is built with the meta-intensities defined above ( $S_x$  and  $S_y$  for the PWFS and the MPWFS;  $mI$  for the FPWFS and the ZWFS).

Figure 3 shows the diagonal elements of  $(M'M)^{-1}$  averaged for each Zernike radial order. In terms of noise propagation, the ZWFS proves to be the most-optimal WFS as shown by Guyon [5] and N'Diaye [4]. The PWFS presents a very good performance, although five times larger than the previous one, with a flat distribution of the errors across the Zernike modes. The modulation increases the value of the noise-propagation coefficients for higher frequencies up to five times the PWFS one. Modulation also changes the slope for lower frequencies. This is in good agreement with the findings of Verinaud *et al.* in [6] and Guyon in [5]. In comparison, the FPWFS has a very interesting behavior, with a noise propagation close to the MPWFS (modulation of  $1.5\lambda/D$ ) for low order Zernikes (up to a radial order of  $\sim 4$ ), and then an improved performance when compared to the PWFS itself. The noise-propagation coefficients are even almost as low as those of the ZWFS for Zernike radial orders in the range of 10 to 20. Finally, the noise-propagation performance of the FPWFS is at least 10



**Fig. 3.** Noise propagation of the FPWFS (red), ZWFS (green), PWFS (blue), and MPWFS (black:  $\star_{6\lambda/D}$ ,  $\diamond_3$ ,  $+_2$  and  $\Delta_1$ ).



**Fig. 4.** Linearity range of the FPWFS (red), ZWFS (green), PWFS (blue), and MPWFS (black:  $\star_{6\lambda/D}$ ,  $\diamond_3$  and  $\Delta_1$ ).

times better (which corresponds to a magnitude gain of 2.5) than the MPWFS modulated at  $6\lambda/D$ , which is the typical operating modulation amplitude.

The following paragraph is focused on the linearity range of the FPWFS when compared to the other WFSs. The numerical simulations performed here test the validity of the interaction matrix of each WFS when the aberration amplitude is not equal to the calibration amplitude (here equal to 10 nm RMS at  $\lambda = 630$  nm). To do this, for each Zernike mode, an aberration with an increasing amplitude is sent to the WFSs. The outgoing meta-intensity is inverted via the pseudo-inverse of the interaction matrix. The linearity range associated to this mode is defined as the amplitude where the error between the estimated and the injected amplitude reaches 5 nm RMS. This is shown in Fig. 4 for the 24 first Zernike radial orders.

As already demonstrated in previous studies (Burvall *et al.* in [8]), the PWFS has a low level of linearity range for all considered modes. This level stays quite flat and slowly decreases with the radial order. The FPWFS and the ZWFS have the same type of flat linearity range. Nevertheless, the FPWFS is better than the two others since its mean linearity range stays around 50 nm RMS compared to 40 nm for the ZWFS and 30 nm for the PWFS.

Concerning the MPWFS, the tip/tilt modulation releases, as expected, the linearity limitation of the PWFS, especially for the low frequencies. Unfortunately, this gain dramatically drops for the high-radial orders. As a consequence, the FPWFS becomes better from a certain radial order: for a modulation of  $1\lambda/D$ , this order equals 3, for  $3\lambda/D$  it equals 7, and for a modulation of  $6\lambda/D$ , the radial order of equivalent linearity range between the FPWFS and the MPWFS equals 17.

In the context of extreme adaptive optics, this result could imply that the FPWFS may not need a modulation device.

The previous study was only interested in the linearity range regarding isolated aberrations. But the WFSs have to analyze real turbulent phase screens that correspond to a sum of many aberrations. In order to know how each WFS behaves regarding this coupling of several aberrations modes, the *bootstrap* test consists in trying to close an adaptive optics loop when a typical

**Table 1.** Efficiency of Photons

WFS	$P$	MP $_{3\lambda/D}$	FP	$Z$
Used photons (%)	43	88	98	85

turbulence screen is injected in the adaptive optics (AO) system. First simulations show that the MPWFS does manage to close the loop and is the fastest WFS, whereas the ZWFS usually diverges. Despite its low linearity range, the PWFS turns out to bootstrap effectively. Concerning the FPWFS, it does converge and is as fast as the PWFS. These preliminary results are very encouraging with regards to the robustness of the FPWFS, a property that is extremely important in adaptive optics.

This third performance paragraph will assess the behavior of the different WFSs in terms of photon management, i.e., the way each WFS is managing and optimizing each incoming photon with respect to each detector pixel. Note that this issue is central for low photon flux regimes, which is usually the case for astronomical applications.

A first approach to evaluate the WFS efficiency in dealing with low-flux regimes is simply to evaluate how many photons are lost by the diffraction and the windowing. Table 1 shows these quantities. The PWFS only uses about 45% of the incoming photons. This is due to the diffraction that rejects light outside the four pupils images, especially in the cross area between these images (see Fig. 1). The modulation corrects this by moving back the photons into the four pupil images with an efficiency of approximately 90%. This value slowly increases with the amplitude modulation. The ZWFS performance is similar: still a 90% efficiency; the photon being lost due to diffraction effects. In comparison, the FPWFS makes a better use of the incoming photons, with  $\sim 98\%$  of them effectively used. This is the consequence of having removed the pupil separation.

Second, the optical recombination of the four pupil signals operated in the FPWFS, requiring a smallest area on the detector compared to the PWFS, tends to prove that the FPWFS is particularly adapted to low-photon-flux regime. Indeed, for a same pupil sampling, four pixels are needed for the PWFS, whereas only 1.1 is required for the FPWFS (for a 90% overlap rate). As a consequence, the averaged flux per pixel will be about four times higher in the case of the FPWFS. This may be very interesting if the detector presents significant electronic noise, as it is the case for the near IR detectors. Furthermore, for a WFS working at a visible wavelength—where today detectors have sub-electronic noise—the fact that the FPWFS needs less pixels than the PWFS may still be interesting. Indeed, in the context of extreme AO (XAO), where a very large number of aberrations modes have to be measured, a smaller detector can be very welcome, since costs and data processing speed will be improved.

A new WFS has been derived using the same optical design as the pyramid WFS. The only modification is to consider a smaller pyramid angle in order to let the pupil signals overlap. It allows an optical recombination of the four pupil images directly on the detector. The new flattened pyramid WFS presents extremely promising performance. It appears in particular that this sensor conciliates two pillars of WFS: the

sensitivity and the linearity range. More specifically, we demonstrated on simulations that:

- At low radial orders (typically  $<4$ ), the FPWFS provides the same noise-propagation performance as a PWFS modulated with an amplitude of about  $1.5\lambda/D$ . At high radial orders, its behavior is strongly improved with almost a gain of one order of magnitude with respect to the PWFS and almost reaches the optimal ZWFS level.

- The linearity range of the FPWFS outperforms compared to other static WFSs such as the PWFS or the ZWFS. And even if the FPWFS is not as effective as a large modulated MPWFS for the first Zernike radial orders, it becomes more linear for higher modes. It means that the FPWFS may not require any modulation.

- We tested how the FPWFS could behave regarding real turbulence screens. As for the pyramid, and even if the linearity range is not as good as for other sensors, the FPWFS can effectively and efficiently close an AO loop.

- Diffraction effects are reduced, and photons that were lost between the pupil images for PWFS (and to a lesser extent for MPWFS) are now used to code phase information.

- The illuminated area on the detector is smaller for the FPWFS than for the PWFSs. As a consequence, the new sensor requires less pixels to measure a same number of aberrations, which makes a WFS particularly appropriate to high-contrast applications.

**Funding.** European Commission (312430); ANR (project WASABI); French Aerospace Lab (ONERA) (NAIADE Research Project).

## REFERENCES

1. R. B. Shack and B. C. Platt, *J. Opt. Soc. Am.* **61**, 656 (1971).
2. R. G. Wilson, *Appl. Opt.* **14**, 2286 (1975).
3. R. Ragazzoni, *J. Mod. Opt.* **43**, 289 (1996).
4. M. N'Diaye, K. Dohlen, T. Fusco, and B. Paul, *Astron. Astrophys.* **555**, A94 (2013).
5. O. Guyon, *Astrophys. J.* **629**, 592 (2005).
6. C. Véraud, *Opt. Commun.* **233**, 27 (2004).
7. F. Rigaut and E. Gendron, *Astron. Astrophys.* **261**, 677 (1992).
8. A. Burvall, E. Daly, S. R. Chamot, and C. Dainty, *Opt. Express* **14**, 11925 (2006).

# General formalism for Fourier-based wave front sensing

OLIVIER FAUVARQUE,<sup>1,\*</sup> BENOIT NEICHEL,<sup>1</sup> THIERRY FUSCO,<sup>1,2</sup> JEAN-FRANCOIS SAUVAGE,<sup>1,2</sup> AND ORION GIRAULT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Aix Marseille Université, CNRS, LAM (Laboratoire d'Astrophysique de Marseille) UMR 7326, 13388 Marseille, France

<sup>2</sup>ONERA—the French Aerospace Laboratory, F-92322 Chatillon, France

\*Corresponding author: [olivier.fauvarque@lam.fr](mailto:olivier.fauvarque@lam.fr)

Received 29 July 2016; revised 27 October 2016; accepted 30 October 2016 (Doc. ID 272627); published 2 December 2016

We introduce in this paper a general formalism for Fourier-based wave front sensing. To do so, we consider the filtering mask as a free parameter. Such an approach allows us to unify sensors like the pyramid wave front sensor (PWFS) and the Zernike wave front sensor (ZWFS). In particular, we take the opportunity to generalize these two sensors in terms of sensors' class, where optical quantities such as the apex angle for the PWFS or the depth of the Zernike mask for the ZWFS become free parameters. In order to compare all the generated sensors of these two classes thanks to common performance criteria, we first define a general phase-linear quantity that we call meta-intensity. Analytical developments allow us to then split the perfectly phase-linear behavior of a WFS from the nonlinear contributions, making robust and analytic definitions of the sensitivity and the linearity range possible. Moreover, we define a new quantity called the SD factor, which characterizes the trade-off between these two antagonistic quantities. These developments are generalized for a modulation device and polychromatic light. A nonexhaustive study is finally conducted on the two classes, allowing us to retrieve the usual results and also make explicit the influence of the optical parameters introduced above. © 2016 Optical Society of America

**OCIS codes:** (010.1080) Active or adaptive optics; (010.7060) Turbulence; (010.7350) Wave-front sensing; (110.6770) Telescopes.

<https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.001440>

## 1. INTRODUCTION

By placing amplitude or phase masks in a focal plane, it is possible to filter the light from one pupil plane to another. Those masks are able, in particular, to transform incoming phase fluctuations into intensity variations on a detector.

Such optical designs are thus particularly relevant in the context of wave front sensing, especially for the adaptive optics (AO). Moreover, Fourier-based wave front sensors (WFSs) have many advantages compared to other WFSs, such as the Shack–Hartmann, in terms of, for instance, noise propagation or sampling flexibility.

The historical example of those Fourier-based WFSs, dating from 1858, is the famous Foucault's knife. Ragazzoni generalized this physical concept with the pyramid WFS [1], which consists of a 4-face pyramidal mask in the focal plane. Variations of this concept regularly appear in the literature and define new WFSs: Akondi *et al.* [2] and Vohnsen *et al.* [3] tested new pyramidal masks by changing the number of the faces of the pyramid. We recently proposed the flattened pyramid WFS [4], which introduces a new way to use the pyramid mask by reducing its apex angle.

Using another physical concept based on the phase contrast method, Zernike introduced the Zernike WFS [5], where a Fourier mask, completely transparent, has a circular depression in its midst, allowing one to create interference between the spatial frequencies of the incoming phase.

The essential purpose of this paper is to merge all these Fourier-based WFSs under the same mathematical formalism in order to build robust and relevant criteria allowing researchers to compare their performance in the context of AO wave front sensing. Such an approach has been described, for instance, in the context of phase masks in astronomy regarding interferometry and coronagraphy (see [6]).

In the first section of this paper, we will present an original interpretation of the Fourier filtering technique thanks to the focal plane tessellation formalism. Such an approach will allow us to describe all the masks involved in AO wave front sensing in a unique mathematical framework. We will then define a unified post-processing in order to create, from the detector output signal, a quantity called the meta-intensity, which will be linear with the phase. Thanks to an analytical development of the meta-intensity for any Fourier mask, we will, in the third part, define rigorously the sensitivity and the linearity range depending only on the choice of the Fourier mask used to do wave front sensing. Moreover, we will show why these two performance criteria are inevitably antagonistic thanks to a third criterion, the SD factor, which will quantify the trade-off between them. We will also give some hints regarding the optimization of WFSs by considering masks as free-form objects. We will then show, in the fourth section, how it is possible to generalize these results in the context of a modulation in the pupil plane upstream to the filtering mask. In

the fifth and sixth sections, we will apply all these mathematical developments to the PWFS and the ZWFS. If, in the four first sections, the light will be considered as monochromatic, the last section will be dedicated to the case of polychromatic light. In particular, we will show how our formalism allows us to define the chromaticity of a sensor.

## 2. WAVE FRONT SENSING AND FOURIER FILTERING

### A. Optical System

We consider the optical system shown in Fig. 1. The first plane contains the pupil and a focusing device corresponding to a perfect telescope. The associated spatial variables of this plane are  $x_p$  and  $y_p$ ; the  $p$  index refers to the “pupil plane.” The second plane contains the mask and an imaging lens. The spatial variables are  $f_x$  and  $f_y$ ; this plane corresponds to the space of spatial frequencies. The detector is placed in the third plane. This one is conjugated with the first pupil plane. The associated spatial variables are  $x_d$  and  $y_d$  for “detector.”

The incoming electromagnetic (EM) field can be written as

$$\psi_p(x_p, y_p, \lambda) = \sqrt{n(\lambda)} \mathbb{I}_p(x_p, y_p) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \Delta(x_p, y_p)\right),$$

where  $\lambda$  is the wavelength of the incoming light,  $n(\lambda)$  is the number of photons by unit area at the wavelength  $\lambda$ , and  $\mathbb{I}_p$  is the indicator function of the pupil.  $\Delta$  is the optical path difference created by atmospheric turbulence or any other sources of perturbation.

The mask has for its transparency function  $m(f_x, f_y, \lambda)$ . As a complex quantity, it can be decomposed into two terms:

$$m(f_x, f_y, \lambda) = a(f_x, f_y, \lambda) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \text{OS}(f_x, f_y, \lambda)\right).$$

The function  $a$  codes the amplitude filtering. Since the masks are passive,  $a \in [0, 1]$ . The phase term is directly coded by the “optical shape” of the mask. This quantity “OS” depends on the optical indexes (and consequently, on the wavelength of the refractive material) and on the geometric shape of the mask. Via the Fresnel optical formalism, it is possible to write the EM field in the detector plane as

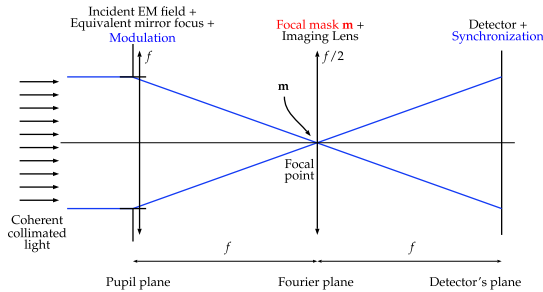


Fig. 1. Schematic view (in 1D) of a Fourier filtering optical system.

$$\psi_d(x_d, y_d, \lambda) \propto \iint \frac{dx_p dy_p}{f^2} \psi_p(x_p - x_d, y_p - y_d, \lambda), \quad (1)$$

$$\iint \frac{df_x df_y}{\lambda^2} m(f_x, f_y, \lambda) \exp\left(-\frac{2i\pi}{f\lambda} [x_p f_x + y_p f_y]\right).$$

For the sake of clarity, we will consider in the first sections that the incoming light is monochromatic. The wavelength will thus be set at  $\lambda_0$ . Section 8 will be dedicated to the polychromatic light case. The incoming EM field and the mask have the following expressions:

$$\psi_p(x_d, y_d) = \sqrt{n} \mathbb{I}_p(x_d, y_d) \exp(i\phi(x_d, y_d)),$$

$$m(f_x, f_y) = a(f_x, f_y) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0} \text{OS}(f_x, f_y)\right), \quad (2)$$

where  $\phi = 2\pi\Delta/\lambda_0$  is the perturbed phase at the considered wavelength. The monochromatic assumption and the associated notations allow us to simplify Eq. (1) into the following form:

$$\psi_d = \psi_p \star \mathcal{F}[m], \quad (3)$$

where  $\mathcal{F}$  is the 2D Fourier transform (2DFT) defined in Appendix A. The interesting point about Eq. (3) is that the contributions of the pupil and the mask are clearly split: the EM field in the detector's plane  $\psi_d$  is the convolution of the incoming field  $\psi_p$  with the Fourier transform of the mask  $\mathcal{F}[m]$ .

Moreover, since the Fourier transform is a bijective application, the quantity  $\mathcal{F}[m]$  completely characterizes the mask. In other words, looking at  $\mathcal{F}[m]$  or at  $m$  itself is mathematically equivalent. Fraunhofer's diffraction also says that the  $\mathcal{F}$  operator allows us to go from a focal plane to a pupil plane. As a consequence,  $\mathcal{F}[m]$  may be seen as the propagated EM field when the diffractive object is the mask  $m$ .

One notes that Eq. (3) is not exact. Indeed, the optical design described above has a magnification equal to  $-1$ . This appears clearly when no mask is inserted in the focal plane. As a consequence, the term  $\psi_d$  should be replaced by its symmetric, i.e.,  $\mathcal{S}[\psi_d]$  where  $\mathcal{S}$  is the symmetric operator defined in Appendix A. However, since this symmetric operation does not impact the wave front sensing, we will not consider it.

The signal that is effectively obtained on the detector is the intensity associated with the EM field in the detector's plane  $\psi_d$ ,

$$I = |\psi_p \star \mathcal{F}[m]|^2. \quad (4)$$

### B. Considered Masks in the Context of Wave Front Sensing

In this part, we will give a general interpretation of the effect of Fourier filtering masks in the context of wave front sensing. The essential objective is to code the phase by using the incoming flux. Subsequently, the mask has to split and extract this information. These operations are done in the focal plane that is the Fourier space associated with the pupil plane. The area close to the optical axis contains the low spatial frequencies of the incoming EM field, whereas the remote zones contain the high spatial frequencies.

These physical results have been widely exploited to remove some spatial frequencies from images. We can, for example, mention the Abbe experiment and the Schlieren photography introduced by Toepler [7]. In our case, the use of opaque masks is not relevant since the reference sources are often faint. We therefore



consider only masks having pure phase transparency functions. Mathematically, this means that the function  $a$  in Eq. (2) equals 1 in the entire focal plane. Having said that, we will now see how it is possible to split and then extract the spatial frequency information thanks to a Fourier mask.

The first step is to choose a tessellation ( $\Omega_i$ ) of the Fourier plane. Mathematically, this means

$$\cup_i \Omega_i = \mathbb{R}^2 \quad \text{and} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{if} \quad i \neq j.$$

The index  $i$  goes in a finite or a countable set. Each element of this tessellation allows us to select a certain part of the spatial frequencies. The second step consists of separating the spatial frequencies contained in each element  $\Omega_i$  thanks to a tip and a tilt generated via a slope (or an angle) in the optical shape of the mask. If several  $\Omega_i$  have the same rejection angle, it is possible to do interference between them thanks to the local pistons. This corresponds, in terms of optical shape, to local thickness differences. (Obviously, it is possible to add the next shapes (focus, astigmatism, etc.) by playing with the optical shape of each  $\Omega_i$ , but we choose to not explore this level of complexity in this paper.) Mathematically, every considered mask can thus be written as

$$m(f_x, f_y) = \sum_i \mathbb{I}_{\Omega_i}(f_x, f_y) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0}(\delta_i + f_x \alpha_i + f_y \beta_i)\right), \tag{5}$$

where  $\delta_i$  codes the local piston, and  $(\alpha_i, \beta_i)$  the local tip/tilt corresponding to the rejection angles.  $\mathbb{I}_{\Omega_i}$  is the indicator function of  $\Omega_i$ . To summarize, it is possible to describe any kind of mask used in the context of wave front sensing via the following set of parameters:

$$\{\Omega_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i\}_i. \tag{6}$$

This set will be called the tessellation parameters of the considered mask. With this formalism, it is now possible to write the 2DFT corresponding to the expression of the general transparency function [Eq. (5)],

$$\mathcal{F}[m](x_d, y_d) = \sum_i \exp\left(\frac{2i\pi\delta_i}{\lambda_0}\right) \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_i}](x_d - f\alpha_i, y_d - f\beta_i), \tag{7}$$

where  $f$  is the focal point of the imaging lens.

### C. 2D Fourier Transform of Classical Tessellations

Although all the tessellations of the Fourier plan are *a priori* acceptable, two of them play a significant role for the existing WFSs.

The first one consists of splitting the plane into 4 elements following the Cartesian coordinate system (left insert of Fig. 2). The second one is a polar splitting of the Fourier plane. This tessellation has a parameter  $\rho$  that codes the size of the central circle (right insert of Fig. 2).

From these definitions, one can write the indicator functions of each part of the tessellation and then get their 2DFTs. We detail this indicator function for the element  $\Omega^{++}$ ,

$$\mathbb{I}_{\Omega^{++}}(f_x, f_y) = \Theta(f_x)\Theta(f_y),$$

where  $\Theta$  is the Heaviside function. Hence, its 2DFT equals

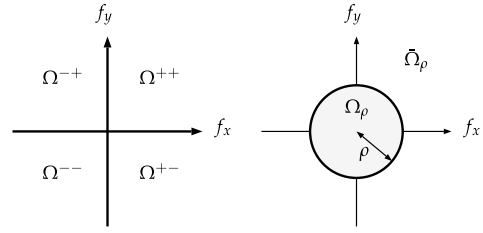


Fig. 2. Two classical tessellations. Cartesian splitting (left insert) and polar splitting (right insert).

$$\mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{++}}](x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} + \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right). \tag{8}$$

For the other parts of the Cartesian tessellation, we get

$$\mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{-+}}](x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} - \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right), \tag{9}$$

$$\mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{-}}](x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) - \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} + \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right), \tag{10}$$

$$\mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{+-}}](x_d, y_d) = \frac{1}{4} \left( \delta(x_d)\delta(y_d) + \frac{1}{\pi^2 x_d y_d} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\delta(x_d)}{\pi y_d} - \frac{\delta(y_d)}{\pi x_d} \right). \tag{11}$$

For the polar tessellation, the indicator function  $\mathbb{I}_{\Omega_\rho}(f_r, f_\theta)$  equals  $\Theta(\rho - f_r)$ . Its 2DFT is

$$\mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_\rho}](r_d, \theta_d) = \frac{\rho}{r_d} J_1(2\pi r_d), \tag{12}$$

where  $J_\alpha$  are the first-kind Bessel functions.

### D. Other WFSs

We mention here that other tessellations may be relevant in the wave front sensing context, especially regarding the case of the point diffraction interferometer introduced by Smartt and Steel [8]. Moreover, this formalism easily extends to the optical differentiation WFS introduced by Oti *et al.* [9] and also describes the first stage of coronagraphic systems.

## 3. META-INTENSITY DEFINITIONS

In this section, we introduce the basic elements needed to construct, from the intensity on the detector, a numerical quantity called the meta-intensity and written  $mI$ , which consists of the linear response to an incoming turbulent phase.

**A. Reference Phase**

The phase seen by the WFS is the sum of the turbulent phase induced by the atmosphere and the static aberrations of the wave front sensing path. Mathematically, we can split the incoming phase into two terms,

$$\phi = \phi_r + \phi_t, \tag{13}$$

where  $\phi_t$  is the turbulent phase, and  $\phi_r$  the static reference phase.  $\phi_r$  may also be seen as the operating point of the WFS.

**B. Toward the Linearity**

The goal of the meta-intensity is to transform the intensity on the detector into a quantity that will be linear with the turbulent phase around the reference phase. Moreover,  $mI$  has also to be independent of the flux  $n$ . Mathematically, such conditions are written as

$$mI(\phi_t + a\Phi_t) = mI(\phi_t) + amI(\Phi_t) \\ \forall \phi_t, \Phi_t \in \text{Phase space and } \forall a \in \mathbb{R}.$$

We make use of the power series of exponential functions and the Cauchy product laws to develop the squared module of Eq. (4) and get an expression of the intensity depending on the successive powers of the turbulent phase:

$$I(\phi, n) = I(\phi_r + \phi_t, n) = n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \phi_t^{k*} \overline{\phi_t^{q-k*}} \\ \text{where } \phi_t^{k*} \triangleq (\mathbb{I}_p e^{i\phi_t} \star \mathcal{F}[m])^k \tag{14}$$

The complex quantity  $\phi_t^{k*}$  may be considered as a  $k$ th-moment of the turbulent phase through the mask around the static reference phase  $\phi_r$ . By looking at Eq. (14), we note that one way to make  $I$  independent on the flux is to divide it by the spatial average incoming flux  $n$ . This operation is easy in practice, since  $n$  is proportional to the total flux on the detector. The first step of the post-processing to build the meta-intensity is thus to normalize the intensity by the spatial average flux  $n$ .

Regarding the linearity with respect to the phase, one can explicitly develop Eq. (14). This is done below for  $q = 0$  to 2:

Constant term,  $q = 0$ :

$$I_c \triangleq |\mathbb{I}_p e^{i\phi_r} \star \mathcal{F}[m]|^2. \tag{15}$$

Linear term,  $q = 1$ :

$$I_l(\phi_t) \triangleq 2\Re\{(\mathbb{I}_p e^{i\phi_r} \star \mathcal{F}[m]) \overline{(\mathbb{I}_p e^{i\phi_r} \phi_t \star \mathcal{F}[m])}\}. \tag{16}$$

Quadratic term,  $q = 2$ :

$$I_q(\phi_t) \triangleq |\mathbb{I}_p e^{i\phi_r} \phi_t \star \mathcal{F}[m]|^2 \\ - \Re\{(\mathbb{I}_p e^{i\phi_r} \star \mathcal{F}[m]) \overline{(\mathbb{I}_p e^{i\phi_r} \phi_t^2 \star \mathcal{F}[m])}\}. \tag{17}$$

The only term linear with the turbulent phase  $\phi_t$  is the  $q = 1$  term, which we call the linear intensity,  $I_l$ . Ideally, and in order to maximize the linearity, one would want to minimize the other terms, i.e.,  $q = 0$  and  $q \geq 2$ . The constant intensity  $I_c$  ( $q = 0$ ) corresponds to the normalized intensity on the detector when the phase equals the reference phase, i.e.,  $I(\phi_r, n)/n$ . Removing such a term can thus be done thanks to a calibration path. With regard to the  $q \geq 2$  terms, they are unfortunately impossible to remove, but we still consider that the second step

to build  $mI$  consists of this return-to-reference. Mathematically, the meta-intensity  $mI$  is thus defined as

$$mI(\phi_t) = \frac{I(\phi_r + \phi_t, n) - I(\phi_r, n)}{n}. \tag{18}$$

This definition is the easiest way to define a linear quantity for any type of sensor. Finally, it might be relevant to mention that it avoids a lot of other processes that can be applied to the meta-intensities after these two fundamental first steps (normalization, return-to-reference), but it is a vast topic that will be tackled in a forthcoming paper (see [10]).

**C. Linear and Effective Meta-Intensities**

The previous post-processing allows us to build, in practice, the meta-intensity from the intensity on the detector and a reference intensity. Unfortunately, we saw that Eq. (18) is not perfectly linear with the turbulent phase, since  $mI$  still contains the quadratic and next high-order moments of the phase. In the following, we will distinguish the effective behavior of a WFS from its ideal one. Equation (18) will define the effective meta-intensity, while the restriction of the phase power series development to its first term, i.e., to the linear intensity  $I_l$ , will define the linear meta-intensity [see Eq. (16)]. We note that this linear meta-intensity cannot be strictly deduced from the intensity on the detector, but it can be easily computed by numerical simulations. It corresponds to the behavior a perfectly linear WFS would have.

As a side comment, another interpretation of the linear and quadratic meta-intensities can be deduced from the derivatives of the normalized intensity with respect to the amplitude phase around the reference phase, i.e.,

$$I_l(\phi_t) = \frac{1}{n} \left. \frac{dI(\phi_r + a\phi_t, n)}{da} \right|_{a=0} \\ I_q(\phi_t) = \frac{1}{2n} \left. \frac{d^2I(\phi_r + a\phi_t, n)}{da^2} \right|_{a=0}.$$

This result is not surprising regarding the calculation of Eq. (14), which is the Taylor's development of the intensity around  $\phi_r$ .

**4. SENSITIVITY AND LINEARITY RANGE**

In this section, we define the sensitivity and the linearity range of a WFS regarding an incoming turbulent phase. From now, this turbulent phase will be normalized regarding the 2-norm (i.e., the RMS norm).  $\phi_t$  is used in the light of the previous developments.

Due to the fact that the sensitivity only makes sense in the linear regime of the WFS, we will use the linear meta-intensity  $I_l$  to define it. On the other hand, the linearity range will be calculated thanks to the study of the variation of the distance between the effective and the linear meta-intensities when the input phase amplitude varies.

**A. Sensitivity**

The perfectly linear response to the normalized incoming phase  $\phi_t$  is obtained thanks to the expression of the linear intensity [Eq. (16)]  $I_l(\phi_t)$ .

We choose to define as “the sensitivity regarding to  $\phi_t$ ” the 2-norm of this linear response:

$$s(\phi_t) = \|I_l(\phi_t)\|_2. \tag{19}$$

Such a definition is in fact consistent with the method introduced by Rigaut and Gendron [11] to estimate the noise propagation

associated with a WFS. The Rigaut and Gendron method consists of looking at the diagonal terms of the matrix  $({}^t M C_B^{-1} M)^{-1}$ , where  $M$  is the interaction matrix, i.e., the matrix that contains the output meta-intensities for an input phase basis, and  $C_B$  is the noise covariance matrix. Physically, these values correspond to the noise propagation coefficients for a detector or photon noise regime, depending the nature of  $C_B$ .

In the case of a diagonal and constant noise covariance matrix, i.e.,  $C_B = \sigma_{\text{noise}}^2 \times Id$ , the noise propagation coefficients for the turbulent phase  $\phi_t$ , called  $\sigma_{\text{WFS}}^2(\phi_t)$  in Rigaut and Gendron are related to the sensitivity definition introduced above  $s(\phi_t)$  via the following equation:

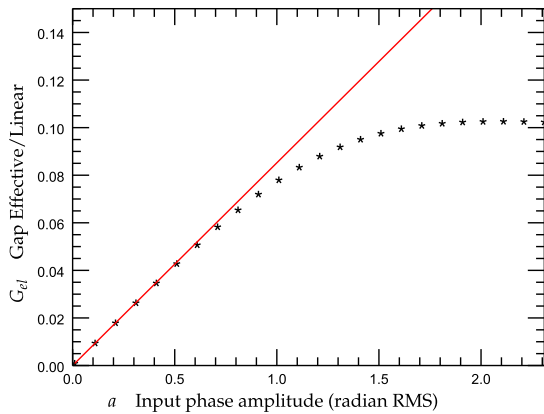
$$\sigma_{\text{WFS}}^2(\phi_t) = \sigma_{\text{noise}}^2 s(\phi_t)^{-2}.$$

**B. Linearity Range**

The linearity range quantifies the gap between the perfectly linear behavior of a WFS and its effective behavior. Indeed, when the incoming phase amplitude increases, the meta-intensity defined in Eq. (18) differs more and more from the linear intensity [Eq. (16)]. We call the mathematical function that quantifies this deviation from linearity  $G_{el}$  for “gap between effective and linear behaviors,” and we define it by

$$G_{el}(\phi_t, a) = \left\| \frac{mI(a\phi_t)}{a} - I_l(\phi_t) \right\|_2, \tag{20}$$

where the variable  $a$  codes the amplitude of the incoming phase. We note that  $\phi_t$  is, once again, normalized regarding the RMS norm. The black curve of Fig. 3 shows the typical evolution of  $G_{el}$  when  $a$  increases. Two distinct regimes are observed: a linear growth for the lowest amplitude and, then, a saturation regime. In the saturation regime, the intensity on the detector does not change anymore as the phase amplitude continues to grow. The linear regime can be explained by looking at the analytic expression of  $G_{el}$ ,



**Fig. 3.** Typical graph (\*) of the gap between the effective meta-intensity and the linear intensity depending on  $a$ , and the input phase amplitude [Eq. (20)]. The slope of the red line equals the 2-norm of the quadratic intensity. The input phase is the vertical coma, and the considered WFS is the Zernike WFS.

$$\begin{aligned} \frac{mI(a\phi_t)}{a} - I_l(\phi_t) &= \sum_{q=2}^{\infty} a^{q-1} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \phi_t^{k*} \overline{\phi_t^{q-k*}} \\ &= aI_q(\phi_t) + a^2(\dots). \end{aligned}$$

The linear growth is thus directly linked to the quadratic intensity; more precisely, the associated slope equals the 2-norm of  $I_q$  (see the red curve of Fig. 3):

$$G_{el}(\phi_t, a) = a\|I_q(\phi_t)\|_2 + a^2(\dots).$$

In others words, a small slope means that the effective meta-intensities slowly differ from the linear behavior for an increasing incoming phase amplitude; the associated linear range is thus large.

We thus choose to define the linearity range regarding the normalized phase mode  $\phi_t$  as the inverse of the 2-norm of the quadratic term,

$$d(\phi_t) = (\|I_q(\phi_t)\|_2)^{-1}, \tag{21}$$

where the letter  $d$  refers to the word “dynamic,” which is a synonym of “linearity range.”

Such a definition allows us to calculate the linear range in an analytical way thanks to the expression of the quadratic term [Eq. (17)].

**C. SD Factor**

The previous developments allow us to give an explanation about the fact that the sensitivity and the linearity range are antagonistic quantities. By looking at their product, which we call the SD factor,

$$s(\phi_t)d(\phi_t) = (\|I_l(\phi_t)\|_2)(\|I_q(\phi_t)\|_2)^{-1}, \tag{22}$$

we can see that such a quantity corresponds to the ratio between the norms of the first and the second derivatives of the intensity regarding the turbulent phase. One can easily understand that it is difficult to increase the numerator while decreasing the denominator at the same time. The SD factor is thus a relevant indicator of the trade-off between the sensitivity and the linearity range.

The expressions of the linear and quadratic intensities [Eqs. (16) and (17)] and the 2-norm definition allow us to numerically optimize a WFS, i.e., its mask, by maximizing its SD factor. For a given turbulent phase  $\phi_t$ , we can thus consider a mask depending on a scalar optical parameter that we call  $p$ . The only constraint on this parameter is to define a mask that is transparent, i.e.,  $|m(f_x, f_y)| = 1$  (or at least a passive one:  $|m(f_x, f_y)| \leq 1$ ). As examples, the optical parameters of the resellation formalism ( $\delta, \alpha, \beta$ ) are appropriate since they are variables for the geometrical shape of the mask. The next step just consists of finding numerically the maximum of the function  $s \cdot d(\phi_t, m(p))$  regarding the parameter  $p$ .

Finally, one can modify the SD factor to give more or less importance to the sensitivity or the linearity range by introducing a power exponent  $\eta$  in it,

$$s^\eta d^{1/\eta} = (\|I_l(\phi_t)\|_2)^\eta \cdot (\|I_q(\phi_t)\|_2)^{-1/\eta},$$

with  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ . For instance,  $\eta = 0.5$  confers more importance to the linearity range than to the sensitivity, whereas  $\eta = 2$  represents the opposite case. The power exponent  $\eta$  allows one to consider different requirement specifications.

**5. MODULATION**

The Fourier filtering may be coupled with an additional optical stage placed in the entrance pupil plane. Such a device creates an

oscillating aberration and changes the shape and the size of the focal spot on the Fourier mask. The detector is synchronized with this regular oscillation in order to have one image for each aberration cycle. This system, called modulation, allows us to adjust the WFS's performance.

Historically, such a device has been introduced by Ragazzoni [1] in order to improve the linearity range of the classical PWFS. Even if, to our knowledge, modulation is only used for the PWFS, we give in this section a definition for any kind of WFSs and show how to define a generalized sensitivity and linearity range with such a device.

**A. General Definition of Modulation**

The oscillating aberration introduced by the modulation device defines a closed path (or loop) in phase space. Mathematically, it means that modulation may be defined in the following way:

$$\phi_m(s) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(s) \Phi_k \quad \text{with} \quad \forall k \quad m_k(0) = m_k(1)$$

$$w(s) \quad \text{with} \quad w(s) \geq 0, w(0) = w(1), \int_0^1 w(s) ds = 1,$$

where  $s$  is the temporal variable normalized with respect to the duration of the modulation cycle  $\tau$ , i.e.,  $s = t/\tau$ . The phase polynomials  $\Phi_k$  describe a phase basis, typically the Zernike basis. The functions  $m_k(s)$  indicate the amplitudes of the phase modes used during modulation.  $w(s)$  is the weighting function: it codes the time spent for each modulation phase  $\phi_m(s)$ .

**B. Intensity on the Detector**

Thanks to these definitions, it is possible to write the modulated intensity, called  $I_m$ , on the detector. In particular, this one is the integral during a cycle of the intensity with an additional phase corresponding to the local modulation phase,

$$I_m(\phi, n) = \int_0^1 I(\phi + \phi_m(s), n \cdot w(s)) ds.$$

Such an equation is linked to the fact that the modulation handles the light as an incoherent quantity. Moreover, remembering Eq. (13), it appears that the reference phase may be seen as a static modulation. In the following, we will assume that the modulation phase contains this reference phase. The generalized phase power series of the intensity becomes

$$\frac{I_m(\phi, n)}{n} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \int_0^1 w(s) ds \phi_t^{k*}(s) \overline{\phi_t^{q-k*}(s)}$$

where  $\phi_t^{k*}(s) = (\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \phi_t^k) \star \mathcal{F}[m]$ ,

**C. Modulated Meta-Intensity**

The first terms of the previous equation correspond once again to the modulated constant, linear, and quadratic terms:

$$I_{mc} = \int_0^1 |\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \star \mathcal{F}[m]|^2 w(s) ds$$

$$I_{ml}(\phi_t) = \int_0^1 2\Re[(\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \star \mathcal{F}[m]) \overline{(\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \phi_t \star \mathcal{F}[m])}] w(s) ds$$

$$I_{mq}(\phi_t) = \int_0^1 [|\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \phi_t \star \mathcal{F}[m]|^2] w(s) ds$$

$$- \int_0^1 \left[ \Re[(\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \star \mathcal{F}[m]) \overline{(\mathbb{I}_p e^{i\phi_m(s)} \phi_t^2 \star \mathcal{F}[m])}] \right] w(s) ds.$$

The method used previously to construct a phase-linear quantity (at least in the small-phase approximation) is thus still valid. The effective modulated meta-intensity, called  $mI_m$ , will be subsequently defined in the same way as Eq. (18), i.e.,

$$mI_m(\phi_t) = \frac{I_m(\phi_t, n) - I_m(0, n)}{n}. \tag{23}$$

The definitions of the sensitivity and the dynamic stay as they were in Eqs. (19) and (21) under the condition they must now use the modulated linear and quadratic intensities,  $I_{ml}$  and  $I_{mq}$ .

**6. APPLICATION TO THE PYRAMID WFS**

In this section, we apply the theoretical formalism developed above to the pyramid WFSs. Without loss of generality, we assume in the next developments that the operating phase equals the null phase. Ragazzoni [1] introduced this sensor, which is a generalization of Foucault's knife. The corresponding Fourier mask placed in the focal plane is a transparent squared pyramid. Its apex angle is called  $\theta$ . In its historical configuration, this mask creates in the detector's plane 4 pupil images, each containing only one part of the spatial frequency.

**A. Tessellation Formalism**

The pyramidal mask allows us to illustrate the spatial frequency separation induced by local tip/tilt OPDs. The tessellation parameters (i.e.,  $\Omega_i; \delta_i, \alpha_i, \beta_i$ ), associated with the transparency function of this mask that we note as  $m_{\Delta}$  are

$$\Omega^{-+}: 0, -\theta \quad \Omega^{+-}: 0, \theta$$

$$\Omega^{- -}: 0, -\theta \quad \Omega^{+ -}: 0, -\theta.$$

The associated 2DFT is

$$\mathcal{F}[m_{\Delta}](x_d, y_d) = \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{++}}](x_d - f\theta, y_d - f\theta)$$

$$+ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{-}}](x_d + f\theta, y_d + f\theta)$$

$$+ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{+}}](x_d + f\theta, y_d - f\theta)$$

$$+ \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{+-}}](x_d - f\theta, y_d + f\theta). \tag{24}$$

Considering the 2DFT of each quadrant  $\Omega_i$  [see Eqs. (8)–(11)], we have with Eq. (24) an analytic formulation of the 2DFT of the pyramid WFS mask. We can see in Fig. 4 the module and the argument of this quantity [Eq. (24)]. Such quantities allows us to determine the imaging on the detector (top right insert of Fig. 5), since this intensity corresponds to the convolution between the entrance pupil and the 2DFT of the mask. It may be interesting to study the different cases of this optical design with respect to the apex angle parameter:

- The first one is when  $\theta$  tends to infinity. It corresponds to the case of a reflective pyramid that creates 4 pupil images on

4 different detectors. This design was introduced by Wang *et al.* [12]. It allows one to completely separate the 4 pupil images. Concretely, it means the four 2DFTs are considered as independent: there is no crosstalk between the spatial frequencies of the 4 quadrants  $\Omega_i$ . This hypothesis of no interference between the pupils is usually done in theoretical approaches and in the usual simulation algorithms.

– The second case is the more common one. It corresponds to an achromatic refractive pyramid. The 4 pupil images are created on a unique detector and  $D/2 \leq f\theta$ , where  $D$  is the diameter of the entrance pupil and  $f$  is the focal point of the imaging lens. It means there is no overlap between these 4 images, even if each pupil image contains a part of the spatial frequencies of the other quadrants due to the fact that the 2DFTs of the four  $\Omega_i$  do not have a compact support. This interference between the 4 pupil images is particularly marked in the middle area (see top right insert and bottom inserts of Fig. 5).

– We introduced the last case in [4] with the flattened pyramid WFS. The idea of this sensor is to overlap the 4 pupil images by using a small angle:  $0 < \theta f < D/2$ . (The case  $\theta = 0$  is obviously useless since it corresponds to the trivial mask.) This optical configuration is shown in the top left insert of Fig. 5.

Before getting into more details on these WFSs, it would be relevant to now consider the pyramid not as a unique and “static” optical system, but more like a class, including an infinite number of different pyramids. Indeed, the angle of the apex  $\theta$  is one optical parameter, and it is possible to envisage another ones as, for example, the number of faces or the modulation parameters.

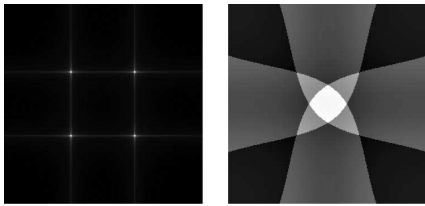


Fig. 4. Modulus (left) and argument (right) of the 2DFT with an apex angle that equals  $\frac{1.5D}{2f}$ , where  $D$  is the entrance pupil diameter.

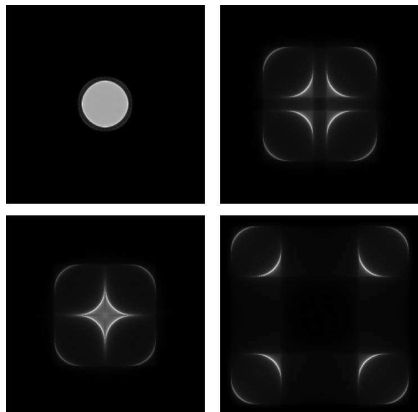


Fig. 5. Intensity on the detector for a circular pupil and a flat incoming phase.  $\theta$  equals 0.1, 1, 1.5, and  $3\frac{D}{2f}$ .

## B. Sensitivity, Linearity Range, and SD Factor

### 1. Apex Angle

Figure 6 shows the sensitivity, the linearity range, and the SD factor (red, black, and blue curves) with respect to the first 24 Zernike radial orders, i.e., the spatial frequencies, for different apex angles. Physically, the optical parameter  $\theta$  sets the overlap rate of the pupil images. First of all, one can note that as soon as  $2f\theta/D > 1.5$ , the 3 curves ( $s$ ,  $d$ , and  $s \cdot d$ ) do not evolve anymore, and this is a general behavior observed for all the configurations tested in this paper. In other words,  $\theta$  has an influence only when the pupil images overlap.

Second, as mentioned in [4], Fig. 6 shows that an optical recombination induced by a small angle provides a better sensitivity in high spatial frequencies, while it decreases for low frequencies. Moreover, it is possible to choose where the sensitivity is maximum by changing the  $\theta$  value. It comes as no surprise that the linearity range has an inverse behavior: it improves for the low frequencies and decreases at the high ones. The curve of the SD factor is more interesting, since for small angles, this curve stays above the classical pyramid one for all spatial frequencies. In terms of the trade-off between the sensitivity and the linearity range, there is thus a real gain to using small angles.

### 2. Modulation Radius

The pyramid WFS is usually coupled with a modulation stage. With the formalism introduced in section 5, the classical modulation used with Ragazzoni’s pyramid, i.e., a circular and uniform tip/tilt modulation with a modulation radius equal to  $r_m$ , corresponds to

$$\phi_m(s) = r_m[\cos(2\pi s)Z_1^{-1} + \sin(2\pi s)Z_1^1] \quad \text{and} \quad w(s) = 1.$$

We consider here that the apex angle  $\theta$  equals  $3\frac{2\theta f}{D}$ , and the pupil images are thus widely separated (right insert of Fig. 5). Figure 7 shows the sensitivity, the linearity range, and the SD factor with respect to the first 24 Zernike radial orders for different modulation radii. One can observe the classical influence of the modulation radius on the sensitivity and the linearity range: there is a loss a sensitivity for the low spatial frequencies with a slope sensor

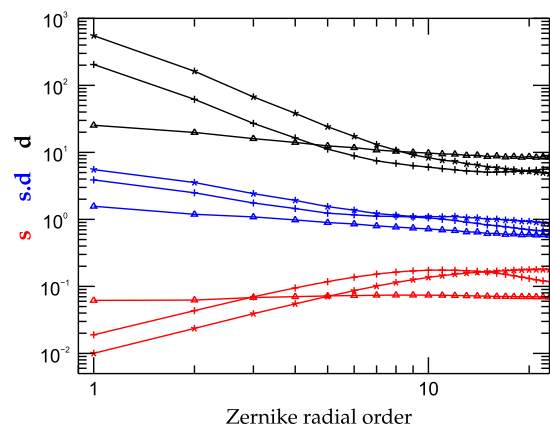
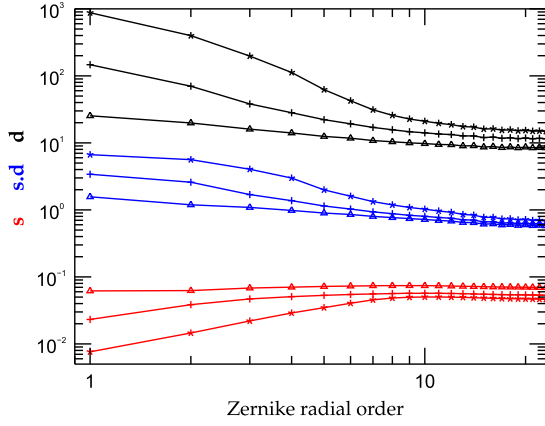


Fig. 6. Sensitivity, linearity range, and SD factor of the pyramid WFS with respect to the spatial frequencies. The apex angle equals 0.05 (\*), 0.1 (+), and  $3\frac{2\theta f}{D}$  ( $\Delta$ ). The phase basis corresponds to the 24 first Zernike radial orders.



**Fig. 7.** Sensitivity, linearity range, and SD factor of the modulated pyramid WFS with respect to the spatial frequencies. The modulation radii equal 0 ( $\Delta$ ), 1 (+), and 3 ( $*$ )  $\lambda/D$ . The apex angle equals  $3\frac{20f}{D}$ , i.e., the 4 pupil images are widely separated.

behavior on this range. The cut-off frequency is growing linearly with the modulation radius. The linearity range is also improving with the modulation radius. We thus observe that our definition of the sensitivity and the linearity range allows us to get, in an analytical way, the usual behaviors of the modulated pyramid WFS. By looking at the SD factor, which characterizes the trade-off sensitivity/linearity range, it appears that the gain is particularly pronounced for low spatial frequencies but tends to be null for the highest ones.

### C. Mathematical Developments Applied to Ragazzoni's PWFS

The aim of this subsection is to apply the analytical developments to the nonmodulated Pyramid WFS. In particular, we show how our formalism may be linked to the classical meta-intensities used for the PWFS, which are usually called “slope maps” [1,13].

We assume that the apex angle tends to infinity. As a consequence, the 4 pupil images are completely separated and do not interfere. Such a theoretical framework allows us to study the 4 quadrants independently. Subsequently, each pupil image has its own intensity:

$$\begin{aligned} I^{-+} &= |\psi_p \star \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{-+}}]|^2 & I^{++} &= |\psi_p \star \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{++}}]|^2 \\ I^{--} &= |\psi_p \star \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{--}}]|^2 & I^{+-} &= |\psi_p \star \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega^{+-}}]|^2. \end{aligned}$$

The first step consists of getting the linear and quadratic intensities associated with the general definition of the meta-intensities [see Eq. (18)]. Thanks to Eq. (16), it is possible to determine the phase-linear dependence of the meta-intensity associated with one of the 4 pupil images. Let us take the case of the pupil image containing the  $x$ -positive and  $y$ -positive spatial frequencies, i.e., the  $\Omega^{++}$  quadrant. The linear intensity is

$$I_l^{++}(\phi_t) = 2\Re[(\mathbb{I}_p \star \text{CIR}[\mathbb{I}_{\Omega^{++}}]) \overline{(\mathbb{I}_p \phi_t \star \text{CIR}[\mathbb{I}_{\Omega^{++}}])}],$$

The development of this equation gives

$$\begin{aligned} I_l^{++}(\phi_t) &= \frac{1}{8}[(\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p](\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p \phi_t]] \\ &\quad - \frac{1}{8}[(\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p \phi_t](\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p]], \end{aligned}$$

where the operators  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{H}_x$ ,  $\mathcal{H}_y$ , and  $\mathcal{H}_{xy}^2$  are defined in Appendix A. The linear intensities associated with the other quadrants are

$$\begin{aligned} I_l^{+-}(\phi_t) &= \frac{1}{8}[(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p](\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p \phi_t]] \\ &\quad - \frac{1}{8}[(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p \phi_t](\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p]] \\ I_l^{+}(\phi_t) &= \frac{1}{8}[(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p](\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p \phi_t]] \\ &\quad - \frac{1}{8}[(\mathcal{I} - \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p \phi_t](\mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p]] \\ I_l^{-}(\phi_t) &= \frac{1}{8}[(\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p](\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p \phi_t]] \\ &\quad - \frac{1}{8}[(\mathcal{I} + \mathcal{H}_{xy}^2)[\mathbb{I}_p \phi_t](\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_y)[\mathbb{I}_p]]. \end{aligned}$$

These equations allow us to have an analytic expression of the sensibility associated with the turbulent phase mode  $\phi_t$ ,

$$\begin{aligned} s(\phi_t) &= \|I_l^{+-}(\phi_t)\|_2 + \|I_l^{+}(\phi_t)\|_2 \\ &\quad + \|I_l^{-}(\phi_t)\|_2 + \|I_l^{++}(\phi_t)\|_2. \end{aligned}$$

Concerning the quadratic intensities range, we choose not to explicitly show their expressions due to the fact that they may seem “abstruse,” but, obviously, it is possible to get them thanks to Eq. (17). We deduce from them the linearity range:

$$\begin{aligned} d(\phi_t) &= (\|I_q^{+-}(\phi_t)\|_2 + \|I_q^{+}(\phi_t)\|_2 \\ &\quad + \|I_q^{-}(\phi_t)\|_2 + \|I_q^{++}(\phi_t)\|_2)^{-1}. \end{aligned}$$

The general meta-intensities we introduced above [Eq. (18)] do not correspond to the classical processing done on the intensity in order to create a quantity linear with the incoming turbulent phase. Indeed, it is the customary to use the slope maps  $S^x$  and  $S^y$ . These quantities are directly calculated from the 4 intensities on the detector. There are two ways to define them (Ragazzoni [1] and Vériaud [13]), depending on the normalization, but we are interested here in the Vériaud's one:

$$S^x = \frac{I^{++} + I^{+-} - I^{-+} - I^{--}}{n}, \quad (25)$$

$$S^y = \frac{I^{++} - I^{-+} + I^{+-} - I^{--}}{n}. \quad (26)$$

One can note that this definition does not require a return-to-reference. However, it is only valid if the reference phase is the null phase. In that particular case, the slope maps are related to our meta-intensities via the linear transformations:

$$S^x = mI^{++} + mI^{+-} - mI^{-+} - mI^{--}, \quad (27)$$

$$S^y = mI^{++} - mI^{-+} + mI^{+-} - mI^{--}. \quad (28)$$

Subsequently, it is possible to get the linear and quadratic slope maps:

$$S_i^x = I_i^{++} + I_i^{+-} - I_i^{-+} - I_i^{--} \quad S_i^y = I_i^{++} - I_i^{-+} + I_i^{+-} - I_i^{--}$$

$$S_q^x = I_q^{++} + I_q^{+-} - I_q^{-+} - I_q^{--} \quad S_q^y = I_q^{++} - I_q^{-+} + I_q^{+-} - I_q^{--}.$$

It is thus possible to have the analytic expression of the linear slope maps:

$$S_i^x(\phi_i) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}[\mathbb{I}_P]\mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P\phi_i] + \mathcal{H}_{xy}^2[\mathbb{I}_P]\mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P\phi_i])$$

$$- \frac{1}{2}(\mathcal{I}[\mathbb{I}_P\phi_i]\mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P] - \mathcal{H}_{xy}^2[\mathbb{I}_P\phi_i]\mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P])$$

$$S_i^y(\phi_i) = \frac{1}{2}(\mathcal{I}[\mathbb{I}_P]\mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P\phi_i] + \mathcal{H}_{xy}^2[\mathbb{I}_P]\mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P\phi_i])$$

$$- \frac{1}{2}(\mathcal{I}[\mathbb{I}_P\phi_i]\mathcal{H}_y[\mathbb{I}_P] - \mathcal{H}_{xy}^2[\mathbb{I}_P\phi_i]\mathcal{H}_x[\mathbb{I}_P]).$$

These results already appeared in Shatokhina *et al.* [14]. They correspond to the 2D generalization of Vérinaud's calculation in [13] and allow us to derive the sensitivity associated with the slope maps, which we call  $s_S(\phi_i)$ ,

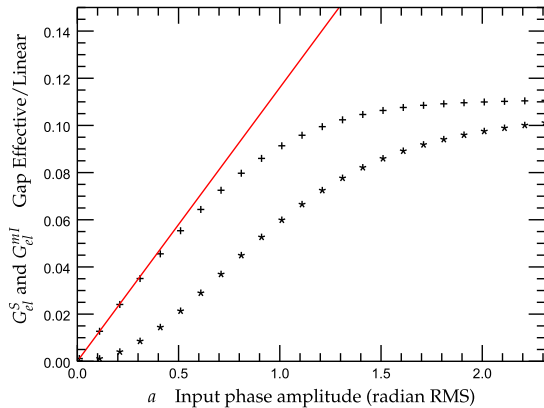
$$s_S(\phi_i) = \|S_i^x(\phi_i)\|_2 + \|S_i^y(\phi_i)\|_2.$$

Very fortunately, the loss of sensitivity due to the computation of the slope maps is insignificant, and the equality  $s_S(\phi_i) = s(\phi_i)$  may be considered as true. This is surprising, since a part of information is lost during Eqs. (27) and (28). This remarkable fact will be discussed in a paper dedicated to the numerical handling of the meta-intensities (see [10], in preparation).

On the other hand, the calculation of the quadratic slopes maps shows that they are equal to zero:

$$S_q^x(\phi_i) = 0 \quad \text{and} \quad S_q^y(\phi_i) = 0.$$

The linear Eqs. (27) and (28) thus have a positive influence on the linearity range without any significant loss of sensitivity! This result constitutes a strong argument in favor of the slope maps. Unfortunately, it does not mean that the PWFS associated with the slope maps has an infinite linearity range: if the quadratic intensity is null, it is not the case for the next phase powers. In other words, the linearity ranges associated with the slope maps



**Fig. 8.** Distance between the effective and linear slope maps (\*,  $G_{el}^S$ ) and the effective and linear meta-intensities (+,  $C_{el}^m$ ) as functions of the input phase amplitude. The slope of the red line equals the 2-norm of the quadratic intensity associated with the meta-intensities. The input phase is the vertical coma, and the considered WFS is the PWFS with an infinite apex angle.

are determined by the cubic intensity, i.e., the third term ( $q = 3$ ) of Eq. (14). Such a fact is visible in Fig. 8: the slope at the origin of the distance between the effective and linear slopes maps, which is defined in Eq. (29), is null, but this distance does not equal zero:

$$G_{el}^S(\phi_i, a) = \left\| \frac{S_x(a\phi_i)}{a} - S_i^x(\phi_i) \right\|_2 + \left\| \frac{S_y(a\phi_i)}{a} - S_i^y(\phi_i) \right\|_2, \quad (29)$$

$$G_{el}^m(\phi_i, a) = \sum_{4\text{ pupils}} \left\| \frac{mI^{\pm\pm}(a\phi_i)}{a} - I_i^{\pm\pm}(\phi_i) \right\|_2. \quad (30)$$

## 7. APPLICATION TO THE ZERNIKE WFS

### A. Tessellation Formalism

This section focuses on the Zernike WFS initially introduced by Zernike himself [5]. This WFS allows us to illustrate the piston presence in the tessellation formalism. Indeed, this sensor works by splitting the incoming energy into two parts thanks to polar tessellations  $\Omega_\rho$  and  $\tilde{\Omega}_\rho$  and by creating an optical path difference between these two contributions. Note that there are no rejection tip/tilt angles for the Zernike WFS. Hence, we can write

$$\Omega_\rho: \delta, 0, 0 \quad \tilde{\Omega}_\rho: 0, 0, 0.$$

As a consequence, the 2DFT of the Zernike mask with optical parameters  $\delta$  and  $\rho$  is

$$\mathcal{F}[m_Z](r_d) = \mathcal{F}[\mathbb{I}_{\tilde{\Omega}_\rho}](r_d) + \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0}\delta\right)\mathcal{F}[\mathbb{I}_{\Omega_\rho}](r_d), \quad (31)$$

$$= \delta(r_d) + \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0}\delta\right) - 1\right)\frac{\rho}{r_d}J_1(2\pi\rho r_d). \quad (32)$$

Historically, the size of the central mask  $\rho$  was calculated in order to have the same amount of energy in  $\Omega_\rho$  and  $\tilde{\Omega}_\rho$ , i.e.,  $\rho = 1.06\lambda_0/D$  for a circular pupil; the depth  $\delta$  associated with the piston was set to create a  $\pi/2$  phase gap between the two waves coming from  $\Omega_\rho$  and  $\tilde{\Omega}_\rho$ . Nevertheless, the previous set of optical parameters is not the only one that generates a WFS.  $\rho$  provides the energetic partition between the two parts of the polar tessellation and an exact equality is actually not strictly needed: a certain leeway exists and allows us to modify some properties of the sensor. In the same way, recent works by N'Diaye *et al.* [15] show that  $\delta$  may range in the interval  $[-\lambda_0/8; 3\lambda_0/8]$  and still defines a WFS. Consequently, as for the pyramid WFS, the historical Zernike sensor is only a member of a vaster class of sensors generated by the polar tessellation and the two optical parameters  $\rho$  and  $\delta$ .

By looking at Eq. (32), it appears that the entrance pupil is convoluted with the  $J_1$  Bessel function. As a consequence, we define the following operator, which we call the Zernike operator  $\mathcal{Z}_\rho$ , as

$$\mathcal{Z}_\rho[f] = f \star \frac{\rho}{r_d}J_1(2\pi\rho r_d).$$

Thanks to the general definition of the linear intensity  $I_l$  [see Eq. (16)], it is possible to get the purely linear behavior of the ZWFS:

$$I_l(\phi_i) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \overbrace{\mathbb{I}_\rho(\phi_i, \mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho] - \mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho \phi_i])}^a. \quad (33)$$

The spatial variability of the linear intensity  $I_l$  is coded by the term  $b$  of Eq. (33). One notes that this variability only depends on the optical parameter  $\rho$ , which is the size of the Zernike mask. The depth of this mask coded by the optical parameter  $\delta$  allows us to adjust the global scalar factor  $a$ .

The quadratic intensity  $I_q$  is calculated via its definition in Eq. (17):

$$I_q(\phi_i) = \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)\right] (2\mathcal{Z}_\rho^2[\phi_i] - 2\phi_i \mathcal{Z}_\rho[\phi_i] + \mathcal{Z}_\rho[\phi_i^2] + \phi_i^2 \mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho] - 2\mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho] \mathcal{Z}_\rho[\phi_i^2]).$$

Once again, it appears that  $\rho$  only influences the spatial variability of the quadratic intensity, whereas  $\delta$  adjusts a global scalar factor.

### B. Sensitivity, Linearity Range, and SD Factor

From the expression of the linear intensity, we can get the sensitivity associated with the input phase  $\phi_i$ :

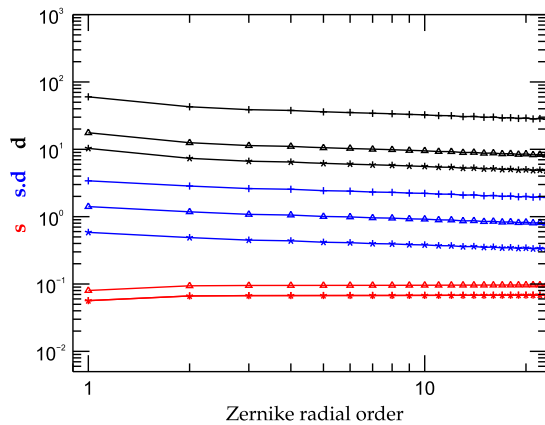
$$s(\phi_i) = 2 \left| \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right| \|\phi_i \mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho] - \mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho \phi_i]\|_2. \quad (34)$$

The linearity range is directly related to the inverse of the 2-norm of the quadratic intensity:

$$d(\phi_i) = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)} \|2\mathcal{Z}_\rho^2[\phi_i] - 2\phi_i \mathcal{Z}_\rho[\phi_i] + \mathcal{Z}_\rho[\phi_i^2] + \phi_i^2 \mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho] - 2\mathcal{Z}_\rho[\mathbb{I}_\rho] \mathcal{Z}_\rho[\phi_i^2]\|_2^{-1}. \quad (35)$$

#### 1. Depth of the Zernike Mask

The size of the Zernike mask  $\rho$  is set at  $1.06\lambda_0/D$ . We study the influence of its depth on the sensitivity, the linearity range, and the SD factor. Equation (34) shows that the sensibility is maximum for  $\delta = \lambda_0/4$ . That corresponds to the historical Zernike WFS. From  $\delta = 0$  to  $\delta = \lambda_0/2$ , we then observe, thanks to Eq. (35), that the linearity range is decreasing. When  $\delta$  tends



**Fig. 9.** Sensitivity, linearity range, and SD factor of the Zernike WFS with respect to the spatial frequencies. Depth of the Zernike mask  $\delta$  equals  $1/8$  (+),  $1/4$  ( $\Delta$ ), and  $3/8$  ( $*$ )  $\lambda_0$ . The sensitivity is identical for  $\delta$  equals  $1/8$  and  $3/8$   $\lambda_0$ .

to 0, the linearity range is infinite, but such a configuration corresponds to the trivial mask and the sensitivity is then null. Figure 9 confirms these results. Moreover, the SD factor curve shows that deep Zernike masks, e.g.,  $3/8\lambda_0$ , allow us to get a significant gain in terms of the linearity range without too much sensitivity loss. Finally, we effectively observe that the shapes of the curves do not change when  $\delta$  varies. This parameter only translates them by the global factors of Eqs. (34) and (35).

#### 2. Size of the Zernike Mask

We set in this paragraph the depth of the Zernike mask at  $\lambda_0/4$  and study the influence of its size on the performance criteria. We observe in Fig. 10 that this time, the shapes of curves change with  $\rho$ . This is fully consistent with Eqs. (34) and (35). Moreover, a larger Zernike mask slightly improves the sensitivity, while the linearity range decreases. The SD factor approximately stays constant. We conclude this part about the Zernike WFS class by remarking that the first optical stage of the Roddier and Roddier coronagraph is also a member of this class.

## 8. POLYCHROMATIC LIGHT

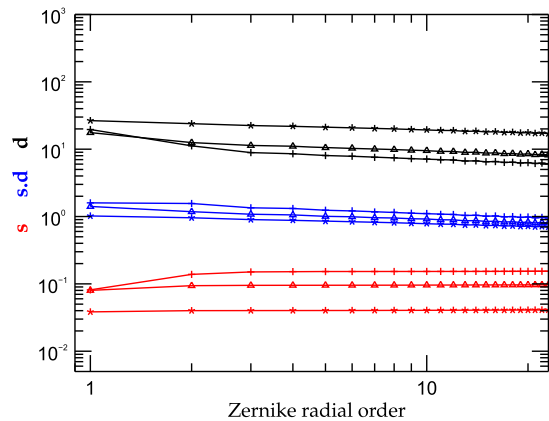
In this section, we explore the influence of incoming polychromatic light on the previous mathematical developments.

### A. Polychromatic Intensity

The first step consists of writing all the previous formulas by making explicit the dependence on the wavelength  $\lambda$ . The incident EM field is

$$\psi_p(x_p, y_p, \lambda) = \sqrt{n(\lambda)} \mathbb{I}_p(x_p, y_p) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \Delta(x_p, y_p)\right),$$

with  $n(\lambda)$  defined in such a way that  $n(\lambda)d\lambda$  is the number of photons by unit area in the wavelength range  $[\lambda - d\lambda/2; \lambda + d\lambda/2]$ . In other words,  $n(\lambda)$  is the spectrum of the studied source. The optical path difference  $\Delta$  is not dependent on the wavelength, since we assume that the atmosphere is not a dispersive medium. If we choose a particular wavelength  $\lambda_0$  as a reference, it is possible to write the phase of the incoming field as



**Fig. 10.** Sensitivity, linearity range, and SD factor of the Zernike WFS with respect to the spatial frequencies. Size of the Zernike mask  $\rho$  equals  $0.5$  ( $*$ ),  $1$  ( $\Delta$ ), and  $1.5$  (+)  $1.06\lambda_0/D$ .



$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_t + \Delta_r) = \frac{2\pi\lambda_0}{\lambda_0\lambda}(\Delta_t + \Delta_r) \triangleq \frac{\lambda_0}{\lambda}(\phi_t + \phi_r), \quad (36)$$

where  $\phi_t$  (resp.  $\phi_r$ ) is the turbulent phase corresponding to the turbulent OPD  $\Delta_t$  (resp. reference OPD  $\Delta_r$ ) at the wavelength  $\lambda_0$ . In other words,  $\lambda_0$  is the analysis wavelength. Equation (36) also means that the only impact of polychromatism on the incoming turbulent phase corresponds in a scale factoring. Polychromatism does not mix two different turbulent phase modes together. This fact is essential for the continuation of our study.

The transparency function of the mask does not change, but we now keep its  $\lambda$ -dependency:

$$m(f_x, f_y, \lambda) = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} \text{OS}(f_x, f_y, \lambda)\right).$$

The optical shape of the mask depends, *a priori*, on the wavelength, since this quantity is the product of the refractive index  $n_r$  (which depends on  $\lambda$  for dispersive material) and the geometrical shape of the mask, GS,

$$\text{OS}(f_x, f_y, \lambda) = n_r(\lambda)\text{GS}(f_x, f_y).$$

The last source of  $\lambda$  dependency comes from the Fresnel formalism. Indeed, the light propagation itself includes the wavelength, as we can see in the expression of the EM field in the detector plane,

$$\begin{aligned} \psi_d(x_d, y_d, \lambda) &\propto \iint \frac{dx_p dy_p}{f^2} \psi_p(x_p - x_d, y_p - y_d, \lambda) \\ &\iint \frac{df_x df_y}{\lambda^2} m(f_x, f_y, \lambda) \exp\left(-\frac{2i\pi}{f\lambda}[x_p f_x + y_p f_y]\right). \end{aligned}$$

Concretely, it means that the right-side integral of this equation corresponds to a  $\lambda$ -dependent 2DFT of the mask. In other words, without particular assumptions about the mask, its Fourier transform depends on the wavelength. The fundamental Eq. (4) becomes

$$I_\lambda(\phi_t) = |\psi_p(\phi_t, \lambda) \star \mathcal{F}_\lambda[m]|^2.$$

Under these new assumptions, we can write the polychromatic intensity on the detector, called  $I_p$ , as the integral of the monochromatic intensities on the whole spectrum of the light source:

$$I_p(\phi_t) = \int d\lambda |\psi_p(\phi_t, \lambda) \star \mathcal{F}_\lambda[m]|^2. \quad (37)$$

### B. Substitution Test

The chromatic 2DFT equals

$$\mathcal{F}_\lambda[m](x_p, y_p) = \iint \frac{df_x df_y}{\lambda^2} m(f_x, f_y, \lambda) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}[x_p f_x + y_p f_y]}.$$

By looking at this equation, it appears that the chromatic 2DFT may be decoupled from the wavelength on the condition that the substitution

$$(u, v) = \left(\frac{f_x}{\lambda}, \frac{f_y}{\lambda}\right), \quad (38)$$

makes the  $\lambda$  dependency disappear. This condition requires in fact that the transparency function of the mask is a function of only two variables  $u$  and  $v$  instead of three:  $f_x$ ,  $f_y$ , and  $\lambda$ . In terms of physics, such a condition means that the point-spread functions for every wavelength always see the same "mask." In other words,

the optical shape of this mask is invariable by scale change. In particular, one can note that as soon as a mask does not need any characteristic length quantity in its transparency function, the substitution of Eq. (38) is possible.

Under the substitution of Eq. (38) assumption, the 2DFT becomes independent of the wavelength. The total polychromatic intensity [Eq. (37)] may be simplified into

$$I_p(\phi_t) = \int n(\lambda) d\lambda \left| \mathbb{I}_p \exp\left(1 \frac{\lambda_0}{\lambda}(\phi_t + \phi_r)\right) \star \mathcal{F}[m] \right|^2.$$

The phase power series of such an intensity becomes

$$\begin{aligned} I_p(\phi_t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \int n(\lambda) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^q \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \phi_t^{k\star} \overline{\phi_t^{q-k\star}} d\lambda \\ &\text{where } \phi_t^{k\star} \triangleq \left(\mathbb{I}_p e^{\frac{2i\pi\lambda_0}{\lambda}\phi_t} \phi_t^k\right) \star \mathcal{F}[m]. \end{aligned} \quad (39)$$

We assume, from now on, that  $\phi_r = 0$ . As a consequence, the  $k$ th moment does not depend on  $\lambda$  anymore. Subsequently, the phase power series in Eq. (39) may be simplified into

$$\begin{aligned} I_p(\phi_t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \int n(\lambda) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^q d\lambda \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \phi_t^{k\star} \overline{\phi_t^{q-k\star}} \\ &\text{where } \phi_t^{k\star} \triangleq (\mathbb{I}_p \phi_t^k) \star \mathcal{F}[m]. \end{aligned} \quad (40)$$

### C. Polychromatic Meta-Intensities

The first terms of the previous equation correspond once again to the constant, linear, and quadratic terms,  $I_{pc}$ ,  $I_{pl}$ , and  $I_{pq}$ :

$$I_{pc} = |\mathbb{I}_p \star \mathcal{F}[m]|^2$$

$$I_{pl}(\phi_t) = \frac{1}{n} \left( \int n(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda \right) 2\Re[(\mathbb{I}_p \star \mathcal{F}[m]) (\overline{\mathbb{I}_p \phi_t \star \mathcal{F}[m]})]$$

$$\begin{aligned} I_{pq}(\phi_t) &= \frac{1}{n} \left( \int n(\lambda) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 d\lambda \right) [|\mathbb{I}_p \phi_t \star \mathcal{F}[m]|^2 \\ &- \Re[(\mathbb{I}_p \star \mathcal{F}[m]) (\overline{\mathbb{I}_p \phi_t^2 \star \mathcal{F}[m]})]], \end{aligned}$$

where  $n$  is the total flux,

$$n = \int n(\lambda) d\lambda.$$

The method used previously to construct a phase-linear quantity (at least in the small-phase approximation) is once again valid. The effective polychromatic meta-intensity, called  $mI_p$ , will be subsequently defined in the same way as Eqs. (18) and (23), i.e.,

$$mI_p(\phi_t) = \frac{I_p(\phi_t) - I_p(0)}{n}. \quad (41)$$

Subsequently, it is this time easy to do the link between the polychromatic linear and quadratic intensities to the monochromatic ones:

$$I_{pl}(\phi_t) = \frac{1}{n} \left( \int n(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda \right) I_l(\phi_t)$$

$$I_{pq}(\phi_t) = \frac{1}{n} \left( \int n(\lambda) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 d\lambda \right) I_q(\phi_t).$$

It appears thus that under the assumption that the substitution of Eq. (38) is valid and that the reference phase equals the null phase, the polychromatic linear and quadratic intensities only differ from the monochromatic ones by global gain factors, which

only depend on the spectrum  $n(\lambda)$  and on the reference wavelength  $\lambda_0$  but not on the incoming phase mode.

In particular, it means that the polychromatism does not induce a change in the spatial structure of the meta-intensities, but only introduces a global blurring factor. In other words, an interaction matrix done with a monochromatic reference source is still valid for a polychromatic source if such a global factor is taken into account.

The substitution of Eq. (38) is thus a robust way to define what is an achromatic sensor. Indeed, if this is not possible, the factorization in the power series in Eq. (39) is not possible anymore. Concretely, it means that there is crosstalk between the phase modes due to the polychromatism of the source. The interaction matrix will be, subsequently, changed in its spatial structure.

Finally, one can notice the impact of a non-null reference phase: a WFS that does not work around the null phase is irremediably chromatic.

**D. Sensitivity, Linear Range, and SD Factor**

We can finally note that, for an achromatic sensor, the polychromatic sensitivity and linearity range (called  $s_p$  and  $d_p$ ) may easily be linked to the monochromatic ones:

$$s_p(\phi_i) = \frac{1}{n} \left( \int n(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} d\lambda \right) s(\phi_i)$$

$$d_p(\phi_i) = n \left( \int n(\lambda) \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 d\lambda \right)^{-1} d(\phi_i).$$

**E. Applications to Classical WFSs**

As we have just seen in the previous paragraph, as soon as the reference phase equals zero, the chromatic behavior of a WFS only depends on the expression of the transparency function of its Fourier mask. In this section, we browse the previous examples of WFSs and study their chromatic behavior in light of the substitution test defined in Eq. (38).

**1. Pyramid WFS Class**

Perfect pyramidal mask. We first consider the class of pyramid WFSs. The general expression of the transparency function of the associated mask is

$$m_{\Delta}(f_x, f_y, \lambda) = \exp \left( \frac{2i\pi}{\lambda} n_r(\lambda) \theta(|f_x| + |f_y|) \right).$$

There are two cases, depending on whether we consider a dispersive pyramid (e.g., a transparent glass pyramid) or a reflective pyramid (see [12]). In the first case,  $n_r(\lambda)$  follows the usual empirical Cauchy's equation,

$$n_r(\lambda) = B + \frac{C}{\lambda^2} + \dots,$$

where  $B$  and  $C$  depend on the nature of the propagation medium. Note that in this case, it is impossible to make  $m$  only a function of the two variables  $f_x/\lambda$  and  $f_y/\lambda$ ; it means that the associated WFS is not achromatic. Fortunately, a classical solution to solve this problem exists which consists of using two transparent pyramids attached by their base (see [16]). Such a device allows us, in substance, to nullify the first  $\lambda$ -dependent term  $C$  of the refractive index. In this way, variable substitution becomes possible, which makes the WFS achromatic. In the case of a reflective pyramid,

the propagation medium is air, which is not significantly dispersive on the visible spectrum. Subsequently, the substitution can be made and the simplified transparency function is

$$m_{\Delta}(u, v) = \exp(2i\pi n_{\text{air}} \theta(|u| + |v|)).$$

These results prove that the reflective pyramid and the two attached pyramids are achromatic sensors. Moreover, the apex angle  $\theta$  stays a free parameter. Subsequently, both the classical PWFS introduced by Ragazzoni [1] where the pupil images are completely separated and the flattened PWFS we proposed in [4] are achromatic sensors.

Modulation and Chromaticity. We already saw (paragraph 5.B) that the modulated phase  $\phi_m(s)$  may be seen as a variable reference phase. Moreover, the results of paragraph 8.C showed that a non-null reference phase irremediably induces a structural dependence of the output meta-intensities regarding the spectrum of the source. Consequently, the modulated PWFS (and all its variations) is not an achromatic sensor.

**2. Zernike Mask**

The transparency function of the mask of the Zernike WFS class needs, unfortunately, 2 characteristic length quantities: the first one is the size of the central disk, allowing us to define the two parts of the polar tessellation. This size is set in order to set the energy partition in the 2 parts of the tessellation. For a circular pupil of a diameter  $D$  and a reference wavelength  $\lambda_0$ , the size of the pupil equals  $1.06\lambda_0/D$ . The second characteristic quantity is the depth of the central disk well. It is set in order to create an OPD between the two parts of the polar tessellation. In other words, the optical design of the Zernike mask is optimized only for one wavelength. Moreover, this mask is manufactured in a transparent medium, which is, *a priori*, dispersive as well, but we do not consider such a chromatic effect for the following study. Such considerations allow us to write the transparency function as

$$m_Z(f_x, f_y, \lambda) = 1 + (e^{\frac{i\pi\lambda_0}{\lambda}} - 1) \Theta \left( 1.06 \frac{\lambda_0}{D} - \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \right).$$

It is clearly seen that the substitution of Eq. (38) does not allow us to cancel the wavelength dependence of the mask. Subsequently, the Zernike WFS cannot be an achromatic sensor. Nevertheless, N'Diaye *et al.* [17] showed that chromaticity does not play a significant role in terms of the error budget, making the ZWFS practically achromatic.

**9. CONCLUSIONS**

Thanks to the original approach of the Fourier plane tessellation, we managed to unify all the optical designs based on Fourier filtering. The essential point is to consider any kind of Fourier mask as a spatial frequency splitter.

From this approach, we showed that the 2D Fourier transform of the mask plays a significant role all along the mathematical developments, allowing us, in particular, to efficiently describe the imaging for any kind of entrance pupils or incoming phases. A phase power series development of the intensity on the detector allows us to identify the linear term. In order to extract this one from the effective signal obtained on the detector, we introduced a numerical process that may be seen as the simplest way to get a phase-linear response in the small-phase regime. The quantity obtained after such a calculation has been called the meta-intensity

$mI$  and is defined in the same way for any kind of Fourier-based WFSs.

These analytical developments have then allowed us to define the sensitivity and the linearity ranges of all the WFSs studied here. They are directly based on the linear and quadratic terms of the phase power series of the intensity. Moreover, we defined the SD factor, which quantifies the trade-off between these two antagonistic performance criteria. Such a factor gave us some practical ideas to optimize the Fourier masks depending on the required specifications. In other words, it opens the way to free-form filtering masks.

We then extended all these results to the modulation. This is particularly useful when considering unusual modulations, such as nonuniform or non-tip/tilt modulations.

The last theoretical result was about the effect of a polychromatic incoming light on the efficiency of a WFS. We gave a robust criterion depending only on the transparency function of the mask in order to characterize the achromatic property of a WFS.

As a second goal for this paper, we applied the theoretical developments to existing and new sensors. Indeed, the developed formalism allowed us to unify (and this was its main purpose) all the Fourier-based WFSs. We showed in particular that the pyramid WFS and the Zernike WFS may be considered not as unique designs but more as classes, where optical characteristics become flexible parameters.

It appeared, for instance, that the flattened PWFS and the classical PWFS were only two types of the pyramid WFSs class, where the apex angle is considered as a parameter. An exhaustive study that explores in great detail all the parameters of the pyramid class, i.e., the apex angle, the number of faces, and the modulation parameters, is conducted in [18].

We also showed that the slope maps usually associated with the PWFS were directly linked to the general meta-intensities we introduced. Moreover, we showed that the linearity range was improved without significant loss of sensitivity thanks to this slope maps computation.

Finally, new WFSs have been studied by considering the depth and the size of the central well of the Zernike WFS as a free parameter. Moreover, we isolated, analytically, the role played by each of these two parameters in the response of the sensors of the ZWFS class.

**APPENDIX A: NOTATIONS**

2D Fourier Transform:  $\mathcal{F}[f](\mu, \nu) = \iint f(x, y) e^{-2i\pi(x\mu + y\nu)} dx dy$   
 Identity transform:  $\mathcal{I}[f](x, y) = f(x, y)$   
 Symmetric transform:  $\mathcal{S}[f](x, y) = f(-x, -y)$   
 Hilbert transforms:  $\mathcal{H}_x[f](x, y) = p. v. \left\{ \frac{1}{\pi} \int \frac{f(t, y)}{x-t} dt \right\}$   
 $\mathcal{H}_y[f](x, y) = p. v. \left\{ \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x, t)}{y-t} dt \right\}$   
 $\mathcal{H}_{xy}^2[f](x, y) = p. v. \left\{ \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{f(t, t')}{(x-t)(y-t')} dt dt' \right\}$

2-Norm:  $\|f\|_2 = (\iint |f(x, y)|^2 dx dy)^{1/2}$

**Funding.** European Commission (EC) (312430); Agence Nationale de la Recherche (ANR); French Aerospace Lab (ONERA).

**REFERENCES**

1. R. Ragazzoni, "Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism," *J. Mod. Opt.* **43**, 289–293 (1996).
2. V. Akondi, S. Castillo, and B. Vohnsen, "Multi-faceted digital pyramid wavefront sensor," *Opt. Commun.* **323**, 77–86 (2014).
3. B. Vohnsen, S. Castillo, and D. Rativa, "Wavefront sensing with an axicon," *Opt. Lett.* **36**, 846–848 (2011).
4. O. Fauvarque, B. Neichel, T. Fusco, and J.-F. Sauvage, "Variation around a pyramid theme: optical recombination and optimal use of photons," *Opt. Lett.* **40**, 3528–3531 (2015).
5. F. Zernike, "Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method," *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **94**, 377–384 (1934).
6. K. Dohlen, "Phase masks in astronomy: from the Mach–Zehnder interferometer to coronagraphs," *EAS Pub. Ser.* **12**, 33–44 (2004).
7. A. Toepler, *Beobachtung nach einer neuen optischen Method* (1864).
8. R. N. Smartt and W. H. Steel, "Theory and application of point-diffraction interferometers," *Jpn J. Appl. Phys.* **14**, 351 (1975).
9. J. E. Oti, V. F. Canales, and M. P. Cagigal, "Analysis of the signal-to-noise ratio in the optical differentiation wavefront sensor," *Opt. Express* **11**, 2783–2790 (2003).
10. O. Fauvarque, B. Neichel, T. Fusco, and J.-F. Sauvage, "Optimization of the imaging processing in the context of Fourier based wave front sensing," in preparation.
11. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics, the tilt determination problem," *Astron. Astrophys.* **261**, 677–684 (1992).
12. A. Wang, J. Yao, D. Cai, and H. Ren, "Design and fabrication of a pyramid wavefront sensor," *Opt. Eng.* **49**, 073401 (2010).
13. C. Véronaud, "On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor," *Opt. Commun.* **233**, 27–38 (2004).
14. I. Shatokhina, A. Obereder, and R. Ramlau, "Fast algorithm for wavefront reconstruction in XAO/SCAO with pyramid wavefront sensor," *Proc. SPIE* **9148**, 91480P (2014).
15. M. N'Diaye, K. Dohlen, A. Caillat, and A. Costille, "Design optimization and lab demonstration of ZELDA: a Zernike sensor for near-coronagraph quasi-static measurements," *Proc. SPIE* **9148**, 91485H (2014).
16. S. Esposito, A. Tozzi, D. Ferruzzi, M. Carbillet, A. Riccardi, L. Fini, C. Véronaud, M. Accardo, G. Brusa, D. Gallieni, R. Biasi, C. Baffa, V. Billotti, I. Foppiani, A. Puglisi, R. Ragazzoni, P. Ranfagni, P. Stefanini, P. Salinari, W. Seifert, and J. Storm, "First-light adaptive optics system for large binocular telescope," *Proc. SPIE* **4839**, 164–173 (2003).
17. M. N'Diaye, K. Dohlen, T. Fusco, and B. Paul, "Calibration of quasi-static aberrations in exoplanet direct-imaging instruments with a Zernike phase-mask sensor," *Astron. Astrophys.* **555**, A94 (2013).
18. O. Fauvarque, B. Neichel, T. Fusco, J.-F. Sauvage, and O. Giraut, "A general formalism for Fourier based wave front sensing: application to the pyramid wave front sensors," *Proc. SPIE* **9909**, 990960 (2016).

# General formalism for Fourier-based wave front sensing: application to the pyramid wave front sensors

Olivier Fauvarque,<sup>a,\*</sup> Benoit Neichel,<sup>a</sup> Thierry Fusco,<sup>a,b</sup> Jean-Francois Sauvage,<sup>a,b</sup> and Orion Girault<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Aix-Marseille Université, CNRS, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, UMR 7326, Marseille, France

<sup>b</sup>ONERA—the French Aerospace Laboratory, Châtillon, France

**Abstract.** We compare a set of wave front sensors (WFS) based on Fourier filtering technique. In particular, this study explores the “class of pyramidal WFS” defined as the 4-faces pyramid WFS, all its recent variations, and also some WFSs as the 3-faces pyramid WFS. First, we describe such a sensors class due to the optical parameters of the Fourier filtering mask and the modulation parameters. Second, we use a unified formalism to create a set of performance criteria: size of the signal on the detector, efficiency of incoming flux, sensitivity, linear range, and chromaticity. Finally, we show the influence of the previous optical and modulation parameters on these performance criteria. This exhaustive study allows one to know how to optimize the sensor regarding performance specifications. We show in particular that the number of faces has influence on the size of the signal but no influence on the sensitivity and linearity range. To modify these criteria, we show that the modulation radius and the apex angle are much more relevant. Moreover we observe that the time spent on edges or faces during a modulation cycle allows to adjust the trade-off between sensitivity and linearity range. © 2017 Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) [DOI: 10.1117/1.JATIS.3.1.019001]

Keywords: adaptive optics; wave front sensing; pyramid wave front sensor.

Paper 16043P received Aug. 3, 2016; accepted for publication Feb. 15, 2017; published online Mar. 8, 2017.

## 1 Introduction

By placing amplitude or phase masks in a focal plane, it is possible to filter the light from a pupil plane to another. Those masks are able, in particular, to transform incoming phase fluctuations into intensity variations on a detector. Such optical designs (see Fig. 1) are thus particularly relevant in the context of wave front sensing, especially for the adaptive optics (AO). Moreover, Fourier-based wave front sensors (WFS) have many advantages compared to other WFSs as, for example, the Shack–Hartmann in terms of, for instance, noise propagation or sampling flexibility.

A general formalism about the Fourier-based wave front sensing has been recently developed by Fauvarque et al.<sup>1</sup> Such a theoretical framework allows, for instance, unification of the Zernike WFS, introduced by Zernike<sup>2</sup> himself, and the Ragazzoni's<sup>3</sup> pyramid WFS (PWFS). We choose in this article to explore, in the light of this formalism, the WFSs based on the pyramid WFS principle, as for example the classical 4-faces modulated pyramid, the 6- or 8-faces pyramid introduced by Akondi et al.,<sup>4</sup> the cone WFS (Vohnsen et al.<sup>5</sup>), or the flattened pyramid that were proposed by Fauvarque et al.<sup>6</sup> The choice of studying this class of Fourier-based WFSs is due to the fact that the PWFS recently shows its great efficiency on sky on the Large Binocular Telescope (Esposito et al.<sup>7</sup>), the Magellan Telescope (Close et al.<sup>8</sup>), and the Subaru Telescope (Jovanovic et al.<sup>9</sup>). It subsequently seems to be the most credible candidate for the next generations of AO, especially for the European Extremely Large Telescope. As a consequence,

serious optimization works will have to be led in order to know which designs will be the most appropriate regarding to the wave front sensing contexts. Finally, we mention some of the most enlightening theoretical works about this PWFS: Ragazzoni and Farinato,<sup>10</sup> Esposito and Riccardi,<sup>11</sup> Vérinaud,<sup>12</sup> and Guyon,<sup>13</sup> that will serve as reference results along the article.

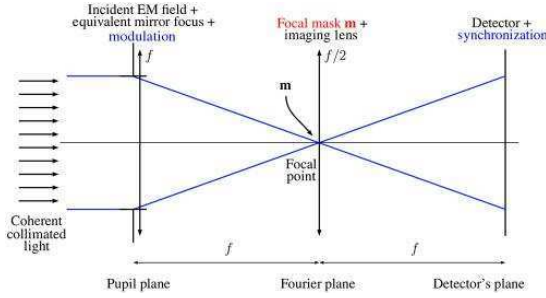
In the first part of this paper, we describe the “class of pyramidal WFSs” that contains the modulated pyramid WFS and all its variation when considering optical parameters of the mask and modulation settings as free parameters. The second part will define the unified performance criteria, which will be used in the third part to compare all these WFSs. In terms of optimization approach, the first part corresponds to the input parameters, whereas the second part describes the output specifications. A final part will summarize the influence of each parameter on each performance criteria in order to create the best WFS, regarding an AO context.

We recall here the general framework of the Fourier-based wave front sensing. The optical design is described in Fig. 1. Such a device is a typical Fourier filtering system. The incoming perturbed electro-magnetic field  $\psi_p$  is written as

$$\psi_p(\phi, n) = \sqrt{n} \mathbb{I}_p \exp(i\phi), \quad (1)$$

where  $n$  is the spatial averaged flux,  $\phi$  is the perturbed phase at the analysis wavelength  $\lambda_0$ , and  $\mathbb{I}_p$  is the indicative function of the entrance pupil. The Fourier mask, which takes place on the focal point, is considered as a pure transparent mask. Its transparency function may be written as

\*Address all correspondence to: Olivier Fauvarque, E-mail: [olivier.fauvarque@lam.fr](mailto:olivier.fauvarque@lam.fr)



**Fig. 1** Schematic view (in one-dimension) of a Fourier filtering optical system.

$$m = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0} \text{OS}\right), \quad (2)$$

where OS is the optical shape of the mask. Via the Fraunhofer optical formalism, it is possible to write the intensity on the detector

$$I(\phi, n) = |\psi_p(\phi, n) \star \mathcal{F}[m]|^2, \quad (3)$$

where  $\mathcal{F}[m]$  is the two-dimensional Fourier transform of the mask. The phase seen by the WFS is the sum of the turbulent phase induced by the atmosphere and the static aberrations of the wave front sensing path. Mathematically, we can split the incoming phase into two terms

$$\phi = \phi_r + \phi_t, \quad (4)$$

where  $\phi_t$  is the turbulent phase and  $\phi_r$  is the static reference phase.  $\phi_r$  may also be seen as the operating point of the WFS. Due to a Taylor's development of the phase around the reference phase  $\phi_r$ , it is possible to get a phase power series of the intensity on the detector

$$I(\phi, n) = n[I_c + I_l(\phi_t) + I_q(\phi_t) + \dots]. \quad (5)$$

The first term  $I_c$  is the “constant” intensity, it corresponds to the intensity on the detector when the phase equals to the reference phase, i.e., when the turbulent phase is null. The second term is the “phase-linear” term. It corresponds to the perfectly linear dependence of the intensity regarding to the turbulent phase around the reference phase. The third term  $I_q$  is the “quadratic” intensity; it corresponds to the first nonlinear dependence

of the intensity. The next terms are obviously nonlinear contributions as well. These equations may be easily generalized when a modulation device is working. The exact expressions of these intensities are given by Fauvarque et al.<sup>1</sup>

Since the signal on the detector is not linear with the phase, we have to process it. The easiest way to create a phase-linear quantity from  $I(\phi, n)$  is to calculate the meta-intensity, called  $mI$ , via the following equation:

$$mI(\phi_t) = \frac{I(\phi_r + \phi_t, n) - I(\phi_r, n)}{n}. \quad (6)$$

The normalization by the factor  $n$  allows to make  $mI$  independent from the incoming flux. Retrieving  $I(\phi_r, n)$  corresponds to a “tare” operation. In practice, this “return-to-reference” operation is done via a calibration path. This ensures that the meta-intensity equals zero when there is no turbulent incoming phase. With such a definition, the meta-intensity  $mI$  equals to the “linear” intensity  $I_l$  in the small phases approximation regime.

## 2 Pyramid Wave Front Sensors Class

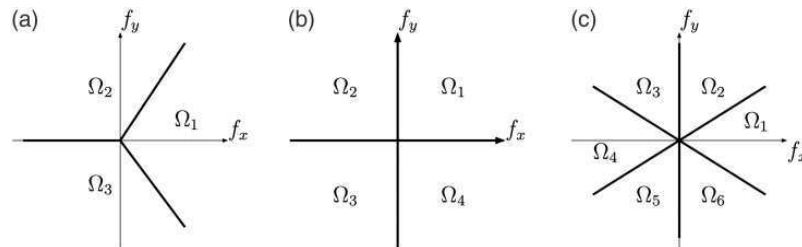
We introduce, in this section, the pyramid WFS class. This sensors class corresponds to the generalization of the classical pyramid WFS introduced by Ragazzoni<sup>3</sup> when you consider the number of faces and the apex angle of the mask and the modulation settings as free parameters.

### 2.1 Number of Faces

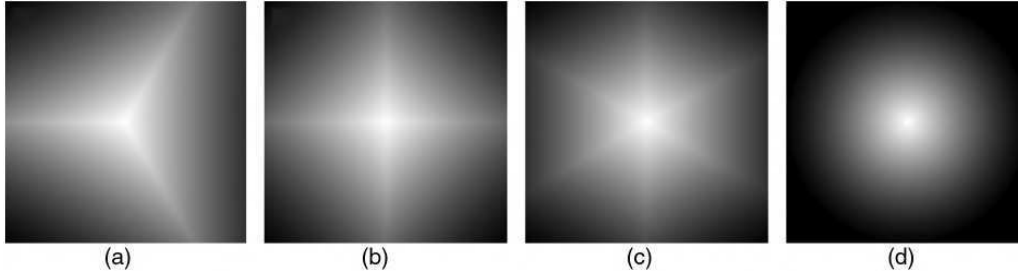
Since the focal plane corresponds to a Fourier plane, the number of faces will set the tessellation of the spatial frequencies plane. In the case of the PWFS class, we will only consider tessellations that are centered on the focal point and provide equal partitions of the energy. Moreover, since we want to describe the Fourier plane, we need at least two vectors that are not collinear, i.e., three points that are not aligned. As a consequence, the minimal tessellation corresponds to a 3-face pyramid. The opposite case corresponds to a conic pyramid, i.e., a pyramid with an infinite number of faces. This design has the advantage to not have privileged axis. Figure 2 shows the tessellation of the focal plane associated of the 3-, 4-, and 6-face pyramids [see their optical shapes in Figs. 3(a)–3(c)].

### 2.2 Apex Angle

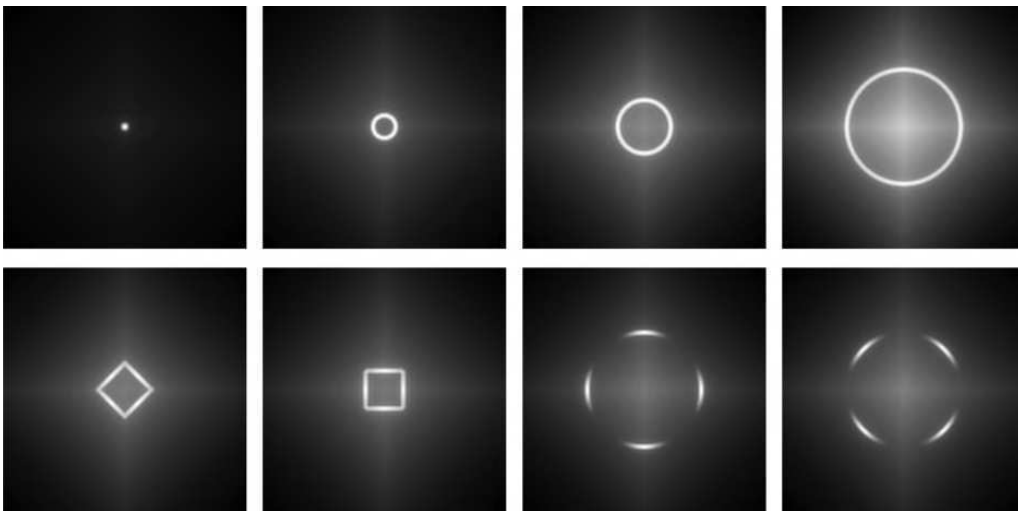
If the number of faces allows us to understand how the spatial frequencies are split, we need to explore the apex angle



**Fig. 2** Different types of Fourier plane tessellation for the pyramid WFS class: (a) 3-, (b) 4-, and (c) 6-faces.



**Fig. 3** Optical shape of the studied masks. From (a) to (d): 3-, 4-, 6-, and  $\infty$ -faces, respectively. The 4-face pyramid corresponds to the classical optical configuration. The last mask is equivalent to the axicon.



**Fig. 4** Some examples of modulation paths generated by changing the modulation radius and the weighting function.

parameter to know how these frequencies are rejected. Indeed, the slopes of each face (which are local tip/tilt angles) will set the place where the pupil images will be. If the apex angle is large enough, the spatial frequencies filtered by the tessellation will be completely split. However, if the angle is smaller, the pupil images will overlap and create interferences. Such a design has been studied in letter<sup>6</sup> for a number of faces equals to 4 and an overlap rate of the pupil of 90%. Another set of parameters will be tested in this article.

### 2.3 Modulation Path

In addition to the number of faces and the apex angle, we also consider the modulation path as a free parameter. For a tip/tilt modulation, the general expression of the modulated phase  $\phi_m$  is

$$\phi_m(s) = r_m(s)[\cos(2\pi s)Z_1^{-1} + \sin(2\pi s)Z_1^1]w(s), \quad (7)$$

where  $Z_1^1$  and  $Z_1^{-1}$  are the tip and tilt Zernike polynomials, respectively,  $s$  is the temporal variable normalized with respect to the duration of a modulation cycle,  $r_m(s)$  codes the

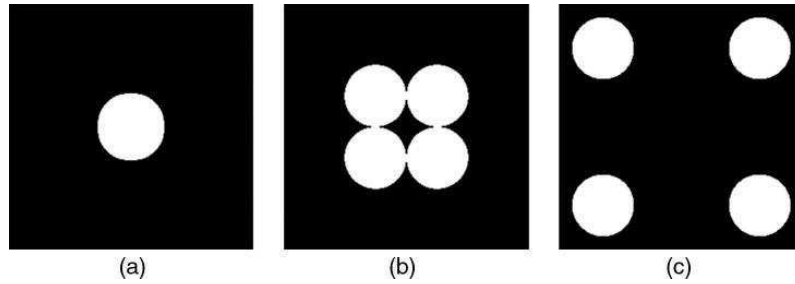
modulation radius, and  $w(s)$  is the weighting function that allows to spend more time on the faces or on the edges. The intensity associated to the modulation is

$$I(\phi, n) = \int |\psi_p[\phi + \phi_m(s), n] \star \mathcal{F}[m]|^2 w(s) ds. \quad (8)$$

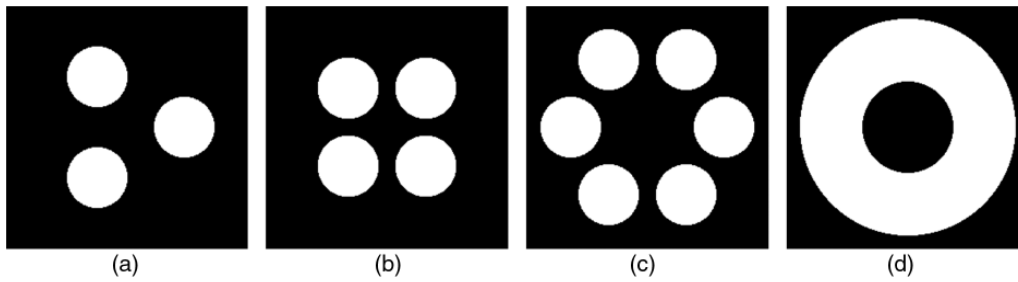
By changing  $r_m(s)$  and  $w(s)$ , it is possible to generate an infinite number of tip/tilt modulation. A constant modulation radius defines a circular modulation but a squared path may also be coded. A weighting function that equals to 1 all along the modulation path is called “uniform modulation.” Such a case is usually used in the existent modulation devices but, obviously, such a constrain may be released in order to change the WFS properties. Some examples of modulation paths are given in Fig. 4.

### 2.4 Interest Area of the Detector

In this article, we only take into account photons that are in the geometrical footprint of the entrance pupil images. It means that we do not consider the diffracted light.



**Fig. 5** Interest area for a circular pupil for the 4-faces PWFSs. From (a) to (c):  $\frac{2f\theta}{D} = 0, 1,$  and  $3,$  respectively.  $D$  is the diameter of the circular pupil and  $\theta$  codes the apex angle.



**Fig. 6** Interest area for a circular pupil for the PWFS class. From (a) to (d): 3-, 4-, 6-face, and the cone, respectively. Apex angle  $\theta$  equals to  $1.5 \frac{D}{2f}$ .

The geometric images of the pupil are easy to obtain; they are totally characterized by the tip/tilt angles of each face  $\Omega_i$ . If we call  $(\alpha_i, \beta_i)$  such angles associated, the pupil image of the tessellation  $\Omega_i$  will take place around the detector's point  $(f\alpha_i, f\beta_i)$ , where  $f$  is the focal of the imaging lens. The interest pixels, i.e., the geometrical footprints of the entrance pupil, are thus the ones that are within a pupil radius of the points  $(f\alpha_i, f\beta_i)$ . The indicative function of the interest area will be called  $\mathbb{I}_{IA}$ . We show in Figs. 5 and 6 the interest area for different optical parameters.

### 3 Performance Criteria

We introduce, in this section, the performance criteria that will be used in Sec. 4 to compare the WFSs of the PWFSs class when you change the parameters of Sec. 2.

#### 3.1 Surface Ratio

The first one is about the number of detector's pixels used to code phase information. Ideally, this number equals to the number of pixels of the entrance pupil. It means that each pixel codes one phase mode. Technologically, it also means that the detector optimizes each of its pixels. The mathematical quantity, which illustrates this criterion, corresponds to the ratio between the surface of the interest area and the surface of the entrance pupil

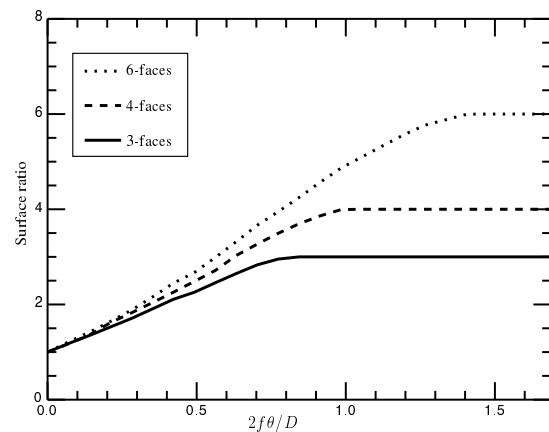
$$\sigma = \frac{\|\mathbb{I}_{IA}\|_1}{\|\mathbb{I}_P\|_1}. \quad (9)$$

This quantity will be called the "surface ratio." In the present context, it, at least, equals to 1. It is the case of the completely flat PWFS that unfortunately generates a useless WFS. The

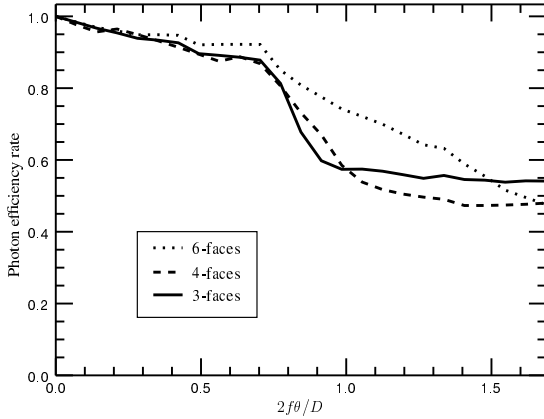
classical pyramid WFS has a surface ratio of 4. The flattened 4-faces pyramid has a transitional surface ratio going from 1 (when the pyramid is completely flat) to 4 when the angle apex increases. Figure 7 shows the "surface ratio" with respects to the apex angle for the 3-, 4-, and 6-face pyramids.

#### 3.2 Efficiency of the Incoming Flux

The second criterion quantifies the percentage of the incoming flux, which is effectively used to code phase information. Since the reference sources are quite faint in the context of astronomy,



**Fig. 7** Surface ratio for the pyramid WFSs class with an increasing apex angle  $\theta$ .



**Fig. 8** Photon efficiency rate for the pyramid WFSs class without modulation when the apex angle  $\theta$  is increasing

such a percentage is a strong indicator of the WFS performance. Even though the number of photons in the interest area is dependent on the incoming phase, it appears that this dependence is weak (at least in the small phases approximation). That is why, we choose to count the flux in the interest area when the phase equals to the reference phase to estimate this efficiency rate. Mathematically, this rate called  $\eta$  is

$$\eta = \frac{\|\mathbb{I}_{JA} \cdot I(\phi_r, n)\|_1}{n}.$$

This quantity goes from 0 to 1. A perfect WFS has obviously a photon efficiency rate of 1 whereas it would equal to 0 for a perfect coronagraph. Figure 8 shows that the flattened pyramids (3-, 4-, or 6-faces) have almost perfect photon efficiency rates: higher than 90% for  $2f\theta/D \in [0, 0.5]$  while  $\eta$  drastically decreases around 50% whatever the number of faces equals to when the pupil images do not overlap anymore. Figure 9 shows that modulation allows retrieval of a great part of the lost photons, especially when the pupil images are completely separated.

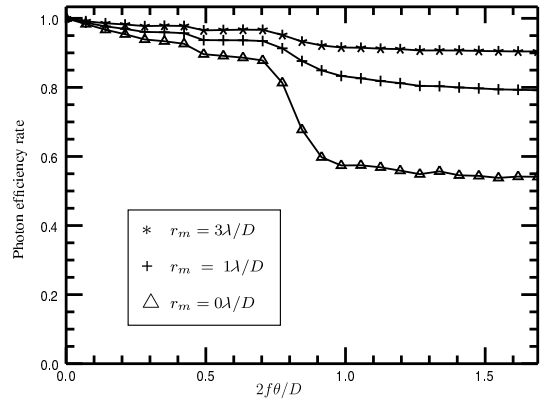
### 3.3 Chromaticity

We use the definition of an achromatic sensor introduced in article.<sup>1</sup> The influence of an incoming polychromatic light on the output meta-intensities for such a sensor is only in terms of gain and not in terms of structure. In other words, there is no cross talk between the turbulent phase modes due to the incoming polychromatic light. To know if a sensor is achromatic, we use the “substitution test” developed by Fauvarque et al.<sup>1</sup> Such a test consists in checking the capability to make the transparency function of the mask independent of the wavelength  $\lambda$  via the following substitution:

$$(u, v) = \left( \frac{f_x}{\lambda}, \frac{f_y}{\lambda} \right). \quad (10)$$

For the 4-faces pyramid, the transparency function is

$$m_4(f_x, f_y, \lambda) = \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} \theta (|f_x| + |f_y|) \right], \quad (11)$$



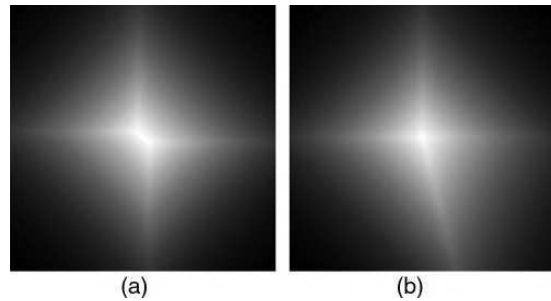
**Fig. 9** Influence of the modulation radius on the photon efficiency rate for the 3-face pyramid WFSs class with an increasing apex angle  $\theta$ .

$$m_4(u, v) = \exp[2i\pi\theta(|u| + |v|)]. \quad (12)$$

Since the wavelength dependence disappears due to substitution [Eq. (10)], the 4-face PWFS is thus an achromatic sensor. Moreover, there is no constraint on the apex angle  $\theta$  concerning the wavelength; as a consequence, the pyramid WFS is achromatic whatever the apex angle is. One can generalize this result for any number of faces. Unfortunately, pyramid WFSs lose this achromatic behavior as soon as the reference phase is not null anymore or when the modulation is used.

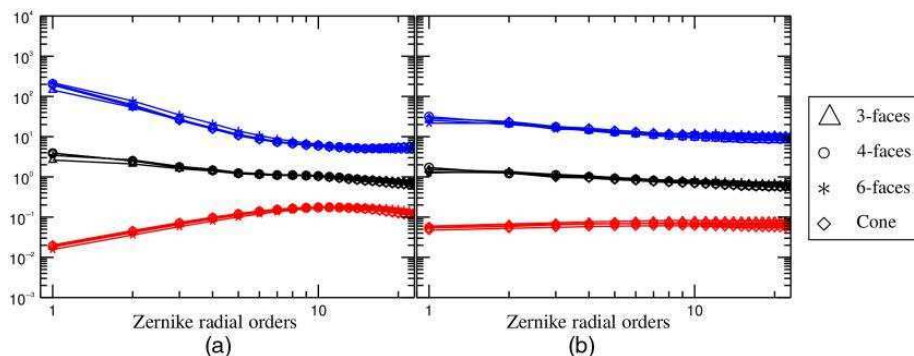
### 3.4 Manufacturing

A relevant criterion is about the ease of manufacturing the pyramidal mask. We know that imperfections are recurring for the 4-face pyramid as for example the “roof-top shape” [see Fig. 10(a)] instead of a perfect pyramidal shape. These difficulties are due to the fact that a point is defined as the intersection of three planes and not four. In other words, a 3-face pyramid is much easier to manufacture than a 4-face. Moreover, it might be technologically difficult to equally separate the faces [see Fig. 10(b)] or to create very sharp edges, that is why using a cone as filtering mask could be particularly convenient.



**Fig. 10** Manufactured 4-face pyramids with classical defaults: (a) Roof-top shape. (b) Asymmetric angles.





**Fig. 11** Influence of the number of faces on the sensitivity, the linearity range and, the SD factor with respect to the spatial frequencies in terms of Zernike radial orders. (a) Small apex angle ( $\theta = 0.1 \frac{D}{2f}$ ) and (b) large apex angle ( $\theta = 2 \frac{D}{2f}$ ).

### 3.5 Sensitivity, Linearity Range, and SD Factor

Finally, we are interested in the crucial criteria, which are sensitivity and the linearity range.

The sensitivity associated to a normalized (regarding to the RMS norm) turbulent mode  $\phi_t$ , that we call  $s(\phi_t)$ , is calculated directly from the linear intensity of the phase power series of the intensity since this quantity corresponds to the perfectly linear behavior of a WFS

$$s(\phi_t) = \|I_t(\phi_t)\|_2. \quad (13)$$

The linear range, which we call  $d(\phi_t)$ , is calculated via the first nonlinear term, i.e., the quadratic intensity  $I_q$ . The higher this term is, the smaller the linearity range will be

$$d(\phi_t) = \frac{1}{\|I_q(\phi_t)\|_2}. \quad (14)$$

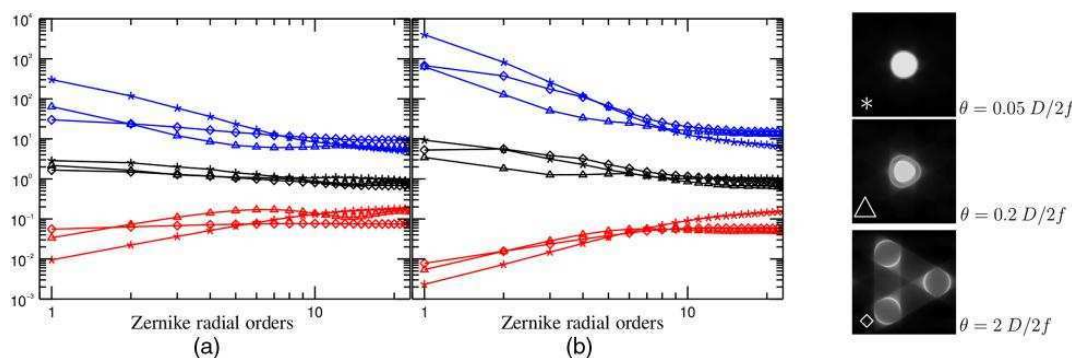
We also consider the product of these two antagonist performance criteria that we call the SD factor (for sensitivity versus dynamic) since it quantifies the trade-off between them. The SD factor is particularly relevant to know, for instance, what is the best way to improve the linearity range without decreasing the sensitivity too much.

## 4 Comparison of the Pyramid Wave Front Sensors

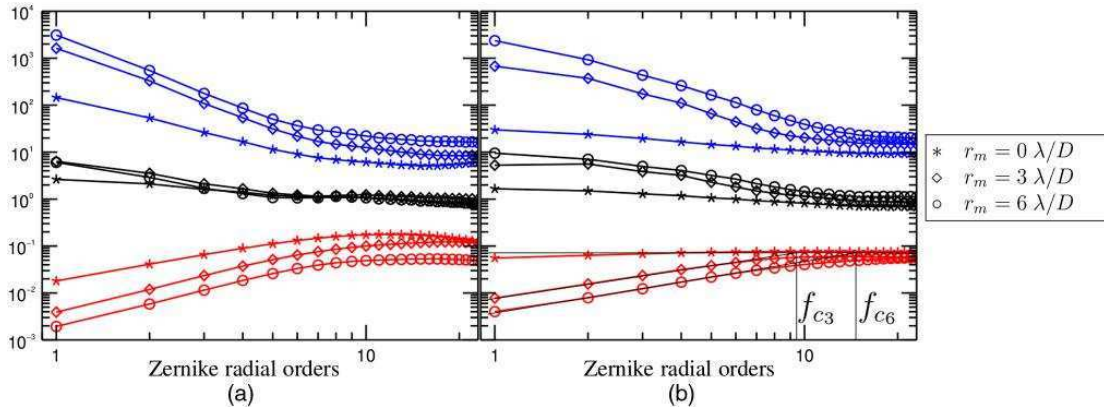
This section is interested in the influence of the optical and modulation parameters on the sensitivity, the SD factor, and the linearity range with respect to the spatial frequencies in terms of Zernike radial orders. Various configurations are shown in Figs. 11–15.

Figure 11 is interested in the influence of the number of faces. We observe that this optical parameter does not really impact the performance of the considered WFSs whatever the apex angle is. Physically, it means that the number of elements in which the spatial frequencies plane is cut does not really matter. Consequently, using a 3-face pyramid instead of a 4-face would be particularly convenient since the 3-face requires less pixels and might be easier to manufacture.

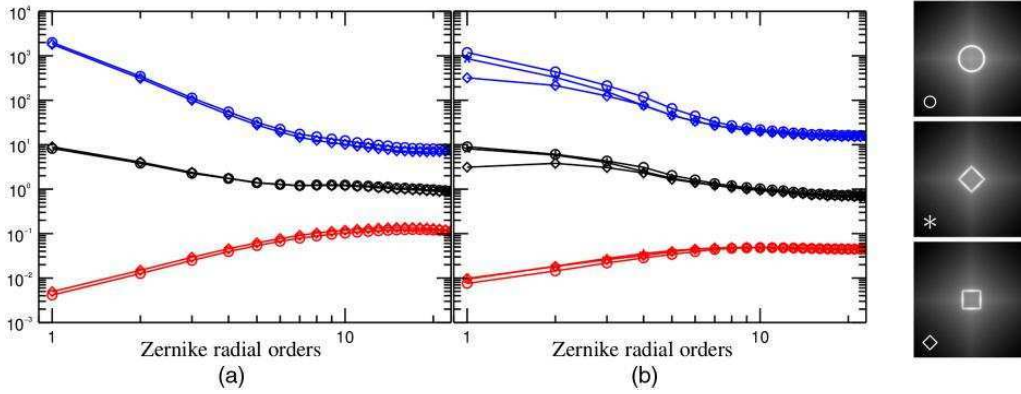
We study in Fig. 12, the influence of the apex angle on a 3-faces pyramid with ( $r_m = 3\lambda/D$ ) and without modulation. First of all, one can note that as soon as  $2f\theta/D > 1.5$ , the three curves do not evolve anymore, and this is a general behavior observed for all the configurations tested in this article. In other words,  $\theta$  has an influence only when the pupil images overlap. Second, as mentioned by Fauvarque et al.<sup>6</sup> when there is no modulation [graph of Fig. 12(a)], we observe that an optical recombination induced by a small angle provides a better



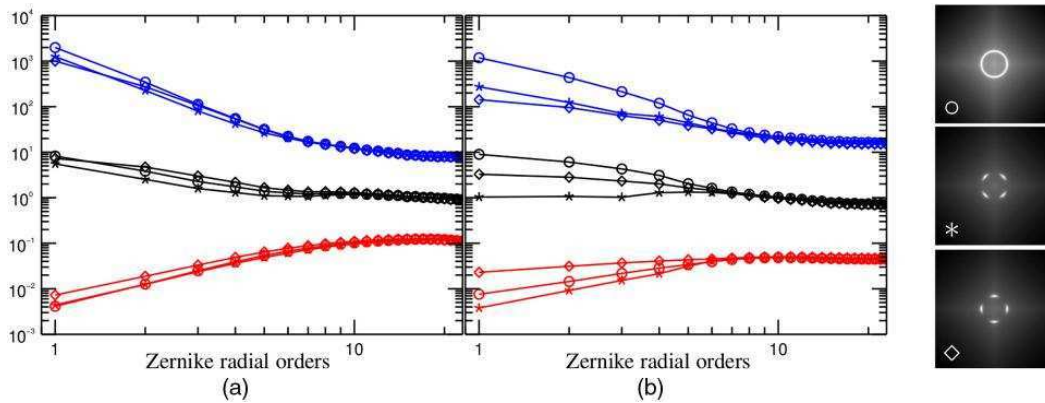
**Fig. 12** Influence of the apex angle on the sensitivity, the linearity range, and the SD factor with respect to the spatial frequencies in terms of Zernike radial orders. Number of faces equals to 3. (a) No modulation and (b) circular modulation ( $r_m = 3\lambda/D$ ).



**Fig. 13** Influence of the modulation radius on the sensitivity, the linearity range, and the SD factor with respect to the spatial frequencies in terms of Zernike radial orders. Number of faces equals to 3. The modulation is circular. (a) Small apex angle ( $\theta = 0.1 \frac{D}{27}$ ) and (b) large apex angle ( $\theta = 2 \frac{D}{27}$ ).



**Fig. 14** Influence of the shape of the modulation path on the sensitivity, the linearity range, and the SD factor with respect to the spatial frequencies in terms of Zernike radial orders. Number of faces equals to 4. Maximum modulation radius equals to  $3\lambda/D$ . (a) Small apex angle ( $\theta = 0.1 \frac{D}{27}$ ) and (b) large apex angle ( $\theta = 2 \frac{D}{27}$ ).



**Fig. 15** Influence of the weighting function on the sensitivity, the linearity range, and the SD factor with respect to the spatial frequencies in terms of Zernike radial orders. Number of faces equals to 4. The modulation is circular  $r_m = 3\lambda/D$ . (a) Small apex angle ( $\theta = 0.1 \frac{D}{27}$ ) and (b) large apex angle ( $\theta = 2 \frac{D}{27}$ ).

sensitivity in the high spatial frequencies while it decreases for the low frequencies. Moreover, it is possible to choose where the sensitivity is maximum by changing the  $\theta$  value. It comes as no surprise that the linearity range has an inverse behavior; it improves for the low frequencies and decreases at the high ones. The curve of the SD factor is more interesting since for small angles, this curve stays above the pyramid with completely separated pupil images for all the spatial frequencies. In terms of trade-off between sensitivity and linearity range, there is thus a real gain to use small angles. Finally, one can note [graph of Fig. 12(b)] that the modulation has the same influence for a flattened or a classical pyramid before the cutoff spatial frequency; an improvement of the linearity range frequency associated to a loss of sensitivity.

We mention here another kind of trade-off that could be particularly relevant in extreme AO. Indeed, we just observed that the improvement in terms of sensitivity for the high spatial frequencies when the apex angle is small is always associated to a deteriorated sensitivity for the low spatial frequencies. It is not necessarily a problem if the optimization consists in maximizing the Strehl ratio since the cumulative sensitivity is better for flattened pyramids than a classical one. Nevertheless, if the goal is to improve contrast at small angles, such optical configuration may not be relevant since areas close to the center of the point spread function correspond to low spatial frequencies where the sensitivity is reduced.

Figure 13 is interested in the influence of the modulation radius on a flattened and a classical pyramid. Modulation is here considered as uniform and circular. One can observe on the right graph where the pupil images are completely separated, the classical influence (see Guyon<sup>13</sup> and Vérinaud<sup>12</sup>) of the modulation radius on the sensitivity and the linearity range; an improvement of the linearity range associated to a loss a sensitivity for the low spatial frequencies. Two behaviors are separated by a cutoff frequency that is growing linearly with the modulation radius,  $f_{c_0}$  (resp.  $f_{c_1}$ ) for a modulation radius equals to  $3\lambda_D$  (resp.  $6\lambda/D$ ). These two behaviors are a slope sensor for the low frequencies (linear growth of the sensitivity) and a phase sensor (flat sensitivity) for the high frequencies. The linearity range is also improving with the modulation radius. By looking at the SD factor that characterizes the trade-off sensitivity/linearity range, it appears that the gain is particularly pronounced for the low spatial frequencies but tends to be null for the highest ones.

If we consider the case of a flattened pyramid (left graph), one can observe that the modulation radius does not change the spatial frequency where the sensitivity is maximum. Nevertheless, we can note a global improvement of the linearity range associated to a global loss of sensitivity on the whole range of spatial frequencies. Modulation has thus influence for all the spatial frequencies while considering small apex angles.

To summarize, one can say that effects of modulation and small apex angles add to each other. As a consequence, a WFS with a small apex angle to a high modulation will be much more linear than a classical pyramid with no modulation.

Figure 14 is interested in the influence of the shape of the modulation path. Modulation is considered as uniform and the maximum modulation radius equals to  $3\lambda/D$ . The curves show that the shape of the path does not really impact the performance whatever the apex angle is.

Figure 15 is finally interested in the influence of the weighting function  $w(s)$ . By changing this function, it is possible to

spend more time on the edges or on the faces. The SD factors of the two graphs of Fig. 15 clearly show that the uniform modulation corresponds to the best trade-off sensitivity/linearity range. However, the most sensitive configuration is the one that spends a maximum of time on the edges of the pyramid while the “faces” modulation presents the worst sensitivity. This result is not surprising since the “edges” modulation corresponds to the case that is the closest to the nonmodulated pyramid.

## 5 Conclusions

The numerous parameters of the sensors of the pyramid class thus allow us to consider the optimization of the element “sensor” in an AO loop. The comparison of the different WFSs of this class, following unified performance criteria, shows that:

1. The number of faces is essentially a geometric and technological parameter. Indeed, this parameter has no influence on the sensitivity and the linearity range. Consequently, its choice has to be done regarding sampling and manufacturing criteria. If the pupil images are completely separated, the 3-faces mask seems the best candidate since it minimizes the number of required pixels and is easy to manufacture. The cone seems particularly relevant for the small apex angles. It is indeed perfectly chromatic due to the absence of edges and does not require a lot of pixels.
2. The tip/tilt modulation stage provides two main advantages. It allows retrieval of a great part of the photon loss due to diffraction when the pupil images are separated. Moreover, it improves drastically the linear range for the low spatial frequencies. Unfortunately, a loss of sensitivity is associated with this gain. Simulations show that the shape of the modulation path (squared or circular) has no significant influence. Nevertheless, we observe that the sensitivity was linked to the time spent on the edges whereas the linearity range was correlated to the time spent on faces. Finally, we note that modulation inevitably makes the WFS sensible to polychromatism. Without modulation all the sensors of the pyramid class are rigorously achromatic.
3. The apex angle turns out to be the most promising parameter of the pyramid class. Two regimes appear. The first one corresponds to the classical case where the pupil images are completely separated, i.e.,  $2f\theta/D > 1$ . In this regime, all the performance criteria are stable regarding to  $\theta$ . Without modulation it corresponds to the classical “flat” sensitivity and linearity range whatever the number of faces equals to. The second regime corresponds to the flattened pyramids, i.e.,  $0 < 2f\theta/D < 0.5$ . On this range, the influence of  $\theta$  is significant especially concerning the sensitivity and the linearity range. In particular, this parameter allows one to choose where the gain in terms of sensitivity is maximal. Moreover, the small angle configurations allow to drastically improve the efficiency of the incoming photon without needing modulation. At the same time, one notes that few pixels are needed to do the wave front sensing.

The next steps of this study consist in comparing all the WFSs of the pyramid class on a unique optical bench. Following the results of Akondi et al.,<sup>14</sup> the technological device allowing to create all the Fourier masks will be a spatial light modulator. Concerning the forthcoming numerical simulations, we plan to create an AO loop where all the optical parameters of the pyramid WFS would be, as the deformable mirror, controlled and try to close it depending on the AO contexts.

Finally, we mention that this study does not concern the impact of the high-orders spatial frequencies, which are not corrected in an AO loop. However, it appears (Korkiakoski et al.<sup>15,16</sup>) that nonlinearity caused by such residual phases has strong impacts on performance. Theoretical investigations will thus be led in this direction by extending our model to be able to handle both nonnull static reference phase and dynamic residuals phase.

### Acknowledgments

The work was partly funded by the European Commission under FP7 Grant Agreement No. 312430 Optical Infrared Coordination Network for Astronomy and by the French Aerospace Lab (ONERA). B. Neichel and O. Fauvarque acknowledge the financial support from the French ANR program WASABI to carry out this work.

### References

- O. Fauvarque et al., "General formalism for Fourier based wave front sensing," *Optica* 3(12), 1440 (2016).
- F. Zernike, "Diffraction theory of the knife-edge test and its improved form, the phase-contrast method," *J. R. Astron. Soc. Can.* 94, 377–384 (1934).
- R. Ragazzoni, "Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism," *J. Mod. Opt.* 43, 289–293 (1996).
- V. Akondi, S. Castillo, and B. Vohnsen, "Multi-faceted digital pyramid wavefront sensor," *Opt. Commun.* 323, 77–86 (2014).
- B. Vohnsen, S. Castillo, and D. Rativa, "Wavefront sensing with an axicon," *Opt. Lett.* 36(6), 846–848 (2011).
- O. Fauvarque et al., "Variation around a pyramid theme: optical recombination and optimal use of photons," *Opt. Lett.* 40(15), 3528–3531 (2015).
- S. Esposito et al., "Natural guide star adaptive optics systems at LBT: FLAO commissioning and science operations status," *Proc. SPIE* 8447, 84470U (2012).
- L. M. Close et al., "First closed-loop visible AO test results for the advanced adaptive secondary AO system for the Magellan Telescope: MagAO's performance and status," *Proc. SPIE* 8447, 84470X (2012).
- N. Jovanovic et al., "Development and recent results from the Subaru coronagraphic extreme adaptive optics system," *Proc. SPIE* 9147, 91471Q (2014).
- R. Ragazzoni and J. Farinato, "Sensitivity of a pyramidal wave front sensor in closed loop adaptive optics," *Astron. Astrophys.* 350, L23–L26 (1999).
- S. Esposito and A. Riccardi, "Pyramid wavefront sensor behavior in partial correction adaptive optic systems," *Astron. Astrophys.* 369(2), L9–L12 (2001).
- C. Véronaud, "On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor," *Opt. Commun.* 233(1), 27–38 (2004).
- O. Guyon, "Limits of adaptive optics for high-contrast imaging," *Astrophys. J.* 629(1), 592–614 (2005).
- V. Akondi, S. Castillo, and B. Vohnsen, "Digital pyramid wavefront sensor with tunable modulation," *Opt. Express* 21(15), 18261–18272 (2013).
- V. Korkiakoski, C. Véronaud, and M. L. Louarn, "Improving the performance of a pyramid wavefront sensor with modal sensitivity compensation," *Appl. Opt.* 47, 79–87 (2008).
- V. Korkiakoski, C. Véronaud, and M. Le Louarn, "Applying sensitivity compensation for pyramid wavefront sensor in different conditions," *Proc. SPIE* 7015, 701554 (2008).

Biographies for the authors are not available.