Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
École doctorale pluridisciplinaire

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DES ANTILLES

présentée par **Yvesner Marcelin**
sous la direction du Professeur **Michel H. Geoffroy**

Développements récents en analyse multivoque : prédérivées et optimisation multivoque

soutenue publiquement le 22 juin 2016
en vue de l'obtention du titre de
Docteur de l'Université des Antilles

spécialité Mathématiques

Membres du jury :

Samir Adly ,	Pr. Université de Limoges	Rapporteur
Julian P. Revalski,	Pr. Académie des Sciences de Bulgarie	Rapporteur
Michel H. Geoffroy,	Pr. Université des Antilles	Examinateur
Alain Piétrus,	Pr. Université des Antilles	Examinateur

Université des Antilles – Laboratoire LAMIA

Développements récents en analyse multivoque : prédérivées et optimisation multivoque

Mots clés : **Applications multivoques, Applications positivement homogènes, Prédérivées, Optimisation multivoque, Minimiseur, Convergence variationnelle, Stabilité**

Remerciements

La préparation de cette thèse au sein du Laboratoire de Mathématiques, informatique et applications (LAMIA) a été rendue possible grâce au support de beaucoup de personnes. J'aimerais profiter de ces quelques lignes pour leur exprimer toute ma reconnaissance.

En tout premier lieu, je voudrais adresser mes remerciements les plus sincères au Professeur Michel H. Geoffroy de m'avoir accordé le privilège de travailler sous sa direction. Au cours de mes trois années de thèse, il m'a permis de bénéficier de sa riche expérience, ses connaissances, sa pédagogie et sa passion de la recherche. Sa grande disponibilité, sa ponctualité, sa rigueur scientifique, son sens de responsabilité et ses qualités humaines m'ont beaucoup marqué. J'avoue que j'ai énormément appris à ses côtés. Je lui suis infiniment reconnaissant.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude aux Professeurs Samir Adly et Julian Revalski d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je voudrais les remercier spécialement de l'interêt qu'ils ont bien voulu porter à ces travaux. Aussi, je voudrais exprimer ma reconnaissance au Professeur Alain Piétrus pour l'honneur qu'il me fait d'accepter de faire partie du jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aux membres du LAMIA de l'accueil chaleureux qu'ils m'ont donné. Je voudrais exprimer d'une manière spéciale ma profonde gratitude à Madame Marylène Troupé d'avoir bien voulu m'accueillir pendant près d'une année dans son bureau. Je ne lui en remercierai jamais assez. Je tiens à remercier également Monsieur Michaël Gaydu dont le support inconditionnel et les conseils avisés m'ont été très profitables. Aussi, je voudrais remercier spécialement le Professeur Jacques Laminie de sa générosité intellectuelle et Madame Célia Jean-

Alexis avec qui j'ai réalisé mes premiers pas en analyse multivoque au cours de ma première année de master. Mes vifs remerciements vont également au Professeur Alex Méril qui a beaucoup œuvré pour que je puisse venir, après l'obtention de mon diplôme de licence, continuer mes études au sein de l'Université des Antilles. Ils s'adressent plus généralement à tous les enseignants chercheurs du Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences Exactes et Naturelles de ladite université avec une mention spéciale au Professeur Jean Vaillant qui, malgré ses responsabilités diverses, m'a permis de comprendre le fonctionnement administratif du département. Je garderai de très bons souvenirs de mon passage à cette université.

Je ne saurais oublier de réitérer mes sincères remerciements au Professeur Marc Lassonde et Madame Florence Jules qui, lors de mon arrivée sur le territoire, m'ont accompagné dans toutes mes démarches auprès de différentes institutions. Je suis profondément touché de leur bienveillance à mon égard.

J'aimerais renouveler toute ma gratitude à la Direction de l'École Normale Supérieure de l'Université d'État d'Haïti d'avoir bien voulu me soutenir financièrement durant la préparation de cette thèse. J'adresse un remerciement spécial à Monsieur Bérard Cénatus pour son soutien indéfectible surtout dans mes démarches auprès de différentes institutions. Je profite de cette occasion pour remercier la Fondation Connaissance et Liberté (FOKAL) de m'avoir accordé un support financier me permettant de finaliser ce travail.

Qu'il me soit permis d'adresser aussi mes sincères remerciements à la Direction de l'École Presbytérale Congréganiste de l'Éstère (EPCE) pour le degré élevé de flexibilité dont elle a fait montre durant la préparation de cette thèse.

Je ne peux manquer également d'exprimer ma gratitude la plus profonde à tous les membres de ma famille pour leur soutien et leurs précieux mots d'encouragement. Plus généralement, je voudrais adresser mes vifs remerciements à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de ces travaux.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$	$:= \{0, 1, 2, ...\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	$:= \{1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers strictement positifs.
$\mathcal{N}_\infty$	$:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \backslash N \text{ est fini } \}$.
$\mathcal{N}_\infty^\#$	$:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid N \text{ est infinie } \}$.
$\mathbb{R}$	est l'ensemble des nombres réels.
X, Y	sont des espaces de Banach si aucune autre indication n'est donnée.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	désigne le produit scalaire.
$\| \cdot \|_E$	désigne une norme sur un espace vectoriel E.
$\text{int}(A)$	désigne l'intérieur pour la topologie de la norme d'une partie A d'un espace normé.
$\bar{A}$	est la fermeture pour la topologie de la norme d'une partie A d'un espace normé.
$\text{d}(x, B)$	$:= \inf\limits_{b \in B} \| x - b \|$ est la distance entre x et l'ensemble B.
$e(A, B)$	$:= \sup\limits_{x \in A} \text{d}(x, B)$ désigne l'excès de l'ensemble A à l'ensemble B.
$\mathbb{B}_X$	$:= \{x \in X \mid \| x \|_X \leq 1\}$ désigne la boule unité fermée de X.
$r\mathbb{B}_X$	$:= \{x \in X \mid \| x \|_X \leq r\}$ est la boule fermée de centre 0_X et de rayon r.
$\mathbb{B}_r(\overline{x})$	$:= \{x \in X \mid \| x - \overline{x} \|_X \leq r\}$ est la boule fermée de centre $\overline{x}$ et de rayon r.
$F : X \rightrightarrows Y$	désigne une application multivoque de X dans Y.
$\text{gph } F$	$:= \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$ désigne le graphe de F.
$\text{dom } F$	$:= \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ désigne le domaine de F.
$\text{Im } F$	$:= \{y \in F(x) \mid x \in \text{dom } F\}$ désigne l'image de F.
$\mathcal{H}(X, Y)$	désigne l'ensemble des applications des applications multivoques positivement homogènes de X dans Y.

Introduction

Il est bien connu que l'analyse variationnelle est une branche dynamique des mathématiques dont les origines remontent à plusieurs siècles. Pendant un certain temps, elle avait été identifiée au calcul des variations, à l'exploration du comportement local de fonctions. Aujourd'hui, on entend par analyse variationnelle un ensemble de théories mathématiques dont celles de la convergence de suites d'ensembles, de l'optimisation, du contrôle, de l'analyse multivoque, de l'analyse non lisse, etc. Ses outils sont utilisés dans de nombreux domaines appliqués tels que l'économie, la finance, l'ingénierie, la mécanique et bien sûr dans le traitement de problèmes de mathématiques abstraites. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra consulter entre autres [35, 63, 64, 81, 82, 83, 99] et leurs bibliographies.

L'analyse multivoque est une importante branche de l'analyse variationnelle. Elle étudie les propriétés des relations F d'un ensemble X dans un ensemble Y, appelées applications multivoques qui, à chaque élément $x \in X$ associent un sous-ensemble éventuellement vide de Y. Il est bien connu que certains problèmes provenant de divers domaines conduisent tout naturellement à l'utilisation de telles applications. C'est le cas par exemple de nombreux problèmes de complémentarité, de contrôlabilité, d'équilibre, d'optimisation paramétrique et d'analyse non lisse. Ainsi, contrairement à l'idée émergée au cours de la première moitié du XXᵉ siècle selon laquelle l'analyse multivoque n'avait pas de motivation réelle, elle s'est révélée au cours de ces dernières décennies comme étant la clé de la compréhension de nombreux problèmes provenant de domaines très variés.

Vu la vaste étendue de son champ d'application, depuis plusieurs décennies l'analyse multivoque a retenu l'attention de nombreux mathématiciens. Si les théories des inclusions variationnelles et différentielles ont fait couler beaucoup d'encre, celle de l'optimisation multivoque n'a pas cessé de progresser depuis les années 80. Nous entendons par théorie de l'optimisation multivoque, celle qui étudie les problèmes du type :

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad F(x) \\ \text{tel que} \quad x \in D, \end{cases}$$

où F est une application multivoque appelée fonction objectif à valeurs dans un espace vectoriel normé, appelé espace objectif, partiellement ordonné dans un certain sens que nous aurons à préciser plus loin et D est un sous-ensemble non vide du domaine de F appelé ensemble-contrainte ou domaine de faisabilité. Résoudre ce genre de problème revient à déterminer tous les éléments $\bar{x} \in D$ pour lesquels il existe $\bar{y} \in F(\bar{x})$ tel que $\bar{y}$ soit un élément minimal dans un certain sens de l'ensemble $F(D)$.

L'une des principales raisons pour lesquelles la théorie adaptée à l'étude de ce type de problèmes a suscité autant d'intérêts est probablement la large variété de situations dans lesquelles elle s'applique. En effet, T. Q. Bao et B. S. Mordukhovich l'ont appliquée dans [15] à un modèle non convexe de l'économie du bien-être où l'espace vectoriel des biens est de dimension infinie. A. H. Hamel et al. l'ont appliquée dans [53] dans le domaine de la finance, plus précisément, dans le cadre de la théorie de la mesure de risques dans un modèle de marché avec frictions. En théorie de la décision, les préférences des individus sont exprimées au moyen de relations binaires appelées relations de préférences. Il est assez courant d'associer à de telles relations des fonctions numériques appelées fonctions d'utilité. Les lois économiques régissant la matière sont axées sur l'hypothèse de la rationalité de l'homme recherchant la satisfaction maximale. Ainsi, le modèle mathématique associé au choix du consommateur conduit à l'étude d'un problème de maximisation de la fonction d'utilité de ce dernier. Cependant, il a été mentionné dans [56] qu'en général une relation de préférence associée à un ordre partiel strict ne peut pas être représentée par une fonction d'utilité. Néanmoins, elle est représentable par une application multivoque. Ainsi, le problème précédent est transformé en un probème d'optimisation multivoque. D'où une source de motivation pour le développement d'une théorie permettant de résoudre ce type de problèmes. Pour développer une telle théorie, des notions de dérivée pour les applications multivoques s'avèrent être d'une importance capitale.

Depuis le début des années 80, la théorie de la différentiation associée à l'analyse multivoque est en progression permanente. Si dans le cadre univoque, l'idée du sous-différentiel introduit à l'aube des années 60 a été motivée par l'extension du principe de Fermat à l'optimisation convexe non différentiable ; si le développement de l'analyse non lisse au cours des années 70 a été largement motivé par l'extension de ce fameux principe à l'optimisation non convexe et non différentiable, la différentiation des applications multivoques n'a pas échappé à cette règle. En effet, même si les premiers travaux en termes de dérivées d'applications multivoques remontent aux années 70, la notion de dérivée qui a fait école est celle de la dérivée contingente introduite par J. P. Aubin dans [6] en 1981, définie à partir du cône contingent au graphe d'une application donnée en un point fixé. Ce concept de dérivée étant basé sur la notion de tangente, il reste cohérent aux premières idées de dérivées dont les origines remontent jusqu'aux travaux de Pierre de Fermat au cours de la première moitié du XVII$^{\text{e}}$ siècle. Depuis son introduction, la dérivée contingente a été utilisée dans le cadre de la théorie des inclusions différentielles. Quelques années plus tard, elle a été utilisée dans [27, 60] pour développer des conditions d'optimalité pour des problèmes d'optimisation multivoque. Motivés par le développement d'une théorie adaptée à la résolution de ce genre de problèmes qui modélisent tant de situations, plusieurs auteurs se sont inspirés du concept de dérivée contingente pour introduire d'autres notions de dérivée en remplaçant le cône contingent par d'autres types de cônes et/ou les graphes des applications par les épigraphes correspondants. Ils ont ainsi développé toute une classe de dérivées dites graphiques pour les applications multivoques. Parmi ces nombreuses notions de dérivées figurent la dérivée radiale introduite dans [39] où le cône contingent est remplacé par le cône radial (nous rappelons que le cône radial d'un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ en un point $\bar{x} \in C$ noté $R(C, \bar{x})$ est le plus petit cône fermé contenant $(C - \bar{x})$). Mentionnons également l'épidérivée contingente (voir Définition 1.5.19) introduite dans [66], l'épidérivée de Clarke introduite dans [73] où le cône contingent de la définition ci-dessus mentionnée est remplacé par le cône tangent de Clarke (nous rappelons que le cône tangent de Clarke d'une partie A d'un espace normé Y en un point $\bar{x} \in A$ est l'ensemble $T(A, \bar{x}) = \{h \in Y \mid \forall x_n \to \bar{x} \text{ avec } (x_n) \subset A \text{ et } (t_n) \searrow 0, \exists\, h_n \to h \,;\, x_n + t_n h_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}$), pour ne citer que quelques unes des notions présentes dans la littérature.

Dans le cadre univoque, il est bien connu que des fonctions non différentiables peuvent être rencontrées même dans le traitement de problèmes avec données lisses. De ce fait, il n'est pas surprenant que de nombreuses notions de dérivées généralisées aient été introduites dans la littérature en vue de pallier le problème d'absence de dérivées au sens classique pour de telles fonctions. À ce sujet, en 1981 A. Ioffe a introduit dans [62] une classe d'objets constituée d'applications multivoques positivement homogènes à valeurs fermées appelées prédérivées, en vue d'explorer le comportement local de fonctions (univoques) non différentiables au sens usuel. Plus récemment, Pang a adapté ces derniers travaux dans [88] au cadre multivoque sous le nom de la T-différentiabilité. Depuis, ces concepts ont été utilisés dans divers contextes. En effet, M. H. Geoffroy et G. Pascaline ont étudié dans [46] leur stabilité par rapport à un certain type de convergence (convergence de Ficher). D'autre part, ces concepts ont été utilisés dans les publications [41, 89] pour établir des théorèmes de fonctions inverses et implicites alors qu'ils ont été utilisés dans [40] dans le cadre de la théorie des inclusions variationnelles. Dans le cadre de cette thèse, nous parlerons de la prédérivabilité au lieu de la T-différentiabilité, c'est-à-dire, nous choisissons d'adopter la terminologie de Ioffe au lieu de celle de Pang, bien que nos définitions correspondent à celles introduites par ce dernier.

Nos contributions dans les travaux de cette thèse s'inscrivent sur trois axes principaux. D'abord, nous allons nous intéresser à la question d'existence de prédérivées pour certaines classes d'applications multivoques. Ensuite, nous établissons des résultats s'inscrivant dans le cadre de la théorie de l'optimisation multivoque où notre apport sera constitué principalement de conditions d'optimalité et de résultats d'unicité. Enfin, nous présentons des résultats de stabilité de minimiseurs en optimisation multivoque. Le document s'articule en quatre chapitres organisés comme suit.

Dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires nécessaires à la compréhension de tout ce qui suit. Nous en profitons pour rappeler quelques concepts de dérivée existant dans la littérature pour les applications multivoques et quelques conditions d'optimalité formulées à partir de certains d'entre eux.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude de prédérivées d'applications multivoques. Plus précisément, nous établissons des résultats assurant l'existence de prédérivées pour des applications multivoques possédant certaines propriétés de convexité. Nous considérons successivement le cas particulier d'un processus convexe (Proposition 2.3.4), le cas général des applications convexes (Théorème 2.3.5) puis celui des applications cône-convexes (Théorème 2.3.6). De plus, nous donnons des expressions de prédérivées dans la plupart des cas considérés. Par ailleurs, il est important de souligner que l'expression proposée dans chacun de ces cas ne représente qu'une prédérivée de l'application considérée ; puisque, contrairement à la dérivée au sens classique, les prédérivées d'une application multivoque sont loin d'être uniques, quand elles existent.

Dans le Chapitre 3, nous utilisons les prédérivées et certains résultats présentés dans le précédent chapitre dans le cadre de la théorie de l'optimisation multivoque pour établir des conditions nécessaires (Théorème 3.2.1) et des conditions suffisantes (Théorèmes 3.2.4 et 3.3.6) d'optimalité. Parmi les divers résultats établis, nous pouvons mentionner une extension au cadre multivoque de la règle de Fermat (Proposition 3.3.5), l'une des plus anciennes conditions nécessaires d'optimalité de l'histoire de l'optimisation. D'autre part, sous des hypothèses appropriées, nous établissons des résultats d'unicité (Théorème 3.1.3) de minimiseurs pour certains problèmes d'optimisation multivoque. Puis, nous appliquons quelques uns de nos résultats à un modèle concret issu de la micro-économie.

Généralement, dans la théorie de l'optimisation vectorielle, on munit l'espace objectif d'un ordre partiel induit par un cône convexe non vide dont dépendent les différents concepts de solutions. Il est bien connu que dans de nombreuses situations, le cône positif offre un cadre de travail naturel. Et, sachant que l'optimisation vectorielle a ses racines en économie, ce n'est pas surprenant que les éléments minimaux (ou maximaux) faibles de Pareto attirent l'attention de nombreux mathématiciens travaillant dans ce domaine. Cependant, de tels éléments ne peuvent être définis que sous l'hypothèse de la non vacuité de l'intérieur du cône d'ordre. Malheureusement, les cônes positifs de nombreux espaces de dimension infinie (voire certains espaces de dimension finie) ne satisfont pas cette hypothèse. En vue d'étendre le champ d'application de certains résultats établis dans le Chapitre 3 et certains autres existant dans la littérature à de tels espaces, nous considérons au Chapitre 4 certains concepts d'intérieur généralisé présents dans la littérature, à savoir les notions d'intérieurs relatif (Définition 4.1.5), pseudo-relatif (Définition 4.1.6) et quasi-relatif (Définition 4.1.10) grâce auxquels, nous définissons dans un cadre unifié des concepts de solutions dits relaxés. Certainement, il existe dans la littérature quelques travaux dans lesquels ces différents concepts d'intérieur généralisé ont déjà été utilisés dans la théorie de l'optimisation multivoque (voir par exemple [14, 52]). Cependant, notre travail est très différent de ceux présentés dans les publications que nous avons pu repérer dans la littérature dans lesquels ces concepts ont été utilisés. D'une part, nous introduisons une topologie sur l'espace objectif pour laquelle l'intérieur relatif (resp. pseudo-relatif et quasi-relatif) du cône d'ordre sont des ouverts. De cette topologie découle un concept de convergence adapté à l'étude de la stabilité des éléments minimaux (ou maximaux) relaxés de sous-ensembles de l'espace de Banach Y. D'autre part, notre objectif est très différent de ceux poursuivis dans ces travaux. En effet, dans le chapitre en question, notre principal objectif est l'étude de la stabilité des minimiseurs dans le cadre de l'optimisation multivoque.

L'étude de la stabilité des solutions de certaines classes de problèmes est un sujet important dans diverses branches de mathématiques dont l'optimisation. Elle constitue une importante source de motivation pour l'introduction de plusieurs concepts de convergence variationnelle. Par exemple, la Γ-convergence a été introduite au cours des années 70 par E. De Giorgi et T. Franzoni dans [32] en vue de passer à la limite sur des problèmes de minimisation scalaire. Depuis, elle a été étendue et utilisée dans diverses situations liées à l'étude de stabilité (voir par exemple [4, 5, 31, 42, 75, 86, 87]). Ce concept joue un rôle fondamental dans la théorie de l'optimisation, le traitement de problèmes d'homogénéisation etc. En vue d'établir nos résultats de stabilité, nous introduisons deux concepts de convergence variationnelle dont une adaptation de la Γ-convergence en liaison avec la notion de convergence découlant de la topologie introduite sur l'espace objectif Y. À partir de ces concepts, nous établissons successivement la stabilité supérieure (voir le Théorème 4.4.4) et la stabilité inférieure (voir le Théorème 4.4.11) de minimiseurs relaxés lorsque les données d'une suite de problèmes d'optimisation multivoque (P_n) convergent dans un certain sens que nous aurons à préciser (dans la Section 4.4) vers les données correspondantes d'un problème (P).

Chapitre 1

Notions préliminaires.

Dans ce chapitre, nous recueillons d'abord les définitions et propriétés relatives aux applications multivoques dont nous aurons besoin dans le cadre de cette thèse. Ensuite, nous rappelons certains concepts de dérivée généralisée introduits dans la littérature pour ces applications. Nous en profitons pour aborder certains aspects (de l'existant) de la théorie de l'optimisation multivoque.

Pendant un certain temps, l'analyse multivoque avait été laissée de côté sous prétexte qu'il n'y avait pas de motivation réelle pour son développement en tant que discipline mathématique. Aujourd'hui, elle figure parmi les branches des mathématiques dont l'utilité tant d'un point de vue théorique que pratique est bien connue. D'ailleurs certaines avancées réalisées dans ce domaine ont été motivées par des questions provenant de diverses disciplines. Par exemple, la théorie des points fixes pour les applications multivoques a été largement motivée par la théorie des jeux lorsque J. V. Neumann a opté pour l'extension du théorème du point fixe de Brouwer à de telles applications. Parmi les nombreux domaines dans lesquels les outils de l'analyse multivoque sont utilisés, on peut citer le contrôle optimal [38], l'économie mathématique [3, 33], le calcul sous-différentiel [97, 98] et l'optimisation. Mentionnons également la théorie de la viabilité et du contrôle des systèmes dynamiques à partir des travaux de J. P. Aubin au cours des années 80 qui a des applications dans divers domaines dont le contrôl aérien. Ainsi, le champ d'application de l'analyse multivoque n'a pas cessé de s'élargir. Pour de plus amples motivations mathématiques concernant les applications multivoques, le lecteur pourra se référer aux monographies [10, 99]. Ces applications ayant permis de modéliser une multitude de problèmes issus de diverses disciplines, il n'est pas surprenant qu'un besoin pressant en termes de dérivée se fasse sentir.

En vue de répondre à ce besoin, de nombreux concepts de dérivée ont été introduits dans la littérature pour ces applications. Parmi lesquels on peut citer la codérivée introduite par B. S. Mordukhovich dans [79], la dérivée contingente introduite par J. P. Aubin dans [6] dont l'apparition au début des années 80 constitue un véritable déclic pour le développement de la théorie de la différentiation généralisée dans le cadre multivoque ; sans oublier les diverses notions de dérivée introduites dans ce cadre par J. P. Penot dans [90]. Depuis son introduction, le concept de dérivée contingente a été utilisé dans diverses situations. Parmi lesquelles, des formulations de conditions d'optimalité dans le cadre de la théorie de l'optimisation multivoque. Une théorie qui a des applications en psychologie (voir [16]) et la plupart des domaines faisant usage d'outils mathématiques. Avant d'entrer dans le vif de notre sujet en abordant la partie originale de cette thèse, il s'est avéré important de rappeler ces quelques notions de base qui seront utilisées par la suite.

1.1 Généralités sur les applications multivoques

La plupart des notations utilisées dans cette thèse sont standards, elles figurent néanmoins dans la rubrique **notations** (page vi du manuscrit).

Définition 1.1.1. *Etant donné deux ensembles E et G. Si à chaque élément x de E, on associe un sous-ensemble éventuellement vide de G noté $F(x)$, on définit une application multivoque F de E vers G. On note $F : E \rightrightarrows G$.*

Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multiapplications, multifonctions, relations ou correspondances.

Définition 1.1.2. *Soient E et G deux ensembles, $F : E \rightrightarrows G$ une application multivoque.*

(1) *On appelle domaine de F, l'ensemble* $\operatorname{dom} F := \{x \in E \mid F(x) \neq \emptyset\}$.

(2) *On appelle image de* F, *l'ensemble* $\operatorname{Im} F := \{y \in G \mid \exists x \in E \; ; \; y \in F(x)\}$.

(3) *On appelle image d'une partie* A *de* E *par* F *l'ensemble* $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$.

(4) *On appelle image réciproque d'une partie non vide* D *de* G *par* F *l'ensemble*

$$F^{-1}(D) := \{x \in E \mid F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

(5) *Le graphe de* F *est le sous-ensemble de* $E \times G$ *défini par*

$$\operatorname{gph} F := \{(x, y) \in E \times G \mid y \in F(x)\}.$$

(6) *L'inverse de l'application* F *est l'application* $F^{-1} : G \rightrightarrows E$ *telle que* $x \in F^{-1}(y)$ *si et seulement si* $y \in F(x)$.

Définition 1.1.3 (Produit de composition)**.** *On considère trois ensembles* E, G, D, *deux applications multivoques* $F : E \rightrightarrows G$ *et* $H : G \rightrightarrows D$. *Le produit de composition de* H *et* F *est l'application multivoque de* E *dans* D *définie par*

$$HoF(x) := \bigcup_{y \in F(x)} H(y).$$

Remarque 1.1.4. *Soient* E *et* G *deux espaces métriques,* $\mathcal{P}$ *est une propriété d'un sous-ensemble de* $E \times G$, *par exemple fermé, convexe, compact,... On dit qu'une application multivoque* F *de* E *vers* G *vérifie la propriété* $\mathcal{P}$ *si et seulement si son graphe la vérifie. Une application multivoque est donc caractérisée par son graphe. Par ailleurs, on dira que* F *est à valeurs convexes (resp. fermées, compactes,...) si pour tout élément* $x \in \operatorname{dom} F$, $F(x)$ *est un sous-ensemble convexe (resp. fermé, compact,...) de l'ensemble* G.

Définition 1.1.5. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque. On dit que* F *est localement fermée en un point* $(\bar{x}, \bar{y})$ *de son graphe, s'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\mathbb{B}_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \cap \operatorname{gph} F$ *soit fermé.*

Dans tout ce qui suit, sauf indication complémentaire, X et Y désignent deux espaces de Banach généraux sur le corps des nombres réels.

1.2 Continuité et propriétés de régularité d'applications multivoques

Dans le cadre univoque, la continuité d'une fonction f d'un espace métrique X dans un espace topologique Y, a fortiori d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y en un point $\bar{x} \in X$ peut être caractérisée de plusieurs façons différentes. En termes de voisinages, la fonction f est continue en $\bar{x}$ si et seulement si, pour tout voisinage V de $f(\bar{x})$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que $f(U) \subset V$. D'un point de vue séquentiel, elle est continue en $\bar{x}$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergeant vers $\bar{x}$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\bar{x})$.

Ces deux caractérisations sont donc équivalentes. Cependant, il a été remarqué dans [10] que dans le cadre multivoque on perd cette équivalence. En fait, une adaptation de la première ne permet de caractériser que la semi-continuité supérieure d'une application multivoque tandis qu'une adaptation de la seconde permet d'en caractériser la semi-continuité inférieure. Nous en rappelons ici les définitions.

Définition 1.2.1 (Semi-continuité supérieure). *On dit qu'une application $F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue supérieurement (scs) en un point $\bar{x}$ de son domaine si pour tout voisinage V de $F(\bar{x})$ il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x) \subset V$, pour tout $x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$.*

L'application F sera dite scs si elle l'est en chaque point de son domaine.

Définition 1.2.2 (Semi-continuité inférieure). *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-continue inférieurement (sci) en un point $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$, si pour tout $\bar{y} \in F(\bar{x})$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} F$ convergeant vers $\bar{x}$, il existe une suite d'éléments $y_n \in F(x_n)$ qui converge vers $\bar{y}$.*

On dira que F est sci si elle l'est en tout point de son domaine.

Une formulation équivalente de cette dernière définition est la suivante (voir par exemple [9, 10] pour les détails).

Définition 1.2.3. *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite sci en $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$, si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset Y$ tel que $F(\bar{x}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, il existe $\rho > 0$ tel que*

$$F(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset, \ \forall x \in B(\bar{x}, \rho).$$

Définition 1.2.4. *Une application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est dite continue en un point* $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$*, si elle est à la fois scs et sci en ce point. Elle sera dite continue si et seulement si elle l'est en chaque point de son domaine.*

Il existe dans la littérature d'autres notions de continuité pour les applications multivoques. Le lecteur intéressé par cette question pourra consulter entre autres [2, 29, 35, 67, 88, 99] pour les détails. Avant de rappeler la définition de l'une d'entre elles qui sera aussi utilisée dans cette thèse, il est important de faire un rappel concernant les limites inférieure et supérieure d'une application multivoque. Désormais, si $\bar{x}$ est un point d'un espace métrique (E, d), nous désignons par $\mathcal{V}_{\bar{x}}$ l'ensemble des voisinages de $\bar{x}$ dans E.

Définition 1.2.5. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque et* $\bar{x} \in X$.

(a) *On appelle limite inférieure de* F *en* $\bar{x}$*, l'ensemble*

$$\liminf_{x \to \bar{x}} F(x) := \{y \in Y \,|\, \forall V \in \mathcal{V}_y,\, \exists U \in \mathcal{V}_{\bar{x}} \;;\; \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\},\, F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

(b) *On appelle limite supérieure de* F *en* $\bar{x}$*, l'ensemble*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) := \{y \in Y | \, \forall V \in \mathcal{V}_y,\, \forall U \in \mathcal{V}_{\bar{x}},\, \exists x \in U \setminus \{\bar{x}\} \;;\; F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.2.6 (Semi-continuité intérieure et extérieure)**.** *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque et* $\bar{x} \in X$.

(a) *On dit que* F *est semi-continue extérieurement (osc) en* $\bar{x}$ *si,*

$$\limsup_{x \to \bar{x}} F(x) \subset F(\bar{x}).$$

(b) *Elle est dite semi-continue intérieurement (isc) en* $\bar{x}$ *si,*

$$F(\bar{x}) \subset \liminf_{x \to \bar{x}} F(x)$$

(c) *L'application* F *sera dite continue en* $\bar{x}$ *si elle est à la fois osc et isc en ce point.*

Il est naturel de se demander s'il existe une relation entre les Définitions 1.2.4 et 1.2.6. En fait, on sait grâce à [99] que la semi-continuité inférieure correspond à la semi-continuité intérieure, alors qu'en dehors d'hypothèse de compacité la semi-continuité extérieure n'entraîne pas la semi-continuité supérieure.

Les propriétés de type Lipschitz dont les origines remontent à quelques siècles ont joué depuis fort longtemps un rôle important dans plusieurs domaines dont les théories de la mesure et de l'existence de solutions pour des équations différentielles ordinaires. Aujourd'hui, il est bien connu qu'elles sont devenues incontournables en analyse variationnelle. De telles propriétés s'étendent du cadre univoque au cadre multivoque. Toutefois, pour passer de la version ponctuelle à la version ensembliste, on a besoin des notions d'excès et de distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer (dans un certain sens) l'écart entre deux ensembles.

Définition 1.2.7. *Dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, la distance d'un point $x \in X$ à un sous-ensemble A de X est donnée par*

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\|;\ a \in A\}.$$

Si A et B sont deux parties non vides de X, on appelle distance entre A et B le nombre

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\|;\ a \in A,\ b \in B\}.$$

On pose conventionnellement, $d(x, \emptyset) = +\infty$ et $d(\emptyset, B) = 0$ pour tout $B \neq \emptyset$.

Définition 1.2.8. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé X. On appelle excès de A sur B, la quantité*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

Avec les conventions $e(\emptyset, B) = 0$ si $B \neq \emptyset$ et $e(A, \emptyset) = +\infty$ pour tout A.
De façon équivalente, on peut écrire

$$e(A, B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 |\ A \subset B + \varepsilon \mathbb{B}_X\}.$$

Il est à noter qu'en général les quantités $e(A, B)$ et $e(B, A)$ sont différentes.

Définition 1.2.9. *On appelle distance de Pompeiu-Hausdorff entre deux parties A et B d'un espace vectoriel normé X, la quantité*

$$h(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

De façon équivalente, cette quantité peut être exprimée par

$$h(A,B) = \inf\{\varepsilon \geqslant 0 |\ A \subset B + \varepsilon \mathbb{B}_X \text{ et } B \subset A + \varepsilon \mathbb{B}_X\}.$$

Il faut noter que cette terminologie est trompeuse puisqu'en général, ni la distance entre deux ensembles ni la distance de Hausdorff ne sont des distances. Toutefois, cette dernière peut l'être, lorsque nous travaillons par exemple sur l'ensemble des parties bornées de X.

Définition 1.2.10 (Applications lipschitziennes)**.** *On dit qu'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est lipschitzienne relativement à un sous-ensemble non vide D de* dom F, *si elle est à valeurs fermées sur D et s'il existe une constante $\ell \geq 0$ telle que*

$$h(F(x), F(x')) \leq \ell \|x - x'\|,\ \forall x,\, x' \in D. \tag{1.1}$$

De manière équivalente,

$$F(x) \subset F(x') + \ell \|x - x'\| \mathbb{B}_Y,\ \forall x,\, x' \in D. \tag{1.2}$$

Dans la Définition 1.2.10, on dit aussi que F est ℓ-lipschitzienne sur D. L'application F sera dite lipschitzienne autour d'un point $\bar{x} \in X$, s'il existe une constante positive ℓ et un voisinage $U \subset \operatorname{dom} F$ de $\bar{x}$ tels qu'elle soit ℓ-lipschitzienne sur U. Lorsque F est univoque, cette définition coïncide avec la notion classique d'application lipschitzienne. Par ailleurs, on exige à F d'être à valeurs fermées puisqu'il est souhaitable que la continuité puisse en découler et une application multivoque continue est nécessairement à valeurs fermées. De plus, cette condition nous permet d'avoir l'équivalence entre les relations (1.1) et (1.2) ; pour les détails, on peut voir par exemple [35]. En outre, si dans la relation (1.2), on fixe $x' = \bar{x}$, on obtient la relation (1.3) qui caractérise une notion plus faible introduite par Robinson dans [95] en 1981 sous le concept d'*upper Lipschitz continuity.* Ce n'est qu'au cours de l'année 2007 que l'auteur l'a rebaptisée dans [96] en tant qu'*outer Lipschitz continuity.* Nous tenons à en rappeler la définition.

Définition 1.2.11. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite lipschitzienne extérieurement en un point $\bar{x} \in X$, s'il existe une constante positive ℓ et un voisinage U de $\bar{x}$ tels que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \ell\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in U. \tag{1.3}$$

La notion d'application multivoque lipschitzienne peut être rendue locale en se focalisant sur un voisinage d'un point de référence $(\bar{x}, \bar{y})$ du graphe de l'application. Dans ce cas, on dit qu'elle possède la propriété d'Aubin ou qu'elle est pseudo-lipschitzienne ou encore qu'elle est Lipschitz-Like autour de ce point. Cette notion a été introduite par Jean Pierre Aubin dans [7, 8] au début des années 80. Depuis, elle a été intensément utilisée dans les théories de l'analyse multivoque et des inclusions variationnelles par divers auteurs et de nombreux résultats établis dans ces cadres dépendent de ce concept dont nous rappelons la définition.

Définition 1.2.12 (Application pseudo-lipschitzienne)**.** *On dit qu'une application $F : X \rightrightarrows Y$ est pseudo-lipschitzienne en $\bar{x} \in X$ pour $\bar{y} \in Y$ avec $\bar{y} \in F(\bar{x})$, s'il existe une constante $\ell \geq 0$, $U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}$ et $V \in \mathcal{V}_{\bar{y}}$ tels que*

$$e(F(x) \cap V, F(x')) \leq \ell\|x - x'\|, \ \forall x, \, x' \in U \ ; \tag{1.4}$$

de façon équivalente

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \ell\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, \, x' \in U. \tag{1.5}$$

L'infimum des valeurs de ℓ pour lesquelles on a l'existence des voisinages U et V tels que ceci soit vrai est le module de Lipschitz de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$; il est noté $\mathrm{lip}(F; \bar{x}|\bar{y})$. *On dira que F ne possède pas cette propriété en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement si* $\mathrm{lip}(F; \bar{x}|\bar{y}) = +\infty$.

Lorsqu'une application F est pseudo-lipschitzienne de module ℓ, on dit aussi qu'elle est ℓ-pseudo-lipschitzienne. Par ailleurs, si dans la relation (1.5) on fixe $x' = \bar{x}$, on obtient la relation (1.6) caractérisant une application multivoque dite calme dont la définition s'énonce comme suit :

Définition 1.2.13 (Application calme)**.** *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite calme en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$, s'il existe une constante $\kappa \geq 0$, $U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}$ et $V \in \mathcal{V}_{\bar{y}}$ tels que*

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + \kappa\|x - \bar{x}\| I\!B_Y, \ \forall x \in U. \tag{1.6}$$

L'infimum des valeurs de κ pour lesquelles on a l'existence de tels voisinages vérifiant cette inclusion est le module du caractère calme de F. Il est noté $\operatorname{clm}(F; \bar{x}|\bar{y})$.

Définition 1.2.14 (Régularité métrique)**.** *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ avec* $\operatorname{dom} F \neq \emptyset$ *est dite métriquement régulière en $\bar{x} \in X$ pour $\bar{y} \in Y$ si $\bar{y} \in F(\bar{x})$, il existe $\kappa \geq 0$, $U \in \mathcal{V}_{\bar{x}}$ et $V \in \mathcal{V}_{\bar{y}}$ tels que*

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \kappa d(y, F(x)), \ \forall (x, y) \in U \times V.$$

L'infimum des valeurs de κ pour lesquelles on a l'existence de tels voisinages est appelé module de régularité métrique de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. On le note $\operatorname{reg}(F; \bar{x}|\bar{y})$. *L'absence de régularité métrique de l'application F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ est signalée par* $\operatorname{reg}(F; \bar{x}|\bar{y}) = +\infty$.

Il est important de noter qu'il existe dans la littérature plusieurs extensions du concept de régularité métrique dont la régularité métrique forte, la sous-régularité métrique, la sous-régularité métrique forte pour ne citer que quelques unes. Chacune d'elles est assocée à une application F, un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ et un module $\kappa \in [0, +\infty[$. Elles sont intensément utilisées notamment dans la théorie des inclusions variationnelles ; par exemple dans le cadre de la résolution de telles inclusions par la méthode de Newton. Le lecteur intéréssé par cette question pourra consulter entre autres [1, 23, 36, 40].

Définition 1.2.15. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite ouverte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $\bar{y} \in F(\bar{x})$ si $\bar{x} \in$* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$ *et pour tout voisinage U de $\bar{x}$, l'ensemble $F(U)$ est un voisinage de $\bar{y}$.*

Théorème 1.2.16. (Robinson-Ursescu, [35, Théorème 5B.4]). *Soit une application $F : X \rightrightarrows Y$ à graphe convexe fermé, $\bar{x} \in X$ et $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\bar{y} \in \operatorname{int}(\operatorname{Im} F)$,

(b) *F est ouverte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$,*

(c) *F est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.*

Le théorème suivant établit un lien entre la régularité métrique d'une application multivoque et la propriété d'Aubin de son inverse. On peut en trouver une preuve dans [35, page 165].

Théorème 1.2.17. *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est métriquement régulière en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ si et seulement si son inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ est pseudo-lipschitzienne en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$. De plus* $\operatorname{lip}(F^{-1}; \bar{y}|\bar{x}) = \operatorname{reg}(F; \bar{x}|\bar{y})$.

Si la régularité métrique d'une application $F : X \rightrightarrows Y$ en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ est équivalente au fait que son inverse F^{-1} soit pseudo-lipschitzienne en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$, il n'en demeure pas moins vrai que la sous-régularité métrique de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec un module κ soit équivalente au caractère calme de F^{-1} en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$ avec le même module. D'une manière générale, chacune des extensions de la notion de régularité métrique d'une application F est équivalente à une propriété de type Lipschitz de l'inverse de cette application. Pour les détails, nous invitons le lecteur à se référer à [34, 35, 80] et leurs références.

1.3 Convexité d'ensembles et d'applications multivoques

L'importance de la convexité en théorie mathématique est bien connue. Ce concept joue un rôle central dans la formulation de nombreux résultats très forts voire incontournables en analyse. Parmi ces résultats on peut citer les théorèmes de séparation et de projection, sans oublier son rôle en optimisation. Dans le cadre multivoque, de nombreuses notions de convexité existent dans la littérature (voir par exemple [51, 69, 74, 92]). Dans cette thèse, nous ne rappelons que celles qui seront utilisées par la suite.

Définition 1.3.1. *Soit Y un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.*

(a) *Soit S un sous-ensemble de Y et $\bar{x} \in S$. On dit que S est étoilé en $\bar{x}$ (ou par rapport à $\bar{x}$) si, pour tout $x \in S$*

$$\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x} \in S, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

(b) *On dit qu'un sous-ensemble C de Y est convexe si pour tous $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.*

(c) *On dit qu'un sous-ensemble non vide C de Y est un cône s'il est stable pour la multiplication par les scalaires positifs, i.e., $\lambda C \subset C$ pour tout $\lambda \geq 0$.*

(d) *Un cône C est dit pointé si $C \cap (-C) = \{0_Y\}$.*

(e) *Un cône convexe $C \subset Y$ est dit solide si $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$.*

La proposition suivante, bien connue en analyse convexe, permet de caractériser un cône convexe dans un espace vectoriel normé.

Proposition 1.3.2. *Soit Y un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un cône $C \subset Y$ est convexe si et seulement si $C + C \subset C$.*

Proposition 1.3.3. *Soit Y un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $C \subset Y$. Si C est un cône convexe alors $C + \mathrm{int}(C) \subset \mathrm{int}(C)$.*

Dans certaines de nos preuves, nous aurons besoin du résultat suivant, appelé dans la littérature *cancellation law* de Rådström. Un tel résultat a été établi au cours de l'année 1952 par Hans Rådström.

Lemme 1.3.4. ([94, lemme 1]). *Soient A, B et C trois ensembles donnés dans un espace vectoriel normé E. On suppose que B est convexe fermé, C est borné et $A + C \subset B + C$. Alors $A \subset B$.*

Les applications positivement homogènes jouent un rôle très important en analyse variationnelle, plus particulièrement dans la théorie de la différentiation généralisée dans le cadre multivoque où la plupart des notions de dérivée introduites le sont. De telles applications possèdent des propriétés intéressantes permettant à plusieurs auteurs de généraliser de nombreux résultats de l'analyse classique dont les théorèmes des fonctions inverses et implicites. Elles joueront un rôle essentiel dans les travaux de cette thèse.

Définition 1.3.5 (Application positivement homogène)**.** *Une application multivoque $H : X \rightrightarrows Y$ est dite positivement homogène si $0_Y \in H(0_X)$ et $H(\lambda x) = \lambda H(x)$, pour tous $x \in X$ et $\lambda > 0$.*

Proposition 1.3.6. (Caractérisation d'une application positivement homogène). *Une application multivoque $H : X \rightrightarrows Y$ est positivement homogène si et seulement si son graphe est un cône.*

Remarque 1.3.7. *Lorsqu'une application $H : X \rightrightarrows Y$ est positivement homogène, il en est de même de son inverse $H^{-1} : Y \rightrightarrows X$. Cela découle du fait que* gph H *et* gph H^{-1} *sont des cônes.*

La norme extérieure d'une application multivoque positivement homogène est une notion bien connue en analyse variationnelle. Nous en rappelons néanmoins la définition.

Définition 1.3.8. *Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une application positivement homogène. On définit la norme extérieure de H par*

$$\|H\|^+ = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{y \in H(x)} \|y\|;$$

avec la convention $\sup\limits_{y \in \emptyset} \|y\| = -\infty$.
Une façon équivalente de caractériser la norme extérieure est la suivante

$$\|H\|^+ = \inf\{\kappa \geq 0 |\, H(\mathbb{B}_X) \subset \kappa \mathbb{B}_Y\}.$$

Comme il a été mentionné par exemple dans [41], nous avons l'équivalence entre la condition $\|H\|^+ < \infty$ et l'existence d'une constante κ strictement positive telle que $H(x) \subset \kappa \|x\| \mathbb{B}_Y$, pour tout $x \in X$. Plus précisément nous avons, $\|H\|^+ \leq \kappa$ si et seulement si $H(x) \subset \kappa \|x\| \mathbb{B}_Y$, pour tout $x \in X$. Notons que malgré son appellation, l'application $\| \cdot \|^+$ ne définit pas une norme sur l'ensemble des applications multivoques positivement homogènes.

Définition 1.3.9 (Convexité d'applications multivoques)**.** *Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite convexe si pour tout x, $x' \in X$, et $\lambda \in [0, 1]$,*

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x'). \tag{1.7}$$

Lorsque F est convexe, il en est de même de son domaine et son image. D'autre part, l'application F étant caractérisée par son graphe, sa convexité est équivalente à celle de son inverse F^{-1}. Par ailleurs, si dans la relation (1.7) on fixe $x = \bar{x}$, on obtient la relation (1.8) caractérisant une application multivoque dite étoilée dont la définition est la suivante.

Définition 1.3.10. *On considère une application* $F : X \rightrightarrows Y$ *et* $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$. *On dit que* F *est étoilée en* $\bar{x}$ *(ou par rapport à* $\bar{x}$*) si, pour tout* $x \in X$ *et tout* $\lambda \in [0, 1]$,

$$(1 - \lambda)F(\bar{x}) + \lambda F(x) \subset F((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x). \tag{1.8}$$

Il est à noter que le domaine d'une application multivoque F étoilée en un point $\bar{x}$ l'est aussi en ce point et son image l'est en tout point $\bar{y} \in F(\bar{x})$.

Définition 1.3.11 (Processus convexe)**.** *Une application* $T : X \rightrightarrows Y$ *est appelée un processus convexe si elle est positivement homogène et vérifie*

$$F(x) + F(x') \subset F(x + x'),\ \forall x,\, x' \in X.$$

De façon équivalente, une application multivoque est un processus convexe si et seulement si son graphe est un cône convexe. Un processus convexe est donc une application multivoque convexe. Mais, la réciproque est fausse. Par ailleurs, les processus convexes fermés peuvent être considérés, dans le cadre multivoque, comme étant les homologues des applications linéaires continues dans le cadre univoque. Alors que les applications multivoques convexes correspondent aux fonctions affines dans le cadre univoque.

Définition 1.3.12 (Cône-convexité d'ensembles [102])**.** *On considère un cône convexe* $C \subset Y$. *Un sous-ensemble* A *de* Y *est dit* C*-convexe si* $A + C$ *est un ensemble convexe.*

Définition 1.3.13. (Cône-convexité d'applications multivoques). *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque et* $C \subset Y$ *un cône convexe non vide. On dit que* F *est* C*-convexe si, pour tous* $x,\, x' \in X$ *et* $\lambda \in [0, 1]$,

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C. \tag{1.9}$$

Lorsque $C = \{0_Y\}$ alors on retrouve la notion de convexité de la Définition 1.3.9 qui est plus forte. En outre, si F est une fonction univoque f, $Y = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}_+$ alors la Définition 1.3.13 conduit à l'inégalité : $(1-\lambda)f(x)+\lambda f(x')-f((1-\lambda)x+\lambda x') \geq 0$, pour tous x, $x' \in \mathrm{dom}\, f$ et tout $\lambda \in [0,1]$. D'où la cohérence de ce concept avec la définition classique d'une fonction convexe.

Définition 1.3.14. *On considère une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ et un cône convexe non vide $C \subset Y$. On dit que F est C-concave si, pour tout x, $x' \in X$ et tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$(1-\lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1-\lambda)x + \lambda x') - C.$$

Définition 1.3.15. (Ensemble C-fermé). *Soit $C \subset Y$ un cône convexe non vide. Un sous-ensemble A de Y est dit C-fermé si l'ensemble $A + \overline{C}$ est fermé.*

Lorsque $C = \{0_Y\}$ alors ce concept coïncide avec la notion classique d'un ensemble fermé.

1.4 Espace vectoriel normé partiellement ordonné

En optimisation scalaire, on utilise l'ordre dit naturel sur $\mathbb{R}$ comme outil de comparaison. Cependant, lorsque la fonction objectif (la fonction à maximiser ou minimiser) est à valeurs dans un espace vectoriel normé Y, on ne peut plus se servir d'un tel ordre puisque, s'il peut être l'utilisé pour comparer les normes de deux vecteurs, on ne peut pas en faire usage pour comparer les vecteurs eux-mêmes. Pour pallier ce problème, les mathématiciens sont obligés de mettre en place de nouvelles structures d'ordre partageant certaines propriétés avec celles connues sur l'ensemble des nombres réels.

D'un point de vue classique, une relation d'ordre sur un ensemble non vide E est une relation binaire (voir définition 1.4.1) $\mathcal{R}$ définie sur E qui est à la fois réflexive ($\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$), antisymétrique (si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$) et transitive (si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$). Elle est dite totale si pour tous $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$; dans le cas contraire, on dit qu'il s'agit d'un ordre partiel. En général, dans la théorie de l'optimisation vectorielle, on se sert de ce qu'on appelle un pré-ordre partiel, une relation binaire définie sur un espace vectoriel normé Y qui est réflexive, transitive et compatible avec la structure de l'espace vectoriel. Nous ne rappelons ici que la définition et les propriétés dont nous aurons besoin dans les travaux de cette thèse. Pour les détails et d'autres types d'ordre utilisés dans la théorie de l'optimisation multivoque, le lecteur pourra se référer à [21, 54, 60, 65, 70, 71, 101] et les références citées par leurs auteurs.

Définition 1.4.1. *Soit Y un espace vectoriel sur le corps des nombres réels. Une relation binaire sur Y est un sous-ensemble non vide $\mathcal{R}$ du produit cartésien $Y \times Y$. On dit qu'un élément $x \in Y$ est en relation avec un élément $y \in Y$ par rapport à $\mathcal{R}$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. On écrit aussi $x\mathcal{R}y$.*

Définition 1.4.2. *On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un espace vectoriel réel Y est un pré-ordre partiel sur cet espace, si elle vérifie les axiomes suivants :*

(1) $\forall x \in X,\ (x, x) \in \mathcal{R}$ *;*

(2) $\forall x, y, z \in Y$, *si* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *et* $(y, z) \in \mathcal{R}$ *alors* $(x, z) \in \mathcal{R}$ *;*

(3) $\forall x, y, u, v \in Y$, *si* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *et* $(u, v) \in \mathcal{R}$ *alors* $(x + u, y + v) \in \mathcal{R}$ *;*

(4) $\forall x, y \in Y$ *et* $\lambda \geq 0$, *si* $(x, y) \in \mathcal{R}$ *alors* $(\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{R}$.

Les deux premiers axiomes de la Définition 1.4.2 sont respectivement la réflexivité et la transitivité, alors que les deux derniers garantissent la compatibilité de la structure de l'ordre partiel avec celle de l'espace vectoriel. Dans la littérature, cette structure est aussi appelée (par abus de langage) un ordre partiel sur Y. Désormais, nous utilisons cette terminologie dans tout ce qui suit.

Définition 1.4.3. *Un ordre partiel $\mathcal{R}$ sur un espace vectoriel réel Y sera dit anti-symétrique s'il vérifie l'implication suivante, pour tout x, $y \in Y$:*

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y.$$

Définition 1.4.4. *Un espace vectoriel Y muni d'un ordre partiel $\mathcal{R}$ est dit partiellement ordonné.*

Théorème 1.4.5. [47, Théorème 2.1.13] *Soit Y un espace vectoriel et $C \subset Y$ un cône. Alors, la relation binaire $\leq_C := \{(x, y) \in Y \times Y \,|\, y - x \in C\}$ est réflexive, compatible avec la structure de l'espace Y. De plus, C est convexe si et seulement si la relation $\leq_C$ est transitive, et, respectivement, C est pointé si et seulement si $\leq_C$ est antisymétrique.*

Ainsi, la relation $\leq_C$ est un ordre partiel sur Y. Dans les pages qui suivent, nous dirons que l'espace vectoriel Y est partiellement ordonné par un cône convexe C pour signifier qu'il est muni de l'ordre partiel $\leq_C$ induit par C.

Définition 1.4.6. *Soit $F : D \rightrightarrows Y$ une application multivoque où D est un sous-ensemble non vide de X. On suppose que Y est partiellement ordoné par un cône convexe non vide $C \subset Y$. On appelle épigraphe de F (par rapport à C) l'ensemble*

$$\text{epi } F = \{(x, y) \in X \times Y \,|\, x \in D,\, y \in F(x) + C\}.$$

Lorsque F est une application univoque f, $Y = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}_+$ alors (x, y) appartient à l'épigraphe de f si, et seulement si $y \in f(x) + \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow f(x) \leq y$. On obtient ainsi la définition classique de l'épigraphe d'une application.

En analyse convexe, il est bien connu que la convexité d'une application est équivalente à celle de son épigraphe. La proposition suivante permet de caractériser la C-convexité d'une application multivoque à partir de la convexité de son épigraphe.

Proposition 1.4.7. *On suppose que Y est partiellement ordonné par un cône convexe $C \subset Y$. Soit D un sous-ensemble convexe de X et $F : D \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors F est C-convexe si et seulement si* epi F *est convexe.*

1.5 Quelques conditions d'optimalité en optimisation multivoque

La recherche de conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité constitue un aspect majeur de la théorie de l'optimisation. Ces conditions, suivant l'approche de l'auteur, les outils dont il se sert qui dépendent bien sûr du problème auquel il se tâche de proposer des éléments de solution, peuvent être formulées différemment. À ce jour, en optimisation multivoque, on dénombre trois approches principales : l'approche vectorielle, une extension de l'optimisation vectorielle ; l'approche ensembliste et celle basée sur la structure de treillis. Nous rappelons qu'un espace vectoriel ordonné est un treillis si le supremum et l'infimum de toute paire d'éléments de cet espace existent. Dans le cadre de cette thèse, nous allons nous intéresser à la première approche. Dans ce courant, en vue de définir les concepts de solution, on fait l'hypothèse que l'espace objectif est partiellement ordonné par un cône convexe non vide. Nous rappelons ici les définitions de certains de ces concepts. Pour les détails et d'autres concepts de solution existant dans la littérature, le lecteur pourra consulter entre autres [25, 27, 50, 65, 67, 108].

Définition 1.5.1. *Soit $(Y, \|.\|_Y)$ un espace vectoriel normé partiellement ordonné par un cône convexe $C \subset Y$, Ω un sous-ensemble non vide de Y et $\bar{y} \in \Omega$.*

(a) *On dit que l'élément $\bar{y}$ est un point fortement minimal (ou un point efficient idéal) de l'ensemble Ω si*

$$\Omega \subset \{\bar{y}\} + C. \tag{1.10}$$

De façon équivalente, $\bar{y} \leq_C y$, pour tout $y \in \Omega$.

(b) *On dit que l'élément $\bar{y}$ est un point minimal (de Pareto) de Ω si l'implication suivante est vérifiée :*

$$y \leq_C \bar{y} \text{ avec } y \in \Omega \Longrightarrow \bar{y} \leq_C y.$$

Cette implication est équivalente à la condition :

$$(\{\bar{y}\} - C) \cap \Omega \subset \{\bar{y}\} + C \tag{1.11}$$

(c) *Si C est solide, on dit que l'élément $\bar{y}$ est un point faiblement minimal (ou faiblement efficient) de l'ensemble Ω si*

$$(\{\bar{y}\} - \operatorname{int}(C)) \cap \Omega = \emptyset. \tag{1.12}$$

Remarque 1.5.2. *Si le cône C est pointé alors l'inclusion* (1.11) *donne*

$$(\{\bar{y}\} - C) \cap \Omega = \{\bar{y}\}. \tag{1.13}$$

En outre, nous pouvons observer aussi que la condition (1.13) *est équivalente à l'assertion suivante :*

$$(\Omega - \bar{y}) \cap (-C) = \{0_Y\}.$$

Remarque 1.5.3. *Il est important de souligner qu'en remplaçant C par $-C$ dans la Définition 1.5.1, on obtient les éléments maximaux correspondants.*

Ces différents concepts de solution ayant été définis, nous pouvons maintenant introduire quelques notions de minimiseurs d'un problème de minimisation multivoque qui seront utilisées par la suite. Nous posons d'abord quelques hypothèses de base.

Hypothèse 1.5.4. *On suppose que Y est partiellement ordonné par un cône convexe $C \subsetneq Y$ tel que* $\text{int}(C) \neq \emptyset$. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque telle que* $\text{dom}\, F \neq \emptyset$.

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\text{P}) \ : \begin{cases} \text{Minimiser } \ F(x) \\ \text{tel que } \quad x \in D, \end{cases} \tag{1.14}$$

où F est appelée fonction objectif (ou fonction coût) ; D est un sous-ensemble non vide de $\text{dom}\, F$ appelé ensemble-contrainte et Y est appelé espace objectif du problème (P). Comme F est une application multivoque, il s'agit d'un problème d'optimisation multivoque. Résoudre ce problème consiste à déterminer tous les vecteurs $\bar{x} \in D$ pour lesquels il existe $\bar{y} \in F(\bar{x})$ tel que $\bar{y}$ soit un élément minimal de l'ensemble $F(D)$.

Définition 1.5.5 (Minimiseur faible du problème (P))**.** *On considère un couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}\, F \cap (D \times Y)$.

(a) *Le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est appelé un minimiseur faible du problème* (P) *si $\bar{y}$ est un élément faiblement minimal de l'ensemble $F(D)$, c'est-à-dire*

$$(\{\bar{y}\} - \text{int}(C)) \cap F(D) = \emptyset.$$

(b) *Il est appelé un minimiseur faible local du problème* (P)*, s'il existe un voisinage $U \subset D$ de $\bar{x}$ tel que $\bar{y}$ soit un émément minimal faible de $F(U)$, i.e.,*

$$(\{\bar{y}\} - \text{int}(C)) \cap F(U) = \emptyset.$$

Définition 1.5.6 (Minimiseur de Pareto du problème (P)). *On dit que le couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ *est un minimiseur de Pareto du problème* (P) *si* $\bar{y}$ *est un point minimal de Pareto de l'ensemble* $F(D)$.

Définition 1.5.7 (Minimiseur fort du problème (P)). *Soit* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$.

(a) *Le couple* $(\bar{x}, \bar{y})$ *est appelé un minimiseur fort du problème* (P) *si* $\bar{y}$ *est un point minimal fort de l'ensemble* $F(D)$. *En d'autres termes,*

$$F(D) \subset \{\bar{y}\} + C.$$

(b) *Il est appelé un minimiseur fort local du problème* (P), *s'il existe un voisinage* $U \subset D$ *de* $\bar{x}$ *tel que*

$$F(U) \subset \{\bar{y}\} + C.$$

En 1988, H. W. Corley a étudié dans [27] le problème de maximisation multivoque suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } F(x), \\ \text{tel que} \quad x \in A, \end{cases} \tag{1.15}$$

dans lequel F est une application multivoque d'un espace vectoriel normé réel X vers un espace vectoriel normé réel Y partiellement ordonné par un cône convexe propre pointé K tel que $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Résoudre ce problème revient à trouver les éléments $\bar{x} \in A$ pour lesquels il existe $\bar{y} \in F(\bar{x})$ tel que $\bar{y}$ soit un point maximal de l'ensemble $F(A)$. Lorsque $\bar{y} \in F(\bar{x})$ est un élément maximal (resp. maximal faible) de $F(A)$, on dit que $\bar{x}$ est un point maximal (resp. maximal faible) en $\bar{y}$ pour le problème (1.15).

Pour établir des conditions d'optimalité relatives à ce problème, l'auteur a utilisé des notions de dérivée définies à partir des cônes tangent (ou cône tangent de Clarke) et contingent (ou cône contingent de Bouligand) dont nous ne rappelons que les définitions (pour les détails, voir par exemple [6, 9, 24, 61]).

Définition 1.5.8 (Cône contingent). *Soit* B *un sous-ensemble non vide de* Y, $\bar{y} \in \overline{B}$. *Un vecteur* $h \in Y$ *est dit tangent à* B *en* $\bar{y}$ *s'il existe* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ *convergeant vers* $\bar{y}$ *et* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ *telles que* $h = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y_n - \bar{y})$. *L'ensemble noté* $S(B, \bar{y})$ *de tous les vecteurs de* Y *tangents à* B *en* $\bar{y}$ *est appelé cône contingent à* B *en* $\bar{y}$.

Définition 1.5.9 (Cône tangent). *On dit qu'un vecteur* y *appartient au cône tangent à* B *en* $\bar{y}$ *noté* $T(B,\bar{y})$ *si et seulement si, pour toute suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ *convergeant vers* $\bar{y}$ *et toute suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ *convergeant vers 0, il existe une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ *convergeant vers* y *telle que* $y_n + \lambda_n v_n \in B,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.5.10 (Dérivée contingente). *La dérivée contingente de l'application multivoque* F *en* $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ *est l'application multivoque* $CF(\bar{x},\bar{y}) : X \rightrightarrows Y$ *dont le graphe est le cône contingent à celui de* F *en* $(\bar{x},\bar{y})$.

Définition 1.5.11. *On appelle dérivée de* $F : X \rightrightarrows Y$ *en* $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$*, l'application multivoque* $DF(\bar{x},\bar{y}) : X \rightrightarrows Y$ *dont le graphe est le cône tangent à celui de* F *en* $(\bar{x},\bar{y})$.

H. W. Corley a introduit aussi le concept de dérivée contingente K-directionnelle notée $C_K F(\bar{x},\bar{y})$ de $F : X \rightrightarrows Y$ en un point $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ comme étant la dérivée contingente de l'application multivoque $F - K$ en ce point et le concept de dérivée K-directionnelle de F en $(\bar{x},\bar{y})$, notée $D_K F(\bar{x},\bar{y})$, l'application multivoque dont le graphe est le cône tangent à celui de l'application $F - K$ au point $(\bar{x},\bar{y})$. Ensuite, en désignant par F_A la restriction de F à A, ce dernier a formulé les conditions d'optimalité suivantes pour le problème d'optimisation (1.15).

Théorème 1.5.12 (Théorème 4.1, conditions nécessaires de maximalité). *Si* $\bar{x}$ *est un point maximal en* $\bar{y}$ *pour le problème* (*1.15*)*, alors*

(a) $CF_A(\bar{x},\bar{y})(x) \cap \operatorname{int}(K) = \emptyset,\ \forall x \in A$.

(b) $DF_A(\bar{x},\bar{y})(x) \cap \operatorname{int}(K) = \emptyset,\ \forall x \in A$.

Sous une hypothèse de K-concavité sur l'application F, en utilisant la notion de dérivée K-directionnelle introduite, l'auteur a établi les conditions suffisantes d'optimalité qui suivent :

Théorème 1.5.13. ([27, Théorème 4.2], conditions suffisantes de maximalité). *On suppose que* F *est* K*-concave sur l'ensemble* $A \subset \operatorname{dom} F$ *avec* A *convexe.*

(a) *Si* $K \cap D_K F(\bar{x},\bar{y})(x - \bar{x}) = \{0_Y\},\ \forall x \in A$*, alors* $\bar{x}$ *est un point maximal en* $\bar{y}$ *pour* (1.15).

(b) *Si* $\operatorname{int}(K)\cap D_K F(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})=\emptyset$*,* $\forall x\in A$*, alors* $\bar{x}$ *est un point maximal faible en* $\bar{y}$ *pour* (1.15).

Une condition nécessaire et une condition suffisante de maximalité relatives au problème (1.15) sont ensuite énoncées dans [27]. Avant d'en faire la transcription, il nous paraît important de rappeler les notions suivantes.

Soit Y^* le dual topologique de Y, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur Y. On définit le cône dual positif K^+ de K par :

$$K^+ := \{l \in Y^* \,|\, l(y) \geq 0,\ \forall y \in K\}.$$

Un élément $l \in K^+$ est dit défini positif si $l(y) > 0$, $\forall y \in \operatorname{int}(K)$. Il est dit strictement positif si cette inégalité est vraie pour tout y élément de $K \setminus \{0_Y\}$. Par ailleurs, l'écriture $lF(x) \leq 0$ signifie que $l(y) \leq 0$ pour tout $y \in F(x)$.

Théorème 1.5.14 (Condition nécessaire et condition suffisante de maximalité)**.**

(a) *Si* $\bar{x}$ *est un point maximal (faible) en* $\bar{y}$ *pour le problème* (1.15)*, alors il existe un élément* $l \in K^+$ *défini positif tel que* $lDF(\bar{x},\bar{y})(\bar{x}) \leq 0$.

(b) *On suppose que* F *est* K*-concave sur l'ensemble* $A \subset \operatorname{dom} F$*. S'il existe un élément strictement positif* $l \in K^+$ *tel que* $lD_K F(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) \leq 0$*, pour tout* $x \in A$*, alors* $\bar{x}$ *est un point maximal (faible) pour le problème* (1.15).

On peut noter que l'inégalité de l'assertion (a) peut être traduite par la condition suivante : $DF(\bar{x},\bar{y})(\bar{x}) \cap \operatorname{int}(K) = \emptyset$. Alors que celle de l'assertion (b) peut être exprimée par la condition, $D_K F(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) \cap (K \setminus \{0_Y\}) = \emptyset$, pour tout $x \in A$.

Parallèlement, Dinh The Luc a mené dans [61] des études sur deux types de problèmes de minimisation multivoque dont le problème (P) dans le cas où $D = X$. Dans les formulations des conditions d'optimalité, les principaux outils utilisés par l'auteur sont la dérivée contingente, une notion de compacité faisant intervenir des suites de points du graphe de l'application F introduite par Jean-Paul Penot en 1984 dans [90] et des concepts de semi-différentiabilité dont nous rappelons les défintions.

Définition 1.5.15. *On dit qu'une application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est compacte en* $\bar{x} \in \overline{\operatorname{dom} F}$ *si toute suite* $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{gph} F$ *telle que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\bar{x}$ *possède une sous-suite qui converge dans* $\operatorname{gph} F$*. Si ceci est vrai en tout point* $x \in A \subset \operatorname{dom} F$*, on dit dira que* F *est compacte sur* A*.*

Définition 1.5.16 (Semi-différentiabilité inférieure). *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-différentiable inférieurement en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$, si pour toute suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{gph} F$ telle que (x_n) converge vers $\bar{x}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ telles que $t_n(x_n - \bar{x})$ converge vers un certain élément $u \in X$, il existe une sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $y_{\varphi(n)} \in F(x_{\varphi(n)})$ telle que la suite $t_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)} - \bar{y})$ soit convergente.*

Définition 1.5.17 (Semi-différentiabilité supérieure). *Une application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-différentiable supérieurement en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ si pour toute suite non constante $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{gph} F$ convergeant vers $(\bar{x}, \bar{y})$, il existe $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que la suite $(t_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)} - \bar{x}, y_{\varphi(n)} - \bar{y}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur non nul de $X \times Y$.*

En faisant l'hypothèse que le cône convexe C est fermé et pointé, l'auteur a établi entre autres résultats, les conditions d'optimalité suivantes :

Théorème 1.5.18 ([61], conditions nécessaire et suffisante d'optimalité). *Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un point du graphe de l'application F.*

(1) *Si un élément $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible local du problème* (P), *alors $CF(\bar{x}, \bar{y})(u) \cap (-\operatorname{int}(C)) = \emptyset,\ \forall u \in X$.*

(2) *Inversement, si $\bar{y}$ est un point efficient de $F(\bar{x})$ et les conditions suivantes sont satisfaites :*

  (i) $CF(\bar{x}, \bar{y})(u) \cap (-C) = \emptyset,\ \forall u \in \operatorname{dom}\ CF(\bar{x}, \bar{y}) \setminus \{0_X\}$,

  (ii) $CF(\bar{x}, \bar{y})(0_X) \cap (-C) = \{0_Y\}$,

  (iii) *F est compacte en $\bar{x}$, semi-différentiable supérieurement en $(\bar{x}, \bar{y})$,*

  alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur local du problème (P).

Bien que la dérivée contingente soit une extension naturelle au cadre multivoque de la dérivée de Fréchet, à la lumière des travaux de Corley et Luc, plusieurs auteurs ont pu remarquer que les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité formulées à partir de cette notion de dérivée ne coïncident pas sous des hypothèses standards ; par exemple, sous des hypothèses de convexité. En vue de pallier ce problème, J. Jahn et R. Rauh ont introduit dans [66] le concept d'épidérivée contingente pour les applications multivoques. Il s'agit d'une adaptation au cadre multivoque d'un concept introduit par Aubin et Frakowska dans [10] pour des fonctions à valeurs réelles. Nous en présentons la définition, pour les détails le lecteur est invité à consulter [65, 66].

Définition 1.5.19 (Épidérivée contingente)**.** *Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel normé réel X, Y un espace vectoriel normé réel partiellement ordonné par un cône convexe non vide C et $F : S \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On appelle épidérivée contingente de F en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$, l'application univoque $\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y}) : X \to Y$ dont l'épigraphe est égal au cône contingent à l'épigraphe de F au point $(\bar{x}, \bar{y})$.*

Comme il a été mentionné dans [66], il y a deux différences majeures entre la dérivée contingente et l'épidérivée contingente d'une appplication $F : X \rightrightarrows Y$ en un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$. D'une part, la première est multivoque alors que la seconde est univoque. D'autre part, le graphe de la dérivée contingente en $(\bar{x}, \bar{y})$ est égal au cône contingent à celui de F en ce point tandis que, dans le cas de l'épidérivée contingente les graphes sont remplacés par les épigraphes correspondants. L'introduction de ce concept ayant été motivée par la théorie de l'optimisation multivoque, il est donc naturel qu'il soit utilisé dans des formulations de conditions d'optimalité dont nous rappelons quelques unes. Pour les détails, le lecteur pourra se référer à [65, 66].

Théorème 1.5.20. ([66, Théorème 7], Condition nécessaire de minimalité). *On suppose que les hypothèses* (1.5.4) *sont satisfaites. Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible du problème* (P) *et si l'épidérivée contingente $\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})$ existe alors*

$$\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \notin (-\text{int}(C)), \ \forall x \in D. \tag{1.16}$$

Sous des hypothèses de convexité, cette condition nécessaire devient suffisante. Elle s'énonce comme suit :

Théorème 1.5.21. ([66, Théorème 8], Condition suffisante de minimalité). *On suppose D convexe et F C-convexe. Si l'épidérivée contingente $\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})$ existe en $(\bar{x}, \bar{y})$ avec $\bar{x} \in D$, $\bar{y} \in F(\bar{x})$ et si $\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \notin (-\text{int}(C))$ pour tout $x \in D$, alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible du problème* (P).

Lorsque $F = f$ est une fonction univoque, $Y = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}_+$, alors les résultats des Théorèmes (1.5.20) et (1.5.21) correspondent respectivement aux assertions (a) et (b) du théorème classique suivant :

Théorème 1.5.22. *Soit X un espace vectoriel normé, D un sous-ensemble non vide de X et $f : D \to \mathbb{R}$ une application.*

(a) *Soit $\bar{x}$ un minimum de f sur D. Si f admet une dérivée directionnelle en $\bar{x}$ dans toute direction $(x - \bar{x})$, $\forall x \in D$, alors*

$$f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0, \ \forall x \in D. \tag{1.17}$$

(b) *On suppose que D et f sont convexes. Si f admet en un point $\bar{x} \in D$ une dérivée directionnelle dans toute direction $(x - \bar{x})$, pour tout $x \in D$ et si l'inégalité* (1.17) *est satisfaite, alors $\bar{x}$ est un minimum de f sur D.*

En renforçant les hypothèses sur le cône convexe C, Jahn et Rauh ont établi une caractérisation d'un minimiseur fort $(\bar{x}, \bar{y})$ du problème (P) à l'aide de l'épidérivée contingente de la fonction objectif F au point considéré. Un résultat que nous présentons dans le théorème suivant :

Théorème 1.5.23. *On suppose que D est convexe, C est fermé, F est C-convexe et l'épidérivée contingente $\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})$ existe en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème* (P) *si, et seulement si*

$$\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) \in C, \ \forall x \in D. \tag{1.18}$$

À la lumière des Théorèmes 1.5.20, 1.5.21 et 1.5.23, nous constatons que la notion d'épidérivée contingente a permis d'unifier les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité sous des hypothèses de convexité. Cependant, il a été mentionné, par exemple, dans [22, 100] que l'existence de cette notion de dérivée reste une question ouverte. En vue de résoudre ce problème, G. Y. Chen et J. Jahn ont introduit dans [22], la notion d'épidérivée contingente généralisée dont l'existence est garantie sous des hypothèses réalistes. Par la suite, ils l'ont utilisée pour établir des conditions d'optimalité pour le problème (P). Le lecteur intéressé par ce concept pourra consulter [22, 65]. Il est important de souligner que plusieurs autres auteurs ont aussi travaillé dans ce domaine. Par exemple T. Q. Bao et B. S. Mordukhovich ont établi dans [13, 15] des conditions d'optimalité pour ce type de problème en termes de codérivée.

Les principales définitions et propriétés relatives aux applications multivoques ayant été recueillies, les différents concepts de solutions de problèmes d'optimisation multivoque dont nous aurons besoin ayant été rappelés ; nous pouvons maintenant aborder le concept de prédérivées d'applications multivoques, ce que nous faisons dans le chapitre qui suit.

Chapitre 2

Prédérivées d'applications multivoques

Depuis les années 70, parallèlement au développement de l'analyse non lisse motivé principalement par théorie du contrôle et la programmation non linéaire, la théorie de la différentiation généralisée dans le cadre multivoque progresse sans cesse. En effet, au cours de cette décennie, H. T. Banks et M. Q. Jacobs ont introduit dans [12] le concept de π-différentiabilité pour les applications multivoques. Quelques temps après, F.S. De Blasi a introduit dans [30] plusieurs concepts de différentiabilité pour des applications multivoques à valeurs bornées où les dérivées appelées différentielles multivoques, sont des applications positivement homogènes, semi-continues supérieurement, à valeurs convexes (fermées) bornées et non vides. Depuis, de nombreuses notions de dérivée abondent dans la littérature pour de telles applications. On peut citer à titre d'exemples : la codérivée [79], la dérivée contingente [6], la différentiabilité stricte introduite par D. Azé dans [11], l'épidérivée contingente [66], l'épidérivée contingente généralisée [22], les divers concepts de différentiablité introduits par K. Nachi et J. P. Penot dans [84], la différentiabilité de Fréchet pour les applications multivoques introduite par V. V. Gorokhovik et P. P. Zabreiko dans [48] ; une liste qui est certainement très loin d'être exhaustive.

L'étude du comportement local de fonctions est l'une des démarches fondamentales en analyse mathématique. Elle constitue l'une des principales sources de motivation pour la conception de la notion de dérivée au cours de la première moitié du XVII^{e} siècle. Une motivation qui se prolonge jusqu'au développement de la théorie de la différentiation généralisée. C'est d'ailleurs ce qui a conduit A. D. Ioffe à introduire dans [62] les concepts de prédérivées extérieure, intérieure et stricte pour des fonctions univoques non différentiables au sens usuel. Poursuivant le même objectif, ces derniers concepts ont été adaptés au cadre multivoque par C. H. J. Pang dans la publication [88] en tant que T-différentiabilité extérieure, intérieure et stricte respectivement. Il est important de souligner qu'à l'instar du concept lipschitzien, en se focalisant sur un voisinage d'un point de référence du graphe de l'application que l'on veut approcher, des versions localisées de ces concepts ont aussi été introduites dans la littérature (voir Définition 2.1.9). Comme nous l'avons déjà mentionné, depuis l'introduction de ces concepts de dérivée généralisée pour les applications multivoques, ils ont été utilisés dans divers travaux et ont permis d'établir de nombreux résultats.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à ces notions. Néanmoins, bien que les dérivées généralisées que nous allons étudier correspondent à celles introduites par Pang, nous choisissons d'utiliser la terminologie de Ioffe, c'est-à-dire, nous parlerons systématiquement de prédérivabilité au lieu de T-différentiabilité. Nous en profitons pour aborder la question de l'existence des prédérivées. Une attention particulière sera accordée aux applications multivoques possédant certaines propriétés de convexité. Nous voudrions signaler que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont issus de la publication [43]. Avant de rappeler la notion de prédérivabilité d'une application multivoque qui constituera d'ailleurs la toile de fond de cette thèse, nous tenons à rappeler la définition suivante présentant les notions de prédérivée de fonctions introduites par Ioffe.

2.1 Premières définitions

Dans les pages qui suivent, $\mathcal{H}(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications multivoques positivement homogènes de X vers Y.

Définition 2.1.1 ([62, Définition 9.1]). *Soit f une application univoque définie sur* *un voisinage de $\bar{x} \in X$, à valeurs dans Y ; $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ à valeurs fermées. On considère les relations :*

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) \in H(h) + r(h)\|h\|\mathbb{B}_Y \; ; \tag{2.1}$$

$$H(h) \subset \bigcup_{0<t<1} t^{-1}(f(\bar{x}+th) - f(\bar{x})) + r(h)\|h\|\mathbb{B}_Y \; ; \tag{2.2}$$

où $r : X \to \mathbb{R}_+$ est une fonction définie sur un voisinage de 0.

(a) *On dit que H est une prédérivée extérieure de f en $\bar{x}$ si la relation (2.1) est satisfaite avec $r(h) \to 0$ lorsque $\|h\| \to 0$.*

(b) *On dit que H est une prédérivée intérieure de f en $\bar{x}$ si la relation (2.2) est satisfaite avec $r(h) \to 0$ lorsque $\|h\| \to 0$.*

(c) *On dit que H est une prédérivée de f en $\bar{x}$ si elle est à la fois une prédérivée intérieure et extérieure de f en ce point.*

(d) *On dit que l'application H est une prédérivée stricte de f en $\bar{x}$ si*

$$f(x+h) - f(x) \in H(h) + r(x,h)\|h\|\mathbb{B}_Y, \tag{2.3}$$

avec $r(x,h) \to 0$ lorsque $\|x-\bar{x}\| \to 0$ et $\|h\| \to 0$; où $r : X \times X \to \mathbb{R}_+$.

Avant de présenter les différents concepts de prédérivées que nous étudierons dans le cadre de cette thèse, vue la similitude existant entre eux et certaines notions introduites dans [84] par K. Nachi et J. P. Penot ; particulièrement entre les notions de pseudo-différentiabilité et pseudo-prédérivabilité ainsi que les concepts de péridifférentiabilité et prédérivabilité stricte, nous tenons à rappeler brièvement quelques uns de ces concepts. Dans ce paragraphe, nous désignons par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X vers Y.

Définition 2.1.2. *On considère une partie ouverte X_0 de X et une application multivoque $F : X_0 \rightrightarrows Y$.*

(a) *On dit que l'application F est différentiable (au sens de Nachi et Penot) en un point $\bar{x} \in X_0$ si elle est sci en $\bar{x}$ et s'il existe $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, une application $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ continue en 0 avec $\mu(0) = 0$ telles que*

$$F(\bar{x}+h) \subset F(\bar{x}) + A(h) + \mu(\|h\|)\|h\|\mathbb{B}_Y. \tag{2.4}$$

L'application A est appelée dérivée de F en $\bar{x}$.

(b) *On dit que F est pseudo-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ si elle est sci en ce point et s'il existe un voisinage V de $\bar{y}$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et une application $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ continue en 0 avec $\mu(0) = 0$ telles que*

$$F(\bar{x} + h) \cap V \subset F(\bar{x}) + A(h) + \mu(\|h\|)\|h\|\mathbb{B}_Y. \tag{2.5}$$

Définition 2.1.3 (Quasi-différentiabilité)**.** *Soit X_0 un sous-ensemble ouvert de X. Une application $F : X_0 \rightrightarrows Y$ est dite quasi-différentiable en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ avec une dérivée $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, si elle est sci en ce point et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$, $\delta > 0$ dépendant de ε tels que*

$$F(\bar{x} + h) \cap \mathbb{B}_\beta(\bar{y}) \subset F(\bar{x}) + A(h) + \varepsilon\|h\|\mathbb{B}_Y, \ \forall h \in \delta\mathbb{B}_X. \tag{2.6}$$

Définition 2.1.4. (Pseudo-péridifférentiabilité et péridifférentiabilité). *Soit X_0 un sous-ensemble ouvert de X, V une partie de Y et $F : X_0 \rightrightarrows Y$ une application multivoque.*

(a) *L'application F est dite pseudo-péridifférentiable en un point $\bar{x} \in X_0$ par rapport à V, s'il existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant*

$$F(x) \cap V - A(x) \subset F(x') - A(x') + \varepsilon\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.7}$$

(b) *L'application F sera dite pseudo-péridifférentiable en un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ s'il existe un voisinage V de $\bar{y}$ tel que F soit pseudo-péridifférentable en $\bar{x}$ par rapport à V.*

(c) *Elle sera dite péridifférentiable en $\bar{x} \in X_0$, si elle est pseudo-péridifférentiable par rapport à Y, c'est-à-dire, s'il existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ vérifiant*

$$F(x) - A(x) \subset F(x') - A(x') + \varepsilon\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.8}$$

Remarque 2.1.5. *Dans la Définition 2.1.2, nous avons $\mu(\|h\|)$ qui tend vers 0 lorsque $\|h\|$ tend vers 0 ; cela signifie que pour tout $\delta > 0$, nous avons l'existence d'un certain $\alpha > 0$ tel que $\|h\| \le \alpha$ entraîne que $\mu(\|h\|) \le \delta$. Si par ailleurs on pose $x = \bar{x} + h$, l'expression (2.4) devient*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Alors que l'expression (2.5) *devient*

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

De la même façon, l'expression (2.6) *de la Définition 2.1.3 donne*

$$F(x) \cap \mathbb{B}_\beta(\bar{y}) \subset F(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + \varepsilon\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Grâce au fait que A est univoque, l'inclusion (2.7) *peut être réécrite de la manière suivante*

$$F(x) \cap V \subset F(x') + A(x - x') + \varepsilon\|x - x'\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x, x' \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Enfin, l'inclusion (2.8) *donne*

$$F(x) \subset F(x') + A(x - x') + \varepsilon\|x - x'\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x, x' \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Après le rappel de ces quelques définitions, nous pouvons maintenant retranscrire celles des principaux concepts de prédérivée inspirés des travaux de Ioffé et étendus par Pang au cadre multivoque.

Définition 2.1.6. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ et un point $\bar{x} \in X$.*

(a) *On dit que H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in U. \tag{2.9}$$

(b) *On dit que H est une prédérivée intérieure de F en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(\bar{x}) \subset F(x) - H(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in U. \tag{2.10}$$

(c) *On dit que H est une prédérivée de F en $\bar{x}$ si elle est à la fois une prédérivée extérieure et intérieure de F en ce point.*

(d) *L'application H est appelée une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x, x' \in U. \tag{2.11}$$

Lorsqu'on se place dans le cadre univoque, c'est-à-dire, lorsque $F := f$ est une fonction univoque, les trois premières notions de la définition précédente coïncident. Elle peut alors être réécrite de la façon suivante :

Définition 2.1.7. *Soit $f : X \to Y$ une fonction, $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $\bar{x} \in X$.*

(a) *On dit que H est une prédérivée de f en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$f(x) \in f(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in U.$$

(b) *On dit que H est une prédérivée stricte de f en $\bar{x}$ si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$f(x) \in f(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in U.$$

Remarque 2.1.8. *Lorsque $f : X \to Y$ est une fonction univoque Fréchet différentiable en un point $\bar{x} \in X$, si nous notons par $\nabla f(\bar{x})$ sa dérivée au sens de Fréchet en ce point ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une certaine constante $a > 0$ telle que $\|f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\| \leq \varepsilon\|x - \bar{x}\|$, pour tout $x \in B_a(\bar{x})$. Cette inégalité conduit à la relation $f(x) \in f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \varepsilon\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y$. On en déduit que l'application $H(\cdot) := \nabla f(\bar{x})(\cdot)$ est une prédérivée de f au point $\bar{x}$. Si par ailleurs, $\nabla f(\bar{x})$ est la dérivée stricte au sens de Fréchet de f en $\bar{x}$, il existe alors une constante $b > 0$ telle que $f(x) \in f(x') + \nabla f(\bar{x})(x - x') + \varepsilon\|x - x'\|\mathbb{B}_Y$, pour tous x, $x' \in \mathbb{B}_b(\bar{x})$. Dans ce cas, l'application H explicitée précédemment est une prédérivée stricte f en $\bar{x}$. On peut ainsi souligner la cohérence existant entre les différentes notions de prédérivée introduites par Pang et les notions de dérivée au sens de Fréchet.*

Élargir le cadre de la différentiabilité à de plus en plus d'applications est un objectif commun poursuivi par les différents auteurs qui ont introduit des concepts de dérivée généralisée. Les inclusions de la Définition 2.1.6 étant assez restrictives, dans le but d'élargir le cadre de la prédérivabilité à de plus amples applications ; l'auteur est amené à affaiblir les concepts de ladite définition. En considérant un couple $(\bar{x}, \bar{y})$ appartenant au graphe de l'application F, il a introduit les notions de pseudo-prédérivées extérieure, intérieure et stricte que nous regroupons dans la définition suivante.

Définition 2.1.9. (Pseudo-Prédérivée). *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une application multivoque,* $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ *et* $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{gph} F$.

(a) *On dit que* H *est une pseudo-prédérivée extérieure de* F *en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$, *si pour tout* $\delta > 0$, *il existe des voisinages* U *de* $\bar{x}$ *et* V *de* $\bar{y}$ *tels que*

$$F(x) \cap V \subset F(\bar{x}) + H(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in U.$$

(b) *On dit que* H *est une pseudo-prédérivée intérieure de* F *en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$, *si pour tout* $\delta > 0$, *il existe des voisinages* U *de* $\bar{x}$ *et* V *de* $\bar{y}$ *tels que*

$$F(\bar{x}) \cap V \subset F(x) - H(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in U.$$

(c) *L'application* H *sera dite une pseudo-prédérivée de* F *en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$, *si elle est à la fois une pseudo-prédérivée intérieure et extérieure de* F *en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$.

(d) *On dit que* H *est une pseudo-prédérivée stricte de* F *en* $\bar{x}$ *pour* $\bar{y}$, *si pour tout* $\delta > 0$, *il existe des voisinages* U *de* $\bar{x}$ *et* V *de* $\bar{y}$ *tels que*

$$F(x) \cap V \subset F(x') + H(x-x') + \delta\|x-x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in U.$$

La Remarque 2.1.5 nous a permis de mettre en évidence certaines ressemblances existant entre certains concepts introduits par Nachi et Penot dans [84] et certains introduits par Pang. À titre d'exemples, on peut faire ressortir la ressemblance entre la quasi-différentiabilité et la pseudo-prédérivabilité extérieure et celle entre la péridifférentiabilité et la prédérivabilité stricte. En fait, la principale différence existant entre ces concepts est le caractère univoque des dérivées proposées par Nachi et Penot dans la publication ci-dessus mentionnée.

Remarque 2.1.10. *Dire que* $r(h)$ *tend vers* 0 *lorsque* $\|h\|$ *tend vers* 0 *revient à dire que pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $a > 0$ *tel que* $\|h\| \leq a$ *entraîne que* $|r(h)| \leq \delta$. *En posant* $x = \bar{x} + h$ *dans la relation* (2.1), *nous obtenons*

$$f(x) \in f(\bar{x}) + H(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Dans le cas où $H \in \mathcal{L}(X,Y)$, *cette dernière relation correspond à la Fréchet différentiabilité au sens classique. Si au contraire* f *est une application multivoque, celle-ci correspond à la prédérivabilité extérieure de la Définition 2.1.6.*

Remarque 2.1.11. *Sous l'hypothèse d'existence, Ioffe a établi dans le cadre univoque, l'unicité de la prédérivée. Cependant, dans le cadre multivoque, elles sont loin d'être uniques. En effet, si $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ est une prédérivée d'une application $F : X \rightrightarrows Y$ en un point $\bar{x} \in X$ dans quelque sens que ce soit, alors elle transmet son statut à toute application $T \in \mathcal{H}(X,Y)$ telle que $H(x) \subset T(x)$ pour tout $x \in X$. Aussi peut-on associer à cette multiplicité toute la flexibilité de ce concept.*

2.2 Prédérivées et continuité

Dans le cadre univoque, il est bien connu qu'une application $f : X \to Y$ Fréchet différentiable en un point $\bar{x} \in X$ est continue en ce point. Dans cette section nous allons nous occuper de la relation existant entre la prédérivabilité et la continuité d'applications multivoques. Plus précisément, celle existant entre la prédérivabilité extérieure et la semi-continuité extérieure ; entre la prédérivabilité intérieure et la semi-continuité intérieure. Pour ce faire, les deux propositions suivantes s'avèrent être cruciales.

Proposition 2.2.1. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $\bar{x} \in X$.*

(a) *L'application F est osc en $\bar{x}$ si et seulement si, pour tout voisinage V de $F(\bar{x})$ et $\rho > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tels que*

$$F(x) \cap \rho \mathbb{B}_Y \subset V, \ \forall x \in U. \tag{2.12}$$

(b) *Si $F(\bar{x})$ est fermé et Y est de dimension finie, alors F est osc en $\bar{x}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \cap \rho \mathbb{B}_Y \subset F(\bar{x}) + \varepsilon \mathbb{B}_Y, \ \forall x \in U. \tag{2.13}$$

(c) *Si $F(\bar{x})$ est fermé borné et Y est de dimension finie, alors F est osc en $\bar{x}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon \mathbb{B}_Y, \ \forall x \in U. \tag{2.14}$$

Proposition 2.2.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On suppose que Y est de dimension finie. Soit $\bar{x} \in X$ tel que $F(\bar{x})$ soit un sous-ensemble fermé de Y.*

Alors l'application F est semi-continue intérieurement en $\bar{x}$ si et seulement si, pour tous $\rho > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que

$$F(\bar{x}) \cap \rho I\!B_Y \subset F(x) + \varepsilon I\!B_Y, \ \forall x \in U. \tag{2.15}$$

Exemple 2.2.3. *En vue de faire ressortir le fait que la prédérivabilité extérieure d'une application multivoque en un point donné n'entraîne pas la semi-continuité extérieure de cette dernière en ce point, nous considérons l'application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x = 0, \\ [0,1] & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

et l'application $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x = 0, \\ \mathbb{R}_+ & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

L'application H est clairement une prédérivée extérieure de F en 0 puisque, pour tout $\delta > 0$ nous avons

$$F(x) \subset F(0) + H(x) + [-\delta|x|, \delta|x|\,], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cependant, à la lumière de la Proposition 2.2.1, nous observons que F n'est pas semi-continue extérieurement en 0. En effet, pour que F soit osc en ce point, pour $\rho = 1$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple, on devrait être capable de trouver un voisinage U de 0 tel que l'inclusion (2.13) soit vérifiée ; ce qui n'est pas le cas.

Lorsque Y est de dimension finie, on peut pallier ce problème en exigeant à la prédérivée extérieure de satisfaire certaines hypothèses. Le résultat peut être énoncé de la façon suivante :

Proposition 2.2.4. *On considère une application $F : X \rightrightarrows Y$, $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ et $\bar{x} \in X$. On suppose que Y est de dimension finie, H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$ et $F(\bar{x})$ est fermé. Si H est osc en 0_X et $H(0_X) = \{0_Y\}$, alors F est semi-continue extérieurement en $\bar{x}$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ fixés. Comme H est osc en 0_X, d'après l'assertion (c) de la Proposition 2.2.1, on peut trouver $a > 0$ tel que

$$H(x) \subset H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in a\mathbb{B}_X.$$

D'autre part, H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$, il existe $b > 0$ tel que

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_b(\bar{x}).$$

Posons $\alpha = \min\{a, b, 1\}$. Nous avons,

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.16}$$

Et

$$H(x - \bar{x}) \subset H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}). \tag{2.17}$$

Une combinaison des relations (2.16) et (2.17) et l'utilisation de la convexité de la boule unité donnent

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

En particulier,

$$F(x) \cap \rho\mathbb{B}_Y \subset F(\bar{x}) + \varepsilon\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Ainsi, la Proposition 2.2.1 garantit la semi-continuité extérieure de l'application F au point $\bar{x}$. $\square$

Exemple 2.2.5. *En vue de justifier que la prédérivabilité intérieure d'une application multivoque en un point donné n'entraîne pas sa semi-continuité intérieure en ce point, nous considérons l'application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & si \ \ x = 0, \\ \{0\} & si \ \ x \neq 0 \end{cases}$$

et l'application $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} \{0\} & si \ \ x = 0, \\ \mathbb{R}_- & si \ \ x \neq 0. \end{cases}$$

L'application H est une prédérivée intérieure de F en 0. En effet, pour tous $\delta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$F(0) \subset F(x) - H(x) + \delta[-|x|, |x|].$$

Fixons par ailleurs $\rho = 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tous $a > 0$ et $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$, nous avons

$$F(0) \cap \rho I\!B_Y \not\subset F(x) + \varepsilon I\!B_Y.$$

Par conséquent, la Proposition 2.2.2 nous permet de conclure que F n'est pas isc à l'origine.

En vue contourner le problème d'une éventuelle absence de semi-continuité intérieure d'une application F en un point $\bar{x}$ où elle admet une prédérivée intérieure, nous établissons le résultat suivant.

Proposition 2.2.6. *On considère une application $F : X \rightrightarrows Y$, $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ et $\bar{x} \in X$. On suppose que Y est de dimension finie, $F(\bar{x})$ est fermé et H est une prédérivée intérieure de F en $\bar{x}$. Si l'application H est osc en 0_X et $H(0_X) = \{0_Y\}$, alors F est semi-continue intérieurement en $\bar{x}$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ fixés. Grâce à la semi-continuité extérieure de H en 0_X, on peut trouver $b \in]0, 1]$ tel que

$$H(x) \subset H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2} I\!B_Y, \ \forall x \in b I\!B_X.$$

Cela entraîne que

$$-H(x) \subset -H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2} I\!B_Y, \ \forall x \in b I\!B_X.$$

Comme H est une prédérivée intérieure de F en $\bar{x}$, il existe $a > 0$ tel que

$$F(\bar{x}) \subset F(x) - H(x - \bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2} \|x - \bar{x}\| I\!B_Y, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}). \tag{2.18}$$

On peut réduire a si nécessaire de sorte que $a \leq b$. Nous avons alors,

$$-H(x - \bar{x}) \subset -H(0_X) + \frac{\varepsilon}{2} I\!B_Y, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}) \tag{2.19}$$

La convexité de $I\!B_Y$ et les inclusions (2.18) et (2.19) donnent

$$F(\bar{x}) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \|x - \bar{x}\|)I\!B_Y, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}).$$

Comme $\|x - \bar{x}\| \leq 1$, nous avons

$$F(\bar{x}) \subset F(x) + \varepsilon I\!B_Y, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}).$$

A fortiori,

$$F(\bar{x}) \cap \rho I\!B_Y \subset F(x) + \varepsilon I\!B_Y, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}).$$

Ainsi, d'après la Proposition 2.2.2, l'application F est isc au point $\bar{x}$. $\square$

Exemple 2.2.7. *Pour justifier que l'existence de prédérivées pour une application multivoque en un point donné n'implique pas la continuité de cette dernière en ce point, nous considérons l'application $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & si \ \ x \neq 0; \\ \{0\} & si \ \ x = 0 \end{cases}$$

et l'application $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} \{0\} & si \ \ x = 0; \\ \mathbb{R} & si \ \ x \neq 0. \end{cases}$$

Il est clair que l'application H est une prédérivée de F en 0 puisqu'elle est à la fois une prédérivée extérieure et intérieure de F en ce point. Cependant, pour $\varepsilon \in]0, 1[$, il est facile de voir que l'assertion (c) de la Proposition 2.2.1 n'est pas vérifiée. L'application F n'est donc pas continue à l'origine.

Le corollaire suivant permet, grâce à des hypothèses faites sur une prédérivée, d'obtenir la continuité de l'application au point en lequel cette prédérivée a été prise.

Corollaire 2.2.8. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ et $\bar{x} \in X$. On suppose que Y est de dimension finie, $F(\bar{x})$ est un sous-ensemble fermé de Y, et H est une prédérivée de F en $\bar{x}$. On suppose de plus que H est osc en 0_X et $H(0_X) = \{0_Y\}$. Alors l'application F est continue en $\bar{x}$.*

Démonstration. Comme F et H vérifient les hypothèses de la Proposition 2.2.4, alors F est osc en $\bar{x}$. De même, les hypothèses de la Proposition 2.2.6 sont satisfaites, cela entraîne la semi-continuité intérieure de F en $\bar{x}$. Il en découle que l'application F est continue au point $\bar{x}$. $\square$

Remarque 2.2.9. *Dans les Propositions 2.2.4, 2.2.6 et le Corollaire 2.2.8, les résultats ont été établis sous l'hypothèse de la semi-continuité extérieure d'une prédérivée H correspondante et la condition $H(0_X) = \{0_Y\}$. Lorsque le graphe de H est fermé, comme Y est de dimension finie, ces hypothèses sont équivalentes à la condition $\|H\|^+ < \infty$. Cependant, dans le cas général, cette dernière assertion est plus forte, c'est-à-dire, on a l'implication :*

$$\|H\|^+ < \infty \Longrightarrow \begin{cases} H(0_X) = \{0_Y\} \\ H \ \textit{osc en} \ 0_X \end{cases}$$

sans que l'inverse soit vraie.

Proposition 2.2.10. *Soit $\bar{x}$ un élément fixé d'un espace de Hilbert X, Y un espace vectoriel normé, $F : X \rightrightarrows Y$ l'application multivoque définie par : $F(x) = \|x\|^2 I\!B_Y$ et l'application positivement homogène $H : X \rightrightarrows Y$ définie par : $H(x) = 2\langle x, \bar{x}\rangle I\!B_Y$. Alors, H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et $a \in]0, \delta]$, pour tout $x \in I\!B_a(\bar{x})$, nous avons

$$\|x - \bar{x}\|^2 \leq \delta \|x - \bar{x}\|.$$

Cela entraîne que

$$\begin{aligned} \langle x, x\rangle &\leq 2\langle x, \bar{x}\rangle - \langle \bar{x}, \bar{x}\rangle + \delta\|x - \bar{x}\| \\ &\leq \langle \bar{x}, \bar{x}\rangle + 2\langle x, \bar{x}\rangle - 2\langle \bar{x}, \bar{x}\rangle + \delta\|x - \bar{x}\| \\ \|x\|^2 &\leq \|\bar{x}\|^2 + 2\langle x - \bar{x}, \bar{x}\rangle + \delta\|x - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Il vient,

$$\|x\|^2 I\!B_Y \subset \|\bar{x}\|^2 I\!B_Y + 2\langle x - \bar{x}, \bar{x}\rangle I\!B_Y + \delta\|x - \bar{x}\| I\!B_Y.$$

Autrement dit,

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\| I\!B_Y, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}).$$

D'où la conclusion annoncée. $\square$

2.3 Prédérivées et propriétés de convexité

Avant d'établir des résultats d'existence de prédérivées pour des applications multivoques possédant certaines propriétés de convexité, nous établissons le résultat suivant qui permet de relier la C-convexité d'une application $F : X \rightrightarrows Y$ à la convexité de $F + C$; avec $(F + C)(x) := F(x) + C$.

Proposition 2.3.1. [43] *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et $C \subset Y$ un cône convexe non vide. L'application F est C-convexe si et seulement si, $F + C$ est convexe.*

Démonstration. Si F est C-convexe, alors pour tous x, $x' \in X$, $\lambda \in [0, 1]$, nous avons

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C. \tag{2.20}$$

Il s'en suit que

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') + C \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C + C.$$

Pour x, $x' \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$ fixés, comme $(1 - \lambda)C + \lambda C = C$, nous avons

$$(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') = (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') + C + C.$$

Grâce à la convexité de C, nous obtenons

$$(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C.$$

C'est-à-dire, pour tous x, $x' \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons

$$(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') \subset (F + C)((1 - \lambda)x + \lambda x').$$

D'où la convexité de l'application $F + C$.
Inversement, si $F + C$ est convexe, pour tous x, $x' \in X$, $\lambda \in [0, 1]$; nous avons

$$(1 - \lambda)(F + C)(x) + \lambda(F + C)(x') \subset (F + C)((1 - \lambda)x + \lambda x').$$

Il s'en suit que

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x') + C \subset F((1 - \lambda)x + \lambda x') + C.$$

Si $(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x')=\emptyset$, alors il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, pour tout $y \in (1-\lambda)F(x)+\lambda F(x')$ comme $0_Y \in C$, nous avons $y \in F((1-\lambda)x+\lambda x')+C$. Il en résulte que

$$(1-\lambda)F(x)+\lambda F(x') \subset F((1-\lambda)x+\lambda x')+C.$$

Ce qui termine la preuve. □

Dans le lemme suivant nous considérons le cas d'applications multivoques vérifiant certaines propriétés de type Lipschitz. Nous montrons que de telles applications admettent des prédérivées (ou pseudo-prédérivées, selon le cas) à valeurs fermées bornées dont nous donnons une expression.

Lemme 2.3.2. *On considère une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$, D un sous-ensemble ouvert de* dom F, *$\bar{x} \in D$ et $\ell > 0$. On note H l'application multivoque à valeurs fermées bornées définie sur X par $H(\cdot)=\ell\|\cdot\|\mathbb{B}_Y$.*

(a) *Si F est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$ de constante ℓ, alors l'application H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.*

(b) *Si F est ℓ-lipschitzienne sur D, alors l'application H est une prédérivée stricte de F en tout point de D et celle-ci ne dépend pas du point choisi.*

(c) *Si F est ℓ-pseudo-lipschitzienne en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ alors l'application H est une pseudo-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.*

Démonstration. (a) On suppose que F est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x} \in D$ de constante ℓ. L'ensemble D étant ouvert, il existe $a>0$ tel que $\mathbb{B}_a(\bar{x}) \subset D$ et,

$$F(x) \subset F(\bar{x})+\ell\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Pour tout $\delta>0$, nous avons

$$F(x) \subset F(\bar{x})+\ell\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y+\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Il s'en suit que

$$F(x) \subset F(\bar{x})+H(x-\bar{x})+\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

L'application H est positivement homogène. En effet, $H(0_X) = \ell \|0_X\| \mathbb{B}_Y$; cela implique que $0_Y \in H(0_X)$. Soient $x \in X$ et $\lambda > 0$. Nous avons

$$H(\lambda x) = \ell \|\lambda x\| \mathbb{B}_Y = \lambda \ell \|x\| \mathbb{B}_Y = \lambda H(x).$$

Par conséquent, H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.

(b) On suppose que F est ℓ-lipschitzienne sur D. Soit $\bar{x} \in D$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}_r(\bar{x}) \subset D$ et,

$$F(x) \subset F(x') + \ell \|x - x'\| \mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in \mathbb{B}_r(\bar{x}).$$

Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta \|x - x'\| \mathbb{B}_Y.$$

Par conséquent, l'application H est une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{x} \in D$, cette prédérivée ne dépend pas du point choisi.

(c) Si F est ℓ-pseudo-lipschitzienne en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, il existe des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \ell \|x - x'\| \mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in U.$$

Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(x) \cap V \subset F(x') + H(x - \bar{x}) + \delta \|x - x'\| \mathbb{B}_Y, \ \forall x, x' \in U.$$

Ainsi, l'application H est une pseudo-prédérivée de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. $\square$

Si dans l'assertion (c) du Lemme 2.3.2, on avait supposé que F était simplement calme au point $\bar{x}$, alors l'application H serait une pseudo-prédérivée extérieure de F en ce point. Inversement, si une application $F : X \rightrightarrows Y$ admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ en un point $\bar{x} \in X$ et que la norme extérieure de cette dernière est finie ; alors on peut montrer que l'application F est lipschitzienne au voisinage de ce point. Tel sera l'objet de la proposition suivante. Il faut souligner que le résultat est analogue dans le cas où l'application H est une prédérivée extérieure ou s'il s'agit d'une pseudo-prédérivée stricte.

Proposition 2.3.3. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $\bar{x} \in X$. On suppose qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $\|H\|^+ < \kappa$ et que H est une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$. Alors F est lipschitzienne autour de $\bar{x}$.*

Démonstration. Vu que $\|H\|^+ < \kappa$, on peut trouver κ' tel que $\|H\|^+ < \kappa' < \kappa$. Pour tout $x \in X$, nous avons

$$H(x) \subset \kappa'\|x\|\mathbb{B}_Y. \tag{2.21}$$

Soit $\delta' > 0$ tel que $\kappa' + \delta' \leq \kappa$. Comme H est une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$, il existe $a > 0$ tel que

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta'\|x - x'\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x,\, x' \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

En utilisant (2.21) et la convexité de $\mathbb{B}_Y$, nous avons

$$F(x) \subset F(x') + (\kappa' + \delta')\|x - x'\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x,\, x' \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Il s'en suit que

$$F(x) \subset F(x') + \kappa\|x - x'\|\mathbb{B}_Y,\ \forall x,\, x' \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Par conséquent, l'application F est lipschitzienne autour de $\bar{x}$. $\square$

Proposition 2.3.4. [43] *On considère un processus convexe $F : X \rightrightarrows Y$, D un sous-ensemble ouvert de* dom F *tel que $D - D \subset$* dom F *et un point $\bar{x} \in D$. Alors l'application F admet une prédérivée stricte en $\bar{x}$ qui est un processus convexe. Elle est donnée par $H(\cdot) := -F(-\cdot)$.*

Démonstration. D étant un ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $\mathbb{B}_r(\bar{x}) \subset D$. Comme F est un processus convexe, nous avons

$$F(v) + F(u - v) \subset F(u),\ \forall u,\, v \in D.$$

En particulier, cette inclusion est vraie pour tous $u,\, v \in \mathbb{B}_r(\bar{x})$. Pour tout $z \in F(v)$ et $y \in F(u - v)$, nous avons $z \in F(u) - y$. Par conséquent,

$$F(v) \subset F(u) - F(-(v - u)).$$

Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(v) \subset F(u) + H(v-u) + \delta\|v-u\|\mathbb{B}_Y, \ \forall u, v \in \mathbb{B}_r(\bar{x}).$$

Montrons à présent que H est positivement homogène. Nous avons d'une part,

$$0_Y \in -F(0_X) = H(0_X) \Rightarrow 0_Y \in H(0_X).$$

D'autre part, pour tous $x \in X$ et $\lambda > 0$, nous avons

$$H(\lambda x) = -F(-\lambda x) = \lambda(-F(-x)) = \lambda H(x).$$

On en déduit que H est une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$.
Finalement, montrons que H est un processus convexe. Soient $x, y \in X$. Nous avons,

$$H(x) + H(y) = -(F(-x) + F(-y)) \subset -F(-(x+y)) = H(x+y).$$

D'où le résultat annoncé. $\square$

Dans la Proposition 2.3.4, on a montré qu'un processus convexe F admet une prédérivée stricte H qui est elle-même un processus convexe. De plus, elle est indépendante du point en lequel elle a été prise. Un tel résultat est en fait cohérent à celui obtenu dans le cadre univoque. En effet, si $D = X$ et $F = f$ est univoque alors elle est linéaire. Et, il est bien connu qu'une application linéaire continue $f : X \to Y$ est différentiable en tout point $\bar{x}$ de X et sa différentielle coïncide avec l'application f elle-même indépendamment du point $\bar{x}$.

Dans le théorème suivant nous considérons le cas d'une application multivoque convexe fermée F. Nous établissons un résultat d'existence de pseudo-prédérivées strictes à valeurs fermées bornées en tout point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$ tel que $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } F)$. De plus, nous en exhibons une expression.

Théorème 2.3.5. [43] *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque convexe fermée, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$ tel que $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } F)$. Alors, F admet une pseudo-prédérivée stricte H à valeurs fermées bornées, en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ donnée par $H(\cdot) = \ell\|\cdot\|\mathbb{B}_Y$ avec $\ell > 0$.*

Démonstration. Comme F est convexe fermée, il en est de même de $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$. Ensuite, $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } F) = \text{int}(\text{Im } F^{-1})$. Ainsi, d'après le Théorème 1.2.16 l'application F^{-1} est métriquement régulière en $\bar{y}$ pour $\bar{x}$. Le Théorème 1.2.17 assure que F est pseudo-lipschitzienne en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. Par conséquent, il existe $\ell > 0$ et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que

$$F(x) \cap V \subset F(x') + \ell\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x,\, x' \in U.$$

D'après le Lemme 2.3.2, l'application positivement homogène à valeurs fermées et bornées $H(\cdot) := \ell\| \cdot \|\mathbb{B}_Y$ est une pseudo-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. $\square$

Dans le théorème suivant, nous considérons le cas d'une application multivoque cône-convexe F. Nous établissons sous des hypothèses appropriées, l'existence de prédérivées strictes à valeurs fermées en tout point $\bar{x}$ appartenant à l'intérieur du domaine de F. Comme dans le cas convexe fermé, nous en exhibons une expression.

Théorème 2.3.6. [43] *Soit Y un espace de Banach de dimension finie. On considère un cône convexe fermé non vide $K \subset Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque K-convexe. Soit $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } F)$. On suppose qu'il existe une constante strictement positive α telle que :*

(1) *$F(x)$ soit K-fermé, $\forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$;*

(2) *il existe une constante $\eta > 0$ telle que $F(x) \subset \eta\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$.*

Alors, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ sur lequel l'application $F + K$ est lipschitzienne. En particulier, elle admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées bornées en tout point de U. De plus, l'application F admet en tout point de U une prédérivée stricte à valeurs fermées, donnée par $H + K$.

Démonstration. Fixons $\alpha > 0$ satisfaisant les hypothèses (1) et (2) du théorème que l'on peut choisir assez petit de sorte que $\mathbb{B}_\alpha(\bar{x}) \subset \text{dom } F$. Soient $u, v \in \mathbb{B}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$ avec $u \neq v$. Prenons $\lambda \in]0, \frac{\alpha}{4}]$ et posons

$$w := u - \lambda\frac{(v-u)}{\|v-u\|}\cdot$$

Nous avons

$$\|v-u\|w = \|v-u\|u - \lambda(v-u)\cdot$$

Cela entraîne que

$$u = \left(\frac{\lambda}{\|v-u\|+\lambda}\right)v + \left(\frac{\|v-u\|}{\|v-u\|+\lambda}\right)w.$$

En posant $t := \dfrac{\|v-u\|}{\|v-u\|+\lambda}$, nous obtenons $t \in]0,1[$ et $1-t = \dfrac{\lambda}{\|v-u\|+\lambda}\cdot$ Il s'en suit que $u = (1-t)v + tw$.
L'application F étant K-convexe, d'après la Proposition 2.3.1 l'application $F+K$ est convexe. Nous avons alors,

$$(1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(u). \tag{2.22}$$

D'autre part, la convexité de $F+K$ implique que $(F+K)(x)$ est un sous-ensemble convexe de Y, pour tout $x \in X$. Nous avons

$$(1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(v) = (F+K)(v). \tag{2.23}$$

En ajoutant $t(F+K)(v)$ aux deux membres de l'inclusion (2.22), nous avons

$$t(F+K)(v) + (1-t)(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(u) + t(F+K)(v).$$

Il s'en suit que

$$(F+K)(v) + t(F+K)(w) \subset (F+K)(u) + t(F+K)(v).$$

Soit,

$$F(v) + tF(w) + K + tK \subset F(u) + tF(v) + K + tK.$$

L'ensemble K étant un cône convexe, nous avons $K+tK = K+K = K$; la dernière inclusion devient,

$$F(v) + tF(w) + K \subset F(u) + tF(v) + K. \tag{2.24}$$

Par ailleurs, si x, $x' \in I\!B_\alpha(\bar{x})$, $y \in F(x)$ et $y' \in F(x')$; d'après la seconde hypothèse du théorème, nous avons

$$\|y - y'\| \leq \|y\| + \|y'\| \leq 2\eta \Rightarrow y \in \{y'\} + 2\eta I\!B_Y.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in F(x)$ et $y' \in F(x')$, on en déduit que

$$F(x) \subset F(x') + 2\eta \mathbb{B}_Y. \tag{2.25}$$

Montrons à présent que $w \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$. Sachant que $u = (1-t)v + tw$, nous avons

$$\begin{aligned} \|w - \bar{x}\| &\leq \|w - v\| + \|v - \bar{x}\| \\ &\leq \frac{\|v-u\|}{t} + \frac{\alpha}{4} \\ &\leq \|v - u\| + \lambda + \frac{\alpha}{4} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} \leq \alpha. \end{aligned}$$

Comme v, $w \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$, l'inclusion (2.25) donne

$$F(v) \subset F(w) + 2\eta \mathbb{B}_Y.$$

Par conséquent, l'inclusion (2.24) implique,

$$F(v) + K + tF(w) \subset F(u) + K + 2\eta t \mathbb{B}_Y + tF(w).$$

L'espace de Banach Y étant de dimension finie, $2\eta t \mathbb{B}_Y$ en est une partie compacte. D'autre part, l'hypothèse (1) entraîne que F(u)+K est fermé. Ainsi, l'ensemble $F(u) + K + 2\eta t \mathbb{B}_Y$ est fermé dans Y. Cet ensemble est aussi convexe en tant que somme des convexes $(F + K)(u)$ et $2\eta t \mathbb{B}_Y$. De plus l'ensemble $tF(w)$ est borné puisqu'il est contenu dans $\eta t \mathbb{B}_Y \subset \eta \mathbb{B}_Y$. On peut donc appliquer la loi de Radström (Lemme 1.3.4). Il vient alors,

$$F(v) + K \subset F(u) + K + 2\eta t \mathbb{B}_Y.$$

Autrement dit,

$$F(v) + K \subset F(u) + K + \frac{2\eta\|v-u\|}{\|v-u\| + \lambda} \mathbb{B}_Y.$$

En particulier, pour tous $u, v \in \mathbb{B}_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$, nous avons

$$(F + K)(v) \subset (F + K)(u) + \frac{2\eta\|v-u\|}{\lambda} \mathbb{B}_Y. \tag{2.26}$$

Par conséquent, l'application $F + K$ est lipschitzienne sur $I\!B_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Ainsi, grâce au Lemme 2.3.2, elle admet une prédérivée stricte H en tout point de l'intérieur de $I\!B_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$ donnée par

$$H(\cdot) = \frac{2\eta}{\lambda}\|\cdot\| I\!B_Y.$$

Pour compléter la preuve, on doit montrer que l'application F admet $H + K$ pour prédérivée stricte en tout point de l'intérieur de $I\!B_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. D'abord, K étant un cône, nous avons $\lambda K = K$, pour tout $\lambda > 0$. Cela implique que

$$(H + K)(\lambda x) = H(\lambda x) + K = \lambda(H + K)(x),\ \forall x \in X, \lambda > 0.$$

Ensuite, $(H+K)(0_X) = H(0_X)+K \ni 0_Y$. Donc l'application $H+K$ est positivement homogène. Comme $0_Y \in K$, l'inclusion (2.26) entraîne que

$$F(v) \subset (F + K)(v) \subset F(u) + \frac{2\eta\|v - u\|}{\lambda} I\!B_Y + K,$$

il vient,

$$F(v) \subset F(u) + (H + K)(v - u).$$

Soit x' un vecteur arbitraire de l'intérieur de $I\!B_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Il existe alors $r > 0$ tel que $I\!B_r(x') \subset I\!B_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(v) \subset F(u) + (H + K)(v - u) + \delta\|v - u\| I\!B_Y,\ \forall u, v \in I\!B_r(x').$$

Par conséquent, l'application $H + K$ est une prédérivée stricte de F en tout point x' appartenant à l'intérieur de $I\!B_{\frac{\alpha}{4}}(\bar{x})$. Sachant que Y est de dimension finie l'application H est à valeurs compactes et comme K est fermé, l'application $H + K$ est à valeurs fermées et la preuve est donc terminée. $\square$

Si dans le Théorème 2.3.6, on pose $K \equiv \{0_Y\}$, on obtient le résultat suivant établissant l'existence de prédérivées strictes pour une application multivoque dont le graphe est convexe sans être nécessairement fermé. Sa preuve est pratiquement la même que celle du théorème en question.

Corollaire 2.3.7. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque convexe. Soit $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$ et on suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

(1) *$F(x)$ est fermé pour tout $x \in I\!B_\alpha(\bar{x})$;*

(2) *il existe une constante $\eta > 0$ telle que $F(x) \subset \eta I\!B_Y$, pour tout $x \in I\!B_\alpha(\bar{x})$.*

Alors, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ sur lequel l'application F est lipschitzienne. En particulier, elle admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées bornées sur U.

Lorsque l'espace de Banach Y est de dimension finie, en choisissant une troncation appropriée de l'application F, un résultat analogue à celui du Théorème 2.3.5 découle du Théorème 2.3.6. Un tel résultat peut être formulé de la façon suivante.

Corollaire 2.3.8. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie. On considère une application multivoque convexe fermée $F : X \rightrightarrows Y$. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ tel qu'il existe une constante $\gamma > 0$ et un voisinage U de $\bar{x}$ tels que $F(x) \cap I\!B_\gamma(\bar{y}) \neq \emptyset$ pour tout $x \in U$. Alors, l'application F admet une pseudo-prédérivée stricte à valeurs fermées bornées en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$.*

Démonstration. Soit $\gamma > 0$ et un voisinage U de $\bar{x}$ tel que $F(x) \cap I\!B_\gamma(\bar{y}) \neq \emptyset,\ \forall x \in U$. Considérons l'application multivoque $F_\gamma : X \rightrightarrows Y$ définie par

$$F_\gamma(x) = F(x) \cap I\!B_\gamma(\bar{y}).$$

Comme $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap I\!B_\gamma(\bar{y})$, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F_\gamma$. Sachant que U est un voisinage de $\bar{x}$ contenu dans Dom F_γ, nous avons $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F_\gamma)$.
Nous affirmons que l'application F_γ est convexe et nous le démontrons. Soient (x, y), $(u, v) \in \operatorname{gph} F_\gamma \subset \operatorname{gph} F$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(u, v) \in \operatorname{gph} F$. Il s'en suit que

$$\lambda y + (1 - \lambda)v \in F(\lambda x + (1 - \lambda)u).$$

La boule $I\!B_\gamma(\bar{y})$ étant convexe, $y, v \in I\!B_\gamma(\bar{y})$ entraîne que $\lambda y + (1 - \lambda)v \in I\!B_\gamma(\bar{y})$. Ainsi, nous avons

$$\lambda y + (1 - \lambda)v \in F(\lambda x + (1 - \lambda)u) \cap I\!B_\gamma(\bar{y}) = F_\gamma(\lambda x + (1 - \lambda)u).$$

Il en découle que

$$\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(u, v) \in \operatorname{gph} F_\gamma.$$

De plus, comme l'application F est fermée, l'ensemble $F_\gamma(x) = F(x) \cap I\!B_\gamma(\bar{y})$ est fermé pour tout $x \in X$. L'hypothèse (1) du Théorème 2.3.6 est donc satisfaite pour $K \equiv \{0_Y\}$ et tout $x \in X$. D'autre part, à partir de la définition de l'application F_γ, en prenant $\eta := \gamma + \|\bar{y}\|$, nous avons $F_\gamma(x) \subset \eta I\!B_Y$, pour tout $x \in X$. Ainsi, la seconde hypothèse du Théorème 2.3.6 est aussi satisfaite. Par conséquent, l'application F_γ admet une prédérivée stricte $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées bornées, c'est-à-dire, il existe $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ à valeurs fermées bornées telle que, pour tout $\delta > 0$, il existe $a > 0$ tel que

$$F_\gamma(x) \subset F_\gamma(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\| I\!B_Y, \ \forall x,\, x' \in I\!B_a(\bar{x}).$$

Il s'en suit que,

$$F(x) \cap I\!B_\gamma(\bar{y}) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\| I\!B_Y, \ \forall x,\, x' \in I\!B_a(\bar{x}).$$

Par conséquent, l'application F admet une pseudo-prédérivée stricte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. □

On peut affaiblir l'hypothèse (1) du Théorème 2.3.6 en supposant seulement $F(\bar{x})$ est K-fermé et maintenir l'existence de prédérivées pour l'application $F + K$. Bien sûr, la notion de prédérivée obtenue dans ce cas sera plus faible que celle obtenue dans le théorème en question. Nous préciserons ce résultat à travers le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.9. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie. On considère un cône convexe fermé non vide $K \subset Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$ une application K-convexe. Soit $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$ et l'on suppose que :*

(1) $F(\bar{x})$ est K-fermé ;

(2) il existe des constantes α, $\eta > 0$ telles que $F(x) \subset \eta I\!B_Y$, pour tout $x \in I\!B_\alpha(\bar{x})$.

Alors, l'application $F + K$ est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$. En particulier, elle admet en $\bar{x}$ une prédérivée extérieure $H : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées bornées. De plus, l'application F admet en $\bar{x}$ une prédérivée extérieure à valeurs fermées. Elle est donnée par $H + K$.

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ tels que l'hypothèse (2) de l'énoncé soit satisfaite. On peut réduire α si nécessaire de sorte que $\mathbb{B}_\alpha(\bar{x}) \subset \operatorname{dom} F$. Considérons un point $x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$, une constante $\lambda \in]0, \alpha]$ et posons

$$u := \bar{x} - \lambda \frac{(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} \cdot$$

Un calcul simple donne,

$$\bar{x} = \left(\frac{\lambda}{\|x - \bar{x}\| + \lambda} \right) x + \left(\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x - \bar{x}\| + \lambda} \right) u.$$

En posant $t := \dfrac{\|x - \bar{x}\|}{\|x - \bar{x}\| + \lambda}$, nous avons $t \in]0, 1[$ et $\bar{x} = (1 - t)x + tu$. Comme $\|u - \bar{x}\| = \lambda \leq \alpha$, nous avons $u \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$. Sachant que l'application F est K-convexe, la Proposition 2.3.1 assure la convexité de l'application $F + K$. Par conséquent,

$$(1 - t)(F + K)(x) + t(F + K)(u) \subset (F + K)(\bar{x}). \tag{2.27}$$

En ajoutant $t(F + K)(x)$ aux deux membres de cette inclusion et tenant compte de la convexité de l'application $F + K$, nous obtenons

$$F(x) + tF(u) + K + tK \subset F(\bar{x}) + tF(x) + K + tK.$$

Comme K est un cône convexe, il vérifie $K + tK = K + K = 2K = K$. Il en découle,

$$F(x) + tF(u) + K \subset F(\bar{x}) + K + tF(x) \tag{2.28}$$

De l'hypothèse (2) nous obtenons $F(x) \subset F(u) + 2\eta \mathbb{B}_Y$. Il vient,

$$F(x) + K + tF(u) \subset F(\bar{x}) + K + 2\eta t \mathbb{B}_Y + tF(u).$$

Sachant que $F(\bar{x}) + K$ est fermé (hypothèse (1)) et $2t\eta \mathbb{B}_Y$ est compacte, l'ensemble $F(\bar{x}) + K + 2t\eta \mathbb{B}_Y$ est fermé. Il est aussi convexe puisque $(F + K)(\bar{x})$ et $2t\eta \mathbb{B}_Y$ le sont. De plus, $tF(u)$ est borné. En appliquant la loi de Radström nous obtenons

$$(F + K)(x) \subset (F + K)(\bar{x}) + \frac{2\eta \|x - \bar{x}\|}{\|x - \bar{x}\| + \lambda} \mathbb{B}_Y.$$

Il s'en suit que

$$(F + K)(x) \subset (F + K)(\bar{x}) + \frac{2\eta}{\lambda} \|x - \bar{x}\| \mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

On en déduit que l'application $F + K$ est lipschitzienne extérieurement en $\bar{x}$. Elle admet d'après le Lemme 2.3.2 une prédérivée extérieure $H : X \rightrightarrows Y$, à valeurs fermées bornées au point $\bar{x}$, donnée par

$$H(\cdot) = \frac{2\eta}{\lambda}\|\cdot\|\mathbb{B}_Y.$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$F(x) + K \subset F(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) + K + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Comme $0_Y \in K$, nous avons

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + (H + K)(x - \bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Par conséquent, l'application $H + K$ est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$. $\square$

Chapitre 3

Application des prédérivées en optimisation multivoque

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude de prédérivées d'applications multivoques. Sachant que l'optimisation a parfois été une source de motivation pour le développement du calcul différentiel voire de la théorie de la différentiation généralisée, il est naturel de se poser des questions relatives à l'applicabilité des prédérivées dans le cadre de la théorie de l'optimisation. Plus précisément, celle de l'optimisation multivoque qui a des applications dans divers domaines tels que la théorie des jeux, le contrôle optimal, la transportation robotique, l'ingénierie, la finance, l'économie, etc. Pour de plus amples motivations mathématiques et industrielles, le lecteur pourra consulter les monographies [65] de Jahn, [59] de Luc et [67] de Khan et al. Depuis plusieurs décennies, cette théorie a retenu l'attention de nombreux mathématiciens. Certainement, cet intérêt grandissant n'est pas sans lien avec la diversité des situations dans lesquelles elle s'applique. Dans ce présent chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de problèmes d'optimisation multivoque. Principalement, le problème (P) faisant intervenir une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$, formulé comme suit :

$$(P) : \begin{cases} \text{Minimiser } \ F(x) \\ \ \text{tel que } \quad x \in D, \end{cases}$$

où D est un sous-ensemble non vide de dom F et l'espace objectif Y est partiellement ordonné par un cône convexe $C \subsetneq Y$ tel que $\text{int}(C) \neq \emptyset$. En premier lieu, nous introduisons le concept de cône convexité stricte dans le cadre multivoque nous permettant d'établir des résultats d'unicité de minimiseurs pour le problème (P). Sous de faibles hypothèses de convexité, nous montrons que les minimiseurs locaux de ce problème sont aussi globaux. Ensuite, nous nous proposons de développer des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'optimalité pour ce problème lorsque la fonction objectif F possède des prédérivées. En considérant le cas où l'application F admet des pseudo-prédérivées strictes, nous établissons une condition nécessaire d'optimalité pour un minimiseur faible (Théorème 3.2.1). Lorsque l'application F est C-étoilée et admet des prédérivées extérieures, nous établissons une condition suffisante pour un minimiseur fort (Théorème 3.2.4). Ensuite, nous exploitons les résultats du chapitre précédent pour établir des conditions d'optimalité pour ce problème lorsque l'application F possède certaines propriétés de convexité. D'autre part, nous introduisons une notion de cône-prédérivée que nous utilisons par la suite pour établir des conditions d'optimalité pour le problème (P). En particulier nous présentons un résultat du genre de la règle de Fermat en termes de cône-prédérivées (Proposition 3.3.5). Enfin, nous concluons le chapitre en appliquant certains de nos résultats à un modèle issu de la micro-économie. Nous voudrions mentionner que la plupart des résultats sur les conditions d'optimalité présentés dans ce chapitre proviennent de la publication [43].

Désormais, les notations $\mathrm{WMin}(P)$, $\mathrm{Min}(P)$ et $\mathrm{SMin}(P)$ désignent respectivement les ensembles de minimiseurs faibles, de Pareto et forts du problème (P).

3.1 Quelques propriétés intrinsèques des minimiseurs en optimisation convexe

Parmi les différentes questions que les mathématiciens se posent assez souvent dans le cadre l'étude d'une classe de problèmes figurent celles concernant l'existence et l'unicité de solutions. La théorie de l'optimisation multivoque n'a pas échappé à cette règle. Dans la littérature, il existe de nombreux travaux portant sur la question d'existence de minimiseurs pour des problèmes d'optimisation multivoque. On peut citer entre autres les travaux de Corley [26], Hernández et Rodríguez-Marín [55], Huang et Yao [58] et Luc [60] où la plupart des résultats d'existence sont établis sous des hypothèses de compacité sur l'ensemble-contrainte D et de semi-continuité supérieure de la fonction objectif F. Dans le cadre de cette thèse, nous allons plutôt nous intéresser à l'unicité de minimiseurs dans le cas de l'optimisation multivoque convexe. Pour mener cette étude, il nous paraît utile de poser la définition suivante introduisant la notion de cône-convexité stricte d'une application multivoque.

Définition 3.1.1 (Cône-convexité stricte d'applications multivoques)**.** *On considère une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ et un cône $K \subset Y$ tel que $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. On dit que F est strictement K-convexe si pour tous x, $y \in X$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$,*

$$(1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) \subset F((1-\lambda)x + \lambda y) + \operatorname{int}(K). \tag{3.1}$$

Lorsque $F := f$ est une fonction univoque définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et K est l'orthant positif de $\mathbb{R}$, alors cette dernière condition devient pour tous x, $y \in \operatorname{dom} f$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Une condition qui met en évidence la cohérence existant entre cette définition et la notion classique de fonctions strictement convexes. Avant d'entamer nos résultats d'unicité, nous présentons le résultat élémentaire suivant que nous utiliserons par la suite dans certaines de nos preuves.

Lemme 3.1.2. *Soit un cône $K \subset Y$. Si $0_Y \in \operatorname{int}(K)$ alors $K = Y$.*

Démonstration. Supposons que $0_Y \in \operatorname{int}(K)$. Il existe alors $r > 0$ tel que $r\mathbb{B}_Y \subset K$. Soit $y \in Y \setminus \{0_Y\}$. Nous avons $z = \dfrac{r}{2\|y\|}y \in r\mathbb{B}_Y \subset K$. Cela entraîne que $y \in K$. L'égalité annoncée est ainsi obtenue. □

Dans le théorème suivant, nous établissons un résultat d'unicité pour les minimiseurs forts du problème (P) lorsque le cône convexe C est pointé et l'application F est strictement C-convexe.

Théorème 3.1.3. *Si le cône convexe C est pointé et la fonction objectif F est strictement C-convexe ; alors, il existe au plus un minimiseur fort du problème (P).*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux minimiseurs forts pour le problème (P) notés $(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{u}, \bar{v})$. Nous avons en particulier, $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{u}, \bar{v}) \in \text{gph } F$. Nous affirmons que $\bar{y} = \bar{v}$. En effet, nous avons $F(D) \subset \{\bar{y}\} + C$ et $F(D) \subset \{\bar{v}\} + C$. Il s'en suit que $\bar{v} - \bar{y} \in C$ et $\bar{v} - \bar{y} \in -C$. Le cône C étant pointé, nous obtenons $\bar{v} = \bar{y}$.
Supposons à présent que $\bar{u} \neq \bar{x}$. L'application F étant strictement C-convexe, pour tout $t \in]0, 1[$, nous avons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(\bar{u}) \subset F((1-t)\bar{x} + t\bar{u}) + \text{int}(C). \tag{3.2}$$

Posons $x(t) := (1-t)\bar{x} + t\bar{u}$. La relation (3.2) entraîne que

$$(1-t)\bar{y} + t\bar{v} \in F(x(t)) + \text{int}(C).$$

L'égalité $\bar{v} = \bar{y}$ implique que $\bar{y} \in F(x(t)) + \text{int}(C)$. Ainsi, il existe un élément $y(t) \in F(x(t))$ tel que $y(t) - \bar{y} \in -\text{int}(C)$. En outre, comme $y(t) - \bar{y} \in C$, nous obtenons

$$y(t) - \bar{y} \in (-\text{int}(C)) \cap C.$$

C'est absurde car $C \cap (-C) = \{0_Y\}$ et $0_Y \notin \text{int}(C)$. Ainsi, nous avons $\bar{u} = \bar{x}$. Par conséquent, il existe au plus un minimiseur fort du problème (P). □

Avant d'établir notre prochain résultat d'unicité, il nous semble utile de présenter le lemme suivant qui permet de relier l'ensemble des minimiseurs forts et celui des minimiseurs faibles du problème (P).

Lemme 3.1.4. *Tout minimiseur fort* $(\bar{x}, \bar{y})$ *du problème* (P) *est aussi un minimiseur faible de* (P)*.*

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{SMin}(P)$. Nous avons,

$$F(D) \subset \{\bar{y}\} + C. \tag{3.3}$$

Supposons que $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \text{WMin}(P)$. Il existe alors $x \in D$ et $y \in F(x)$, tel que

$$y \in \{\bar{y}\} - \text{int}(C), \text{ i.e., } \bar{y} - y \in \text{int}(C). \tag{3.4}$$

La relation (3.3) entraîne que $y - \bar{y} \in C$. De ces deux dernières relations, on déduit que $0_Y \in \text{int}(C) + C \subset \text{int}(C)$; c'est absurde puisque $C \subsetneq Y$. Ainsi, on peut conclure que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{WMin}(P)$. □

Le résultat d'unicité suivant s'applique aux minimiseurs forts et faibles. Dans ce cas, le cône convexe C n'est pas nécessairement pointé mais nous limitons notre étude au cas de minimiseurs ayant même composante en Y.

Proposition 3.1.5. *On suppose que l'application F est strictement C-convexe et que l'ensemble D est convexe. Si $(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{u}, \bar{y})$ sont deux minimiseurs faibles (ou deux minimiseurs forts) du problème (P), alors $\bar{x} = \bar{u}$.*

Démonstration. Nous l'établissons d'abord dans le cas de deux minimiseurs faibles. Supposons que $(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{u}, \bar{y})$ soient deux minimiseurs faibles du problème (P) tels que $\bar{x} \neq \bar{u}$. La C-convexité stricte de l'application F entraîne que

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(\bar{u}) \subset F((1-t)\bar{x} + t\bar{u}) + \mathrm{int}(C),\ \forall t \in]0,1[.$$

En posant $x(t) := (1-t)\bar{x} + t\bar{u}$, cette dernière relation implique que

$$\bar{y} \in F(x(t)) + \mathrm{int}(C).$$

Ainsi, il existe $y(t) \in F(x(t))$ tel que $\bar{y} \in y(t) + \mathrm{int}(C)$ i.e., $y(t) - \bar{y} \in -\mathrm{int}(C)$. Comme $y(t) \in F(x(t))$ et $x(t) \in D$, nous avons

$$y(t) \in (\{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)) \cap F(D).$$

C'est absurde puisque $(\{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)) \cap F(D) = \emptyset$. Par conséquent, nous avons $\bar{x} = \bar{u}$. Supposons que $(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{u}, \bar{y})$ sont deux minimiseurs forts du problème (P). D'après le Lemme 3.1.4, ce sont aussi des minimiseurs faibles du problème (P). D'après ce qui précède, nous obtenons $\bar{x} = \bar{u}$. ◻

Remarque 3.1.6. *Il est important de souligner que, dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction univoque ; les concepts de minimiseurs fort et faible coïncident. Dans ce cas, le Théorème 3.1.3 et la Proposition 3.1.5 se réduisent à la condition suffisante usuelle d'unicité de minimiseurs de problèmes d'optimisation convexe.*

Dans le cadre univoque, il est bien connu que tout minimiseur local d'une fonction convexe en est un minimiseur global. Nous allons montrer que l'optimisation multivoque (convexe) obéit, elle aussi, à cette règle. Plus précisément, dans notre prochain résultat, nous montrons sous une hypothèse de convexité assez faible sur la fonction objectif, que tout minimiseur fort local du problème (P) en est un minimiseur fort global. Avant d'établir un tel résultat, nous rappelons la définition suivante d'une application multivoque cône-étoilée en un point donné.

Définition 3.1.7 (Application multivoque K-étoilée)**.** *On considère une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ et un point $\bar{x} \in \operatorname{dom} F$. Soit $K \subset Y$ un cône convexe non vide. L'application F est dite K-étoilée en $\bar{x}$ (ou par rapport à $\bar{x}$), si pour tous $x \in X$ et $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$(1-\lambda)F(\bar{x}) + \lambda F(x) \subseteq F((1-\lambda)\bar{x} + \lambda x) + K.$$

Lorsque $K = \{0_Y\}$ on retrouve alors la Définition 1.3.10 d'une application multivoque étoilée. Si en outre, F est une fonction univoque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et K est l'orthant positif de $\mathbb{R}$, on obtient alors la notion classique d'une fonction étoilée. Par ailleurs, toute application K-convexe est K-étoilée en chaque point de son domaine.

Proposition 3.1.8 (Minimiseurs forts)**.** *Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un minimiseur fort local du problème (P). Si D est convexe et F est C-étoilée en $\bar{x}$, alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort global.*

Démonstration. Comme $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort local du problème (P), il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que

$$F(U) \subset \{\bar{y}\} + C. \tag{3.5}$$

Supposons que $(\bar{x}, \bar{y})$ ne soit pas un minimiseur fort global du problème. Il existe alors $(x, y) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ tel que

$$y - \bar{y} \notin C. \tag{3.6}$$

Soit $t \in]0,1[$ tel que $x(t) := \bar{x} + t(x - \bar{x}) \in U$. Comme l'application F est C-étoilée en $\bar{x}$, nous avons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(x(t)) + C.$$

Il s'en suit que,

$$(1-t)\bar{y} + ty \in F(x(t)) + C.$$

Cette dernière relation garantit l'existence d'un élément $y(t) \in F(x(t))$ tel que $(1-t)\bar{y} + ty \in y(t) + C$. Il en découle,

$$y(t) - \bar{y} \in t(y - \bar{y}) - C. \tag{3.7}$$

Nous affirmons que

$$(t(y - \bar{y}) - C) \cap C = \emptyset.$$

Nous le démontrons. Supposons au contraire qu'il existe un élément z appartenant à $(t(y-\bar{y})-C)\cap C$. Comme $z \in t(y-\bar{y})-C$, il existe $u \in C$ tel que $z = t(y-\bar{y})-u$. Cela entraîne que

$$t(y - \bar{y}) = z + u \in C + C \subset C.$$

Il s'en suit que $y - \bar{y} \in C$, ce qui contredit la condition (3.6). On conclut que

$$(t(y - \bar{y}) - C) \cap C = \emptyset.$$

Cela entraîne que $y(t) - \bar{y} \notin C$, *i.e.*, $y(t) \notin \{\bar{y}\} + C$. Autrement dit,

$$F(U) \not\subseteq \{\bar{y}\} + C.$$

Celle-ci est en contradiction avec la relation (3.5). Par conséquent, $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort global du problème (P). □

Corollaire 3.1.9. *On suppose que l'application F est C-convexe et l'ensemble D est convexe. Alors, tout minimiseur fort local du problème* (P) *est un minimiseur fort global de (P).*

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un minimiseur fort local du problème (P). L'application F étant C-convexe, elle est C-étoilée en $\bar{x}$. La Proposition 3.1.8 permet d'obtenir la conclusion désirée. □

Il est à souligner que ce résultat reste valable lorsque la fonction objectif F est convexe. Dans la proposition suivante, nous établissons un résultat analogue à celui de la proposition précédente pour les minimiseurs faibles.

Proposition 3.1.10 (Minimiseurs faibles)**.** *Soit* $(\bar{x}, \bar{y})$ *un minimiseur faible local du problème* (P)*. Si* D *est convexe et* F *est* C*-étoilée en* $\bar{x}$*, alors* $(\bar{x}, \bar{y})$ *est un minimiseur faible global de* (P)*.*

Démonstration. Comme $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible local du problème (P), il existe alors un voisinage U de $\bar{x}$ tel que

$$(\{\bar{y}\} - \operatorname{int}(C)) \cap F(U) = \emptyset. \tag{3.8}$$

Supposons que le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ ne soit pas un minimiseur faible global du problème (P). Nous avons alors,

$$(\{\bar{y}\} - \operatorname{int}(C)) \cap F(D) \neq \emptyset. \tag{3.9}$$

On peut donc trouver un certain couple $(x, y) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ tel que

$$y \in (\{\bar{y}\} - \operatorname{int}(C)) \cap F(x). \tag{3.10}$$

Fixons $t \in]0, 1[$ tel que $x(t) := (1-t)\bar{x} + tx \in U$. L'application F étant C-étoilée au point $\bar{x}$, nous avons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(x(t)) + C.$$

Cela implique que

$$(1-t)\bar{y} + ty \in F(x(t)) + C.$$

On peut trouver $y(t) \in F(x(t))$ tel que $(1-t)\bar{y} + ty - y(t) \in C$. Autrement dit,

$$\bar{y} - y(t) \in t(\bar{y} - y) + C.$$

Comme $\bar{y} - y \in \operatorname{int}(C)$, nous avons

$$\bar{y} - y(t) \in t\operatorname{int}(C) + C.$$

Vu que C est un cône convexe et $t > 0$, nous avons $t\operatorname{int}(C) + C = \operatorname{int}(C) + C \subset \operatorname{int}(C)$. Ainsi, nous obtenons $\bar{y} - y(t) \in \operatorname{int}(C)$. Cela entraîne que

$$y(t) \in (\{\bar{y}\} - \operatorname{int}(C)) \cap F(U).$$

Ce qui est impossible puisqu'on a par hypothèse, $(\{\bar{y}\} - \operatorname{int}(C)) \cap F(U) = \emptyset$. Ainsi, il n'existe aucun élément $(x, y) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ vérifiant la relation (3.10). Par conséquent, le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible global du problème (P). □

Corollaire 3.1.11. *On suppose que l'application F est C-convexe et D est un sous-ensemble convexe non vide de* dom F. *Alors, tout minimiseur faible local du problème* (P) *en est un minimiseur faible global.*

3.2 Conditions d'optimalité pour des problèmes d'optimisation multivoque

Ce paragraphe sera consacré au développement de conditions d'optimalité pour des problèmes d'optimisation multivoque, lorsque la fonction objectif admet des prédérivées. En tout premier lieu, nous établissons une condition nécessaire pour un minimiseur faible du problème (P) lorsque l'application F admet une pseudo-prédérivée stricte au sens de la Définition 2.1.9.

Théorème 3.2.1 (Condition nécessaire pour un minimiseur faible [43])**.** *On suppose que la fonction objectif F admet une pseudo-prédérivée stricte H en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ avec $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (\operatorname{int}(D) \times Y)$. Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{WMin}(P)$ alors,*

$$\forall \delta > 0,\, x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) + \delta \mathbb{B}_Y \nsubseteq \operatorname{int}(C). \tag{3.11}$$

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{WMin}(P)$. On suppose qu'il existe un certain $\delta_0 > 0$ et un élément $x_0 \in D \backslash \{\bar{x}\}$ tels que

$$H(-(x_0 - \bar{x})) + \delta_0 \|x_0 - \bar{x}\| \mathbb{B}_Y \subseteq \operatorname{int}(C). \tag{3.12}$$

Comme H est une pseudo-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, il existe donc $a > 0$ et $b > 0$ tels que

$$F(x) \cap \mathbb{B}_b(\bar{y}) \subset F(x') + H(x - x') + \delta_0 \|x - x'\| \mathbb{B}_Y,\ \forall x, x' \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

On peut réduire a si nécessaire de sorte que $\mathbb{B}_a(\bar{x}) \subset D$. Soit $\lambda > 0$ tel que $\bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x}) \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$. Pour tout $x \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$, en prenant $x' = \bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x})$, on a

$$F(x) \cap \mathbb{B}_b(\bar{y}) \subset F(\bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x})) + H(x - (\bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x}))) + \delta_0 \|x - (\bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x}))\| \mathbb{B}_Y.$$

En particulier, pour $x = \bar{x}$ nous avons

$$F(\bar{x}) \cap \mathbb{B}_b(\bar{y}) \subset F(\bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x})) + H(-\lambda(x_0 - \bar{x})) + \delta_0 \|\lambda(x_0 - \bar{x})\| \mathbb{B}_Y.$$

Ainsi, il existe $\hat{y} \in F(\bar{x} + \lambda(x_0 - \bar{x}))$ tel que

$$\bar{y} - \hat{y} \in H(-\lambda(x_0 - \bar{x})) + \delta_0 \|\lambda(x_0 - \bar{x})\| I\!B_Y.$$

Il en résulte que

$$\lambda^{-1}(\bar{y} - \hat{y}) \in H(-(x_0 - \bar{x})) + \delta_0 \|x_0 - \bar{x}\| I\!B_Y.$$

À partir de l'inclusion (3.12), nous obtenons $\lambda^{-1}(\bar{y} - \hat{y}) \in \mathrm{int}(C)$, cela entraîne que $\bar{y} - \hat{y} \in \mathrm{int}(C)$. Il s'en suit que

$$\hat{y} \in (\{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)) \cap F(D),$$

ce qui contredit le fait que $(\bar{x}, \bar{y})$ soit un minimiseur faible du problème (P). Par conséquent,

$$\forall \delta > 0, x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) + \delta I\!B_Y \not\subseteq \mathrm{int}(C).$$

□

Lemme 3.2.2. [43] *Soit $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ à valeurs fermées bornées. On suppose que Y est de dimension finie. Alors la condition* (3.11) *est équivalente à la suivante*

$$\forall x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) \not\subseteq \mathrm{int}(C). \tag{3.13}$$

Démonstration. L'implication (3.13)$\Rightarrow$ (3.11) est claire.
Supposons que pour tous $\delta > 0$ et $x \in D \backslash \{\bar{x}\}$ on a

$$H(-(x - \bar{x})) + \delta I\!B_Y \not\subseteq \mathrm{int}(C).$$

Pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$H(-(x - \bar{x})) + \frac{1}{n} I\!B_Y \not\subseteq \mathrm{int}(C).$$

On peut donc trouver $h_n \in H(-(x - \bar{x}))$ et $u_n \in I\!B_Y$ tels que

$$h_n + \frac{u_n}{n} \in Y \backslash (\mathrm{int}(C)).$$

L'ensemble $H(-(x-\bar{x}))$ étant fermé borné dans Y qui est de dimension finie, il est compact. Ainsi, la suite $(h_n)_n$ admet une valeur d'adhérence $h \in H(-(x-\bar{x}))$. Comme $Y \setminus \mathrm{int}(C)$ est fermé, nous avons $h \in Y \setminus (\mathrm{int}(C))$. Par conséquent

$$H(-(x-\bar{x})) \not\subseteq \mathrm{int}(C).$$

□

Remarque 3.2.3. *Nous voudrions faire ressortir le fait que la condition nécessaire d'optimalité formulée dans le Théorème 3.2.1 n'est pas suffisante. À cette fin, considérons le cas $X = Y = \mathbb{R}$, l'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par $F(x) = [|x|, +\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le cône $C = \mathbb{R}_+$. L'application F est clairement positivement homogène. De plus, son graphe correspond à l'épigraphe de la fonction $f : x \mapsto f(x) = |x|$ qui est convexe. Par conséquent, F est un processus convexe défini sur $\mathbb{R}$; elle admet d'après la Proposition 2.3.4 une prédérivée stricte définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $H(x) =]-\infty, -|x|]$. Nous pouvons écrire notre problème* (P) *de la façon suivante*

$$(\tilde{\mathrm{P}}): \quad \min_{x \in \mathbb{R}} F(x).$$

Considérons le couple $(1,1)$. Celui-ci appartient clairement au graphe de F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, nous avons $H(-(x-1)) + [-\delta, \delta] =]-\infty, -|x-1|] + [-\delta, \delta] \not\subseteq \mathbb{R}_+^*$. La condition (3.11) *est donc satisfaite en $\bar{x} = 1$. Cependant, il n'est pas difficile de voir que $(\{1\} - \mathbb{R}_+^*) \cap F(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Ainsi, nous pouvons conclure que $(1,1) \notin \mathrm{WMin}(\tilde{P})$. Par conséquent, la condition n'est pas suffisante.*

Dans le théorème suivant, nous établissons une condition suffisante pour un minimiseur fort du problème (P). Nous considérons le cas où l'application F admet une prédérivée extérieure en un point $\bar{x}$ tel que l'ensemble $F(\bar{x})$ possède un élément fortement minimal $\bar{y}$. Un tel résultat sera établi sous une hypothèse de convexité assez faible.

Théorème 3.2.4 (Condition suffisante pour un minimiseur fort [43])**.** *On suppose que le cône convexe C est fermé et on considère $H : X \rightrightarrows Y$ une prédérivée extérieure de F en $\bar{x} \in D$. Soit $\bar{y} \in F(\bar{x})$ tel que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$. On suppose de plus que* *l'application F est C-étoilée en $\bar{x}$. S'il existe une constante $a > 0$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}),\ H(x-\bar{x}) \subseteq C, \tag{3.14}$$

alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème (P).

Démonstration. Soit $x \in D$ fixé. Considérons $a > 0$ tel que

$$H(v-\bar{x}) \subseteq C,\ \forall v \in \mathbb{B}_a(\bar{x}). \tag{3.15}$$

Soit $\delta > 0$. Comme H est une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$, on peut trouver $b > 0$ tel que

$$F(u) \subset F(\bar{x}) + H(u-\bar{x}) + \delta\|u-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y,\ \forall u \in \mathbb{B}_b(\bar{x}). \tag{3.16}$$

On peut choisir b assez petit tel que $b \leq a$. Soit $t \in]0,1[$ tel que $\bar{x}+t(x-\bar{x}) \in \mathbb{B}_b(\bar{x})$. Comme F est C-étoilée en $\bar{x}$, nous avons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(\bar{x}+t(x-\bar{x})) + C. \tag{3.17}$$

La relation (3.16) donne pour $u = \bar{x}+t(x-\bar{x})$,

$$F(\bar{x}+t(x-\bar{x})) \subset F(\bar{x}) + H(t(x-\bar{x})) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y.$$

Cela implique que

$$F(\bar{x}+t(x-\bar{x})) + C \subset F(\bar{x}) + H(t(x-\bar{x})) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

Tenant compte de la relation (3.17), nous obtenons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(\bar{x}) + H(t(x-\bar{x})) + \delta t\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

Comme $\bar{y} \in F(\bar{x})$ et $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$, nous avons

$$(1-t)\{\bar{y}\} + tF(x) \subset \{\bar{y}\} + H(t(x-\bar{x})) + \delta t\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C + C.$$

Il vient alors,

$$t(F(x) - \{\bar{y}\}) \subset H(t(x-\bar{x})) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

Sachant que $\bar{x} + t(x - \bar{x}) \in I\!B_a(\bar{x})$, d'après la relation (3.14), nous avons

$$H(t(x - \bar{x})) \subset C.$$

Il s'en suit que

$$t(F(x) - \{\bar{y}\}) \subset \delta t \|x - \bar{x}\| I\!B_Y + C + C,$$

c'est-à-dire $F(x) - \{\bar{y}\} \subset C + \delta \|x - \bar{x}\| I\!B_Y$, pour tout $\delta > 0$. Par conséquent,

$$F(x) - \{\bar{y}\} \subset \bigcap_{\delta > 0} (C + \delta \|x - \bar{x}\| I\!B_Y) = \overline{C} = C.$$

Il en résulte que

$$F(x) \subset \{\bar{y}\} + C, \ \forall x \in D.$$

C'est-à-dire, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{SMin}(P)$. □

Remarque 3.2.5. *Nous aimerions signaler que la condition suffisante donnée dans le Théorème 3.2.4 n'est pas nécessaire. Pour ce faire, nous reprenons le problème* $(\tilde{P})$ *de la Remarque 3.2.3. Le couple* $(0, 0)$ *est un élément du graphe de l'application* F*. De plus, ce couple est un minimiseur fort du problème* $(\tilde{P})$ *puisque* $F(\mathbb{R}) \subset C = \mathbb{R}_+$*. Cependant, le point* $\bar{x} = 0$ *ne satisfait pas la condition* (3.14).

Il nous semble important de faire ressortir en quoi les Théorèmes 3.2.1 et 3.2.4 s'inscrivent dans le paradigme des critères d'optimalité. Considérons le cas particulier où F est une application univoque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement Fréchet différentiable et $C = \mathbb{R}_+$. À la lumière de la Remarque 2.1.8, la dérivée de Fréchet $\nabla f(\bar{x})$ de f en un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est une prédérivée stricte au sens de la Définition 2.1.6 de f en ce point. Ainsi, les conditions équivalentes (3.11) et (3.13) du Théorème 3.2.1 et du Lemme 3.2.2 qui s'écrivent respectivement :

$$\forall \delta > 0, \ x \in D \backslash \{\bar{x}\}, \ H(-(x - \bar{x})) + \delta I\!B_Y \not\subseteq \mathrm{int}(C).$$

et

$$\forall x \in D \backslash \{\bar{x}\}, \ H(-(x - \bar{x})) \not\subseteq \mathrm{int}(C).$$

peuvent être traduites par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0, \ i.e., \nabla f(\bar{x}) = 0.$$

On obtient ainsi, la fameuse règle de Fermat qui est une condition nécessaire d'optimalité bien connue. Lorsque f est convexe (donc étoilée en chacun des points de son domaine) et différentiable en $\bar{x}$, alors la condition (3.14) du Théorème 3.2.4 qui s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}),\ H(x-\bar{x}) \subseteq C,$$

devient,

$$\exists a > 0, \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}),\ \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) \geq 0,$$

celle-ci est une condition suffisante de minimalité locale bien connue. Dans le cadre de l'optimisation multivoque, on peut remarquer la similitude existant entre les conditions exprimées dans le Théorème 3.2.1 et le Lemme 3.2.2 et celle exprimée dans le Théorème 1.5.20 qui s'écrit :

$$\hat{D}F(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) \not\in (-\mathrm{int}(C)),\ \forall x \in D\,; \tag{3.18}$$

où $\hat{D}F(\bar{x},\bar{y})$ désigne l'épidérivée contingente de F au point $(\bar{x},\bar{y})$. Aussi, nous pouvons observer la similitude existant entre la condition nécessaire et suffisante pour un minimiseur fort $(\bar{x},\bar{y})$ du problème (P) exprimée par la relation (1.18) qui s'écrit :

$$\hat{D}F(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) \in C,\ \forall x \in D\ ;$$

et la condition suffisante exprimée par la relation (3.14).

Dans le corollaire suivant, nous considérons le cas où la fonction objectif est un processus convexe. En exploitant le résultat établi dans la Proposition 2.3.4 garantissant l'existence de prédérivées strictes pour l'application F, nous établissons une condition nécessaire et une condition suffisante d'optimalité pour le problème (P).

Corollaire 3.2.6. *Soit $F : D \subset X \rightrightarrows Y$ un processus convexe où D est un sous-ensemble ouvert de* dom F *tel que $D - D \subset$* dom F *et $\bar{x} \in D$.*

(a) *Si le couple $(\bar{x},\bar{y})$ est un minimiseur faible (ou fort) du problème* (P) *alors,*

$$\forall \delta > 0,\ x \in D\backslash\{\bar{x}\},\ -F(x-\bar{x}) + \delta\mathbb{B}_Y \not\subseteq \mathrm{int}(C). \tag{3.19}$$

(b) *Inversement, on suppose que le cône convexe* C *est fermé et le couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ *est tel que* $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$. *S'il existe une constante* $a > 0$ *telle que*

$$\forall x \in I\!B_a(\bar{x}), \ -F(\bar{x} - x) \subseteq C, \tag{3.20}$$

alors $(\bar{x}, \bar{y})$ *est un minimiseur fort* (*a fortiori faible*) *du problème* (P).

Démonstration. Soit $\bar{x} \in D$. D'après la Proposition 2.3.4 l'application F admet une prédérivée stricte donnée par $H(\cdot) := -F(-\cdot)$. En particulier, celle-ci est une pseudo-prédérivée stricte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$, pour tout $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Grâce au Théorème 3.2.1, si $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{WMin}(P)$, alors

$$H(-(x - \bar{x})) + \delta I\!B_Y \not\subseteq \operatorname{int}(C), \ \forall \delta > 0, \, x \in D \setminus \{\bar{x}\}.$$

C'est-à-dire,

$$-F(x - \bar{x}) + \delta I\!B_Y \not\subseteq \operatorname{int}(C), \ \forall \delta > 0, \, x \in D \setminus \{\bar{x}\}.$$

(b) On suppose que C est fermé, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$ est tel que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$ et qu'il existe une constante $a > 0$ telle que

$$-F(\bar{x} - x) \subseteq C, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}).$$

Nous avons

$$H(x - \bar{x}) \subseteq C, \ \forall x \in I\!B_a(\bar{x}).$$

Comme F est un processus convexe, elle est C-étoilée en chaque point de D, en particulier en $\bar{x}$. Les hypothèses du Théorème 3.2.4 sont alors satisfaites. Par conséquent, on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{SMin}(P)$. □

Dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un processus convexe univoque et $C = \mathbb{R}_+$, il s'agit en fait d'une application linéaire. La relation (3.19) correspond, grâce au Lemme 3.2.2 bien sûr, à l'assertion suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ f(x) \geq 0, i.e., f \equiv 0.$$

Ce qui confirme le fait qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant un minimiseur est identiquement nulle.

Dans le corollaire suivant, nous établissons une condition nécessaire et une condition suffisante d'optimalité dans le cas où l'espace objectif Y est de dimension finie.

Corollaire 3.2.7. *Soit Y un espace de Banach de dimension finie, D un sous-ensemble convexe d'intérieur non vide de X. Soit $F : D \rightrightarrows Y$ une application multivoque convexe fermée et $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F \cap (D \times Y)$ tel que $\bar{x} \in \text{int}(D)$.*

(a) *Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une pseudo-prédérivée stricte en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$ à valeurs fermées bornées, si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible (ou fort) du problème* (P) *alors*

$$\forall x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) \nsubseteq \text{int}(C).$$

(b) *Inversement, on suppose que le cône C est fermé et qu'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ telles que $F(x) \subset \eta \mathbb{B}_Y$ pour tout $x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$. Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$. Si le couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F$ est tel que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$ et s'il existe une constante $a > 0$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}),\ H(x - \bar{x}) \subseteq C, \tag{3.21}$$

alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort (a fortiori faible) du problème (P).

Démonstration. (a) Soit H une pseudo-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. L'existence d'une telle prédérivée est garantie par le Theorème 2.3.5. Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{WMin}(P)$, alors d'après le Théorème 3.2.1 nous avons

$$\forall \delta > 0,\ x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) + \delta \mathbb{B}_Y \nsubseteq \text{int}(C).$$

Comme l'application H vérifie les hypothèses du Lemme 3.2.2, nous avons

$$\forall x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) \nsubseteq \text{int}(C).$$

Et cette dernière relation est la conclusion désirée.

(b) Inversement, supposons qu'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ telles que

$$F(x) \subset \eta \mathbb{B}_Y,\ \forall x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x}).$$

Soit H une prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$. Celle-ci existe par le biais du Corollaire 2.3.9 avec $K = \{0_Y\}$. Par ailleurs, la convexité de F et le fait que $0_Y \in C$

entraînent que F est C-étoilée en $\bar{x}$. Si de plus $(\bar{x}, \bar{y})$ est tel que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$, alors les hypothèses du Théorème 3.2.4 sont satisfaites. D'après ce théorème, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{SMin}(P)$. □

Après avoir établi des conditions d'optimalité dans les cas convexe et C-étoilé, il est tout à fait naturel de considérer le cas C-convexe. À l'instar de la Proposition 2.3.1, où la relation existant entre la C-convexité de l'application F et la convexité de l'application $F + C$ a été établie, avant de considérer le cas C-convexe, nous allons établir un lien entre les minimiseurs de l'application F et ceux de l'application $F + C$. Tel sera l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.2.8. *Soit D un sous-ensemble non vide de X et $F : D \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Considérons le problème d'optimisation multivoque* $(\mathrm{P_C})$:

$$(P_C) : \begin{cases} \text{Minimiser } F(x) + C \\ \text{tel que } \quad x \in D, \end{cases}$$

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible du problème (P) *alors c'est aussi un minimiseur faible du problème* $(\mathrm{P_C})$.

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un minimiseur faible du problème (P). On a en particulier, $\bar{x} \in D$ et $\bar{y} \in F(\bar{x})$. Comme $0_Y \in C$, on a $\bar{y} \in F(\bar{x}) + C = (F + C)(\bar{x})$, c'est-à-dire, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\,(F + C) \cap (D \times Y)$. Supposons que $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \mathrm{WMin}(P_C)$. Cela entraîne que

$$(\{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)) \cap (F + C)(D) \neq \emptyset.$$

On peut trouver un vecteur $\hat{y} \in Y$ tel que

$$\hat{y} \in (F + C)(D) \cap (\{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C));$$

il existe $y \in F(D)$, $c \in C$ tels que $\hat{y} = y + c$. Nous avons $y + c \in \{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)$. Il s'en suit que

$$y \in \{\bar{y}\} - (\mathrm{int}(C) + C).$$

Sachant que C est un cône convexe, nous avons $\mathrm{int}(C) + C \subset \mathrm{int}(C)$. Il en découle que $y \in \{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)$. Nous en déduisons que

$$(\{\bar{y}\} - \mathrm{int}(C)) \cap F(D) \neq \emptyset.$$

Cette dernière relation contredit le fait que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{WMin}(P)$. Par conséquent, $(\bar{x}, \bar{y})$ est aussi un minimiseur faible du problème ($\mathrm{P_C}$). □

Dans la proposition suivante, nous établissons sous certaines hypothèses une condition nécessaire et une condition suffisante d'optimalité lorsque l'application F est C-convexe.

Proposition 3.2.9. [43] *Soit Y un espace de Banach de dimension finie et D un sous-ensemble convexe de X tel que $\mathrm{int}(D) \neq \emptyset$. Soit C un cône convexe fermé de Y et $F : D \rightrightarrows Y$ une application multivoque C-convexe. On considère un point $\bar{x} \in \mathrm{int}(D)$ et l'on suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

(1) *$F(x)$ soit C-fermé pour tout $x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$;*

(2) *il existe une constante $\eta > 0$ telle que $F(x) \subset \eta \mathbb{B}_Y$ pour tout $x \in \mathbb{B}_\alpha(\bar{x})$.*

(a) *Soit H une prédérivée stricte à valeurs fermées bornées de $F + C$ en $\bar{x}$. Si le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible (ou fort) du problème* (P) *alors,*

$$\forall x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) \nsubseteq \mathrm{int}(C).$$

(b) *Inversement, soit H une prédérivée extérieure de l'application $F + C$ en $\bar{x}$ et un couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F \cap (D \times Y)$ tel que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$. S'il existe une constante $a > 0$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}),\ H(x - \bar{x}) \subseteq C, \tag{3.22}$$

alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème (P).

Démonstration. L'application F étant C-convexe, $F + C$ est convexe. Supposons que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{WMin}(P)$. Grâce au Lemme 3.2.8, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{WMin}(P_C)$.

Soit H une prédérivée stricte à valeurs fermées bornées de $F + C$ en $\bar{x}$. L'existence de cette dernière est garantie par le Théorème 2.3.6. En particulier, H est une pseudo-prédérivée stricte de $F + C$ en $\bar{x}$ pour $\bar{y}$. Grâce au Théorème 3.2.1 nous avons

$$\forall \delta > 0, x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) + \delta \mathbb{B}_Y \nsubseteq \mathrm{int}(C).$$

L'application H étant à valeurs fermées bornées et Y est de dimension finie, d'après le Lemme 3.2.2 cette dernière relation est équivalente à la suivante

$$\forall x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ H(-(x - \bar{x})) \nsubseteq \mathrm{int}(C).$$

Celle-ci est la conclusion désirée.

(b) Inversement, soit $x \in D$ fixé et $a > 0$ satisfaisant la relation (3.22). Comme H est une prédérivée extérieure de $F + C$ en $\bar{x}$, pour tout $\delta > 0$, il existe $b > 0$ tel que

$$F(u) + C \subset F(\bar{x}) + C + H(u - \bar{x}) + \delta\|u - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall u \in \mathbb{B}_b(\bar{x}). \tag{3.23}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $b < a$. Soit $t \in]0, 1[$ fixé tel que $\bar{x} + t(x - \bar{x}) \in \mathbb{B}_b(\bar{x})$. Comme F est C-convexe, en particulier elle est C-étoilée en $\bar{x}$. Il en résulte que

$$(1 - t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(\bar{x} + t(x - \bar{x})) + C. \tag{3.24}$$

En faisant $u = \bar{x} + t(x - \bar{x})$, dans la relation (3.23) et tenant compte l'inclusion (3.24), nous obtenons

$$(1 - t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(\bar{x}) + H(t(x - \bar{x})) + \delta t\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

Tenant compte de la condition $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$, on a

$$(1 - t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset \{\bar{y}\} + H(t(x - \bar{x})) + t\delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C + C.$$

Il en découle que

$$t(F(x) - \bar{y}) \subset H(t(x - \bar{x})) + t\delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

La relation (3.22) implique,

$$t(F(x) - \bar{y}) \subset C + t\delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

Sachant que C est un cône convexe, nous avons

$$t(F(x) - \bar{y}) \subset t\delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C, \ i.e., F(x) - \bar{y} \subset C + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y, \ \forall \delta > 0.$$

Il s'en suit que,

$$F(x) - \{\bar{y}\} \subset \bigcap_{\delta > 0}(C + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y) = \overline{C} = C.$$

Soit,

$$F(x) \subset \{\bar{y}\} + C, \ \forall x \in D.$$

Donc $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème (P). $\square$

3.3 Conditions d'optimalité et cône-prédérivées

Dans ce paragraphe, nous introduisons le concept de cône-prédérivées d'applications multivoques. Un concept de prédérivée relativement faible par rapport celui de la Définition 2.1.6 visant à élargir le champ de la prédérivabilité à une classe de plus en plus large d'applications multivoques. Par la suite, ce concept est utilisé pour établir divers résultats dont des conditions d'optimalité pour le problème (P). En particulier nous obtenons à partir de cette notion une sorte d'extension de la règle de Fermat au cadre multivoque.

Définition 3.3.1 (Cône-prédérivée)**.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, $K \subset Y$ un cône convexe non vide, $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ et $\bar{x} \in X$.*

(a) *Nous disons que l'application H est une K-prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$, si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + H(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + K, \ \forall x \in U.$$

(b) *On dit que l'application H est une K-prédérivée intérieure de F en $\bar{x}$, si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(\bar{x}) \subset F(x) - H(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + K, \ \forall x \in U.$$

(c) *On dit que l'application H est une K-prédérivée de F en $\bar{x}$, si elle est à la fois une K-prédérivée intérieure et extérieure de F en ce point.*

(d) *On dit que l'application H est une K-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$, si pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que*

$$F(x) \subset F(x') + H(x-x') + \delta\|x-x'\|\mathbb{B}_Y + K, \ \forall x, \, x' \in U.$$

Il est à souligner que lorsque $K = \{0_Y\}$, alors les différentes inclusions de cette définition correspondent à leurs homologues dans la Définition 2.1.6.

Pour illustrer la Définition 3.3.1, nous trouvons qu'il est intéressant de considérer le cas où $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Nous rappelons qu'un sous-gradient de f en $\bar{x}$ est un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle x^*, x-\bar{x}\rangle, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous avons,

$$f(x) \in f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + \mathbb{R}_+, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, nous avons

$$f(x) \in f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + \delta[-\|x - \bar{x}\|, \|x - \bar{x}\|] + \mathbb{R}_+, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Il est clair que l'application $H(x) := \langle x^*, x \rangle$ est positivement homogène. Ainsi, nous pouvons conclure que toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant un sous-gradient $x^* \in \mathbb{R}^n$ en un point $\bar{x}$ admet aussi une $\mathbb{R}_+$-prédérivée extérieure en ce point.

Le résultat suivant établit un lien entre les notions de prédérivées extérieure et stricte de la Définition 2.1.6 et les notions correspondantes de la Définition 3.3.1.

Proposition 3.3.2. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, $H \in \mathcal{H}(X, Y)$ et $K \subset Y$ un cône convexe non vide.*

(a) *Si H est une prédérivée stricte (resp. extérieure) de F en $\bar{x}$, alors H est une K-prédérivée stricte (resp. extérieure) de F en ce point.*

(b) *Si H est une K-prédérivée stricte (resp. extérieure) de F en $\bar{x}$, alors $H + K$ est une prédérivée stricte (resp. extérieure) de F en $\bar{x}$.*

Démonstration. L'implication de l'assertion (a) est évidente. En effet, si l'application H est une prédérivée stricte de F en $\bar{x}$. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, \, x' \in U.$$

Comme $0_Y \in K$, nous avons

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}_Y + K, \ \forall x, \, x' \in U.$$

(b) On suppose que H est une K-prédérivée stricte de F en $\bar{x}$. Pour tout $\delta > 0$, il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que

$$F(x) \subset F(x') + H(x - x') + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}_Y + K, \ \forall x, \, x' \in U,$$

c'est-à-dire,

$$F(x) \subset F(x') + (H + K)(x - x') + \delta\|x - x'\|\mathbb{B}_Y, \ \forall x, \, x' \in U.$$

Pour compléter la preuve, il suffit de démontrer que l'application $H + K$ est positivement homogène. Vu que $0_Y \in H(0_X)$ et $0_Y \in K$, nous avons $0_Y \in (H + K)(0_X)$. D'autre part, pour tous $\lambda > 0$ et $x \in X$, nous avons

$$(H + K)(\lambda x) = H(\lambda x) + K = \lambda H(x) + \lambda K = \lambda(H + K)(x).$$

On obtient ainsi le résultat désiré. Les autres cas s'en déduient en fixant $x' = \bar{x}$ dans les relations correspondantes. □

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Pour tout vecteur $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, l'approximation de Taylor du premier ordre de f autour de $\bar{x}$ vérifie la relation suivante :

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}),\ \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Dans le cadre multivoque, lorsqu'une application $F : D \subset X \rightrightarrows Y$ est C-convexe, Jahn et Rauh ont établi l'assertion suivante (voir [66]) :

$$F(x) - \{\bar{y}\} \subset \{\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})\} + C,\ \forall x \in D\,;$$

dans laquelle $\hat{D}F(\bar{x}, \bar{y})$ désigne l'épidérivée contingente (si elle existe) de l'application F en un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Dans la proposition suivante, en utilisant la notion de C-prédérivée, nous établissons un résultat similaire lorsque l'application F est C-étoilée au point $\bar{x}$ pourvu que $\bar{y}$ soit un point fortement minimal de $F(\bar{x})$.

Proposition 3.3.3. *Soit $C \subset Y$ un cône convexe non vide, $F : D \subset X \rightrightarrows Y$ une application multivoque, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ tel que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$. De plus, on suppose que F est C-étoilée au point $\bar{x}$. Si une application $H : X \rightrightarrows Y$ est une C-prédérivée extérieure de F en ce point, alors*

$$\forall x \in D,\ F(x) \subset \{\bar{y}\} + \overline{H(x - \bar{x}) + C}.$$

Démonstration. Soit $x \in D$ et $\delta > 0$ fixés. Comme H est une C-prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$, il existe $a > 0$ tel que

$$F(u) \subset F(\bar{x}) + H(u - \bar{x}) + \delta\|u - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C,\ \forall u \in \mathbb{B}_a(\bar{x}). \tag{3.25}$$

Sachant que l'application F est C-étoilée en $\bar{x}$, pour tout $t \in]0,1[$ nous avons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F((1-t)\bar{x} + tx) + C. \tag{3.26}$$

On peut choisir t assez petit de sorte que $\bar{x} + t(x-\bar{x}) \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$. Ainsi, en faisant $u = \bar{x} + t(x-\bar{x})$ dans la relation (3.25), nous obtenons

$$F((1-t)\bar{x} + x) \subset F(\bar{x}) + tH(x-\bar{x}) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C.$$

Cela entraîne que

$$F((1-t)\bar{x} + x) + C \subset F(\bar{x}) + tH(x-\bar{x}) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C + C.$$

En utilisant l'inclusion (3.26), nous obtenons

$$(1-t)F(\bar{x}) + tF(x) \subset F(\bar{x}) + tH(x-\bar{x}) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C + C.$$

Vu que $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$ et $\bar{y} \in F(\bar{x})$, nous avons

$$(1-t)\bar{y} + tF(x) \subset \{\bar{y}\} + tH(x-\bar{x}) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C + C + C.$$

Sachant que C est un cône convexe, nous avons

$$t(F(x) - \bar{y}) \subset tH(x-\bar{x}) + t\delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C, \ \forall \delta > 0.$$

Autrement dit,

$$F(x) - \bar{y} \subset H(x-\bar{x}) + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C, \ \forall \delta > 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} F(x) - \bar{y} \quad &\subset \quad \bigcap_{\delta>0} (H(x-\bar{x}) + C + \delta\|x-\bar{x}\|\mathbb{B}_Y); \\ &\subset \quad \overline{H(x-\bar{x}) + C}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F(x) \subset \{\bar{y}\} + \overline{H(x-\bar{x}) + C}, \ \forall x \in D.$$

Telle est la conclusion désirée. □

L'un des résultats bien connus de la théorie de l'optimisation est la règle de Fermat. Un résultat établi au cours de la première moitié du XVII[e] siècle pour des fonctions polynomiales et trigonométriques dont l'une des variantes peut être énoncée de la façon suivante :

Théorème 3.3.4. *Soit $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $\bar{x}$ est un extremum local de f et si f est différentiable en $\bar{x}$, alors*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0. \tag{3.27}$$

Dans la proposition suivante, nous établissons un résultat similaire en termes de cône-prédérivées d'applications multivoques.

Proposition 3.3.5 (Règle de Fermat)**.** *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On suppose que $D = \operatorname{dom} F$. On considère un couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$.*

(a) *Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{SMin}(P)$, alors l'application $H \equiv \{0_Y\}$ est une C-prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.*

(b) *Inversement, on suppose que le cône C est fermé, l'application $H \equiv \{0_Y\}$ est une C-prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$, $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$ et F est C-étoilée en $\bar{x}$. Alors, le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème (P).*

Démonstration. (a) Fixons une constante $\delta > 0$. Si $(\bar{x}, \bar{y})$ un minimiseur fort du problème (P) alors $F(D) \subset \{\bar{y}\} + C$. Comme $0_Y \in \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y$ pour tous $x \in D$ et $\bar{y} \in F(\bar{x})$ nous avons

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C, \ \forall x \in D. \tag{3.28}$$

Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{B}_a(\bar{x})$. Si $x \in D$ alors la relation (3.28) est clairement vérifiée. Sinon, on a $F(x) = \emptyset$ et l'inclusion reste vraie. Ainsi, pour tout $\delta > 0$, il existe une certaine constante $a > 0$ telle que

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \delta\|x - \bar{x}\|\mathbb{B}_Y + C, \ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Par conséquent, l'application $H \equiv \{0_Y\}$ est une C-prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$.

(b) Inversement, si l'application $H \equiv \{0_Y\}$ est une C-prédérivée extérieure de F au point $\bar{x}$, $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$ et F est C-étoilée en $\bar{x}$, alors les hypothèses de la

Proposition 3.3.3 sont satisfaites. D'après cette proposition nous avons

$$F(x) \subset \{\bar{y}\} + \overline{C}, \ \forall x \in D.$$

Le cône C étant fermé, nous avons

$$F(D) \subset \{\bar{y}\} + C.$$

On conclut que le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème (P). □

Maintenant, nous allons établir le résultat suivant donnant une condition suffisante pour un minimiseur fort $(\bar{x}, \bar{y})$ du problème (P) lorsque la fonction objectif F est C-étoilée en $\bar{x}$ et admet une C-prédérivée extérieure en ce point.

Théorème 3.3.6 (Condition suffisante pour un minimiseur fort). *On suppose que le cône convexe $C \subsetneq Y$ est fermé. On considère $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F \cap (D \times Y)$ tel que F soit C-étoilée en $\bar{x}$ et $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$. Soit $H : X \rightrightarrows Y$ une C-prédérivée extérieure de F en $\bar{x}$. S'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{B}_a(\bar{x}) \subset D$ et*

$$H(x - \bar{x}) \subseteq C, \ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}), \tag{3.29}$$

alors $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort du problème (P).

Démonstration. Sachant que F est C-étoilée en $\bar{x}$, H est une C-prédérivée extérieure de F en ce point et $F(\bar{x}) \subset \{\bar{y}\} + C$; les hypothèses de la Proposition 3.3.3 sont satisfaites. Ainsi, pour tout $x \in D$, nous avons

$$F(x) - \bar{y} \subset \overline{H(x - \bar{x}) + C}.$$

En particulier,

$$F(x) - \bar{y} \subset \overline{H(x - \bar{x}) + C}, \ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

Grâce à la relation (3.29), nous obtenons

$$F(x) - \bar{y} \subset \overline{C + C} \subset \overline{C} = C, \ \forall x \in \mathbb{B}_a(\bar{x}).$$

C'est-à-dire,

$$F(\mathbb{B}_a(\bar{x})) \subset \{\bar{y}\} + C.$$

Ainsi, le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur fort local du problème (P). L'application F étant C-étoilée au point $\bar{x}$, d'après la Proposition 3.1.8, le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est aussi un minimiseur fort global du problème (P). □

Il nous semble important de souligner que dans ce dernier théorème, nous avons obtenu la même conclusion que dans le Théorème 3.2.4 avec des hypothèses identiques à l'exception de celle de la prédérivabilité qui est ici plus faible.

3.4 Application en micro-économie

Les précédentes sections de ce chapitre ont été consacrées au développement d'une théorie mathématique abstraite associée à des problèmes d'optimisation faisant intervenir des applications multivoques. Parmi les différents résultats établis dans ce cadre figurent des conditions d'optimalité pour de tels problèmes lorsque les fonctions objectifs admettent certains types de prédérivées. Dans cette présente section, nous voudrions justifier l'applicabilité de la théorie développée à des situations de la vie réelle. Plus précisément, nous nous proposons d'appliquer certains de nos résultats à un modèle classique de l'économie du bien-être faisant intervenir un nombre fini de producteurs et de consommateurs. En d'autres termes, nous allons montrer que la recherche d'allocations dites optimales d'un modèle donné de l'économie du bien-être peut être réduite à la résolution d'un problème d'optimisation multivoque.

On considère un espace vectoriel normé de biens X et une économie :

$$\mathcal{E} = (S_1, S_2, ..., S_m, C_1, C_2, ..., C_n, W), \tag{3.30}$$

faisant intervenir m producteurs et n consommateurs ;

▷ pour chaque $j \in \{1, 2, ..., m\}$, $S_j \subset X$ représente l'ensemble de production du producteur d'indice j ;

▷ pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $C_i \subset X$ représente l'ensemble de consommation du consommateur d'indice i ;

▷ $W \subset X$ représente la contrainte de demande nette liée aux biens initialement répertoriés.

▷ Une stratégie de production est un élément $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_m$;

▷ un plan de consommation est un élément $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$;

▷ un couple $(y, z) \in \prod_{j=1}^{m} S_j \times \prod_{i=1}^{n} C_i$ est appelé un **état admissible** de l'économie $\mathcal{E}$.

Pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, on suppose que :

- C_i est fermé dans X. Une hypothèse garantissant la stabilité des ensembles de consommation. En d'autres termes, pour i fixé dans $\{1, 2, ..., n\}$, si l'agent correspondant peut consommer une suite de paniers de biens $z_i^1, z_i^2, ..., z_i^p, ...$ et si $z_i = \lim_{p\to\infty} z_i^p$ existe, alors il peut espérer pouvoir consommer z_i également ;
- C_i est un cône convexe. Une telle hypothèse est liée à l'additivité et la divisibilité des biens. En clair, si z_i, $z_i' \in C_i$, alors $z_i + z_i' \in C_i$ et l'agent correspondant peut choisir de consommer $\lambda z_i + (1 - \lambda)z_i'$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Certainement, on peut s'interroger quant à la divisibilité des biens lourds, se demander par exemple si le quart d'un avion conserve les propriétés de celui-ci. Toutefois, cette hypothèse n'est pas dénuée de sens dans la mesure où l'exploitation en termes de location de deux avions de même type le premier pendant 3 mois et le second pendant 9 mois sur l'année est équivalente à celle d'un appareil entier sur l'année.

D'autre part, pour chaque $j \in \{1, 2, ..., m\}$, on suppose que :

- S_j est convexe. Une hypothèse garantissant la propriété de divisibilité des biens ;
- $0_X \in S_j$, on admet ainsi qu'une entreprise peut arrêter de produire ;
- S_j est une partie fermée de X, une hypothèse garantissant la stabilité des ensembles de production à la limite.

Définition 3.4.1 (Allocation réalisable)**.** *Un état admissible (y, z) de l'économie $\mathcal{E}$ est appelé une allocation réalisable si elle vérifie la condition suivante :*

$$w := \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j \in W. \tag{3.31}$$

Dans la littérature, on définit une allocation optimale faible de Pareto d'une économie $\mathcal{E}$ comme étant une allocation réalisable à partir de laquelle on ne peut pas améliorer strictement la satisfaction de tous les agents de cette économie simultanément. Un tel concept est présenté formellement dans la définition suivante. Pour d'autres concepts d'allocation optimale existant dans la littérature, le lecteur pourra consulter par exemple [15, 67, 68, 78].

Définition 3.4.2 (Allocation optimale faible de Pareto)**.** *Soit* $(\bar{y}, \bar{z})$ *une allocation réalisable de l'économie* $\mathcal{E}$. *On dit que le couple* $(\bar{y}, \bar{z})$ *est une allocation optimale faible de Pareto de cette économie, s'il n'existe aucune allocation réalisable* (y, z) *telle que* z_i *soit strictement préféré à* $\bar{z}_i$ *pour tout* $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Maintenant, nous allons associer un problème d'optimisation multivoque au modèle économique $\mathcal{E}$. En vue de formuler un tel problème, nous considérons le sous-ensemble $\Delta = \prod_{i=1}^{n} C_i$ de X^n et l'application multivoque $F : X^{m+1} \rightrightarrows X^n$ définie pour $x = (y, w)$ par :

$$F(y, w) = \left\{ z \in \Delta \,|\, w = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j \right\}. \tag{3.32}$$

Lemme 3.4.3. *L'application* F *définie par la relation* (3.32) *est un processus convexe.*

Démonstration. La condition $0_{X^n} \in F(0_{X^{m+1}})$ est évidente.
Soient $(y, w) \in X^{m+1}$ et $\lambda > 0$. Si $(y, w) \notin \operatorname{dom} F$, alors $\lambda F(y, w) = F(\lambda y, \lambda w) = \emptyset$. Sinon, il existerait $z \in \Delta$ tel que $z \in F(\lambda y, \lambda w)$. Cela entraîne que

$$\lambda w = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda y_j$$

Il en découle que $\frac{1}{\lambda} z \in F(y, w)$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On en déduit que $F(\lambda y, \lambda w) = \emptyset$. De façon similaire, on montre que $F(\lambda y, \lambda w) = \emptyset \Rightarrow F(y, w) = \emptyset$.
Supposons que $(y, w) \in \operatorname{dom} F$. Soit $z \in F(y, w)$, nous avons

$$w = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

En multipliant par λ, nous avons

$$\lambda w = \sum_{i=1}^{n} \lambda z_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda y_j.$$

Il en découle que $\lambda z \in F(\lambda y, \lambda w)$. D'où l'inclusion $\lambda F(y, w) \subset F(\lambda y, \lambda w)$.

Soit à présent $z \in F(\lambda y, \lambda w)$. Nous avons,

$$\lambda w = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda y_j.$$

Il s'en suit que,

$$w = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Nous avons ainsi,

$$\frac{1}{\lambda} z \in F(y, w) \Longrightarrow z \in \lambda F(y, w).$$

D'où l'égalité $F(\lambda x) = \lambda F(x),\ \forall x \in X^{m+1},\ \lambda > 0$.
Pour terminer, choisissons $x = (y, w),\ x' = (y', w') \in X^{m+1}$. Si $(y, w) \notin \operatorname{dom} F$ ou $(y', w') \notin \operatorname{dom} F$, alors il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, soit $z \in F(y, w)$ et $z' \in F(y', w')$. Nous avons

$$w = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j \quad \text{et} \quad w' = \sum_{i=1}^{n} z'_i - \sum_{j=1}^{m} y'_j.$$

On en déduit que

$$w + w' = \sum_{i=1}^{n} (z_i + z'_i) - \sum_{j=1}^{m} (y_j + y'_j),\ \textit{i.e.},$$

$$z + z' \in F(y + y', w + w').$$

Par conséquent, $F(x) + F(x') \subset F(x + x'),\ \forall x,\ x' \in X^{m+1}$. □

On suppose qu'il existe un cône convexe propre K d'intérieur non vide, induisant sur X un ordre partiel noté $\leq_K$, défini de la façon suivante $z_i \leq_K \hat{z}_i \Leftrightarrow \hat{z}_i - z_i \in K$. Naturellement, la relation binaire notée $\leq_{K^n}$, définie sur l'espace produit X^n par $z \leq_{K^n} \hat{z} \Leftrightarrow \hat{z} - z \in K^n$ est un ordre partiel sur l'espace en question. On associe à ces relations les préférences des consommateurs de la manière suivante :

- $\hat{z}_i - z_i \in \operatorname{int}(K)$ si et seulement si le consommateur d'indice i préfère strictement z_i à $\hat{z}_i$;

- $\hat{z}_i - z_i \in K$ si et seulement si le consommateur d'indice i préfère strictement z_i à $\hat{z}_i$ ou s'il est indifférent par rapport à $\hat{z}_i$ et z_i.
- $\hat{z} - z \in \operatorname{int}(K^n)$ si et seulement si pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, le consommateur correspondant préfère strictement z_i à $\hat{z}_i$. On dit alors que le plan de consommation z est strictement préféré à $\hat{z}$.

On associe au modèle économique $\mathcal{E}$ le problème de minimisation multivoque avec contrainte géométrique suivant :

$$(P_{\mathcal{E}}) : \begin{cases} \text{Minimiser } F(x) \\ \text{tel que } \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega := S_1 \times S_2 \times ... \times S_m \times W$, F est l'application définie par la relation (3.32) et X^n est partiellement ordonné par le cône convexe propre et solide K^n.

Dans [15] Bao et Mordukhovich ont établi des équivalences entre plusieurs concepts de minimiseurs dits complètement localisés d'un problème d'optimisation multivoque analogue et divers concepts d'allocations optimales locales liés à des préférences générales exprimées à l'aide d'une application multivoque. Dans la proposition suivante, nous établissons un lien entre les allocations optimales faibles de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$ et les minimiseurs faibles du problème $(P_{\mathcal{E}})$.

Proposition 3.4.4. [44] *On considère une allocation réalisable $(\bar{y}, \bar{z})$ de l'économie $\mathcal{E}$. On pose $\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j$ et $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{w})$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le couple $(\bar{y}, \bar{z})$ est une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$;*

(ii) *le couple $(\bar{x}, \bar{z})$ est un minimiseur faible du problème $(P_{\mathcal{E}})$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que $(\bar{y}, \bar{z})$ est une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$. Alors, pour toute allocation réalisable (y, z) de l'économie $\mathcal{E}$, il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que z_i ne soit pas strictement préféré à $\bar{z}_i$, c'est-à-dire, $z_i \notin \bar{z}_i - \operatorname{int}(K)$.
Supposons que $(\bar{x}, \bar{z})$ ne soit pas un minimiseur faible du problème $(P_{\mathcal{E}})$. Cela entraîne que

$$(\bar{z} - \operatorname{int}(K^n)) \cap F(\Omega) \neq \emptyset. \tag{3.33}$$

Ainsi, on peut trouver des éléments $z \in \Delta$ et $x = (y, w) \in \Omega$ tels que

$$z \in \bar{z} - \mathrm{int}(K^n) \quad \text{et} \quad z \in F(x). \tag{3.34}$$

Par construction, nous avons $\sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j \in W$. Autrement dit, (y, z) est une allocation réalisable de l'économie $\mathcal{E}$. Par ailleurs, la première partie de la relation (3.34) entraîne que $z_i \in \bar{z}_i - \mathrm{int}(K)$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. C'est une contradiction à l'hypothèse de départ. Par conséquent, $(\bar{x}, \bar{z})$ est un minimiseur faible du problème $(P_{\mathcal{E}})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $(\bar{x}, \bar{z})$ est un minimiseur faible du problème $(P_{\mathcal{E}})$. Nous avons,

$$(\bar{z} - \mathrm{int}(K^n)) \cap F(\Omega) = \emptyset. \tag{3.35}$$

On suppose que $(\bar{y}, \bar{z})$ ne soit pas une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$. Il existe alors une allocation réalisable (y, z) de l'économie $\mathcal{E}$ telle que z_i soit strictement préféré à $\bar{z}_i$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Cela revient à dire que $z_i \in \bar{z}_i - \mathrm{int}(K)$ pour tout $i \in \{1, 2, ...n\}$. Il s'en suit que $z \in \bar{z} - \mathrm{int}(K^n)$. De plus, il existe un élément $w \in W$ tel que $w = \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{j=1}^{m} y_j$. En particulier, nous avons $(y, w) \in \Omega$ et $z \in F(y, w)$. Cela entraîne que $z \in (\bar{z} - \mathrm{int}(K^n)) \cap F(\Omega)$; ce qui contredit la condition (3.35). Ainsi, on peut conclure que le couple $(\bar{y}, \bar{z})$ est une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$. □

Proposition 3.4.5. *Soit $(\bar{y}, \bar{z})$ une allocation réalisable de l'économie $\mathcal{E}$. On pose $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{w})$ où $\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}_j$ et $\mathbb{B}_\Delta = \Delta \cap \mathbb{B}_{X^n}$. On suppose qu'il existe un ouvert $D \subset \Omega$ tel que $\bar{x} \in D$ et $D - D \subset \mathrm{dom}\, F$. Si $(\bar{y}, \bar{z})$ est une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$, alors*

$$\forall \delta > 0, x \in D \backslash \{\bar{x}\},\ -F(x - \bar{x}) + \delta \mathbb{B}_\Delta \not\subseteq \mathrm{int}(K^n). \tag{3.36}$$

Démonstration. Si $(\bar{y}, \bar{z})$ est une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$, alors d'après la Proposition 3.4.4, le couple $(\bar{x}, \bar{z})$ est un minimiseur faible du problème $(P_{\mathcal{E}})$. Et, d'après le Corollaire 3.2.6, la relation (3.36) est satisfaite. □

Alors que la thèse est déjà rédigée, nous avons poursuivi nos travaux de recherches en proposant une extension de la notion de prédérivée intérieure introduite par Ioffe dans [62] au cadre multivoque. Cette classe d'objets est constituée d'applications positivement homogènes visant à approcher localement des applications multivoques. Ce nouveau concept est d'une flexibilité telle qu'il nous permet d'étendre au cadre multivoque divers résultats connus dans le cadre univoque faisant intervenir généralement la dérivée. En particulier, nous établissons un résultat similaire à celui obtenu dans le cadre univoque ayant trait à la différentiabilité des applications linéaires continues. Plus précisément, nous montrons que si l'application F que l'on veut approcher est un processus convexe alors cette dernière coïncide avec l'une de ses prédérivées intérieures. Exploitant un tel résultat, sous l'hypothèse que le cône d'ordre C est solide, nous obtenons une condition nécessaire pour qu'un couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph } F \cap (D \times Y)$ soit un minimiseur faible du problème (P) lorsque la fonction objectif F est un processus convexe. Celle-ci s'énonce de la façon suivante : si le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est un minimiseur faible du problème (P) alors

$$\forall x \in D, \ F(x - \bar{x}) \cap (-\text{int}(C)) = \emptyset. \tag{3.37}$$

Certainement, ces différents résultats ne figurent pas tous dans la thèse. Néanmoins, ils complètent la prépublication [44]. En utilisant les notations de la Proposition 3.4.4, la condition d'optimalité exprimée ci-avant nous amène à une condition nécessaire pour le même type d'allocation que dans la Proposition 3.4.5. Une condition pouvant être énoncée de la manière suivante : si le couple $(\bar{y}, \bar{z})$ est une allocation optimale faible de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$, alors

$$\forall x \in \Omega, \ F(x - \bar{x}) \cap (-\text{int}(K^n)) = \emptyset. \tag{3.38}$$

Nous aimerions souligner que, grâce à sa simplicité, cette dernière condition peut être interprétée directement d'un point de vue économique. De plus, elle facilite énormément les calculs.

Chapitre 4

Convergence de minimiseurs relaxés en optimisation multivoque

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude de problèmes d'optimisation dont la fonction objectif est une application multivoque agissant d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y. Pour étudier ce type de problèmes, on a muni l'espace objectif Y d'un ordre partiel induit par un cône convexe propre C dont dépendent les différents concepts de solutions. Parmi les concepts de solutions couramment étudiés dans la littérature pour ce type de problèmes figurent les éléments minimaux faibles (de Pareto). Nous rappelons qu'un tel concept est défini à partir de l'intérieur du cône d'ordre. Ainsi, pour pouvoir en parler, le cône considéré doit être solide. Par ailleurs, il est bien connu que chaque espace normé usuel est muni d'un cône d'ordre dit naturel et que, dans de nombreuses situations, il est souhaitable de travailler avec l'ordre induit par un tel cône surtout dans des modélisations de problèmes concrets. Malheureusement, comme cela a été signalé par exemple dans [37, 91], les cônes d'ordre naturel de beaucoup d'espaces normés de dimension infinie sont d'intérieur vide. Par exemple, les cônes naturels des espaces de Lebesgue L^p avec $p \in [1, +\infty[$ sont d'intérieurs vides (voir par exemple [14, 19, 20]). Ainsi, lorsque l'espace objectif est de dimension infinie, les conditions d'optimalité établies pour les minimiseurs faibles sont peu applicables. Une façon de contourner ce problème consiste à considérer des notions d'intérieur plus faibles.

Dans cette perspective, nous considérons certaines notions d'intérieur généralisé existant dans la littérature, à savoir l'intérieur relatif (voir par exemple [98, 104]) ; la notion d'intérieur pseudo-relatif rencontrée dans la littérature sous différentes appellations dont le cœur l'intrinsèque [57], l'intérieur relatif algébrique [104], l'intérieur relatif intrinsèque [14] et la notion d'intérieur quasi-relatif introduite par Borwein et Lewis en 1992 dans [18]. Grâce à ces notions, nous définissons dans un cadre unifié des concepts de points minimaux dits relaxés auxquels sont associées des notions de minimiseurs relaxés prolongeant le concept de minimiseur faible étudié dans le chapitre précédent. Ainsi, la théorie développée dans ce présent chapitre permet d'étendre l'applicabilité de nombreux résultats théoriques dans des espaces de dimension infinie. Une telle démarche n'est pas tout à fait nouvelle. D'une part, certaines de ces notions d'intérieur généralisé ont été intensément utilisées dans la théorie de dualité (voir par exemple [19, 20, 28, 49]). D'autre part, la notion d'intérieur relatif a été utilisée dans [42] dans le même contexte que le nôtre. Cependant, notre travail est d'une pertinence certaine puisqu'en dimension infinie, il existe des espaces dont les cônes positifs sont d'intérieurs relatifs vides mais d'intérieurs quasi-relatifs non vides. C'est le cas par exemple, des cônes positifs des espaces L^p et $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty,\ p \in [1, +\infty[\}$ (voir entres autres les publications [19, 20]). Ainsi, certains résultats établis dans ce chapitre généralisent certains présentés dans [42].

Depuis de nombreuses années, les convergences de suites d'ensembles se sont révélées importantes dans la compréhention de certains problèmes provenant de différents domaines dont l'optimisation. Dans certains cas, au lieu d'étudier un problème d'optimisation multivoque (P) dont les solutions s'avèrent être difficiles à déterminer, il peut être intéressant de considérer une suite de problèmes (P_n) dont les données convergent dans un certain sens vers celles du problème (P). Inversement, en vue de décrire le comportement asymptotique d'une suite de problèmes d'optimisation multivoque (P_n), on peut être amené à considérer un problème (P) sous des hypothèses de convergence de données. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à ces deux questions. Plus précisément, nous nous proposons d'établir des résultats de stabilité de minimiseurs relaxés. À cette fin, nous commençons par introduire une topologie dans l'espace objectif Y (Définition 4.3.3), jouissant d'une certaine compatibilité avec la structure d'ordre. De cette topologie découlera une notion de convergence (Définition 4.3.10) adaptée à l'étude du comportement asymptotique d'éléments minimaux relaxés de sous-ensembles de l'espace de travail. Ensuite, nous introduisons deux concepts de convergence variationnelle de suites d'applications multivoques (Définitions 4.4.2 et 4.4.3) que nous utilisons par la suite pour établir la stabilité supérieure (Théorème 4.4.4) et la stabilité inférieure (Théorème 4.4.11) des minimiseurs en question. Nous signalons que les résultats présentés dans ce chapitre sont issus essentiellement de la prépublication [45]. Avant tout, nous rappelons les définitions des notions d'intérieur généralisé que nous aurons à utiliser et quelques notions péliminaires importantes à la compréhension de ce qui suit.

4.1 Notions d'intérieurs généralisés

Définition 4.1.1. *Soit A un sous-ensemble de Y. On dit que A est affine s'il possède la propriété suivante* :

$$\forall x,\, y \in A,\, \alpha \in \mathbb{R},\ (1-\alpha)x + \alpha y \in A.$$

Définition 4.1.2 (Enveloppe affine)**.** *Soit K une partie de Y. L'intersection de tous les ensembles affines contenant K est appelée enveloppe affine de K et notée* $\mathrm{aff}(K)$.

Dans la proposition suivante, nous établissons un résultat élémentaire mais utile concernant l'enveloppe affine du translaté d'un sous-ensemble de Y.

Proposition 4.1.3. *Pour tous $x \in Y$ et $A \subset Y$,* $\mathrm{aff}(A - x) = \mathrm{aff}(A) - x$.

Démonstration. Nous avons d'une part, $A - x \subset \mathrm{aff}(A - x)$, i.e., $A \subset \mathrm{aff}(A - x) + x$. L'ensemble $\mathrm{aff}(A - x)$ étant affine, il en est de même de $\mathrm{aff}(A - x) + x$. Par conséquent

$$\mathrm{aff}(A) \subset \mathrm{aff}(A - x) + x,$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{aff}(A) - x \subset \mathrm{aff}(A - x).$$

On a d'autre part, $A \subset \operatorname{aff}(A)$, cela implique que $A - x \subset \operatorname{aff}(A) - x$.
Sachant que le second membre de cette dernière inclusion est affine, nous avons $\operatorname{aff}(A - x) \subset \operatorname{aff}(A) - x$. D'où l'égalité annoncée. $\square$

Définition 4.1.4 (Enveloppe conique)**.** *On appelle cône engendré par une partie K de Y, l'ensemble :*

$$\operatorname{cone}(K) = \{\lambda x \,|\, x \in K,\ \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \lambda \geq 0\} = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K.$$

Définition 4.1.5 (Intérieur relatif)**.** *Soit K un sous-ensemble convexe fermé et non vide de Y. L'intérieur relatif de K, noté* $\operatorname{ri}(K)$, *est l'intérieur de K par rapport à la fermeture de son enveloppe affine, i.e.,*

$$\operatorname{ri}(K) := \{y \in \overline{\operatorname{aff}}(K) \,|\, \exists \eta > 0\,;\, (y + \eta \mathbb{B}_Y) \cap \overline{\operatorname{aff}}(K) \subset K\}.$$

La définition suivante introduit une notion d'intérieur généralisé connue dans la littérature sous diverses appellations dont le cœur intrinsèque, l'intérieur relatif intrinsèque et l'intérieur relatif algébrique. Dans le cadre de cette thèse, nous adopterons la terminologie de Borwein et Goebel [17], à savoir l'intérieur pseudo-relatif.

Définition 4.1.6 (Intérieur pseudo-relatif)**.** *On appelle intérieur pseudo-relatif d'une partie convexe fermée non vide K de Y, noté* $\operatorname{pri}(K)$, *l'ensemble des éléments $x \in K$ tels que* $\operatorname{cone}(K - x)$ *soit un sous-espace vectoriel de Y.*

Définition 4.1.7 (Point relativement absorbant)**.** *Soit K une partie convexe fermée et non vide de Y. On dit qu'un point $x \in K$ est relativement absorbant si pour tout point $y \in K \setminus \{x\}$, il existe $z \in K$ et $t \in]0, 1[$ tels que $x = (1 - t)y + tz$.*

Cette condition est équivalente à l'assertion suivante : pour tout $y \in K \setminus \{x\}$, il existe $\mu > 1$ tel que $(1 - \mu)y + \mu x \in K$. Autrement dit, tout segment non trivial dans K contenant x peut être prolongé au delà de x. La proposition suivante permet d'établir un lien entre les points relativement absorbants d'un sous-ensemble convexe fermé non vide $K \subset Y$ et son intérieur pseudo-relatif.

Proposition 4.1.8. [17, Lemme 2.3] *Soit K une partie convexe fermée non vide de Y. Un élément $x \in K$ est un point relativement absorbant de K si et seulement si $x \in$* $\operatorname{pri}(K)$.

La proposition suivante permet de caractériser les points appartenant à l'intérieur pseudo-relatif d'une partie convexe fermée non vide $K \subset Y$.

Proposition 4.1.9. *Soit $K \subset Y$ un ensemble convexe fermé et non vide. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in \mathrm{pri}(K)$ *;*

(ii) $\mathrm{cone}(K - x) = \mathrm{aff}(K - x)$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si $x \in \mathrm{pri}(K)$, alors l'ensemble $\mathrm{cone}(K - x)$ est un sous-espace vectoriel de Y. C'est donc un sous-ensemble affine contenant $K - x$. Il s'en suit que $\mathrm{aff}(K - x) \subset \mathrm{cone}(K - x)$. Par ailleurs, $x \in \mathrm{pri}(K)$ entraîne que $x \in K$. Il en découle que $0_Y \in K - x$. Ainsi $\mathrm{aff}(K - x)$ est un ensemble affine contenant 0_Y ; c'est donc un sous-espace vectoriel de Y. Il s'en suit que $\mathrm{aff}(K - x)$ est un cône convexe de Y qui contient $K - x$. On a donc $\mathrm{cone}(K - x) \subset \mathrm{aff}(K - x)$. D'où l'égalité $\mathrm{cone}(K - x) = \mathrm{aff}(K - x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $x \in K$ est tel que $\mathrm{aff}(K - x) = \mathrm{cone}(K - x)$. Nous avons $0_Y \in K - x$. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{aff}(K - x)$ est un sous-espace vectoriel de Y. Il en est de même de $\mathrm{cone}(K - x)$. Par conséquent, $x \in \mathrm{pri}(K)$. ◻

Le concept d'intérieur quasi-relatif a été introduit par Borwein et Lewis dans [18] en 1992. Depuis, il a été utilisé dans divers contextes dont la théorie de dualité en optimisation convexe. Il constitue une importante généralisation de différentes notions d'intérieur considérées dans ce chapitre. Nous en rappelons la définition.

Définition 4.1.10 (Intérieur quasi-relatif). *On appelle intérieur quasi-relatif d'une partie convexe fermée non vide K de Y, l'ensemble des éléments $x \in K$ tels que $\overline{\mathrm{cone}}(K - x)$ soit un sous-espace vectoriel de Y. Il est noté* $\mathrm{qri}(K)$.

Définition 4.1.11 (Point non support). *Soit $K \subset Y$ un ensemble convexe fermé et non vide. On dit que $x \in K$ est un point non support de K si tout hyperplan fermé supportant K en x contient K.*

Proposition 4.1.12. [17, Lemme 2.7] *Soit K une partie convexe fermée non vide de Y. Un élément $x \in K$ est un point non support de K si et seulement si $x \in \mathrm{qri}(K)$.*

Le théorème suivant établit la non vacuité de l'intérieur quasi-relatif de toute partie convexe fermée non vide d'un espace de Banach séparable. Pour les détails, le lecteur pourra consulter [17, 18].

Théorème 4.1.13. *Toute partie convexe fermée non vide d'un espace de Banach séparable est d'intérieur quasi-relatif non vide.*

Le théorème suivant permet de comparer les différentes notions d'intérieur généralisé utilisées dans ce chapitre. On peut en trouver une preuve dans [17].

Théorème 4.1.14. [17, Théorème 2.12] *Soit K une partie convexe fermée de Y.*
(i) *Nous avons* $\mathrm{ri}(K) \subset \mathrm{pri}(K) \subset \mathrm{qri}(K)$.

(ii) *Dans chacun des conditions suivantes, nous avons* $\mathrm{ri}(K) = \mathrm{pri}(K) = \mathrm{qri}(K)$:

(a) *Y est de dimension finie.*

(b) $\mathrm{int}(K)$ *est non vide.*

(c) $\mathrm{ri}(K)$ *est non vide.*

Pour les détails concernant ces différents concepts d'intérieur généralisé, le lecteur pourra se référer aux articles [17, 18, 20, 49, 85, 106] et leurs références.

Dans les pages qui suivent, on suppose que le cône d'ordre $C \subset Y$ est propre fermé et pointé. Le symbole ρ sera utilisé pour désigner indistinctement les diverses notions d'intérieur que nous utilisons dans le chapitre. En d'autres termes, nous utiliserons l'écriture $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ pour signifier que ρ peut être un élément quelconque de cet ensemble. Une telle écriture nous permettra d'unifier les définitions de différents types d'éléments minimaux correspondant à chacune de ces notions d'intérieur et les propriétés communes à ces différents concepts d'intérieur généralisé. Par ailleurs, sachant que C est un cône convexe propre et pointé de Y, nous avons $0_Y \notin \rho(C)$, pour tout $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$. En effet, si $0_Y \in \rho(C)$ alors nécessairement, $0_Y \in \mathrm{qri}(C)$. On en déduit que $\overline{\mathrm{cone}}(C) = C$ est un sous-espace vectoriel de Y i.e., $C \cap (-C) = C$. C'est impossible puisque $\{0_Y\} \subsetneq C \subsetneq Y$.

4.2 Minimiseurs relaxés

Dans ce paragraphe, nous définissons les notions de ρ-minimiseurs correspondant aux différents concepts d'intérieur généralisé dont nous venons de rappeler les définitions.

Définition 4.2.1 (Points ρ-minimaux)**.** *Soit Ω un sous-ensemble non vide de Y et $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ avec $\rho(C) \neq \emptyset$. On considère un point $\bar{y} \in \Omega$; on dit que $\bar{y}$ est un point ρ-minimal de Ω si $(\bar{y} - \rho(C)) \cap \Omega = \emptyset$. L'élément $\bar{y}$ sera dit :*

- *un point minimal faible lorsque $\rho(C) = \mathrm{int}(C)$;*
- *un point minimal relatif lorsque $\rho(C) = \mathrm{ri}(C)$;*
- *un point minimal pseudo-relatif lorsque $\rho(C) = \mathrm{pri}(C)$;*
- *un point minimal quasi-relatif lorsque $\rho(C) = \mathrm{qri}(C)$.*

Dans le lemme suivant nous établissons un lien entre l'ensemble des éléments minimaux de Pareto d'un sous-ensemble $\Omega \subset Y$ et celui de ses points ρ-minimaux. Plus précisément, nous montrons que tout élément minimal de Pareto de Ω en est un élément ρ-minimal dès que $\rho(C) \neq \emptyset$. Un tel résultat justifie la terminologie d'éléments minimaux relaxés.

Lemme 4.2.2. *Soit $\Omega \subset Y$ et $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$. On suppose que $\rho(C) \neq \emptyset$, alors, tout point minimal de Pareto de Ω est un point ρ-minimal de Ω.*

Démonstration. Soit $\bar{y} \in \Omega$ un point minimal de Pareto de Ω. Supposons qu'il ne soit pas un point ρ-minimal de Ω. Nous avons alors

$$(\bar{y} - \rho(C)) \cap \Omega \neq \emptyset.$$

On peut donc trouver un élément $y \in \Omega$ tel que $y \in \bar{y} - \rho(C)$. Comme $\rho(C) \subset C$, nous avons $y \in \bar{y} - C$. On a par conséquent, $y \leq_C \bar{y}$ et $\bar{y} \leq_C y$. Le cône C étant pointé, on a $y = \bar{y}$. Il s'en suit que $0_Y \in \rho(C)$, cela implique que C est un sous-espace vectoriel de Y. Or $C \cap (-C) = \{0_Y\}$, cela entraîne que $C = \{0_Y\}$. Ceci est une contradiction puisque C est un cône convexe propre de Y. Par conséquent, $\bar{y}$ est un point ρ-minimal de Ω. $\square$

Ces quelques notions de points minimaux relaxés ayant été mises en place, nous pouvons maintenant définir les concepts de minimiseurs correspondant à chacune d'elles pour le problème (P).

Définition 4.2.3 (ρ-minimiseurs)**.** *Soit* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F \cap (D \times Y)$*. On dit que le couple* $(\bar{x}, \bar{y})$ *est un* ρ*-minimiseur du problème* (P) *si* $\bar{y}$ *est un point* ρ*-minimal de l'ensemble* $F(D)$*, i.e.,* $(\bar{y} - \rho(C)) \cap F(D) = \emptyset$*. Le couple* $(\bar{x}, \bar{y})$ *sera dit :*

- *un minimiseur faible du problème* (P) *lorsque* $\rho(C) = \operatorname{int}(C)$;
- *un minimiseur relatif du problème* (P) *lorsque* $\rho(C) = \operatorname{ri}(C)$;
- *un minimiseur pseudo-relatif du problème* (P) *lorsque* $\rho(C) = \operatorname{pri}(C)$;
- *un minimiseur quasi-relatif du problème* (P) *lorsque* $\rho(C) = \operatorname{qri}(C)$.

L'ensemble des ρ*-minimiseurs (respectivement, minimiseurs faibles, minimiseurs relatifs, minimiseurs pseudo-relatifs, minimiseurs quasi-relatifs) du problème* (P) *sera noté par* $\rho\mathrm{Min}(P)$ *(respectivement,* $\mathrm{WMin}(P)$, $\mathrm{RMin}(P)$, $\mathrm{PrMin}(P)$, $\mathrm{QrMin}(P)$*).*

Lorsque $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$, tous ces concepts de minimiseurs coïncident puisque dans ce cas $\operatorname{int}(C) = \operatorname{ri}(C) = \operatorname{pri}(C) = \operatorname{qri}(C)$. Dans le cas où $\operatorname{ri}(C) \neq \emptyset$ alors les trois derniers concepts de minimiseurs coïncident car $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{pri}(C) = \operatorname{qri}(C)$. En particulier, lorsque $\dim Y < \infty$, on a $\mathrm{RMin}(P) = \mathrm{PrMin}(P) = \mathrm{QrMin}(P)$ puisque $\operatorname{ri}(C) = \operatorname{pri}(C) = \operatorname{qri}(C)$.

4.3 Une notion de convergence topologique dans les espaces vectoriels ordonnés

Dans cette section, nous allons introduire une topologie dans l'espace objectif Y dont découlera une notion de convergence bien adaptée à l'étude de stabilité d'éléments ρ-minimaux des sous-ensembles de l'espace ambiant. D'abord, nous présentons la proposition suivante dans laquelle nous collectons quelques propriétés importantes communes aux différentes notions d'intérieur généralisé utilisées dans le chapitre.

Proposition 4.3.1. *On considère un sous-ensemble convexe fermé et non vide* A *de* Y*. Soit* ρ *fixé dans* $\{\operatorname{int}, \operatorname{ri}, \operatorname{pri}, \operatorname{qri}\}$*. Alors, les assertions suivantes sont vraies :*

(1) *Soit* α *un nombre réel non nul, alors* $\alpha\rho(A) \subset \rho(\alpha A)$.

(2) *Soit* $\bar{x} \in \rho(A)$ *et* $x \in A$, *alors* $(1-t)x + t\bar{x} \in \rho(A)$, $\forall t \in]0,1]$.

(3) *Soit* $K \subset Y$ *un cône convexe fermé non vide, alors* $\rho(K) + K \subset \rho(K)$.

Démonstration. Pour l'assertion (1), voir [17, Lemme 3.6] lorsque $\rho \in \{\mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$. Si $\rho = \mathrm{int}$, alors la preuve est immédiate. Pour le (2), voir [17, Lemme 3.1]. Pour l'affirmation (3), si $\rho(K) = \mathrm{int}(K)$, il s'agit d'un résultat d'analyse convexe bien connu. Lorsque $\rho = \mathrm{ri}$, voir [42, Lemme 3.5] ou [105, Lemme 2.4]. Pour le cas $\rho = \mathrm{pri}$, on peut voir [107, Lemme 2.2]. Lorsque $\rho = \mathrm{qri}$, voir [106, Lemme 2.2]. □

Soit ρ un élément de l'ensemble $\{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ tel que $\rho(C) \neq \emptyset$ où C est un cône convexe propre, fermé et pointé de l'espace de Banach Y. Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur Y est appelée un ordre (partiel) strict sur Y si elle est irréflexive ($\forall y \in Y$, $(y,y) \notin \mathcal{R}$), asymétrique ($(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \notin \mathcal{R}$) et transitive.

On considère la relation binaire $<$ définie sur Y de la façon suivante :

$$\forall y,\, y' \in Y,\ y < y' \Longleftrightarrow y' - y \in \rho(C). \tag{4.1}$$

Lemme 4.3.2. *La relation* $<$ *est un ordre partiel strict sur* Y.

Démonstration. Elle est irréflexive. En effet, supposons au contraire qu'il existe un élément $y \in Y$ tel que $y < y$. Cela entraîne que $0_Y \in \rho(C)$; ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, la relation $<$ est irréflexive.
Montrons qu'elle est asymétrique. Supposons qu'il existe deux éléments x, $y \in Y$ tels que $x < y$ et $y < x$. Nous avons alors $y - x \in \rho(C)$ et $x - y \in \rho(C)$. Il s'en suit que $0_Y \in \rho(C)$. Ce qui est absurde. Ainsi, la relation $<$ est asymétrique.
Elle est aussi transitive. En effet, considérons trois éléments x, y, $z \in Y$ tels qu'on ait $x < y$ et $y < z$. Il s'en suit que $y - x \in \rho(C)$ et $z - y \in \rho(C)$. Ainsi,

$$z - x \in \rho(C) + \rho(C) \subset \rho(C).$$

Par conséquent, $x < z$, ce qui est le résultat annoncé. □

Soient a, $b \in Y$ tels que $a < b$, on pose

$$(a, b) := \{y \in Y \mid a < y < b\}.$$

Ce sous-ensemble sera appelé un **intervalle ouvert** de Y. Chacun de ces intervalles est non vide puisque, pour tout $t \in]0, 1[$, on a $(1 - t)a + tb \in (a, b)$. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts de Y, c'est-à-dire, $\mathcal{I} := \{(a, b) \mid a, b \in Y \text{ et } a < b\}$.

Définition 4.3.3. [45] *Nous appelons τ_ρ la topologie sur Y engendrée par $\mathcal{I}$.*

Nous commençons par présenter le lemme élémentaire suivant que nous utiliserons par la suite pour établir nos prochains résultats.

Lemme 4.3.4. *Soit $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ tel que $\rho(C) \neq \emptyset$. Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Les éléments de $\mathcal{I}$ sont des ouverts pour la topologie τ_ρ.*

(ii) *$\rho(C)$ est un ouvert pour la topologie τ_ρ.*

Démonstration. L'affirmation (i) est une conséquence immédiate de la définition d'une topologie engendrée par une famille d'ensembles.

(ii) Considérons un élément $y \in \rho(C)$. D'après la Proposition 4.3.1, nous avons $\frac{1}{2}y \in \rho(C)$, $2y \in \rho(C)$ et $y \in (\frac{1}{2}y, 2y)$. Quitte à montrer que $(\frac{1}{2}y, 2y) \subset \rho(C)$. Soit $z \in (\frac{1}{2}y, 2y)$. On a $z - \frac{1}{2}y \in \rho(C)$ et $2y - z \in \rho(C)$. Nous en déduisons que $z \in \frac{1}{2}y + \rho(C)$ et $y \in \frac{1}{2}z + \rho(C)$. Il s'en suit que $z \in \rho(C)$, c'est-à-dire, $(\frac{1}{2}y, 2y) \subset \rho(C)$. Par conséquent, $\rho(C)$ est un voisinage de y. □

Nous rappelons la définition suivante présentant les notions de base et sous-base d'une topologie $\mathcal{T}$ définie sur un ensemble non vide E.

Définition 4.3.5. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

(a) *Une partie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide de E est réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$.*

(b) *Une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ est une sous-base de la topologie $\mathcal{T}$ si tout ouvert de E est réunion d'intersections finies d'ouverts de $\mathcal{A}$.*

Par construction, la famille $\mathcal{I}$ constitue une sous-base de la topologie τ_ρ. Dans le résultat suivant, nous établissons une équivalence nous permettant de travailler avec les éléments de $\mathcal{I}$ à la place d'éléments quelconques de τ_ρ dans certaine situations.

Lemme 4.3.6. *Soit (x_n) une suite de points de Y et soit $x \in Y$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout $U \in \tau_\rho$ tel que $x \in U$; $x_n \in U$ à partir d'un certain rang ;*

(ii) *pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}$ tel que $x \in (a, b)$; $x_n \in (a, b)$ pour n assez grand.*

Démonstration. Montrons que (i)$\Longrightarrow$(ii). Soient $a, b \in Y$ tels que $a < x < b$. D'après le Lemme 4.3.4 nous avons $(a, b) \in \tau_\rho$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$; $n \geq N \Longrightarrow x_n \in (a, b)$. Montrons à présent que (ii)$\Longrightarrow$ (i). Soit U un élément quelconque de τ_ρ contenant x. La famille des intervalles ouverts (a, b) avec $a < b$ et $a, b \in Y$ étant une sous-base de la topologie τ_ρ, nous avons

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{(a,b) \in F_j} (a, b),$$

où J est un ensemble quelconque d'indices et pour chaque $j \in J$, F_j est un ensemble fini d'intervalles (a, b). Il existe alors $j_0 \in J$ tel que $x \in \bigcap\limits_{(a,b) \in F_{j_0}} (a, b)$. On en déduit que, $x \in (a, b)$ pour tout $(a, b) \in F_{j_0}$. Comme F_{j_0} est un ensemble fini, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0, \Longrightarrow x_n \in (a, b)$, $\forall (a, b) \in F_{j_0}$. Ainsi, $x_n \in \bigcup\limits_{j \in J} \bigcap\limits_{(a,b) \in F_j} (a, b)$ pour n assez grand. $\square$

En 2013 P. D. Proinov a considéré dans [93] un espace vectoriel Y muni d'une convergence et d'un ordre qui sont (dans un certain sens) compatibles entre eux et avec les opérations algébriques dans Y. En supposant que le cône d'ordre est solide, l'auteur a introduit une topologie τ sur Y, appelée topologie de l'ordre dont une base est la famille des intervalles ouverts (a, b) de Y. Il a été démontré qu'une telle topologie est de Hausdorff. Dans cette thèse, nous travaillons dans un cadre différent de celui de Proinov, puisque, d'une part le cône d'ordre peut être d'intérieur vide, d'autre part notre topologie τ_ρ ne dépend pas d'un concept de convergence compatible avec la structure d'ordre et les opérations algébriques sur Y. Toutefois, elle vérifie certaines propriétés utiles comme le montrent les trois propositions suivantes.

Proposition 4.3.7. *L'application $f : (x, y) \in Y \times Y \to Y \mapsto x + y$ est τ_ρ-continue.*

Démonstration. Soient $x, y \in Y$, et $W = (a, b)$ tels que $x + y \in W$. On doit établir l'existence de voisinages U de x et V de y tels que $f(U \times V) \subset W$. Nous avons,

$$x - \frac{1}{2}(x + y - a) < x < x + \frac{1}{2}(b - (x + y)).$$

De même,

$$y - \frac{1}{2}(x + y - a) < y < y + \frac{1}{2}(b - (x + y)).$$

En posant,

$$U = (x - \frac{1}{2}(x+y-a), x + \frac{1}{2}(b-(x+y))) \text{ et } V = (y - \frac{1}{2}(x+y-a), y + \frac{1}{2}(b-(x+y))),$$

nous avons, $f(U \times V) \subset W$. □

La proposition suivante établit que l'espace topologique (Y, τ_ρ) est séparé. Une telle propriété est importante car elle garantit l'unicité des limites de suites convergentes pour la topologie en question.

Proposition 4.3.8. *L'espace topologique (Y, τ_ρ) est séparé.*

Démonstration. Soient x, $y \in Y$ tels que $x \neq y$. Supposons que la topologie τ_ρ ne soit pas de Hausdorff. Pour tout $\eta \in \rho(C)$, nous avons $(x - \eta, x + \eta) \cap (y - \eta, y + \eta) \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $\eta \in \rho(C)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément $z_n \in Y$ tel que

$$z_n \in (x - \frac{1}{n}\eta, x + \frac{1}{n}\eta) \cap (y - \frac{1}{n}\eta, y + \frac{1}{n}\eta).$$

Il en résulte que

$$-\frac{1}{n}\eta < x - z_n < \frac{1}{n}\eta \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n}\eta < z_n - y < \frac{1}{n}\eta.$$

Il s'en suit que

$$-\frac{2}{n}\eta < (x - z_n) + (z_n - y) < \frac{2}{n}\eta\ ;$$

cela entraîne que

$$x - y + \frac{2}{n}\eta \in \rho(C) \subset C \quad \text{et} \quad y - x + \frac{2}{n}\eta \in C.$$

En passant à la limite pour la topologie de la norme, sachant que C est fermé et pointé, nous avons $x - y \in C \cap (-C)$. On en déduit que $x = y$, ce qui est absurde. Par conséquent, l'espace topologique (Y, τ_ρ) est séparé. □

Dans la proposition suivante, nous montrons que la topologie τ_ρ coïncide avec celle de la norme lorsque $Y = \mathbb{R}^n$.

Proposition 4.3.9. *Soit $Y = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^n_+$. Alors la topologie τ_ρ correspond à la topologie de la norme.*

Démonstration. On considère $a, b \in Y$ tels que $a < b$ avec $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Nous avons $a < b \Longleftrightarrow a_i < b_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ainsi

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i).$$

Soit τ la topologie de la norme sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un élément $\Omega \in \tau_\rho$. La famille $\mathcal{I}$ étant une sous-base de la topologie τ_ρ, nous avons

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_{j\in J} \bigcap_{(a,b)\in F_j} (a, b), \\ &= \bigcup_{j\in J} \bigcap_{(a,b)\in F_j} \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \right) \ ; \end{aligned}$$

où J désigne un ensemble quelconque d'indices et pour chaque $j \in J$, F_j est une famille finie d'éléments $(a, b) \in \mathcal{I}$. Pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, (a_i, b_i) est un ouvert de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Ainsi, pour j fixé dans J, on a $\bigcap_{(a,b)\in F_j} \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \right) \in \tau$.
Par conséquent $\bigcup_{j\in J} \bigcap_{(a,b)\in F_j} (a, b) = \Omega \in \tau$.

Soit à présent un élément $\mathcal{O} \in \tau$. Comme $\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ est une base de la topologie τ, l'ouvert $\mathcal{O}$ s'écrit comme réunion de tels ensembles. Cela entraîne que $\mathcal{O} \in \tau_\rho$. D'où l'égalité $\tau_\rho = \tau$. □

Maintenant, nous définissons explicitement une notion de convergence découlant naturellement de la topologie τ_ρ. Celle-ci s'avèrera très importante pour la suite du chapitre. Plus précisément, elle sera utilisée pour définir deux concepts de convergence variationnelle qui constitueront les clés de nos résultats de stabilité.

Définition 4.3.10 (τ_ρ-convergence [45]). *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y τ_ρ-converge vers un élément $\bar{x} \in Y$, on écrit $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{x}$, si et seulement si :*

$$\forall U \in \mathcal{V}_{\bar{x}},\ \exists N \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq N \Longrightarrow x_n \in U.$$

La famille $\mathcal{I}$ étant une sous-base de la topologie τ_ρ, la Définition 4.3.10 peut être exprimée à l'aide d'intervalles ouverts (a,b) de Y. Plus précisément, une suite $(x_n) \subset Y$ τ_ρ-converge vers un point $\bar{x} \in Y$ si et seulement si, pour tous a, $b \in Y$ tels que $a < \bar{x} < b$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique que $x_n \in (a,b)$.

Le lemme suivant regroupe quelques propriétés élémentaires mais utiles de la τ_ρ-convergence. Dans toute la suite la notation $\mathrm{cl}_{\tau_\rho}(A)$ désigne la fermeture d'un sous-ensemble A de Y par rapport à la topologie τ_ρ alors que l'écriture $\bar{A}$ désigne la fermeture de l'ensemble A par rapport à la topologie de la norme.

Lemme 4.3.11. *Soient (x_n) et (y_n) deux suites de Y telles que $x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x$ et $y_n \xrightarrow{\tau_\rho} y$. Alors, les propriétés suivantes sont vraies :*

(1) *Pour tout $\eta \in \rho(C)$, $x - \eta < x_n < x + \eta$, pour n assez grand.*

(2) $x_n + y_n \xrightarrow{\tau_\rho} x + y$ *et* $x_n - y_n \xrightarrow{\tau_\rho} x - y$.

(3) *Si $x < y$ alors $x_n < y_n$ à partir d'un certain rang.*

(4) *Nous avons $\mathrm{cl}_{\tau_\rho}(\rho(C)) \subset C$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n < y_n$, alors $x \leq_C y$.*

Démonstration. (1) $\forall \eta \in \rho(C)$, nous avons $x \in (x - \eta, x + \eta) \in \tau_\rho$. Cela entraîne que $x_n \in (x - \eta, x + \eta)$ pour n assez grand.

(2) Comme $(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau_\rho \times \tau_\rho} (x,y)$ et comme l'application $f : (u,v) \longmapsto u + v$ est τ_ρ-continue, alors $f(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau_\rho} f(x,y)$. Par conséquent, $x_n + y_n \xrightarrow{\tau_\rho} x + y$.
Fixons à présent $\eta \in \rho(C)$, nous avons

$$-y \in (-y - \eta, -y + \eta) \Longleftrightarrow y \in (y - \eta, y + \eta).$$

Sachant qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow y_n \in (y - \eta, y + \eta)$, il en découle que

$$-y_n \in (-y - \eta, -y + \eta),\ \forall n \geq n_0\ ;\quad \text{i.e.,} \quad -y_n \xrightarrow{\tau_\rho} -y.$$

Par conséquent, $x_n + (-y_n) \xrightarrow{\tau_\rho} x - y$.

(3) Si $x < y$, cela revient à dire que $y - x \in \rho(C)$. Comme $y_n - x_n \xrightarrow{\tau_\rho} y - x$ et $\rho(C)$ est un ouvert pour la topologie τ_ρ, nous avons $y_n - x_n \in \rho(C)$ pour n assez grand. Par conséquent, $x_n < y_n$ à partir d'un certain rang.

(4) Montrons d'abord que $\mathrm{cl}_{\tau_\rho}(\rho(C)) \subset C$.
Soit $u \in \mathrm{cl}_{\tau_\rho}(\rho(C))$ et $\eta \in \rho(C)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$(u - \frac{1}{n}\eta, u + \frac{1}{n}\eta) \cap \rho(C) \neq \emptyset.$$

On peut donc trouver $v_n \in \rho(C)$ tel que $v_n \in (u - \frac{1}{n}\eta, u + \frac{1}{n}\eta)$. Ainsi, on peut construire une suite $(v_n) \subset \rho(C)$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n < u + \frac{1}{n}\eta, \quad \text{i.e.,}\ u \in v_n - \frac{1}{n}\eta + \rho(C).$$

Il s'en suit que

$$u \in -\frac{1}{n}\eta + \rho(C) + \rho(C) \Longrightarrow u + \frac{1}{n}\eta \in \rho(C) \subset C.$$

En passant à la limite pour la topologie de la norme, nous obtenons $u \in \overline{C} = C$. Il en résulte que

$$\mathrm{cl}_{\tau_\rho}(\rho(C)) \subset C.$$

Enfin, si $x_n < y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$y_n - x_n \in \rho(C),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $y_n - x_n \xrightarrow{\tau_\rho} y - x$, nous obtenons $y - x \in \mathrm{cl}_{\tau_\rho}(\rho(C)) \subset C$, i.e., $x \leq_C y$. □

4.4 Stabilité de minimiseurs relaxés en optimisation multivoque

Dans la section précédente, nous avons introduit et discuté une topologie τ_ρ sur l'espace de Banach Y dont découle le concept de τ_ρ-convergence. Dans cette présente section, nous nous proposons d'étudier la stabilité de minimiseurs relaxés de problèmes d'optimisation multivoque. Pour mener cette étude, nous considérons la suite de problèmes d'optimisation (P_n) donnée par

$$(P_n) : \begin{cases} \text{Minimiser } F_n(x) \\ \text{tel que } \ x \in D_n, \end{cases}$$

où nous supposons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $F_n : X \rightrightarrows Y$, $\operatorname{dom} F_n \neq \emptyset$ et D_n est un sous-ensemble fermé et non vide de $\operatorname{dom} F_n$.

En premier lieu, nous introduisons deux concepts de convergence variationnelle de suites d'applications multivoques que nous utilisons par la suite dans le cadre de notre étude de stabilité en optimisation multivoque. Ensuite, nous établissons nos principaux résultats liés à la convergence de minimiseurs relaxés en étudiant successivement leurs stabilités supérieure et inférieure. Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous rappelons que les limites supérieure et inférieure au sens de Painlevé-Kuratowski d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles d'un espace vectoriel normé E sont définies par :

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N>0} \bigcap_{n\geq N} (A_n + \varepsilon \mathbb{B}_E) \text{ et } \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{N>0} \bigcup_{n\geq N} (A_n + \varepsilon \mathbb{B}_E).$$

Des formulations alternatives et utiles de ces concepts sont données par :

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in E \,|\, \exists N \in \mathcal{N}_\infty, \forall n \in N, \exists x_n \in A_n \text{ avec } x_n \to x\} \ ;$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in E \,|\, \exists N \in \mathcal{N}_\infty^\# \ ; \forall n \in N, \exists x_n \in A_n \text{ avec } x_n \to x\} \ ;$$

où la notation $\mathcal{N}_\infty$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de complémentaires finis alors que le symbole $\mathcal{N}_\infty^\#$ désigne l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.

Définition 4.4.1 (Convergence de Painlevé-Kuratowski). *On dit qu'une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un ensemble (fermé) A au sens de Painlevé-Kuratowski, on écrit $A_n \xrightarrow{PK} A$, si*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

En appliquant la théorie de la convergence d'ensembles aux graphes d'applications multivoques, Rockafellar et Wets ont introduit dans [99, Définition 5.32] le concept de convergence graphique dont la définition est la suivante : une suite d'applications multivoques S_n converge graphiquement vers une application multivoque S si et seulement si gph $S_n \xrightarrow{PK}$ gph S. Une adaptation de cette notion au cadre dans lequel nous travaillons nous a conduit à la définition suivante introduisant le concept de convergence $\|\cdot\| \times \tau_\rho$-graphique de suites d'applications multivoques où la notation $(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|\times\tau_\rho} (x, y)$ est utilisée pour signifier que la suite x_n converge vers x par rapport à la topologie de la norme et que la suite y_n τ_ρ-converge vers y.

Définition 4.4.2 (convergence $(\|\cdot\| \times \tau_\rho)$-graphique [45])**.** *Soit* $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ *tel que* $\rho(C) \neq \emptyset$*. On dit qu'une suite d'applications multivoques* $S_n : X \rightrightarrows Y$ *converge* $(\|\cdot\| \times \tau_\rho)$*-graphiquement vers une application multivoque* $S : X \rightrightarrows Y$ *si les conditions suivantes sont satisfaites* :

(i) *pour tout* $(x, y) \in \mathrm{gph}\ S$*, il existe une suite* $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times Y$ *telle que* $(x_n, y_n) \in \mathrm{gph}\ S_n$ *pour tout* n *et* $(x_n, y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|\times\tau_\rho} (x, y)$;

(ii) *si* $n_k \in \mathcal{N}_\infty^\#$ *et* $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in \mathrm{gph}\ S_{n_k}$ *sont telles que* $(x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\|\times\tau_\rho} (x, y)$*, alors* $(x, y) \in \mathrm{gph}\ S$.

Avant d'introduire notre second concept de convergence variationnelle de suites d'applications multivoques, nous aimerions faire un bref rappel sur la Γ-convergence de suites de fonctions dans le cadre univoque. On considère un espace métrique (E, d), une suite de fonctions $f_n : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, avec $n = 0, 1, 2, \ldots$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que la suite f_n Γ-converge vers f en $\bar{x} \in E$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(a) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\bar{x}$, $f(\bar{x}) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$;

(b) il existe une suite $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\bar{x}$ telle que $f(\bar{x}) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(\bar{x}_n)$.

La condition (a), connue en tant qu'inégalité de la limite inférieure, reflète le fait que la fonction $f(\bar{x})$ soit un minorant de la suite $f_n(x_n)$ lorsque x_n converge vers $\bar{x}$ alors que l'assertion (b), connue en tant qu'inégalité de la limite supérieure, garantit l'existence de ce qu'on appelle une *recovery sequence*. La Γ-convergence ayant été spécifiquement destinée à étudier la convergence de suites de problèmes de minimisation scalaire, il nous paraît naturel d'adapter un tel concept au cadre dans lequel nous travaillons. Tel sera l'objet de la définition suivante introduisant notre second concept de convergence variationnelle qui sera utilisé pour décrire le comportement asymptotique de suites de problèmes d'optimisation multivoque.

Définition 4.4.3 (Γ-convergence [45])**.** *Soit* $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ *tel que* $\rho(C) \neq \emptyset$. *On dit qu'une suite d'applications multivoques* $S_n : X \rightrightarrows Y$ Γ*-converge vers une application* $S : X \rightrightarrows Y$*, on écrit* $S_n \xrightarrow{\Gamma} S$*, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *pour tout* $(x, y) \in \mathrm{gph}\ S$*, il existe une suite* $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times Y$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $(x_n, y_n) \in \mathrm{gph}\ S_n$ *et* $(x_n, y_n) \xrightarrow{\|.\|\times\tau_\rho} (x, y)$ *;*

(ii) *soit* $x \in \mathrm{dom}\ S$ *et une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *convergeant vers* x*. Alors, pour tout* $\eta \in \rho(C)$*, nous avons* $S_n(x_n) \subset S(x) - \eta + C$*, pour* n *assez grand.*

Il est important de souligner que l'assertion (i) de la Définition 4.4.3 est cohérente avec l'inégalité de la limite supérieure de la définition de la Γ-convergence pour les fonctions scalaires. En effet, cette dernière inégalité signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $f_n(\bar{x}_n) < f(\bar{x}) + \varepsilon$, à partir d'un certain rang. Il est à remarquer que la τ_ρ-convergence de la suite y_n vers y dans l'assertion (i) satisfait une propriété du même type (voir le Lemme 4.3.11). Enfin, l'assertion (ii) peut être considérée comme une extension naturelle de l'inégalité de la limite inférieure au cadre multivoque. Il est à noter que cette assertion est aussi cohérente à la condition correspondante dans la définition de la Γ-convergence proposée par Oppezzi et Rossi dans [86] pour les fonctions à valeurs vectorielles.

Nos deux concepts de convergence ayant été introduits, nous sommes maintenant en mesure d'entamer l'étude de la stabilité des ρ-minimiseurs du problème (P) lorsque les données d'une suite de problèmes (P_n) convergent dans un certain sens vers les données correspondantes de (P). Dans les pages qui suivent, si $S : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque et Δ est un sous-ensemble non vide de son domaine, alors la notation $S_{|\Delta}$ désigne la restriction de S à Δ, c'est-à-dire, l'application multivoque définie par :

$$S_{|\Delta}(x) = \begin{cases} S(x) & \text{si} \quad x \in \Delta, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suivant présente notre principal résultat concernant stabilité supérieure des minimiseurs relaxés. Il s'agit d'un résultat important permettant d'obtenir un

ρ-minimiseur d'un problème limite (P) éventuellement inconnu à partir d'une suite de ρ-minimiseurs d'une famille de problèmes approchés.

Théorème 4.4.4 (Stabilité supérieure de minimiseurs relaxés [45]). *On considère* $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ *tel que* $\rho(C) \neq \emptyset$ *et on suppose que la suite d'applications multivoques* $F_{n|D_n}$ *converge* $(\|\cdot\| \times \tau_\rho)$*-graphiquement vers* $F_{|D}$*. On considère un couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$*,* $n_k \in \mathcal{N}_\infty^\#$ *et soit* $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in X \times Y$ *telle que* $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in \rho\mathrm{Min}(P_{n_k})$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et* $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\| \times \tau_\rho} (\bar{x}, \bar{y})$*. Alors* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho\mathrm{Min}(P)$*.*

Démonstration. Sachant que $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in \rho\mathrm{Min}(P_{n_k})$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, nous avons en particulier

$$(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in \mathrm{gph}\ F_{n_k|D_{n_k}},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $F_{n|D_n}$ converge $(\|\cdot\| \times \tau_\rho)$-graphiquement vers $F_{|D}$ et $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\| \times \tau_\rho} (\bar{x}, \bar{y})$, d'après l'assertion (ii) de la Définition 4.4.2, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\ F_{|D}$.
Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que

$$(\bar{y} - \rho(C)) \cap F(D) = \emptyset.$$

Supposons au contraire que $(\bar{y} - \rho(C)) \cap F(D) \neq \emptyset$.

$$\exists u \in D,\ v \in F(u) \text{ tel que } \bar{y} - v \in \rho(C). \tag{4.2}$$

Il s'en suit que $(u, v) \in \mathrm{gph}\ F_{|D}$. D'après la Définition 4.4.2, il existe une suite $(u_n, v_n) \subset X \times Y$ telle que $(u_n, v_n) \in \mathrm{gph}\ F_{n|D_n}$ pour tout n et $(u_n, v_n) \xrightarrow{\|\cdot\| \times \tau_\rho} (u, v)$. En particulier, $v_n \xrightarrow{\tau_\rho} v$ et $v_n \in F_n(D_n)$, pour tout n. D'après le Lemme 4.3.11, nous avons

$$\bar{y}_{n_k} - v_{n_k} \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{y} - v.$$

Sachant que l'ensemble $\rho(C)$ est un ouvert pour la topologie τ_ρ (voir Lemme 4.3.4) et $\bar{y} - v \in \rho(C)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bar{y}_{n_k} - v_{n_k} \in \rho(C),\ \forall k \geq k_0.$$

Ainsi, $v_{n_k} \in \bar{y}_{n_k} - \rho(C)$ pour tout $k \geq k_0$. Il s'en suit que

$$v_{n_k} \in (\bar{y}_{n_k} - \rho(C)) \cap F_{n_k}(D_{n_k}) \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

C'est impossible puisque, par définition d'un ρ-minimiseur nous avons

$$(\bar{y}_{n_k} - \rho(C)) \cap F_{n_k}(D_{n_k}) = \emptyset, \ \forall k.$$

Par conséquent, $(\bar{y} - \rho(C)) \cap F(D) = \emptyset$, c'est-à-dire, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho\mathrm{Min}(P)$. $\square$

Remarque 4.4.5. *Pour établir le Théorème 4.4.4, nous n'avions pas besoin de la totalité de la convergence $\|\cdot\| \times \tau_\rho$-graphique de la suite d'applications $F_{n|D_n}$ vers l'application $F_{|D}$. En fait, nous aurions pu affaiblir l'assertion* (i) *de la Définition 4.4.2 en la remplaçant par la suivante :*

(i)' *pour tout $y \in F(D)$, il existe une suite $(y_n) \subset Y$ telle que $y_n \in F_n(D_n)$, pour tout n et $y_n \xrightarrow{\tau_\rho} y$.*

Dans le cas particulier des minimiseurs faibles, c'est-à-dire, lorsque $\rho(C) = \mathrm{int}(C)$, le Théorème 4.4.4 conduit au résultat suivant garantissant la stabilité supérieure de tels minimiseurs.

Corollaire 4.4.6 (Stabilité supérieure de minimiseurs faibles)**.** *On suppose que $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ et que la suite d'applications $F_{n|D_n}$ converge $\|\cdot\| \times \tau_\rho$-graphiquement vers l'application $F_{|D}$. Alors, $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{WMin}(P_n) \subset \mathrm{WMin}(P)$.*

Démonstration. On applique le Théorème 4.4.4 avec $\rho(C) = \mathrm{int}(C)$ et $\rho\mathrm{Min} :=\mathrm{WMin}$. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \limsup_{n\to\infty} \mathrm{WMin}(P_n)$. Il existe $n_k \in \mathcal{N}_\infty^\#$ et $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in X \times Y$ telle que

$$(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in \mathrm{WMin}(P_{n_k}), \ \forall k \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ (\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\| \times \|\cdot\|} (\bar{x}, \bar{y}).$$

Pour conclure, il ne reste qu'à montrer que $\bar{y}_{n_k} \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{y}$.
Pour ce faire, considérons $a, b \in Y$ tels que $a < \bar{y} < b$. Nous avons,

$$\bar{y} - a \in \mathrm{int}(C) \ \text{ et } \ b - \bar{y} \in \mathrm{int}(C).$$

Nous avons d'autre part,

$$\bar{y}_{n_k} - a \xrightarrow{\|\cdot\|} \bar{y} - a, \ \text{ et } \ b - \bar{y}_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} b - \bar{y}.$$

Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b - \bar{y}_{n_k} \in \mathrm{int}(C)$ et $\bar{y}_{n_k} - a \in \mathrm{int}(C)$, pour tout $k \geq k_0$. Ainsi, pour tout $k \geq k_0$, nous avons $a < \bar{y}_{n_k}$ et $\bar{y}_{n_k} < b$, i.e., $a < \bar{y}_{n_k} < b$ pour k assez grand. Il s'en suit que $\bar{y}_{n_k} \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{y}$, i.e., $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\| \times \tau_\rho} (\bar{x}, \bar{y})$.
D'après le Théorème 4.4.4, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{WMin}(P)$. $\square$

Avant d'énoncer notre prochain résultat concernant la stabilité supérieure des minimiseurs relatifs, il nous paraît utile de rappeler le résultat suivant dont les détails peuvent être retrouvés dans [42] par exemple.

Lemme 4.4.7. *Soit $K \subset Y$ un ensemble convexe non vide et $(u_n) \subset Y$ une suite d'éléments de $\overline{\mathrm{aff}}(K)$. Si $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ avec $u \in \mathrm{ri}(K)$, alors pour n assez grand on a $u_n \in \mathrm{ri}(K)$.*

Corollaire 4.4.8 (Stabilité supérieure de minimiseurs relatifs)**.** *On suppose que $\mathrm{ri}(C) \neq \emptyset$ et la suite d'applications multivoques $F_{n|D_n}$ converge $\|\cdot\| \times \tau_\rho$-graphiquement vers l'application $F_{|D}$. Soient $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$, $n_k \in \mathcal{N}_\infty^\#$ et $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in X \times (\bar{y} + \overline{\mathrm{aff}}(C))$ telles que $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \in \mathrm{RMin}(P_{n_k})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \xrightarrow{\|\cdot\| \times \|\cdot\|} (\bar{x}, \bar{y})$. Alors, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{RMin}(P)$.*

Démonstration. On applique le Théorème 4.4.4 avec $\rho = \mathrm{ri}$, alors, $\rho\mathrm{Min} = \mathrm{RMin}$. Comme dans le Corollaire 4.4.6, nous avons besoin de montrer que $\bar{y}_{n_k} \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{y}$. Pour ce faire, considérons a, $b \in Y$ tels que $\bar{y} \in (a, b)$. Nous avons d'une part, $b - \bar{y} \in \mathrm{ri}(C)$ et $\bar{y} - a \in \mathrm{ri}(C)$. D'autre part,

$$b - \bar{y}_{n_k} = (b - \bar{y}) + (\bar{y} - \bar{y}_{n_k}) \in \mathrm{ri}(C) + \overline{\mathrm{aff}}(C) = \overline{\mathrm{aff}}(C).$$

De même,

$$\bar{y}_{n_k} - a = (\bar{y}_{n_k} - \bar{y}) + (\bar{y} - a) \in \overline{\mathrm{aff}}(C) + \mathrm{ri}(C) = \overline{\mathrm{aff}}(C).$$

La convergence de la suite $(\bar{y}_{n_k})$ vers $\bar{y}$ pour la topologie de la norme entraîne que $b - \bar{y}_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} b - \bar{y}$ et $\bar{y}_{n_k} - a \xrightarrow{\|\cdot\|} \bar{y} - a$. D'après le Lemme 4.4.7, il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a $\bar{y}_{n_k} - a \in \mathrm{ri}(C)$ et $b - \bar{y}_{n_k} \in \mathrm{ri}(C)$. Ainsi, pour $k \geq k_0$, nous avons $\bar{y}_{n_k} \in (a, b)$. Par conséquent, $\bar{y}_{n_k} \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{y}$ et le Théorème 4.4.4 nous permet de conclure. □

Ces dernières décennies, le concept de solutions approchées pour diverses classes de problèmes a retenu l'attention de nombreux auteurs. L'une des raisons majeures est probablement l'intérêt numérique que présentent de tels types de solutions. Avant d'établir la stabilité inférieure de minimiseurs relaxés, il nous paraît important de rappeler la définition suivante présentant la notion de minimiseurs approchés de problèmes d'optimisation multivoque. Un concept introduit par Kutateladze dans [72] en 1979 dans le cadre de l'optimisation vectorielle. Pour les détails, le lecteur pourra consulter entre autres [77, 103].

Définition 4.4.9 (Minimiseurs approchés)**.** *On considère un couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ *tel que* $\bar{x} \in D$ *et* $\varepsilon \in C \setminus \{0_Y\}$. *Le couple* $(\bar{x}, \bar{y})$ *est appelé un* ε*-minimiseur du problème* (P) *si* $(\bar{y} - \varepsilon - C) \cap F(D) = \emptyset$. *Nous notons par* $\operatorname{Min}_\varepsilon(P)$ *l'ensemble des* ε*-minimiseurs du problème* (P).

Dans notre prochain théorème, nous allons établir notre principal résultat concernant la stabilité inférieure des minimiseurs relaxés. Pour ce faire, nous aurons besoin de l'hypothèse standard suivante :

Hypothèse 4.4.10. *Il existe un sous-ensemble compact* K *de* X *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N},\ D_n \subset K$.

Nous rappelons d'autre part qu'une suite $(\varepsilon_n) \subset Y$ **décroit vers** 0_Y (voir par exemple [91]), si les deux assertions suivantes sont vraies :

(a) $0_Y \leq_C \cdots \leq_C \varepsilon_n \cdots \leq_C \varepsilon_1 \leq_C \varepsilon_0$;

(b) si $z \leq_C \varepsilon_n$, $\forall n$, alors $z \leq_C 0_Y$.

Théorème 4.4.11 (Stabilité inférieure de minimiseurs relaxés [45])**.** *On considère* $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ *tel que* $\rho(C) \neq \emptyset$. *On suppose que la suite d'applications multivoques* $F_{n|D_n}$ Γ*-converge vers l'application* $F_{|D}$ *et que* $\rho\operatorname{Min}(P)$ *n'est pas vide. De plus, on suppose que* $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n \subset D$ *et l'hypothèse 4.4.10 est satisfaite. Alors, pour tout couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho\operatorname{Min}(P)$, *il existe une suite* $(\varepsilon_n) \subset \rho(C)$ *décroissant vers* 0_Y *et une suite* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \subset X \times Y$ *telles que* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \overset{\|.\|\times\tau_\rho}{\longrightarrow} (\bar{x}, \bar{y})$ *et* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \operatorname{Min}_{\varepsilon_n}(P_n)$ *pour* n *assez grand.*

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho\operatorname{Min}(P)$. On a en particulier $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F_{|D}$. La Γ-convergence de la suite d'applications multivoques $F_{n|D_n}$ vers l'application $F_{|D}$, entraîne l'existence d'une suite $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \subset X \times Y$ vérifiant $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \operatorname{gph} F_{n|D_n}$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ telle que $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \overset{\|.\|\times\tau_\rho}{\longrightarrow} (\bar{x}, \bar{y})$.

D'abord, nous allons démontrer que,

$$\forall \varepsilon \in \rho(C),\ (\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \mathrm{Min}_{\varepsilon}(P_n) \text{ pour } n \text{ assez grand.} \tag{4.3}$$

Supposons au contraire qu'il existe $\overline{\varepsilon} \in \rho(C)$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n \geq N$ tel que $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \notin \mathrm{Min}_{\overline{\varepsilon}}(P_n)$. Ceci étant vrai pour tout rang $N \in \mathbb{N}$, on peut construire une sous-suite $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k})$ de la suite $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ telle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\bar{x}_{n_k}, \bar{y}_{n_k}) \notin \mathrm{Min}_{\overline{\varepsilon}}(P_{n_k})$. Par conséquent,

$$(\bar{y}_{n_k} - \overline{\varepsilon} - C) \cap F_{n_k}(D_{n_k}) \neq \emptyset,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit qu'il existe une suite $(y_k) \subset Y$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$y_k \in F_{n_k}(D_{n_k}) \text{ et } y_k \in \bar{y}_{n_k} - \overline{\varepsilon} - C. \tag{4.4}$$

Ainsi, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in D_{n_k}$ tel que $y_k \in F_{n_k}(x_k)$. D'après l'hypothèse 4.4.10, on peut extraire une sous-suite (x_{k_l}) de la suite $(x_k) \subset K$ convergeant vers un vecteur $x \in K$. Il s'en suit que $x \in \limsup_{n\to\infty} D_n$ et comme $\limsup_{n\to\infty} D_n \subset D$, nous avons $x \in D$. Considérons la suite $(\tilde{x}_n) \subset X$ définie par :

$$\tilde{x}_n := \begin{cases} x_{k_l} & \text{si } n = k_l; \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\tilde{x}_n \longrightarrow x$ et $\overline{\varepsilon} \in \rho(C)$, la Γ-convergence de la suite d'applications $F_{n|D_n}$ vers l'application $F_{|D}$ entraîne l'existence d'un certain rang $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$y_{k_l} \in F(x) - \frac{1}{4}\overline{\varepsilon} + C,\ \forall l \geq \ell_0. \tag{4.5}$$

Ainsi, pour tout $l \geq \ell_0$, il existe $\hat{y}_l \in F(x) \subset F(D)$ tel que

$$y_{k_l} \in \hat{y}_l - \frac{1}{4}\overline{\varepsilon} + C. \tag{4.6}$$

Il s'en suit que

$$\hat{y}_l - \bar{y} \in y_{k_l} + \frac{1}{4}\overline{\varepsilon} - \bar{y} - C.$$

De la seconde partie de la relation (4.4) on obtient,

$$y_{k_l} \in \bar{y}_{n_{k_l}} - \overline{\varepsilon} - C.$$

Ces deux dernières relations entraînent que

$$\hat{y}_l - \bar{y} \in \bar{y}_{n_{k_l}} - \frac{3}{4}\bar{\varepsilon} - \bar{y} - C, \ \forall l \geq \ell_0. \tag{4.7}$$

Comme $\bar{y} \in (\bar{y} - \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}, \bar{y} + \frac{1}{4}\bar{\varepsilon})$ et $\bar{y}_{n_{k_l}} \xrightarrow{\tau_\rho} \bar{y}$, pour l assez grand, nous avons

$$\bar{y} - \frac{1}{4}\bar{\varepsilon} < \bar{y}_{n_{k_l}} < \bar{y} + \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}.$$

On en déduit que

$$\bar{y} + \frac{1}{4}\bar{\varepsilon} - \bar{y}_{n_{k_l}} \in \rho(C) \text{ à partir d'un certain rang.}$$

Autrement dit, il existe un rang $\ell_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bar{y}_{n_{k_l}} - \bar{y} \in \frac{1}{4}\bar{\varepsilon} - \rho(C), \ \forall l \geq \ell_1. \tag{4.8}$$

Posons $N = \max\{\ell_0, \ell_1\}$. Grâce aux relations (4.7) et (4.8), nous obtenons,

$$\hat{y}_l - \bar{y} \in -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} - \rho(C), \ \forall l \geq N.$$

Cela implique que $\hat{y}_l - \bar{y} \in -\rho(C) - \rho(C) \subset -\rho(C)$, $\forall l \geq N$. Il s'en suit que

$$\hat{y}_l \in \bar{y} - \rho(C), \ \forall l \geq N.$$

C'est impossible puisque $\hat{y}_l \in F(D)$ et $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho\mathrm{Min}(P)$. Par conséquent, l'assertion (4.3) est vraie.

Considérons à présent une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \rho(C)$ décroissant vers 0_Y (on peut prendre par exemple $\varepsilon_i := \frac{\eta}{i+1}$ avec $\eta \in \rho(C)$). D'après (4.3) nous avons

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \exists N_i \in \mathbb{N} \ ; \ (\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \mathrm{Min}_{\varepsilon_i}(P_n), \ \forall n \geq N_i.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'application $i \mapsto N_i$ est strictement croissante. Nous affirmons que, pour tout $n \geq N_1$, il existe un unique $i(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$N_{i(n)} \leq n < N_{i(n)+1}. \tag{4.9}$$

Nous démontrons d'abord cette affirmation. Pour $n \geq N_1$ fixé, posons

$$\Delta_n = \{N_i \in \mathbb{N} \,|\, N_i \leq n\}.$$

Δ_n est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Il existe un unique élément de $\mathbb{N}$ noté $N_{i(n)}$ tel que $N_{i(n)} = \max \Delta_n$. Nous avons par construction, $N_{i(n)} \leq n$. Montrons que $N_{i(n)+1} > n$. Supposons au contraire que $N_{i(n)+1} \leq n$. Il en résulte que $N_{i(n)+1} \in \Delta_n$. Cela entraîne que $N_{i(n)+1} \leq N_{i(n)}$. C'est absurde puisque l'application $i \mapsto N_i$ est strictement croissante. Par conséquent, nous avons $N_{i(n)} \leq n < N_{i(n)+1}$.

Nous établissons maintenant l'unicité de l'entier $i(n)$. Pour cela, considérons $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \neq i(n)$ et $N_j \in \Delta_n$. On se propose de montrer que $N_{j+1} \leq n$. À cette fin, nous montrons d'abord que $N_j < N_{i(n)}$. Supposons au contraire que $N_j \geq N_{i(n)}$. Il s'en suit que $j \geq i(n)$ et comme $j \neq i(n)$, nous avons $j > i(n)$. Ainsi, nous en déduisons que $j \geq i(n) + 1$. Cela entraîne que $N_j \geq N_{i(n)+1} > n$. C'est absurde puisque $N_j \in \Delta_n$. Il s'en suit que $N_j < N_{i(n)}$. On en déduit que $j < i(n)$, i.e., $j + 1 \leq i(n)$. Par conséquent, $N_{j+1} \leq N_{i(n)} \leq n$. D'où l'unicité de l'entier $i(n)$ vérifiant la relation (4.9).

La suite $(i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} i(n) = +\infty$. En effet, pour $n_2 > n_1 \geq N_1$, nous avons $N_{i(n_1)} \leq N_{i(n_2)}$. Il s'en suit que $i(n_1) \leq i(n_2)$. Montrons qu'elle n'est pas stationnaire. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $i(n) = i(n+1)$, $\forall n \geq N$. Soit $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{i(n)} < N_{i_0}$ avec $n \geq N$. Soit $n_0 \geq \max\{n+1, N_{i_0}\}$. Comme $n_0 > N$, nous avons $N_{i(n_0)} < N_{i_0} \leq n_0$. Il s'en suit que $N_{i_0} \in \Delta_{n_0}$, c'est absurde car $N_{i(n_0)} = \max \Delta_{n_0}$. Ainsi, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} i(n) = +\infty$.

Considérons enfin la suite $(\overline{\varepsilon}_n) \subset \rho(C)$ définie par $\overline{\varepsilon}_n := \varepsilon_{i(n)}$ pour $n = N_1, N_1+1, ...$ D'après ce qui précède, nous avons $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \mathrm{Min}_{\overline{\varepsilon}_n}(P_n)$, pour n assez grand.

Pour terminer la démonstration, il ne reste qu'à montrer que la suite $(\overline{\varepsilon}_n)$ décroit vers 0_Y. Sachant que la suite (ε_i) décroit vers 0_Y, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons $0_Y < \varepsilon_i$. Il en résulte que $0_Y < \overline{\varepsilon}_n$, pour tout n. Ensuite, comme la suite $(i(n))$ est croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} i(n) = +\infty$, pour tout $n \geq N_1$, nous avons $i(n+1) \geq i(n)$ et $\varepsilon_{i(n+1)} \leq \varepsilon_{i(n)}$, i.e., $\overline{\varepsilon}_{n+1} \leq \overline{\varepsilon}_n$. Ainsi, nous avons

$$0_Y < ... \leq_C \overline{\varepsilon}_n \leq_C ... \leq_C \overline{\varepsilon}_{N_1+1} \leq_C \overline{\varepsilon}_{N_1}.$$

Fixons $i \in \mathbb{N}$ et considérons $\bar{z} \in Y$ tel que $\bar{z} \leq_C \overline{\varepsilon}_n$, $\forall n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} i(n) = +\infty$, il existe $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tel que $i(\hat{n}) > i$. Nous avons $\overline{\varepsilon}_{\hat{n}} = \varepsilon_{i(\hat{n})} \leq_C \varepsilon_i$. Par conséquent, $\bar{z} \leq_C \varepsilon_i$. Ceci étant vrai pour tout $i \in \mathbb{N}$, sachant que $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroit vers 0_Y, nous avons $\bar{z} \leq_C 0_Y$. Ainsi, la suite $(\overline{\varepsilon}_n)$ décroit vers 0_Y, ce qui termine la preuve. $\square$

Une conséquence immédiate du Théorème 4.4.11 est exprimée dans le corollaire suivant établissant la stabilité inférieure des minimiseurs de Pareto.

Corollaire 4.4.12. *On fixe* $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ *tel que* $\rho(C) \neq \emptyset$. *On suppose que la suite d'applications multivoques* $F_{n|D_n}$ Γ*-converge vers l'application* $F_{|D}$ *et que* $\mathrm{Min}(P)$, *l'ensemble des minimiseurs de Pareto du problème* (P) *est non vide. On suppose de plus que* $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n \subset D$ *et que l'hypothèse 4.4.10 est satisfaite. Alors, pour tout couple* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Min}(P)$, *il existe une suite* $(\bar{\varepsilon}_n) \subset \rho(C)$ *décroissant vers* 0_Y *et une suite* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \subset X \times Y$ *telles que* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \overset{\|.\| \times \tau_\rho}{\longrightarrow} (\bar{x}, \bar{y})$ *et* $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \mathrm{Min}_{\bar{\varepsilon}_n}(P_n)$ *à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Soit $\rho \in \{\mathrm{int}, \mathrm{ri}, \mathrm{pri}, \mathrm{qri}\}$ tel que $\rho(C) \neq \emptyset$ et $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Min}(P)$. Comme $\mathrm{Min}(P) \subset \rho\mathrm{Min}(P)$ (voir Lemme 4.2.2), nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \rho\mathrm{Min}(P)$. D'après le Théorème 4.4.11, il existe une suite $(\bar{\varepsilon}_n) \subset \rho(C)$ décroissant vers 0_Y et une suite $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \subset X \times Y$ telles que $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \overset{\|.\| \times \tau_\rho}{\longrightarrow} (\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \in \mathrm{Min}_{\bar{\varepsilon}_n}(P_n)$, pour n assez grand. □

À notre connaissance, jusqu'à date, le seul travail consacré à l'étude de la stabilité de minimiseurs de problèmes d'optimisation multivoque basé sur les techniques variationnelles avancées de l'analyse multivoque est la très récente publication de Li et al. [76]. Dans ce papier, les auteurs ont étudié la convergence au sans de Painlevé-Kuratowski de trois types de minimiseurs (Pareto, faible et Henig) dans un espace de dimension finie muni d'un ordre induit par un cône convexe solide. C'est la première différence importante avec notre travail puisque, dans ce chapitre nous travaillons dans des espaces de Banach généraux et le cône d'ordre peut être d'intérieur vide. En plus, toutes les applications multivoques utilisées dans [76] sont semi-continues supérieurement, à valeurs compactes et jouissent certaines propriétés de convexité ; les ensembles-contraintes sont des parties convexes fermées d'un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce chapitre, nous considérons divers types de minimiseurs relaxés et nous exploitons une convergence topologique nous permettant d'étudier le comportement des suites de points minimaux relaxés dans l'espace objectif. Ainsi, notre approche est très différente de celle adoptée dans [76].

En conclusion, nous voudrions souligner l'intérêt de travailler avec une topologie adaptée aux espaces vectoriels ordonnés, c'est-à-dire, une topologie jouissant d'une certaine compatibilité avec la structure d'ordre de l'espace ambiant. Nous croyons qu'une telle topologie peut aussi être utilisée pour étudier les propriétés de stabilité d'autres types de minimiseurs dont ceux obtenus à partir des approches ensembliste et de la structure des treillis (voir [67]). De telles perspectives peuvent ouvrir la voie sur de d'autres travaux de recherche.

Conclusion et perspectives

Cette thèse fournit des outils qui vont contribuer principalement au développement de la théorie de la différentiation généralisée, celle de l'optimisation multivoque et par ricochet à l'avancement de certaines disciplines appliquées si on se réfère au rôle incontournable que joue l'optimisation dans beaucoup de domaines. En effet, elle présente de nouveaux résultats d'existence de prédérivées pour certaines classes d'applications dont l'importance est bien connue dans de nombreux domaines appliqués. De plus, selon les propriétés des applications considérées, une expression d'une prédérivée est exhibée dans chacun des cas étudiés. Ensuite, elle fournit entre autres des résultats d'unicité et des conditions d'optimalité du premier ordre faisant intervenir des prédérivées dans le cadre de la théorie de l'optimisation multivoque. Enfin, elle présente deux concepts de convergence variationnelle dépendant d'une notion de convergence topologique introduite dans des espaces vectoriels ordonnés conduisant à des résultats concluant en termes de stabilités supérieure et inférieure de minimiseurs relaxés généralisant certains résultats de la très récente publication [42] de M. Gaydu et al.

Ainsi, les travaux présentés dans ce document fournissent des outils permettant non seulement de résoudre des problèmes de mathématiques abstraites mais aussi de répondre à de nombreuses questions provenant de domaines très variés. D'autre part, ils ouvrent la voie à d'autres perspectives de recherche. Une première serait d'établir l'existence de prédérivées pour d'autres classes d'applications et des conditions d'optimalité sous d'autres hypothèses. Une deuxième consisterait à se demander dans quelle mesure obtiendrait-on la stabilité de solutions issues des autres approches existantes.

Bibliographie

[1] S. Adly, R. Cibulka, and H. V. Ngai. Newton's method for solving inclusions using set-valued approximations. *SIAM J. Optim.*, 25(1) :159–184, 2015.

[2] L. Q. Anh, P. Q. Khanh, and D. N. Quy. About semicontinuity of set-valued maps and stability of quasivariational inclusions. *Set-Valued Var. Anal.*, 22(3) :533–555, 2014.

[3] K. J. Arrow and G. Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22 :265–290, 1954.

[4] H. Attouch. *Variational convergence for functions and operators.* Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[5] H. Attouch and H. Riahi. Stability results for Ekeland's ε-variational principle and cone extremal solutions. *Math. Oper. Res.*, 18(1) :173–201, 1993.

[6] J.-P. Aubin. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 159–229. Academic Press, New York, 1981.

[7] J.-P. Aubin. Comportement lipschitzien des solutions de problèmes de minimisation convexes. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. IV (Paris, 1981/1982)*, volume 84 of *Res. Notes in Math.*, pages 1–18. Pitman, Boston, MA, 1983.

[8] J.-P. Aubin. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems. *Math. Oper. Res.*, 9(1) :87–111, 1984.

[9] J.-P. Aubin and I. Ekeland. *Applied nonlinear analysis.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. Reprint of the 1984 original.

[10] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*, volume 2 of *Systems & Control : Foundations & Applications.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.

[11] D. Azé. An inversion theorem for set-valued maps. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 37(3) :411–414, 1988.

[12] H. T. Banks and M. Q. Jacobs. A differential calculus for multifunctions. *J. Math. Anal. Appl.*, 29 :246–272, 1970.

[13] T. Q. Bao and B. S. Mordukhovich. Necessary conditions for super minimizers in constrained multiobjective optimization. *J. Global Optim.*, 43(4) :533–552, 2009.

[14] T. Q. Bao and B. S. Mordukhovich. Relative Pareto minimizers for multiobjective problems : existence and optimality conditions. *Math. Program.*, 122(2, Ser. A) :301–347, 2010.

[15] T. Q. Bao and B. S. Mordukhovich. Set-valued optimization in welfare economics. In *Advances in mathematical economics. Volume 13*, volume 13 of *Adv. Math. Econ.*, pages 113–153. Springer, Tokyo, 2010.

[16] T. Q. Bao, B. S. Mordukhovich, and A. Soubeyran. Variational analysis in psychological modeling. *J. Optim. Theory Appl.*, 164(1) :290–315, 2015.

[17] J. Borwein and R. Goebel. Notions of relative interior in Banach spaces. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 115(4) :2542–2553, 2003. Optimization and related topics, 1.

[18] J. M. Borwein and A. S. Lewis. Partially finite convex programming. I. Quasi relative interiors and duality theory. *Math. Programming*, 57(1, Ser. B) :15–48, 1992.

[19] R. I. Boţ and E. R. Csetnek. Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization : new achievements and their relation to some classical statements. *Optimization*, 61(1) :35–65, 2012.

[20] R. I. Boţ, E. R. Csetnek, and G. Wanka. Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming. *SIAM J. Optim.*, 19(1) :217–233, 2008.

[21] R. I. Boţ, S.-M. Grad, and G. Wanka. *Duality in vector optimization.* Vector Optimization. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[22] G. Y. Chen and J. Jahn. Optimality conditions for set-valued optimization problems. *Math. Methods Oper. Res.*, 48(2) :187–200, 1998. Set-valued optimization.

[23] R. Cibulka, A. Dontchev, and M. H. Geoffroy. Inexact Newton Methods and Dennis–Moré Theorems for Nonsmooth Generalized Equations. *SIAM J. Control Optim.*, 53(2) :1003–1019, 2015.

[24] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*, volume 5 of *Classics in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edition, 1990.

[25] H. W. Corley. On optimality conditions for maximizations with respect to cones. *J. Optim. Theory Appl.*, 46(1) :67–78, 1985.

[26] H. W. Corley. Existence and Lagrangian duality for maximizations of set-valued functions. *J. Optim. Theory Appl.*, 54(3) :489–501, 1987.

[27] H. W. Corley. Optimality conditions for maximizations of set-valued functions. *J. Optim. Theory Appl.*, 58(1) :1–10, 1988.

[28] P. Daniele, S. Giuffrè, G. Idone, and A. Maugeri. Infinite dimensional duality and applications. *Math. Ann.*, 339(1) :221–239, 2007.

[29] A. Daniilidis and J. C. H. Pang. Continuity and differentiability of set-valued maps revisited in the light of tame geometry. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 83(3) :637–658, 2011.

[30] F. S. De Blasi. On the differentiability of multifunctions. *Pacific J. Math.*, 66(1) :67–81, 1976.

[31] E. De Giorgi and G. Dal Maso. Γ-convergence and calculus of variations. In *Mathematical theories of optimization (Genova, 1981)*, volume 979 of *Lecture Notes in Math.*, pages 121–143. Springer, Berlin, 1983.

[32] E. De Giorgi and T. Franzoni. Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)*, 58(6) :842–850, 1975.

[33] G. Debreu. Integration of correspondences. In *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II : Contributions to Probability Theory, Part 1*, pages 351–372. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967.

[34] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. Regularity and conditioning of solution mappings in variational analysis. *Set-Valued Anal.*, 12(1-2) :79–109, 2004.

[35] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. *Implicit functions and solution mappings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2009. A view from variational analysis.

[36] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar. Convergence of inexact Newton methods for generalized equations. *Math. Program.*, 139(1-2, Ser. B) :115–137, 2013.

[37] M. Durea, J. Dutta, and C. Tammer. Lagrange multipliers for ε-Pareto solutions in vector optimization with nonsolid cones in Banach spaces. *J. Optim. Theory Appl.*, 145(1) :196–211, 2010.

[38] A. F. Filippov. On certain questions in the theory of optimal control. *J. SIAM Control Ser. A*, 1 :76–84, 1962.

[39] F. Flores-Bazán. Optimality conditions in non-convex set-valued optimization. *Math. Methods Oper. Res.*, 53(3) :403–417, 2001.

[40] M. Gaydu and M. H. Geoffroy. A Newton iteration for differentiable set-valued maps. *J. Math. Anal. Appl.*, 399(1) :213–224, 2013.

[41] M. Gaydu, M. H. Geoffroy, and C. Jean-Alexis. An inverse mapping theorem for H-differentiable set-valued maps. *J. Math. Anal. Appl.*, 421(1) :298–313, 2015.

[42] M. Gaydu, M. H. Geoffroy, C. Jean-Alexis, and D. Nedelcheva. Stability of minimizers of set optimization problems. *Positivity*, March 2016.

[43] M. Gaydu, M. H. Geoffroy, and Y. Marcelin. Prederivatives of convex set-valued maps and applications to set optimization problems. *J. Global Optim.*, 64(1) :141–158, 2016.

[44] M. H. Geoffroy and Y. Marcelin. A concept of inner prederivative for set-valued mappings and its applications. *Preprint*, 2016.

[45] M. H. Geoffroy, Y. Marcelin, and D. Nedelcheva. Convergence of relaxed minimizers in set optimization. *Preprint*, 2016.

[46] M. H. Geoffroy and G. Pascaline. Generalized differentiation and fixed points sets behaviors with respect to Fisher convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 387(1) :464–474, 2012.

[47] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu. *Variational methods in partially ordered spaces*, volume 17 of *CMS Books in Mathematics/Ouvrage de Mathématiques de la SMC*.

[48] V. V. Gorokhovik and P. P. Zabreiko. On Fréchet differentiability of multifunctions. *Optimization*, 54(4-5) :391–409, 2005.

[49] A. Grad. Quasi-relative interior-type constraint qualifications ensuring strong Lagrange duality for optimization problems with cone and affine constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 361(1) :86–95, 2010.

[50] A. Guerraggio, E. Molho, and A. Zaffaroni. On the notion of proper efficiency in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 82(1) :1–21, 1994.

[51] K. G. Guseinov, S. A. Duzce, and O. Ozer. Convex extensions of the convex set valued maps. *J. Math. Anal. Appl.*, 314(2) :672–688, 2006.

[52] T. X. D. Ha. Optimality conditions for various efficient solutions involving coderivatives : from set-valued optimization problems to set-valued equilibrium problems. *Nonlinear Anal.*, 75(3) :1305–1323, 2012.

[53] A. H. Hamel, F. Heyde, and B. Rudloff. Set-valued risk measures for conical market models. *Math. Financ. Econ.*, 5(1) :1–28, 2011.

[54] A. H. Hamel and A. Löhne. Lagrange duality in set optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 161(2) :368–397, 2014.

[55] E. Hernández and L. Rodríguez-Marín. Existence theorems for set optimization problems. *Nonlinear Anal.*, 67(6) :1726–1736, 2007.

[56] C. Herrero and B. Subiza. Set-valued utilities for strict partial orders. *J. Math. Psych.*, 43(3) :433–440, 1999.

[57] R. B. Holmes. *Geometric functional analysis and its applications.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 24.

[58] X. X. Huang and J. C. Yao. Characterizations of the nonemptiness and compactness for solution sets of convex set-valued optimization problems. *J. Global Optim.*, 55(3) :611–626, 2013.

[59] T. L. Dinh. On duality theory in multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 43(4) :557–582, 1984.

[60] T. L. Dinh. *Theory of vector optimization*, volume 319 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[61] T. L. Dinh. Contingent derivatives of set-valued maps and applications to vector optimization. *Math. Programming*, 50(1, (Ser. A)) :99–111, 1991.

[62] A. D. Ioffe. Nonsmooth analysis : differential calculus of nondifferentiable mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 266(1) :1–56, 1981.

[63] A. D. Ioffe. Variational analysis and mathematical economics 1 : Subdifferential calculus and the second theorem of welfare economics. In *Advances in mathematical economics. Volume 12*, volume 12 of *Adv. Math. Econ.*, pages 71–95. Springer, Tokyo, 2009.

[64] A. D. Ioffe. Variational analysis and mathematical economics 2 : Nonsmooth regular economies. In *Advances in mathematical economics. Vol. 14*, volume 14 of *Adv. Math. Econ.*, pages 17–38. Springer, Tokyo, 2011.

[65] J. Jahn. *Vector optimization.* Springer-Verlag, Berlin, 2004. Theory, applications, and extensions.

[66] J. Jahn and R. Rauh. Contingent epiderivatives and set-valued optimization. *Math. Methods Oper. Res.*, 46(2) :193–211, 1997.

[67] A. A. Khan, C. Tammer, and C. Zălinescu. *Set-valued optimization.* Vector Optimization. Springer, Heidelberg, 2015. An introduction with applications.

[68] M. A. Khan. Ioffe's normal cone and the foundations of welfare economics : the infinite-dimensional theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 161(1) :284–298, 1991.

[69] D. Kuroiwa. Some notions of convexity for set-valued maps and their relations. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, (939) :168–172, 1996. Research on nonlinear analysis and convex analysis (Japanese) (Kyoto, 1995).

[70] D. Kuroiwa. Existence theorems of set optimization with set-valued maps. *J. Inf. Optim. Sci.*, 24(1) :73–84, 2003.

[71] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha. On cone convexity of set-valued maps. In *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 3 (Athens, 1996)*, volume 30, pages 1487–1496, 1997.

[72] S. S. Kutateladze. Convex ε-programming. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 245(5) :1048–1050, 1979.

[73] C. S. Lalitha, J. Dutta, and M. G. Govil. Optimality criteria in set-valued optimization. *J. Aust. Math. Soc.*, 75(2) :221–231, 2003.

[74] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, and J. L. Sánchez. Strongly convex set-valued maps. *J. Global Optim.*, 57(3) :695–705, 2013.

[75] B. Lemaire. Approximation in multiobjective optimization. *J. Global Optim.*, 2(2) :117–132, 1992.

[76] X.-B. Li, Q.-L. Wang, and Z. Lin. Stability of set-valued optimization problems with naturally quasi-functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, pages 1–14, 2015.

[77] P. Loridan. ε-solutions in vector minimization problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 43(2) :265–276, 1984.

[78] G. G. Malcolm and B. S. Mordukhovich. Pareto optimality in nonconvex economies with infinite-dimensional commodity spaces. *J. Global Optim.*, 20(3-4) :323–346, 2001. Special issue : Applications to economics.

[79] B. Š. Morduhovič. Metric approximations and necessary conditions for optimality for general classes of nonsmooth extremal problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 254(5) :1072–1076, 1980.

[80] B. Mordukhovich. Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 340(1) :1–35, 1993.

[81] B. S. Mordukhovich. An abstract extremal principle with applications to welfare economics. *J. Math. Anal. Appl.*, 251(1) :187–216, 2000.

[82] B. S. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation. I*, volume 330 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Basic theory.

[83] B. S. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation. II*, volume 331 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Applications.

[84] K. Nachi and J. P. Penot. Inversion of multifunctions and differential inclusions. *Control Cybernet.*, 34(3) :871–901, 2005.

[85] J. W. Nieuwenhuis. Separating sets with relative interior in Fréchet spaces. *Appl. Math. Optim.*, 3(4) :373–376, 1976/77.

[86] P. Oppezzi and A. M. Rossi. A convergence for infinite dimensional vector valued functions. *J. Global Optim.*, 42(4) :577–586, 2008.

[87] P. Oppezzi and A. M. Rossi. A convergence for vector valued functions. *Optimization*, 57(3) :435–448, 2008.

[88] C. H. J. Pang. Generalized differentiation with positively homogeneous maps : applications in set-valued analysis and metric regularity. *Math. Oper. Res.*, 36(3) :377–397, 2011.

[89] C. H. J. Pang. Implicit multifunction theorems with positively homogeneous maps. *Nonlinear Anal.*, 75(3) :1348–1361, 2012.

[90] J.-P. Penot. Differentiability of relations and differential stability of perturbed optimization problems. *SIAM J. Control Optim.*, 22(4) :529–551, 1984.

[91] A. L. Peressini. *Ordered topological vector spaces.* Harper & Row, Publishers, New York-London, 1967.

[92] N. Popovici. Explicitly quasiconvex set-valued optimization. *J. Global Optim.*, 38(1) :103–118, 2007.

[93] P. D. Proinov. A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory. *Fixed Point Theory Appl.*, pages 2013 :103, 38, 2013.

[94] H. Rådström. An embedding theorem for spaces of convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 :165–169, 1952.

[95] S. M. Robinson. Some continuity properties of polyhedral multifunctions. *Math. Programming Stud.*, (14) :206–214, 1981. Mathematical programming at Oberwolfach (Proc. Conf., Math. Forschungsinstitut, Oberwolfach, 1979).

[96] S. M. Robinson. Solution continuity in monotone affine variational inequalities. *SIAM J. Optim.*, 18(3) :1046–1060 (electronic), 2007.

[97] R. T. Rockafellar. *La théorie des sous-gradients et ses applications à l'optimisation.* Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1979. Fonctions convexes et non convexes, Collection de la Chaire Aisenstadt, Translated from the English by Godeliève Vanderstraeten-Tilquin.

[98] R. T. Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

[99] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational analysis*, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[100] L. Rodríguez-Marín and M. Sama. About contingent epiderivatives. *J. Math. Anal. Appl.*, 327(2) :745–762, 2007.

[101] L. Rodríguez-Marín and M. Sama. Epidifferentiability and hypodifferentiability of pseudoconvex maps in set-optimization problems. *Nonlinear Anal.*, 71(1-2) :321–331, 2009.

[102] Y. Sawaragi, H. Nakayama, and T. Tanino. *Theory of multiobjective optimization*, volume 176 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.

[103] D. J. White. Epsilon efficiency. *J. Optim. Theory Appl.*, 49(2) :319–337, 1986.

[104] C. Zălinescu. *Convex analysis in general vector spaces.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

[105] Z. Zhou. Optimality conditions of vector set-valued optimization problem involving relative interior. *J. Inequal. Appl.*, pages Art. ID 183297, 15, 2011.

[106] Z. A. Zhou and X. M. Yang. Optimality conditions of generalized subconvex-like set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior. *J. Optim. Theory Appl.*, 150(2) :327–340, 2011.

[107] Z. A. Zhou, X. M. Yang, and J. W. Peng. Optimality conditions of set-valued optimization problem involving relative algebraic interior in ordered linear spaces. *Optimization*, 63(3) :433–446, 2014.

[108] D. Zhuang. Density results for proper efficiencies. *SIAM J. Control Optim.*, 32(1) :51–58, 1994.

Index

Développements récents en analyse multivoque : prédérivées et optimisation multivoque

Résumé :

Les travaux de cette thèse portent sur les prédérivées d'applications multivoques et la théorie de l'optimisation. Dans un premier temps, nous établissons des résultats d'existence de différents types de prédérivées pour certaines classes d'applications. Spécialement, pour des applications multivoques possédant certaines propriétés de convexité. Par la suite, nous appliquons ces résultats dans le cadre de la théorie de l'optimisation multivoque en établissant des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'optimalité. Sous des hypothèses de convexité, nous établissons des résultats naturels propres aux minimiseurs en optimisation convexe. Ensuite, nous appliquons quelques uns de nos résultats théoriques à un modèle de l'économie du bien-être en établissant notamment une équivalence entre les allocations optimales faibles de Pareto du modèle économique et les minimiseurs faibles d'un problème d'optimisation multivoque associé. D'autre part, en utilisant certaines notions d'intérieur généralisé existant dans la littérature, nous discutons dans un cadre unifié divers concepts de minimiseurs relaxés. En vue d'étudier leur stabilité, nous introduisons une topologie sur des espaces vectoriels ordonnés dont découle une notion de convergence nous permettant de définir deux concepts de convergence variationnelle qui sont ensuite utilisés pour établir la stabilité supérieure et la stabilité inférieure des ensembles de minimiseurs relaxés considérés dans ce travail.

Recent developments in set-valued analysis : prederivatives and set optimization

Abstract :

This work is devoted to the study of prederivatives of set-valued maps and the theory of optimization. First, we establish results regarding the existence of several kinds of prederivatives for some classes of set-valued maps. Specially for set-valued maps enjoying convexity properties. Subsequently, we apply our results in the framework of set optimization by establishing both necessary and sufficient optimality conditions, involving such prederivatives, for set optimization problems. Under convexity assumptions, we prove some natural results fitting the paradigm of minimizers in convex optimization. Then, we apply some of our theoretical results to a model of welfare economics by establishing in particular an equivalence between the weak Pareto optimal allocations of the model and the weak minimizers of a set optimization problem associated. Taking advantage of several generalized interiority notions existing in the literature, we discuss in a unified way corresponding notions of relaxed minimizers. In order to establish stability results, we introduce a topology on vector ordered spaces from which we derive a concept of convergence that we use to define two concepts of variational convergence that allow us to study both the upper and the lower stability of sets of relaxed minimizers we consider.