

**THÈSE**

présentée devant

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**  
École Doctorale MEGA

en vue d'obtenir le titre de

**DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

par

**Gilles-Alexis RENAUT**

---

**Schémas d'ordre élevé pour la méthode SPH-ALE appliquée à des  
simulations sur machines hydrauliques**

---

Soutenue le 17 Décembre 2015 devant la Commission d'Examen

Rapporteur :	Professeur	S. KHELLADI	Arts et Métiers ParisTech, France
Rapporteur :	Professeur	D. LE TOUZE	Ecole Centrale de Nantes, France
Directrice de thèse :	Professeur	I. TRÉBINJAC	Ecole Centrale de Lyon, France
Co-Encadrant :	Docteur	J.-C. MARONGIU	ANDRITZ HYDRO, France
Co-Encadrant :	Professeur	S. AUBERT	Ecole Centrale de Lyon, France
Examineur :	Professeur	M. LANCE	Ecole Centrale de Lyon, France
Examineur :	Professeur	R. SAUREL	Polytech Marseille, France

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique UMR 5509

# Remerciements :

A travers le manuscrit de thèse se tourne une page de la vie scientifique de tout chercheur, il rentre enfin dans le monde des "grands" celui des docteurs ayant passé prêt de trois années à s'épanouir ou à se morfondre sur des sujets bien entendu épineux. Il va de soi que ce premier long vrai travail de recherche ne pourrait se faire sans l'appui de nombreuses personnes entourant le doctorant. C'est tout l'objet de cette section, il est venu le temps pour moi de remercier les personnes qui ont su m'accompagner durant ces quelques années.

Mais avant de commencer, je veux prendre quelques instants pour penser à mon directeur de thèse, le professeur Francis Leboeuf qui nous a quitté trop tôt. Dès notre première rencontre, j'ai saisi les grandes dimensions scientifiques et humaines qui animaient cet homme. Un grand respect et un grand honneur m'étaient donnés d'être un de ses élèves. Et je dois dire que malgré le court laps de temps durant lequel nous avons pu échanger, j'ai appris beaucoup sur les qualités humaines, scientifiques nécessaires à un chercheur. Donc en un mot où que vous soyez professeur : Merci !

Je remercie bien entendu les membres de mon jury de thèse, et en tout premier lieu mes deux rapporteurs : professeur Sofiane Khelladi et professeur David Letouzé qui ont acceptés d'examiner mon travail.

Je remercie l'Ecole Centrale de Lyon pour l'accueil et les moyens qu'elle m'a fournis, à travers notamment un encadrement de qualité. Je remercie donc particulièrement le professeur Isabelle Trebinjac d'être devenue mon directeur de thèse, par la force des choses. Un grand merci au Professeur Stéphane Aubert qui a accepté également de m'encadrer et avec qui j'ai beaucoup apprécié les échanges. Merci pour votre pédagogie, votre patience dans la relecture de mes papiers dans un anglais approximatif.

Je remercie l'ensemble des équipes d'ANDRITZ Hydro, l'équipe lyonnaise : Dr-Ing Jean-Christophe Marongiu pour sa patience et son obstination lors de mon apprentissage des écoulements dans les turbomachines. Le Dr-Ing Julien Leduc pour sa proximité et son dynamisme. Ing Hervé Ozdoba pour ses précieux conseils en informatique et en codage. L'équipe Suisse pour leur intérêt pour mon travail. Merci également à tous les doctorants qui m'ont précédé pour les échanges et leurs conseils amicaux : Dr Zhe Li , Dr Magdalena Neuhauser et les doctorants du projets PREDYHMA : Saira, Jorge, Guillaume et Weibke à qui je souhaite plein de réussite dans leurs travaux.

Je remercie l'ensemble de mes professeurs de l'Université à Nantes qui ont initié mon goût pour la recherche, je pense notamment aux Pr Christophe Berthon et Dr Rodolphe Turpault.

Je reste en Bretagne quelques instants, pour remercier mes parents qui m'ont permis de grandir dans un environnement propice à l'éveil intellectuel et à l'ouverture sur le monde. Ils m'ont fait confiance dans mes choix et je les en remercie. Je remercie également le Père Tertrais pour son écoute et ses conseils avisés sur l'existence.

Je termine enfin en remerciant doublement mon épouse, qui me supporte au quotidien, subissant les affres de mon humeur fonction des problèmes de codage rencontrés. Mais surtout, je la remercie pour ce merveilleux cadeau qu'elle me donna ce 17 juillet 2013.

# Résumé

Ce travail traite des méthodes de calcul numérique pour les simulations hydrodynamiques appliquées principalement sur des produits développés par ANDRITZ HYDRO. Il s'agit ici de mettre en place des schémas d'ordre élevé pour des simulations CFD en utilisant le code de calcul ASPHODEL développé et utilisé par ANDRITZ HYDRO. Les principales motivations sont l'augmentation de la fiabilité des résultats de calculs numériques avec un coût de calcul raisonnable. Cette fiabilité s'exprime à travers l'augmentation de la précision et de la robustesse des schémas numériques.

Le code de calcul ASPHODEL est basé sur la méthode sans maillage SPH-ALE. Mélange entre les volumes finis et la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), la méthode SPH-ALE emploie un ensemble de points appelés particules servant à la discrétisation du domaine fluide. Elle permet en particulier de par son caractère sans maillage, un suivi des surfaces libres sans effort de calcul supplémentaire.

Cet aspect est véritablement attrayant pour bon nombre d'applications industrielles notamment la simulation des écoulements à surface libre se produisant dans une turbine Pelton, mais également le remplissage d'une turbine Francis.

Cependant, le bémol à cette méthode est son manque de précision spatiale. En effet les points de calcul étant mobiles, les opérateurs spatiaux doivent être en mesure de conserver leur précision et leur robustesse au cours du temps. La qualité des résultats en est du coup impactée, en particulier le champ de pression souvent excessivement bruité.

La montée en ordre et l'amélioration de la consistance des opérateurs pour un vaste panel de configurations géométriques sont donc les enjeux de ce travail. En utilisant des outils inspirés par les volumes finis non-structurés, il est possible d'améliorer les opérateurs spatiaux. En effet, la montée en ordre ou  $p$ -raffinement peut notamment se faire avec des reconstructions d'ordres élevés pour évaluer les états aux interfaces des problèmes de Riemann. La sommation des flux numériques résolus par un solveur de Riemann est ensuite retravaillée pour obtenir un schéma numérique d'ordre global cohérent. Le même soucis de cohérence avec les schémas en temps doit d'ailleurs être pensé.

Le gain de précision apporté par les schémas numériques d'ordre élevé est comparé avec un raffinement spatial, c'est à dire une augmentation du nombre des particules de taille plus petite, aussi appelé  $h$ -raffinement. La méthode SPH-ALE améliorée est ensuite testée sur des cas représentatifs des applications visées.

En conclusion, les développements effectués dans cette étude ont été guidés par l'application en turbine Pelton principalement mais il va de soi qu'ils sont applicables à des écoulements sans surface libre dans les turbines Francis par exemple. Ce travail montre les possibilités d'une méthode sans maillage pour des cas d'écoulements complexes autour de géométrie tournantes.

**Mots-clef :** SPH, ALE, schéma de Godunov, problème de Riemann, ordres élevés, consistance.

# Abstract :

This work deals with numerical methods for hydrodynamic testing applied mainly on products developed by ANDRITZ HYDRO. This is to put in place high order schemes for CFD simulations using the ASPHODEL calculation code developed and used by ANDRITZ HYDRO. The main reasons are the increased reliability of the results of numerical calculations with a reasonable computational cost. This reliability is expressed through increasing the accuracy and robustness of numerical schemes.

The ASPHODEL computer code is based on the meshfree method SPH-ALE. Mix between finite volume method and SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), the SPH-ALE method uses a set of points called particles serving as the fluid domain discretization. It allows track free surfaces without additional computational effort. This is truly attractive for many industrial applications including the simulation of free surface flows occurring in a Pelton turbine, but also filling a Francis turbine.

However, the downside of this method is its lack of spatial accuracy. Indeed calculation points are mobile, space operators must be able to keep their accuracy and robustness over time. The quality of results is impacted especially the pressure field is often excessively noisy.

The rise in order and improving the consistency of the operators for a wide range of geometric configurations are the challenges of this work. Using tools inspired by the unstructured finite volume, it is possible to improve the spatial operators. Indeed, the increasing order or  $p$ -refinement particular can be done with reconstructions of high order to assess the conditions at the interfaces of Riemann problems. The summation of discret fluxes solved by Riemann solver is then reworked to obtain a coherent global order scheme. The same concern for consistency with temporal schemes should also be considered.

The precision gain provided by numerical schemes of higher orders is compared with a spatial refinement ie an increase in the number of smaller particles ; also called  $h$ -refinement . Improved SPH -ALE method is then tested on representative cases of intended applications.

In conclusion, the developments made in this study were guided in accordance mainly with the Pelton turbine but it goes without saying that they are applicable to non- free surface flows in Francis turbines for example. This work shows the possibilities of a free mesh method for cases of complex flow around rotating geometry.

**Keywords :** SPH , ALE, Godunov scheme , Riemann problem , higher order , consistency.

Kentoc'h mervel eget bezañ saotret !

A force d'espoir et d'audace !  
à tous mes camarades du 22...

# Table des matières

<b>Remerciements :</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>2</b>
<b>Abstract :</b>	<b>3</b>
	<b>4</b>
<b>Table des matières :</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
0.1 Contexte scientifique . . . . .	13
0.2 Contexte industriel . . . . .	17
0.3 Objectifs et enjeux . . . . .	18
0.4 Structure du mémoire . . . . .	19
<b>I Méthodes de simulation sans maillage</b>	<b>20</b>
<b>1 La méthode particulière SPH-ALE</b>	<b>21</b>
1.1 Description ALE . . . . .	21
1.2 Équations de conservation . . . . .	22
1.3 Écoulements pseudo-compressibles . . . . .	23
1.4 Approximation Particulaire . . . . .	24
1.5 Calcul des flux numériques . . . . .	24
1.5.1 Problème de Riemann monodimensionnel . . . . .	24
1.5.2 Résolution des problèmes de Riemann . . . . .	25
1.5.3 Stratégie MUSCL . . . . .	26
1.5.4 Les conditions aux limites . . . . .	27
<b>2 Positionnement de la méthode SPH-ALE</b>	<b>29</b>
2.1 Lien entre la SPH-ALE et les volumes finis . . . . .	29
2.2 Lien avec le formalisme FVPM . . . . .	33
2.3 Lien avec la méthode des éléments finis . . . . .	34
2.4 Conclusion . . . . .	35
<b>3 Approximation particulière et Procédures d'adaptation</b>	<b>37</b>
3.1 Construction d'un problème aux moindres carrés . . . . .	37
3.2 Résolution du problème aux moindres carrés . . . . .	39
3.3 Adaptabilité en ordre : p-dégradation . . . . .	40
3.4 Adaptabilité en ordre : p-adaptabilité . . . . .	41
3.5 Adaptabilité en espace : d-adaptabilité . . . . .	41
<b>II Montée en ordre de la méthode SPH-ALE</b>	<b>46</b>
<b>4 Flux numérique d'ordre élevé</b>	<b>48</b>
4.1 Stratégie de reconstruction d'ordre supérieur . . . . .	48
4.1.1 Construction du problème aux moindres carrés complet . . . . .	49
4.1.2 Construction du problème aux moindres carrés récursif . . . . .	50
4.1.3 Préservation de la valeur moyenne . . . . .	50

4.2	Stratégie de la limitation . . . . .	52
4.3	Adaptabilité de la reconstruction des flux . . . . .	53
4.3.1	Adaptabilité en ordre : p-dégradation . . . . .	54
4.3.2	Adaptabilité en ordre : p-adaptabilité . . . . .	56
4.3.3	Adaptabilité en espace : d-adaptabilité . . . . .	58
4.3.4	Algorithme de la reconstruction des flux . . . . .	60
4.4	Cas test . . . . .	62
4.4.1	Écoulement quasi-1D dans un convergent-divergent . . . . .	62
4.4.2	Tourbillons de Taylor-Green en 2D . . . . .	64
4.4.3	Écoulement en 2D autour d'un cylindre isolé . . . . .	68
4.4.4	Impact 2D d'un jet sur une plaque plane . . . . .	72
4.5	Conclusion . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Opérateur de divergence d'ordre élevé</b>	<b>78</b>
5.1	Évaluation de la divergence . . . . .	78
5.1.1	Méthodologie des volumes finis . . . . .	78
5.1.2	Méthodologie pour la méthode SPH-ALE . . . . .	79
5.2	La consistance de l'opérateur de divergence . . . . .	80
5.2.1	La consistance d'ordre 0 . . . . .	80
5.2.2	La consistance d'ordre 1 . . . . .	83
5.2.3	La consistance d'ordre $p$ . . . . .	84
5.2.4	La cinématique des particules . . . . .	87
5.3	Adaptabilité de la divergence des flux . . . . .	89
5.3.1	Algorithme de la sommation des flux . . . . .	89
5.4	Cas test : . . . . .	90
5.4.1	Tourbillon de Taylor-Green non visqueux . . . . .	90
5.4.2	Écoulement en 2D autour d'un cylindre isolé . . . . .	91
5.4.3	Impact 2D d'un jet sur une plaque plane . . . . .	96
5.5	Conclusion . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Applications industrielles sur des turbines hydrauliques</b>	<b>104</b>
6.1	Simulation 3D du fonctionnement d'une turbine Pelton . . . . .	104
6.1.1	Présentation de la simulation . . . . .	104
6.1.2	Résultats et discussions . . . . .	105
6.2	Simulation 2D d'une cascade de profils . . . . .	113
6.2.1	Présentation du calcul . . . . .	114
6.2.2	Résultats et discussions . . . . .	114
	<b>Conclusions</b>	<b>118</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Cas test</b>	<b>120</b>
A.1	Cas monodimensionnel . . . . .	120
A.1.1	Écoulement quasi-1D dans un convergent-divergent . . . . .	120
A.2	Cas multidimensionnels . . . . .	122
A.2.1	Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux . . . . .	122
A.2.2	Écoulement non-visqueux autour d'un cylindre . . . . .	124
A.2.3	Impact d'un jet d'eau sur une section plane . . . . .	126
<b>B</b>	<b>Analyse numérique : SVD/QR</b>	<b>130</b>
B.1	La méthode SVD . . . . .	130
B.2	La factorisation QR . . . . .	130
B.3	Remarques/Conclusions . . . . .	131
<b>C</b>	<b>Analyse par Composantes principales (PCA)</b>	<b>132</b>
<b>IV</b>	<b>Références</b>	<b>135</b>

# Table des figures

1	Discrétisation autour d'un cylindre en deux dimensions . . . . .	13
2	Illustration des notations autour de la fonction noyau . . . . .	15
3	Schémas de turbines hydrauliques . . . . .	17
4	Simulation CFD pour des écoulements dans des turbines hydrauliques . . . . .	18
5	Solutions exacte, numérique et discrète [28] . . . . .	18
1.1	Descriptions Eulérienne (a) et Lagrangienne d'un fluide [64] . . . . .	21
1.2	Problème de Riemann unidimensionnel et la structure de la solution . . . . .	25
1.3	Extrapolation à l'interface $X_{ij}$ du problème de Riemann constant par morceaux (à gauche), linéaire par morceaux (à droite) . . . . .	27
1.4	Domaine fluide et ses frontières en bleu : une surface libre, en vert : des conditions de entrées/sorties et rouge : une paroi [27] . . . . .	27
2.1	Approches volumes finis <i>cell-centered</i> et <i>vertex-centered</i> en 2D . . . . .	30
2.2	Approche SPH-ALE et Interface des problèmes de Riemann . . . . .	30
2.3	Maillage structuré 2D carré (à gauche) triangulaire (à droite) . . . . .	32
3.1	Calcul d'une dérivé à partir d'un ensemble discret, local de données. . . . .	37
3.2	Reconstruction MLS de la condition initiale des tourbillons de Taylor-Green sur une distribution aléatoire de particules . . . . .	38
3.3	Présentation de différentes configurations du voisinage . . . . .	39
3.4	Schéma de la procédure de décalage par un barycentre géométrique (vert : particule d'intérêt en $X_i$ , rouge : barycentre géométrique $X_G$ ) . . . . .	40
3.5	Configuration pathologique de particules alignées en 2D . . . . .	42
3.6	Évolution de critères matriciels sur la matrice des MLS linéaire en fonction de la position d'une particule (champ coloré) autour d'une colonne de particules (en blanc) . . . . .	42
3.7	Évolution de critères matriciels en fonction de la position d'une particule autour d'une colonne de particules . . . . .	43
3.8	Cas test pour la $d$ -adaptation . . . . .	44
3.9	Évolution des coefficients diagonaux $\bar{R}$ et des valeurs des gradients au cours de la rotation de la colonne . . . . .	45
4.1	Procédure de reconstructions quadratiques récursives en 2D . . . . .	50
4.2	A gauche, une solution monotone. A droite, une solution non monotone (images tirées de [11]). . . . .	52
4.3	A gauche, une représentation d'une solution avant limitation des pentes. A droite, la même solution après limitation des pentes (images tirées de [11]). . . . .	53
4.4	$p$ -dégradation pour une simulation lagrangienne quadratique de jet impactant une plaque plane (vert : Flx $p=1$ , rouge : Flx $p=2$ ) . . . . .	54
4.5	Critère sur $R_{min}$ pour une simulation lagrangienne de jet plaque plane avec et sans le barycentre géométrique . . . . .	54
4.6	Orientation et valeur du décalage par le barycentre géométrique . . . . .	55
4.7	Voisinage proche paroi pour les reconstructions aux moindres carrés . . . . .	55
4.8	$p$ -adaptation (bleu : Flx $p=1$ , rouge : Flx $p=2$ ) . . . . .	56
4.9	Coefficient de pression le long du cylindre avec et sans la $p$ -adaptation . . . . .	57
4.10	$p$ -adaptation au démarrage de la simulation lagrangienne d'un jet sur plaque plane . . . . .	57
4.11	Erreurs d'extrapolation linéaire (a) et quadratique (b) au sein du fluide . . . . .	58
4.12	$p$ -adaptation (vert : $p=1$ , rouge : $p=2$ ) au régime établi de l'écoulement . . . . .	58
4.13	$d$ -adaptation lors de l'impact initial du jet sur la plaque plane . . . . .	59
4.14	Algorithme pour les reconstructions aux moindres carrés à base complète . . . . .	61
4.15	Algorithme pour les reconstructions aux moindres carrés à base répétée . . . . .	62

4.16	Champs de pression pour les approximations linéaires . . . . .	63
4.17	Champs de pression pour les approximations quadratiques et cubiques . . . . .	63
4.18	Champs de pression pour les approximations d'ordre 4 et 5 . . . . .	63
4.19	Erreur en norme $L^2$ sur l'énergie totale en fonction des reconstructions 1D . . . . .	64
4.20	Viscosité numérique en fonction de la taille des particules . . . . .	65
4.21	Préservation du maximum de vitesse en fonction des schémas de reconstruction et de la discrétisation . . . . .	66
4.22	Conservation de la masse au cours du temps en fonction des schémas de flux . . . . .	66
4.23	Composante $X_1$ du champ de vitesse des tourbillons de Taylor-Green . . . . .	67
4.24	Composante $X_2$ du champ de vitesse des tourbillons de Taylor-Green . . . . .	67
4.25	Masse volumique des tourbillons de Taylor-Green . . . . .	68
4.26	Coefficients de pression autour d'un cylindre pour N particules . . . . .	68
4.27	Coefficients de pression autour d'un cylindre pour 4N particules . . . . .	69
4.28	Champ de vitesse autour d'un cylindre pour N particules . . . . .	69
4.29	Champ de vitesse autour d'un cylindre pour 4N particules . . . . .	69
4.30	Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour des flux linéaires . . . . .	70
4.31	Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour des flux quadratiques à base complète . . . . .	70
4.32	Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour des flux quadratiques à base linéaire répétée . . . . .	71
4.33	Coefficient de pression au sein du fluide pour une simulation purement lagrangienne . . . . .	73
4.34	Champ de vitesse au sein du fluide pour une simulation purement lagrangienne . . . . .	73
4.35	Comparaison du coefficient de pression à la paroi en fonction des différents schémas numériques . . . . .	74
4.36	Consistance d'ordre 0 pour une simulation lagrangienne avec <i>shifting</i> . . . . .	74
4.37	Coefficient de pression au sein du fluide pour une simulation lagrangienne avec <i>shifting</i> des particules . . . . .	75
4.38	Champ de vitesse fluide en simulation lagrangienne avec <i>shifting</i> . . . . .	75
4.39	Comparaison du coefficient de pression à la paroi en fonction des différents schémas numériques avec <i>shifting</i> . . . . .	76
4.40	Conservation de la masse au cours du temps pour la simulation du jet impactant une plaque plane en fonction des schémas . . . . .	76
5.1	Quadrature des flux à travers la frontière $\partial\Omega$ (en rouge les points de Gauss) . . . . .	79
5.2	Echanges entre la particule d'intérêt $i$ et ses $j$ -voisines fluides et/ou de frontières . . . . .	80
5.3	Disposition cartésienne (à gauche), hexagonale (au centre) et bruitée (à droite) des particules voisines $j$ autour de la particule d'intérêt $i$ et du barycentre . . . . .	81
5.4	Évolution des frontières d'un volume initial (en bleu) vers un volume final (en rouge) et défaut de conservation (hachuré) . . . . .	82
5.5	Illustration des normales dans les approches avec et sans maillages . . . . .	83
5.6	Champ de divergence sur un support de 20 particules aléatoirement positionnées dans un carré unitaire en 2D. . . . .	86
5.7	Critère de détection de la surface libre (rouge : en surface libre, bleu clair : proche paroi et bleu foncé : dans le fluide) . . . . .	88
5.8	Algorithme permettant l'évaluation des fonctions de forme pour l'opérateur de divergence . . . . .	89
5.9	Viscosité numérique en fonction de la taille des particules pour les nouveaux schémas de divergence . . . . .	90
5.10	Conservation de la masse dans le système au cours du temps pour les nouveaux schémas numériques . . . . .	91
5.11	Coefficients de pression autour d'un cylindre pour N particules . . . . .	92
5.12	Coefficients de pression autour d'un cylindre pour 4N particules . . . . .	92
5.13	Champ de vitesse autour d'un cylindre pour N particules . . . . .	92
5.14	Champ de vitesse autour d'un cylindre pour 4N particules . . . . .	93
5.15	Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour les différents schémas . . . . .	93
5.16	Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour (divP1 Flx p=1) . . . . .	94
5.17	Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour (divP2 Flx p=2R) . . . . .	94
5.18	Vue centrée sur le cylindre exposant la $p$ -dégradation et l'erreur de consistance avec les nouveaux schémas . . . . .	96
5.19	Ordre en précision local des schémas pour la simulation lagrangienne d'un jet impactant une plaque en 2D . . . . .	97
5.20	Consistance d'ordre 0 pour la simulation lagrangienne d'un jet impactant une plaque en 2D . . . . .	97
5.21	Champ de vitesse fluide pour le jet impactant une plaque en 2D . . . . .	98
5.22	Coefficient de pression fluide pour le jet impactant une plaque en 2D . . . . .	98
5.23	Coefficient de pression sur la paroi pour les schémas (divP1, Flx p=1) et (divP2, Flx p=2) . . . . .	99
5.24	Défaut de conservation de la masse au cours du temps pour la simulation du jet impactant une plaque plane en fonction des schémas . . . . .	99
5.25	Évolution du défaut de sommation des flux de masse au cours du temps . . . . .	100

5.26	schéma divP1, Flx p=1 sans consistance 0 en paroi . . . . .	100
5.27	Champs physiques pour deux jets fluides qui s'impactent avec le schéma (divP1, Flx p=1) à un instant donné . . . . .	101
5.28	Coefficient de pression au centre du domaine pour le schéma (divP1, Flx p=1) . . . . .	101
5.29	Champs physiques pour deux jets fluides qui s'impactent avec le schéma (divP1, Flx p=1) et des particules de surface libre (blanches) . . . . .	102
5.30	Coefficient de pression au coeur du fluide pour deux jets qui s'impactent, avec des particules de surface libre . . . . .	102
5.31	Correction de l'erreur de consistance d'ordre 0 (à gauche) et schémas utilisés jusqu'en surface libre (à droite) . . . . .	103
6.1	Coupe au sein du plan de symétrie fluide lors de la simulation de jet impactant la roue Pelton (gauche) et position des senseurs sur un auget (droite) . . . . .	104
6.2	Couple hydraulique pour le schéma standard SPH-ALE en fonction de l'angle . . . . .	105
6.3	Couple hydraulique pour le schéma divP1 Flx P1 en fonction de l'angle . . . . .	106
6.4	Comparaison des couples hydrauliques obtenus avec les différents schémas présentés, sur N particules et les résultats obtenus avec le schéma standard pour les cinq niveaux de discrétisation . . . . .	106
6.5	Comparaison des couples hydrauliques obtenus avec les différents schémas présentés sur 2N particules et les résultats obtenus avec le schéma standard pour les cinq niveaux de discrétisation . . . . .	107
6.6	Comparaison au sein d'une coupe le long du plan de symétrie, des champs de vitesse au sein du fluide obtenus avec un schéma linéaire (gauche) et un schéma quadratique (droite) . . . . .	108
6.7	Coupe au sein du plan de symétrie, du champ de pression au sein du fluide obtenus avec un schéma linéaire (gauche) et un schéma quadratique (droite) . . . . .	109
6.8	Capteur 1 . . . . .	110
6.9	Capteur 2 . . . . .	110
6.10	Capteur 3 . . . . .	111
6.11	$d$ -adaptation pendant une simulation Pelton (rouge : 3D, vert : 2D, bleu : 1D ou constant) . . . . .	112
6.12	Champ de vitesse lors de l'ouverture des aubes directrices au démarrage d'une turbine Francis . . . . .	113
6.13	Ouverture des aubes directrices représentées par la première colonne de profils de la cascade 2D . . . . .	113
6.14	Présentation du cas de la cascade de profils 2D . . . . .	114
6.15	Champ de vitesse à trois instants (t=0s en haut, t=12s au milieu et t=21s en bas) . . . . .	114
6.16	Champ de vitesse au moment de l'ouverture pour les différents schémas . . . . .	115
6.17	Coefficient de pression le long du premier profil pour t=25s . . . . .	116
6.18	$p$ -adaptation à trois instants (t=0s en haut, t=12s au milieu et t=21s en bas) bleu : divP1, Flx p=1 et rouge : divP2, Flx p=2R . . . . .	116
A.1	Variation de section (gauche) et valeur de la pression (droite) . . . . .	121
A.2	Vitesse et débit massique dans la tuyère . . . . .	121
A.3	Champ de vitesse et de pression pour des tourbillons de Taylor-Green . . . . .	123
A.4	Évolution de la viscosité numérique en fonction de la taille de la discrétisation pour le schéma standard SPH-ALE . . . . .	123
A.5	Écoulement non-visqueux autour d'un cylindre 2D (image tirée du site de l'Université de Paris-Diderot) . . . . .	124
A.6	Domaine de calcul pour l'écoulement autour du cylindre avec les deux probes (P1 et P2) . . . . .	125
A.7	Champ physique obtenus avec le schéma standard SPH-ALE sur N particules . . . . .	125
A.8	Champ physique obtenus avec le schéma standard SPH-ALE sur 25N particules . . . . .	126
A.9	Coefficient de pression le long du cylindre pour 3 niveaux de discrétisation . . . . .	126
A.10	Schéma du jet sur plaque plane . . . . .	127
A.11	Champ de vitesse au sein du jet sur plaque plane . . . . .	128
A.12	Coefficient de pression au sein du jet sur plaque plane . . . . .	128
A.13	Champ de pression le long de la plaque obtenu avec le schéma standard . . . . .	129
C.1	Analyse par composantes principales sur un nuage de points en 2D . . . . .	132
C.2	Analyse par composantes principales sur un nuage de points en 2D . . . . .	133
C.3	Analyse par composantes principales sur un nuage de points en 2D . . . . .	134

# Liste des tableaux

3.1	Taille $m$ de la base polynomiale en fonction de l'ordre $p$ de reconstruction choisie . . . . .	38
3.2	Évolution du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés associés à une reconstruction linéaire en fonction de la disposition du voisinage (nombre de voisins indicatif). . . . .	40
3.3	Évolution du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés associés à une reconstruction quadratique en fonction de la disposition du voisinage (nombre de voisins indicatif). . . . .	40
3.4	Évolution du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés associés à une reconstruction quadratique centrée sur le centre de gravité en fonction de la disposition du voisinage . . . . .	41
3.5	Vecteurs contenus dans la matrice $\bar{Q}$ en fonction de la position angulaire de la colonne de particules . . . . .	43
4.1	Choix empirique des valeurs seuils $R_{seuil}$ pour $R_{min}$ pour les reconstructions . . . . .	60
4.2	Variation d'énergie totale en pourcentage entre les entrées et sorties dans une tuyère convergente-divergente (SPHc =SPH corrigé avec renormalisation) . . . . .	64
4.3	Coût de calcul associé aux simulations des tourbillons de Taylor-Green en 2D . . . . .	65
4.4	Coefficients de traînée numérique associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	71
4.5	Erreur sur le coefficient de pression à la paroi associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	72
4.6	Perte de pression totale lors d'un écoulement autour d'un cylindre . . . . .	72
5.1	Erreur de reconstruction de la divergence d'un champ vectoriel en 2D . . . . .	86
5.2	Choix empirique des valeurs seuils pour $R_{min}$ pour les fonctions de forme . . . . .	89
5.3	Coût de calcul associé aux simulations des tourbillons de Taylor-Green en 2D avec les nouveaux schémas . . . . .	91
5.4	Coefficients de traînée numérique associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	95
5.5	Erreur sur le coefficient de pression à la paroi associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	95
5.6	Perte de pression totale lors d'un écoulement autour d'un cylindre . . . . .	95
A.1	Erreur sur la pression et la vitesse avec le schéma standard pour un écoulement quasi 1D . . . . .	121

# Notations et acronymes

## Symboles grecs

$\alpha$  coefficient réel limiteur pour le schéma MUSCL

$\beta_{ij}$  terme géométrique calculé avec les  $\gamma_{ij}$  dans la méthode FVPM

$\delta(\cdot)$  fonction Dirac

$\Delta X$  discrétisation spatiale [m]

$\Delta t$  discrétisation temporelle [s]

$\gamma_{ij}$  terme géométrique utilisé pour calculer la sommation des flux dans la méthode FVPM

$\epsilon_i$  erreur locale évaluée en  $i$  en norme  $L^2$

$\lambda$  valeur propre

$\nabla(\cdot)$  gradient de  $(\cdot)$

$\nabla$ . opérateur de divergence

$\omega$  mesure des volumes des particules SPH, poids d'intégration [ $m^d$ ]

$\omega^\partial$  mesure des éléments de bord, poids d'intégration des conditions limites [ $m^{d-1}$ ]

$\Omega$  volume de contrôle [ $m^d$ ]

$\partial\Omega$  frontière du volume de contrôle [ $m^{d-1}$ ]

$\partial V$  frontière du support de la fonction noyau [ $m^{d-1}$ ]

$\partial V_i$  voisinage de la frontière de la fonction noyau évaluée à la particule  $i$  [ $m^{d-1}$ ]

$\vec{\phi}$  vecteur des variables (masse volumique [ $\text{kg}/m^3$ ], vitesse [m/s])

$\phi$  variable physique (masse volumique [ $\text{kg}/m^3$ ], vitesse [m/s])

$\psi$  fonction de forme

$\rho$  masse volumique [ $\text{kg}/m^3$ ]

$\tau$  taux de raffinement de la discrétisation

$\theta$  rapport des états gauche et droite pour le limiteur

## Symboles latins

$\bar{\bar{A}}$  matrice de raideur utilisée pour la méthode des éléments finis

$\bar{B}$  membre de droite des reconstructions

$\bar{C}$  matrice rectangulaire utilisée pour les moindres carrés

$c_0$  vitesse du son [m/s]

$C_x$  coefficient de traînée

$c_p$  coefficient de pression

$D$  diamètre du cylindre [m]

$d$  nombre de dimensions spatiales

$dV$  mesure d'intégration de volume de  $\Omega$

$d\sigma$  mesure d'intégration de surface de  $\partial\Omega$

$E$  espace inclus dans  $\mathbb{R}^d$

$e_1$  1ère composante de l'espace  $E$

$e_2$  2ème composante de l'espace  $E$

$e_3$  3ème composante de l'espace  $E$

$\bar{G}$  matrice des flux

$h$  longueur de dilatation (longueur d'influence)

$\bar{\bar{H}}$  matrice Hessienne

$i$  indice de la particule d'intérêt

$\bar{I}$  matrice identité

$j$  indice d'une particule voisine  
 $\underline{\underline{J}}$  matrice Jacobienne des flux  
 $\underline{\underline{K}}$  matrice masse  
 $\underline{\underline{L}}$  matrice de renormalisation  
 $\underline{\underline{M}}$  matrice des moindres carrés mobiles  
 $N$  fonction test pour la méthode des éléments finis  
 $\vec{n}$  la normale géométrique  
 $\vec{n}_{ij}$  le vecteur unitaire de la direction joignant les centres de  $i$  et  $j$  orienté de  $i$  vers  $j$   
 $P$  pression statique [Pa]  
 $P_t$  pression totale [Pa]  
 $p$  ordre de consistance de la reconstruction spatiale  
 $Q$  débit masse [kg/s]  
 $\underline{\underline{Q}}$  matrice orthogonale de la décomposition QR  
 $q$  ordre de précision de l'opérateur de divergence  
 $\underline{\underline{R}}$  matrice triangulaire supérieur de la décomposition QR  
 $\vec{R}(\cdot)$  Résidu des équations de conservation  
 $\vec{S}$  terme source  
 $t$  temps  
 $V$  support de la fonction noyau  
 $V_i$  voisinage de la particule d'intérêt  $i$   
 $\vec{v}$  la vitesse du fluide [m/s]  
 $v_1$  composante de la vitesse  $\vec{v}$  selon  $e_1$  [m/s]  
 $v_2$  composante de la vitesse  $\vec{v}$  selon  $e_2$  [m/s]  
 $v_3$  composante de la vitesse  $\vec{v}$  selon  $e_3$  [m/s]  
 $\vec{v}_0$  la vitesse de transport des particules [m/s]  
 $v_{0,1}$  composante de la vitesse  $\vec{v}_0$  selon  $e_1$  [m/s]  
 $v_{0,2}$  composante de la vitesse  $\vec{v}_0$  selon  $e_2$  [m/s]  
 $v_{0,3}$  composante de la vitesse  $\vec{v}_0$  selon  $e_3$  [m/s]  
 $W$  fonction noyau SPH  
 $\vec{X}$  vecteur position [m]  
 $X_1$  coordonnée de l'espace selon  $e_1$  [m]  
 $X_2$  coordonnée de l'espace selon  $e_2$  [m]  
 $X_3$  coordonnée de l'espace selon  $e_3$  [m]

## Acronymes usuels

ALE : Arbitrary Lagrangian Eulerian  
 MUSCL : Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws  
 MLS : Moving Least Squares  
 SPH : Smoothed Particles Hydrodynamics  
 TVD : Total Variation Diminishing

## Opérations usuelles

$\int_V(\cdot)dV \approx \sum_{j \in V_i} \omega_j(\cdot)_j$  passage de la forme continue de l'intégration sur un volume  $V$  à la forme discrète sur un voisinage  $V_i$

$\int_{\partial V}(\cdot)d\sigma \approx \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^q(\cdot)_j$  passage de la forme continue de l'intégration sur une surface  $\partial V$  à la forme discrète sur un voisinage  $\partial V_i$

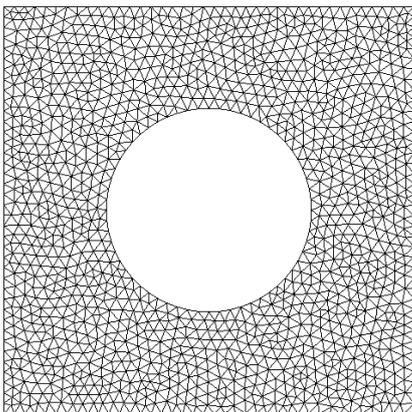
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{l=1}^d a_l b_l$  produit scalaire usuel entre deux vecteurs de l'espace permettant notamment le calcul de la norme  $L^2$  du vecteur  $\vec{a}$  tel que  $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{l=1}^d a_l^2$

# Introduction

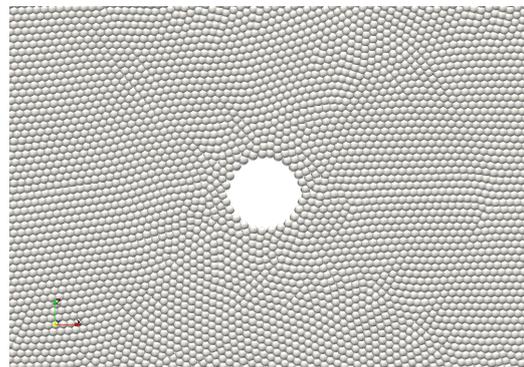
## 0.1 Contexte scientifique

Depuis Archimède (287-212 av J-C) avec son fameux principe en passant par Pascal (1623-1662) et ses travaux sur la pression, les fluides ont bénéficié d'études à la fois expérimentales et théoriques. Il faudra cependant attendre Euler (1707-1783) pour que les fluides parfaits i.e. non-visqueux soient formulés mathématiquement à travers des équations aux dérivées partielles (EDP). Ce formalisme a été étendu aux fluides visqueux par les travaux de Navier (1785-1836) et Stokes (1819-1908). Ces équations de Navier-Stokes permettant de simuler la mécanique des fluides restent encore aujourd'hui un champ de recherche à part entière. La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution de ces équations figure notamment aux problèmes du prix du millénaire.

Avec l'émergence des premiers ordinateurs et l'accroissement formidable des moyens de calculs au milieu du 20ème siècle, la simulation des écoulements fluides est devenue omniprésente. L'idée majeure est maintenant d'approcher les solutions proposées par les équations de Navier-Stokes plutôt que de les résoudre directement. Des schémas numériques de plus en plus sophistiqués et spécifiques à des problèmes physiques ont vu alors le jour. Des méthodes numériques permettant la résolution des équations aux dérivées partielles sont nées. Il est possible de les classer en 3 grandes familles : les différences finies, les volumes finis et les éléments finis [29]. Les différences finies consistent à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées en un nombre fini de points discrets [24]. Cette méthode est simple et elle a un faible coût de calcul. Sa limitation réside dans sa mise en place pour des géométries complexes, et certaines conditions limites type Neumann. Autre méthode, les volumes finis consistent à intégrer sur des volumes de contrôles les équations sous forme conservative. Bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides de par le caractère conservatif de la méthode, les résultats théoriques sur la convergence spatiale restent rares [25]. Dernière famille et pas des moindres, les éléments finis sont basés sur une minimisation de l'énergie par le biais d'une formulation variationnelle dans un espace donné. Cette méthode bénéficie de solides résultats théoriques [22]. Elle n'est cependant pas conservative et peut se révéler assez coûteuse en mémoire et temps de calcul.



(a) Maillage triangulaire 2D



(b) Distribution de particules

FIGURE 1 – Discrétisation autour d'un cylindre en deux dimensions

Ces trois grandes familles reposent sur la notion de maillage i.e un ensemble de points possédant une connectivité connue. Ce treillis sert de base au calcul et à l'établissement des équations sous leur forme discrète (Fig

1a). Ce maillage impliquant une connectivité entre les points, il définit donc des directions qui peuvent impacter la qualité de la solution. On peut citer le cas d'une interface ne suivant pas les directions définies par le maillage souvent diffusée ou mal représentée. Ce genre de cas nécessite du coup l'emploi de techniques complexes telles que les méthodes VOF (Volume Of Fluide) et Level-Set. Ceci explique pourquoi les simulations avec une surface libre complexe restent toujours difficiles à mettre en œuvre.

Développée en 1977 par Gingold et Monaghan [26], Lucy [40], la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) vit le jour pour l'étude de phénomènes en astrophysique : création de galaxie, formation des étoiles, nuage de particules... Plus tard, Monaghan étendit la méthode à l'hydrodynamique à surface libre [44]. Cette méthode est dite sans maillage de par l'absence de connectivité entre les points de calcul aussi appelés particules dans le vocabulaire de la communauté SPH (Fig 1b). Ces particules sont définies à partir des points de calcul en leur attribuant un volume  $\omega$ , et en leur donnant une certaine quantité de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Cette absence de connectivité permet un meilleur suivi des interfaces ce qui rend la méthode très attractive pour simuler des grandes déformations, des propagations de fissure etc. Une surface libre par exemple est directement déformée par le fluide qui impacte les positions des particules lagrangiennes.

La méthode déterministe SPH est basée sur des outils probabilistes tels que les produits de convolution [38]. Le schéma d'interpolation SPH s'appuie sur deux grandes approximations : l'approximation noyau ou *mollification* et l'approximation *particulaire*. La première est basée sur la convolution des variables avec une fonction de forme ou noyau. En effet un champ  $\phi$  peut être calculé exactement au travers d'un produit de convolution avec une fonction Dirac dans un espace  $E$  comme suit :

$$\phi(X) = \int_E \phi(Y)\delta(X - Y)dV \quad (1)$$

avec la fonction Dirac définie comme :

$$\delta(X - Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } X = Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

La non-dérivabilité de la fonction Dirac rend ce formalisme peu pratique pour le calcul des opérateurs continus tel que le gradient du champ. La force de la méthode SPH réside dans le fait d'assouplir ce formalisme en remplaçant la fonction Dirac par une fonction de pondération  $W$  continue et dérivable à support compact. Dépendant de la distance entre les points  $X - Y$  et d'un paramètre  $h$ , cette fonction  $W$  conduit à la première approximation appelée *mollification* dans la communauté SPH (Eq 3). La longueur d'influence du noyau ou longueur de dilatation  $h$  définit la taille du support  $V \subset E$  avec  $W(X - Y, h) = 0$  si  $\|X - Y\| > h$ .

$$\phi^h(X) = \int_V \phi(Y)W(X - Y, h)dV \approx \phi(X) \quad (3)$$

La fonction  $W$ , homogène à l'inverse d'un volume, est centrée sur la particule d'intérêt  $i$ , positionnée en  $X_i$  (Fig 2). Dans ce travail de thèse, la fonction  $W$  est une fonction Wendland  $C^4$  définie par :

$$W(X - Y, h) = W(q = \frac{\|X - Y\|}{2h}) = \frac{C}{h^d} (1 - q)_+^5 (8q^2 + 5q + 1) \quad (4)$$

avec  $d$  la dimension de l'espace et la fonction puissance tronquée telle que :

$$X_+^n = \begin{cases} X^n & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

La constante de normalisation  $C$  vaut en 2D  $\frac{3}{4\pi}$  et  $\frac{165}{256\pi}$  en 3D. Les travaux [34] exposent une comparaison de différentes fonctions noyaux. D'une manière assez générale, la fonction  $W$  doit être positive, plusieurs fois dérivable, d'intégrale égale à 1 et de préférence à support compact. De plus  $W$  doit tendre vers une distribution de Dirac lorsque  $h$  tend vers 0, ce qui fait tendre l'approximation vers l'égalité stricte :  $\lim_{h \rightarrow 0} \phi^h(X) = \phi(X)$ . Le paramètre  $h$  tient un rôle équivalent aux paramètres de discrétisation spatiale dans les méthodes numériques avec maillage. Les propriétés de la fonction noyau  $W$  s'expliquent notamment par son écart type qui dépend principalement de  $h$ . De nombreux travaux montrent l'influence de ce paramètre sur la qualité des approximations [27]. Par la suite, la distance inter-particulaire sera notée  $\Delta X$  et le volume des particules  $\omega$ .

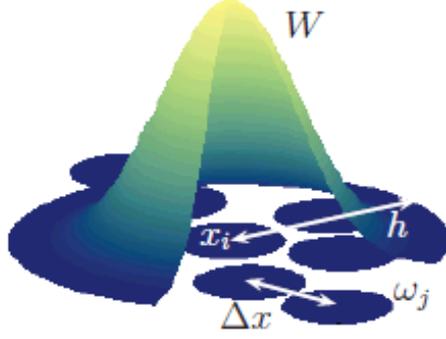


FIGURE 2 – Illustration des notations autour de la fonction noyau

La seconde approximation dite *particulare* est due au passage à l'état discret (Eq 6). Cette dernière est fonction des valeurs nodales du champ  $\phi_j$ , de la distance entre les particules à travers la fonction de pondération  $W_{ij} = W(X_j - X_i, h_i)$  mais également de  $\omega_j$  le volume des particules voisines formant le support de l'intégration  $V_i$ . A travers cette discrétisation de l'espace, il est sous-entendu que le volume occupé par les particules discrétise correctement le volume sous la fonction  $W$ .

$$\phi_i^h = \sum_{j \in V_i} \phi_j W_{ij} \omega_j \approx \phi(X_i) \quad (6)$$

La qualité de la solution est donc fortement dépendante de la quantité de particules dans le domaine de sommation. Cette quantité de particules peut facilement être augmentée ou réduite de par l'absence de connectivité. Le rapport  $h/\Delta X$  permet de caractériser la taille du support par rapport au volume des particules ( $\Delta X := \omega^{1/d}$ ).

En se référant aux travaux d'analyse numérique de Ben Moussa [10] basés sur les travaux fondateurs de S.Mas-Gallic, P.A Raviart, il est possible de comprendre que la précision des opérateurs d'approximation SPH dépend conjointement du volume des particules et de la longueur d'influence du noyau.

Soit une fonction de pondération  $W$  dans un espace de Sobolev  $\{W \in L^\infty(\Omega) / \forall \alpha |\alpha| < m+1, \partial^\alpha W \in L^\infty(\Omega)\}$  et un champ  $\phi$  qui appartient à  $\{\phi \in L^\infty(\Omega) / \forall \alpha |\alpha| < \mu, \partial^\alpha \phi \in L^\infty(\Omega)\}$  avec  $\mu = \max(r+1, m)$ , un entier tel que  $r \geq 1$  et  $m > 1$  alors il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|\phi - \phi^h|_{1, \infty, \mathbb{R}^d} < C(h^r |\phi|_{1+r, \infty, \mathbb{R}^d} + (1 + \frac{\Delta X}{h})^d \frac{\Delta X^m}{h^{m+1}} \|\phi\|_{m, \infty, \mathbb{R}^d}) \quad (7)$$

Les normes utilisées sont la norme complète  $\|\phi\|_{m, p, \mathbb{R}^d} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{|\alpha|} \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p)^{\frac{1}{p}}$  et la semi-norme  $|\phi|_{m, p, \mathbb{R}^d} = (\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^{|\alpha|} \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p)^{\frac{1}{p}}$  pour  $p < \infty$  et les modifications usuelles pour  $p = \infty$ . Cette équation (Eq 7) permet d'illustrer l'importance de la distance entre les particules et la longueur d'influence du noyau dans la qualité de l'approximation particulare SPH. Il faut donc satisfaire pour que la méthode particulare converge les conditions suivantes :

$$\begin{cases} h \rightarrow 0 \\ \Delta X \rightarrow 0 \\ \frac{\Delta X^m}{h^{m+1}} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (8)$$

Pour obtenir une convergence spatiale de la méthode, il est donc nécessaire que le volume des particules et le volume d'intégration diminuent en même temps que le rapport  $\frac{h^{m+1}}{\Delta X^m}$  augmente. La limite du rapport implique une diminution du volume des particules plus rapide que celle du support. Le nombre de voisins doit donc augmenter. Comme il est très difficile de satisfaire ces conditions en pratique en raison du coût de calcul, de nombreux auteurs [27] [61] ont fait un compromis entre la qualité et le coût permettant de déterminer un ratio optimal de :

$$\frac{h}{\Delta X} = 1.23 \quad (9)$$

D'après le théorème de Lax-Richtmeyer, un modèle numérique est convergent s'il est stable et consistant : *Pour une méthode numérique consistante, la stabilité est équivalente à la convergence* [39]. Ce théorème justifie

l'aspect central du critère de consistance. Afin de fixer le vocabulaire, un schéma est dit d'ordre  $p$ -consistant s'il est capable de reproduire exactement un polynôme d'ordre  $p$ . Ce concept est traditionnellement issu des Éléments finis [22]. La précision correspond alors à l'erreur de troncature du schéma.

Malheureusement, la consistance et la précision de l'approximation d'un champ avec la méthode SPH ne sont pas du tout triviales. Il apparaît que la consistance d'ordre 0 de l'approximation d'un champ n'est pas toujours établie et dépend de la distribution des particules. En effet, la reproduction d'un champ constant par (Eq 6) nécessite d'avoir la partition de l'unité au niveau discret :  $\sum_{j \in V_i} W_{ij} \omega_j = 1$  qui n'est satisfaite dans le cas général, qu'en modifiant le noyau  $W$  par une correction de Shepard (Eq 10) [56]. Monaghan [44] a introduit la notion de noyau d'ordre élevé sur une distribution uniforme de particules avec des noyaux *Richardson* et *M4*, respectivement d'ordre de consistance 3 et 4. Pour des simulations réelles, avec des particules mobiles, ces noyaux ne permettent plus d'atteindre des ordres élevés [44].

$$si \tilde{W}_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_{j \in V_i} W_{ij} \omega_j} \text{ alors } \sum_{j \in V_i} \tilde{W}_{ij} \omega_j = 1 \quad (10)$$

L'évaluation d'un champ étant déjà complexe, l'évaluation des opérateurs de dérivé sera alors encore plus difficile. Le produit de convolution du gradient du champ  $\phi$  avec le noyau  $W$  sur un volume  $V$  de frontière  $\partial V$  permet d'obtenir en utilisant le théorème de Green, l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \phi^h(X) = \int_{\partial V} \phi(Y) \vec{n} W(X - Y, h) d\sigma + \int_V \phi(Y) \vec{\nabla} W(X - Y, h) dV \quad (11)$$

Il apparaît après un passage au discret (Eq 12) que le gradient d'un champ  $\phi$ , calculé avec une approximation SPH n'est pas nécessairement consistant d'ordre 0. En effet le gradient d'un champ constant  $\phi$  n'est pas forcément nul. Le résultat dépendra de la configuration géométrique des particules, en particulier du caractère symétrique du voisinage.

$$\vec{\nabla} \phi_i^h = \sum_{j \in \partial V_i} \phi_j \vec{n}_j W_{ij} \omega_j^\partial + \sum_{j \in V_i} \phi_j \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (12)$$

L'astuce communément pratiquée dans la communauté SPH est de retrancher l'approximation par la méthode SPH du gradient de l'unité supposé proche de zéro pour obtenir (Eq 13), pour retrouver la consistance d'ordre 0.

$$\vec{\nabla} \phi_i^h = \sum_{j \in \partial V_i} (\phi_j - \phi_i) \vec{n}_j W_{ij} \omega_j^\partial + \sum_{j \in V_i} (\phi_j - \phi_i) \vec{\nabla} W_{ij} \omega_j \quad (13)$$

La consistance d'ordre 1 i.e reproduire exactement un champ linéaire n'est pas toujours vérifiée par (Eq 13). Randles et Libersky [48] ont proposé une correction améliorant directement le gradient de la fonction noyau appelé renormalisation, quelque soit la distribution des particules. Vila et Lanson ont démontré qu'en utilisant cette correction de renormalisation pour les opérateurs de gradient SPH, la méthode converge avec la distance  $\Delta X$  sous condition que  $\frac{h}{\Delta X} = O(1)$  ce qui assouplit considérablement les critères de convergence spatiale [62]. Une instabilité propre à la méthode particulière SPH appelée *tensile instability* est également réduite avec de bonnes propriétés de consistance [20].

D'autre part, afin de monter en ordre de précision et de consistance, Dilts [20] [21] et Belytschko [37] ont proposé de corriger le noyau et son gradient afin de retrouver la reproductibilité de fonctions polynomiales jusqu'à un certain ordre, le tout basé sur des reconstructions par les moindres carrés mobiles (Moving Least Squares). Cette approche a conduit à la création de nouvelles méthodes numériques de résolutions des EDP telles que Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), Element Free Galerkin (EFG). Il est possible de les interpréter comme une généralisation de la méthode des éléments finis pour un nuage de points. Ces schémas possèdent de bonnes propriétés de consistance mais perdent la notion de conservation [37]. En revanche, la méthode sans maillage, Finite Volume Particle Method (FVPM) est une méthode conservative, et consistante d'ordre 0 qui souffre cependant d'un coût de calcul assez conséquent notamment pour des applications industrielles [55] [33].

Outre les problèmes de consistance et de précision spatiale, la méthode SPH souffrait également de problèmes de stabilité comme bon nombre de méthodes numériques. Monaghan proposa donc d'ajouter une viscosité artificielle afin de dissiper les éventuels oscillations parasites [44]. En 1999, Vila proposa une méthode alternative exploitant les outils de la méthode des volumes finis afin de s'affranchir d'une viscosité artificielle arbitraire [61]. Véritable mélange entre les deux méthodes, la SPH-ALE vit le jour. Cette méthode sans maillage utilise des solveurs de Riemann dans une configuration ALE (Arbitrary Lagrange Euler) pour calculer les flux numériques entre deux particules voisines. Les opérateurs spatiaux sont quant à eux calculés avec une approximation SPH (Eq 6, 12). La propriété ALE permet de choisir le point de vue de la simulation. Avec une simulation Eulérienne, les équations décrivent le mouvement du fluide dans un référentiel fixe, les particules sont immobiles.

En revanche avec une simulation Lagrangienne, les particules suivent le fluide, le référentiel est mobile. Il est également possible de choisir une vitesse arbitraire pour les particules qui sont mobiles mais avec une vitesse différente de celle du fluide.

## 0.2 Contexte industriel

Actif dans le domaine de l'énergie hydraulique depuis plus de 170 ans, ANDRITZ Hydro est l'un des leaders mondiaux de la fourniture de systèmes et de services électromécaniques pour les centrales hydro-électriques. De nombreuses machines hydrauliques sont développées au sein d'ANDRITZ Hydro tels la turbine à action Pelton et celle à réaction Francis. La turbine Pelton est née en 1879 (Fig 3a) utilisant l'énergie cinétique de l'eau accumulée par transfert de l'énergie potentielle de pesanteur. La roue est mise en rotation par l'impact de jets d'eau contrôlés par les injecteurs en périphérie. Cette turbine est le plus souvent sur des sites d'exploitation présentant des hautes chutes d'eau (de 200 à 2 000 mètre de chute). Pour des chutes d'eau plus modestes (de 20 à 350 mètres), la turbine Francis née en 1868, est plus adaptée. Son fonctionnement consiste à exploiter à la fois la vitesse du fluide et les différences de pression autour d'une roue immergée (Fig 3b). Les rendements de ces deux machines sont supérieurs à 90% ce qui est remarquable.

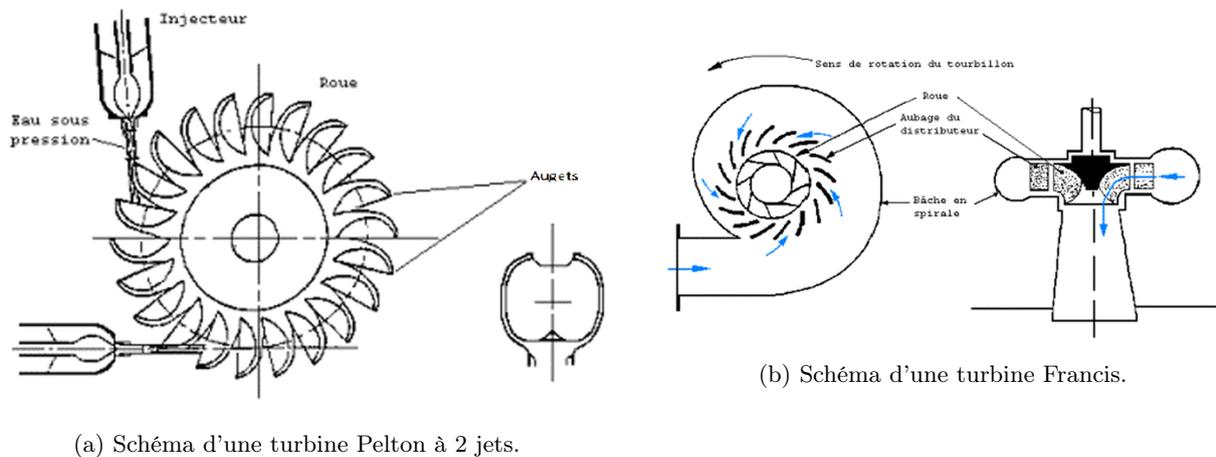
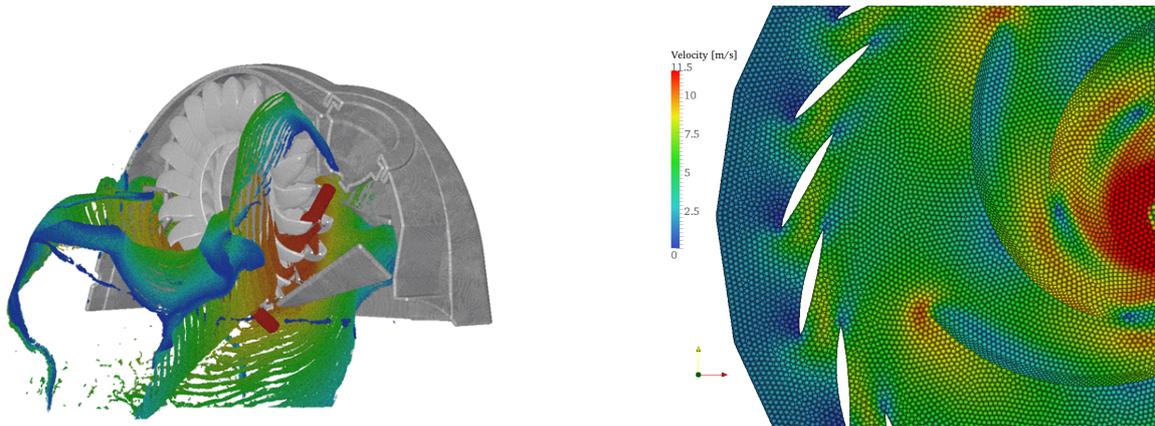


FIGURE 3 – Schémas de turbines hydrauliques

Afin d'exploiter au mieux ces technologies, il s'agit de comprendre la physique des écoulements à l'intérieur. La finalité est d'optimiser les géométries de la roue ou des structures environnantes pour accroître le rendement quand cela est possible. La réalisation conjointe d'études expérimentales et numériques est utile. La CFD (Computational Fluid Dynamics) s'impose comme un outil dans le processus de conception complémentaire des études en laboratoire. Véritable accélérateur de la chaîne de conception la CFD permet de visualiser des zones impossibles d'accès par les mesures expérimentales.

Historiquement au sein d'Andritz Hydro, le code de calcul commercial CFX basé sur les volumes finis avec des modèles multiphasiques et une technique VOF était employé pour simuler les écoulements dans les turbines. Ces simulations de part la rotation des composants de la roue et la création et le suivi de la surface libre dans le cas de la turbine Pelton étaient ambitieuses et très onéreuses en coût de calcul. La gestion du maillage est bien souvent un frein, c'est le cas notamment pour des simulations portant sur la phase de démarrage de la turbine Francis. En effet ce type de simulation est délicat en raison de l'ouverture des aubes directrices (Fig 4b) nécessitant l'introduction difficile et coûteuse au cours du temps de mailles entre les aubes qui s'ouvrent. Les problématiques de maillage sont donc un enjeu industriel car elles nécessitent une interaction homme-machine perpétuelle et conditionnent la qualité de la solution numérique. Les phénomènes multiphasiques tels que la large déformation de la surface libre notamment dans les nappes d'évacuation des augets Pelton (Fig 4a) mettent à mal, bien souvent, les modèles classiques de suivi d'interface. Ce suivi d'interface peut également se retrouver dans une simulation autour de la turbine Francis lors de son remplissage initial.

Les méthodes numériques classiques basées sur un maillage étant peu adaptées à nos études CFD, l'alternative d'une méthode lagrangienne devient attractive.



(a) Écoulement fluide dans un bâti de turbine Pelton à 2 jets (b) Écoulement dans une turbine Francis remplie au démarrage

FIGURE 4 – Simulation CFD pour des écoulements dans des turbines hydrauliques

### 0.3 Objectifs et enjeux

Les contextes scientifiques et industriels nous amènent rapidement vers ce sur quoi ce travail de thèse porte. L'enjeu majeur de cette étude est en effet de réussir à faire de la méthode SPH-ALE une méthode précise et compétitive pour des simulations complexes en turbine Francis ou Pelton.

La fiabilité des résultats fournis par la résolution des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides avec des opérateurs discrétisés est dépendante d'un certain nombre de critères formalisés par Lax et Wendroff [28].

Trois principales propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue (Fig 5).

1. la stabilité est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.
2. la consistance est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation ( $\Delta t$  et  $\Delta x$ ) tendent vers zéro.
3. la convergence est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée.

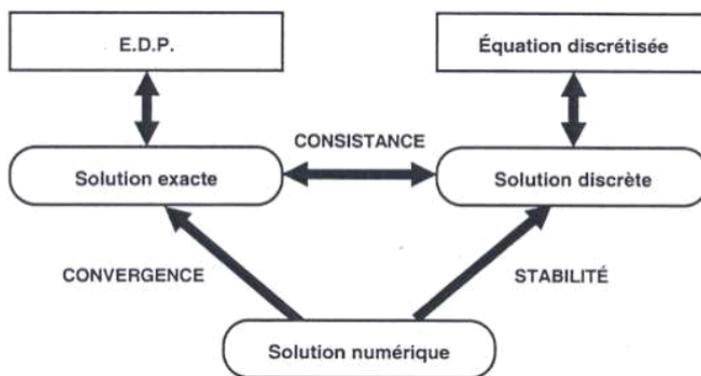


FIGURE 5 – Solutions exacte, numérique et discrète [28]

Ces trois axes de recherche dessinent les sous-enjeux finalement assez génériques dans le domaine de la simulation numérique. En effet dans l'idéal, une méthode numérique possède les caractéristiques suivantes :

1. au moins une précision du 2nd ordre pour des solutions continues et pour les régions où la solution est continue, même lorsque des discontinuités sont présentes,
2. une résolution fine des discontinuités,
3. l'absence d'oscillations non-physique dans la solution numérique
4. la consistance avec la solution physique

5. la conservation discrète de certaines grandeurs de base comme la masse, la quantité de mouvement et l'énergie.

Chaque caractéristique fait appel à des notions et des procédures spécifiques. En l'état actuel de la méthode, la SPH-ALE dans sa forme basique répond au critère de conservation discrète. La consistance avec la solution physique est obtenue seulement pour certaines répartitions spatiales de particules. La précision, du 2nd ordre, est à relier à la notion de consistance au sens du développement de Taylor ; une possibilité pour l'assurer est d'utiliser la renormalisation. L'amortissement des oscillations est obtenu avec une dissipation numérique dans le solveur de Riemann et avec des limiteurs de pente.

Les travaux qui suivront cherchent donc à développer une version de la méthode SPH-ALE vérifiant le maximum des caractéristiques énoncées, malgré les larges déformations ou le sous-échantillonnage particulaire. Une attention devra être portée sur la cohérence des opérateurs notamment entre les intégrateurs spatiaux et temporels.

## 0.4 Structure du mémoire

Le mémoire est structuré en deux parties. La première partie assez théorique est constituée de trois chapitres qui exposent les outils utilisés dans ce travail de thèse. Le premier chapitre présente la méthode SPH-ALE avec ses spécificités. Le second chapitre est une mise en perspective de la méthode par rapport aux autres méthodes de résolutions des EDP hyperboliques. Le dernier chapitre est focalisé sur la reconstruction de champs physiques et la construction de fonction de forme sur des ensembles de particules éparpillées.

La seconde partie, elle aussi composée de trois chapitres, expose essentiellement la contribution de ce travail. Les deux premiers chapitres sont complémentaires. En effet le premier expose la montée en ordre des flux numériques et le second celle de l'opérateur de divergence. Les deux chapitres sont nécessaires afin d'avoir une cohérence globale du schéma numérique [47]. Chacun de ces chapitres présente des résultats numériques validant l'intérêt d'utiliser des ordres élevés. Les cas tests 2D et 3D de référence ayant des solutions analytiques connues sont présentées en Annexe A et comparés avec l'état de l'art de la méthode [10] [18] [41]. Ces deux chapitres ont fait l'objet de publications et de présentations orales dans des conférences européennes [50] [52]. Le dernier chapitre présente des applications industrielles de simulation d'écoulement dans des turbines hydrauliques. Le premier cas est une approche simplifiée du démarrage d'une turbine Francis en 2D. Le second est le fonctionnement en 3D d'une turbine Pelton. Ces cas d'application permettent d'exposer la robustesse et la fiabilité des ordres élevés pour des simulations eulériennes et lagrangiennes avec des géométries tournantes. Pour les simulations en turbine Pelton, des comparaisons avec des données expérimentales sont effectuées.

Première partie

Méthodes de simulation sans maillage

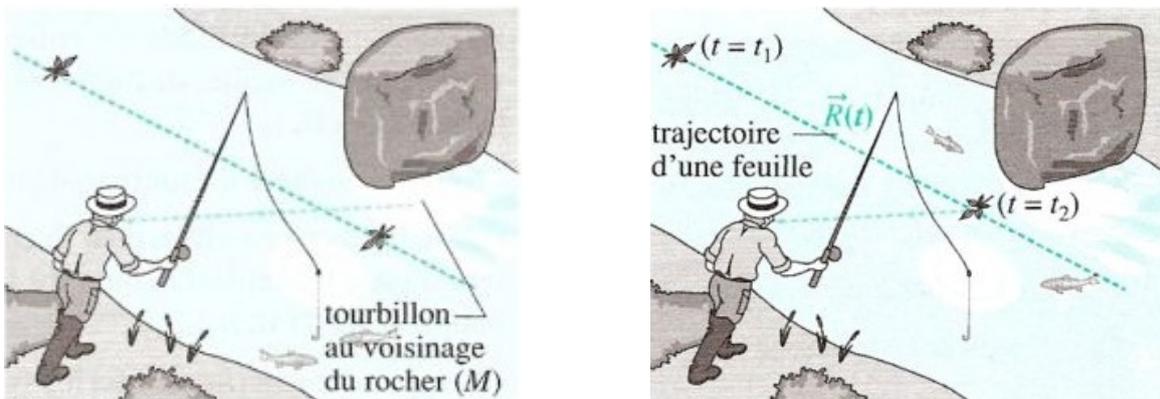
# Chapitre 1

## La méthode particulière SPH-ALE

Afin d'introduire la méthode SPH-ALE, une première partie est consacrée à la présentation de la description ALE d'un fluide. Les équations de conservation nécessaires pour décrire les écoulements sont ensuite introduites dans une seconde partie. Pour finir, l'approximation particulière utilisée pour discrétiser ces équations de conservation dans le formalisme ALE est exposée, suivie par les méthodes employées pour évaluer les échanges entre les particules.

### 1.1 Description ALE

En mécanique des milieux continus, la description eulérienne et la description lagrangienne sont deux approches qui peuvent être choisies pour étudier un écoulement de fluide. Dans la description eulérienne, le domaine d'évolution possible du fluide est découpé en éléments fixes dans le référentiel d'étude. La représentation d'Euler consiste donc à étudier l'évolution de différentes grandeurs physiques (vitesse  $\vec{v}$ , pression  $P$ , ...) en des points fixes de l'espace (Fig 1.1a). Dans la description lagrangienne, le fluide est découpé en éléments qui avancent en temps avec le fluide. La représentation de Lagrange consiste donc à définir des grandeurs physiques en des points attachés à la matière qui se déplace (Fig 1.1b).



(a) Le pêcheur observant comment s'écoule le fluide autour du rocher se place en formalisme Eulérien

(b) Le pêcheur suivant des yeux les feuilles se place en formalisme lagrangien

FIGURE 1.1 – Descriptions Eulérienne (a) et Lagrangienne d'un fluide [64]

Les deux approches présentent des avantages et des inconvénients. La description eulérienne est populaire pour les écoulements de fluides mais pose des problèmes lorsqu'il faut suivre des interfaces ou traiter des écoulements fortement convectifs. La description lagrangienne conduit à des difficultés importantes pour évaluer des dérivées spatiales, puisque la topologie est constamment modifiée, par le déplacement des éléments de volume. Toutes les grandeurs physiques comme le vecteur vitesse ou la pression, sont définies en valeur moyenne sur l'élément de volume  $\Omega$  et évoluent le long de sa trajectoire dans l'espace. Les éléments de volume physiquement fermés utilisés dans la méthode SPH-ALE sont appelés particules. Ces particules discrétisent donc le milieu continu, tout comme les mailles dans les méthodes à maillage.

Le formalisme ALE (Arbitrary Lagrange Euler) est un mélange des deux approches eulérienne et lagrangienne. Il repose sur un volume mobile qui se déplace à une vitesse arbitraire  $\vec{v}_0$  aussi appelée champ de transport.

Cette vitesse peut être nulle, formalisme eulérien, égale à celle du fluide, formalisme lagrangien ou encore totalement arbitraire. L'ensemble des particules est mobile et soumis à un champ de transport  $\vec{v}_0(\vec{X}; t)$ . Chaque particule  $i$  se déplace alors suivant une trajectoire donnée par :

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{v}_{0,i}(\vec{X}; t) \quad (1.1)$$

avec  $\vec{X}_i$  la position spatiale de la particule  $i$ . En raison des déplacements des particules, les volumes discrétisés  $\Omega(t)$  se déforment au cours du temps le long de la trajectoire. Le volume de fluide discrétisé par la particule  $i$  est de mesure  $|\Omega(t)| = \omega_i(t)$ . Le mouvement des frontières  $\partial\Omega(t)$  de  $\Omega(t)$  induit par les déplacements  $\vec{v}_0$  fait évoluer le volume au cours du temps [59] selon l'équation qui suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dV = \int_{\partial\Omega(t)} \vec{v}_0 \cdot \vec{n} d\sigma \quad (1.2)$$

L'équation d'évolution des volumes des particules devient donc :

$$\frac{d\omega_i(t)}{dt} = \omega_i(t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 \quad (1.3)$$

Cette équation d'évolution nécessite l'évaluation de la divergence du champ de transport, ce qui implique une certaine régularité pour ce champ. De plus, la topologie des particules étant inconnue, l'équation d'évolution des volumes conserve sa forme en divergence. En effet, contrairement aux méthodes à maillage, la forme géométrique de la particule est indéterminée, seule sa mesure  $\omega$  est connue. La mesure du volume est définie initialement par la discrétisation.

## 1.2 Équations de conservation

Les équations d'Euler décrivant les écoulements des fluides non-visqueux sont généralement regroupées sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}) = \vec{S} \quad (1.4)$$

où  $\vec{\phi}$  représente le vecteur des variables conservatives et  $\vec{F}$  désigne le tenseur des flux. En explicitant ces données, les vecteurs et matrices sont définis comme suit :

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + P \vec{I} \end{pmatrix} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \vec{f} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\vec{v}$  la vitesse,  $P$  la pression et  $\vec{f}$  est une force externe telle que la gravité.

Le domaine de calcul est noté  $E$  et sa frontière  $\partial E$ . Ce domaine dépend du temps  $E(t)$  et il est inclus dans  $\mathfrak{R}^d$ .  $T$  est un intervalle de temps dans  $\mathfrak{R}_+$ . En intégrant (Eq 1.4) sur  $E(t) \times T$ , les équations d'Euler sous une forme conservative intégrale sont obtenues :

$$\int_T \int_{E(t)} \left\{ \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}) \right\} dV dt = \int_T \int_{E(t)} \vec{S} dV dt \quad (1.6)$$

En définissant  $\vec{v}_0$  comme le champ de transport dans  $E(t)$ , la première partie de l'intégrale de (Eq 1.6) peut alors se réécrire avec le théorème de Reynolds-Leibniz comme suit :

$$\int_T \int_{E(t)} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} dV dt = \int_T \left\{ \frac{d}{dt} \int_{E(t)} \vec{\phi} dV - \int_{E(t)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\phi} \otimes \vec{v}_0) dV \right\} dt \quad (1.7)$$

En combinant les équations (Eq 1.7 et 1.6), la forme intégrale devient :

$$\int_T \left\{ \frac{d}{dt} \int_{E(t)} \vec{\phi} dV + \int_{E(t)} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{\phi} \otimes \vec{v}_0)) dV \right\} dt = \int_T \int_{E(t)} \vec{S} dV dt \quad (1.8)$$

Le flux ALE  $\vec{G}$  est défini par  $\vec{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0) = \vec{F} - \vec{\phi} \otimes \vec{v}_0$ . Ce formalisme permet donc de réécrire l'écoulement à l'aide des bilans de grandeurs conservatives, à travers un volume de contrôle se déplaçant à une vitesse arbitraire.

Tout comme pour la méthode des volumes finis, les intégrales sur le domaine  $E(t)$  peuvent se décomposer en sous intégrales  $\Omega(t)_i$  définies sur des volumes de contrôles disjoints tel que  $E(t) = \cup_{i \in E(t)} \Omega(t)_i$ . Parallèlement, l'intégrale sur le temps peut être enlevée afin de disposer de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i \in E(t)} \int_{\Omega_i(t)} \vec{\phi} dV + \sum_{i \in E(t)} \int_{\Omega_i(t)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) dV = \sum_{i \in E(t)} \int_{\Omega_i(t)} \vec{S} dV \quad (1.9)$$

En enlevant la somme par linéarité de la dérivée temporelle, l'équation ci-dessous fait apparaître l'équation de conservation locale sur la particule  $i$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i(t)} \vec{\phi} dV + \int_{\Omega_i(t)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) dV = \int_{\Omega_i(t)} \vec{S} dV \quad (1.10)$$

L'évaluation des intégrales volumiques nécessite la définition de la valeur moyenne du champ  $\phi$  dans un volume  $\Omega(t)$  :

$$\phi_{\Omega(t)} = \frac{1}{|\Omega(t)|} \int_{\Omega(t)} \phi(X) dV \quad (1.11)$$

La méthode SPH-ALE est une méthode centrée sur les particules  $i$ , le volume  $\Omega_i(t)$  est celui de la particule i.e.  $|\Omega_i(t)| = \omega_i$ . La dépendance n'est plus notée sur les volumes des particules dans les équations qui suivent par soucis de lisibilité.

$$\phi_i = \frac{1}{\omega_i} \int_{\Omega_i} \phi(X) dV \quad (1.12)$$

L'équation (Eq 1.10) devient :

$$\frac{d}{dt} \omega_i \vec{\phi}_i + \omega_i \vec{\nabla}_i \cdot (\vec{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) = \omega_i \vec{S}_i \quad (1.13)$$

L'équation discrète (Eq 1.13) permet donc de simuler l'évolution des grandeurs de  $\omega_i \vec{\phi}_i$  à savoir la masse et la quantité de mouvement. Afin de fermer le système d'équation, il est nécessaire d'ajouter une équation d'état qui décrit le comportement thermodynamique du fluide.

### 1.3 Écoulements pseudo-compressibles

Les écoulements modélisés dans cette thèse, peuvent être considérés comme incompressibles. Néanmoins, une approche pseudo-compressible est utilisée pour simuler les écoulements. Le fait de s'affranchir d'une résolution de l'équation de Poisson, et ainsi d'éviter la résolution d'un système linéaire permet d'avoir une approche entièrement explicite. Cette démarche peut être justifiée par le fait que la solution compressible développée en série de perturbations fonction du nombre de Mach ( $Ma$ ) est égale à la solution incompressible plus des termes additionnels en  $O(Ma)^2$  [41].

Pour une simulation donnée, la valeur de la vitesse du son  $c_0$  est déterminée de sorte que la variation maximum de masse volumique dans l'écoulement simulé n'excède pas 1% de la masse volumique nominale  $\rho_0$  du fluide considéré, revenant à autoriser un nombre de Mach  $Ma < 0.1$ .

L'écoulement est considéré comme pseudo-compressible, isentropique et isotherme ce qui permet d'utiliser une loi reliant la masse volumique du milieu à la pression. Cette loi, tirée de l'expérience est appelé loi de Tait [44] donnée par :

$$P_i = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (1.14)$$

avec les grandeurs  $\rho_0$  et  $c_0$  représentant respectivement la masse volumique de référence de l'eau et la vitesse du son numérique. Pour la modélisation d'un fluide tel que l'eau, habituellement traitée comme incompressible (mais considérée ici comme faiblement compressible), la valeur de  $\gamma$  est de 7.

L'utilisation de la loi de Tait fait diminuer de une dimension le problème en enlevant l'équation sur l'énergie.

Le choix de la vitesse du son  $c_0$  est alors un compromis assurant que les effets de compressibilité peuvent être négligés, tout en conservant un pas de temps de calcul suffisamment raisonnable. En effet, la valeur de la vitesse du son  $c_0$  généralement beaucoup plus basse que la valeur de la vitesse du son du fluide physique, limite les temps de calcul. Les pas de temps employés dans l'avance temporelle explicite sont directement influencés par une condition de stabilité de type CFL (Courant- Friedrich-Levy) où la vitesse de transmission d'information numérique dépend de la vitesse du son dans le milieu. Ainsi, les pas de temps sont d'autant plus faibles que la valeur choisie pour  $c_0$  est grande. Une onde acoustique de vitesse maximale ( $c_i + |v_i|$ ) ne peut pas au cours d'un

pas de temps  $dt$  dépasser la taille caractéristique de discrétisation  $h_i$  (Eq 1.15).  $c_i$  est la vitesse du son locale telle que  $c_i^2 = \frac{\gamma}{\rho_i}(P_i + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma})$ .

$$dt = C_{CFL} \min_i \frac{h_i}{c_i + |v_i|} \quad (1.15)$$

## 1.4 Approximation Particulaire

Pour approcher la valeur moyenne de la divergence des flux  $\bar{G}$  à la position de la particule d'intérêt, une approximation SPH de l'opérateur de divergence est utilisée. En introduisant la divergence discrète de l'unité (supposée proche de zéro), l'opérateur discret de divergence selon [61] [41] est donné par :

$$\bar{\nabla}_i \cdot (\bar{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) = \sum_{j \in V_i} \omega_j (\bar{G}_i + \bar{G}_j) \bar{\nabla}_i W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial (\bar{G}_i + \bar{G}_j) W_{ij} \vec{n}_j \quad (1.16)$$

La première somme correspond aux échanges entre les particules fluides voisines et la seconde somme aux échanges avec les frontières voisines (paroi, entrée). En faisant intervenir le flux centré à l'interface  $\bar{G}_{ij} = \frac{(\bar{G}_i + \bar{G}_j)}{2}$ , l'équation suivante est obtenue :

$$\bar{\nabla}_i \cdot (\bar{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) = 2 \sum_{j \in V_i} \omega_j \bar{G}_{ij} \bar{\nabla}_i W_{ij} + 2 \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial \bar{G}_{ij} \vec{n}_j W_{ij} \quad (1.17)$$

Le flux moyen  $\bar{G}_{ij}$  est calculé avec la solution d'un problème de Riemann local entre  $i$  et  $j$  i.e. :  $\bar{G}(\vec{\phi}_E, \vec{v}_{0,ij})$  avec  $\vec{\phi}_E$  la solution du problème de Riemann local. Le déplacement de l'interface du problème de Riemann est pris en compte avec la vitesse d'interface  $\vec{v}_{0,ij}$ . Cette approximation de la divergence des flux permet de disposer d'un schéma conservatif par l'antisymétrie des flux et du gradient du noyau :  $\bar{G}_{ij} \bar{\nabla}_i W_{ij} = -\bar{G}_{ji} \bar{\nabla}_j W_{ji}$  [61].

Le système des équations d'Euler discrétisées avec la méthode SPH-ALE, s'écrit comme suit, en combinant les équations de conservation (Eq 1.13), l'évolution de la position des particules (Eq 1.1) et de leur volume (Eq 1.3) avec l'approximation particulaire de l'opérateur de divergence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{X}_i}{dt} = \vec{v}_0(\vec{X}; t) \\ \frac{d\omega_i}{dt} = 2\omega_i \sum_{j \in V_i} \omega_j (\vec{v}_{0,ij} - \vec{v}_{0,i}) \bar{\nabla}_i W_{ij} + 2\omega_i \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial (\vec{v}_{0,ij} - \vec{v}_{0,i}) \vec{n}_j W_{ij} \\ \frac{d}{dt} \omega_i \rho_i = -2\omega_i \sum_{j \in V_i} \omega_j \rho_{E,ij} (\vec{v}_{E,ij} - \vec{v}_{0,ij}) \bar{\nabla}_i W_{ij} - 2\omega_i \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial \rho_{E,ij} (\vec{v}_{E,ij} - \vec{v}_{0,ij}) \vec{n}_j W_{ij} \\ \frac{d}{dt} \omega_i \rho \vec{v}_i = -2\omega_i \sum_{j \in V_i} \omega_j (\rho_{E,ij} \vec{v}_{E,ij} \otimes (\vec{v}_{E,ij} - \vec{v}_{0,ij}) + P_i) \bar{\nabla}_i W_{ij} \\ \quad - 2\omega_i \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial (\rho_{E,ij} \vec{v}_{E,ij} \otimes (\vec{v}_{E,ij} - \vec{v}_{0,ij}) + P_i) \vec{n}_j W_{ij} + \omega_i S_i \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Les deux premières équations sont donc liées au caractère ALE de la méthode. Les troisième et quatrième équations sont respectivement l'équation de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Le calcul des échanges de flux nécessite l'évaluation des solutions des problèmes de Riemann entre les particules fluides sur le voisinage fluide  $V_i$  [61] et des problèmes de Riemann partiels entre les particules fluides et les éléments de frontière de  $\partial V_i$  [41].

## 1.5 Calcul des flux numériques

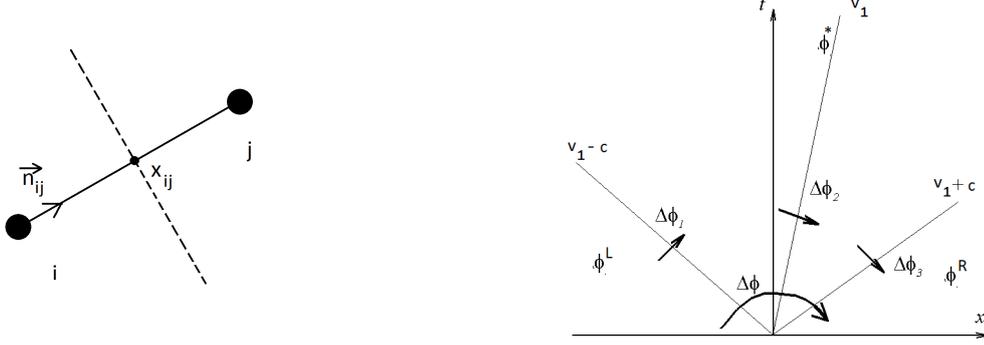
L'intérêt de l'approche avec solveur de Riemann est d'utiliser une viscosité numérique qui tient compte de la physique de l'écoulement. Cette approche s'oppose à l'utilisation d'une viscosité artificielle [18] [44].

### 1.5.1 Problème de Riemann monodimensionnel

Entre chaque paire  $(i; j)$  de particules fluides voisines, un problème de Riemann unidimensionnel selon la direction  $\vec{n}_{ij} = \frac{\bar{\nabla}_i W_{ij}}{\|\bar{\nabla}_i W_{ij}\|} = \frac{\vec{X}_j - \vec{X}_i}{\|\vec{X}_j - \vec{X}_i\|}$  apparaît, c'est à dire deux états physiques  $\vec{\phi}_i$  et  $\vec{\phi}_j$  séparés par une interface située à mi-chemin des deux particules (Fig 1.2a) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)_i \cdot \vec{n}_{ij}}{\partial x_{n_{ij}}} = 0 \\ \vec{\phi}(x_{n_{ij}}, 0) = \begin{cases} \vec{\phi}_i & \text{si } x_{n_{ij}} < 0 \\ \vec{\phi}_j & \text{si } x_{n_{ij}} > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.19)$$

$\vec{n}_{ij}$  est donc le vecteur unitaire dans la direction joignant les particules  $i$  et  $j$  et orienté de  $i$  vers  $j$ . Ce vecteur est colinéaire avec le gradient de la fonction noyau  $\vec{\nabla}_i W_{ij} = \frac{\vec{X}_j \vec{X}_i \|\vec{\nabla}_i W_{ij}\|}{\|\vec{X}_j \vec{X}_i\|}$ .  $X_{ij}$  est la position du milieu du segment  $[i; j]$ .  $x_{n_{ij}}$  est une abscisse curviligne le long de la droite de vecteur directeur  $\vec{n}_{ij}$  et d'origine  $X_{ij}$ .  $\vec{\phi}_i$  et  $\vec{\phi}_j$  sont les vecteurs des variables conservatives respectivement en  $i$  et  $j$ .



(a) Problème de Riemann monodimensionnel entre particules fluides voisines (en pointillé la face virtuelle) (b) Structure de la solution du problème de Riemann monodimensionnel

FIGURE 1.2 – Problème de Riemann unidimensionnel et la structure de la solution

La solution du problème de Riemann monodimensionnel est donnée par :

$$\begin{cases} \vec{\phi} = \vec{\phi}_E\left(\frac{x_{n_{ij}} + X_0(t)}{t}, \phi_i, \phi_j\right) \\ X_0(t) = \int_0^t \vec{v}_0(X_{ij}, \tau) \cdot \vec{n}_{ij} d\tau \end{cases} \quad (1.20)$$

La vitesse de déplacement de l'interface entre les particules  $i$  et  $j$  est donnée par :

$$\vec{v}(X_{ij}) = \frac{(\vec{v}(X_i) + \vec{v}(X_j))}{2} \quad (1.21)$$

La solution du problème de Riemann peut être interprétée comme un état décentré afin de stabiliser le système d'équations. La solution en vitesse du problème de Riemann  $\vec{v}_E$  n'est pas nécessairement égale au champ de transport  $\vec{v}_0$ , ce qui introduit des termes convectifs dans les équations, même si le champ de transport  $\vec{v}_0$  des particules est pris égal au champ de vitesses du fluide  $\vec{v}$ . Les masses associées à chaque particule peuvent alors varier au cours du temps.

## 1.5.2 Résolution des problèmes de Riemann

### Méthode de Godunov

Godunov [32] a remarqué que du fait de la discrétisation, des discontinuités du champ apparaissent aux interfaces des cellules de la discrétisation. Il a donc interprété ces interfaces comme autant de problèmes de Riemann, dont la solution exacte connue, contient toutes les informations relatives aux ondes se propageant localement dans l'écoulement. Il s'agit bien entendu d'une simplification du problème de Riemann car en réalité il est multidimensionnel. Cette approximation est suffisante pour des écoulements ne présentant pas de structures de choc multidimensionnel [41] [32]. Le système suivant généralise les notions de celui de (Eq 1.19) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{G}(\vec{\phi})_E}{\partial x} = 0 \\ \vec{\phi}(x, 0) = \begin{cases} \vec{\phi}_L & \text{si } x < 0 \\ \vec{\phi}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.22)$$

avec les états gauche  $L$  et droite  $R$  de la discontinuité située en  $x = 0$ . La figure (Fig 1.2b) présente la structure de la solution du problème de Riemann. Le vecteur  $\vec{\phi} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2)$  des variables conservatives est pris avec deux composantes de quantité de mouvement, la seconde représentant une composante tangentielle à l'interface. Le vecteur  $\vec{G}(\vec{\phi})_E = (\rho v_1, \rho v_1^2 + P, \rho v_1 v_2)$  correspond au flux à l'interface du problème de Riemann. Le système (Eq 1.22) admet donc trois valeurs propres réelles distinctes :  $\lambda_1 = v_1$ ,  $\lambda_2 = v_1 + c$ ,  $\lambda_3 = v_1 - c$  représentées sur (Fig 1.2b). Les valeurs propres  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  correspondent à des ondes de détente ou de choc. La valeur propre  $\lambda_1$  est une onde de glissement à travers la vitesse tangentielle  $v_2$ . Il existe donc 4 configurations en fonction du type d'ondes à gauche et à droite. Compte tenu des écoulements résolus dans ce travail, seule la solution intermédiaire  $\vec{\phi}^*$  est utilisée. Cet état est relié aux états gauche (L) et droit (R) à travers des ondes non-linéaires (Fig 1.2b), il s'agit donc de résoudre le problème.

### Solveur de Riemann

La résolution entière de l'écoulement repose sur la résolution des problèmes de Riemann locaux. Leur résolution exacte est très coûteuse et de nombreux solveurs ont été développés afin d'approcher la solution [32].

En 2D, le système des équations d'Euler peut s'écrire avec les variables non conservatives i.e. les variables primitives de masse volumique et de vitesse sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\phi}) + \bar{J} \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\phi}) = 0 \quad (1.23)$$

avec  $\vec{\phi} = (\rho, v_1, v_2)$  et la matrice jacobienne  $\bar{J}$  des flux définie telle que :

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} v_1 & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

En considérant  $\bar{J}$  comme constante (Eq 1.26), le solveur appelé PVRS peut être utilisé. Ce solveur est simple et robuste [41]. Il consiste à construire  $\bar{J}$  à partir des valeurs moyennes entre les états L et R.

$$\bar{\rho} = \frac{(\rho_R + \rho_L)}{2} \quad \bar{c} = \frac{(c_R + c_L)}{2} \quad \bar{v}_1 = \frac{(v_{1,R} + v_{1,L})}{2} \quad (1.25)$$

$$\bar{J} \approx \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{\rho} & 0 \\ \frac{\bar{c}^2}{\bar{\rho}} & \bar{v}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}_1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

La matrice Jacobienne  $\bar{J}$  possède trois valeurs propres et trois vecteurs propres indépendants. En recherchant une expression des sauts à travers une combinaison linéaire des vecteurs propres, il est possible d'écrire la solution étoile  $\vec{\phi}^*$  comme :

$$v_1^* = \frac{1}{2}(v_{1,L} + v_{1,R}) - \frac{\bar{c}}{2\bar{\rho}}(\rho_R - \rho_L) \quad (1.27)$$

et

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) + \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(v_{1,R} - v_{1,L}) \quad (1.28)$$

Les décentrement de vitesse et de pression sont directement reliés aux amplitudes des discontinuités entre les états gauche et droite.

### 1.5.3 Stratégie MUSCL

Initialement, la méthode développée par Godunov est d'ordre 1 en précision, en considérant des états constants pour chaque cellule. Cependant, cette méthode est diffusive. Pour pallier à ce problème, Van Leer a proposé en 1979 [32] une extension à l'ordre 2 appelée MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws). Le principe est de remplacer les approximations constantes par morceaux par des approximations linéaires par morceaux (Fig 1.3). Le flux eulérien  $\bar{F}(\vec{\phi}_i; \vec{\phi}_j; \vec{n}_{ij})$  localisé en  $X_{ij}$  est remplacé par le flux  $\bar{F}(\vec{\phi}_{ij}; \vec{\phi}_{ji}; \vec{n}_{ij})$ . Il suffit ainsi de remplacer les états constants  $\vec{\phi}_i$  et  $\vec{\phi}_j$  du problème de Riemann par les états  $\vec{\phi}_{ij}$  et  $\vec{\phi}_{ji}$  extrapolés linéairement en  $X_{ij}$  (Eq 1.29).

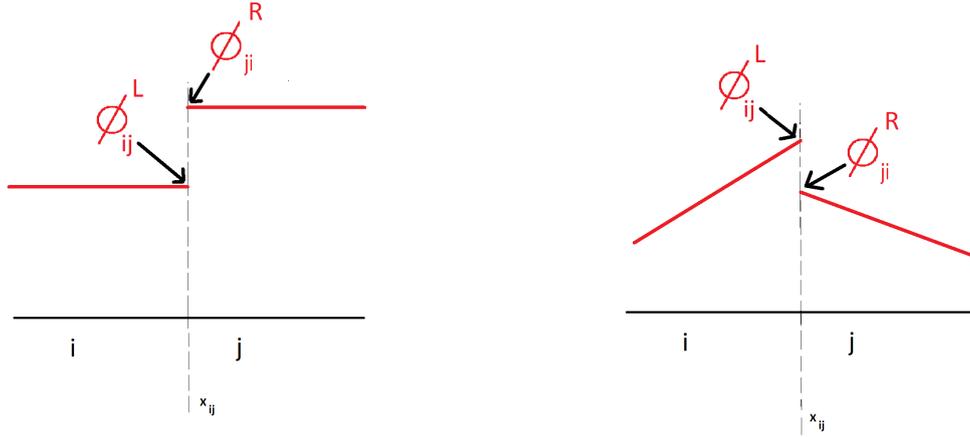


FIGURE 1.3 – Extrapolation à l’interface  $X_{ij}$  du problème de Riemann constant par morceaux (à gauche), linéaire par morceaux (à droite)

$$\begin{cases} \phi_i \\ \phi_j \end{cases} \implies \begin{cases} \phi_{ij} = \phi_i + \vec{\nabla}_i \phi \cdot (X_{ij} - X_i) \\ \phi_{ji} = \phi_j + \vec{\nabla}_j \phi \cdot (X_{ij} - X_j) \end{cases} \quad (1.29)$$

L’emploi de la stratégie MUSCL conduit à effectuer pour chaque variable de  $\phi$ , une estimation locale du gradient  $\vec{\nabla}_i \phi$  et  $\vec{\nabla}_j \phi$  pour les particules  $i$  et  $j$ . Dans [61] [41] [18], le gradient des champs physiques est calculé à partir d’une approximation particulaire SPH (Eq 13) corrigée ou non avec la renormalisation [48]. Cette technique d’évaluation de gradient est précise d’ordre 2. Cependant, cette approche SPH ne permet pas d’évaluer facilement des dérivées d’ordre supérieur. Tout comme pour la méthode volume fini, l’emploi de la technique MUSCL doit être limité au niveau des discontinuités physiques (choc, discontinuité de contact) afin d’éviter la création d’extrema locaux et des oscillations importantes. Des limiteurs ont été développés dans [27] [41].

#### 1.5.4 Les conditions aux limites

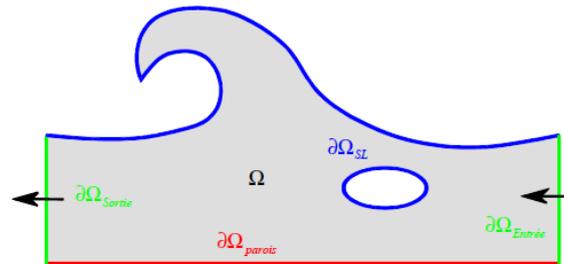


FIGURE 1.4 – Domaine fluide et ses frontières en bleu : une surface libre, en vert : des conditions de entrées/sorties et rouge : une paroi [27]

#### Périodicité et symétrie

Les conditions de périodicité et de symétrie sont facilement traitées en dupliquant au début de chaque itération, les particules qui doivent l’être. Pour une condition de périodicité, les champs des particules *virtuelles* sont pris identiques aux particules réelles. En revanche dans le cas d’une symétrie, certaines composantes du champ de vitesse pour les particules *virtuelles* peuvent être opposées en signe.

#### Surface libre

Très spécifique à la méthode SPH, la condition de surface libre est faite de telle manière que seules les particules fluides sont prises en compte. Aucune condition n’est imposée. Le fluide ambiant n’est pas simulé. La pression ambiante est considérée comme nulle. La vitesse est obtenue par la cinématique des particules du fluide.

## Parois

Le traitement des parois a fait l'objet de nombreuses études basées sur des particules fantômes, des forces répulsives [44], mais elles s'avèrent peu efficaces pour des géométries complexes. Dans le cadre de la méthode SPH-ALE, Marongiu [41] a développé une approche basée sur les solveurs de Riemann partiels.

Le solveur de Riemann partiel interprète l'élément de surface comme l'interface du problème de Riemann. Le flux de paroi est considéré comme un flux de Godunov résultant d'un problème de Riemann mono-dimensionnel le long de la normale à la paroi. La technique du solveur de Riemann partiel attribue un état partiel de pression  $P_{E,ij}$  propre à chaque particule fluide lié à la condition  $(\vec{v} \cdot \vec{n} = 0)$  [41]. L'état global est ensuite calculé en additionnant l'ensemble des contributions du voisinages :

$$P_i = 2 \sum_{j \in V_i} \omega_j P_{E,ij} W_{ij} \quad (1.30)$$

## Chapitre 2

# Positionnement de la méthode SPH-ALE

La méthode SPH-ALE est une méthode numérique jeune qu'il est possible de mettre en perspective dans l'univers des méthodes numériques connues. Cette section expose le positionnement de cette méthode sans maillage parmi les méthodes classiques à maillage et sans maillage. L'idée est d'exposer les propriétés de chacune d'entre elles. Leurs spécificités et leurs points communs permettent de justifier la motivation de vouloir s'inspirer des méthodes numériques existantes pour essayer d'améliorer la SPH-ALE. Les méthodes numériques permettant de résoudre des équations hyperboliques auxquelles la SPH-ALE sera comparée, sont les volumes finis (FVM), les éléments finis (FEM) pour les méthodes à maillage et la méthode des volumes finis particuliers (FVPM) pour les méthodes sans maillage. La comparaison avec les volumes finis est naturellement plus détaillée que les autres. Les conditions limites seront volontairement non traitées.

### 2.1 Lien entre la SPH-ALE et les volumes finis

La méthode des volumes finis est très populaire afin de résoudre des problèmes faisant intervenir des discontinuités et nécessitant un formalisme conservatif. De nombreux ouvrages ont été et sont publiés sur cette méthode numérique mais celui de Godlewski et Raviart [25] publié en 1996 peut être utilisé sans hésitation comme référence. La méthode de Godunov définit la solution  $\phi(X, t_n)$  au temps  $t_n$  comme une fonction constante par morceaux. L'équation de conservation peut être alors résolue exactement sur un court intervalle de temps puisque la donnée initiale est constante par morceaux, et définit donc une multitude de problèmes de Riemann. La notion de valeur moyenne dans le volume de contrôle est donc essentielle (Eq 1.11). Les grandeurs sont évaluées en évaluant l'intégrale en un point précis qui n'est pas nécessairement un nœud du maillage. Les volumes finis sont donc une *méthode de collocation*.

En partant du système des équations de conservation globales (Eq 1.4) du champ  $\phi$ , des quantités physiques conservatives sur un domaine  $\Omega$ , il est possible de définir les équations de conservation locales (Eq 1.10) sur des plus petits volumes de contrôle définissant une partition de  $\Omega$ . Ces volumes de contrôle sont définis par le maillage c'est-à-dire une partition d'ouverts disjoints (mailles). Si  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  sont deux mailles voisines, l'arête en 2D ou la face en 3D est définie par  $\partial\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$  ainsi que la normale unitaire  $\vec{n}_{ij}$  orientée de  $\Omega_i$  vers  $\Omega_j$  (Fig 2.2b).

La notion de volume de contrôle doit maintenant être explicitée. Deux approches très populaires existent, à savoir les schémas *cell-centered* et *vertex-centered*. La première approche considère les éléments de maillage comme les volumes de contrôles (Fig 2.1a). La seconde est centrée sur les nœuds de maillages (Fig 2.1b) à travers l'utilisation du maillage dual. D'après [14], l'approche *vertex-centered* est du premier ordre sur des mailles non-structurées. Sur un maillage cartésien ou régulier, les deux approches sont d'ordre 2 ou au dessus en fonction de l'évaluation des flux et de leur intégration.

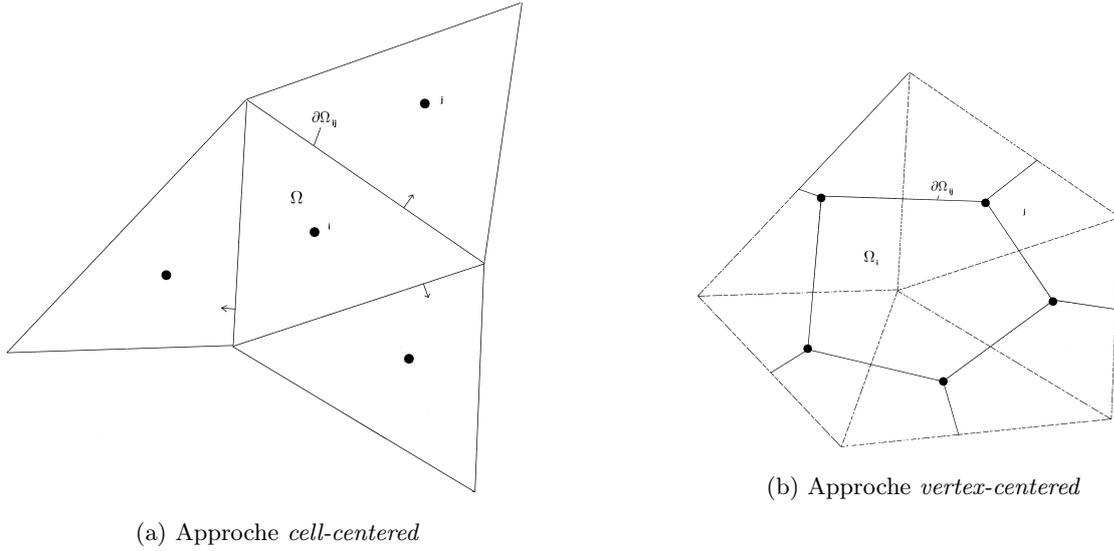
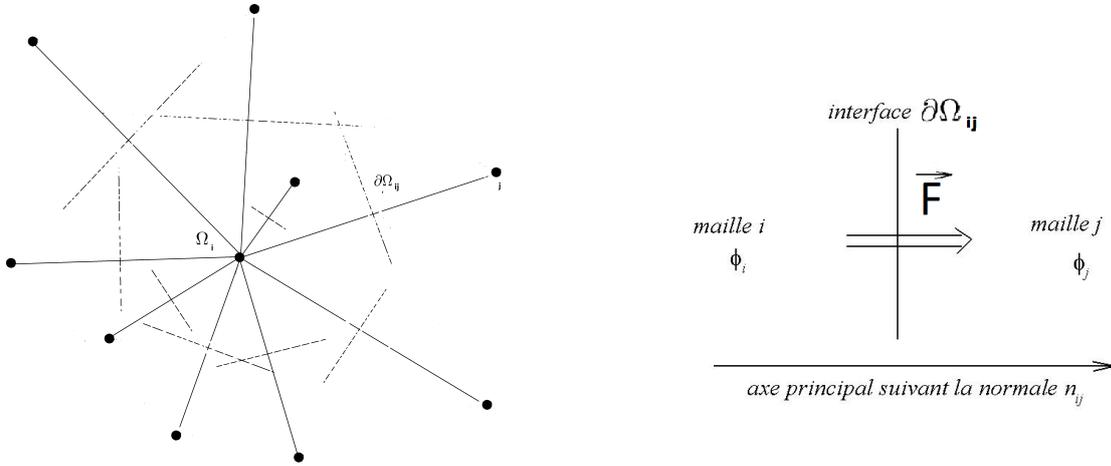


FIGURE 2.1 – Approches volumes finis *cell-centered* et *vertex-centered* en 2D

L'approche *vertex-centered* est sensiblement plus proche de la méthode SPH-ALE que l'approche *cell-centered*. La première raison est la non connaissance au préalable de la topologie du volume de contrôle. La seconde est la notion de point qui supporte la volume. La notion d'interface est moins maîtrisée dans l'approche *vertex-centered*. En effet pour une interface entre deux points donnés, le flux  $\vec{F}$  est considéré constant sur les deux demi-facettes ce qui moyenne fortement le résultat  $\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \vec{F} \cdot (\vec{n}_1 d\sigma_1 + \vec{n}_2 d\sigma_2)$ . La méthode SPH-ALE reconstruit artificiellement des interfaces  $\partial\Omega_{ij}$  à mi-distance de l'interaction. Cette méthode ne peut garantir la fermeture du volume ( $\sum \vec{n} d\sigma = \vec{0}$ ). Toutefois, en considérant que les bilans de flux se fassent au centre de particule lui-même pris au centre du volume, la SPH-ALE peut aussi s'apparenter à l'approche *cell-centered*.



(a) Approche *SPH-ALE* en pointillé les interfaces virtuelles

(b) Flux à travers une interface  $\partial\Omega_{ij}$  [27].

FIGURE 2.2 – Approche SPH-ALE et Interface des problèmes de Riemann

La connaissance de la topologie en volume fini permet donc dans les deux approches *cell-centered* et *vertex-centered* d'utiliser la formule de Green permettant le passage d'une intégration volumique de la divergence des flux  $\vec{F}$  sur  $\Omega$  à une intégration surfacique des flux à travers l'élément  $\partial\Omega$ . Dans la suite de cette section, l'ordre tensoriel des flux sera pris égal à 1 afin d'assouplir les notations. Les flux portent sur la masse et la quantité de mouvement.

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \phi \vec{v}_0) dV = \int_{\partial\Omega} (\vec{F} - \phi \vec{v}_0) \cdot \vec{n} d\sigma \quad (2.1)$$

Les différentes interfaces entre la cellule d'intérêt  $i$  et ses voisins  $j$  permettent ensuite de découper l'intégrale

surfacique sur  $\partial\Omega_i$  en sous-intégrales surfaciques  $\partial\Omega_{ij}$  par voisin avec  $\partial\Omega_i = \cup_{j \in V_i} \partial\Omega_{ij}$ .

$$\int_{\partial\Omega_i} (\vec{F} - \phi \vec{v}_0)_i \cdot \vec{n} d\sigma = \sum_{j \in V_i} \int_{\partial\Omega_{ij}} ((\vec{F} - \phi \vec{v}_0)_i \cdot \vec{n}_{ij}) d\sigma \quad (2.2)$$

La divergence des flux convectifs  $\vec{F}$  peut alors s'écrire ainsi :

$$|\Omega_i| \vec{\nabla}_i \cdot \vec{G} = \sum_{j \in V_i} |\partial\Omega_{ij}| (\vec{F}(\phi_i^n, \phi_j^n) - \phi_{ij} \vec{v}_{0,ij}) \cdot \vec{n}_{ij} = \sum_{j \in V_i} |\partial\Omega_{ij}| (\vec{G}(\phi_i^n, \phi_j^n, \vec{v}_{0,ij}) \cdot \vec{n}_{ij}) \quad (2.3)$$

L'évolution de la solution au temps suivant  $n + 1$  de l'équation (Eq 1.10) sans terme source, peut s'écrire sous la forme discrète d'une combinaison convexe d'états aux interfaces suivante :

$$\phi_i^{n+1} = \bar{\phi}(\phi_i^n, \phi_{j \in V_i}^n) = \sum_{j \in V_i} \frac{|\partial\Omega_{ij}|}{|\partial\Omega|} \bar{\phi}^{n+1,e} \quad (2.4)$$

Ce schéma est adapté aux maillages non-structurés et aux cas multidimensionnels [12] [63]. L'évolution de l'état  $\bar{\phi}$  à l'interface est définie comme suit :

$$\bar{\phi}^{n+1,e} = \phi_i^n - \frac{1}{\sigma} (\vec{G}(\phi_i^n, \phi_j^n, n_{ij}, \vec{v}_{0,ij}) - \vec{F}(\phi_i^n)) \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.5)$$

avec  $\sigma$  la vitesse de passage de l'information à travers l'interface définie par  $\sigma = \frac{|\Omega|}{dt |\partial\Omega|}$  en [m/s].  $\vec{G}$  et  $\vec{F}$  sont respectivement le flux à l'interface en  $X_{ij}$  et le flux au centroïde en  $X_i$ . En utilisant la propriété liée au maillage :  $\sum_{j \in V_i} |\partial\Omega_{ij}| \vec{n}_j = 0$ , l'auto contribution de flux disparaît. La condition CFL devient :  $dt \leq \frac{\alpha^2 h}{\max(\sigma)}$  avec  $\alpha = \frac{|\partial\Omega_{ij}|}{|\partial\Omega|}$ . Le schéma numérique dépend donc de l'existence de  $\sigma$ , du CFL et de  $\bar{\phi}$  [63].

Dans [12], la combinaison linéaire convexe met en place des sous-triangles  $T_{ij}$  décomposant le volume initial  $\Omega_i$ , ayant une base  $l_{ij}$  formée par la perpendiculaire à la direction d'interaction  $\vec{n}_{ij}$  afin d'évaluer l'évolution de la grandeur  $\phi$  :

$$\phi_i^{n+1} = \sum_{j \in V_i} \frac{|T_{ij}|}{|\partial\Omega_i|} \bar{\phi}_i^{n+1,e} \quad (2.6)$$

avec  $T_{ij}$  l'aire des sous-triangles de l'élément initial et l'évolution de l'état à l'interface est  $\bar{\phi}_i^{n+1,e} = \phi_i^n - \frac{dt |l_{ij}|}{|T_{ij}|} (\vec{G}_{ij} - \vec{F}_i) \cdot \vec{n}_{ij}$ . La vitesse de passage à l'interface est alors :  $\sigma = \frac{dt |l_{ij}|}{|T_{ij}|}$  en [m/s].

### Correspondance avec la SPH-ALE

Dans ce qui précède, il apparaît que l'évolution en temps des quantités physiques peut s'interpréter comme une combinaison linéaire des états aux interfaces. Ces mêmes états sont décrits comme l'évolution en temps de l'état moyen en lui retranchant la dérivée des flux projetée selon la direction d'interaction. Cette différentielle de flux fait intervenir une auto-contribution de flux qui par la construction des volumes de contrôles disparaît. Ce constat est bien moins évident avec une méthode sans topologie connue. Pour simplifier la suite, le schéma en temps est un simple euler explicite.

En faisant apparaître les projections sur les directions d'interactions  $\vec{n}_{ij}$  dans les équations de conservation de (Eq 1.18), le système s'écrit :

$$\omega_i^{n+1} \phi_i^{n+1} = \omega_i^n \phi_i^n - 2dt \omega_i^n \left[ \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{G}_{ij} \cdot \vec{n}_j + \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{G}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} \|\vec{\nabla} W_{ij}\| \right] \quad (2.7)$$

Loin des frontières, le schéma peut s'écrire comme la convolution de l'avance en temps des états aux interfaces :

$$\omega_i^{n+1} \phi_i^{n+1} = \omega_i^n \sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} \bar{\phi}_i^{n+1,e} \quad (2.8)$$

avec  $\bar{\phi}_i^{n+1,e}$  l'évolution des états aux interfaces des interactions. L'équation (Eq 2.8) implique que la partition de l'unité soit réalisée :  $\sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} = 1$  ce qui bien entendu n'est pas le cas dans les régions tronquées. L'évolution des états aux interfaces s'écrit alors comme ceci :

$$\bar{\phi}_i^{n+1,e} = \phi_i^n - \frac{2dt \|\vec{\nabla}_i W_{ij}\|}{W_{ij}} (\vec{G}_{ij} - \vec{F}_i) \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.9)$$

Cette approche peut être réécrite comme :

$$\bar{\phi}_i^{n+1,e} = \phi_i^n - \frac{1}{\sigma} (\vec{G}_{ij} - \vec{F}_i) \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.10)$$

avec  $\sigma = \frac{W_{ij}}{2dt \|\vec{\nabla}_i W_{ij}\|}$  qui est bien une vitesse en [m/s].

Cette manière d'écrire le schéma SPH-ALE comme la combinaison linéaire des états aux interfaces des interactions, illustre sa possible interprétation comme un schéma de type Godunov inspiré des volumes finis en multidimensions. Seules les vitesses  $\sigma$  aux interfaces changent sinon les équations (Eq 2.5) et (Eq 2.10) sont identiques. De nouveau une auto-contribution peut s'écrire afin d'imposer une consistance d'ordre 0 à la dérivée des flux projetée selon la direction d'interaction.

*Remarques.*

Les schémas volumes finis imposent de manière naturelle :

$$\sum_{j \in \partial\Omega_i} \frac{|l_{ij}|}{|\partial\Omega_i|} \vec{n}_{ij} = \vec{0}$$

ce qui permet d'éliminer les termes avec les flux  $\vec{F}$  (Eq 2.10 et 2.5). Cette consistance garantit une divergence nulle pour des flux constants. Cette condition est similaire à la notion de *closed-box* définie pour la SPH-ALE par [45] comme :

$$\sum_{j \in V_i} \omega_j \|\vec{\nabla}_i W_{ij}\| \vec{n}_{ij} = \vec{0}$$

Cette même condition permet de nouveau de supprimer les auto-contributions de flux  $\vec{F}$ . Le lien entre les deux méthodes peut être fait en posant  $\omega_j \|\vec{\nabla}_i W_{ij}\| = \frac{|l_{ij}|}{|\partial\Omega_i|}$  en [ $m^{-1}$ ].

### Illustration du lien FV/SPH-ALE sur un exemple 2D

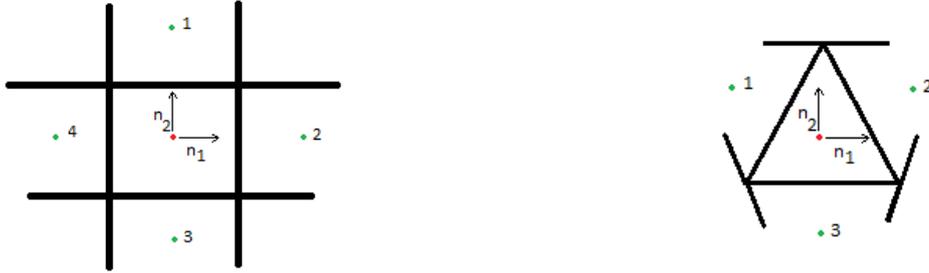


FIGURE 2.3 – Maillage structuré 2D carré (à gauche) triangulaire (à droite)

Dans le plan 2D, 5 points sont placés sur une grille cartésienne (Figure de gauche de Fig 2.3). La distance entre la particule  $i$  au centre et ses voisines  $j$  en périphérie est égale :  $\|\vec{r}_{ij}\| = a \in \mathbb{R} \forall j \in V_i$ . Cela implique que la valeur du noyau  $W_{ij}$  est identique pour l'ensemble du voisinage ( $\forall j, j' \in V_i, W_{ij} = W_{ij'}$ ). Les volumes occupés par les points sont égaux :  $\omega_j = a^2 \forall j$ . La partition de l'unité étant réalisée i.e.  $\sum_j \omega_j W_{ij} = 1$ , la valeur de  $W$  est alors de  $1/4a^2$  d'unité  $m^{-2}$  en prenant  $h = a$ . Le nombre de voisins est identique pour les deux méthodes SPH-ALE et volumes finis.

En utilisant (Eq 2.6), l'évolution de la solution avec les volumes finis est comme suit :

$$\bar{\phi}_i^{n+1,e} = \phi_i^n - \frac{dt |l_{ij}|}{|T_{ij}|} (\vec{G}_{ij} - \vec{F}_i) \cdot \vec{n}_{ij} \quad (2.11)$$

avec  $|l_{ij}| = a$  et  $|T_{ij}| = a^2/4$  sachant que  $|\Omega_i| = a^2$ . L'évolution en temps du champ  $\phi$  est alors donné par :

$$\phi_i^{n+1} = \sum_{j \in V_i} \frac{1}{4} \bar{\phi}_i^{n+1,e} = \frac{1}{4} (\phi_i^{n+1,1} + \phi_i^{n+1,2} + \phi_i^{n+1,3} + \phi_i^{n+1,4}) \quad (2.12)$$

En remplaçant avec les données géométriques :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{dt}{a} ((\vec{G}_{i1} - \vec{G}_{i3}) \cdot \vec{n}_1 + (\vec{G}_{i2} - \vec{G}_{i4}) \cdot \vec{n}_2) \quad (2.13)$$

L'approximation de la divergence des flux est bien selon chacune des directions de l'espace.

En utilisant la définition de la divergence avec l'approche sans maillage (Eq 1.16), l'évolution en temps de la solution est :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - 2dt \|\vec{\nabla} W_{ij}\| \omega_j [(\vec{G}_{i1} - \vec{G}_{i3}) \cdot \vec{n}_1 + (\vec{G}_{i2} - \vec{G}_{i4}) \cdot \vec{n}_2] \quad (2.14)$$

De plus, en choisissant une fonction noyau gaussienne, l'égalité  $\vec{\nabla}_i W_{ij} = \frac{-2(x_j - x_i)}{h^2} W_{ij}$  apparaît donc  $2 \|\vec{\nabla}_i W_{ij}\| \omega_j = \frac{1}{a}$  ce qui conduit à retrouver le schéma volume fini.

La démarche est identique pour un maillage triangulaire équilatéral régulier (figure de droite de Fig 2.3). Dans ce cas en prenant  $l_{ij} = a$  la longueur d'un côté du triangle, l'aire des sous-triangles est  $|T_{ij}| = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$  et l'aire totale de la maille est donnée par  $|\Omega_i| = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ . En décomposant les vecteurs d'interaction dans la base  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ , le vecteur de l'interaction entre  $i$  et la maille 1 est  $\vec{n}_{i1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{n}_1 + \frac{1}{2} \vec{n}_2, \vec{n}_{i2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{n}_1 + \frac{1}{2} \vec{n}_2$  entre  $i$  et 2 et bien sûr entre  $i$  et 3,  $\vec{n}_{i3} = -\vec{n}_2$ . En utilisant l'approche sans maillage, le noyau pour chaque voisin est égal à  $W_{ij} = \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}$  et le gradient  $\nabla W = \frac{8}{9ah^2}$  en posant  $h = a$ . L'équivalence est facile à trouver et conduit à trouver :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{2dt}{a} [(\vec{G}_{i1} - \vec{G}_{i3}) \cdot \vec{n}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{G}_{i2} + \vec{G}_{i1} - 2\vec{G}_{i3}) \cdot \vec{n}_2] \quad (2.15)$$

La conclusion de cette illustration est donc que la formulation SPH-ALE est une extension de celle des volumes finis dans une approche sans maillage multidimensionnelle avec une estimation de l'opérateur de divergence par un produit de convolution sur un domaine compact choisi. Sur un maillage cartésien, les méthodes sont parfaitement identiques en prenant bien entendu le même nombre de voisins.

## 2.2 Lien avec le formalisme FVPM

Le formalisme FVPM (Finite Volume Particle Method) est une extension des volumes finis vers l'approche sans maillage [57]. L'idée fondamentale est de faire une formulation faible sur un volume de contrôle à définir à partir de fonctions test à support compact (Eq 2.16). Pour la méthode des volumes finis tout comme pour la méthode SPH-ALE, le volume d'intégration est basé sur des volumes de discrétisation. La fonction test est une fonction créneau Heaviside égale à 1 dans le volume de contrôle et nulle ailleurs. Dans la méthode FVPM, la fonction test  $\psi_i$  est différente et elle est calculée comme suit :

$$\psi_i(t, X) = \frac{W(t, X - X_i)}{\sigma} \text{ avec } \sigma = \sum_{l \in E} W(t, X - X_l) \quad (2.16)$$

avec  $E$  l'espace de calcul discrétisé. Cette fonction test respecte la partition de l'unité  $\sum_{i \in E} \psi_i = 1$  ainsi que la nullité de la somme des gradients  $\sum_{i \in E} \vec{\nabla} \psi_i = \vec{0}$ . Le volume des particules est l'intégration de cette fonction test (Eq 2.17).

$$V_i = \int_{\Omega} \psi_i(t, X) dV \quad (2.17)$$

Les lois de conservation (Eq 1.4) sont intégrées après multiplication par une fonction test  $\psi_i$ . Cette technique permet d'obtenir des équations de conservation locales sur la particule  $i$  de volume  $V_i$ . Ce qui est spécifique à la méthode FVPM, c'est que le recouvrement des volumes  $V_i$  est nécessaire pour calculer les interactions entre les particules avec l'équation  $(\text{supp}(\psi_i) \cap \text{supp}(\psi_j) \neq \emptyset)$  (Eq 2.18) [57].

$$\vec{\beta}_{ij} = \vec{\gamma}_{ij} - \vec{\gamma}_{ji} \text{ avec } \vec{\gamma}_{ij} = \int_{V_i} \frac{W_i \vec{\nabla} W_j}{\sigma^2} dV \quad (2.18)$$

Le schéma numérique FVPM est de la forme :

$$\frac{d}{dt} (V_i \phi_i) = - \sum_{j \in V_i} |\vec{\beta}_{ij}| \vec{F}(\phi_i, \phi_j) \vec{n}_{ij} + \sum_{j \in V_i} (\gamma_{ij} \vec{v}_{0,j} \phi_i - \gamma_{ji} \vec{v}_{0,i} \phi_j) \quad (2.19)$$

avec  $\vec{\beta}_{ij}$  un terme purement géométrique défini sur le support d'intersection entre la fonction test de la particule  $i$  et de celle de la voisine  $j$ . La conservativité de la méthode est alors garantie par l'antisymétrie  $\vec{\beta}_{ij} = -\vec{\beta}_{ji}$  quelque soit la configuration des particules. Le flux numérique  $\vec{F}$  est un flux standard volume fini (constant, conservatif [32]).

Ce formalisme est intéressant car l'approximation des champs physiques  $\phi$  ainsi que l'opérateur de divergence sont évalués sur le support  $V$  de la fonction test  $\psi$  et non sur la particule elle-même. Ceci implique que la valeur moyenne des évaluations est sur  $V$  et non sur  $\Omega$  (pour rappel  $\Omega \subset V$ ). Le caractère ALE est également présent

avec la seconde somme où le champ de transport des particules est pris en compte.

La méthode FVPM est donc conservative et consistante d'ordre 0. Cependant, le calcul des intégrales sur les supports d'intersection est onéreux pour être précis, ce qui limite les applications de la méthode.

Le lien avec la SPH-ALE est essentiellement basé sur l'idée d'une méthode de *collocation* sans maillage. La différence fondamentale qui intervient en raison des fonctions test particulières de la méthode FVPM, est le recouvrement des domaines d'interaction ce qui permet d'obtenir des intégrations de flux symétriques pour toutes les configurations géométriques des particules.

## 2.3 Lien avec la méthode des éléments finis

La section qui suit s'appuie sur le cours de Manet [42]. La méthode des éléments finis est très populaire pour résoudre des problèmes tant académiques qu'industriels. L'approche par éléments finis réside dans le passage à la formulation variationnelle (formulation faible) en intégrant les équations aux dérivées partielles (EDP) après leurs produits avec des fonctions test  $\psi$  bien choisies [22] (Eq 2.20).

$$\int_{\Omega} EDP \times \psi dV = 0 \quad \forall \psi \quad (2.20)$$

Les éléments de maillage  $K$  possèdent plusieurs nœuds  $j$  qui représentent les degrés de liberté des fonctions d'interpolation ou fonctions de forme  $N$ . Ces fonctions de forme sont interpolantes sur les nœuds de calcul ( $N_i(X_j) = \delta_{ij}$ ) et définissent l'interpolation dans l'élément comme suit :

$$\phi(X) = \sum_{j \in K} \phi_j N_j(X) \quad (2.21)$$

Pour posséder de bonnes propriétés sur les opérateurs, les fonctions test  $N$  et les fonctions de forme  $\psi$  sont choisies dans un espace de Sobolev. Ces deux fonctions sont l'élément central de la discrétisation par éléments finis. La pertinence de la solution ainsi obtenue dépend de leurs propriétés de consistance, de précision. Les fonctions de base sont des fonctions définies par morceaux dont la délimitation s'appuie sur un maillage du domaine géométrique. Ces fonctions sont associées à des points particuliers du maillage (les nœuds) et sont construites de façon à vérifier trois propriétés :

- être continues (mais leurs dérivées sont souvent discontinues d'un élément à l'autre) ;
- n'être non nulles que sur les éléments contenant leur nœud d'attache (et, donc, nulles dans tous les autres éléments) ;
- être d'amplitude égale à 1 à leur nœud d'attache et 0 à tous les autres nœuds du maillage.

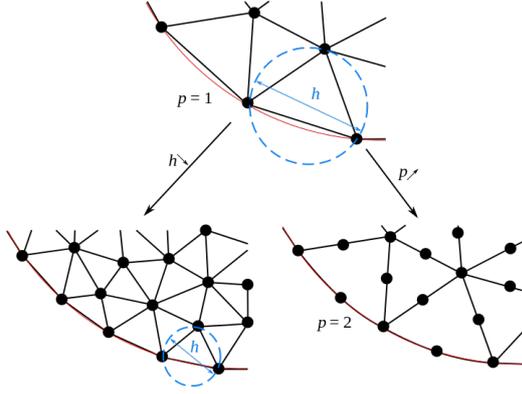
En prenant les fonctions dans des espaces de Sobolev différents, la méthode est dite de Petrov-Galerkin. Dans le cas contraire, la méthode est dite Bubnov-Galerkin. L'espace des fonctions test est alors le même que l'espace des solutions. Cette approche permet de passer d'une formulation continue à une formulation discrète à partir de la définition d'un produit scalaire discret  $(\cdot; \cdot)_h$ . Cette méthode est donc une *méthode de résidus pondérés* (Eq 2.22).

Trouver  $\phi_h \in V_h$  tel que

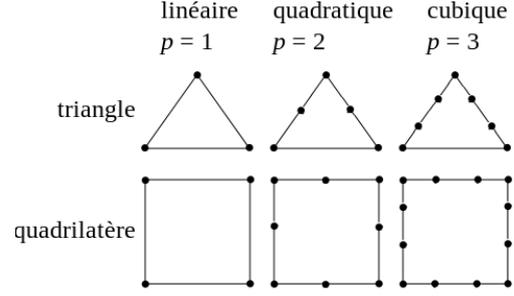
$$\bar{K} \partial_t \phi_h + \bar{A}(\phi_h, \psi_h) = l(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h \quad (2.22)$$

avec  $l$  le vecteur contenant les termes du membre de droite tels que les termes sources. L'opérateur spatial définit alors une matrice de raideur  $\bar{A}$  définie semi-positive donc inversible. L'opérateur temporel permet de définir une matrice masse  $\bar{K}$  qui traduit le lien entre les nœuds de calcul. La matrice masse a pour coefficient  $\bar{K}_{ij} = (\psi_i; \psi_j)_h$  et la matrice de raideur  $\bar{A}_{ij} = a(\psi_i; \psi_j)$  avec  $a$  l'opérateur spatial bilinéaire, coercitif. En se plaçant dans le cas d'une méthode de Bubnov-Galerkin, une solution unique existe à travers la mise en œuvre du théorème de Lax-Milgram.

La méthode des éléments finis a permis d'introduire divers niveaux de raffinement pour les méthodes numériques [22] [24]. La figure (Fig 2.4a) illustre un des attraits des éléments finis à travers le raffinement local soit en ordre, le  $p$ -raffinement, soit en taille, le  $h$ -raffinement. La figure (Fig 2.4b) présente pour un maillage 2D l'introduction de nœuds supplémentaires dans les éléments de maillage afin de monter en ordre dans l'élément. Un autre niveau d'adaptation est le  $r$  pour la relocalisation des nœuds. Il s'agit de déplacer les nœuds en fonction de critères d'erreur, le parallèle avec des méthodes de *shifting* peut bien entendu être fait [42] [16] [45].



(a) Raffinement de maillage par diminution de la taille d'éléments ( $h$ , à gauche) ou par augmentation du degré des éléments ( $p$ , à droite) (wikipedia).



(b) Exemple de  $p$ -raffinement en 2D (wikipedia)

L'approche sans maillage basée sur des produits de convolution est à mettre en lien entre les fonctions de forme des éléments finis. L'idée est de convoluer toutes les EDP avec une fonction noyau.

$$EDP * \psi(X) = \int_{\Omega} EDP(Y) \times \psi(X - Y) dV = 0 \quad \forall \psi \quad (2.23)$$

Le support du noyau est assimilable à un élément composé d'un ensemble de nœuds formé par les particules voisines [20]. La fonction de forme  $\psi(X)$  est alors le produit du volume de la particule avec la fonction noyau centrée au point d'intérêt  $\psi_i(X) = \omega_i W(X - X_i)$ . Sur une distribution régulière de particules, ces fonctions de forme permettent d'atteindre l'ordre 2 en précision et d'avoir la partition de l'unité. La méthode SPH est comme les volumes finis une *méthode de collocation*. Cependant, l'idée d'utiliser une formulation variationnelle dans cette méthode avec des fonctions de forme consistantes introduite par [37] a initié la création des méthodes sans maillage : EFG (Element Free Galerkin), DEM (Diffuse Element Method) et RKPM (Reproducing Kernel Particles Method).

Cette utilisation d'un produit de convolution sur l'ensemble des EDP est intéressante et peut être rapprochée de la SPH-ALE. En faisant ce produit sur (Eq 1.10) et en considérant comme connues les valeurs locales en  $i$  des dérivées temporelles et le terme source alors l'équation (Eq 1.13) peut être retrouvée (Eq 2.24) puis (Eq 2.25).

$$\left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \vec{\phi} dV + \int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot (\vec{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) dV - \int_{\Omega_i} \vec{S} dV \right] * \psi_i = 0 \quad (2.24)$$

La convolution permet donc uniquement de déterminer la valeur moyenne de la divergence des flux convectifs sur le volume  $\Omega_i$  de la particule  $i$  (Eq 2.25).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \vec{\phi} dV + \psi_i * \int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \cdot (\vec{G}(\vec{\phi}, \vec{v}_0)) dV = \int_{\Omega_i} \vec{S} dV \quad (2.25)$$

Le lien entre la méthode des éléments finis et la SPH-ALE est la notion d'estimation d'opérateurs spatiaux à partir de fonctions de forme sur un support compact. Le concept d'éléments portés par des noeuds peut aussi être comparé avec le support du noyau porté par des particules. L'élément serait alors le noyau et les particules les noeuds. La qualité des fonctions de forme détermine alors pleinement les propriétés de consistance et de précision des opérateurs spatiaux.

## 2.4 Conclusion

En comparant la méthode SPH-ALE avec les volumes finis, cette approche sans maillage de résolution des EDP peut être interprétée comme une *méthode de collocation* de type *vertex-centered* en raison de la moyenne sur les noeuds et de l'intégration des flux sur des faces reconstruites. Une ambiguïté existe quant à la définition topologique du volume d'intégration et donc des faces virtuelles ou réelles utilisées pour les échanges des flux.

L'utilisation de fonctions de forme afin d'évaluer un opérateur spatial permet également de rapprocher la méthode SPH-ALE avec des éléments finis. Une différence notable réside sur les qualités intrinsèques de ces fonctions de forme. En éléments finis, ces fonctions de forme possèdent au minimum la consistance d'ordre 0. En revanche les fonctions de forme utilisées pour la méthode SPH-ALE ne garantissent pas quelque soit la distribution des particules, de bonnes propriétés de consistance.

Tout comme pour la méthode des éléments finis, l'utilisation des reconstructions des champs pour les évaluations des états aux interfaces des problèmes de Riemann conduit à définir une matrice masse [34]. Cet aspect sera discuté ultérieurement.

Dans ce travail de thèse, les notions de raffinements en  $h$  ou  $p$  sont indispensables afin de comparer l'emploi des ordres élevés avec un raffinement spatial. L'augmentation du raffinement  $p$  en éléments finis s'accompagne d'un surcoût de calcul par introduction des degrés de liberté supplémentaires. Ce n'est pas le cas pour la méthode SPH-ALE qui dispose déjà d'un nombre considérable de particules dans les voisinages de chacune des particules. Le  $p$ -raffinement peut donc à moindre coût, apporter une réelle amélioration de précision.

## Chapitre 3

# Approximation particulaire et Procédures d'adaptation

La méthode SPH-ALE est une méthode de résolution des équations hyperboliques sur un support de points à forte mobilité intrinsèque. Les particules sont souvent mobiles soit pour des raisons de distributions géométriques (mouvement ALE), soit en raison de la physique (mouvement Lagrangien). Ceci intervient en interaction avec des géométries complexes en mouvement (rotation, translation). La simulation de jets impactant une turbine Pelton en opération est par essence très représentative de la forte mobilité des points de calcul au cours du temps. Les techniques de reconstruction de champ ou d'évaluation d'opérateur doivent donc être robustes et supporter des configurations géométriques de points désordonnées et des zones de sous-discrétisation.

Une estimation précise des dérivées spatiales est généralement assez délicate et difficile à partir d'informations de nature discrètes. Cela nécessite un échantillonnage local extrêmement poussé de la fonction  $\phi$ , comme cela est illustré sur la figure (Fig 3.1). Un tel échantillonnage n'est pas toujours disponible pour des raisons évidentes de coût ou encore de déplacement des particules.

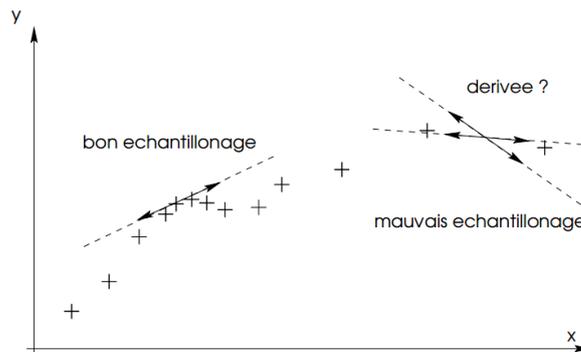


FIGURE 3.1 – Calcul d'une dérivée à partir d'un ensemble discret, local de données.

Les moindres carrés mobiles (MLS) sont une technique très robuste utilisée dans de nombreuses disciplines telles que le traitement du signal ou les statistiques. Également très populaire dans la communauté de la simulation numérique avec maillage [34] et sans maillage [8] [9] pour ses bonnes propriétés de reproductibilité et de stabilité, cette méthode numérique d'approximation est celle qui sera privilégiée dans notre travail de thèse. Des travaux récents exploitent cette méthode pour atteindre des ordres en convergence spatiale jusqu'à 6 pour des points de calculs éparpillés, immobiles et sans maillage sous-jacent [58].

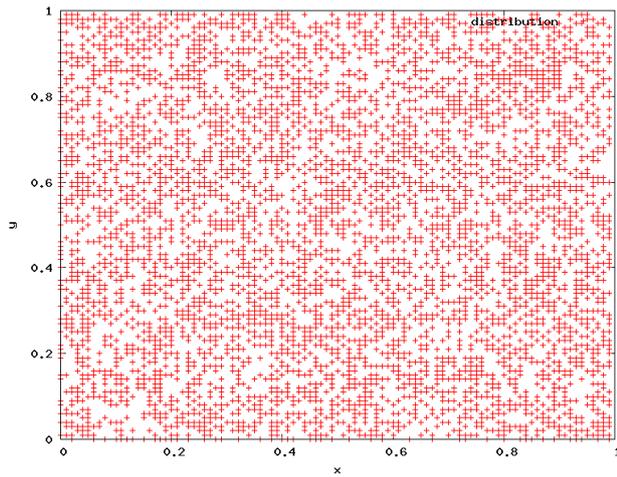
### 3.1 Construction d'un problème aux moindres carrés

On considère un champ  $\phi$  plusieurs fois continûment dérivable dans un espace  $\Omega$  de dimension fini. On impose une certaine régularité à notre champ  $\phi$ . Ce champ est discrétisé par un échantillon de  $j$ -données positionnées en  $X_j$  autour de la position d'intérêt  $X_i$  dans  $\Omega$ . La principale propriété de la méthode des moindres carrés est d'être capable de reproduire exactement un polynôme d'ordre  $p$ -donné (Eq 3.1) passant au travers des données éparpillés  $\phi_j$ . Cette méthode est  $p$ -consistante.

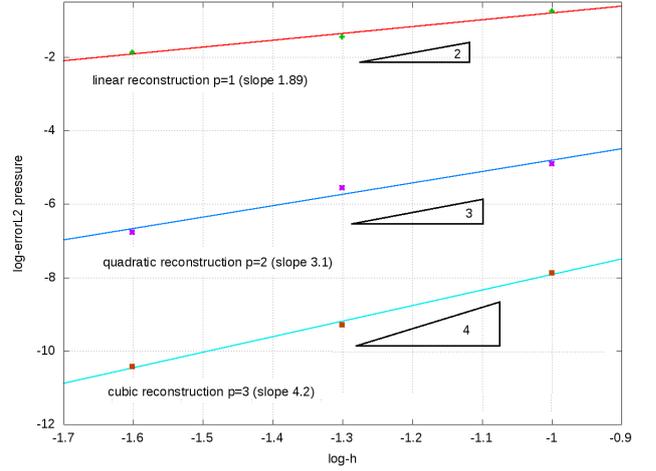
$$P_i(X) = \sum_{l=0}^p \alpha_i^l \Delta \vec{X}_i^l \quad (3.1)$$

avec  $\Delta \vec{X}_i = \vec{X} - \vec{X}_i$  la variation de la position spatiale et  $\alpha_i^l$  les coefficients polynomiaux de  $P_i$ .

Une illustration de la robustesse de cette approche est possible à travers la reconstruction de la condition initiale régulière du champ de pression des tourbillons de Taylor-Green (Annexe A) sur trois niveaux de raffinement de taille de particules, elles-mêmes distribuées aléatoirement (Fig 3.2a). Malgré le caractère aléatoire de la position des particules et la forte anisotropie des voisinages, les pentes de convergence spatiale des reconstructions linéaires, quadratiques et cubiques sont très proches de la précision théorique (Fig 3.2b).



(a) Échantillon aléatoire de particules



(b) Convergence spatiale basée sur une erreur  $L^2$  sur la pression

FIGURE 3.2 – Reconstruction MLS de la condition initiale des tourbillons de Taylor-Green sur une distribution aléatoire de particules

Les coefficients polynomiaux  $\alpha_i^l$  du polynôme centré sur la position  $X_i$  (Eq 3.1) sont à projeter sur une base polynomiale  $\varphi$  de taille  $m$  dépendant de l'ordre de la reconstruction (Tab 3.1).

Taille $m$ de la base	$d$ dimension du problème
$p$	1D
$\frac{(p+1)(p+2)}{2}$	2D
$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}$	3D

TABLE 3.1 – Taille  $m$  de la base polynomiale en fonction de l'ordre  $p$  de reconstruction choisie

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser l'erreur  $L^2$  entre les données  $\phi_j$  et le polynôme  $P_i(X)$  i.e dans une version discrète à minimiser la fonctionnelle de l'équation (Eq 3.2).

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} [\phi_j - P_i(X_j)]^2 \quad (3.2)$$

La fonctionnelle  $J_i$  possède un support compact isotrope  $V_i$  imposé par la fonction de pondération  $W_{ij}$  centrée sur la position de la particule d'intérêt  $i$ . Cela confère le caractère local à la méthode. En dérivant la fonctionnelle (Eq 3.2), l'équation suivante apparaît :

$$\partial_A J(A) = \bar{W}(X) \bar{C} \vec{A} - \bar{W}(X) \Delta \phi = 0 \quad (3.3)$$

avec le vecteur  $\vec{A}$  qui contient les inconnues  $\alpha_i^l$  associé au champ  $\phi$ . Le vecteur  $\Delta \phi$  est composé de la différence des états i.e.  $\phi_j - \phi_i$ .

La matrice rectangulaire  $\bar{\bar{C}}$  contient l'ensemble des développements dans la base polynômiale  $\varphi$  de taille  $m$  choisie pour l'ensemble des  $N$ -voisins dans  $V_i$ . La matrice  $\bar{W}(X)$  contient la pondération pour chacune des contributions.

$$\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \varphi_1(X_1) & \dots & \varphi_m(X_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(X_N) & \dots & \varphi_m(X_N) \end{pmatrix}_{N \times m} \quad \text{et} \quad \bar{W}(X) = \begin{pmatrix} W_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_N(X) \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (3.4)$$

En multipliant par la transposée de la matrice  $\bar{\bar{C}}$ , les équations dites normales apparaissent et peuvent être résolues par une méthode de résolution matricielle (Eq 3.5).

$$\bar{\bar{M}}\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \quad (3.5)$$

La matrice des moindres carrés est  $\bar{\bar{M}} = \bar{\bar{C}}^T \bar{W}(X) \bar{\bar{C}}$  et le membre de droite est  $\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{C}}^T \bar{W}(X) \Delta\phi$ . La matrice  $\bar{\bar{M}}$  est symétrique, positive et de taille  $m \times m$ , elle est parfois appelée matrice des moments. Cette matrice est purement géométrique. Elle ne contient aucune information à propos des données du champ  $\phi$  ce qui la rend réutilisable pour d'autres données placées aux mêmes positions spatiales  $X_j$ . Pour des raisons de stabilité, une approche centrée réduite est privilégiée dans l'évaluation des coefficients polynomiaux [48] :  $\Delta_i \bar{X} = (\bar{X} - \bar{X}_i)/h_i$ .

*Remarque :*

Les moindres carrés mobiles (MLS) et la méthode Reproducing Kernel Particles Methods (RKPM) ne diffèrent que par la définition du poids de quadrature ( $\omega_j = 1$  dans MLS). Dans le formalisme SPH-ALE, les fonctions de pondération  $W_{ij}$  ont pour dimension l'inverse d'un volume c'est la raison pour laquelle, il est nécessaire de les multiplier par un volume afin d'adimensionnaliser le système. Il serait donc plus rigoureux de parler de reconstruction RKPM.

## 3.2 Résolution du problème aux moindres carrés

La résolution du système linéaire (Eq 3.5) doit être faite afin d'évaluer les coefficients polynomiaux associés à la corrélation des données du champ  $\phi$ . En annexe B, différentes méthodes de résolution matricielle sont proposées. Il est retenu la méthode de décomposition QR pour des raisons de coût et de détection des configurations géométriques problématiques. En effet la matrice des moindres carrés  $\bar{\bar{M}}$  est ainsi décomposée en deux sous-matrices  $\bar{R}$  et  $\bar{Q}$ . La matrice  $\bar{Q}$  contient une base associée à la discrétisation et  $\bar{R}$  la projection de l'ancienne base sur la nouvelle. Avec ces informations, les configurations géométriques problématiques sont détectées et gérées avec des procédures exposées dans les sections qui suivent. La figure (Fig 3.3) présente différents types de voisinages que l'on peut rencontrer pouvant poser ou non des difficultés dans l'inversion du système matriciel des moindres carrés. Le tableau qui suit (Tab 3.2) expose les valeurs du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés obtenue pour une approximation linéaire en fonction des configurations géométriques présentées à la figure (Fig 3.3). Il apparaît que pour des configurations géométriques de particules présentant des voisinages pauvres en nombre de particule, le déterminant diminue singulièrement tandis que le conditionnement augmente.

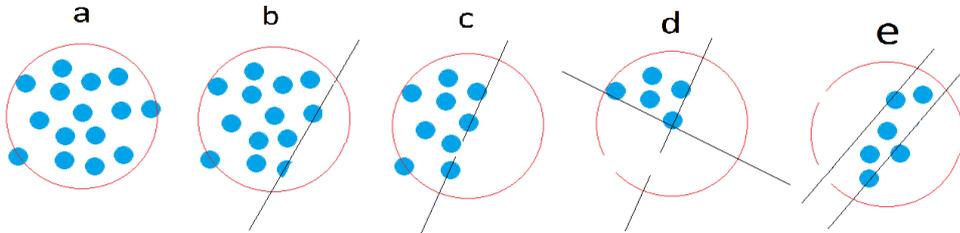


FIGURE 3.3 – Présentation de différentes configurations du voisinage

Configuration 2D	a	b	c	d	e
nombre de voisins	20	17	10	5	7
conditionnement	3	3.2	8	11	100
déterminant	0.1	0.09	0.03	0.09	0.002

TABLE 3.2 – Évolution du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés associés à une reconstruction linéaire en fonction de la disposition du voisinage (nombre de voisins indicatif).

### 3.3 Adaptabilité en ordre : p-dégradation

La première technique d'adaptation nommée  $p$ -adaptation est directement liée au nombre de particules dans le stencil qui rappelons-le est de taille  $h$  constante. Proche des zones de troncature, ce voisinage peut s'appauvrir de moitié. Ce fait conduit à dégrader fortement les propriétés de la matrice des reconstructions polynomiales  $\bar{M}$ . Le conditionnement et le déterminant varient soudainement vers des valeurs parfois extrêmes (Tab 3.2) pour une reconstruction linéaire et (Tab 3.3) pour une reconstruction quadratique. Le tableau (Tab 3.3) permet de voir que la matrice des moments associée à un ordre quadratique  $p=2$  est beaucoup plus sensible à la troncature du stencil.

Classiquement, le nombre de voisins associé à une reconstruction d'ordre  $p$  doit être au moins supérieur à la taille de la base polynomiale  $m$  [37] [20]. En pratique, 20 à 30% de particules en plus sont prises pour assurer la stabilité de la méthode. Car en présence d'un nombre insuffisant de points, la matrice se dégrade et la méthode devient instable.

Configuration	a	b	c	d	e
nombre de voisins	20	17	10	5	7
conditionnement	3	3.2	51	67	400
déterminant	0.1	0.09	0.001	0.003	0.0005

TABLE 3.3 – Évolution du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés associés à une reconstruction quadratique en fonction de la disposition du voisinage (nombre de voisins indicatif).

Pour pallier à cela, un choix possible est de dégrader l'ordre initial d'un ordre : (*variable rank MLS* dans [20]). La  $p$ -dégradation conduit dans le cas d'une simulation initialement avec des moindres carrés quadratiques à utiliser des moindres carrés linéaires dans ces zones tronquées.

#### Stratégie du point moyen

Toutefois pour retarder la  $p$ -dégradation, il est possible de modifier le point central de l'évaluation des moindres carrés. En effet la matrice est centrée sur le point d'intérêt  $X_i$ . Ce point se trouve en cas de troncature sur le bord du support et non au centre du nuage de particules (Fig 3.4). Pour pallier à cela, le barycentre géométrique de l'échantillon de particules pondérées par  $\frac{\omega_j}{\sum_{j \in V_i} \omega_j}$  peut être évalué classiquement avec l'équation (Eq 3.6) et servir de centre pour le problème aux moindres carrés. L'hypothèse forte sous-jacente est de postuler que les coefficients polynomiaux  $\alpha_i^l$  soient constants au sein du voisinage  $V_i$ .



FIGURE 3.4 – Schéma de la procédure de décalage par un barycentre géométrique (vert : particule d'intérêt en  $X_i$ , rouge : barycentre géométrique  $X_G$ )

$$\vec{X}_G = \frac{\sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{X}_j}{\sum_{j \in V_i} \omega_j} \quad (3.6)$$

Configuration	a	b	c	d	e
nombre de voisins	20	17	10	5	7
conditionnement	3	3.2	9	43	400
déterminant	0.1	0.09	0.03	0.07	0.0005

TABLE 3.4 – Évolution du conditionnement et du déterminant de la matrice des moindres carrés associés à une reconstruction quadratique centrée sur le centre de gravité en fonction de la disposition du voisinage

Le tableau (Tab 3.4) présente le conditionnement et le déterminant de la matrice associés à des moindres carrés quadratiques centrés sur le barycentre géométrique. Il apparaît que les situations pathologiques restent présentes mais les symptômes sont un peu atténués.

### 3.4 Adaptabilité en ordre : p-adaptabilité

La seconde procédure d'adaptation en contraste avec la précédente n'est pas une procédure de dégradation de l'ordre  $p$  afin de stabiliser la méthode mais bien au contraire d'enrichissement local de ce même ordre  $p$ . Le critère de déclenchement de cet enrichissement est basé sur l'erreur locale  $\epsilon_i$  en norme discrète  $L^2$  de l'approximation du champ  $\phi$  calculée comme suit :

$$\epsilon_i^2 = \frac{\sum_{j \in V_i} \omega_j (\phi_j - P_i(X_j))^2}{\sum_{j \in V_i} \omega_j \phi_j^2} \quad (3.7)$$

Il est sous entendu que dans les régions où l'écoulement crée de forts gradients, l'approximation linéaire n'est pas suffisante pour approcher avec précision les valeurs du champ physique. En fonction de la valeur de l'erreur  $\epsilon_i$ , il est possible d'augmenter l'ordre  $p$  du polynôme  $P_i$ . Une erreur seuil empirique  $\epsilon_{max}$  pilote le passage ou non à des ordres supérieurs. A travers l'expérience numérique,  $\epsilon_{max} = 10^{-4}$  est une valeur retenue. Cette approche permet de réduire le coût des ordres élevés et de ne monter en ordre que là où l'écoulement le nécessite. La  $p$ -adaptation est historiquement issue de la méthode des éléments finis [4].

### 3.5 Adaptabilité en espace : d-adaptabilité

Pour augmenter les possibilités d'utilisation de la méthode de reconstruction, une adaptation à la discrétisation spatiale est proposée. En effet il faut bien saisir que cette procédure est vraiment un problème de discrétisation spatiale. Il est possible de rencontrer au cours de simulations avec des particules mobiles, des configurations de voisinages conduisant à rendre la matrice des moindres carrées non-inversible. Le cas notamment de particules préférentiellement alignées le long d'une direction en 2D ou 3D d'espace de calcul est problématique (Fig 3.3). De même, en 3D, une fine nappe d'eau sous-discrétisée, uniquement représentée par une couche de particules plane rend les reconstructions 3D impossibles.

Pour lutter contre cela, des auteurs ont proposés d'adapter le support du noyau ( $h$ -adaptation) avec des techniques sophistiquées de déformation du support [27]. Peu utilisée en pratique dans la communauté SPH, cette technique n'est pas exploitée dans notre étude où une autre approche est tentée. D'autre part, d'un point de vue plus opérationnel, la gestion de la liste de voisins est plus commode en ne déformant pas la taille du support. C'est pour cette raison qu'une approche basée sur un changement de base a été proposée ( $d$ -adaptation). Ce problème existe aussi dans des méthodes à maillage lorsque les mailles sont trop déformées par un mouvement ALE. Cette situation pathologique rend le maillage non-admissible.

L'idée sous-jacente de la  $d$ -adaptation s'inspire de l'analyse par composante principale (PCA) méthode présenté en annexe C. Cette méthode initialement employée en analyse statistique permet au travers d'une décomposition QR de déterminer les directions principales discrétisées par le nuage de données (ici les positions spatiales des particules). En effet on peut interpréter le problème aux moindres carrés sur les positions des particules voisines comme une recherche de corrélation entre les directions discrétisées. Cela permet de distinguer

les directions bien discrétisées de celles qui le sont moins.

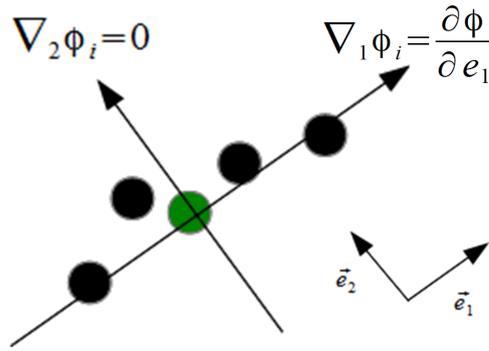
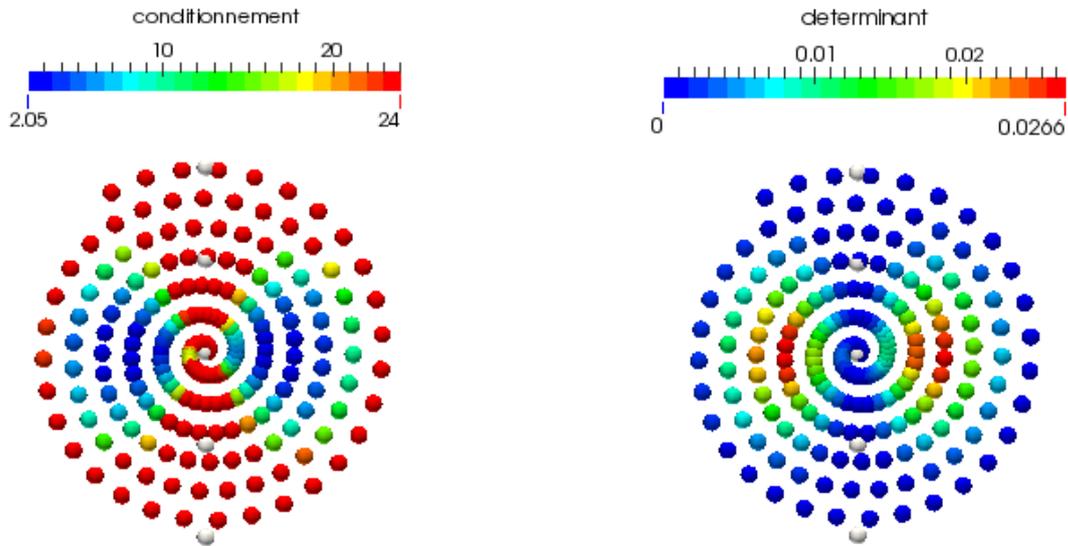


FIGURE 3.5 – Configuration pathologique de particules alignées en 2D

Une décomposition QR est donc effectuée sur la matrice des moments  $\bar{M}$ . La matrice  $\bar{M} = \bar{Q}\bar{R}$  se décompose alors en une matrice  $\bar{Q}$  orthogonale, dense contenant les vecteurs de la base principale ( $\bar{Q}^T\bar{Q} = \bar{I}$ ) et une matrice  $\bar{R}$  triangulaire supérieure correspondant aux projections de l'ancienne base sur la nouvelle.

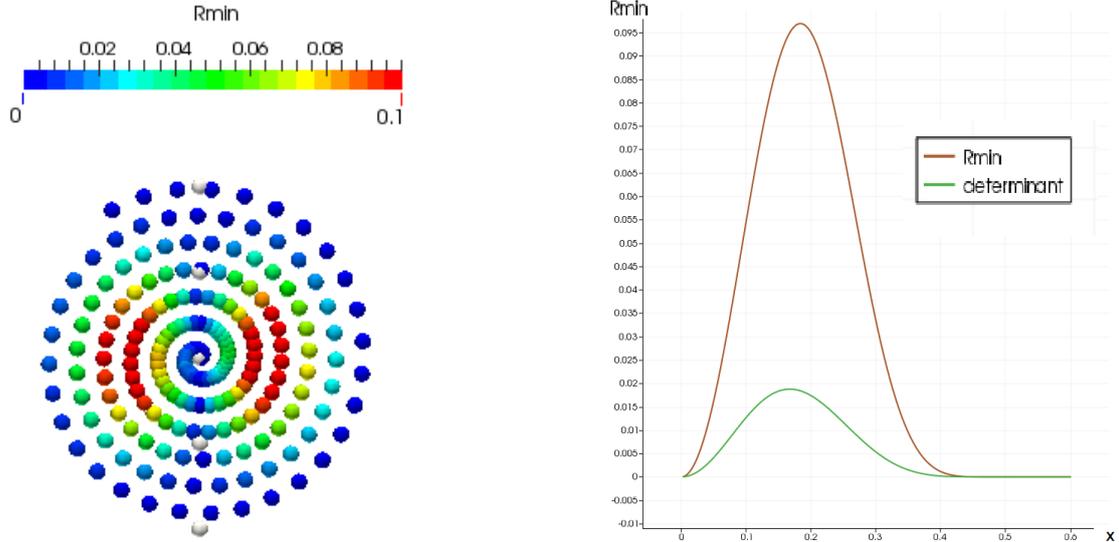


(a) Évolution du conditionnement de la matrice des MLS      (b) Évolution du déterminant de la matrice des MLS

FIGURE 3.6 – Évolution de critères matriciels sur la matrice des MLS linéaire en fonction de la position d'une particule (champ coloré) autour d'une colonne de particules (en blanc)

L'évolution de la matrice des moindres carrés dans des configurations géométriques pathologiques doit être analysée. La configuration (e) de la figure (Fig 3.3) est étudiée. La matrice des MLS pour une reconstruction linéaire est calculée pour une particule au centre d'une colonne de particules en 2D. Au sein du voisinage, une autre particule se déplace en gravitant autour du point d'intérêt.

Sur les figures (Fig 3.6a, 3.6b et 3.7a), les positions successives de la particule qui gravite, sont colorées par respectivement le conditionnement, le déterminant de la matrice et la valeur du minimum des termes diagonaux de  $\bar{R}$  notée  $R_{min}$ . Il est possible de voir que le déterminant de la matrice chute dramatiquement dès que la particule qui gravite est dans la direction déjà discrétisée par la colonne de particules. De façon synchrone, le conditionnement augmente fortement dans ces zones. Le minimum des termes diagonaux de la matrice  $\bar{R}$  est bien corrélé avec le comportement de la matrice. Le minimum des termes diagonaux décrit en effet correctement les régions pathologiques.



(a) Évolution du minimum des termes diagonaux  $R_{ii}$  de la matrice  $R$  (b) Évolution du déterminant et du minimum des termes diagonaux  $R_{ii}$

FIGURE 3.7 – Évolution de critères matriciels en fonction de la position d’une particule autour d’une colonne de particules

Une coupe horizontale des figures (Fig 3.6b et 3.7a) centrée sur la particule d’intérêt est présentée sur la figure (Fig 3.7b). Sur cette dernière figure, l’évolution de la valeur de  $R_{min}$  et du déterminant de la matrice des moments en fonction de la position horizontale est exposée. La valeur de  $R_{min}$  augmente puis diminue simultanément avec le déterminant. L’évolution du conditionnement est l’inverse du déterminant. En effet la particule au départ est trop proche de la colonne ce qui correspond à la discrétisation d’une seule direction. En s’éloignant, elle permet de représenter une autre direction de l’espace. Ceci entraîne l’augmentation de la valeur du déterminant entraînant l’inverse du conditionnement. En s’éloignant au delà d’une taille de particule, la contribution de la particule mobile à travers la fonction noyau devient trop faible. Le déterminant et le minimum  $R_{min}$  chutent alors tandis que le conditionnement croît.

L’apparition de termes diagonaux de  $\bar{R}$  de valeur très faible signale donc un problème de représentation d’une direction spatiale. Cela s’interprète statistiquement comme l’impossibilité de corrélérer les données. Pour les besoins de l’implémentation et son utilisation, un critère numérique empirique définit un seuil de tolérance pour  $R_{min}$  au delà duquel on considère que l’échantillon de particules représente correctement l’espace. Le tableau (Tab 4.1) montre les valeurs choisies comme seuils pour  $R_{min}$  pour différents déplacements de particule et différentes reconstructions.

De nouveau, la matrice des moindres carrés pour une reconstruction linéaire est évaluée pour une particule d’intérêt au milieu d’une colonne de particules, en rotation. Afin de bien comprendre ce qui compose la matrice  $\bar{Q}$  en configuration (e), les deux vecteurs  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  de  $\bar{Q}$  sont exposés dans le tableau (Tab 3.5).

En tournant autour de son centre, le segment formé par les particules modifie son angle avec l’axe des abscisses. Dans le tableau (Tab 3.5), les vecteurs contenus dans la matrice  $\bar{Q}$  sont présentés. Ils forment une base secondaire résultant de la rotation dans le référentiel initial. Il est possible de noter  $R' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la nouvelle base dans le référentiel initial noté  $R_0$ .

Angle (degrés)	0	30	45	60	90
$\vec{e}_1$	(1,0)	(0.86; 0.5)	(0.7; 0.7)	(0.5; 0.86)	(0;1)
$\vec{e}_2$	(0,1)	(-0.5; 0.86)	(-0.7; 0.7)	(-0.86; 0.5)	(1,0)

TABLE 3.5 – Vecteurs contenus dans la matrice  $\bar{Q}$  en fonction de la position angulaire de la colonne de particules

Le concept de  $d$ -adaptation est donc de projeter le problème global dans une base plus petite déterminée avec une décomposition QR, de le résoudre et ensuite de projeter le résultat dans la base initiale.

L'exemple des particules 2D alignées le long d'un axe oblique  $\vec{e}_1$  peut être pris (Fig 3.5). Il est impossible de déterminer le gradient dans la base initiale 2D par manque d'information le long de  $\vec{e}_2$ .

Comme le gradient physique  $\vec{\nabla}\phi$  est invariant par changement de base, il est possible d'écrire :  $\vec{\nabla}\phi_{R'} = \bar{K}^T \vec{\nabla}\phi_{R_0}$  avec  $\bar{K}$  est à la matrice de changement de base telle que  $\bar{K} = \bar{Q}$ . La matrice  $\bar{Q}$  provient de la décomposition QR. La matrice des MLS devient :

$$\bar{M}_{R'} = \bar{K}^T \bar{M}_{R_0} \bar{K} \quad (3.8)$$

et le membre de droite :

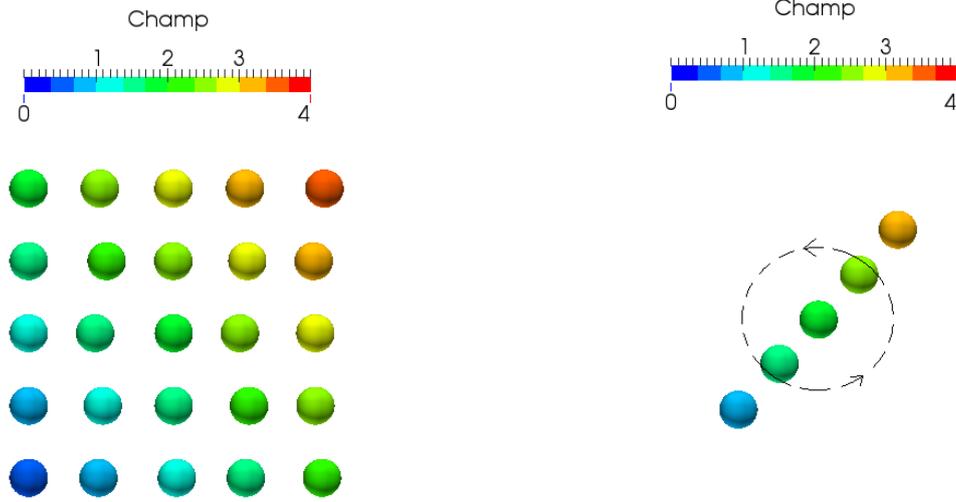
$$\vec{B}_{R'} = \bar{K}^T \vec{B}_{R_0} \quad (3.9)$$

Le problème aux moindres carrés est résolu le long de l'axe 1D formant une base, ici  $\vec{e}_1$  tel que :

$$\bar{M}_{R'} \vec{\nabla}\phi_{R'} = \vec{B}_{R'} \quad (3.10)$$

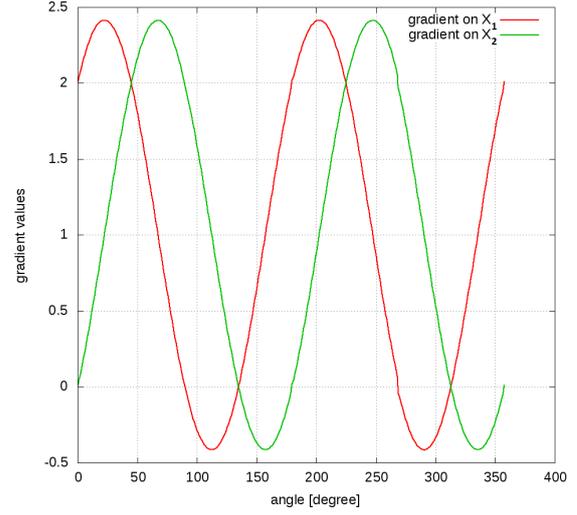
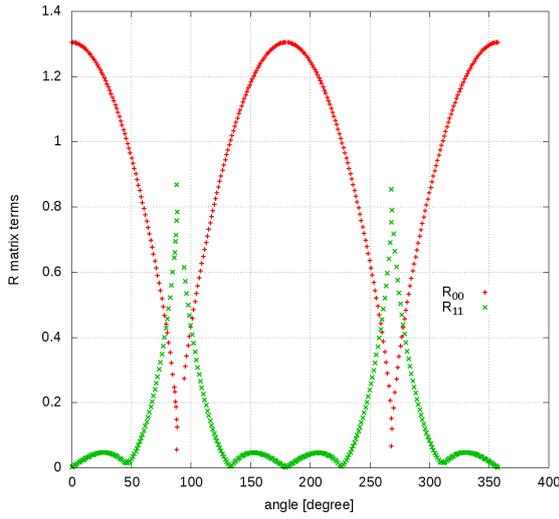
La résolution du système ci-dessus donne le gradient dans la direction discrétisée. Le gradient normal à celle-ci est considéré comme nul. En multipliant le résultat par la matrice de passage  $\bar{K}$ , le gradient 2D dans la base initiale est obtenu  $\vec{\nabla}\phi_{R_0}$ .

Afin de valider cette approche  $d$ -adaptative, un champ scalaire bilinéaire  $f(X_1, X_2) = 2X_1 + 2X_2$  est placé sur un ensemble de particules en 2D. Un alignement de particules est mis en rotation au cours du temps. Le gradient théorique est connu :  $\vec{\nabla}f(X_1, X_2) = (2; 2)$ . Les figures (Fig 3.8a et 3.8b) présentent respectivement le champ sur l'ensemble des points et la colonne de fluide en rotation après éloignement des particules aux alentours. Au cours de la rotation de la colonne de particules, le nombre de voisins est invariant, égal à 4. Les calculs d'extrapolation et d'évaluation des gradients se font au niveau de la particule au centre de la colonne.



(a) Champ bilinéaire plaqué sur l'ensemble de particules (b) Champ bilinéaire sur la colonne de particules pendant la rotation

FIGURE 3.8 – Cas test pour la  $d$ -adaptation



(a) Évolution des coefficients diagonaux de la matrice  $\bar{R}$  (b) Évolution des valeurs des composantes du gradient approché

FIGURE 3.9 – Évolution des coefficients diagonaux  $\bar{R}$  et des valeurs des gradients au cours de la rotation de la colonne

La figure (Fig 3.9a) montre les valeurs prises par les coefficients diagonaux de la matrice  $\bar{R}$  calculée au centre de la colonne au cours de la rotation. La valeur  $R_{00}$  est le premier coefficient diagonal, et  $R_{11}$  le second. Pour rappel, le test est en 2D sur une matrice correspondant à des reconstructions linéaires, il y a donc deux coefficients diagonaux. Le comportement des coefficients diagonaux est périodique comme il était possible de le supposer et les valeurs sont liées. En effet pour un angle plat, le coefficient sur la première composante principale est maximal alors que sur la seconde il est nul. La rotation débutant la tendance s'inverse périodiquement. La figure (Fig 3.9b) présente le résultat sur le gradient approché avec la procédure de  $d$ -adaptation (calcul 1D et projection 2D). Il est facile de remarquer que pour les angles plats (0 et 180 degrés), le gradient approché vaut  $\nabla^h f(X_1, X_2) = (2; 0)$  ce qui est attendu. Pour les angles droits (90 et 270 degrés), il vaut  $\nabla^h f(X_1, X_2) = (0; 2)$ . Dans les cas purement obliques, le gradient vaut  $\nabla^h f(X_1, X_2) = (2; 2)$  pour 45 degrés et  $\nabla^h f(X_1, X_2) = (0; 0)$  pour -45 degrés. Ce cas test valide l'idée de la  $d$ -adaptation.

## Deuxième partie

### Montée en ordre de la méthode SPH-ALE

Cette partie traite du cœur du sujet de ce travail de thèse, à savoir la montée en ordre de la méthode SPH-ALE. Comme il a pu être vu dans la partie précédente, la méthode SPH-ALE est une méthode empruntant des outils des méthodes sans maillage et des outils provenant des volumes finis. C'est donc tout naturellement que le travail qui va suivre s'inspire des outils déjà développés dans ces différentes communautés.

Une analyse des reconstructions utilisées dans les flux numériques est entreprise dans une première section, comparant la méthodologie de reconstruction SPH proposée par Vila avec une stratégie de reconstruction basée sur les moindres carrés MLS. Un travail sur l'adaptabilité de la méthode de reconstruction est proposé afin de rendre ces dernières efficaces et stables quelque soient les configurations géométriques du voisinage.

Un second chapitre traitera de la sommation des flux, i.e dans les lois de conservation, de l'approximation de l'opérateur de divergence dans un contexte sans maillage. Un pont sera fait avec la méthode des volumes finis. De nouveau une approche basée sur une reconstruction polynomiale de fonctions de forme sera proposée pour améliorer l'opérateur discret.

Pour finir ce travail et visualiser la contribution de ce travail de thèse, des applications industrielles seront simulées. Le premier cas d'application est un écoulement interne au sein d'une cascade de profils dont la première colonne est à calage variable, et la seconde colonne est animé d'un mouvement constant. L'intérêt de ce cas est qu'il valide des fonctionnalités qui seront nécessaires à la simulation du démarrage d'une turbine hydraulique Francis. Le second cas d'application est une simulation d'écoulement externe avec une surface libre lors du fonctionnement d'une turbine Pelton en 3D.

Cette section a fait l'objet de plusieurs publications et présentations orales : ECCOMAS Young Investigator Conference 2013 pour le travail 1D [49], European Turbomachine Conférence 2015 [52] et SPHERIC 2014-2015 [50], [51] pour le travail en 2D/3D.

## Chapitre 4

# Flux numérique d'ordre élevé

### 4.1 Stratégie de reconstruction d'ordre supérieur

Jusqu'ici, la partie précédente a permis de présenter dans son ensemble le schéma SPH-ALE sous sa forme standard. Ce schéma est basé sur une approximation particulière SPH pouvant, dans certaines configurations géométriques, générer une quantité importante d'erreur. Cette approximation SPH nécessite un nombre important de points de quadrature lié au ratio  $\frac{h}{\Delta x}$  qu'il faut cependant limiter en pratique afin de minimiser les coûts de calcul. Précision et coût de calcul sont antagonistes et conduisent à ce travail de recherche.

La montée en ordre du schéma SPH-ALE de par son utilisation de solveur de Riemann est très inspirée de ce qui se fait déjà pour la méthode des volumes finis. En 1977, van Leer expose la stratégie MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Law) pour obtenir un schéma volume fini d'ordre 2 concurrençant ainsi le schéma de Godunov classiquement d'ordre 1. L'idée de van Leer est de supposer que les variables d'état  $\phi$  ne sont plus constantes dans chaque cellule mais varient linéairement dans la cellule. L'augmentation de la précision à l'interface, siège du problème de Riemann réduit les différences des états utilisés. Cette technique permet de diminuer ainsi la dissipation numérique dans le problème de Riemann [32]. Vila [61] proposa d'utiliser cette approche MUSCL au sien de la méthode SPH-ALE en prenant des gradients du champ  $\phi$  estimés par une approximation SPH. En introduisant un développement de Taylor dans ces opérateurs, il est facile de montrer leur manque de précision et de consistance sur un support de particules éparpillées [41].

L'approche MUSCL nécessite donc de reconstruire des valeurs à l'interface en partant des valeurs moyennes discrètes  $\phi_i$  que l'on peut prendre au centre de la cellule. Cette extrapolation du champ peut s'écrire sous la forme d'un développement de Taylor au second ordre ( $p=2$ ) et permet de mettre en évidence le gradient du champ. Au sein même de la méthode des volumes finis, l'évaluation des gradients est variée : évaluation de Green-Gauss [2], moindres carrés [7] ou encore ENO-WENO [31]. L'évaluation des gradients de Green-Gauss sous-entend la connaissance de la topologie en utilisant le passage d'une intégration volumique à surfacique. L'approche sans-maillage de la méthode SPH-ALE ne permet pas d'utiliser cette technique. L'approche ENO-WENO est intéressante et permet notamment de s'affranchir d'une technique de limitation de pente souvent difficile à généraliser. Cette approche ENO-WENO est actuellement utilisée pour la méthode SPH-ALE dans les travaux de Avenasi [3]. Cette approche bien établie dans ce travail nécessite différentes évaluations des gradients selon différentes directions pour chacune des particules ce qui pour des raisons de complexités et de coût n'a pas été privilégié dans ce travail.

Plus proche de la notion de sans-maillage les moindres carrés mobiles (MLS : Moving Least Squares) permettent d'obtenir des reconstructions d'ordres élevés ( $p>2$ ) d'ordre arbitraire indépendamment de la qualité du maillage. Les MLS initiés par Lancaster et Salkauskas [35] ont été rapidement appliqués à la mécanique avec Belystcko et al [37]. Plus récemment, les travaux sur la méthode des volumes finis de Khelladi [15] [34] appliquée aux fluides compressibles montrent l'intérêt de cette technique de reconstruction pour l'augmentation en ordre. Ces reconstructions sont employées dans notre travail de thèse soit dans une approche à base complète [37], soit dans une approche récursive [30]. Les reconstructions MLS sont définies de manière locale à travers l'emploi d'une fonction de pondération. La taille de l'échantillon de particules, support de la méthode de reconstruction dépend donc de ce choix. La fonction de pondération Wendland C4 choisie dans nos études, est une fonction noyau très classique pour la SPH. A ce propos, un travail précis sur la diffusion et dispersion créée par le choix des fonctions de pondération dans les reconstructions par les moindres carrés mobiles a été proposé par [34]. Ces reconstructions sont combinées avec une limitation inspirée de la méthode des volumes finis en maillage non-structuré proposée par Barth-Jespersen [6] et Venkatakrishnan [60]. Il est important de remarquer que la montée en ordre dans les méthodes des volumes finis et de la SPH-ALE n'implique pas d'augmenter le nombre

de degré de liberté contrairement à la méthode des éléments finis [31] ou Galerkin discontinu [46]. Cela a pour avantage de limiter l'augmentation du coût de calcul associé. En effet, le nombre de voisins est déjà conséquent afin de garantir une certaine précision minimale à la méthode SPH.

Dans la suite de ce travail, seules les reconstructions linéaires et quadratiques sont considérées afin de présenter la preuve du principe. Les sections qui suivent présentent brièvement la méthode des moindres carrés mobiles appliquée à la construction d'une extrapolation des champs afin d'évaluer les valeurs aux interfaces des problèmes de Riemann. Une section consacrée à des procédures d'adaptation est ensuite exposée afin de rendre ces reconstructions robustes malgré la mobilité des particules. A la suite de ce chapitre, une discussion autour de différents cas tests présentés en annexe A est proposée.

La contribution originale de ce travail de thèse est la mise en œuvre de schémas de flux au minimum d'ordre 2 dans ce formalisme sans-maillage à voisinage mobile. Cette amélioration des flux est possible grâce à un travail de recherche axé sur des critères de stabilité géométriques liés aux configurations locales variables en temps et en espace des particules. Le travail de cette section a fait l'objet de présentations orales et de publications pour des conférences européennes à ECCOMAS YIC 2013, SPHERIC 2014 [50], SPHERIC 2015 [51] et European Turbomachine Conference 2015 [52].

#### 4.1.1 Construction du problème aux moindres carrés complet

Pour l'ensemble de l'étude qui suit le champ  $\phi$  est un champ  $n$ -fois continûment dérivable dans un espace  $V$  de dimension fini. Une certaine régularité est alors imposée. Ce champ  $\phi$  est dans les simulations d'écoulement fluide soit la masse volumique, soit la vitesse du fluide.

La principale propriété de la reconstruction par les moindres carrés est de reproduire exactement un polynôme d'ordre  $p$ -donné pour des données éparpillées. Cette propriété nous intéresse pour disposer d'une extrapolation du champ physique de qualité à l'interface du problème de Riemann. L'extrapolation du champ partant du centroïde de la particule vers la position de l'interface peut s'écrire sous forme d'un développement de Taylor d'ordre  $p$ .

$$\phi_i^h(X) = \phi_i + \Delta \vec{X}_i^T \vec{\nabla}_i \phi + O(\Delta \vec{X}_i) \text{ pour } p = 1 \quad (4.1)$$

avec  $\Delta \vec{X}_i = X - X_i$  la variation de position spatiale.

$$\phi_i^h(X) = \phi_i + \Delta \vec{X}_i^T \vec{\nabla}_i \phi + \frac{1}{2} \Delta \vec{X}_i^T \bar{\bar{H}}_i \Delta \vec{X}_i + O(\Delta \vec{X}_i^2) \text{ pour } p = 2 \quad (4.2)$$

L'équation (Eq 4.1) correspond à une extrapolation linéaire et l'équation (Eq 4.2) à une extrapolation quadratique. Un développement de Taylor-Young d'ordre  $p = 2$  i.e une expansion quadratique du champ  $\phi$  fait apparaître le gradient  $\vec{\nabla}_i \phi$  et la matrice Hessienne  $\bar{\bar{H}}_i$  de ce champ calculés au point  $X_i$  centre de la particule  $i$  (Eq 4.2). Ces dérivées d'ordre 1 et 2 sont inconnues et sont à déterminer avec les moindres carrés. Pour un problème 2D les bases polynomiales sont  $\varphi = [X_{,1}, X_{,2}]^T$  pour  $p = 1$  et  $\varphi = [X_{,1}, X_{,2}, X_{,1}^2, X_{,1}X_{,2}, X_{,2}^2]^T$  pour  $p = 2$ . Les bases sont de tailles  $m - 1$  par rapport au tableau (Tab : 3.1) car l'état constant n'est pas évalué.

L'inversion du système (Eq 3.5) avec la matrice des moindres carrés et le membre de droite proposés (Eq 4.3 ou Eq 4.4), permet de déterminer sans difficulté les dérivées successives d'un champ par approximation locale respectivement linéaire et quadratique. Pour une reconstruction linéaire en 2D, la matrice carré  $\bar{\bar{M}}$  de dimension  $2 \times 2$  et son membre de droite  $\bar{\bar{B}}$  sont donnés par :

$$\bar{\bar{M}}_{2,2} = \sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} \begin{pmatrix} \Delta_i X_1^2 & \Delta_i X_{1,2} \\ \Delta_i X_{1,2} & \Delta_i X_2^2 \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{B}}_{2,1} = \sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} \begin{pmatrix} \Delta_i X_1 \Delta \phi \\ \Delta_i X_2 \Delta \phi \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Pour une reconstruction quadratique en 2D, la matrice carré  $\bar{\bar{M}}$  de dimension  $5 \times 5$  et son membre de droite  $\bar{\bar{B}}$  sont donnés par :

$$\bar{\bar{M}}_{5,5} = \sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} \begin{pmatrix} \Delta_i X_1^2 & \Delta_i X_{1,2} & \Delta_i X_1^3 & \Delta_i X_1^2 X_2 & \Delta_i X_1 X_2^2 \\ \Delta_i X_{1,2} & \Delta_i X_2^2 & \Delta_i X_1^2 X_2 & \Delta_i X_1 X_2^2 & \Delta_i X_2^3 \\ \Delta_i X_1^3 & \Delta_i X_1^2 X_2 & \Delta_i X_1^4 & \Delta_i X_1^3 X_2 & \Delta_i X_1^2 X_2^2 \\ \Delta_i X_1^2 X_2 & \Delta_i X_1 X_2^2 & \Delta_i X_1^3 X_2 & \Delta_i X_1^2 X_2^2 & \Delta_i X_1 X_2^3 \\ \Delta_i X_1 X_2^2 & \Delta_i X_2^3 & \Delta_i X_1^2 X_2^2 & \Delta_i X_1 X_2^3 & \Delta_i X_2^4 \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{B}}_{5,1} = \sum_{j \in V_i} \omega_j W_{ij} \begin{pmatrix} \Delta_i X_1 \Delta \phi \\ \Delta_i X_2 \Delta \phi \\ \Delta_i X_1^2 \Delta \phi \\ \Delta_i X_1 X_2 \Delta \phi \\ \Delta_i X_2^2 \Delta \phi \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

avec  $\Delta_i X_1^2 = \left(\frac{X_{j,1} - X_{i,1}}{h_i}\right)^2$ ,  $\Delta_i X_2^2 = \left(\frac{X_{j,2} - X_{i,2}}{h_i}\right)^2$  et  $\Delta_i X_{1,2} = \left(\frac{X_{j,1} - X_{i,1}}{h_i}\right) \left(\frac{X_{j,2} - X_{i,2}}{h_i}\right)$ .

Il est également possible de voir les approximations MLS sous la forme d'un ensemble de fonctions de forme reliant la reconstruction  $\phi^h$  aux états nodaux  $\phi_j$  sur le voisinage  $V_i$  (Eq 4.5).

$$\phi^h(X) = \sum_{j \in V_i} \psi_j(X) \phi_j \quad (4.5)$$

avec  $\psi(X)$  les fonctions de forme calculées à partir des moindres carrés. Ces fonctions sont purement géométriques de la forme :  $\psi(X) = p(X)^T M(X) p_i W_i(X)$ . Ces fonctions de forme présentent l'avantage contrairement aux fonctions de forme SPH (i.e.  $\psi_{ij} = \omega_j W_{ij}$ ) de posséder des propriétés de consistance intéressantes quelque soit la configuration géométrique des particules. Un exemple de consistance d'ordre 1 est présent ci-dessous :

$$\sum_{j \in V_i} \psi_{ij} = 1, \quad \sum_{j \in V_i} \vec{X}_{ij} \psi_{ij} = \vec{0}, \quad \sum_{j \in V_i} \vec{\nabla} \psi_{ij} = \vec{0}, \quad \sum_{j \in V_i} \vec{X}_{ij} \otimes \vec{\nabla} \psi_{ij} = \vec{\bar{I}} \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Construction du problème aux moindres carrés récursif

Pour bon nombre de configurations géométrique telles que des zones à forte troncature (surface libre ou parois solides), la matrice des reconstructions quadratiques (Eq 4.4) est difficilement inversible car mal conditionnée (Tab 3.3). Une approche récursive de la reconstruction quadratique par les moindres carrés permet d'éliminer ce problème [30]. Son concept part du principe assez simple que la dérivée seconde est la dérivée première de la dérivée première. Plutôt que de reconstruire un polynôme de degré deux à partir d'un champ  $\phi$ , l'idée est de reconstruire un gradient puis de dériver ce gradient par composant afin de calculer les termes de la matrice Hessienne (Fig 4.1).

La répétition d'un problème linéaire est donc nécessaire. La matrice (Eq 4.3) d'un problème linéaire étant plus petite que la matrice des reconstructions quadratiques en base complète, la matrice dégénère moins rapidement proche des zones à forte troncature (Tab 3.2). Un autre avantage de ces méthodes de reconstruction récursives est que compte tenu de la répétition des problèmes linéaires, la valeur moyenne du champ est respectée comme les reconstructions *k-exact* proposées par Barth [7].

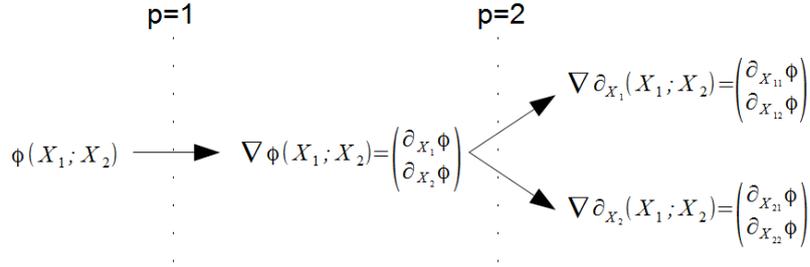


FIGURE 4.1 – Procédure de reconstructions quadratiques récursives en 2D

D'après [30], ces reconstructions quadratiques obtenues ainsi, sont sur un maillage structuré d'ordre 3 et seulement d'ordre 2.5 sur un maillage non-structuré. Malgré ce taux de convergence plutôt faible, dans une première approche ces reconstructions peuvent être intéressantes surtout en mettant en perspective l'état de l'art de la convergence spatiale de la méthode SPH-ALE. Une distinction entre les schémas de reconstruction quadratique à base complète ou à base répétée est faite afin de différencier l'approche globale de l'approche récursive.

### 4.1.3 Préservation de la valeur moyenne

Les équations de conservation peuvent s'écrire sous cette forme compacte :

$$\frac{\partial |\Omega| \bar{K} \phi}{\partial t} + \vec{R}(\phi) = 0 \quad (4.7)$$

avec  $\vec{R}(\phi)$  le vecteur résidu,  $|\Omega|$  la mesure du volume de contrôle et  $\bar{K}$  la matrice masse. La matrice de masse apparaît parce que la variation de la valeur de  $\phi$  donnée par le résidu doit s'approcher de la valeur moyenne de  $\phi$  dans le volume de contrôle [34].

Afin d'être conforme entre le schéma en temps et en espace, il est nécessaire que la reconstruction spatiale des états préserve la valeur moyenne du champs dans la cellule (maille ou particule). Cette propriété (Eq 4.8) permet de dire que la reconstruction est *conservative*.

$$\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \phi_i^h(X) dV = \phi_i \quad (4.8)$$

Pour des ordres supérieur à 1, rien ne garantie que la reconstruction conserve la valeur moyenne et il est donc nécessaire de modifier la discrétisation de l'équation de conservation [60] [15] en (Eq 4.7).

Une manière de conserver la valeur moyenne est l'utilisation de polynôme à moyenne nulle introduit par [34]. Un terme de correction  $C$  apparaît dans la reconstruction de l'équation (Eq 4.9) assurant le critère *zeromean*.

$$\tilde{\phi}_i^h(X) = \phi_i^h(X) + C \quad (4.9)$$

tel que  $\int_{\Omega_i} \tilde{\phi}_i^h(X) dV = |\Omega_i| \phi_i^h(X_i)$ . Ce terme de correction  $C$  de la reconstruction correspond à la multiplication des dérivées paires du développement de Taylor-Lagrange par l'intégrale des monômes de degré pairs dans le volume de contrôle :  $\frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} (X_1 - X_{1,i})^\alpha (X_2 - X_{2,i})^\beta (X_3 - X_{3,i})^\gamma dV$  avec  $\alpha + \beta + \gamma$  pair. Avec cette procédure, la consistance entre la matrice masse diagonale résultante et le résidu,  $\vec{R}(\phi)$ , est assurée (Eq 4.10).

$$\frac{\partial |\Omega| \bar{K} \phi}{\partial t} + \vec{R}(\tilde{\phi}) = 0 \quad (4.10)$$

Cette correction apparaît a posteriori dans la reconstruction des champs, contrairement à la méthode  $k$ -exact, où elle est imposée a priori.

Le système ci-dessus (Eq 4.10) peut être résolu en utilisant des schémas temporels explicites. Ceux qui connaissent le plus de succès sont les schémas Runge-Kutta, particulièrement ceux assurant une faible dissipation et une faible dispersion [32]. Populaire dans la communauté SPH pour l'astrophysique, les schémas symplectiques peuvent aussi être intéressants dans le cas de résolution de système Hamiltonien. Les perspectives étant de résoudre les équations de Navier-Stokes, les méthodes de Runge-Kutta resteront utilisées. L'ordre du schéma temporel sera en cohérence avec celui des schémas en espace (Chapitre 9 [32]).

#### Remarque 1

La notion de valeur moyenne doit désormais être explicitée. En effet, dans le cadre de la méthode des volumes finis, le volume de contrôle  $\Omega$  est selon la méthode utilisée (*cell-centered* ou *vertex-centred*) un espace topologiquement fermé et unique. Pour la méthode SPH-ALE, la notion de volume de contrôle est beaucoup plus ambiguë. Les équations de conservation sont distribuées, moyennées sur l'ensemble des particules. Le volume paraît donc être  $\Omega = \omega_i$ , le volume particulaire. Cependant, en raison de l'absence de topologie, la sommation des flux i.e l'opérateur de divergence est évalué sur un espace beaucoup plus grand  $V_i$  à travers l'approximation SPH. Le volume de contrôle est alors  $\Omega_i = V_i$  le voisinage de la particule  $i$ . Il existe donc deux niveaux de volume de contrôle, celui de la particule et celui de son voisinage dans la méthode SPH-ALE. Cependant, par analogie avec les volumes finis, le volume de contrôle est pris comme étant celui de la particule  $\Omega = \omega$ .

#### Remarque 2

L'utilisation de la matrice de masse est omniprésente en éléments finis mais absente du formalisme SPH en général [1]. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la constitution de la matrice de masse locale est liée à l'intégration des fonctions de forme (variable en espace et non en temps) sur l'élément.

$$\bar{K}_i = \int_{\Omega_i} \rho(X) \psi(X)^T \psi(X) dV \quad (4.11)$$

La matrice globale est assemblée à partir des matrices locales. Dans un cadre SPH, la même idée peut être appliquée. Les particules voisines sont assimilables à des noeuds  $X_j$  et le support  $V_i$  à un élément. La matrice masse dans l'élément est définie par intégration des fonctions de forme SPH :  $\psi_i(X) = \omega_i W(X - X_i)$  sur  $V_i$ . Cette matrice locale est de taille, pour  $h/\Delta X = 1.25 \times 5$  en 1D et  $20 \times 20$  en 2D. Il est évident que l'assemblage de la matrice masse globale conduit à une taille importante  $N \times N$  avec  $N$  le nombre de particules dans le domaine de calcul. Ces matrices sont fortement creuses et non-diagonales et symétriques sous l'hypothèse que  $W_{ij} = W_{ji}$  ce qui amène à souvent ne pas la considérer dans la méthode SPH. L'utilisation de fonction de forme MLS :  $\psi(X) = p(X)^T M(X) p_i W_i(X)$  dans la méthode des volumes finis conduit à construire également une matrice masse par cellule. La résolution de (Eq 4.10) induit l'inversion à chaque pas de temps de la matrice masse. Le solveur GMRES peut être utilisé [34]. De plus, d'après [34], pour des reconstructions d'ordre 2 et 3 la correction (Eq 4.9) est suffisante. La matrice masse  $\bar{K}$  correspond alors à la matrice identité et permet d'éviter l'inversion de la matrice masse à chaque pas de temps.

## 4.2 Stratégie de la limitation

L'utilisation de schémas d'ordre élevé pour la résolution d'EDP non linéaires conduit à l'emploi de limiteur de pente. En effet pour éviter des oscillations numériques (phénomènes de Gibbs) dans les régions à forts gradients, il peut être utile de dégrader l'ordre des schémas. L'implémentation d'une viscosité artificielle pourrait être une solution mais l'objet de ce travail n'est pas de dissiper les oscillations mais de les prévenir. Une autre approche est celle des schéma WENO (weighted essentially non-oscillatory) qui inclue dans son processus de création des extrapolations, une forme de limitation évitant les oscillations [31]. Avenasi a notamment appliqué ces schémas à la méthode SPH-ALE [3].

Harten a introduit le concept de TVD (total variation diminishing) qui vise à empêcher la création de nouveaux extrema dans la solution numérique.

Van Leer quant à lui a précisé que tout comportement non monotone (oscillation) peut être évité en suivant ceci : *"L'interpolation dans un élément donné ne doit pas être en dehors des valeurs définies par les valeurs moyennes et les valeurs voisines de la variable interpolée."* [11]. La figure (Fig 4.2 ) présente une solution monotone à gauche et une qui ne l'est pas à droite.

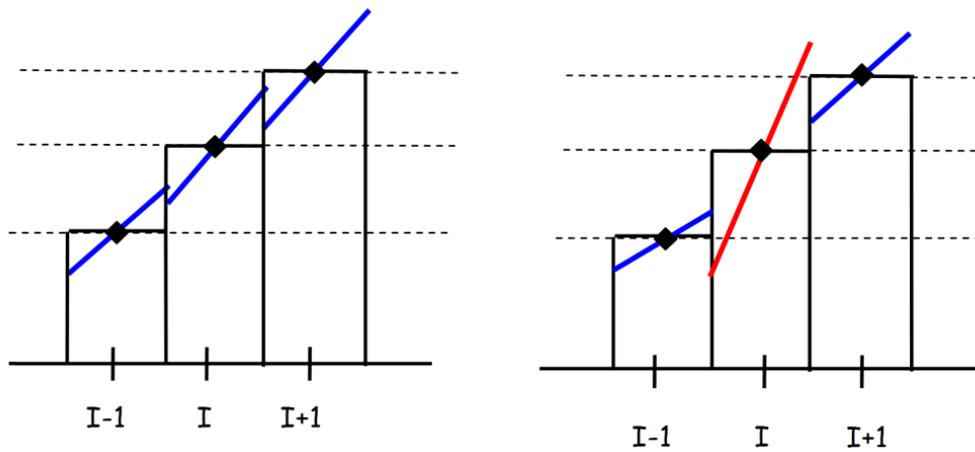


FIGURE 4.2 – A gauche, une solution monotone. A droite, une solution non monotone (images tirées de [11]).

Le schéma TVD se formule par une loi de conservation scalaire suivante :

$$TV(\phi^{t+1}) < TV(\phi^t) \quad (4.12)$$

avec la variation totale définie par  $TV(\phi) := \sum_i |\phi_{i+1} - \phi_i|$ . Ceci se traduit par une non augmentation des extrema au cours du temps.

La difficulté est que d'après le théorème de Godunov il est impossible d'avoir une méthode monotone linéaire de précision supérieure à 1. Il est donc nécessaire d'avoir une technique qui dégrade l'ordre de précision du schéma au voisinage d'une discontinuité.

De nombreux travaux ont permis la création de limiteurs de pente TVD dans le cadre de la méthode volume fini en maillage structuré. Il existe beaucoup de possibilités de fonctions de limitation qui ont toutes certaines propriétés. En voici un échantillon des plus populaires :

- minmod  $f(\theta) = \max(0, \min(\theta, 1))$
- superbee  $f(\theta) = \max(0, \min(2\theta, 1), \min(\theta, 2))$
- MC  $f(\theta) = \max(0, \min((1 + \theta)/2, 2, 2\theta))$
- van Leer  $f(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}$

la valeur  $\theta$  est le rapport entre la variation des états voisins à gauche et à droite (exemple :  $\theta_i = \frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_i}$ ). Cette approche est bien entendu aisée avec une topologie mais beaucoup plus délicate dans notre approche sans maillage. Le limiteur superbee est celui qui minimise l'utilisation de l'upwind. Il a tendance à raidir tous les fronts et à créer des discontinuités. Le limiteur Minmod se montre assez diffusif, le limiteur SuperBee a une nette tendance à accentuer les "angles", le limiteur de VanLeer est un bon compromis entre les deux. La figure (Fig 4.3 ) présente l'impact en rouge du limiteur de pente sur la solution numérique.

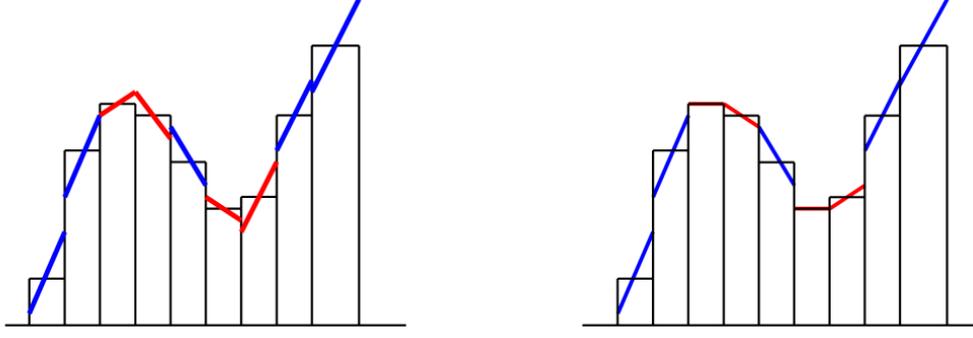


FIGURE 4.3 – A gauche, une représentation d’une solution avant limitation des pentes. A droite, la même solution après limitation des pentes (images tirées de [11]).

La première implémentation d’un limiteur pour maillage non structuré a été par Barth-Jespersen [6] puis par Venkatakrisnan [60]. Le limiteur de Barth et Jespersen est construit pour limiter les valeurs du polynôme pour qu’il ne dépasse pas les valeurs maximales et minimales des voisins (critère de Speikreijse). Barth introduit un critère pour rendre le schéma stable : *un schéma monotone vérifie le principe du maximum* [6].

$$\phi_i(X_{ij}) \in [\min\phi_j; \max\phi_j] \quad j \in V_i \quad (4.13)$$

avec  $V_i$  le voisinage de  $i$  et  $\phi_i(X_{ij})$  définie par (Eq 4.14) pour une reconstruction linéaire.

$$\phi_i(X_{ij}) = \phi_i + \alpha_i(X_{ij} - X_i)^T \vec{\nabla}_i \phi_i \quad (4.14)$$

Le principe de fonctionnement du limiteur est de déterminer la plus grande valeur possible de  $\alpha$ , en évitant ainsi la formation d’extremum pour l’intégration du flux numérique. Le limiteur de Barth et Jespersen a pour principe la méthode suivante :

- Détermination des extrema locaux :  $\phi_i^{max} = \max_j \phi_j$ ,  $\phi_i^{min} = \min_j \phi_j$
- Détermination de l’extrapolation :  $\phi_i(X_{ij})$
- Détermination du limiteur par interaction :  $\alpha_{ij} = \begin{cases} \min(1, \frac{\phi_i^{max} - \phi_i}{\phi_i(X_{ij}) - \phi_i}) & \text{si } \phi_i(X_{ij}) - \phi_i > 0 \\ \min(1, \frac{\phi_i^{min} - \phi_i}{\phi_i(X_{ij}) - \phi_i}) & \text{si } \phi_i(X_{ij}) - \phi_i < 0 \\ 1 & \end{cases}$

pour finir  $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$ .

Le limiteur de Barth et Jespersen décrit ici rencontre quelques problèmes de convergence, ce qui est notamment dû à l’utilisation de fonctions non dérivables, comme la fonction min. Pour cette raison, on lui préfère quelque fois le limiteur de Venkatakrisnan définie par :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{((R^{max})^2 + \epsilon^2)R + 2R^2(R^{max})^2}{(2(R^{max})^2 + 2R^2 + \epsilon^2)} & \text{si } R > 0 \\ \frac{1}{R} \frac{((R^{min})^2 + \epsilon^2)R + 2R^2(R^{min})^2}{(2(R^{min})^2 + 2R^2 + \epsilon^2)} & \text{si } R < 0 \\ 1 & \end{cases} \quad (4.15)$$

avec  $R = \phi_i(X_{ij}) - \phi_i$ ,  $R^{max} = \phi_i^{max} - \phi_i$  et  $R^{min} = \phi_i^{min} - \phi_i$ . Le rôle de la constante  $\epsilon$  est de désactiver le limiteur dans les régions où l’écoulement est régulier. On notera que pour la détection des discontinuités une approche basée sur les moindres carrés mobiles a été développé dans la thèse de Bergerat [11]. Ce travail permet notamment de n’utiliser les limiteurs que dans des régions précises limitant ainsi des dégradations excessives.

La stratégie adapté dans ce travail de thèse est celle de Barth-Jespersen basé sur les extrema locaux. On peut toutefois noter les travaux précédents de Guilcher [27], Marongiu [41] où le processus de limitation est basé par interaction. En effet le rapport  $\theta_{ij}$  est calculé comme suit  $\frac{\phi_j - \phi_i}{\phi_i(X_{ij}) - \phi_i}$ . Cette approche est toutefois beaucoup plus restrictive que celle basée sur les extrema.

### 4.3 Adaptabilité de la reconstruction des flux

La stratégie de reconstruction d’ordre élevé des états aux interfaces par les moindres carrés est très dépendante de la robustesse de ces moindres carrés. La qualité de l’approximation des dérivées successives dépend de la distribution des particules support de l’approximation. Comme évoqué au Chapitre 3, il est possible d’utiliser différentes techniques afin de les rendre stables et robustes malgré le déplacement des points au cours du temps.

### 4.3.1 Adaptabilité en ordre : $p$ -dégradation

La première technique d'adaptation nommée  $p$ -adaptation est directement liée au nombre de particules dans le stencil qui lui-même est directement lié aux zones de troncature.

La figure (Fig 4.4) permet d'illustrer cette  $p$ -dégradation par le biais de la simulation lagrangienne d'un jet impactant une plaque avec des reconstructions initialement quadratiques à base complète. La dégradation est située au niveau de la première couche de particule en surface libre mais également proche de la paroi solide. Le système initial en 2D de taille  $5 \times 5$  constitué des directions du repère et de ses directions croisées, se ramène alors à un système matriciel secondaire réduit de taille  $2 \times 2$  ne contenant que les directions principales du repère. Dans les deux cas, la troncature du support est proche de 50%. L'ordre des reconstructions dans les zones tronquées chute de  $p = 2$  à  $p = 1$ .

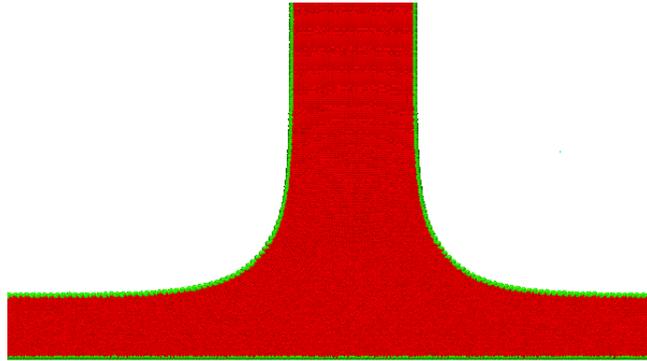


FIGURE 4.4 –  $p$ -dégradation pour une simulation lagrangienne quadratique de jet impactant une plaque plane (vert : Flx  $p=1$ , rouge : Flx  $p=2$ )

#### Stratégie du point moyen

L'utilisation du barycentre géométrique du stencil comme siège de la reconstruction permet de retarder la  $p$ -dégradation. Pour illustrer le concept, un jet sur une plaque plane est simulé avec et sans l'utilisation du barycentre géométrique à la place de la particule d'intérêt. Les résultats sont sur les figures (Fig 4.5a, 4.5b et 4.6).

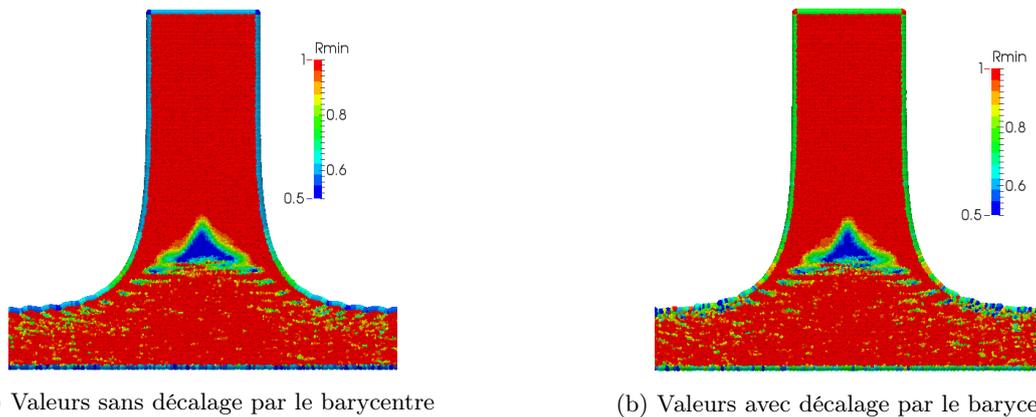


FIGURE 4.5 – Critère sur  $Rmin$  pour une simulation lagrangienne de jet plaque plane avec et sans le barycentre géométrique

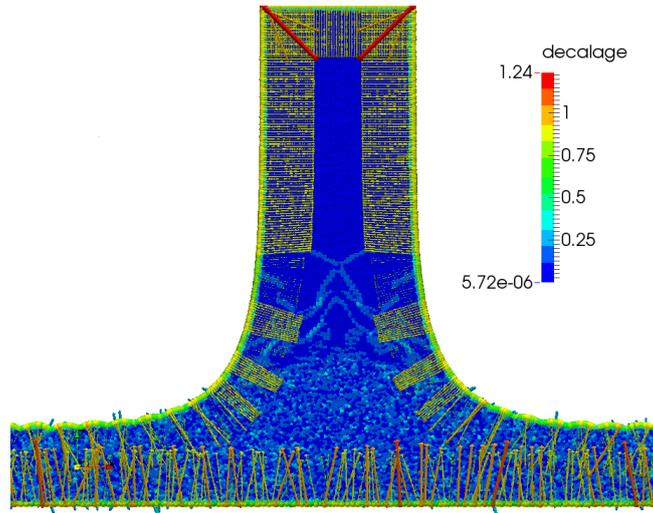


FIGURE 4.6 – Orientation et valeur du décalage par le barycentre géométrique

En remplaçant la particule d'intérêt par le centre de gravité géométrique de l'échantillon de particule, le critère basé sur la valeur minimale des éléments diagonaux de la matrice  $\bar{R}$  est plus diffus (Fig4.5b,4.5a). La détection de la surface libre est alors moins immédiate. De plus, le décalage vectoriel qui en découle est bien en accord avec l'idée d'exploiter le centre de gravité ( Fig4.6). En effet un décalage vers l'intérieur du fluide, d'une amplitude équivalente à une taille de particule peut être observé pour les particules ayant un voisinage le plus tronqué. Cette technique permet de retarder un peu le déclenchement de la  $p$ -dégradation.

*Remarque 1 :*

La  $p$ -dégradation se déclenche principalement en raison d'un nombre insuffisant de particules voisines. Il convient bien entendu qu'en augmentant la valeur du ratio  $\frac{h}{\Delta X}$ , cette dégradation peut être limitée au détriment d'un surcoût de calcul évident.

*Remarque 2 :*

L'utilisation d'éléments de frontière dans le problème aux moindres carrés permettrait également de limiter la  $p$ -dégradation. Il faut cependant distinguer les types de particule dans le domaine de calcul. Les particules fluides sont volumiques et possèdent une mesure du volume de dimension  $d$ . Les éléments qui discrétisent la paroi sont en revanche de surface et ont une mesure de surface de dimension  $d - 1$  (Fig 4.7b). L'introduction de ces points dans les reconstructions par les moindres carrés est donc délicate. En effet le formalisme des moindres carrés (MLS/RKPM) est basé sur des intégrales volumiques sur le voisinage. Le problème peut plus facilement être contourné avec des méthodes à maillage où les centroides et les noeuds des éléments de maillage sont dans le même espace. Dans une approche type Galerkin discontinu, tous ces points sont exploités [15]. Les éléments de paroi coïncident alors avec des points appartenant à la dimension  $d$  du problème aux moindres carrés (Fig 4.7a ). D'autre part, il est également possible de placer des points *fantômes* aux milieux des éléments de paroi en volume fini [34].

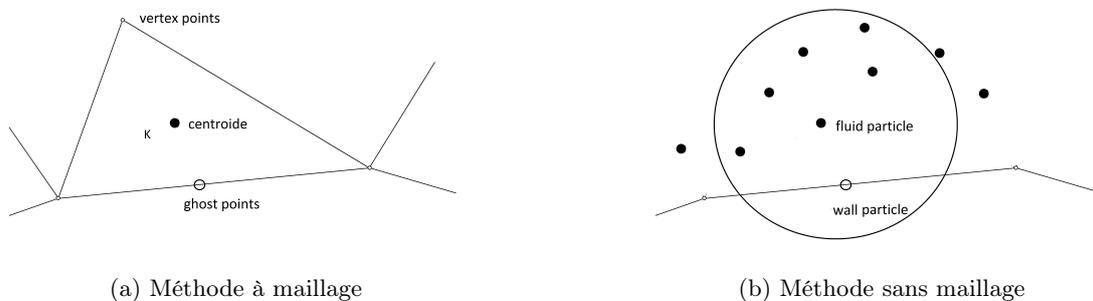


FIGURE 4.7 – Voisinage proche paroi pour les reconstructions aux moindres carrés

Les conditions limites sur ces nouveaux points sont ensuite placées dans le problème aux moindres carrés. La difficulté est que les conditions limites ne s'appliquent pas toujours sur l'ensemble des champs ou des composantes des champs. La condition de glissement s'applique sur une seule composante de la vitesse par exemple. Cela

nécessite de disposer de plusieurs matrices MLS. De plus, le risque d'entretenir ou d'amplifier une erreur est possible en introduisant, des valeurs de champ mal évaluées.

### 4.3.2 Adaptabilité en ordre : $p$ -adaptabilité

La  $p$ -adaptabilité est l'idée d'exploiter une erreur locale d'approximation pour déclencher ou non l'utilisation des ordres supérieurs. Le critère de déclenchement de l'enrichissement est basé sur l'erreur locale d'approximation du champ de masse volumique  $\rho$  (Eq 4.16). Ce choix est motivé par le fait que le champ de masse volumique est le plus difficile à capturer proprement avec la méthode SPH [41].

$$\epsilon_i = \left( \sum_{V_i} \omega_j (\rho_j - \rho_i^h(X_j))^2 \right)^{1/2} / \left( \sum_{V_i} \omega_j (\rho_j)^2 \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

Selon le choix de la reconstruction adoptée (complète ou répétée) cela a des répercussions plus ou moins importante sur le coût de calcul et la manière de l'implémenter. En effet l'approche répétée accepte mieux ce type de critère. Le stockage/remplissage des champs et la résolution du système matriciel secondaire ne sera effectué que si l'erreur  $\epsilon_i$  est supérieure au critère  $\epsilon_{max}$ . Contrairement au cas des reconstructions complètes où le remplissage/stockage se fera quoi qu'il arrive (car une seule étape), seule la taille de la résolution sera modifiée ce qui réduit tout de même le coût global.

Cette approche réduit considérablement la viscosité numérique car elle permet d'utiliser les ordres supérieurs aux endroits où siègent les forts gradients [50]. Les figures (Fig 4.9, 4.8) présentent des résultats en mouvement eulérien d'écoulement autour d'un cylindre avec la  $p$ -adaptation. De forts gradients sont présents autour du cylindre lors de l'écoulement, des reconstructions quadratiques sont alors utilisées localement grâce à la  $p$ -adaptabilité (particules colorées en rouge dans (Fig 4.8)).

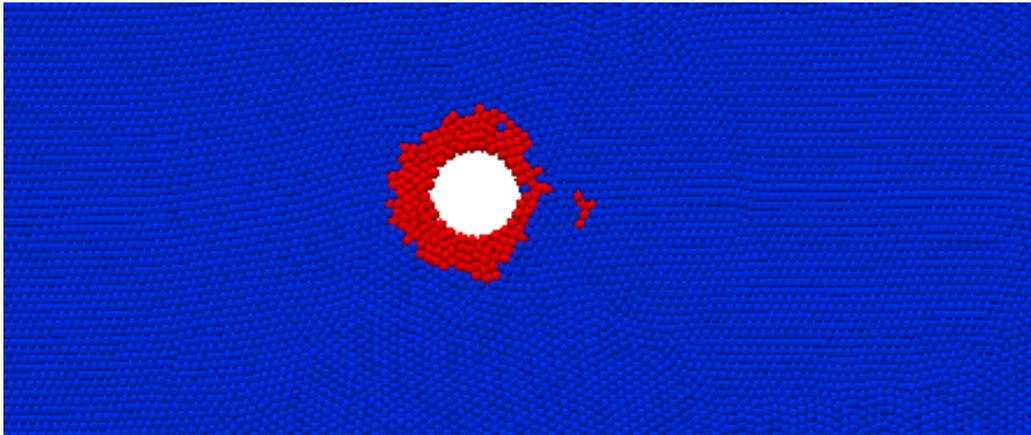


FIGURE 4.8 –  $p$ -adaptation (bleu : Flx  $p=1$ , rouge : Flx  $p=2$ )

La figure (Fig 4.9) présente les coefficients de pression le long du cylindre pour des schémas avec et sans la  $p$ -adaptation. Un schéma sans  $p$ -adaptation est un schéma totalement quadratique sur l'ensemble du domaine. La comparaison des flux quadratiques Flx  $p=2$  à base linéaire répétée ou à base complète, avec et sans la  $p$ -adaptation permet de voir que les résultats sont très similaires entre des simulations avec et sans la  $p$ -adaptation. Les résultats étant très proches, ceci valide l'idée que les ordres élevés sont principalement nécessaires dans les régions où résident les forts gradients. L'ordre de convergence spatial du schéma global ne peut bien entendu pas être celui de l'ordre élevé. Pour cet écoulement autour du cylindre, la  $p$ -adaptation permet de réduire le coût de 3 pourcents par rapport à une simulation sans cette procédure d'adaptation.

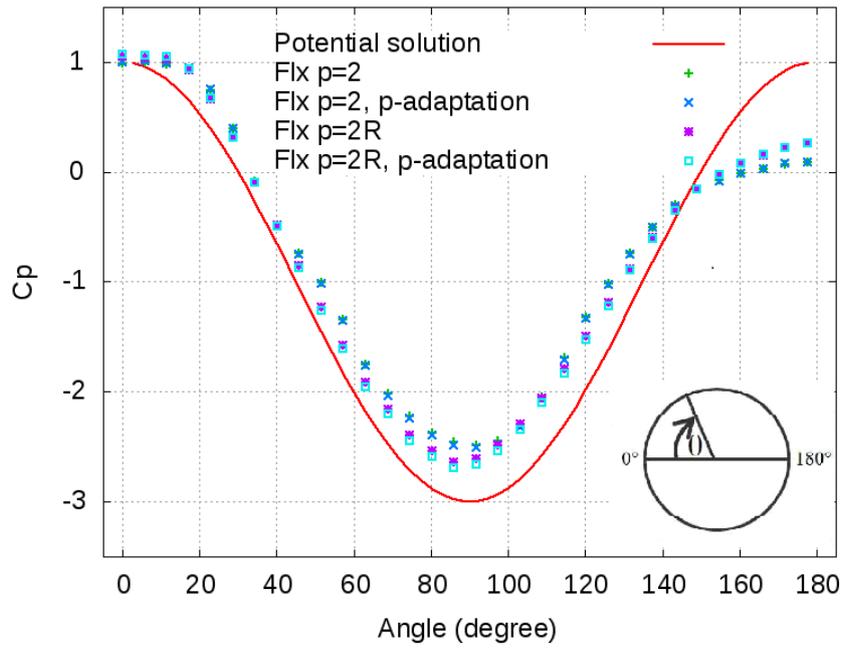
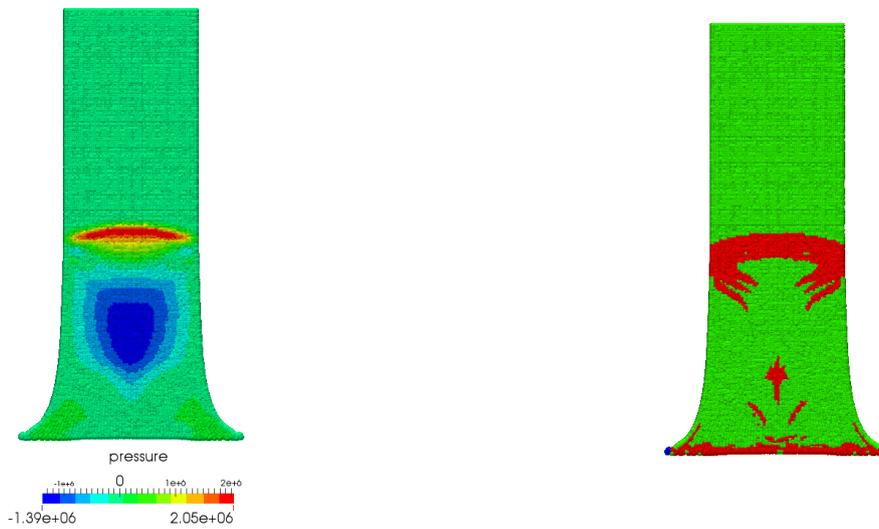


FIGURE 4.9 – Coefficient de pression le long du cylindre avec et sans la  $p$ -adaptation

Une simulation de jet impactant une plaque plane dans une description lagrangienne peut également illustrer la  $p$ -adaptation. Les figures ( Fig 4.10a, 4.10b) montrent respectivement le champ de pression au moment de l'impact du jet et l'ordre de la reconstruction utilisée dans le fluide. Les ondes instationnaires créées par le choc induisent de forts gradients, des fronts d'onde. L'utilisation des ordres quadratiques et l'apparition de ces ondes sont bien corrélées.

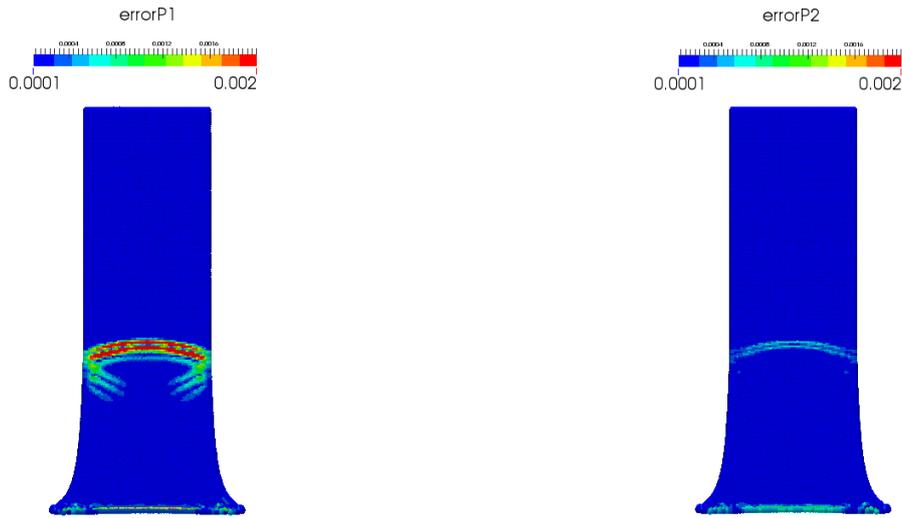


(a) Champ de pression pour un jet plaque plane au moment de l'impact

(b)  $p$ -adaptation (vert :  $p=1$ , rouge :  $p=2$ )

FIGURE 4.10 –  $p$ -adaptation au démarrage de la simulation lagrangienne d'un jet sur plaque plane

Les figures (Fig 4.11a, 4.11b) présentent l'erreur locale d'extrapolation linéaire et quadratique dans le fluide. L'utilisation d'ordre élevé permet de réduire les erreurs d'extrapolation.



(a) Erreur d'extrapolation linéaire

(b) Erreur d'extrapolation quadratique

FIGURE 4.11 – Erreurs d'extrapolation linéaire (a) et quadratique (b) au sein du fluide

Pour un temps plus long, le déclenchement de la  $p$ -adaptation est observée au cœur de la zone d'impact sur la figure (Fig 4.12) quand l'écoulement trouve un régime stable. Cette région utilisant les ordres élevés correspond bien à la zone où les gradients sont les plus intenses. Dans les branches d'évacuation du fluide, les reconstructions restent linéaires malgré un désordre important des particules dû à l'impact. La physique de l'écoulement pilote donc cette procédure d'adaptation.

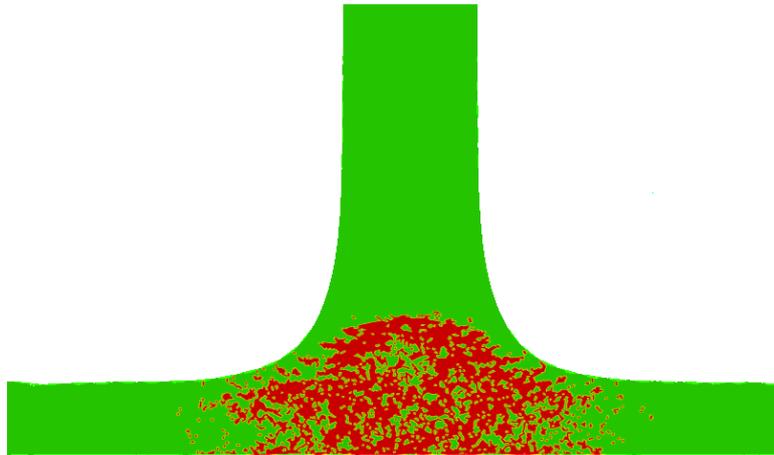
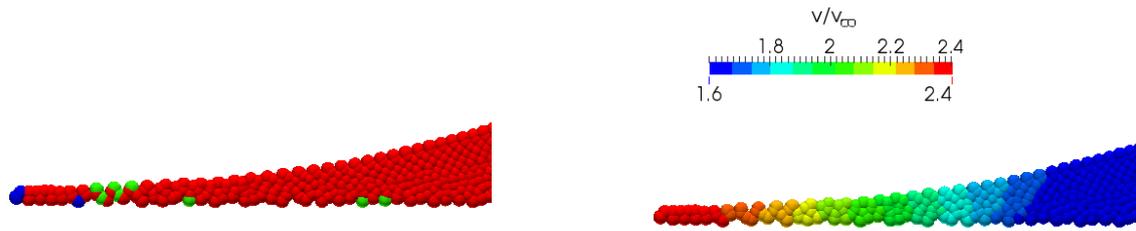


FIGURE 4.12 –  $p$ -adaptation (vert :  $p=1$ , rouge :  $p=2$ ) au régime établi de l'écoulement

### 4.3.3 Adaptabilité en espace : $d$ -adaptabilité

Pour illustrer la procédure d'adaptation en dimension liée aux directions spatiales discrétisées, l'exemple du jet d'eau impactant une plaque est de nouveau intéressant. En effet au moment de la séparation du jet en deux branches symétriques, en raison de la discrétisation constante du fluide, la fine épaisseur d'eau est sous-discrétisée. Cela conduit à avoir une direction privilégiée de discrétisation (celle de l'écoulement). Le calcul brut d'un gradient en 2D est impossible, il faut donc adapter le calcul des moindres carrés dans ces régions. La figure (Fig 4.13a) présente le déclenchement de la  $d$ -adaptation basée sur les valeurs de  $R_{min}$  du tableau (Tab 4.1). Les particules colorées en rouge ont un gradient calculé avec une base projetée en 2D. Les particules bleues n'ont pas pu avoir de reconstructions linéaires en raison de la forte dégradation de la matrice ( $p$ -dégradation). Les particules vertes en revanche, ont disposé d'un gradient calculé en 1D et projeté en 2D. La visualisation du champ de vitesse dans cette région montre une continuité des valeurs (Fig 4.13b).



(a)  $d$ -adaptation (Rouge : gradient 2D, vert : gradient 1D, bleu : pas de gradient calculé)

(b) Champ de vitesse

FIGURE 4.13 –  $d$ -adaptation lors de l'impact initial du jet sur la plaque plane

### 4.3.4 Algorithme de la reconstruction des flux

Les développements exposés ont été implémentés dans le logiciel de calcul ASPHODEL. Il convient donc de présenter l'ordre dans lequel les procédures présentées sont dans les faits utilisées pour les reconstructions de flux.

Le premier algorithme (Fig 4.14) présente les procédures d'adaptation pour les reconstructions aux moindres carrés à bases complètes. Le second algorithme exposé sur (Fig 4.15) lui est axé sur les reconstructions à bases répétées. Ces deux algorithmes sont basés sur des critères déterminés par l'expérience numérique. Le critère principal est axé sur la valeur minimale des coefficients diagonaux de la matrice  $\bar{\bar{R}}$  de la décomposition QR de la matrice des moindres carrés. Le tableau (Tab 4.1) répertorie pour différents mouvements de particule les valeurs seuils  $R_{seuil}$ . De plus l'expérience a montré que ces valeurs sont valables autant en 2D que en 3D.

Reconstruction	Mouvement	
	Eulérienne	Lagrangienne
p=1	0.01	0.2
p=2	0.1	0.4
p=2 répété	0.01	0.2

TABLE 4.1 – Choix empirique des valeurs seuils  $R_{seuil}$  pour  $R_{min}$  pour les reconstructions

Les lignes "p = 1" et "p = 2 répété" représentent des reconstructions basées sur la matrice des reconstructions linéaires ce qui explique que les critères géométriques soient les mêmes.

Comme il est possible de le voir (Fig 4.14), un premier test *test QR criteria neighbors* vérifie le nombre de voisins dans le voisinage (supérieur à 20 pourcents de l'ordre  $p$  souhaité) et la valeur de  $R_{min}$  par rapport à un seuil  $R_{seuil}$  empirique (Tab 4.1).

Si ce test est positif, un second test basé sur l'erreur locale d'extrapolation se déclenche ( $p$ -adaptation). En fonction du niveau d'erreur toléré  $\epsilon_{max}$  (Eq 4.16), l'erreur locale peut conduire à un test qui renvoie la valeur fautive. Dans cette configuration  $\epsilon_i > \epsilon_{max}$ , les reconstructions en base complète sont calculées. Dans le cas contraire, l'erreur d'extrapolation est plus petite que le seuil ( $\epsilon_i < \epsilon_{max}$ ) et la  $p$ -dégradation est utilisée afin de réduire le coût.

En revanche, si le test *test QR criteria neighbors* est négatif, les procédures de dégradation en ordre ( $p$ ) ou en espace ( $d$ ) évoquées plus tôt sont utilisées. En premier la  $p$ -dégradation basée sur le nombre de voisins, vérifie si il est possible de descendre en ordre. Si tel est le cas, et que le test sur  $R_{min}$  est positif alors, la reconstruction réduite en ordre est effectuée et le calcul sort de la fonction. Dans le cas contraire, la  $d$ -adaptation est évaluée si le nombre de voisins est suffisant. Si le nombre de voisins est trop faible, aucune reconstruction ne sera calculée.

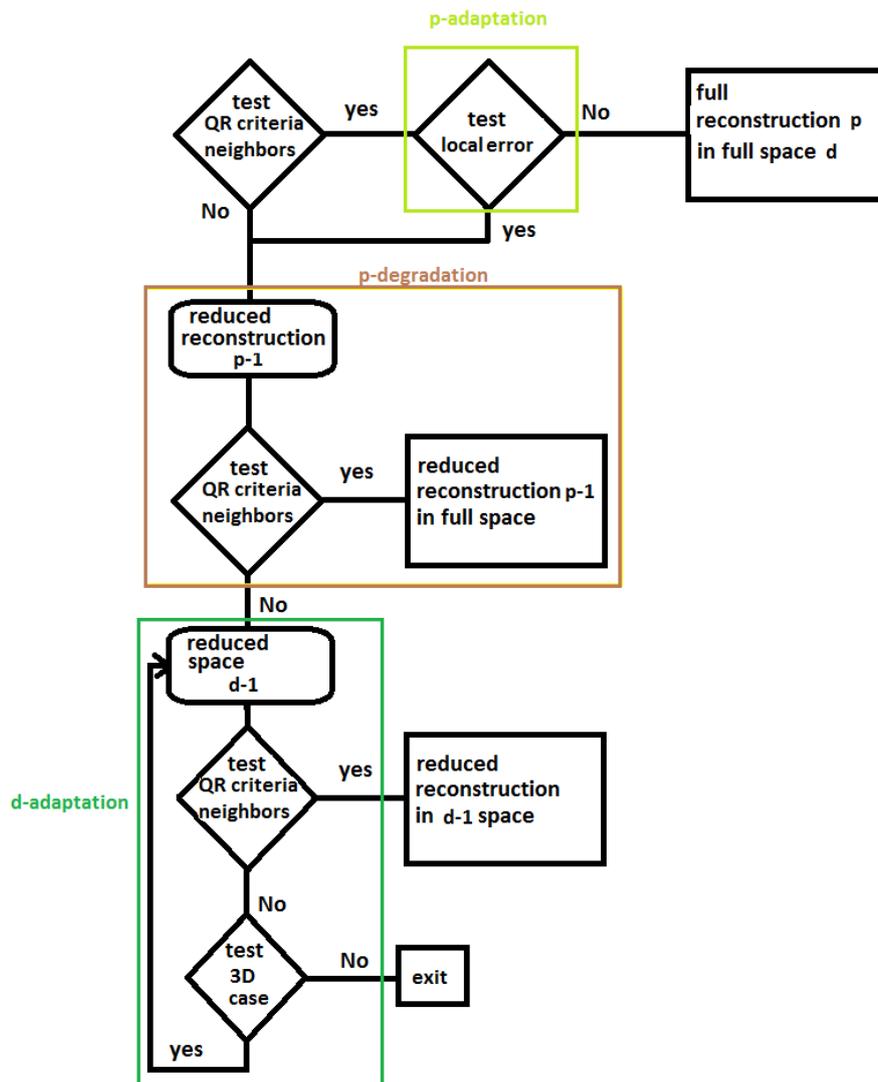


FIGURE 4.14 – Algorithme pour les reconstructions aux moindres carrés à base complète

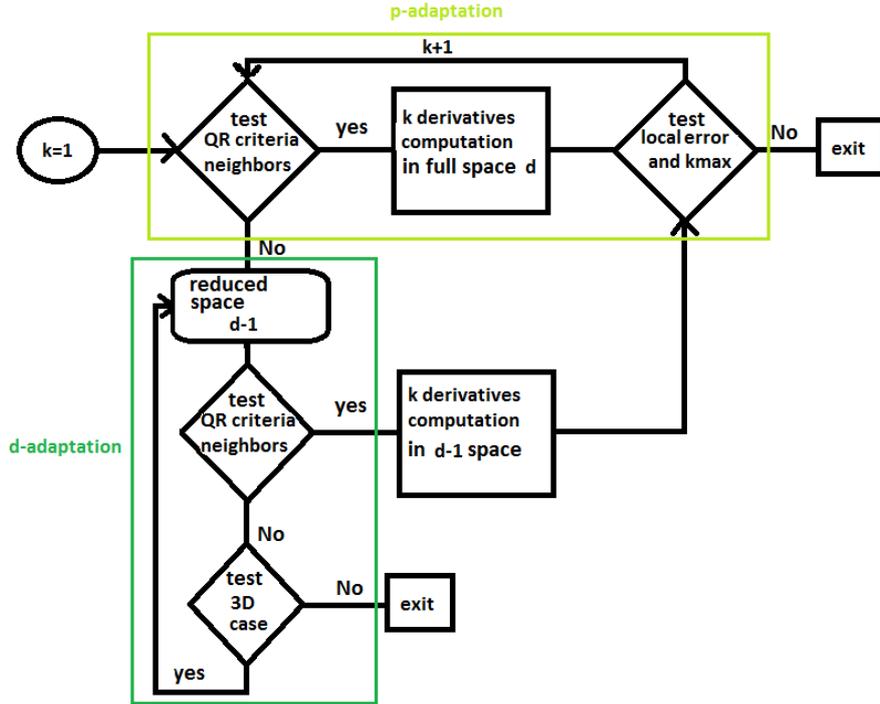


FIGURE 4.15 – Algorithme pour les reconstructions aux moindres carrés à base répétée

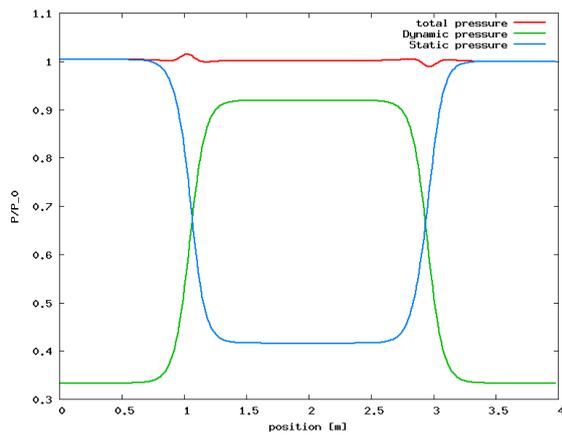
L’approche répétée (Fig 4.15) est basée elle aussi sur le critère du nombre de voisins et de la valeur de  $R_{min}$ . La  $p$ -adaptation permet de monter en ordre en répétant les reconstructions linéaires. La  $d$ -adaptation est de nouveau utilisable et permet par répétition d’avoir facilement des ordres élevés dans des dimensions réduites. La  $p$ -dégradation n’existe pas explicitement même si en fonction du nombre de voisins, le choix d’une reconstruction constante peut être fait.

## 4.4 Cas test

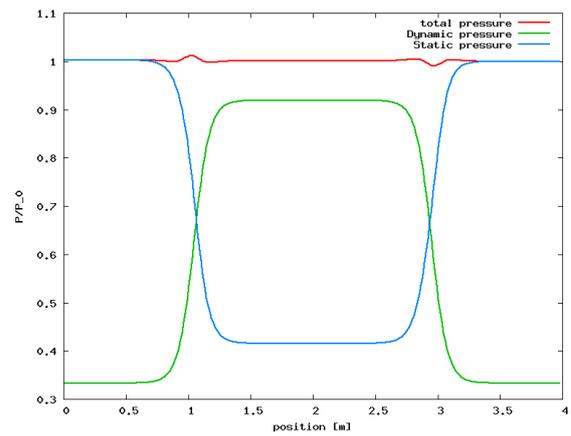
Les différents cas test qui suivent sont exposés en Annexe A. Le premier est un cas test d’écoulement quasi 1D non-visqueux dans une tuyère convergente-divergente. Il permet de montrer la faisabilité du concept des reconstructions d’ordre élevé pour la méthode SPH-ALE. Ce cas test unidirectionnel présente l’avantage de ne pas souffrir de problèmes liés aux configurations géométriques des particules. Les simulations 2D des tourbillons de Taylor-Green permettent par la suite, de quantifier la viscosité numérique introduite par les schémas numériques. Des simulations eulériennes d’écoulement autour d’un cylindre vont permettre de mesurer le gain apporté par les schémas plus précis à travers l’ordre de convergence spatial notamment. Pour finir la robustesse et la stabilité des schémas vont être testés avec des simulations lagrangiennes de jet impactant une plaque plane en 2D. Les schémas d’intégration temporelle sont adaptés à l’ordre des schémas spatiaux (Runge-Kutta de 2 à 4).

### 4.4.1 Écoulement quasi-1D dans un convergent-divergent

En Annexe A, la solution analytique du cas test 1D d’un écoulement quasi 1D est exposée. Ce cas présente l’avantage d’avoir une solution régulière qui ne nécessite a priori pas l’emploi de limiteur de pente. L’ordre des reconstructions ne va donc pas être dégradé. Les polynômes utilisés pour les reconstructions sont d’ordre 1 à 5. Cette étude étant en 1D, les reconstructions spatiales d’ordre très élevé ne sont pas très coûteuses. Il faut cependant préciser que pour les ordres élevés ( $p > 3$ ) le ratio  $h/\Delta x$  est de 2.3 au lieu de 1.2 pour les ordres inférieurs. Cela est fait pour maintenir suffisamment de voisins dans le support. La distribution des particules est non-homogène. L’ensemble des simulations qui suivent ont en commun un opérateur de divergence avec une correction de closed-box et une correction de renormalisation. L’opérateur de divergence est théoriquement d’ordre 2.

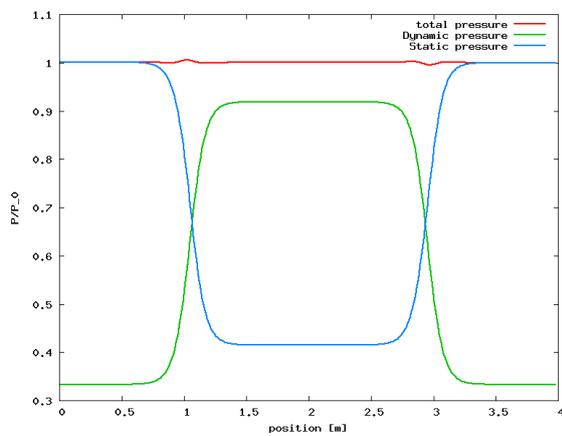


(a) Flx SPHc (CB+Renormalisation)

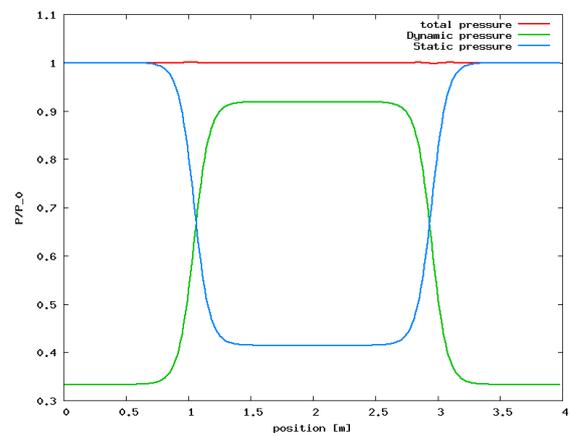


(b) Flx p=1

FIGURE 4.16 – Champs de pression pour les approximations linéaires

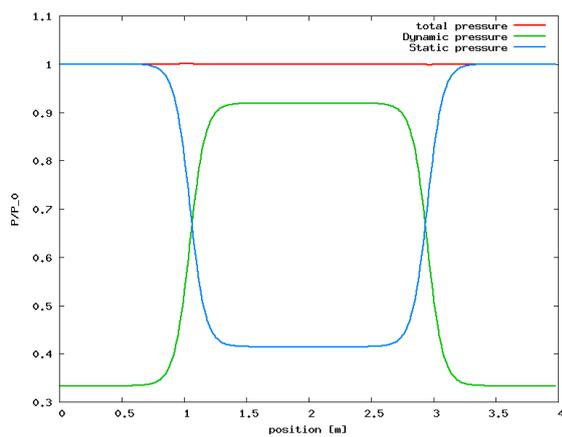


(a) Flx p=2

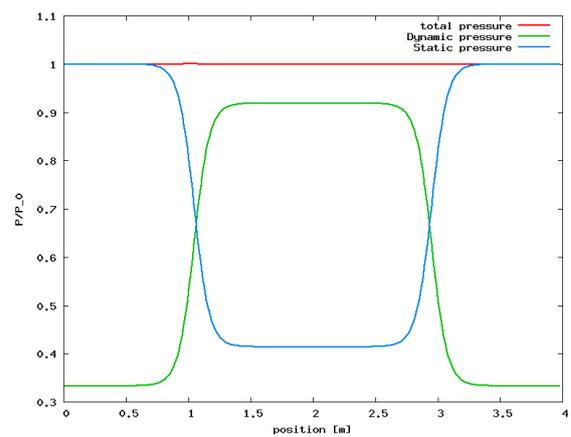


(b) Flx p=3

FIGURE 4.17 – Champs de pression pour les approximations quadratiques et cubiques



(a) Flx p=4



(b) Flx p=5

FIGURE 4.18 – Champs de pression pour les approximations d'ordre 4 et 5

Les résultats sur le champ de vitesse ne sont pas présentés car ce champ ne permet pas de discriminer les schémas. Sur les figures (Fig 4.16a, 4.16b) sont présentés les bilans de pression pour des reconstructions linéaires calculées avec un gradient SPH renormalisé (SPHc) et avec des moindres carrés. On peut remarquer que les deux schémas donnent des résultats très similaires. En revanche le fait d'utiliser des extrapolations avec des ordres supérieurs  $p=2$  (Fig 4.17a),  $p=3$  (Fig 4.17b),  $p=4$  (Fig 4.18a) et  $p=5$  (Fig 4.18b) permet de diminuer

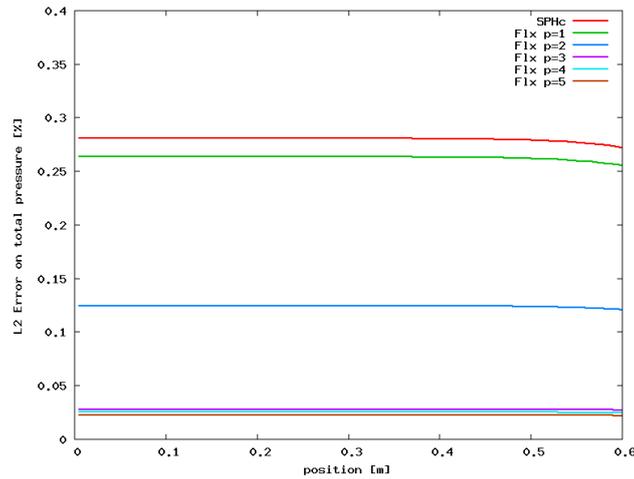


FIGURE 4.19 – Erreur en norme  $L^2$  sur l'énergie totale en fonction des reconstructions 1D

significativement l'erreur sur le champ de pression. Sur la figure (Fig 4.19) est présentée l'erreur sur l'énergie totale en pourcentage. Du fait des conditions limites, la solution sur l'énergie illustre bien la quantité de viscosité purement numérique introduite par le schéma. En effet une valeur de pression à l'entrée supérieure à celle de la pression à la sortie est due à une perte de charge numérique. De nouveau, le fait d'utiliser des extrapolations des états aux interfaces d'ordre élevé permet de réduire significativement dès l'ordre 2, l'erreur sur l'énergie totale dans le convergent-divergent.

<b>h</b>	<b>Godunov</b>	<b>SPHc</b>	<b>Flx p=1</b>	<b>Flx p=2</b>	<b>Flx p=3</b>	<b>Flx p=4</b>
0.1	1740	272	257	189	240	-
0.05	886	56	49	30	30	24
0.02	358	4.9	3.4	2	0.8	0.57
0.01	181	0.9	0.9	0.27	0.06	0.013

TABLE 4.2 – Variation d'énergie totale en pourcentage entre les entrées et sorties dans une tuyère convergente-divergente (SPHc =SPH corrigé avec renormalisation)

En analysant le tableau (Tab 4.2), les ordres en convergence spatiale peuvent être évalués. Pour le schéma SPH renormalisé et celui utilisant des flux d'ordre 1, il est environ de 2.4. De même pour les flux utilisant les moindres carrés d'ordre 2, 3, 4 l'ordre de convergence est respectivement de 2.8, 3.7 et 4.7. Ces résultats montrent donc une convergence spatiale proche de la théorie.

#### 4.4.2 Tourbillons de Taylor-Green en 2D

Pour les simulations de tourbillons de Taylor-Green en 2D, une divergence de flux calculée avec une approche SPH corrigée avec la renormalisation et la *closed-box* est utilisée. Les particules sont distribuées de sorte à minimiser l'erreur *closed-box* [45]. Les schémas de flux linéaires sont calculés soit avec la méthode SPH corrigée par la renormalisation (SPHc) soit calculés avec des moindres carrés mobiles (Flx p=1). Les schémas de flux quadratiques (Flx p=2) sont obtenus avec les MLS à base complète (Flx p=2) ou répétée (Flx p=2R).

#### Impact des reconstructions d'ordre élevé

La figure (Fig 4.20) présente l'évolution de la viscosité numérique (Annexe A) en fonction de la taille des particules pour différents schémas de reconstruction.

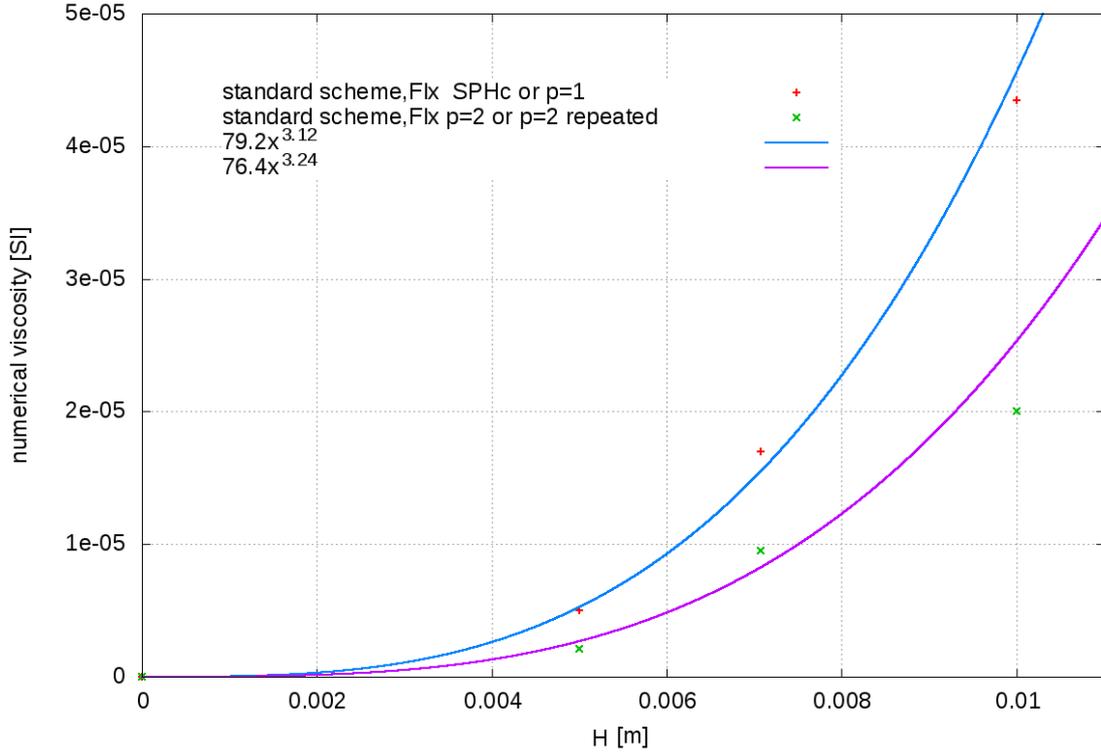


FIGURE 4.20 – Viscosité numérique en fonction de la taille des particules

Les schémas utilisant des flux linéaires présentent une évolution en puissance 3 comme DeLefle l'avait d'ailleurs exposé [18]. Ce résultat permet de retrouver l'équivalence entre les schémas basés sur un gradient SPH renormalisé et ceux basés sur une reconstruction par les moindres carrés linéaire ( $p=1$ ). L'expression de la fonction polynomiale qui approche le mieux les données est :  $\nu_1(x) = 79.2x^{3.12}$ . Pour la suite de ce cas test, seules les simulations avec des gradients obtenus avec les moindres carrés seront présentées. Pour les reconstructions quadratiques à base complète ou répété, l'évolution est la même, elle semble correspondre à une puissance 3 également. L'expression de la seconde fonction polynomiale qui approche le mieux les données quadratiques est :  $\nu_2(x) = 76.4x^{3.24}$ . Pour une taille de particule inférieure à 1 m, la viscosité numérique des schémas linéaires  $\nu_1$  est bien supérieure à celle des schémas quadratiques  $\nu_2$ .

A viscosité numérique équivalente, un schéma basé sur des reconstructions quadratiques permet d'utiliser des particules de taille plus importante. Cela a des conséquences importantes sur le coût de calcul comme le tableau (Tab 4.3) permet de l'illustrer. La référence est la simulation basée sur les gradients SPH corrigés (SPHc). En dimension  $d$ , et en divisant par  $\tau$  la taille des particules, le temps par itération est multiplié par  $\tau^d$ . La diminution de la taille des particules conduit à augmenter leur nombre dans le domaine de calcul et ainsi à accroître le nombre d'interactions. De plus, en raison de l'utilisation de schémas en temps explicites, la taille des particules impacte au travers de la condition CFL, le coût de calcul (Eq 1.15). Le temps nécessaire pour atteindre une seconde physique est donc multiplié par  $\tau^{d+1}$ . Les schémas linéaires ont approximativement le même coût de calcul. Le fait d'utiliser deux fois plus de particules augmente le coût de calcul par  $\sqrt{(2)^3} \approx 2.8$  en 2D alors que l'utilisation des reconstructions quadratiques augmente environ de 1.8 le coût de la simulation.

	Flx p=1 SPHc/MLS			Flx p=2/2R		
	N	2N	4N	N	2N	4N
coût CPU/itération	1/1.0	2.1/2.10	4.1/4.2	1.76/1.46	3.88/2.93	7.05/5.83
coût CPU/second	1/1.1	3.2/3.20	7.8/7.9	1.76/1.46	5.48/4.14	14.1/8.28

TABLE 4.3 – Coût de calcul associé aux simulations des tourbillons de Taylor-Green en 2D

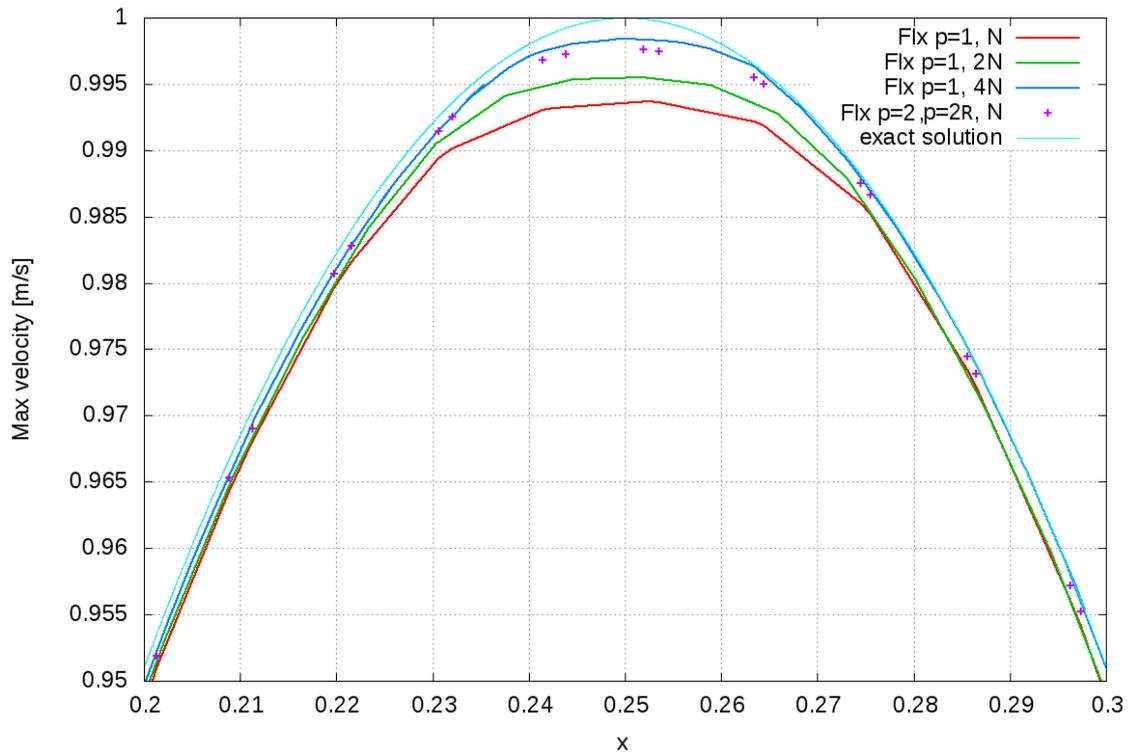
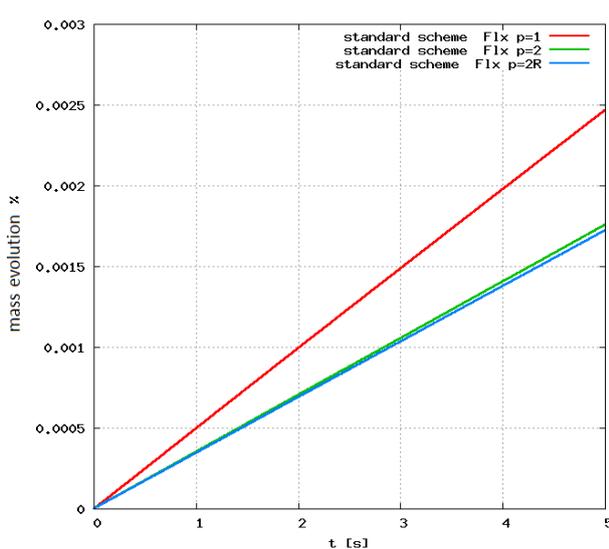
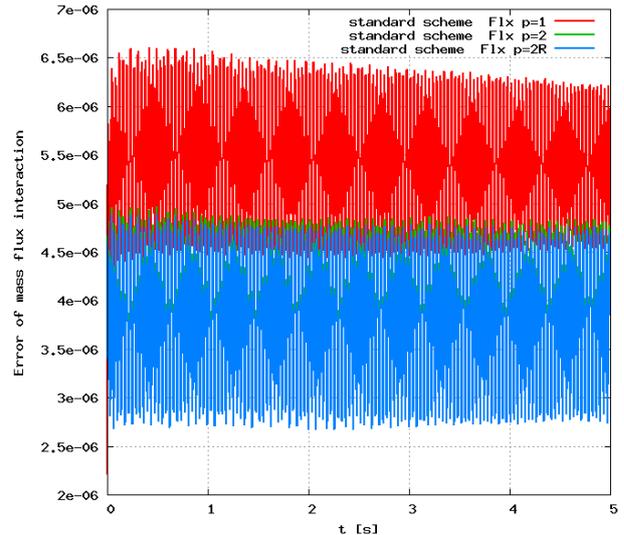


FIGURE 4.21 – Préservation du maximum de vitesse en fonction des schémas de reconstruction et de la discrétisation

La figure (Fig 4.21) présente une coupe du champ de vitesse au niveau d'un maximum localisé en  $(0.25;0.5)$ , au temps  $t=0.8s$  en fonction des différents schémas et de la taille de la discrétisation. En utilisant les schémas linéaires (Flx  $p=1$ ), le maximum local perd rapidement de son amplitude sur  $N$  particules par rapport au résultat sur  $2N$  particules. Le même constat est possible entre (Flx  $p=1, 2N$ ) et (Flx  $p=1, 4N$ ). Les schémas quadratiques (Flx  $p=2$  à base complète ou répétée) préservent beaucoup mieux l'extremum sur  $N$  particules avec un résultat proche de (Flx  $p=1, 4N$ ). L'utilisation de reconstruction quadratique permet de réduire la viscosité numérique en améliorant l'évaluation des états aux interfaces des problèmes de Riemann.



(a) Erreur sur la masse au cours du temps



(b) Différence dans la double sommation des flux de masse au cours du temps

FIGURE 4.22 – Conservation de la masse au cours du temps en fonction des schémas de flux

A travers l'utilisation de la correction de renormalisation et de la correction de *closed-box* sur l'opérateur de divergence, le schéma n'est plus conservatif. La quantité de masse évolue donc au cours du temps. La figure

(Fig 4.22a) présente l'évolution de la masse en pourcentage dans le fluide au cours du temps en fonction des reconstructions. La figure (Fig 4.22b) présente la double somme sur les particules et leurs voisines des flux de masse. En théorie, cette double sommation doit conduire à une valeur nulle. Cependant, en raison des corrections, la conservation est perdue. Il apparaît que l'utilisation de schémas de flux quadratiques semble limiter l'évolution de la masse par rapport aux schémas linéaires. Les oscillations autour d'une valeur moyenne de (Fig 4.22b) laisse à penser que les erreurs de conservation sont majoritairement d'origine géométrique à travers l'asymétrie de la distribution des particules mais que le champ sous-jacent semble avoir aussi un impact. Les particules étant immobiles et le champ en théorie constant, l'évolution est globalement linéaire.

### Impact de la limitation des reconstructions

L'écoulement des tourbillons de Taylor-Green ne présente pas de discontinuité, le déclenchement du limiteur de pente des reconstructions doit donc être très restreint voir absent. Seul le limiteur de Barth-Jespersen est employé dans ce travail car l'attention principale est portée sur des écoulements ne nécessitant pas des limiteurs capable de capturer finement des ondes de chocs. Le travail sur les limiteurs vise essentiellement à rester TVD i.e à ne pas créer d'information [32].

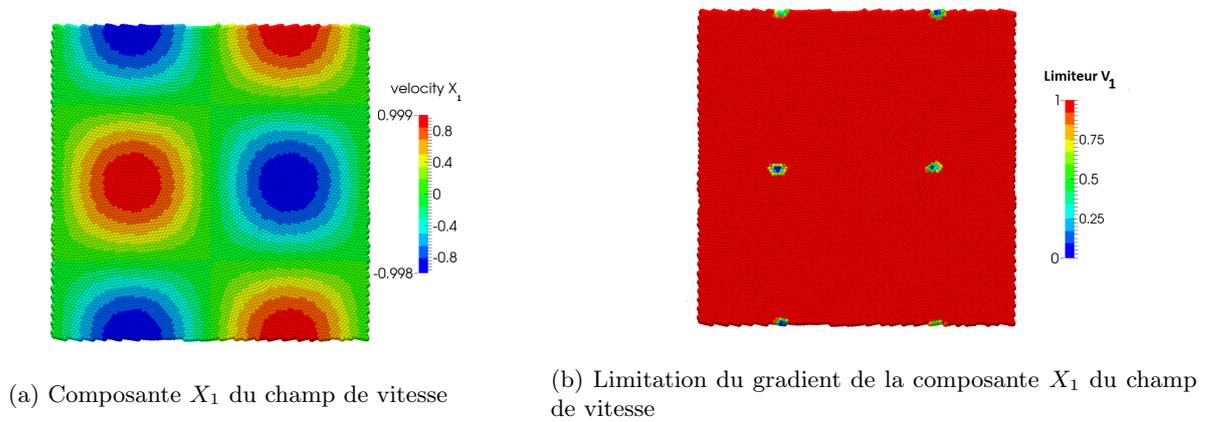


FIGURE 4.23 – Composante  $X_1$  du champ de vitesse des tourbillons de Taylor-Green

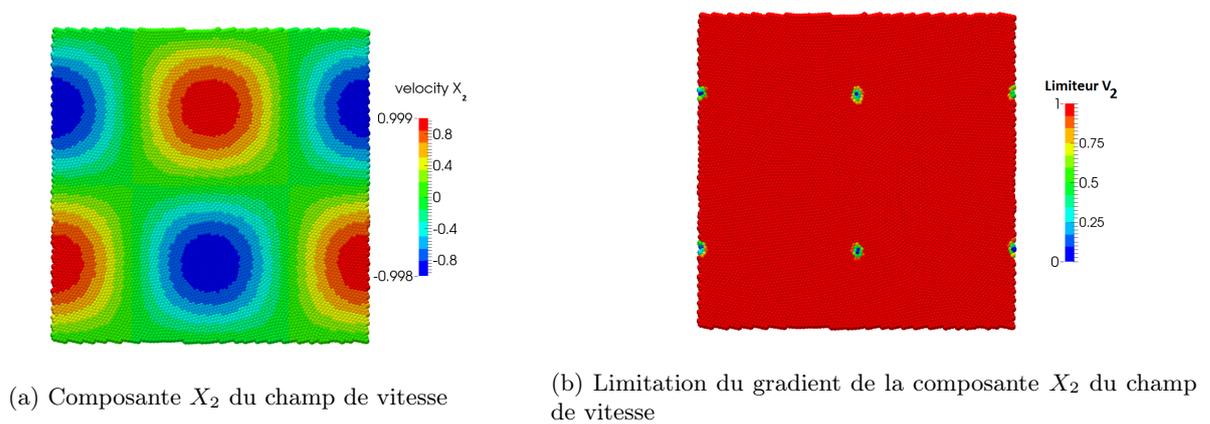


FIGURE 4.24 – Composante  $X_2$  du champ de vitesse des tourbillons de Taylor-Green

Les figures (Fig 4.23b, 4.24b et 4.25b) permettent de voir les valeurs des scalaires limitant les gradients des champs physiques à savoir le gradient de la masse volumique (Fig 4.25a) et les deux composantes du gradient de vitesse en  $X_1$  (Fig 4.23a) et en  $X_2$  (Fig 4.24a). Le déclenchement des limiteurs est en bon accord avec le champ physique. Dans les régions régulières, les scalaires valent l'unité afin de ne pas limiter les reconstructions. En revanche dans les régions proches des extrema, les scalaires limitant diminuent jusqu'à 0 afin d'éviter la création de nouveaux extrema.

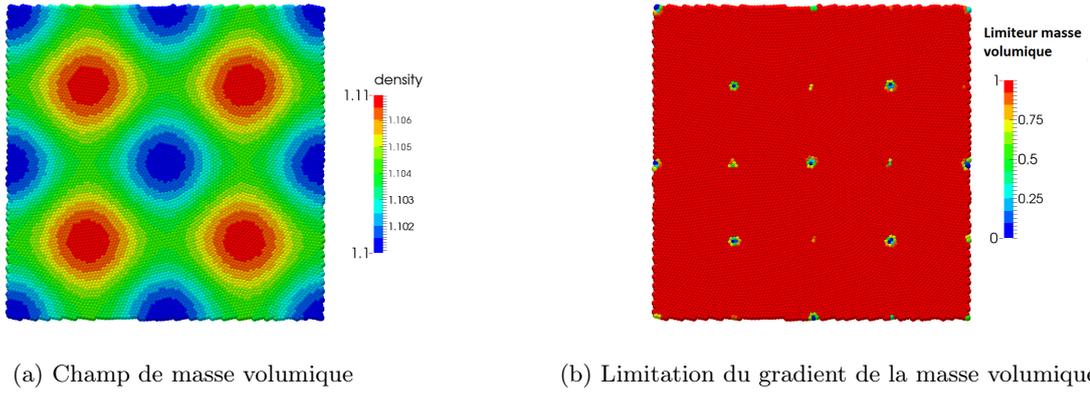


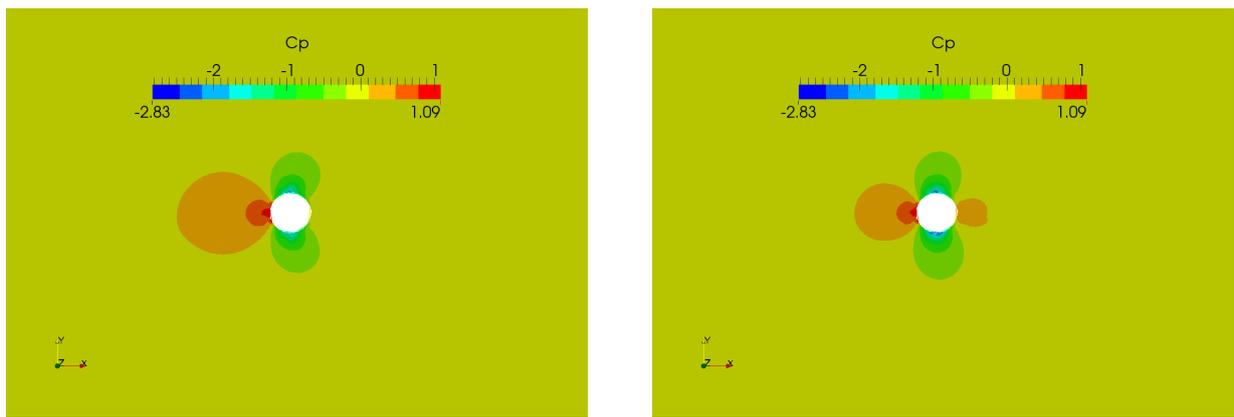
FIGURE 4.25 – Masse volumique des tourbillons de Taylor-Green

*Remarque*

Les champs de pression et de masse volumique sont souvent bruités pour les simulations avec un mouvement lagrangien avec la méthode SPH-ALE en raison du déplacement non maîtrisé des particules et du manque de précision des schémas numériques [41] [45]. Ce type de bruit risque d'entraîner un déclenchement intempestif des limiteurs si le problème n'est pas résolu.

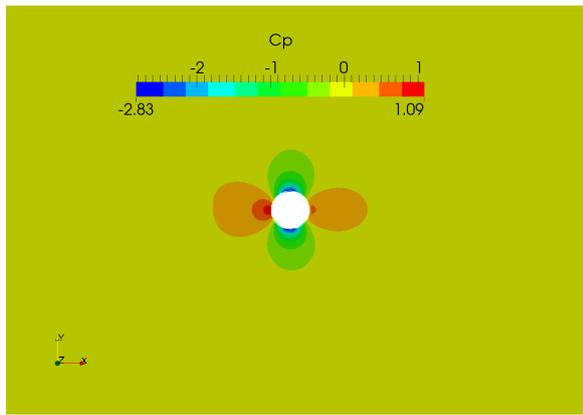
### 4.4.3 Écoulement en 2D autour d'un cylindre isolé

Des écoulements non-visqueux autour d'un cylindre sont simulés pour les différents schémas de reconstructions présentés. Le cas test est exposé en détail en annexe A. Les figures qui suivent présentent les champs de vitesse et pression sans dimension. Afin de correctement évaluer l'influence des ordres élevés, la  $p$ -dégradation a été désactivée. Les flux quadratiques sont conservés jusqu'à la couche de particules fluides en contact avec la paroi solide. Les figures (Fig 4.26a, 4.26b) montrent le champ de pression pour  $N$  particules pour un schéma de flux linéaire et un schéma quadratique à base complète. L'utilisation de flux quadratiques permet de retrouver la symétrie du champ selon l'axe normal à l'écoulement. En effet la surpression en amont du cylindre commence à apparaître. La symétrie axiale est quant à elle, bien préservée pour l'ensemble des schémas. Les figures (Fig4.27a, 4.27b) montrent le champ de pression pour  $4N$  particules. L'observation est la même que précédemment, la solution quadratique semble converger plus rapidement vers la solution potentielle parfaitement symétrique. Les figures (Fig 4.28a, 4.28b et 4.29a, Fig :4.29b) présentent le champ de vitesse pour  $N$  et  $4N$  particules en fonction des deux schémas. Les résultats sont à corrélérer avec le champ de pression. La diminution de la viscosité numérique réduit la taille du sillage numérique et conduit à de meilleurs résultats sur le champ de pression.

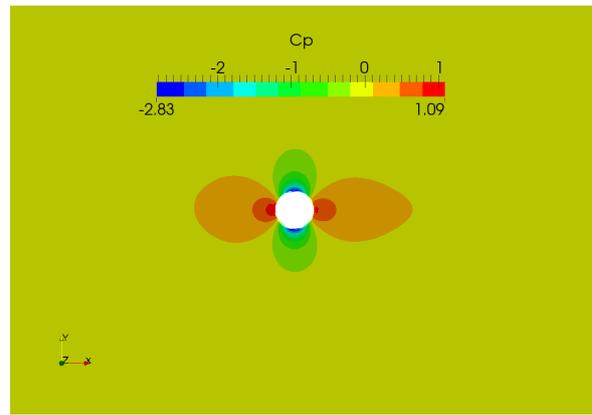


(a) Coefficient de pression pour des flux linéaires  $p=1$  (b) Coefficient de pression pour des flux quadratiques  $p=2$

FIGURE 4.26 – Coefficients de pression autour d'un cylindre pour  $N$  particules

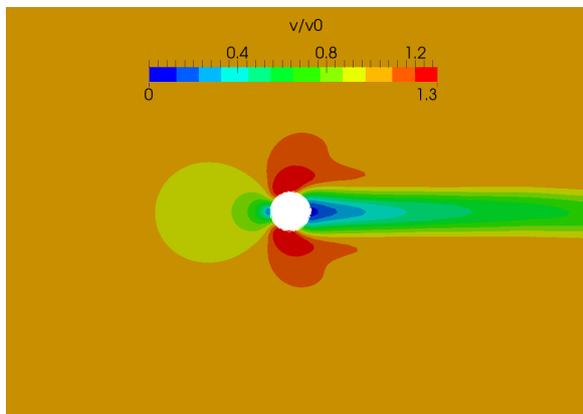


(a) Coefficient de pression pour des flux linéaires  $p=1$

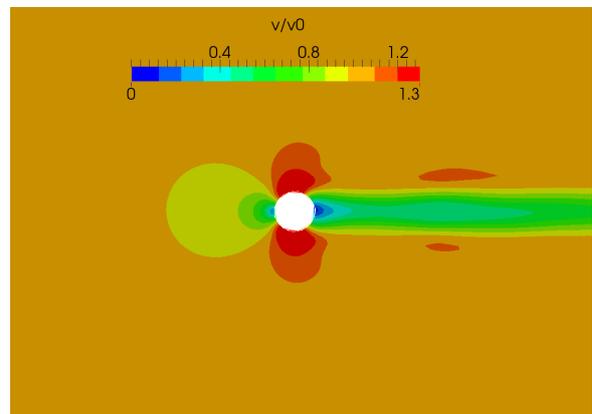


(b) Coefficient de pression pour des flux quadratiques  $p=2$

FIGURE 4.27 – Coefficients de pression autour d'un cylindre pour  $4N$  particules

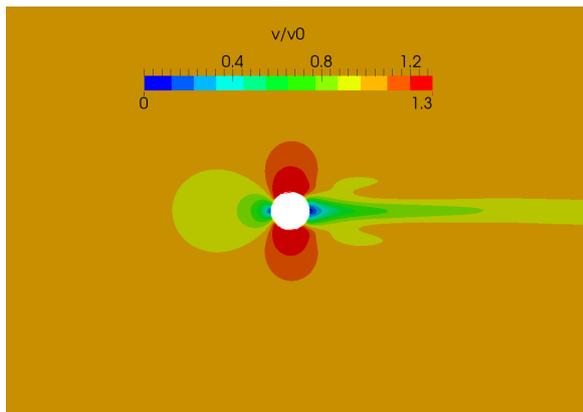


(a) Champ de vitesse pour les flux linéaires  $p=1$

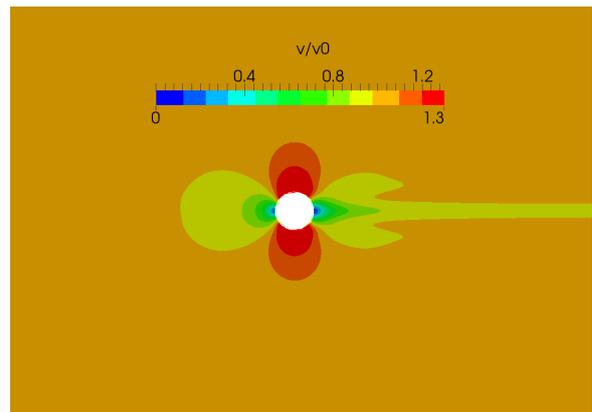


(b) Champ de vitesse pour les flux quadratiques  $p=2$

FIGURE 4.28 – Champ de vitesse autour d'un cylindre pour  $N$  particules



(a) Champ de vitesse pour les flux linéaires  $p=1$



(b) Champ de vitesse pour les flux quadratiques  $p=2$

FIGURE 4.29 – Champ de vitesse autour d'un cylindre pour  $4N$  particules

Les figures (Fig 4.30, 4.31) présentent la valeur du coefficient de pression le long du cylindre pour les schémas de flux linéaires, quadratiques à base complète et répétée pour les 3 niveaux de tailles de particules. Les flux d'ordre quadratique en général permettent d'obtenir des coefficients de pression plus proches de la solution potentielle. Les flux quadratiques à base répétée (Fig 4.32) présentent des résultats proches de la solution avec base complète. Il est à noter que les résultats à base complète présentent de petites instabilités à 90 degrés (Fig 4.31). La résolution matricielle des systèmes à base complète souffre de la troncature de son voisinage.

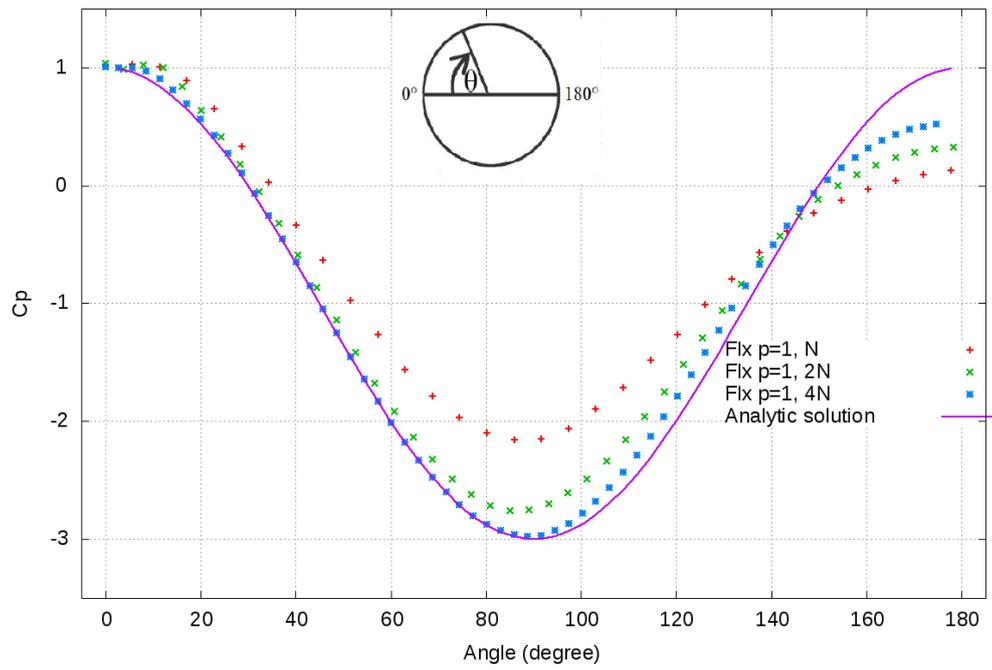


FIGURE 4.30 – Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour des flux linéaires

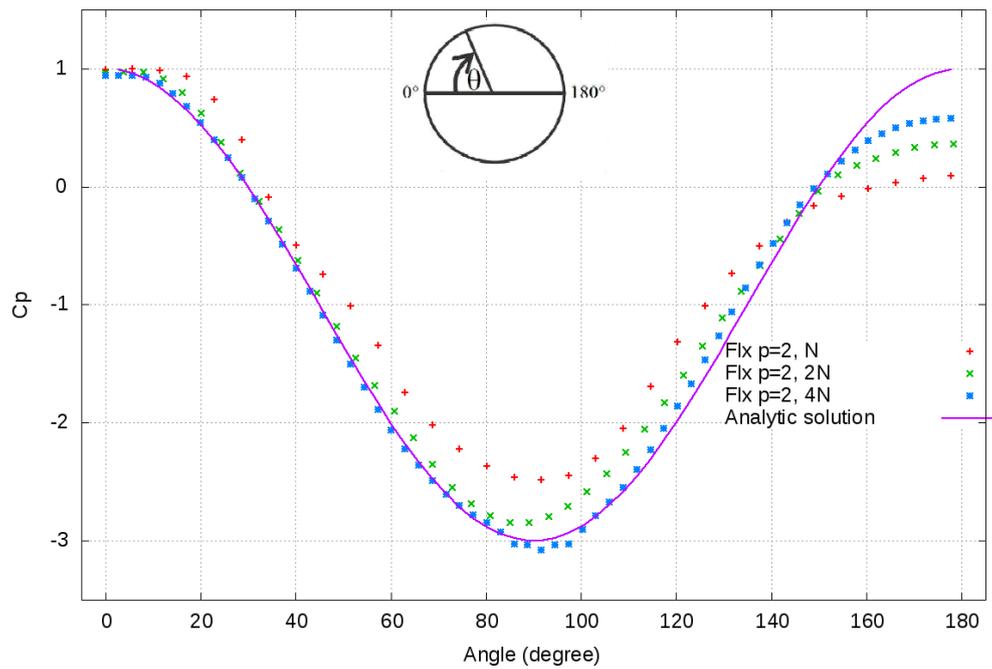


FIGURE 4.31 – Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour des flux quadratiques à base complète

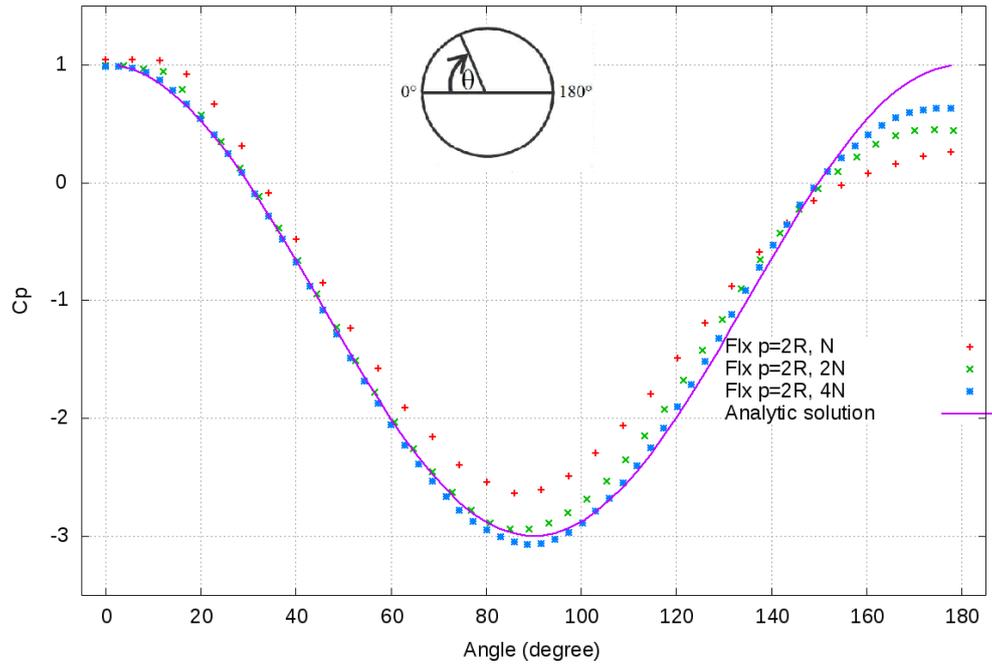


FIGURE 4.32 – Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour des flux quadratiques à base linéaire répétée

Les valeurs du coefficient de trainée numérique sont présentées dans le tableau (Tab 4.4) ainsi que l'erreur sur le coefficient de pression (Tab 4.5) pour trois niveaux de raffinement de la taille des particules. Une différence de pression totale prise aux capteurs décrites en Annexe A est également présentée sur le tableau (Tab 4.6). Ces valeurs permettent d'évaluer des taux de convergence spatiale proche de 2 pour les flux  $p=1$  (SPH corrigé), et pour  $p=1$  (MLS). Ces taux de convergence montrent le bon comportement des schémas linéaires avec le raffinement de la taille des particules. En revanche, il semble qu'il y ait une limitation intrinsèque à la méthode SPH-ALE qui majore l'ordre en convergence spatiale des schémas d'ordres supérieurs à 2 pour certaines mesures d'erreurs. L'ordre de convergence spatiale pour les flux quadratiques (Flx  $p=2$  complet ou répété) est en effet plus mitigé. Il avoisine 3 pour le coefficient de trainée numérique et la perte de pression totale mais seulement de 2 pour l'erreur sur le coefficient de pression en paroi. Il faut également être vigilant sur les estimations d'erreur car la distribution des particules est telle que les moments d'ordre paires peuvent disparaître. La bonne convergence générale peut donc être facilitée par cette configuration géométrique particulière des particules.

		$C_x$	Ordre
<b>SPHc <math>p=1</math></b>	$N$	0.017	-
	$2N$	0.008	2.1
	$4N$	0.0037	2.2
<b>Flx <math>p=1</math></b>	$N$	0.016	-
	$2N$	0.008	2.1
	$4N$	0.0035	2.4
<b>Flx <math>p=2</math></b>	$N$	0.013	-
	$2N$	0.005	2.7
	$4N$	0.002	2.8
<b>Flx <math>p=2</math> répété</b>	$N$	0.011	-
	$2N$	0.004	3.0
	$4N$	0.002	2.3

TABLE 4.4 – Coefficients de trainée numérique associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre

		$\ C_p - C_p^h\ _{L^2}$	Ordre
<b>SPHc p=1</b>	$N$	0.50	-
	$2N$	0.29	1.6
	$4N$	0.15	1.8
<b>Flx p=1</b>	$N$	0.50	-
	$2N$	0.28	1.6
	$4N$	0.14	1.9
<b>Flx p=2</b>	$N$	0.40	-
	$2N$	0.24	2.0
	$4N$	0.13	1.7
<b>Flx p=2 répété</b>	$N$	0.31	-
	$2N$	0.18	2.0
	$4N$	0.10	1.6

TABLE 4.5 – Erreur sur le coefficient de pression à la paroi associés aux simulations d’écoulement autour d’un cylindre

		$\Delta Pt$ %	Ordre
<b>SPHc p=1</b>	$N$	6.7	-
	$2N$	3.1	2.2
	$4N$	1.1	2.9
<b>Flx p=1</b>	$N$	6.7	-
	$2N$	3.1	2.2
	$4N$	1.0	3.2
<b>Flx p=2</b>	$N$	3.2	-
	$2N$	1.2	2.8
	$4N$	0.4	3.1
<b>Flx p=2 répété</b>	$N$	3.2	-
	$2N$	1.1	3.00
	$4N$	0.3	3.7

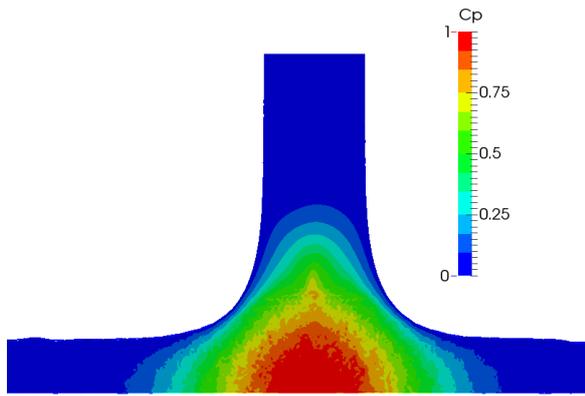
TABLE 4.6 – Perte de pression totale lors d’un écoulement autour d’un cylindre

#### 4.4.4 Impact 2D d’un jet sur une plaque plane

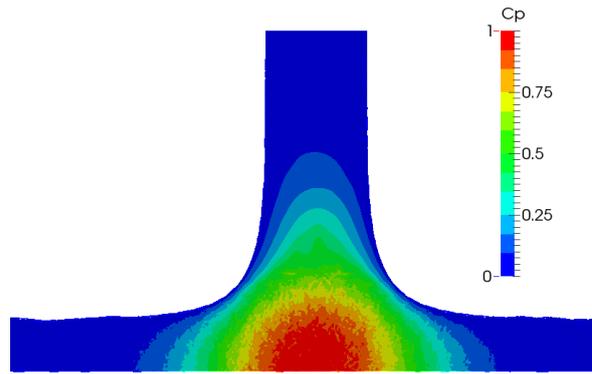
La simulation lagrangienne d’un jet sur plaque plane en 2D contraste avec l’ensemble des simulations précédentes eulériennes. En effet la difficulté va être la gestion de la grande modification des voisinages au cours du temps. La répartition des particules n’est plus contrôlée pour minimiser l’erreur *closed-box* [45] ce qui va grandement stresser les schémas.

#### Impact des reconstructions

Les figures (Fig 4.33a, 4.33b) présentent les coefficients de pression du fluide et les figures (Fig 4.34a, 4.34b) le champ de vitesse sans dimension pour les deux schémas de flux linéaires et quadratiques. Les flux quadratiques sont calculés avec les reconstructions à base répétée afin de s’affranchir de la  $p$ -dégradation. L’opérateur de divergence est calculé avec l’approximation SPH sans correction en raison du mouvement lagrangien des particules [16].

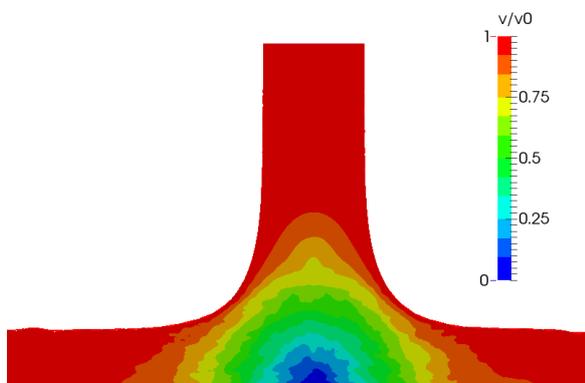


(a) Coefficient de pression pour des flux linéaires  $p=1$

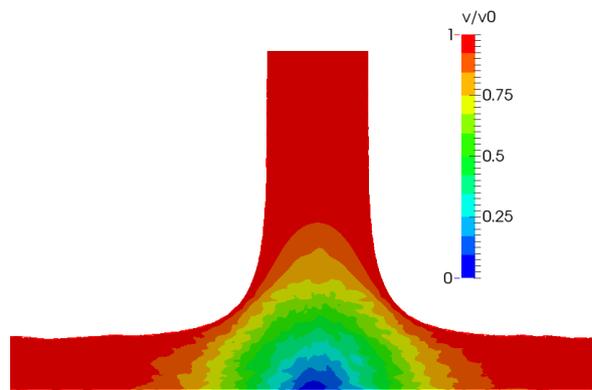


(b) Coefficient de pression pour des flux quadratiques  $p=2R$

FIGURE 4.33 – Coefficient de pression au sein du fluide pour une simulation purement lagrangienne



(a) Champ de vitesse pour des flux linéaires  $p=1$



(b) Champ de vitesse pour des flux quadratiques  $p=2R$

FIGURE 4.34 – Champ de vitesse au sein du fluide pour une simulation purement lagrangienne

Dans la première partie du jet au dessus de la zone de surpression, les particules sont encore relativement ordonnées, ce qui explique la régularité des champs physiques. Au dehors de cette région, les particules sont désordonnées et cela conduit au bruit nettement visible.

Les champs de pression et de vitesse sont donc très bruités en raison du grand désordre des particules dans le voisinage ce qui dégrade fortement la précision de l'opérateur divergence qui devient inconsistant. Les champs de pression et de vitesse convergent toutefois vers la solution potentielle de référence. Les champs préservent une symétrie par rapport à l'axe du jet. En évaluant la valeur moyenne de la force hydraulique qui s'applique sur la plaque, il s'avère que la force obtenue pour le schéma linéaire ( $Flx\ p=1$ ) est de 12339.6 N avec un écart type de 342 N contre 12295.94 N et 303.3 N pour le schéma quadratique ( $Flx\ p=2R$ ). La valeur théorique étant de 11607.3 N, le schéma quadratique donne une valeur moyenne plus proche de la théorie avec des variations moins importantes.

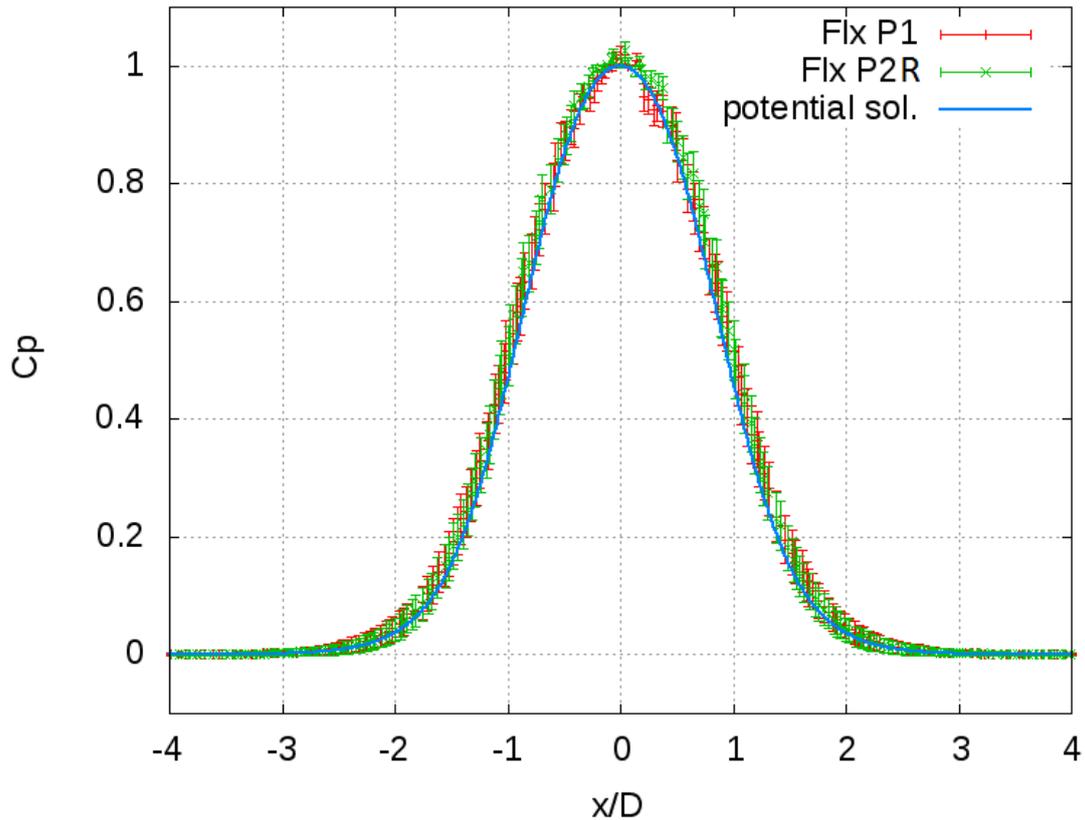


FIGURE 4.35 – Comparaison du coefficient de pression à la paroi en fonction des différents schémas numériques

La figure (Fig 4.35) présente les valeurs des coefficients de pression le long de cette paroi moyennée sur 20 pas de temps afin de filtrer le bruit. Les solutions quadratiques et linéaires sont équivalentes et proches de la solution potentielle. Les écarts-types présentés permettent de montrer que les ordres élevés n'introduisent pas de variations supplémentaires. Ces résultats montrent donc que l'utilisation de reconstructions d'ordre élevé ne déstabilise pas les simulations lagrangiennes.

La distribution de particules impactant fortement l'opérateur de divergence, le gain des reconstructions d'ordre élevé pour des simulations lagrangiennes n'est pas significatif.

### Impact du mouvement corrigé

Avec les mêmes schémas de reconstruction ce cas test peut être refait en modifiant la position des particules afin de minimiser au cours du temps l'erreur *closed-box* et espérer diminuer le bruit. L'opérateur de divergence est corrigé avec la correction de *closed-box* et la renormalisation (Eq 5.16). Ce type de modification nécessite de raidir le système en raison d'une phase initiale génératrice d'ondes de pression qui doivent être évacuées pour permettre la convergence du calcul. La vitesse du son numérique est alors de  $c_0 = 800$  m/s.

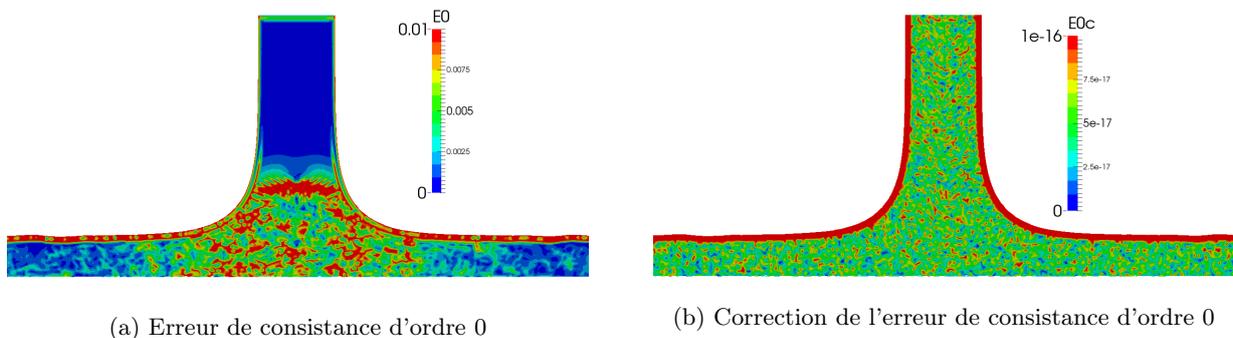
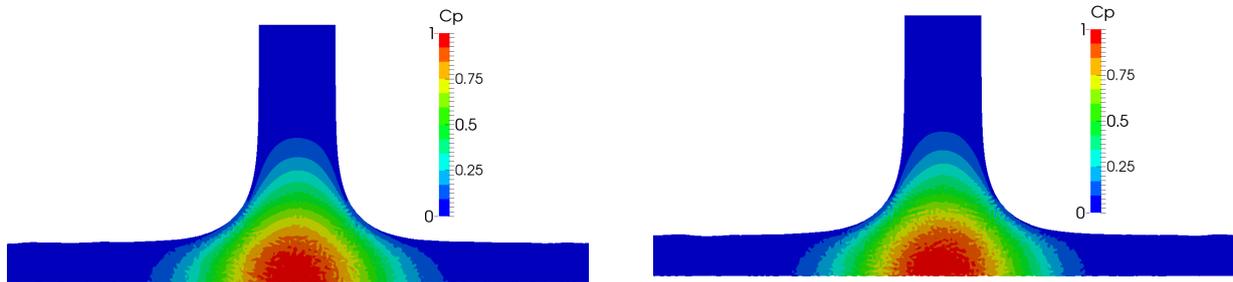


FIGURE 4.36 – Consistance d'ordre 0 pour une simulation lagrangienne avec *shifting*

Les figures (Fig 4.36a, 4.36b ) présentent l'erreur de consistance d'ordre 0 dans le domaine en l'absence

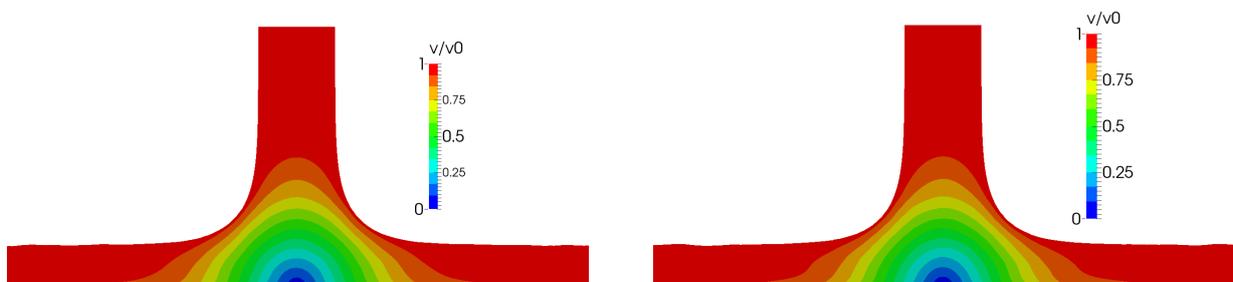
de correction et la correction de cette erreur avec la méthode de [45]. La correction d'erreur *closed-box* se fait au cœur du fluide loin de la surface libre. Afin de visualiser, la faible amplitude d'erreur après correction, l'échelle (Fig 4.36b) est volontairement fixée à maximum  $10^{-16}$ . L'opérateur de divergence est alors au minimum consistant d'ordre 0 loin de la surface libre.



(a) Coefficient de pression pour des flux linéaires  $p=1$  (b) Coefficient de pression pour des flux quadratiques  $p=2R$

FIGURE 4.37 – Coefficient de pression au sein du fluide pour une simulation lagrangienne avec *shifting* des particules

Les figures (Fig 4.37a, 4.37b) présentent le champ de pression pour respectivement des flux linéaires et quadratiques. Le bruit est moins marqué et la symétrie axiale est mieux dessinée.



(a) Champ de vitesse pour des flux linéaires  $p=1$  (b) Champ de vitesse pour des flux quadratiques  $p=2R$

FIGURE 4.38 – Champ de vitesse fluide en simulation lagrangienne avec *shifting*

Les figures (Fig 4.38a, 4.38b) présentent le champ de vitesse pour respectivement des flux linéaires et quadratiques. Dans les deux cas de figure, il est possible de remarquer moins de bruit par rapport aux résultats sans le *shifting*, cependant une accélération non physique proche paroi est visible.

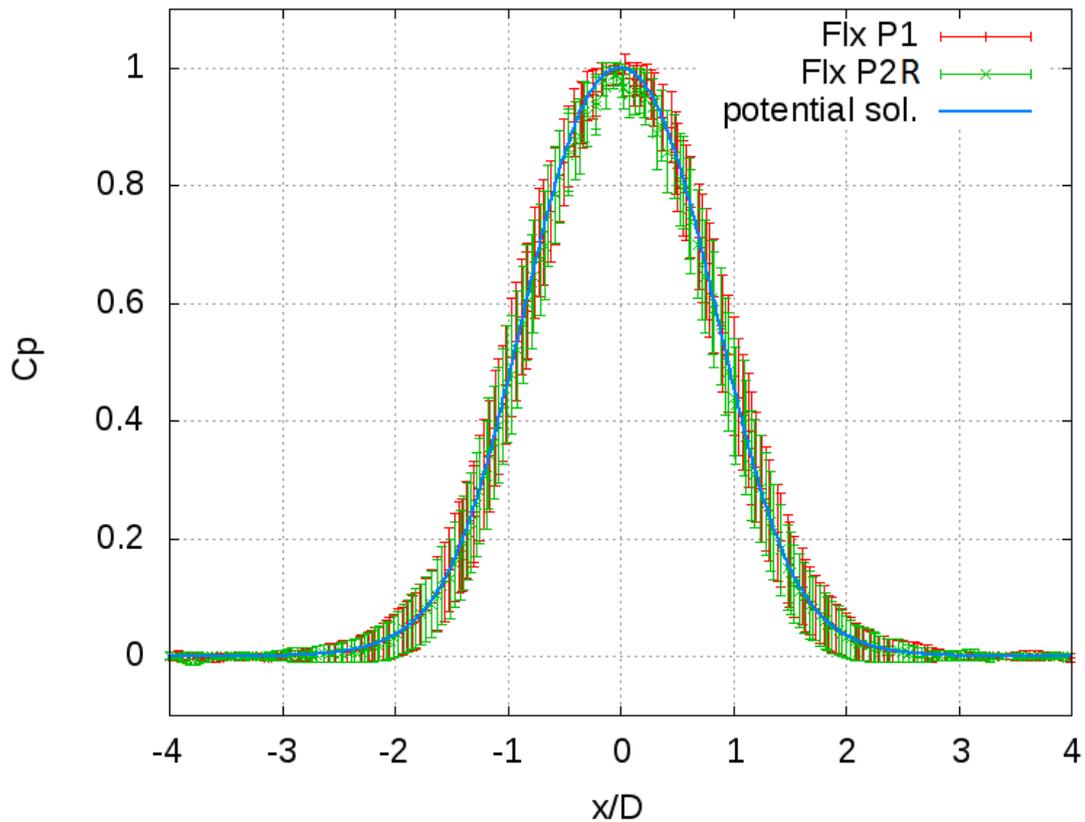
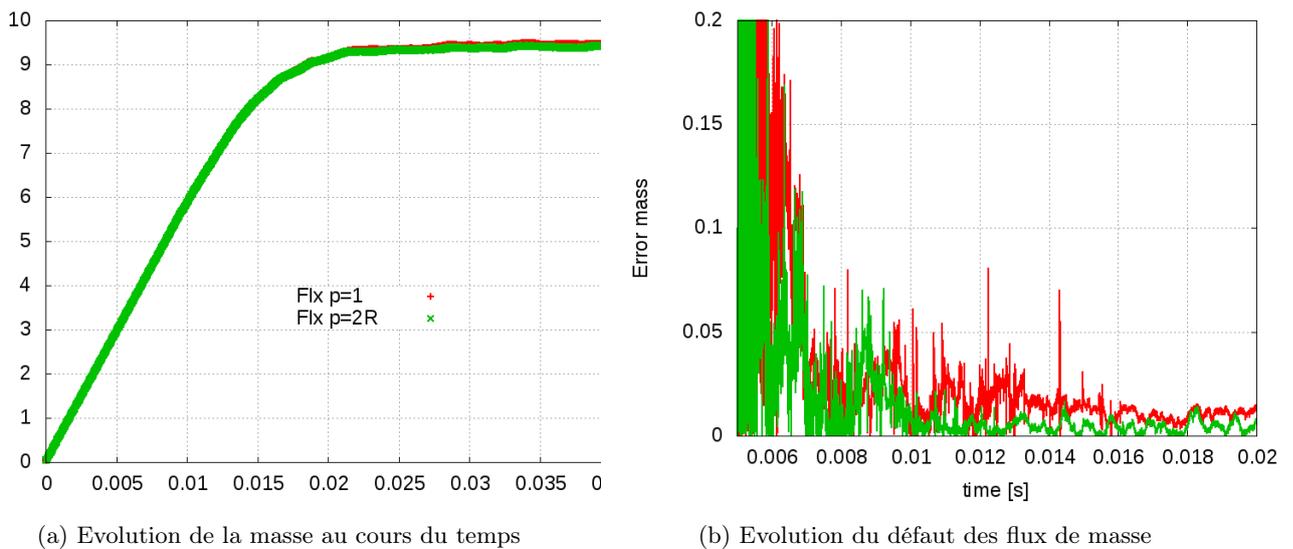


FIGURE 4.39 – Comparaison du coefficient de pression à la paroi en fonction des différents schémas numériques avec *shifting*

La figure (Fig 4.39 ) présente le coefficient de pression en paroi. Comme il est possible de le voir le coefficient de pression varie beaucoup ce qui rend les comparaisons difficiles. Toutefois, la valeur moyenne des coefficients de pression est celle attendue. La force hydraulique à la paroi est surestimée pour les deux schémas 13422 N pour le schéma linéaire avec des variations de l'ordre de 234 N et 13043 N avec des variations de 265 N pour le schéma quadratique.



(a) Evolution de la masse au cours du temps

(b) Evolution du défaut des flux de masse

FIGURE 4.40 – Conservation de la masse au cours du temps pour la simulation du jet impactant une plaque plane en fonction des schémas

Les figures (Fig 4.40a, 4.40b ) présentent l'évolution de la masse et le défaut dans la sommation des flux de masse pour les flux linéaires et quadratiques. Il apparaît que l'apport de flux d'ordre plus précis réduit le défaut

de masse au cours du temps.

## 4.5 Conclusion

Les reconstructions basées sur les moindres carrés permettent de réduire la viscosité numérique introduite par les solveurs de Riemann. L'utilisation de schéma de reconstruction en espace plus précis permet donc à viscosité numérique fixée d'utiliser de plus grosses particules réduisant ainsi significativement le coût de calcul.

Les reconstructions linéaires ( $p=1$ ) basées sur les moindres carrés sont équivalentes en terme de précision aux reconstructions particulières SPH corrigées avec la renormalisation. Cependant, l'approche particulière SPH ne permet pas facilement la montée en ordre. Pour une simulation employant une description eulérienne, le schéma global est alors d'ordre 2 en précision pour une divergence renormalisée avec des flux linéaires. L'introduction des reconstructions quadratiques pour des simulations dans une description eulérienne, permet de réduire la viscosité numérique mais l'ordre global du schéma semble limité en 2D. En effet, l'emploi de reconstructions d'ordre supérieur en 1D avait montré une augmentation de l'ordre global avec l'augmentation de l'ordre des reconstructions. Cependant, les résultats en 2D ont présenté une limitation de l'ordre global borné par 2. Plusieurs explications peuvent être présentées. Tout d'abord, l'introduction en 2D d'aspects purement géométriques absents des simulations 1D peut détériorer singulièrement la qualité de l'opérateur de divergence. L'apport d'une énergie artificielle à travers la correction des schémas SPH-ALE peut expliquer les résultats 1D basés sur la préservation de l'énergie et la quantité de mouvement.

D'autre part dans les zones de troncature du noyau, l'approche récursive de reconstruction des flux permet d'avoir des ordres quadratiques, contrairement à l'approche complète plus sensible à la troncature. La contrepartie est un ordre spatial théorique plus faible  $p + \frac{1}{2}$  contre  $p + 1$  pour les schémas à base complète. Dans le cadre des simulations avec des particules mobiles, les critères de stabilité basés sur la décomposition QR de la matrice des moments se sont révélés efficaces. Les procédures qui découlent de la décomposition QR ont montré leur intérêt sur certaines configurations géométriques. La  $p$ -dégradation permet de dégrader l'ordre des reconstructions dans le cas d'un voisinage trop pauvre ou distordu. La  $p$ -adaptation permet au contraire d'enrichir l'ordre des schémas en fonction d'une erreur locale d'extrapolation. La  $d$ -adaptation permet de calculer les gradients dans des directions de l'espace correctement discrétisées.

De plus, lors de simulations dans une description lagrangienne, le bruit introduit par le désordre des particules ne permet pas de conclure sur l'impact des ordres élevés. En effet, l'ordre global du schéma semble dépendre de la distribution des particules à travers l'évaluation de l'opérateur de divergence. L'apport des ordres élevés avec cet opérateur de divergence standard n'est pas concluant. Le fait de corriger l'opérateur avec des techniques connues (*closed-box*, renormalisation) améliore légèrement les résultats mais cela nécessite une étude plus approfondie. C'est la raison pour laquelle le travail qui suit est focalisé sur des techniques pouvant améliorer la sommation des flux afin de rendre l'ordre des schémas plus indépendant de la distribution des particules. En effet l'opérateur de divergence dans la version standard de la méthode SPH-ALE est calculé avec une approximation SPH inconsistante pour beaucoup de configurations géométriques.

# Chapitre 5

## Opérateur de divergence d'ordre élevé

La contribution personnelle de ce travail de thèse résulte dans la mise en place dans la méthode SPH-ALE de nouvelles fonctions de forme afin de rendre les schémas consistants quelque soit la distribution des particules. Des procédures d'adaptation ont également été développées pour accroître la robustesse de cette approche. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans un journal scientifique à *définir pour la version finale* et d'une présentation à la conférence SPHERIC 2015 [51].

### 5.1 Évaluation de la divergence

La résolution des équations de la mécanique des fluides implique la discrétisation d'un opérateur de divergence pour les flux  $\vec{G}$ . La formulation faible des équations d'Euler conduit à moyenniser cet opérateur sur un volume de contrôle à savoir des éléments de maillage pour des méthodes à maillage ou encore des particules pour la méthode SPH-ALE. La méthode classique qui utilise une valeur moyenne de la divergence des flux est la méthode des volumes finis c'est pourquoi une partie de la démarche est d'explicitier la méthodologie des volumes finis et de la comparer avec celle de la SPH-ALE.

#### 5.1.1 Méthodologie des volumes finis

L'équation de conservation locale (Eq 1.10) sur un volume de contrôle  $\Omega$  nécessite d'évaluer la valeur locale de l'opérateur de divergence. La connaissance de la forme de la frontière  $\partial\Omega$  de l'élément  $\Omega$  permet de transformer l'intégrale volumique en intégrale surfacique par le biais du théorème de Green-Ostrogradski (Eq 5.1).

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = \int_{\partial\Omega|\partial\Omega_{BC}} \vec{n} \cdot \vec{G} d\sigma + \int_{\partial\Omega_{BC}} \vec{n} \cdot \vec{G} d\sigma \quad (5.1)$$

L'intégration sur l'élément  $\partial\Omega_{BC}$  correspond aux contributions des conditions limites à savoir des entrées/sorties ou des parois. Dans la méthode des volumes finis, l'utilisation de reconstructions spatiales d'ordre élevé dans l'évaluation des flux numériques, conduit à utiliser des schémas d'intégration surfacique également d'ordre supérieur [17] [47]. Le schéma global est alors d'une précision donnée. Une quadrature de Gauss sur  $\partial\Omega|\partial\Omega_{BC}$  permet de discrétiser l'équation (Eq 5.1). La quadrature de Gauss qui permet de représenter exactement un polynôme d'ordre  $2N_p - 1$  est majorée par une erreur de précision en  $O(h^{2N_p})$  (Eq 5.2).

$$\int_{\partial\Omega|\partial\Omega_{BC}} \vec{n} \cdot \vec{G} d\sigma = \sum_{j \in V} |\partial\Omega_j| \sum_{N_p \in \partial\Omega_{ij}} \alpha_p \vec{n}_j \cdot \vec{G}_{j, n_p} + O(h^{2N_p}) \quad (5.2)$$

avec  $V$  le voisinage du volume de contrôle  $\Omega$  et  $\partial\Omega_j$  est une interface entre le volume de contrôle et un volume voisin  $j$  dans  $V$  tel que  $\partial\Omega|\partial\Omega_{BC} = \cup \partial\Omega_j$ , et  $N_p$  est le nombre de points de Gauss de poids  $\alpha_p$  tel que  $2N_p > p+1$ .

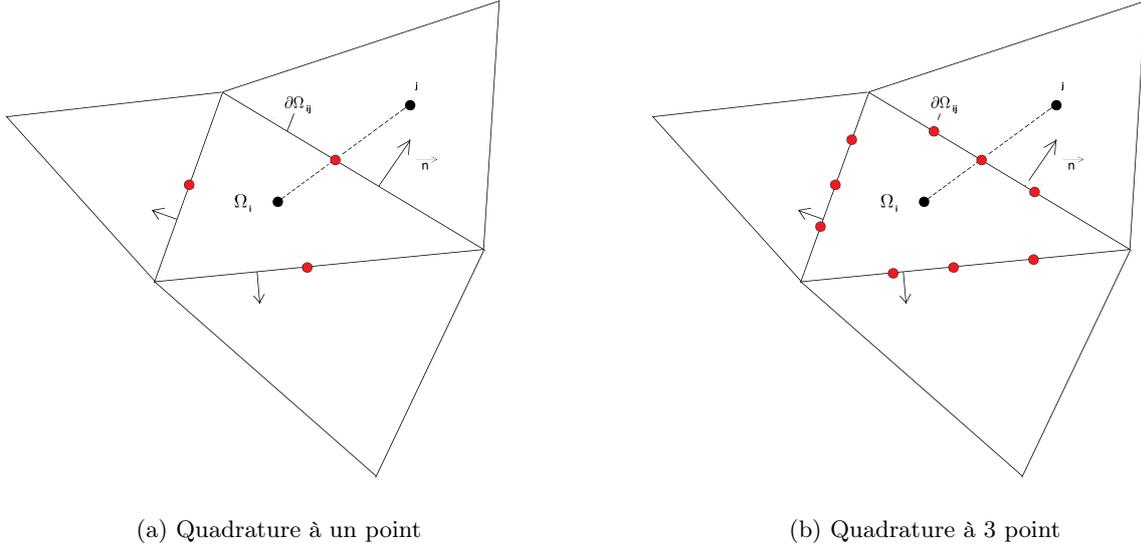


FIGURE 5.1 – Quadrature des flux à travers la frontière  $\partial\Omega$  (en rouge les points de Gauss)

Pour les ordres de reconstruction inférieurs ou égaux à 2, une quadrature à un point est suffisante (Fig 5.1a). Pour des schémas d'ordres supérieurs ( $p > 2$ ) l'ordre de la quadrature est amélioré par l'introduction de points de Gauss sur la surface (Fig 5.1b).

Il existe donc deux types d'erreurs :

1. l'erreur relative à la reconstruction polynomiale des flux en  $O(h^{p+1})$ , introduite dans le chapitre précédent
2. l'erreur relative à l'intégration numérique des flux dans les volumes de contrôles en  $O(h^{2N_p})$

La divergence des flux discrétisée est donc majorée par  $O(h^r)$  avec  $r = \min(p + 1, 2N_p)$ . Avec cette définition de l'erreur de troncature, un schéma est de précision  $O(h^r)$ . Un schéma utilisant des reconstructions constantes ( $p = 0$ ) et un point de Gauss est d'ordre 1 en précision. Avec un schéma utilisant des reconstructions linéaires ( $p = 1$ ), l'erreur dominante est  $O(h^2)$  avec un point de Gauss. Cette erreur introduit de la diffusion numérique. Un schéma à deux points de Gauss avec une reconstruction quadratique ( $p = 2$ ) a une erreur en  $O(h^3)$ . Moins diffusif, ce schéma est plus dispersif. Il est essentiel de bien comprendre que ces erreurs sont très dépendantes du type de maillage [17]. Ainsi, sur un maillage régulier un ordre peut être gagné par élimination des dérivées d'ordre pair.

### 5.1.2 Méthodologie pour la méthode SPH-ALE

Dans la mise en place de schémas d'ordre élevé pour la méthode SPH-ALE, il est nécessaire de disposer de reconstruction de flux d'ordre en précision cohérent avec l'ordre de la quadrature des flux [52]. Dans un contexte sans maillage, la forme de la surface d'intégration  $\partial\Omega$  est inconnue, l'approximation de la moyenne de l'opérateur de divergence reste donc volumique sur  $\Omega$ . En utilisant une approximation noyau, la valeur locale de l'approximation de la divergence est donnée par l'équation (Eq 5.3) qui suit :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV \approx |\Omega| \vec{\nabla} \cdot \vec{G}^h = |\Omega| \left[ \int_V \vec{G} \cdot \vec{\nabla} W dV + \int_{\partial V_{BC}} W \vec{n} \cdot \vec{G} d\sigma \right] \quad (5.3)$$

Cette expression fait intervenir une intégrale volumique sur le voisinage  $V$  de la particule d'intérêt et une intégrale surfacique  $\partial V_{BC}$  où s'exprime les conditions limites. Cette contribution surfacique intervient en raison de la troncature de la fonction noyau  $W$ . La valeur locale de la divergence des flux est donc déterminée par un produit de convolution sur un support fermé. La précision  $q$  de cette valeur dépend donc des propriétés de la fonction noyau et du voisinage après discrétisation. La figure (Fig 5.2) présente les différentes contributions dans le calcul de la divergence. Les éléments de frontière correspondent à  $\partial V_{BC}$  et les particules voisines fluides à  $V$ . L'espace  $\partial V_{BC}$  est équivalent à l'espace  $\partial\Omega_{BC}$  exposé pour la méthode des volumes finis.

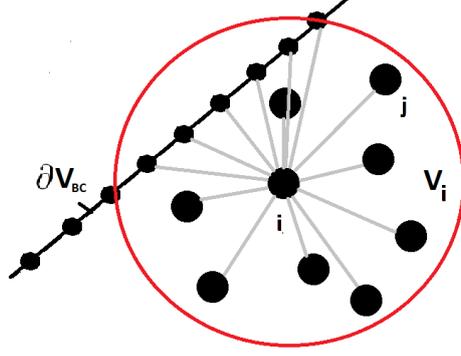


FIGURE 5.2 – Echanges entre la particule d'intérêt  $i$  et ses  $j$ -voisines fluides et/ou de frontières

La précision de la divergence des flux discrète est donc majorée par  $O(h^r)$  avec  $r = \min(p + 1, q)$  avec  $q$  l'ordre de précision de l'approximation discrète de la divergence par la fonction de noyau  $W$ .

## 5.2 La consistance de l'opérateur de divergence

En raison du choix de la fonction noyau (dans ce travail de thèse Wendland  $C^4$ ), l'approximation continue de la divergence (Eq 5.3) est précise d'ordre deux ( $q = 2$ ) et consistante d'ordre 1 en l'absence de troncature du support.

Le passage à une formulation discrète (Eq 5.4) détériore singulièrement la précision et la consistance de l'opérateur  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}^h$ . L'emploi de corrections discrètes est alors nécessaire afin d'assurer ces propriétés. Les corrections consistent essentiellement à modifier le gradient de la fonction noyau  $\vec{\nabla} W$ .

$$\vec{\nabla}_i \cdot \vec{G}^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{G}_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{G}_{ij} \cdot \vec{n}_j \quad (5.4)$$

### 5.2.1 La consistance d'ordre 0

L'opérateur de divergence discret (Eq 5.4) ne garantit pas une valeur nulle pour un flux constant quelque soit la configuration des particules support du calcul (Eq : 5.5).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{1}^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{1} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{1} \cdot \vec{n}_j \neq 0 \quad (5.5)$$

Seul le cas particulier d'une configuration à symétrie centrale des particules permet de compenser deux à deux les interactions, le gradient de la fonction noyau étant impaire. Une disposition cartésienne ou hexagonale (Fig 5.3) permet de compenser les interactions par symétrie. En revanche une disposition bruitée ne le permet plus. Dans toutes les autres configurations géométriques de particule, la divergence est non-nulle malgré un champ constant. En se rappelant que l'objectif est de résoudre des équations hyperboliques, modélisant des écoulements fluides, cette inconsistance conduit à créer de l'énergie cinétique de façon arbitraire à travers le flux de quantité de mouvement [45].

### Approche barycentrique

L'erreur de consistance d'ordre 0 (Eq 5.5) induite par le désordre des particules, peut s'interpréter comme une erreur de localisation d'un barycentre géométrique. En prenant le barycentre positionné en  $X_G$  de la distribution des particules du voisinage  $V_i$  de la  $i$ -particule, pondérés par  $\alpha_j$  tel que  $\alpha_j = \frac{\omega_j \|\vec{\nabla} W_{ij}\|}{\|\vec{X}_j - \vec{X}_i\|} > 0$  et  $\sum_{j \in V_i} \alpha_j \neq 0$  la somme des poids associés aux différentes positions, alors l'équation suivante :

$$\sum_{j \in V_i} \alpha_j \overrightarrow{X_G X_j} = \vec{0} \quad (5.6)$$

peut s'interpréter comme l'équilibre entre les particules du voisinage et leur barycentre définit avec les poids précédents. .

Loin des frontières  $\partial V_i = \emptyset$ , le défaut de consistance d'ordre zéro s'écrit  $\sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{\nabla} W_{ij} \neq \vec{0}$  or

$$\sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{\nabla} W_{ij} = \sum_{j \in V_i} \omega_j \overrightarrow{X_j X_i} \frac{\|\vec{\nabla} W_{ij}\|}{\|\overrightarrow{X_j X_i}\|} \quad (5.7)$$

il est alors possible d'écrire que

$$X_i \neq \frac{\sum_{j \in V_i} \omega_j \overrightarrow{X_j X_i} \|\nabla \vec{W}_{ij}\| / \|\overrightarrow{X_j X_i}\|}{\sum_{j \in V_i} \omega_j \|\nabla \vec{W}_{ij}\| / \|\overrightarrow{X_j X_i}\|} = \frac{\sum_{j \in V_i} \alpha_j \overrightarrow{X_j X_i}}{\sum_{j \in V_i} \alpha_j} = X_G \quad (5.8)$$

L'erreur de consistance d'ordre zéro (Eq 5.4) correspond donc à un décalage entre la position d'intérêt  $X_i$  et la position  $X_G$  d'un barycentre géométrique de son voisinage. Les poids  $\alpha_j$  qui définissent ce barycentre sont calculés avec le gradient de la fonction noyau évaluée en  $X_i$ . Le poids associé à la particule d'intérêt  $i$  est donc nul. Le gradient de la fonction noyau étant centré sur  $X_i$  et non sur  $X_G$  en cas de non symétrie géométrique, la somme des vecteurs  $\alpha_j \overrightarrow{X_G X_j}$  est non-nulle.

En cas de décalage, le déséquilibre introduit un terme source qu'il faudra compenser pour rééquilibrer les interactions. Un moyen pour corriger cela, pourrait être d'évaluer les flux au barycentre géométrique  $G$  et non au point d'intérêt  $X_i$ .

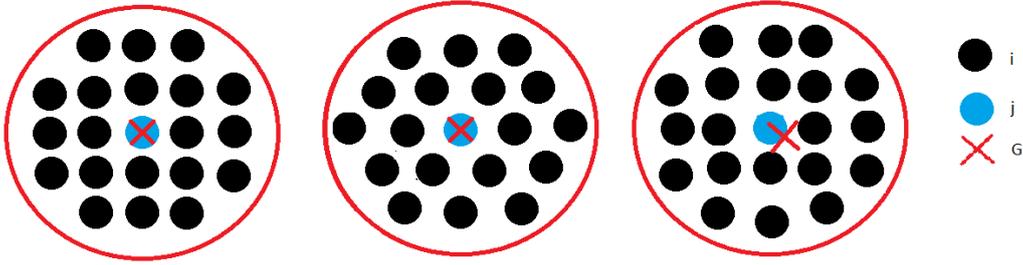


FIGURE 5.3 – Disposition cartésienne (à gauche), hexagonale (au centre) et bruitée (à droite) des particules voisines  $j$  autour de la particule d'intérêt  $i$  et du barycentre

### Vision avec maillage

Dans les méthodes à maillage classiques permettant de résoudre des équations hyperboliques (méthodes des volumes finis, éléments finis, Galerkin discontinu), la question de la consistance d'ordre 0 de l'opérateur se pose aussi. Bien que souvent triviale par la création du maillage la condition  $\sum_{j \in V_i} \vec{n}_j |\Omega_{ij}| = \vec{0}$  peut être moins évidente lors de la génération du maillage par la distorsion des mailles ou encore lors d'un mouvement ALE. La loi de conservation géométrique (GCL) [59] est définie afin justement de vérifier la validité de l'évolution des volumes avec les autres équations de conservation. Cette loi impose une notion de consistance pour l'opérateur de divergence du champ de transport du maillage (Eq 5.9). En effet pour une vitesse de champ de transport uniforme, les volumes des mailles ne doivent pas être modifiés. De plus, le mouvement des frontières par un mouvement ALE doit conduire à une évolution du volume cohérente (Fig 5.4).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{v}_0 \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (5.9)$$

L'intégrale finale de l'équation (Eq 5.9) est équivalente à :  $\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 dV = 0$ . L'opérateur de divergence doit donc être consistant d'ordre 0 pour satisfaire la loi géométrique de conservation sur un champ de transport uniforme.

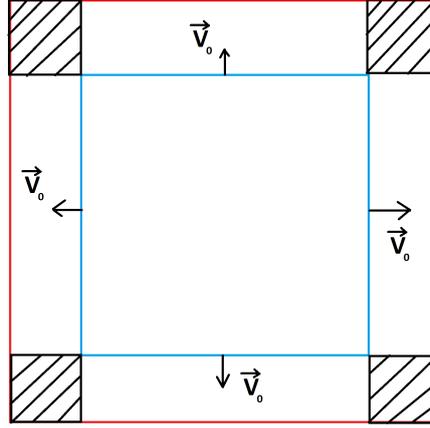


FIGURE 5.4 – Évolution des frontières d'un volume initial (en bleu) vers un volume final (en rouge) et défaut de conservation (hachuré)

### Vision sans maillage

De part la forte mobilité des particules dans la méthode SPH, ce défaut de consistance d'ordre 0 est souvent observé (Eq 5.5). Lors des simulations d'écoulement, cette erreur est responsable entre autre du bruit sur la masse volumique [20] [16]. L'évaluation (Eq 5.4) de l'opérateur de la divergence doit donc être consistante quelque soit la disposition du voisinage des particules. Pour pallier à cela, la disposition des particules et/ou la valeur du gradient de la fonction noyau responsable de l'approximation de la divergence peuvent être modifiées afin de restaurer certaines propriétés de consistance. Le déplacement des particules sera exposé dans la section 5.2.4.

Pour rendre l'opérateur discret de divergence consistant d'ordre 0, le plus simple est de retrancher le gradient de l'unité (Eq 5.10). Cela se traduit par une auto contribution de flux qui fait perdre la propriété de conservation du schéma car si  $\vec{G}_{ij} = -\vec{G}_{ji}$  alors  $\vec{G}_{ij} - \vec{G}_i \neq -(\vec{G}_{ji} - \vec{G}_j)$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j (\vec{G}_{ij} - \vec{G}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} (\vec{G}_{ij} - \vec{G}_i) \cdot \vec{n}_j \quad (5.10)$$

Une autre technique de correction est de quantifier l'erreur commise par l'asymétrie géométrique et de la répartir sur l'ensemble des voisins afin de restaurer la consistance d'ordre 0 [45]. Cela se fait en modifiant le gradient de la fonction noyau noté  $\vec{\nabla} W_{ij}^C$ .

$$\sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{\nabla} W_{ij}^C + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{n}_j = \vec{0} \quad (5.11)$$

avec  $\vec{\nabla} W_{ij}^C = \vec{\nabla} W_{ij} - c_{ij} \vec{\epsilon}_i$  avec  $\vec{\epsilon}_i = \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{n}_j$  et  $\sum_{j \in V_i} \omega_j c_{ij} = 1$  avec  $c_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_{k \in V_i} W_{ik}}$ .

Il faut remarquer que cette correction fait perdre également la conservativité de l'opérateur (Eq 5.12) car le terme correcteur est propre à la particule  $i$  et non commun au couple  $(i, j)$ . En revanche, cette divergence est bien d'ordre 0 en consistance et 1 en précision.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{G}_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij}^C + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{G}_{ij} \cdot \vec{n}_j \quad (5.12)$$

Ces deux méthodes de correction ne modifient pas la direction  $\vec{n}_j$  du problème de Riemann partiel au niveau des interactions entre les particules fluides et les éléments de frontière. En revanche l'orientation de l'interaction entre fluides  $\vec{n}_{ij}$  est modifiée dans le second schéma par  $\vec{n}_{ij}^c = \frac{\vec{\nabla} W_{ij}^C}{\|\vec{\nabla} W_{ij}^C\|}$  (Eq 5.12). Ces corrections peuvent s'interpréter comme un décalage du gradient de la fonction noyau associé à une déformation non uniforme. Il est essentiel de préciser que ces modifications de direction interviennent dans la sommation des flux seulement. Le problème de Riemann lui est toujours dans la direction d'interaction géométrique pour le solveur classique et selon la normale géométrique pour le solveur partiel.



(a) Modification de la direction d'interaction orientant le problème de Riemann par la correction de la consistance d'ordre 0 (b) Normales d'interaction  $\vec{n}_{ij}$  et normales géométriques  $\vec{n}$

FIGURE 5.5 – Illustration des normales dans les approches avec et sans maillages

La figure (Fig 5.5a) montre l'écart que peut induire la correction  $\vec{n}_{ij}^c = \frac{\vec{\nabla}W_{ij}^c}{\|\vec{\nabla}W_{ij}^c\|}$ . La méthode SPH-ALE utilise la normale d'interaction comme normale de projection des flux. La face est virtuelle, il n'existe donc pas de normale géométrique. En revanche en disposant d'un maillage (Fig 5.5b), les flux sont projetés selon la normale qui porte l'interface au travers de laquelle le flux passe.

### 5.2.2 La consistance d'ordre 1

L'opérateur de divergence étant une dérivée première, il est naturel d'étudier la reproductibilité de celui-ci, i.e. sa consistance d'ordre 1. En prenant un flux linéaire  $\vec{G}(X) = \bar{a}X + \bar{b}$ , il convient que en disposant d'un opérateur consistant d'ordre 1, la divergence sera égale à  $trace(\bar{a})$ . Il va de soit que tout comme la consistance d'ordre 0, dans l'extrême majorité des configurations géométriques du voisinage, la consistance d'ordre 1 n'est pas réalisée ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}(X) \neq trace(\bar{a})$ ). En effet, cette reproductibilité est possible si et seulement si le moment d'ordre un est égal à l'unité (Eq 5.13).

$$\int_V \Delta \vec{X} \otimes \vec{\nabla} W(X - Y, h) dV + \int_{\partial V} W(X - Y, h) \Delta \vec{X} \otimes \vec{n} d\sigma = \bar{I} \quad (5.13)$$

La correction de renormalisation développée dans [48] impose une correction sur le gradient de la fonction noyau  $\vec{\nabla} W$  de la manière suivante :

$$\vec{\nabla} W_{ij}^R = \bar{L}_i \vec{\nabla} W_{ij} \quad (5.14)$$

avec la matrice pleine  $\bar{L}_i$  définie par l'équation (Eq 5.15) de taille  $d \times d$ .

$$\bar{L}_i = \left[ \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{X}_{ij} \otimes \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial W_{ij} \vec{X}_{ij} \otimes \vec{n}_j \right]^{-1} \quad (5.15)$$

Pour une simulation 2D, la matrice  $\bar{L}_i$  d'une particule loin des frontières  $\partial V_i = \emptyset$  est présentée par :

$$\bar{L}_{2,2} = \sum_{j \in D_i} \omega_j \begin{pmatrix} \Delta_i X_{1,1} \nabla W_1 & \Delta_i X_{2,1} \nabla W_1 \\ \Delta_i X_{1,1} \nabla W_2 & \Delta_i X_{2,1} \nabla W_2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

avec  $\Delta_i X_1 = (X_{ij,1} - X_{i,1})$ ,  $\Delta_i X_2 = (X_{ij,2} - X_{i,2})$ ,  $\vec{\nabla} W_{ij} = (\nabla W_1; \nabla W_2)$ . Cette matrice  $\bar{L}$  est locale, non-symétrique.

Cette correction d'origine continue (Eq 5.13) appliquée aux formes discrètes (Eq 5.14) permet de satisfaire la consistance d'ordre 1 sans imposer la consistance d'ordre 0. Le gradient est toutefois consistant d'ordre 0 par construction. Il est même admis explicitement une erreur de par le retranchement de la valeur nodale  $\vec{X}_{ij} = X_j - X_i$ . Cette mise à l'échelle permet de disposer du caractère local pour la matrice de renormalisation.

L'opérateur de divergence discrète de l'équation (Eq 5.17) bénéficie de la correction de renormalisation ce qui le rend consistant d'ordre 1. L'introduction du flux  $\vec{G}_{ij} = \frac{\vec{G}_i + \vec{G}_j}{2}$  conduit à perdre la consistance d'ordre 0 par construction.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{G}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij}^R + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j W_{ij} \vec{G}_{ij} \vec{n}_j^R \quad (5.17)$$

Le schéma (Eq 5.17) modifie la direction de tous les problèmes de Riemann entre fluides ( $\vec{n}_{ij}^R \neq \vec{n}_{ij}$ ) mais également la direction des problèmes de Riemann partiel ( $\vec{n}_j^R \neq \vec{n}_j$ ). Cette modification peut poser des problèmes de cohérence notamment aux niveaux des conditions limites où la normale est souvent imposée géométriquement. Cette correction correspond à une déformation du gradient de la fonction noyau.

Pour permettre d'avoir un schéma conservatif, Vila [61] a proposé une correction sous une forme symétrisée  $\frac{(\vec{L}_i + \vec{L}_j)}{2}$  mais il va de soi que c'est au détriment de toute forme de consistance.

Il s'agit maintenant d'apprécier la précision de l'opérateur (Eq 5.17). Il faut tout d'abord noter que la variation  $\Delta \vec{X}_i$  est majorée par la taille du support compact de la fonction noyau. En effet il existe un réel  $C > 0$ , tel que  $\|\Delta \vec{X}_i\| < Ch_i$ .

Soit un développement de Taylor d'ordre 2 autour de la position d'une  $i$ -particule loin de toute frontière dans l'équation (Eq 5.17) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \left( \vec{G}_i + \Delta_i X^T \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i + \frac{1}{2} \Delta_i X^T \bar{\bar{H}}(\vec{G}_i) \Delta_i X + O(\Delta_i X^2) \right) \vec{\nabla} W_{ij}^R \quad (5.18)$$

alors en appliquant une norme usuelle  $L^2$ , et l'inégalité triangulaire, le résultat de [62] est retrouvé tel qu'il existe un réel  $C$  fini tel que :

$$\|\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h - \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i\| < Ch \|L_i\|_\infty \|\bar{\bar{H}}(\vec{G}_i)\| \quad (5.19)$$

La norme infinie  $\|\bar{\bar{L}}_i\|_\infty$  de la matrice de la correction de renormalisation est supposée comme bornée. Ceci est raisonnable étant entendu que cette matrice est proche de la matrice identité. De plus la distance entre particule est majorée par la longueur de dilatation  $h$ ,  $\|\Delta_i X\| < h$ . Il est à noter que cette approximation de l'erreur de consistance (Eq 5.19) suppose que la consistance d'ordre 0 est obtenue (le moment d'ordre 0 ayant disparu). Cette majoration impose aussi une condition sur le gradient du noyau [10] tel que il existe une constante  $C$  positive  $\sum_{j \in V_i} \omega_j \|\vec{\nabla} W_{ij}\| < \frac{C}{h}$ . Ce résultat montre que l'opérateur de divergence (Eq 5.17) est consistant d'ordre 1 sous réserve de la consistance d'ordre 0 imposée géométriquement. Dans ces conditions géométriques, la précision de l'opérateur est d'ordre 2 en raison de la disparition du moment d'ordre 2, le gradient du noyau étant impair  $\sum_{j \in V_i} \omega_j \Delta_i X^2 \vec{\nabla} W_{ij} = 0$ .

### 5.2.3 La consistance d'ordre $p$

Les précédentes sections ont illustré l'état de l'art de la méthode SPH-ALE concernant la montée en ordre de la sommation des flux. La combinaison de la consistance d'ordre 0 et 1 (Eq 5.12,5.17) simultanément semble compliquée, hors configurations géométriques favorables. Les techniques pour améliorer l'opérateur de divergence conduisent inexorablement à perdre la conservation  $\vec{\nabla} W_{ij}^{RC} \neq -\vec{\nabla} W_{ji}^{RC}$ . Les résultats présentés précédemment (partie I) sur la conservation de la masse lors d'une simulation des tourbillons de Taylor-Green l'ont exposé.

Il existe toutefois des techniques qui permettent d'imposer les propriétés de consistance simultanément. Un système linéaire contentant le gradient de la fonction noyau et le noyau peut être formulé pour imposer les consistances sur les deux fonctions [37]. Cette approche ne sera pas utilisée. L'utilisation de fonctions de forme pondérées  $\vec{\psi}$ , calculées à partir de moindres carrés permet également d'imposer un nombre arbitraire de propriété de  $p$ -consistance [8]. L'idée est de remplacer le gradient de la fonction noyau  $\vec{\nabla} W$  dans (Eq 5.3) par une fonction  $\vec{\psi}$ . Cette fonction  $\vec{\psi}$  est définie comme le produit d'un vecteur de polynôme d'ordre  $p$  et d'une fonction de pondération arbitraire  $\vec{\psi}(X) = W(X, h) \bar{P}(X)$ .

Pour illustrer le concept, une fonction de forme basée sur une expansion polynomiale linéaire  $p = 1$  peut être choisie. Cet ordre permet d'imposer que les moments d'ordre 0 soient nuls (Eq 5.20) et que ceux d'ordre 1 soient égaux à l'unité (Eq 5.21).

$$\int_{\Omega} \vec{\psi} dV = \vec{0} - \int_{\partial \Omega_{BC}} W \vec{n} d\sigma \quad (5.20)$$

et

$$\int_{\Omega} \Delta \vec{X} \otimes \vec{\psi} dV = \bar{I} \bar{d} - \int_{\partial \Omega_{BC}} W \Delta \vec{X} \otimes \vec{n} d\sigma \quad (5.21)$$

Dans ce cas  $\vec{P}$  est linéaire par composant. Un problème aux moindres carrés (Eq 3.5) combinant (Eq 5.20, 5.21) est résolu à travers une matrice symétrique de taille  $3 \times 3$  en 2D ( $4 \times 4$  en 3D). Les deux consistances 0 et 1 pour l'opérateur de divergence sont assurées simultanément.

$$\vec{M}_{3,3} = \sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} \begin{pmatrix} 1 & \Delta_i X_1 & \Delta_i X_2 \\ \Delta_i X_1 & \Delta_i X_1^2 & \Delta_i X_{1,2} \\ \Delta_i X_2 & \Delta_i X_{1,2} & \Delta_i X_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

avec  $\Delta_i X_1 = (\frac{X_{ij,1} - X_{i,1}}{h_i})$ ,  $\Delta_i X_2 = (\frac{X_{ij,2} - X_{i,2}}{h_i})$ ,  $\Delta_i X_{1,2} = (\frac{X_{ij,1} - X_{i,1}}{h_i})(\frac{X_{ij,2} - X_{i,2}}{h_i})$  et  $W_{ij}$  est évaluée entre  $i$  et la position de l'interface  $ij$ .

Les membres de droite  $\vec{B}_{13,1}, \vec{B}_{23,1}$  sont composés de la différence des vecteurs  $(0; 1; 0)$  et  $(0; 0; 1)$  avec les contributions de bords sur les moments pour chaque direction de l'espace. Il convient donc de résoudre deux problèmes matriciels en 2D et 3 en trois dimensions de l'espace.

$$\vec{B}_{13,1} = \sum_{j \in D_i} \omega_j^\partial W_{ij} \begin{pmatrix} 0 - \vec{n}_1 \\ 1 - \Delta_i X_1 \vec{n}_1 \\ 0 - \Delta_i X_2 \vec{n}_1 \end{pmatrix} \quad \vec{B}_{23,1} = \sum_{j \in D_i} \omega_j^\partial W_{ij} \begin{pmatrix} 0 - \vec{n}_2 \\ 0 - \Delta_i X_1 \vec{n}_2 \\ 1 - \Delta_i X_2 \vec{n}_2 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

La sommation des flux d'ordre élevé est obtenue en augmentant l'ordre ( $p > 1$ ) de l'expansion polynomiale de  $\vec{P}$ . Cela est possible en complétant les équations (Eq 5.20, 5.21) avec les conditions suivantes :

$$\int_{\Omega} \Delta \vec{X}^p \cdot \vec{\psi} dV = 0 - \int_{\partial \Omega_{BC}} W \Delta \vec{X}^p \cdot \vec{n} d\sigma \quad (5.24)$$

Ces conditions conduisent à résoudre un problème aux moindres carrés plus grand de dimension  $m \times m$  pour calculer les coefficients polynomiaux dans  $\vec{P}(\cdot)$  (Tab 3.1). La résolution matricielle du système est de nouveau basée sur une décomposition QR.

Après obtention des coefficients polynomiaux, la forme discrète de l'opérateur de divergence est de la forme de l'équation (Eq 5.25).

$$\vec{\nabla}_i \cdot \vec{G}^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \vec{G}_{ij} \cdot \vec{\psi}_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j W_{ij} \vec{G}_{ij} \cdot \vec{n}_j \quad (5.25)$$

Cet opérateur est consistant d'ordre 0 à  $p$  mais il faut admettre qu'il est non conservatif :  $\vec{\psi}_{ij} \neq -\vec{\psi}_{ji}$  [37].

La direction des problèmes de Riemann partiel est non modifiée par cette approche. En revanche tout comme pour les précédentes corrections, la normale d'interaction entre les fluides n'est pas toujours dirigée selon  $\vec{n}_{ij}$  la direction géométrique formé par les particules. De nouveau, la direction des problèmes de Riemann pour  $\vec{G}_{ij}$  est toujours géométrique c'est seulement au niveau de la sommation que peut intervenir le décalage dû à la fonction de forme  $\vec{\psi}_{ij}$ . En effet  $\vec{\psi}_{ij}$  n'est pas nécessairement colinéaire avec  $\vec{n}_{ij}$  en présence d'une erreur de consistance d'ordre 0.

#### Remarque

En cas d'arrangement particulaire propice à une erreur de consistance d'ordre 0 proche de zéro, la forme de la fonction  $\psi$  est proche de celle du gradient du noyau. Le cas simple unidimensionnel loin de toutes frontières permet de le voir en définissant la fonction de forme comme  $\psi(X) = (a_0 + a_1(X - X_i) + a_2(X - X_i)^2)W(X - X_i)$  avec  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  les coefficients polynomiaux. Pour les déterminer, la matrice  $\vec{M}_{3,3}$  est définie comme suit :

$$\sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} \begin{pmatrix} 1 & \Delta_i X & \Delta_i X^2 \\ \Delta_i X & \Delta_i X^2 & \Delta_i X^3 \\ \Delta_i X^2 & \Delta_i X^3 & \Delta_i X^4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} & 0 & \sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} \Delta_i X^2 \\ 0 & \sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} \Delta_i X^2 & 0 \\ \sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} \Delta_i X^2 & 0 & \sum_{j \in D_i} \omega_j W_{ij} \Delta_i X^4 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Avec le second membre égal à  $(0; 1; 0)$ , le résultat conduit à  $a_0, a_2 \rightarrow 0$ ,  $a_1 \rightarrow \frac{1}{\sum_{j \in D_i} \omega_j \Delta_i X^2 W_{ij}}$ . L'ordonnée à l'origine  $a_0$  est nulle et le coefficient  $a_2$  est également nul. Les fonctions de forme linéaire et quadratique très semblables, passent alors par l'origine  $\psi(0) = 0$ .

Il est maintenant intéressant de regarder l'erreur de précision de ce type d'approche. De nouveau, un développement de Taylor d'ordre 2 du flux est introduit dans l'équation (Eq 5.25) pour une particule  $i$  loin de toutes frontières.

$$\vec{\nabla}_i \cdot \vec{G}^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \left( \vec{G}_i + \Delta_i X^T \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i + \frac{1}{2} \Delta_i X^T \vec{H}(\vec{G}_i) \Delta_i X + O(\|\Delta_i X\|^2) \right) \vec{\psi}_{ij} \quad (5.27)$$

Par construction le moment d'ordre 0 est nul et le moment d'ordre 1 vaut l'unité, cela entraîne la majoration suivante pour une fonction de forme  $\vec{\psi}_{ij}$  consistante d'ordre 1 :

$$\|\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h - \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i\| < Ch^2 \|\vec{H}(\vec{G}_i)\| \sum_{j \in V_i} \omega_j \|\vec{\psi}_{ij}\| \quad (5.28)$$

D'après [37], il existe une constante  $C$  tel que  $\sum_{j \in V_i} \omega_j \|\vec{\psi}_{ij}\| < \frac{C}{h}$  ce qui conduit à remarquer que grâce à l'équation (Eq 5.28) l'opérateur est consistant d'ordre 0 et précis d'ordre 1 ( $q=1$ ). La similarité avec la renormalisation est évidente.

Pour renforcer la consistance mais surtout la précision, il s'agit d'éliminer les moments d'ordre supérieur ( $p>1$ ). Pour une fonction de forme  $\vec{\psi}_{ij}$  consistante d'ordre 2 ( $p=2$ ), la majoration est en  $h^2$  après introduction d'un développement de Taylor d'ordre 3.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}^h = \sum_{j \in V_i} \omega_j \left( \vec{G}_i + \Delta_i X^T \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i + \frac{1}{2} \Delta_i X^T \bar{H}(\vec{G}_i) \Delta_i X + \frac{1}{6} \Delta_i X^3 D^3(\vec{G}_i) + O(\Delta_i X^3) \right) \vec{\psi}_{ij} \quad (5.29)$$

avec  $D^3(\cdot)$  un opérateur différentiel d'ordre 3. L'erreur est ainsi majorée par :

$$\|\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i^h - \vec{\nabla} \cdot \vec{G}_i\| < Ch^3 \|D^3(\vec{G}_i)\| \sum_{j \in V_i} \omega_j \|\vec{\psi}_{ij}\| \quad (5.30)$$

Il convient donc que l'ordre en consistance est 1 mais la précision est 2. La précision de l'opérateur de divergence croit donc avec l'introduction d'une fonction de forme capable de supprimer les moments d'ordre supérieur. La taille du système linéaire à utiliser est exposée dans le tableau (Tab 3.1).

Un cas simple de reconstruction de divergence d'un champ complexe a été calculé en 2D sur une distribution de particules dans un carré unitaire. Deux côté adjacents de ce carré possèdent une discrétisation de paroi qui sera donc prise en compte pour le calcul de l'opérateur de divergence. La configuration géométrique de particules correspond à la position cartésienne aléatoirement bruitée. Le champ vectoriel imposé, est défini par  $\vec{f}(X_1, X_2) = (2X_1^4 + 8X_2^4; 5X_1^4 + X_2^4)$ , la solution théorique de la divergence est donc  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(X_1, X_2) = 8X_1^3 + 4X_2^3$  (Fig 5.6).

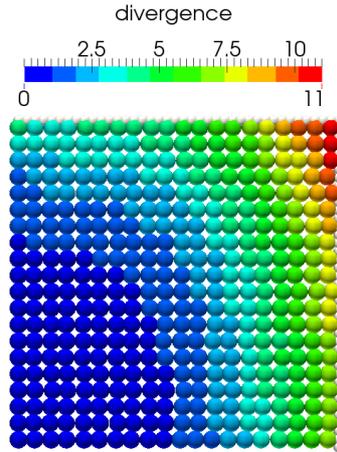


FIGURE 5.6 – Champ de divergence sur un support de 20 particules aléatoirement positionnées dans un carré unitaire en 2D.

Le tableau (Tab 5.1) expose les résultats des approximations de la divergence en fonction du nombre de particules par côté.

N	p=1		p=2		p=3	
	$\ \nabla f - \nabla^h f\ $	Ordre	$\ \nabla f - \nabla^h f\ $	Ordre	$\ \nabla f - \nabla^h f\ $	Ordre
5	4.61E-1	-	1.03E-1	-	91E-2	-
10	2.15E-1	1.09	3.22E-2	1.67	1.51E-2	2.58
20	9.65E-2	1.15	9.39E-3	1.77	3.20E-3	2.22
60	2.15E-2	1.36	1.11E-3	1.94	1.21E-4	2.98
100	1.09E-2	1.32	4.09E-4	1.99	3.11E-5	2.71

TABLE 5.1 – Erreur de reconstruction de la divergence d'un champ vectoriel en 2D

La convergence spatiale des différents opérateurs de divergence est conforme à la troncature du développement de Taylor associé à l'expansion polynomial la fonction de forme. L'opérateur  $p = 1$  est majoré par  $h$  ce qui impose un convergence d'ordre 1 ( $q = 1$ ). En augmentant l'ordre du polynôme de la fonction de forme, l'opérateur est bien d'ordre 2 ( $q = 2$ ). Le même procédé est appliqué pour atteindre l'ordre 3 ( $q = 3$ ). Il est donc raisonnable d'utiliser le schéma l'opérateur de divergence d'ordre 2 avec des flux ( $p = 1$ ) et la divergence d'ordre 3 pour les flux quadratiques. Les schémas auront ainsi un ordre spatial global comme étant le minimum des erreurs de précision (quadrature  $q$ , et flux  $p + 1$ ). Dans la suite de ce manuscrit, le schéma divP1 Flx p=1 est un schéma possédant des reconstructions linéaires (Flx  $p = 1$ ) et une divergence d'ordre 2 en précision en accord avec ces reconstructions. De même pour les reconstructions quadratiques (Flx  $p = 2$ ), la divergence notée divP2 sous-entend une précision de la divergence en accord avec les flux i.e. d'ordre 3.

## 5.2.4 La cinématique des particules

Un mouvement de décalage des particules a été introduit dans le packing algorithm de Colagrossi et al [16] afin d'éviter les trous dans la répartition des particules. Neuhauser [45] présente un autre type de mouvement basé sur l'erreur locale de consistance d'ordre 0. Dans ce travail, cette erreur est appelée : *closed-box*, cette même erreur s'appelle *E0* dans [19]. L'idée de ce mouvement est de minimiser l'erreur *closed-box*, de pousser les particules dans les trous. Cela permet de faciliter les propriétés de consistance des schémas numériques en réordonnant les particules. Le système formé par la position, les vitesses de transport et la pression de référence  $P_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}$  est considéré comme hyperbolique. Le décalage de la position est donné par l'équation (Eq 5.31).

$$\frac{dv_0}{dt}_{corr} = \sum_{j \in V_i} \omega_j [P_0 + \frac{c_0}{2}(v_0(x_i) - v_0(x_j)) \cdot \vec{n}_{ij}] \vec{\nabla} W_{ij} + \sum_{j \in \partial V_i} \omega_j^\partial [P_0 + \frac{c_0}{2}(v_0(x_i) - v_0(x_j)) \cdot \vec{n}_j] \vec{n}_j W_{ij} \quad (5.31)$$

avec  $\vec{n}_{ij} = \frac{\vec{\nabla} W_{ij}}{\|\vec{\nabla} W_{ij}\|}$ . Pour régulariser ce champ, un terme supplémentaire est introduit dans Eq.5.32.

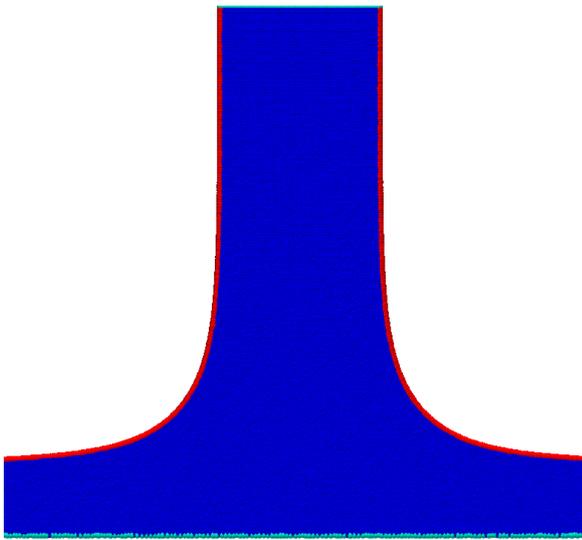
$$\frac{dv_0}{dt}_{smooth} = \frac{dv_0}{dt}_{corr} + \alpha \sum_{j \in V_i} \omega_j \frac{c_0}{h_j} (v_0(x_j) - v_0(x_1)) W_{ij} \quad (5.32)$$

avec  $\alpha$  un paramètre numérique.

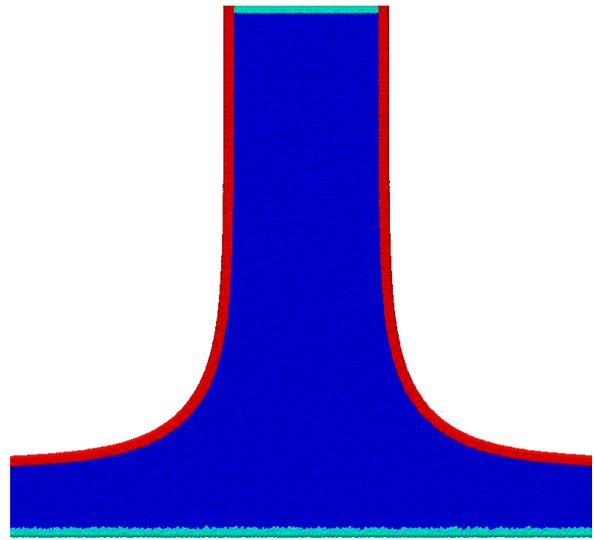
Les mouvements de décalage de positions des particules (*shifting*) nécessitent donc l'expression explicite en temps de l'équation Eq : 5.33.

$$x_i^{n+1} = x_i^n + v_0^n(x_i) \Delta t - \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{dv_0}{dt}_{smooth} \quad (5.33)$$

Ces légers déplacements des particules ne peuvent cependant pas toujours être faits sur l'ensemble du domaine de calcul. Par exemple près de la surface libre ce mouvement force les particules à combler le trou naturel dû à l'absence de particules dans la phase gazeuse. Des critères de détection de la surface libre ont été développés dans ASPHODEL. Le premier donne l'information si la particule est en surface libre (Fig 5.7a). Le second critère quant à lui donne l'information si une particule du voisinage est en surface libre (Fig 5.7b). Ces deux critères combinés permettent de définir une couche de 3 particules en surface libre où le mouvement ne sera pas corrigé.



(a) Critère de localisation propre



(b) Critère de localisation dans le voisinage

FIGURE 5.7 – Critère de détection de la surface libre (rouge : en surface libre, bleu clair : proche paroi et bleu foncé : dans le fluide)

Au regard des équations précédentes qui permettent ce mouvement de *shifting*, il apparaît que la vitesse du son numérique  $c_0$  joue un rôle important dans la qualité de ce mouvement à travers son impact sur le pas de temps en raison de la condition CFL et aussi avec la valeur de la pression de référence  $P_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}$ .

## 5.3 Adaptabilité de la divergence des flux

### 5.3.1 Algorithme de la sommation des flux

Tout comme la reconstruction de flux, la sommation des flux doit s'adapter au voisinage qui lui sert de support. Les procédures évoquées au chapitre 3 sont donc communes aux reconstructions de flux et à la sommation de ces mêmes flux. La seule différence réside dans la  $d$ -adaptativité qui n'a pas été développée pour la divergence. En fonction de la reconstruction choisie, le schéma peut adapter l'ordre de l'opérateur de divergence avec la reconstruction des états, c'est la  $p$ -adaptation. Pour les mêmes raisons que les reconstructions de flux, la matrice de la sommation des flux est sensible à la troncature de son noyau. La  $p$ -dégradation est donc la procédure d'adaptation la plus utilisée.

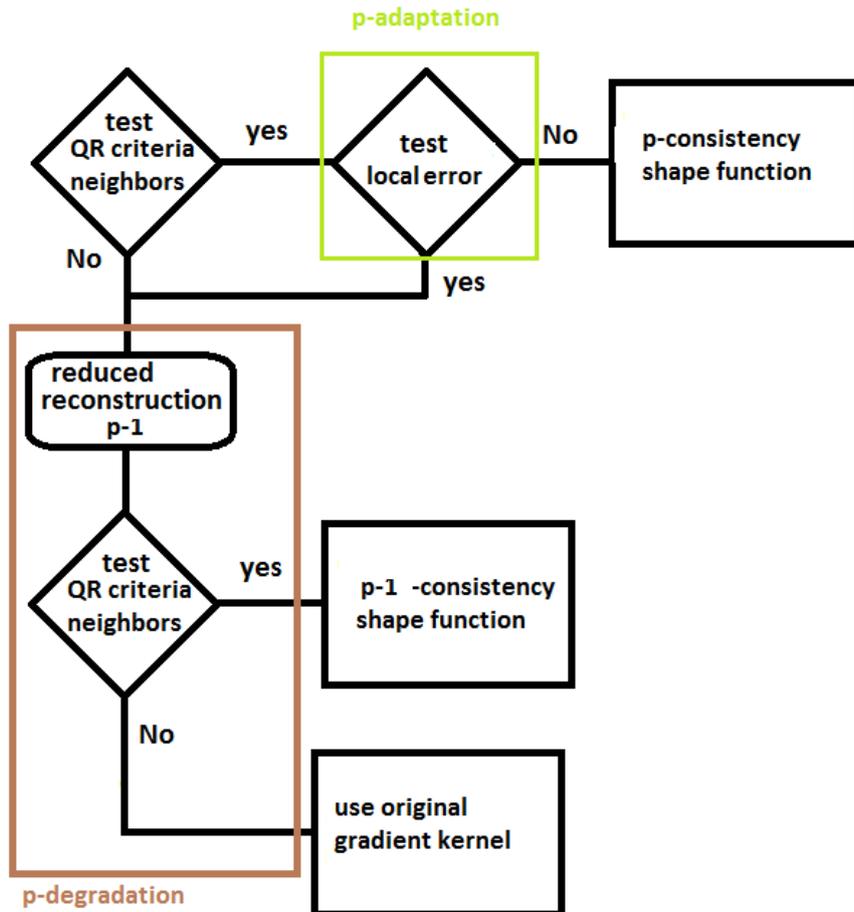


FIGURE 5.8 – Algorithme permettant l'évaluation des fonctions de forme pour l'opérateur de divergence

Reconstruction	Mouvement	
	Eulérienne	Lagrangienne
divP1 2D	0.01	0.7
divP2 2D	0.01	0.7
divP1 3D	0.1	1
divP2 3D	0.7	3

TABLE 5.2 – Choix empirique des valeurs seuils pour  $R_{min}$  pour les fonctions de forme

Le tableau (Tab 5.2) contient les valeurs de seuil  $R_{min}$  pour les fonctions de forme. Les valeurs changent entre la 3D et la 2D. Pour des simulations lagrangiennes, le seuil est plus important pour limiter l'utilisation

des ordres élevés pour des raisons liées notamment à la surface libre.

## 5.4 Cas test :

Les cas tests présentés sont multidimensionnels car les difficultés rencontrées avec l'opérateur de divergence sont essentiellement géométriques.

### 5.4.1 Tourbillon de Taylor-Green non visqueux

Des simulations de tourbillons de Taylor-Green pour différents niveaux de raffinement des particules ont été faites. Cela permet de quantifier à nouveau la viscosité numérique introduite par ces nouveaux schémas. La figure (Fig 5.9) présente l'évolution de la viscosité numérique en fonction de la taille des particules. De nouveau, les schémas totalement linéaires (divP1, Flx p=1) présentent une évolution en puissance 3. L'expression de la fonction polynomiale qui approche le mieux les données, est :  $\nu_1(x) = 88x^{3.0}$ . Pour des schémas quadratiques (divP2, Flx p=2), l'évolution est la même, elle semble correspondre à une puissance 3 également. L'expression de la seconde fonction polynomiale qui approche le mieux les données quadratiques, est :  $\nu_2(x) = 77x^{3.27}$ . Il est possible de remarquer que les fonctions trouvées avec les nouveaux schémas sont proches de celles trouvées avec le schéma standard de la SPH-ALE. Pour une taille de particule donnée, la viscosité numérique des schémas quadratiques  $\nu_2$  est bien inférieure à celle des schémas linéaires  $\nu_1$ .

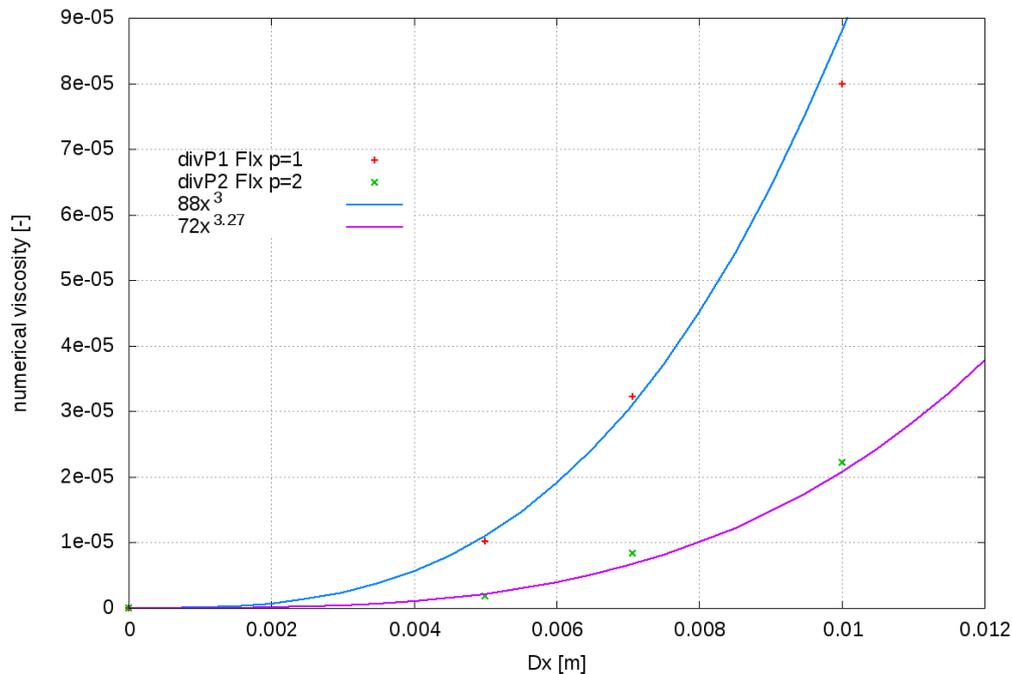
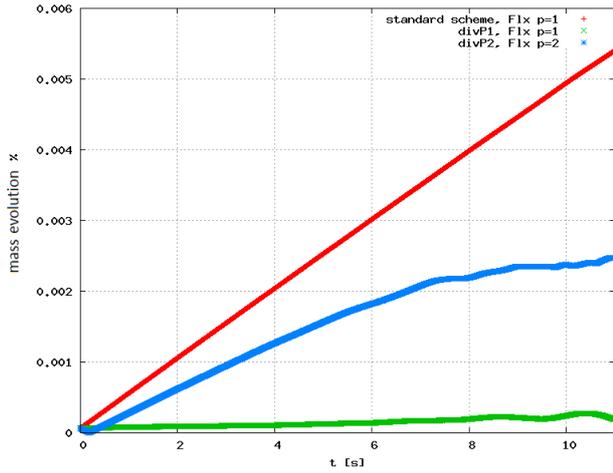
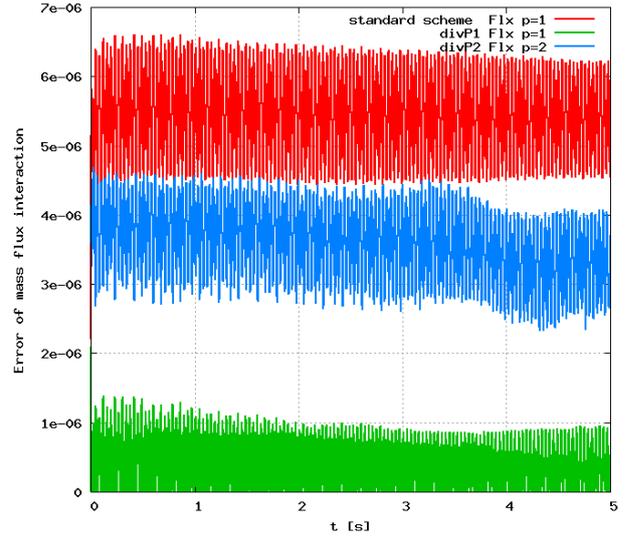


FIGURE 5.9 – Viscosité numérique en fonction de la taille des particules pour les nouveaux schémas de divergence

La figure (Fig 5.10a) présente l'évolution de la masse au cours du temps pour les nouveaux schémas. Il est intéressant de remarquer que bien que non conservatif, les nouveaux schémas conservent mieux la masse que l'approche standard disposant de la renormalisation. La figure (Fig 5.10b) montre de même le défaut de conservation des flux de masse. Les schémas d'ordre 2 en précision préservent significativement mieux la masse. Les schémas d'ordre 3 en revanche préservent un peu moins bien la masse tout en étant plus conservatif que la version standard. L'introduction des fonctions de forme quadratiques introduit plus de dissymétrie que les fonctions de forme linéaires.



(a) Évolution de la quantité de masse en pourcentage



(b) Évolution du défaut de conservation des flux de masse

FIGURE 5.10 – Conservation de la masse dans le système au cours du temps pour les nouveaux schémas numériques

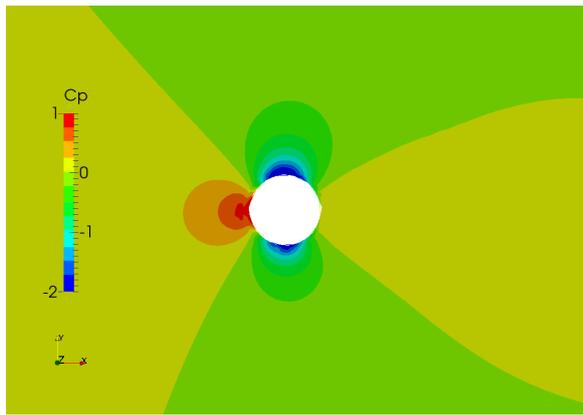
Le tableau (Tab 5.3) présente le coût de calcul associé aux nouveaux schémas en prenant le schéma standard sur  $N$  particules comme référence. Ces nouveaux schémas sont plus couteux que la version standard de par l'inversion de deux systèmes linéaires pour évaluer les fonctions de forme (une inversion par direction de l'espace). Le passage du schéma standard au schéma (divP1,Flx p=1) augmente de 1.5 le coût de calcul par seconde physique, contre une augmentation de 2.8 en utilisant deux fois plus de particules. Le nouveau schéma ayant de bien meilleures propriétés (consistance et précision), il reste concurrentiel. Le passage du schéma linéaire (divP1,Flx p=1) au schéma quadratique (divP2,Flx p=2) augmente aussi de 1.5 le coût par seconde. Il est donc toujours intéressant d'utiliser des ordres élevés par rapport à un raffinement spatial ( $h$ -raffinement).

	schéma standard		divP1 Flx p=1		divP2 Flx p=2/2R	
	N	2N	N	2N	N	2N
coût CPU/itération	1.0	2.1	1.5	1.76	2.2	4.9/4.7
coût CPU/second	1.0	3.2	1.5	1.76	2.2	6.9/6.7

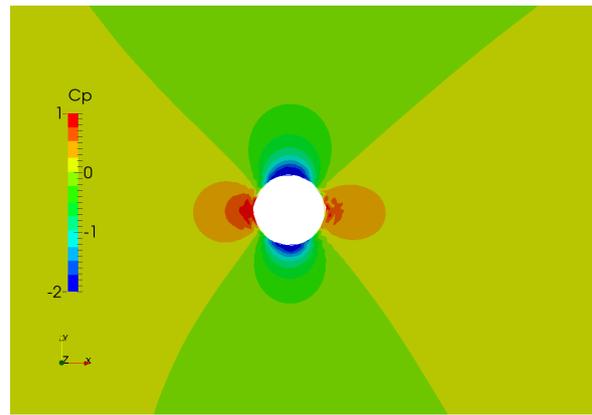
TABLE 5.3 – Coût de calcul associé aux simulations des tourbillons de Taylor-Green en 2D avec les nouveaux schémas

## 5.4.2 Écoulement en 2D autour d'un cylindre isolé

L'écoulement non-visqueux autour d'un cylindre est simulé pour tester les différents schémas exposés. Les figures qui suivent présentent les champs de vitesse et pression sans dimension. Les figures (Fig 5.11a, 5.11b) montrent le champ de pression pour  $N$  particules pour le schéma linéaire (divP1,Flx p=1) et le schéma quadratique à base répétée (divP2,Flx p=2R). L'utilisation d'un schéma quadratique permet de nouveau de mieux retrouver la symétrie du champ selon l'axe normal à l'écoulement. En effet, la surpression en aval du cylindre est beaucoup plus marquée.



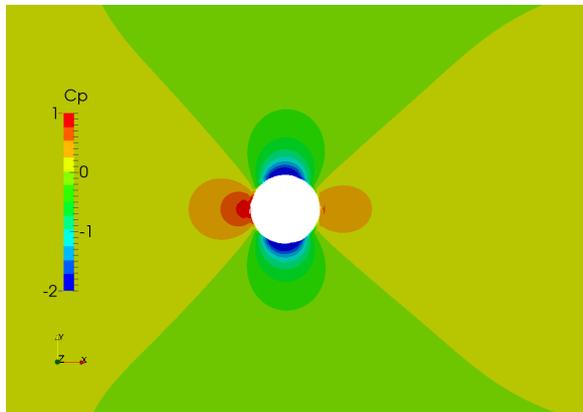
(a) Coefficient de pression pour (divP1 Flx p=1)



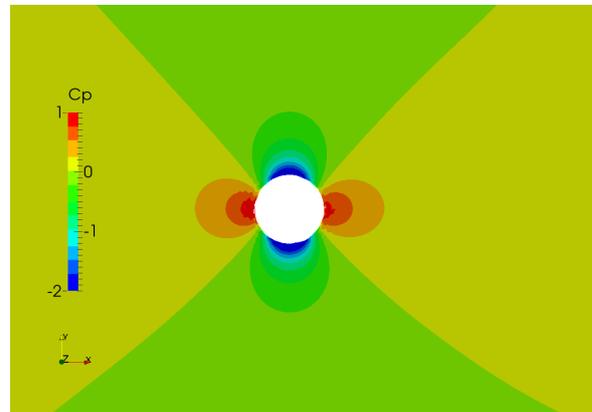
(b) Coefficient de pression pour (divP2,Flx p=2R)

FIGURE 5.11 – Coefficients de pression autour d'un cylindre pour N particules

Les figures (Fig 5.12a, 5.12b) présentent le champ de pression pour 4 fois plus de particules (4N). L'observation est la même que précédemment, la solution quadratique semble converger plus rapidement vers la solution potentielle parfaitement symétrique.



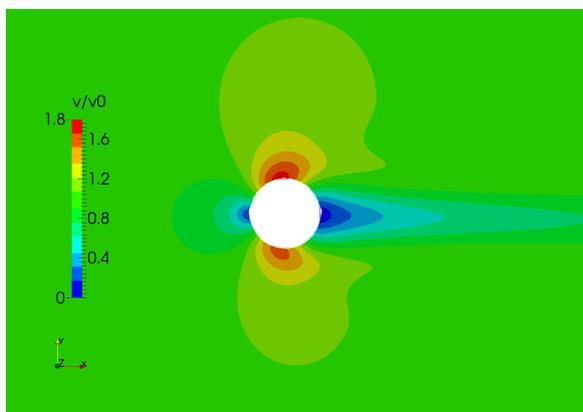
(a) Coefficient de pression pour (divP1 Flx p=1)



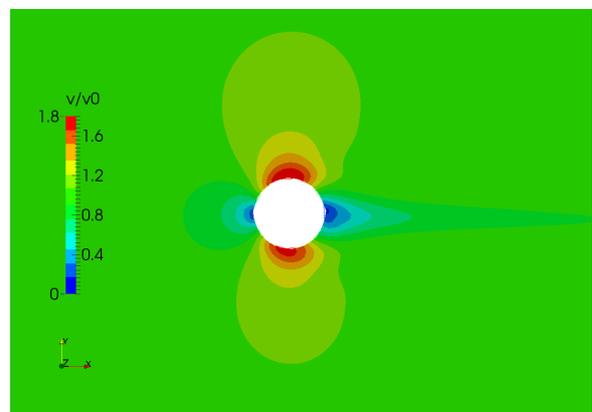
(b) Coefficient de pression pour (divP2,Flx p=2R)

FIGURE 5.12 – Coefficients de pression autour d'un cylindre pour 4N particules

Les figures (Fig 5.13a, 5.13b) et (Fig 5.14a, 5.14b) présentent le champ de vitesse pour des particules très fines (4N) et très grossières (N) pour les deux schémas. La diminution de la viscosité numérique à travers l'utilisation de schémas spatiaux plus précis, réduit la taille du sillage.

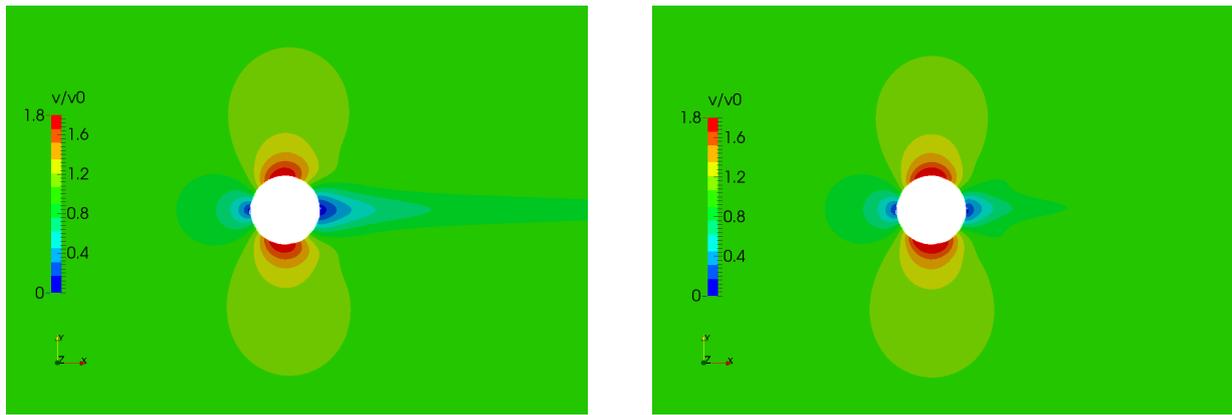


(a) Champ de vitesse pour (divP1 Flx p=1)



(b) Champ de vitesse pour (divP2,Flx p=2R)

FIGURE 5.13 – Champ de vitesse autour d'un cylindre pour N particules



(a) Champ de vitesse pour (divP1 Flx p=1)

(b) Champ de vitesse pour (divP2,Flx p=2R)

FIGURE 5.14 – Champ de vitesse autour d'un cylindre pour 4N particules

Les figures (Fig 5.15, 5.16 et 5.17) présentent les coefficients de pression le long du cylindre pour les différents schémas (standard, divP1 Flx p=1 et divP2 Flx p=2R) pour les trois niveaux de raffinement. La figure (Fig 5.15) permet de comparer le coefficient de pression à la paroi pour la version standard renormalisée et les nouveaux schémas sur N particules. Le schéma linéaire (divP1 Flx p=1) est être proche de l'approche standard. La figure (Fig 5.16) montre la convergence spatiale des résultats en pression le long du cylindre pour le schéma linéaire (divP1 Flx p=1). La figure (Fig 5.17) montre la convergence spatiale des résultats en pression le long du cylindre pour le schéma quadratique (divP2 Flx p=2R). Le schéma quadratique permet de nouveau d'obtenir des résultats plus proches de la solution potentielle que les schémas linéaires.

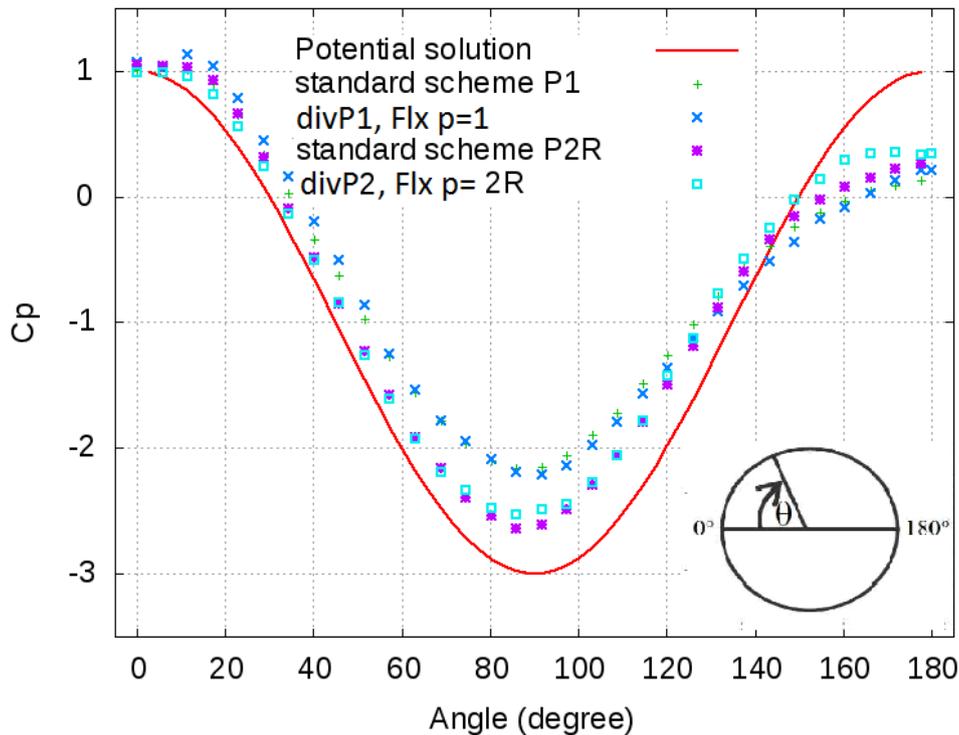


FIGURE 5.15 – Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour les différents schémas

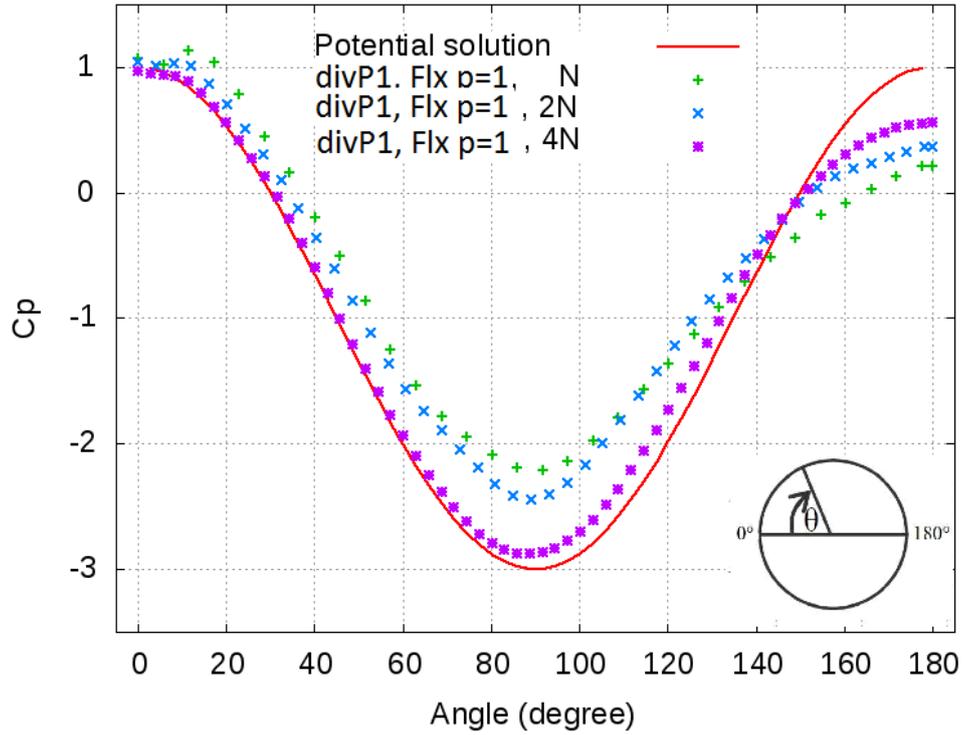


FIGURE 5.16 – Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour (divP1 Flx p=1)

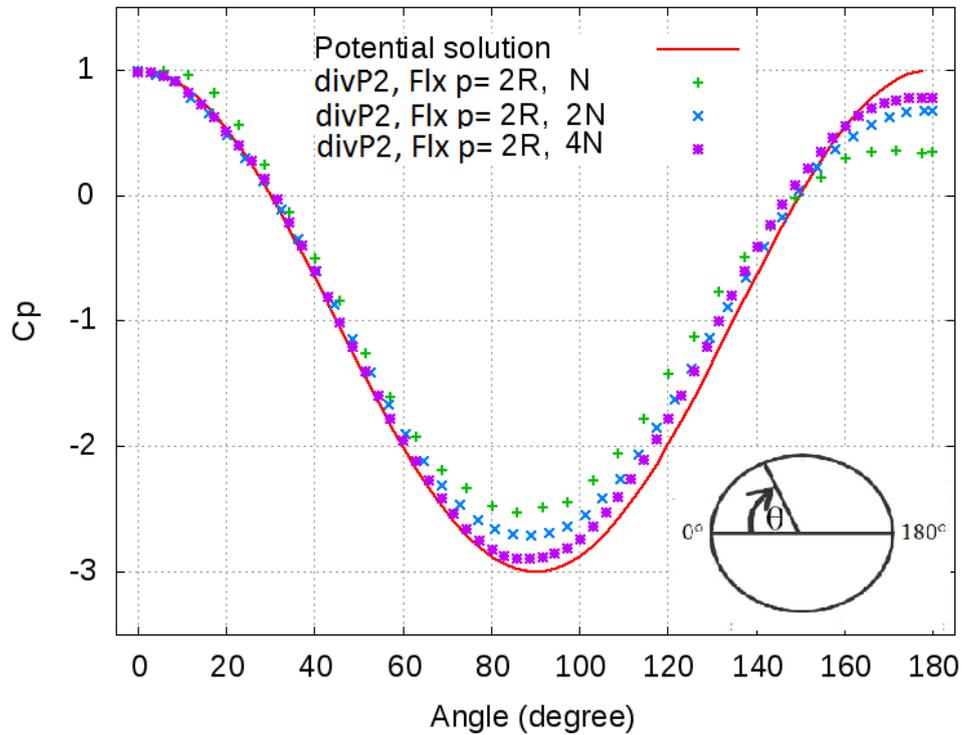


FIGURE 5.17 – Coefficients de pression sur la paroi du cylindre pour (divP2 Flx p=2R)

Les valeurs du coefficient de trainée numérique  $C_x$  sont présentées dans le tableau (Tab 4.4) pour les trois tailles de particules. L'erreur sur le coefficient de pression en paroi  $\|C_p - C_p^h\|_{L^2}$  et une différence de pression totale  $\Delta P_t$  en pourcentage sont présentées sur les tableaux (Tab 4.5, 4.6). La variation de pression totale  $\Delta P_{total}$  prise entre deux capteurs derrière le cylindre permet de valider les ordres de convergence en s'affranchissant des problèmes de troncature. Ces données permettent d'évaluer des taux de convergence égaux à 2 pour le schéma (divP1, Flx p=1). Pour obtenir les résultats quadratiques à base complète, la  $p$ -dégradation a été désactivée.

Pour ces simulations eulériennes, cela ne présente pas énormément de risque. L'ordre de convergence spatiale théorique de 3 est maintenant atteint pour l'ensemble des schémas exploitant des schémas quadratiques (divP2, Flx p=2 ou 2R). Il est remarquable d'atteindre cela d'autant plus avec l'approche récursive. De nouveau, il est fort probable que la bonne distribution des particules aide la convergence tout en ayant à l'esprit que les nouveaux opérateurs de divergence convergent correctement sur une distribution aléatoire (Tab 5.1) .

		$C_x$	Ordre
<b>divP1 Flx p=1</b>	$N$	0.042	-
	$2N$	0.022	1.8
	$4N$	0.009	2.5
<b>divP2 Flx p=2</b>	$N$	0.032	-
	$2N$	0.013	2.59
	$4N$	0.013	3.4
<b>divP2 Flx p=2 répété</b>	$N$	0.035	-
	$2N$	0.012	3.0
	$4N$	0.004	3.1

TABLE 5.4 – Coefficients de trainée numérique associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre

		$\ C_p - C_p^h\ _{L^2}$	Ordre
<b>divP1 Flx p=1</b>	$N$	0.50	-
	$2N$	0.27	1.8
	$4N$	0.13	2.1
<b>divP2 Flx p=2</b>	$N$	0.36	-
	$2N$	0.16	2.4
	$4N$	0.05	3.3
<b>divP2 Flx p=2 répété</b>	$N$	0.4	-
	$2N$	0.18	2.3
	$4N$	0.06	2.7

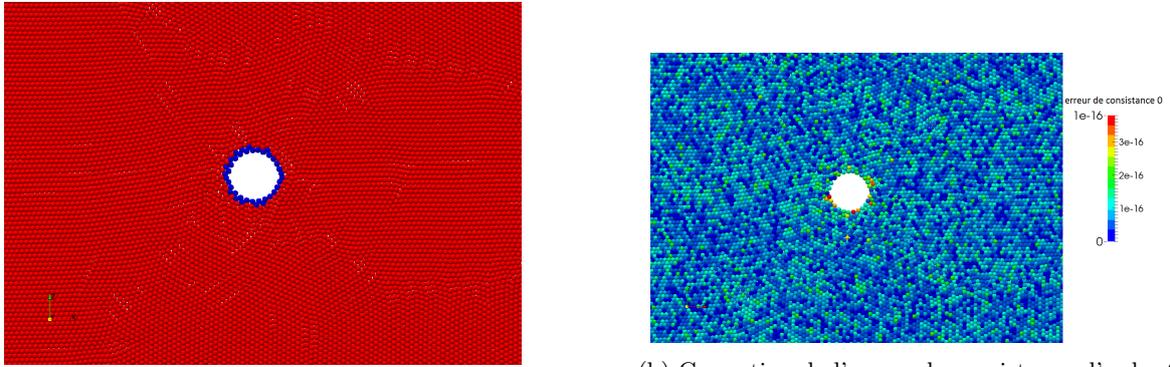
TABLE 5.5 – Erreur sur le coefficient de pression à la paroi associés aux simulations d'écoulement autour d'un cylindre

		$\Delta Pt$ %	Ordre
<b>divP1 Flx p=1</b>	$N$	3.7	-
	$2N$	2.1	1.6
	$4N$	1.0	2.1
<b>divP2 Flx p=2</b>	$N$	1.6	-
	$2N$	0.6	2.8
	$4N$	0.2	3.1
<b>divP2 Flx p=2 répété</b>	$N$	1.5	-
	$2N$	0.56	2.9
	$4N$	0.2	2.6

TABLE 5.6 – Perte de pression totale lors d'un écoulement autour d'un cylindre

## Impact de la $p$ -dégradation

Les figures (Fig 5.18a, 5.18b) présentent respectivement le déclenchement de la  $p$ -dégradation et l'erreur de consistance 0 corrigée avec les fonctions de forme autour du cylindre. Malgré la  $p$ -dégradation autour de la paroi (particules bleues), l'erreur de consistance d'ordre 0 est très faible de l'ordre de  $10^{-15}$ . Le passage d'une fonction de forme quadratique à linéaire ne dégrade pas la qualité de la consistance la plus élémentaire d'ordre 0. Ceci est une information importante pour les simulations lagrangiennes qui vont suivre où la  $p$ -dégradation sera omniprésente.



(a)  $p$ -dégradation (bleu : fonction de forme linéaire, rouge : fonction de forme quadratique)

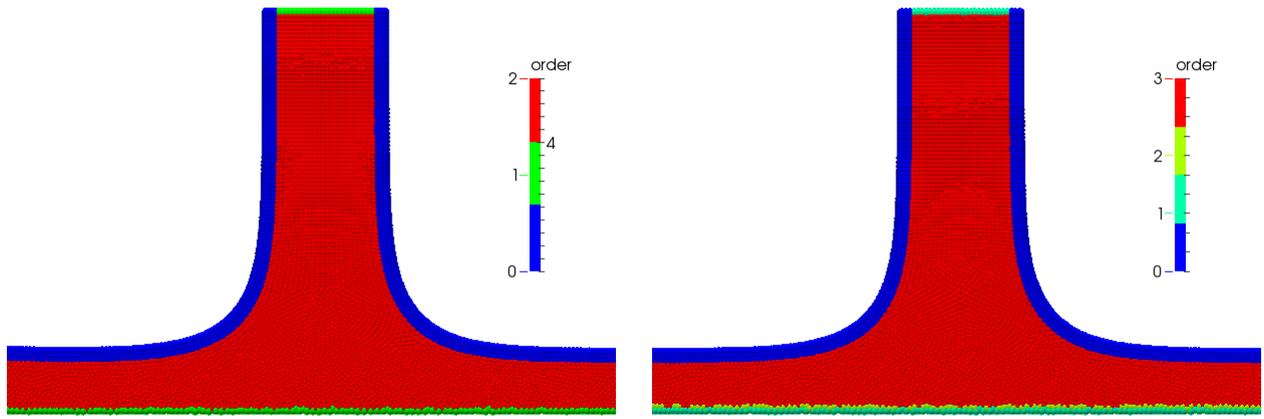
(b) Correction de l'erreur de consistance d'ordre 0

FIGURE 5.18 – Vue centrée sur le cylindre exposant la  $p$ -dégradation et l'erreur de consistance avec les nouveaux schémas

### 5.4.3 Impact 2D d'un jet sur une plaque plane

Les cas tests eulériens précédents montrent que les nouveaux schémas permettent d'obtenir des solutions plus précises d'ordre réellement élevé à des coûts raisonnables. Cependant, la robustesse et la précision de ces schémas sur des particules en mouvement doivent être étudiées. C'est la raison pour laquelle le cas test lagrangien d'un jet impactant une plaque plane est de nouveau simulé mais cette fois-ci avec les nouveaux schémas. Un mouvement de *shifting* ([45]) est appliqué systématiquement afin éviter l'apparition de trou entre les particules [16].

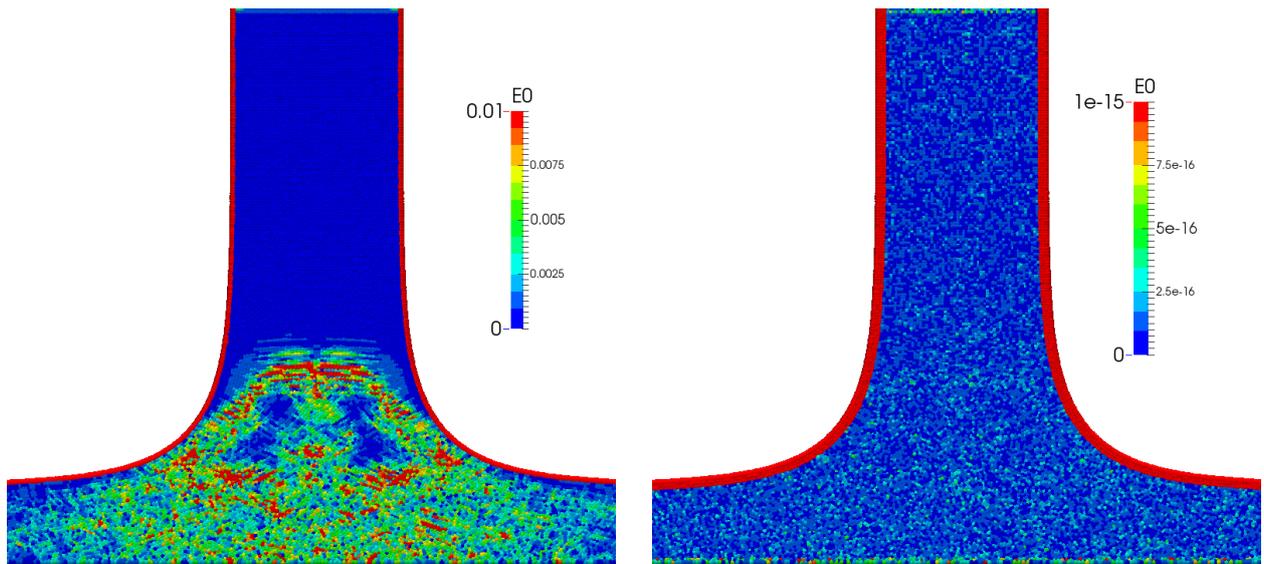
Pour permettre la convergence de ce calcul en surface libre, les schémas consistants ne sont pas utilisés sur les trois premières couches de particules proches de la surface libre. L'expérience a montrée que cela permet de stabiliser la solution. Les résultats dépendent donc de la bonne évaluation du critère de *Location* qui conditionne alors l'utilisation des ordres élevés. Les figures (Fig 5.19a,5.19b) présentent l'ordre du schéma (divP1 Flx p=1) et (divP2 Flx p=2) en fonction des régions de l'écoulement. Au cœur du fluide, hors troncature, le schéma est d'ordre 2 (resp. 3) en précision pour le schéma (divP1 Flx p=1) (resp. divP2 Flx p=2). Lorsque la troncature est dû à une frontière solide, l'ordre en précision décroît jusqu'à 1 (particules vertes avec une transition d'ordre 2 pour les schémas quadratiques). En surface libre, sur 3 couches de particules, les particules de couleur bleue ont un schéma global non-précis et non-consistant seuls les flux sont consistants d'ordre 1, le gradient de la fonction noyau est utilisé.



(a) Schéma divP1 Flx p=1 (rouge : p= 2, vert : p=1 et bleu p=0) (b) Schéma divP2 Flx p=2 (rouge : p= 3, vert : p=2, bleu clair p=1 et bleu foncé p=0)

FIGURE 5.19 – Ordre en précision local des schémas pour la simulation lagrangienne d'un jet impactant une plaque en 2D

La simulation étant lagrangienne, les particules se déplacent selon la direction de l'écoulement. Les critères géométriques de consistance des opérateurs, n'ont aucune raison d'être respectés. Les figures (Fig 5.20a, 5.20b) illustrent respectivement l'erreur de consistance 0 sans dimension et la correction de celle-ci en utilisant les fonctions de forme. Grâce à la correction, l'erreur de consistance d'ordre 0 est de l'ordre de  $10^{-15}$  dans le fluide. La surface libre est colorée en rouge là où l'erreur persiste d'ordre  $10^{-2}$ .



(a) Erreur de consistance d'ordre 0

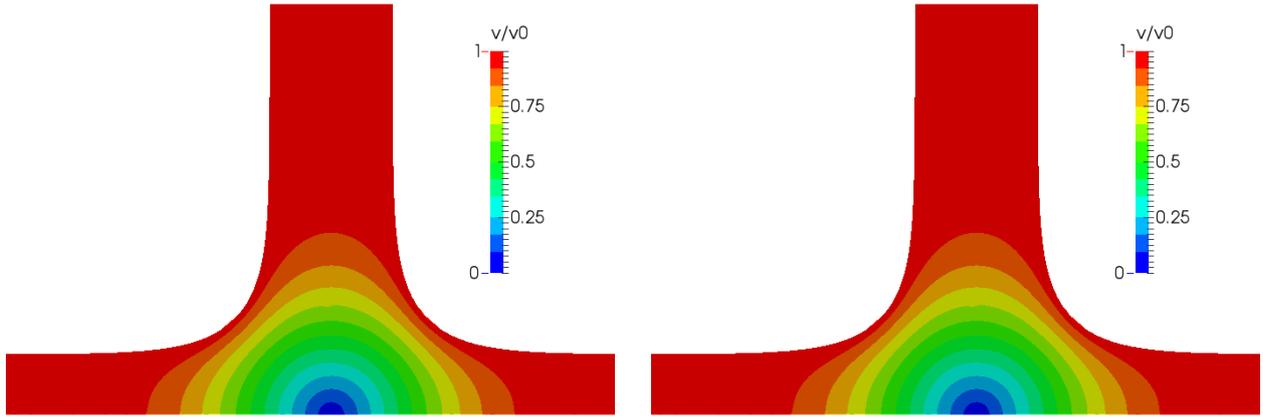
(b) Correction de l'erreur de consistance d'ordre 0

FIGURE 5.20 – Consistance d'ordre 0 pour la simulation lagrangienne d'un jet impactant une plaque en 2D

Les figures (Fig 5.21a, Fig :5.22b) présentent le champ de vitesse pour respectivement le schéma linéaire (divP1, Flx p=1) et quadratique à base complète (divP2, Flx p=2). Les résultats permettent de voir que le champ de vitesse est régulier, sans bruit et symétrique par rapport à l'axe du jet.

Les figures (Fig 5.22a et Fig :5.22b) présentent les valeurs du coefficient de pression dans le fluide pour respectivement les schémas (divP1, Flx p=1) et (divP2, Flx p=2). Les champs de pression sont symétriques par rapport à l'axe du jet. Les isolignes de pression sont bien orthogonales à la plaque ce qui correspond à la symétrie selon la première bissectrice ( $y = x$ ).

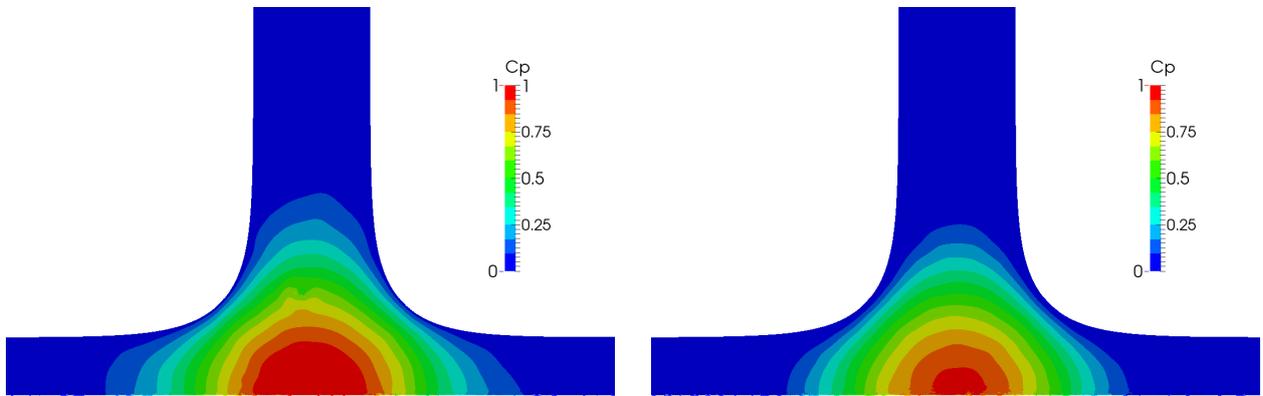
La figure (Fig 5.23) présente les valeurs de coefficient de pression sur la paroi pour les deux schémas numériques (divP1, Flx p=1) et (divP2, Flx p=2) comparés avec la solution potentielle. Le coefficient de pression sur



(a) schéma divP1, Flx p=1

(b) schéma divP2, Flx p=2

FIGURE 5.21 – Champ de vitesse fluide pour le jet impactant une plaque en 2D



(a) schéma divP1, Flx p=1

(b) schéma divP2, Flx p=2

FIGURE 5.22 – Coefficient de pression fluide pour le jet impactant une plaque en 2D

la paroi est mesuré sur un échantillon de 20 instants et moyenné. L'écart-type permet d'illustrer les faibles oscillations de la solution en paroi. La valeur moyenne du coefficient de pression correspond à la solution attendue. Les variations sont très faibles comparativement aux résultats de la partie I. L'évaluation de la force hydraulique qui s'applique sur la paroi permet d'estimer que 11579.0 N sont exercés avec le schéma linéaire avec un écart type de 93.0 N. En faisant de même avec le schéma quadratique ont obtenu 11595.3N avec des variations de 80.64 N. Ces résultats montrent qu'avec les ordres supérieurs les variations sont légèrement moindres et que la force appliquée est plus proche de la théorie (11607.3 N).

La figure (Fig 5.24a) présente l'évolution de la masse au sein du domaine au cours du temps. Comme il est possible de le voir, pendant toute la phase de démarrage lors de l'injection des particules, la masse augmente dans le domaine. Puis, l'injection et la destruction des particules se compensant, le nombre de particules dans le domaine se stabilise ce qui explique la valeur moyenne atteinte après la phase de démarrage. Durant cette dernière phase, la quantité de masse est relativement constante et est différente en fonction du schéma comme il est possible de le voir sur (Fig 5.24b). En comparant le schéma d'ordre 2 (divP1, Flx p=1) avec le schéma d'ordre 3 (divP2, Flx p=2), il est possible de voir que la valeur moyenne de la masse avec les schémas quadratiques est plus faible. Cette valeur correspond à la valeur théorique. La figure (Fig 5.25) présente le résultat au cours du temps de la double sommation des flux de masse théoriquement nulle. Il semble que les flux quadratiques avec une divergence d'ordre 3 réduisent le défaut de conservation.

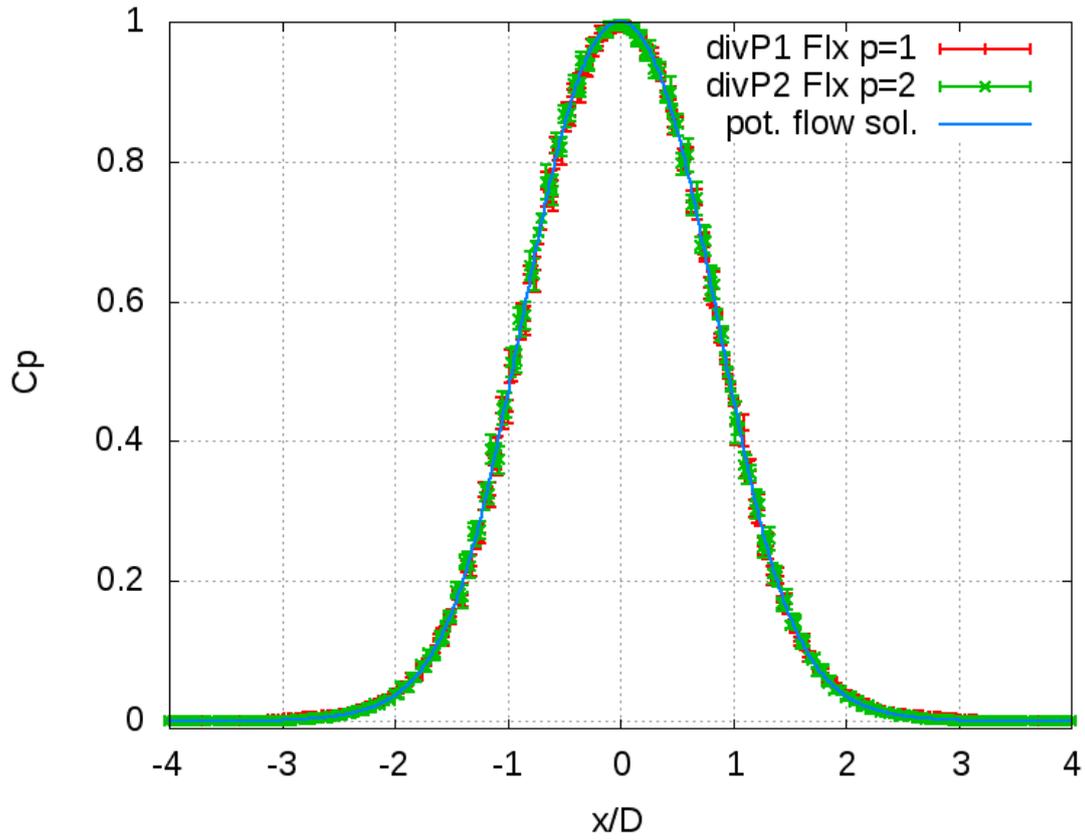
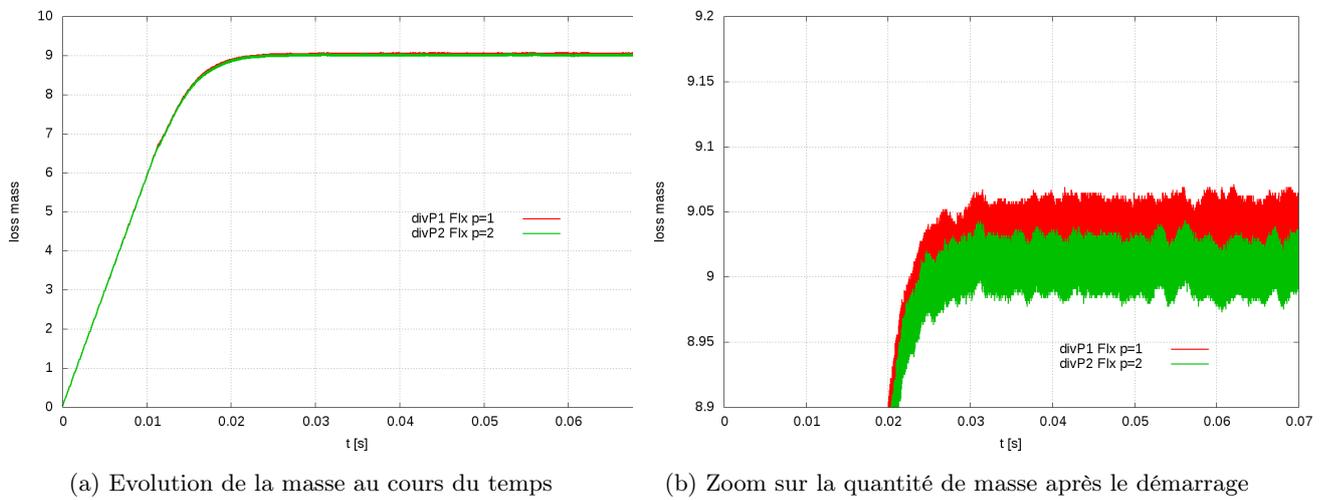


FIGURE 5.23 – Coefficient de pression sur la paroi pour les schémas (divP1, Flx p=1) et (divP2, Flx p=2)



(a) Evolution de la masse au cours du temps

(b) Zoom sur la quantité de masse après le démarrage

FIGURE 5.24 – Défaut de conservation de la masse au cours du temps pour la simulation du jet impactant une plaque plane en fonction des schémas

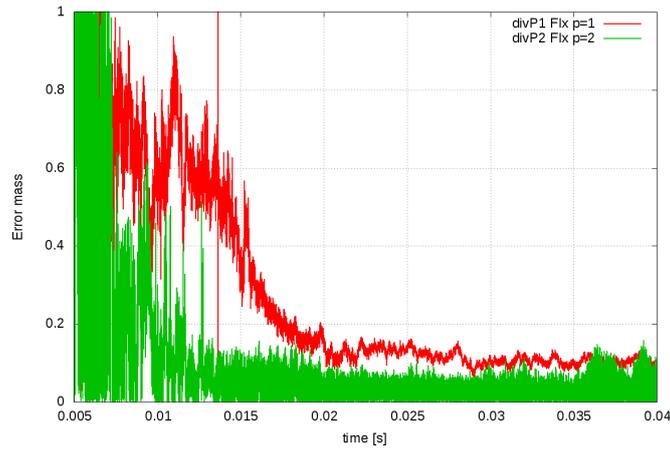


FIGURE 5.25 – Évolution du défaut de sommation des flux de masse au cours du temps

### Remarques portant sur les problèmes rencontrés

Cette simulation lagrangienne a permis de montrer différents problèmes. Premier cas, le champ de pression est bruité en paroi en raison de la dégradation de la consistance du schéma. En présence de la troncature dû aux parois, la  $p$ -dégradation peut conduire à utiliser le gradient original du noyau pour le schéma. Les simulations convergent alors vers une solution stable mais bruitée. De plus, le champ de vitesse peut présenter dans certaines simulations, une accélération sur la dernière couche de particule collée à la paroi, ce qui est peu souhaité (Fig : 5.26).

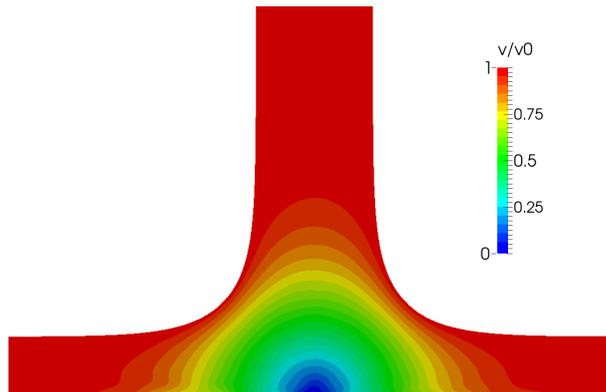


FIGURE 5.26 – schéma divP1, Flx p=1 sans consistance 0 en paroi

Deuxième cas, des pulsations régulières de la pression au sein du fluide peuvent être présentes lorsque le schéma est consistant jusqu'en paroi dès le démarrage du calcul. Il est en effet nécessaire de ne pas disposer systématiquement au moment de l'impact de la consistance sur l'ensemble des particules afin de pouvoir évacuer des informations parasites. En effet, la surface libre et les parois solides sont réfléchissantes, seules le jet dispose de conditions limites non-réfléchissantes. La moindre onde acoustique de pression instationnaire peut alors rester dans le domaine et empêcher le calcul de converger. L'idée est donc d'augmenter la vitesse du son afin de dissiper ces ondes au démarrage et/ou de retarder le déclenchement des ordres supérieurs.

### Influence des parois solides

L'impact du jet sur la plaque est équivalent à l'impact frontal de deux jets. Cette simulation va être effectuée afin de valider l'équivalence.

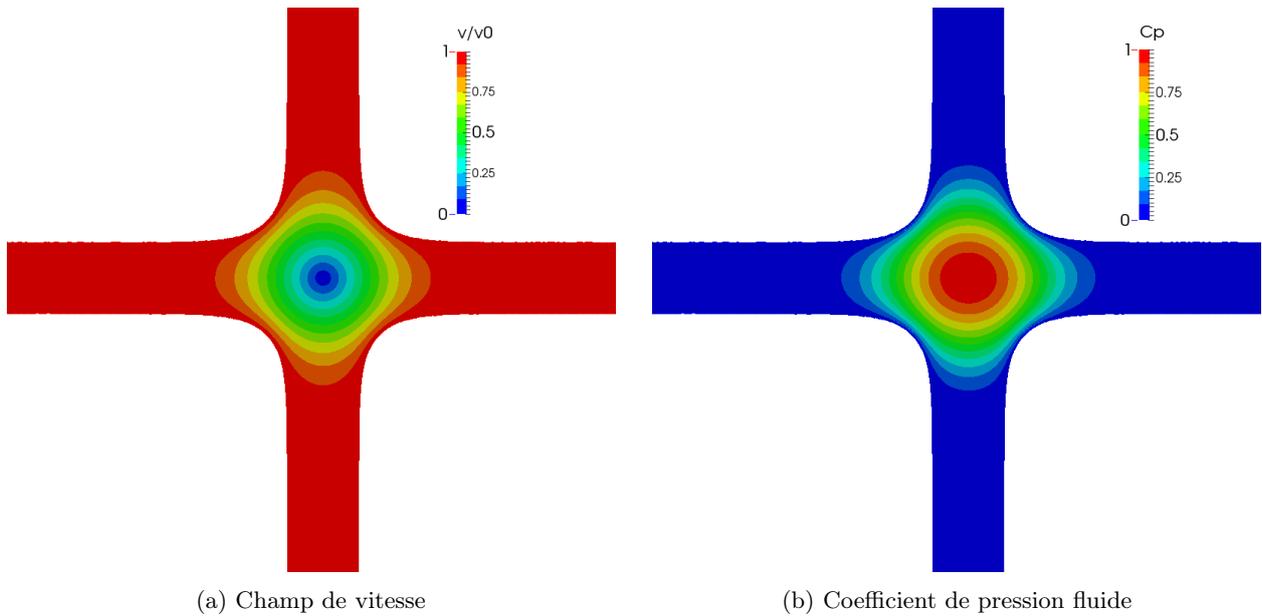


FIGURE 5.27 – Champs physiques pour deux jets fluides qui s’impactent avec le schéma (divP1, Flx p=1) à un instant donné

Les figures (Fig 5.27a, 5.27b) montrent les champs physiques de pression et de vitesse associés à l’impact de deux jets fluides. Les résultats sont parfaitement symétriques et réguliers. Les champs de pression et vitesse sont rapidement stabilisés. Le résultat est très comparable au résultat avec la plaque plane.

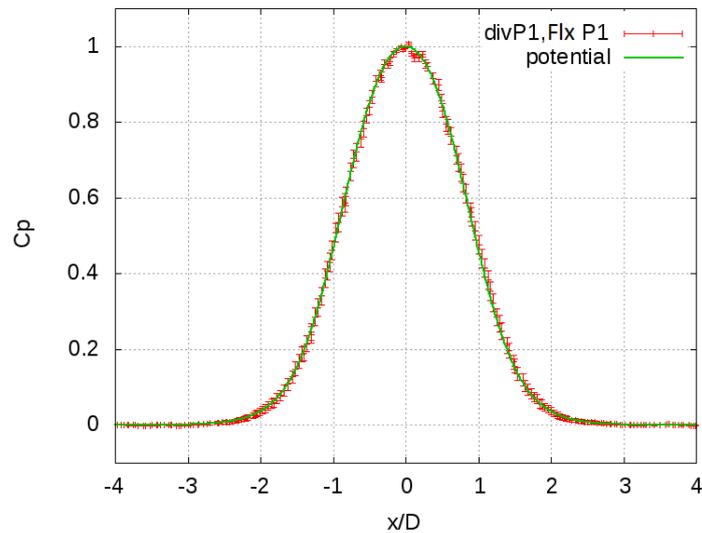


FIGURE 5.28 – Coefficient de pression au centre du domaine pour le schéma (divP1, Flx p=1)

La figure (Fig 5.28) présente le coefficient de pression au centre du fluide à une position correspondant à celle de la plaque plane. Les variations observées sur le coefficient de pression le long de la plaque plane sont similaires à celles mesurées au sein du fluide. Les résultats avec et sans paroi solide étant semblables, cela valide l’idée que la  $p$ -dégradation due à la troncature ne détériore pas significativement les résultats et que le traitement des parois au sein de la méthode SPH-ALE est cohérent avec le reste des interactions.

### Influence de la surface libre

Après avoir regardé l’influence de la paroi solide, l’impact de la surface libre va être analysé. Les nouveaux schémas permettent de disposer d’un opérateur de divergence d’ordre élevé dans la grande majorité du domaine. Cependant proche de la surface libre, il s’avère nécessaire de dégrader le schéma afin de permettre au calcul de se stabiliser et de potentiellement converger. Pour éviter cette dégradation peu souhaitable, il est possible de créer des éléments de surface libre. Leurs positions sont connues dans le cas de cette simulation académique [41].

Ces particules contrairement aux éléments de parois solides, imposent une pression nulle ( $P = 0$ ). La vitesse en revanche est imposée par les particules fluides. La résolution des échanges est ensuite identique aux parois solides à travers un solveur de Riemann partiel. Ces particules sont mobiles dans la direction de la normale de l'élément de surface libre.

Avec ces particules de surface libre, la simulation est stable, et converge. Les pulsations régulières observées précédemment ont disparu. Les champs sont parfaitement symétriques (Fig 5.29a pour la pression et Fig 5.29b pour la vitesse). Le coefficient de pression au cœur du fluide au niveau de la plaque présente très peu de variations. Les figures (Fig 5.30a, 5.30b) présentent les valeurs des coefficients de pression fluide dans la zone d'impact pour les simulations avec les schémas linéaires (divP1, Flx p=1) et quadratiques (divP2, Flx p=2).

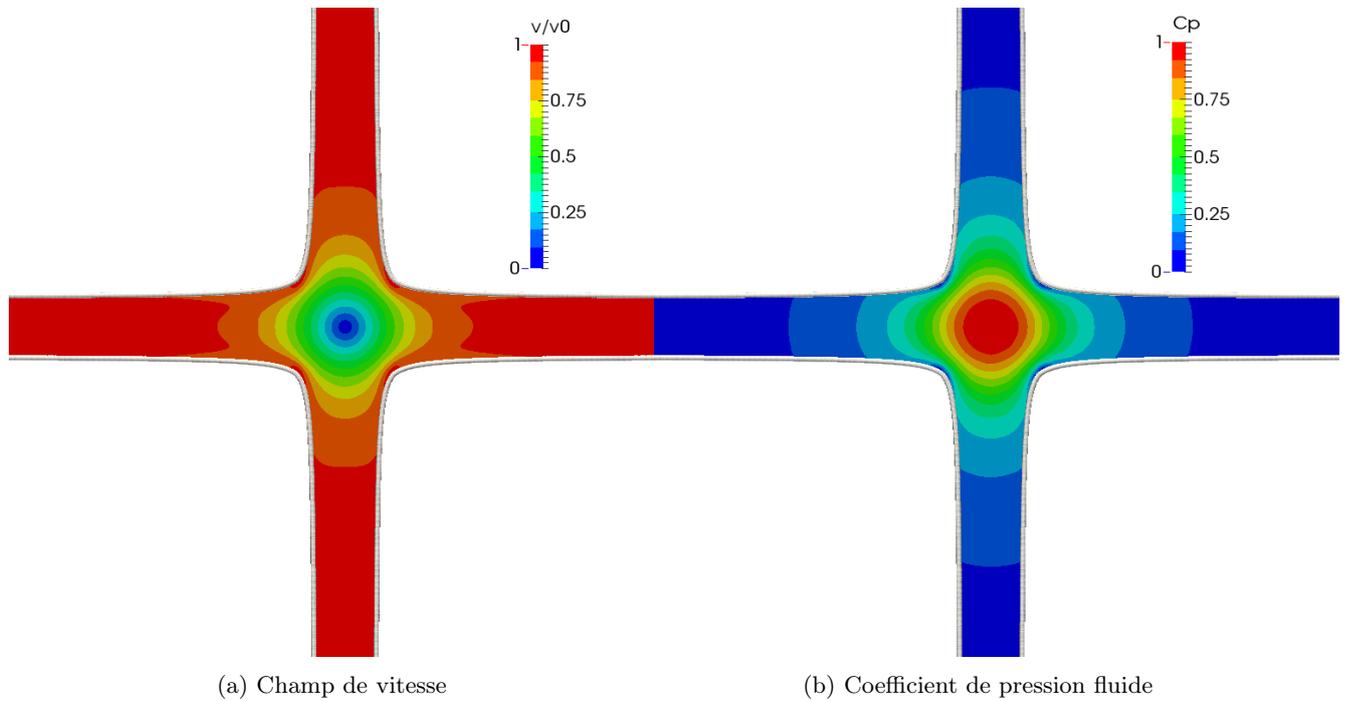


FIGURE 5.29 – Champs physiques pour deux jets fluides qui s'impactent avec le schéma (divP1, Flx p=1) et des particules de surface libre (blanches)

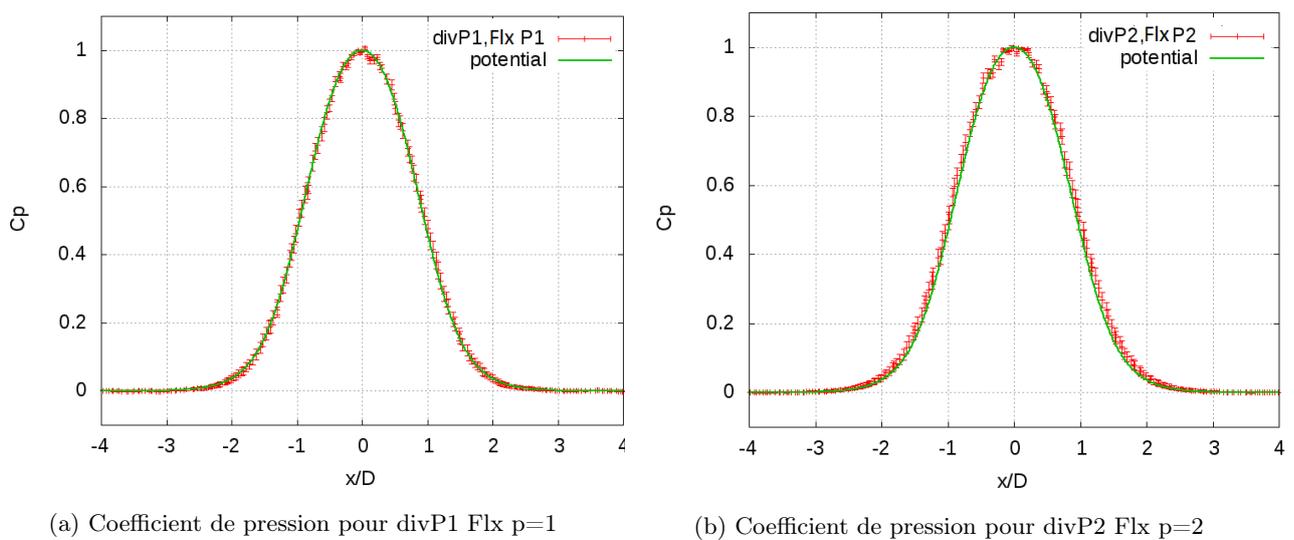


FIGURE 5.30 – Coefficient de pression au coeur du fluide pour deux jets qui s'impactent, avec des particules de surface libre

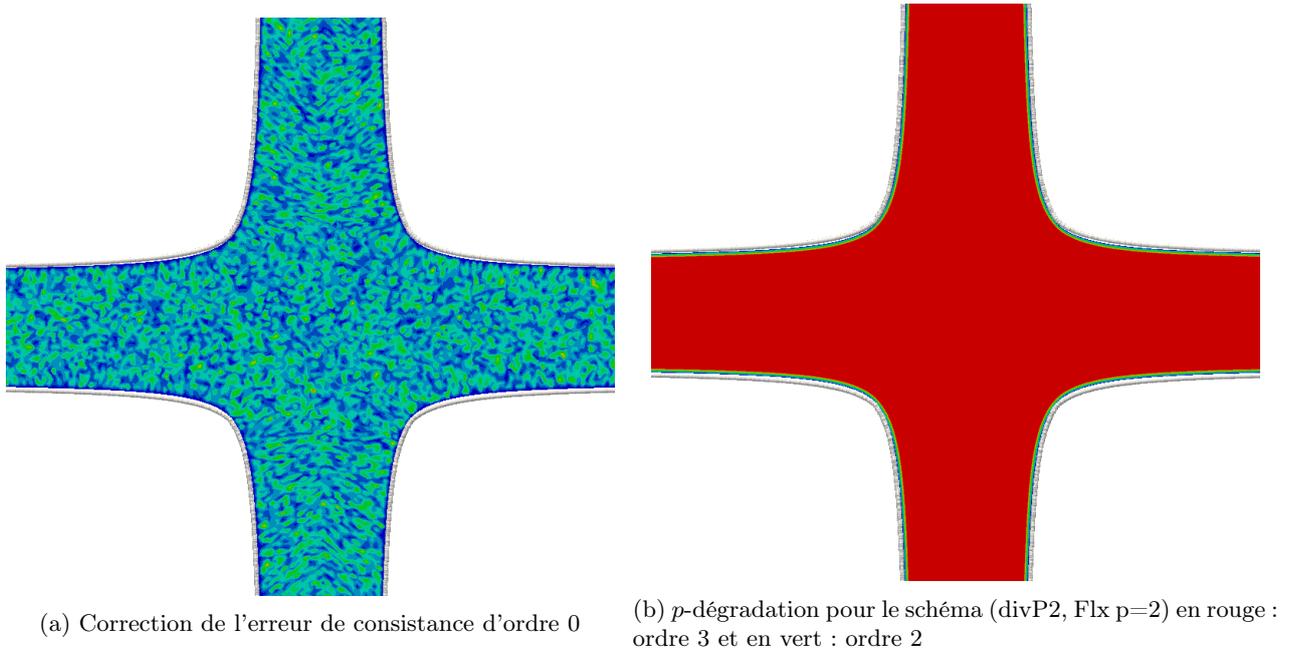


FIGURE 5.31 – Correction de l'erreur de consistance d'ordre 0 (à gauche) et schémas utilisés jusqu'en surface libre (à droite)

La figure (Fig 5.31b) présente l'ordre du schéma (divP2, Flx  $p=2$ ). Grâce à l'introduction de ces particules de surface libre, il est désormais possible de disposer d'un schéma d'ordre 3 ou 2 dans le fluide proche de la surface libre. Dans tout le domaine, les opérateurs sont consistants d'ordre 1.

## 5.5 Conclusion

Pour les simulations eulériennes, la convergence spatiale n'est plus bornée par la précision de l'opérateur de divergence. Les ordres théoriques de convergence spatiale sont obtenus pour des simulations dans une description eulérienne où la  $p$ -dégradation peut être désactivée. Les schémas sont stables et malgré l'absence de conservation des quantités physiques, ces schémas préservent mieux des quantités physiques telles que la masse que le schéma standard SPH-ALE corrigé avec la *closed-box* et la renormalisation.

Les simulations dans une description lagrangienne nécessitent de par le mouvement des particules un certain nombre de procédures d'adaptation pour stabiliser et renforcer la robustesse des schémas. Ces procédures peuvent notamment dégrader l'ordre en paroi en raison d'un nombre insuffisant de voisins. Ceci explique que l'ordre 2 ou 3 en précision peut être obtenu dans le fluide, mais seulement l'ordre 1 en paroi. En surface libre, il est indispensable de ne pas avoir de schéma consistant pour obtenir un calcul stable. La possibilité de reconstruire la surface libre avec des éléments de bord sur lesquels les conditions limites propres à cette surface libre sont imposées, semble être une solution pour pouvoir disposer au minimum d'un ordre 1 en précision et de la consistance d'ordre 0 dans cette région. Il faut cependant imaginer son application industrielle qui risque de s'avérer très laborieuse et coûteuse.

Après avoir exposé la théorie et testé les idées sur des cas tests simples, la dimension industrielle de ces développements doit être abordée dans ce travail. Le chapitre qui suit va donc exposer des calculs de cas d'applications réels ou proches des applications utiles pour Andritz Hydro.

## Chapitre 6

# Applications industrielles sur des turbines hydrauliques

### 6.1 Simulation 3D du fonctionnement d'une turbine Pelton

#### 6.1.1 Présentation de la simulation

La simulation 3D du fonctionnement d'une turbine hydraulique de type Pelton est une simulation lagrangienne complexe à surface libre avec une géométrie de roue tournante. La rotation de la turbine Pelton est de 911 rpm. La vitesse d'injection de l'eau est de 34 m/s ce qui correspond à une chute d'eau de 60 m. La largeur de l'auget est de 80 mm tandis que le diamètre du jet est de 28 mm. La roue est composée de 20 augets, mais seulement trois seront utilisés. La vitesse du son numérique est de 340 m/s. Cinq niveaux de discrétisation ont été utilisés  $\{0.3; 0.5; 0.63; 0.791\}$  mm et ils seront notés respectivement N, 2N, 4N, 8N et 16N. Le mouvement des particules est corrigé par un *shifting* pour éviter les trous. Un plan de symétrie est défini sur l'axe médian de l'auget (Fig : 6.1a).

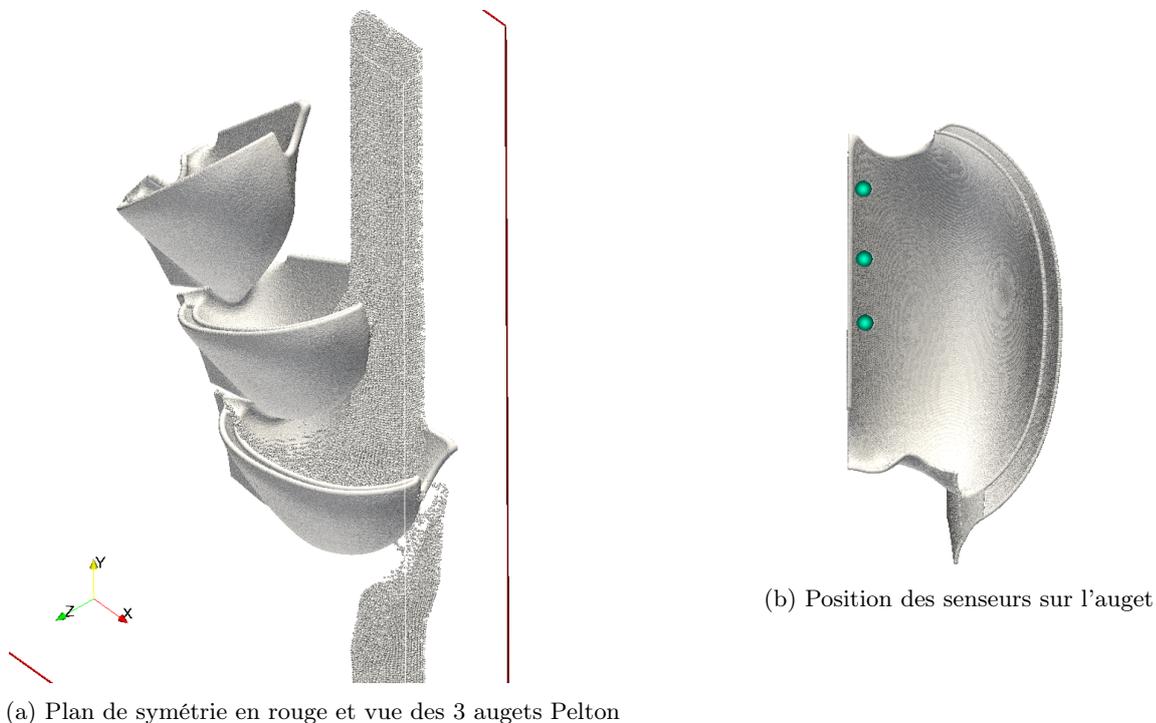


FIGURE 6.1 – Coupe au sein du plan de symétrie fluide lors de la simulation de jet impactant la roue Pelton (gauche) et position des senseurs sur un auget (droite)

Des résultats de couple hydraulique sont présentés ainsi que des valeurs de pression locale au cours de la rotation du premier auget. Des senseurs ont été placés sur le premier auget afin de comparer les valeurs de pression locale numérique avec des données expérimentales.

## 6.1.2 Résultats et discussions

La figure qui suit (Fig 6.2) présente pour les différents niveaux de discrétisation, le couple hydraulique appliqué sur le premier auget au cours de la rotation de la roue, calculé avec le schéma standard SPH-ALE. Ce couple présente une augmentation qui correspond au remplissage de l'auget puis une phase de diminution qui correspond à la vidange. En utilisant des particules de plus en plus petites, la forme a tendance à s'élargir et le maximum augmente significativement. Le remplissage est de plus en plus raide et la vidange plus lente.

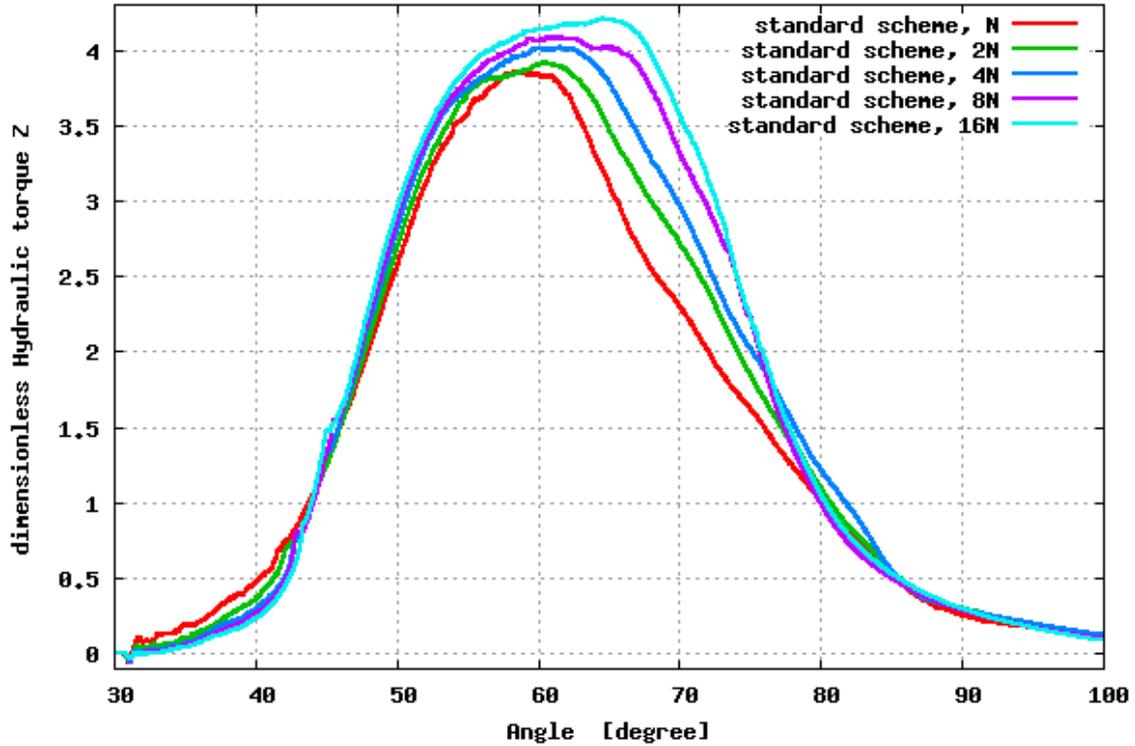


FIGURE 6.2 – Couple hydraulique pour le schéma standard SPH-ALE en fonction de l'angle

La figure (Fig 6.3) présente maintenant le couple hydraulique obtenu avec le schéma linéaire (divP1, Flx  $p=1$ ) pour les différents niveaux de discrétisation. En raison du mouvement de *shifting*, le couple est légèrement bruité. Le comportement des résultats est similaire aux résultats précédents avec le schéma standard.

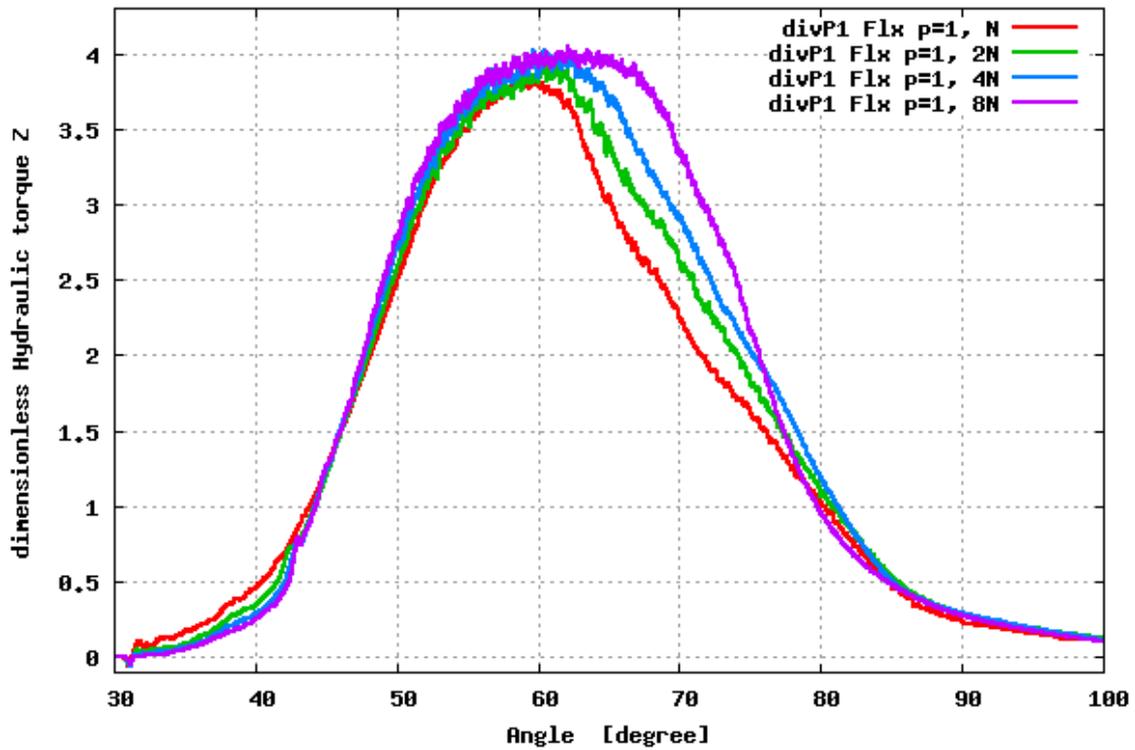


FIGURE 6.3 – Couple hydraulique pour le schéma  $\text{divP1 Flx } P1$  en fonction de l'angle

La figure suivante (Fig 6.4) présente le couple hydraulique pour le schéma quadratique ( $\text{divP2, Flx } p=2$ ) comparé aux différents résultats précédents sur  $N$  particules.

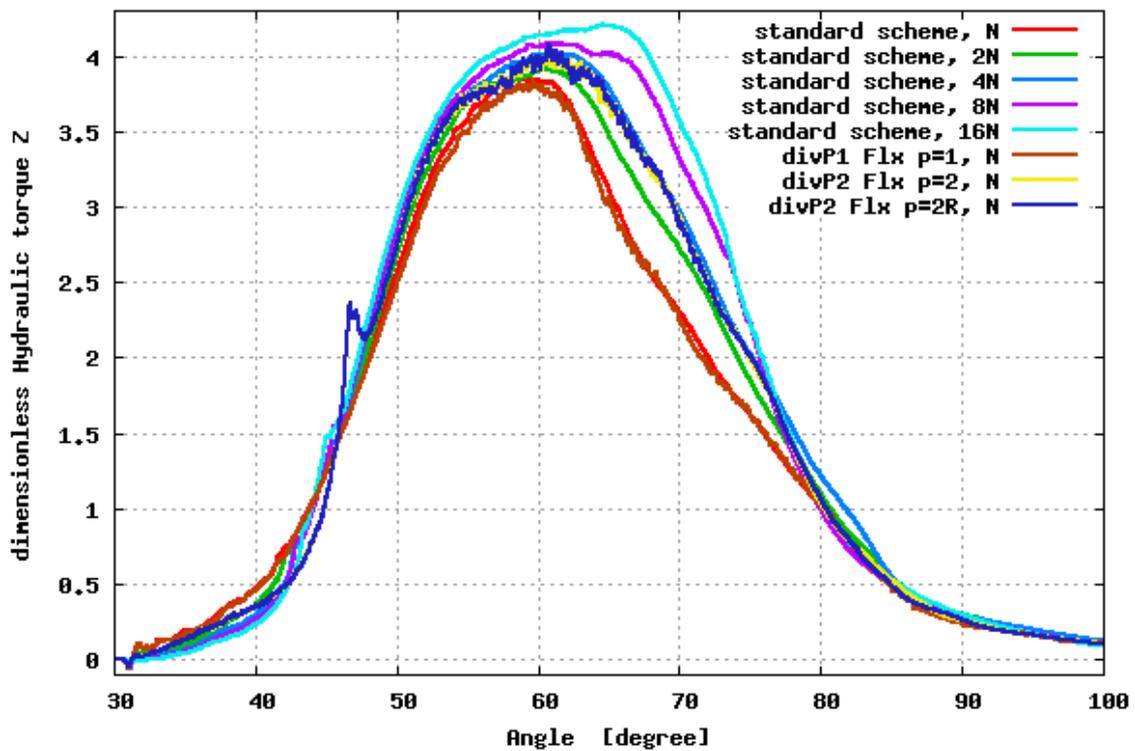


FIGURE 6.4 – Comparaison des couples hydrauliques obtenus avec les différents schémas présentés, sur  $N$  particules et les résultats obtenus avec le schéma standard pour les cinq niveaux de discrétisation

La figure suivante (Fig 6.5) présente le couple hydraulique pour le schéma quadratique ( $\text{divP2, Flx } p=2$ ) comparé aux différents résultats précédents sur  $2N$  particules.

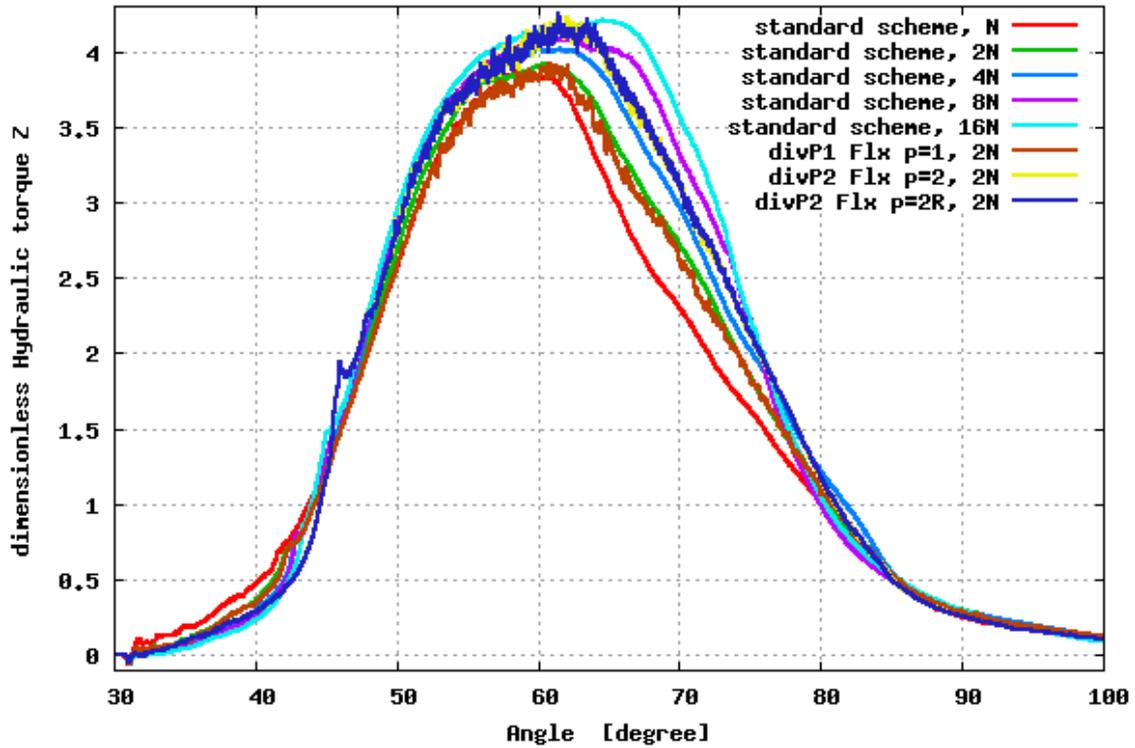
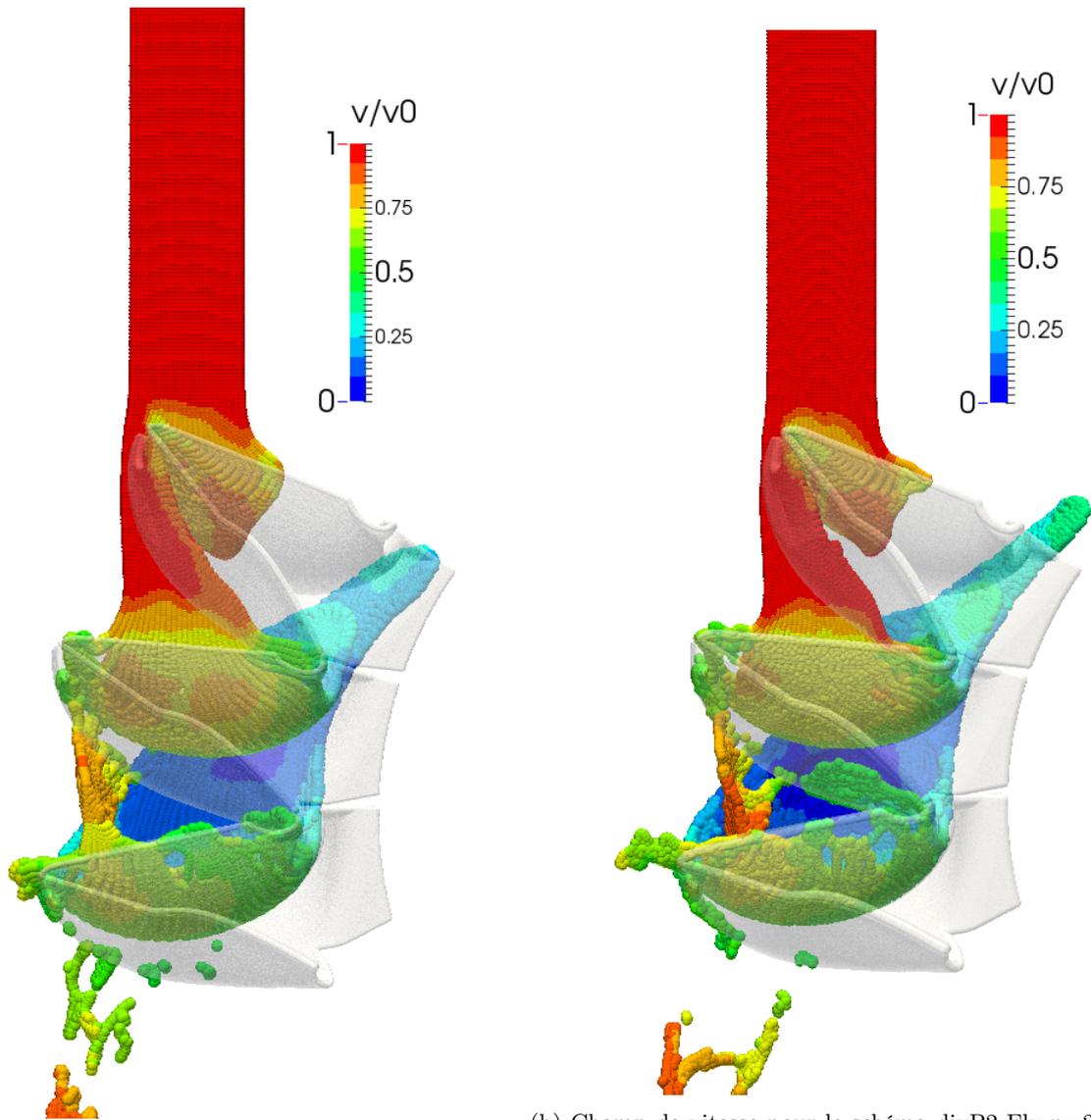


FIGURE 6.5 – Comparaison des couples hydrauliques obtenus avec les différents schémas présentés sur  $2N$  particules et les résultats obtenus avec le schéma standard pour les cinq niveaux de discrétisation

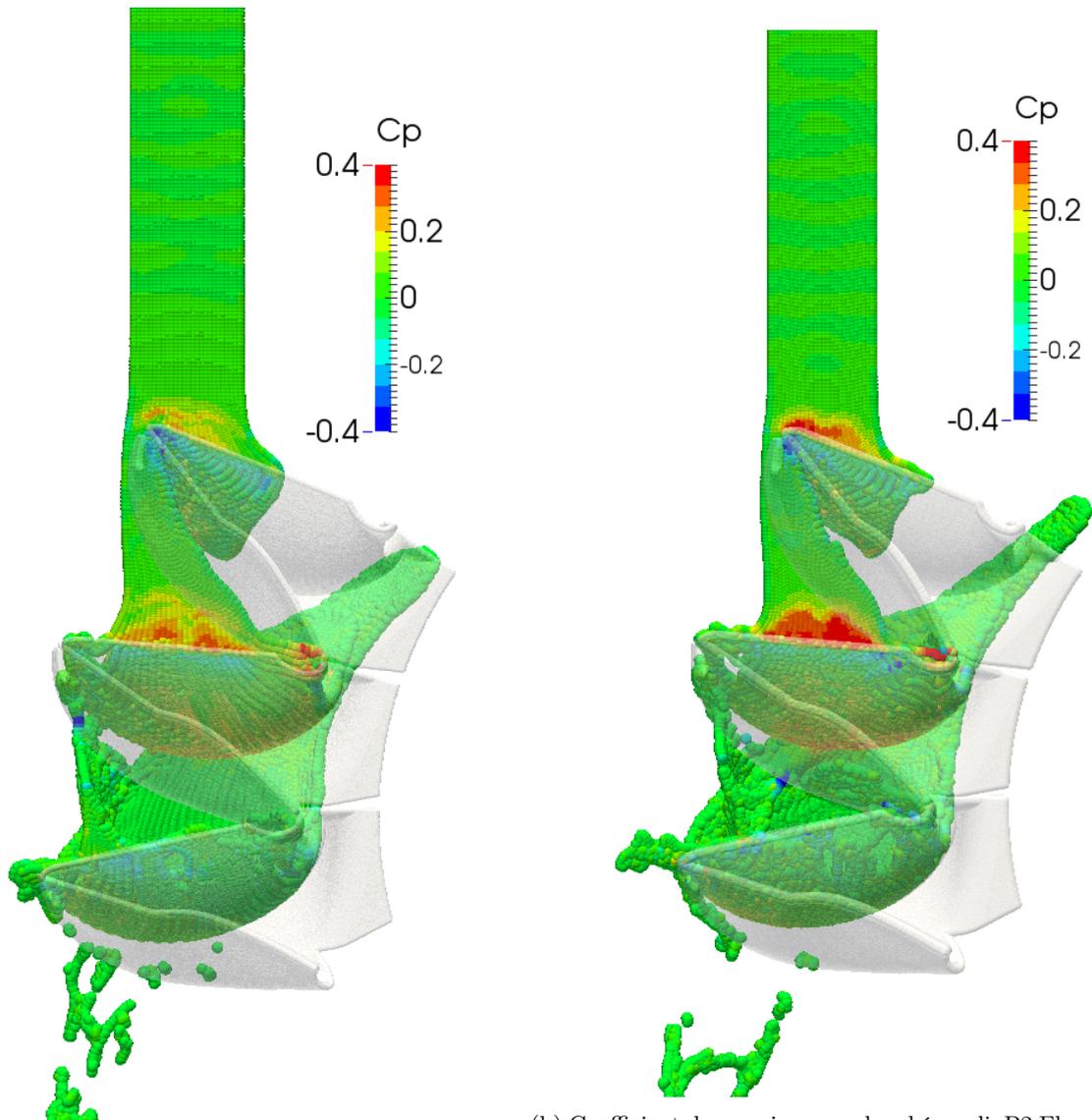
Les figures (Fig 6.4, 6.5) permettent de voir que les résultats obtenus avec le schéma linéaire (divP1, Flx  $p=1$ ) sont similaires aux résultats obtenus avec le schéma standard à nombre de particules équivalent. En les comparant avec les résultats obtenus avec les schémas quadratiques, il apparaît que les schémas d'ordre élevé permettent d'avoir un résultat comparable à un résultat obtenu avec un schéma linéaire sur 2 ou 3 fois plus de particules. Le temps de simulation pour atteindre un instant physique est de 4 ms avec les ordres quadratiques sur  $N$  particules.

Les temps nécessaires pour le schéma standard pour atteindre ce même temps physique sont de 2, 5, 13 et 32 ms. Ceci montre que le schéma quadratique sur  $N$  particules est en terme de coût compris entre une simulation avec un schéma standard sur  $N$  et  $2N$  particules. Le  $p$ -raffinement est donc intéressant par rapport au  $h$ -raffinement.



(a) Champ de vitesse pour le schéma divP1 Flx  $p=1$  sur  $N_{\text{particules}}$  particules (b) Champ de vitesse pour le schéma divP2 Flx  $p=2$  sur  $N_{\text{particules}}$  particules

FIGURE 6.6 – Comparaison au sein d'une coupe le long du plan de symétrie, des champs de vitesse au sein du fluide obtenus avec un schéma linéaire (gauche) et un schéma quadratique (droite)



(a) Coefficient de pression pour le schéma  $\text{divP1 Flx } p=1$  sur  $N$  particules  
 (b) Coefficient de pression pour le schéma  $\text{divP2 Flx } p=2$  sur  $N$  particules

FIGURE 6.7 – Coupe au sein du plan de symétrie, du champ de pression au sein du fluide obtenu avec un schéma linéaire (gauche) et un schéma quadratique (droite)

Les figures (Fig 6.7b, 6.7a) présentent les coefficients de pression fluide durant le remplissage du second auget pour le schéma linéaire et quadratique. Le champ de pression calculé avec les ordres élevés est plus intense dans la région de l'arête médiane. Les figures (Fig 6.6b, 6.6a) présentent de la même manière le champ de vitesse. Il apparaît que la nappe d'eau d'évacuation semble plus rapide avec des schémas quadratiques.

Les figures (Fig 6.8,6.9, 6.10) présentent les valeurs de pressions locales pour les 3 capteurs présents sur l'auget. Le premier niveau de discrétisation ( $N$ ) ne permet pas d'avoir des résultat satisfaisant sur la pression locale. Le niveau  $2N$  est donc exposé. Le schéma ( $\text{divP1 Flx } p=1$ ) semble donner des résultats proches de ceux obtenus avec le schéma standard. De plus, le schéma ( $\text{divP2 Flx } p=2$ ) semble donner des résultats plus proches de l'expérimentale que le schéma linéaire à taille de particule identique.

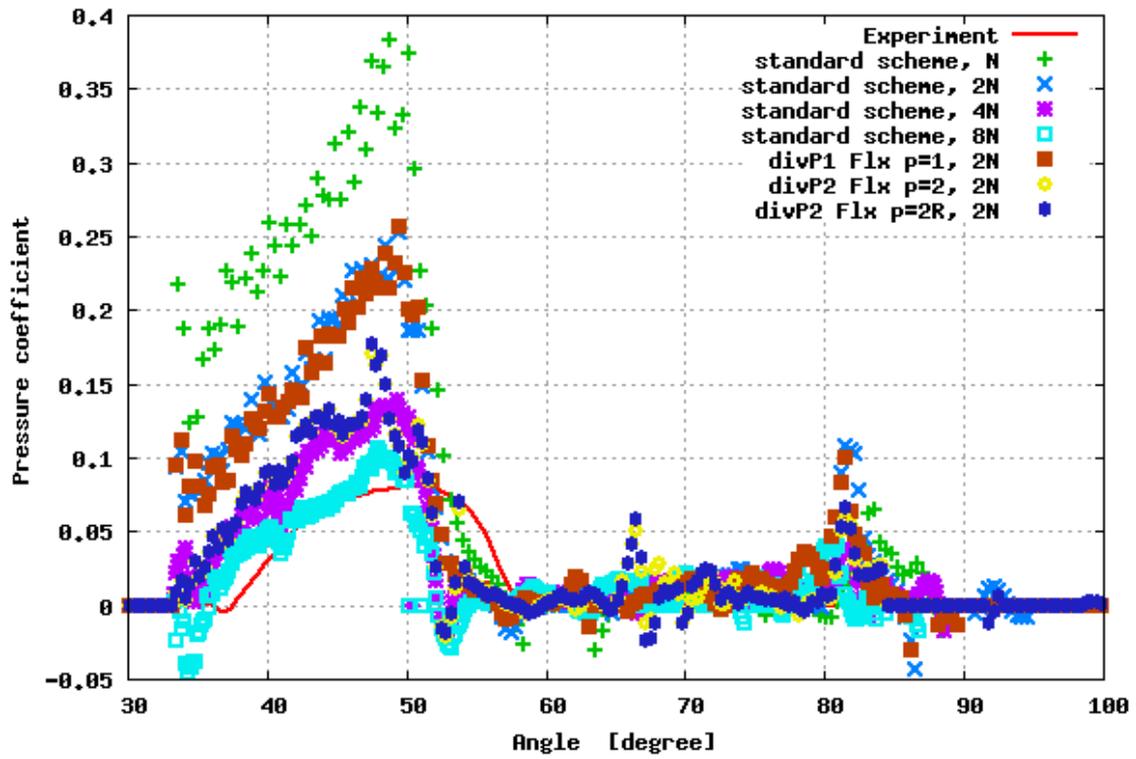


FIGURE 6.8 – Capteur 1

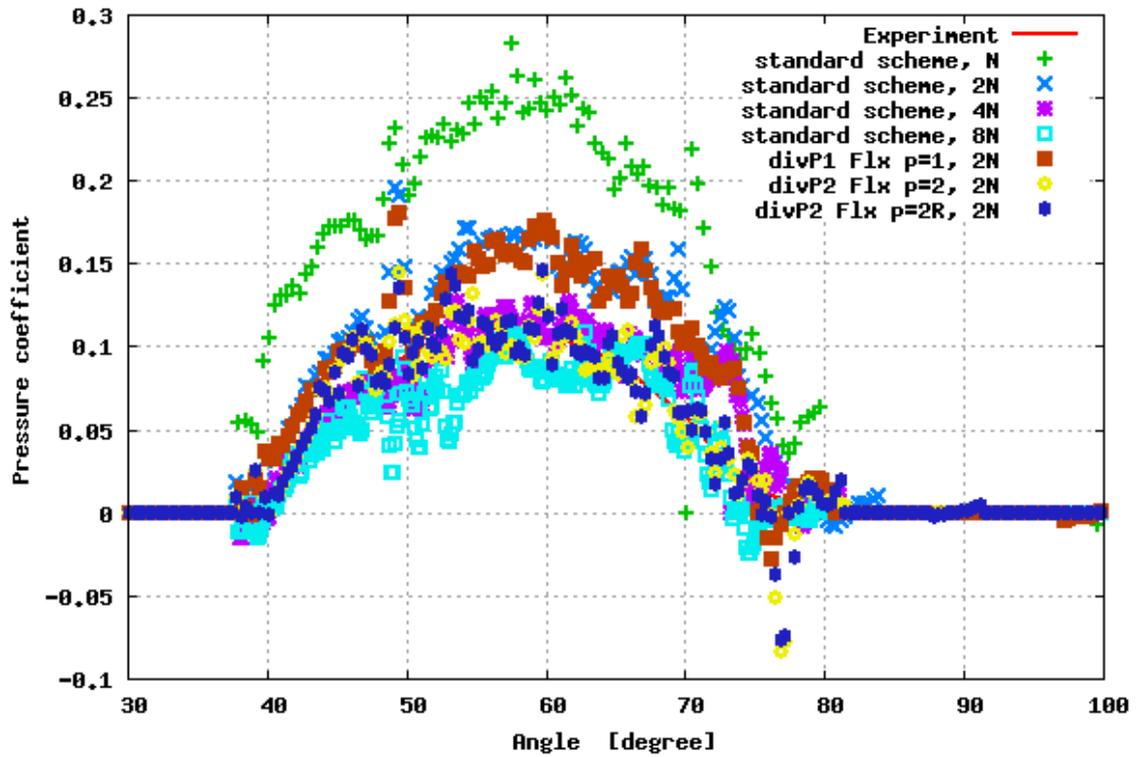


FIGURE 6.9 – Capteur 2

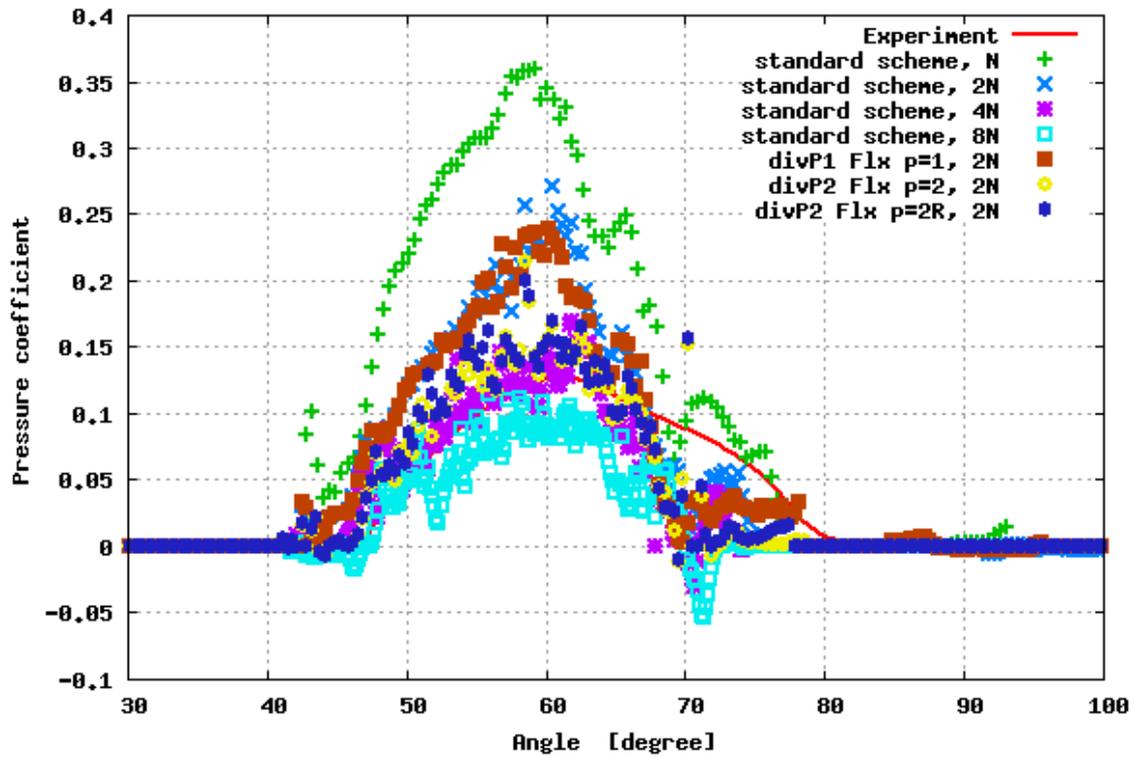


FIGURE 6.10 – Capteur 3

En ce qui concerne, les procédures d'adaptation, pour les schémas quadratiques il est possible de dire que malgré la  $p$ -dégradation plus de 66% des particules restent quadratiques. Le reste des particules dispose au cours du temps soit de reconstructions linéaires (environ 25%) soit d'aucune reconstruction. La  $d$ -adaptation est également utilisée pour ces simulations où une fine nappe d'eau parcourt l'auget et est évacuée de par et d'autre de la roue. Sur la figure (Fig 6.11), est illustrée cette procédure. Environ 95% des particules ont une reconstruction en 3D, seul 5% principalement dans les nappes d'évacuation d'eau ont des gradients évalués en 2D ou sont isolées sur les fronts de surface libre.

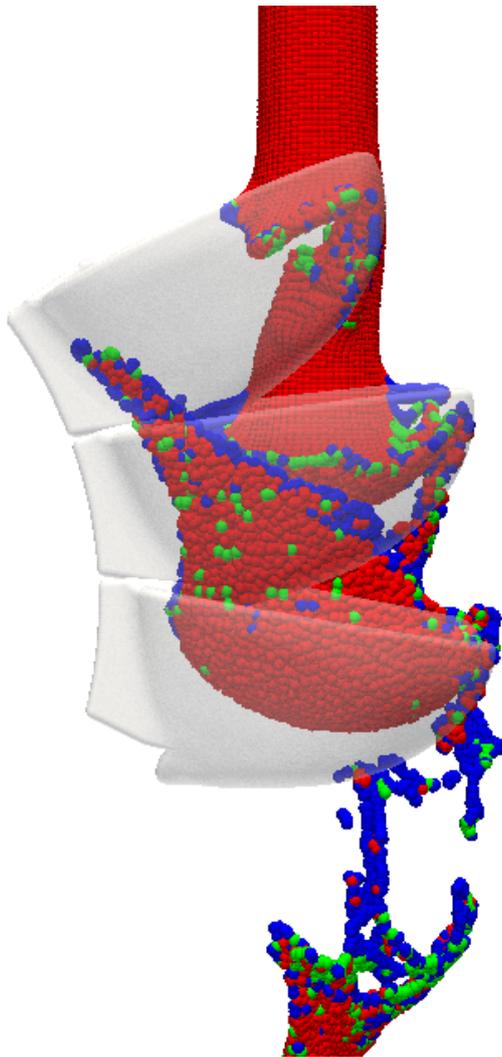


FIGURE 6.11 – *d*-adaptation pendant une simulation Pelton (rouge : 3D, vert : 2D , bleu : 1D ou constant)

Les ordres élevés semblent apporter un bénéfice pour ce type de simulation complexe lagrangienne en surface libre. Ce bénéfice est visible malgré les procédures de dégradation de l'ordre indispensable pour stabiliser ce type de simulation.

## 6.2 Simulation 2D d'une cascade de profils

Une simulation de cascade de profils correspondant au démarrage d'une roue Francis (Fig 6.12 ) très simplifiée, est exposée dans cette section. L'ensemble des ingrédients nécessaire à la simulation réelle 3D est utilisé dans ce cas simplifié 2D.

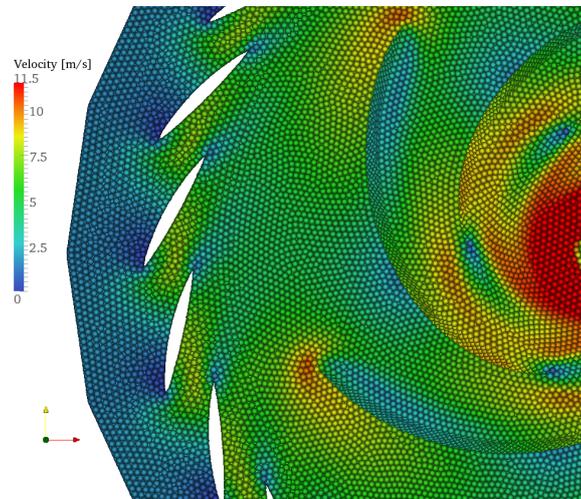


FIGURE 6.12 – Champ de vitesse lors de l'ouverture des aubes directrices au démarrage d'une turbine Francis

Au moment du démarrage de la turbine Francis, des aubes directrices s'ouvrent afin de laisser le fluide rentrer dans le compartiment de la roue, la mettant ainsi en rotation. Par symétrie radiale, une section angulaire peut correspondre à un domaine rectangulaire périodique constitué d'une cascade linéaire de profil d'aile . La première colonne correspond aux aubes directrices s'ouvrant au cours du démarrage. Une loi d'ouverture est appliquée (Fig 6.13a).

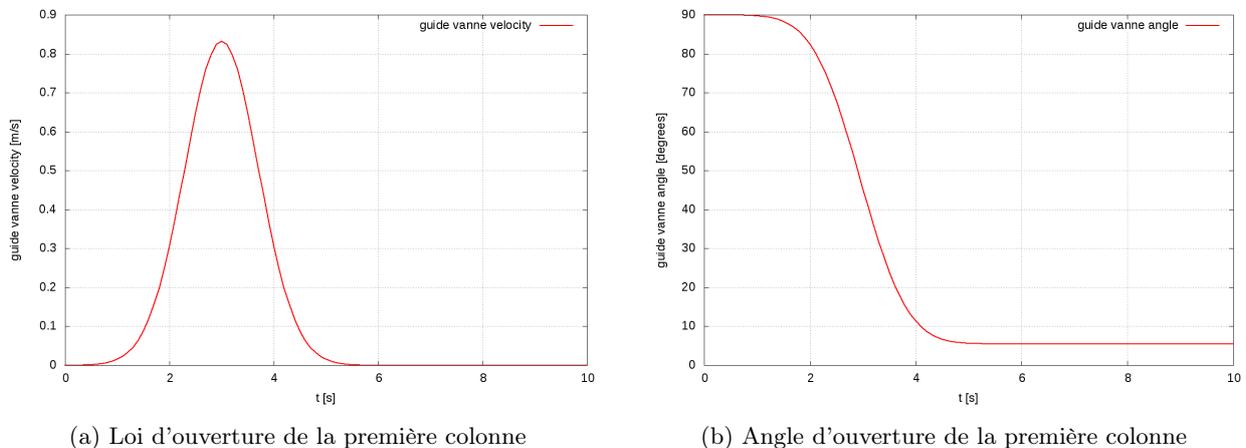


FIGURE 6.13 – Ouverture des aubes directrices représentées par la première colonne de profils de la cascade 2D

La seconde colonne correspond à la roue de la turbine Francis qui aura un mouvement de translation vertical constant ( $v_t = 0.1$  m/s) afin de simuler une rotation uniforme de la roue. Les deux colonnes sont séparées par une taille de longueur de corde ici  $c = 1$  m. Les vannes s'ouvrent en 20 secondes avec une vitesse régulière. Après ces 20s, les vannes sont immobiles et sans incidence avec l'écoulement. Au démarrage la section de canal est fermée par les profils de la première colonne parfaitement perpendiculaire au sens de l'écoulement, la hauteur du canal est donc de  $c = 1$  m. L'écoulement vient de la gauche vers la droite avec un angle d'incidence de 7 degrés. L'entrée est située à 2.5 cordes du premier profil et à 1.5 cordes du second profil est située la sortie. La condition d'entrée impose une pression totale ( $P_t = 2000$  Pa) et la condition de sortie est une pression imposée ( $P = 0$  Pa).

Le domaine de calcul est rempli de particules (Fig 6.14). Le premier compartiment correspond à la région d'injection avec des particules mises en pression. Le second compartiment celui de la roue, est rempli de particules fluides initialement au repos. L'ouverture des aubes directrices met ensuite l'ensemble en mouvement.

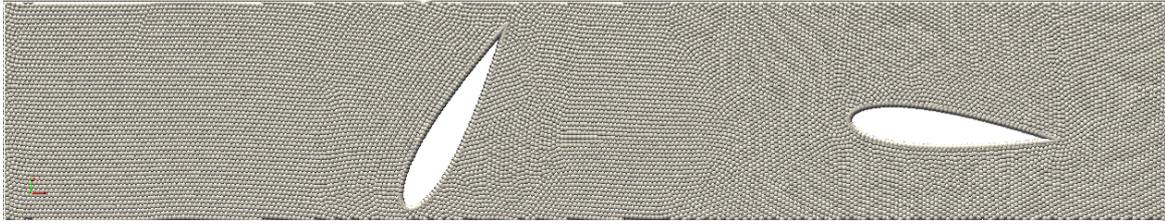


FIGURE 6.14 – Présentation du cas de la cascade de profils 2D

Deux niveaux de discrétisation ont été utilisés. La taille la plus grossière des particules fluides est de  $\Delta x = 2$  cm soit environ 17 000 particules au sein du canal. Cette discrétisation est notée  $N$ . En multipliant par 2 le nombre de particules, le rayon des particules est divisé par racine de deux et la discrétisation est notée  $2N$ . Dans le calcul, le mouvement ALE permet de légèrement déplacer les particules (à la base eulériennes) de façon synchrone avec les mouvements des parois solides formées par les profils. De plus, ce mouvement permet de légèrement décaler les particules pour limiter l'apparition de trous non-physique ce qui permet de réduire l'erreur *closed-box*.

### 6.2.1 Présentation du calcul

Ce cas permet d'appréhender l'attrait des schémas d'ordres élevés pour un cas instationnaire d'écoulement interne. Trois schémas numériques sont utilisés le schéma linéaire (divP1, Flx p=1) et deux schémas quadratiques (divP2, Flx p=2 répété) avec et sans la  $p$ -adaptation. La reconstruction quadratique des flux est à base répétée pour éviter la  $p$ -dégradation. Avec la  $p$ -adaptation, l'ordre des reconstructions des états s'adaptera à l'erreur locale d'extrapolation des champs.

### 6.2.2 Résultats et discussions

La figure (Fig 6.15) présente le champ de vitesse à trois instants donnés de la simulation pour le schéma (divP1, Flx p=1). Au démarrage du calcul ( $t=0s$ ), la vitesse dans le domaine est nulle. Au cours de l'ouverture ( $t=10s$ ), le fluide accélère dans le domaine. Une configuration stable est atteinte au niveau du première profil en raison de l'immobilité des aubes directrices après 20s. Un fort sillage numérique est visible à l'arrière des deux profils durant l'ensemble de la simulation.

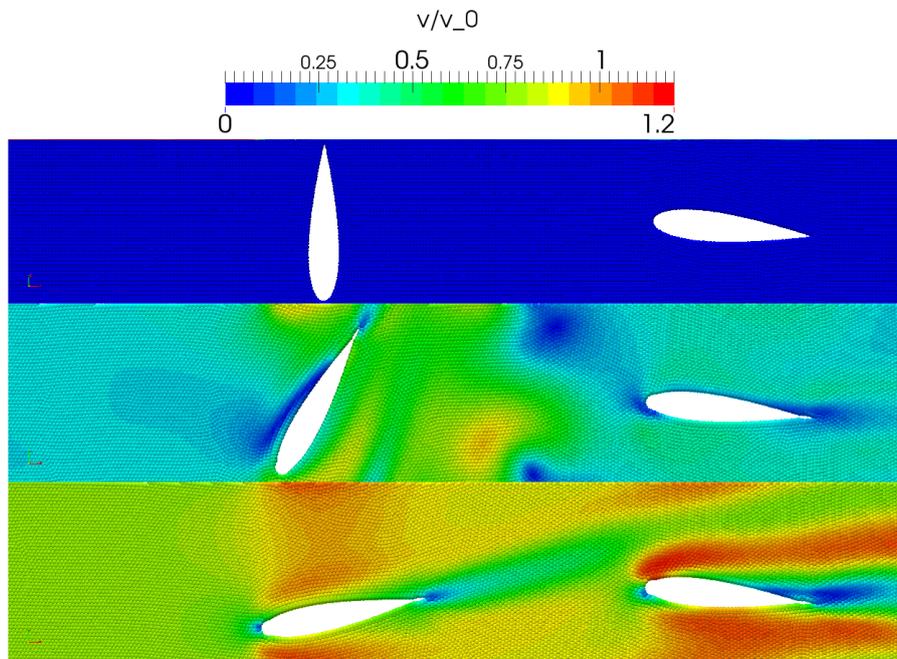


FIGURE 6.15 – Champ de vitesse à trois instants ( $t=0s$  en haut,  $t=12s$  au milieu et  $t=21s$  en bas)

La figure (Fig 6.16) présente le champ de vitesse au moment de l'ouverture des aubes directrices en fonction des schémas et/ou du nombre de particules. L'utilisation des schémas d'ordre élevé permet pour  $N$  particules de mieux capturer l'accélération du fluide entre les aubes directrices. En parallèle, le front de l'accélération

est plus avancé dans le domaine, tout comme avec la simulation linéaire sur deux fois plus de particules ( $2N$ ). En réduisant la viscosité et en augmentant la précision avec du  $h$ -raffinement ou du  $p$ -raffinement, le blocage numérique entre les aubes directrices est réduit.

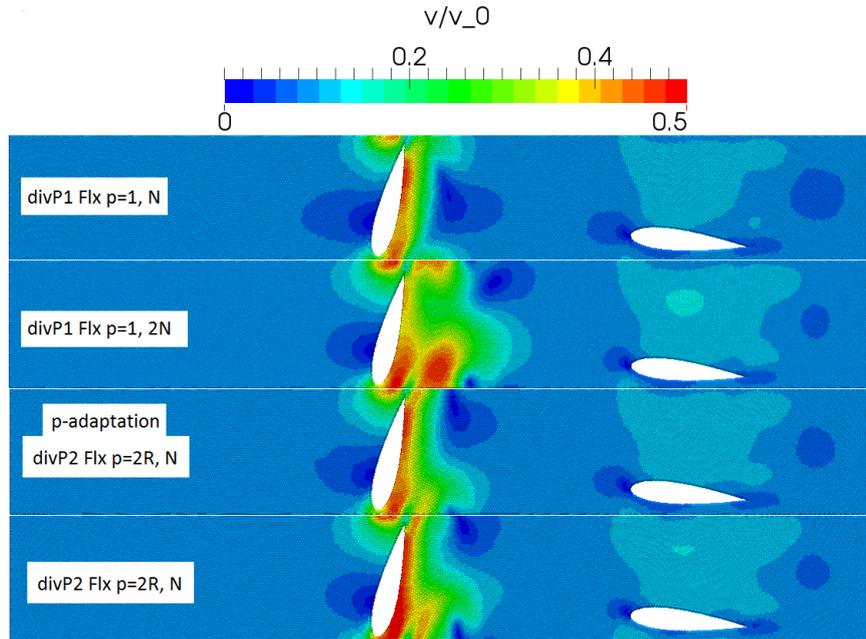


FIGURE 6.16 – Champ de vitesse au moment de l'ouverture pour les différents schémas

La figure (Fig 6.17) présente le coefficient de pression le long du premier profil après l'ouverture complète des aubes directrices. Après 30 secondes, l'écoulement est établi et les aubes directrices ne sont plus en incidence. Il peut être remarqué que la  $p$ -adaptation permet d'avoir un coefficient de pression similaire à celui obtenu avec le schéma quadratique sans  $p$ -adaptation (i.e. avec des flux quadratiques dans tout le domaine). Ceci illustre de nouveau l'intérêt d'utiliser les ordres élevés essentiellement dans les régions à forts gradients. Le fait de raffiner la discrétisation (divP1 Flx  $p=1$ ) sur  $N$  puis  $2N$  particules, permet d'avoir une solution plus proche de la solution potentielle avec bien entendu un coût de calcul plus important (fois  $\sqrt{2}^3$ ). Le coefficient de trainée numérique sur le premier profil peut également être évalué après ouverture complète. Le schéma (divP1, Flx  $p=1$ ) conduit sur  $N$  particules à avoir un coefficient de trainée numérique sur le premier profil de 0.61. Ce coefficient devient 0.042 sur  $2N$  particules. Le schéma (divP2, Flx  $p=2R$ ) avec la  $p$ -adaptation permet d'avoir un coefficient de 0.05 contre 0.045 sans la procédure d'adaptation i.e en ayant toutes les particules avec le schéma (divP2, Flx  $p=2R$ ). Le champ de vitesse recolle à la paroi avec les ordres élevés ( $p$ -raffinement) ou avec le raffinement en taille de particules ( $h$ -raffinement). De même le sillage numérique est réduit par les deux approches, ce qui illustre la réduction de la dissipation numérique.

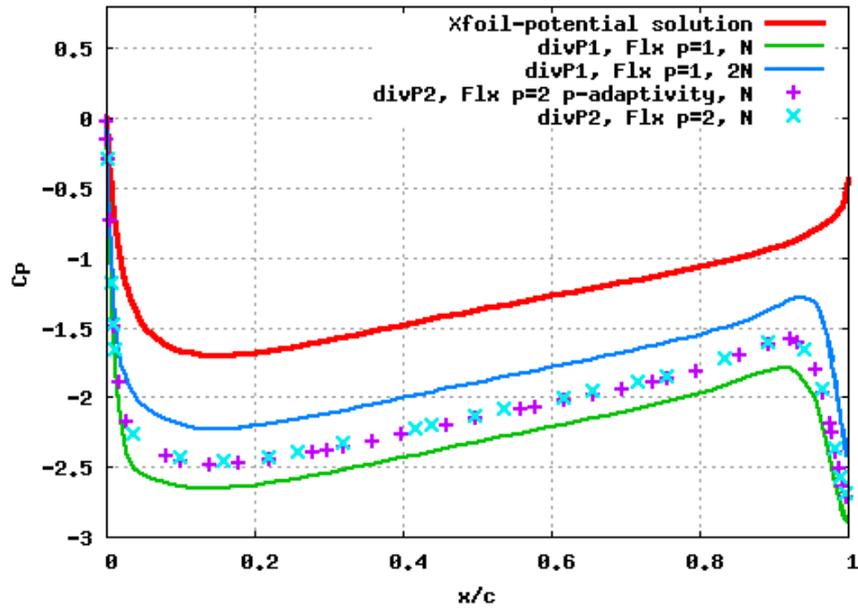


FIGURE 6.17 – Coefficient de pression le long du premier profil pour  $t=25s$

*Remarque*

Les résultats au bord de fuite sont aberrants en raison de la prise en compte de voisins au delà de la géométrie du profil. Ce problème n'a pas été étudié dans ce travail et définit la notion de *critère de visibilité*.

La  $p$ -adaptation est illustrée sur la figure (Fig 6.18). Là où de forts gradients sont créés, l'erreur d'extrapolation linéaire est forte. La  $p$ -adaptation permet alors d'utiliser des schémas quadratiques (en rouge).

$p=1$  (blue),  $p=2$  (red)

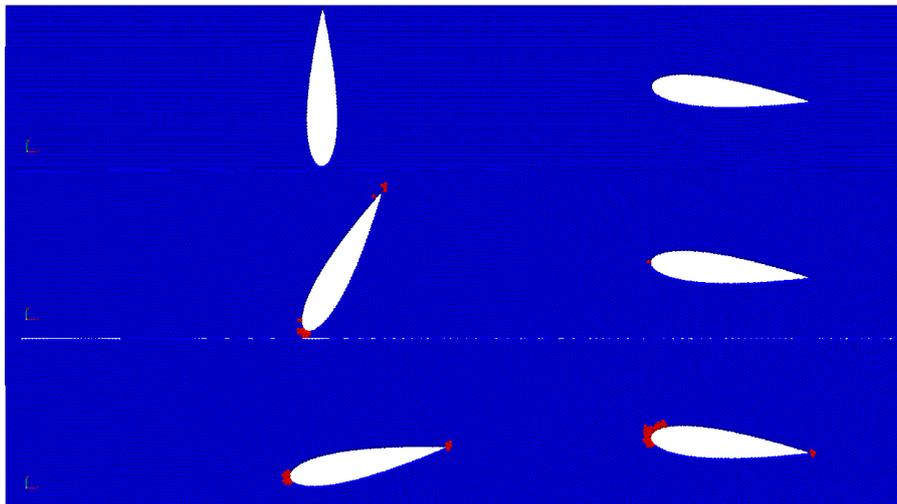


FIGURE 6.18 –  $p$ -adaptation à trois instants ( $t=0s$  en haut,  $t=12s$  au milieu et  $t=21s$  en bas) bleu : divP1, Flx  $p=1$  et rouge : divP2, Flx  $p=2R$

# Conclusions

Ce travail de thèse est concentré sur la montée en ordre des schémas numériques sans maillage pour la méthode SPH-ALE. Les travaux présentés précédemment montrent que cet objectif est possible à atteindre sous certaines conditions d'utilisation. La première et non des moindres est la capacité à s'adapter aux configurations complexes de particules. Des procédures d'adaptation en ordre  $p$ , en espace  $d$  ont prouvé leur efficacité sur des cas académiques mais également sur des applications industrielles. La seconde est la bonne cohérence entre les schémas de flux et l'intégration de ces flux tout comme pour la méthode des volumes finis. L'expérience a montré la nécessité d'accorder l'ordre de l'opérateur de divergence avec l'ordre des extrapolations des états aux interfaces des problèmes de Riemann.

Dans le détail, l'étude de l'écoulement quasi 1D a permis de montrer la faisabilité de la montée en ordre des schémas par les moindres carrés pour éviter un raffinement coûteux de la distribution des particules. L'objectif est de remplacer les reconstructions SPH évaluant les états aux interfaces des problèmes de Riemann locaux par des extrapolations d'ordre supérieur. Une technique d'évaluation des gradients servant à l'approximation des états droit et gauche dans les schémas de montée en ordre pour les flux a dû être recherchée. Les moindres carrés MLS ne disposant pas de limitation conceptuelle pour être utilisé en 2D ou 3D, cette technique a été retenue. Leur utilisation sur des cas tests 2D a permis de montrer une réelle diminution de la viscosité numérique dès les reconstructions d'ordre 3. Des reconstructions d'ordre plus important sont envisageables mais il faudra tenir compte du coût de stockage associé à la reconstruction, du nombre de voisins nécessaire. Ce dernier point peut conduire à augmenter le ratio  $\frac{h}{\Delta x}$  amenant à diminuer l'attractivité des ordres élevés par rapport à du  $h$ -raffinement.

L'emploi des reconstructions d'ordre élevé a conduit à remarquer une limitation conceptuelle des schémas tels que formulés par Vila [61]. La convergence spatiale des simulations utilisant des flux d'ordre 3, a montré une majoration par 2 du schéma global par l'erreur commise sur l'opérateur de divergence. En modifiant la fonction de forme utilisée pour évaluer cet opérateur, il est possible de lever cette limitation. Il pourra être remarqué que cette limitation n'avait pas été observée en 1D. Il est raisonnable de penser que l'approximation de la divergence souffre plus fortement des problèmes de distribution des particules en 2D ou 3D. De plus, la quantification de l'erreur en 1D pouvait être biaisée par un apport purement numérique d'énergie en partie dû aux corrections historiques de l'erreur de *closed-box* et de la renormalisation.

Il est donc naturel de discuter également de la notion de conservation. Une étude bibliographique a permis de voir qu'il est difficile pour des méthodes numériques avec ou sans maillage de concilier la consistance et la conservation. La consistance a été privilégiée dans ce travail de thèse. Les cas test ont permis d'illustrer que les nouveaux schémas consistants et non explicitement conservatifs ne conduisent pas à une perte de la conservation supérieure au schéma de référence de la SPH-ALE corrigé.

La contribution de ce travail de thèse est donc une réelle réduction de la viscosité numérique et une montée en ordre possible jusqu'à l'ordre 3 pour des écoulements internes et externes dans une description eulérienne et/ou lagrangienne. Cette dernière description a amené le travail de recherche vers des procédures d'adaptation des schémas avec le voisinage des particules. Différentes techniques ont été présentées et ont montré leur efficacité. Une limitation conceptuelle persiste toutefois sur le traitement de la surface libre comme condition limite. Au delà des motivations liées à la troncature, cette région du domaine conduit à dégrader abusivement le schéma pour des raisons de stabilité.

Ce travail de thèse s'est basé sur un code industriel de CFD, ASPHODEL dont il fallait modifier la méthode numérique afin de pouvoir atteindre des ordres de précision, de consistance supérieurs. Les impératifs industriels ont fixé des propriétés numériques, à savoir la conservation, la consistance ainsi que la précision. Le fait de posséder ces propriétés ne devait évidemment pas altérer la robustesse du code de simulation industrielle. Le choix a été de privilégier la précision et la consistance au détriment de la conservation. Les nouvelles formulations des schémas SPH-ALE ont montré leur intérêt significatif sur des cas d'applications industrielles complexes avec

des éléments mobiles (roue, profils).

Les perspectives de travaux qui découlent de ces contributions portent sur les interactions en paroi qui pourraient être gérées avec un couplage avec la méthode des volume fini afin de restaurer l'ordre des schémas en paroi malgré la  $p$ -dégradation subie par les particules. En se basant sur [45], il est raisonnable de penser que cela pourrait aboutir à des simulations d'ordre élevé de grande qualité tant dans une description eulérienne que lagrangienne. Un autre axe de recherche porterait sur la création d'éléments de surface libre afin de conserver la précision (au minimum en  $h$ ) dans le domaine et de maintenir la stabilité des simulations dans une description lagrangienne avec surface libre. Le coût associé aux méthodes de reconstruction de surface devra être analysé afin de garder attractive l'approche.

## Troisième partie

### Annexes

# Annexe A

## Cas test

Dans cette partie les cas de validation utilisés dans cette thèse sont présentés. Ces cas de validation possèdent une solution analytique ou potentielle qui sera la solution de référence. L'état de l'art des résultats avec la méthode SPH-ALE [41] [45], est présenté dans cette section. Les solutions analytiques et les solutions obtenues avec le schéma standard seront donc la base de ce travail pour la suite.

### A.1 Cas monodimensionnel

Les équations d'Euler en 1D sous forme conservative [28] sont données par l'équation suivante pour un fluide parfait s'écoulant dans une conduite mono-dimensionnelle, de direction  $x$  et de section non constante  $S(x)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^2 + P S}{\partial x} = P \frac{\partial S}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $u$  la vitesse,  $P$  la pression et  $S$  la section. Une équation d'état fonction de la masse volumique  $P = f(\rho)$  permet de déterminer la pression. Les points de calculs pour ce cas, sont immobiles.

#### A.1.1 Écoulement quasi-1D dans un convergent-divergent

Le débit massique  $Q$  calculé comme  $Q = \rho v_{th} S(x)$  devant être conservé, et en considérant le fluide comme incompressible, la vitesse est alors inversement proportionnelle à la variation de section  $S(x)$ . La variation de la section  $S$  est évaluée par une fonction hyperbolique (Eq A.2) afin d'obtenir une tuyère convergente-divergente tendant asymptotiquement vers une section constante (Fig A.1a).

$$S(x) = \begin{cases} 1.398 + 0.347 \tanh(8 - 8x) \text{ sur } [0, 2] \\ 1.398 + 0.347 \tanh(8x - 24) \text{ sur } [2, 4] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Grace à la conservation du débit massique, la variation de vitesse est donnée par :

$$v_{th}(x) = \frac{Q_{entree}}{\rho S(x)} = \frac{v_{entree} S_{entree}}{S(x)} \quad (\text{A.3})$$

De plus en appliquant le théorème de Bernoulli, la pression est proportionnelle à la vitesse au carré donc de l'inverse de la section au carré donc .

$$P_{th}(x) = P_{sortie} - \frac{Q^2}{2\rho S^2} \quad (\text{A.4})$$

Les vitesses et pression théoriques sont représentées respectivement sur les figures (Fig A.2a, A.1b). Des conditions limites non-réfléchissantes de vitesse à l'entrée  $v_{entree} = 10$  m/s et de pression à la sortie  $P_{sortie} = 5$  Pa sont imposées.

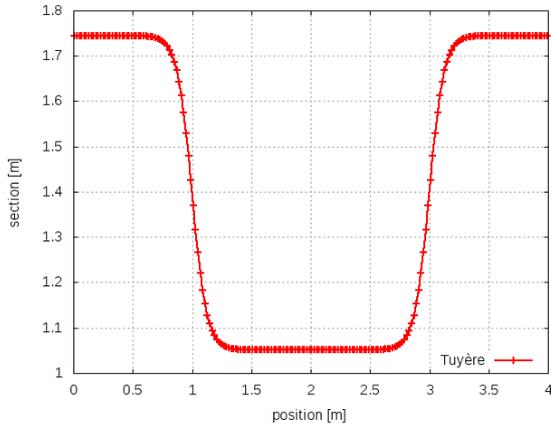
La discrétisation de l'espace correspond à  $\Delta x = 0.02$  dans le cas uniforme. Dans le cas non-uniforme un bruit d'amplitude maximale de 10% de  $\Delta x$  est appliqué. La longueur d'influence  $h$  est évaluée telle que  $h = 1.23\Delta x$ . L'ordre du schéma d'intégration temporelle de type Runge-Kutta varie avec l'ordre du schéma d'intégration spatiale. Le nombre CFL est de 0.4 pour l'ensemble des schémas de Runge-Kutta. La vitesse du son numérique est de  $c_0 = 1200$  m/s, le système est donc très raide.

Ce cas test quasi 1D présente l'avantage d'avoir une solution régulière. Cela permet de valider le concept d'utilisation d'ordres élevés sans a priori l'utilisation de limiteur de pente.

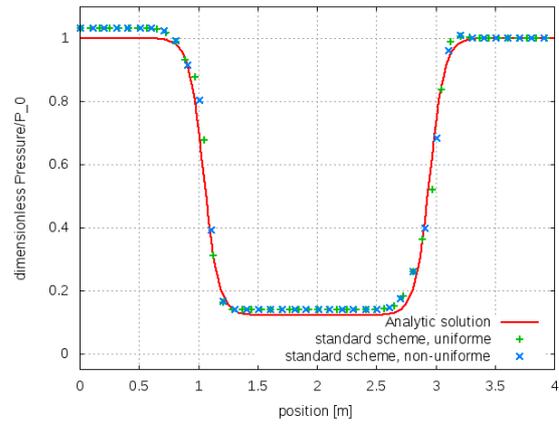
Des simulations utilisant le schéma SPH-ALE standard ont été effectuées afin de constituer une base de référence. Les champs de pression et de vitesse sont présentés sur les figures (Fig A.2a, A.1b). L'erreur sur la conservation du débit massique est également présentée (Fig A.2b). Le tableau (Tab A.1) montre les erreurs sur la pression et la vitesse pour une distribution uniforme et non-uniforme.

<b>Erreur sur les champs</b>	Distribution uniforme	Distribution non-uniforme
$\  P - P_{th} \ $	$4.49.10^{-2}$	$4.62.10^{-2}$
$\  v - v_{th} \ $	$7.20.10^{-4}$	$7.24.10^{-4}$

TABLE A.1 – Erreur sur la pression et la vitesse avec le schéma standard pour un écoulement quasi 1D

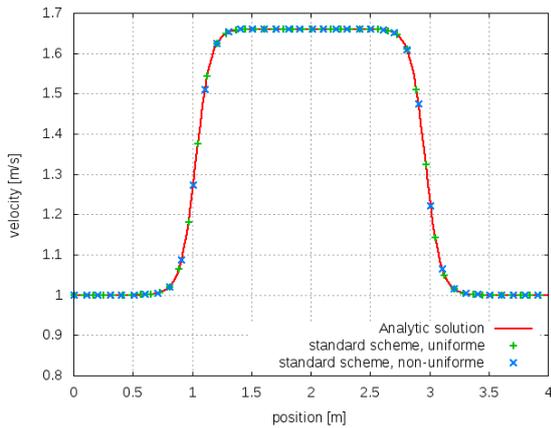


(a) Variation de section quasi 1D

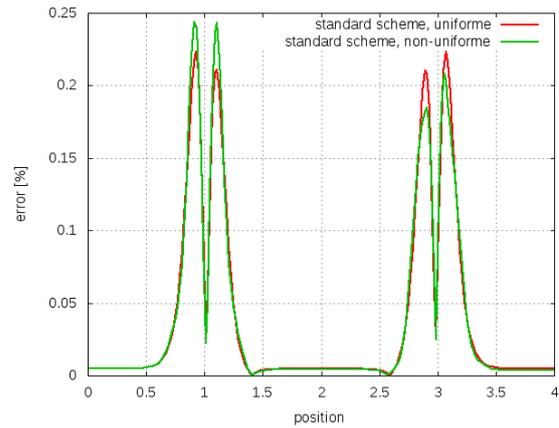


(b) Variation de pression dans la tuyère

FIGURE A.1 – Variation de section (gauche) et valeur de la pression (droite)



(a) Variation de vitesse dans la tuyère



(b) Erreur de conservation du débit massique

FIGURE A.2 – Vitesse et débit massique dans la tuyère

Les résultats montrent une évaluation de la vitesse très satisfaisants, les erreurs avec la solution exacte en maillage uniforme ou non sont de l'ordre de  $10^{-4}$ . La pression en revanche est moins bien évaluée avec ce type de discrétisation de l'ordre de  $10^{-2}$ . En effet il est possible d'observer que dans la région de l'entrée une surpression est présente. Elle permet de compenser les pertes de charge numériques dues à la dissipation numérique. Le débit massique dans les zones sans fort gradient de section est bien préservé. En revanche là où le gradient de section  $S$  présente une forte valeur, l'erreur sur débit massique peut atteindre 2.5%. Le schéma SPH-ALE standard corrigé avec la renormalisation et l'erreur closed-box est satisfaisant sur ce cas test eulérien 1D.

## A.2 Cas multidimensionnels

Les équations d'Euler en 2D sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 + P}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

avec  $(u, v)$  le vecteur vitesse et  $P$  la pression. La première équation du système A.5 est appelée équation de continuité et les deux suivantes équations du momentum.

### A.2.1 Tourbillons de Taylor-Green non-visqueux

#### Solution exacte

Les équations d'Euler incompressibles non conservatives sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

avec  $(u, v)$  le vecteur vitesse et  $p$  la pression. La première équation du système A.6 est appelée équation de continuité et les deux suivantes équations du momentum. Les tourbillons de Taylor-Green sur un carré bi-périodique unitaire  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  pour les équations d'Euler sont données avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u = U \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ v = U \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ P = \frac{\rho U^2}{4} (\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

avec  $U$  la norme du vecteur vitesse.

Les dérivées sur les vitesses sont donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2U\pi \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2U\pi \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2U\pi \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2U\pi \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Les dérivées sur la pression sont donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho U^2 \pi \sin(4\pi x) = -2\rho \pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2\rho \pi \sin(2\pi y) \cos(2\pi y) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

En insérant dans A.6 les dérivées précédentes, il apparaît que les dérivées temporelles sont nulles. Ceci montre bien qu'il existe une solution stationnaire au problème et que cette solution correspond aux conditions initiales.

#### Simulation numérique

Les tourbillons de Taylor-Green 2D ont une solution exacte instationnaire pour les équations de Navier-Stokes incompressibles sur un carré bi-périodique de longueur  $L = 1$ .

Les champs de pression et de vitesse sont donnés par :

$$\begin{cases} u = U e^{-8\pi^2 t \nu} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ v = -V e^{-8\pi^2 t \nu} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ p = \frac{\rho U^2}{4} e^{-16\pi^2 t \nu} (\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

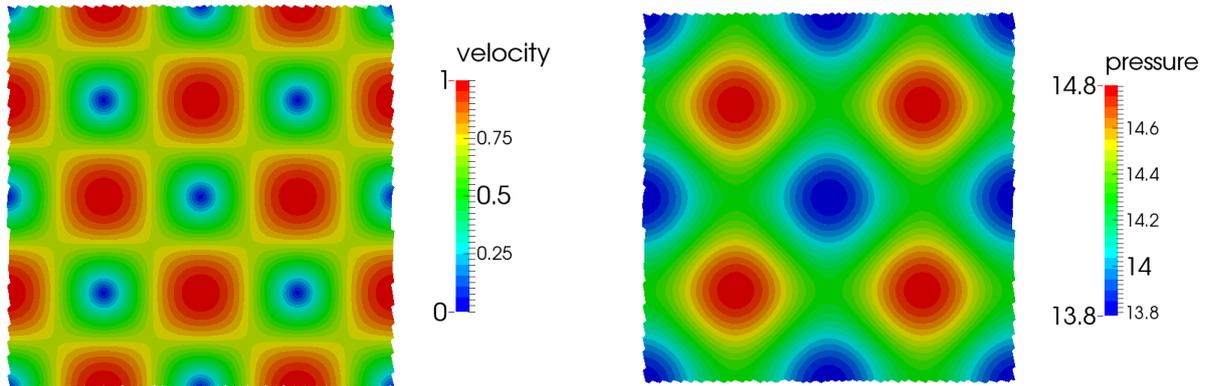
avec  $(u, v)$  le vecteur vitesse et  $P$  la pression.  $(U, V)$  est le vecteur vitesse initial.

Dans le cas d'une simulation non visqueuse  $\nu = 0$ , la décroissance des quantités physiques sera donc implicitement liée à la viscosité numérique [18]. Ce cas test est donc très utile car il va permettre de mesurer la

dissipation numérique des schémas. Une solution stationnaire existe pour la résolution des équation d'Euler pour ces tourbillons. De plus ce cas permet de s'affranchir des conditions limites (paroi, surface libre) grâce à la bi-périodicité. La solution numérique attendue étant régulière, ce cas test peut théoriquement être calculé sans utiliser de limiteurs de pente dans les schéma MUSCL.

Plusieurs niveaux de discrétisation ont été utilisés pour ce cas test afin d'évaluer l'impact de la taille des particules sur la viscosité numérique. Les discrétisations sont :  $100 \times 100$ ,  $142 \times 142$  et  $200 \times 200$  ce qui correspond à des divisions successives par  $\sqrt{2}$  du rayon ( $r \in \{0.005; 0.007; 0.01\}$ ). Ces niveaux permettent de multiplier par 2 et 4 le nombre de particules dans le carré unitaire. Un travail sur la disposition des particules a été fait de manière à réduire l'erreur *closed-box* géométrique. Les particules après ce pré-traitement sont immobiles durant la simulation.

Les valeurs des champs de pression et de vitesse sont données dans les figures A.3a A.3b.



(a) Champ de vitesse initiale

(b) Champ de pression initiale

FIGURE A.3 – Champ de vitesse et de pression pour des tourbillons de Taylor-Green

La figure A.4 présente l'évolution de la viscosité numérique du schéma standard SPH-ALE en fonction du niveau de discrétisation. Une approximation en puissance cubique de l'évolution a déjà été exposée par De Leffe [18] dans son mémoire de thèse.

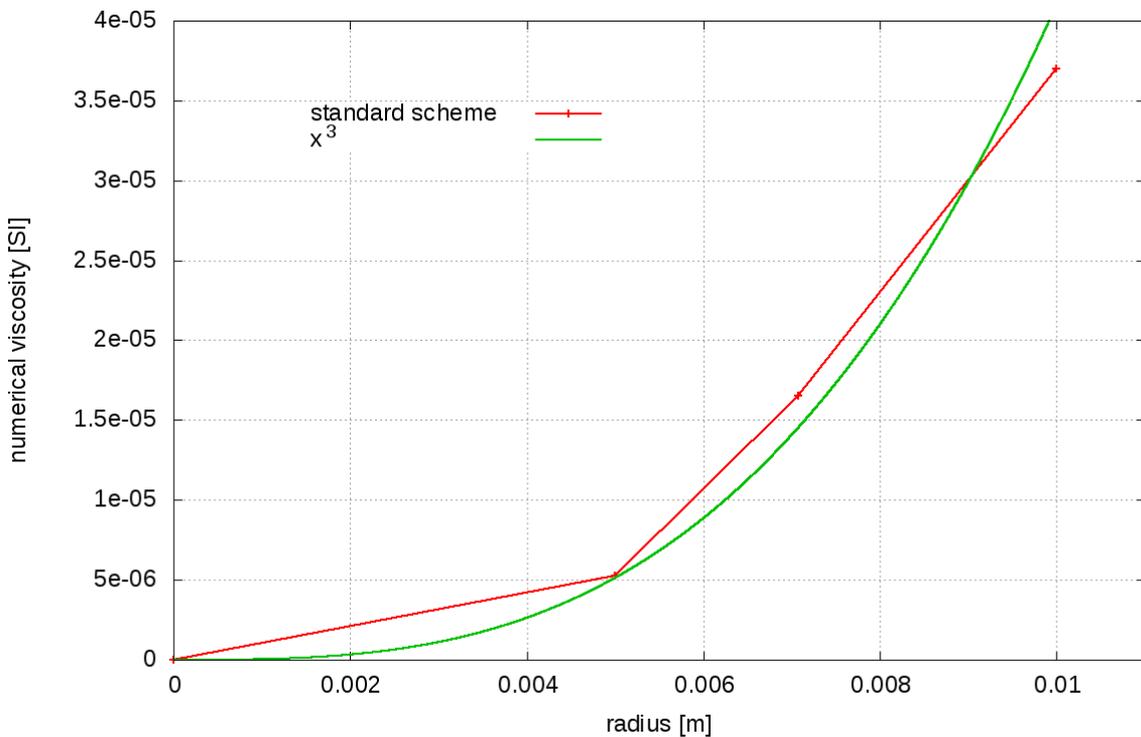


FIGURE A.4 – Évolution de la viscosité numérique en fonction de la taille de la discrétisation pour le schéma standard SPH-ALE

## A.2.2 Écoulement non-visqueux autour d'un cylindre

### Solution potentielle

Un cas test important de validation dans ce travail de thèse est le cas d'un écoulement non-visqueux autour d'un obstacle (Fig A.5). Un calcul potentiel rudimentaire permet de déterminer les valeurs de pression le long du cylindre  $C_p = 1 - 4\sin(\theta)$  en fonction de l'angle formé entre l'écoulement et les rayons (Courbe rouge sur Fig :A.9). De plus, l'écoulement étant non-visqueux, l'écoulement est stationnaire symétrique par rapport à l'axe de l'écoulement et aussi par rapport à l'axe perpendiculaire à celui-ci passant par le centre du cylindre.

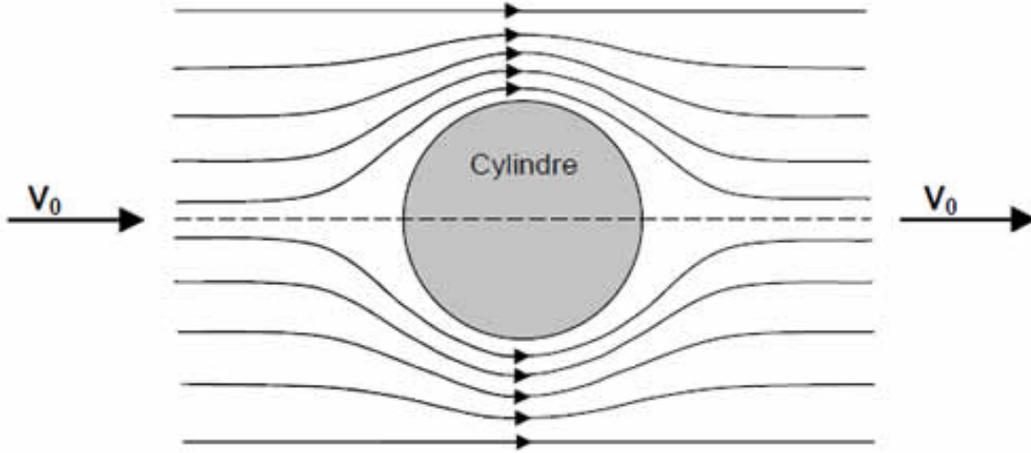


FIGURE A.5 – Écoulement non-visqueux autour d'un cylindre 2D (image tirée du site de l'Université de Paris-Diderot)

Le calcul du coefficient de pression sur les parois est calculé comme suit :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad (\text{A.11})$$

avec  $P_\infty$  la pression et  $v_\infty$  la vitesse à l'infini. Le coefficient de trainée est calculé comme suit :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \quad (\text{A.12})$$

avec  $F_x$  la force hydraulique dans la direction de l'écoulement. Le coefficient de trainée  $C_x$  permet de quantifier la viscosité numérique dans le cas de la résolution des équations d'Euler car ce coefficient est induit par une dissipation purement numérique.

### Simulation numérique

La figure (Fig A.6) montre la taille du domaine. Le diamètre du cylindre est de  $D = 1$  cm. L'ensemble des conditions limites sont à 7 diamètres du cylindre. La vitesse imposée à l'entrée est de  $u_{inlet} = 0.004$  m/s , la pression imposée à la sortie est  $P_{outlet} = 0$  Pa. Des conditions de périodicité ont été imposées sur les parties supérieures et inférieures du domaine.

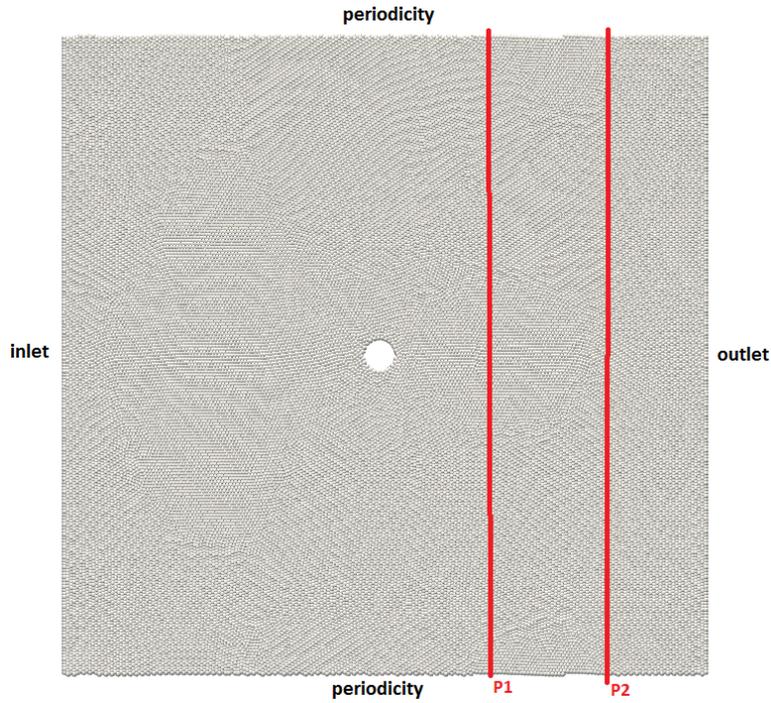
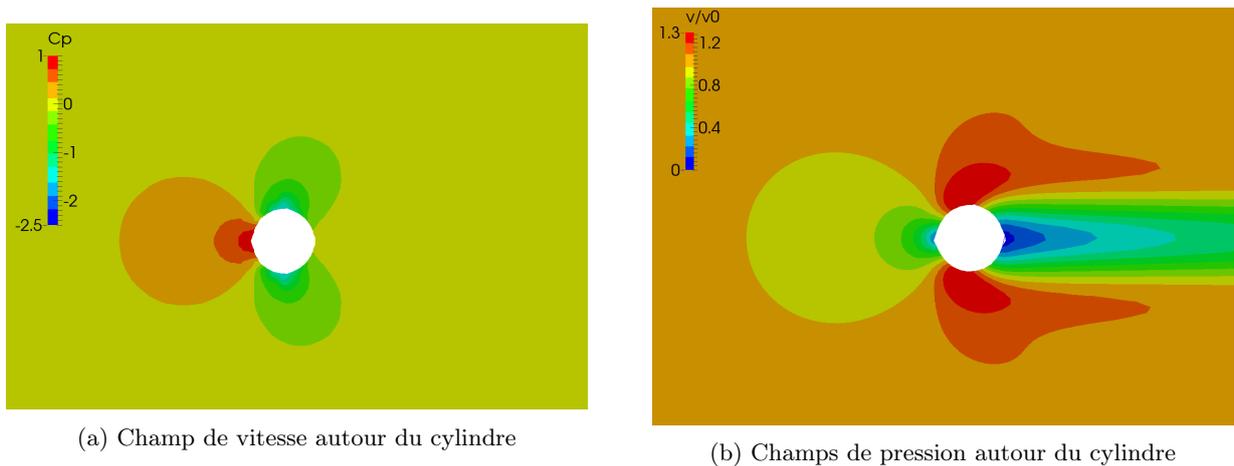


FIGURE A.6 – Domaine de calcul pour l'écoulement autour du cylindre avec les deux probes (P1 et P2)

La masse volumique de référence est de  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Le nombre de Mach numérique est fixé tel que  $Ma < 0.1$  i.e. une vitesse du son numérique  $c_0 = 0.04 \text{ m/s}$ .

Plusieurs niveaux de discrétisation ont été calculés afin d'étudier la convergence spatiale des schémas. L'idée est de multiplier par 2 et 4, le nombre de particules dans le domaine de calcul par des divisions successives par  $\sqrt{2}$  du rayon des particules ( $r \in \{0.005; 0.007; 0.01\}$ ) afin de définir  $N$ ,  $2N$  et  $4N$  distributions. La disposition des particules est telle que l'erreur closed-box géométrique soit minimisée [45]. Les particules sont immobiles durant la simulation. Deux capteurs ont été disposés en aval du cylindre afin de mesurer la conservation de la pression totale (Fig A.6) tel que  $\Delta Pt = \frac{P_{t,1} - P_{t,2}}{P_{t,1}} \times 100$ .

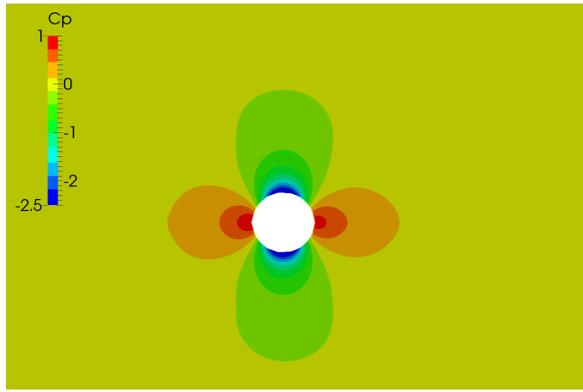


(a) Champ de vitesse autour du cylindre

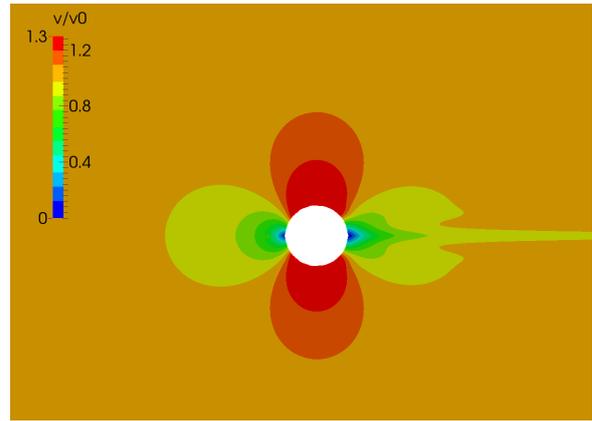
(b) Champs de pression autour du cylindre

FIGURE A.7 – Champ physique obtenus avec le schéma standard SPH-ALE sur  $N$  particules

Les figures (Fig A.7a et A.7b) montrent respectivement le champ de vitesse et de pression autour du cylindre calculé avec le schéma standard sur une distribution de  $N$  particules suivis par les figures (Fig A.8a et A.8b) sur 25 fois plus de particules. Un important sillage derrière le cylindre est visible sur  $N$  particules, créé par la dissipation numérique. De même, le champ de pression montre une surpression correcte au point d'impact mais aucune surpression diamétralement opposée. La figure (Fig A.9) présente les coefficients de pression le long du cylindre, pour les trois niveaux de discrétisation et un niveau de discrétisation supplémentaire ( $25N$ ). Comme il est possible de le voir en utilisant 25 fois plus de particules le calcul converge vers la solution potentielle.



(a) Champ de vitesse autour du cylindre



(b) Champs de pression autour du cylindre

FIGURE A.8 – Champ physique obtenus avec le schéma standard SPH-ALE sur 25N particules

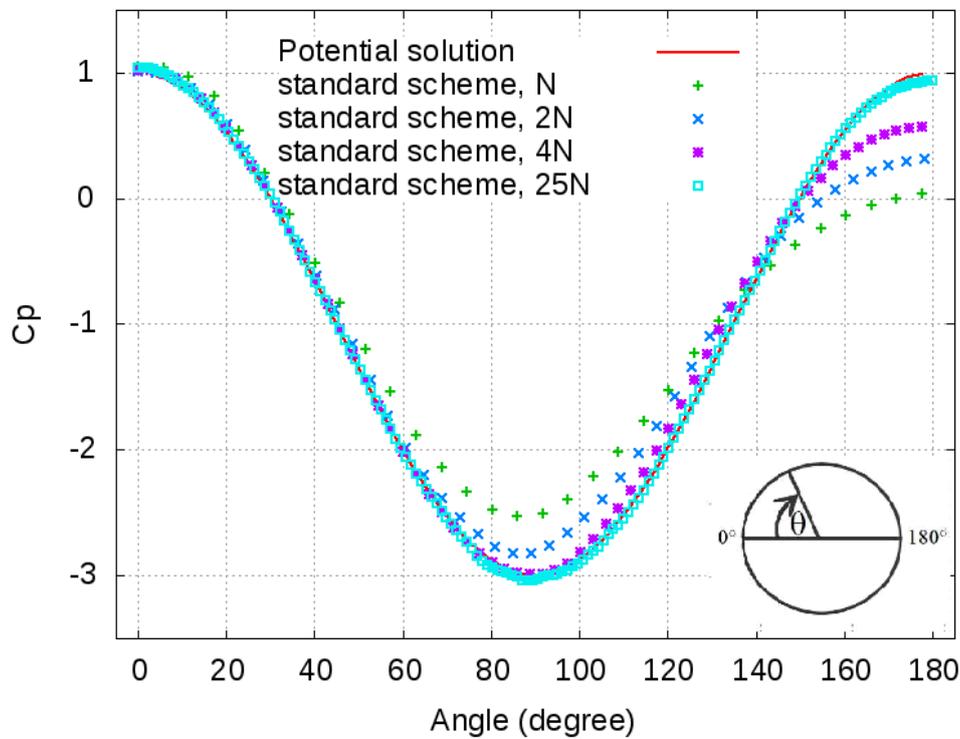


FIGURE A.9 – Coefficient de pression le long du cylindre pour 3 niveaux de discrétisation

Cette figure permet de voir que, en raffinant, la solution numérique se rapproche de la solution potentielle. Le même comportement peut être mesuré avec les coefficients de traînée théoriquement nulle pour cet écoulement non-visqueux. Pour  $N$  particules, le coefficient de traînée vaut 0.0185. En multipliant par 2 et 4, le coefficient vaut 0.0095 puis 0.0045.

### A.2.3 Impact d'un jet d'eau sur une section plane

#### Solution analytique

Une simple étude analytique permet de quantifier la force hydraulique appliquée sur la plaque plane :

$$\int_S \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma = - \int_S p \vec{n} d\sigma \quad (\text{A.13})$$

avec  $S$  la frontière du domaine fluide (entrée, sortie, paroi, surface libre). La pression en surface libre est de valeur nulle. Les intégrations de la pression à travers les sorties se compensent, les normales étant opposées

(Fig A.10 en vert  $S_{sortie}$ ). De même en surface libre, le produit scalaire de la vitesse par la normale est nul. La pression sur la plaque (en rouge) est donc :

$$\int_{S_{entree}} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{S_{plaque}} p \vec{n} d\sigma \quad (A.14)$$

donc la force hydraulique qui s'applique à la paroi est donnée par  $F = \rho v^2 D$  en Newton avec  $D$  le diamètre du jet (ici  $D = S_{entree}$ ) et  $v$  la vitesse d'injection.

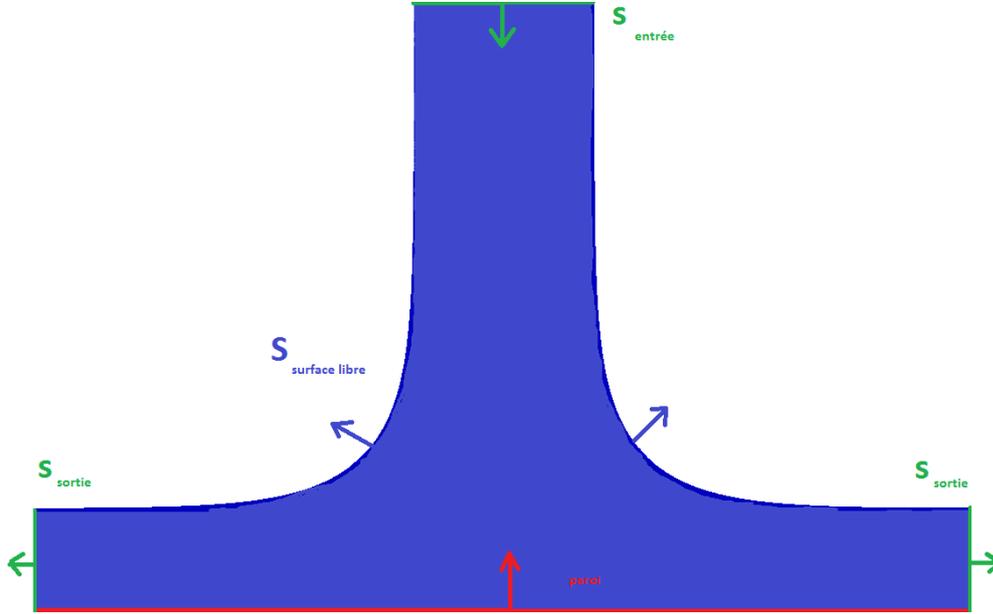


FIGURE A.10 – Schéma du jet sur plaque plane

### Solution potentielle

La solution stationnaire de l'écoulement d'un jet impactant une plaque plane peut-être trouvée par une méthode potentielle. L'écoulement est supposé irrotationnel, incompressible et permanent. La recherche de la solution se fait par le calcul du potentiel complexe qui permet d'avoir les composantes de la vitesse et la position de la surface libre. La valeur de la pression est obtenue en utilisant le théorème de Bernoulli [41]. Le coefficient de pression en paroi est illustré sur la figure (Fig A.13). La forme de la surface libre (x,y) pour un jet orthogonal à la plaque est pour  $\theta \in [0, \pi]$  et  $k = 3cm$  :

$$x = \begin{cases} \ln(\tan(\theta/2)) - \frac{k}{2} & \text{for } \theta < \frac{\pi}{2} \\ \ln(\tan(\theta/2)) + \frac{k}{2} & \text{for } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et } y = \begin{cases} \frac{k}{2} [\frac{\pi}{2} + \ln(\sin(\frac{\theta+\pi/2}{2})) - \ln(\sin(\frac{-\theta+\pi/2}{2}))] & \text{for } \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{k}{2} [\frac{\pi}{2} + \ln(\sin(\frac{\theta+\pi/2}{2})) - \ln(\sin(\frac{\theta-\pi/2}{2}))] & \text{for } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (A.15)$$

### Simulation numérique

Le jet utilisé a un diamètre de 3 cm et une vitesse uniforme de 19.61 m/s. L'incidence du jet sur la plaque est de 90 degrés. La taille de la discrétisation choisie est  $\Delta x = 1$  mm soit 30 particules dans le diamètre. Enfin la vitesse du son choisie est  $c_0 = 200$  m/s. Cette simulation à surface libre est lagrangienne, les particules sont donc en mouvement avec la vitesse du fluide (Fig A.11). Le résultat de simulation présenté utilise le schéma standard développé par Vila i.e. un opérateur de divergence SPH corrigé avec l'erreur CB de [45] et la correction de renormalisation

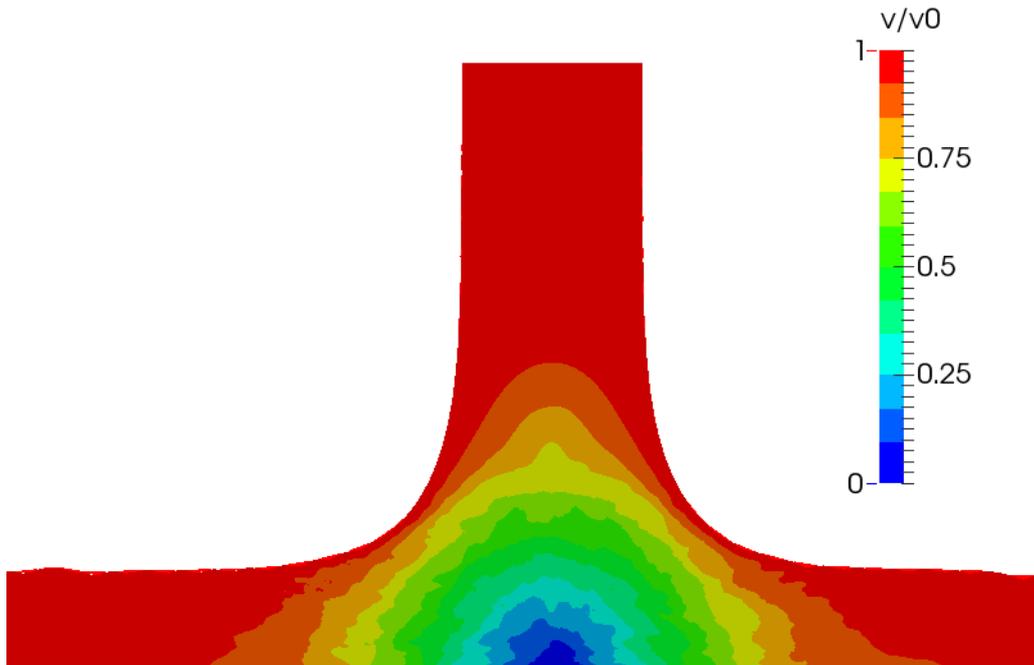


FIGURE A.11 – Champ de vitesse au sein du jet sur plaque plane

La figure (Fig A.12) présente la valeur du champ de pression pour le schéma standard. La symétrie par rapport à l'axe du jet est globalement respectée même si le champ est très bruité. De nouveau la symétrie est globalement correcte mais il persiste un bruit.

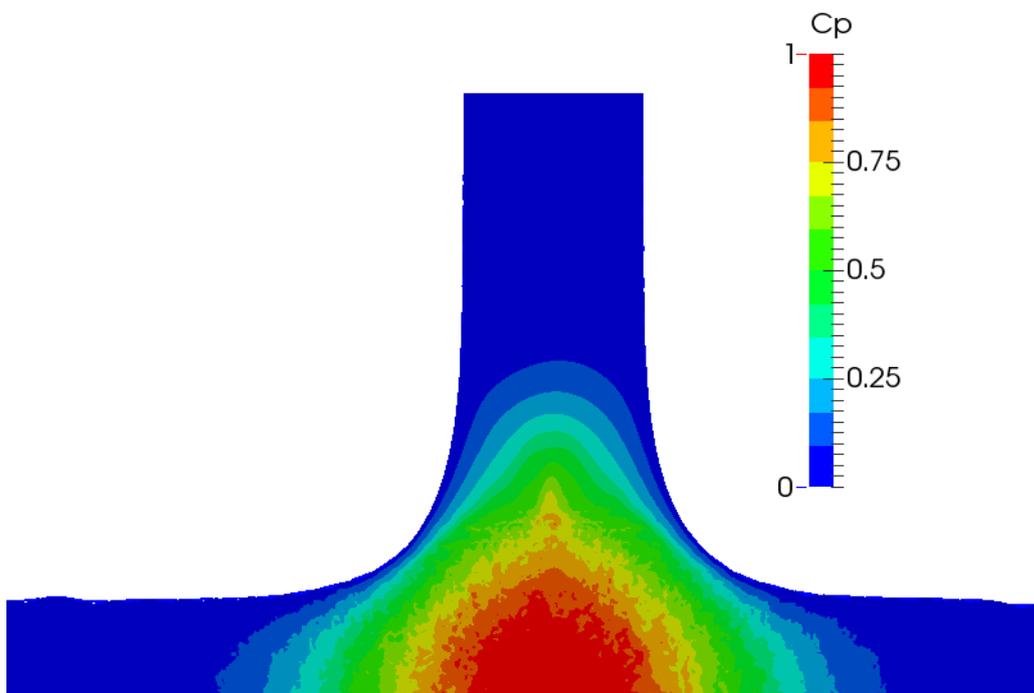


FIGURE A.12 – Coefficient de pression au sein du jet sur plaque plane

Le coefficient de pression en paroi est calculée tel que  $Cp = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2}$ . En raison du bruit, une moyenne sur 20 échantillons de pression sur 20 pas de temps est présentée sur (Fig A.13) avec la variance. Comme il est possible de le voir, la forme globale est correcte mais la valeur moyenne est assez éloignée de la solution potentielle. L'indicateur de variation illustre bien le bruit ambiant.

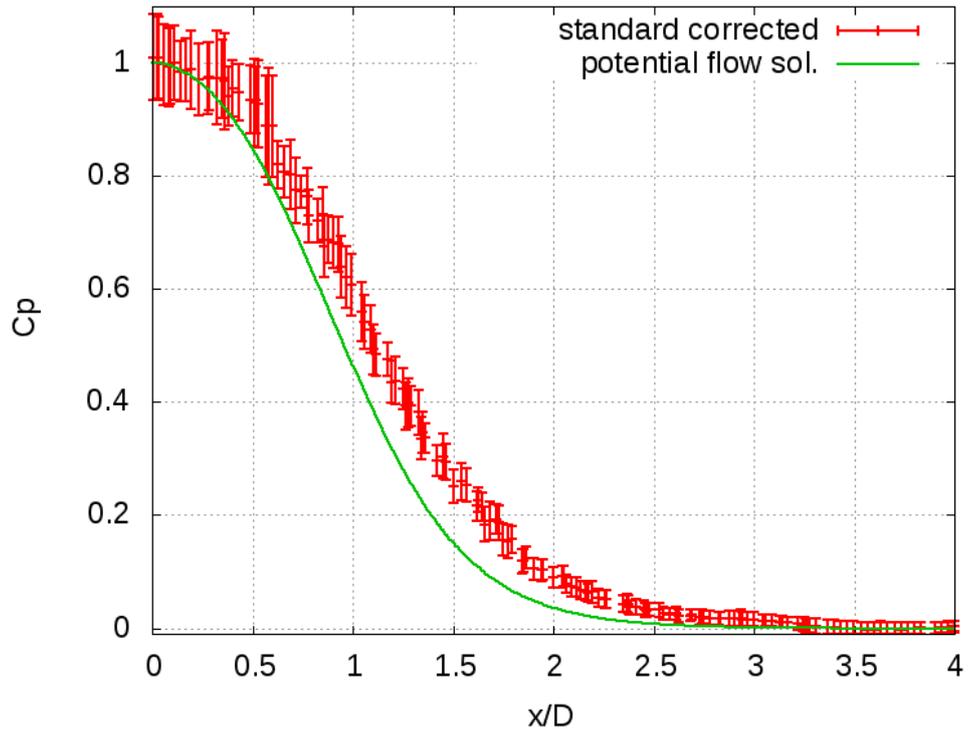


FIGURE A.13 – Champ de pression le long de la plaque obtenu avec le schéma standard

## Annexe B

# Analyse numérique : SVD/QR

---

Cette annexe expose quelques méthodes numériques pour la résolution d'un système linéaire associé à un problème aux moindres carrés.

Le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$\bar{C}\bar{A} = \bar{B} \quad (\text{B.1})$$

avec la matrice  $\bar{C}$  composée de la projection sur la base de taille  $m$  des contributions géométriques. Cette matrice est de taille  $N \times m$  avec  $N$  le nombre de voisins dans le voisinage  $V$ .

Le vecteur  $\bar{A}$  est composé des  $m$ -inconnues qui représentent la partie constante ainsi que les différentes dérivées successives du polynôme approchant le champ sur les  $N$ -données. Le vecteur  $\bar{B}$  est le second membre constitué des  $m$ -informations du champ projeté sur la base.

Le contexte d'utilisation des moindres carrés impose une certaine mobilité des particules au cours du temps. Les voisinages  $V$  évoluent donc au cours du temps. La matrice  $\bar{C}$  n'est donc pas constante.

De plus au sein d'un même calcul en raison des zones de troncature dues aux frontières (paroi, surface libre), l'ensemble des particules n'a pas nécessairement le même nombre de voisins  $N$ . Ce constat illustre la nécessité d'allouer dynamiquement des tableaux  $\bar{C}$ ,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  de taille changeante. Afin de contourner cette difficulté, le problème (Eq B.1) est multiplié par la transposée de la matrice  $\bar{C}$  transformant le problème en équations dites *normales* tel que

$$\bar{C}^T \bar{C} \bar{A} = \bar{C}^T \bar{B} \quad (\text{B.2})$$

avec  $\bar{M} = \bar{C}^T \bar{C}$  la matrice des moments, carrée de taille invariante  $m \times m$ .

Une méthode de Cholesky peut être alors utilisée pour résoudre le système linéaire. Le coût associé à cette méthode est de  $m^3$  opérations. L'aspect simple de la méthode de Cholesky rend la résolution peu onéreuse mais aussi peu précise. L'impact de la qualité géométrique du voisinage doit maintenant être discuté. Il est en effet souhaitable de détecter les systèmes rendus non inversibles en raison de configurations géométriques singulières.

### B.1 La méthode SVD

La décomposition en valeurs singulières (SVD) permet de formuler la matrice  $\bar{M}$  en  $\bar{M} = \bar{U}\bar{W}\bar{V}^t$  avec  $\bar{U}, \bar{V}$  des matrices orthonormées et  $\bar{W}$  une matrice diagonale. Cette décomposition est unique et elle est relativement chère ( $2m^3$  opérations). Elle permet toutefois de détecter des configurations géométriques singulières et de traiter un large spectre de configurations matricielles (creuse, rectangulaire...). La SVD est plus lente que la factorisation QR présentée ci-dessous mais elle donne des résultats plus précis et permet surtout de résoudre des systèmes sous-déterminés.

### B.2 La factorisation QR

En algèbre linéaire, la décomposition QR d'une matrice  $\bar{M}$  est une décomposition de la forme  $\bar{M} = \bar{Q}\bar{R}$  où  $\bar{Q}$  est une matrice orthogonale ( $\bar{Q}^T \bar{Q} = \bar{I}$ ), et  $\bar{R}$  une matrice triangulaire supérieure. Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition, les plus connues sont (source wikipedia) :

- la méthode de Householder où  $Q$  est obtenue par produits successifs de matrices orthogonales élémentaires (meilleure méthode d'orthogonalisation,  $(4/3)n^3$  opérations)
- la méthode de Givens où  $Q$  est obtenue par produits successifs de matrices de rotation plane. Cette méthode est plus difficiles à implémenter que Householder.

— la méthode de Gram-Schmidt basée sur une décomposition de Gram-Schmidt

La décomposition QR n'étant pas unique, les différentes méthodes produiront des résultats différents. Un point intéressant est que le conditionnement de  $\underline{M}$  est celui aussi de  $\underline{R}$ . Dans ce travail de thèse, la méthode de Gram-Schmidt est employée.

### B.3 Remarques/Conclusions

La méthode QR appliquée sur les équations normales semble être un bon compromis en terme de coût de calcul, d'effort d'implémentation et de sensibilité à la qualité du voisinage de particules. Selon Sharma [54], la méthode statistique de décomposition en composantes principales (PCA) (discutée dans l'annexe C) avec une décomposition QR semble moins coûteuse et plus précise que l'approche standard basée sur une SVD.

## Annexe C

# Analyse par Composantes principales

---

Au sein de cette annexe, des résultats généraux sur l'analyse en composantes principales (PCA) sont présentés afin d'illustrer le lien entre cette méthode très utilisée en Analyse Statistique et l'approche adaptative utilisée pour les reconstructions d'états aux interfaces (*d*-adaptivity). Le cours de Denis Marcotte de géostatistique [43] ou encore l'article de Besse [13] ont servi de référence.

L'analyse par composantes principales permet de convertir des données en entrée dans un espace défini dans un autre espace de représentation. Cela peut se traduire par une rotation des axes par rapport à l'espace d'origine. Les axes du nouvel espace ne sont pas corrélés. La raison principale de transformer les données par une analyse des composantes principales est de compresser des données en éliminant la redondance.

Géométriquement, l'analyse par composantes principales revient à effectuer une rotation du système d'axes initial. La nouvelle base constituée par les vecteurs propres orthogonaux entre eux forme un nouveau repère de coordonnées. Les cosinus entre les nouveaux axes et les anciens sont les composantes des vecteurs propres.

Une autre interprétation peut être donnée intuitivement en lien avec la régression. Le premier vecteur propre peut être vu comme le vecteur qui explique le mieux, simultanément toutes les variables de la matrice des moments. Ce vecteur minimise la somme des carrés entre les projections sur le vecteur et la position des points dans l'espace original. Le second vecteur propre est celui qui explique le mieux, simultanément, l'ensemble des résidus obtenus, et ainsi de suite...

La qualité des estimations auxquelles conduit l'analyse par composantes principales dépend, de façon évidente, du choix de la dimension du sous-espace, c'est-à-dire du nombre de composantes retenues pour reconstituer les données, ou encore de la dimension du sous-espace de représentation. Dans le contexte de ce travail, les données sont aux plus dans  $\mathbb{R}^3$  et au minimum dans  $\mathbb{R}$  ce qui simplifie le problème par rapport aux études statistiques, origines de la méthode. En effet l'application de cette analyse se fait sur un échantillon de positions de particules données, distribuées dans l'espace de la simulation. L'idée est donc de capturer une anisotropie dans la distribution des particules autour de la particule d'intérêt.

Afin d'illustrer la méthode, des données peuvent être représentées dans un plan (Fig C.1a). Une ellipse est calculée pour lier les points contenus dans le nuage de points.

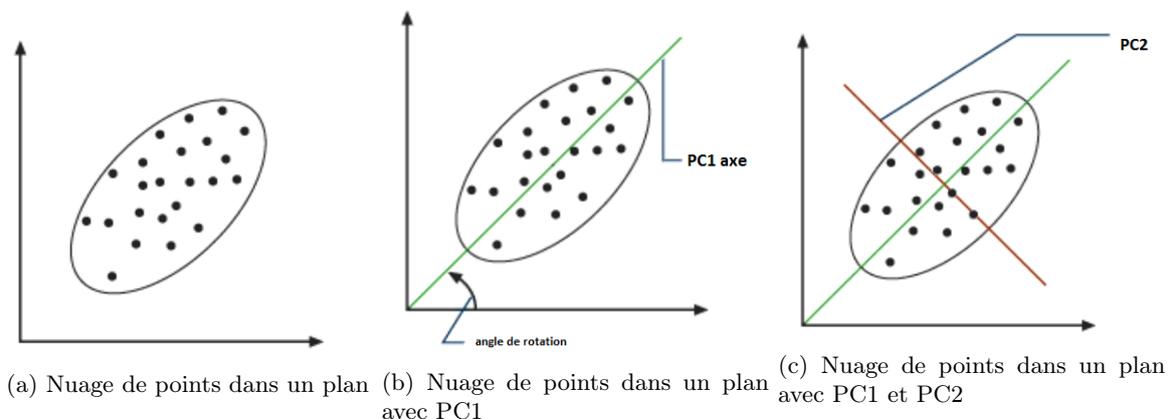


FIGURE C.1 – Analyse par composantes principales sur un nuage de points en 2D

L'axe principal de l'ellipse est indiqué (Fig C.1b). Le grand axe devient le nouvel axe des  $x$ , la première composante principale (PC1). PC1 décrit la variance la plus importante car elle représente la plus grande section transversale à travers l'ellipse. La direction de PC1 est le vecteur propre  $\vec{e}_1$ , et sa valeur propre  $\lambda_1$ . L'angle de

l'axe des x par rapport à PC1 est l'angle de rotation utilisé dans la transformation.

Le système calcule une ligne perpendiculaire à la ligne PC1. Cette ligne est la deuxième composante principale (PC2) et le nouvel axe pour l'axe des y d'origine (Fig C.1c). Le nouvel axe décrit la deuxième variance la plus importante qui n'apparaît pas dans PC1 définie par son vecteur propre  $\vec{e}_2$ , et sa valeur propre  $\lambda_2$ .

La finalité de cette étude est de pouvoir déterminer pour un échantillon de particules les directions de l'espace correctement discrétisées. La PCA semble être un outil permettant cela. D'après [54], la décomposition QR peut être employée pour analyser les données. LA suite de cette annexe traite donc d'une comparaison entre la décomposition QR et la SVD dans l'analyse par composante principale.

Afin de comparer les approches PCA basées sur la décomposition SVD et celles basées sur la décomposition QR, plusieurs cas ont été simulés avec le logiciel R [53]. Des données aléatoires sont générées telles que :  $X_1 \sim \mathcal{N}(0; 5)$  et  $X_2 \sim \mathcal{N}(4; 0.2)$  avec  $\mathcal{N}(\nu; \sigma)$  une loi normale de moyenne  $\nu$  et d'écart-type  $\sigma$ . Les coordonnées  $(X_1; X_2)$  sont donc bi-normales. La distribution des données est ensuite tournée selon un angle inclus dans  $\{0; 30; 45\}$  degrés.

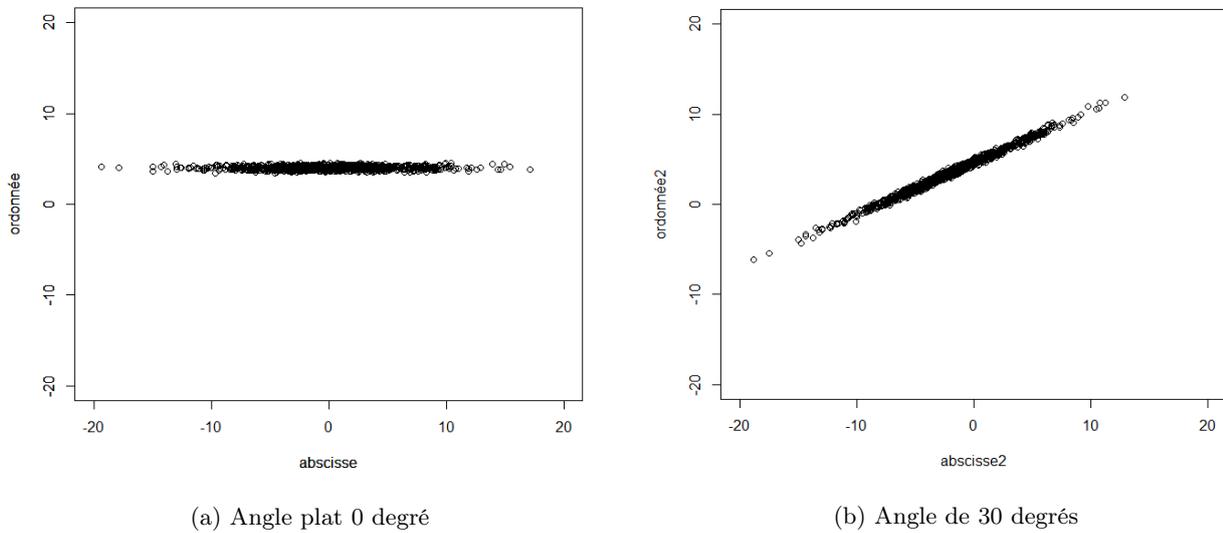


FIGURE C.2 – Analyse par composantes principales sur un nuage de points en 2D

La figure (Fig C.2a) présente le nuage de points pour un angle plat. L'ACP permet de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de covariance ci-dessous associée aux différentes positions dans l'échantillon.

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 25.71 & -0.02 \\ -0.02 & 0.039 \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

Grâce à la décomposition SVD, les deux valeurs propres sont  $\lambda_1 = 25.71$  et  $\lambda_2 = 0.039$  ainsi que leurs vecteurs propres respectifs :  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La décomposition QR de la matrice  $\bar{M}$  permet de retrouver les mêmes valeurs de valeurs propres et vecteurs propres. En inclinant les données de 30 degrés (Fig C.2b), la matrice de la covariance devient :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 19.27 & 11.12 \\ 11.12 & 6.47 \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

Les décompositions QR et SVD permettent de trouver les vecteurs propres :  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.86 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.86 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres trouvées avec la SVD sont  $\lambda_1 = 25.71$  et  $\lambda_2 = 0.039$  mais les coefficients dans la matrice  $\bar{R}$  sont  $R_{11} = 22.25$  et  $R_{22} = 0.046$ . Les ordres de grandeurs sont respectés mais les valeurs obtenues avec la décomposition QR ne sont bien entendu pas les valeurs propres. Il faut noter que ces valeurs propres doivent être égales à la position avec un angle plat puisque l'échantillon est le même, seule son inclinaison est modifiée. L'ellipse est donc la même quelque soit l'angle d'inclinaison. Les axes majeurs de l'ellipse sont donnés par  $2\sqrt{\lambda_1}\vec{e}_1$  et  $2\sqrt{\lambda_2}\vec{e}_2$ . Les vecteurs  $\lambda_1\vec{e}_1$  et  $\lambda_2\vec{e}_2$  définissent les axes majeurs d'une ellipse. Cette ellipse, tracée dans le plan des coordonnées des observations doit renfermer approximativement 86% des observations lorsque la distribution est (bi)normale.

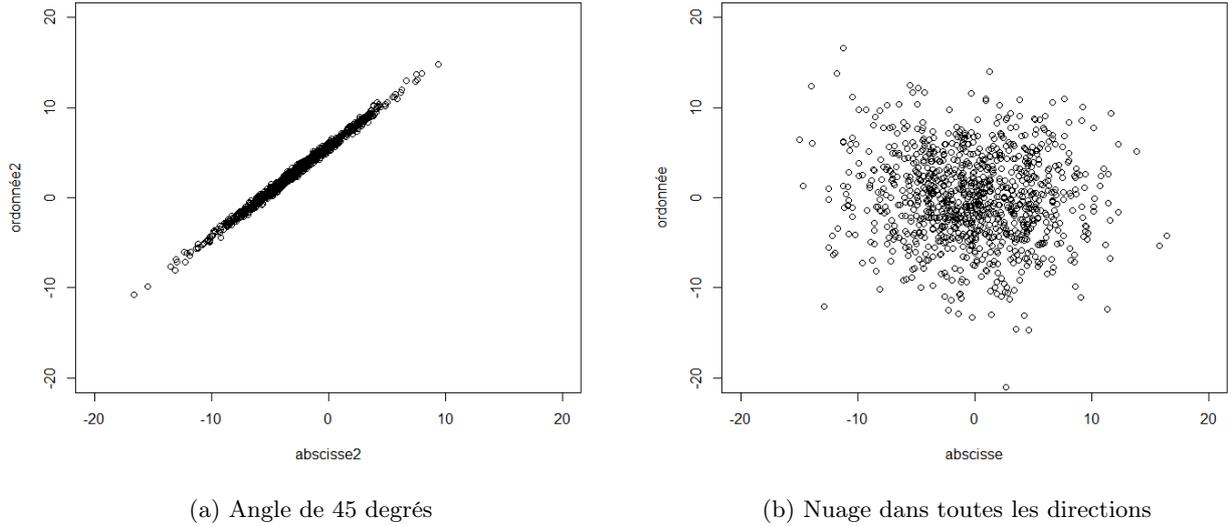


FIGURE C.3 – Analyse par composantes principales sur un nuage de points en 2D

La figure (Fig C.3a) présente le nuage pour un angle de 45 degrés. Le comportement des valeurs de la décomposition SVD est identique au précédent calcul. Les vecteurs propres correspondent à l'angle sont :  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix}$ . Seule la décomposition SVD préserve les valeurs propres, la décomposition QR donnant  $\lambda_1 = 18.2$  et  $\lambda_2 = 0.06$ . Les deux décompositions permettent donc de détecter les corrélations entre les données et donc des régions où des particules sont alignées par exemple. La décomposition QR ne permet pas de déterminer directement les valeur propres mais elle donne la bonne base d'orientation de l'échantillon.

La figure (Fig C.3b) est celle d'un ensemble de données remplissant l'ensemble des directions du plan en remplaçant le précédent  $X_2$  par  $X_2 \sim N(0;5)$ . La matrice de covariance des positions est donnée par :

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 19.27 & 11.12 \\ 11.12 & 6.47 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

La SVD donne une base  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$  avec des valeurs propres très proches entre elles  $\lambda_1 = 26.42$  et  $\lambda_2 = 22.56$ . La décomposition QR donne la base  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  avec des valeurs propres très proches entre-elles  $\lambda_1 = 25$  et  $\lambda_2 = 23$ .

De nouveau, les résultats entre la décomposition QR et la SVD sont différents mais le comportement global permet de détecter les anomalies de distribution et de projeter les reconstructions là où il y a des particules.

*Commentaires :*

Il faut cependant situer le contexte d'emploi de cette analyse uniquement dédié à des projections pour la procédure d'adaptation appelée  $d$ -adaptation. La  $d$ -adaptation n'a pas vocation à être beaucoup utilisée et traduit un problème de discrétisation. Elle est de plus uniquement applicable pour les reconstructions des états à travers une hypothèse forte de gradient posé nul si non discrétisé. Cette hypothèse implique que cette procédure ne peut pas être utilisée pour les fonctions de forme permettant la montée en ordre de l'opérateur de divergence. Le schéma en cas de déclenchement de la  $d$ -adaptation sera toujours au global non consistant.

La décomposition SVD permet d'obtenir finement les valeurs des vecteurs propres et des valeurs propres au détriment d'un surcout par rapport à une décomposition QR. La décomposition QR permet en revanche de correctement décrire les directions de l'espace et de trouver des indicateurs permettant de distinguer les directions discrétisées ou non. La décomposition SVD plus complexe et coûteuse n'a donc pas été privilégiée dans le cadre de ce travail de thèse.

## Quatrième partie

### Références

# Bibliographie

- [1] S.W. Attaway, M.W. Heinstein, F.J. Mello, J.W. Swegle *Coupling of Smooth Particle Hydrodynamics with PRONTO*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [2] V. Auffray, *Etude comparative de schémas numériques pour la modélisation de phénomènes diffusifs sur maillages multiéléments*, 113-154 PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [3] D. Avesani and al, *A new class of moving-least-squares WENO-SPH schemes*, 113-154 Journal of Computational Physics (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.03.041>.
- [4] T. Belytscho, A. Huerta, S. Fernandez-Mendez and T. Rabczuk, *Meshfree Methods*, Encyclopedia of Computational Mechanics, 2004.
- [5] I. Babuska, and B.Q. Guo *The  $h$ ,  $p$  and  $h$ - $p$  version of the finite element method : basis theory and applications*, AIAA 93-0880 Advances in Engineering Software, Volume 15, Issue 3-4, 1992.
- [6] T. Barth, D. Jespersen, *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*, IJNME 44, 1115–1155 27th Aerospace Sciences Meeting, AIAA, Reno, 1989.
- [7] T. Barth, *Recent developments in high order  $k$ -exact reconstruction on unstructured meshes.*, AIAA 93, AIAA-93-0668, pp. 1–15. AIAA, Reno Nevada 1993.
- [8] T. Belytschko, Y. Krongauz, J. Dolbow, and C. Gerlach *On the completeness of the meshfree particle methods*, 1998.
- [9] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu *Element-free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Eng 37 229–256, 1994.
- [10] B. Ben Moussa *Analyse numérique de Méthodes Particulières Régularisées de type SPH pour les lois de conservation*, PhD thesis INSA Toulouse, 1998.
- [11] L. Bergerat, *Développement d'une méthode numérique compressible pour la simulation de la cavitation en géométrie complexe*, Thèse de doctorat, École National Supérieure des Arts et Métiers, Paris, 2012.
- [12] C. Berthon, F. Foucher *Efficient well-balanced hydrostatic upwind schemes for shallow-water equations*, Journal of Computational Physics 231 4993–5015, 2012.
- [13] P.C. Besse, *PCA stability and choice of dimensionality*, Statistics and Probability, Letters 13 (1992), 405–410, 1992.
- [14] Blazek, *J. Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications*, Elsevier, 2001.
- [15] J.C. Chassaing, X. Nogueira and S. Khelladi, *Accuracy assessment of a high-order moving least squares finite volume method for compressible flows*, 71 pp 41-53 Comput. Fluids, 2013.
- [16] A. Colagrossi, B. Bouscasse, M. Antuono, S. Marrone, *Particle packing algorithm for SPH schemes*, 113-154 Computer Physics Communications 183, 1641–1653, 2012.
- [17] M. Delanaye, *Polynomial Reconstruction Finite volume Schemes for the compressible Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids*, 113-154 PhD thesis University of Liege, Suisse, 1996.
- [18] M. Deleffe, *Modélisation d'écoulements visqueux par méthode SPH en vue d'application à l'hydrodynamique navale*, 113-154 PhD thesis Ecole Centrale Nantes, 2011.
- [19] W. Dehen, and H. Aly *Improve convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability*, Mon. Not. R. Astrn. Soc., 000 :1-15, 2012.
- [20] G. Dilts, *Moving-least-squares-particle hydrodynamics - I. Consistency and stability.*, 113-154 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 44 (8), 1115–1155, 1999.
- [21] G. Dilts, *Moving-least-squares-particle hydrodynamics - II. conservation and boundaries.*, 113-154 Int. J. for Numerical Methods in Engineering 48, 1504–1524, 2000.
- [22] A. ERN, J-L. Guermond *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre.*, Collection Mathématiques et Applications. Springer, 2002.

- [23] M. Ferrand, D. Laurence, B.D.Rogers, D. Violeau and C. Kassiotis *Unified semi-analytical wall boundary conditions for inviscid laminar or turbulent flows in the meshless SPH method.*, Int. Journale for Numerical Mehtods in Fluids, vol 71, no 4, pp 446-472, DOI :10.1002/fld.3666, 2012.
- [24] G.E. Forsythe, W.R. Wasow *Finite difference methods for partial differential equations*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
- [25] E. Godlewski, P.A. Raviart, *Numerical approxiamation of hyperbolic systems of conservation laws*, 113-154 Applied Mathematical Sciences 118 Springer.
- [26] R.A. Gingold, et J.J. Monghan *Smoothed particle hydrodynamics : Theory and application to non-spherical stars.*, Monthly Notices Royal Astronomical Society, 181 :375–389, 1977. Lien.
- [27] P.M. Guilcher *Contribution au développement d'une méthode SPH pour la simulation numérique des intéractions houle-structure*, Ecole Centrale de Nantes, Thèse de Doctorat, 2008.
- [28] E. Goncalvès Da Silva *Résolution numérique des équations d'Euler 1D*, Ecole d'Ingénieur Institut Polytechnique de Grenoble, <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556980>, 2008.
- [29] E. Goncalvès Da Silva *Méthode, Analyse et calculs numériques*, Ecole d'Ingénieur Institut Polytechnique de Grenoble, HAL Id : cel-00556967 <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556967>, 2005.
- [30] F. Haider, P. Brenner, B. Courbet and J.-P. Croisille *Parallel implementation of k-exact Finite Volume Reconstruction on Unstructured Grid*, HONOM, 12 june 2013.
- [31] A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, *Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes*, III, Journal of Computational Physics, 71 :231-303, 1987.
- [32] C.Hirsch *Numerical Computation of Internal and External Flows*, vol 2 Wiley, 1990.
- [33] M. Junk, Jens. Struckmeier *Consistency analysis of mesh-free methods for conservation laws*, Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik.
- [34] S. Khelladi *Modélisation et simulation numérique avancée pour l'analyse et le contrôle des systèmes fluides complexes*, Habilitation à Dirigé des recherches, avril 2012.
- [35] P. Lancaster, K. Salkauskas, *Surfaces Generated by ovingLeast Squares Methods*, Mathematic of Computation. Vol 37, No. 155, 141-158, 1981.
- [36] Y. Li, S. Premasuthan and A. Jameson, *Comparison of h- and p- Adaptations for Spectral Difference Methods*, 40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Chicago, AIAA 2010-4435 AIAA, 2010.
- [37] W.K. Liu, S. Li and T. Belytschko, *Moving Least squares reproducing kernel methods : I and II*, 113-154 Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 143, 1997.
- [38] G.R. Liu, M.B. Liu, *Smoothed Particle Hydrodynamics. A meshfree particle method*, 113-154 World Science, New Jersey, 2003.
- [39] G.R. Liu, M.B. Liu, *Smoothed Particle Hydrodynamics : An overview and recents developments*, 113-154 Arch Comput Methods Eng 17 : 25–76 DOI 10.1007/s11831-010-9040-7, 2010.
- [40] L.B. Lucy, *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis.*, Astronomical Journal, 82 :1013–1024, 1977.
- [41] J.C. Marongiu, *Méthode numérique lagrangienne pour les imulation d'écoulements à surface libre- Application aux turbines Pelton*, PhD thesis Ecole Centrale de Lyon , 2007.
- [42] V. Manet, *La Méthode des éléments Finis : Vulgarisation des aspects mathématiques, Illustration des capacités de la méthode.*, DEA. Eléments finis pour l'ingénieur, ViM2, Lyon, pp.306. <cel-00763690v1>, 2012.
- [43] D. Marcotte, *Cours géostatistique*, <http://www.groupepolymtl.ca/geo/marcotte/>, 2012.
- [44] J.J. Monaghan and H. Pongracic, *Artificial viscosity for particle methods*, Applied Numerical Mathematcis 1 :187-194, 1985.
- [45] M. Neuhauser *Development of a coupled SPH-ALE/Finite Volume method for the simulation of transient flows in hydraulic machines* PhD thesis in Ecole Centrale de Lyon, 2014 .
- [46] X. Nogueira , L. Cueto-Felguerosob , I. Colominas, H. Gomeza, F. Navarrina , M. Casteleiro *On the accuracy of Finite Volume and Discontinuous Galerkin discretizations for compressible flow on unstructured grids* Int. J. Numer. Meth. Engrg ; 00 :1–6, 2000.
- [47] C. Ollivier-Gooch, *High-Order ENO Schemes for unstructured Meshes Based on Least Squares Reconstruction*, Mathematic and Computer Science Division , 1997.
- [48] P.W. Randles, L.D. Liberski, *Smoothed Particle Hydrodynamics : some recent improvements and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 :375–408. , 1996.
- [49] G.a. Renaut, J-C. Marongiu, J. Leduc, F. Leboeuf. *On the highorder reconstruction for Meshfree Particle Methods in Numerical Flow Simulation*. 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC 2013), Sep 2013, Bordeaux, France. <hal- 00855894>.

- [50] G-A. Renaut, J-C. Marongiu, S. Aubert, *Toward a higher order SPH-ALE method based on Moving Least Squares method* 113-154 SPHERIC, Paris,France, 2014.
- [51] G-A. Renaut, J-C. Marongiu, S. Aubert, *Higher order SPH-ALE method and adaptive procedure for hydraulic simulations based on Moving Least Squares method* 113-154 SPHERIC, Parme,Italie, 2015.
- [52] G-A. Renaut, J-C. Marongiu, S. Aubert, *High order SPH-ALE method for hydraulic turbine simulations* 113-154 European Turbo machine Conference, Madrid,Spain, 2015.
- [53] Communauté, *source logiciel R* <https://www.r-project.org/> .
- [54] A. Sharma, K.,K. Paliwal, S. Imoto, S. Miyano, *PrincipalComponet analysis using QR decomposition* Int. J : Mach. Learn. and Cyber. DOI 10.1007/s13042-012-0131-7, 2012.
- [55] M. Shaller, R.Bower,T. Theuns, *On the use of particle based methods for cosmological hydrodynamical simulations* 8 th international SPHERIC workshop Trondheim, Norway, June 4-6, 2013
- [56] D. Shepard, *A two dimensional interpolation function for irregularly spaced data* Proceeding ACM National Conference, 23 :517-524,1968.
- [57] Jens Struckmeier, Michael Junk, *Consistency analysis of mesh-free methods for conservation laws* Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik Reihe A : Preprints, 2002.
- [58] D. Shyam Sundar, K.S. Yeo, *A high order meshless method with compact support* Journal of Computational Physics 272 70–87,2014.
- [59] P.D. Thomas and C.K. Lombard, *Geometric conservation law and its applications to flow computations on moving grids* AIAA, 17 :1030–1037, 1979.
- [60] V. Venkatakrisnan, *On the accuracy of limiters and convergence to steady solutions* , AIAA 93-0880 Computer Sciences Corporation,1993.
- [61] J.P. Vila, *On particle weighted methods and Smooth particle hydrodynamics*, 3rd ed. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 1999.
- [62] J.P. Vila and N. Lanson, *Renormalized meshfree schemes I : Consistency stability and hybrid methods for conservation laws*, vol 46 No 4 pp 1912-1934 SIAM, 2008.
- [63] J.P. Vila *Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws.I.Explicite monotne schemes*, Modélisation mathématique et analyse numérique tome 28, num3 p 267-295, 1994.
- [64] O. Granier <http://olivier.granier.free.fr/MOOC/co/rappels-de-cours-meca-fluide-euler-lagrange.html>, source internet.