

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Henry de PLINVAL**

**le** mercredi 15 janvier 2014

**Titre :**

Commande référencée vision pour  
drones à décollages et atterrissages verticaux

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

EDSYS : Automatique

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA CSDV

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Pascal MORIN (directeur de thèse)

M. Philippe MOUYON (co-directeur de thèse)

**Jury :**

M. Tarek HAMEL, I3S - Président

Mme Isabelle FANTONI, UTC - Rapporteur

M. Nicolas MARCHAND, GIPSA Lab - Rapporteur

M. Patrick FABIANI, ISAE - Examineur

M. Laurent GOERIG, Dassault Aviation - Examineur

M. Jean-Philippe HARCAUT, MBDA France - Examineur

M. Philippe MOUYON, Onera - Co-directeur de thèse

M. Pascal MORIN, ISIR - Directeur de thèse

# Remerciements

*La reconnaissance est la mémoire du coeur.*

Hans Christian Andersen

Bien conscient que remercier, c'est s'exposer à l'omission, je veux pourtant tâcher de remercier tous ceux qui se sont donnés du mal pour moi.

Logiquement, mais non sans une profonde gratitude, mes premiers remerciements vont pour mes parents, sans qui, ma foi, les choses auraient été un peu différentes : certes pas pour l'univers qui n'en a cure, mais pour ce qui me concerne, sans doute... Merci infini de m'avoir donné la vie, et tellement davantage.

Je rends grâce à Floraine et mes enfants chéris, d'*être*, tout simplement.

Un grand merci à mes encadrants. Pascal, qui a accepté d'encadrer une thèse à temps partiel, avec la difficulté que cela représente ; qui m'a appris la persévérance nécessaire à l'obtention, pas à pas et difficulté après difficulté, d'un résultat, et la rigueur dans sa rédaction. Et Philippe, dont l'enthousiasme et la culture scientifique sont des modèles. Mais surtout dont ce que j'appellerais la générosité scientifique est une de ces choses rares et pures dont la vie réclamerait des émules.

Merci à tous les collègues du département, adeptes du non-linéaire, de la robustesse, des expérimentations, ou d'autres thèmes passionnants avec lesquels je regrette de ne pas avoir des échanges infinis ou jusqu'à satiété... jusqu'ici ! Merci à tous ceux qui m'ont accueilli, aidé, appris, accompagné, fait rire ou proposé une bière... au bon soin du lecteur d'ordonner cette liste.

Un merci spécial à Patrick qui, avec Philippe et d'autres, a suggéré et permis que cette thèse se fasse. En ces temps incertains, seuls l'enthousiasme, le dynamisme et l'envie de les partager nous sauveront. Merci !

Merci enfin aux rapporteurs et membres du jury qui acceptent de prendre de leur temps pour juger ces travaux.

Mais je m'arrête bien vite car....

*Beaucoup remercier signifie secrètement demander davantage.*

Proverbe anglais

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
Prométhée, Icare et Frankenstein. Et quelques autres . . . . .	7
La question cruciale des mesures . . . . .	8
Objectif de la thèse . . . . .	9
Structure du mémoire . . . . .	9
<b>1 État de l’art</b>	<b>10</b>
1.1 Asservissement visuel . . . . .	11
1.1.1 Présentation générale de l’asservissement visuel . . . . .	11
1.1.1.1 Définition des principaux concepts . . . . .	11
1.1.1.2 Panorama des applications . . . . .	13
1.1.1.3 Quelques étapes historiques . . . . .	15
1.1.2 Aspects géométriques . . . . .	19
1.1.2.1 L’image : géométrie, informations, visibilité . . . . .	19
1.1.2.2 Estimation de pose basée vision . . . . .	23
1.1.2.3 Utilisation de l’homographie . . . . .	25
1.1.3 Aspects commande . . . . .	30
1.1.3.1 Problématiques théoriques . . . . .	30
1.1.3.2 Maintien du plan objet dans l’image . . . . .	34
1.1.3.3 Techniques de commande spécifiques . . . . .	36
1.2 Commande de drones VTOLs . . . . .	39
1.2.1 Modèles de drones VTOLs . . . . .	40
1.2.2 Commande de drones VTOLs . . . . .	42
1.3 Asservissement visuel pour drones . . . . .	44
1.3.1 Estimation . . . . .	45
1.3.1.1 Environnement connu . . . . .	45
1.3.1.2 Connaissance partielle de l’environnement . . . . .	46
1.3.1.3 Environnement inconnu . . . . .	46
1.3.1.4 SLAM . . . . .	46
1.3.1.5 Caméra(s) au sol . . . . .	47
1.3.2 Guidage référencé vision . . . . .	48
1.3.3 Approches directes . . . . .	49

1.3.3.1	Quelques travaux en asservissement visuel direct	50
1.3.3.2	Les travaux autour de T. Hamel . . . . .	51
1.3.3.3	Travaux autour de F. Chaumette . . . . .	54
1.3.3.4	Travaux autour de P. Rives . . . . .	54
1.3.3.5	Les travaux de cette thèse . . . . .	55
1.4	Objectif de la thèse . . . . .	55
<b>2</b>	<b>Stabilisation linéaire</b>	<b>57</b>
	Introduction . . . . .	58
2.1	Présentation du problème . . . . .	60
2.2	Première définition d'un vecteur d'erreur . . . . .	61
2.3	Calcul de $H$ pour une erreur de calage de la caméra . . . . .	62
2.4	Résultat de base . . . . .	63
2.5	Cas d'une cible non verticale . . . . .	65
2.6	Cas d'une cible non horizontale . . . . .	70
2.7	Cas d'une dynamique non modélisée . . . . .	72
2.8	Réglage des gains . . . . .	75
2.8.1	Réglage des gains de la dynamique de cap . . . . .	76
2.8.2	Réglage des gains de la dynamique verticale . . . . .	76
2.8.3	Réglage des gains des dynamiques horizontales . . . . .	77
2.9	$\mu$ -analyse . . . . .	78
2.10	Synthèse non lisse . . . . .	79
2.11	Résultats de simulation . . . . .	79
2.11.1	Loi de commande pour une cible non verticale . . . . .	81
2.11.2	Loi de commande pour une dynamique non modélisée . . . . .	81
2.11.3	Loi de commande obtenue par une synthèse non lisse . . . . .	83
2.12	Résumé . . . . .	85
2.13	Limites de l'approche et utilité d'une approche non-linéaire . . . . .	88
2.14	Critique des résultats . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Stabilisation non-linéaire</b>	<b>91</b>
3.1	Développements de lois de commande . . . . .	92
3.1.1	Résultat fondamental . . . . .	92
3.1.1.1	Le cas tout actionné . . . . .	93
3.1.1.2	Le cas sous-actionné . . . . .	96
3.1.2	Loi de commande simplifiée . . . . .	100
3.1.3	Application à l'asservissement visuel . . . . .	100
3.1.3.1	Définition d'un vecteur d'erreur . . . . .	100
3.1.3.2	Asservissement visuel . . . . .	101
3.1.3.3	Loi de commande en cap . . . . .	103
3.1.4	Loi de commande adaptative pour l'asservissement visuel . . . . .	104
3.1.5	Comparaison du linéarisé avec les lois linéaires . . . . .	108
3.1.6	Résultats de simulation . . . . .	109
3.2	A propos des mesures de la vitesse et de la gravité en repère local	114

3.2.1	Introduction . . . . .	114
3.2.2	Loi de commande utilisant une mesure de flot optique . .	114
3.2.2.1	Principe . . . . .	114
3.2.2.2	Résultats de simulation . . . . .	117
3.2.3	Lois de commande sans mesure de gravité . . . . .	119
3.2.3.1	Principe . . . . .	119
3.2.3.2	Résultats de simulation . . . . .	121
3.2.4	Estimateurs de la gravité en repère local . . . . .	123
3.2.4.1	Filtre complémentaire . . . . .	123
3.2.4.2	Extraction de $H$ . . . . .	123
3.2.4.3	Estimation non-linéaire . . . . .	124
3.2.4.4	Résultats de simulation . . . . .	125
3.3	Critique des résultats . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Suivi de trajectoire</b>	<b>130</b>
	Introduction . . . . .	131
4.1	Position du problème . . . . .	131
4.2	Loi de commande pour le suivi de trajectoire . . . . .	132
4.2.1	Le cas tout actionné . . . . .	132
4.2.2	Le cas sous-actionné . . . . .	133
4.2.3	Loi de commande simplifiée . . . . .	137
4.3	Application à la commande référencée vision . . . . .	138
4.3.1	Stabilisation basée vision . . . . .	138
4.3.2	Commande en cap . . . . .	138
4.3.3	Asservissement visuel par interpolation d'homographies .	138
4.3.4	Résultats de simulation . . . . .	139
4.4	Critique des résultats . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Mise en œuvre expérimentale</b>	<b>144</b>
	Introduction . . . . .	145
5.1	Présentation . . . . .	145
5.1.1	Le Vario Benzin . . . . .	146
5.1.2	Le Yamaha Rmax . . . . .	146
5.2	Analyse des difficultés associées aux expérimentations . . . . .	148
5.2.1	Dangers associés aux expérimentations . . . . .	148
5.2.2	Problématiques temps réel . . . . .	148
5.2.3	Le traitement d'image et sa robustesse . . . . .	149
5.3	Solutions mises en œuvre : matériels et logiciels . . . . .	149
5.3.1	Matériels . . . . .	150
5.3.1.1	Vario Benzin . . . . .	151
5.3.1.2	Yamaha Rmax . . . . .	152
5.3.2	Logiciels . . . . .	154
5.3.2.1	OS . . . . .	154
5.3.2.2	Fonctionnalités de pilotage-guidage-navigation .	154

5.3.2.3	Le Middleware Orocos . . . . .	155
5.3.2.4	Logiciels de traitement de l'image . . . . .	155
5.3.2.5	Codage des algorithmes de la thèse . . . . .	155
5.3.3	Fonctionnement temps réel et communications . . . . .	157
5.4	Validations expérimentales . . . . .	157
5.4.1	Traitement d'image . . . . .	157
5.4.2	Guidage avec consignes de vitesse . . . . .	161
5.5	Critique des résultats . . . . .	162
<b>Conclusion</b>		<b>164</b>
	Synthèse des contributions . . . . .	164
	Approche retenue . . . . .	164
	Stabilisation : approches linéaires et non-linéaires . . . . .	164
	Suivi de trajectoire . . . . .	165
	Mises en œuvre expérimentales . . . . .	166
	Perspectives . . . . .	166
	Perspectives sur les thèmes abordés dans la thèse . . . . .	166
	Sur le (regrettable) morcellement du savoir et son essence . . . . .	166
<b>A Annexes</b>		<b>169</b>
A.1	Lieu des racines . . . . .	169
A.2	Articles publiés . . . . .	170
A.3	Article ICRA'11 . . . . .	172
A.4	Article ACC'12 . . . . .	180
A.5	Article JRNC'13 . . . . .	188
A.6	Article en version préliminaire . . . . .	213
A.7	Démonstrations supplémentaires . . . . .	230
A.7.1	Démonstration du Lemme 1 . . . . .	230
A.7.2	Démonstration de la Proposition 8 . . . . .	230

# Introduction

*Inventer un avion n'est rien. Le construire est un début. Voler c'est tout.*

Otto Lilienthal

## Prométhée, Icare et Frankenstein. Et quelques autres

Le 21 novembre 1783, lors du premier vol humain non captif réalisé par Pilâtre de Rozier et le marquis d'Arlandes, on raconte qu'un passant s'exclama devant Benjamin Franklin : « à quoi peuvent bien servir ces ascensions ? ». L'imprimeur-éditeur-écrivain-naturaliste-inventeur-homme d'état américain répondit alors : « à quoi bon l'enfant qui vient de naître ? ». Et certainement les études qui touchent au domaine aéronautique exsudent, aujourd'hui encore, quelque chose de ce rêve innocent et fantastique, permanence à laquelle ne font pas exceptions celles de ces études qui touchent aux drones.

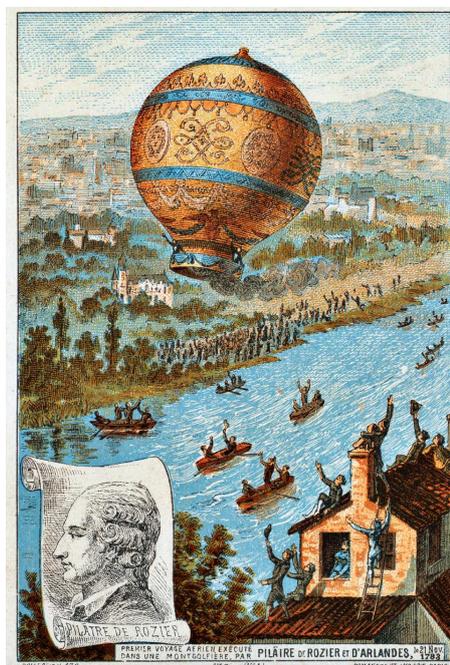


FIGURE 1 – Le premier vol humain non captif par Pilâtre de Rozier et le marquis d'Arlandes, illustration du XIX<sup>ème</sup> siècle

*Drone*

Un petit mot qui en quelques années est venu se loger dans l'imaginaire collectif : symbole de la puissance créatrice de l'homme, capable de rêver, concevoir et réaliser des auxiliaires qui l'aident et parfois le font rêver. Improbable chimère enfantée par Icare et Frankenstein, et dont Prométhée ne renierait pas la filiation spirituelle, engendrée par le rêve éternel de voler, et par l'envie de créer -sans *pro*-créer- la vie, par le besoin de maîtrise -si humain et peut-être si inhumain à la fois. Ode à la technicité de l'homme et incarnation tout-à-la-fois de son hybris démesurée.

Lourd héritage que celui d'un mot dont la seule évocation suggère tous les contraires, quelque chose de terrible et d'onirique, d'effrayant et de magnifique, d'inquiétant et de réconfortant.

Des raisons plus prosaïques ont bien sûr contribué à l'émergence et à l'expansion de ces drôles d'engins, se mouvant dans les cieux sous la direction de codes informatiques leur conférant un niveau variable d'autonomie : le légitime souci de disposer d'appareils capables de remplacer l'homme pour des missions sales, pénibles ou dangereuses -et toute combinaison d'iceux. Les récents événements tragiques de Fukushima au Japon ou d'Aquila en Italie rappellent en effet combien fragiles sont les fabrications humaines devant les explosions de colère de Dame Nature, combien faible reste notre niveau de maîtrise. Et quémandent des solutions technologiques permettant d'aider, de débusquer, de sauver, parfois sous les décombres, des êtres humains en détresse.

## La question cruciale des mesures

Dans ce contexte, nombreuses sont les études qui visent et ont visé à doter les drones de capacités toujours plus développées ; un point crucial pour cela réside dans la capacité du drone à *mesurer* sa situation par rapport à son environnement (position, orientation) et à utiliser cette information afin de se maintenir en vol, de rejeter d'éventuelles perturbations aérologiques, d'éviter les obstacles, et finalement de mener à bien sa mission. Un moyen extrêmement répandu pour disposer de telles informations est le GPS grâce auquel, par triangulation d'informations satellitaires, la position du drone peut être connue de façon fiable et rapide. Cependant, les environnements confinés (intérieur de maisons) ou les théâtres d'opération militaire, ou simplement le besoin de se mouvoir relativement à une scène montrent les limites de l'utilisation de cette source d'information. Par ailleurs, la démocratisation des caméras vidéo, devenues légères, peu gourmandes en puissance électrique et peu onéreuses offre une alternative intéressante : les informations visuelles sont disponibles en intérieur, non sujettes au brouillage, et par nature relatives à l'environnement. Rançon de la gloire, ce capteur précieux délivre une richesse d'information dont l'usage ne coule pas de source : traiter cette masse de donnée de façon pertinente relève de la gageure.

## Objectif de la thèse

Dans ce cadre, l'objet du travail présenté dans cette thèse est d'étudier l'utilisation d'images fournies par une caméra vidéo dans la stabilisation et le suivi de trajectoire d'un drone, et plus précisément de proposer des techniques de pilotage de drones basées directement sur des mesures images. En somme : utiliser le moins possible de capteurs, être le moins gourmand en calculs, et pourtant définir une loi de commande stabilisante et la plus robuste possible. Ces notions seront définies de façon rigoureuse dans les chapitres qui suivent.

## Structure du mémoire

Dans la première partie de ce mémoire, on présente les -nombreuses- études réalisées dans des domaines connexes à l'objet de cette étude (chapitre 1). Cette thèse relève à la fois de l'asservissement visuel et de la commande de drones, deux thèmes qui forment ainsi les deux premières parties de cet état de l'art. La dernière partie présente les travaux relatifs à l'asservissement visuel de drones, qui est l'objet propre de cette thèse.

On présente ensuite les résultats théoriques obtenus au cours de cette thèse en trois chapitres. Les deux premiers concernent la stabilisation en un point d'un engin sous-actionné propulsé par la poussée à partir de mesures incertaines. Des approches linéaires, supposant de faibles déplacements de l'engin autour de la position de stabilisation souhaitée sont d'abord proposées (chapitre 2).

Le chapitre suivant étudie également la stabilisation en un point, mais sans faire l'hypothèse de linéarité (chapitre 3). Les résultats qui y sont présentés relèvent de techniques de stabilisation d'un engin propulsé par la poussée à partir de mesures incertaines de position, le cas des drones VTOLs (drones à décollage et atterrissage verticaux) asservis visuellement en étant une application. Une partie de ce chapitre s'intéresse plus particulièrement aux façons d'obtenir les mesures nécessaires à l'application des résultats précédents.

La troisième partie des travaux théoriques de cette thèse développe la possibilité pour le même type d'engins de suivre une trajectoire à partir d'une mesure incertaine d'erreur de position par rapport à une trajectoire désirée (chapitre 4). Le résultat se présente comme une extension des résultats de stabilisation précédents.

Le chapitre 5 présente les résultats des expérimentations réalisées dans le cadre de la thèse. Certains résultats ont ainsi pu être testés sur deux petits drones hélicoptères, même si l'ensemble des résultats est loin d'avoir été validé à ce jour.

Dans la conclusion, chapitre 5.5, un bilan des contributions de cette thèse est proposé, ainsi que des perspectives pour prolonger l'étude.

# Chapitre 1

## État de l'art

*Que d'autres se targuent des pages qu'ils ont écrites ;  
moi, je suis fier de celles que j'ai lues.*

Jorge Luis Borgès

### Résumé

Ce premier chapitre liste les principaux travaux relatifs à l'asservissement visuel et à la commande de drones à décollages et atterrissages verticaux ("drones VTOLs"). Le choix retenu de citer un grand nombre d'articles interdit une présentation complète de chacun. Néanmoins, ces travaux ont été regroupés par thèmes, et certains sujets, plus proches de l'objet d'étude de cette thèse, ont été davantage détaillés. L'ensemble cherche à former comme un panorama, avec une mise en perspective des choix réalisés ici, et une présentation des modèles, concepts et méthodes retenus pour la suite.

On présente dans une première partie l'asservissement visuel. Un panorama des applications, ainsi qu'un déroulé chronologique d'étapes importantes pour la discipline sont balayés. Puis les deux grands volets de l'asservissement visuel sont présentés : les aspects géométriques, avec des études sur l'image et les informations pouvant en être extraites ; et les aspects commande, où des travaux étudient l'exploitation de l'image pour la stabilisation d'un véhicule.

Une deuxième partie liste succinctement des études réalisées sur la commande de drones VTOLs, ce qui permet d'introduire des techniques de commande dont s'inspirent les résultats de la thèse.

Enfin, la troisième partie énumère des travaux dédiés à l'asservissement visuel pour de tels engins. On y distingue les grandes approches retenues, en précisant leurs liens avec les travaux réalisés dans cette thèse.

## 1.1 Asservissement visuel

*Le regard, le miroir de l'âme le moins menteur.*

Érasme

Dans cette section, nous introduisons l'asservissement visuel. La première partie (sous-section 1.1.1) présente le sujet avec pour but de le définir, de donner une idée des applications où il a été utilisé, et des problèmes qui se posent, avant d'introduire dans les deux parties suivantes les deux grands thèmes techniques de l'asservissement visuel :

- les aspects géométrie de l'image (sous-section 1.1.2), qui répondent à la problématique suivante : quelles informations sont pertinentes dans une (ou plusieurs) image(s), et qu'en retirer ?
- les aspects commande (sous-section 1.1.3), dans lesquels la grande question est : comment exploiter les informations image extraites grâce à l'étape précédente dans une loi de commande permettant d'obtenir un comportement désiré du robot ?

### 1.1.1 Présentation générale de l'asservissement visuel

Pour présenter ce sujet, nous définissons tout d'abord les principaux concepts en jeu ; puis nous offrons un panorama d'applications de cette technique ; enfin nous listons certains travaux qui forment des étapes importantes de son développement historique.

#### 1.1.1.1 Définition des principaux concepts

**Définition de l'asservissement visuel** La commande référencée vision consiste à exploiter les informations issues d'une caméra vidéo pour contrôler un robot. Cette technique est introduite d'une façon claire et concise dans une présentation en deux parties relativement récente, (Chaumette and Hutchinson, 2006)-(Chaumette and Hutchinson, 2007). La figure 1.1, issue de (Chaumette and Hutchinson, 2006), représente une situation d'asservissement visuel typique, où sont représentées la position désirée (a), la position courante (b), et les vues correspondantes de la caméra (c).

**Quelques distinctions : la vision dynamique, la localisation de la caméra** L'asservissement visuel se distingue de la vision dynamique, dans laquelle les mouvements de l'image sont exploités sans qu'ils soient contrôlés. Une autre distinction essentielle discrimine les situations où la caméra est fixée sur le robot, et ainsi entraînée dans son mouvement ("eye-in-hand" en anglais) de celles où la caméra est fixe par rapport au robot ("stand-alone" en anglais). La figure 1.2, issue de (Chaumette and Hutchinson, 2007), illustre ces deux

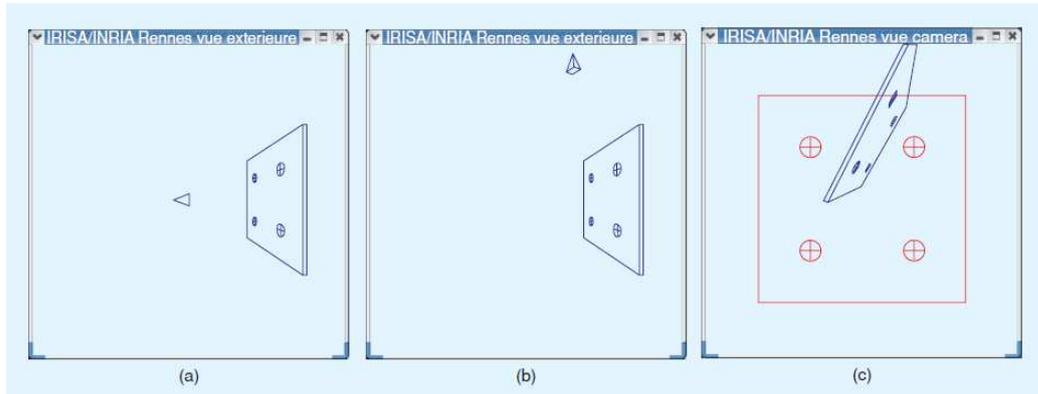


FIGURE 1.1 – Représentation d'une situation typique d'asservissement visuel issue de (Chaumette and Hutchinson, 2006) : position désirée (a), position courante (b), images correspondantes (c)

situations. Dans cette thèse, nous nous intéressons au premier cas, le second sera donc peu mentionné.

**L'approche par fonction de tâche** Pour formaliser un problème d'asservissement visuel, l'approche la plus fréquemment retenue consiste à définir une fonction des variables d'état, dite "fonction de tâche" (Samson et al., 1991; Samson, 1987; Samson and Espiau, 1990) ("task function" en anglais), et à chercher à lui faire atteindre une valeur cible.

**Les approches "basées image" (IBVS) et "basées position" (PBVS)** Vient ensuite une discrimination fondamentale, entre les approches "basées image" (Sanderson and Weiss, 1982) (en anglais IBVS pour Image Based Visual Servoing) dans lesquelles la fonction de tâche s'exprime en fonction d'éléments mesurés dans l'image uniquement, et les approches "basées position" (Shirai and Inoue, 1973) (PBVS pour Position Based Visual Servoing) lorsqu'elle consiste en des grandeurs cartésiennes à estimer à partir des mesures image. Des approches intermédiaires ont aussi été imaginées pour combiner leurs avantages, approches qui seront décrites dans la section 1.1.1.

**La matrice d'interaction** Une autre définition importante est celle de la matrice d'interaction, qui relie la dérivée de la fonction de tâche et les vitesses (linéaire et angulaire) de la caméra. Cette matrice est centrale puisqu'elle relie les observations faites avec la caméra avec la dynamique que l'on souhaite contrôler. Suivant la nature de la fonction de tâche, son contenu varie.

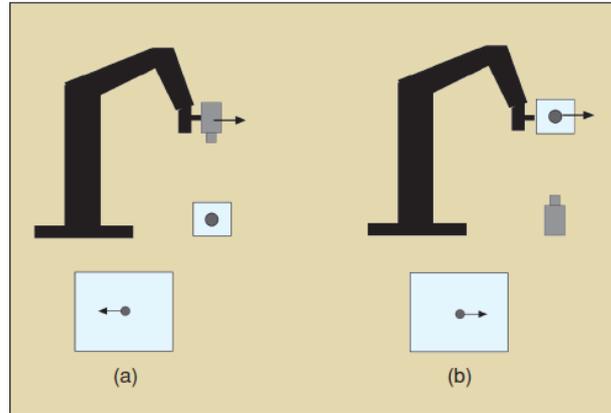


FIGURE 1.2 – Représentation des cas "eye-in-hand" (gauche) et "stand-alone" (droite) issue de (Chaumette and Hutchinson, 2007)

**Les deux grands thèmes de l'asservissement visuel** Deux grandes catégories de questions se posent dans ce contexte :

- le choix et l'extraction des informations visuelles ;
- le choix d'une stratégie de commande, puis l'analyse et la synthèse des lois de commande.

Les deux paragraphes qui suivent ce paragraphe d'introduction abordent ces problèmes : la géométrie dans l'image en paragraphe 1.1.2, les aspects commande en 1.1.3.

Avant d'entrer dans ces deux aspects spécifiques, nous illustrons le sujet par différents types d'applications de la commande référencée vision, puis en listant des travaux révélateurs d'étapes historiques importantes.

### 1.1.1.2 Panorama des applications

*Les lois claires en théorie sont souvent un chaos à l'application.*

Napoléon Bonaparte

**Du rapport entre l'application considérée et les problèmes techniques se posant, en particulier pour cette thèse** Cette section recense quelques-unes des applications d'asservissement visuel développées au cours du temps. Cette énumération n'est pas étrangère au sujet de cette thèse : les difficultés techniques relatives aux différentes applications sont en effet de natures très différentes ; ainsi entre un bras robotisé dont on suppose en général pouvoir

commander instantanément les vitesses de translation et rotation indépendamment, et un drone VTOL dont la vitesse linéaire est obtenue par inclinaison et mise en accélération, par un fonctionnement en révélant le caractère sous-actionné -ce sont les mêmes actionneurs qui permettent directement de mettre en rotation et, indirectement, en translation. La multiplication des indices visuels exploitables et la sophistication croissante des techniques de commande ont permis à la commande référencée vision de s'émanciper des applications plus simples des premiers temps pour rejoindre des contextes applicatifs de plus en plus ambitieux. Cette thèse s'inscrit dans cette dynamique, qui étudie un problème dont la solution serait aisée dans le cas d'un modèle cinématique de bras robotisé, alors qu'elle ne l'est pas pour un drone.

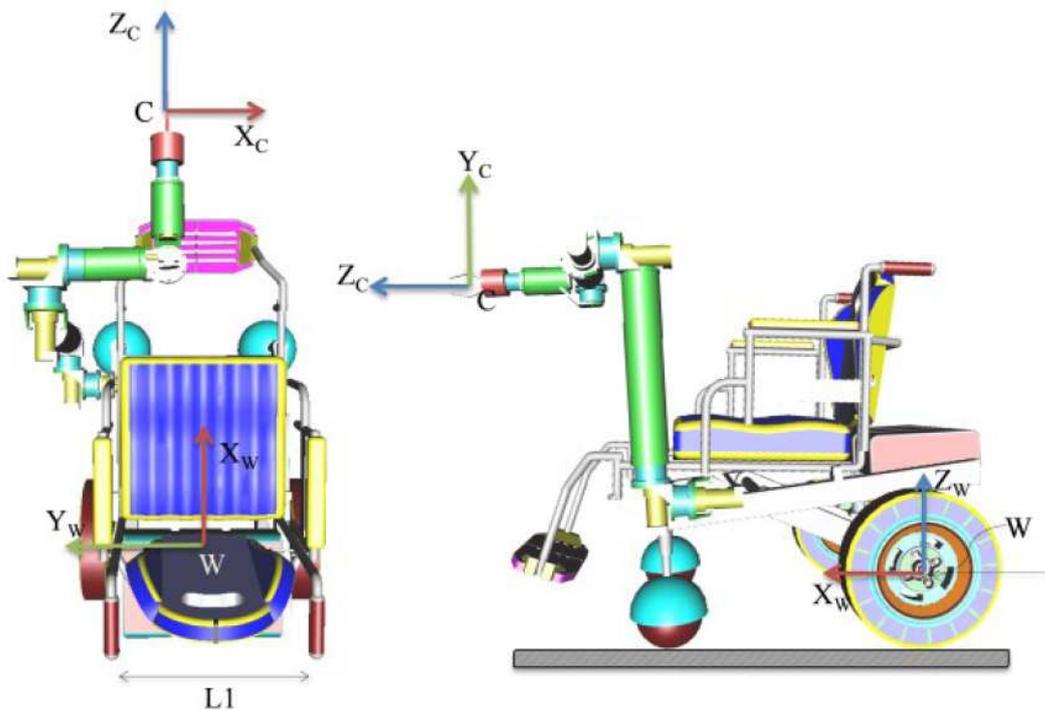


FIGURE 1.3 – Un exemple d'application de l'asservissement visuel : une chaise roulante munie d'un bras manipulateur. Figure issue de (Pence et al., 2012)

**Premier champ d'applications : les bras manipulateurs** Ainsi, les premiers travaux en asservissement visuel ont concerné des bras manipulateurs, dont la cinématique est souvent définie d'une façon très simple (Shirai and Inoue, 1973). Plus récemment, (Corke, 1996) est un bilan très complet des études consacrées à de tels robots. Une géométrie particulière est étudiée dans (Kelly, 1996), avec un bras localisé dans un plan et une caméra externe l'observant ; la stabilité et la robustesse du contrôleur sont démontrées par une fonction de Lyapunov. Il y a peu, un bras manipulateur monté sur une chaise roulante a

fait l'objet d'une étude en asservissement visuel (Pence et al., 2012) (voir figure 1.3).

**Diversification des applications : robots roulants, véhicules marins, applications médicales** Après les bras manipulateurs, sont intervenus les travaux sur des robots roulants (Khadraoui, 1996), (Fang et al., 2002b) ou (Le Blanc et al., 2005). Les sous-marins aussi ont eu leurs études, ainsi (Lots, 2002) ou (Karras et al., 2010). Interviennent ensuite des applications médicales ; ainsi pour l'asservissement d'une aiguille (Navab et al., 2000) ou pour compenser les mouvements du cœur dans (Ginhoux et al., 2005). (Kragic and Christensen, 2002) et (Garcia et al., 2009) sont des panoramas concernant certaines de ces applications, en manipulation pour le premier, et en contrôle par force / tactile pour des robots avec interaction physique pour le second. Des mécaniques plus complexes ont aussi été étudiées plus récemment, ainsi d'une plateforme de Gough-Stewart dans (Andreff et al., 2005).

**Plus récemment : les engins volants** Plus tardivement, la commande référencée vision s'est intéressée aux engins volants, en particulier aux drones VTOLs, avec une prédilection pour les quadrirotors, la dynamique plus stable et le petit format de ces engins les rendant attractifs. Ainsi (Altuğ et al., 2002) pour un quadrirotor, (Zhang and Ostrowski, 1999) ou (Azinheira et al., 2002) pour un dirigeable, ou encore (Amidi et al., 1993) et (Chriette et al., 2001) pour un hélicoptère. (Kuntz and Oh, 2009) étudie le transport de charge par hélicoptère. (Korpela et al., 2012) propose même un drone manipulateur. La section 1.3 ci-après est consacrée à ces applications et aux solutions techniques proposées dans ce contexte.

**Ce travail de thèse par rapport à ces applications** On le voit, les applications considérées ont été nombreuses. Cette thèse s'est consacrée au cas des drones VTOLs, avec l'objectif de prendre en compte leur caractère sous-actionné et leur dynamique, deux spécificités de ce type d'engins.

### 1.1.1.3 Quelques étapes historiques

*L'Histoire est une galerie de tableaux  
où il y a peu d'originaux et beaucoup de copies.*

Alexis de Tocqueville

Dans ce paragraphe sont recensées certaines des étapes marquantes qui depuis quarante ans ont contribué à donner à la commande référencée vision ses concepts et ses méthodes actuels.

**Années 70** Avec (Shirai and Inoue, 1973), les bases sont posées, en introduisant notamment l'idée d'un retour ("feedback" en anglais) sur les observations visuelles -par opposition aux systèmes en boucle ouverte utilisés jusqu'alors. Ces observations visuelles sont alors exploitées pour calculer la position 3D de l'objet, et l'on distingue les différentes étapes du processus. Dans (Hill and Park, 1979), les auteurs inventent le terme d'asservissement visuel ("visual servoing" en anglais) pour décrire leur approche.

**Années 80** Les travaux de Carnegie Mellon ((Weiss, 1984), (Weiss et al., 1987)) distinguent "static look and move" (séparation de moments clairs : observation, détermination du mouvement à réaliser, réalisation du mouvement ; enfin, une fois l'immobilité retrouvée, nouvelle prise d'image) et "dynamic look and move" (la commande et le traitement de l'image peuvent être simultanés, quoique souvent à des cadences différentes). Ceci par opposition aux PBVS et IBVS, dans lesquels la stabilité du robot est assurée directement par l'image. (Weiss et al., 1987) est ainsi l'une des premières études à utiliser les outils formels de la théorie du feedback pour définir rigoureusement un asservissement visuel, qui inclut par ailleurs une boucle adaptative. (Samson, 1987; Samson and Espiau, 1990) formalisent l'approche par fonction de tâches pour la robotique générale, avec notamment un traitement élégant du cas où tous les degrés de liberté ne sont pas contraints par la tâche à réaliser, en proposant l'ajout d'un objectif de commande secondaire ne perturbant pas le premier. En s'appuyant sur ce travail, (Rives et al., 1989)-(Espiau et al., 1990)-(Samson et al., 1991)-(Espiau et al., 1992) sont des papiers importants qui décrivent une approche formelle, en regardant les systèmes de vision comme des capteurs particuliers associés à une tâche à réaliser grâce à une boucle de commande, en modélisant les capteurs, en définissant la notion de liaison virtuelle, et en repensant l'approche par fonction de tâche pour l'asservissement visuel.

**Années 90-95** (Papanikolopoulos et al., 1993) précise les besoins relatifs à la boucle vision-commande, avec une approche où la profondeur est supposée connue. Dans (Chaumette, 1990), un bon nombre d'indices visuels est recensé, avec les matrices d'interaction associées. (Castano and Hutchinson, 1994) définit la "visual compliance", dans laquelle l'extrémité d'un bras satisfait à des contraintes virtuelles en étant asservie dans le plan image par asservissement visuel, et perpendiculairement à ce plan par retour de position -une première façon de mêler aspects image et aspects 3D (comme plus tard dans la commande  $2D\frac{1}{2}$ ). Différentes études, (Questa et al., 1995), (Colombo et al., 1995), (Crétual and Chaumette, 1997) ont constitué les fondements de l'approche  $d2D/dt$ , qui part de la remarque qu'il est difficile de maintenir un suivi des éléments utiles dans l'image, et propose donc d'asservir la caméra sur un champ de vitesse plutôt que sur des grandeurs calculées à partir de tels éléments. La thèse (Cretual, 1998) développe cette méthode.

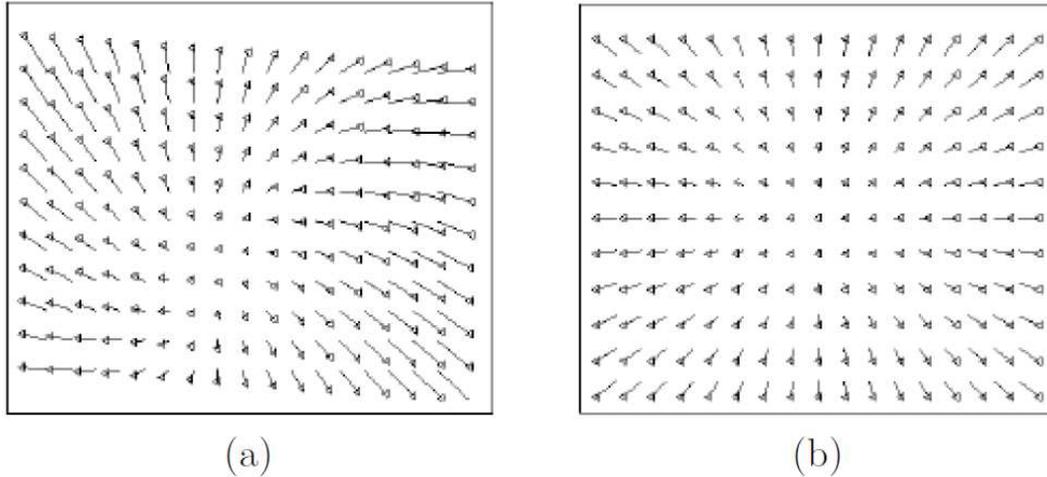


FIGURE 1.4 – Dans l’approche  $d2D/dt$ , c’est le champ de vitesse qui est asservi : champ de vitesse courant (a) et désiré (b). Figure issue de (Alhaj, 2004)

**Années 95-2000** (Cross and Cipolla, 1996) introduit l’asservissement visuel affine, destiné à fonctionner localement autour de l’équilibre, en exploitant les petites déformations engendrées par de tels déplacement -rotations, expansions isotropiques ou étirements-, l’approche étant prévue pour une caméra non calibrée. (Hutchinson et al., 1996) est un tutoriel qui propose un panorama des méthodes et approches disponibles au milieu des années 90 appliquées aux bras manipulateurs, avec en particulier une classification des méthodes, et une revue des deux types de techniques de suivi dans l’image, utilisant des amers ou des corrélations. (Marchand and Chaumette, 1996) propose une technique de vision active, c’est-à-dire que c’est le besoin de perception qui guide les mouvements de la caméra, pour la reconstruction de scènes 3D à partir de paramétrage de formes projetées dans le plan. On y force en particulier la caméra à réaliser deux tâches nécessaires pour une bonne estimation : la fixation et la focalisation, puis on y définit des stratégies d’exploration locale et globale de la scène. (Deguchi, 1998) permet le découplage du mouvement en translation / rotation en définissant d’abord la vitesse linéaire conduisant à une trajectoire rectiligne, puis la rotation pour maintenir l’objet en vue. (Malis, 1998), (Malis et al., 1999) introduisent le concept d’asservissement visuel  $2D\frac{1}{2}$ , intermédiaire entre les asservissements 2D -dans l’image- et 3D - dans le repère caméra. Point intéressant pour cette thèse, c’est la matrice dite homographique (définie plus bas, en section 1.1.2.3 et qui sera utilisée dans la suite) qui est exploitée pour extraire la rotation à réaliser pour rejoindre la position et l’orientation désirées -réalisée directement par le robot- et le rapport de la distance à l’objet sur la distance désirée -que l’on asservit alors à 1 pour faire tendre la première vers la seconde-, les autres degrés de liberté étant pilotés directement dans l’image. La

profondeur désirée approximative d'un point de l'image est supposée connue. Le rapport d'HDR de F. Chaumette, (Chaumette, 1998a), reprend certains de ces points : asservissements IBVS et PBVS, asservissements  $2D\frac{1}{2}$  et  $\frac{d2D}{dt}$ , vision active avec stratégies d'exploration locale et globale et techniques de reconstruction 3D. (Marchand and Hager, 1998) définit la planification dynamique de capteurs, dans laquelle des objectifs importants comme le maintien dans le champ de vision ou l'évitement d'occlusions, est réalisé grâce à la redondance d'une tâche initiale par ajout de tâches secondaires compatibles. (Drummond and Cipolla, 1999) introduit un concept formel qui sera réutilisé dans la suite : l'utilisation de la structure d'algèbre de Lie associée aux transformations affines. Grâce à ce formalisme, cette étude propose une technique IBVS efficace.

**Années 2000** Sur ce thème, (Selig, 2005) expose l'utilisation des algèbres de Lie pour la robotique en général. (Corke and Hutchinson, 2001) propose une partition entre les axes x-y et z qui permet le découplage de ces mouvements et l'évitement de certaines singularités. (Mezouar et al., 2002; Remazeilles et al., 2004) introduisent le concept de mémoire visuelle : des images ont été prises le long d'un chemin que l'on désire suivre. Des images sont sélectionnées dans la base, et le chemin est suivi par extraction de primitives. (Cervera et al., 2003) propose une approche qui rappelle l'asservissement visuel  $2D\frac{1}{2}$  en ce qu'elle associe des éléments image avec d'autres informations : d'abord des profondeurs de champs, puis des informations purement 3D, ceci afin de combiner les avantages des approches IBVS et PBVS. (Alhaj, 2004) est une thèse consacrée à l'approche  $2D\frac{1}{2}$  mentionnée plus haut. La figure 1.4, qui en est issue, représente la situation considérée dans ce cadre. (Mansard and Chaumette, 2004) propose un séquençement de tâches dans lequel une tâche très sous contrainte est réalisée loin de l'objectif, alors que de plus nombreuses tâches sont réalisées à proximité de celui-ci. (Malis, 2004) constate que les approches classiquement utilisées en asservissement visuel reviennent à résoudre des problèmes de minimisation de l'erreur sur la valeur de la fonction de tâche, et que les procédés de minimisation habituellement utilisés sont du premier ordre, donc peu efficaces ; il propose une technique du deuxième ordre, qui accroît d'autant les performances. (Dallej et al., 2006) montre que l'asservissement visuel 3D pour un robot complexe est plus simple qu'un asservissement plus classique : ce dernier est en effet rendu compliqué par la présence de chaînes cinématiques fermées pouvant donner lieu à des singularités. En remontant par un asservissement visuel 3D à la position de l'effecteur, ces dernières sont évitées. (Mansard and Chaumette, 2007) introduit le séquençement de tâches. En plus du tutoriel déjà cité, (Chaumette and Andreff, 2007) et (Project-Team LAGADIC, 2007) font le point des travaux en asservissement visuel en 2007.

**La période la plus récente et cette thèse** Les cinq-six dernières années ont vu une ramification plus grande encore où il est difficile de ne retenir que

quelques éléments ; on en trouvera des éléments dans les sections thématiques qui suivent. Si l'on veut situer la présente thèse dans ces catégories, il s'agit de rendre un drone stable directement à partir de l'image. Cependant, à la différence des approches IBVS classiques, un vecteur est reconstruit -simplement reconstruit, et non pas estimé-, vecteur qui ressemble -en un sens que l'on précisera- au vecteur d'erreur de position.

### 1.1.2 Aspects géométriques

Cette partie s'intéresse aux aspects image, par opposition aux aspects commande traités dans la sous-section suivante. Ce sujet est vaste, et l'on ne fait que l'introduire en citant un certain nombre d'études rassemblées en trois parties : la première concerne la géométrie de l'image, les types d'informations qui peuvent être retirés d'une image ; la seconde concerne des études dans lesquelles la position et l'orientation sont extraites de l'image. La troisième enfin est davantage développée car plus proche de ce travail de thèse : elle présente une grandeur qui peut être extraite de deux images lorsque celles-ci représentent deux prises de vue d'un même objet plan.

#### 1.1.2.1 L'image : géométrie, informations, visibilité

On présente tout d'abord les travaux qui analysent l'image, sa géométrie, ce qui peut en être retiré, les problèmes de visibilité qu'elle pose. Ces travaux sont nombreux ; certains d'entre eux sont rapidement énumérés.

Pour commencer, une distinction essentielle sépare différents types de projections (voir par exemple (Tatsambon Fomena, 2008) pour une description plus complète). La plus fréquemment utilisée parce qu'elle correspond aux caméras usuelles est la projection perspective, dans laquelle les points observés se projettent sur un plan (voir figure 1.5). Cependant, d'autres types de projection existent, qui permettent en particulier d'aller vers une vision plus omnidirectionnelle. Ainsi, les systèmes de vision centrale catadioptrique combinent un miroir de révolution et une caméra (voir figure 1.6). Un modèle simplifié mais fréquemment utilisé est celui d'une projection sur une sphère, chaque point se projetant sur l'intersection entre cette sphère et la demi-droite le reliant au centre de la sphère.

**Indices visuels en projection perspective** La thèse (Chaumette, 1990), déjà citée, recense notamment nombre d'indices visuels exploitables par les techniques d'asservissement visuel, et leur évolution dynamique avec les mouvements de la caméra. Certains sont aussi présentés dans le rapport suivant : (Espiau et al., 1990). Plus tard et de l'un de ces auteurs, (Chaumette, 2004) définit un catalogue d'indices visuels pour utilisation dans les asservissements visuels. (Rives and Michel, 1993) s'intéresse particulièrement à certains d'entre eux : les ellipses. (Shen and Chesi, 2012b) utilise la projection de sphères pour

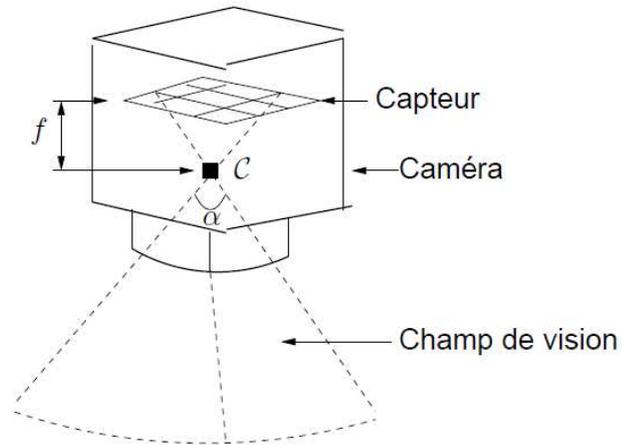


FIGURE 1.5 – Représentation de la projection perspective : le point  $m$  de l'espace cartésien est projeté en  $M$  sur le plan image. Figure issue de (Tatambon Fomena, 2008).

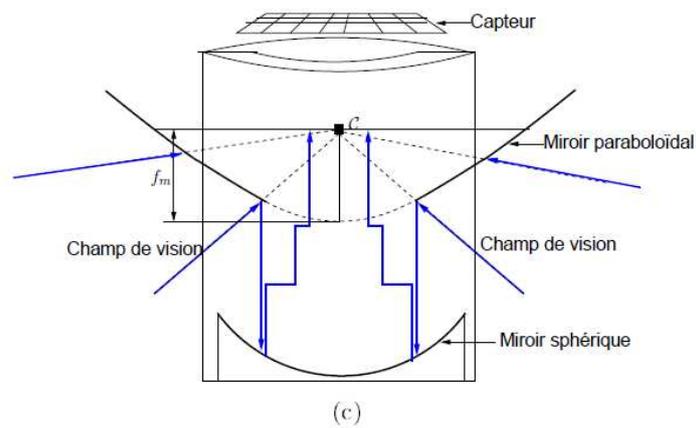


FIGURE 1.6 – Système de vision centrale catadioptrique : le trajet optique rencontre un miroir avant de parvenir sur le capteur. Figure issue de (Tatambon Fomena, 2008).

l'asservissement visuel. Citons aussi (Entzinger, 2010) qui recense les indices visuels utilisés par les pilotes lors des phases d'approche et d'atterrissage. (Andreff et al., 2001) est un rapport qui introduit les coordonnées de Plücker binormalisées -une représentation des droites dans l'image particulièrement adaptée à l'asservissement visuel. Une autre information qui peut être exploitée est le flot optique, qui est défini comme la vitesse de défilement des points dans l'image. Ainsi par exemple (Rett and Dias, 2004).

**Image sphérique et capteur omnidirectionnel** (Barreto et al., 2003) s'intéresse à l'utilisation de caméras catadioptriques, offrant un plus large champ de vue, et montre que le jacobien associé n'introduit pas de singularité par rapport aux projections perspectives, ce qui permet de proposer des asservissements visuels dans ce contexte. (Tatsambon Fomena, 2008) étudie de nombreux aspects des asservissements visuels sphériques, à la fois pour la modélisation, l'utilisation d'informations visuelles et la commande. (Hadj-Abdelkader et al., 2006b) s'intéresse à l'utilisation de l'image d'une ligne projetée sur une caméra centrale catadioptrique, et montre qu'une paramétrisation de cette projection peut être utilisée dans la loi de commande. (Tatsambon Fomena and Chaumette, 2007) montre qu'un asservissement visuel peut être réalisé en s'appuyant sur les projections sphériques de trois sphères, avec des propriétés intéressantes de découplage. Construisant sur ce résultat, mais en souhaitant s'affranchir de la nécessité d'observer trois sphères, (Hadj-Abdelkader et al., 2009) parvient à un résultat similaire en utilisant la projection d'un ensemble de points qui permet de reconstruire une sphère virtuelle (voir figure 1.8).

**Modèles unifiés** A côté des types de projection spécifiques, des travaux ont cherché à proposer des modèles unifiés. Ainsi (Shen and Chesi, 2012a) propose-t-il un asservissement visuel générique basé sur un modèle unifié de caméras, dont les caméras perspectives, fisheye et catadioptrique sont des cas particuliers.

**La géométrie épipolaire** Une ligne épipolaire est obtenue lorsque l'on considère deux vues d'une même scène : pour un point donné dans le plan image de la première vue, elle est le lieu des projections de tous les points pouvant se projeter en ce point dans la première vue. L'ensemble de ces lignes concoure en un point appelé l'épipole (voir figure 1.7).

(Rives, 2000) introduit une approche basée sur cette géométrie : elle permet de piloter une caméra tout actionnée sans faire d'hypothèse sur la structure 3D de l'objet, en utilisant comme indice la distance d'un point à une ligne épipolaire. (Mariottini et al., 2005) propose une approche similaire, basée sur la géométrie épipolaire, mais avec une caméra catadioptrique.

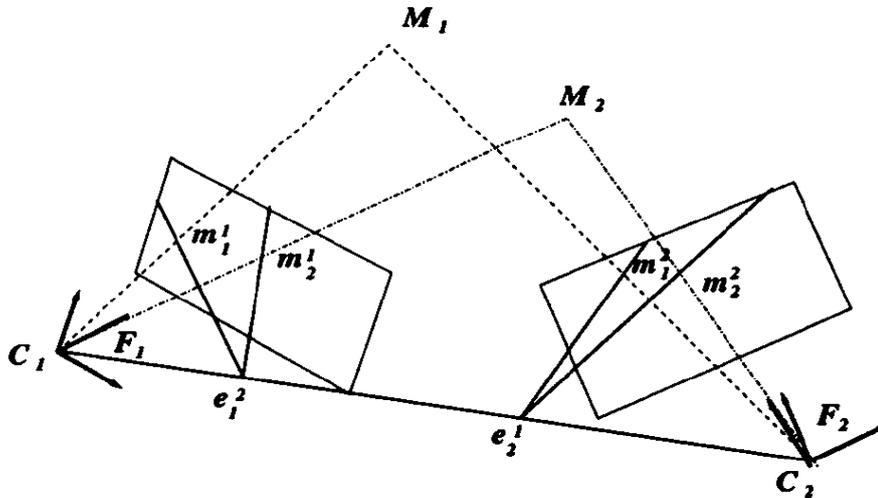


FIGURE 1.7 – La géométrie épipolaire, figure issue de (Rives, 2000).

**Techniques de minimisation** E. Malis et ses coauteurs proposent de considérer les asservissements visuels existant sous forme des processus de minimisation sous-jacents : (Malis, 2004) montre ainsi que la plupart des méthodes proposées correspondent à des minimisations implicites analogues à des techniques connues, et explique ainsi leurs différences de performances. Il y propose une nouvelle méthode basée sur un schéma du second ordre, donc plus efficace. (Malis and Benhimane, 2005) formalise ces découvertes en une approche unifiée pour les asservissement visuels. Dans la même direction, (Silveira et al., 2008) propose une nouvelle technique de minimisation, appelée E3D, qui apporte des estimations rapides et précises. (Marchand, 2004) applique des notions de minimisation au cas d'une caméra virtuelle, c'est-à-dire définie par un plan de projection et un centre optique et dont le mouvement est virtuellement réalisé par une loi de commande, ce qui permet par exemple d'étalonner une caméra.

**Modifications de visibilité, perte du signal visuel** De nombreux problèmes peuvent survenir qui éloignent les images réelles des modèles théoriques les représentant. Nous ne citons ici que deux exemples : (García-Aracil et al., 2005) où est proposée une méthode pour traiter le cas de modifications de visibilité des amers observés, en utilisant en particulier une pondération de ces amers ; et (Folio, 2007) qui propose des méthodes pour gérer la perte du signal visuel. (Marchand, 2007) propose une méthode pour obtenir de bonnes conditions de vue et d'éclairage, en exploitant les informations de gradients dans l'image dans une approche indépendante de la structure, de la couleur et de l'aspect des objets observés.

**Environnements inconnus, non structurés** La plupart des techniques proposées en asservissement visuel posent des hypothèses sur l'environnement

observé, sa géométrie en particulier. Certains travaux tentent de s'affranchir de telles hypothèses. Ainsi (Collewet, 2008) est un rapport d'Habilitation à Diriger des Recherches où sont proposées différentes techniques pour s'asservir sur des scènes inconnues. (Shademan and Jägersand, 2012) définit une planification de trajectoire robuste aux "outliers" et en environnements non structurés.

**Lumière structurée** Parmi les solutions explorées pour robustifier les asservissements visuels, la lumière structurée, qui simplifie le traitement de l'image et rend l'application indépendante de l'apparence de l'objet observé. Ainsi (Pagès et al., 2005) et (Pagès, 2005) s'intéressent à la lumière structurée, dans une approche qui permet de découpler les degrés de liberté du robot.

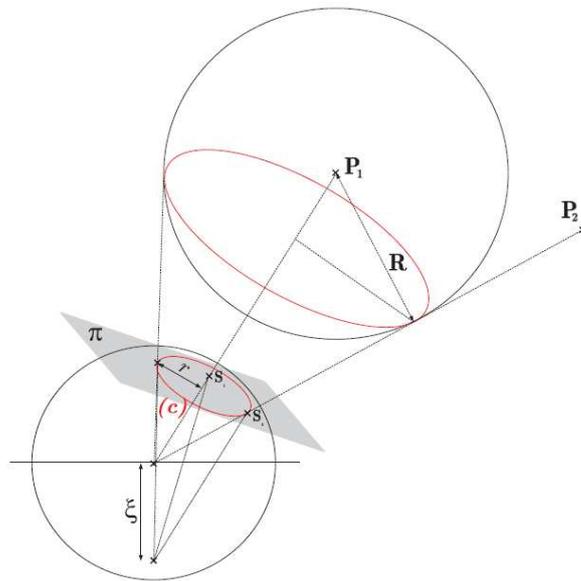


FIGURE 1.8 – Projection d'une sphère virtuelle reconstituée à partir de deux points  $P_1$  et  $P_2$  se projetant en  $S_1$  et  $S_2$  : cette approche permet un découplage en rotation / translation. Figure issue de (Hadj-Abdelkader et al., 2009)

### 1.1.2.2 Estimation de pose basée vision

Définissons tout d'abord la "pose" d'un objet : ce mot désigne simplement la position et l'orientation de l'engin. De nombreux travaux se sont penchés sur la question de l'estimation de pose basée vision, brique essentielle pour les approches PBVS. Nous en donnons un aperçu ici, qui sera prolongé ci-après dans la section 1.3.1 pour ce qui concerne les techniques d'estimation dans le contexte drone. Sauf mention du contraire, nous nous sommes concentrés sur

les travaux utilisant une caméra monoculaire, puisque c'est l'approche qui a été retenue dans ce travail de thèse. Notons qu'en effet le cas de la stéréovision simplifierait grandement l'étude, au moins du point de vue théorique, puisqu'en particulier l'information de profondeur serait alors disponible. Nous considérons cependant, d'un côté que leur utilisation est assez complexe (grand champ de vue, maintien de leur pose relative constante), et de l'autre que des résultats suffisamment nombreux et riches ont été obtenus dans ce cas pour que l'étude du cas monoculaire soit d'un intérêt clair.

**Etude des configurations** La première question théorique qui se pose est celle de la possibilité de reconstituer la pose : en effet, certaines poses relatives entre la caméra et l'objet interdisent une telle reconstitution. Le rapport (Michel and Rives, 1993) étudie ces configurations caméra / objet dans lesquelles la détermination de la pose relative devient singulière.

**Reconstitution de la pose** (Weng et al., 1991) propose un algorithme linéaire qui conduit aux deux poses compatibles avec deux vues données d'un même objet plan par une caméra monoculaire. (Zhang et al., 2009) présente une autre méthode pour reconstituer la pose à partir des relations entre les coordonnées de points dans deux images. D'autres solutions utilisent des techniques d'estimation. Ainsi, (Ficocelli and Janabi-Sharifi, 2001) utilise le filtre de Kalman pour reconstituer la pose, tout en ajoutant une couche adaptative pour estimer la matrice de bruit d'état qui dépend du mouvement -inconnu- de l'objet. (Fujita and Kawai, 2002) définit un observateur non-linéaire permettant de reconstituer la pose 3D à partir de l'image. Une technique utilisant le filtre de Kalman étendu en exploitant la mesure de l'épipôle de la cible est proposée dans (Becerra and Sagüés, 2011), avec une étude de l'observabilité de ce système. Dans la thèse (Tahri, 2004), ce sont les moments de l'image qui permettent de reconstruire la pose. Dans (Farahmand et al., 2007), une méthode de reconstitution de pose exploitant l'historique des mouvements est proposée. (Nordberg, 2008) développe une méthode de triangulation basée sur trois vues et une optimisation tridimensionnelle.

**Utilisation de mesures ou connaissances supplémentaires** Une image ne permettant pas par elle-même et sans autre information de reconstituer la profondeur de champ, (Hulls and Wilson, 1998) propose de compléter les mesures de l'image par un laser ponctuel, en fusionnant les deux sources d'information pour en déduire une estimation de pose 3D. Dans (Jung et al., 1998), c'est la connaissance de la direction inertielle du plan objet observé qui permet de déduire la pose 3D à partir de l'image.

**Estimation de la profondeur** Dans (Malis and Rives, 2003b), une technique d'asservissement visuel permet de réaliser des mouvements de translation

dans lesquelles la profondeur des points peut être reconstituée.

En regard de ces études, le choix qui a été fait dans cette thèse a été de ne pas reconstituer la pose de l'engin, pour deux raisons : afin d'éviter de poser des hypothèses sur l'environnement, et pour réduire la charge de calcul et ainsi rendre possible un asservissement visuel de drones avec un calculateur modeste.

### 1.1.2.3 Utilisation de l'homographie

**Présentation** Les travaux présentés dans cette thèse reposant entièrement sur l'exploitation de la matrice dite homographique comme on le verra plus loin, on présente dans cette section particulièrement détaillée des études l'ayant déjà utilisée. C'est l'occasion de poser les jalons et de présenter les modèles qui seront ultérieurement exploités. Nous commençons par définir cette matrice, en renvoyant à (Malis and Vargas, 2007; Benhimane and Malis, 2007) pour plus de détails notamment sur les algorithmes de calcul associés.

**Définition** La matrice homographique peut être définie lorsqu'une caméra observe une scène *plane* depuis deux points de vue distincts, comme sur la figure 1.9 ci-après. Sur la figure sont représentés les deux repères  $\mathfrak{R}^*$  correspondant à la première pose, et  $\mathfrak{R}$  correspondant à la seconde, avec les axes associés. Dans la suite de ce mémoire, l'une des poses, implicitement définie par une image, sera définie comme la pose de référence, et associée aux notations avec des étoiles comme  $\mathfrak{R}^*$ , tandis que la seconde représentera la pose courante de la caméra. Est aussi figurée la transformation entre ces deux repères, qui est caractérisée par la rotation  $R$  et la translation  $p$ . La matrice homographique se définit comme la relation entre les coordonnées d'un point du plan objet dans ces deux repères.

**Calcul** La matrice homographique, qui fait le lien entre les coordonnées des points de la cible dans les deux images, est obtenue en écrivant la relation liant les coordonnées  $\chi^*$  et  $\chi$  d'un point du plan exprimé respectivement dans les repères  $\mathfrak{R}^*$  et  $\mathfrak{R}$  associés à ces deux poses :

$$\chi^* = R\chi + p \quad (1.1)$$

ou :

$$\chi = R^T \chi^* - R^T p \quad (1.2)$$

Comme en outre la distance entre la caméra à l'une de ces deux poses et le plan observé est donnée par :

$$d^* = n^{*T} \chi^* \quad (1.3)$$

Il vient :

$$\chi = R^T \chi^* - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \chi^* = \left[ R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right] \chi^* \quad (1.4)$$

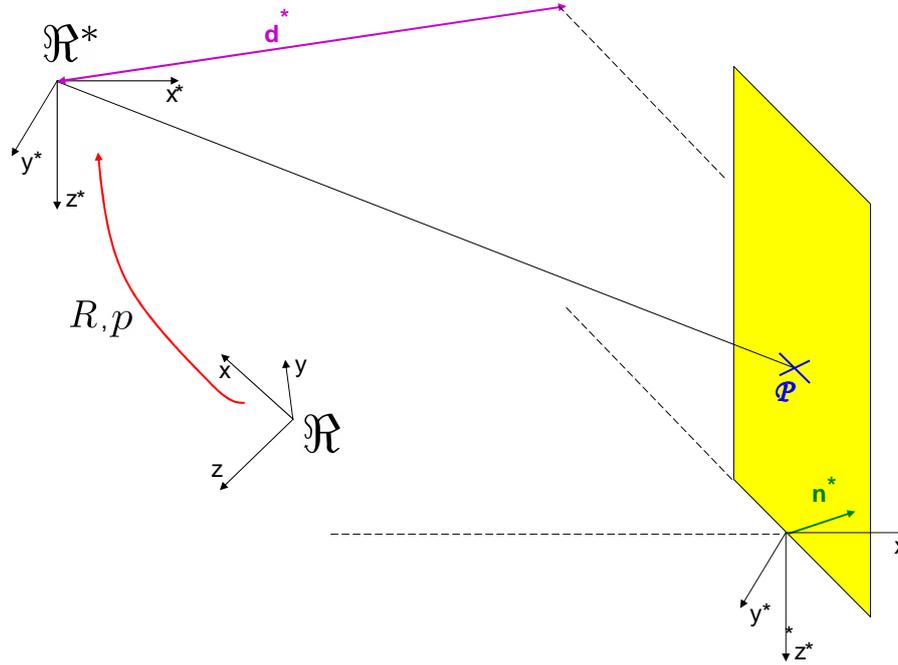


FIGURE 1.9 – Une même scène plane observée de deux points de vue différents : situation dans laquelle peut être définie la matrice homographique

Ces coordonnées se projettent dans les images selon le modèle classique de projection perspective (voir (Fleck, 1995) pour une présentation critique de ce modèle et de ses limites), où l'on inclut ici les erreurs de calibration exprimées dans la matrice  $K$  :

$$\begin{cases} \mu^* &= K \left( \frac{1}{Z^*} \chi^* \right) \\ \mu &= K \left( \frac{1}{Z} \chi \right) \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $Z^* = \chi_3^*$  et  $Z = \chi_3$ . La *matrice homographique* est alors définie selon :

$$H = K \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right) K^{-1} \quad (1.6)$$

Elle relie les coordonnées d'un point du plan dans les deux images selon la relation :

$$\mu = \frac{Z^*}{Z} H \mu^* \quad (1.7)$$

**Une version plus simple de l'homographie** Supposant que la matrice  $K$  est connue, cette relation suggère que la matrice  $H = R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T}$  peut être estimée à un facteur d'échelle près -si le rapport  $\frac{Z^*}{Z}$  est inconnu, c'est-à-dire que l'on peut estimer.

$$H_\eta = \eta \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right) \quad (1.8)$$

avec  $\eta$  un scalaire inconnu. On peut montrer cependant que  $\eta$  correspond alors à la valeur singulière moyenne de  $H_\eta$ , ce qui permet d'estimer

$$H = R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \quad (1.9)$$

Sa dérivée peut être aisément calculée, selon :

$$\dot{H} = -S(\omega)H - \frac{1}{d^*} v n^{*T} \quad (1.10)$$

**Linéarisation** Lorsque la transformation entre les deux points de vue est proche de l'identité, c'est-à-dire avec les hypothèses de linéarité suivantes, où l'on introduit  $\Theta$  une paramétrisation de la matrice de rotation  $R$  telle que  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} |p| & \ll 1 \\ |\phi|, |\theta|, |\psi| & \ll 1 \\ R & \approx I + S(\Theta) \\ \Theta & \triangleq \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

la matrice  $H$  peut être approchée par l'expression linéarisée suivante :

$$H \approx I - S(\Theta) - \frac{1}{d^*} p n^{*T} \quad (1.12)$$

**Intérêt de l'homographie et difficulté d'en extraire la pose** Cette matrice encode donc des informations sur les deux poses concernées puisque  $R$  et  $p$  entrent dans son expression. Puisqu'elle peut être en outre efficacement estimée dans l'image, il est naturel de chercher à l'utiliser pour estimer ces grandeurs  $R$  et  $p$ . Cependant, on peut montrer ((Malis and Vargas, 2007)) que cette reconstruction ne se fait qu'au prix d'hypothèses restrictives : on supposera ainsi connaître la normale au plan observé, ou encore la distance à ce plan. Les diverses études ayant exploité la matrice homographique se distinguent de fait essentiellement par les hypothèses sur la connaissance ou l'ignorance de ces grandeurs. L'objet de cette thèse est de minimiser ces hypothèses, en utilisant la matrice homographique sans chercher à la décomposer, de façon à éviter de supposer connaître des grandeurs dont la mesure en pratique peut être compliquée. Nous présentons maintenant certaines de ces études, qui déclinent diverses manières d'utiliser cette matrice, ainsi que divers niveaux d'hypothèses associées que nous soulignons afin de les distinguer de l'approche suivie dans cette thèse.

**Présentation générale des travaux utilisant l'homographie** Écartant la question de l'obtention de cette matrice, laquelle peut être réalisée par des

logiciels de traitement d'image efficaces et nous entraînerait trop loin sur ce terrain du traitement de l'image, nous présentons d'abord des études visant à améliorer, avec différents critères et méthodes, l'estimation de l'homographie ; puis l'on cite des études où la pose est extraite -sous hypothèses- de cette matrice. Puis des techniques utilisant une extraction partielle. Enfin des études, plus proches de la démarche retenue dans cette thèse, exploitant l'homographie telle quelle, sans chercher à en extraire la pose.

**Travaux portant sur l'amélioration de l'estimation de l'homographie** (Malis et al., 2009) et (Hamel et al., 2011) proposent un filtre non-linéaire pour estimer la matrice homographique en se plaçant sur le groupe spécial linéaire et en tirant profit de ses propriétés. (Mahony et al., 2012) prolonge cette approche. (Baker et al., 2006) réalise un paramétrage des homographies utilisant des points dans les deux images, afin d'améliorer l'estimation du plan objet. (Simond and Laurgeau, 2006) définit la super-homographie, qui relie trois prises de vue d'un objet plan en introduisant des contraintes spatio-temporelles entre elles. (Wang and Liu, 2006) étudie les lignes caractéristiques de l'homographie et ses applications pour la calibration des caméras. (Loop and Zhang, 1999) propose une méthode pour rectifier des homographies.

**Travaux portant sur l'extraction de pose** Diverses études ont cherché à exploiter les matrices homographiques dans ce contexte en extrayant la pose de l'engin. Le rapport (Faugeras and Lustman, 1988) établissait ainsi la géométrie issue de l'observation de deux poses d'un même plan, les ambiguïtés associées, et la possibilité de les lever par une troisième vue ou des hypothèses supplémentaires. (Zhang and Hanson, 1996) analyse les conditions dans lesquelles la pose peut être reconstituée, en soulignant qu'en théorie quatre correspondances coplanaires sont nécessaires, menant à deux solutions possibles, à un facteur d'échelle près. Une troisième vue permet de discriminer entre les deux solutions. Dans (Chesi et al., 2000), l'accent est mis sur la technique de segmentation de l'image et la sélection d'un contour de référence, qui permet de calculer la matrice homographique ; de celle-ci, la pose est supposée extractible. (Michaelsen et al., 2004) étudie des configurations particulières dans lesquelles plus d'information peut être connue : rotation connue par une caméra montée sur un berceau orientable, et en particulier lorsque le mouvement est parallèle au plan objet. (Benhimane et al., 2005) réalise la décomposition des homographies pour piloter une voiture, en supposant connue une estimation de la normale au plan objet. (Vargas and Malis, 2005) réalise une décomposition analytique de l'homographie pour l'asservissement visuel, et offre une solution au problème de l'ambiguïté entre deux solutions possibles en définissant une loi de commande basée sur la moyenne des deux solutions, ce qui permet à terme de distinguer la "bonne" solution. Des mêmes auteurs, (Malis and Vargas, 2007) est un rapport de recherche qui étudie en profondeur les questions relatives

à la décomposition de l'homographie. (Chen et al., 2005) extrait les informations, mais en ajoutant une couche adaptative pour régler le problème de la profondeur inconnue. Dans une autre démarche, (Fang et al., 2002b) propose un asservissement visuel pour des robots roulants basé sur l'homographie, en décomposant l'homographie en ses composantes, en ne faisant apparaître dans la loi de commande que ce qui a pu être extrait, en particulier la translation normalisée par la distance.

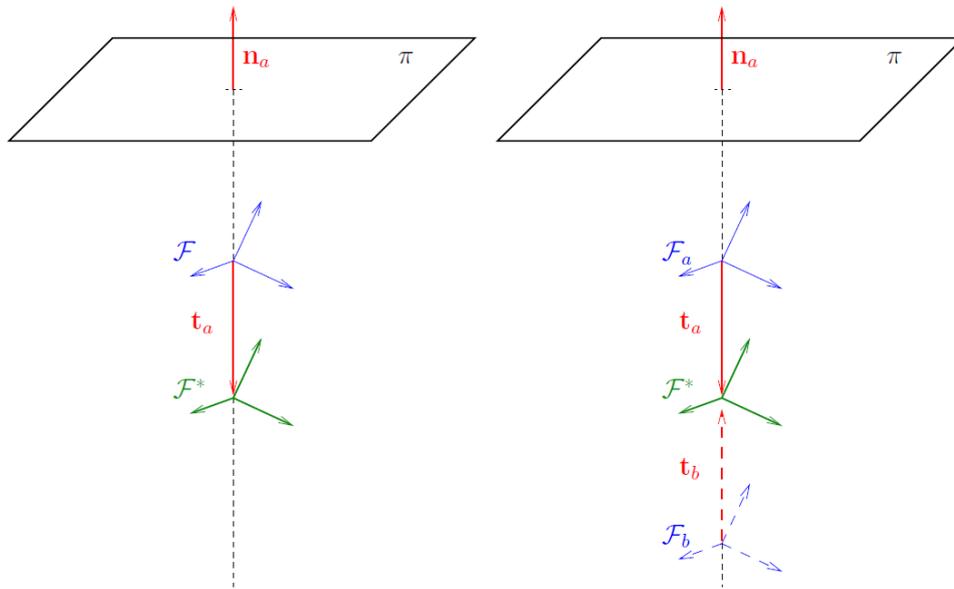


FIGURE 1.10 – Issue de (Vargas and Malis, 2005), cette figure montre une situation dans laquelle la reconstruction de pose est singulière : à gauche la configuration, à droite les deux solutions possibles (en traits bleu plein et pointillés)

**Travaux portant sur l'extraction partielle et méthode  $2D\frac{1}{2}$**  (Guerrero et al., 2005) permet à un véhicule de suivre une trajectoire déjà parcourue grâce à des homographies entre l'image courante et celles enregistrées lors du premier passage. (Hadj-Abdelkader et al., 2006a) réalise un asservissement découplé en utilisant l'homographie pour des caméras omnidirectionnelles. Dans la méthode d'asservissement visuel  $2D\frac{1}{2}$  déjà mentionnée (Malis, 1998; Malis et al., 1999), c'est la matrice homographique qui est exploitée pour calculer les éléments utiles dans l'image. (Kyrki et al., 2004) propose une approche similaire à la méthode  $2D\frac{1}{2}$ , où l'homographie, décomposée, sert à donner la direction à suivre, tandis que les rotations sont pilotées dans l'image, le tout dans une approche de plus court chemin.

**Travaux portant sur l'utilisation de l'homographie sans extraction** (Borgstadt and Ferrier, 2001) définit un paramétrage d'une trajectoire entre deux points de vue. (López-Nicolás et al., 2007) utilise certains éléments de la matrice homographique (choisis sur des considérations de précision de leur calcul) en exploitant une stratégie de bascule d'homographies pour gérer la contrainte de visibilité. (Fang et al., 2012) propose une amélioration du précédent, pour éviter des mouvements indésirables constatés sur cette approche. (Benhimane and Malis, 2007), qui sera exploité dans cette thèse, définit un vecteur d'erreur basé homographie, à partir duquel une commande cinématique est définie. (Gonçalves et al., 2010) exploite l'homographie pour l'approche et l'atterrissage automatique d'un avion, en définissant une interpolation sur les homographie, et en exploitant l'homographie directement dans une approche linéaire.

**Le choix retenu dans cette thèse** En regard de ces études, le choix qui a été fait ici est de ne pas supposer pouvoir extraire les informations de pose. Cette extraction réclame comme on l'a vue des hypothèses ou des connaissances (normale au plan objet observé, distance à ce plan) dont nous pensons qu'il est intéressant de pouvoir se passer.

### 1.1.3 Aspects commande

*Il commande au soleil d'animer la nature.*

Jean Racine

Nous évoquons dans cette section les aspects commande pour l'asservissement visuel. Il s'agit de savoir comment exploiter les informations image dans une loi de commande donnant au système considéré un comportement désiré. Pour donner un aperçu de ce vaste sujet, trois angles d'approche ont été retenus qui forment les trois parties de cette section :

- l'évocation des grandes problématiques théoriques qui ont été étudiées ;
- la question pratique importante du maintien de l'objet dans l'image au cours de l'évolution de la caméra ;
- un panorama des techniques de commande qui ont été mises en œuvre ;

Dans cette section, on cherche à donner, là aussi, un aperçu de différents problèmes de commande qui se posent. On ne fait que lister un certain nombre de travaux, sans préciser en général les applications concernées puisque l'accent est mis sur les problématiques étudiées.

#### 1.1.3.1 Problématiques théoriques

L'histoire de l'asservissement visuel a été jalonnée par de nombreux problèmes théoriques dont les résolutions ont permis de faire progresser la disci-

pline. On mentionne certains de ces problèmes, en évoquant quelques travaux qui ont cherché à y répondre.

**Effet des erreurs de calibration** L'un des premiers problèmes étudiés est celui de l'impact sur le mouvement des erreurs de calibration des caméras, problème étudié dans (Espiau, 1993) sur des cas relativement simples ; cette question est récurrente dans la littérature, parfois sous la forme du problème lié qu'est celui des singularités rencontrées dans certaines configurations engin-caméra (Michel and Rives, 1993). (Yoshimi and Allen, 1994) propose une méthode d'asservissement visuel purement image et en montre l'utilité pour éliminer l'effet des erreurs de calibration. C'est la surface de l'ellipse tracée par le point poursuivi qui indique l'éloignement par rapport à cet objectif et permet de s'y asservir. (Spratling and Cipolla, 1996) revient sur ce problème en introduisant des perturbations dans la loi de commande, ceci afin d'améliorer la calibration : des mouvements le long des degrés de liberté permettent d'estimer la jacobienne. Dans (Lefeberg et al., 1998), un bras manipulateur se déplaçant sur un plan et observé par une caméra fixe est piloté, même dans le cas de paramètres inconnus, et même lorsque l'orientation de la caméra l'est aussi, par une approche adaptative. (Malis, 2001) définit un asservissement visuel qui est invariant aux changements de paramètres intrinsèques de la caméra, en utilisant des espaces projectifs construits à partir de certains points dans l'image. (Marchand and Chaumette, 2001) définit quant à lui une méthode pour calibrer une caméra en utilisant une technique d'asservissement visuel virtuel : l'image considérée comme image courante est celle obtenue par projection du modèle avec les paramètres estimés, tandis que l'image réelle est considérée comme l'image à atteindre. (Malis and Rives, 2003b) étudie aussi la question de la non calibration. (Schramm et al., 2005) propose une approche par planification de chemin indépendante des erreurs de calibration. Une approche adaptative est proposée dans (Wang et al., 2008). (Chien and Huang, 2009) propose également une méthode adaptative pour corriger l'effet des incertitudes variant dans le temps. C'est aussi une approche adaptative qui est exploitée dans (Fan et al., 2009) et par (Yang and Wang, 2011) pour ce problème. Des techniques d'optimisation non-linéaires sont exploitées dans (Bonković, 2009) pour s'affranchir des erreurs de calibration. (Hu et al., 2010) observe que les méthodes robustes aux erreurs de calibration ont été développées avec des paramétrages d'attitude singuliers ; une méthode utilisant les quaternions y est proposée, qui offre l'avantage d'une paramétrisation non singulière. (Shademan et al., 2010a) définit une estimation robuste du jacobien pour un asservissement visuel non calibré. (Shademan et al., 2010b) s'intéresse aussi aux asservissements visuels non calibrés dans le contexte du service sur orbite.

**Effets de la dynamique, stabilité et performances, singularités** Dans (Crowley et al., 1995), deux approches pour le contrôle d'un robot à dix degrés

de liberté sont comparées : une approche basée sur la cinématique, et une basée image. On y montre essentiellement que l'approche cinématique est meilleure sauf en cas de mauvaise connaissance du modèle, lequel peut causer des oscillations voire une instabilité, lorsque l'approche basée image s'avère plus robuste. (Khadraoui, 1996) évoque aussi le sujet, qui propose des lois de commande cinématique et dynamique basée vision pour une voiture. (Corke and Good, 1996) étudie un problème d'intérêt dans le cadre de cette thèse : l'effet de la négligence des dynamiques sur la stabilité et la performance des asservissements visuels. (Chaumette, 1998b) étudie aussi la stabilité et la convergence des asservissements visuels, mais du point de vue des singularités et des minima locaux pouvant être rencontrés dans les tâches de commande. La figure 1.11 représente un problème d'asservissement visuel qui y est étudié et qui pose des problèmes de singularité. La question de la stabilité est à nouveau abordée dans (Hashimoto and Noritsugu, 2000), qui propose une technique pour élargir le domaine de stabilité des asservissements visuels : ajouter des images artificielles intermédiaires entre les images courante et désirée grâce à des magnifications et transformations affines, de façon à supprimer les minima locaux en modifiant la fonction potentiel. (Vincze, 2000) revient sur la question de la performance en étudiant les latences dans la boucle, et les meilleurs types de traitement temps réel pour obtenir une bonne performance. (Lohmann and Lietmann, 2001) montre comment un laser, qui délivre une information 3D sur chaque point, permet d'améliorer la stabilité des asservissements visuels. (Deng et al., 2002) propose une étude de la stabilité robuste des méthodes basées image et basées position à partir d'une méthode énergétique. La stabilité d'une nouvelle classe de méthodes, n'utilisant pas de modèle, est étudiée dans (Malis and Chaumette, 2002). (Bourquardez et al., 2006) étudie la stabilité et les performances d'un asservissement visuel utilisant les moments du premier ordre dans des images sphériques. (Chaumette, 2009) revient sur la question de la stabilité et de la convergence de différentes techniques d'asservissement visuel.

**Découplages** Alors qu'il offre une robustesse vis-à-vis notamment des erreurs de calibration, l'asservissement visuel de type IBVS souffre d'un mal reconnu de longue date : il conduit à des trajectoires 3D pouvant être insatisfaisantes, voire singulières. Découpler, selon différentes modalités, est une des méthodes permettant d'éviter ce problème. Ainsi (Deguchi, 1998), qui a été brièvement mentionné plus haut, propose une façon de découpler les degrés de liberté en translation et en rotation de deux façons distinctes, soit en utilisant et décomposant l'homographie, soit en exploitant la géométrie épipolaire ; dans les deux cas en réalisant d'abord le mouvement en translation -la rotation ne servant alors qu'à maintenir l'objet en vue- puis le mouvement de rotation. Plus tard, observant que les problèmes interviennent pour de grands mouvements et autour de l'axe  $z$ , (Corke and Hutchinson, 2001) propose également

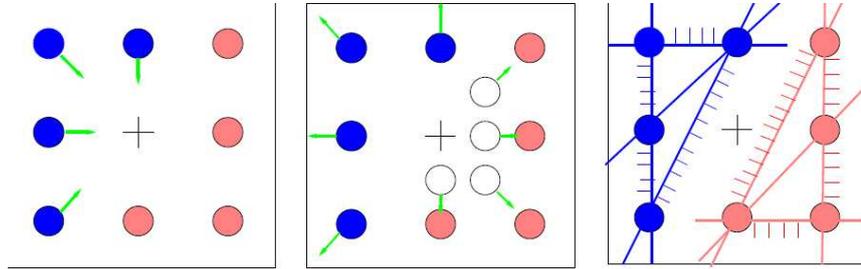


FIGURE 1.11 – Un exemple de singularité possible : les points bleus représentent l'image courante, les points rouges l'image désirée. a) Avec une approche classique utilisant la matrice d'interaction les trajectoires sont des lignes droites correspondant à un recul infini de la caméra. b) avec la matrice jacobienne calculée à la pose désirée, le mouvement est encore translationnel mais vers l'avant, menant aussi à une situation singulière. c) l'utilisation de droites plutôt que de points dans la fonction de tâche permet dans ce cas d'éviter la singularité et d'obtenir le mouvement de rotation désiré

une partition, mais entre l'axe  $z$  et les autres, qui permet notamment d'empêcher les mouvements non désirés dans l'espace 3D, avec l'utilisation d'une fonction de potentiel. Les amers choisis sont l'angle entre le segment entre deux points et l'horizontale, et la racine carrée de la surface formée par les points. (Mahony et al., 2002) est une autre approche découplée, qui repose sur l'utilisation des images d'une caméra sphérique : la translation et la rotation sont découplées, si la rotation entre la caméra et la cible est connue, et un gain non-linéaire permet d'éviter que l'objet ne sorte du champ visuel. (Kyrki et al., 2004) se propose d'éviter de découpler les degrés de liberté en exploitant une approche de plus court chemin qui doit éviter d'atteindre les limites du système piloté. Dans (Rives and Azinheira, 2004), le choix de certains indices visuels pour qu'un drone suive une route (lignes de fuite, point de fuite), permet un découplage entre rotation et translation, idée retrouvée sous une autre modalité dans (Bourquardez and Chaumette, 2007a) pour la même application ou encore dans (Guenard et al., 2007) pour le pilotage d'un quadrirotor. (Hadj-Abdelkader et al., 2006a) découple en exploitant une projection sphérique, de même que (Hadj-Abdelkader et al., 2007) ou encore (Tahri et al., 2008) qui exploite les invariants de projection sur une sphère. (Tahri et al., 2009) définit un formalisme unifié de découplage à partir du modèle unifié de projection. (Zachi et al., 2006b) propose une approche originale dans laquelle le mouvement en profondeur est distingué du mouvement 2D dans l'image, chacun étant suivi par un contrôleur dédié.

**Profondeur de champ** (Conticelli and Allotta, 1999) propose une méthode adaptative pour s'affranchir de la méconnaissance de la profondeur de champ, question qui est aussi étudiée dans (Malis and Rives, 2003a). (Souères et al., 2005) définit une technique robuste aux erreurs sur la profondeur de champ.

Dans cette thèse, les problèmes de calibration de la caméra n'ont pas été considérés. Les problèmes de stabilité et de performance sont explicitement pris en compte. Enfin, une certaine forme de découplage a été proposée dans la première étude (voir Proposition 2).

### 1.1.3.2 Maintien du plan objet dans l'image

Nombre d'approches présupposent que l'objet observé ne sortira pas du champ de vue de la caméra au cours de son évolution ; or, le non respect de cette contrainte signifie en pratique l'arrêt de l'asservissement visuel. Bien qu'il n'existe pas à ce jour de solution générique à ce problème très important, différentes solutions ont été proposées, que l'on évoque dans cette partie.

**Par calcul de la trajectoire** (Cervera and Martinet, 1999) propose une approche visant à combiner les avantages des PBVS et IBVS, en calculant la pose de la caméra au long de son déplacement et en assurant à la fois son déplacement correct en 3D et le maintien des amers dans le champ visuel. Dans (Thuilot et al., 2002), c'est le calcul de la trajectoire à suivre qui permet de maintenir l'objet dans le champ de visibilité. Dans (Murrieri et al., 2003), une fonction de Lyapunov rendue décroissante permet en même temps de prouver que la cible est maintenue dans le champ de vision.

**Par basculement de mode** (Chesi et al., 2002), puis (Chesi et al., 2004), proposent une stratégie à bascule, dans laquelle une trajectoire nominale est utilisée tant que la contrainte est vérifiée, et une commande spéciale ramène les points dans l'image si tel n'est plus le cas. (López-Nicolás et al., 2007) bascule entre différentes lois basées homographie, en saturant la contrainte de visibilité et en conduisant ainsi à une trajectoire faite de lignes droites et de courbes. Une approche par bascule est à nouveau proposée dans (Cunha et al., 2011) pour les mouvements basés image d'un objet rigide. (Karras et al., 2010) réalise aussi un basculement de mode, pour un asservissement visuel de sous-marin (un exemple de trajectoire suivie par le véhicule est reproduit sur la figure 1.12).

**Par champ de potentiel** Un problème proche est étudié dans (Mezouar and Chaumette, 2001), qui propose de combiner un calcul de trajectoire quasi optimal au sens 3D et intégrant les contraintes mécaniques, d'où sont déduits des sous-objectifs fournis à un algorithme 2D assurant le maintien du champ visuel. (Corke and Hutchinson, 2001) utilise aussi un champ de potentiel pour

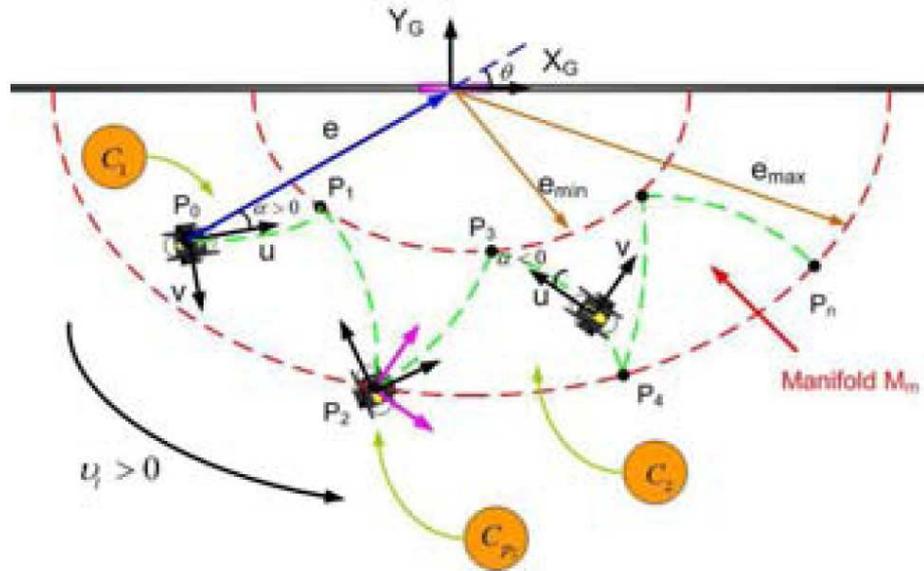


FIGURE 1.12 – Un exemple de trajectoire suivie par le véhicule sous-marin considéré dans (Karras et al., 2010), en raison des basculements de mode qui permettent de maintenir l’objet observé dans le champ visuel.

maintenir le champ de vision, en plus de la technique de découplage de l’axe  $z$  déjà mentionnée. (Cowan, 2002) introduit le concept, dérivé des champs de potentiel, de fonction de navigations pour un objectif similaire. C’est aussi la méthode retenue par (Chesi and Hung, 2007), qui calcule la pose puis une trajectoire faisable avec une paramétrisation astucieuse.

**Par redondance** (Marchand and Hager, 1998) exploite la redondance du robot pour permettre d’ajouter une tâche secondaire à la tâche principale, typiquement le maintien de l’objet dans le champ ou l’évitement d’occlusion.

**Par ensemble interdit** Une technique qualitative, avec intervalles de confiance, est utilisée dans (Remazeilles et al., 2006) pour assurer la contrainte de visibilité. (Ha et al., 2010) explore la question en définissant l’ensemble de visibilité 3D, au sein duquel il suffit ensuite de contraindre la trajectoire pour garantir la visibilité de l’objet.

**Par optimisation** Le problème d’asservissement visuel avec contrainte de visibilité est formulé par (Hafez et al., 2007) comme un problème d’optimisation convexe, permettant ainsi l’utilisation de résultats éprouvés dans ce domaine.

**Par combinaison PBVS / IBVS** (Kyrki et al., 2004) propose d’asservir deux degrés de liberté en rotation pour déplacer un point de l’objet vers le centre de l’image, tandis qu’un asservissement PBVS complète le contrôle de

la caméra. Une nouvelle approche est proposée dans (Kermorgant and Chaumette, 2011), qui combine PBVS et IBVS dans ce but, en utilisant une technique PBVS où sont introduits des éléments image lorsque l'objet approche des bords de l'image. Enfin, (Wang et al., 2012) réalise l'objectif en combinant des fonctions de Lyapunov et une approche  $2D\frac{1}{2}$ .

**Par LMIs** (Danès and Coutinho, 2006) intègre différents critères (convergence, évitement des saturations, contraintes 3D) via une fonction de Lyapunov biquadratique et des LMIs.

**Par saturation** On peut encore mentionner (Metni et al., 2003), qui sera évoqué plus loin concernant le pilotage de drones, dans lequel, afin de maintenir la cible dans le champ de vue, les auteurs utilisent une fonction de saturation : plus précisément, l'étape du backstepping correspondant à l'orientation est saturée, ce qui interdit d'atteindre une inclinaison importante et donc de perdre la cible de vue.

**Par un gain non-linéaire** (Mahony et al., 2002) utilise un gain non-linéaire pour la dynamique en rotation afin d'éviter que l'objet ne sorte du champ visuel.

Dans le cadre de cette thèse, de telles problématiques n'ont pas été explorées.

### 1.1.3.3 Techniques de commande spécifiques

Cette section recense un certain nombre de méthodes de commande exploitées dans la littérature, en particulier pour répondre aux problématiques théoriques mentionnées plus haut. Certaines de ces idées ont pu être exploitées dans la thèse comme on le verra.

**Techniques adaptatives** En raison de la présence de grandeurs inconnues ou mal connues en asservissement visuel, les techniques adaptatives sont naturelles dans ce contexte. C'est pourquoi de nombreuses études s'appuient sur ces approches. Ainsi, (Hosoda and Asada, 1997) propose une méthode basée sur l'estimation en ligne du jacobien et un contrôleur par feedback-feedforward. Dans (Bonković et al., 2007), c'est un réseau de neurones qui permet d'estimer le jacobien. Dans (Conticelli and Allotta, 1999) une technique d'estimation 3D est utilisée pour gérer la méconnaissance de la profondeur de l'objet. (Astolfi et al., 2001)-(Astolfi et al., 2002) permettent, dans une configuration de caméra fixe, de s'affranchir de la méconnaissance du facteur d'échelle et de l'orientation de la caméra grâce aux techniques d'immersion et invariance et de correcteur proportionnel intégral non-linéaire. (Zachi et al., 2006a) utilise la même technique. (Fang et al., 2002a)-(Chen et al., 2003) sont des approches adaptatives

$2D\frac{1}{2}$  qui compensent à la fois l'ignorance de la profondeur, le manque de modèle 3D et les incertitudes paramétriques (la figure 1.13 représente le bras manipulateur considéré dans (Fang et al., 2002a)).

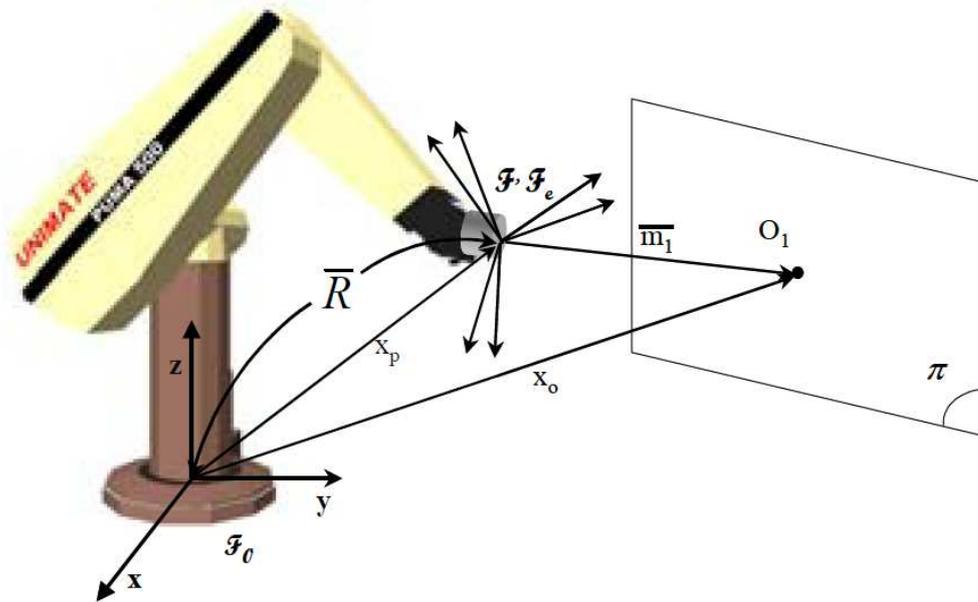


FIGURE 1.13 – Le bras manipulateur considéré dans l'approche adaptative présentée dans (Fang et al., 2002a)

(Cheah et al., 2006) est une approche adaptative pour une classe de robots, qui est appliquée au cas de l'asservissement visuel. Dans (Sahin and Zergeroglu, 2005)-(Sahin and Zergeroglu, 2006), ce sont deux caméras disposées dans l'espace de travail qui permettent, grâce à une approche adaptative et malgré les incertitudes, de piloter un robot manipulateur. (Frew et al., 2006) utilise pour le guidage visuel de drones avions une technique de commande à horizon fuyant dont l'horizon est adapté à l'estimation de l'état de l'avion et des obstacles.

**Commande prédictive** L'intérêt de la commande prédictive réside dans sa faculté, précisément, à prédire le comportement futur, ceci afin de le compenser, mais aussi de prendre en compte des contraintes. Ainsi, dans le domaine médical, (Ginhoux et al., 2003) et (Ginhoux et al., 2005) proposent-ils de compenser les mouvements du coeur pour filtrer les mouvements physiologiques, selon un processus illustré sur la figure 1.14. Un schéma d'asservissement visuel IBVS basé commande prédictive est proposé dans (Sauvée et al., 2006) et (Alibert et al., 2008) pour un bras manipulateur, cette fois dans le but d'assurer différentes contraintes en anticipant sur les mouvements futurs de la caméra : bornes sur les couples exercés et sur les positions des jonctions, et contrainte

de visibilité. Dans cette veine, (Sauvée et al., 2008) applique ce type d'asservissement pour un capteur ultra-son. (Allibert et al., 2010) donne encore une présentation de cette technique, citant comme principal avantage la prise en compte possible de nombreuses contraintes.

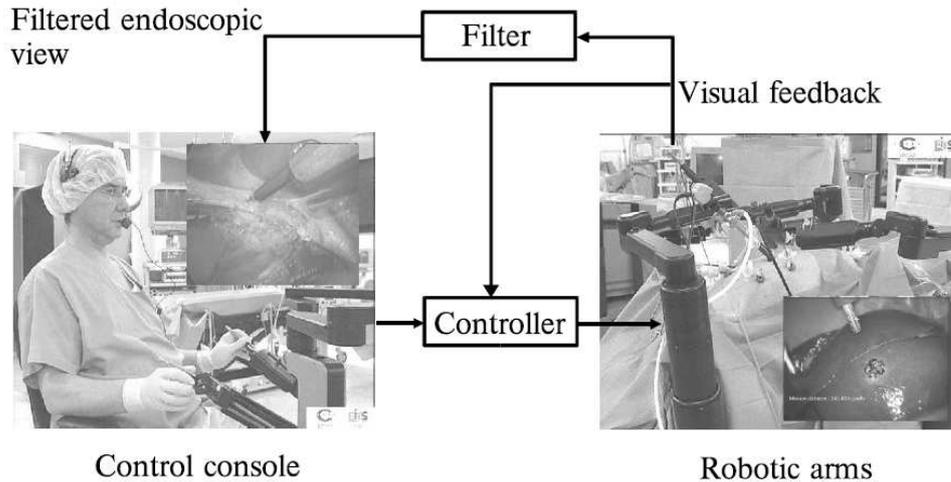


FIGURE 1.14 – Compensation des mouvements du coeur par asservissement visuel et commande prédictive. Figure issue de (Ginhoux et al., 2003)

**Techniques  $H_\infty$ , en particulier en utilisant les LMIs** (Kawabata and Fujita, 1998) explore l'utilisation de filtres  $H_\infty$  dans la commande référencée vision. Le formalisme des LMIs, dont les récents outils de résolution ont largement contribué à développer les applications, permet de définir des lois de commande robustes et prenant en compte différents critères, comme la stabilité, l'évitement des saturations actionneurs, les contraintes image, etc. (Bellot and Danès, 2001) introduit le sujet en explicitant la modélisation associée (en utilisant la transformation linéaire fractionnaire, ou LFT), et en montrant comment différentes contraintes s'écrivent sous forme LMI : évitement des saturations des actionneurs, satisfaction de contraintes 3D ou images. Plus tard, le rapport (Danès and Bellot, 2006) propose une vision approfondie de la question. (Souères et al., 2005) complète cette approche avec les contraintes supplémentaires que la profondeur de champ est bornée mais inconnue, et que les vitesse et accélération de la caméra doivent rester bornées. (Gao, 2006) propose enfin une méthode de synthèse de loi de commande multicritère.

**Platitude différentielle** Un système est dit différentiellement plat si la connaissance de l'évolution au cours du temps de certaines variables permet de déterminer la valeur de toutes les grandeurs relatives au système. Dans ce cas,

une commande élégante peut être définie. Ainsi, (Rao et al., 2003) considère le cas d'un robot roulant piloté à partir des images observées depuis un drone le survolant, et, montrant que ce système est différentiellement plat, définit une loi de commande robuste aux erreurs dans la connaissance des paramètres de la caméra.

**Logique floue** Différentes études ont exploré l'usage des techniques de logique floue dans le contexte de l'asservissement visuel : (Kadmiry, 2005), (Moreno-Armendariz and Yu, 2005), (Olivares-Mendéz et al., 2009), (Olivares-Mendéz et al., 2010), (Olivares et al., 2011). Elles offrent l'avantage de la simplicité, et reposent sur des critères de bon sens. En sens contraire, les justifications théoriques sont maigres.

**Modes glissants** (Becerra and Sagüés, 2010) propose une technique par modes glissants présentée comme permettant de franchir une singularité avec des commandes bornées. Dans (Yu and Li, 2004), c'est un observateur de la vitesse des articulations d'un robot manipulateur qui est réalisé par modes glissants.

**Optimisation non-linéaire** (Bonković, 2009) propose une méthode basée sur une optimisation non-linéaire permettant de traiter le cas de l'asservissement visuel pour le cas non calibré et sans nécessité de modèle.

**Linéarisation entrée-sortie** Une technique de linéarisation entrée-sortie, jointe à un observateur du mouvement de la cible, est proposée dans (Hashimoto and Kimura, 1995). De même, (Martinet and Gallice, 1999) propose une façon astucieuse de paramétrer l'espace d'état dans une approche PBVS, de sorte qu'une linéarisation entrée-sortie est possible.

Au milieu de toutes ces techniques, cette thèse se situe dans le cadre de la théorie de Lyapunov. Ce cadre permet en effet comme on le verra de traiter le cas des paramètres inconnus, tout en offrant une robustesse aux résultats obtenus : pour une fonction de Lyapunov dont la dérivée est plus petite qu'une fonction définie négative est connue, l'ajout de petites perturbations ne change pas le signe de la dérivée, et donc la stabilité du système.

## 1.2 Commande de drones VTOLs

Cette section présente quelques études consacrées à la commande d'engins du type de ceux étudiés dans cette thèse hors asservissement visuel. Divers ouvrages les recensent comme par exemple (I.A.Raptis and Valavanis, 2011).

Nous commençons par présenter les modèles de drones couramment utilisés dans ce type d'études, puis nous listons des études sur la commande de drones VTOLs.

### 1.2.1 Modèles de drones VTOLs

*Mal nommer les choses, c'est ajouter au malheur du monde.*

Albert Camus

**La classe d'engins volants étudiée dans cette thèse** De nombreuses études considèrent une classe d'engins propulsés par la poussée : des corps solides évoluant dans l'espace cartésien tridimensionnel sous l'action d'une force liée à l'engin et pilotée en force et couple (Hua et al., 2009b). Cette classe de véhicule contient la plupart des drones à décollage et atterrissage court (quadrirotors, "ducted fans", hélicoptères, etc).

**Note : dans tout ce mémoire, nous notons  $b_i$  les vecteurs de la base canonique, ie :**

$$\begin{cases} b_1 \triangleq [1, 0, 0]^T \\ b_2 \triangleq [0, 1, 0]^T \\ b_3 \triangleq [0, 0, 1]^T \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce choix est retenu pour éviter toute confusion avec le vecteur  $e$  qui sera défini au chapitre 2. **Cette notation ne doit pas être confondue avec le choix fréquent de l'utiliser pour la base liée à l'engin ( $b$  pour body).**

La dynamique de ces systèmes peut être décrite par les équations bien connues suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{p} &= -uRb_3 + gb_3 + \frac{F_a}{m} \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &= J\omega \times \omega + \Gamma + \Gamma_a \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $p$  est le vecteur position du centre de masse du véhicule, exprimé dans le repère inertiel de référence,  $R$  est la matrice de rotation du repère engin vers le repère de référence,  $\omega$  la vitesse angulaire exprimée en repère engin,  $S(\cdot)$  la matrice associée au produit vectoriel à gauche, i.e.

$$S(x)y = x \times y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (1.15)$$

$u$  la poussée normalisée, i.e.  $u = \frac{T}{m}$  où  $m$  est la masse et  $T$  la poussée,  $J$  la matrice inertielle exprimée dans le repère engin,  $\Gamma$  le couple, et  $g$  la constante de gravitation.  $F_a$  et  $\Gamma_a$  représentent respectivement les forces et couples aérodynamiques (voir par exemple (Cheviron et al., 2009)). **Ces grandeurs seront négligées dans la suite de ce travail de thèse. En outre, ce modèle pré-suppose également une superposition du centre de gravité de l'engin avec l'intersection de ses axes de rotations.** Un hélicoptère "classique", tel qu'illustré sur la figure 1.15, est un exemple d'un engin compatible avec ce modèle. D'autres exemples sont illustrés par la figure 1.16.

**Modèle exprimé en repère engin** Dans le cadre de cette thèse, l'équation en accélération et forces est utilement écrite en repère engin puisque les grandeurs mesurées le sont dans ce repère comme on le verra :

$$\begin{cases} \dot{p} &= Rv \\ \dot{v} &= v \wedge \omega - ub_3 + \gamma + \frac{R^T F_a}{m} \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &= J\omega \times \omega + \Gamma + \Gamma_a \end{cases} \quad (1.16)$$

où l'on fait apparaître la vitesse  $v$  et la gravité  $\gamma$  exprimées en repère engin, avec  $\gamma = gR^T b_3$ .

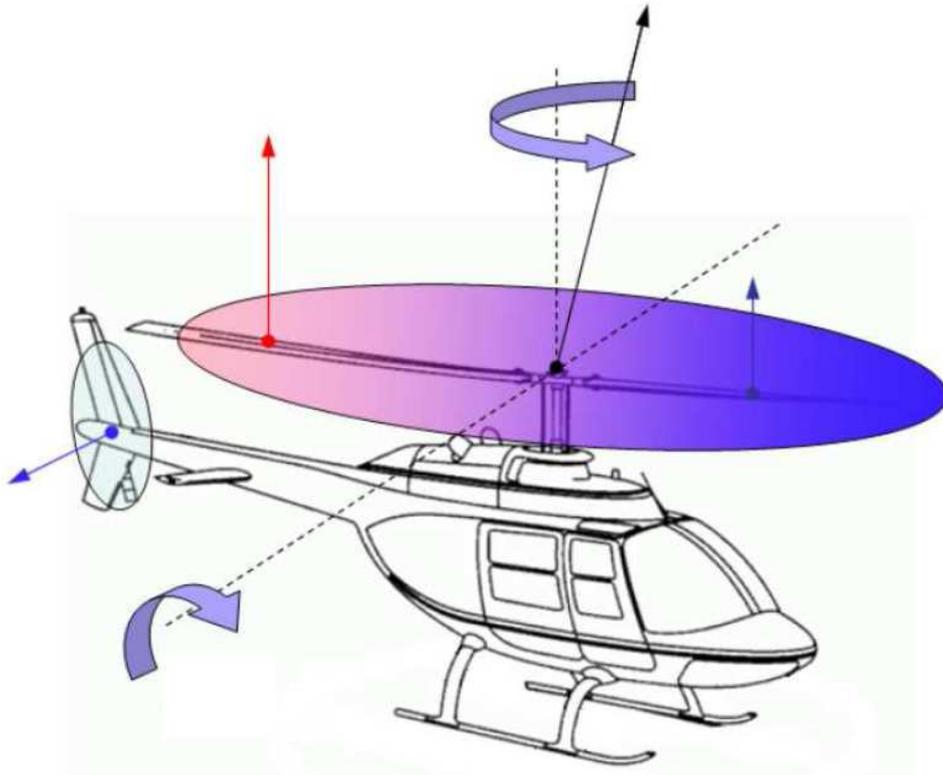


FIGURE 1.15 – Un hélicoptère classique peut être représenté par le modèle présenté dans cette section. Figure issue de (Le Bras, 2011)

**Stabilisation à l'origine et linéarisation du modèle** L'objectif premier dans ce travail a été de stabiliser l'origine de ce système  $p = 0, R = I_3, v = 0, \omega = 0$ , avec  $I_3$  la matrice identité  $3 \times 3$ . Dans un premier temps (chapitre 2), ce problème sera étudié à partir de méthodes linéaires. Pour les appliquer, ce modèle peut être linéarisé autour du point d'équilibre  $(p, v, \Theta, \omega) = (0, 0, 0, 0)$ , avec  $\Theta$  une paramétrisation de la matrice de rotation  $R$  comme en section

1.1.2.3 ; les hypothèses de linéarisation sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} |p| & \ll 1 \\ |v| & \ll 1 \\ |\phi|, |\theta|, |\psi| & \ll 1 \\ R & \approx I + S(\Theta) \\ |u - g| & \ll 1 \\ |\omega| & \ll 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

Le modèle linéarisé correspondant au modèle donné par l'équation (1.16) que l'on considèrera pour les approches linéaires (chapitre 2) est le suivant :

$$\begin{cases} \ddot{p} & = -ub_3 + \gamma = [-g\theta; g\phi; g - u]^T \\ \dot{\Theta} & = \omega \\ \Theta & \triangleq [\phi; \theta; \psi]^T \\ J\dot{\omega} & = \Gamma \end{cases} \quad (1.18)$$

**Hypothèse de séparation d'échelle de temps** Dans la suite de cette thèse, comme on l'a dit, des approches linéaires et non-linéaires seront proposées. Pour ces dernières, nous considérons, selon un argument de séparation d'échelles de temps usuel dans le domaine des drones à atterrissage et décollage verticaux, que la commande en orientation se fait par  $\omega$ . En effet, une fois que la vitesse angulaire désirée  $\omega^d$  a été définie, la commande en couple  $\Gamma$  peut être calculée selon :

$$\Gamma = -J\omega \times \omega + kJ(\omega^d - \omega)$$

où le gain  $k$  est choisi assez grand. En conséquence, nous considérerons dorénavant pour les approches non-linéaires (chapitre 3) le sous-système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{p} & = -uRb_3 + gb_3 \\ \dot{R} & = RS(\omega) \end{cases} \quad (1.19)$$

où les commandes sont désormais  $u$  et  $\omega$  au lieu de  $u$  et  $\Gamma$  dans les modèles (1.14) et (1.16) présentés plus haut. Cette hypothèse est fréquemment posée dans ce contexte, bien qu'elle induise la possibilité de couples importants en raison de la grande valeur du gain  $k$ , ce qui peut avoir des conséquences sur la stabilité en particulier en présence de saturation d'actionneurs.

## 1.2.2 Commande de drones VTOLs

**Approches linéaires** Concernant les études relatives au pilotage de ces engins, on peut citer différentes techniques linéaires, comme les approches LQR (Leonard and Graver, 2001), les approches  $H_2$  ou  $H_\infty$  (Sanjay and Ouzts, 1991), (Mattei and Scordamaglia, 2008). Ces approches ont une validité restreinte par l'hypothèse de linéarité, qui exclut typiquement les grandes amplitudes de mouvements, ou la présence de trop importantes rafales de vent.

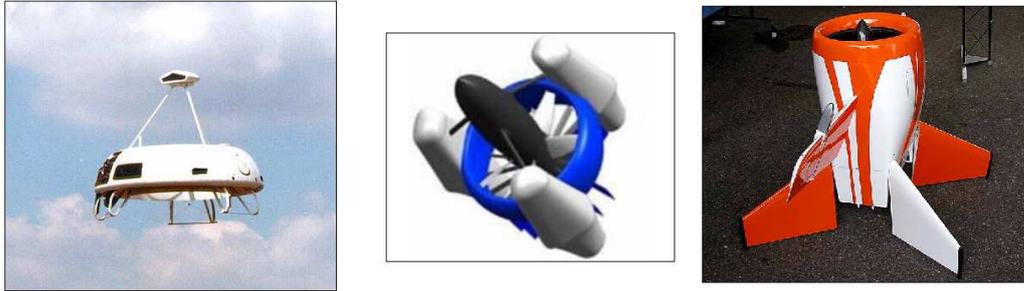


FIGURE 1.16 – Exemples de drones représentés par le modèle (1.16) : Sikorsky Cypher (gauche), concept AVID (milieu) et Darpa OAV-II (droite)

**Approches non-linéaires** C'est la raison pour laquelle des approches non-linéaires ont été également proposées, fondées sur le backstepping (Bertrand et al., 2007), (Olfati-saber, 2000), la linéarisation par feedback (Fritsch et al., 2012), les modes glissants (Odelga et al., 2012), les perturbations singulières (Bertrand et al., 2011), la commande prédictive (Bemporad et al., 2009), la platitude différentielle (Shakernia et al., 1999), une étude énergétique (Pharmayeni et al., 2011), ou encore par modèle interne (Marconi et al., 2002). Certaines approches insistant sur la robustesse ont également été étudiées (Isidori et al., 2003), (Azinheira et al., 2006), (Moutinho and Azinheira, 2005), (Pflimlin et al., 2007). (Bayraktar and Feron, 2007) est une approche permettant des atterrissages agressifs sur des pentes très importantes (jusqu'à  $60^\circ$ ), grâce au système Vicon. On peut aussi mentionner ici des approches par apprentissage (Murao et al., 2003), (Ng et al., 2003), (Abbeel et al., 2008). (Isidori et al., 2003) est une contribution essentielle dans laquelle les auteurs proposent une approche non-linéaire pour contrôler l'axe vertical d'un hélicoptère tout en stabilisant ses axes horizontaux. Cette étude est prolongée par (Marconi and Naldi, 2006) sur les aspects robustesse aux incertitudes paramétriques essentiellement. Certaines études, comme (Cho et al., 2008), s'attachent à limiter le nombre de capteurs embarqués en proposant un système basé sur un récepteur GPS et un tube Pitot. (Vissière et al., 2008) compensent la médiocrité des capteurs considérés par l'exploitation d'un modèle dynamique riche dans leur estimateur. (Duc Anh et al., 2011) s'intéresse au cas d'un convertible capable de vol stationnaire et de vol de translation (voir figure 1.17); la technique utilisée exploite des saturations tout comme l'approche proposée plus loin dans cette thèse.

(Kendoul et al., 2008b) considère un contrôleur à structure hiérarchique distinguant une boucle interne et une boucle externe, avec preuve de stabilité, selon un schéma proche des travaux proposés dans cette thèse et basés sur les perturbations singulières. (Guerrero-Castellanos et al., 2009) est une approche

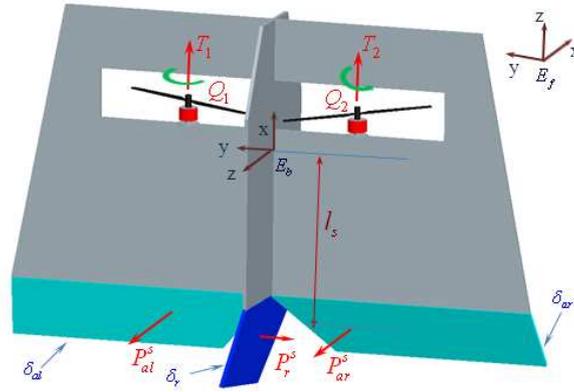


FIGURE 1.17 – Le modèle de convertible considéré dans (Duc Anh et al., 2011)

pour la stabilisation d'engins rigides en attitude sans mesure de vitesse angulaire ni reconstruction de l'attitude, en quoi elle trouve des similarités avec l'objectif de cette thèse. (Hua et al., 2009a) présente une loi de commande non-linéaire et robuste pour le pilotage des drones VTOLs à poussée orientable. La technique utilisée ainsi que le résultat obtenu ont été exploités dans le cadre de cette thèse. Dans cette veine, (Pucci et al., 2011) propose une loi de commande pour drone sujet à traînée.

**Suivi de trajectoire** Concernant le suivi de trajectoire, parmi les résultats existant, on peut mettre en avant (Abdessameud and Tayebi, 2010) qui considère le cas sans mesure de vitesse -aspect qui sera considéré aussi dans nos travaux- en exploitant la structure en cascade du système. On peut aussi mentionner (Rifai et al., 2008) dans lequel un tel suivi est proposé pour un drone à ailes battantes.

**Les travaux de cette thèse** Par rapport à ces résultats, l'objectif retenu ici a été d'étendre ces résultats au cas de mesures incertaines, dans un sens que l'on définit rigoureusement au chapitre 2.

### 1.3 Asservissement visuel pour drones

*Je marcherai pour vous, vous y verrez pour moi.*

Jean de La Fontaine

### 1.3.1 Estimation

On présente dans cette partie les études dans lesquelles les images obtenues par la caméra sont exploitées pour estimer la position du drone relativement à un objet visible dans la caméra.

#### 1.3.1.1 Environnement connu

Des travaux relativement anciens ont déjà exploré cette voie ; ainsi (Amidi et al., 1993), (Amidi, 1996), (Amidi and Miller, 1998), (Amidi et al., 1998), ou encore (Woodley et al., 1996), dans lequel des objets connus en nombre sont disposés au sol. Dans cette voie, (Campos and de Souza Coelho, 1999) présente un système similaire, qui décrit également les ambiguïtés de recouvrement de la pose à partir d'une unique image pour une géométrie connue des objets observés, ainsi que les hypothèses autres permettant de s'affranchir de ces ambiguïtés. (Sharp et al., 2001) étudie des algorithmes linéaire et non-linéaire de reconstitution de pose. (Bourquardez, 2004) utilise la technique de l'asservissement visuel virtuel dans laquelle une pose virtuelle est guidée vers la véritable pose du drone grâce à une technique d'asservissement visuel 2D ((Dementhon and Davis, 1995), (Marchand and Chaumette, 2002)). (Merz et al., 2004) propose une technique indépendante du GPS, qui exploite une mire définie dans le dessein de délivrer une estimation fiable de pose. (Wu et al., 2005) définit un filtre de Kalman étendu exploitant la connaissance de la pose d'une cible dans l'image pour en déduire celle du drone. Dans (M.D.Tandale et al., 2006), des amers visuels placés sur la cible permettent le ravitaillement en vol d'un drone, en utilisant un capteur plus complètement décrit dans (Katake and Choi, 2010). (Mondragón et al., 2007) extrait des amers et déduit la pose du drone. Dans (Conte et al., 2008), ce sont des images géoréférencées qui sont mises à disposition du drone de façon à lui permettre de se localiser et de localiser un objet au sol. (Mkrtchyan et al., 2009) utilise des carrés noirs sur un plan pour localiser le drone. (Teuliere et al., 2010) propose une approche basée estimation pour drone, à partir d'un modèle tridimensionnel des bords de l'environnement du drone. (Martínez et al., 2011) repose sur un modèle de terrain d'atterrissage connu, plan, et comparé avec l'image courante. On suppose pouvoir en extraire les informations de pose. Dans (Bourdis et al., 2012), un modèle 3D de l'environnement est exploité dans une structure de filtre de Kalman étendu pour extraire la pose du drone. (Preucil et al., 2012) s'inscrit dans le contexte où le drone a dans une première phase été conduit à travers un environnement le long d'une trajectoire qu'il devra ensuite suivre de façon autonome en reconnaissant les amers localisés lors du premier passage. (Ordaz et al., 2013) s'intéresse à la question du retard des informations de position, qu'ils proviennent du GPS ou de capteurs visuels, et propose une technique de propagation d'état permettant de compenser ces retards.

### 1.3.1.2 Connaissance partielle de l'environnement

(Shakernia, 1999) considère le cas d'un quadrirotor atterrissant grâce aux informations visuelles, qui sont exploitées pour estimer l'état du drone relativement au terrain d'atterrissage par décomposition de la matrice essentielle différentielle (dérivée de la matrice homographique). On peut noter que dans ce travail, les seuls autres capteurs exploités sont les accéléromètres. (Sharp et al., 2001) relève d'une approche similaire. (Shakernia et al., 1999) calcule le mouvement de la caméra à partir de la matrice essentielle sur des amers pris sur une surface plane. Dans un même contexte de surface observée plane, (Shakernia et al., 2002) exploite quant à lui la déficience de rang de la matrice dite des vues multiples afin d'en extraire l'information de pose. Dans (Saripalli et al., 2003) et (Saripalli et al., ), outre l'hypothèse de sol plan, l'hélicoptère est supposé pointer la caméra perpendiculairement à celui-ci ; l'étude des moments invariants d'objets dans l'image permet de résoudre le problème d'estimation de pose. Toujours sous hypothèse de sol plan, (Z.Yu et al., 2007) dispose d'une méthode pour trouver le plan moyen des amers observés dans l'image, et ainsi en déduire l'altitude du drone, ceci pour une application d'atterrissage automatique.

### 1.3.1.3 Environnement inconnu

(Ahrens, 2008; Ahrens et al., 2009) considèrent un engin capable de vol stationnaire observant l'environnement et estimant sa pose au fur et à mesure par une technique de moindres carrés sur ce qu'observe la caméra, ce qui lui permet de naviguer en sécurité dans un bâtiment. Dans (Kendoul et al., 2009), le mouvement du drone est calculé à partir du flot optique et des mesures inertielles, sans utiliser le GPS. La technique de "structure from motion" -qui consiste à reconstituer l'environnement à partir de son évolution dans l'image- est exploitée dans (Johnson et al., 2005) pour permettre un atterrissage sur terrain inconnu, même encombré d'obstacles. (Tarhan and Altuğ, 2011) exploite le présupposé de l'existence dans la scène observée de lignes parallèles pour déterminer des directions de fuite, et ainsi extraire l'attitude du drone, pour une caméra catadioptrique.

### 1.3.1.4 SLAM

Le SLAM, ou localisation et cartographie simultanée (Simultaneous Localization And Mapping en anglais), est une technique dans laquelle un véhicule calcule une carte de la zone dans laquelle il évolue, tout en se localisant dans cette carte. Il est la combinaison de deux problèmes :

- le problème de localisation, dans lequel un engin dispose d'une carte de son environnement et cherche à estimer sa position sur la carte et son orientation par rapport à celle-ci ;

- le problème de cartographie, dans lequel un engin possède un moyen de localisation et souhaite construire une carte de son environnement.

Dans le contexte SLAM, l'engin considéré ignore à la fois ce qui l'entoure et où il se trouve. (Artieda et al., 2009) propose une application de SLAM 3D visuel utilisant le drone Colibri (figure 1.18). Dans (Caballero et al., 2009), une mosaïque stochastique est construite en exploitant l'homographie image par image. (Blösch et al., 2010) se présente comme le premier travail permettant à un drone de naviguer de façon autonome dans un environnement inconnu et non structuré, grâce à une caméra pointée au Nadir et un SLAM visuel. (Frew et al., 2006) est une manière de SLAM à base de filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman Filter) pour un avion navigant en milieu encombré d'arbres, avec cette difficulté particulière que seules des mesures de direction des obstacles sont disponibles en plus des mesures inertielles.



FIGURE 1.18 – Le drone Colibri utilisé pour une application de SLAM présentée dans (Artieda et al., 2009)

### 1.3.1.5 Caméra(s) au sol

Dans la succession de travaux (Altuğ et al., 2002), (Altuğ et al., 2003), (Altuğ and Taylor, 2004) et (Altuğ et al., 2005) les auteurs proposent une approche en utilisant deux caméras, une positionnée au sol, et l'autre à bord du drone. Dans (Rudol et al., 2008), c'est un robot roulant muni d'une caméra qui observe un drone sur lequel des LEDs ont été disposées, permettant ainsi une estimation de sa pose. (Kim et al., 2010) se base sur un fonctionnement proche, mais avec à nouveau une caméra fixe au sol. (Martínez et al., 2011), déjà cité, propose aussi une technique utilisant une caméra externe. Un ensemble de caméras fixes observant un drone muni de marqueurs est proposé par (Oh et al., 2011).

### 1.3.2 Guidage référencé vision

Dans cette partie, on présente les travaux de guidage référencé vision, c'est-à-dire les travaux dans lesquels les informations visuelles sont exploitées pour calculer des consignes de vitesse (typiquement, de vitesse linéaire et angulaire). Ces consignes sont ou bien réalisées par une loi de commande de bas niveau qui n'a pas de caractère spécifique vision, ou bien le modèle descriptif du système suppose que cette vitesse est elle-même l'entrée de commande, ce qui représente en général une hypothèse simplificatrice.

**Suivi de structures linéaires** Une première série de travaux concerne le suivi de structures linéaires, en particulier l'atterrissage basé vision. Dans (Rathinam et al., 2005), un drone avion est guidé à travers les images pour suivre une ligne courbe observée au sol (figure 1.19). Une approche pour détecter les structures linéaires dans l'image est proposée; le modèle avion est extrêmement simple, piloté en vitesse angulaire. (Mills et al., 2011) s'intéresse aussi à une application de suivi de structures linéaires pour avions, où est suggérée l'idée de réaliser des manœuvres de skid-to-turn au lieu du classique bank-to-turn, afin de maintenir la caméra pointée au nadir qui peut ainsi continuer à observer le sol. Dans (Kummer et al., 2011), un algorithme de guidage pour l'atterrissage d'un drone avion est proposé, grâce à la présence d'une sphère de couleur localisée en bord de piste. Des angles de tangage et roulis de référence sont calculés de façon simple à partir de son déplacement dans l'image.

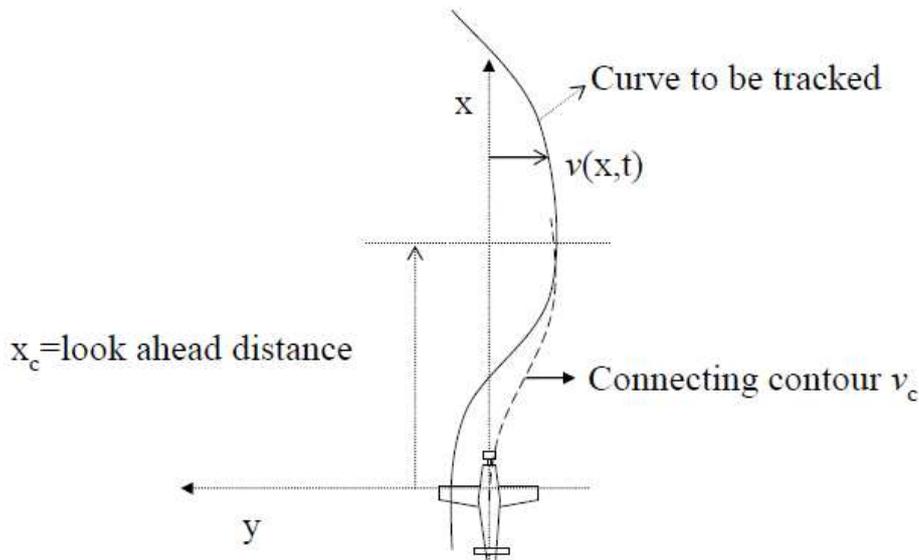


FIGURE 1.19 – Le schéma de suivi de structure linéaire par un avion considéré dans (Rathinam et al., 2005)

**Maintien du stationnaire** Une autre catégorie de travaux propose des techniques pour maintenir un drone en stationnaire. (Mori et al., 2007) permet de maintenir un hélicoptère en stationnaire au-dessus d'un hélipad en calculant la distance de l'hélipad au centre de l'image et en transformant cette distance en une consigne de vitesse. Dans (Campoy et al., 2009), un contrôleur par boucles imbriquées est proposé : alors que la vision fournit une référence de guidage, un contrôleur réalise ces consignes de vitesse, et un autre, celles de position. Dans (Mcfadyen et al., 2012), la vitesse angulaire est calculée de façon à éviter des obstacles. (Lee and Kim, 2010a) propose un algorithme de guidage adaptatif pour un drone quadrirotor basé vision, de façon à maintenir le champ de vue de la caméra.

**Biomimétisme** Une catégorie importante de travaux relève du biomimétisme : ainsi, de (Franceschini, 2004) dans lequel, par analogie avec le comportement des mouches, des techniques de guidage basées flot optique sont proposées. De façon similaire, dans (Muratet et al., 2005), un guidage basé flot optique est exploité pour éviter des obstacles, et l'on y montre que le drone adopte une attitude prudente se tenant éloigné des deux parois. Dans cette veine, (Han et al., 2009) propose une plate-forme d'essais et comparaisons d'algorithmes basés sur les mécanismes à l'oeuvre chez les insectes. Dans un cadre différent, (Manecy et al., 2013) propose de découpler la vision du système de drone, en plaçant la caméra sur un système capable de l'orienter indépendamment de l'engin, et d'ainsi maintenir une observation permanente d'une zone donnée même avec un faible angle de vision.

**Utilisations particulières** Quelques travaux enfin concernent des utilisations un peu différentes des caméras. Ainsi, (Kuntz and Oh, 2008) et (Kuntz and Oh, 2009) proposent d'utiliser une caméra pour localiser une charge utile à embarquer dans l'hélicoptère et corriger les mouvements de celui-ci en fonction de celle-là (voir figure 1.20). Dans (Mejías et al., 2006), des objets d'intérêts sont déterminés dans l'image, et leur extraction donne lieu à des consignes de vitesse. De même, dans (Yoshihata et al., 2007) et (Iwatani and Hashimoto, 2008), cela est proposé d'une façon particulière puisque les caméras sont fixées au sol. L'étude s'attache à proposer une méthode de basculement entre signaux lors des occlusions de caméras.

L'objectif de cette thèse au contraire était de proposer des lois de pilotage basées vision, comme les travaux de la section suivante.

### 1.3.3 Approches directes

Dans cette section, on présente les travaux les plus proches de l'objet de cette thèse : ceux qui traitent de pilotage référencé vision pour drones VTOLs. Quelques approches ont en effet été proposées depuis deux décennies pour uti-



FIGURE 1.20 – Transport de charge par hélicoptère étudié dans (Kuntz and Oh, 2009)

liser la vision directement au niveau de la boucle de pilotage. On présente d'abord un certain nombre de travaux qui ont exploré différents aspects de la question. Puis l'on s'attache à trois équipes de chercheurs qui ont particulièrement étudié cette problématique :

- T. Hamel, qui a beaucoup exploité les structures de passivité des modèles étudiés, avec en particulier une exploitation du backstepping ;
- F. Chaumette, dont les études s'intéressent beaucoup à l'image et aux informations qui peuvent en être retirées ;
- P. Rives, qui exploite fréquemment des approches optimales sur le linéarisé des modèles.

Les travaux de cette thèse se rapprochent beaucoup de la première de ces trois approches.

### 1.3.3.1 Quelques travaux en asservissement visuel direct

Dans (Zhang and Ostrowski, 1999), les auteurs parviennent à appliquer les outils de commande des systèmes mécaniques au problème du pilotage d'un dirigeable muni d'une caméra vidéo, en écrivant ce dernier système sous une forme lagrangienne où interviennent les éléments de l'image. Ils étendent ainsi des résultats plus anciens basés uniquement sur la cinématique des véhicules considérés. Cette étude cependant n'inclut pas le cas sous-actionné. (Erginer and Altuğ, 2007) propose le pilotage référencé vision d'un quadrirotor en exploitant des disques de couleur disposés sur l'aire d'atterrissage. Des lois de commande simples sont définies directement à partir d'informations calculées

dans l'image en exploitant l'espace connu entre les sphères de couleur. Aucune preuve de stabilité ou performance n'est fournie. (Liu et al., 2008) est une approche adaptative pour le pilotage des hélicoptères dans laquelle une matrice d'interaction indépendante de la profondeur est exploitée, et où un vecteur d'erreur linéaire en les paramètres inconnus est défini, sur lequel un algorithme adaptatif est défini. (Fan et al., 2009) s'appuie sur le backstepping pour définir une loi de commande dépendant des paramètres inconnus tels que les paramètres caméra ou la position 3D de l'amer observé, en ayant pris soin de conserver à part la profondeur de champ, qui est inobservable. Une technique adaptative d'estimation de ces paramètres est proposée, qui nécessite un grand nombre d'images pour les estimer. (Peliti et al., 2012) s'intéresse au contrôle d'un avion, avec un modèle dynamique simplifié, sur une trajectoire circulaire autour d'un point d'intérêt, suivie grâce à une approche par backstepping. La matrice jacobienne est pour cela supposée connue, mais les auteurs font référence à une étude permettant de s'en affranchir (Luca et al., 2008). (Lee and Kim, 2010b) propose une approche de commande adaptative basée image : le gain est adapté en vol afin d'obtenir la stabilité souhaitée. (Rifai et al., 2011) et (Rifai et al., 2012) sont des approches directes pour des systèmes à ailes battantes, basées sur un moyennage temporel des équations. (Kendoul et al., 2008a) est une approche adaptative.

### 1.3.3.2 Les travaux autour de T. Hamel

Les travaux réalisés autour de T. Hamel exploitent les structures de passivité sous-jacentes aux dynamiques étudiées (cf (Mahony and Hamel, 2001)), et les techniques dérivées du backstepping pour calculer une loi de commande. Ces travaux sont très proches de ceux présentés plus loin dans cette thèse. Il s'agit essentiellement dans cette thèse de poursuivre ces travaux dans la direction d'une utilisation d'un nombre minimal de capteurs et d'hypothèses. L'un des premiers travaux de cette série, (Mahony and Hamel, 2001), propose une technique pour piloter une classe de corps rigides sous-actionnés, qui permet de suivre des lignes parallèles dans l'image. La méthode utilise les coordonnées de Plücker et le backstepping qui met en évidence une structure passive. Ce travail sera plus tard étendu dans (Mahony and Hamel, 2005). Dans l'intervalle, (Chriette et al., 2001) explore le cas d'une dynamique des zéros instable, et montre qu'au prix de quelques approximations, la caméra peut être placée de façon à annuler cette dynamique. La profondeur de champ  $y$  est normalisée. (Hamel and Mahony, 2002) exploite ces idées dans le contexte de la stabilisation, sans nécessiter la mesure de la profondeur relative des points observés dans l'image. Les auteurs montrent que seule la géométrie sphérique donne une structure passive avec la fonction de stockage et le taux de fourniture considérés. Des bornes sur la distance à la cible sont utilisées dans cette étude. Une extension au suivi de trajectoires est proposée dans (Hamel et al., 2002), appliquée au cas d'un quadrirotor. D'autres extensions (Hamel and Mahony, 2004;

Hamel and Mahony, 2007), proposent une erreur visuelle définie purement dans l'image, sans recours à des éléments inertiels comme la précédente. Une étude qui fait plus encore écho au présent travail de thèse est rapporté dans (Suter et al., 2002), qui exploite la mesure de la matrice homographique pour les besoins du pilotage référencé vision d'un quadrirotor. A la différence du présent travail, on y suppose que l'axe de la caméra est perpendiculaire au plan objet, ce qui permet d'extraire la pose et d'estimer la profondeur de champ. Une technique de commande basée sur le backstepping est ensuite utilisée, qui s'appuie pour l'étendre sur la technique de commande référencée vision  $2D\frac{1}{2}$ . Un point supplémentaire est ajouté dans (Metni et al., 2003) et (Metni and Hamel, 2007), qui trouve un intérêt applicatif clair : la limitation de l'orientation lors de la tâche de pilotage basé vision. Celle-ci est obtenue en saturant la valeur de l'orientation calculée lors de l'étape correspondante du backstepping.



FIGURE 1.21 – L'inspection de ponts et ouvrages d'art est l'application visée dans (Metni and Hamel, 2007), d'où est tirée cette image

Les dynamiques de translation et d'orientation sont séparées dans (Guenard et al., 2007), avec une technique particulière permettant de compenser le mauvais conditionnement de la jacobienne en introduisant un gain homogène adapté à la sensibilité visuelle des mesures d'erreur. La question de la profondeur de champ est traitée dans (N.Metni and Hamel, 2007), où une approche adaptative permet de s'en affranchir. (Herissé et al., 2012) exploite le flot optique pour maintenir un drone à distance constante d'une plate-forme mouvante, ou pour réaliser un atterrissage sur une telle plate-forme. Les travaux les plus récents dans cette direction sont ceux de F. Le Bras, en particulier (Le Bras et al., 2008; Le Bras et al., 2010), qui sont certainement les plus proches de l'objet de cette

thèse. L'étude (Le Bras et al., 2006) propose la commande d'un drone VTOL à flux orientable basé sur les informations visuelles ; la structure de commande est adaptative et non-linéaire, et toutes les informations utilisées proviennent de l'image : moment sphérique du premier ordre pour la position, flot optique pour la vitesse. L'ignorance de la profondeur de champ de la scène est traité par une approche adaptative. La normale au plan objet est supposée connue. (Le Bras et al., 2007) définit la notion de longueur visuelle, distance entre deux points construits à partir de l'image et de données inertielles, et qui constitue un substitut possible à la profondeur inertielle. Pour éviter la nécessité d'une mesure de vitesse, une méthode basée sur des états virtuels est proposée. En revanche, la poussée nécessite d'être mesurée précisément. Pour s'affranchir de cette dernière contrainte, (Le Bras et al., 2008) prolonge le précédent avec un observateur de poussée. (Le Bras et al., 2010) est sans doute l'étude la plus proche du présent travail : supposant que la normale au plan objet dans le repère engin peut être extraite de l'image, une approche de commande basée vision pour drone utilisant des images sphériques est proposée. Cette approche comporte à nouveau un observateur non-linéaire. A côté de ces études, des travaux sur les ailes fixes ont été réalisés. Ainsi, dans (Le Bras et al., 2009a), une approche complète pour piloter un avion lors de la phase d'atterrissage est proposée. Les informations visuelles sont utilisées par la boucle de guidage, alors qu'une boucle interne, basée sur les mesures inertielles, régule les angles d'attaque et de dérapage. Dans (Le Bras et al., 2009b), une technique est proposée pour faire réaliser une trajectoire circulaire à un avion autour d'un point d'intérêt.

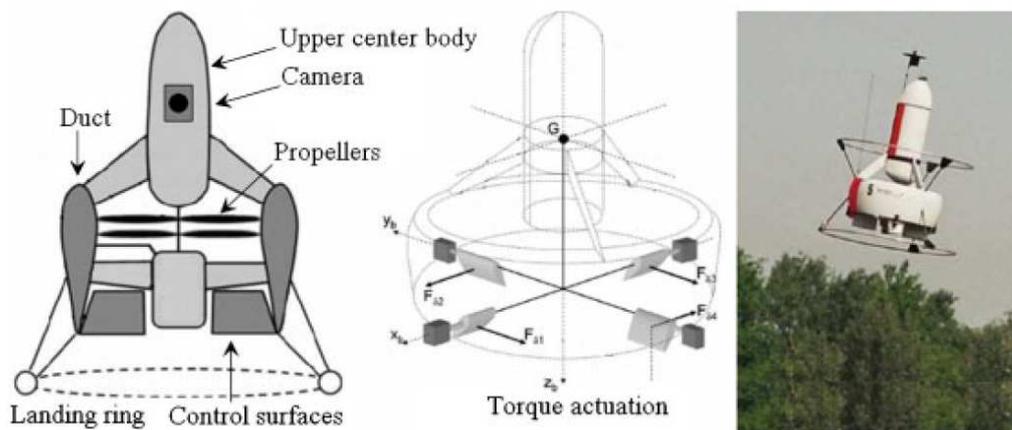


FIGURE 1.22 – Le drone Hover Eye de Bertin Technologies. Figure issue de (Le Bras et al., 2010)

### 1.3.3.3 Travaux autour de F. Chaumette

Les travaux réalisés autour de F. Chaumette, s'est davantage intéressée à l'exploitation d'éléments particuliers dans l'image. Ainsi, dans les travaux d'O. Bourquardez (Bourquardez, 2008), différents types de projection, de moments et d'indices visuels ont été exploités pour la stabilisation d'un quadricoptère et pour l'atterrissage d'un avion. (Bourquardez et al., 2008) et (Bourquardez et al., 2009) proposent ainsi des lois de commande pour le quadricoptère, en comparant l'utilisation des moments dans des images perspectives (ordre 0 et 1, qui découplent translation et rotation) et sphériques (ordre 1, avec la même propriété et la passivité). Avec la caméra perspective, l'axe caméra étant supposé perpendiculaire à l'image, les équations sont très simples et permettent de définir une loi de commande efficace. En géométrie sphérique, différentes commandes sont proposées qui stabilisent asymptotiquement le drone. (Bourquardez and Chaumette, 2007a) et (Bourquardez and Chaumette, 2007b) concernent l'atterrissage automatique d'un avion. (Bourquardez and Chaumette, 2007a) utilise les deux bords de piste et la ligne centrale (comme (Rives and Azinheira, 2002) cité plus loin) pour aligner l'avion en définissant des indices visuels à partir de leurs orientations de façon à obtenir un découplage : les quatre indices visuels ainsi définis sont approximativement proportionnels aux erreurs latérale et verticale, et aux angles de tangage et de cap, ce qui permet ensuite de définir une loi simple en fonction de ces indices. (Bourquardez and Chaumette, 2007b) concerne l'atterrissage, et définit des trajectoires polynomiales pour rejoindre la pente de descente. Dans (Coutard et al., 2011), c'est l'atterrissage automatique d'un drone à ailes fixes sur un porte-avion qui est étudié. Enfin, (Ozawa and Chaumette, 2011) considère le pilotage d'un quadricoptère à partir des moments dans l'image en projection perspective. Le caractère non minimum de phase d'un retour positif sur l'image est traité à l'aide d'un ressort virtuel.

### 1.3.3.4 Travaux autour de P. Rives

Les travaux réalisés autour de P. Rives, explore différents aspects, en particulier de commande optimale basée vision, spécialement pour le suivi de lignes et l'atterrissage. Ainsi, dans (Rives and Azinheira, 2002), des approches PBVS et IBVS sont proposées pour l'atterrissage basé vision d'un drone à ailes fixes en observant en coordonnées sphériques trois lignes parallèles représentant une piste. Elles utilisent un modèle d'avion linéarisé et une technique  $H_\infty$  à sensibilité mixte. Dans l'approche PBVS, une mesure de distances dans l'image permet d'estimer  $\theta$  et  $\psi$ , puis les éléments utilisables dans le contrôleur, les autres étant issus des autres capteurs embarqués. Dans l'approche IBVS, une trajectoire de descente étant donnée, l'évolution des droites dans l'image est calculée, et une approche optimale (LQR avec intégrateur) est proposée. (Silveira et al., 2003) prolonge cette étude, avec l'utilisation de deux lignes parallèles

seulement, et de capteurs (vitesse, cap) pour compléter les informations ainsi ôtées, toujours par une approche LQR sur le modèle linéarisé. Dans (Rives and Azinheira, 2004), dans la même veine, il s'agit de suivre une route. De nouveaux paramètres sont utilisés : les coordonnées du point de fuite, et les paramètres de la ligne de fuite, qui parviennent à découpler les mouvements de rotation et translation. Cette dernière approche est ensuite adaptée pour permettre l'atterrissage automatique d'un avion en prenant en compte l'effet du vent dans (Azinheira and Rives, 2008). Enfin, une étude intéressante pour notre objet est (Gonçalves et al., 2009), qui en effet exploite la matrice homographique dans une boucle de pilotage pour réaliser l'atterrissage automatique d'un avion basé vision. Deux approches sont proposées : PBVS, où la normale au plan est supposée connue pour extraire la pose de l'homographie, et IBVS où l'homographie est linéarisée et utilisée dans un retour proportionnel-dérivé.

### 1.3.3.5 Les travaux de cette thèse

Cette thèse se situe dans la prolongation de la première série, avec pour angle d'approche une utilisation d'un nombre minimum de capteurs.

## 1.4 Objectif de la thèse

En regard de ces travaux qui ont été introduits comme un panorama d'études ayant été menés, l'objectif de cette thèse est l'étude de la commande référencée vision pour drones VTOLs. Il s'agit de prendre en compte la dynamique de ces engins, ainsi que leur caractère sous-actionné, en utilisant un ensemble minimaliste de capteurs.

Pour reprendre certains des thèmes abordés dans ce chapitre :

- les aspects stabilité et robustesse sont au cœur de la démarche. L'aspect robustesse est une façon de prendre en compte les problèmes liés aux erreurs de calibration.
- les problématiques de performance ont été abordées dans un second temps.
- la question du découplage entre rotations et translations ne se pose pas puisque le principe de pilotage de ces engins impose d'utiliser la rotation pour obtenir une translation.
- la profondeur de champ est un paramètre inconnu dont il faut gérer l'incertitude.
- c'est la matrice homographique qui est exploitée, mais sans supposer connue la normale à l'objet plan observé : c'est pourquoi on n'extrait pas de cette matrice les informations de pose.
- le formalisme de Lyapunov est retenu comme permettant de traiter ces problèmes comme on le verra.

Ces travaux théoriques visant également à être implémentés à bord des hélicoptères de l'Onera (figure 1.23).



FIGURE 1.23 – Le drone hélicoptère Vario Turbo de l'Onera.

## Chapitre 2

# Stabilisation en un point par des approches linéaires

*Tout ce qui survient par hasard est instable :  
ce qui s'est élevé le plus haut est le plus exposé à tomber.*

Sénèque

### Résumé

Ce chapitre étudie la stabilisation d'un drone observant une cible plane sous l'hypothèse de linéarité du comportement. On considère donc le cas de faibles déplacements, et de petits angles d'orientation, c'est-à-dire que l'écart entre la pose courante et celle désirée est petit.

A partir de la matrice homographique, on définit un vecteur d'erreur qui est en bijection avec l'espace des poses. On développe ensuite deux lois de commande qui utilisent ce vecteur d'erreur et sont valables l'une dans le cas d'une cible non horizontale, l'autre dans le cas d'une cible non verticale. Le cas d'un mésalignement entre les repères engin et caméra est ensuite considéré, qui donne lieu à une définition modifiée du vecteur d'erreur. La situation d'une dynamique non modélisée (cas du vent) est ensuite considérée : on montre qu'en utilisant les mesures accélérométriques, on peut définir une loi de commande permettant de rejeter la composante constante du vent.

Outre ces résultats qui donnent des conditions de stabilité, on propose une heuristique de réglage des gains pour prendre en compte des critères de performance. Les outils de la  $\mu$ -analyse et de la synthèse  $H_\infty$  structurée sont ensuite mis en œuvre pour l'analyse de robustesse et le calcul de gains assurant cette même robustesse.

Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à deux publications : (de Plinval et al., 2011) et (de Plinval et al., 2013).

## Introduction

**Position du problème** Le problème étudié dans ce chapitre correspond à un scénario typique de vol de drone. Le drone, muni d'une caméra vidéo, évolue en face d'une cible plane par rapport à laquelle il s'agit de le stabiliser.

Une image de référence de cette cible plane  $\mathcal{T}$  est supposée disponible, image qui a été obtenue depuis une certaine "pose" -rappelons que ce mot regroupe la position et l'orientation. Cette pose est appelée pose de référence et on lui associe le repère de référence  $\mathcal{R}^*$ . L'objectif de commande consiste à stabiliser le drone à la pose de référence en comparant à chaque instant l'image courante obtenue par la caméra vidéo avec l'image de référence.

Les figures 2.1 et 2.2 représentent cette situation, dans deux configurations dont la distinction sera établie plus loin dans ce chapitre (section 2.5) : le cas d'une cible "non verticale" et le cas d'une cible "non horizontale".

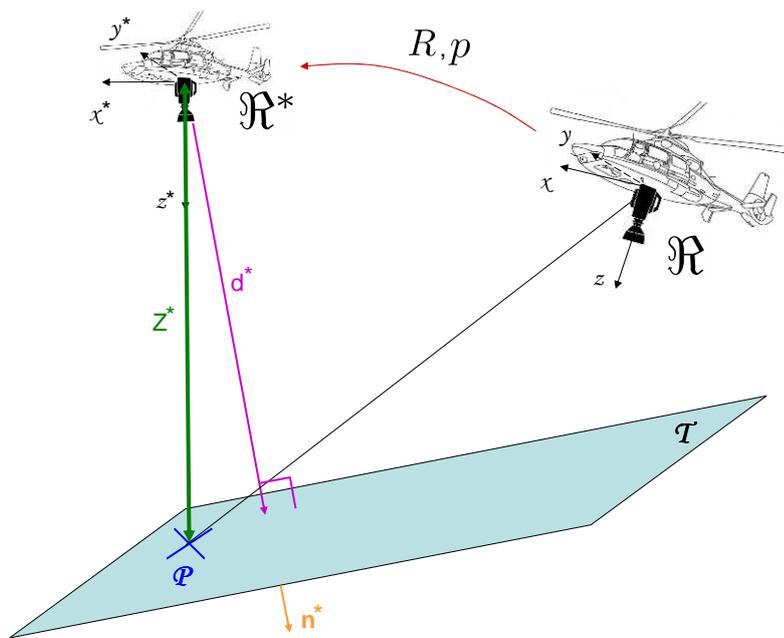


FIGURE 2.1 – Représentation du problème considéré : stabilisation vis-à-vis d'une cible plane, cible non verticale

**Hypothèses** La singularité de l'approche proposée dans cette thèse, qui la démarque de l'état de l'art présenté au chapitre 1, réside dans son aspect minimaliste : on ne suppose pas connaître l'orientation ou la taille de la cible, ni le vecteur normal à sa surface. On la suppose seulement plane et soit "non verticale" soit "non horizontale". La distance à la cible est également une grandeur inconnue, même si une borne inférieure sur cette distance doit être supposée

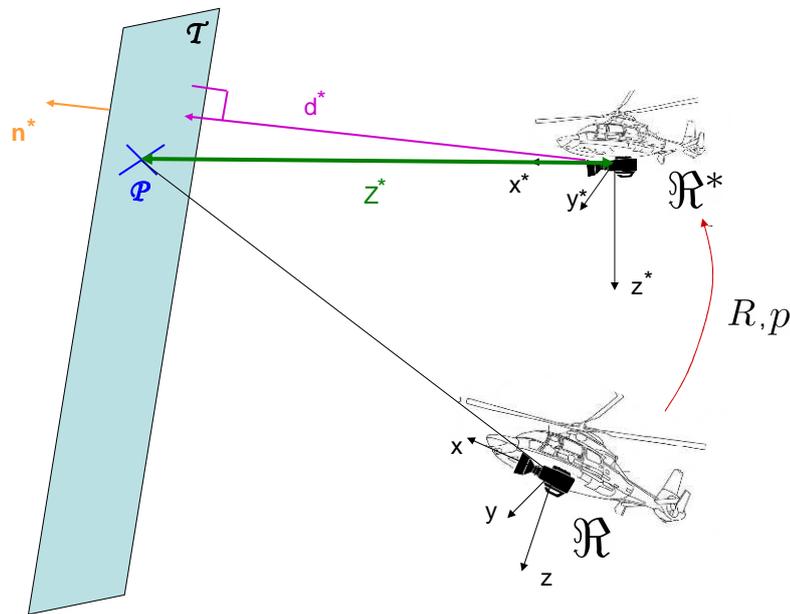


FIGURE 2.2 – Représentation du problème considéré : stabilisation vis-à-vis d'une cible plane, cible non horizontale

connue pour obtenir un résultat de stabilité. Cette borne peut-être très grossière. On verra également que connaître un encadrement sur cette distance permet en outre d'intégrer des éléments de performance dans la définition de la loi de commande.

**Cette absence d'hypothèse est un élément que nous regardons comme essentiel dans ce travail, en ce qu'elle le distingue des travaux précédents.**

Nous ferons cependant l'hypothèse habituelle bien qu'évidemment restrictive que la cible ne sort pas du champ de vision au court du mouvement de l'engin. Dans le cas de stabilisation considéré dans ce chapitre et le suivant, cette hypothèse se justifie en partie par le caractère essentiellement local du résultat proposé, qui concerne la stabilisation en un point -qui plus est avec une approche de commande basée sur l'analyse du linéarisé du système dans le présent chapitre.

Le système considéré étant *sous-actionné*, nous prenons également comme hypothèse que la pose de référence correspond à une orientation d'équilibre, faute de quoi la loi de commande serait incapable de stabiliser asymptotiquement ce point. Ainsi, la stabilisation d'un hélicoptère en l'absence de vent réclame que la direction de poussée du rotor soit verticale à la pose de référence (en négligeant la poussée latérale du rotor anti-couple pour un hélicoptère classique qui implique en toute rigueur un roulis non nul à l'équilibre; pour un quadrirotor, l'équilibre est obtenu lorsque l'engin est à horizontal), de façon

à compenser la gravité sans engendrer de mouvement latéral. En présence de vent, cette direction doit être modifiée pour le compenser. Cette hypothèse fixe à la pose de référence la valeur de deux degrés de liberté en rotation.

**Démarche retenue** L'approche retenue pour aborder ce problème est d'utiliser la matrice homographique (cf chapitre 1). Celle-ci contient en effet toute l'information relative à la transformation associée à deux images d'une même cible plane observée de deux points de vue distincts, et ceci sans hypothèse supplémentaire. D'un point de vue applicatif, c'est une grandeur qu'il est possible de calculer en temps réel à une fréquence compatible avec le pilotage d'un petit drone (voir (Malis et al., 2009) où est proposé un algorithme d'estimation de cette matrice, ou encore (Silveira et al., 2008) qui exploite l'homographie), et qu'il est possible de transmettre rapidement puisqu'elle représente une quantité négligeable de données -à la différence par exemple d'une image complète. De ce fait, elle représente un candidat naturel pour encoder l'information obtenue à partir de la comparaison entre l'image de référence et l'image courante.

Le problème étudié ici revient donc à exploiter une information agrégée -la matrice homographique  $H$ , qui intègre des informations de translation et de rotation- pour piloter un système sous-actionné. Notons que cette approche est donc contraire sur ce point à celles adoptées couramment (par exemple dans (Fang et al., 2002b) ou (Benhimane et al., 2005)) qui consistent à supposer possible, au prix d'hypothèses supplémentaires, l'extraction des informations de pose à partir de l'homographie.

L'hypothèse de linéarité faite dans ce chapitre est justifiée quand les mouvements du drone sont lents et de faibles amplitudes. On peut alors linéariser les équations de la dynamique. En retour, cette approche n'est valide que pour de tels mouvements, ce qui justifie le chapitre complémentaire qui suit (chapitre 3), relatif à la stabilisation non-linéaire.

## 2.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, on considère essentiellement un engin modélisé par les équations (1.16). Les méthodes utilisées sont linéaires et sont donc appliquées au linéarisé de ce modèle, qui est donné par (1.18). Enfin, deux cas particuliers où des modèles différents sont étudiés :

- en section 2.2 on rappelle un résultat précédent qui s'applique à un modèle plus simple que l'on y définit.
- en section 2.7, on propose une loi de commande permettant de rejeter une dynamique non modélisée comme le vent. Un modèle est donc défini pour cette situation.

On cherche à stabiliser le drone à sa pose de référence à partir de la matrice homographique  $H$  (voir sa définition en (1.9)). Stabiliser le drone à sa pose de référence, c'est chercher à faire tendre  $H$  vers l'identité. On utilise en outre les

mesures inertielles (vitesses angulaire, accélération). Afin de poser plus clairement le problème, on commence par définir un vecteur, dit vecteur d'erreur, dont la mise à zéro correspond à l'objectif de commande. On définit ce vecteur dans la section suivante, vecteur qui s'exprime en fonction de la matrice homographique et qui est en relation difféomorphique avec l'espace des poses. Cette définition est un premier pas vers la solution, car elle permet de palier en partie l'absence de mesures de position / orientation en recourant à ce vecteur qui s'en rapproche. Restera dans la suite de ce chapitre à définir une loi de commande qui exploite ce vecteur d'erreur et corrige la non coïncidence de ce dernier avec les vraies position / orientation du drone.

Notons à ce stade qu'il a été choisi de ne pas avoir recours à une approche  $H_\infty$  classique pour maintenir une expression analytique du système, ce qui permet en particulier, comme on le verra, de proposer une heuristique de réglage de gains permettant d'obtenir une performance satisfaisante en boucle fermée. On abordera cependant plus loin l'apport complémentaire de ce type d'approches (sections 2.9 et 2.10).

## 2.2 Première définition d'un vecteur d'erreur

*La science, mon garçon, est faite d'erreurs,  
mais d'erreurs qu'il est bon de commettre,  
car elles mènent peu à peu à la vérité.*

Jules Verne

Dans un premier temps, nous supposons que les repères associés à la caméra vidéo et à l'engin coïncident. Ce faisant, nous gardons présent à l'esprit les observations de (Chriette et al., 2001) sur le caractère non-minimum de phase en fonction de la position de la caméra. La section suivante considère le cas général.

Les notations suivantes sont utilisées pour décrire la scène  $\mathcal{T}$  (voir les figures 2.1 et 2.2) :

- $\chi^*$ ,  $\chi$  sont les coordonnées d'un point d'intérêt  $\mathcal{P}$  situé sur la cible plane, exprimées respectivement dans les repères de référence et courant.
- $n^*$  est le vecteur unitaire définissant la normale à l'objet plan exprimé dans le repère de référence ;  $d^*$  est la distance entre ce plan et le centre optique de la caméra.  $Z^*$  est la troisième coordonnée du point  $\mathcal{P}$  dans le repère de référence.

Dans (Benhimane and Malis, 2007), la matrice  $H$  est utilisée pour définir un vecteur d'erreur et une loi de commande associée, à partir du modèle cinématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{p} &= v \\ \dot{\Theta} &= \omega \\ \Theta &\triangleq [\phi, \theta, \psi]^T \end{cases} \quad (2.1)$$

dans lequel les vitesses linéaire  $v$  et angulaire  $\omega$  sont prises comme les entrées de commande. Le vecteur d'erreur défini reposait sur le résultat suivant :

**Proposition 1** (Vecteur d'erreur)

(Benhimane and Malis, 2007, Sec. 4) Supposons que l'axe optique de la caméra corresponde à l'axe  $z$  du repère engin. Soit  $\chi^*$  les coordonnées d'un point  $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ , exprimé dans le repère de référence  $\mathfrak{R}^*$ , et  $m^* = \frac{1}{z^*}\chi^*$  les coordonnées normalisées associées. Soit  $e \in \mathbb{R}^6$  le vecteur d'erreur défini selon :

$$e = \begin{pmatrix} e_p \\ e_\Theta \end{pmatrix}, \quad e_p = (I - H)m^*, \quad e_\Theta = \text{vex}(H^T - H) \quad (2.2)$$

où  $\text{vex}$  est l'opérateur inverse d'une fonction associant un vecteur à une matrice antisymétrique :  $\text{vex}(S(x)) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ . Alors,

1.  $(p, R) \mapsto e$  définit un difféomorphisme local autour de  $(p, R) = (0, I_3)$ . En particulier,  $e = 0$  ssi  $(p, R) = (0, I_3)$ .
2. La loi de commande cinématique :

$$v = -\lambda_p e_p, \quad \omega = -\lambda_\Theta e_\Theta \quad (2.3)$$

où  $\lambda_p, \lambda_\Theta > 0$  rend  $(p, R) = (0, I_3)$  localement asymptotiquement stable.  $\triangle$

Remarques :

1. l'opérateur  $\text{vex}$  est linéaire. Rappelons que dans le présent chapitre on analyse le système en boucle fermée avec une hypothèse de linéarité.
2. dans (Benhimane and Malis, 2007),  $e_p$  et  $e_\Theta$  sont définis avec un signe contraire, i.e.  $e_p = (H - I)m^*$ ,  $e_\Theta = \text{vex}(H - H^T)$ . Le choix retenu ici est mieux adapté aux définitions de  $v$  et  $\omega$  dans (1.16).
3. la seule contrainte sur  $m^*$  est d'être un vecteur projectif, i.e.,  $m_3^* = 1$ .
4. il existe une contrainte implicite sur l'orientation de la cible, i.e.  $n_3^* > 0$ , contrainte qui correspond au fait que le demi-axe optique de la caméra croise le plan de la cible. Hypothèse de bon sens, du reste.

## 2.3 Calcul de la matrice homographique $H$ dans le cas d'une erreur de calage de la caméra

Nous calculons dans cette section la valeur de la matrice homographique  $H$  lorsqu'une erreur de calage de la caméra est présente. Ce calcul est pris en

compte dans la définition d'un vecteur d'erreur prenant ce cas en compte, dans la section suivante. Notons  $\chi_c^*$  (resp.  $\chi_c$ ) les coordonnées de  $P$  dans le repère caméra de référence (resp. dans le repère caméra courant). On a

$$\begin{cases} \chi_c &= R_c \chi + p_c \\ \chi_c^* &= R_c \chi^* + p_c \end{cases} \quad (2.4)$$

avec  $R_c$  et  $p_c$  la matrice de rotation et le vecteur de translation du repère engin au repère caméra. En accord avec une hypothèse standard en commande référencée vision, on suppose dans ces travaux que l'axe optique de la caméra correspond à l'axe z du repère caméra. Il vient de l'équation (2.4) et de (1.1) que

$$\begin{aligned} \chi_c &= R_c \chi + p_c \\ &= R_c [R^T \chi^* - R^T p] + p_c \\ &= R_c [R^T (R_c^T \chi_c^* - R_c^T p_c) - R^T p] + p_c \\ &= R_c R^T R_c^T \chi_c^* - [R_c R^T p + (R_c R^T R_c^T - I_3) p_c] \end{aligned} \quad (2.5)$$

La matrice homographique est alors donnée par (comparer avec (1.6)) :

$$H_c = R_c R^T R_c^T - \frac{1}{d^*} [R_c R^T p + (R_c R^T R_c^T - I_3) p_c] n_c^{*T} \quad (2.6)$$

avec  $n_c^* = R_c n^*$  l'expression de la normale à la cible dans le repère caméra de référence. Une approximation de  $H_c$  autour de la matrice identité fournit :

$$H_c = I - S(R_c \Theta) - \frac{1}{d^*} R_c (p + S(R_c^T p_c) \Theta) n_c^{*T} + O^2(p, \Theta) \quad (2.7)$$

avec  $\Theta$  n'importe quelle paramétrisation de la matrice de rotation  $R$  telle que  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  autour de  $R = I_3$  (par exemple les angles d'Euler).

## 2.4 Résultat de base

Le résultat présenté dans ce paragraphe peut être entendu comme une extension de la Proposition 1 pour une utilisation dans le cadre du modèle défini en (1.16). Cette extension pose un certain nombre de difficultés. En premier lieu, la commande n'est plus un vecteur de dimension 6 contenant les vitesses linéaires et angulaire  $(v, \omega)$ . Il s'agit désormais d'un vecteur de taille 4 constitué de la poussée  $T$  et du vecteur de couple  $\Gamma$ , lequel engendre la mise en rotation de l'engin. Il faut ainsi prendre en compte le sous-actionnement du système, et son absence de symétrie suivant les dimensions de l'espace d'état : le sous-actionnement et l'action de la gravité impliquent des différences entre les dynamiques horizontales et verticale. De telles différences ne sont pas présentes dans la synthèse d'une loi de commande basée sur un système cinématique (holonome). Une autre différence réside dans l'absence de mesure de la vitesse linéaire  $v$  dans le résultat présenté ici.

En premier lieu, un nouveau vecteur d'erreur est défini, lequel est essentiel dans la synthèse d'une loi de commande stabilisante que l'on présente plus loin.

**Proposition 2** (Nouveau vecteur d'erreur)

Notons  $b_1, b_2, b_3$  les vecteurs canoniques de  $\mathbb{R}^3$ , et  $m_{c,k}^* = R_c b_k$  pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Notons  $n^* = (n_1^*, n_2^*, n_3^*)^T$  et  $I_3$  la matrice identité de taille  $3 \times 3$ . Soit (à comparer avec (2.2))

$$e^k = \begin{pmatrix} e_p^k \\ e_\Theta^k \end{pmatrix}, \quad e_p^k = (I - H_c)m_{c,k}^*, \quad e_\Theta^k = \text{vex}(H_c^T - H_c)$$

et

$$\bar{e}^k = AM^k e^k, \quad A = \begin{pmatrix} R_c^T & 0_3 \\ 0_3 & R_c^T \end{pmatrix}, \quad M^k = \begin{pmatrix} 2I_3 & S(m_{c,k}^*) \\ -S(m_{c,k}^*) & I_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Soit  $\Theta \in \mathbb{R}^3$  une paramétrisation quelconque de la matrice de rotation  $R$  telle que  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  autour de  $R = I_3$  (e.g., les angles d'Euler). Alors,

1. Dans un voisinage de  $(p, R) = (0, I_3)$ ,

$$\bar{e}^k = L^k \begin{pmatrix} p + S(R_c^T p_c) \\ \Theta \end{pmatrix} + O^2(p, \Theta), \quad L^k = \begin{pmatrix} L_p^k & 0_3 \\ L_{\Theta p}^k & L_\Theta^k \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

avec

$$L_p^k = \frac{1}{d^*} (n_k^* I_3 + n^* b_k^T), \quad L_\Theta^k = 2I_3 + S(b_k)^2, \quad L_{\Theta p}^k = \frac{1}{d^*} S(n^* - n_k^* b_k) \quad (2.10)$$

et  $O^2$  un terme d'ordre au moins deux.

2. Si  $n_k^* \neq 0$ , alors  $(p, R) \mapsto \bar{e}^k$  définit un difféomorphisme local autour de  $(p, R) = (0, I_3)$ . En particulier,  $\bar{e}^k = 0$  si et seulement si  $(p, R) = (0, I_3)$ .  $\triangle$

La preuve est donnée dans un article reproduit en annexe, section A.5.

Remarques

1. Puisque le vecteur projectif  $m_{c,k}^*$  est à discrétion de l'utilisateur, le choix  $m_{c,k}^* = R_c b_k$  peut toujours être opéré, ce vecteur étant supposé connu. Si  $m_{c,k}^*$  est interprété comme une direction de pointage dans le repère de référence de la caméra, alors cette direction correspond à la direction  $b_k$  dans le repère de référence; il s'agit donc d'un invariant dans le repère inertiel : ce vecteur est inchangé, quelle que soit la rotation du repère caméra.

2. Notons que  $L^k$  peut être interprété comme une approximation linéaire à l'origine de la matrice d'interaction associée à  $\bar{e}^k$ .

Supposons que le vecteur de décentrage de la caméra soit nul :  $p_c = 0$ . Alors, l'équation (2.9) illustre l'idée sous-jacente à la définition de  $\bar{e}^k$  : au premier ordre, les composantes  $\bar{e}_1^k, \bar{e}_2^k, \bar{e}_3^k$  renferment la connaissance du vecteur de translation  $p$  uniquement, tandis que les composantes  $\bar{e}_4^k, \bar{e}_5^k, \bar{e}_6^k$  disposent de la connaissance découplée de l'orientation (i.e.  $L_{\Theta}^k$  est diagonale), corrompue cependant par les composantes du vecteur de translation  $p$ . La structure en cascade est ici essentielle dans la technique de commande et d'analyse mise en œuvre dans la suite. L'hypothèse de coïncidence entre le centre de gravité et le foyer de la caméra ( $p_c = 0$ ) n'est pas réaliste en pratique ; en revanche, fixer la caméra à proximité du centre de masse est souvent possible. La définition d'une loi de commande exponentiellement stabilisante pour  $p_c = 0$  certifiera dès lors la stabilité exponentielle pour  $p_c$  suffisamment petit. En conséquence, nous posons dès à présent et pour la suite l'hypothèse suivante, restrictive mais justifiée par les remarques qui précèdent :

**Hypothèse :**  $p_c = 0$ .

L'approche de commande proposée repose sur une propriété de difféomorphisme local entre le vecteur  $\bar{e}^k$  et le vecteur représentant la pose de l'engin. Malheureusement, comme le montre la Proposition 2, cette propriété n'est garantie que si  $n_k^* \neq 0$ . Par exemple, lorsque  $k = 3$  la propriété est garantie dès lors que la cible n'est pas verticale. Par conséquent, le choix de la valeur de  $k$  doit être fait sur la base d'une information a priori concernant la cible. Une telle information est en générale claire à partir du contexte applicatif et l'orientation de la caméra dans le repère engin. Ainsi, une caméra pointant vers le nadir interdit essentiellement une stabilisation par rapport à une cible plane verticale, tandis qu'une caméra pointant vers l'avant écarte le cas d'une cible horizontale. Pour être exhaustif, nous étudions ci-dessous les deux principales situations qui nous intéressent : cible "non verticale" (figure 2.2), et cible "non horizontale" (figure 2.1)

## 2.5 Cas d'une cible non verticale

Le résultat suivant peut être établi.

**Théorème 1** (Loi de commande pour une cible non verticale)

Considérons un drone modélisé par les équations (1.16). Supposons que  $n_3^* > 0$  et  $(R_c n^*)_3 > 0$ . Soit  $\bar{e}_p \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\bar{e}_\Theta \in \mathbb{R}^3$ ) les trois premières (resp. dernières) composantes de  $\bar{e}$ , i.e.  $\bar{e} = (\bar{e}_p^T, \bar{e}_\Theta^T)^T$ . Choisissons  $k = 3$  (c'est-à-dire  $\bar{e} = \bar{e}^3$ ) et définissons la loi de commande :

$$\begin{cases} T &= m(g + k_1 \bar{e}_{p_3} + k_2 \nu_3) \\ \Gamma &= -JK_3(\omega - \omega^d) \end{cases} \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{cases} \omega^d &= -\frac{K_4}{g}(g\bar{e}_\Theta + b_3 \wedge \gamma^d) \\ \gamma^d &= -K_5(\bar{e}_p + K_6 \nu) \end{cases} \quad (2.12)$$

$\nu$  la variable définie par l'équation dynamique :

$$\dot{\nu} = -K_7 \nu - \bar{e}_p \quad (2.13)$$

Alors,

1. Etant donné  $c_M^* > 0$ , il existe des matrices de gains diagonales  $K_i = \text{Diag}(k_i^j)$   $i = 3, \dots, 7; j = 1, 2, 3$  et des gains scalaires  $k_1, k_2$ , tels que la loi de commande (2.11)-(2.12)-(2.13) rende l'équilibre  $(p, R, v, \omega, \nu) = (0, I_3, 0, 0, 0)$  du système en boucle fermée (1.16), (2.11)-(2.12)-(2.13) localement exponentiellement stable dès lors que

$$\frac{n_3^*}{d^*} \in (0, c_M^*] \quad (2.14)$$

2. Si les matrices de gains diagonales  $K_i$  et les gains scalaires  $k_1, k_2$  rendent le système en boucle fermée localement exponentiellement stable pour  $\frac{n_3^*}{d^*} = c_M^*$ , alors la stabilité exponentielle locale est aussi garantie pour toute valeur de  $\frac{n_3^*}{d^*} \in (0, c_M^*]$ .

△

La preuve est donnée dans un article reproduit en annexe section A.5, mais nous en donnons ici un résumé. Le système en boucle fermé est défini par les équations linéarisées suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}} &= L^3 \begin{pmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\Theta} \end{pmatrix} = L^3 \begin{pmatrix} gS(b_3)\Theta + (g-u)b_3 \\ J^{-1}\Gamma \end{pmatrix} \\ \dot{\nu} &= -K_7 \nu - \bar{e}_p \end{cases} \quad (2.15)$$

où les composantes de  $L^3$  sont données par :

$$L_p^3 = c^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{n_1^*}{n_3^*} \\ 0 & 1 & \frac{n_2^*}{n_3^*} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_\Theta^3 = \text{Diag}(1, 1, 2), \quad L_{\Theta_p}^3 = \frac{1}{d^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_2^* \\ 0 & 0 & -n_1^* \\ -n_2^* & n_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

De ces équations, nous tirons celles qui régissent les différentes dynamiques. Pour prouver la stabilité, on utilise la forme cascade du système bouclé : le premier sous-système  $(\bar{e}_3, \nu_3)$  agit sur le second  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \nu_1, \nu_2)$ , qui lui-même agit avec le premier sur le troisième  $(\bar{e}_6)$ .

La dynamique verticale est définie par :

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_3 &= 2c^*(g - u) = -2c^*(k_1\bar{e}_3 + k_2\nu_3) \\ \dot{\nu}_3 &= -k_7^3\nu_3 - \bar{e}_3 \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette dynamique est ainsi indépendante des autres variables, et le polynôme caractéristique associé peut être aisément calculé :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + k_7^3\lambda^2 + 2c^*k_1\lambda + 2c^*(k_1k_7^3 - k_2)$$

Cette dynamique pouvant être réglée stable par application du critère de Routh-Hurwitz, selon les conditions du Théorème 1, les variables concernées sont assurées de converger vers zéro.

Considérant ensuite la dynamique des autres variables une fois celles-ci nulles, nous obtenons de même les dynamiques horizontales selon :

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_1 &= -c^*g\bar{e}_5 \\ \ddot{\bar{e}}_2 &= c^*g\bar{e}_4 \\ \ddot{\bar{e}}_4 &= \dot{\omega}_1 = -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 - \omega_1^d) \\ &= -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 + \frac{k_4^1}{g}(g\bar{e}_4 + k_5^2\bar{e}_2 + k_5^2k_6^2\nu_2)) \\ \ddot{\bar{e}}_5 &= \dot{\omega}_2 = -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 - \omega_2^d) \\ &= -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 + \frac{k_4^2}{g}(g\bar{e}_5 - k_5^1\bar{e}_1 - k_5^1k_6^1\nu_1)) \end{cases} \quad (2.17)$$

et :

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 &= -k_7^1\nu_1 - \bar{e}_1 \\ \dot{\nu}_2 &= -k_7^2\nu_2 - \bar{e}_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Deux systèmes linéaires indépendants du cinquième ordre apparaissent ainsi, qui décrivent les dynamiques horizontales. Les polynômes caractéristiques associés sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_{c^*}^1(\lambda) &= \lambda^2(\lambda + k_7^1)(\lambda^2 + k_3^2\lambda + k_3^2k_4^2) + c^*a_1^1[\lambda + a_0^1] \\ &= \lambda^5 + a_4^1\lambda^4 + a_3^1\lambda^3 + a_2^1\lambda^2 + c^*a_1^1\lambda + c^*a_1^1a_0^1 \\ P_{c^*}^2(\lambda) &= \lambda^5 + a_4^2\lambda^4 + a_3^2\lambda^3 + a_2^2\lambda^2 + c^*a_1^2\lambda + c^*a_1^2a_0^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

dont, à nouveau, le critère de Routh-Hurwitz donne les conditions de stabilité, reprises dans l'énoncé du Théorème 1.

Enfin, après convergence de ces dynamiques à zéro, la dynamique de cap se dégage selon l'équation suivante :

$$\ddot{\bar{e}}_6 = 2\dot{\omega}_3 = -2k_3^3(\omega_3 - \omega_3^d) = -2k_3^3\left(\frac{\dot{\bar{e}}_6}{2} + k_4^3\bar{e}_6\right) \quad (2.20)$$

dont les conditions de stabilité sont triviales.

La figure 2.3 représente les composantes de cette loi de commande.

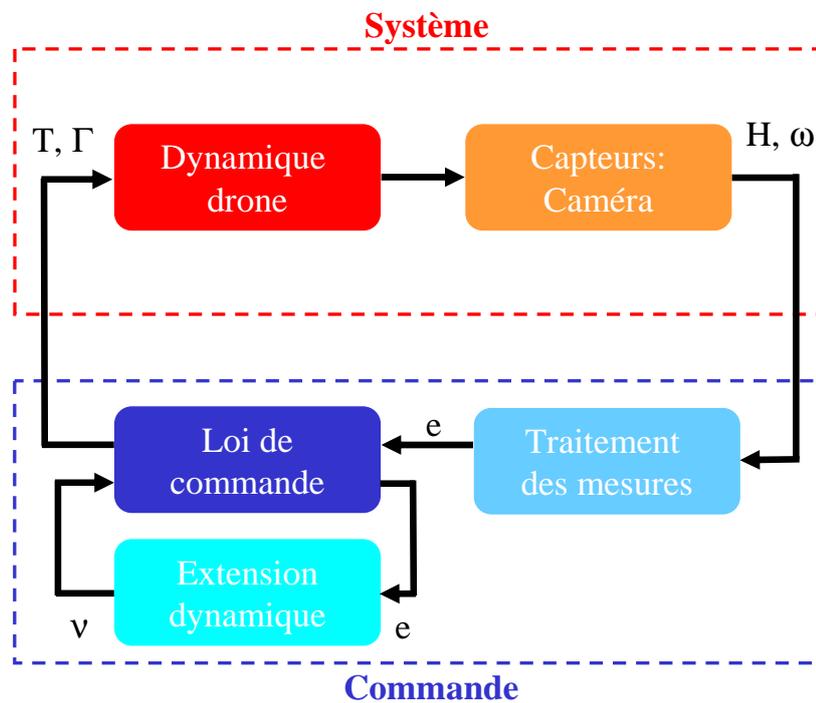


FIGURE 2.3 – Schéma bloc représentant la loi de commande linéaire, Théorème 1

Quelques remarques peuvent être faites.

1. L'hypothèse  $n_3^* > 0$  signifie que la cible n'est pas verticale et qu'elle est située "sous" l'engin (voir la figure 2.1 pour une illustration), la caméra pointant au nadir. Puisque l'axe optique de la caméra peut être distinct de l'axe  $z$  du repère engin, nous ajoutons une hypothèse de visibilité de la cible à la pose de référence, soit :  $(R_c n^*)_3 > 0$ . Le cas d'une cible au sol située sous l'appareil, avec une caméra pointant au zénith (i.e.,  $n_3^* < 0$ ) peut être traité semblablement, en appliquant la loi de commande précédente dans laquelle  $m_{c,k}^* = m_{c,3}^*$  se substitue par  $-m_{c,k}^*$  dans la définition de  $\bar{e} = \bar{e}^3$ . De façon équivalente, l'on peut multiplier les trois premières composantes  $\bar{e}$  par  $-1$ .

2. La variable  $\nu$  vient combler l'absence de mesure de  $\bar{e}_p$  (mesure de vitesse linéaire). Elle consiste en un filtrage du vecteur d'erreur  $\bar{e}_p$ , à partir duquel il est possible de reconstituer une estimation de cette vitesse non mesurée. Ajoutons qu'il n'a pas été nécessaire de réaliser cette reconstitution explicitement, puisqu'avec cette nouvelle variable, il devient possible de stabiliser le système.
3. Puisque  $n_3^* \leq 1$ , la condition (2.14) est satisfaite dès lors que  $d^* \geq 1/c_M^*$ . Ainsi, la Propriété 1) garantit que des gains de commande stabilisant peuvent être trouvés sur la base d'une connaissance d'une quelconque borne inférieure sur la distance entre la pose de référence et la cible plane observée. Il s'agit là d'une exigence modeste d'un point de vue applicatif, et d'autant plus que cette condition suffisante ne dépend pas du vecteur normal (inconnu)  $n^*$ .
4. Concernant la Propriété 2), elle implique qu'obtenir des gains de commande stabilisants pour tout  $\frac{n_3^*}{d^*} \in (0, c_M^*]$  revient à trouver des gains de commande stabilisants pour  $\frac{n_3^*}{d^*} = c_M^*$ . Cette dernière tâche peut être obtenue aisément par l'utilisation des outils classiques de commande linéaire. En particulier, le critère de Routh-Hurwitz permet d'assurer la stabilité exponentielle locale pour  $\frac{n_3^*}{d^*} = c_M^*$  lorsque les inégalités suivantes sont satisfaites (voir la preuve du Théorème 1 pour plus de détails) :

$$k_1, k_2, k_i^j > 0, \forall (i, j) \notin \{(5, 3), (6, 3)\} \quad (2.21)$$

et

$$k_2 < k_1 k_7^3 \quad (2.22)$$

et

$$\begin{cases} 0 < a_0^1 \\ c_M^* a_1^1 a_4^1 (a_4^1 - a_0^1) < a_2^1 D_2^1 \\ c_M^* a_1^1 (a_4^1 - a_0^1)^2 < (a_2^1 - a_0^1 a_3^1) D_2^1 \end{cases} \quad (2.23)$$

et

$$\begin{cases} 0 < a_0^2 \\ c_M^* a_1^2 a_4^2 (a_4^2 - a_0^2) < a_2^2 D_2^2 \\ c_M^* a_1^2 (a_4^2 - a_0^2)^2 < (a_2^2 - a_0^2 a_3^2) D_2^2 \end{cases} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0^1 &= k_7^1 - k_6^1, a_1^1 = k_3^2 k_4^2 k_5^1, a_2^1 = k_3^2 k_4^2 k_7^1, \\ a_3^1 &= k_3^2 (k_4^2 + k_7^1), a_4^1 = k_3^2 + k_7^1, D_2^1 = a_4^1 a_3^1 - a_2^1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\begin{aligned} a_0^2 &= k_7^2 - k_6^2, a_1^2 = k_3^1 k_4^1 k_5^2, a_2^2 = k_3^1 k_4^1 k_7^2, \\ a_3^2 &= k_3^1 (k_4^1 + k_7^2), a_4^2 = k_3^1 + k_7^2, D_2^2 = a_4^2 a_3^2 - a_2^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Preuve de l'existence de gains assurant la stabilité** Montrons l'existence de gains de commande satisfaisant les conditions ci-dessus. Tout d'abord, notons l'absence de condition sur les gains  $k_5^3$  et  $k_6^3$ . Cette absence s'explique par l'observation que, dans (2.12), ces gains n'affectent pas  $\omega^d$ . La condition (2.21) est immédiatement satisfaite. Les gains de commande  $k_1, k_2, k_7^3$  interviennent uniquement dans (2.22), de sorte qu'ils peuvent être choisis de façon à satisfaire cette inégalité. Considérons (2.24). Tout d'abord, cet ensemble de conditions concerne les gains  $k_3^2, k_4^2, k_5^1, k_6^1$  et  $k_7^1$  uniquement. Il existe différentes façons de trouver des valeurs pour ces gains garantissant (2.24). Nous proposons ici l'une de ces possibilités.

- choisir  $k_5^1 > 0$  et  $k_6^1, k_7^1 > 0$  de telle sorte que la première inégalité de (2.24) soit satisfaite.
- poser  $k_3^2 = k_4^2 = s$ . Considérons la seconde inégalité de (2.24). Le membre de gauche est un polynôme en  $s$  avec  $c_M^* k_5^1 s^4$  comme monôme de plus haut degré. Le membre de droite est aussi un polynôme en  $s$  avec  $k_7^1 s^5$  comme monôme de plus haut degré.
- choisir  $s$  assez grand garantit que cette inégalité est satisfaite. Le même argument assure que la dernière inégalité de (2.24) est satisfaite pour  $s$  assez grand.

Choisir  $k_3^1, k_4^1, k_5^2, k_6^2$  et  $k_7^2$  de façon à satisfaire (2.24) peut se faire selon la même procédure.

Remarquons enfin que, étant donnée une famille de gains, les Conditions (2.21)–(2.24) permettent de déterminer la valeur maximale de  $c_M^*$  pour laquelle la stabilité exponentielle est obtenue.

## 2.6 Cas d'une cible non horizontale

Le résultat précédent ne prend pas en compte le cas d'une cible verticale (i.e.  $n_3^* = 0$ ). Ce cas est traité par le résultat suivant, qui est potentiellement applicable à toute cible non-horizontale. La synthèse de la loi de commande utilise une nouvelle fonction d'erreur  $\bar{e}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $n_1^* > 0$  ( e.g., la camera pointe dans une direction proche de l'axe inertiel  $b_1$  à la pose de référence).

**Théorème 2** (Loi de commande pour une cible non horizontale)

Considérons un drone modélisé par les équations (1.16). Supposons que  $n_1^* > 0$  et  $(R_c n^*)_3 > 0$ . Considérons la loi de commande (2.11)–(2.12)–(2.13) avec cette fois-ci  $\bar{e} = \bar{e}^1$  et comme précédemment  $\bar{e}_p \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\bar{e}_\Theta \in \mathbb{R}^3$ ) dénotant les trois premières (resp. dernières) composantes de  $\bar{e}$ , i.e.  $\bar{e} = \bar{e}^1 = (\bar{e}_p^T, \bar{e}_\Theta^T)^T$ . Alors,

1. Pour tout  $c_M^* > 0, \delta \geq 0$ , il existe des matrices de gains diagonales  $K_i = \text{Diag}(k_i^j) \ i = 3, \dots, 7; j = 1, 2, 3$  et des gains scalaires  $k_1, k_2$ , tels que la loi de commande (2.11) rend l'équilibre  $(p, R, v, \omega, \nu) = (0, I_3, 0, 0, 0)$  du système en boucle fermée (1.16), (2.11)–(2.12)–(2.13) localement exponentiellement stable dès lors que

$$\frac{1}{d^*} \in (0, c_M^*] \quad \text{et} \quad \frac{|n_3^*|}{|n_1^*|} \leq \delta \quad (2.27)$$

2. Si les matrices de gains diagonales  $K_i$  et les gains scalaires  $k_1, k_2$  rendent le système en boucle fermée localement exponentiellement stable pour  $\frac{1}{d^*} = c_M^*$  et pour  $n^*$  satisfaisant (2.27), alors la stabilité exponentielle locale est garantie pour toute valeur de  $\frac{1}{d^*} \in (0, c_M^*]$ .

△

La preuve est donnée dans un article reproduit en annexe, section A.5, nous ne la reprenons pas ici.

Quelques commentaires s'appliquent à ce résultat.

1. Comme dans le cas du Théorème 1, une extension au cas  $n_1^* < 0$  peut être opérée en appliquant la loi de commande avec  $m_{c,k}^* = m_{c,1}^*$  remplacé par  $-m_{c,k}^*$  dans la définition de  $\bar{e} = \bar{e}_1$ . Cette opération est aussi équivalente à une multiplication des trois premières composantes de  $\bar{e}$  par  $-1$ .
2. La principale différence entre les Théorèmes 1 et 2 réside dans les conditions (2.14) et (2.27). Clairement, les dernières sont plus exigeantes que les premières, puisqu'elles ne peuvent être réduites à des conditions sur  $d^*$  uniquement. Lorsque  $n_3^* = 0$  (cible purement verticale), cependant, ces conditions sont essentiellement similaires.
3. Les conditions de stabilité sur les gains sont semblables à celles du Théorème 1. Plus précisément, les conditions suffisantes de stabilité pour  $c^* = c_M^*$  sont toujours données par (2.21)–(2.22) avec

$$\begin{aligned} a_0^1 &= k_7^1 - \frac{k_6^1}{1 - g \frac{n_3^*}{2k_5^1 n_1^*}}, a_1^1 = 2k_3^2 k_4^2 k_5^1 \left( 1 - g \frac{n_3^*}{2k_5^1 n_1^*} \right), a_2^1 = k_3^2 k_4^2 k_7^1, \\ a_3^1 &= k_3^2 (k_4^2 + k_7^1), a_4^1 = k_3^2 + k_7^1, D_2^1 = a_4^1 a_3^1 - a_2^1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

et

$$\begin{aligned} a_0^2 &= k_7^2 - k_6^2, a_1^2 = 2k_3^1 k_4^1 k_5^2, a_2^2 = 4k_3^1 k_4^1 k_7^2, \\ a_3^2 &= 4k_3^1 (k_4^1 + k_7^2), a_4^2 = 4k_3^1 + k_7^2, D_2^2 = a_4^2 a_3^2 - a_2^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'existence de gains satisfaisant les conditions ci-dessus pour tout  $n^*$  satisfaisant à (2.22) peut être prouvée dans le cas du Théorème 1. Notons en particulier qu'étant donnée une borne supérieure dans (2.27) sur le rapport  $\frac{n_3^*}{n_1^*}$ , le gain  $k_5^1$  peut être fixé de telle sorte que  $0 < \tau_1 \leq 1 - g \frac{n_3^*}{2k_5^1 n_1^*} \leq \tau_2$  pour certains scalaires  $\tau_1, \tau_2$ . Ensuite,  $k_6^1, k_7^1$  peut être choisi de façon à ce que la première inégalité de (2.22) soit vérifiée. La sélection des autres gains suit selon le même principe que pour le Théorème 1.

Le Théorème 1 fournit les fondements théoriques pour stabiliser un drone VTOL sous-actionné à partir de mesures gyroscopiques et d'une caméra. En pratique cependant, d'autres problèmes se posent dans la perspective d'une mise en œuvre expérimentale. L'un de ces problèmes concerne les dynamiques non modélisées (telles que le vent). En outre, considérer comme unique objectif la stabilité du système en boucle fermée n'est pas réaliste, puisqu'une performance insuffisante engendrerait un comportement inacceptable, et en particulier un risque de sortie du domaine de stabilité. En conséquence, le réglage des gains doit être réalisé de façon à inclure des considérations sur la performance du système en boucle fermée. Ces deux problèmes sont considérés dans les sections suivantes.

## 2.7 Cas d'une dynamique non modélisée

*Tant de temps que je glisse entre mer et nuages,  
Que mon œil à l'affût s'inquiète du rivage  
Où mon grand corps d'oiseau pourra trouver repos.  
Je suis las de braver la tempête et les flots.*

Charles Baudelaire

Dans cette partie, nous considérons la présence d'une dynamique non modélisée agissant sur le système (telle que le vent). Différentes solutions peuvent être proposées pour répondre à ce problème, à commencer par l'utilisation d'une action intégrale (voir par exemple (Hua et al., 2009b) pour une telle utilisation dans un contexte voisin). En raison de la relation simple entre  $\bar{e}_p$  donné par (2.8) et  $p$ , inclure une correction intégrale dans la loi de commande du Théorème 1 est relativement aisé. L'étude du réglage des gains en fonction de critères de performance est plus difficile, spécialement pour la dynamique horizontale, en raison de notre ignorance de la distance à la cible, et de la normale à celle-ci. Pour ces dynamiques, nous proposons ici une autre approche utilisant les accéléromètres.

Considérons le modèle suivant (à comparer avec eq. (1.18)) :

$$\begin{cases} \dot{p} &= v \\ m\dot{v} &= -ub_3 + \gamma + R^T a_w \\ \dot{\Theta} &= \omega \\ J\dot{\omega} &= \Gamma + \tau_w b_3 \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $a_w$  correspond à la dynamique de translation non modélisée, et  $\tau_w$  à la dynamique de cap non modélisée. Les deux quantités sont supposées constantes. Rappelons que les accéléromètres mesurent la quantité suivante ((Martin and Salaün, 2010)) :

$$y_{acc} = R^T \ddot{p} - \gamma = -ub_3 + R^T a_w \quad (2.31)$$

Lorsque  $a_{w,1} \neq 0$  ou que  $a_{w,2} \neq 0$ ,  $R = I_3$  n'est plus une orientation d'équilibre. Nous supposons cependant que la nouvelle orientation d'équilibre est proche de la matrice identité, de sorte que l'approximation  $R^T a_w \approx a_w$  est toujours supposée valide. Il est clair que cette approximation est restrictive ; elle reste pourtant justifiée dans le contexte de perturbations "modérées". Une situation de fortes perturbations introduirait des couplages dans la dynamique du système, couplages dont l'analyse n'est pas réalisée ici.

Les modifications suivantes sur la loi de commande (2.11)–(2.12) sont proposées sous cette hypothèse :

$$\begin{cases} T &= m(g + k_0 I_{e_3} + k_1 \bar{e}_3 + k_2 \nu_3) \\ \Gamma &= -JK_3(\omega - \omega^d) \end{cases} \quad (2.32)$$

avec

$$\begin{cases} \omega^d &= -\frac{K_4}{g}(g\bar{e}_\Theta + b_3 \wedge (\gamma^d - y_{acc}) + k_8 I_{e_6} b_3) \\ \gamma^d &= -K_5(\bar{e}_p + K_6 \nu) \\ \dot{I}_{e_3} &= \bar{e}_3 \\ \dot{I}_{e_6} &= \bar{e}_6 \end{cases} \quad (2.33)$$

La figure 2.4 montre les éléments de cette loi de commande modifiée.

L'idée sous-jacente est de combattre les dynamiques verticale et de cap non modélisées par des termes intégraux ( $I_{e_3}$  et  $I_{e_6}$ ), et les dynamiques horizontales non modélisées par l'utilisation des mesures accélérométriques. Analysons brièvement la dynamique en boucle fermée linéarisée du Théorème 1. Pour la dynamique verticale, nous obtenons :

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_3 &= 2c^*(g + a_{w3} - g - k_0 I_{e_3} - k_1 \bar{e}_3 - k_2 \nu_3) \\ &= -2c^*(k_0 I_{e_3} + k_1 \bar{e}_3 + k_2 \nu_3 - (R^T a_w)_3) \\ \dot{\nu}_3 &= -k_7^3 \nu_3 - \bar{e}_3 \end{cases} \quad (2.34)$$

avec  $c^* = \frac{n_3^*}{d^*}$ . Cette dynamique est proche de celle obtenue avec la loi de commande initiale (voir dans l'annexe, section A.5), à l'exception de la présence

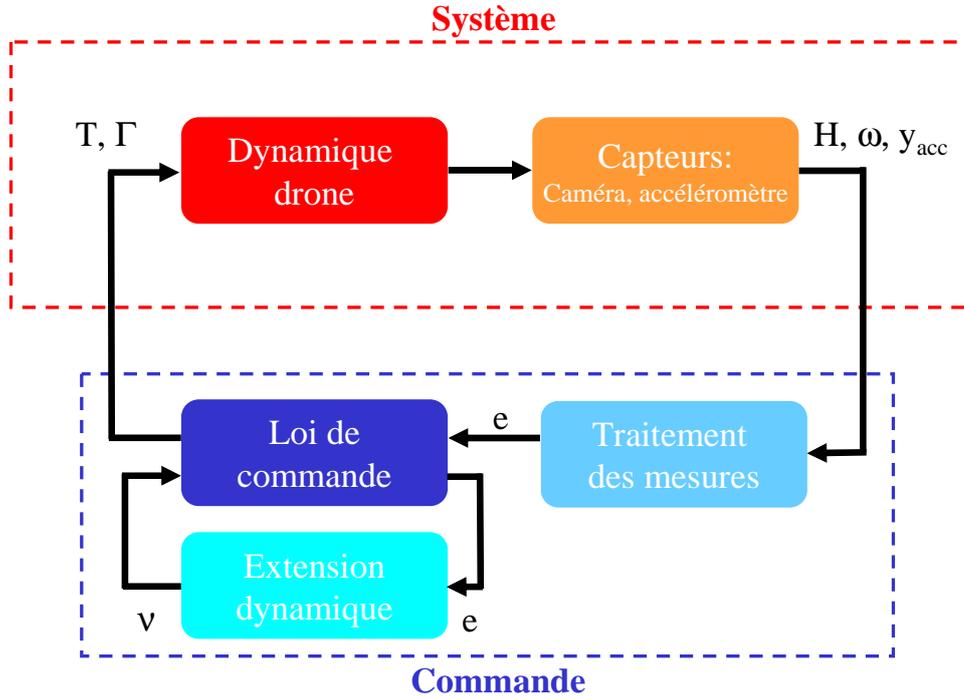


FIGURE 2.4 – Schéma bloc représentant la loi de commande linéaire avec réjection de dynamique non modélisée

du terme de projection  $(R^T a_w)_3$  et du terme de correction intégrale. En outre, le polynôme caractéristique –après simplification selon  $R^T a_w = a_w$  et  $a_w$  constant – est donné par :

$$\lambda^4 + k_7^3 \lambda^3 + 2c^* [k_1 \lambda^2 + (k_0 + k_1 k_7^3 - k_2) \lambda + k_0 k_7^3] \quad (2.35)$$

Au contraire de la dynamique verticale initiale, ce polynôme peut devenir instable pour certaines valeurs de  $c^*$ , quel que soit le choix des gains. Plus précisément, le critère de Routh-Hurwitz garantit la stabilité lorsque  $k_i > 0$ ,  $k_0 + k_1 k_7^3 - k_2 > 0$  et  $2c^* k_0^2 + [(k_7^3)^3 + 2c^* (k_1 k_7^3 - k_2)] k_0 - 2c^* k_2 (k_1 k_7^3 - k_2) < 0$ . Il est ainsi possible de définir des gains tels que le système soit stable pour certaines valeurs de  $c^*$  ; ainsi, en choisissant  $k_1, k_7^3, k_2 > 0$  tels que  $k_1 k_7^3 - k_2 > 0$  (condition qui est la principale pour la dynamique initiale). Il est alors possible de trouver  $k_0 > 0$  tel que la troisième condition est vérifiée pour certaines valeurs de  $c^*$  puisque, pour  $c^*$  fixé,  $-2c^* k_2 (k_1 k_7^3 - k_2) < 0$  de telle sorte que, lorsque  $k_0$  diminue vers zéro, la condition sera satisfaite pour  $k_0$  assez petit. S'agissant du gain d'un terme intégral, il est en effet peu surprenant que sa valeur doive être maintenue assez petite pour conserver la stabilité du système en boucle fermée.

De façon similaire, lorsque  $\bar{e}_3$  a convergé vers zéro, la dynamique horizontale est donnée par (à comparer avec les équations en annexe, section A.5) :

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_1 &= c^* (-g\bar{e}_5 + y_{acc_1}) \\ \ddot{\bar{e}}_2 &= c^* (g\bar{e}_4 + y_{acc_2}) \\ \dot{\bar{e}}_4 &= \dot{\omega}_1 = -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 - \omega_1^d) \\ &= -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 + \frac{k_4^1}{g}(g\bar{e}_4 + y_{acc_2} + k_5^2\bar{e}_2 + k_5^2k_6^2\nu_2)) \\ \dot{\bar{e}}_5 &= \dot{\omega}_2 = -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 - \omega_2^d) \\ &= -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 + \frac{k_4^2}{g}(g\bar{e}_5 - y_{acc_1} - k_5^1\bar{e}_1 - k_5^1k_6^1\nu_1)) \end{cases} \quad (2.36)$$

avec  $y_{acc_i} \approx a_{w_i}$  for  $i = 1, 2$ . En conséquence, les mêmes polynômes caractéristiques que dans le cas sans perturbation sont retrouvés : les mêmes conditions de stabilité sur les gains s'appliquent et ces variables convergent asymptotiquement vers zéro.

Finalemnt, la dynamique de cap est donnée par (à comparer avec l'annexe, section A.5) :

$$\ddot{\bar{e}}_6 = 2\dot{\omega}_3 = -2k_3^3(\omega_3 - \omega_3^d) = -2k_3^3\left(\frac{\dot{\bar{e}}_6}{2} + k_4^3\bar{e}_6 + k_8I_{e_6}\right) + \|\Gamma_w\|b_3 \quad (2.37)$$

Supposons une perturbation constante  $\|\Gamma_w\|$ , le terme intégral garantit une convergence à zéro de l'erreur de cap si  $k_8 < k_3^3k_4^3$ .

## 2.8 Réglage des gains

Si la stabilité est un prérequis pour un système en boucle fermée, la performance ne peut être négligée en pratique. En particulier, il importe d'assurer un amortissement efficace du système. Ce problème est très important dans le présent contexte puisque, ignorant un certain nombre de paramètres, il convient d'assurer un comportement idoine malgré de fortes variations de ces paramètres. Dans cette section, nous proposons une heuristique de réglage des gains dédiée à l'obtention d'une performance satisfaisante malgré cette incertitude. Cette heuristique ne *garantit* pas formellement un niveau de performance donné, mais elle s'appuie sur le fondement théorique du lieu des racines (qui était utilisé par exemple aussi dans (Khadraoui, 1996) ; une présentation en est faite en annexe, section A.1), et s'est montrée efficace en pratique lors des tests en simulation. Elle guide le choix des gains pour viser un niveau de performance donné. Une fois les gains fixés, il est toujours possible de faire usage du théorème de Barmish (Barmish, 1989) afin de prouver a posteriori un certain niveau de performance, au sens où l'on prouve alors que les parties réelles des valeurs propres restent inférieures à une valeur donnée lorsque  $c^*$  varie dans sa plage de valeurs autorisée. Cette heuristique est basée sur une structure en cascade du système en boucle fermé linéarisé, laquelle permet d'étudier séparément les dynamiques de cap, verticale et horizontales (voir les preuves des

Théorèmes 1 et 2 en annexe, section A.5, pour plus de détails). Ce procédé est similaire du cas où des mesures exhaustives de position, orientation et vitesse sont disponibles. Nous proposons tout d'abord une heuristique pour le cas d'une cible non verticale, et évoquons ensuite brièvement le cas d'une cible non horizontale.

### 2.8.1 Réglage des gains de la dynamique de cap

Le polynôme caractéristique associé à la dynamique de cap linéarisée est donné par  $P(\lambda) = \lambda^2 + k_3^3\lambda + 2k_3^3k_4^3$ . Ainsi, tout ensemble de pôles en boucle fermée  $(\lambda_1, \lambda_2)$  peut être assigné en posant

$$k_3^3 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad k_4^3 = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

### 2.8.2 Réglage des gains de la dynamique verticale

*No one on earth has any way left but — upward.*

Alexandre Soljenitsyne

Le polynôme caractéristique associé à la dynamique verticale linéarisée est donné par  $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + k_7^3) + C^*(\lambda + k)$  avec  $C^* = 2c^*k_1$  et  $k = k_7^3 - \frac{k_2}{k_1}$ .

Rappelons que  $c^* = \frac{n_3^*}{d^*}$ . Nous proposons l'heuristique suivante :

1. Définir le gain  $k_7^3$  et un nombre  $k \neq k_7^3$  en considérant que, lorsque  $c^*$  croît de zéro à l'infini, les gains en boucle fermée se déplacent de 0 et  $-k_7^3$  vers  $-k$  et  $\frac{k-k_7^3}{2}$ .
2. Les parties réelles des pôles les plus lents partent de 0 et s'échappent vers  $\frac{k-k_7^3}{2}$  : définir le facteur d'échelle  $k_1$  de façon à définir  $c_{min}^*$  pour lequel une partie réelle donnée est atteinte. Notons que  $k_2$  est alors donné par :  $k_2 = k_1(k_7^3 - k)$ .
3. Appliquer le théorème de Barmish (Barmish, 1989) pour prouver a posteriori la performance garantie pour la boucle fermée ainsi obtenue lorsque  $c^*$  varie dans son domaine de définition.

**Justification :** La théorie du lieu des racines montre que les pôles partent de  $(-k_7^3, 0, 0)$  lorsque  $c^* = 0$  et se déplacent vers  $-k$  et les deux directions asymptotiques  $\frac{k-k_7^3}{2} \pm j\infty$  lorsque  $c^* \rightarrow \infty$ . On peut aussi vérifier que, quels que soient les gains tels que  $k \neq k_7^3$ , il n'y a pas de racine sur l'axe imaginaire.

**Exemple numérique :** Avec  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $k_7^3 = 2.4$ , le lieu des racines montre que :

1.  $\forall c^* > 0, \Re(\lambda_i) < 0$
2.  $\forall c^* \in [0.175; +\infty], -1 \leq \Re(\lambda_i) \leq -0.4$
3.  $\forall c^* \in [0.175; 2.34], \xi \geq 0.2$  ( $\xi$  est l'amortissement réduit)

### 2.8.3 Réglage des gains des dynamiques horizontales

La dynamique horizontale est constituée de deux systèmes linéaires du cinquième ordre (voir annexe, section A.5). Puisque la structure de ces systèmes est la même, nous ne nous intéresserons qu'au réglage des gains du premier. Le polynôme caractéristique associé est le suivant :

$$\lambda^2 (\lambda + k_7^1) (\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2) + C^* [\lambda + K]$$

où  $C = c^* k_3^2 k_4^2 k_5^1$ ,  $K = k_7^1 - k_6^1$ . On propose l'heuristique suivante :

1. Sélectionner  $k_3^2$  et  $k_4^2$  de telle sorte que les racines de  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$  soient aussi rapides que possible ;
2. Définir une dynamique beaucoup plus lente pour le "système interne" défini par :  $k_3^2 k_4^2 \lambda^2 (\lambda + k_7^1) + C^* [\lambda + K]$ , et sélectionner des valeurs idoines pour  $k_5^1, k_6^1, k_7^1$  de façon à ce que, pour  $c^* \in (0; c_M^*]$ , tous les pôles soient plus lents que la dynamique maximale du système interne définie ci-dessus ;
3. Utiliser le théorème de Barmish (Barmish, 1989) pour vérifier les performances du système obtenu en boucle fermée lorsque  $c^*$  varie dans sa plage de variation autorisée.

**Justification :** La théorie du lieu des racines assure que les pôles se trouvent en 0 (double),  $-k_7^1$  et aux racines de  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$ . L'unique zéro se situe en  $-(k_7^1 - k_6^1)$  (zéro de la dynamique interne). Les deux pôles placés par  $k_3^2$  et  $k_4^2$  s'éloignent à l'infini lorsque  $c^*$  croît. Les pôles en 0 et  $-k_7^1$  se comportent similairement à la dynamique verticale pour de petites valeurs de  $c^*$ , puisqu'ils sont proches de zéro et séparés des deux premiers ; pour  $c^*$  grand, deux de ces pôles s'échappent à l'infini avec une partie réelle positive.

**Exemple numérique :** Avec les gains définis selon  $k_3^2 = 10$ ,  $k_4^2 = 12$ ,  $k_5^1 = 5$ ,  $k_6^1 = 2$ ,  $k_7^1 = 2.4$  (dynamique interne plus lente que -1, lui-même beaucoup plus lent que les racines de  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$ ), le polynôme caractéristique est donné par :  $\lambda^5 + 12.4\lambda^4 + 144\lambda^3 + 288\lambda^2 + 600c^*\lambda + 240c^*$ , lequel est stable pour  $c^* \in (0; c_M^*]$  avec  $c_M^* \approx 4$ , et tel que les parties réelles des pôles  $\Re(\lambda) \leq -0.2$  pour  $c^* \in [c_1^*; c_2^*]$  avec  $c_1^* \approx 0.2$  et  $c_2^* \approx 3.25$ .

Dans les simulations présentées plus loin (section 2.11), les valeurs des gains sont celles obtenues par cette procédure.

**Remarque sur le cas d'une cible non horizontale :** Pour la loi de commande du Théorème 2, la même heuristique peut pratiquement être utilisée, puisque les équations sont semblables. Les conditions de stabilité, cependant, font intervenir le ratio  $\frac{n_3^*}{n_1^*}$  (voir (2.28)). Ainsi que mentionné plus haut dans la section 2.6, choisir  $k_5^1$  grand rend le lieu des racines moins sensible à ce rapport. Ainsi,  $k_3^2$  et  $k_4^2$  doivent aussi être choisis assez grands pour satisfaire la condition de stabilité (2.22).

A titre d'illustration, des résultats satisfaisants ont été obtenus en modifiant comme suit les trois gains  $k_5^1, k_3^2, k_4^2$  à partir des valeurs définies pour le cas d'une cible non verticale :  $k_5^1$  multiplié par 5,  $k_3^2, k_4^2$  multiplié par 4. Avec ce choix, en exprimant  $\frac{n_3^*}{n_1^*}$  comme la tangente d'un angle  $\alpha$  représentant la verticalité de la cible, on obtient les résultats suivants :

- avec  $\alpha = 0^\circ$ ,  $c_M^* = 1.8$  et le lieu des racines est semblable à celui du cas d'une cible au sol à l'exception de la dynamique  $k_3^2, k_4^2$ , qui est sensiblement plus rapide ;
- avec  $\alpha = -30^\circ$ ,  $c_M^* = 1.3$  ;
- avec  $\alpha = +30^\circ$ ,  $c_M^* = 2.1$  mais la dynamique lente est sensiblement différente, de sorte qu'il y a, pour toute valeur de  $c^*$  une dynamique lente autour du nouveau zéro défini par  $-a_0^1$ .

## 2.9 $\mu$ -analyse

Le problème considéré dans les sections précédentes est un problème de stabilité -et de performance- sous incertitude paramétrique, qui est le sujet propre de l'analyse robuste. Des outils dédiés à l'analyse de la robustesse de systèmes linéaires incertains, tels que la  $\mu$ -analyse, existent. Cependant, ces outils ne sont pas adaptés pour l'étude de la robustesse d'un système comportant une seule incertitude : c'est le cas du lieu des racines étudié plus haut. Ils ne permettent pas non plus l'étude précise des performances proposées plus haut. Des études complémentaires à la précédente peuvent néanmoins être menées, pour étudier par exemple l'effet de dynamiques non modélisées. On peut ainsi s'interroger sur la capacité de la boucle fermée à demeurer stable malgré les variations autorisées de distance à l'objet observé, et en présence d'un retard et d'un gain incertains en entrée. Ceci est modélisé par une incertitude scalaire réelle pour la distance inconnue, et par une incertitude scalaire complexe pour le retard et le gain, selon le schéma d'analyse de la figure 2.5, qui représente la dynamique horizontale linéarisée et découplée. Les deux incertitudes sont représentées en rose sur la figure, et sont modélisées sous simulink avec des objets LFR.

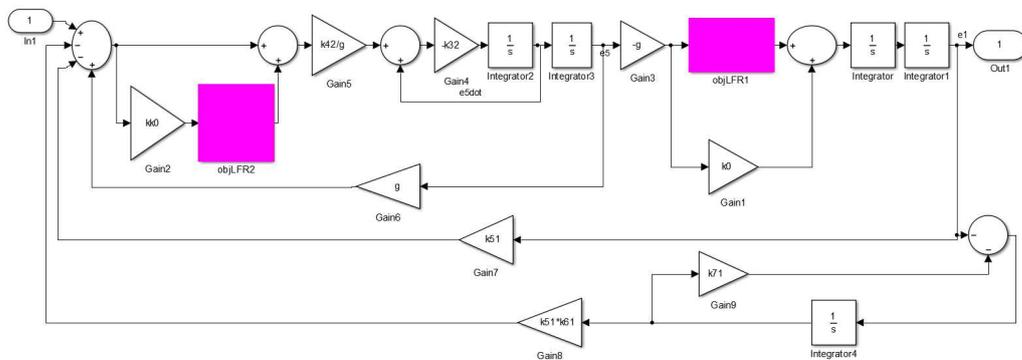


FIGURE 2.5 – Schéma bloc pour la  $\mu$ -analyse

En réglant les gains présents sur la figure aux valeurs suivantes :  $k_0 = 2$ ,  $k_1 = 1$  et en utilisant la fonction de Matlab `mu_margin`, on obtient la valeur suivante comme borne supérieur de la grandeur  $\mu = 2.55$ . Ce résultat signifie que la boucle fermée est garantie stable pour toute valeur des incertitudes de normes inférieures à  $\frac{1}{\mu} = 0.39$ . Dès lors, cela signifie que la distance peut varier entre 0.61 et 1.39, le retard et le gain incertains tels que le nombre complexe associé est de norme inférieure à 0.39, sans remettre en cause la stabilité de la boucle fermée.

Notons que cette méthode est complémentaire de la démarche précédente : une fois la loi fixée dans sa structure par les théorèmes présentés ci-dessus ; une fois les gains fixés selon les conditions établies pour la stabilité, et au moyen de l'heuristique développée ci-avant ; une fois la preuve de stabilité pour les valeurs considérées possibles de la distance à l'objet prouvée, la  $\mu$ -analyse peut être exploitée pour étudier plus finement la robustesse de la boucle fermée à des incertitudes autres que la seule distance à l'objet observé.

## 2.10 Synthèse non lisse

Dans l'optique de la section précédente, une fois la structure de commande fixée par les approches précédentes, les plus récents développements relatifs à la synthèse de lois de commande structurées multi-critères permettent en particulier de recalculer les gains de la loi de commande en minimisant un critère  $H_\infty$  (voir (Apkarian and Noll, 2006b)). Il est ainsi possible de recalculer les gains pour minimiser l'effet du vent au sens de la minimisation en norme  $H_\infty$  d'un transfert. Cette optimisation cependant donne lieu à une perte de robustesse au sens de la variation de distance, comme nous l'illustrons sur un exemple. Nous avons considéré la dynamique horizontale et avons recalculé l'un des gains avec l'objectif de minimiser l'effet du vent sur cette dynamique. Pour ce faire, le schéma considéré est celui de la figure 2.6 qui représente cette dynamique, avec l'ajout de vent en accélération. Ce vent est modélisé par un simple bruit coloré, comme représenté sur la figure 2.7 ci-après. Pour calculer la nouvelle valeur optimisée du gain, on considère le schéma en boucle ouverte de la figure 2.8. Sur ce schéma, entre l'entrée 1 et la sortie 1 se trouve le gain à minimiser, entre l'effet du vent et l'accélération résultante. L'entrée 2 et la sortie 2 correspondent au gain à optimiser. La fonction Matlab `hinfstruct` ayant été utilisée (voir (Apkarian and Noll, 2006a)), elle conduit au calcul d'un gain de 7.0743 au lieu de 10 avec notre heuristique. Des résultats de simulation avec cette loi de commande modifiée sont présentés dans la section suivante.

## 2.11 Résultats de simulation

*Il faut supprimer de toute notre vie l'hypocrisie et la simulation.*

Cicéron

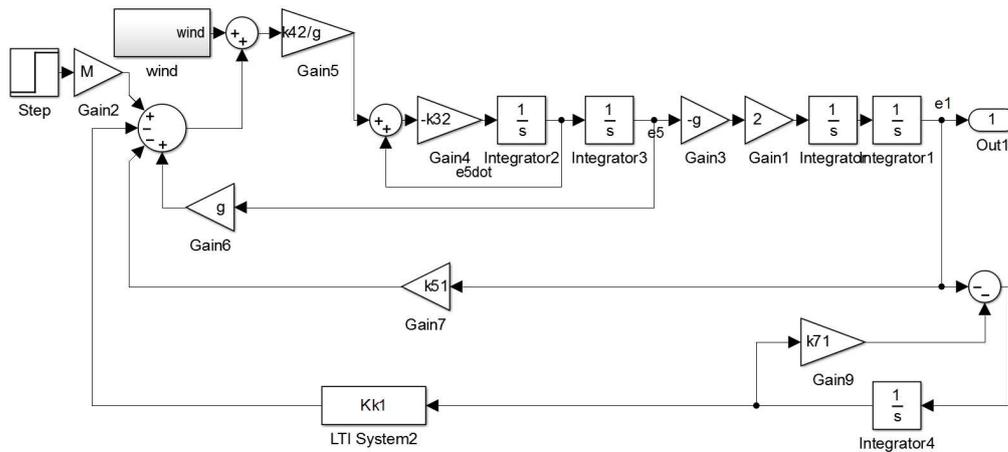


FIGURE 2.6 – Schéma bloc de la boucle fermée en présence de vent

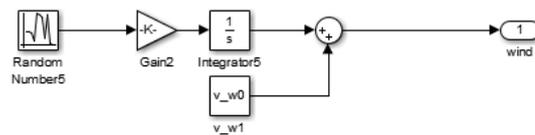


FIGURE 2.7 – Schéma bloc du modèle de vent

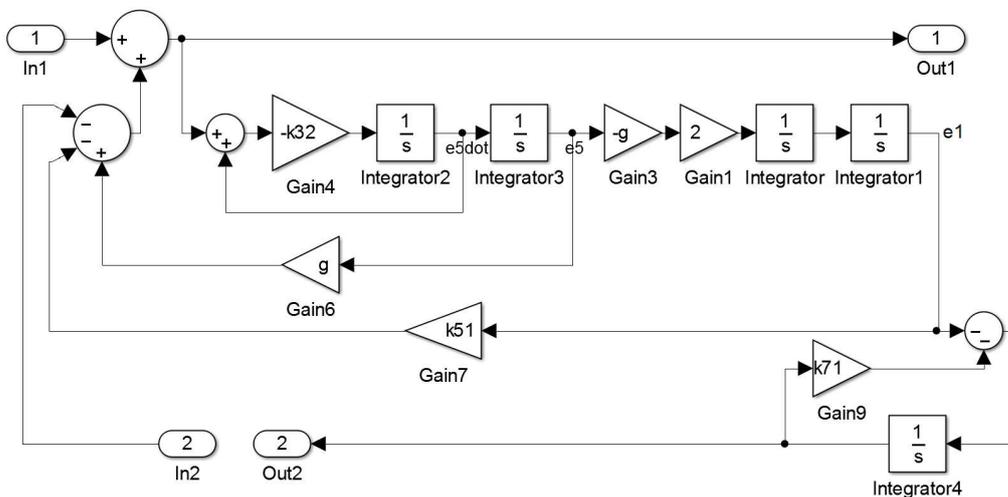


FIGURE 2.8 – Schéma bloc de la boucle ouverte pour la synthèse non lisse

Dans cette partie, on présente quelques résultats de simulation obtenus avec cette approche. Des simulations plus complètes sont présentes dans les articles reproduits en annexe, en particulier en section A.5.

Nous présentons des résultats de simulation à la fois pour la loi de base (Théorèmes 1 et 2) et pour sa version modifiée proposée en section 2.7. Les

résultats ont été obtenus pour un modèle de dynamique hélicoptère définie par (1.19) avec  $m = 10$  et  $J = I_3$  la matrice identité. On présente des simulations pour différentes valeurs de la distance à la cible à la pose de référence, avec des erreurs de position initiales égales à :  $p_0 = (1.5, -1, 0.5)^T$ , les autres conditions initiales (erreur d'orientation, et vitesses linéaire et angulaire) étant nulles.

### 2.11.1 Loi de commande pour une cible non verticale

Nous ne présentons ici que le cas d'une cible non verticale (voir section A.5 pour d'autres illustrations). Des résultats de simulation avec la loi de commande du Théorème 1 sont présentés sur les figures 2.9–2.10. Le vecteur normal  $n^*$  qui définit l'orientation de la cible est choisi égal à  $n^* = (-0.28, 0.28, 0.92)^T$ . Des résultats de simulation sont présentés pour  $d^* = 2$  et  $d^* = 10$ . Cela correspond à une plage très large de valeurs possibles pour la distance nominale à la cible. La matrice de rotation  $R_c$  qui définit l'orientation de la caméra dans le repère engin est générée aléatoirement, sous la contrainte que l'angle de rotation associé soit égal à  $15^\circ$ . Pour tester la robustesse de cette approche, un décalage en position de  $p_c$  entre le repère caméra et le repère engin est introduit. Les valeurs de  $R_c$  et  $p_c$  sont les suivantes :

$$R_c = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.20 & 0.16 \\ -0.19 & 0.98 & -0.06 \\ -0.17 & 0.03 & 0.99 \end{pmatrix} \quad p_c = (0.30, -0.20, 0.10)^T$$

Les gains de commande dans (2.11)-(2.12) ont été choisis comme suit, selon l'heuristique de réglage des gains décrite ci-dessus :

$$\begin{aligned} k_1 = 5, \quad k_2 = 10, \quad K_3 = \text{Diag}(10, 10, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad K_4 = \text{Diag}(12, 12, 4) \\ K_5 = \text{Diag}(5, 5, 0), \quad K_6 = \text{Diag}(2, 2, 0), \quad K_7 = \text{Diag}(2.05, 2.05, 2.5) \end{aligned} \quad (2.38)$$

De (2.22)-(2.23), on tire la borne supérieure de stabilité  $c_M^* < 3.99$ . Puisque  $n_3^* = 0.92$ , cela conduit à  $d_M^* > 0.23$ , ce qui est consistant avec les valeurs de simulation  $d^* = 2$  et  $d^* = 10$ . Les figures 2.9–2.10 illustrent la capacité du contrôleur à obtenir des performances satisfaisantes dans tout cet intervalle, sans aucune information de profondeur ou d'orientation de la cible.

### 2.11.2 Loi de commande pour une dynamique non modélisée

Dans cette partie on compare les performances de la loi de commande initiale (2.11)-(2.12) et de la loi modifiée (2.32)–(2.33) en présence de vent, avec les mêmes paramètres de simulation que pour les figures 2.9–2.10. Pour les deux contrôleurs, les gains de commande (2.38) ont été utilisés. Pour la loi de commande (2.32)–(2.33), le gain intégral sur la dynamique verticale est défini

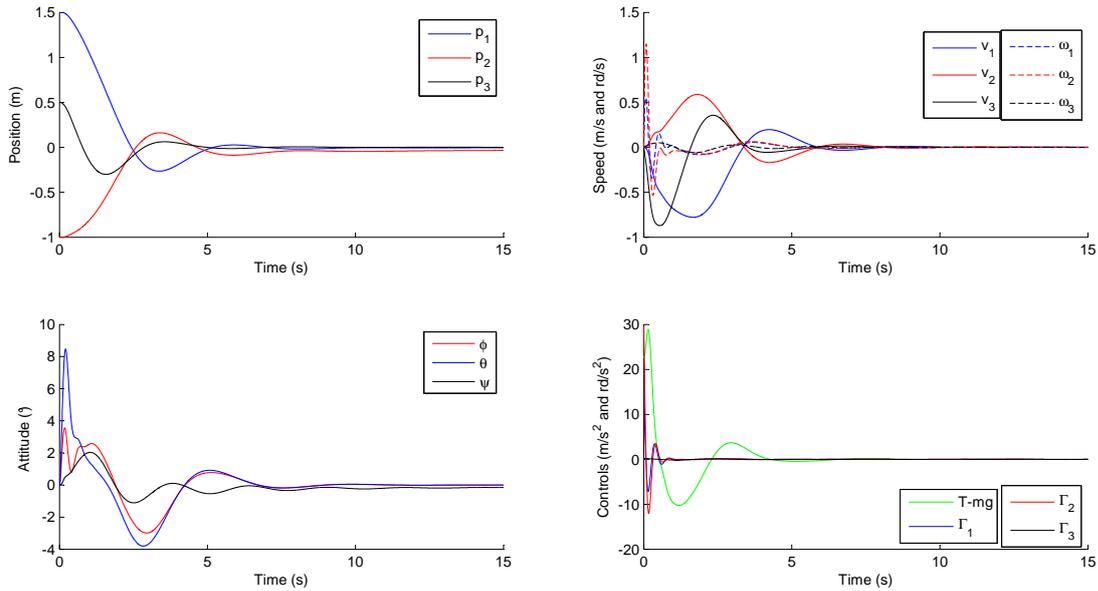


FIGURE 2.9 – Résultat de simulation pour une cible non verticale,  $d^* = 2$

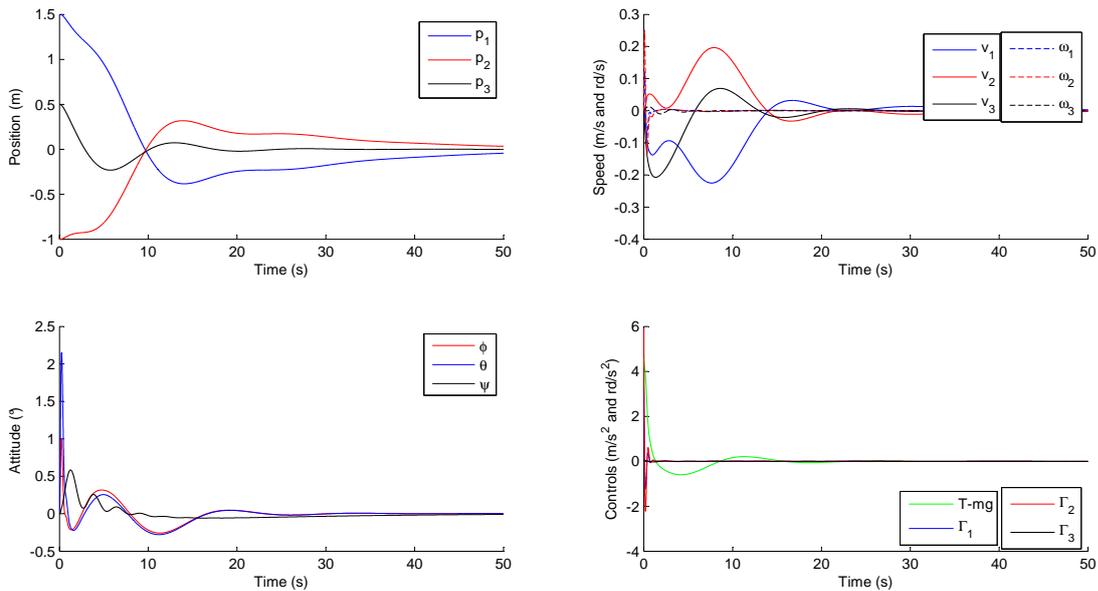


FIGURE 2.10 – Résultat de simulation pour une cible non verticale,  $d^* = 10$

par  $k_0 = 1$ . A partir de l'expression du polynôme caractéristique de la dynamique verticale, cette valeur assure la stabilité dès lors que  $c^* > 0.36$ , ou  $d^* < 2.53$  dans ce cas. L'effet du vent est modélisé comme une force de traînée (sans portance). Plus précisément, un vent variant lentement  $\dot{p}_w$  est utilisé pour calculer la vitesse relative du vent :  $\delta\dot{p} = \dot{p}_w - \dot{p}$ , avec  $\dot{p}_w$  la vitesse du vent. La

traînée est ensuite donnée par  $F_w = -\frac{1}{2}C_x\rho\Sigma\|\delta\dot{p}\|\delta\dot{p}$  où le coefficient de traînée totale  $k_w = \frac{1}{2}C_x\rho\Sigma$  est choisi égal à 0.1. Cette valeur est vraisemblable compte tenu de la masse et de l'inertie du système. Le cas d'un vent variant lentement est considéré ici, selon le modèle de marche aléatoire suivant :  $\ddot{p}_w = k_w\xi$  avec  $\dot{p}_w(0) = [-2.50, 3.00, 1.50]m/s$ ,  $k_w = 1$  et  $\xi$  un bruit blanc centré de spectre un. Une distance à la cible de  $d^* = 2$  (i.e.  $c^* = 0.46$ ) est considérée. Les figures 2.11 et 2.12 montrent clairement que le contrôleur modifié assure de meilleures performances que le contrôleur initial.

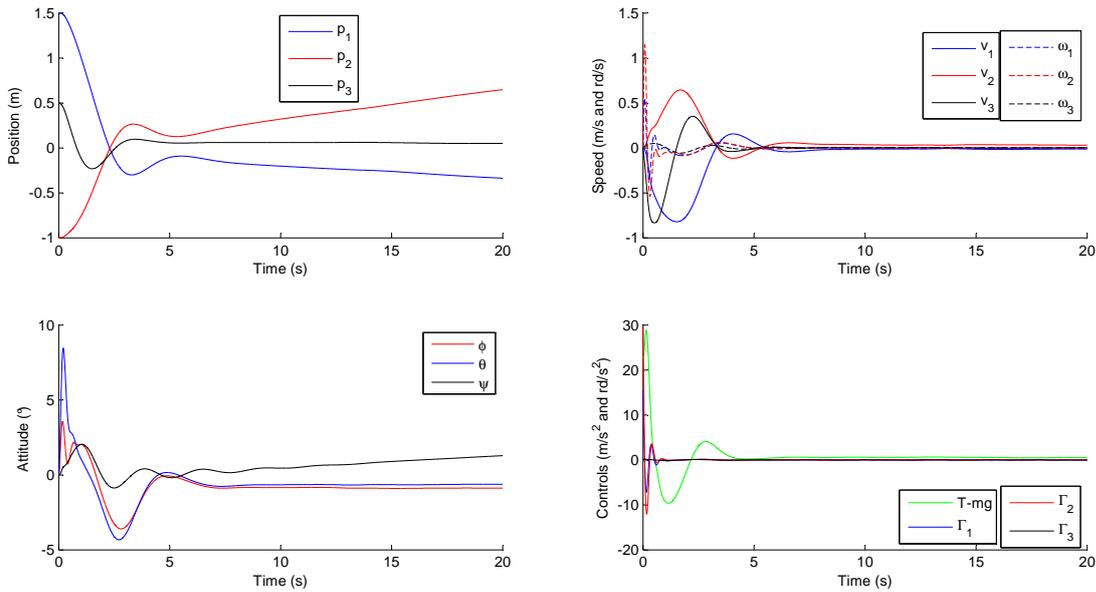


FIGURE 2.11 – Vent variant lentement, sans action de réjection,  $d^* = 1$

### 2.11.3 Loi de commande obtenue par une synthèse non lisse

Afin de comparer en simulation l'effet du choix d'un gain optimisé par synthèse non lisse pour rejeter le vent, on a réalisé deux simulations avec le modèle de dynamique horizontale linéarisée : l'une avec un vent constant, l'autre avec un vent lentement variable. On a aussi représenté sur la figure 2.13 le résultat obtenu sans vent, avec une condition initiale de l'erreur égale à 1. On constate que la performance de la boucle fermée avec le gain optimisée est moins grande, avec en particulier un comportement plus oscillatoire qui sera expliqué sur le lieu des racines plus loin dans ce paragraphe. En revanche, comme attendu, en présence de vent constant, la figure 2.14 montre que le gain optimisé le rejette plus efficacement, ce qui était souhaité. La figure 2.15 montre qu'un vent lentement variable est aussi mieux rejeté avec le contrôleur optimisé.

Enfin, on peut comparer les lieux des racines obtenus avec l'ancien et le nouveau gain. Le lieu des racines avec l'ancien gain est représenté sur la figure

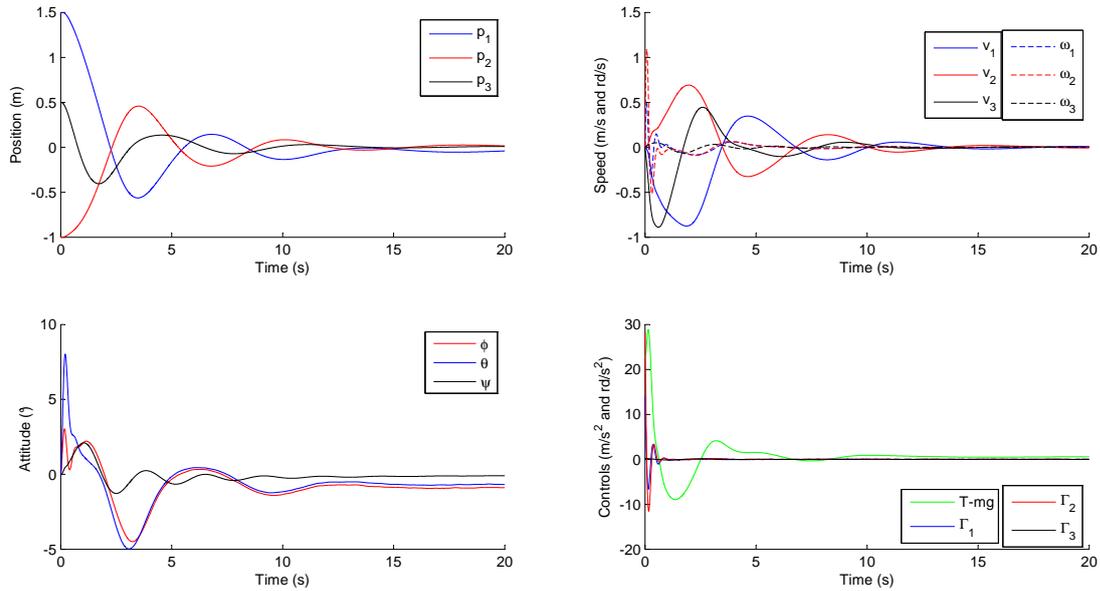


FIGURE 2.12 – Vent variant lentement, avec réjection,  $d^* = 1$

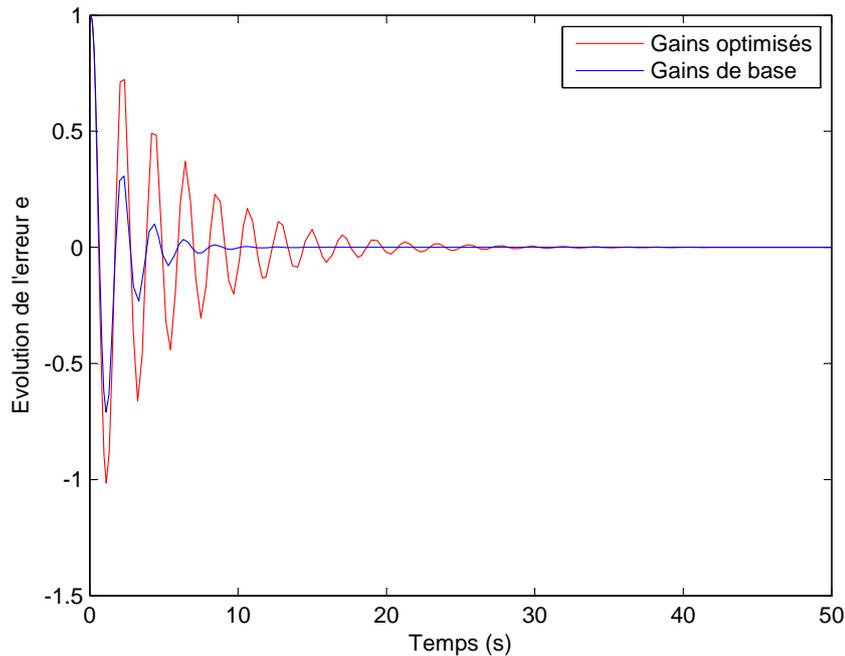


FIGURE 2.13 – Evolution de l'erreur de position longitudinale sans vent

2.16, zoomé sur la figure 2.17; le lieu des racines avec le nouveau gain est représenté sur la figure 2.18, zoomé sur la figure 2.19. Alors que la boucle fermée initiale était stable pour toute valeur de  $c^*$  inférieure à environ  $c_M^* \approx 4$ , elle ne l'est plus que jusqu'à  $c_M^* \approx 2.79$  avec le nouveau gain. Avec l'ancien, pour la performance, la partie réelle maximale des pôles était inférieure à  $-0.2$

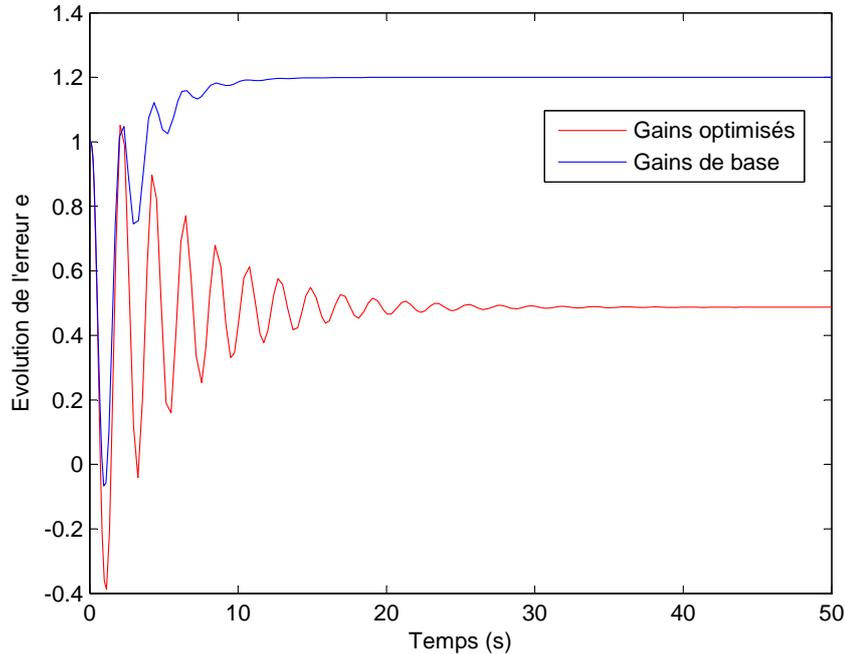


FIGURE 2.14 – Evolution de l'erreur de position longitudinale en présence de vent constant

pour tout  $0.2 < c^* < 3.25$ , alors qu'elle ne l'est désormais que pour tout  $0.38 < c^* < 1.92$ . Pour les valeurs de  $c^*$  assurant la stabilité du système, les pôles sont également plus proches de l'axe des imaginaires purs, induisant un comportement plus oscillatoire qu'avec l'ancien gain.

Ces résultats montrent bien le compromis auquel l'ingénieur se trouve confronté : on ne peut obtenir un contrôleur à la fois robuste à de très grandes variations de la distance inconnue et au vent. Ceci en ayant présent à l'esprit les hypothèses qui ont été faites sur le modèle, en particulier celles relatives aux masses mobiles, qui conduisent à supposer que le véritable drone risque d'osciller davantage que le modèle qui est utilisé ici. Néanmoins, les outils présentés dans ces sections permettent, dans une situation particulière, d'affiner au mieux ce compromis pour la situation considérée et en fonction des connaissances préalables de cette situation -faible présence de vent, connaissance d'une plage de variation réduite pour la distance inconnue, etc.

## 2.12 Résumé

Des lois de commande ont été proposées pour la stabilisation d'un drone VTOL par rapport à une cible plane. La contribution principale de ce travail est de montrer qu'une telle stabilisation peut être mise en œuvre avec un ensemble capteurs minimal (caméra monoculaire et gyromètres), et avec une connaissance extrêmement limitée de l'environnement. En particulier, une

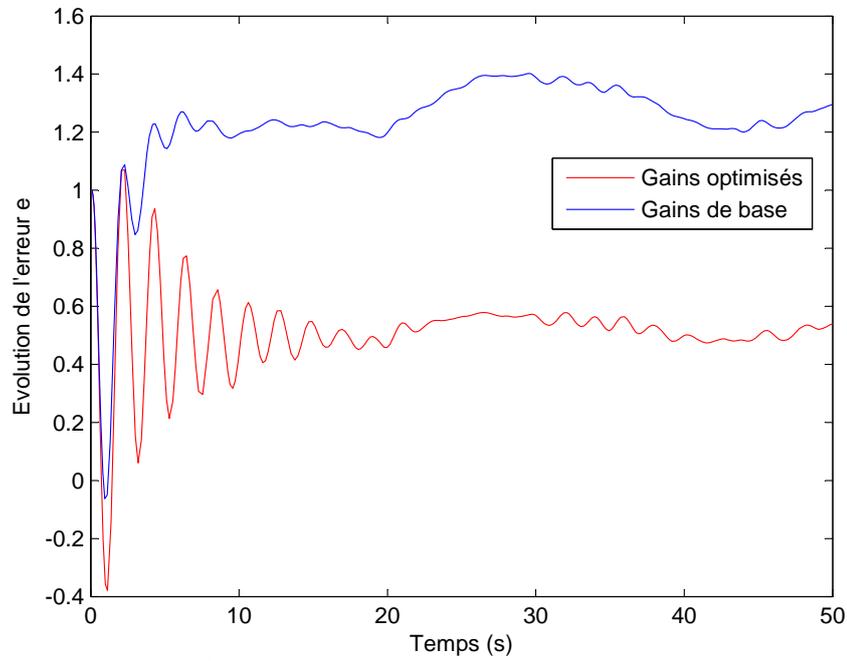


FIGURE 2.15 – Evolution de l’erreur de position longitudinale en présence de vent variant lentement

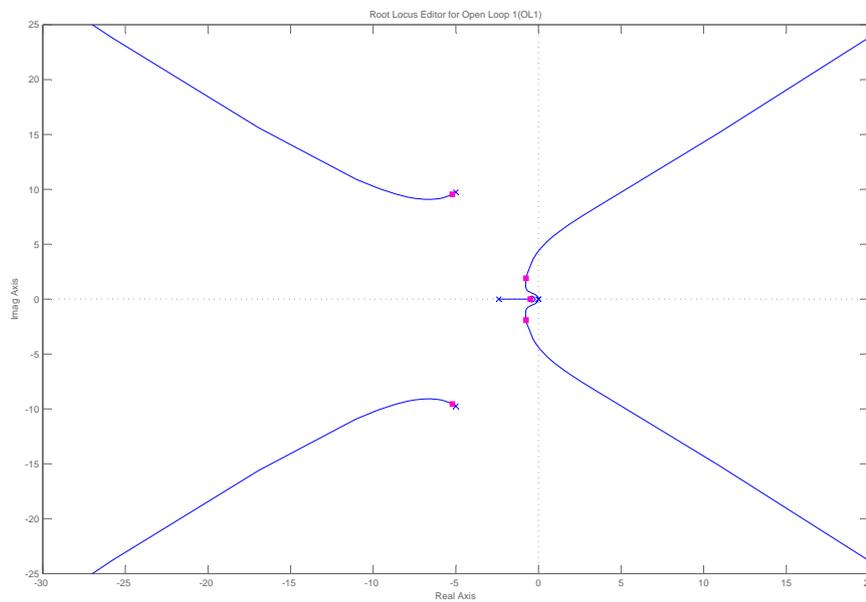


FIGURE 2.16 – Lieu des racines avec le gain de base

connaissance précise de l’orientation de la cible et de la distance du drone à la

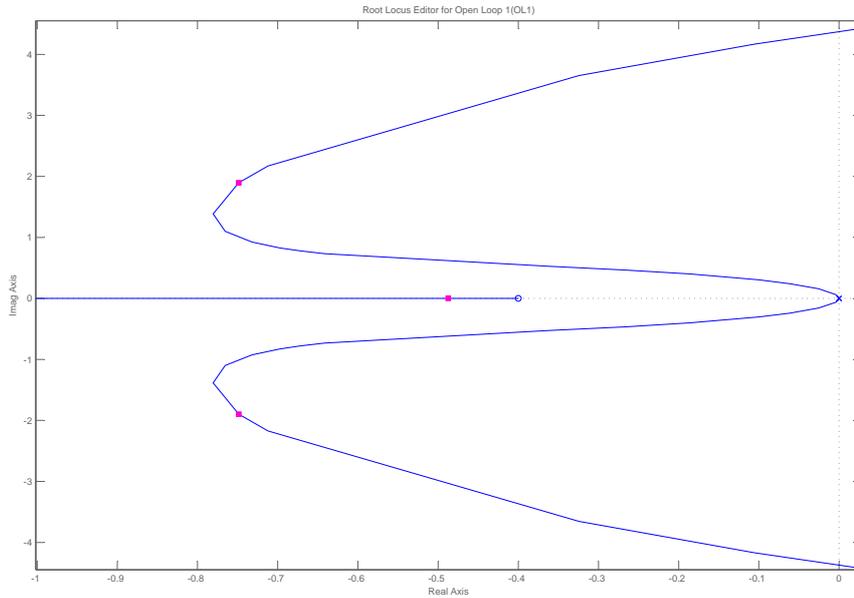


FIGURE 2.17 – Lieu des racines zoomé avec le gain de base

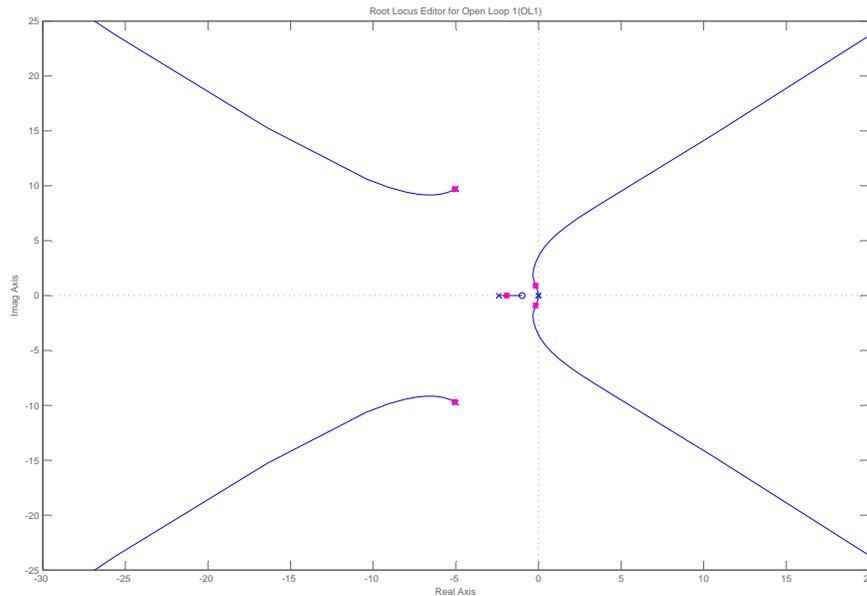


FIGURE 2.18 – Lieu des racines avec le gain optimisé

cible à la pose de référence ne sont pas nécessaires. La connaissance de l'attitude du drone n'est pas non plus requise. Des conditions de stabilité explicites ont été obtenues et peuvent être utilisées pour garantir la stabilité du contrôleur proposé dans une plage de conditions opérationnelles donnée. L'approche, motivée par (Benhimane and Malis, 2007), repose sur la définition d'un nouveau vecteur d'erreur calculé à partir de la matrice homographique. En utilisant ce vecteur, le découplage classique (local) entre les axes vertical, de roulis, de

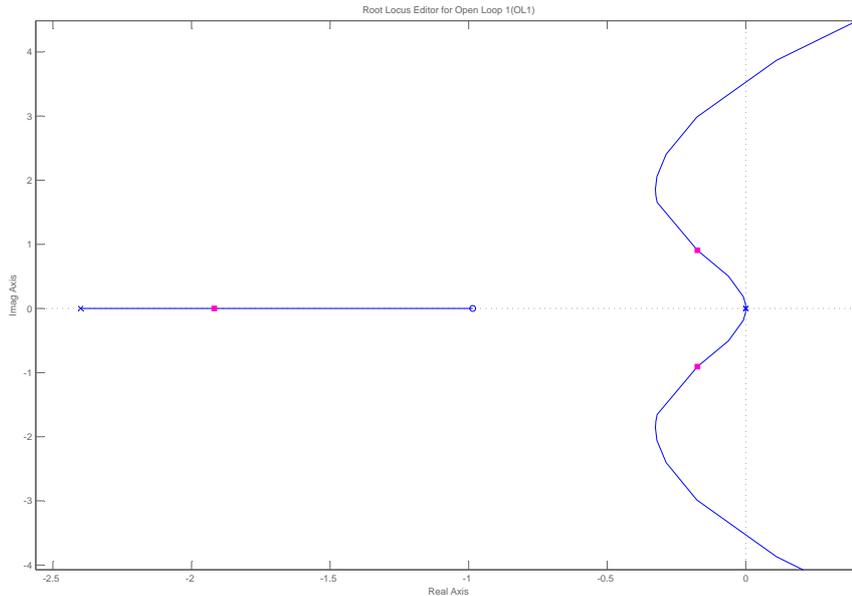


FIGURE 2.19 – Lieu des racines zoomé avec le gain optimisé

tangage et de cap a pu être étendu à notre contexte de commande référencée vision. Outre la définition d’une loi de commande et l’analyse de stabilité, différents aspects pratiques ont été étudiés, tels que l’influence de l’orientation de la caméra sur la définition de la loi, le rejet d’une dynamique non modélisée, et le réglage des gains. L’approche a été validée en simulation. Ce travail réclame des validations expérimentales, dont on parlera dans un chapitre dédié.

## 2.13 Limites de l’approche et utilité d’une approche non-linéaire

La principale limite de l’approche proposée dans cette section réside dans l’hypothèse de linéarité. Cette hypothèse ne permet pas de garantir la stabilité -sans mentionner les performances- du drone ainsi piloté hors du domaine de linéarité.

Sur la figure 2.20 une telle situation est présentée. Des conditions initiales éloignées de la position d’équilibre ont été utilisées. Plus précisément, on a choisi les conditions initiales suivantes :  $p_0 = (45, -30, 15)^T$ ,  $\phi_0 = 30^\circ$ ,  $\theta_0 = -20^\circ$ ,  $\psi_0 = 15^\circ$ , les autres valeurs initiales étant les mêmes que pour la figure 2.9

On constate sur la figure 2.20 que ces conditions, pourtant assez peu éloignées de l’équilibre en ce qui concerne les angles de roulis et tangage, conduisent à une instabilité du drone. Notons cependant que l’approche linéaire ne conduit pas pour autant nécessairement à l’instabilité, comme le montre l’exemple suivant, figure 2.21, obtenu dans le cas d’une cible non horizontale avec des condi-

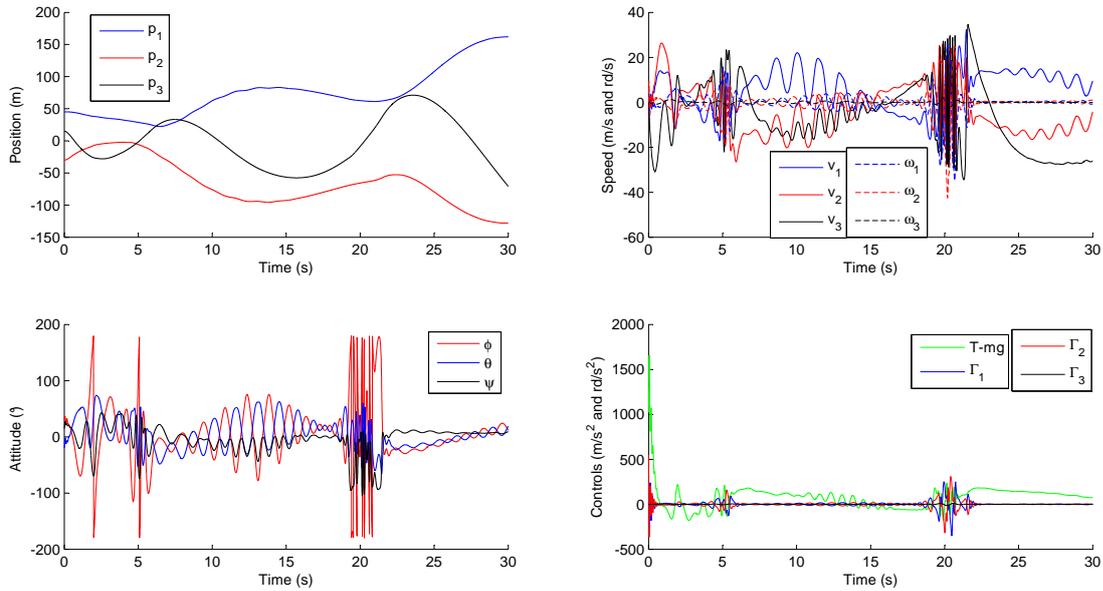


FIGURE 2.20 – Cas limite avec des erreurs initiales grandes

tions initiales extrêmement sévères :  $p_0 = [45; -30; 15]^T$ ,  $v_0 = [1.5; -1; .5]^T$ ,  $\phi_0 = -50^\circ$ ,  $\theta_0 = 50^\circ$ ,  $\psi_0 = 26^\circ$ .

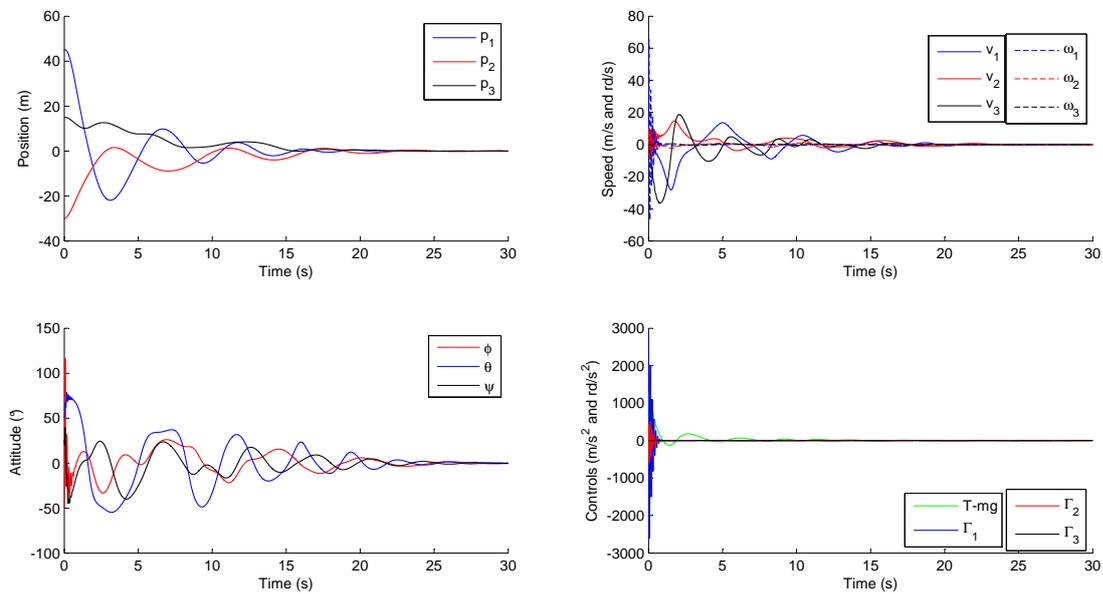


FIGURE 2.21 – Cas limite avec des erreurs initiales grandes

On constate sur cette figure que le drone reste -relativement- stable malgré ces erreurs initiales très grandes.

Pour des applications où les grandeurs décrivant l'état du drone sont hors du domaine de linéarité, il est souhaitable de disposer d'une approche dans laquelle la stabilité est *garantie* par construction, c'est-à-dire une approche qui

prend en compte les non-linéarités du modèle. C'est l'objet du chapitre suivant.

## 2.14 Critique des résultats

La principale limite des développements proposés dans ce chapitre est celle qui vient d'être formulée : l'hypothèse de linéarité réduit en effet leur domaine de validité. Outre ce point dont le chapitre qui suit est une réponse, différents points pourraient être davantage explorés : si un résultat montre comment une dynamique non modélisée telle que le vent peut être prise en compte, une analyse plus systématique de cette situation pourrait être menée. En particulier, un modèle plus précis de la dynamique du vol de ces engins pourrait être considérée. Dans ce cas, les approches analytiques proposées trouveraient sans doute leurs limites, et il faudrait faire un usage plus développé des méthodes de synthèse structurée et d'analyse robuste présentée en fin de chapitre.

## Chapitre 3

# Stabilisation en un point par des approches non-linéaires

*Allez honneurs, plaisirs, qui me livrez la guerre,  
Toute votre félicité  
Sujette à l'instabilité  
En moins de rien tombe par terre,  
Et comme elle a l'éclat du verre  
Elle en a la fragilité.*

Pierre Corneille

### Résumé

Ce chapitre étudie comme le précédent la stabilisation d'un drone observant une cible plane, mais sans faire d'hypothèse de linéarité.

Plusieurs résultats théoriques de stabilisation sont démontrés, qui exploitent des hypothèses plus ou moins fortes sur l'orientation du plan objet observé et sur l'utilisation d'un ensemble plus ou moins minimaliste de capteurs. Des saturations sont introduites dans l'expression des lois de commande pour éviter certaines situations singulières.

On se place tout d'abord dans le contexte d'une modélisation générique et l'on considère les cas tout actionné et sous actionné. Une version simplifiée de cette dernière loi est proposée qui repose sur la théorie des perturbations singulières. On montre ensuite que l'asservissement visuel de drones peut être mis sous une forme qui en fait une application des résultats précédents. Enfin, une version adaptative de la commande est définie, qui vise à accroître la performance du système stabilisé en estimant la normale au plan objet.

Une deuxième partie s'intéresse aux mesures de vitesse et de verticale en repère local, mesures qui sont nécessaires aux lois précédemment définies. On y présente des méthodes pour obtenir ces mesures, par des mesures alternatives ou des schémas d'estimation.

Ces résultats ont donné lieu à une publication : (de Plinval et al., 2012).

### 3.1 Développements de lois de commande

On l'a dit, l'approche présentée au chapitre précédent souffre de la limite inhérente aux approches linéaires : elle suppose que les variables considérées conservent des valeurs suffisamment petites pour que l'hypothèse linéaire se justifie. Dans ce chapitre, on propose de revisiter l'approche précédente sous une forme non-linéaire, à partir d'un point de départ similaire. Dans le même temps, on généralise le problème à l'étude de la stabilisation de véhicules sous-actionnés par une loi de commande basée capteurs -et non plus seulement vision. Ainsi, la vision est un cas particulier de capteurs plus génériques susceptibles de fournir une mesure incertaine de position, cette expression étant définie plus loin. Une classe de retours de sortie non-linéaires assurant une stabilisation semi-globale en dépit d'incertitude potentiellement grandes sur la mesure de position est définie. L'application au cas de l'asservissement visuel de drones VTOLs à partir d'une caméra est présentée. En particulier, on montre qu'une stabilisation semi-globale peut être obtenue à partir de mesures homographiques, avec peu d'informations sur l'environnement. Les résultats de simulations montrés plus loin témoignent de l'efficacité de l'approche.

#### 3.1.1 Résultat fondamental

On suppose que les mesures suivantes sont disponibles :

$$\begin{cases} \sigma &= R^T M p \\ \gamma &= g R^T b_3 \\ v &= R^T \dot{p} \\ \omega & \end{cases} \quad (3.1)$$

où

- $M$  est une matrice constante de taille  $3 \times 3$ , définie positive et plus ou moins bien connue selon les contextes applicatifs comme on le verra ;
- la mesure  $\sigma$  est associée à la position du véhicule ;
- $\gamma$  est la projection du vecteur de gravité dans le repère engin ;
- $v$  est le vecteur de vitesse linéaire exprimée en repère engin ;
- $\omega$  est la vitesse angulaire, elle aussi exprimée en repère engin.

La présence de la matrice  $R^T$  dans les expressions de  $\sigma$  et  $\gamma$  exprime le fait que ces mesures sont elles aussi exprimées en repère engin. Il s'agit d'une situation typique avec des capteurs embarqués. Une discussion de ces mesures et de la façon de les obtenir est proposée dans la section 3.2 ci-après.

Dans la plupart des études dédiées à la stabilisation de drones sous-actionnés, la matrice  $M$  est supposée égale à l'identité, de sorte que la relation entre la fonction de mesure et les coordonnées cartésiennes est parfaitement connue. Différentes lois de commande garantissant une stabilité semi-globale à l'origine sur le système (1.19) ont été proposées dans ce cas (voir par exemple (Pflimlin et al., 2007; Hua et al., 2009b)). Dans cette section, on montre que les

mêmes propriétés de stabilité peuvent être obtenues dans le cas d'une matrice  $M$  incertaine, et nous définissons des conditions de stabilité sur les gains de la loi en fonction de la "taille" de cette incertitude. Afin de faire comprendre l'idée sous-jacente à la définition et à l'analyse de la loi, nous considérons tout d'abord le cas plus simple d'un système tout actionné.

### 3.1.1.1 Le cas tout actionné

Considérons la dynamique de position d'un corps rigide tout actionné avec des entrées de force fixées dans le repère engin, i.e.

$$\ddot{p} = Ru \tag{3.2}$$

où  $u \in \mathbb{R}^3$  représente l'entrée de commande, et supposons que les mesures  $\sigma$  et  $v$  définies ci-dessus sont disponibles pour la loi de commande. L'étude du linéarisé de ce modèle, et la recherche d'une loi linéaire stabilisante conduit à un retour très classique en position et vitesse. C'est cette idée qui va être exploitée ici dans le cadre non-linéaire et en présence d'une mesure de position incertaine : un retour en position (incertaine) et en vitesse. Ce retour va cependant être choisi saturé en raison du cas sous-actionné qui suit et dans lequel ces saturations sont nécessaires pour éviter une singularité de la loi de commande. Nous proposons donc ici un résultat de commande pour ce système tout actionné, utilisant un retour de position-vitesse saturé, résultat qui est la base de celui, plus complexe, que l'on présente dans la section suivante pour le cas sous-actionné.

Nous définissons à présent une classe de fonctions dites "de saturation". Il nous a fallu en effet, pour synthétiser une loi de commande et démontrer la stabilité qu'elle induit, définir une classe particulière de fonctions, ayant des propriétés très spécifiques, bien qu'elle soient, globalement, proches des fonctions de saturation classiquement utilisées.

Une fonction  $\text{sat} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  est appelée une *fonction de saturation* si

- i)* (Structure de la fonction de saturation) il existe :
  - un vecteur de paramètres  $\delta = [\delta_m; \delta_M]$  avec  $0 < \delta_m < \delta_M$  ;
  - une fonction  $s_\delta$  paramétrée par ce vecteur,  $s_\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\text{sat}(x) = s_\delta(|x|^2)x$  ;
- ii)* (Propriété "classique" de saturation) la fonction  $\tau \in \mathbb{R}^+ \rightarrow s_\delta(\tau^2)\tau \in \mathbb{R}^+$  (c'est-à-dire, d'une façon plus informelle, la "fonction"  $|x| \rightarrow |\text{sat}(x)|$ ) est positive, non décroissante, bornée par  $\delta_M$  sur  $\mathbb{R}^+$ , et vaut l'identité sur  $[0, \delta_m]$
- iii)* (Trois propriétés techniques) on a :
  - a)*  $s'_\delta(\tau) \leq 0$  pour tout  $\tau \geq 0$
  - b)* la fonction  $\tau \mapsto \tau s'_\delta(\tau)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$

**Remarque importante :** cette définition des fonctions de saturation est complexe. Il faut en retenir essentiellement que la fonction  $x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{sat}(x)$  :

1. est une fonction classique de saturation (ie essentiellement l'identité lorsque la norme du vecteur  $x$  est faible, et une division par cette même norme lorsque celle-ci est supérieure à une borne donnée) ;
2. possède en outre des propriétés techniques spécifiques qui ont été ajoutées pour permettre de stabiliser le système en présence de cette saturation. C'est-à-dire pour définir une fonction de Lyapunov et pour montrer que celle-ci décroît.

L'exemple qui suit montre du reste que ces fonctions sont très proches des fonctions de saturation "classiques".

Remarquons aussi que, des propriétés ii), découle que :  $\tau s_\delta(\tau) \longrightarrow \infty$  quand  $\tau \longrightarrow \infty$ , propriété qui servira dans les démonstrations.

Un exemple de fonction de saturation est donnée par la fonction  $x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{sat}(x) = s_\delta(|x|^2)x$  avec :

$$s_\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \leq \delta_m^2 \\ \frac{\delta_M}{\sqrt{\tau}} - \frac{(\delta_M - \delta_m)^2}{\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau} + \delta_M - 2\delta_m)} & \text{if } \tau > \delta_m^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

La figure 3.1 représente ces deux fonctions :  $\tau \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow s_\delta(\tau^2)\tau$ , c'est-à-dire informellement  $|x| \longrightarrow |\text{sat}(x)|$ , ainsi que  $\tau \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow s_\delta(\tau)$ , pour  $\delta = [0.9; 1]$ . On constate que la première des deux est bien une fonction de saturation "classique".

**Proposition 3** (Loi de commande du système tout actionné)

Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}$  deux fonctions de saturation avec  $\delta_M = 1$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \text{sat}_\delta(x) = s_\delta(|x|^2)x, \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(x) = \bar{s}_{\bar{\delta}}(|x|^2)x$ . Supposons que  $M$  est définie positive et considérons des gains quelconques  $k_1, k_2 > 0$  tels que

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\| \|M\| \sup_\tau (s_\delta(\tau) + 2\tau |s'_\sigma(\tau)|) \\ k_2 \bar{\delta}_m > k_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Alors, la loi de commande

$$u = -k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) - k_2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(v) \quad (3.5)$$

garantit la stabilité asymptotique globale et la stabilité exponentielle locale de l'origine du Système (3.2).

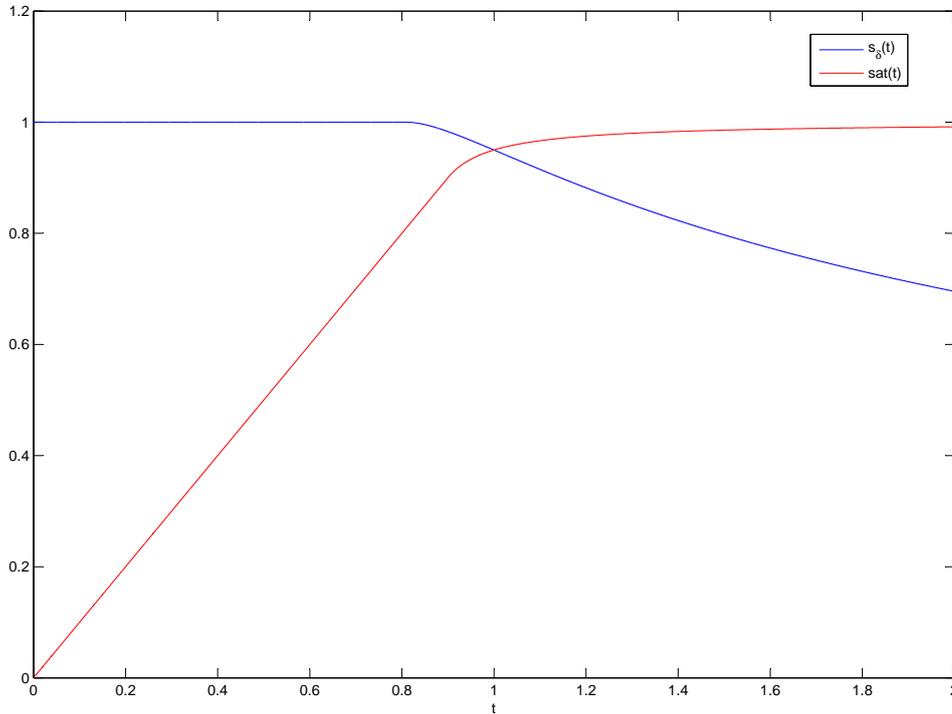


FIGURE 3.1 – Représentation de la fonction saturation telle que définie par (3.3) pour  $\delta = [0.9; 1]$ . La courbe rouge est la saturation "classique",  $|sat(x)|$ , tandis que la courbe bleue est la fonction  $s_\delta$ .

La preuve en est donnée dans un article reproduit en annexe, section A.4. La figure 3.2 représente cette loi de commande.

Il suit de la définition d'une fonction de saturation que la loi de commande ci-dessus est bornée par  $k_1 + k_2\bar{\delta}_M$ . Ainsi, la Proposition 3 fournit une loi de commande bornée qui garantit la stabilité asymptotique *globale* pour un grand ensemble de fonctions de mesure de position paramétrées par  $M$ . En outre, elle fournit des conditions de stabilité définies à partir de la matrice  $M$  et des gains de commande. Cela peut être utilisé pour garantir la stabilité connaissant des informations a priori sur les mesures. Puisqu'on suppose que  $M$  est définie positive, il suit de ces conditions que la stabilité peut toujours être obtenue en choisissant  $k_1$  assez petit par rapport à  $k_2$ . Notons aussi que la positivité de  $k_1, k_2$  garantit la stabilité du système lorsque  $M$  est définie positive et symétrique.

Dans le paragraphe suivant, le résultat précédent est étendu au cas sous-actionné.

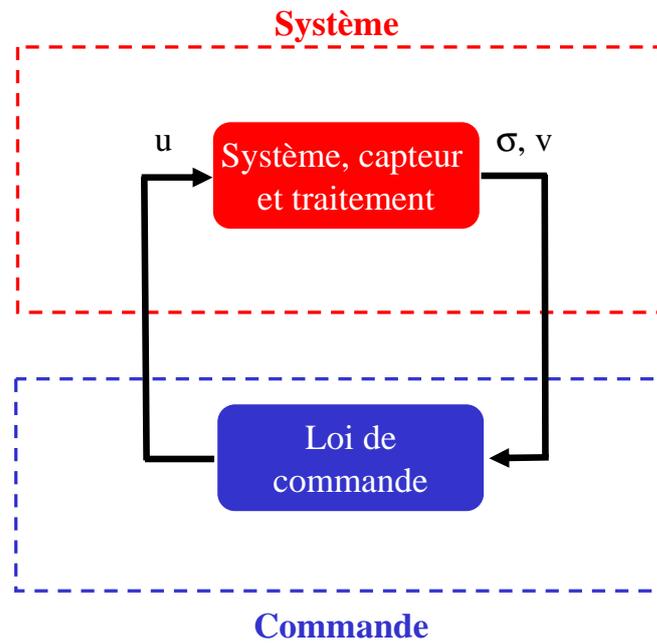


FIGURE 3.2 – Schéma bloc représentant la loi de commande du système tout actionné, Proposition 3

### 3.1.1.2 Le cas sous-actionné

Le principal résultat de cette section est maintenant formulé, qui s'applique au modèle sous-actionné défini par les équations (1.19).

**Proposition 4** (Loi de commande du cas sous-actionné)

Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  deux fonctions de saturation avec  $\delta_M = 1$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \text{sat}_\delta(x) = s_\delta(|x|^2)x, \overline{\text{sat}}_\delta(x) = \overline{s}_\delta(|x|^2)x$ . Supposons que  $M$  est définie positive et considérons des gains  $k_1, k_2 > 0$  tels que :

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\| \|M\| \sup_\tau (s_\delta(\tau) + 2\tau |s'_\sigma(\tau)|) \\ k_2 \overline{\delta}_m > k_1 \\ k_1 + k_2 \overline{\delta}_M < g \end{cases} \quad (3.6)$$

Définissons une augmentation dynamique :

$$\dot{\eta} = \eta \wedge \omega - k_3(\eta - \sigma), \quad k_3 > 0 \quad (3.7)$$

ainsi que la loi de commande :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_2}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(b_1) R^T \dot{\mu} \\ \omega_2 = \frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_1}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(b_2) R^T \dot{\mu} \\ u = \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $\bar{\mu}, \mu$ , et le terme de feedforward  $R^T \dot{\mu}$  sont définis selon

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &:= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta(\eta) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(v) \\ \mu &:= R\bar{\mu} \\ R^T \dot{\mu} &= -k_1 k_3 [s_\delta(|\eta|^2) I_3 + 2s'_\sigma(|\eta|^2) \eta \eta^T] (\eta - \sigma) \\ &\quad + k_2 [\overline{s}_\delta(|v|^2) I_3 + 2\overline{s}'_\delta(|v|^2) v v^T] (\gamma - u b_3) \end{aligned}$$

Alors,

- i) il existe  $k_{3,m} > 0$  tel que, pour tout  $k_3 > k_{3,m}$ , le système en boucle fermée (1.19)-(3.8) augmenté de la dynamique (3.7) est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable avec un domaine de convergence défini par  $\{\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)| b_3\}$ .
- ii) si  $M_s$  et  $M_a$  commutent, la même conclusion est obtenue en remplaçant la première inégalité de (3.6) par :

$$k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\| (\|M_a\| \sup_\tau s_\delta(\tau) + \|M_s\| \sup_\tau 2\tau |s'_\sigma(\tau)|) \quad (3.9)$$

La preuve est donnée dans un article reproduit en annexe, section A.4. La figure 3.3 représente cette loi de commande.

Commentons le résultat ci-dessus, en relation avec le cas tout actionné présenté dans la Proposition 3.

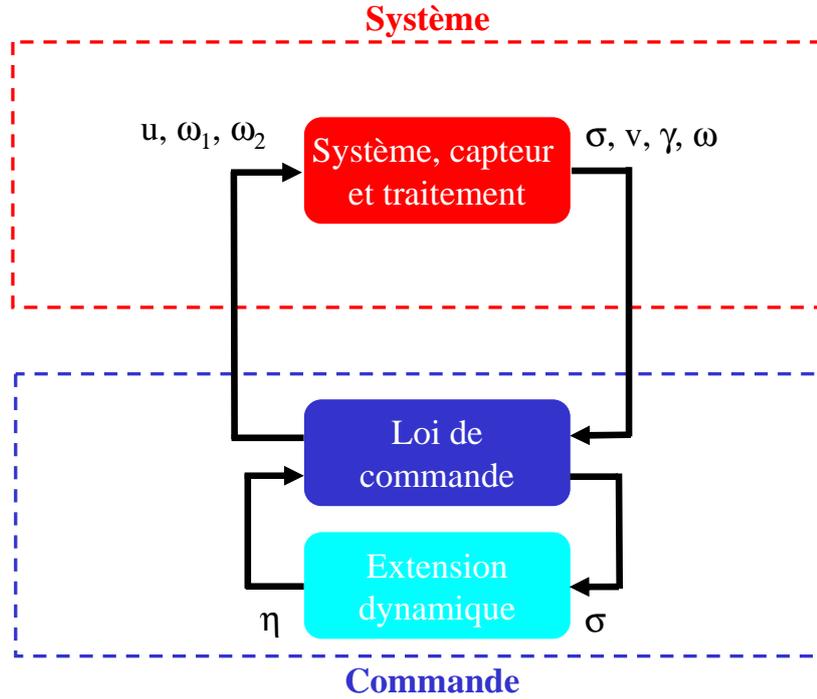


FIGURE 3.3 – Schéma bloc représentant la loi de commande du système sous actionné, Proposition 4

- Le deuxième et le troisième termes de la définition de  $\bar{\mu}$  rappellent la loi de commande (3.5), avec  $\sigma$  remplacé par  $\eta$ . Au vu de (3.7), cette dernière variable peut être considérée comme une "version filtrée" de  $\sigma$ . Notons que sa dérivée est connue, puisqu'elle est définie explicitement par (3.7), alors que la dérivée de  $\sigma$  ne l'est pas, puisque  $M$  est inconnue. Cette observation permet de calculer le terme  $R^T \dot{\mu}$  dans (3.8). En comparaison du cas tout actionné, l'objectif est d'obtenir la convergence de  $\bar{\mu}$  vers  $|\bar{\mu}|b_3$  via la définition de  $u$ ,  $\omega_1$  et de  $\omega_2$ .
- Ce résultat assure ensuite que l'accélération linéaire converge asymptotiquement vers l'accélération linéaire du cas tout actionné définie par (3.2)-(3.5).
- Notons que  $\omega_3$ , qui commande la dynamique de cap, n'est pas impliqué dans cet objectif. Ainsi, ce terme peut être déterminé librement. En pratique cependant, certains choix sont meilleurs que d'autres (voir section 3.1.3).
- Finalement, il vient de (3.6) que

$$|k_1 \text{sat}_\delta(\eta) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(v)| \leq k_1 + k_2 \bar{\delta}_M < g = |\gamma|$$

Cela garantit que  $\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)|b_3$  dès lors que  $gb_3^T R(0)b_3 > -(k_1 + k_2 \bar{\delta}_M)$  et cela assure, à partir de la Propriété *i*) du théorème, la stabilité semi-globale de  $(\eta, p, \xi, R) = (0, 0, 0, I_3)$ . Notons que d'un point de vue

expérimental, ce domaine de convergence en orientation est largement suffisant.

- Cette approche par saturations n'est pas sans rappeler différentes études. Ainsi de (Teel, 1992) qui utilise des saturations imbriquées, et (Marchand and Hably, 2005b; Marchand and Hably, 2005a) qui en sont des améliorations. Aussi (Isidori et al., 2003), dans lequel en particulier le terme de feedforward utilise une saturation pour éviter une singularité. Enfin, (Metni et al., 2003), dans lequel des saturations utilisées dans les étapes du backstepping permettent d'éviter aux angles d'orientation du drone d'excéder une valeur donnée.
- L'extension dynamique (3.7) introduit le gain complémentaire  $k_3$  avec une condition de stabilité associée (une condition explicite sur  $k_3$  peut être déduite de la preuve de stabilité, mais son expression est complexe et probablement très conservatrice) . Pour éviter cette condition supplémentaire, une expression plus simple de la loi avec des propriétés de robustesse similaires doit être proposée.

**Illustration sur un cas particulier** Nous illustrons maintenant la Proposition 4 sur un exemple qui sera utile dans le cadre de l'application à l'asservissement visuel qui nous intéresse dans ce travail de thèse.

**Exemple :** Supposons que  $M = \alpha I_3 + S(\beta)$  avec  $\alpha > 0$  et  $S$  la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel, i.e.  $S(\beta)x = \beta \wedge x$ . Alors,  $M_s = \alpha I_3$  et  $M_a = S(\beta)$  commutent de sorte que la condition de stabilité (3.9) s'applique. Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  deux fonctions de saturation définies par (3.3). Les conditions de stabilité sur  $k_1, k_2$  sont alors données par :

$$\begin{cases} k_1, k_2 & > 0 \\ k_2 \overline{\delta}_m & > k_1 \\ k_1 + k_2 \overline{\delta}_M & < g \\ \alpha k_2^2 & > k_1 |\beta| \left( |\beta| + \frac{2\alpha}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (3.10)$$

Remarquons que dans la Proposition 5 la garantie d'un angle maximal avec la verticale exprimée en repère local rappelle le résultat obtenu dans (Metni et al., 2003).

### 3.1.2 Loi de commande simplifiée

#### Proposition 5 (Loi de commande simplifiée)

Supposons que les hypothèses de la Proposition 4 sont vérifiées, avec les hypothèses supplémentaires suivantes sur les gains  $k_1, k_2$  :

$$k_1 + k_2 \bar{\delta}_M \leq \frac{g}{\sqrt{2}} \quad (3.11)$$

Définissons la loi de commande :

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(v) \\ \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $k_4 > 0$ . Alors, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable, et les solutions du système convergent à l'origine si  $b_3^T R(0) b_3 > \frac{k_1 + k_2 \bar{\delta}_M}{g}$ . En outre, sous ces conditions, l'angle entre la verticale exprimée en repère local et la verticale exprimée en repère inertiel demeure strictement inférieur à  $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{k_1 + k_2 \bar{\delta}_M}{g}\right)$ .

La figure 3.4 représente cette loi de commande simplifiée.

### 3.1.3 Application à l'asservissement visuel

On considère à présent le cas d'un asservissement visuel sur une image de référence, tel que décrit au chapitre 2.

#### 3.1.3.1 Définition d'un vecteur d'erreur

Dans cette section, supposant le plan objet vertical, on montre que des mesures  $\sigma$  et  $\gamma$  de la forme requise par (3.1) peuvent être obtenues à partir de la matrice homographique  $H$ . Plus précisément, soit :

$$\begin{cases} \sigma &= Hb_2 \wedge Hb_3 - Hb_1 \\ \gamma &= gHb_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

A partir de l'hypothèse  $n_3^* = 0$ , l'on peut vérifier que :

$$\begin{cases} \sigma &= R^T M \left(\frac{n^*}{d^*}\right) p \\ \gamma &= gR^T b_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

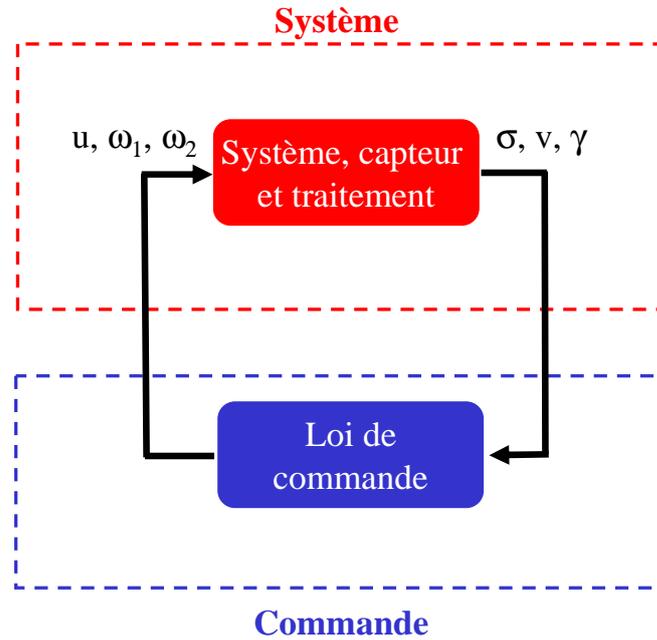


FIGURE 3.4 – Schéma bloc représentant la loi de commande simplifiée, Proposition 5

avec pour un vecteur  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$  :  $M(\tau) \triangleq \tau_1 I + S(\tau_2 b_3)$ .

Des méthodes pour relaxer l'hypothèse de mur vertical sont proposées en section 3.2 ci-après.

### 3.1.3.2 Asservissement visuel

*L'aube spongieuse et molle était trouée par moments  
de louches passées de lumière, qui boitaient sur les nuages bas  
comme le pinceau tâtonnant d'un phare.*

Julien Gracq

Nous supposons que la vitesse linéaire  $v$  est mesurée dans le repère engin (voir section 3.2 à ce sujet). Dans ce cas, en définissant le vecteur d'erreur par (3.13) la Proposition 4 s'applique directement avec  $M = M\left(\frac{n^*}{d^*}\right)$  et par (3.10) nous déduisons que la loi de commande (3.8) assure une stabilisation semi-globale à la pose de référence sous réserve de conditions sur les gains. La proposition suivante formalise ce résultat.

**Proposition 6** (Asservissement visuel)

Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  deux fonctions de saturation avec  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \text{sat}_\delta(x) = s_\delta(|x|^2)x, \overline{\text{sat}}_\delta(x) = \overline{s}_\delta(|x|^2)x$ . Considérons des gains  $k_1, k_2 > 0$  tels que :

$$\begin{cases} n_1^* > 0 \\ k_1, k_2 > 0 \\ k_2 \overline{\delta}_m > k_1 \\ k_1 + k_2 \overline{\delta}_M < g \\ n_1^* d^* k_2^2 > k_1 |n_2^*| \left( |n_2^*| + \frac{2n_1^*}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

Définissons une augmentation dynamique :

$$\dot{\eta} = \eta \wedge \omega - k_3(\eta - \sigma), \quad k_3 > 0 \quad (3.16)$$

ainsi que la loi de commande :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_2}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(b_1) R^T \dot{\mu} \\ \omega_2 = \frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_1}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(b_2) R^T \dot{\mu} \\ u = \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $\bar{\mu}, \mu$ , et le terme de feedforward  $R^T \dot{\mu}$  sont définis selon

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &:= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta(\eta) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(v) \\ \mu &:= R \bar{\mu} \\ R^T \dot{\mu} &= -k_1 k_3 [s_\delta(|\eta|^2) I_3 + 2s'_\sigma(|\eta|^2) \eta \eta^T] (\eta - \sigma) \\ &\quad + k_2 [\overline{s}_\delta(|v|^2) I_3 + 2\overline{s}'_\delta(|v|^2) v v^T] (\gamma - u b_3) \end{aligned}$$

Alors, il existe  $k_{3,m} > 0$  tel que, pour tout  $k_3 > k_{3,m}$ , le système en boucle fermée (1.19)-(3.8) augmenté de la dynamique (3.7) est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable avec un domaine de convergence défini par  $\{\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)| b_3\}$ .

Cette loi de commande est illustrée sur la figure 3.5

Notons que la première condition, qui assure que  $M$  est définie positive, signifie essentiellement que la caméra "fait face" à la cible à la pose de référence. C'est une hypothèse naturelle d'un point de vue applicatif. Lorsque des bornes (larges) sont connues pour  $d^* : d_{\min} \leq d^* \leq d_{\max}$  et  $n_1^* \geq n_{1\min}$ , et en se souvenant que  $|n^*| = 1$ , la dernière condition de l'équation (3.15) peut être remplacée par :

$$n_{1\min} d_{\min} k_2^2 > k_1 \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \quad (3.18)$$

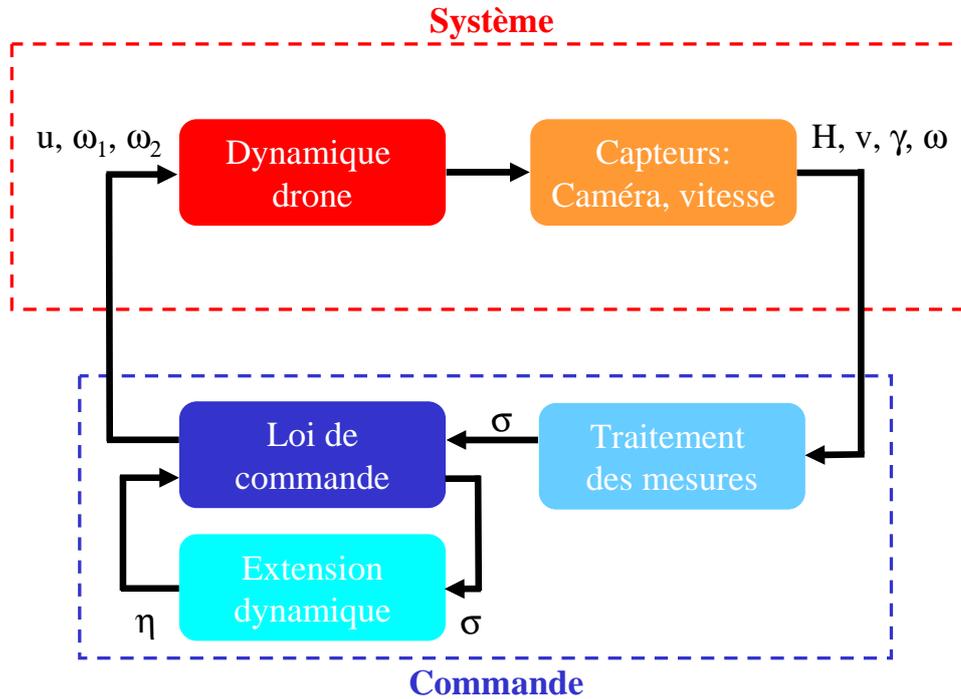


FIGURE 3.5 – Schéma bloc représentant la loi pour l’asservissement visuel, Proposition 6

La définition du vecteur de mesure  $\sigma$  à partir des images (équation (3.13)) montre que celui-ci permet de recouvrir une structure de type passive, plus exactement de forme feedback stricte, chose qui n’est pas possible en observant simplement les points de l’image dans une géométrie projective, puisque (Hamel and Mahony, 2002) montre que seule une géométrie sphérique parvient à ce résultat. La définition de  $\sigma$  a ainsi permis de contourner ce problème.

### 3.1.3.3 Loi de commande en cap

Le degré de liberté en cap n’est pas impliqué dans l’objectif de stabilisation, comme par exemple dans (Mahony and Hamel, 2001). Il importe par ailleurs de maintenir la cible dans le champ de vue de la caméra. Nous proposons d’utiliser la loi suivante :

$$\omega_3 = k_5 H_{21} \tag{3.19}$$

Après convergence de la position, de la vitesse, des angles de roulis et de tangage grâce aux autres termes de la loi de commande, la dynamique de cap sera proche de  $\dot{\psi} \approx -k_5 \sin \psi$ , assurant ainsi la convergence de  $\psi$  vers zéro sauf si  $\psi$  est initialement égal à  $\pi$  (cas en contradiction avec l’hypothèse de visibilité). Une autre propriété souhaitable de cette loi est qu’elle s’annule lorsque  $H_{21} = 0$ , i.e. lorsque la cible est vue -du point de vue du cap- comme elle devrait l’être à la fin du mouvement de stabilisation. Cela signifie que le contrôleur essaie de réduire

l'angle de cap seulement lorsque les erreurs de position ont été significativement réduites. Cela peut aussi se vérifier sur les résultats de simulation. Ceci est à comparer par exemple avec la loi en cap proposée dans (Hamel et al., 2002), où seule la vitesse de cap était annulée par un retour proportionnel en vitesse angulaire.

### 3.1.4 Loi de commande adaptative pour l'asservissement visuel

Les lois de commande établies jusqu'à présent permettent la stabilisation du drone malgré la méconnaissance de la matrice  $M$  reliant le vecteur d'erreur à la vitesse. Cette matrice dépend elle-même de la normale  $n^*$  à l'objet observé et de la distance  $d^*$  à cet objet à la pose de référence. Ne pas chercher à estimer cette matrice implique un certain degré de conservatisme, qui se traduit par une performance moindre. De ce fait, on propose dans cette partie une technique pour estimer cette matrice au cours du vol, et adapter la loi de commande à cette estimation.

Les difficultés de cette approche sont la possibilité d'obtenir une singularité dans l'estimation, et l'absence de théorème de séparation universel en contexte non-linéaire : on ne peut se contenter d'estimer la matrice, et d'intégrer cette estimation dans la loi.

Pour résoudre ces difficultés, nous proposons une loi de commande avec basculement : dans une première étape, la loi de commande non adaptative est utilisée, tandis qu'un processus d'optimisation estime la normale  $n^*$ . Dans un second temps, une loi de commande exploitant cette estimation  $\hat{n}$  de  $n^*$  est proposée. Le processus d'optimisation est défini de façon à interdire à  $\hat{n}$  des valeurs donnant lieu à des singularités.

Notons que nous ne cherchons qu'à estimer la valeur de  $n^*$ , normale au plan objet dans le repère de référence, et non la distance  $d^*$ . En effet, à l'équilibre, cette dernière n'est pas observable. La loi de commande adaptative proposée suppose une étape d'estimation de la normale pendant laquelle une autre loi (comme celles des précédentes sections) est utilisée, puis l'estimée est fixée et la loi adaptative est utilisée.

Notre résultat repose sur le lemme ci-dessous, définissant une loi paramétrique qui est stabilisante pour toute valeur du paramètre  $\hat{n}$  vérifiant certaines propriétés. On notera aussi qu'une hypothèse additionnelle sur l'objet observé a été ajoutée, qui contraint l'angle entre l'axe optique de la caméra et la normale à l'objet à demeurer inférieur à  $45^\circ$ .

**Lemme 1** (Loi paramétrique pour l'asservissement visuel)

Supposons que les hypothèses de la Proposition 6 sont vérifiées, ainsi que la condition suivante :

$$n_1^* > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.20)$$

Définissons la loi de commande paramétrique suivante, en rappelant que  $M(\tau) \triangleq \tau_1 I + S(\tau_2 b_3)$  :

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \gamma + k_1 M(\hat{n})^{-1} \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(v) \\ \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.21)$$

avec  $k_4 > 0$  et  $\hat{n}$  un paramètre constant, normé et vérifiant la même condition que  $n^*$  :  $\hat{n}_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Alors, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable, et les solutions du système convergent à l'origine si  $b_3^T R(0) b_3 > \frac{k_1 + k_2 \bar{\delta}_M}{g}$ .

Remarques :

- la condition  $n_1^* > \frac{\sqrt{2}}{2}$  limite l'angle entre la normale à l'objet et l'axe optique de la caméra à la pose de référence. Cette condition, conservative quoique raisonnable, signifie qu'à la pose de référence, l'angle de vue de l'objet est inférieur à  $45^\circ$ .
- avec ce lemme, il est loisible de définir, indépendamment, une loi d'estimation de  $n^*$ , dès lors que la condition  $\hat{n}_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$  est vérifiée. C'est ce qui est fait dans la proposition suivante.

La preuve de ce lemme est donnée en annexe, section A.7.1. Elle repose sur la réécriture du système obtenu sous une forme similaire à celle du système obtenu avec la loi non adaptative,  $M$  étant remplacé par  $M(n^*)M(\hat{n}^*)^{-1}$ . On montre que cette dernière est bien définie positive. On montre aussi que le procédé mis en œuvre interdit les singularités.

Cette loi paramétrique peut ensuite être couplée à un estimateur de la normale au plan objet. Pour obtenir une estimée de cette dernière, on peut exploiter une mesure qui n'a pas été utilisée jusqu'ici : le flot optique (Franceschini, 2004). Le flot optique peut être décrit comme la vitesse normalisée par la distance au plan objet :

$$\phi_{opt} = \frac{v}{d} \quad (3.22)$$

La distance  $d$  qui apparaît dans cette relation n'est pas la distance  $d^*$  constante de l'engin à la pose de référence à l'objet observé, mais bien la distance, à

chaque instant, entre l'engin et l'objet : cette grandeur *varie* donc au cours du vol. Cependant, il est possible d'obtenir la grandeur  $\frac{v}{d^*}$ , qui est plus exploitable comme on le verra. Pour ce faire, on constate qu'existe une relation entre la matrice homographique  $H$  et ces deux distances :

$$\det(H) = 1 + \frac{d}{d^*} \quad (3.23)$$

Cette relation permet d'obtenir le ratio  $\frac{d}{d^*}$ . Dès lors, la mesure de la vitesse normalisée par la distance -constante- au plan cible à la pose de référence, peut être obtenue :

$$\nu = \frac{v}{d^*} = \phi_{opt} (\det(H) - 1) \quad (3.24)$$

Cette mesure  $\nu$  peut être utilisée pour estimer la normale. Nous avons en effet :

$$\sigma = R^T M(n^*) \frac{p}{d^*} \quad (3.25)$$

D'où :

$$\dot{\sigma} = \sigma \wedge \omega + R^T M(n^*) R \frac{v}{d^*} \quad (3.26)$$

Cette relation intégrée s'écrit :

$$\sigma(t) - \sigma(0) = \int_0^t \sigma \wedge \omega + \int_0^t R^T M(n^*) R \frac{v}{d^*} \quad (3.27)$$

Sur un court intervalle de temps, l'on peut supposer  $R$  à peu près constant, et obtenir :

$$y = R^T M(n^*) R x \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{cases} y & \triangleq \sigma(t) - \sigma(0) - \int_0^t \sigma \wedge \omega \\ x & \triangleq \int_0^t \nu \\ R^T M(n^*) R & = n_1 I + S(n_2 R^T b_3) \end{cases} \quad (3.29)$$

Exploitant plusieurs telles égalités, il est possible de mettre en œuvre une estimation par moindres carrés sur le système :

$$Y = M(n^*) X \quad (3.30)$$

avec  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_n]^T$  en supposant que le terme  $R^T b_3$  se moyenne en  $b_3$  sur cet horizon de temps. Il est dès lors possible de définir la loi adaptative suivante.

**Proposition 7** (Loi adaptative pour l'asservissement visuel)

Supposons que les hypothèses de la Proposition 6 sont vérifiées, ainsi que la condition suivante :  $n_1^* > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Considérons  $T > 0$  et définissons la loi de commande à basculement suivante : soit  $T > 0$ . Pour  $0 \leq t < T$ , la loi de commande s'écrit avec  $k_4 > 0$  :

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}_\delta}(v) \\ \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.31)$$

$\hat{n}$  est calculé sur cette première période  $t < T$  en résolvant le système suivant :

$$Y = M(n^*)X$$

avec  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_n]^T$ ,  $y_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_i - 1) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma \wedge \omega$ ,  $x_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \nu$  pour  $[t_{i-1}, t_i]$  une décomposition de l'intervalle  $[0, T]$ , et sous la contrainte :  $\hat{n}_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La valeur de  $\hat{n}$  est fixée à  $t = T$  et n'est plus modifiée ensuite. Pour  $t \geq T$ , la loi de commande est (toujours avec  $k_4 > 0$ ) :

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \gamma + k_1 M(\hat{n})^{-1} \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}_\delta}(v) \\ \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.32)$$

Alors, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable, et les solutions du système convergent à l'origine si  $b_3^T R(0) b_3 > \frac{k_1 + k_2 \bar{\delta}_M}{g}$ .

La figure 3.6 représente cette loi de commande.

La preuve de convergence découle du lemme précédent, l'estimation étant faite sous la contrainte  $\hat{n}_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , qui elle-même assure la stabilité de la loi de commande.

Notons que différentes méthodes peuvent être employées pour résoudre ce problème d'optimisation linéaire sous contrainte inégalité : la méthode classique du simplexe, des méthodes plus efficaces de point intérieur, ou encore une méthode de moindres carrés récursive avec contraintes telle que celle présentée dans (Zhu and Rong Li, 1999).

La convergence étant acquise quelque soit  $\hat{n}$  vérifiant cette contrainte, l'intérêt de la phase initiale d'estimation est uniquement d'avoir de meilleures

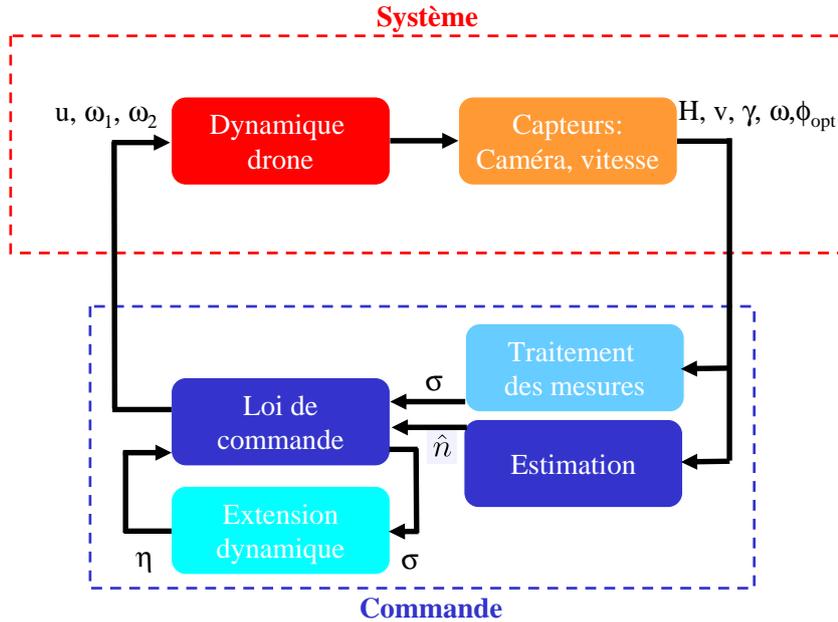


FIGURE 3.6 – Loi de commande adaptative pour l’asservissement visuel, Proposition 7

performances grâce à l’utilisation d’un  $\hat{n}$  le plus proche possible de  $n^*$ . En outre, les hypothèses montrent que  $n^*$  est solution unique du problème d’optimisation considéré, et par hypothèse  $n^*$  est dans l’espace de recherche de l’algorithme (l’ensemble des vecteurs  $n$  normés tels que  $n_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ). De ce fait, sans erreurs de mesure et de traitement,  $\hat{n}$  converge vers  $n^*$ . Alors, le système en boucle fermée répond aux équations suivantes comme montré en annexe :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{d^*} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= -k_1 \text{sat}_\delta(x) - k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(\tilde{y}) \end{cases} \quad (3.33)$$

Dès lors, le système est découplé et les gains peuvent être réglés par exemple pour imposer une dynamique linéarisée donnée, ce qui ne peut être fait avec la loi initiale lorsque  $n^*$  est inconnu.

### 3.1.5 Comparaison du linéarisé avec les lois linéaires

Comme on l’a indiqué plus haut, la volonté de stabiliser le drone au-delà du domaine de validité de l’hypothèse linéaire a conduit à la définition de ces lois pour le domaine non-linéaire. Une question naturelle est alors de comparer le linéarisé de ces lois avec les lois linéaires développées plus haut. Cela peut fournir une aide pour régler les gains des lois non-linéaires puisque pour ces dernières seules des conditions nécessaires sont données sur les gains, alors qu’en linéaire, une heuristique de réglage a été proposée. Cependant, la comparaison est difficile en raison des différences de structure entre les deux :

- dans les approches non-linéaires, on suppose piloter l'engin en vitesse angulaire, les couples étant calculés par une loi en grands gains depuis cette dernière, alors qu'en linéaire, les couples sont directement pilotés, ce qui fausse complètement le choix des gains.
- dans les approches linéaires, la vitesse n'est pas mesurée, et cette absence est compensée par une augmentation dynamique ; en non-linéaire, la vitesse est supposée mesurée, ou du moins le flot optique, qui en tient lieu.
- existe une augmentation dynamique pour certains résultats en non-linéaire, mais elle sert, plutôt qu'à se passer de mesure de vitesse, à approximer la mesure de position par une variable dont on sait écrire la dérivée exactement -c'est-à-dire sans la matrice inconnue  $M$ .
- la loi simplifiée en non-linéaire repose sur une utilisation des perturbations singulières qui consistent alors en une utilisation de grands gains, faussant à nouveau la comparaison avec les lois linéaires.
- le découplage des axes, qui peut être réalisé en linéaire comme on l'a indiqué, n'a pu être obtenu de façon aussi satisfaisante en non-linéaire : seule la partie "position" du vecteur d'erreur a pu être isolée.

Pour toutes ces raisons, il est difficile de comparer le linéarisé des lois non-linéaires aux lois linéaires autrement qu'en constatant une similitude lointaine.

### 3.1.6 Résultats de simulation

**Simulation de la loi de la Proposition 4** Dans cette partie nous illustrons les résultats précédents sur le cas de l'asservissement visuel. Nous considérons le contrôleur proposé dans la Proposition 4. Les paramètres de commande suivants sont utilisés dans toutes les simulations :

- $[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5] = [1, 2, 1, 1, 1]$
- les fonctions de saturation  $\text{sat}_\delta$  et  $\overline{\text{sat}}_\delta$  sont définies par (3.3) avec  $\delta = [9; 1]$ ,  $\bar{\delta} = [1; 1.1]$ ,

Il suit de (3.10) que pour ces valeurs de gains, le contrôleur devrait stabiliser le drone pour toute distance  $d^*$  telle que  $d^* \geq d_{\min} = 0.49m$  avec  $n_{1_{\min}} \geq 0.7$ .

Les valeurs de position, vitesse et orientation initiales et de la normale  $n^*$  sont données par :

- Figure 3.7 :  $n^* = (0.7; -0.71; 0)^T$ ,  $p_0 = (-5.5m; 1.2m; 1.3m;)^T$ ,  $v_0 = (-2.3m/s; -1.6m/s; 0.4m/s)^T$ ,  $d^* = 3m$ ,  $\phi_0 = -0.5^\circ$ ,  $\theta_0 = 11.4^\circ$ ,  $\psi_0 = 4.1^\circ$

- Figure 3.8 :  $n^* = (0.8; 0.61; 0)^T$ ,  $p_0 = (-6.6m; 5.2m; 3.2m;)^T$ ,  $v_0 = (-1m/s; 0.9m/s; 0.4m/s)^T$ ,  $d^* = 1m$ ,  $\phi_0 = 8.1^\circ$ ,  $\theta_0 = 18.3^\circ$ ,  $\psi_0 = -30.7^\circ$

Sur ces figures, on peut voir que la loi de commande stabilise bien le système.

**Simulation de la loi simplifiée, Proposition 5** Les figures 3.9 et 3.10 présentent les résultats obtenus avec la loi de commande simplifiée sur les mêmes scénarii que précédemment. Les autres conditions initiales sont les mêmes que celles de la figure 3.8 ci-dessus. Les réponses temporelles sont similaires. Ces résultats justifient a posteriori l'étude non-linéaire rapportée dans le présent chapitre.

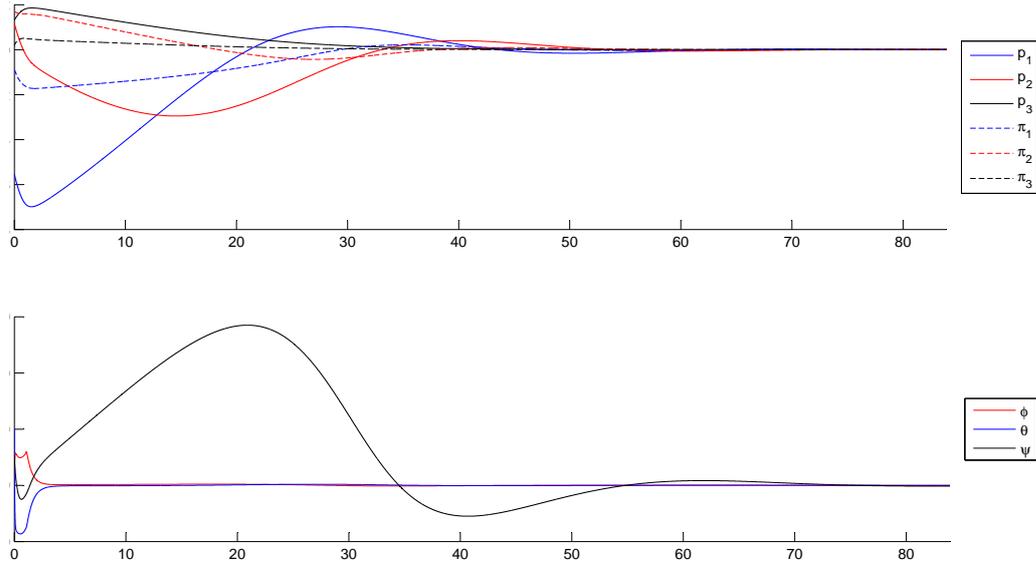


FIGURE 3.7 – Loi de commande de la Proposition 4, cas test 1

**Erreurs initiales importantes** Enfin, en regard des simulations "limites" proposées dans le cas linéaire (figures 2.20 et 2.21) ci-avant, on propose ici des résultats de simulation obtenus avec des erreurs initiales très grandes, éloignées du domaine de linéarité. Plus précisément, les conditions initiales sont les suivantes :

- figure 3.11 :  $\phi_0 = 50^\circ$ ,  $\theta_0 = 50^\circ$ ,  $\psi_0 = -30^\circ$  ;
- figure 3.12 :  $\phi_0 = 70^\circ$ ,  $\theta_0 = -80^\circ$ ,  $\psi_0 = -30^\circ$  ;

L'allure générale des réponses reste la même.

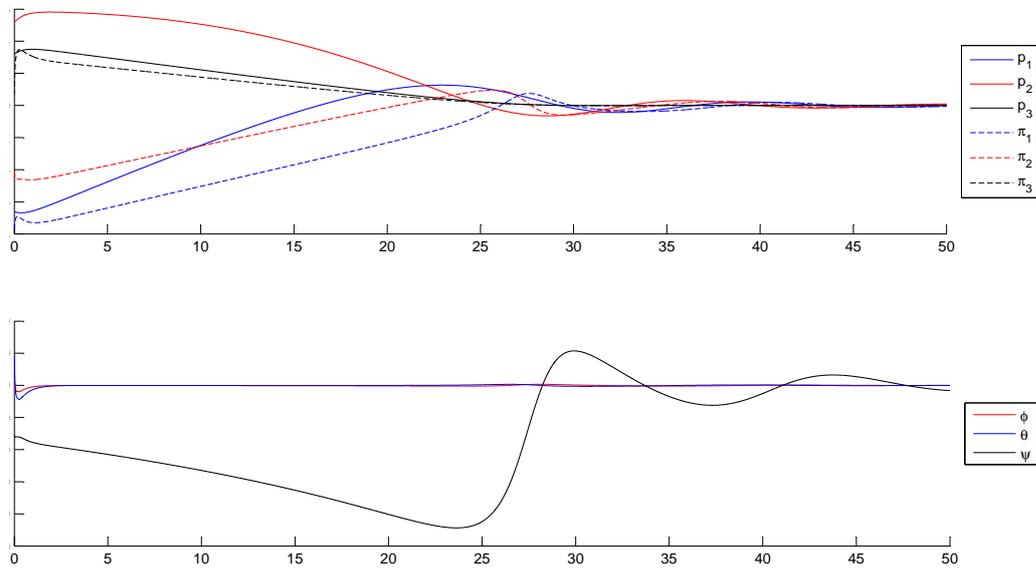


FIGURE 3.8 – Loi de commande de la Proposition 4, cas test 2

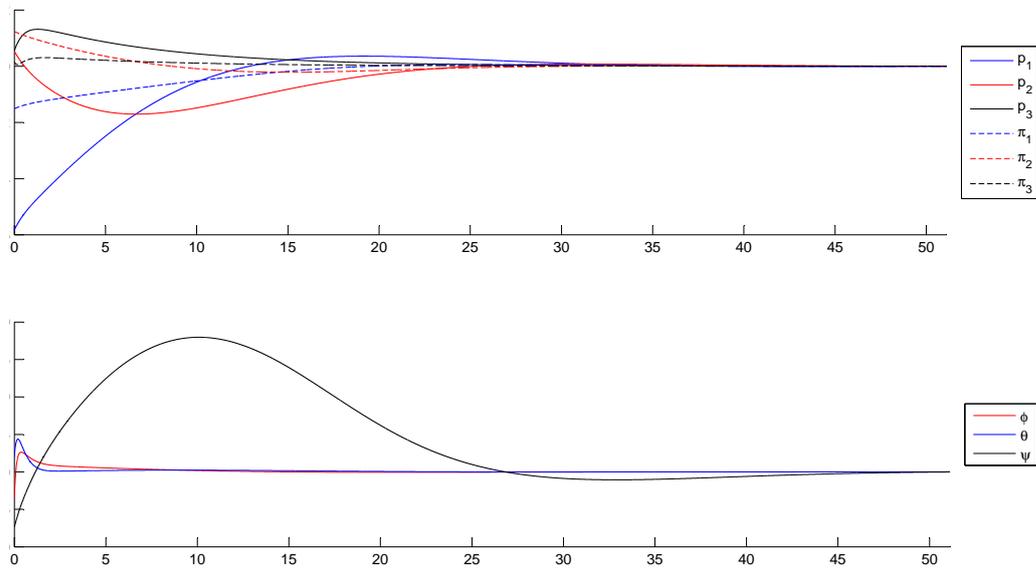


FIGURE 3.9 – Loi de commande simplifiée de la Proposition 5, cas test 1

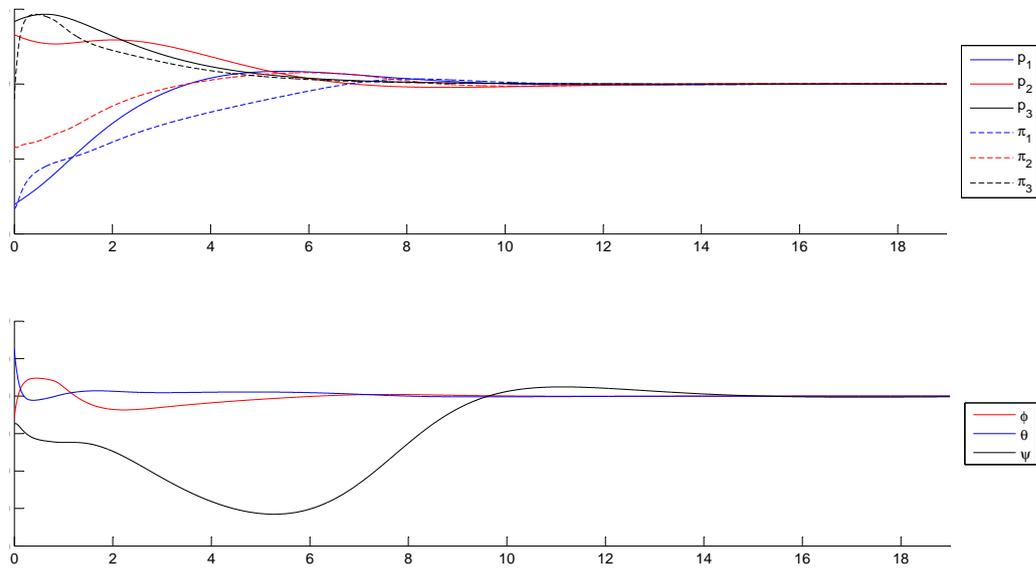


FIGURE 3.10 – Loi de commande simplifiée de la Proposition 5, cas test 2

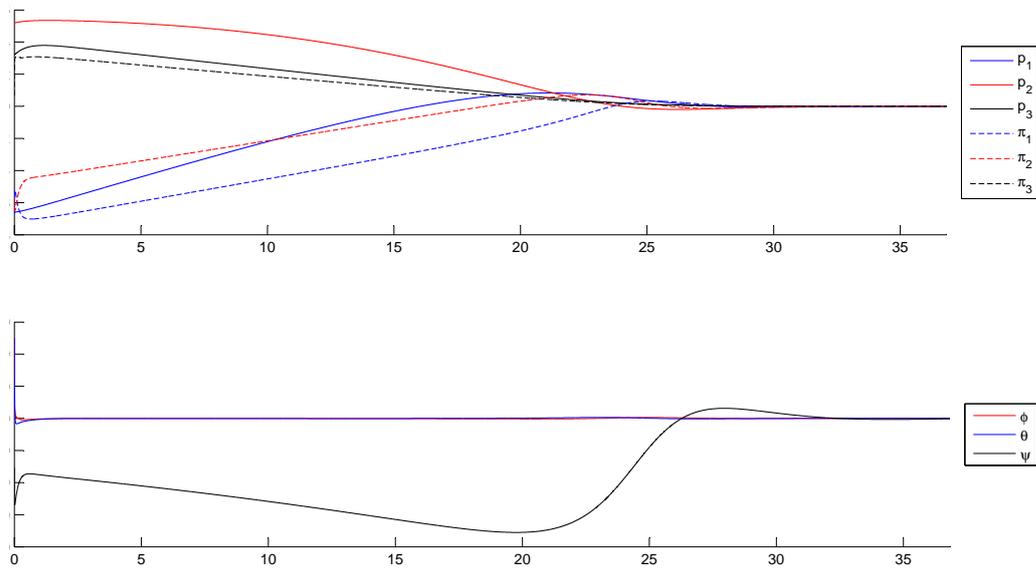


FIGURE 3.11 – Cas limite avec des erreurs initiales grandes

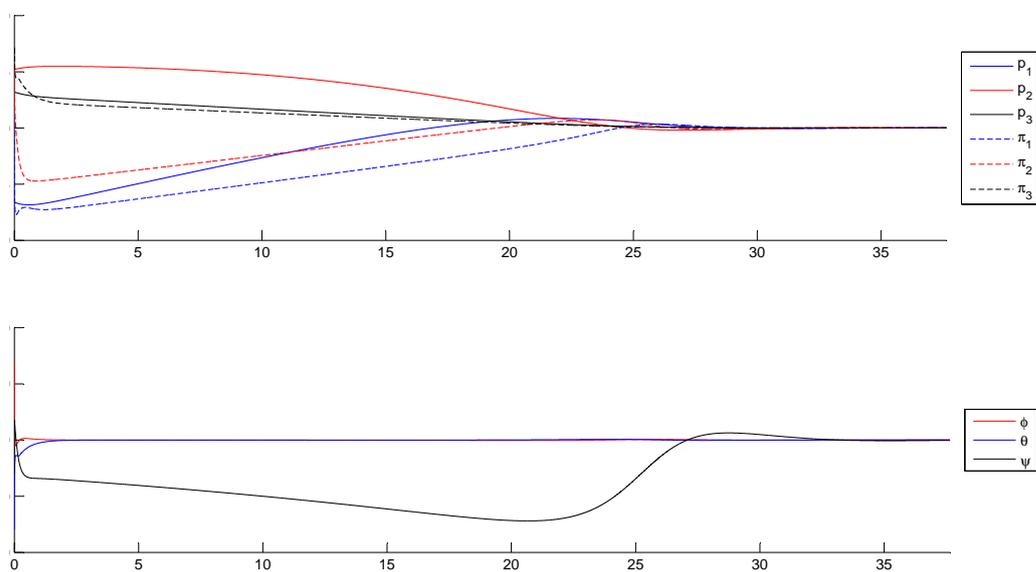


FIGURE 3.12 – Cas limite avec des erreurs initiales grandes

## 3.2 A propos des mesures de la vitesse et de la gravité en repère local

### 3.2.1 Introduction

Les résultats présentés ci-avant font appel à différents types de mesures. Parmi celles-ci, certaines peuvent être considérées comme acquises : ainsi, les gyromètres et accéléromètres étant peu onéreux, de faible masse et d'un encombrement réduit, on peut les supposer présents sur tout drone VTOL. La question des images est l'objet propre de cette thèse. En revanche, les mesures de gravité locale et de vitesse ne vont pas sans poser des questions pratiques.

Si nombre d'études considèrent que les accéléromètres fournissent la direction de la gravité, il s'agit là d'une approximation (voir (Martin and Salaün, 2010)), qui devient largement fautive pour des mouvements à forte accélération propre de l'engin.

Quant aux mesures de vitesses, peu de capteurs peuvent en procurer : or, les tubes de Pitot sont d'une efficacité réduite sur des appareils de type hélicoptère en raison de l'important brassement d'air, sans parler du biais ajouté par la présence de vent ; quant à utiliser une mesure GPS, ou une mesure par un système de positionnement d'intérieur (par exemple le système Vicon), si de tels systèmes sont disponibles alors une loi de commande beaucoup plus simple peut être utilisée.

C'est pourquoi on présente ici des moyens de disposer de mesures de la vitesse et de la gravité en repère local et d'ainsi utiliser les résultats présentés précédemment : suivant le contexte, certains capteurs sont disponibles, et ils peuvent être complétés par les propositions qui suivent. Notons à ce stade que la stéréovision, d'évidence, simplifierait grandement la situation, mais nous avons justifié plus haut notre choix de ne pas considérer cette configuration.

Pour finir cette introduction, rappelons que les résultats linéaires proposés au chapitre 2 ne réclament pas d'autres mesures que l'image et les mesures gyrométriques -voire accélérométriques dans le cas d'une dynamique non modélisée, section 2.7). Ces résultats sont donc toujours exploitables.

### 3.2.2 Loi de commande utilisant une mesure de flot optique

#### 3.2.2.1 Principe

La Proposition 7 présentée plus haut utilisait le flot optique pour estimer la normale au plan  $n^*$  afin d'améliorer le comportement du système piloté. Nous proposons ici d'exploiter cette même mesure afin de remplacer la mesure de vitesse linéaire. Ainsi qu'indiqué plus haut en introduction de la Proposition 7, le flot optique est une mesure de vitesse normalisée par la distance au plan objet observé (équation (3.22)). On a montré aussi comment, de cette mesure

et de l'homographie on pouvait extraire une mesure de vitesse normalisée par la distance au plan à la pose de référence :

$$\nu = \frac{v}{d^*} = \phi_{opt}(\det(H) - 1) \quad (3.34)$$

Cette mesure  $\nu$  est une mesure de vitesse -certes normalisée, et par une grandeur inconnue, mais du moins constante. Dans les lois de commande définies précédemment, l'utilisation de cette mesure à la place de la mesure de vitesse n'est pas possible pour les lois complètes, où apparaissent les termes de feed-forward  $R^T \dot{\mu}$ , puisque ceux-ci nécessitent la connaissance de la dérivée de  $\nu$ , qui n'est connue qu'à une constante près. On peut en revanche utiliser cette mesure à la place de la vitesse dans la loi simplifiée, Proposition 5, ce qui est fait dans la proposition suivante.

**Proposition 8** (Loi de commande exploitant le flot optique)

Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}$  deux fonctions de saturation. Considérons des gains  $k_1, k_2 > 0$  tels que :

$$\begin{cases} n_1^* > 0 \\ k_1, k_2 > 0 \\ k_2 \bar{\delta}_m > k_1 \\ k_1 + k_2 \bar{\delta}_M < \frac{g}{\sqrt{2}} \\ n_1^* k_2^2 > d^* k_1 |n_2^*| \left( |n_2^*| + \frac{2n_1^*}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (3.35)$$

Selon un procédé similaire à celui de la loi de commande pour l'asservissement visuel, définissons la loi de commande :

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(\nu) \\ \nu &= \frac{v}{d^*} = \phi_{opt}(\det(H) - 1) \\ \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (3.36)$$

avec  $k_4 > 0$ . Alors, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable, et les solutions du système convergent à l'origine si :

$$b_3^T R(0) b_3 > \frac{k_1 + k_2 \bar{\delta}_M}{g} \quad (3.37)$$

En outre, sous ces conditions, l'angle entre la verticale exprimée en repère local et la verticale exprimée en repère inertiel demeure strictement inférieur à  $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{k_1 + k_2 \bar{\delta}_M}{g}\right)$ .

La preuve est donnée en annexe, section A.7.2. La figure 3.13 représente cette loi de commande.

Notons que dans les conditions (3.35), la distance inconnue  $d^*$  apparaît de l'autre côté de l'inégalité par rapport au cas où la vitesse est mesurée. Notons aussi qu'à l'instar de ce cas, cette condition peut être modifiée pour prendre en compte une borne sur cette distance, supérieure cette fois :

$$n_{1\min} k_2^2 > d_{\max} k_1 \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \quad (3.38)$$

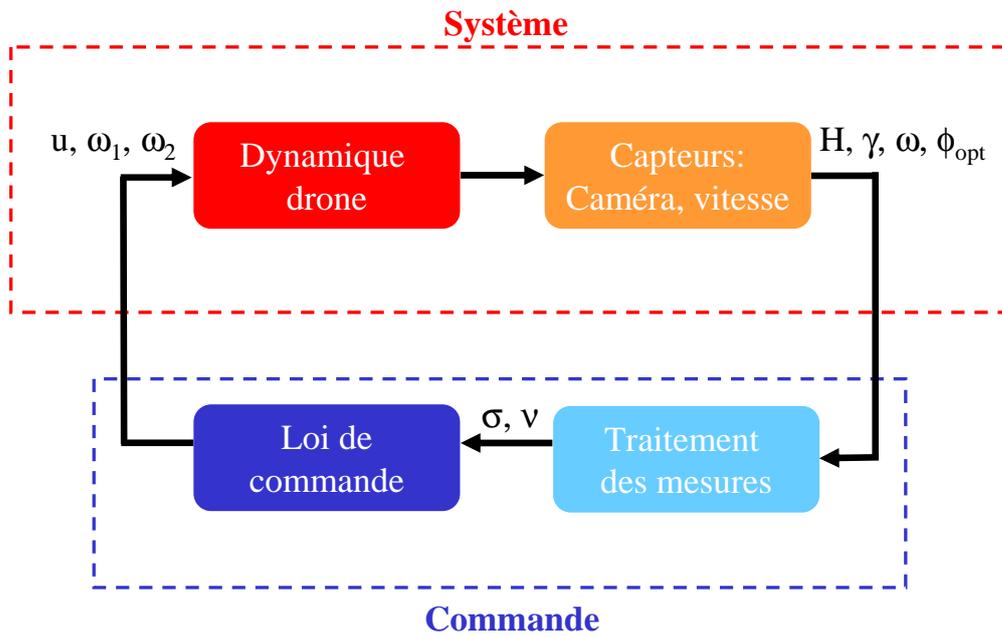


FIGURE 3.13 – Loi de commande exploitant la mesure du flot optique, Proposition 8

### 3.2.2.2 Résultats de simulation

Les figures 3.14 et 3.15 montrent les résultats obtenus en utilisant la mesure de vitesse (figures 3.14) et la mesure de flot optique (figure 3.15) pour les mêmes conditions de simulation. On constate que l'utilisation du flot optique permet en effet de se passer de la mesure de vitesse.

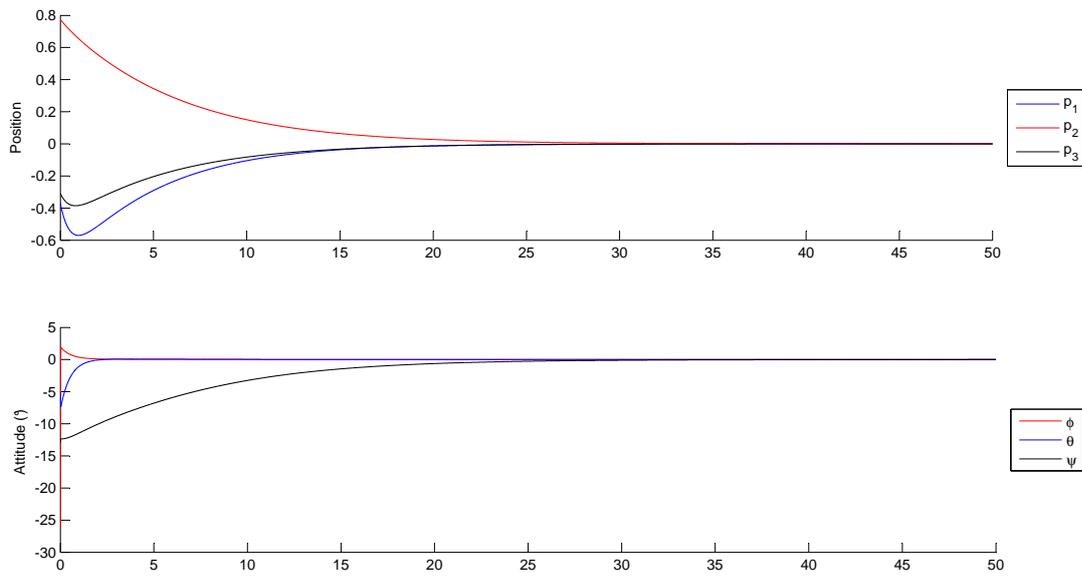


FIGURE 3.14 – Résultat obtenu avec la loi de commande simplifiée et la mesure de vitesse

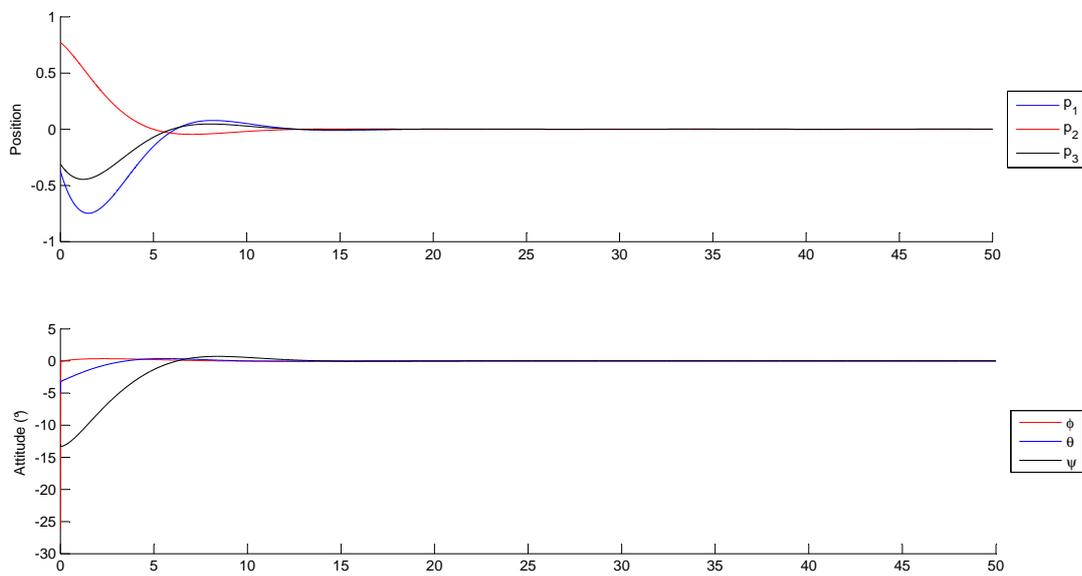


FIGURE 3.15 – Résultat obtenu avec la loi de commande simplifiée et la mesure de flot optique

### 3.2.3 Lois de commande sans mesure de gravité

#### 3.2.3.1 Principe

Rappelons que, d'après la définition de la matrice homographique, sa troisième colonne s'écrit :

$$Hb_3 = R^T b_3 - R^T \frac{p}{d^*} n_3 = \frac{\gamma}{g} - R^T \frac{p}{d^*} n_3 \quad (3.39)$$

Dès lors, pour une cible verticale ( $n_3 = 0$ ), cette colonne est exactement égale -à une multiplication par  $g$  près- à la gravité exprimée en repère local. C'est le cas qui était considéré plus haut, en section 3.1.3. On y utilisait cette propriété pour obtenir la verticale exprimée en repère local. Remarquons que cette situation correspond à un cas d'application très important : l'asservissement visuel d'un drone devant un bâtiment -supposé vertical. Dans ce cas, la troisième colonne de  $H$  tient lieu de mesure de verticale. Il faut remarquer que l'hypothèse de cible verticale ne signifie pas que l'orientation de la cible est parfaitement connue : dans le cas du bâtiment, il peut être supposé vertical sans que son orientation relative par rapport à la pose de référence soit connue.

Considérons à présent le cas d'une cible plane non verticale. Nous devons cependant supposer son angle d'orientation borné. Le prix à payer pour une telle généralisation est la performance obtenue : plus larges sont les bornes sur l'orientation, moins bonne est la performance en boucle fermée.

Notons à présent que, selon le signe de  $n_3$  -c'est-à-dire suivant que le plan cible surplombe le drone à la pose désirée ( $n_3 > 0$ ), ou qu'il est surplombé par le drone ( $n_3 < 0$ )-, l'approximation  $gHb_3 \approx \gamma$  faite directement dans la loi de commande aura un effet soit stabilisant, soit déstabilisant sur la boucle fermée. On peut en donner une explication géométrique simple : remplacer  $\gamma$  par  $gHb_3$ , c'est remplacer la direction de la verticale par la direction du point du plan cible se situant à la verticale du drone à sa pose désirée : un point du plan cible situé à une distance finie du drone. Si la cible surplombe le drone - $n_3 < 0$ - , alors ce point est au-dessus du drone, et orienter l'axe vertical local du drone vers ce point conduit à le ramener davantage vers sa pose désirée (voir la figure 3.16 où l'effet stabilisateur est bien visible) ; au contraire, lorsque  $n_3 > 0$ , le point est sous le drone, et s'orienter vers lui a un effet déstabilisant (voir la figure 3.17 où l'effet déstabilisant est visible). De ce fait, ces deux situations sont traitées différemment :

- si nous pouvons supposer que  $n_3 < 0$  (c'est-à-dire qu'à la pose de référence, la cible surplombe le drone), alors  $\bar{\mu}$  est défini "comme précédemment", c'est-à-dire en remplaçant dans son expression  $\gamma$  par  $gHb_3$  :  $\bar{\mu} = gHb_3 + k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(v)$
- si l'hypothèse précédente ne peut être faite, alors nous supposons connue une borne supérieure  $n_{3_M}$  pour  $n_3$ ,  $n_3 \leq n_{3_M}$  et nous définissons :  $\bar{\mu} = Hb_3 + n_{3_M} \sigma + k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(v)$

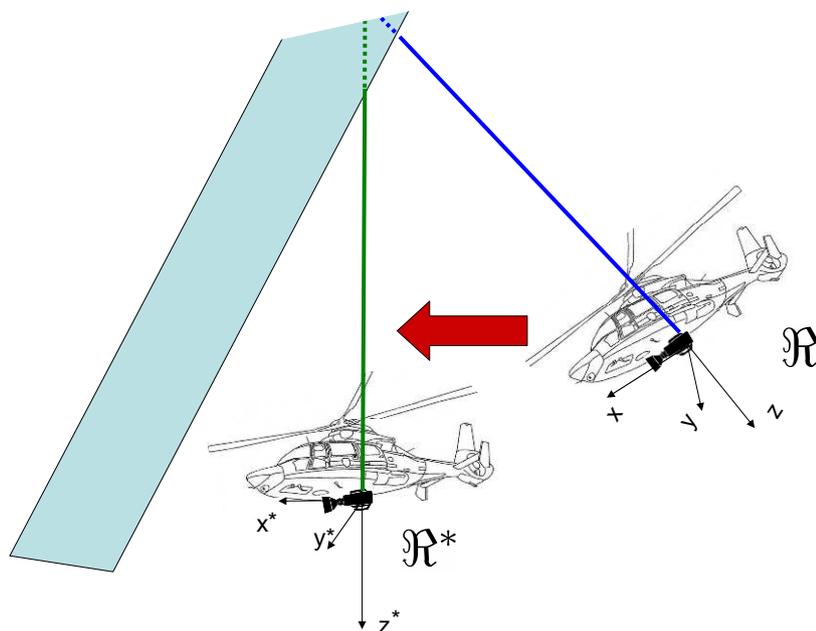


FIGURE 3.16 – Utilisation de  $Hb_3$  comme estimation de la verticale en repère local, cas  $n_3 < 0$  et effet stabilisateur

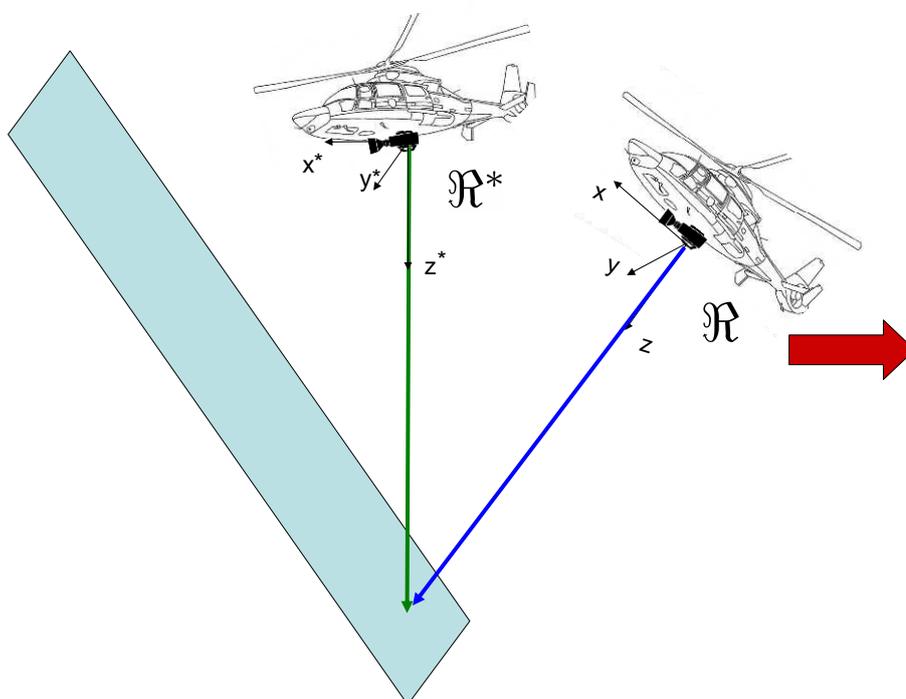


FIGURE 3.17 – Utilisation de  $Hb_3$  comme estimation de la verticale en repère local, cas  $n_3 > 0$  et effet déstabilisant

Dans le second cas, existe un terme additionnel en plus des termes saturés de position et vitesse. Ceci pose deux problèmes :

1. il n'est plus certain que  $\bar{\mu}$  ne s'annule pas quelles que soient les position et vitesse.
2. il est plus difficile de prouver la stabilité de la loi de commande en résultant.

Pour traiter ces problèmes, nous définissons une zone interdite et nous *supposons* que le drone n'y entrera jamais. La zone est définie comme une sphère autour de l'intersection entre le plan de la cible et l'axe vertical à la pose de référence (en particulier, pour une cible verticale, le point est à l'infini, ce qui signifie que n'existe pas alors de zone interdite ; plus verticale est la cible, plus éloignée se trouve la zone interdite depuis la pose de référence). Cette zone interdite donne une borne inférieure sur le terme  $Hb_3$ . Nous définissons du coup les niveaux de saturation de façon à assurer que  $\mu$  ne s'annule pas hors de la zone interdite. Pour le second problème mentionné ci-dessus, la zone interdite permet de prouver la désaturation du terme en vitesse. Ensuite, on peut définir une fonction de Lyapunov pour les équations obtenues après cette désaturation.

Cette approche fournit ainsi une solution radicale, dans l'esprit d'utiliser le moins de capteurs possibles. Une alternative consiste à estimer  $\gamma$  et utiliser l'estimation dans les lois. La section 3.2.4 ci-après propose aussi des techniques pour estimer  $\gamma$ .

### 3.2.3.2 Résultats de simulation

La loi de commande décrite précédemment pour un cas où  $n^* = [0.8929 \ 0.4392, 0.0993]^T$ . Le résultat obtenu avec une mesure parfaite de la gravité est présenté sur la figure 3.18 et le résultat sans mesure de la gravité en compensant le caractère positif de  $n_3$  sur la figure 3.19. Les résultats sont semblables.

Une autre simulation avec  $n^* = [0.4956, 0.8164, -0.2965]^T$  sans correctif puisqu'ici  $n_3 < 0$  est présentée sur la figure 3.20.

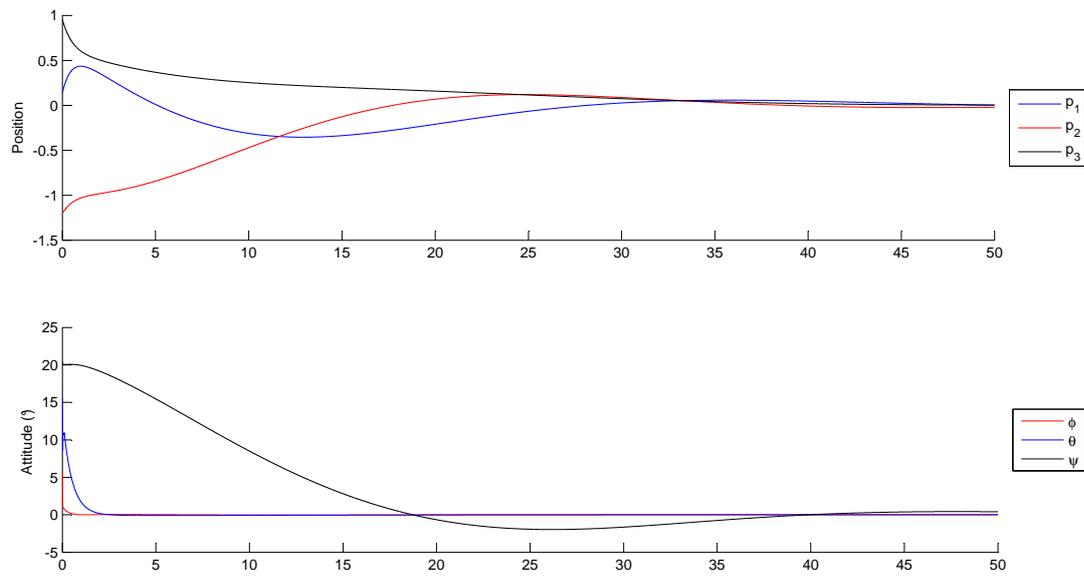


FIGURE 3.18 – Loi de commande nominale avec mesure de la gravité,  $n_3 > 0$

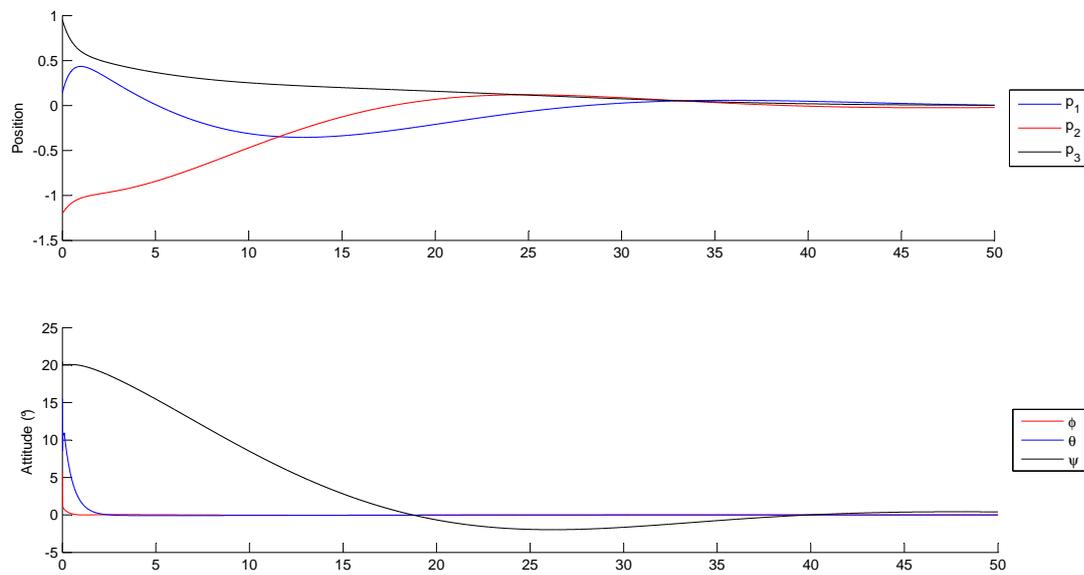
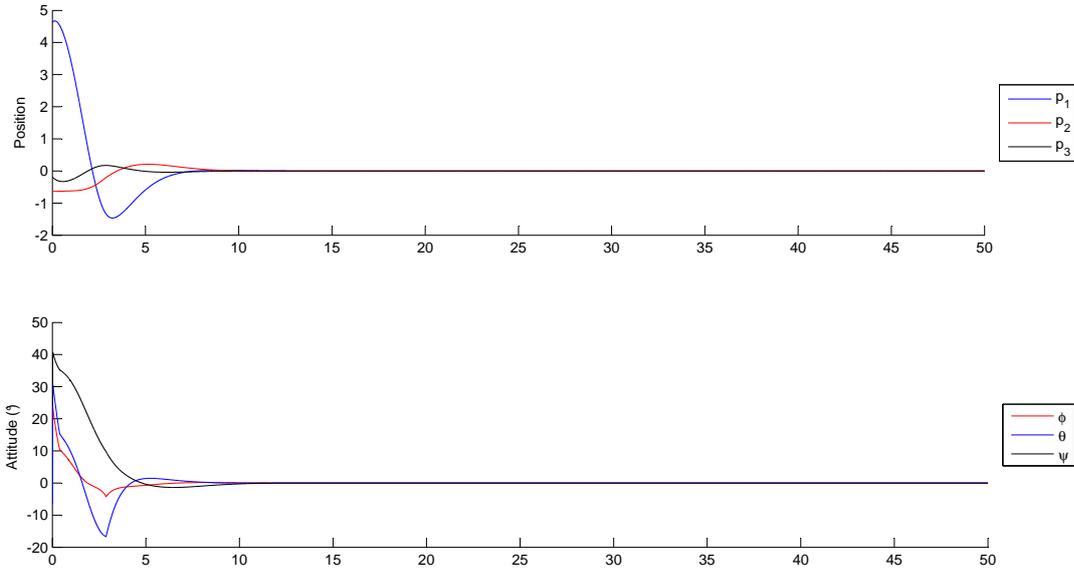


FIGURE 3.19 – Loi de commande sans mesure de la gravité avec un terme compensateur,  $n_3 > 0$


 FIGURE 3.20 – Loi de commande nominale sans mesure de la gravité,  $n_3 < 0$ 

### 3.2.4 Estimateurs de la gravité en repère local

#### 3.2.4.1 Filtre complémentaire

L'utilisation -très répandue quoiqu'inexacte- des données accélérométriques brutes étant fautive en raison des erreurs introduites par l'accélération propre de l'engin, on propose ici de tirer partie de son contenu basse fréquence, qui est correct, car les biais accélérométriques sont négligeables. De façon complémentaire, la troisième colonne de  $H$ , étudiée ci-dessus, offre une mesure dont le contenu haute fréquence est correct, puisque la mesure est perturbée par un terme de position -donc basse fréquence :

$$\hat{\gamma} = G(p)y_{acc} + H(p)gHb_3 \quad (3.40)$$

où  $G(p)$  est un filtre passe bas, et  $H(p)$  un passe haut.

#### 3.2.4.2 Extraction de $H$

Une autre méthode consiste à utiliser l'estimée basée homographie comme une mesure, et à en extraire la valeur de  $\gamma$ . Plus précisément :

$$\begin{aligned} gHb_3 &= \gamma - gn_3 R^T \frac{p}{d^*} \\ &\approx \gamma + \alpha \sigma \end{aligned} \quad (3.41)$$

où le vecteur d'erreur  $\sigma = R^T M(\frac{n^*}{d^*})p \approx R^T \frac{p}{d^*}$  (avec  $M(\tau) = \tau_1 I + S(\tau_2 b_3)$ ) joue le rôle d'un vecteur d'erreur en position et  $\alpha = -gn_3$  une constante inconnue.

A présent, considérons l'équation  $gHb_3 = \bar{\gamma} = \gamma + \alpha\sigma$  comme une équation avec deux inconnues ( $\gamma$  à estimer et  $\alpha$ ). Avec la connaissance supplémentaire que  $|\gamma| = g$ , il n'y a que deux solutions possibles :

$$\gamma = \bar{\gamma} - \sigma \left( \sigma^T \bar{\gamma} + \epsilon \sqrt{(\sigma^T \bar{\gamma})^2 - |\sigma|^2 (|\bar{\gamma}|^2 - g^2)} \right) \quad (3.42)$$

avec  $\epsilon \in (-1, +1)$ . On peut retenir la plus proche de  $\bar{\gamma}$ , notée  $\gamma_m$ .

Ainsi, on peut définir l'estimation suivante :

$$\dot{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma} \wedge \omega + k(\gamma_m - \hat{\gamma}) \quad (3.43)$$

### 3.2.4.3 Estimation non-linéaire

Bien que supposant connue une estimation de  $v$ , nous définissons les estimées suivantes pour la vitesse et la gravité :

$$\begin{cases} \dot{\hat{v}} &= \hat{v} \wedge \omega - ub_3 + \hat{\gamma} + \alpha_v \\ \dot{\hat{\gamma}} &= \hat{\gamma} \wedge \omega + \alpha_\gamma \end{cases} \quad (3.44)$$

avec  $\alpha_v, \alpha_\gamma$  à définir. Les équations d'erreur  $\tilde{v} = v - \hat{v}$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma - \hat{\gamma}$  sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} &= \tilde{v} \wedge \omega + \tilde{\gamma} - \alpha_v \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= \tilde{\gamma} \wedge \omega - \alpha_\gamma \end{cases} \quad (3.45)$$

Posant alors :

$$\begin{cases} \tilde{v}^r &\triangleq R\tilde{v} \\ \tilde{\gamma}^r &\triangleq R\tilde{\gamma} \end{cases} \quad (3.46)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}}^r &= \tilde{\gamma}^r - R\alpha_v \\ \dot{\tilde{\gamma}}^r &= -R\alpha_\gamma \end{cases} \quad (3.47)$$

Se souvenant qu'une mesure de  $v$ , et donc de  $\tilde{v}$ , est disponible, on définit alors :

$$\begin{cases} \alpha_v &\triangleq \tilde{v} \\ \alpha_\gamma &\triangleq \tilde{v} \end{cases} \quad (3.48)$$

Ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{v}}^r \\ \dot{\tilde{\gamma}}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}^r \\ \tilde{\gamma}^r \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

qui est stable car de valeurs propres  $\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$ . On conclut en particulier que  $\tilde{v}^r \rightarrow 0$  et  $\tilde{\gamma}^r \rightarrow 0$ , et donc  $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ . Donc l'estimateur converge.

### 3.2.4.4 Résultats de simulation

Les différentes options présentées ci-avant ont été implémentées et comparées en simulation. On y a ajouté deux estimées naïves : la mesure accélérométrique, et la troisième colonne de la matrice  $H$ . On présente un résultat de simulation avec les courbes temporelles, puis un résultat agrégé obtenu sur 30 simulations. Les numérotations des méthodes pour les figures qui suivent sont les suivantes :

- Méthode 1 : filtre complémentaire ;
- Méthode 2 : mesure accélérométrique ;
- Méthode 3 : 3<sup>ème</sup> colonne de  $H$  ;
- Méthode 4 : extraction de  $H$  ;
- Méthode 5 : estimation non-linéaire.

Le premier résultat a été obtenu avec les valeurs des paramètres et conditions initiales suivantes, tirées aléatoirement :  $n^* = (0.7; -0.8; -1.0)^T$ ,  $p_0 = (0.7m; -0.8m; -1.0m)^T$ ,  $v_0 = (-0.2m/s; 0.6m/s; 0.2m/s)^T$ ,  $d^* = 3m$ ,  $\phi_0 = 0.65^\circ$ ,  $\theta_0 = -19.1^\circ$ ,  $\psi_0 = 17.7^\circ$ .

Il est représenté sur la figure 3.21 . La métrique retenue pour comparer les performances des approches est le produit scalaire normalisé entre la vraie valeur de la gravité et son estimée :

$$\alpha_i = \frac{\gamma^T \hat{\gamma}_i}{g \quad g} \quad (3.50)$$

Cette métrique est représentée au cours du temps pour les cinq méthodes en échelle logarithmique.

La figure 3.22 représente le résultat obtenu après 30 simulations, avec des conditions initiales aléatoires. On représente sur la même échelle logarithmique, avec en rouge la moyenne pour chaque méthode. Il apparaît que les méthodes 3 ( $Hb_3$ ) et 5 (combiné) sont les plus performantes. Notons qu'avec des erreurs initiales en position plus faibles, la méthode 4 (Kalman) offre un résultat également satisfaisant, comme on le voit pour le résultat agrégé de la figure 3.23.

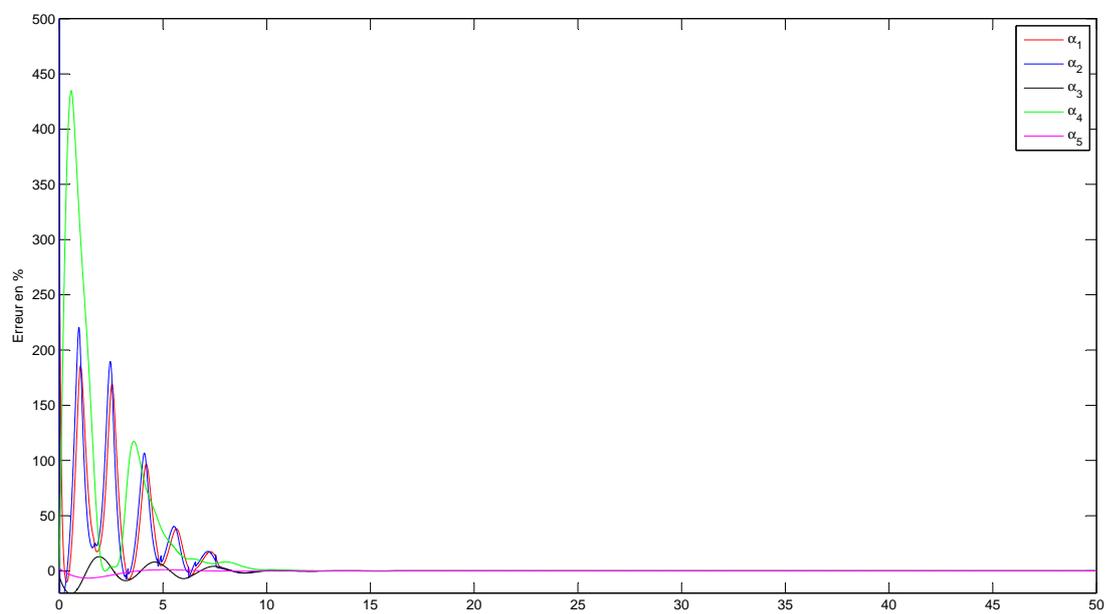


FIGURE 3.21 – Comparaison des méthodes d'estimation de  $\gamma$ , simulation temporelle.

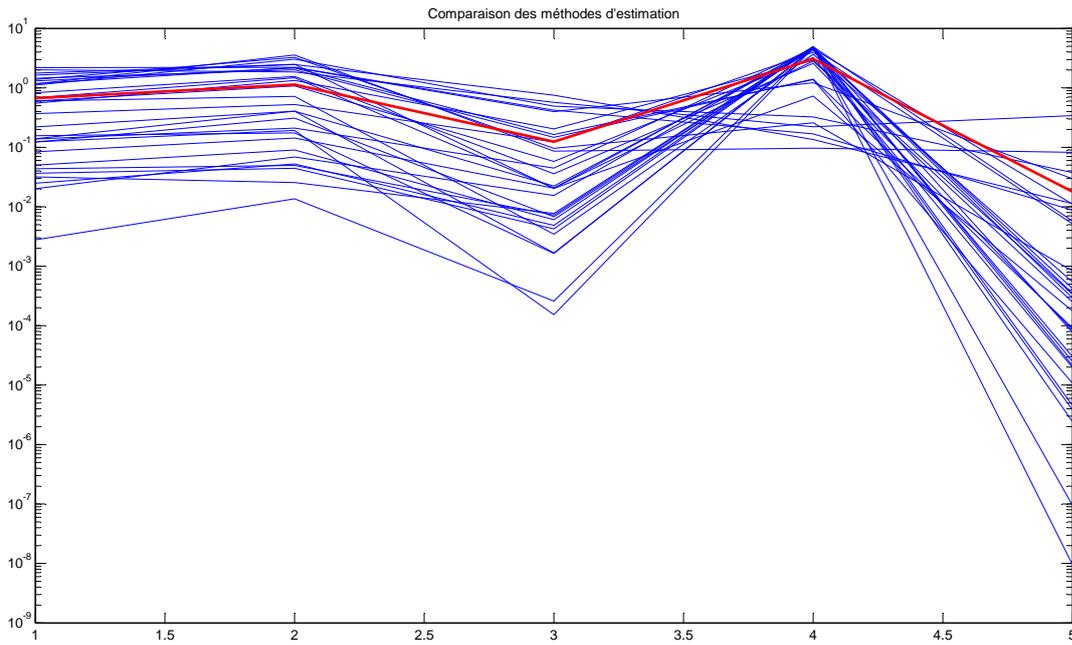


FIGURE 3.22 – Comparaison des méthodes d'estimation de  $\gamma$ , agrégation de 30 simulations, erreur initiale importante en position. L'axe des abscisses indique le numéro de la méthode, les ordonnées le résultat agrégé.

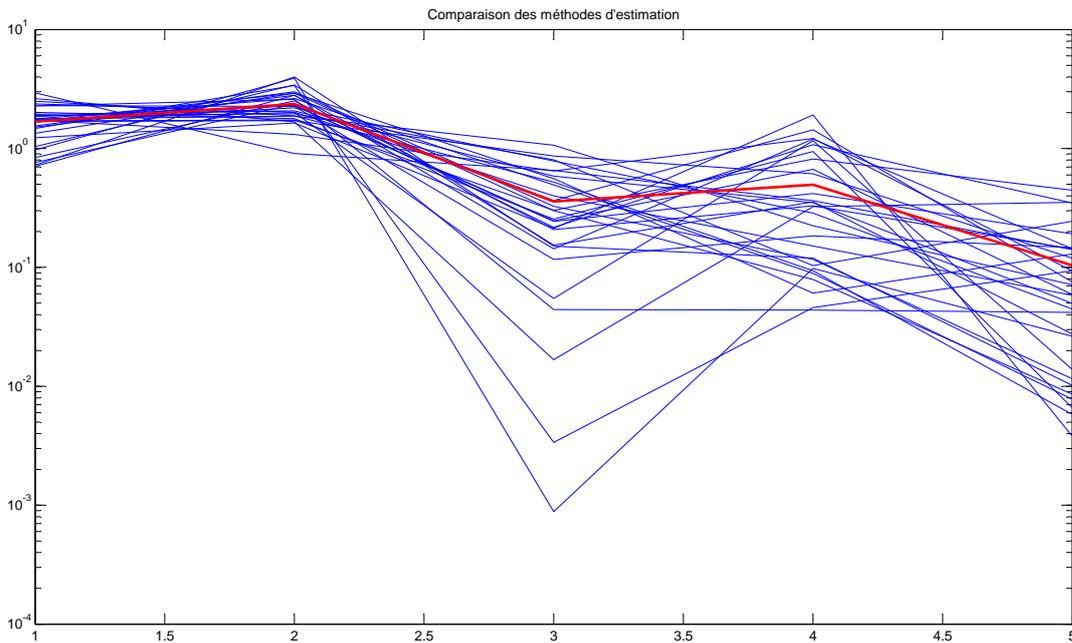


FIGURE 3.23 – Comparaison des méthodes d'estimation de  $\gamma$ , agrégation de 30 simulations, erreur initiale en position petite. L'axe des abscisses indique le numéro de la méthode, les ordonnées le résultat agrégé.

En boucle fermée, nous avons constaté en simulation que les méthodes 1,2 et 4 ne fonctionnent pas. C'est, d'une façon surprenante, la méthode 3 qui fonctionne le mieux, comme le montre l'exemple des figures 3.24 et 3.25

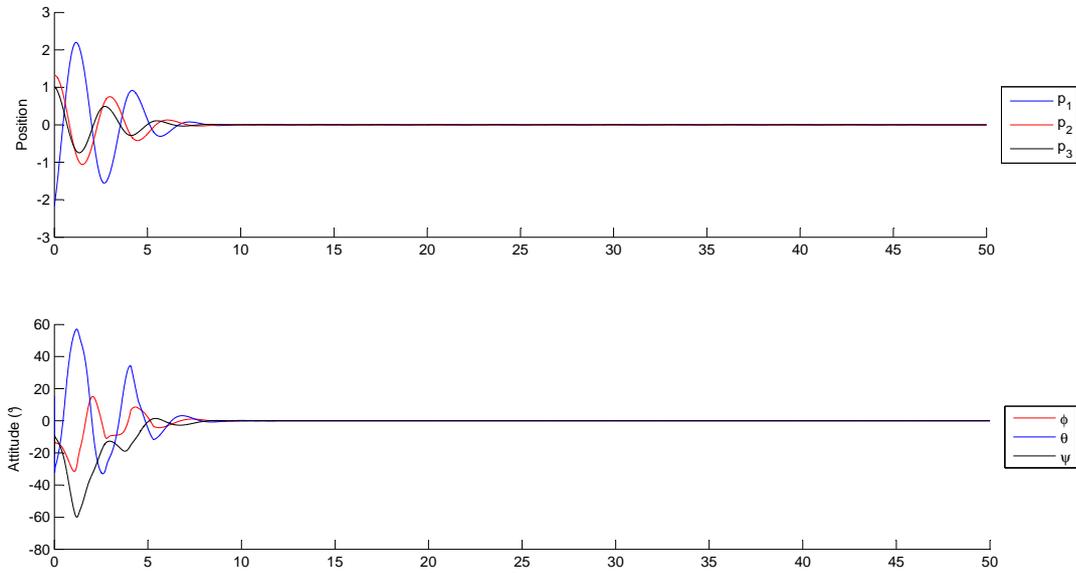


FIGURE 3.24 – Résultat en boucle fermée obtenu avec la méthode 3 ( $Hb_3$ )

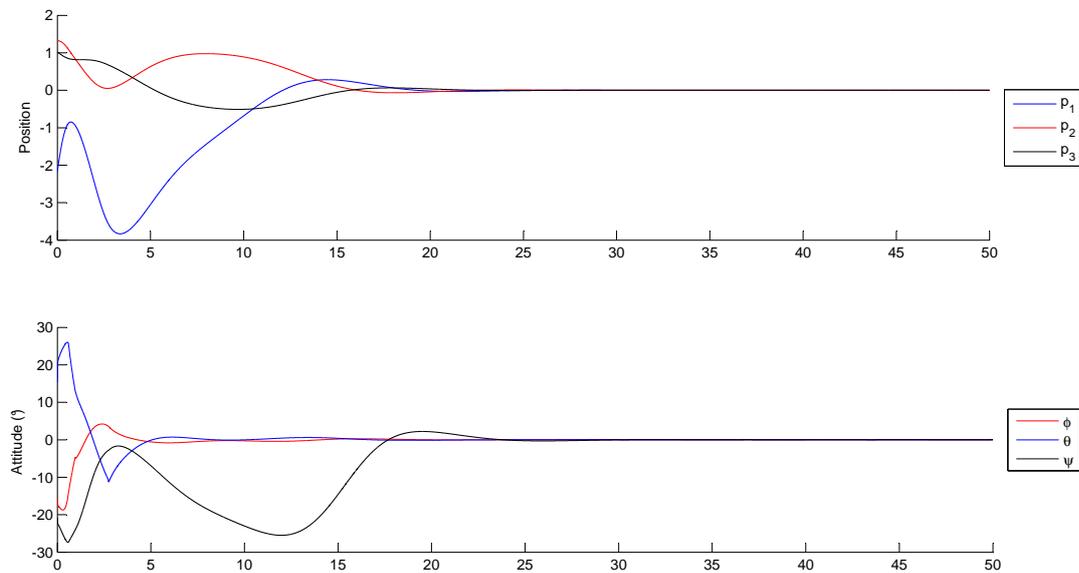


FIGURE 3.25 – Résultat en boucle fermée obtenu avec la méthode 5 (estimation combinée)

### 3.3 Critique des résultats

Les résultats présentés dans ce chapitre étendent en un certain sens les résultats du précédent, puisqu'ils ne posent pas l'hypothèse de linéarité. Ils trouvent cependant leurs limites, en particulier dans le modèle extrêmement simplifié qui est utilisé. Un élément supplémentaire résiderait dans l'ajout d'un intégrateur dans les lois de commande, ce qui permettrait a minima de rejeter une perturbation. L'approche adaptative présentée dans ce chapitre pourrait être développée davantage, en particulier en considérant une loi dont l'adaptation se fait alors que la loi est appliquée.

# Chapitre 4

## Suivi de trajectoire

*Le chemin n'est pas difficile : c'est le difficile qui est le chemin*

Søren Kierkegaard

### Résumé

Ce chapitre est une extension du chapitre précédent au suivi de trajectoire. On y présente tout d'abord un cadre de modélisation générique pour le suivi de trajectoire d'une classe de drones. Le cas de la stabilisation étudié précédemment en est un cas particulier, avec un mouvement de référence immobile.

Une loi de commande non-linéaire est ensuite définie, qui se rapproche beaucoup de celle qui avait été définie au chapitre 3 pour la stabilisation. De même que dans ce chapitre, le cas d'un système sous-actionné est d'abord traité, ce cas étant révélateur du principe mis en œuvre dans la suite. Le cas d'un système sous-actionné est ensuite traité. Dans ces lois de commande de suivi de trajectoire, le type de convergence obtenu dépend essentiellement de propriétés sur le point de référence poursuivi : selon que la dynamique de cette référence est connue ou non, et que la mesure de l'erreur par rapport à elle est de forme variant dans le temps ou non, le résultat obtenu est global, semi-global, ou pratiquement semi-global.

On montre ensuite que le cas du suivi d'une trajectoire pour un drone par asservissement visuel est une application de ces résultats. Pour ce faire, on introduit la situation où le drone possède deux images de référence, et l'on définit une pondération des informations extraites dans celles-ci, dont on montre qu'elle possède la forme du cadre précédemment traité.

Les résultats de ce chapitre sont contenus dans une publication en cours de soumission et présentée en annexe, section A.6.

## Introduction

Dans ce chapitre, on cherche à étendre les résultats obtenus au chapitre précédent pour la stabilisation d'un engin au cas du suivi de trajectoire. Pour ce faire, on s'intéresse au cas de mesures incertaines de position -comme au chapitre précédent- mais relativement à une position de référence qui n'est plus nécessairement immobile. Le cas d'une référence fixe correspond alors au cas de la stabilisation vu au chapitre précédent ; ainsi, les études réalisées dans le présent chapitre constituent-elles des généralisations de celles établies dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, on définit une telle mesure et on synthétise une loi de commande permettant le suivi de cette référence. Dans un second temps, on montre qu'une telle mesure de position relative peut être obtenue dans le cas de l'asservissement visuel d'un drone VTOL.

### 4.1 Position du problème

Nous supposons disponible une mesure incertaine de position de la forme suivante :

$$\sigma = R^T M(t) (p - p_r(t)) \quad (4.1)$$

où  $p_r(t)$  désigne la trajectoire de référence, qui est une fonction supposée lisse et à dérivée et dérivée seconde  $|\dot{p}_r(t)|$  et  $|\ddot{p}_r(t)|$  bornées, et  $M(t)$  représente la matrice de mesure incertaine de position, qui est une fonction matricielle prenant ses valeurs dans l'ensemble des matrices définies positives, avec les hypothèses présentées ci-dessous. Notons que  $M(t)$  et  $p_r(t)$  sont inconnues, contrairement par exemple au cas traité dans (Hamel et al., 2002), de même d'ailleurs que la pose courante du drone, alors que celle-ci est utilisée dans le même papier. Notons aussi que nous étudions ainsi un cas plus générique que les cas de suivi de ligne fréquemment étudiés dans la littérature (par exemple, (Mahony and Hamel, 2001)).

On définit à présent les hypothèses qui seront utilisées dans ce chapitre. La première de ces hypothèses est utilisée tout au long du chapitre.

**Hypothèse 0** : il existe des bornes telles que :

$$\begin{cases} |\dot{p}_r(t)| & \leq V_M \\ |\dot{M}(t)| & \leq \|\dot{M}\|_M \\ 0 & < \lambda_1 I \leq M(t) \leq \lambda_2 I \end{cases} \quad (4.2)$$

Les trois hypothèses suivantes ne sont utilisées que pour certains des résultats présentés dans la suite :

- **Hypothèse 1** :  $M(t)$  est constante ;
- **Hypothèse 2** : la dynamique  $R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $R^T \ddot{p}_r(t)$  de la référence exprimée en repère engin est connue ;
- **Hypothèse 3** : l'accélération du point de référence est bornée avec une borne inférieure à  $g$  :  $|\ddot{p}_r(t)| \leq A_M < g$  ;

*Il n'y a pas de si grand philosophe  
qui ne croit un million de choses sur la foi d'autrui,  
et qui ne suppose beaucoup plus de vérités qu'il n'en établit.*

Alexis de Tocqueville

## 4.2 Loi de commande pour le suivi de trajectoire

Dans cette section, le résultat principal est formulé. Nous considérons tout d'abord le cas tout actionné qui est fondamental dans la définition de la loi de commande.

### 4.2.1 Le cas tout actionné

Le modèle retenu est ici :

$$\ddot{p} = Ru \quad (4.3)$$

On considère que les mesures suivantes sont disponibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \\ \omega \\ v \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Les mesures sont exprimées en repère engin et consistent en : mesure incertaine de position  $\sigma$  définie selon l'équation (4.1), exprimée comme une mesure d'erreur de position par rapport à la trajectoire de référence, vitesse angulaire  $\omega$  et vitesse linéaire  $v$ . Les mesures de vitesse angulaire peuvent être obtenues par une unité de mesure inertielle (UMI) ; la vitesse linéaire par exemple via un capteur GPS. Finalement, la mesure incertaine de position peut représenter une variété de capteurs de type position. Nous discuterons en section 4.3 le cas d'une camera vidéo.

Le résultat suivant peut être établi, à l'aide des fonctions de saturations définies en section 3.1.1.1.

**Théorème 3** (Loi de suivi de trajectoire, cas tout actionné)

Considérons le système décrit par l'équation (4.3) avec  $u$  comme entrée de commande. Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  deux fonctions de saturation avec  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \text{sat}_\delta(x) = s_\delta(|x|^2)x, \overline{\text{sat}}_\delta(x) = \bar{s}_\delta(|x|^2)x$ . Considérons des gains  $k_1, k_2 > 0$  tels que :

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_{m,s} > k_1 \|M_a\|_M \text{Max} \{C \|M\|_M, \|M_a\|_M\} \\ k_2 \bar{\delta}_m > k_1 \delta_M \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $C = \text{Max}(C_1, C_2)$  avec  $C_1 = \sup_\tau (s_\delta(\tau) + 2\tau|s'_\delta(\tau)|)$  et  $C_2 = \sup_\tau (\bar{s}_\delta(\tau) + 2\tau|\bar{s}'_\delta(\tau)|)$ . Définissons la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} u &= -k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) - k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(\delta v) + a_r(t) \\ \delta v &= v - v_r(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $v_r(t)$  et  $a_r(t)$  sont une vitesse et une accélération de type feedforward que l'on définit ci-dessous suivant le scénario considéré. Alors :

- i) sous les Hypothèses 1 et 2, en définissant  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , il existe  $k_{3,m} > 0$  tel que, pour tout  $k_3 > k_{3,m}$ , le système en boucle fermée (4.3)-(4.6) est globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable.
- ii) sous l'Hypothèse 2 uniquement ( $M(t)$  peut varier), en définissant  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , le système en boucle fermée (4.3)-(4.6) est semi-globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable.
- iii) dans le cas général ( $M(t)$  peut varier et la dynamique de la trajectoire de référence est inconnue), en définissant  $v_r(t) = 0$ ,  $a_r(t) = 0$ , le système en boucle fermée (4.3)-(4.6) est pratiquement semi-globalement asymptotiquement stable.

La preuve est donnée en annexe, section A.6. La figure 4.1 représente cette loi de commande.

### 4.2.2 Le cas sous-actionné

Le résultat principal de cette section est maintenant énoncé. Nous supposons que les mesures suivantes sont disponibles :

$$\begin{cases} \sigma \\ \gamma \\ \omega \\ v \end{cases} = gR^T b_3 \quad (4.7)$$

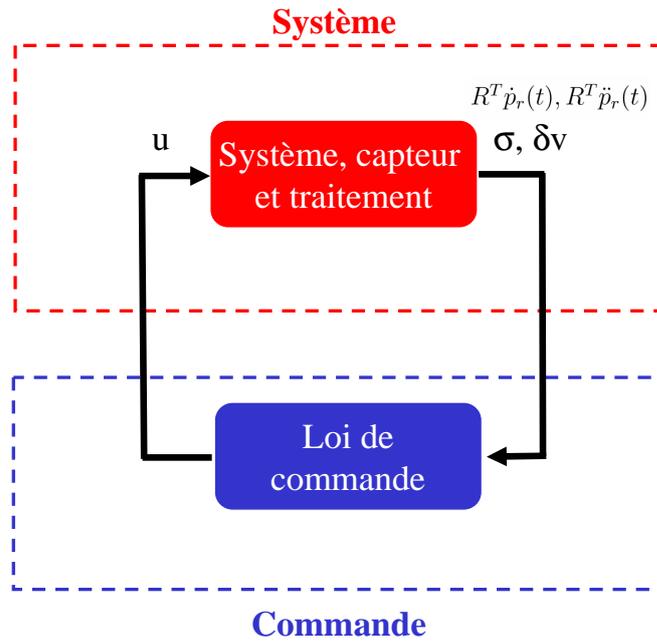


FIGURE 4.1 – Loi de commande de suivi de trajectoire, cas tout actionné, Théorème 3

Ces mesures sont toutes exprimées en repère engin, comme précédemment, et  $\sigma$  est toujours défini selon l'équation (4.1).  $\gamma$  est une mesure de la gravité. Nous renvoyons vers la section 3.2 du chapitre précédent sur les moyens d'obtenir ces mesures. Le modèle considéré est toujours celui donné par les équations (1.19).

**Théorème 4** (Loi de suivi de trajectoire, cas sous-actionné)

Considérons le système décrit par l'équation (1.19) avec les commandes  $u, \omega$ . Soient  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  deux fonctions de saturation. Considérons des gains  $k_1, k_2 > 0$  tels que :

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_{m,s} &> k_1 \|M_a\|_M \text{Max} \{C \|M\|_M, \|M_a\|_M\} \\ k_2 \bar{\delta}_m &> k_1 \delta_M \\ k_1 \delta_M + k_2 \bar{\delta}_M &< g - \sup(|\ddot{p}_r(t)|) \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $C = \text{Max}(C_1, C_2)$  avec  $C_1 = \sup_\tau (s_\delta(\tau) + 2\tau |s'_\delta(\tau)|)$  et  $C_2 = \sup_\tau (\bar{s}_\delta(\tau) + 2\tau |\bar{s}'_\delta(\tau)|)$ . Définissons une augmentation dynamique :

$$\dot{\eta} = \eta \wedge \omega - k_3(\eta - \sigma), \quad k_3 > 0 \quad (4.9)$$

avec la loi de commande :

$$\begin{cases} \omega_1 &= -\frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_2}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(b_1) R^T \dot{\mu} \\ \omega_2 &= \frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_1}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(b_2) R^T \dot{\mu} \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $\bar{\mu}, \mu$ , et le terme de feedforward  $R^T \dot{\mu}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &:= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta(\eta) + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(\delta v) - a_r(t) \\ \delta v &:= v - v_r(t) \\ \mu &:= R \bar{\mu} \\ R^T \dot{\mu} &= -k_1 k_3 [s_\delta(|\eta|^2) I_3 + 2s'_\delta(|\eta|^2) \eta \eta^T] (\eta - \sigma) \\ &\quad + k_2 [\bar{s}_\delta(|\delta v|^2) I_3 + 2\bar{s}'_\delta(|\delta v|^2) (\delta v) (\delta v)^T] (\gamma - u b_3) \end{aligned}$$

$v_r(t)$  et  $a_r(t)$  sont des termes de vitesse et d'accélération à définir dans ce qui suit.

Alors :

- i) sous les Hypothèses 1, 2 et 3, en définissant  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , il existe  $k_{3,m} > 0$  tel que, pour tout  $k_3 > k_{3,m}$ , le système en boucle fermée (1.19)-(4.10) avec (4.9) est asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable avec un domaine de convergence donné par  $\{\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)| b_3\}$  (stabilité asymptotique presque globale).
- ii) sous les Hypothèses 2 et 3 uniquement ( $M(t)$  peut varier), définissant  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , le système en boucle fermée (1.19)-(4.10) avec (4.9) est semi-globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable.
- iii) dans le cas général ( $M(t)$  peut varier et la dynamique est inconnue), en définissant  $v_r(t) = 0$ ,  $a_r(t) = 0$ , le système en boucle fermée (1.19)-(4.10) avec (4.9) est pratiquement semi-globalement asymptotiquement stable.

La preuve est donnée en annexe, section A.6. La figure 4.2 représente cette loi de commande.

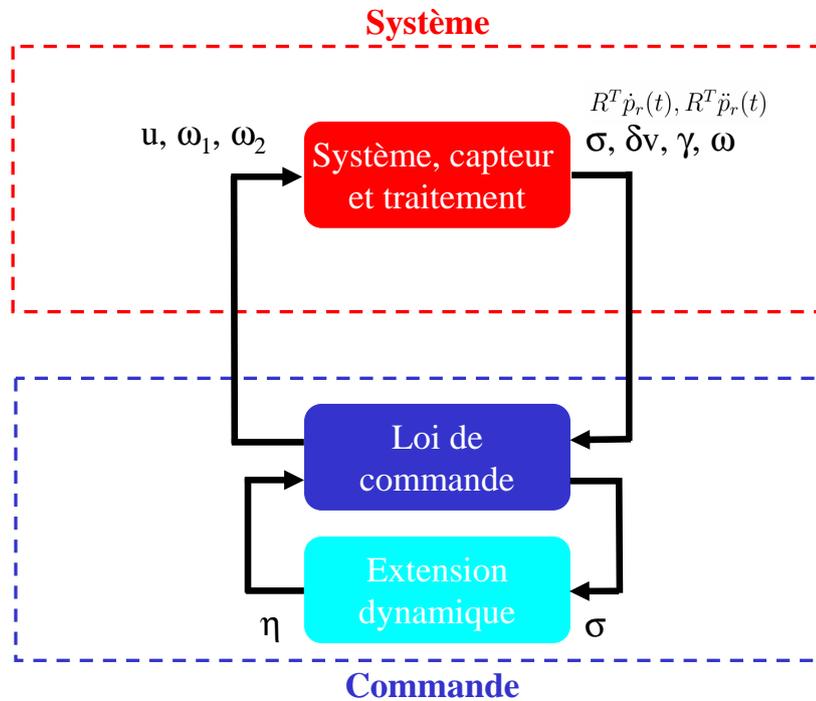


FIGURE 4.2 – Loi de commande de suivi de trajectoire, cas sous actionné, Théorème 4

Notons que le premier résultat - lorsque  $M$  est constante et que la dynamique de référence est connue- est presque un résultat de stabilité asymptotique globale.

Si  $M$  n'est pas constante, plus la borne sur sa vitesse de variation est petite, plus le domaine de stabilité sera grand.

En outre, lorsque la dynamique du point de référence est inconnue mais bornée, le résultat le meilleur possible est un résultat de stabilité pratique : l'erreur de position et de vitesse peut être rendue aussi petite que désirée lorsque la borne sur la vitesse de référence est réduite.

Finalement, notons que pour les cas (i) et (ii) uniquement, il y a une hypothèse supplémentaire sur l'amplitude maximale de l'accélération de référence (Hypothèse 3 :  $|\ddot{p}_r(t)| \leq A_M < g$ ). Ceci car, dans ces deux cas, l'accélération de référence est additionnée comme un terme de feedforward dans l'entrée de commande, et s'ajoute ainsi à la gravité. Si la somme de ces termes était nulle, le système ne serait pas pilotable.

D'un autre côté, dans le cas (iii), aucune accélération n'est ajoutée à la commande (puisque l'accélération de référence est inconnue dans ce cas) et seul un résultat de stabilité pratique est démontré de sorte que, d'une certaine façon, la loi de commande vise à suivre la trajectoire de référence "en moyenne"

(en forçant ainsi  $\dot{p}_r$  à rester bornée). Ainsi, l'accélération de référence peut être temporairement grande, du moment que la vitesse de référence reste bornée.

### 4.2.3 Loi de commande simplifiée

Dans le théorème suivant, nous proposons une version simplifiée de la loi de commande définie dans le Théorème 4.

**Théorème 5** (Loi simplifiée pour le suivi de trajectoire)

Dans les conditions du Théorème 4, pour chacun des trois cas considérés dans ce théorème, il existe  $k_4 > 0$  assez grand pour que les mêmes conclusions s'appliquent avec la loi simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (4.11)$$

en lieu et place de l'équation (4.10).

La preuve est donnée en annexe, section A.6. La figure 4.3 représente cette loi de commande.

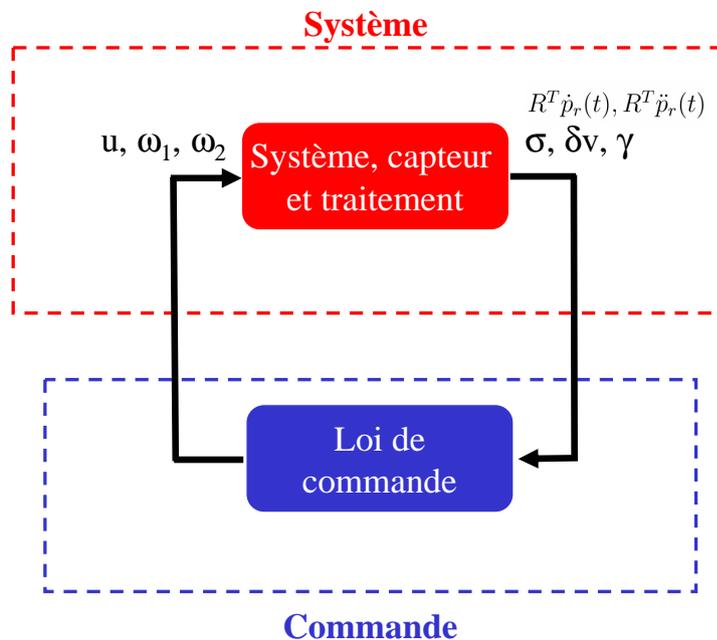


FIGURE 4.3 – Loi de commande simplifiée de suivi de trajectoire, Théorème 5

### 4.3 Application à la commande référencée vision

Selon une approche similaire à celle du chapitre 3, on montre que les résultats précédents s'appliquent au cas de la commande référencée vision.

#### 4.3.1 Stabilisation basée vision

Revenons tout d'abord au cas déjà traité au chapitre 3 de la stabilisation d'un drone à la pose de référence en nous appuyant sur les théorèmes plus généraux introduits dans ce chapitre. Nous supposons que les mesures de vitesse  $v$  sont disponibles. Dans ce cas, le Théorème 4 s'applique directement avec  $M = M\left(\frac{n^*}{d^*}\right)$  si toutefois la condition sur les gains (4.8) est satisfaite. Nous en déduisons que la loi de commande (4.9)-(4.10) assure une stabilisation semi-globale à la pose de référence à condition que :

$$\begin{cases} n_1^* > 0 \\ k_1, k_2 > 0 \\ k_2 \bar{\delta}_m > k_1 \delta_M \\ k_1 \delta_M + k_2 \bar{\delta}_M < g \\ n_1^* d^* k_2^2 > k_1 |n_2^*| \left( |n_2^*| + \frac{2n_1^*}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (4.12)$$

Lorsque des bornes (larges) sont connues pour  $d^* : d_m \leq d^* \leq d_M$  et  $n_1^* \geq n_{1m}$ , en se rappelant que  $|n^*| = 1$ , la dernière condition de l'équation (4.12) peut être remplacée par :

$$n_{1m} d_m k_2^2 > k_1 \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \quad (4.13)$$

#### 4.3.2 Commande en cap

La remarque faite en section 3.1.3.3 du chapitre 3 sur la possibilité de donner une dynamique au cap s'applique au cas présent, et une loi de commande en cap de même type peut être définie pour les mêmes raisons.

#### 4.3.3 Asservissement visuel par interpolation d'homographies

*Si timide que l'on soit, il faut bien que l'on interpole ;  
l'expérience ne nous donne qu'un certain nombre de points isolés ;  
il faut les réunir par un trait continu ;  
c'est là une véritable généralisation.*

Henri Poincaré

Considérons le cas où deux images de référence d'une même scène sont disponibles, et où ces images sont comparées toutes deux à l'image courante, fournissant deux matrices homographiques. Ces deux matrices permettent de définir deux mesures de position relative selon le schéma de l'équation (4.1),  $\sigma_1, \sigma_2$ . Il s'agit ici d'un contexte applicatif proche de (Gonçalves et al., 2010), dans lequel une succession d'images est utilisée pour permettre l'atterrissage automatique d'un avion, d'ailleurs en se basant également sur la matrice homographique.

Maintenant, les transformations entre les repères courants et de référence sont données par :

$$\begin{cases} \chi_1^* &= R_1 \chi + p_1 \\ \chi_2^* &= R_2 \chi + p_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

Dès lors, la transformation entre les deux repères de référence est décrite par :

$$\chi_2^* = \delta R \chi_1^* + \delta p \quad (4.15)$$

où  $\delta R, \delta p$  sont constants. En conséquence, les relations entre les deux ensembles de composants de la transformation sont donnés par :

$$\begin{cases} R_2 &= \delta R R_1 \\ p_2 &= \delta R p_1 + \delta p \end{cases} \quad (4.16)$$

Considérons ensuite  $\sigma$  la moyenne pondérée entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , avec une pondération variant dans le temps  $\lambda(t)$ . Considérons le cas générique où les paramètres  $n^*, d^*, R$  ne sont pas les mêmes pour les deux images de référence :

$$\begin{cases} \sigma &= (1 - \lambda(t)) \sigma_1 + \lambda(t) \sigma_2 \\ &= R_1^T \bar{M}(t) (p_1 - p_r(t)) \\ \bar{M}(t) &= (1 - \lambda(t)) M \left( \frac{n_1}{d_1} \right) + \lambda(t) \delta R^T M \left( \frac{n_2}{d_2} \right) \delta R \\ \tilde{M} &= \delta R^T M \left( \frac{n_2}{d_2} \right) \\ p_r(t) &= -\bar{M} \left( t, \frac{n_1}{d_1}, \lambda(t) \right)^{-1} \lambda(t) \tilde{M} \delta p \end{cases} \quad (4.17)$$

$\sigma$  ainsi défini est donc bien de la forme de l'équation (4.1).

#### 4.3.4 Résultats de simulation

On présente dans cette section quelques résultats de simulations. On montre tout d'abord sur la figure 4.4 le résultat obtenu avec un basculement brutal entre l'image de référence précédente et la suivante. Le véhicule parvient à suivre la modification brutale, tout en restant stable, puisque la loi est stable. Néanmoins, on constate sur la courbe des commandes appliquées (figure 4.5) que celles-ci ont une valeur importante, en particulier juste après l'instant de basculement. Notons que même si celles-ci n'ont pas été prises en compte explicitement dans ce travail, des saturations existent sur de tels engins : des

commandes brutales peuvent atteindre ces saturations et provoquer un comportement instable. C'est pourquoi les approches de pondération proposées plus haut trouvent ici leur intérêt.

Sur la figure 4.6, on montre ainsi comment ce résultat est amélioré par une pondération des deux vecteurs d'erreur comme expliqué ci-avant. Le ralliement se fait de façon plus progressive comme on le voit sur cette figure. En outre, les commandes appliquées sont nettement moins importantes, comme on le voit sur la figure 4.7 (l'échelle n'est pas là même que pour la courbe précédente).

Enfin, on montre ce que fournit un suivi de trajectoire obtenu avec une pondération plus lente, sur la figure 4.8. Le ralliement est encore plus progressif. Les commandes sont encore plus faibles, comme le montre la figure 4.9.

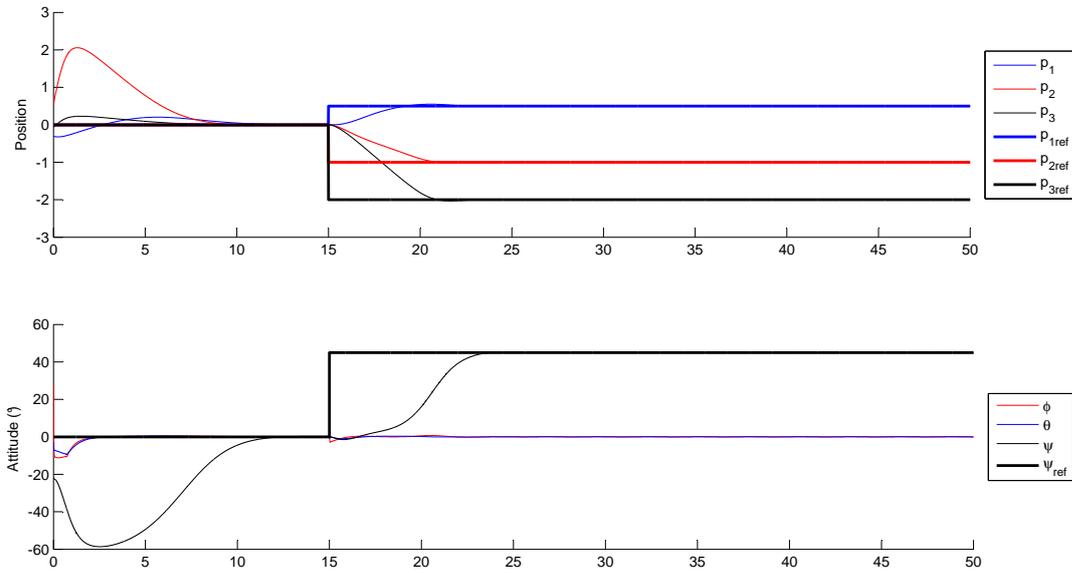


FIGURE 4.4 – Résultat de simulation avec un basculement brutal.

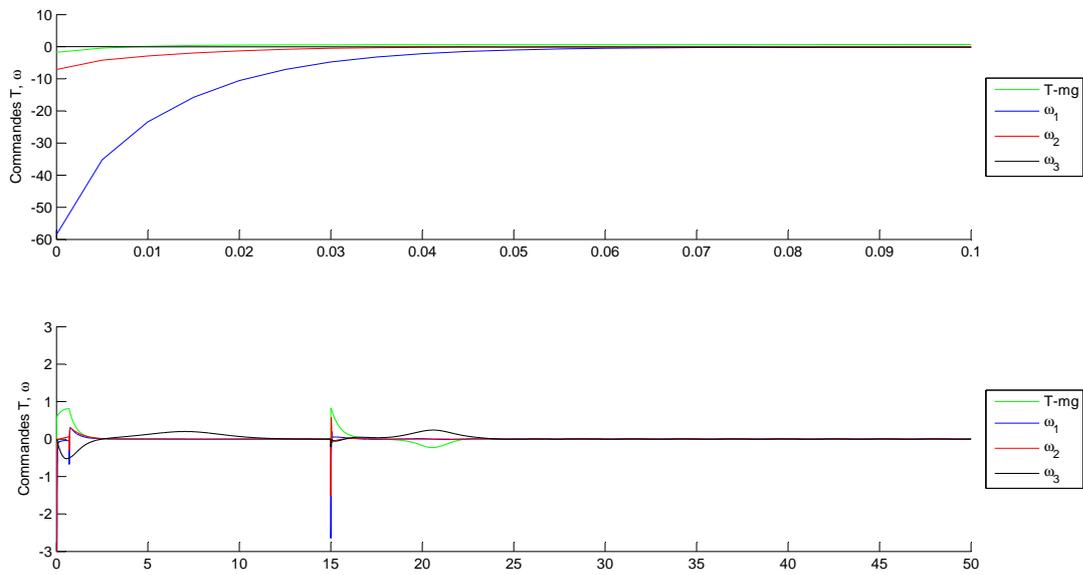


FIGURE 4.5 – Evolution des commandes  $u, \omega$  avec un basculement brutal. En haut, le début de la réponse ; en bas, zoom sur la fin de la réponse.

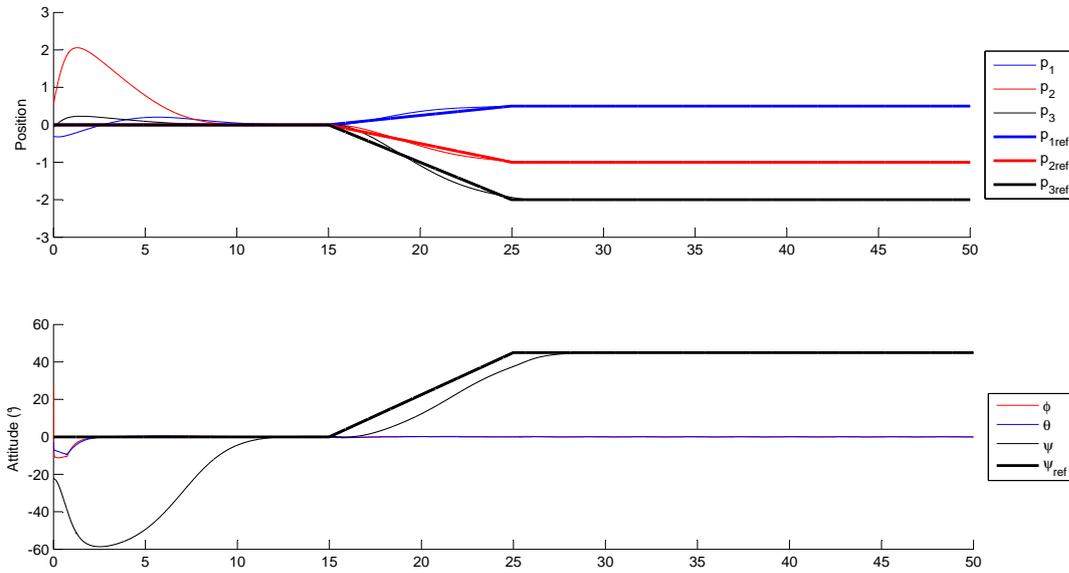


FIGURE 4.6 – Résultat de simulation avec une pondération rapide.

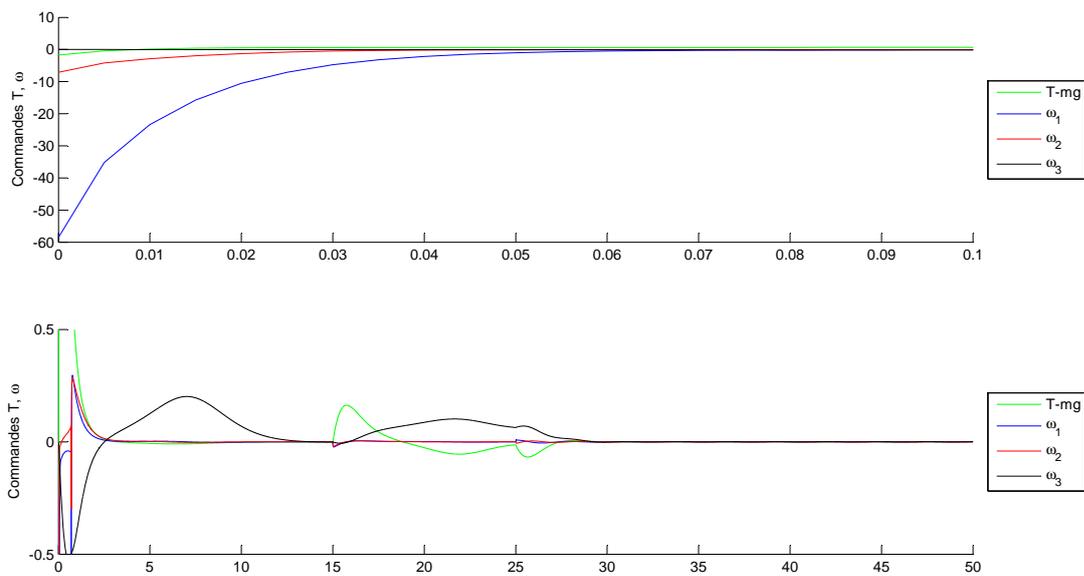


FIGURE 4.7 – Evolution des commandes  $u, \omega$  avec une pondération rapide. En haut, le début de la réponse ; en bas, zoom sur la fin de la réponse.

## 4.4 Critique des résultats

Les mêmes limites que celles du chapitre précédent peuvent être mises en avant, puisqu'il s'agit de lois du même type employées dans un contexte plus générique. En outre, pourraient être développées les applications possibles de ce

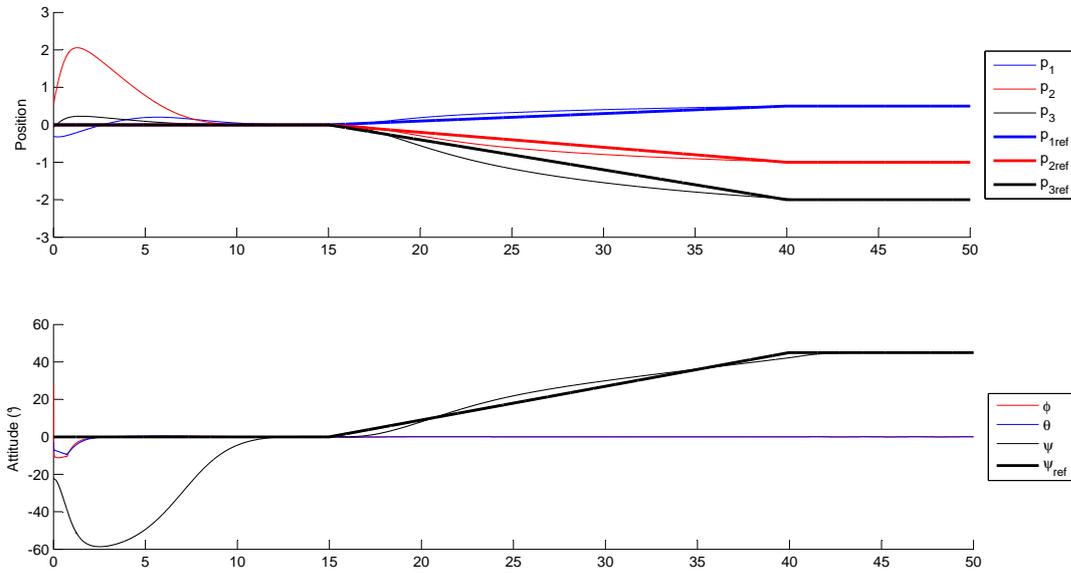


FIGURE 4.8 – Résultat de simulation avec une pondération plus lente.

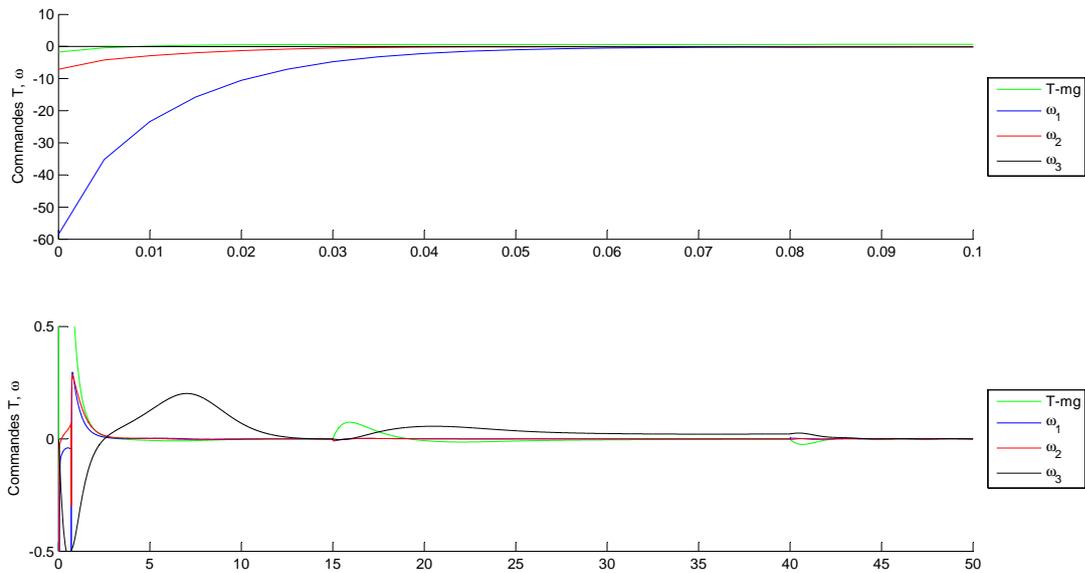


FIGURE 4.9 – Evolution des commandes  $u, \omega$  avec une pondération plus lente. En haut, le début de la réponse ; en bas, zoom sur la fin de la réponse.

résultat, en trouvant d'autres situations relevant d'un modèle similaire.

# Chapitre 5

## Mise en œuvre expérimentale

*Le critère de la scientificité d'une théorie  
réside dans la possibilité de l'invalider, de la réfuter  
ou encore de la tester.*

Karl Popper

### Résumé

Ce chapitre présente la mise en œuvre expérimentale qui a débuté au cours de ce travail de thèse. Cette mise en œuvre n'a pas permis encore, et de loin, de valider expérimentalement tous les algorithmes présentés plus haut, faute de temps. On présente néanmoins la démarche suivie, les problèmes soulevés et les solutions apportées, en commençant par relever la nécessité de telles expérimentations, en complément des études analytiques menées dans les chapitres précédents.

Un premier chapitre présente les plates-formes expérimentales sur lesquelles les essais ont été réalisés.

Puis un chapitre analyse les difficultés propres à ces expérimentations. Celles-ci regardent la sécurité, les aspects temps réel, mais aussi les questions liées aux images et à leurs traitements.

Le chapitre suivant indique les solutions qui ont été mises en œuvre pour répondre à ces problématiques. Il traite des aspects matériel, logiciel, des communications entre calculateurs, et du traitement de l'image.

Enfin, le dernier chapitre présente les essais réalisés, indique leurs résultats et les conclusions qui peuvent en être tirées.

Malgré le caractère très partiel de cette validation expérimentale, il nous semble important de la rapporter ici car elle signale que l'objet de cette thèse est bien de développer des lois destinées à faire voler des appareils, finalité qui implique la prise en considération de nombre de problèmes pratiques complexes. Et qui implique de résister à la tentation très répandue de la division entre théorie et application.

## Introduction

*No amount of experimentation can ever prove me right ;  
a single experiment can prove me wrong.*

Albert Einstein

Tous les développements théoriques réalisés au cours de cette thèse sont appelés à être validés par des expérimentations sur plates-formes réelles. Plusieurs raisons rendent en effet de telles expérimentations essentielles et complémentaires aux démonstrations analytiques et aux validations numériques :

- la mauvaise connaissance d’un modèle représentatif du drone, qui est liée à la difficulté d’instrumenter de petits drones pour en obtenir un modèle précis ;
- les aspects temps réel, sur lesquels on revient ci-après, et leurs conséquences sur le succès des expérimentations ;
- l’environnement des essais (vent, luminosité) et ses variations ;

C’est pourquoi de telles expérimentations ont jalonné cette thèse. Elles n’ont pu cependant encore, et de loin, permettre une vérification exhaustive des algorithmes proposés, faute de temps et de disponibilité des plates-formes.

Cependant, nous souhaitons montrer dans le présent chapitre que des éléments significatifs ont été pensés et mis en œuvre sur les hélicoptères du département DCSD de l’Onera par l’équipe en charge de ces engins, qui ont permis de résoudre une part significative des défis associés à de telles expérimentations.

On présente tout d’abord les plates-formes utilisées dans le cadre de ces expérimentations. On analyse ensuite les difficultés associées aux expérimentations, difficultés qui ont dû être surmontées pour envisager les essais associés à cette thèse. La troisième partie présente précisément les solutions mises en œuvre par l’équipe pour répondre aux difficultés précédemment soulevées, en termes de matériel, de logiciel, de communication et de traitement d’image. La dernière partie décrit les essais qui ont été réalisés en mettant en évidence la mesure dans laquelle leurs résultats valident partiellement les approches proposées.

### 5.1 Présentation des plates-formes expérimentales

La réalisation d’essais de mise en oeuvre expérimentale des résultats présentés dans ce mémoire aurait été plus aisée avec des machines de faible masse et en intérieur. De telles machines n’existaient pas au DCSD pendant la durée de la thèse, et ceux-ci ont donc été réalisés sur les machines disponibles, avec les difficultés associées que l’on discute ci-après. Nous présentons tout d’abord les plates-formes expérimentales utilisées.

### 5.1.1 Le Vario Benzin

Le Vario Benzin (figure 5.1) est un hélicoptère de taille relativement réduite comme en témoignent les caractéristiques suivantes :

- masse à vide : 11 kg
- masse au décollage : 15 kg
- longueur hors tout : 1,63 m
- bipale d'envergure : 1,78 m
- moteur 2 temps cylindrée : 23 ou 26 cm<sup>3</sup>
- capacité en charge expérimentale : 3 kg
- temps de vol : 45 mn

Il est une plate-forme très adaptée aux expérimentations envisagées, étant à la fois assez petit pour permettre une prise de risque raisonnée tout en étant assez gros pour un emport conséquent. Cependant, cette plate-forme était en cours de développement pendant la plus grande partie de la durée de cette thèse. C'est pourquoi les premiers essais ont été réalisés sur une autre plate-forme, que l'on présente maintenant.



FIGURE 5.1 – Plate-forme expérimentale Vario

### 5.1.2 Le Yamaha Rmax

La plate-forme sur laquelle ont été réalisées les premières expérimentations est l'hélicoptère Rmax représenté sur la figure 5.2.



FIGURE 5.2 – Plate-forme expérimentale Rmax

Fabriqué par Yamaha pour de l'épandage agricole, il a été également acquis par différents laboratoires de recherche pour des besoins d'expérimentation. Sa fiche technique indique les caractéristiques suivantes :

- masse à vide : 58 kg
- masse au décollage : 93 kg
- longueur hors tout : 3,63 m
- bipale d'envergure : 3,115 m
- moteur 2 temps cylindrée : 246 cc
- capacité en charge utile : 12 kg
- énergie disponible en charge expérimentale : 50 W
- temps de vol : 60 mn

Sa charge utile conséquente permet ainsi l'emport de différents matériels pour des besoins de tests.

Dans le cadre de cette thèse, cet engin n'est pas la formule la plus adaptée en raison d'une masse qui interdit la prise de risque : une caractéristique inadaptée à des essais où, à terme, les ordres donnés aux vérins sont directement issus d'un calcul sur les images issues de la caméra vidéo, faisant de ces essais une expérimentation particulièrement risquée.

## 5.2 Analyse des difficultés associées aux expérimentations

*A theory is something nobody believes, except the person who made it.  
An experiment is something everybody believes, except the person who made it.*

Albert Einstein

Dans cette section, on analyse les problèmes que pose la mise en œuvre expérimentale des résultats proposés dans cette thèse. Depuis les résultats théoriques démontrés ci-avant jusqu'à des vols d'hélicoptères implémentant de telles lois de commande, différents types de problèmes se posent en effet :

- les dangers propres aux expérimentations ;
- les problématiques temps réel ;
- le traitement d'image et sa robustesse ;

### 5.2.1 Dangers associés aux expérimentations

La masse des plates-formes utilisées dans ces expérimentations réduit la possibilité d'une prise de risque -même avec le Vario Benzin. D'autre part, le principe sur lequel repose ces travaux est celui d'une loi de pilotage directement issue du traitement de l'image. De ce fait, les erreurs dans le traitement de l'image, les retards dans la chaîne de transmission sont autant de phénomènes qui impactent la stabilité au plus bas niveau des boucles de pilotage-guidage-navigation : au niveau du pilotage. Ces expérimentations sont donc dangereuses. Elles réclament l'utilisation de terrains sûrs, en l'occurrence éloignés, ce qui rallonge la durée des essais et réclame une certaine logistique. Les matériels et logiciels doivent en outre être développés avec des redondances, des modes de panne, afin de récupérer le système pour éviter un accident dangereux. Il faut donc prendre en compte des aspects sûreté de fonctionnement.

### 5.2.2 Problématiques temps réel

Le pilotage d'un engin consiste à mesurer en permanence des grandeurs informant sur les écarts à l'objectif, et à agir sur les commandes disponibles pour le faire bouger. De ce fait, il est clair qu'il faut s'assurer du délai existant entre l'instant où l'environnement bouge et l'instant où l'engin réagit ; entre ces deux instants, toute une chaîne d'évènements se succède : la mesure de l'environnement ; le traitement de ces mesures ; le calcul de la commande désirée ; l'envoi et la réception de celle-ci ; son interprétation ; la mise en mouvement des actionneurs ; tout ceci sans compter tous les délais de transmission entre ces instants. Suivant l'application considérée, la durée globale de tous ces évènements doit être maîtrisée de façon plus ou moins stricte. Dans le cas d'un hélicoptère, elle doit être très sévèrement contrôlée, s'agissant d'une machine

naturellement instable, rapide et massive -donc dangereuse. Il est donc nécessaire d'assurer une rapidité d'exécution et de transmission des informations très importante, pour permettre un rafraîchissement à haute fréquence des ordres de pilotage. Plus précisément, les ordres doivent être envoyés aux environs de 30 Hz minimum pour assurer la stabilité du vol. D'autre part, si la fréquence des ordres doit être suffisamment élevée, les variations dans les temps de calcul et de transmission doivent être réduites également.

Tout ceci implique une architecture temps réel perfectionnée qui permette un séquençement efficace, précis et rapide de toutes les tâches mentionnées plus haut.

### 5.2.3 Le traitement d'image et sa robustesse

Les aspects temps réel mentionnés précédemment impliquent que le traitement d'image doit opérer de façon précise et rapide. Un aspect particulièrement délicat concerne les variations de luminosité, et plus généralement les différents aspects qui perturbent le traitement d'une image. Ayant besoin d'un algorithme très rapide pour les raisons précédentes, celui qui a été choisi ne fait pas preuve d'une grande robustesse à ce type de variabilités, ce qui en retour donne des résultats variants et donc manquant de fiabilité. La figure 5.3 montre un exemple des problèmes auxquels sont soumis les algorithmes : une croix blanche ayant été placée au sol pour favoriser la reconnaissance d'un motif reconnaissable, celle-ci est entourée d'une zone partiellement saturée de laquelle il est difficile pour un algorithme de traitement d'image de la distinguer. On notera que, si de très nombreux algorithmes de traitements d'image existent, la majorité est démontrée dans des conditions contrôlées de luminosité, et rarement depuis des plates-formes hélicoptère en extérieur. La difficulté est réelle, et ne doit pas être sous-estimée.

## 5.3 Solutions mises en œuvre : matériels et logiciels

Dans cette section, on présente la façon dont un environnement matériel et logiciel a été conçu et réalisé de façon à répondre aux problématiques exposées dans la section précédente. Précisons que ces réalisations ont été faites en prenant en compte les problématiques propres au travail rapporté dans cette thèse, mais pas uniquement dans cet objectif. Certaines avaient d'ailleurs débuté avant cette thèse. C'est l'équipe drone du département DCSD de l'Onera qui réalise et met en œuvre ces systèmes.



FIGURE 5.3 – Une image partiellement saturée obtenue lors d’essais

### 5.3.1 Matériels

La caméra utilisée pour les essais est une AVT Stingray F145B, visible sur la figure 5.4.



FIGURE 5.4 – La caméra utilisé dans les mises en œuvre expérimentales

Par ailleurs, sur les deux plates-formes présentées ci-dessus, afin de répondre à certaines des problématiques présentées plus haut, les calculs réalisés à bord sont partagés entre deux grandes parties :

- la partie avionique ;
- la partie charge expérimentale dédiée au traitement de l'image.

### 5.3.1.1 Vario Benzin

Pour le Vario Benzin, l'architecture matérielle de la partie avionique est représentée sur la figure 5.5.

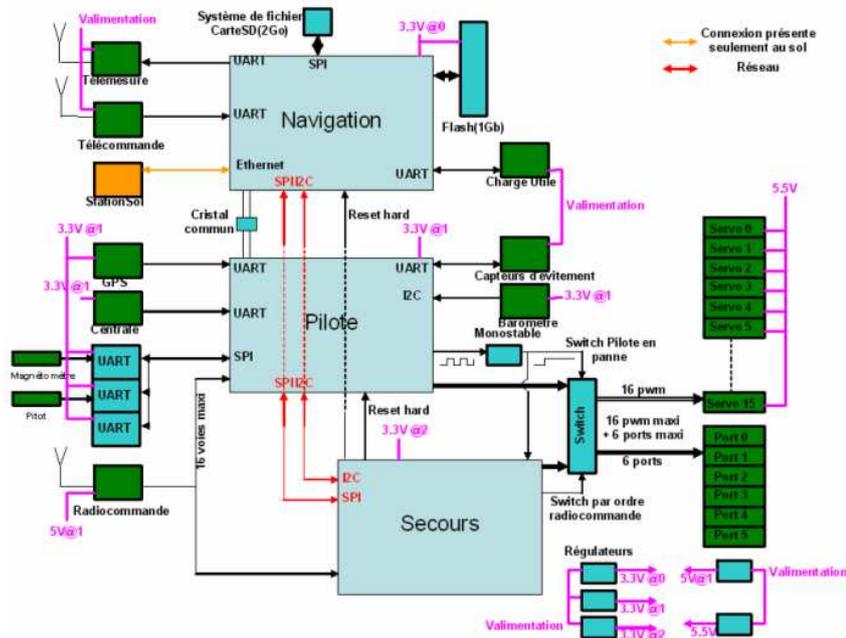


FIGURE 5.5 – Schéma représentant l'architecture matérielle de l'avionique

Elle se partage en trois microcontrôleurs de type ARM Cortex M3. En effet, le problème de sécurité présenté plus haut nécessite des redondances, ce que permet l'existence de ces microcontrôleurs entre lesquelles on peut basculer selon les cas de panne. Cette séparation permet en outre un développement modulaire, dans lequel :

- l'un des microcontrôleurs est dédié au pilote, c'est-à-dire à l'estimation de l'état du drone et au calcul des commandes envoyées aux servocommandes ;
- un autre est consacré au guidage et à la navigation, qui gère le vol, les transmissions, et donne les consignes de pilotage ;
- enfin, le troisième microcontrôleur est utilisé pour traiter les défaillances du microcontrôleur pilote.

Ces microcontrôleurs ont les caractéristiques suivantes :

- fréquence de fonctionnement : 80MHz

- flash : 512Ko
- RAM Interne : 96Ko

Ainsi que de nombreux périphériques. La consommation électrique globale est de 1,5W, en incluant les capteurs.

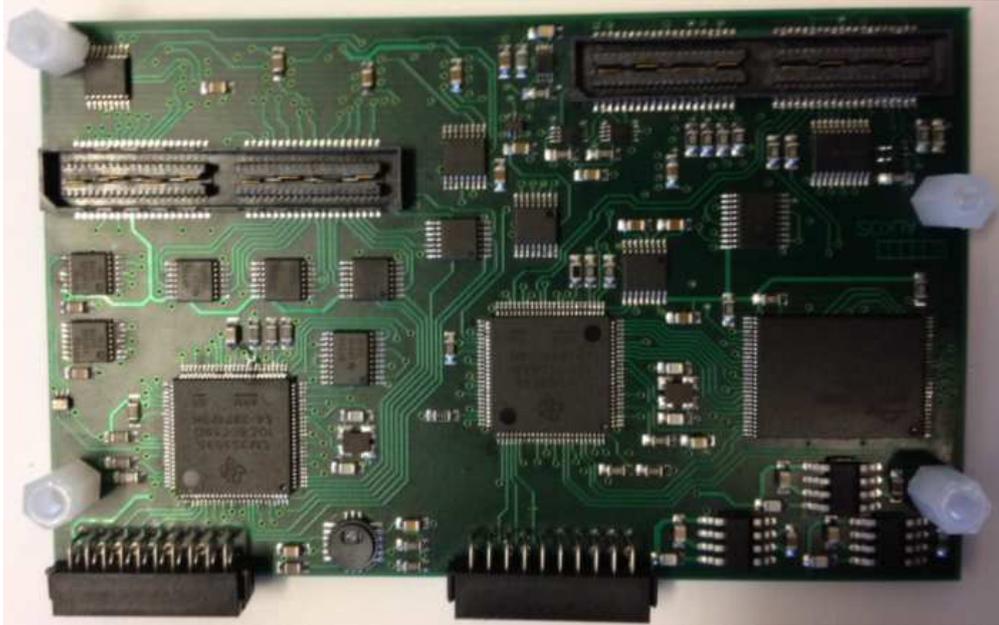


FIGURE 5.6 – Visualisation de la carte contenant les microcontrôleurs Pilote et Navigation

Un autre calculateur est consacré au traitement de l'image, tâche plus lourde du point de vue des calculs, et plus sujette à défaillances comme on l'a signalé. Le choix retenu, qui répond aux besoins de masse et de capacité de calcul précisés plus haut, est une carte COM express conga-BAF à base de processeur AMD G-T56N (1.6GHz, 512 kB x2 L2 cache, 18 W). Elle est représentée sur la figure 5.7.

### 5.3.1.2 Yamaha Rmax

Sur le Yamaha Rmax, la partie pilotage et navigation est réalisée par une carte CPU MOPS Lcd6 KONTRON avec deux processeurs ; l'un est dédié aux calculs de navigation, l'autre aux calculs de pilotage. Une centrale inertielle est présente, dont les mesures sont disponibles. En outre, un capteur GPS est également présent, avec une augmentation permettant de l'exploiter en mode RTK, assurant des précisions de positionnement centimétriques. Cette carte est représentée sur la figure 5.8. Le calculateur charge expérimentale est un PIP 22 (voir figure 5.9).

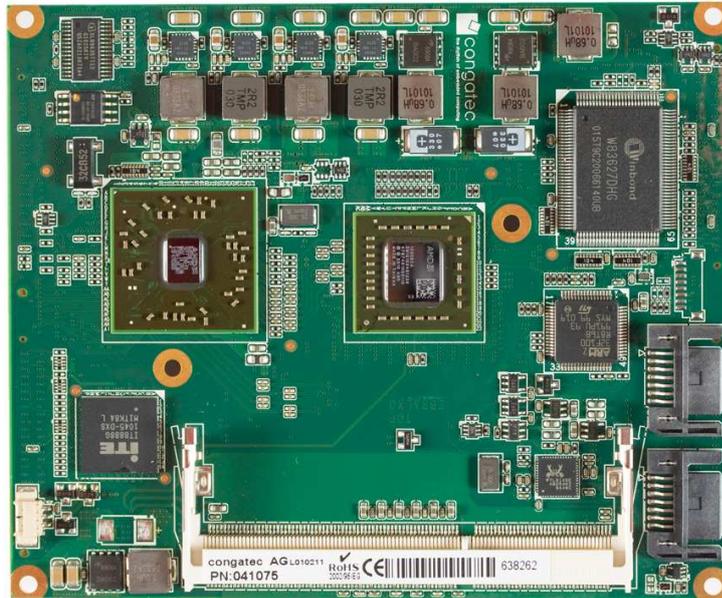


FIGURE 5.7 – Calculateur charge expérimentale du Vario Benzin

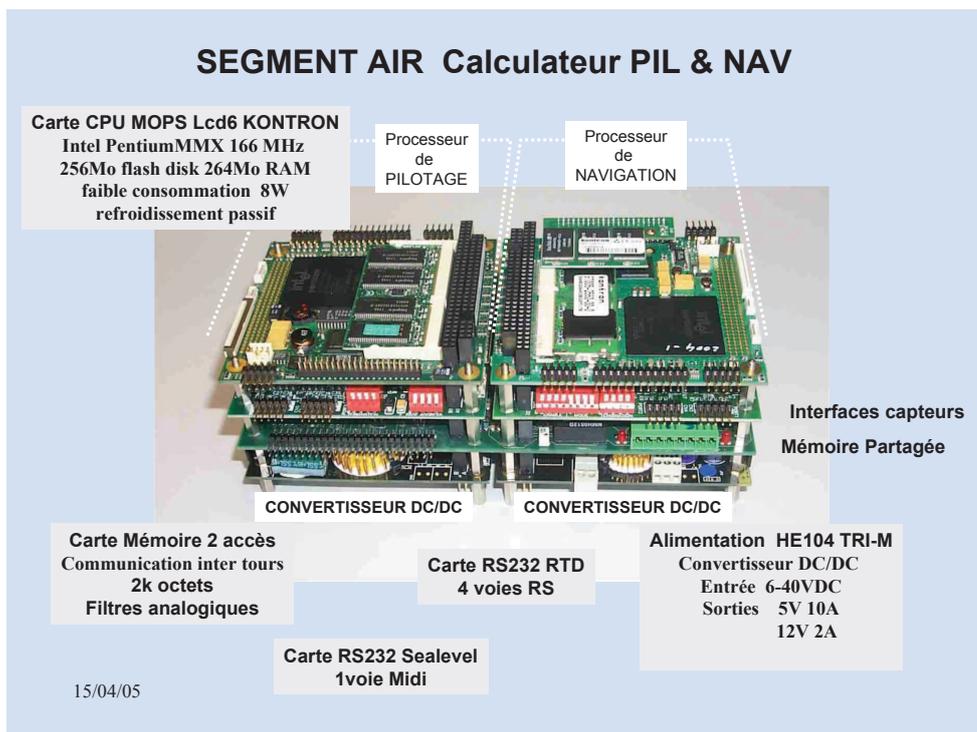


FIGURE 5.8 – Carte navigation, guidage et pilotage du Yamaha Rmax



FIGURE 5.9 – Calculateur charge expérimentale du Yamaha Rmax

### 5.3.2 Logiciels

Sur chacune des deux plates-formes, se trouvent comme on l'a dit une partie avionique (navigation / guidage / pilotage) et une partie charge expérimentale (traitement de l'image). On présente maintenant les logiciels utilisés sur ces différents calculateurs.

#### 5.3.2.1 OS

Les OS utilisés sont les suivants :

- sur le Vario Benzin :
  - la partie avionique est gérée par un OS embarqué propriétaire développé au département, qui se nomme Picosys. Celui-ci permet de gérer finement les aspects temps réel comme indiqué plus loin (section 5.3.3) ;
  - la partie charge expérimentale est gérée par un OS linux temps réel.
- sur le Yamaha Rmax :
  - la partie avionique est gérée par VxWorks ;
  - la partie charge expérimentale est gérée par un OS linux temps réel, d'une façon très similaire à ce qui existe sur le Vario Benzin.

#### 5.3.2.2 Fonctionnalités de pilotage-guidage-navigation

Les fonctionnalités de pilotage-guidage-navigation se décomposent comme suit :

- pilotage-guidage automatique et manuel ;
- gestion du vol ;
- gestion et surveillance du véhicule ;

- communications de contrôle ;
- gestion des équipements de mission ;
- décollage-atterrissage ;

Elles sont réalisées par des codes en C++ qui sont sensiblement les mêmes pour les deux plates-formes, les parties au plus proche du matériel (lecture des mesures capteurs, envoi des ordres aux actionneurs) étant dédiées à chacune.

### 5.3.2.3 Le Middleware Orocos

Sur le calculateur qui réalise les traitements de l'image, le middleware Orocos est installé, lequel gère la communication entre les différents éléments. C'est dans ce middleware que les algorithmes proposés dans cette thèse trouvent leur place.

### 5.3.2.4 Logiciels de traitement de l'image

Pour réaliser les essais associés aux travaux présentés ci-dessus, il convient de disposer d'un logiciel de traitement d'image capable de fournir rapidement (environ 30 Hz) la matrice homographique sur laquelle se basent tous les développements de cette thèse.

Pour ce faire, des fonctions disponibles sous Open CV ont été exploitées. Elles permettent d'obtenir des points caractéristiques (points de Shi Tomasi) dans l'image de référence et dans l'image courante, puis d'en déduire la matrice homographique. Ces fonctions sont les suivantes :

- `goodFeaturesToTrack` ;
- `findHomography`.

Comme on l'a vu, un des critères essentiel est la rapidité d'exécution de ces fonctions. Sur l'architecture du Yamaha Rmax, le temps de calcul de ces codes a été mesuré autour de 30 Hz, ce qui est compatible des fréquences recherchées pour piloter à partir de l'image. Sur le Vario Benzin, ces codes tournent plutôt autour de 10Hz. Une telle fréquence est suffisante pour les essais avec des consignes de vitesse qui ont été réalisés jusqu'ici, mais serait trop faible pour des essais de pilotage. Deux solutions identifiées consistent :

- à appliquer une étape de binning -qui consiste à combiner plusieurs pixels en un seul, ce qui réduira la taille des images et donc le temps de calcul ;
- à exploiter la carte graphique embarquée, laquelle dispose de moyens de calculs optimisés (en particulier par des calculs parallèles).

Ces pistes sont en cours de test à l'heure de rédaction de ce mémoire.

### 5.3.2.5 Codage des algorithmes développés dans la thèse

Pour tenir compte des dangers exposés précédemment, la démarche adoptée lors des expérimentations a été progressive. En particulier, il a été choisi d'introduire les informations visuelles progressivement de plus en plus au cœur

des boucles de pilotage. Plus précisément, les lois de commande linéaires définies au chapitre 2 définissent le couple à appliquer à l'hélicoptère. Ce couple permet de calculer les positions des vérins, c'est-à-dire les ordres à envoyer aux actionneurs. Il est calculé d'une façon analogue aux lois de commande classiques pour hélicoptères, qui utilisent des boucles imbriquées : une consigne de position est comparée à la position estimée, ce qui donne une erreur de position ; celle-ci, multipliée par un gain, donne une consigne de vitesse ; de même, cette consigne de vitesse est comparée à la vitesse estimée, ce qui, via un gain, donne une consigne d'attitude. Et ainsi de suite. Pour assurer une prise de risque progressive, nous avons d'abord utilisé la plus extérieure de ces boucles : celle qui exploite les informations visuelles contenues dans l'homographie pour en déduire des consignes de vitesse -en laissant en place les boucles internes de pilotage existantes. Cette étape est la seule qui a été validée à l'heure de la rédaction de ce mémoire.

Voici comment cette décomposition a été réalisée. Considérons la loi de commande définie par l'équation 2.11 du Théorème 1 (chapitre 2) :

$$\begin{cases} T &= m(g + k_1 \bar{e}_{p_3} + k_2 \nu_3) \\ \Gamma &= -JK_3(\omega - \omega^d) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{cases} \omega^d &= -\frac{K_4}{g}(g\bar{e}_\Theta + b_3 \wedge \gamma^d) \\ \gamma^d &= -K_5(\bar{e}_p + K_6\nu) \end{cases} \quad (5.2)$$

$\nu$  la variable définie par l'équation dynamique :

$$\dot{\nu} = -K_7\nu - \bar{e}_p \quad (5.3)$$

La structure par boucle imbriquée mentionnée apparaît clairement : le couple dépend de la différence entre la vitesse angulaire mesurée et un terme,  $\omega^d$ , qui fait office de vitesse angulaire désirée. Cette dernière se définit en fonction de l'attitude via  $\gamma$ , et d'un terme qui donne l'attitude désirée,  $\gamma^d$ . Cette dernière elle-même se définit en fonction d'un terme dépendant de la vitesse estimée via l'augmentation dynamique  $\nu$  et d'une vitesse désirée qui dépend directement de l'erreur dans l'image,  $\bar{e}_p$ . Cette structure est très semblable à la structure classique mentionnée plus haut.

La première étape de mise en œuvre expérimentale retenue dans cette approche progressive a consisté à définir des consignes de vitesses horizontales comme un retour proportionnel à l'erreur calculée dans l'image, soit :

$$\begin{cases} v_1^d &= k\bar{e}_{p_1} \\ v_2^d &= k\bar{e}_{p_2} \end{cases} \quad (5.4)$$

La vitesse verticale et la dynamique de cap sont dans cette première étape stabilisées par les contrôleurs nominaux.

La deuxième étape, qui n'a pas encore été validée expérimentalement, consiste à envoyer au calculateur de pilotage des consignes d'attitude. Pour ce faire, il s'agit tout d'abord de reconstruire une vitesse estimée. Celle-ci peut être obtenue par une mesure de flot optique, ou bien par un filtre dérivateur simple :

$$\hat{v} = \frac{p}{1 + \tau p} \bar{e}_p \quad (5.5)$$

avec  $\tau$  un paramètre indiquant la fréquence de coupure. Les essais ont montré que cette valeur devait être choisie faible, autour de  $\tau = 0.1$ . Avec cette vitesse estimée, les ordres en attitude sont calculés selon :

$$\begin{cases} \theta^d &= k' (k\bar{e}_{p_1} - \hat{v}_1) \\ \phi^d &= k' (k\bar{e}_{p_2} - \hat{v}_2) \end{cases} \quad (5.6)$$

### 5.3.3 Fonctionnement temps réel et communications entre les calculateurs

Le fonctionnement temps réel est géré d'une façon très différente entre les deux plates-formes. On a vu que les OS utilisés ne sont pas les mêmes. D'autre part, sur le Yamaha Rmax, aucune synchronisation n'est faite entre les calculateurs avionique et charge expérimentale. Une dérive des deux horloges conduit à une désynchronisation lente mais réelle. Sur le Vario Benzin, un système de synchronisation précise a été réalisé, d'une façon hiérarchique :

- le calculateur avionique est synchronisé avec le GPS grâce à la technologie PPS (Pulse Per Second) ;
- ensuite, le calculateur charge expérimentale se synchronise avec le calculateur avionique en utilisant la même technologie, PPS.

Ce fonctionnement permet d'éviter une désynchronisation des deux calculateurs en cas de perte du signal GPS.

## 5.4 Validations expérimentales

### 5.4.1 Traitement d'image

La première validation concerne le traitement d'image. Des valeurs numériques indiquent la qualité de l'extraction et de l'appariement des points d'intérêt entre les deux images, et permettent de voir si le traitement de l'image a été réalisé avec succès. D'autre part, l'analyse des valeurs obtenues dans la matrice en apprend beaucoup sur la qualité du traitement. Ainsi, les figures 5.10 et 5.11 (les figures 5.12 et 5.13 sont les mêmes courbes mais zoomées en ordonnées pour mieux distinguer) sont deux courbes obtenues lors de deux vols avec deux algorithmes différents. Le premier était une version plus rustique, le deuxième est celui présenté plus haut. La valeur analytique de la matrice

homographique  $H$ , et les conditions de vol qui sont proches de l'équilibre permettent de déduire que ce terme de la matrice  $H$  devrait être proche de 1 pendant tout le vol. Or on constate que le premier algorithme donne un résultat très médiocre, avec de très grandes variations dans les valeurs obtenues. Le deuxième algorithme donne des valeurs proches de 1, comme prévu. Ce dernier cependant donne quelques valeurs absurdes, phénomènes peu surprenant s'agissant d'expérimentations en conditions réelles.

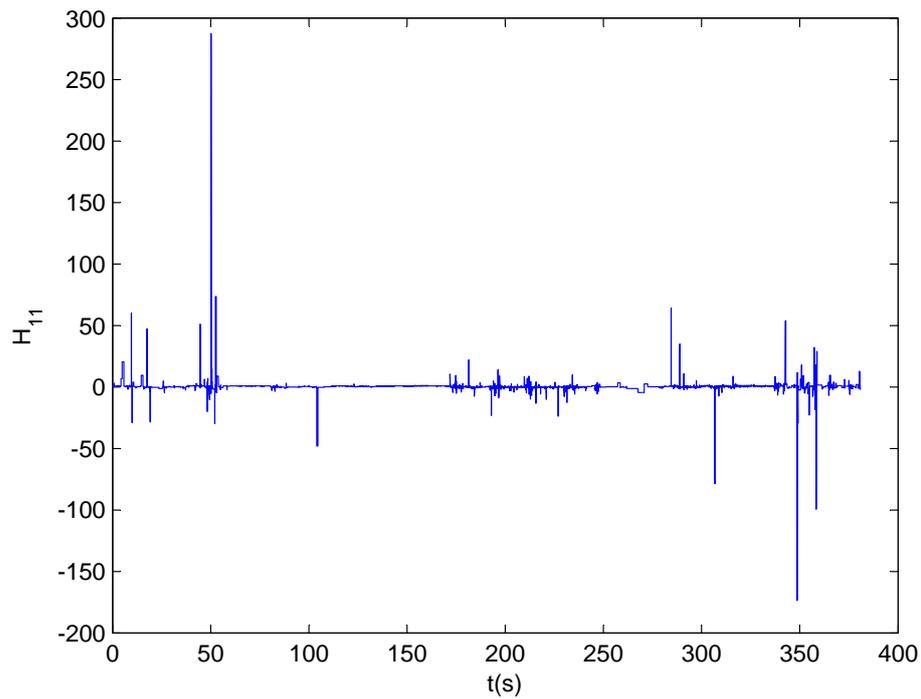


FIGURE 5.10 – Courbe d'évolution au cours du temps du terme  $H_{11}$  calculé par le premier algorithme d'openCV.

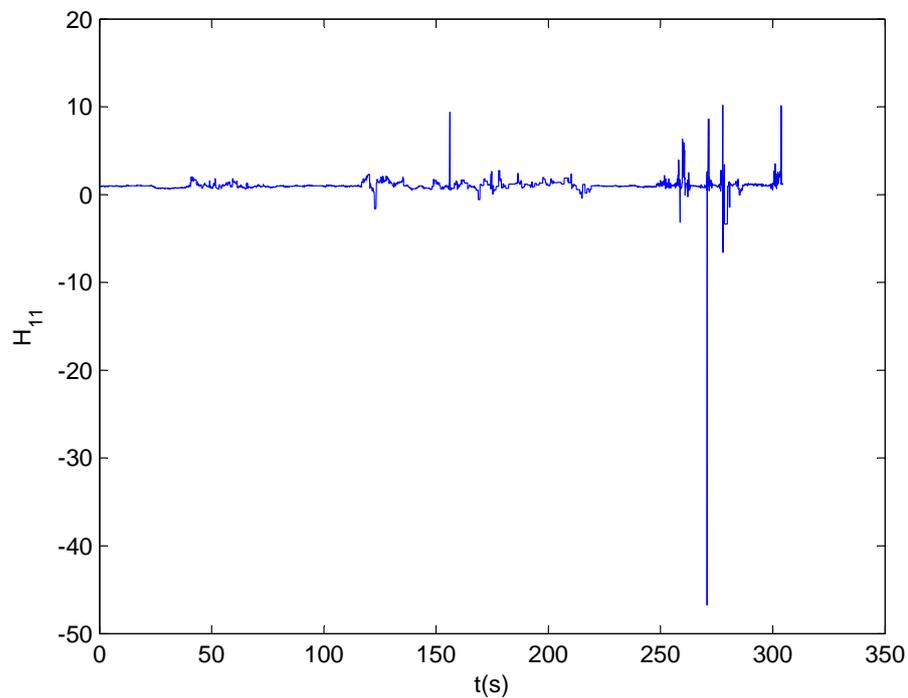


FIGURE 5.11 – Courbe d'évolution au cours du temps du terme  $H_{11}$  calculé par le deuxième algorithme d'openCV.

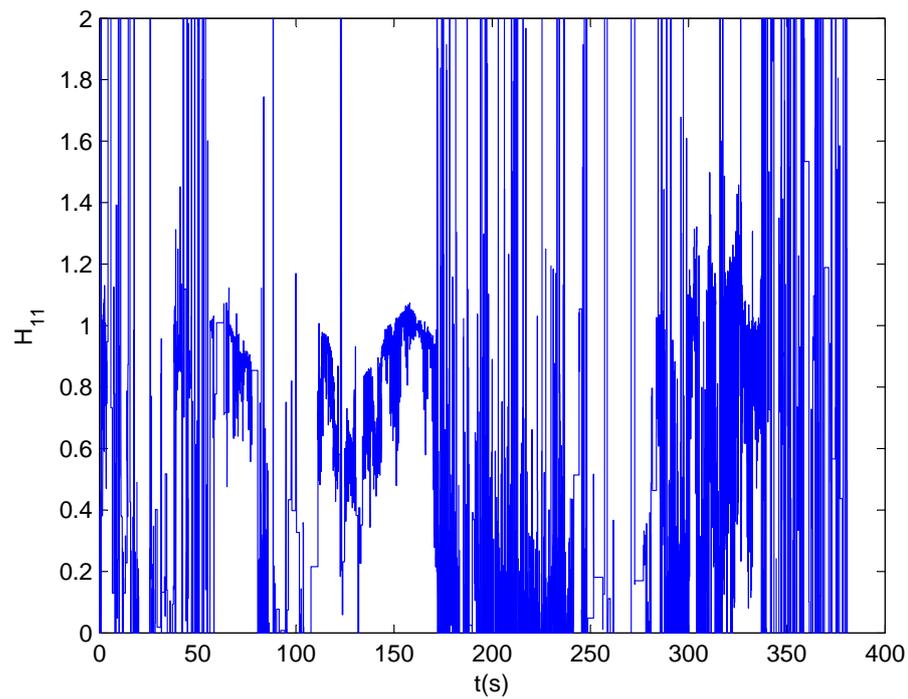


FIGURE 5.12 – Courbe d'évolution au cours du temps du terme  $H_{11}$  calculé par le premier algorithme d'openCV, version zoomée.

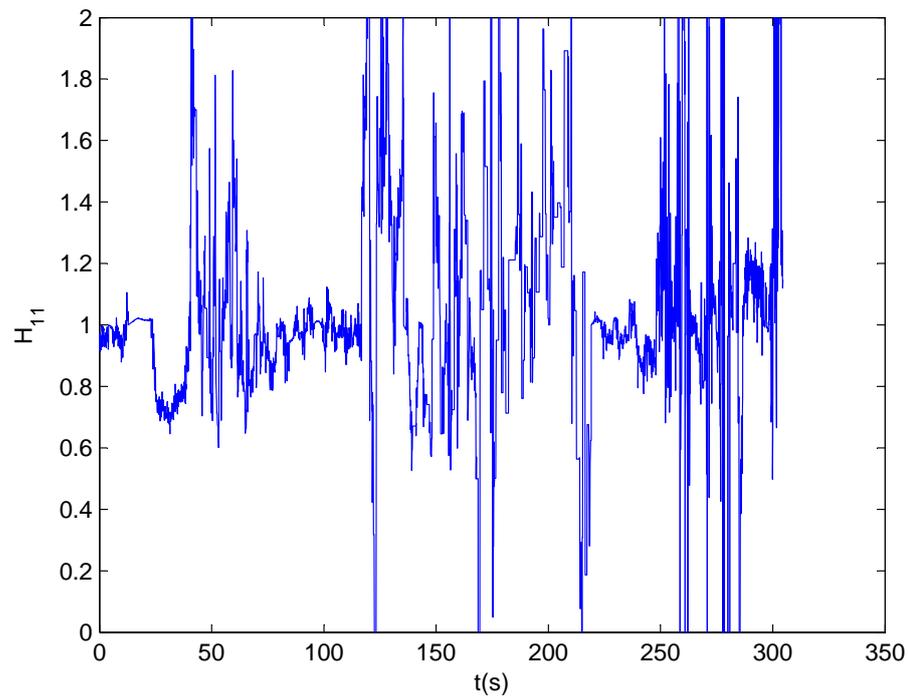


FIGURE 5.13 – Courbe d'évolution au cours du temps du terme  $H_{11}$  calculé par le deuxième algorithme d'openCV, version zoomée.

### 5.4.2 Guidage avec consignes de vitesse

Les figures 5.14 et 5.15 représentent les résultats obtenus lors de deux vols.

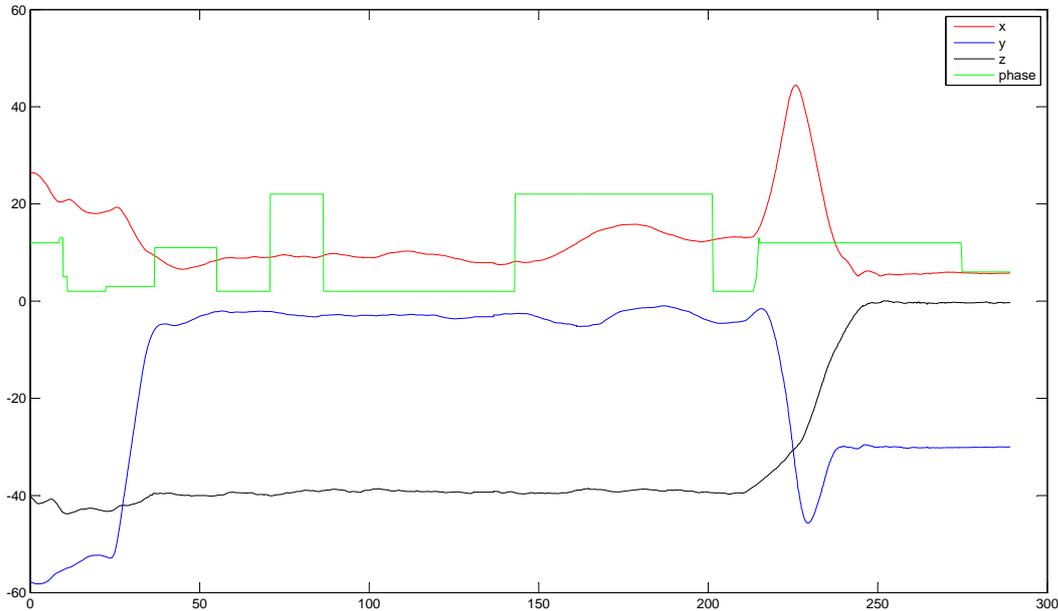


FIGURE 5.14 – Vol du 22 juin 2012 avec le Rmax : évolution des coordonnées dans le repère "North, East, Down", et des phases de vol (courbe verte)

Sur ces figures, la courbe verte indique les passages de mode. Sa plus grande valeur correspond au mode de vol basé homographie. On y constate ainsi que lors des deux passages en commande référencée vision, pour la figure 5.14, et lors du passage en commande référencée vision, pour la figure 5.15, les courbes de position horizontale (en rouge et bleu) se sont maintenues dans des valeurs proches de leurs valeurs précédentes, lorsque le drone était en stationnaire. Ceci montre que l'asservissement visuel fonctionne correctement. Ce résultat valide dans son principe la boucle de commande utilisant l'image, laquelle contient les étapes suivantes :

- prise d'image ;
- traitement de celle-ci ;
- calcul de la consigne de vitesse ;
- envoi de cette consigne au calculateur pilote ;
- réalisation de la consigne ;

Ce sont les mêmes étapes qui sont nécessaires pour la validation des algorithmes développés dans le cadre de cette thèse. Elles doivent mener à envoyer directement des consignes aux vérins pilotant le rotor de l'hélicoptère, ce qui rend d'autant plus critiques les retards ou erreurs survenus dans cette boucle, mais le principe en est le même. C'est dans ce sens que ces essais, et surtout les étapes de développements qui les ont précédés, valident le principe des expérimentations associées aux algorithmes présentés dans cette thèse. Même si ceux-ci,

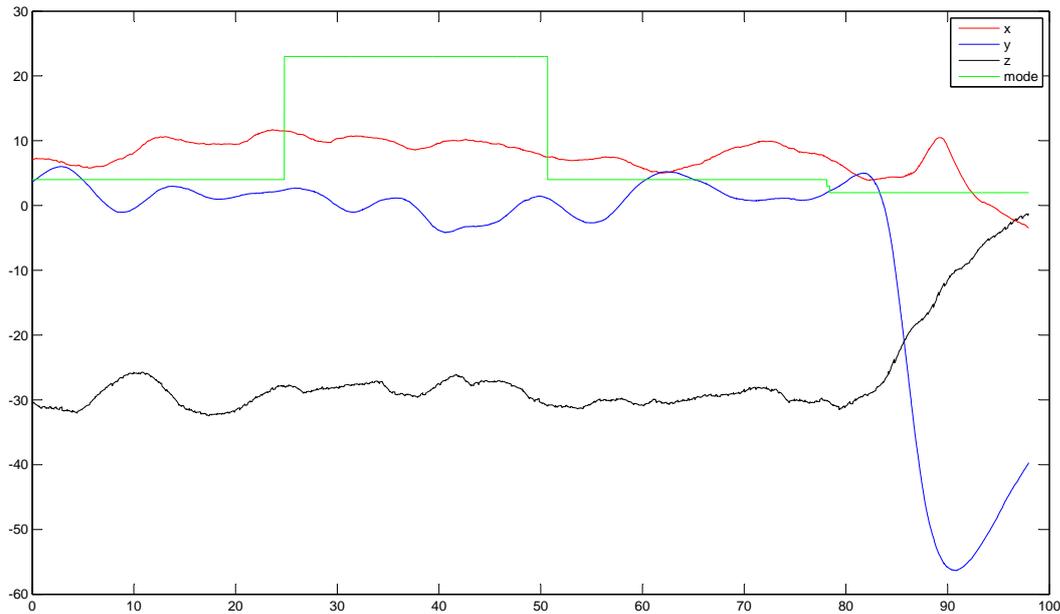


FIGURE 5.15 – Vol du 26 septembre 2013 avec le Vario : évolution des coordonnées dans le repère "North, East, Down", et des phases de vol (courbe verte)

bien entendu, restent à valider complètement dans un contexte expérimental. Dans cette optique, les essais suivants sont en cours, essais qui consistent à calculer dans l'image des consignes d'attitude, pour ensuite envoyer les ordres aux vérins. Les codes informatiques nécessaires pour envoyer, recevoir, et interpréter ces types d'ordres ont déjà été réalisés sur les calculateurs. Reste à les tester.

## 5.5 Critique des résultats

Ce chapitre a présenté les éléments de mise en œuvre expérimentale qui ont été réalisés. Cette mise en œuvre n'est pas achevée comme on l'a vu, et les expérimentations se poursuivent. Les principales directions de progrès possible concernant le traitement de l'image, pour lequel n'existe pas à notre connaissance à ce jour de solution pleinement satisfaisante en termes de rapidité de calcul et de robustesse aux changements de luminosité. L'équipe continue de travailler dans cette direction pour améliorer cette robustesse. Une autre direction consiste à mettre en place des logiques pour poursuivre l'asservissement même en cas de sortie de l'objet observé du champ de vue : en supposant la cible observée immobile et en estimant son évolution dans le repère engin, il est possible d'inférer les consignes de vitesse à appliquer afin d'espérer retrouver la cible dans le champ visuel. Des logiques simples commencent à être mises en place, qui permettent d'éviter une interruption trop fréquente de l'asservis-

sement.

# Conclusion

*Chercher n'est pas une chose et trouver une autre,  
mais le gain de la recherche,  
c'est la recherche même.*

Grégoire de Nysse

## Synthèse des contributions

### Approche retenue

Pour étudier la stabilisation d'un drone à partir d'un nombre réduit de capteurs incluant une caméra vidéo, avec peu d'hypothèses sur la nature de l'environnement observé, le choix retenu a été de supposer l'existence d'une image de référence de la scène, qui définit de façon implicite la pose à laquelle le drone doit se rendre comme objectif de la stabilisation. Un examen des contextes applicatifs (observation d'un bâtiment, survol d'un hélicoptère) montre que de nombreuses scènes d'intérêt se trouvent être planes. Dans ce contexte, un outil est disponible, qui encode la différence de points de vue entre deux observations d'une même scène plane : la matrice homographique. De ce fait, le parti pris de cette thèse a été d'analyser les exploitations possibles de cette matrice par une loi de commande visant à stabiliser un drone, puis à lui faire suivre une trajectoire. Pour ce faire, la base de l'étude a été un vecteur d'erreur défini à partir de l'homographie et introduit dans (Benhimane and Malis, 2007). Ce vecteur a été adapté pour notre contexte d'étude.

### Stabilisation : approches linéaires et non-linéaires

A partir de ce vecteur d'erreur, la première approche, s'agissant d'abord de stabilisation, a été d'étudier le problème linéarisé autour de la pose à l'équilibre. Dans cette direction, nous avons été conduits à proposer (voir chapitre 2) des lois de commande linéaire, basées sur l'homographie, et permettant de stabiliser le drone sous hypothèse de linéarité du comportement. Dans ce cadre toujours, une démarche est proposée, qui permet de calculer les gains de ces lois de façon à prendre en considération un objectif de performance, en plus de la stabilité

qui est acquise sous réserve de conditions sur les gains. Deux autres aspects ont été étudiés. La prise en compte d'un vent constant ou lentement variable, tout d'abord : une loi est proposée pour le contrer par l'exploitation supplémentaire des accéléromètres. Ensuite, la prise en compte de l'écart entre la position et l'orientation de la caméra et ceux du drone : ce point est pris en compte par une définition modifiée du vecteur d'erreur.

Dans un second temps, les limitations liées par nature à l'approche linéaire ont conduit à souhaiter développer des lois de commande capable de stabiliser le drone sans hypothèse de linéarité (chapitre 3). On montre du reste dans le chapitre 2 ces limites par des simulations où la stabilité est perdue lorsque l'hypothèse de linéarité n'est plus vérifiée. Dans ce contexte, une loi a été proposée qui s'appuie sur un résultat précédent relatif à la stabilisation d'un drone à partir de mesures de position et vitesse, résultat adapté à notre contexte de commande référencée vision. Cette loi offre un domaine de stabilité très étendu, obtenu en exploitant des saturations dans la loi de commande, qui permettent d'éviter toute singularité. Une loi de commande simplifiée, dont l'expression ne fait pas appel à une augmentation dynamique contrairement à la loi précédente, a été proposée, et dont la preuve de stabilité s'appuie sur la théorie des perturbations singulières.

La possibilité d'obtenir les mesures de verticale exprimée en repère local et de vitesse linéaire, mesures supposées disponibles pour établir les résultats précédents, fait l'objet d'une étude distincte. On y montre, selon les contextes applicatifs, des méthodes pour satisfaire à ou contourner ce besoin.

## Suivi de trajectoire

La stabilisation du drone ayant été ainsi étudiée, le deuxième volet de la thèse a été de proposer des lois de commande pour suivre une trajectoire. Pour ce faire, un cadre a été défini, qui a élargi l'objet de cette étude. On définit en effet une classe de mesures incertaines de position relatives à une position de référence elle-même inconnue. Une loi est définie (voir chapitre 4), qui permet de suivre la trajectoire donnée par l'évolution de cette position de référence. Elle est une généralisation de la loi de stabilisation du chapitre 3, de telle sorte que le cas d'une trajectoire de référence immobile y conduit. On a montré ensuite que la mesure de deux matrices homographiques relatives à deux images de référence, et leur pondération suivant une méthode adaptée, conduit à une mesure qui entre dans le cadre précédemment défini. Ainsi, la loi de suivi de trajectoire s'applique au contexte de la commande référencée vision, et rend possible le suivi d'une trajectoire implicitement définie par une séquence d'images prises depuis différents points de celle-ci.

## Mises en œuvre expérimentales

Les différentes lois de commande ainsi proposées ont été validées en simulation. Une telle validation ne saurait être que partielle, et ne démontre bien entendu leur comportement que sur la base du modèle -imparfait- implémenté dans le simulateur. De ce fait, seules des expérimentations réelles permettent de vérifier davantage la validité des lois. Dans le cadre de cette thèse, les expérimentations prévues pour assurer cette validité n'ont pu être toutes réalisées faute de temps et de disponibilité des plates-formes. Cependant, des essais partiels ont été effectués, dont la présentation est donnée au chapitre 5.

## Perspectives

### Perspectives sur les thèmes abordés dans la thèse

*Étudiez comme si vous deviez vivre toujours ;  
vivez comme si vous deviez mourir demain.*

Thomas d'Aquin

Dans la suite de cette étude, de nombreux développements sont envisageables, qui font écho aux limites des résultats proposés ici.

Des modèles plus fins pourraient être étudiés. L'existence d'une dynamique non modélisée a été étudiée dans l'approche linéaire (vent) ; elle pourrait l'être davantage et plus systématiquement : retards actionneurs, modèle aérodynamique, interactions fluide-structure, etc

Seules les caméras planes ont été étudiées ici ; les caméras sphériques pourraient apporter des résultats complémentaires, en particulier en termes de structure du modèle (passivité, cf (Mahony and Hamel, 2001)).

Des techniques relativement récentes d'analyse de stabilité d'un système non-linéaire n'ont pu être exploitées dans cette étude. En particulier, l'analyse de stabilité avec la méthode IQC (Integral Quadratic Constraints) pourrait apprendre beaucoup.

L'adjonction d'intégrateurs permettant de compenser partiellement certaines des erreurs de modélisation pourrait être étudiée.

Forcer la cible à être maintenue dans l'image au cours de l'évolution du drone représente un défi majeur pour la commande référencée vision. Ce thème n'a pu être réellement abordé au cours de la thèse.

### Sur le (regrettable) morcellement du savoir et son essence

*Ce n'est pas dans la connaissance qu'est le fruit,  
c'est dans l'art de le saisir.*

Bernard de Clairvaux

Pour finir, et faute d'avoir su m'appliquer la sentence de Coluche, lequel déclare à juste titre que de tous ceux qui n'ont rien à dire, les plus agréables sont encore ceux qui se taisent, je voudrais finir ce mémoire par une réflexion sur la nature du savoir, et sa parcellisation. Chacun reconnaît combien l'explosion -plaisante et féconde- du savoir a eu pour corollaire son atomisation dans des spécialités à la granularité de plus en plus fine. Pour nécessaire qu'elle soit, cette parcellisation est aussi un appauvrissement de l'esprit, lequel gagnerait à croiser les cultures et les connaissances.

C'est aussi un fait bien certain que nombre de découvertes se situent à la frontière des disciplines : ainsi de l'automaticien quand il cherche en algèbre des idées pour la robotique ; quand il explore du côté de la géométrie différentielle, le voici mieux armé pour stabiliser des systèmes non-linéaire ; quand il réintroduit la physique dans ses méthodes, et que les notions d'énergie fleurissent. Le présent travail lui-même n'est pas sans lien avec un domaine aussi apparemment éloigné que la philosophie : le débat entre la philosophie réaliste, qui estime que la réalité *existe*, et nous est perceptible par les sens, et la philosophie idéaliste, qui construit les concepts avant de percevoir un réel auquel il n'est pas assuré d'accorder l'existence, trouve écho dans l'idée d'une approche référencée capteurs, ou dans la question de la reconstruction de l'état -ou de son absence. Les concepts aristotéliens de puissance et d'acte ne sont pas non plus sans rappeler les énergies potentielle et cinétique, et leurs échanges dans une approche de Lyapunov.

Au-delà de ces enrichissements matériels, la nature profonde des différents savoirs ne démontre-t-elle pas leur unité profonde : on peut certes décrire le scientifique comme celui qui cherche à maîtriser la matière, l'artiste comme un poète qui décrit un monde onirique, l'humoriste comme celui qui dévoile la vanité du monde. Et cependant, comme en témoigne cet échange entre Charlie Chaplin et Albert Einstein, art et science sont faits pour se comprendre : "Ce que j'admire le plus dans votre art, s'exclame Einstein, c'est son universalité. Vous ne dites pas un mot, et pourtant le monde entier vous comprend." ; "c'est vrai, réplique Chaplin. Mais votre gloire est plus grande encore : le monde entier vous admire, alors que personne ne vous comprend". Ou encore ce rapport explicitement défini par le mathématicien Godfrey Hardy entre l'esthétique et la science : "La beauté est le premier critère : il n'y a pas de place en ce monde pour des mathématiques laides".

Au fond, science, philosophie, littérature, peinture, musique, humour même ne sont-ils pas, tous, une exploration du monde, de modalités distinctes certes, de méthodes propres, oui, mais d'essence commune : découvrir, admirer, transformer le monde, et l'admirer encore, en ses réalités matérielles, animales, ou spirituelles. De ces quatre actes, il me semble que le dernier est le principal, dans lequel, ayant décelé quelque chose du vaste monde, ayant ajouté sa touche à l'édifice commun, l'homme se recule et le contemple -ou le devrait, selon le beau mot de Gracq :

*Tant de mains pour transformer le monde,  
et si peu de regards pour le contempler !*

Mais que le dernier mot reste au poète. .

*With the drawing of this love  
And the voice of this calling,  
We shall not cease from exploration,  
And the end of all our exploring  
Will be to arrive where we started  
And know the place for the first time*

Thomas Stearns Eliot

# Annexe A

## Annexes

### A.1 Lieu des racines

Le lieu des racines est une méthode permettant de synthétiser une loi de commande avec un degré de liberté, ou encore d'analyser la stabilité d'un système en fonction des variations d'un gain scalaire (voir (Evans, 1948; Evans, 1950; Gille et al., 1981)).

Considérons un système représenté selon le schéma de la figure A.1. Le lieu des racines est par définition le lieu géométrique, dans le plan complexe, des pôles du système en boucle fermée lorsque le gain  $k$  varie de 0 à l'infini. Un exemple d'un tel lieu est donné sur la figure A.2, qui correspond à la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$\frac{s^2 + 2s + 2}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 15s + 6} \quad (\text{A.1})$$

Il a été tracé à l'aide de la fonction `sisotool` de Matlab. Ce lieu peut être calculé, analytiquement ou numériquement par ordinateur. Des règles permettent également d'en connaître certains éléments caractéristiques, et ce sont ces éléments qui sont exploités dans ce manuscrit au Chapitre 2 :

- pour tout point de l'axe réel, s'il se trouve à sa droite un nombre impair de pôles et de zéros, ce point fait partie du lieu, sinon il n'en fait pas partie ;
- le début du lieu des racines (i.e. pour  $k = 0$ ) est constitué par les pôles du système en boucle ouverte ;
- les extrémités du lieu des racines (pour  $k \rightarrow +\infty$ ) se rapprochent des zéros du système en boucle ouverte, ainsi que d'asymptotes qui sont calculées comme suit.
- le point de concourt des asymptotes est donné par  $\frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$  avec  $p_i$  les pôles de la boucle ouverte et  $n$  leur nombre,  $z_i$  et  $m$  de même pour les zéros.
- les angles des asymptotes sont donnés par :  $\frac{+/- (2k+1) \cdot \pi}{n-m}$

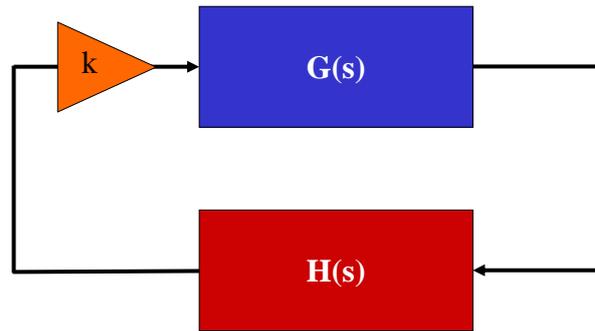


FIGURE A.1 – Schéma bloc correspondant à l'étude du lieu des racines

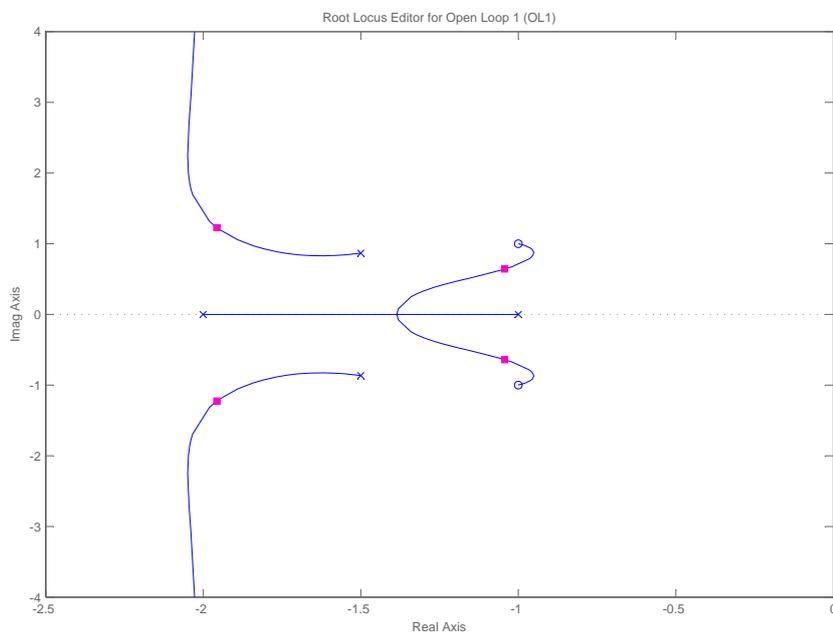


FIGURE A.2 – Exemple de tracé du lieu des racines

## A.2 Articles publiés

Dans les pages qui suivent sont reproduits les trois articles suivants :

- H. de Plinval, P. Morin, P. Mouyon, T. Hamel, Visual Servoing for Underactuated VTOL UAVs : a Linear Homography-based Approach, International Conference on Robotics and Automation, 2011, (de Plinval et al., 2011) ;
- H. de Plinval, P. Morin, P. Mouyon, Nonlinear control of underactuated vehicles with uncertain position measurements and application to visual servoing, American Control Conference, 2012, (de Plinval et al., 2012) ;
- H. de Plinval, P. Morin, P. Mouyon, T. Hamel, Visual Servoing for Underactuated VTOL UAVs : a Linear Homography-based Approach, In-

ternational Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, (de Plinval et al., 2013).

Ainsi qu'un quatrième article, en version préliminaire : H. de Plinval, P. Morin, P. Mouyon, Nonlinear Underactuated Vehicles Trajectory Tracking with Uncertain Position Measurements and Application to Visual Servoing.

### **A.3 Article ICRA'11**

# Visual Servoing for Underactuated VTOL UAVs: a Linear, Homography-Based Approach

Henry de Plinval, Pascal Morin, Philippe Mouyon, Tarek Hamel

**Abstract**—The paper addresses the control of Vertical Take Off and Landing (VTOL) Underactuated Autonomous Vehicles (UAVs) in hover flight, based on measurements provided by an on-board video camera and rate gyros. The objective is to stabilize the vehicle to the pose associated with a visual image of a planar target. By using the homography matrix computed from the camera measurements of the target, stabilizing feedback laws are derived. Explicit stability conditions on the control parameters are provided. It is shown that very good robustness and performance can be achieved without any a priori information on the visual target (like geometry, or orientation), by a proper tuning of the control parameters. Simulation results confirm the effectiveness of the approach.

## I. INTRODUCTION

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) can be used for many surveillance and monitoring applications, both indoor and outdoor. Their effectiveness relies in the first place on the use of onboard sensors that can provide information on the vehicle's *pose* (i.e. position and orientation). In teleoperated modes, the human operator can compensate for the lack of some pose information (like, e.g., the vehicle's position). For fully autonomous control modes, however, information on both position and orientation is necessary. It is well known that pose estimation is a challenging problem for UAVs, and especially for VTOLs (Vertical Take-Off and Landing vehicles). This is due to several reasons, among which, *i*) the absence of sensors that can provide a direct measure of the 3D-orientation (recall that using accelerometers as inclinometers is appropriate only when the vehicle acceleration is small), *ii*) the difficulty to obtain precise and high-rate position measurements via GPS sensors, *iii*) the impossibility to use these sensors in some environments (like, e.g., urban canyons). Thus, while interesting results have been obtained with Inertial Measurement Units (IMUs) [1], or GPS-aided IMUs (see, e.g., [2], [3] for recent results), it is evident that other sensors should be used to improve UAV's effectiveness, especially those providing information about UAV's local environment. One of the most promising alternatives is vision sensors. Cameras provide a rich information about the environment. They have been used extensively for ground robotics applications. Over the last ten years, vision-based control solutions have been extensively developed for aerial vehicles. Regulation of a mechanical system based on visual features as feedback is known as Visual Servo Control [4].

H. de Plinval and P. Mouyon are with ONERA-Toulouse, France, [Henry.de.Plinval@onera.fr](mailto:Henry.de.Plinval@onera.fr), [Philippe.Mouyon@onera.fr](mailto:Philippe.Mouyon@onera.fr)  
P. Morin, is with INRIA-Sophia Antipolis, France, [Pascal.Morin@inria.fr](mailto:Pascal.Morin@inria.fr)  
T. Hamel is with I3S-CNRS, Nice-Sophia Antipolis, France, [thamel@i3s.unice.fr](mailto:thamel@i3s.unice.fr)

There are two main approaches in visual servo control [5], [6]: Image-Based Visual Servoing (IBVS), and Position-Based Visual Servoing (PBVS), depending upon whether the controller is designed to directly act on the visual information (IBVS) or whether the visual information is first used in the pose reconstruction (PBVS). The latter has been successfully implemented on a number of aerial vehicles [7], [8], [9], [10]. It requires, however, an accurate geometric model of the visual target along with good calibration of the camera. An IBVS scheme was first presented in [11] where the dynamics of features in image space were formulated in terms of their spherical projections to preserve the dynamic structure of the system and used as direct inputs to the control algorithm. The controller is designed to stabilize the dynamics of the image features, and implicitly solves the underlying task space control problem. This approach does not require an accurate geometric target model or a well calibrated camera, but it leads to complex nonlinear control problems due to the appearance of the image depth as an unknown scale factor into the system dynamics. When the target is planar an alternative approach is the Homography-Based Visual Servoing, originally developed for robot manipulators or more general fully-actuated systems [12], [13], [14]. It consists in a combination of partially reconstructed Euclidean information and 2D image-space information in the control design, and has been shown to have many practical advantages. In particular, the method does not require an accurate model of the target. Homography-Based Visual Servoing for underactuated vehicles has been exploited in different scenarios. In [8] the idea has been exploited to perform a landing manoeuvre using a PBVS scheme and in [15] (and subsequently in [16], [17]) in a  $2\frac{1}{2}D$  visual servoing formulation. It is important to remark that in these works on homography-based visual servoing of underactuated vehicles, measurements of both the rotation matrix and linear velocities are assumed to be available via complementary sensors.

In this paper we address the problem of controlling VTOL UAVs' hover flight, based on measurements provided by a single camera and rate gyros only. The solution relies on the measure of the homography matrix associated with the camera's observation of a planar target. The assumption of a planar target is not unrealistic when thinking about a landing pad, a planar ground, or a building. There are several challenges associated with this problem. First, since we do not assume any information on the target (like, e.g., size or inclination), the vehicle's pose cannot be extracted from the homography measure. In addition, unlike previous

works on the subject, we do not assume that the vehicle's orientation can be reconstructed (using, e.g., information on the target or additional sensors). Then, we do not have any sensor that provides linear velocity measurements either. Finally, the systems here considered are *underactuated* (i.e. the number of independent force and torque controls is strictly smaller than the number of degrees of freedom). Indeed, most VTOLs encountered in applications belong to this class (e.g., helicopters, X-flyers, ducted fans, etc). The approach builds on a previous result by Benhimane and Malis [13] for the control of robotic manipulators, based on a *kinematic* and *holonomic* model. The fact that *dynamical* models of *underactuated* vehicles are considered here makes the problem significantly harder.

The paper is organized as follows. Section II reviews some technical background and provides a precise description of the addressed problem. In Section III, we propose a new homography-based error vector and specify its relation with the pose error. The main result of the paper, which provides asymptotically stabilizing feedback controllers for VTOL UAVs, is given in Section IV. This is complemented in Section V by a gain-tuning strategy that allows to obtain good performance in a large operating domain. Finally, simulation results are presented in Section VI.

## II. PRELIMINARY BACKGROUND

### A. Problem statement

The problem addressed in this paper (see Fig. 1 below) corresponds to a typical scenario for UAVs. The vehicle is equipped with a camera. A reference image of a planar target  $\mathcal{T}$  is taken at some desired pose (i.e. location), represented by the reference frame  $\mathfrak{R}^*$ . Based on this reference image and the current image, the objective is to design feedback laws that stabilize the vehicle at the desired pose. In addition to the camera, the vehicle is also equipped with rate gyros. No other sensor is available.

Except for the planarity assumption no other information on the target, like geometry or orientation, is available. In particular, the target's normal is unknown. The distance to the target at the desired pose is also unknown, although a (very rough) lowerbound on this distance is needed to guarantee stability.

Since the systems here considered are *underactuated*, we have to assume that the desired pose is an equilibrium of the vehicle. Otherwise the problem of asymptotic stabilization cannot be solved. For example, in the case of an helicopter, stabilization of a desired pose requires that the rotor thrust direction is vertical at this pose, so as to compensate gravity without inducing lateral motion. This fixes two rotational degrees of freedom.

### B. Dynamics of thrust-propelled underactuated vehicles

The approach here proposed applies to the class of underactuated "thrust-propelled" VTOL vehicles [18]. More precisely, we consider rigid bodies with one force control in a body-fixed direction and full torque actuation. Typical examples are given by helicopters, ducted fans, quad-rotors,

etc. To comply with the assumption that the reference pose is an equilibrium for the vehicle, it is assumed that the thrust direction at the reference pose is aligned with the vertical basis vector of the reference frame  $\mathfrak{R}^*$ . The dynamical equations are then given by

$$\begin{cases} \dot{p} &= Rv \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ m\dot{v} &= -mS(\omega)v - Tb_3 + m\gamma \\ J\dot{\omega} &= -S(\omega)J\omega + \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

with  $p$  the position vector of the vehicle's center of mass, expressed in the reference frame,  $R$  the rotation matrix from the current frame to the reference frame,  $v$  the velocity vector with respect to (w.r.t.) the reference frame expressed in the current frame,  $\omega$  the angular velocity vector expressed in the current frame,  $S(\cdot)$  the matrix-valued function associated with the cross product, i.e.  $S(x)y = x \times y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ ,  $m$  the mass,  $T$  the thrust input,  $b_3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $J$  the inertia matrix,  $\Gamma$  the torque vector, and  $\gamma = gR^T b_3$  the projection of the gravity vector in the current frame with  $g$  the gravity constant. Among others, this model describes the dynamics of a helicopter.

Note that the first and second equations of System (1) correspond to the kinematics, while the third and fourth account for the dynamics. The objective is to asymptotically stabilize the origin  $p = 0, R = I_3, v = 0, \omega = 0$ , with  $I_3$  the  $3 \times 3$  identity matrix, from visual measurements of a reference image  $\mathcal{I}^*$  (taken at  $\mathfrak{R}^*$ ) and the current image  $\mathcal{I}$  (taken at  $\mathfrak{R}$ ) of the planar target  $\mathcal{T}$ . Note in particular that neither  $p$  nor  $R$  are directly measured. Visual measurements only provide a partial and coupled measurement of these quantities (see subsection below). The velocity vector  $v$  is not measured either. On the other hand,  $\omega$  is measured via rate gyros. We review below some well known facts about visual sensors and homography matrices.

### C. Visual observation of planar scenes and homography matrices

The following notation relates to the planar scene  $\mathcal{T}$  (see Fig. 1 below).

- $\chi^*, \chi$  are the coordinates of a point of interest  $\mathcal{P}$  lying on the planar target, expressed in the reference and current frames respectively.
- $n^*$  is the unit vector defining the normal to the planar object, expressed in the reference frame;  $d^*$  is the distance between this plane and the camera optical center.  $Z^*$  is the third coordinate of point  $\mathcal{P}$  in the reference frame and  $c^* = \frac{1}{Z^*}$  its inverse. For simplicity, it is assumed that the  $z$ -axis of the body-fixed frame coincides with the camera optical axis.

A useful tool in visual servoing is the so-called homography matrix  $\mathbf{H}$  which embeds all information regarding the transformation between two images of the same planar object of interest (see, e.g., [13], [19] for more details). An important feature of this matrix is that it can be estimated from these images without any assumption on the camera

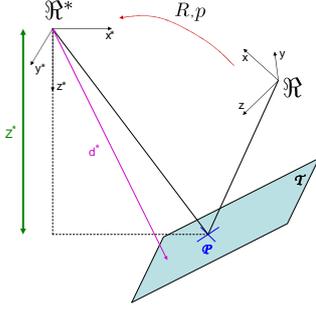


Fig. 1: Problem scheme

pose. It is thus possible to use this matrix to define an error vector that will converge to zero at the desired equilibrium.

Let us first assume that the camera optical center and the vehicle center of mass coincide (this assumption will be discussed latter on). Then,  $\mathbf{H}$  is defined as:

$$\mathbf{H} \triangleq K \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right) K^{-1} \quad (2)$$

with  $K$  the camera intrinsic parameters matrix. The matrix  $\mathbf{H}$  relates the normalized coordinates of a point as seen from the reference and current pose. Indeed, the following relationship holds:

$$\chi = R^T \chi^* - R^T p \quad (3)$$

Defining the pixel coordinates, which embed the camera calibration error,  $\mu = K \left( \frac{1}{Z} \chi \right)$  and  $\mu^* = K \left( \frac{1}{Z^*} \chi^* \right)$  and noticing that  $n^{*T} \chi^* = d^*$ , one gets:

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z^*} \mu &= K \left( R^T \frac{\chi^*}{Z^*} - R^T \frac{p}{Z^*} \frac{1}{d^*} n^{*T} \chi^* \right) \\ &= K \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right) K^{-1} \mu^* = \mathbf{H} \mu^* \end{aligned} \quad (4)$$

The scalar  $\frac{Z}{Z^*}$  is the unknown ratio of the third coordinates in both frames. This relationship suggests that  $\mathbf{H}$  can be estimated only up to an unknown scalar factor. Several algorithms have been proposed for the estimation of the Homography matrix (see, e.g., [13], [19]). Assuming that  $K$  is known, we can compute an estimate of the matrix (denoted  $H_\eta$  as opposed to  $\mathbf{H}$  which encompasses the calibration error)

$$H_\eta = \eta \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right)$$

with  $\eta$  some scalar factor. One can show (see, e.g., [19, Pg. 135]) that  $\eta$  corresponds to the mean singular value of  $H_\eta$ . Furthermore, an explicit formula for the calculation of  $\eta$  is proposed in [20, App. B]. Therefore, we assume from now on the knowledge of

$$H = R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \quad (5)$$

Let us now consider the case when the camera optical center does not coincide with the vehicle center of mass. The camera frame, centered at the optical center, differs from the center of mass frame only by a position offset  $\delta$ . Let  $p_c = p + (R - I)\delta$  denote the position vector of the camera optical center in the reference camera frame. Then, the dynamics of  $p_c$  is given by

$$\begin{cases} \dot{p}_c &= R v_c \\ m \dot{v}_c &= -m S(\omega) v_c - T b_3 + m \gamma + Q(\omega) - m S(\delta) \Gamma \end{cases}$$

with  $v_c = v - S(\delta)\omega$  and  $Q$  quadratic in  $\omega$ . These equations differ from the dynamic equations of  $p$  (see (1)) only by the term  $Q(\omega) - m S(\delta)\Gamma$ . The present approach is based on the design of smooth feedback laws that make the closed-loop system locally exponentially stable (i.e., the state matrix of the linearized closed-loop system is Hurwitz). Since  $Q$  is second-order, this term does not affect this stability property. As for  $m S(\delta)\Gamma$ , this is a first-order term that does not affect the stability for "small enough" values of  $\delta$ , due to the robustness margin associated with any Hurwitz matrix. We essentially assume in this paper that  $\delta$  is small enough, so that  $m S(\delta)\Gamma$  can be neglected. The general case will be considered in a future work.

The time-derivative of  $H$  is easily deduced from (1):

$$\dot{H} = -S(\omega)H - \frac{1}{d^*} v n^{*T}$$

In [13],  $H$  was used to define an error vector and an associated feedback law, based on a kinematic control model. More precisely, the following result was shown.

*Proposition 2.1:* [13, Sec. 4] Let  $\chi^*$  denote the coordinates of a point  $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ , expressed in the reference frame  $\mathfrak{R}^*$ , and  $m^* = \frac{1}{Z^*} \chi^* = c^* \chi^*$  the associated normalized coordinates. Let  $e \in \mathbb{R}^6$  denote the error vector defined by

$$e = \begin{pmatrix} e_p \\ e_\Theta \end{pmatrix}, \quad e_p = (I - H)m^*, \quad e_\Theta = \text{vex}(H^T - H) \quad (6)$$

with  $\text{vex}$  the function defined by  $\text{vex}(S(x)) = x$  for any  $x \in \mathbb{R}^3$ . Then,

- 1)  $(p, R) \mapsto e$  defines a local diffeomorphism around  $(p, R) = (0, I_3)$ . In particular,  $e = 0$  if and only if  $(p, R) = (0, I_3)$ .
- 2) The kinematic control law

$$v = -\lambda_p e_p, \quad \omega = -\lambda_\Theta e_\Theta \quad (7)$$

with  $\lambda_p, \lambda_\Theta > 0$  makes  $(p, R) = (0, I_3)$  locally asymptotically stable.  $\triangle$

*Remark 2.2:* 1) In [13],  $e_p$  and  $e_\Theta$  are defined with an opposite sign, i.e.  $e_p = (H - I)m^*$ ,  $e_\Theta = \text{vex}(H - H^T)$ . The present choice is better adapted to the definition of  $v$  and  $\omega$  in (1). 2) Note that there is no constraint on  $m^*$  except that it must be a projective vector, i.e.,  $m_3^* = 1$ .  $\triangle$

Extension of Proposition 2.1 to System (1) raises several difficulties. First, the control input is no longer the 6d-vector of velocity variables  $(v, \omega)$ . It is the 4d-vector composed of the force input  $T$  and torque vector  $\Gamma$ . Then, the relation between the linear velocity  $v$  and the control inputs is

nonlinear and underactuated: there is only one force control variable to control the 3d velocity vector  $v$ . Finally, we do not have any measurement of this vector.

### III. A NEW ERROR VECTOR

In this section we define a new error which is instrumental in the design of stabilizing feedback laws.

*Proposition 3.1:* Let  $m^* = b_3 = (0, 0, 1)^T$  and

$$\bar{e} = Me, \quad M = \begin{pmatrix} 2I_3 & S(m^*) \\ -S(m^*) & I_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

with  $e$  defined by (6). Let  $\Theta = (\phi, \theta, \psi)^T$  denote any parametrization of the rotation matrix  $R$  such that  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  around  $R = I_3$  (e.g., Euler angles). Then,

- 1)  $(p, R) \mapsto \bar{e}$  defines a local diffeomorphism around  $(p, R) = (0, I_3)$ . In particular,  $\bar{e} = 0$  if and only if  $(p, R) = (0, I_3)$ .
- 2) In a neighborhood of  $(p, R) = (0, I_3)$ ,

$$\bar{e} = L \begin{pmatrix} p \\ \Theta \end{pmatrix} + O^2(p, \Theta), \quad L = \begin{pmatrix} L_p & 0 \\ L_{p\Theta} & L_\Theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

with  $L_{p\Theta} = S((\alpha^*, \beta^*, 0)^T)$ ,

$$L_p = \begin{pmatrix} c^* & 0 & \alpha^* \\ 0 & c^* & \beta^* \\ 0 & 0 & 2c^* \end{pmatrix}, \quad L_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$\alpha^*, \beta^*$  the (unknown) constant scalars defined by  $n^* = d^*(\alpha^*, \beta^*, c^*)^T$ , and  $O^2$  denoting terms of order two at least.  $\triangle$

The proof, based on elementary first-order approximation of  $\bar{e}$ , is available upon request to the authors.

*Remark 3.2:* 1) Since the projective vector  $m^*$  is user-defined, the choice  $m^* = b_3$  can always be made. As a matter of fact, the present approach can be extended to a general projective vector  $m^* = (m_1^*, m_2^*, 1)^T$ , by a slight modification of  $\bar{e}$ . 2) Eq. (9) shows the rationale behind the definition of  $\bar{e}$ : at first order, components  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  contain information on the translation vector  $p$  only, while components  $\bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6$  contain decoupled information on the orientation (i.e.  $L_\Theta$  is diagonal), corrupted by components of the translation vector. Note that  $L$  can be viewed as the linear approximation at the origin of the interaction matrix associated with  $\bar{e}$ .  $\triangle$

Since  $c^*, \alpha^*$ , and  $\beta^*$  are unknown,  $L$  is not known either. We show below, however, that  $L$  contains enough structure for the design of stabilizing control laws.

### IV. CONTROL SYNTHESIS

Let  $\bar{e}_p \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\bar{e}_\Theta \in \mathbb{R}^3$ ) denote the first (resp. last) three components of  $\bar{e}$ , i.e.  $\bar{e} = (\bar{e}_p^T, \bar{e}_\Theta^T)^T$ . The control design relies on a dynamic extension of the state vector defined as follows:

$$\dot{\nu} = -K_7 \nu - \bar{e}_p \quad (10)$$

with  $K_7$  a diagonal gain matrix. The variable  $\nu$  copes with the lack of measurements of  $\dot{\bar{e}}$ . The main result of the paper is given next.

*Theorem 4.1:* Let

$$\begin{cases} T &= m(g + k_1 \bar{e}_3 + k_2 \nu_3) \\ \Gamma &= -JK_3(\omega - \omega^d) \end{cases} \quad (11)$$

with

$$\begin{cases} \omega^d &= -\frac{K_4}{g}(g\bar{e}_\Theta + b_3 \times \gamma^d) \\ \gamma^d &= -K_5 \bar{e}_p - K_6 \nu \end{cases} \quad (12)$$

Then,

- 1) Given any upper-bound  $c_M^* > 0$ , there exist diagonal gain matrices  $K_i = \text{Diag}(k_i^j)$   $i = 3, \dots, 7; j = 1, 2, 3$  and scalar gains  $k_1, k_2$ , such that the control law (11) makes the equilibrium  $(p, R, v, \omega, \nu) = (0, I_3, 0, 0, 0)$  of the closed-loop System (1)-(10) locally exponentially stable for any value of  $c^* \in (0, c_M^*]$ .
- 2) If the diagonal gain matrices  $K_i$  and scalar gains  $k_1, k_2$  make the closed-loop system locally exponentially stable for  $c^* = c_M^*$ , then local exponential stability is guaranteed for any value of  $c^* \in (0, c_M^*]$ .  $\triangle$

The proof is available upon request to the authors.

Let us comment on this result. Since  $c^* = 1/Z^*$  and  $Z^* \geq d^*$  (recall that  $m^* = b_3$ ), a sufficient condition for  $c^* \in (0, c_M^*]$  is that  $d^* \geq 1/c_M^*$ . Thus, Property 1) ensures that stabilizing control gains can be found given any lower bound on the distance between the reference pose and the observed planar target. This is a very weak requirement from an application point of view. Property 2) is also a very strong result since it implies that in order to find stabilizing control gains for any  $c^* \in (0, c_M^*]$ , it is sufficient to find stabilizing control gains for  $c^* = c_M^*$ . This is a much easier task which can be achieved with classical linear control tools. In particular, by using the Routh-Hurwitz criterion, one can show that local exponential stability for  $c^* = c_M^*$  is ensured when the following inequalities are satisfied:

$$k_1, k_2, k_i^j > 0, \quad \forall (i, j) \notin \{(5, 3), (6, 3)\} \quad (13)$$

$$\begin{cases} k_6^1 < k_5^1 k_7^1 \\ c_M^* a_1^1 a_4^1 (a_4^1 - a_0^1) < a_2^1 D_2^1 \\ c_M^* a_1^1 (a_4^1 - a_0^1)^2 < (a_2^1 - a_0^1 a_3^1) D_2^1 \end{cases} \quad (14)$$

and

$$\begin{cases} k_6^2 < k_5^2 k_7^2 \\ c_M^* a_1^2 a_4^2 (a_4^2 - a_0^2) < a_2^2 D_2^2 \\ c_M^* a_1^2 (a_4^2 - a_0^2)^2 < (a_2^2 - a_0^2 a_3^2) D_2^2 \end{cases} \quad (15)$$

with

$$\begin{aligned} a_0^1 &= k_7^1 - \frac{k_1^1}{k_5^1}, a_1^1 = k_3^2 k_4^2 k_5^1, a_2^1 = k_3^2 k_4^2 k_7^1, \\ a_3^1 &= k_3^2 (k_4^2 + k_7^1), a_4^1 = k_3^2 + k_7^1, D_2^1 = a_4^1 a_3^1 - a_1^1 \end{aligned} \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} a_0^2 &= k_7^2 - \frac{k_2^2}{k_5^2}, a_1^2 = k_3^1 k_4^1 k_5^2, a_2^2 = k_3^1 k_4^1 k_7^2, \\ a_3^2 &= k_3^1 (k_4^1 + k_7^2), a_4^2 = k_3^1 + k_7^2, D_2^2 = a_4^2 a_3^2 - a_1^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Let us show the existence of control gains that satisfy these inequalities. First, note that there is no condition on  $k_5^3$  and

$k_6^3$ . This is due to the fact that, by (12), these gains do not affect  $\omega^d$ . Condition (13) is readily satisfied. Let us consider (14). First, let us remark that this set of conditions involves the control gains  $k_3^2, k_4^2, k_5^1, k_6^1$  and  $k_7^1$  only. The gains  $k_3^2, k_4^2$  and  $k_7^1$  can be chosen arbitrarily (under the positivity condition (13)). This fixes the values of  $a_2^1, a_3^1, a_4^1$ , and  $D_2^1$ . Then, one observes that for  $a_0^1 = 0$ , the second and third conditions of (14) reduce to  $c_M^* a_1^1 (a_4^1)^2 < a_2^1 D_2^1$ . Due to the fact that  $a_2^1, D_2^1 > 0$ , one can choose  $a_1^1 > 0$  (via the choice of  $k_5^1$ ) so that these conditions are satisfied. It is clear by continuity that these conditions are still satisfied for  $a_0^1 > 0$  "small enough". This latter condition leads to the choice of  $k_6^1$ . Note that  $a_0^1 > 0$  guarantees the first condition in (14). Choosing  $k_3^1, k_4^1, k_5^2, k_6^2$  and  $k_7^2$  in order to satisfy (15) follows the same procedure.

Let us finally remark that, given a family of control gains, Conditions (13)–(15) allow to determine the maximum value of  $c_M^*$  for which exponential stability is obtained.

## V. GAIN TUNING

While stability is a prerequisite for a closed-loop system, performance cannot be neglected in practice. In particular, it matters to ensure good damping properties. This issue is very important here since we have to cope with a large range of the unknown parameter  $c^*$ . In this section we propose gain tuning heuristics so as to obtain good performance. These heuristics do not guarantee performance levels, however, we have observed in simulation that they provide good results. Furthermore, after having tuned the gains as proposed, the Barmish theorem [21] can be used to verify performance afterwards. These heuristics are based on the cascade structure of the closed-loop linearized system which allows to address separately the yaw, vertical, and horizontal dynamics. This is similar to the case when full measurement of position, orientation, and velocities is available.

### A. Yaw dynamics gain tuning

The characteristic polynomial associated with the (linearized) yaw dynamics is  $P(\lambda) = \lambda^2 + k_3^3 \lambda + 2k_3^3 k_4^3$ . Thus, any given set of closed-loop poles  $(\lambda_1, \lambda_2)$  can be assigned by setting

$$k_3^3 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad k_4^3 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

### B. Vertical dynamics gain tuning

The characteristic polynomial associated with the vertical dynamics is  $P(\lambda) = \lambda^2 (\lambda + k_7^3) + C^* (\lambda + k)$  with  $C^* = 2c^* k_1$  and  $k = k_7^3 - \frac{k_2}{k_1}$ . The following heuristic is proposed:

- 1) Define the gain  $k_7^3$  and a number  $k \neq k_7^3$  knowing that, as  $c^*$  grows from 0 to  $\infty$ , the closed loop gains will be moving from 0 and  $-k_7^3$  to  $-k$  and  $\frac{k-k_7^3}{2}$ .
- 2) The slowest poles' real parts will start from 0 and head to  $\frac{k-k_7^3}{2}$ : define the scaling factor  $k_1$  so as to define  $c_{min}^*$  for which a given real part is reached. Note that  $k_2$  is then given by:  $k_2 = k_1 (k_7^3 - k)$ .
- 3) Use [21] to assess the performance of the obtained closed-loop system as  $c^*$  varies in its allowed range.

**Justification:** The root locus theory shows that the poles will start from  $(-k_7^3, 0, 0)$  as  $c^* = 0$  and head to  $-k$  and the two asymptotic directions  $\frac{k-k_7^3}{2} \pm j\infty$  as  $c^* \rightarrow \infty$ . One can also verify that, whatever the gains such that  $k \neq k_7^3$ , there is no root on the imaginary axis.

**Numerical example:** With  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $k_7^3 = 2.4$ , the root locus shows that:

- 1)  $\forall c^* > 0, \Re(\lambda_i) < 0$
- 2)  $\forall c^* \in [0.175; +\infty], -1 \leq \Re(\lambda_i) \leq -0.4$
- 3)  $\forall c^* \in [0.175; 2.34], \xi \geq 0.2$  ( $\xi$  is the damping ratio)

### C. Horizontal dynamics gain tuning

The horizontal dynamics is composed of two fifth-order linear systems (associated respectively with the roll and pitch dynamics). Since the structure of these systems is the same we only address gain tuning for the first one. The associated characteristic polynomial is:

$$\lambda^2 (\lambda + k_7^1) (\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2) + C^* [\lambda + K]$$

where  $C = c^* k_3^2 k_4^2 k_5^1, K = k_7^1 - \frac{k_6^1}{k_5^1}$ . The following heuristics is proposed:

- 1) Select  $k_3^2$  and  $k_4^2$  such that the roots of  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$  are as fast as possible;
- 2) Define a much slower dynamics for the "inside system" defined by:  $k_3^2 k_4^2 \lambda^2 (\lambda + k_7^1) + C^* [\lambda + K]$ , and select suitable  $k_5^1, k_6^1, k_7^1$  so that for  $c^* \in (0; c_M^*]$ , all poles are slower than the above defined maximum inside dynamics: see section V.B since the "inside" and vertical dynamics are similar;
- 3) Use [21] to assess the performance of the obtained closed-loop system as  $c^*$  varies in its allowed range.

**Justification:** From the root locus theory there are poles at 0 (double),  $-k_7^1$  and at the roots of  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$ . The only zero is at  $-\left(k_7^1 - \frac{k_6^1}{k_5^1}\right)$  (zero of the inside dynamics). The two poles placed by  $k_3^2$  and  $k_4^2$  will go to infinity as  $c^*$  grows. The poles at 0 and  $-k_7^1$  will behave similarly to the vertical dynamics for small  $c^*$ , since they are close to zero and separated from the first two; for  $c^*$  large, two of these poles will escape to infinity with positive real part.

**Numerical Example:** With gains defined as  $k_3^2 = 10, k_4^2 = 12, k_5^1 = 5, k_6^1 = 10, k_7^1 = 2.4$  (inside dynamics being slower than -1, which is must slower than the roots of  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$ ), the characteristic polynomial is given by:  $\lambda^5 + 12.4\lambda^4 + 144\lambda^3 + 288\lambda^2 + 600c^* \lambda + 240c^*$ , which is stable for  $c^* \in (0; c_M^*]$  with  $c_M^* \approx 4$ , and such that the roots real parts  $\Re(\lambda) \leq -0.2$  for  $c^* \in [c_1^*; c_2^*]$  with  $c_1^* \approx 0.2$  and  $c_2^* \approx 3.25$ .

## VI. SIMULATION RESULTS

The proposed approach has been tested via simulations for a dynamical model of an helicopter. This model is defined by (1) with  $m = 10kg$  and the coefficients of the inertia

matrix defined by  $J_{xx} = 0.3kg.m^2$ ;  $J_{yy} = 0.8kg.m^2$ ;  $J_{zz} = 0.9kg.m^2$ ;  $J_{xy} = 0.1kg.m^2$ ;  $J_{xz} = 0.2kg.m^2$ ;  $J_{yz} = 0.1kg.m^2$ .

Simulation results reported on Fig. 2–3 have been obtained with initial position offset proportional to the distance:  $p_0 = (\frac{0.4}{c^*}, -\frac{0.8}{3c^*}, \frac{0.4}{3c^*})^T$ . The other initial conditions were null (angles, linear and angular velocity).  $n^*$  was chosen as  $n^* = (-0.28m; 0.28m; 0.92m)^T$ . The control gains in (10)–(11) have been chosen as follows:

$$\begin{aligned} k_1 &= 5, \quad k_2 = 10, \quad K_3 = \text{Diag}(10, 10, \sqrt{2}) \\ K_4 &= \text{Diag}(12, 12, \frac{1}{2\sqrt{2}}), \quad K_5 = \text{Diag}(5, 5, 0) \\ K_6 &= \text{Diag}(10, 10, 0) \quad K_7 = 2.4I_3 \end{aligned} \quad (18)$$

This yields, from (14)–(15), the stability upper-bound  $c_M^* < 3.99m^{-1}$ . Two simulations, obtained with values of  $c^* = 0.1m^{-1}$  and  $c^* = 2m^{-1}$  are reported. This corresponds to a very large range of distances to the target, with  $0.5m \leq Z^* \leq 10m$ . Fig. 2–3 show good performance in all this range without using any depth information.

To simulate the effects of measurement noise, simulations have also been conducted with realistic noise levels, i.e. gaussian white noise with standard deviations  $0.01rad/s$  for the angular velocity and

$$\begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0002 & 0.0454 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0319 \\ 0 & 0 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

for the various elements of the homography matrix. The latter values are based on measurements performed on actual images. In addition, the control values have been passed through a third-order Butterworth filter with  $50rad/s$  bandwidth. The results are presented on Fig. 4–5. Despite a significant level of noise at the input level, the controller is still able to achieve a fair stabilization around the desired position. Nevertheless, it seems that there is room for improvement in the filtering process.

## VII. CONCLUSION

Stabilizing feedback laws for hover flight control of VTOL UAVs have been proposed based on visual measurements of a planar target and rate gyros measurements. Given any lowerbound on the distance between the target and the vehicle’s reference pose, it has been shown that stabilizing feedback laws can be designed without any information on the target. This property could be instrumental in controlling UAVs in unknown environments. Gain tuning strategies have been derived so as to achieve good performance. The approach has been validated in simulation. Extensions of this work include experimental validations on helicopter drones, nonlinear control design in order to possibly extend the stability domain and allow more aggressive manoeuvres, and incorporating accelerometers measurements to better cope with wind gusts.

## REFERENCES

- [1] R. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, “Non-linear complementary filters on the special orthogonal group,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218, 2008.
- [2] P. Martin and E. Salaun, “Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system,” *Control Engineering Practice*, pp. 712–722, 2010.
- [3] M.-D. Hua, “Attitude estimation for accelerated vehicles using gps/ins measurements,” *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 7, pp. 723–732, 2010.
- [4] B. Espiau, “Effect of camera calibration errors on visual servoing in robotics,” in *3rd Int. Symp. on Exp. Robot. ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 200, no. 1, 1993, pp. 182–192.
- [5] F. Chaumette and S. Hutchinson, “Visual servo control, part I: Basic approaches,” *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 13, no. 4, pp. 82–90, 2006.
- [6] —, “Visual servo control, part II: Advanced approaches,” *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 14, no. 1, pp. 109–118, 2007.
- [7] S. Rathinam, Z. Kim, and R. Sengupta, “Vision based monitoring of locally linear structures using an UAV,” *Journal of Infrastructure Systems*, vol. 14, no. 1, pp. 52–63, 2008.
- [8] O. Shakernia, Y. Ma, J. Koo, and S. Sastry, “Landing an unmanned air vehicle: Vision based motion estimation and nonlinear control,” *Asian Journal of Control*, vol. 1, no. 3, pp. 128–145, 1999.
- [9] J. Azinheira and P. Rives, “Image-based visual servoing for vanishing features and ground lines tracking: Application to a UAV,” *International Journal of Optomechatronics*, vol. 2, no. 3, pp. 275–295, 2008.
- [10] L. Mejias, S. Saripalli, P. Campoy, and G. Sukhatme, “Visual servoing of an autonomous helicopter in urban areas using feature tracking,” *In Journal of Field Robotics*, vol. 23, no. 3–4, pp. 185–199, 2006.
- [11] T. Hamel and R. Mahony, “Visual servoing of an under-actuated dynamic rigid-body system: An image based approach,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 2, pp. 187–198, 2002.
- [12] E. Malis and F. Chaumette, “ $2\frac{1}{2}d$  visual servoing with respect to unknown objects through a new estimation scheme of camera displacement,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 37, no. 1, pp. 79–97, 2000.
- [13] S. Benhimane and E. Malis, “Homography-based 2d visual tracking and servoing,” *The International Journal of Robotics Research*, pp. 661–676, 2007.
- [14] T. Gonalves, J. Azinheira, and P. Rives, “Homography-based visual servoing of an aircraft for automatic approach and landing,” in *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, 2010, pp. 9–14.
- [15] D. Suter, T. Hamel, and R. Mahony, “Visual servo control using homography estimation for the stabilization of an x4-flyer,” in *IEEE Conference on Decision and Control*, 2002.
- [16] N. Metni, T. Hamel, and F. Derkx, “A uav for bridges inspection: Visual servoing control law with orientation limits,” in *5th Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles (IAV 04)*, 2004.
- [17] V.-K. Chitrakaran, D.-M. Dawson, J. Chen, and F. M., “Vision assisted autonomous landing of an unmanned aerial vehicle,” in *IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, pp. 1465–1470.
- [18] M. Hua, T. Hamel, P. Morin, and C. Samson, “A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to vtol drones,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, pp. 1837–1853, 2009.
- [19] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S. Sastry, *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*. SpringerVerlag, 2003.
- [20] E. Malis and M. Vargas, “Deeper understanding of the homography decomposition for vision-based control,” INRIA, Tech. Rep. 6303, 2007, available at <http://hal.inria.fr/inria-00174036/fr/>.
- [21] B. Barmish, “A generalization of kharitonov’s four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 34, pp. 157–165, 1989.

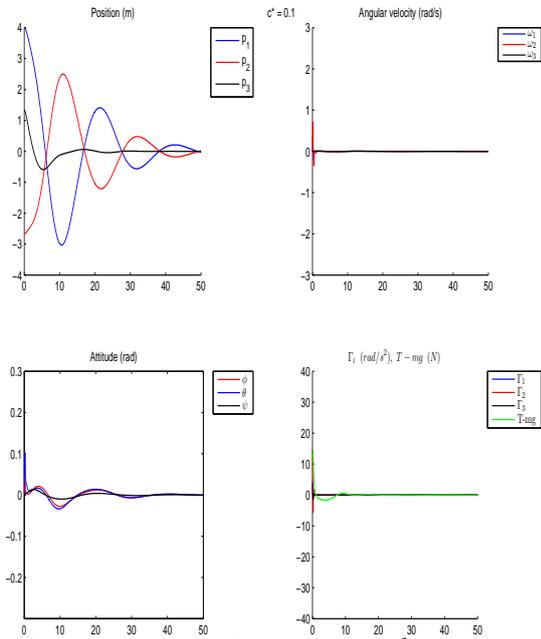


Fig. 2: Simulation results for  $c^* = 0.1 m^{-1}$ , without noise

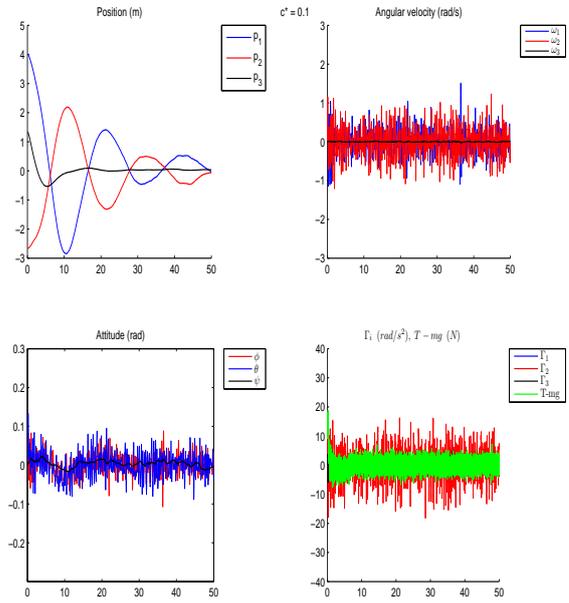


Fig. 4: Simulation results for  $c^* = 0.1 m^{-1}$ , with noise

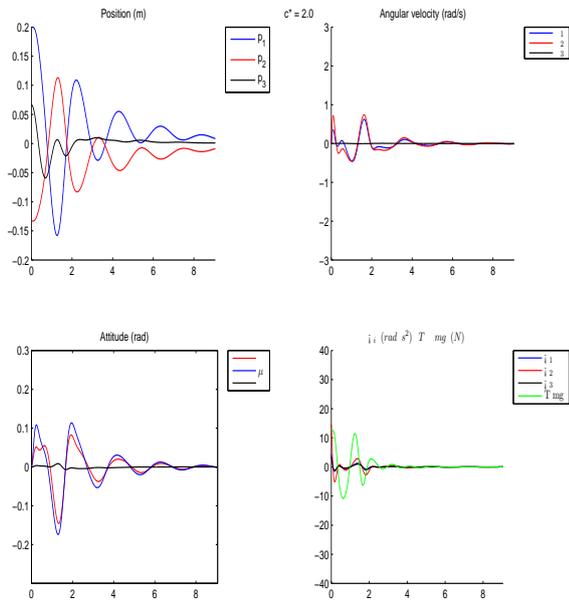


Fig. 3: Simulation results for  $c^* = 2 m^{-1}$ , without noise

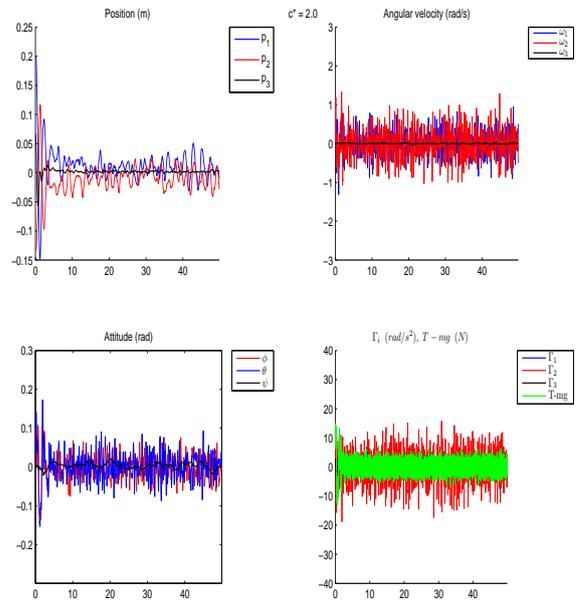


Fig. 5: Simulation results for  $c^* = 2 m^{-1}$ , with noise

## **A.4 Article ACC'12**

# Nonlinear control of underactuated vehicles with uncertain position measurements and application to visual servoing

Henry de Plinval, Pascal Morin, Philippe Mouyon

**Abstract**—The paper concerns the stabilization of thrust-propelled underactuated vehicles in the context of sensor-based control. First, a class of nonlinear feedback laws that ensure semi-global stabilization despite possibly large uncertainties on the position measurements is proposed. Then, application to the visual servoing of a Vertical Take-Off and Landing (VTOL) drone with a video camera is considered. In particular, it is shown that semi-global stabilization can be achieved, based on homography measurements, with little information on the environment. Simulation results show the effectiveness of the approach.

## I. INTRODUCTION

This paper concerns the stabilization of underactuated thrust-propelled vehicles, i.e. rigid bodies with one body-fixed thrust control and full torque actuation [1]. Although the present study is not limited to a special class of such systems, it is motivated in the first place by robotic applications with *small* VTOL UAVs (i.e. Vertical Take-Off and Landing Unmanned Aerial Vehicles). Surveillance of a small geographic zone or inspection of infrastructures (bridges, power lines, etc) are typical examples of such applications. Estimation of the vehicle's pose (i.e. position and orientation) is instrumental in the design of feedback laws that can make the system autonomous. In particular, obtaining a *precise* relative position with respect to the environment is often difficult. This problem is related to the limited payload of small aerial vehicles, which puts severe constraints on the number and quality of embedded sensors. As a consequence, one has to cope with low quality position measurements. Keeping in mind the system's underactuation and its nonlinear dynamics, it is then difficult to guarantee stability of the system in a large domain. The main contribution of this work is the design of a class of feedback controllers that ensure *semi-global stabilization* of a reference position with possibly large uncertainties on the position measurements (recall that *global* stabilization cannot be obtained with smooth feedbacks due to topology of  $\mathbb{SO}(3)$ ). One can recast this result in the more general context of *sensor-based* control [2], [3], where the relation between the measured signal used in the feedback law and the Cartesian coordinates is often poorly known. Sensor-based control is well developed for fully actuated mechanical

systems (like e.g. robotic arms [3]), and some results have also been proposed for nonholonomic wheeled vehicles [4]. The case of underactuated systems, more challenging, has been much less investigated. As a nontrivial application of the proposed result, we address the visual servoing of a UAV in front of a quasi-vertical textured planar structure, based on measurements provided by a video camera.

This work is related to the nonlinear control literature on VTOL UAVs. Several control design methods have been proposed in order to guarantee semi-global stability<sup>1</sup> (see, e.g., [5], [6], [7], [1]). In those works, however, it is assumed that the position of the vehicle is known. In the present work, we show that such semi-global stability properties can also be ensured despite significant uncertainties on the position vector. The proposed design method builds on the recent work [1] and ideas pertaining to the control in presence of input saturation [8]. It also shares similarities with the method proposed in [9], although the present stability result is stronger as a much larger class of measurement uncertainties is considered. As mentioned above, the present method is also related to sensor-based control, where one tries to assess stability properties based on a rough knowledge of the relation between the sensor output function and cartesian coordinates [3]. To our knowledge, addressing the sensor-based control of underactuated vehicles in a generic way remains to be done. There exist, however, several results on the *vision-based* control of VTOL UAVs. The application to visual servoing developed in this paper is related to [10], [11], [9], where (semi)-global controllers are also derived based on homography measurements. In particular, uncertainties on the position measurements are also considered in [9]. Due to assumptions on the environment, however, the class of these uncertainties is much smaller than the one here considered. This work is also related to [12] where a nonlinear control approach is proposed for the same visual servoing problem. In that work, however, it is assumed that the normal vector to the planar target, expressed in the body frame, can be extracted from the image. This assumption is not made here. Finally, this result is also related to the authors' work [13] in which homography-based stabilizing controllers were proposed for this problem. Only local stability was proved in that paper, based on the study of the linearized controlled system, whereas semi-global stability is here established. As a counterpart, some assumptions on the target's orientation are needed in this work.

H. de Plinval and P. Mouyon are with ONERA - The French Aerospace Lab, Toulouse, France, Henry.dePlinval@onera.fr, Philippe.Mouyon@onera.fr

P. Morin, is with ISIR, UPMC, Paris, France, morin@isir.upmc.fr. Part of this work was done when this author was with INRIA, Sophia-Antipolis, France. This work has been supported by the "Chaire d'excellence en robotique RTE-UPMC".

<sup>1</sup>From now on, we use this term to denote asymptotic stability with convergence domain containing all position/velocity initial errors and a neighborhood of the identity matrix in  $\mathbb{SO}(3)$  for orientation errors.

The paper is organized as follows. Preliminary background and notation are given in Section II. The main result on control design and stability in presence of uncertain position measurements is exposed in Section III. Application to the visual servoing of underactuated UAVs is considered in Section IV and associated simulation results are presented in Section V. Final remarks conclude the paper.

## II. PRELIMINARY BACKGROUND

### A. Notation

The transpose of a matrix  $M$  is denoted as  $M^T$ . The  $n \times n$  identity matrix is denoted as  $I_n$ .

Given a smooth function  $f$  defined on an open set of  $\mathbb{R}$ , its derivative is denoted as  $f'$ .

For any square matrix  $M$ ,  $M_s := \frac{M+M^T}{2}$  and  $M_a := \frac{M-M^T}{2}$  respectively denote the symmetric and antisymmetric part of  $M$ .

Given  $0 < \delta < \Delta$ , a function  $sat_{\delta,\Delta} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  of class  $C^1$  is called a *saturation function* if:

- i)  $sat_{\delta,\Delta}(\tau^2) = 1$  for  $0 \leq \tau \leq \delta$
- ii)  $\tau sat_{\delta,\Delta}(\tau^2) \leq \Delta$  for any  $\tau \geq 0$
- iii) the function  $\tau \mapsto \tau sat_{\delta,\Delta}(\tau^2)$  is non decreasing on  $\mathbb{R}^+$

A function  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  of class  $C^1$  is called a *saturating function* if:

- i)  $h$  is strictly positive and bounded on  $\mathbb{R}^+$
- ii)  $\tau h(\tau^2) \leq 1$
- iii)  $\tau h(\tau) \rightarrow \infty$  when  $\tau \rightarrow \infty$
- iv)  $h'(\tau) \leq 0$  for any  $\tau \geq 0$
- v) the function  $\tau \mapsto \tau h'(\tau)$  is bounded on  $\mathbb{R}^+$

Note that both classes of functions play essentially the same role in the control design. Generality considerations have led us to introduce these two classes, but one can consider a unique class composed of functions that are both saturation and saturating functions.

Examples of saturation and saturating function are given by

$$\begin{aligned} sat_{\delta,\Delta}(\tau) &= \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \leq \delta^2 \\ \frac{\Delta}{\sqrt{\tau}} - \frac{(\Delta-\delta)^2}{\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}+\Delta-2\delta)} & \text{if } \tau > \delta^2 \end{cases} \\ h(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{1+\tau}} \end{aligned} \quad (1)$$

### B. Dynamics of thrust-propelled underactuated vehicles

We consider in this paper the class of thrust-propelled underactuated vehicles consisting of rigid bodies moving in 3d-space under the action of one body-fixed force control and full torque actuation [1]. This class contains most VTOL UAVs (quadrotors, ducted fans, helicopters, etc). The dynamics of these systems is described by the following well-known equations:

$$\begin{cases} \ddot{p} &= -uRe_3 + ge_3 \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &= J\omega \times \omega + \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

with  $p$  the position vector of the vehicle's center of mass, expressed in an reference (inertial) frame,  $R$  the rotation matrix from the body frame to the reference frame,  $\omega$  the angular velocity vector expressed in the body frame,  $S(\cdot)$  the matrix-valued function associated with the cross product, i.e.  $S(x)y = x \times y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ ,  $u$  the normalized thrust input, i.e.  $u = \frac{T}{m}$  where  $m$  is the mass and  $T$  the thrust input,  $e_3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $J$  the inertia matrix,  $\Gamma$  the torque vector, and  $g$  the gravity constant. We shall consider, by a standard time separation argument commonly used for VTOL UAVs, that the orientation control variable is the angular velocity  $\omega$ . Indeed, once a desired angular velocity  $\omega^d$  has been defined, the torque control input  $\Gamma$  is typically computed through a high gain controller:

$$\Gamma = -J\omega \times \omega + kJ(\omega^d - \omega)$$

with  $k$  chosen large enough. Therefore, we focus from now on the subsystem

$$\begin{cases} \dot{p} &= \xi \\ \dot{\xi} &= -uRe_3 + ge_3 \\ \dot{R} &= RS(\omega) \end{cases} \quad (3)$$

## III. CONTROL DESIGN AND STABILITY ANALYSIS

Assume that the following measurements are available:

$$\begin{cases} \pi &= R^T M p \\ \gamma &= gR^T e_3 \\ v &= R^T \dot{p} \\ \omega & \end{cases} \quad (4)$$

with  $M$  some  $3 \times 3$  constant matrix. The measurement  $\pi$  is associated with the vehicle's position,  $\gamma$  is the gravity vector projection in the body frame,  $v$  is the linear velocity vector and  $\omega$  is the angular velocity vector, both expressed in body frame. The matrix  $R^T$  in  $\pi$  and  $\gamma$  expresses the fact that these measurements are also obtained in the body frame. This is a typical situation with embedded sensors. In most studies on feedback control of underactuated UAVs, it is assumed that  $M$  is the identity matrix, so that the relation between the measurement function and the cartesian coordinates is perfectly known. Several control design methods ensuring semi-global stability of the origin on System (3) have been proposed in this case (see, e.g., [7], [1]). In this section, we show that the same stability properties can be guaranteed in the case of uncertainties on the matrix  $M$ , and we provide stability conditions on the control gains in term of the "size" of these uncertainties. In order to provide the rationale of the control design and analysis, we first consider the simpler case of a fully actuated system.

### A. The fully actuated case

Consider the position dynamics of a fully actuated rigid body with body fixed force inputs, i.e.

$$\ddot{p} = Ru \quad (5)$$

with  $u \in \mathbb{R}^3$  the control input, and assume that the measurements  $\pi$  and  $v$  defined above are available for the control design.

**Proposition 1** Let  $sat_{\delta,\Delta}$  and  $h$  denote respectively a saturation and saturating function. Assume that  $M$  is positive definite and consider any gain values  $k_1, k_2 > 0$  such that

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\| \|M\| \sup_{\tau} (h(\tau) + 2\tau|h'(\tau)|) \\ k_2 \delta > k_1 \end{cases} \quad (6)$$

Then, the feedback law

$$u = -k_1 h(|\pi|^2) \pi - k_2 sat_{\delta,\Delta}(|v|^2) v \quad (7)$$

ensures the global asymptotic stability and local exponential stability of the origin of System (5).

The proof is given in the appendix.

It follows from the definitions of saturation and saturating functions that the above control law is bounded by  $k_1 + k_2 \Delta$ . Thus, Proposition 1 provides bounded feedback laws that ensure global asymptotic stability for a large set of position measurement functions parameterized by  $M$ . Furthermore, it provides stability conditions in term of  $M$  and the control gains. This can be used to guarantee stability given a priori information on the measurements. Since it is assumed that  $M$  is positive definite, it follows from these conditions that stability can always be obtained by choosing  $k_1$  small w.r.t.  $k_2$ . Note also that positivity of  $k_1, k_2$  ensures the stability of the system when  $M$  is positive definite and symmetric.

In the following subsection the above result is extended to underactuated systems.

### B. The underactuated case

The main result of this paper is stated next.

**Theorem 1** Let  $sat_{\delta,\Delta}$  and  $h$  denote respectively a saturation and saturating function. Assume that  $M$  is positive definite and consider any gain values  $k_1, k_2 > 0$  such that

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\| \|M\| \sup_{\tau} (h(\tau) + 2\tau|h'(\tau)|) \\ k_2 \delta > k_1 \\ k_1 + k_2 \Delta < g \end{cases} \quad (8)$$

Define a dynamic augmentation:

$$\dot{\eta} = \eta \times \omega - k_3(\eta - \pi), \quad k_3 > 0 \quad (9)$$

together with the control:

$$\begin{cases} \omega_1 &= -\frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_2}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(e_1) R^T \dot{\mu} \\ \omega_2 &= \frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_1}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(e_2) R^T \dot{\mu} \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (10)$$

where  $\bar{\mu}, \mu$ , and the feedforward term  $R^T \dot{\mu}$  are given by

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &:= \gamma + k_1 h(|\eta|^2) \eta + k_2 sat_{\delta,\Delta}(|v|^2) v \\ \mu &:= R \bar{\mu} \\ R^T \dot{\mu} &= -k_1 k_3 [h(|\eta|^2) I_3 + 2h'(|\eta|^2) \eta \eta^T] (\eta - \pi) \\ &\quad + k_2 [sat_{\delta,\Delta}(|v|^2) I_3 + 2sat'_{\delta,\Delta}(|v|^2) v v^T] (\gamma - u e_3) \end{aligned}$$

Then,

- i) there exists  $k_{3,m} > 0$  such that, for any  $k_3 > k_{3,m}$ , the closed-loop system (3)-(10) together with (9) is

- asymptotically stable and locally exponentially stable with convergence domain given by  $\{\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)| e_3\}$ .  
ii) if  $M_s$  and  $M_a$  commute, the same conclusion holds with the first inequality in (8) replaced by:

$$k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\| (\|M_a\| \sup_{\tau} h(\tau) + \|M_s\| \sup_{\tau} 2\tau|h'(\tau)|) \quad (11)$$

The proof is given in the Appendix.

Let us comment on the above result, in relation with the fully-actuated case addressed in Proposition 1. The second and third terms in the definition of  $\bar{\mu}$  are reminiscent of the control law (7), with  $\pi$  replaced by  $\eta$ . In view of (9), this latter variable can be viewed as a "filtered value" of  $\pi$ . Note that its time-derivative is known, since it is explicitly defined by (9), while the time derivative of  $\pi$  is not, since  $M$  is unknown. This allows to calculate the term  $R^T \dot{\mu}$  in (10). Compared to the fully-actuated case, the objective is to make  $\bar{\mu}$  converge to  $|\bar{\mu}| e_3$  via the definition of  $u$ ,  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . This ensures that the linear acceleration converges asymptotically to the linear acceleration of the fully-actuated case defined by (5)-(7). Note that  $\omega_3$ , which controls the yaw dynamics, is not involved in this objective. Thus, it can be freely chosen. In practice, however, some choices are better than others (see Section IV for an example). Finally, it follows from (8) that

$$|k_1 h(|\eta|^2) \eta + k_2 sat_{\delta,\Delta}(|v|^2) v| \leq k_1 + k_2 \Delta < g = |\gamma|$$

This guarantees that  $\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)| e_3$  whenever  $g e_3^T R(0) e_3 > -(k_1 + k_2 \Delta)$  and this ensures, from Property i) of the theorem, the semi-global stability of  $(\eta, p, \xi, R) = (0, 0, 0, I_3)$ . Note that the orientation convergence domain is quite large from an application point of view.

The dynamic extension (9) introduces the complementary gain  $k_3$  with an associated stability condition (an explicit stability condition on  $k_3$  can be deduced from the stability proof but it is complex and probably much conservative). To avoid this extra condition, a simpler control expression with similar robustness properties must be proposed. Although we have not been able to establish a complete stability proof, we conjecture the following result.

**Conjecture 1** Suppose that the assumptions of Theorem 1 hold with the following extra assumption on the gains  $k_1, k_2$ :

$$k_1 + k_2 \Delta \leq \frac{g}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

Define the control law:

$$\begin{cases} \bar{\mu} &\triangleq \gamma + k_1 h(|\pi|^2) \pi + k_2 sat_{\delta,\Delta}(|v|^2) v \\ \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \bar{\mu}_1 \\ u &= \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (13)$$

with  $k_4 > 0$ . Then, the closed-loop system is asymptotically stable and locally exponentially stable and the system's solutions converge to the origin if  $|e_3^T R(0) e_3| < \frac{k_1 + k_2 \Delta}{g}$ . Moreover, under these conditions, the angle between local

and inertial vertical will always remains strictly smaller than  $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{k_1+k_2\Delta}{g}\right)$ .

We now illustrate Theorem 1 on an example which is instrumental for the visual servoing application studied in Section IV.

**Example:** Assume that  $M = \alpha I_3 + S(\beta)$  with  $\alpha > 0$  and  $S$  the skew-symmetric matrix associated with the cross product, i.e.  $S(\beta)x = \beta \times x$ . Then,  $M_s = \alpha I_3$  and  $M_a = S(\beta)$  commute so that the stability condition (11) applies. Take  $h$  and  $\text{sat}_{\delta,\Delta}$  as defined by (1). The stability conditions on  $k_1, k_2$  are then given by:

$$\begin{cases} k_1, k_2 > 0 \\ k_2\delta > k_1 \\ k_1 + k_2\Delta < g \\ \alpha k_2^2 > k_1|\beta| \left( |\beta| + \frac{2\alpha}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (14)$$

#### IV. APPLICATION TO VISUAL SERVOING

In this section, Theorem 1 is applied to a visual servoing application for a VTOL UAV.

##### A. Preliminary recalls and problem statement

Consider an underactuated UAV with a video camera facing a planar target. Suppose that a "reference" picture of this target taken at a reference pose is known. This reference pose is represented on Fig. 1 by the reference frame  $\mathcal{R}^*$ . We assume that this pose is a possible equilibrium for the dynamics of this underactuated vehicle, meaning that the  $z$  axis of  $\mathcal{R}^*$  is vertical. Otherwise, asymptotic stabilization of this pose would not be possible. Finally, we also assume that the optical center of the camera corresponds to the vehicle's center of mass and the optical axis corresponds to the  $x$ -axis of  $\mathcal{R}^*$ . At every time, the "current" picture of the target, taken at the current pose represented by the frame  $\mathcal{R}$ , is compared to the reference one. From this comparison, the *homography matrix* is computed (see e.g. [14], [15] for more details on homography matrices and associated computation algorithms). This matrix, which allows to transform the target's points coordinates from the reference pose to the current pose, is given by

$$H = R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \quad (15)$$

where  $d^*$  is the distance from the UAV reference position to the target plane and  $n^*$  is the normal to the target plane expressed in the reference frame. Both variables are unknown since they cannot be extracted from the visual data. Thus, they are not available for the control design. The objective is to design a feedback controller that ensures semi-global stabilization of the vehicle at the reference pose based on these homography measurements together with velocity measurements. To our knowledge, this general problem remains open. In [9], [12], solutions to this problem have been proposed when the normal  $n^*$  to the planar target is known. Note that it is then possible to extract from  $H$  the rotation matrix and the position vector  $p$  up to the unknown scale factor  $d^*$ . We address in this section a more complex case for

which such an extraction is not possible. More precisely, we consider the case of a vertical target, which is of interest in many inspection applications. This assumption is equivalent to  $n_3^* = 0$ .

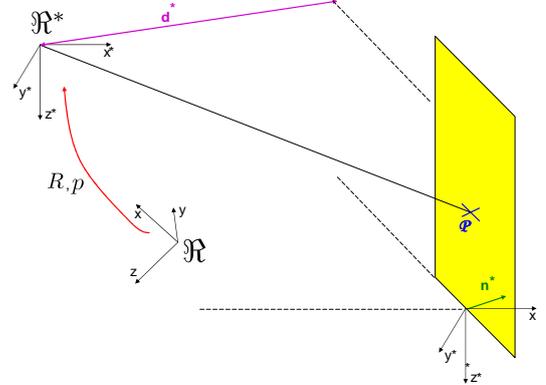


Fig. 1. Problem scheme

##### B. Error vector definition

In this section, using the assumption of verticality for the planar target, we show that measurements  $\pi$  and  $\gamma$  of the form (4) can be extracted from the homography matrix  $H$ . More precisely, let

$$\begin{cases} \pi = H e_2 \times H e_3 - H e_1 \\ \gamma = g H e_3 \end{cases} \quad (16)$$

From the assumption  $n_3^* = 0$ , one can verify that:

$$\begin{cases} \pi = R^T M \left( \frac{n^*}{d^*} \right) p \\ \gamma = g R^T e_3 \end{cases} \quad (17)$$

with  $M(\tau) = \tau_1 I + S(\tau_2 e_3)$ .

##### C. Visual servoing

We assume that velocity measurements  $v$  are available. In practice, they can be obtained, e.g., via a GPS<sup>2</sup>. In this case, Theorem 1 applies directly with  $M = M\left(\frac{n^*}{d^*}\right)$  and by (14) we deduce that the control law (10) ensures semi-global stabilization of the reference pose provided that:

$$\begin{cases} n_1^* > 0 \\ k_1, k_2 > 0 \\ k_2\delta > k_1 \\ k_1 + k_2\Delta < g \\ n_1^* d^* k_2^2 > k_1 |n_2^*| \left( |n_2^*| + \frac{2n_1^*}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (18)$$

Note that the first condition, which ensures that  $M$  is positive definite, essentially means that the camera is "facing" the target at the reference pose. This is a very natural assumption from an application point of view. When (loose) bounds are known for  $d^*$ :  $d_{\min} \leq d^* \leq d_{\max}$  and  $n_1^* \geq n_{1\min}$ , and

<sup>2</sup>The case of a GPS-denied environment will be considered in a future work.

recalling that  $|n^*| = 1$ , the last condition of equation (18) can be replaced by:

$$n_{1\min} d_{\min} k_2^2 > k_1 \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \quad (19)$$

#### D. Yaw control

The yaw degree of freedom is not involved in the stabilization objective. On the other hand, it matters to keep the target inside the field of view of the camera. We propose to use the following control law:

$$\omega_3 = k_5 H_{21} \quad (20)$$

Upon convergence of the position, velocity, roll and pitch angles due to the other controls, the yaw dynamics will be close to  $\dot{\psi} \approx -k_5 \sin\psi$ , thus ensuring the convergence of  $\psi$  to zero unless  $\psi$  is initially equal to  $\pi$  (case contradictory with the visibility assumption). Another nice feature of this yaw control is that it vanishes when  $H_{21} = 0$ , i.e. when the target is seen -from yaw prospective- as it should be at the end of the control task. This means that the controller tries to reduce the yaw angle only when the position/velocity errors have been significantly reduced. This can be verified on the simulation results presented next.

### V. SIMULATION RESULTS

We now illustrate the control approach by simulation results for the visual servoing problem of the previous section. We consider the controller proposed in Theorem 1. The following control parameters are used in all simulations:

- $[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5] = [1, 2, 1, 1, 1]$
- the saturation function  $sat_{\delta, \Delta}$  and the saturating function  $h$  are given by (1) with  $\delta = 1, \Delta = 1.1$ ,

It follows from (19) that for these gain values, the controller should stabilize the UAV for any distance  $d^* \geq d_{\min} = 0.49m$  with  $n_{1\min} \geq 0.7$ .

The values for the initial position, velocity, orientations and normal  $n^*$  are given by:

- Figure 2:  $n^* = (0.7; -0.71; 0)^T$ ,  $d^* = 3m$ ,  $p_0 = (-5.5m; 1.2m; 1.3m)^T$ ,  $v_0 = (-2.3m/s; -1.6m/s; 0.4m/s)^T$ ,  $\phi_0 = -0.5^\circ$ ,  $\theta_0 = 11.4^\circ$ ,  $\psi_0 = 4.1^\circ$

- Figure 3:  $n^* = (0.8; 0.61; 0)^T$ ,  $d^* = 1m$ ,  $p_0 = (-6.6m; 5.2m; 3.2m)^T$ ,  $v_0 = (-1m/s; 0.9m/s; 0.4m/s)^T$ ,  $\phi_0 = 8.1^\circ$ ,  $\theta_0 = 18.3^\circ$ ,  $\psi_0 = -30.7^\circ$

On these figures, it can be seen that the control law stabilizes the system and recovers from large initial conditions.

### VI. CONCLUSION

A nonlinear control law has been proposed to semi-globally stabilize underactuated vehicles in the presence of uncertain position measurements. Explicit stability conditions on the control gains, in relation with the measurement uncertainties, have been derived. The approach has been applied to an important visual servoing application and simulation results validate the control design and robustness

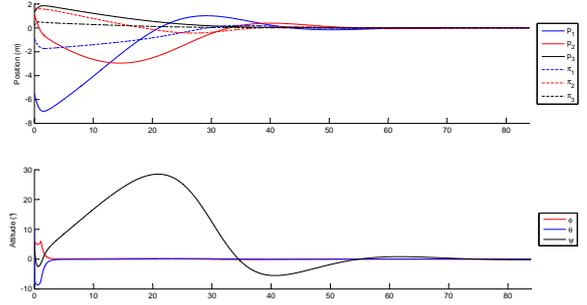


Fig. 2. Control law from Theorem 1, test case 1

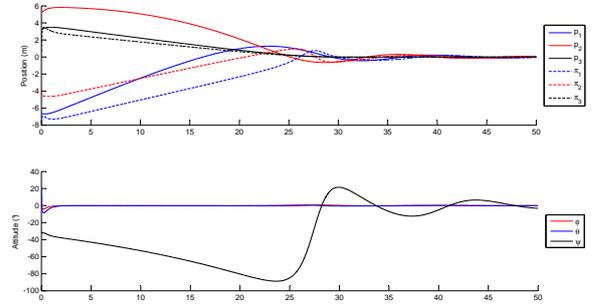


Fig. 3. Control law from Theorem 1, test case 2

analysis. There are many possible extensions of the present work: extension of the control design and analysis to the more general context of *sensor-based* control, proof of the stability conjecture for the simplified version of the main controller, experimental validation of the visual servoing task here considered, application to other sensor suites, etc.

### APPENDIX: PROOF OF PROPOSITION 1

In view of (4), (5), and (7),  $\pi$  and  $v$  satisfy the following equations:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \pi \times \omega + R^T M R v \\ \dot{v} = v \times \omega - k_1 h(|\pi|^2) \pi - k_2 sat_{\delta, \Delta}(|v|^2) v \end{cases} \quad (21)$$

Consider the following change of variables:

$$\begin{cases} x = R\pi \\ y = Rv = \xi \end{cases}$$

Then, System (21) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x} = M y \\ \dot{y} = -k_1 h(|x|^2) x - k_2 sat_{\delta, \Delta}(|y|^2) y \end{cases} \quad (22)$$

We now focus on the stability analysis of this system.

We first show that, after some time, the  $y$ -correction term desaturates, i.e.

$$\exists T / \forall t \geq T, \begin{cases} |y| \leq \delta \\ sat_{\delta, \Delta}(|y|^2) = 1 \end{cases}$$

Recall that the two conditions above are equivalent by definition of the *sat* function. Consider the function  $V$  defined by  $V(y) = \frac{1}{2}|y|^2$  and its derivative along the solutions of System (22). We have:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -k_1 h(|x|^2) y^T x - k_2 |y|^2 \text{sat}_{\delta, \Delta}(|y|^2) \\ &\leq k_1 |y| - k_2 |y|^2 \text{sat}_{\delta, \Delta}(|y|^2)\end{aligned}$$

where the second inequality comes from the assumptions on  $h$ . By the definition of a saturation function,

$$|y| \geq \delta \implies |y| \text{sat}_{\delta, \Delta}(|y|^2) \geq \delta \text{sat}_{\delta, \Delta}(\delta^2) \geq \delta$$

Therefore

$$|y| \geq \delta \implies \dot{V} \leq (k_1 - k_2 \delta) |y| \leq (k_1 - k_2 \delta) \sqrt{2V}$$

which is equivalent to

$$V \geq \frac{\delta^2}{2} \implies \dot{V} \leq (k_1 - k_2 \delta) \sqrt{2V}$$

Since  $k_1 - k_2 \delta < 0$  by assumption, we deduce that along any solution of System (22), there exists a time  $T$  such that  $V(y(t)) \leq \delta^2/2$  for  $t \geq T$ . In other words,  $|y(t)| \leq \delta$  for  $t \geq T$ . Then,  $\text{sat}_{\delta, \Delta}(|y|^2) = 1$  and the solution is also solution to the following system:

$$\begin{cases} \dot{x} &= My \\ \dot{y} &= -k_1 h(|x|^2) x - k_2 y \end{cases} \quad (23)$$

Let us consider the candidate Lyapunov function  $V_0$  defined by:

$$\begin{aligned}V_0(\kappa, x, y) &= k_1 \int_0^{|x|^2} h(\tau) d\tau + y^T My \\ &\quad + \frac{2k_1}{k_2} h(|x|^2) x^T M_a y \\ &\quad + \kappa h(|x|^2) x^T y\end{aligned} \quad (24)$$

where  $\kappa$  is a constant positive number to be defined. We show that, for  $\kappa$  small enough,  $V_0$  is indeed a Lyapunov function. We first prove that  $V_0$  is positive definite and proper. Integrating by part and using the fact that  $h'(\tau) \leq 0 \forall \tau$ , we get

$$\begin{aligned}\int_0^{|x|^2} h(\tau) d\tau &= -\int_0^{|x|^2} \tau h'(\tau) d\tau + |x|^2 h(|x|^2) \\ &\geq |x|^2 h(|x|^2)\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}V_0(\kappa, x, y) &\geq k_1 |x|^2 h(|x|^2) + \lambda_{\min}(M_s) |y|^2 \\ &\quad - \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\| + \kappa \right) \sup_{\tau} \sqrt{h(\tau)} \sqrt{h(|x|^2)} |x| |y|\end{aligned}$$

and we deduce that  $V_0$  is positive definite provided that

$$\left[ \left( \|M_a\| \frac{2k_1}{k_2} + \kappa \right) \sup_{\tau} \sqrt{h(\tau)} \right]^2 < 4k_1 \lambda_{\min}(M_s)$$

Since we want this inequality to hold for *some*  $\kappa$  small enough, this condition is equivalent to

$$k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) > k_1 \|M_a\|^2 \sup_{\tau} h(\tau)$$

With  $\|M_a\| \leq \|M\|$ , this condition holds true when the assumptions of Proposition 1 are satisfied. Since  $h$  is strictly positive, this ensures that  $V_0$  is a positive definite function of  $x$  and  $y$ , and  $V_0$  is proper due to the assumption  $\tau h(\tau) \rightarrow$

$+\infty$  as  $\tau \rightarrow +\infty$ . Let us now prove that  $V_0$  is non-increasing along the solutions of System (23). Differentiating  $V_0$  along these solutions yields

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &= -2k_2 y^T M_s y \\ &\quad - 2 \frac{k_1}{k_2} y^T M_a [h(|x|^2) + 2h'(|x|^2) x x^T] M y \\ &\quad - \kappa k_1 h^2(|x|^2) |x|^2 \\ &\quad + \kappa y^T M [h(|x|^2) + 2h'(|x|^2) x x^T] y \\ &\quad - \kappa k_2 h(|x|^2) x^T y\end{aligned}$$

We deduce that

$$\dot{V}_0 \leq -C_1 |y|^2 + C_2 |y| h(|x|^2) |x| - C_3 h^2(|x|^2) |x|^2$$

with:

$$\begin{cases} C &\triangleq \sup_{\tau} (h(\tau) + 2\tau |h'(\tau)|) \\ C_1 &\triangleq 2k_2 \lambda_{\min}(M_s) - \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\| + \kappa \right) \|M\| C \\ C_2 &\triangleq \kappa k_2 \\ C_3 &\triangleq \kappa k_1 \end{cases}$$

We now show that this expression is negative definite for  $\kappa$  small enough. Considering  $k_1, k_2$  chosen, let us first fix an upper bound on  $\kappa$  such that  $C_1 > 0$ . This is possible since, by assumption

$$\lambda := k_2^2 \lambda_{\min}(M_s) - k_1 \|M_a\| \|M\| C > 0$$

Thus, choosing

$$\kappa < \kappa_0 \triangleq \frac{2\lambda}{k_2 \|M\| C}$$

-with the right-hand term being strictly positive- ensures  $C_1 > 0$ . Now, we add a constraint on the choice of  $\kappa$  by enforcing  $C_2^2 < 4C_1 C_3$ . Again, this is always possible since it boils down to forcing

$$\kappa < \kappa_1 \triangleq \frac{2\lambda}{k_2 \|M\| C + \frac{k_2^3}{4k_1}}$$

Moreover, with  $\kappa_1 < \kappa_0$ , both inequalities boil down to  $\kappa < \kappa_1$ . This choice ensures that the derivative of  $V_0$  is negative definite and ends the proof.

#### APPENDIX: PROOF OF THEOREM 1

The proof shows similarities to the previous one although extra steps have to be considered. First, one easily verifies that  $\pi, v, \gamma$ , and  $\eta$  satisfy the following equations:

$$\begin{cases} \dot{\pi} &= \pi \times \omega + R^T M R v \\ \dot{v} &= v \times \omega - k_1 h(|\eta|^2) \eta - k_2 \text{sat}_{\delta, \Delta}(|v|^2) v + \epsilon \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega \\ \dot{\eta} &= \eta \times \omega - k_3 (\eta - \pi) \end{cases} \quad (25)$$

where  $\epsilon = -\bar{\mu}_3 e_3 + \bar{\mu}$ .

Let us first prove that  $\epsilon \rightarrow 0$ . Recall the following lemma shown in [1]:

**Lemma 1** Assume that

- i)  $\bar{\mu} = R^T \mu$  does not vanish,
- ii)  $\dot{\mu}$  does not depend on  $\omega$ ,
- iii)  $\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)| e_3$ .

Let  $k_4$  denote a strictly positive constant and

$$\begin{cases} \omega_1 &= -\frac{k_4|\bar{\mu}|^2}{(|\bar{\mu}|+\bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2}\bar{\mu}^T S(e_1)R^T\dot{\mu} \\ \omega_2 &= \frac{k_4|\bar{\mu}|^2}{(|\bar{\mu}|+\bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2}\bar{\mu}^T S(e_2)R^T\dot{\mu} \end{cases} \quad (26)$$

Then  $\bar{\mu}$  asymptotically converges to  $|\bar{\mu}|e_3$ .

The assumptions being obviously verified in our case, the lemma applies and shows that  $\epsilon \rightarrow 0$ .

We first analyze System (25) with  $\epsilon = 0$ . Consider the following change of variables :

$$\begin{cases} x &= R\pi \\ y &= Rv \\ z &= R\eta \end{cases}$$

System (25) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x} &= My \\ \dot{y} &= -k_1 h(|z|^2)z - k_2 \text{sat}_{\delta,\Delta}(|y|^2)y \\ \dot{z} &= -k_3(z-x) \end{cases} \quad (27)$$

As in the proof of Proposition 1, we show that the  $y$  term desaturates with the same function  $V$  and same argument with  $z$  instead of  $x$  in the  $\dot{y}$  equation. This ensures that for  $t \geq T$ ,  $\text{sat}_{\delta,\Delta}(|y|^2) = 1$  and the solution is also solution to the system without  $y$  saturation, which may be written as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} &= My \\ \dot{y} &= -k_1 h(|x|^2)x - k_2 y \\ &\quad -k_1 [h(|z|^2)z - h(|x|^2)x] \\ \dot{z} - \dot{x} &= -k_3(z-x) - My \end{cases} \quad (28)$$

Note that System (28) is equivalent to System (23) when  $z = x$ . Asymptotic stability of this system can be proved using the following Lyapunov function:

$$V_1(\kappa, x, y, z) = V_0(\kappa, x, y) + (z-x)^2 \quad (29)$$

Due to space limitation, we only provide a sketch of the proof (details are available upon request to the authors). One can show that:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -C_1|y|^2 - C_2|z-x|^2 - C_3h^2(|x|^2)|x|^2 \\ &\quad + C_4|y||z-x| + C_5|y|h(|x|^2)|x| \\ &\quad + C_6|z-x|h(|x|^2)|x| \end{aligned}$$

with:

$$\begin{cases} C &\triangleq \sup_{\tau} (h(\tau) + 2\tau|h'(\tau)|) \\ C_1 &\triangleq 2k_2\lambda_{\min}(M_s) - \left(\frac{2k_1}{k_2}\|M_a\| + \kappa\right)\|M\|C \\ C_2 &\triangleq 2k_3 \\ C_3 &\triangleq \kappa k_1 \\ C_4 &\triangleq 2Ck_1\|M_s\| + 2\|M\| \\ C_5 &\triangleq \kappa k_2 \\ C_6 &\triangleq \left(2C\frac{k_1^2}{k_2}\|M_a\| + \kappa k_1 C\right) \end{cases}$$

Choosing  $\kappa$  small enough and  $k_3$  large enough,  $\dot{V}_1$  can be made negative definite. Finally, when a vanishing term  $\epsilon$  is added to System (28) in the  $\dot{y}$  equation, the desaturation argument still holds since we get:

$$\frac{1}{2}|y|^2 \leq (k_1 - k_2\delta - \epsilon(t))|y|$$

with  $\epsilon(t) \rightarrow 0$  and  $k_1 - k_2\delta < 0$ . Also, to the derivative of  $V_1$  is added the term

$$\left(y^T M + \frac{2k_1}{k_2}h(|x|^2)x^T M_a + \kappa h(|x|^2)x^T\right)\epsilon(t)$$

This term can be bounded in norm by  $c(|y| + h(|x|^2)|x|)|\epsilon(t)|$  with  $c$  some constant. As a result, because of the expression of  $\dot{V}_1$  when  $\epsilon = 0$ , one deduces that  $V_1 \rightarrow 0$  when  $t \rightarrow +\infty$ .

## REFERENCES

- [1] M. Hua, T. Hamel, P. Morin, and C. Samson, "A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to vtol drones," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 54, pp. 1837–1853, 2009.
- [2] L. Weiss, A. Sanderson, and C. Neuman, "Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 404–417, 1987.
- [3] C. Samson, M. Leborgne, and B. Espiau, *Robot Control: The Task-function Approach*, ser. Oxford Engineering. Oxford University Press, 1991, no. 22.
- [4] Y. Fang, D. M. Dawson, W. E. Dixon, and M. S. de Queiroz, "Homography-based visual servoing of wheeled mobile robots," in *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2002, pp. 2866–2871.
- [5] A. Isidori, L. Marconi, and A. Serrani, *Robust autonomous guidance : an internal model approach*, ser. Advances in industrial control. Springer Verlag, 2003.
- [6] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer, "Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to v/stol," *Automatica*, vol. 28, pp. 651–670, 1992.
- [7] J.-M. Pfimlin, P. Souères, and T. Hamel, "Position control of a ducted fan vtol uav in crosswind," *International Journal of Control*, vol. 80, pp. 666–683, 2007.
- [8] A. R. Teel, "Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls," *Systems & Control Letters*, vol. 18, pp. 165–171, 1992.
- [9] N. Metni, T. Hamel, and F. Derkx, "A uav for bridges inspection: Visual servoing control law with orientation limits," in *5th Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles (IAV 04)*, 2004.
- [10] O. Shakernia, Y. Ma, T. Koo, and S. Sastry, "Landing an unmanned air vehicle: Vision based motion estimation and nonlinear control," *Asian Journal of Control*, vol. 1, no. 3, pp. 128–145, 1999.
- [11] D. Suter, T. Hamel, and R. Mahony, "Visual servo control using homography estimation for the stabilization of an x4-flyer," in *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2002.
- [12] F. Le Bras, T. Hamel, R. Mahony, and A. Treil, "Output feedback observation and control for visual servoing of vtol uavs," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 1–23, 2010.
- [13] H. de Plinval, P. Morin, P. Mouyon, and T. Hamel, "Visual servoing for underactuated vtol uavs: a linear, homography-based approach," in *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, 2011, pp. 3004–3010.
- [14] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S. Sastry, *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*. SpringerVerlag, 2003.
- [15] S. Benhimane and E. Malis, "Homography-based 2d visual tracking and servoing," *The International Journal of Robotics Research*, pp. 661–676, 2007.

## **A.5 Article JRNC'13**

# Visual Servoing for Underactuated VTOL UAVs: a Linear, Homography-Based Framework<sup>†</sup>

Henry de Plinval\*, Pascal Morin, Philippe Mouyon, Tarek Hamel

*H. de Plinval and P. Mouyon are with ONERA-The French Aerospace Lab, Toulouse, France, Henry.de\_Plinval@onera.fr, Philippe.Mouyon@onera.fr; P. Morin, is with ISIR-UPMC, Paris, France, morin@isir.upmc.fr, T. Hamel is with I3S-CNRS, Nice-Sophia Antipolis, France, thamel@i3s.unice.fr*

## SUMMARY

The paper concerns the control of Vertical Take Off and Landing (VTOL) Underactuated Aerial Vehicles (UAVs) in hover flight, based on measurements provided by an on-board video camera. The objective is to stabilize the vehicle to the equilibrium pose associated with an image of a planar target, using a minimal sensor suite and poor knowledge of the environment. By using the homography matrix computed from the camera measurements of the target, stabilizing feedback laws are derived based on the visual data and gyrometer measurements only. Explicit stability conditions on the control parameters are provided, showing that a proper tuning of the control parameters ensures a large robustness margin with only planar target and visibility assumptions, while the target size and orientation, the UAV position, linear velocity and orientation are unknown. Additional issues, such as the use of accelerometers in order to improve the UAV's positioning in the case of unmodeled dynamics (like wind), are also considered. Copyright © 2012 John Wiley & Sons, Ltd.

Received . . .

**KEY WORDS:** Visual Servoing; Underactuated Vertical Take-Off and Landing UAV; Robustness; Control Design

## 1. INTRODUCTION

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) can be used for many surveillance and monitoring applications, both indoor and outdoor environment. Their effectiveness relies in the first place on the use of embarked sensors that can provide information on the vehicle's *pose* (i.e. position and orientation). In teleoperated modes, the human operator can compensate for the lack of some pose information (like, e.g., the vehicle's position). For fully autonomous control modes, however, information on both position and orientation is necessary. It is well known that pose estimation is a challenging problem for UAVs, and especially for VTOLs (Vertical Take-Off and Landing vehicles). This is due to several reasons, among which, *i*) the absence of sensors that can provide a direct measure of the 3D-orientation, *ii*) the difficulty to obtain precise and high-rate position measurements via GPS sensors, *iii*) the impossibility to use these sensors in some environments (like, e.g., urban canyons). Thus, while interesting results have been obtained with Inertial Measurement Unit (IMU)

\*Correspondence to: Journals Production Department, John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, UK.

<sup>†</sup>Please ensure that you use the most up to date class file, available from the RNC Home Page at <http://www3.interscience.wiley.com/journal/5510/home>

[18], or GPS-aided IMU (see, e.g., [21, 13] for recent results), other sensors are needed to improve UAV's effectiveness, especially those providing information about UAV's local environment. One of the most promising alternatives is vision sensors. Cameras provide a rich information about the environment. They have been used extensively for ground robotics applications. Over the last ten years, vision-based control solutions have been developed for aerial vehicles. Regulation of a mechanical system based on visual features as feedback is known as Visual Servo Control [9]. There are two main approaches in visual servo control [5, 6]: Image-Based Visual Servoing (IBVS), and Position-Based Visual Servoing (PBVS), depending upon whether the controller is designed to directly act on the visual information (IBVS) or whether the visual information is first used in the pose reconstruction (PBVS). The latter has been successfully implemented on a number of aerial vehicles [25, 26, 1, 23]. It requires, however, an accurate geometric model of the visual target along with good calibration of the camera. An IBVS scheme was first presented in [12] for underactuated systems. The dynamics of features in image space were formulated in terms of their spherical projections to preserve the dynamic structure of the system and used as direct inputs to the control algorithm. The controller was designed to stabilize the dynamics of the image features. Extensions of this work have been recently proposed and successfully implemented, especially to improve the conditioning of the Jacobian matrix [11] or to overcome the need for a velocity sensor, using the measurement of the optical flow [16]. These approaches do not require accurate geometric target models or well calibrated cameras, but they lead to complex nonlinear control problems due to the appearance of the image depth as an unknown scale factor into the system dynamics. A comparison of different IBVS control schemes for VTOL UAVs can be found in [4]. When the target is planar, an alternative approach is the Homography-Based Visual Servoing (HBVS), originally developed for robot manipulators or more general fully-actuated systems [20, 3]. It consists in a combination of partially reconstructed Euclidean information and 2D image-space information in the control design, and has been shown to have many practical advantages. In particular, an accurate model of the target is not needed. For underactuated vehicles, HBVS has been exploited in different scenarios. In [26] it has been used to perform a landing manoeuvre using a PBVS scheme and in [27] (and subsequently in [24], [7]) in a  $2\frac{1}{2}D$  visual servoing formulation. It is important to remark that in these works on HBVS of underactuated vehicles, measurements of both the rotation matrix and linear velocities are assumed to be available via complementary sensors. Note that HBVS has also been used recently for landing of fixed wing aircrafts [15, 10].

The main contribution of this paper is to show that the control of VTOL UAVs in hover flight can be achieved based on measurements provided by a single camera and gyrometers only, and without strong knowledge about the considered planar target. In particular, the target size and the target normal are considered unknown. The proposed solution uses the homography matrix associated with the camera's observation of the target, but no other pose information is used in the control design. There are several challenges associated with this problem. First, since we do not assume any information on the target (like, e.g., size or inclination), the vehicle's pose cannot be extracted from the homography measure. In addition, unlike many works on the subject, we do not assume that the vehicle's orientation can be reconstructed. In fact, such a reconstruction is difficult in practice and in particular, the use of accelerometers to recover the system's attitude remains controversial [22]. Then, we do not have any sensor that provides linear velocity measurements either. Finally, the systems here considered are *underactuated* (i.e. the number of independent force and torque controls is strictly smaller than the number of degrees of freedom). The approach builds on a previous result by Benhimane and Malis [3] for the control of robotic manipulators, based on a *kinematic* and *holonomic* model. The fact that *dynamical* models of *underactuated* vehicles are considered here makes the problem significantly harder. Note that a preliminary version of this paper was presented in [8]. With respect to that work, the present paper contains several extensions. First, the solution proposed in [8] did not address the case of a vertical target. That result is here extended in order to include this case. Then, the assumption according to which the camera's optical axis is aligned with the vehicle's thrust direction is relaxed: no assumption on the camera's orientation (except for the natural visibility assumption of the target) is needed anymore. We also investigate the use

of accelerometer measurements to improve the UAV's positioning in the presence of unmodeled dynamics (like wind). Finally, proofs of the proposed results are provided.

The paper is organized as follows. Section 2 reviews some technical background and provides a precise description of the addressed problem. Section 3 contains the main results of the paper: stabilizing control laws computed from homography measurements are proposed, together with explicit stability conditions. These results are complemented in Section 4 in two ways. Firstly, the use of accelerometers to improve the positioning in the presence of unmodeled dynamics is addressed. Secondly, a gain-tuning strategy that allows to obtain good performance in a large operating domain is proposed. Simulation results validating the control approach are presented in Section 5. The paper ends with concluding remarks.

## 2. PRELIMINARY BACKGROUND

### 2.1. Problem statement

The problem addressed in this paper (see Fig. 1 and 2 below for illustration and notation) corresponds to a typical scenario for UAVs. The vehicle is equipped with a camera. A reference image of a planar target  $\mathcal{T}$  is taken at some desired pose (i.e. location), represented by the reference frame  $\mathcal{R}^*$ . Based on this reference image and the current image, the objective is to design feedback laws that stabilize the vehicle at the desired pose.

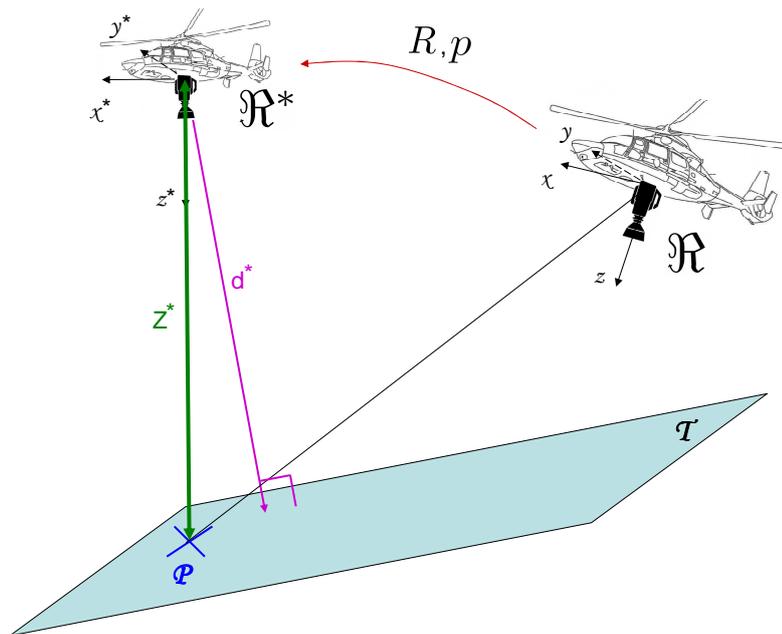


Figure 1. Problem scheme: stabilization w.r.t. a ground target

Except for the planarity assumption no other information on the target, like geometry or orientation, is available. In particular, the target's normal is unknown. The distance to the target at the desired pose is also unknown, although a (very rough) lowerbound on this distance is needed to guarantee stability. We shall assume, however, that the target remains in the field of view of the camera along the trajectory. This assumption is reasonable in the present case since the addressed stabilization problem (and stabilization result) is essentially local.

Since the systems here considered are *underactuated*, we have to assume that the desired pose is an equilibrium of the vehicle. Otherwise the problem of asymptotic stabilization cannot be solved. For example, in the case of an helicopter, neglecting the lateral force due to the anti-torque rotor,

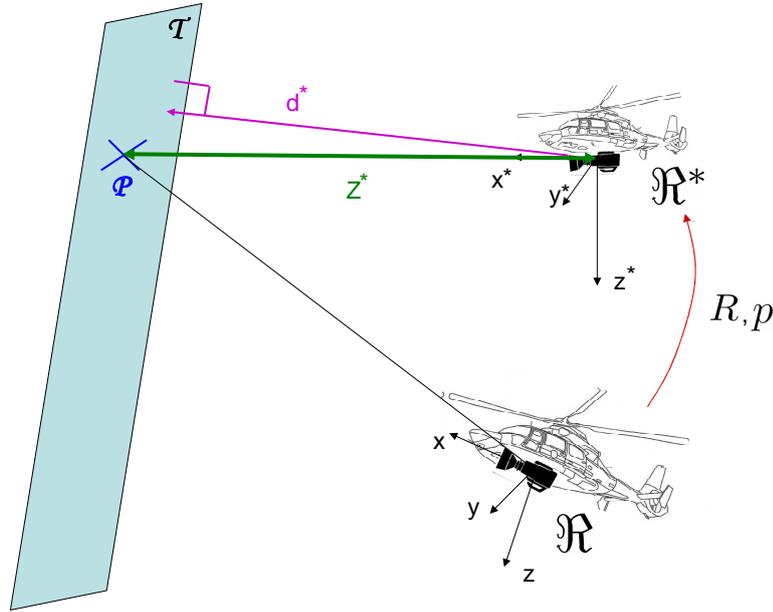


Figure 2. Problem scheme: stabilization w.r.t. a frontal target

stabilization of a desired pose requires that the rotor thrust direction is vertical at this pose (in the absence of wind), so as to compensate gravity without inducing lateral motion. This fixes two rotational degrees of freedom.

## 2.2. Dynamics of thrust-propelled underactuated vehicles

The proposed approach applies to the class of underactuated "thrust-propelled" VTOL vehicles [14]. More precisely, we consider rigid bodies with one force control in a body-fixed direction and full torque actuation. Typical examples are given by helicopters, ducted fans, quadrotors, etc. To comply with the assumption that the reference pose is an equilibrium for the vehicle, it is assumed that the thrust direction at the reference pose is aligned with the vertical basis vector of the reference frame  $\mathcal{R}^*$ . The dynamical equations are then given by

$$\begin{cases} \dot{p} &= Rv \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ m\dot{v} &= -mS(\omega)v - Tb_3 + m\gamma \\ J\dot{\omega} &= -S(\omega)J\omega + \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

with  $p$  the position vector of the vehicle's center of mass, expressed in the reference frame,  $R$  the rotation matrix from the current (i.e. body) frame to the reference frame,  $v$  the linear velocity vector with respect to (w.r.t.) the reference frame expressed in the current frame,  $\omega$  the angular velocity vector expressed in the current frame,  $S(\cdot)$  the matrix-valued function associated with the cross product, i.e.  $S(x)y = x \times y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ ,  $m$  the mass,  $T$  the thrust input,  $b_3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $J$  the inertia matrix,  $\Gamma$  the torque vector, and  $\gamma = gR^T b_3$  the projection of the gravity vector in the current frame with  $g$  the gravity constant.

The first and second equations of System (1) correspond to the kinematics, while the third and fourth account for the dynamics. The objective is to asymptotically stabilize the origin  $p = 0$ ,  $R = I_3$ ,  $v = 0$ ,  $\omega = 0$ , with  $I_3$  the  $3 \times 3$  identity matrix, from visual measurements of a reference image  $\mathcal{I}^*$  (taken at  $\mathcal{R}^*$ ) and the current image  $\mathcal{I}$  (taken at  $\mathcal{R}$ ) of the planar target  $\mathcal{T}$ . Note in particular that neither  $p$  nor  $R$  are directly measured. Visual measurements only provide a partial and coupled

measurement of these quantities (see subsection below). The linear velocity vector  $v$  is not measured either. On the other hand, we assume that the angular velocity  $\omega$  is measured via gyrometers. We review below some well known facts about visual sensors and homography matrices.

### 2.3. Visual observation of planar scenes and homography matrices

Let us first assume that the camera and UAV frame coincide (this assumption is relaxed in the next section). The following notation applies to the planar scene  $\mathcal{T}$  (see Fig. 1 and 2)

- $\chi^*$ ,  $\chi$  are the coordinates of a point of interest  $\mathcal{P}$  lying on the planar target, expressed in the reference and current frames respectively.
- $n^*$  is the unit vector defining the normal to the planar object, expressed in the reference frame;  $d^*$  is the distance between this plane and the camera optical center.  $Z^*$  is the third coordinate of point  $\mathcal{P}$  in the reference frame.

A useful tool in visual servoing is the so-called homography matrix  $\mathbf{H}$  which embeds all information regarding the transformation between two images of the same planar object of interest (see, e.g., [3, 17] for more details). An important feature of this matrix is that it can be estimated from these images without any assumption on the camera pose.  $\mathbf{H}$  is defined as:

$$\mathbf{H} \triangleq K \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right) K^{-1} \quad (2)$$

with  $K$  the camera intrinsic parameters matrix. The matrix  $\mathbf{H}$  relates the normalized coordinates of a point as seen from the reference and current pose. Indeed, the following relationship holds:

$$\chi = R^T \chi^* - R^T p \quad (3)$$

Defining the pixel coordinates —which embed the camera calibration error—  $\mu = K \left( \frac{1}{Z} \chi \right)$  and  $\mu^* = K \left( \frac{1}{Z^*} \chi^* \right)$  and noticing that  $n^{*T} \chi^* = d^*$ , one gets:

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z^*} \mu &= K \left( R^T \frac{\chi^*}{Z^*} - R^T \frac{p}{Z^*} \frac{1}{d^*} n^{*T} \chi^* \right) \\ &= K \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right) K^{-1} \mu^* = \mathbf{H} \mu^* \end{aligned} \quad (4)$$

The scalar  $\frac{Z}{Z^*}$  is the —unknown— ratio of the third coordinates in both frames. This relationship suggests that  $\mathbf{H}$  can be estimated only up to an unknown scalar factor. Several algorithms have been proposed for the estimation of the Homography matrix (see, e.g., [3, 17]). Assuming that  $K$  is known, one can compute an estimate of the matrix

$$H_\eta = \eta \left( R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \right)$$

with  $\eta$  some scalar factor. One can show (see, e.g., [17, Pg. 135]) that  $\eta$  corresponds to the mean singular value of  $H_\eta$ . Furthermore, an explicit formula for the calculation of  $\eta$  is proposed in [19, App. B]. Therefore, we assume from now on the knowledge of

$$H = R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \quad (5)$$

The time-derivative of  $H$  is easily deduced from (1):

$$\dot{H} = -S(\omega)H - \frac{1}{d^*} v n^{*T}$$

In [3],  $H$  was used to define an error vector and an associated feedback law, based on a kinematic control model. More precisely, the following result was shown.

*Proposition 2.1*

[3, Sec. 4] Assume that the camera optical axis corresponds to the  $z$ -axis of the body frame. Let  $\chi^*$  denote the coordinates of a point  $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ , expressed in the reference frame  $\mathfrak{R}^*$ , and  $m^* = \frac{1}{Z^*} \chi^*$  the associated normalized coordinates. Let  $e \in \mathbb{R}^6$  denote the error vector defined by

$$e = \begin{pmatrix} e_p \\ e_\Theta \end{pmatrix}, \quad e_p = (I - H)m^*, \quad e_\Theta = \text{vex}(H^T - H) \quad (6)$$

with  $\text{vex}$  the inverse operator of any valued skew matrix:  $\text{vex}(S(x)) = x$  for any  $x \in \mathbb{R}^3$ . Then,

1.  $(p, R) \mapsto e$  defines a local diffeomorphism around  $(p, R) = (0, I_3)$ . In particular,  $e = 0$  if and only if  $(p, R) = (0, I_3)$ .
2. The kinematic control law

$$v = -\lambda_p e_p, \quad \omega = -\lambda_\Theta e_\Theta \quad (7)$$

with  $\lambda_p, \lambda_\Theta > 0$  makes  $(p, R) = (0, I_3)$  locally asymptotically stable.  $\triangle$

*Remark 2.2*

1) In [3],  $e_p$  and  $e_\Theta$  are defined with an opposite sign, i.e.  $e_p = (H - I)m^*$ ,  $e_\Theta = \text{vex}(H - H^T)$ . The present choice is better adapted to the definition of  $v$  and  $\omega$  in (1). 2) There is no constraint on  $m^*$  except that it must be a projective vector, i.e.,  $m_3^* = 1$ . Note, however, that there is an implicit constraint on the target's orientation, i.e.  $n_3^* > 0$ , corresponding to the fact that the optical (semi)-axis of the camera intersects the planar target.  $\triangle$

*2.4. General camera configuration*

When the camera and body frames do not coincide, the expression of the homography matrix in terms of  $p$  and  $R$  is different. Let us denote by  $\chi_c^*$  (resp.  $\chi_c$ ) the coordinates of  $P$  in the reference (resp. current) camera frame. One has

$$\begin{cases} \chi_c &= R_c \chi + p_c \\ \chi_c^* &= R_c \chi^* + p_c \end{cases} \quad (8)$$

with  $R_c$  and  $p_c$  the rotation matrix and translation vector from body to camera frames. In accordance with a standard convention in visual servoing, we assume throughout the paper that the optical axis of the camera corresponds to the  $z$ -axis of the camera frame. It follows from (8) that

$$\begin{aligned} \chi_c &= R_c \chi + p_c \\ &= R_c [R^T \chi^* - R^T p] + p_c \\ &= R_c [R^T (R_c^T \chi_c^* - R_c^T p_c) - R^T p] + p_c \\ &= R_c R^T R_c^T \chi_c^* - [R_c R^T p + (R_c R^T R_c^T - I_3) p_c] \end{aligned} \quad (9)$$

The homography matrix is thus given by (compare with (5))

$$H_c = R_c R^T R_c^T - \frac{1}{d^*} [R_c R^T p + (R_c R^T R_c^T - I_3) p_c] n_c^{*T} \quad (10)$$

with  $n_c^* = R_c n^*$  the expression of the normal to the target in the reference camera frame. Approximation of  $H_c$  around the identity matrix yields

$$H_c = I - S(R_c \Theta) - \frac{1}{d^*} R_c (p + S(R_c^T p_c) \Theta) n_c^{*T} + O^2(p, \Theta) \quad (11)$$

with  $\Theta$  any parametrization of the rotation matrix  $R$  such that  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  around  $R = I_3$  (e.g., Euler angles).

### 3. MAIN RESULTS

The results proposed in this section can be viewed as an extension of Proposition 2.1 to System (1). This extension raises several difficulties. First, the control input is no longer the 6d-vector of velocity variables  $(v, \omega)$ . It is the 4d-vector composed of the force input  $T$  and torque vector  $\Gamma$ . Then, one has to account for the system's underactuation, and for the fact that the system's dynamics is not symmetric in all dimensions of the state space: both underactuation and gravity induce differences between vertical versus horizontal dynamics. Such differences are not present when the control design is based on a (holonomic) kinematic model. Finally, we do not assume that measurements of the linear velocity vector  $v$  are available.

First, a new error vector which is instrumental in the design of stabilizing feedback laws is defined.

#### Proposition 3.1

Let  $b_1, b_2, b_3$  be the canonical vectors of  $\mathbb{R}^3$ , and  $m_{c,k}^* = R_c b_k$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Let  $n^* = (n_1^*, n_2^*, n_3^*)^T$  and  $I_3$  the identity matrix of size  $3 \times 3$ . Let (compare with (6))

$$e^k = \begin{pmatrix} e_p^k \\ e_\Theta^k \end{pmatrix}, \quad e_p^k = (I - H_c)m_{c,k}^*, \quad e_\Theta^k = \text{vex}(H_c^T - H_c)$$

and

$$\bar{e}^k = AMe^k, \quad A = \begin{pmatrix} R_c^T & 0_3 \\ 0_3 & R_c^T \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2I_3 & S(m_{c,k}^*) \\ -S(m_{c,k}^*) & I_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Let  $\Theta \in \mathbb{R}^3$  denote any parametrization of the rotation matrix  $R$  such that  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  around  $R = I_3$  (e.g., Euler angles). Then,

1. In a neighborhood of  $(p, R) = (0, I_3)$ ,

$$\bar{e}^k = L \begin{pmatrix} p + S(R_c^T p_c)\Theta \\ \Theta \end{pmatrix} + O^2(p, \Theta), \quad L = \begin{pmatrix} L_p & 0_3 \\ L_{\Theta p} & L_\Theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

with

$$L_p = \frac{1}{d^*}(n_k^* I_3 + n_k^* b_k^T), \quad L_\Theta = 2I_3 + S(b_k)^2, \quad L_{\Theta p} = \frac{1}{d^*}S(n^* - n_k^* b_k) \quad (14)$$

and  $O^2$  denoting terms of order two at least.

2. If  $n_k^* \neq 0$ , then  $(p, R) \mapsto \bar{e}^k$  defines a local diffeomorphism around  $(p, R) = (0, I_3)$ . In particular,  $\bar{e}^k = 0$  if and only if  $(p, R) = (0, I_3)$ .  $\triangle$

The proof is given in Appendix.

#### Remark 3.2

1) Since the projective vector  $m_{c,k}^*$  is user-defined, the choice  $m_{c,k}^* = R_c b_k$  can always be made. If  $m_{c,k}^*$  is interpreted as a pointing direction in the camera reference frame, then this direction corresponds to the  $b_k$  direction in the inertial frame: it is thus an invariant whatever the camera orientation in body frame. 2) Note that  $L$  can be viewed as the linear approximation at the origin of the interaction matrix associated with  $\bar{e}^k$ .  $\triangle$

Assume that  $p_c = 0$ . Then, Eq. (13) shows the rationale behind the definition of  $\bar{e}^k$ : at first order, components  $\bar{e}_1^k, \bar{e}_2^k, \bar{e}_3^k$  contain information on the translation vector  $p$  only, while components  $\bar{e}_4^k, \bar{e}_5^k, \bar{e}_6^k$  contain decoupled information on the orientation (i.e.  $L_\Theta$  is diagonal), corrupted by components of the translation vector. This cascade structure is instrumental in the forthcoming control design and analysis. Ensuring that  $p_c = 0$  is not realistic in practice, but fixing the camera close to the center of mass is often possible. The design of exponentially stabilizing feedback laws

for  $p_c = 0$  then ensures exponential stability provided that  $p_c$  is small enough. Therefore, we assume from now on the following.

**Assumption:**  $p_c = 0$ .

The control approach relies on the local diffeomorphism property between  $\bar{e}^k$  and the pose vector. As shown by Proposition 3.1, however, this property is ensured only if  $n_k^* \neq 0$ . For example, when  $k = 3$  the property is ensured provided that the target is not vertical. Thus, the choice of the value of  $k$  has to be made from a priori information on the target. Such information is usually clear from the application context and the camera orientation in body frame. For example, having the camera pointing downward (in body frame) essentially rules out the stabilization w.r.t. a vertical target, while having the camera pointing forward rules out the case of a horizontal target. For completeness, we address below the two main cases of interest.

### 3.1. The case of a ground target

The following result is obtained.

#### Theorem 3.3

Assume that  $n_3^* > 0$  and  $(R_c n^*)_3 > 0$ . Let  $\bar{e}_p \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\bar{e}_\Theta \in \mathbb{R}^3$ ) the first (resp. last) three components of  $\bar{e}$ , i.e.  $\bar{e} = \bar{e}^3 = (\bar{e}_p^T, \bar{e}_\Theta^T)^T$ . Let  $\bar{e} = \bar{e}^3$  and define the control law

$$\begin{cases} T &= m(g + k_1 \bar{e}_{p_3} + k_2 \nu_3) \\ \Gamma &= -JK_3(\omega - \omega^d) \end{cases} \quad (15)$$

with

$$\begin{cases} \omega^d &= -\frac{K_4}{g}(g\bar{e}_\Theta + b_3 \times \gamma^d) \\ \gamma^d &= -K_5(\bar{e}_p + K_6 \nu) \end{cases} \quad (16)$$

$\nu$  the variable defined by the dynamic equation

$$\dot{\nu} = -K_7 \nu - \bar{e}_p \quad (17)$$

Then,

1. Given any  $c_M^* > 0$ , there exist diagonal gain matrices  $K_i = \text{Diag}(k_i^j)$   $i = 3, \dots, 7; j = 1, 2, 3$  and scalar gains  $k_1, k_2$ , such that the control law (15) makes the equilibrium  $(p, R, v, \omega, \nu) = (0, I_3, 0, 0, 0)$  of the closed-loop System (1), (15)-(17) locally exponentially stable provided that

$$\frac{n_3^*}{d^*} \in (0, c_M^*] \quad (18)$$

2. If the diagonal gain matrices  $K_i$  and scalar gains  $k_1, k_2$  make the closed-loop system locally exponentially stable for  $\frac{n_3^*}{d^*} = c_M^*$ , then local exponential stability is guaranteed for any value of  $\frac{n_3^*}{d^*} \in (0, c_M^*]$ .

△

The proof is given in the Appendix.

Let us comment on this result.

1. The assumption  $n_3^* > 0$  means that the target is not vertical and that it is located "below" the UAV (see Figure 1 for illustration), with the camera thus pointing downwards. Since the camera optical axis may differ from the  $z$ -axis of the body frame, we further impose the visibility assumption of the target at the reference pose:  $(R_c n^*)_3 > 0$ . The case of a ground target located above the UAV, with a camera thus pointing upwards (i.e.,  $n_3^* < 0$ ), can be addressed similarly, by applying the above control law with  $m_{c,k}^* = m_{c,3}^*$  replaced by  $-m_{c,k}^*$  in the definition of  $\bar{e} = \bar{e}^3$ . This is also equivalent to multiplying the first three components of  $\bar{e}$  by  $-1$ .

2. The variable  $\nu$  copes with the lack of measurements of  $\dot{e}_p$ .
3. Since  $n_3^* \leq 1$ , (18) is satisfied if  $d^* \geq 1/c_M^*$ . Thus, Property 1) ensures that stabilizing control gains can be found given any lower bound on the distance between the reference pose and the observed planar target. This is a weak requirement from an application point of view, all the more that this sufficient condition does not involve the (unknown) normal vector  $n^*$ . As for Property 2), it implies that finding stabilizing control gains for any  $\frac{n_3^*}{d^*} \in (0, c_M^*]$  boils down to finding stabilizing control gains for  $\frac{n_3^*}{d^*} = c_M^*$ . This latter task can be easily achieved with classical linear control tools. In particular, by using the Routh-Hurwitz criterion, local exponential stability for  $\frac{n_3^*}{d^*} = c_M^*$  is ensured when the following inequalities are satisfied (see the proof of Theorem 3.3 for details):

$$k_1, k_2, k_i^j > 0, \quad \forall (i, j) \notin \{(5, 3), (6, 3)\} \quad (19)$$

and

$$k_2 < k_1 k_7^3 \quad (20)$$

and

$$\begin{cases} 0 < a_0^1 \\ c_M^* a_1^1 a_4^1 (a_4^1 - a_0^1) < a_2^1 D_2^1 \\ c_M^* a_1^1 (a_4^1 - a_0^1)^2 < (a_2^1 - a_0^1 a_3^1) D_2^1 \end{cases} \quad (21)$$

and

$$\begin{cases} 0 < a_0^2 \\ c_M^* a_1^2 a_4^2 (a_4^2 - a_0^2) < a_2^2 D_2^2 \\ c_M^* a_1^2 (a_4^2 - a_0^2)^2 < (a_2^2 - a_0^2 a_3^2) D_2^2 \end{cases} \quad (22)$$

with

$$\begin{aligned} a_0^1 &= k_7^1 - k_6^1, a_1^1 = k_3^2 k_4^2 k_5^1, a_2^1 = k_3^2 k_4^2 k_7^1, \\ a_3^1 &= k_3^2 (k_4^2 + k_7^1), a_4^1 = k_3^2 + k_7^1, D_2^1 = a_4^1 a_3^1 - a_2^1 \end{aligned} \quad (23)$$

and

$$\begin{aligned} a_0^2 &= k_7^2 - k_6^2, a_1^2 = k_3^1 k_4^1 k_5^2, a_2^2 = k_3^1 k_4^1 k_7^2, \\ a_3^2 &= k_3^1 (k_4^1 + k_7^2), a_4^2 = k_3^1 + k_7^2, D_2^2 = a_4^2 a_3^2 - a_2^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Let us show the existence of control gains that satisfy the above conditions. First, note that there is no condition on  $k_5^3$  and  $k_6^3$ . This is due to the fact that, by (16), these gains do not affect  $\omega^d$ . Condition (19) is readily satisfied. Control gains  $k_1, k_2, k_7^3$  are only involved in (20), so that they can be chosen so as to satisfy this inequality. Let us consider (21). First, this set of conditions involves the control gains  $k_3^2, k_4^2, k_5^1, k_6^1$  and  $k_7^1$  only. There are different ways to find values of these gains ensuring (21). We propose next a possibility. Choose any  $k_5^1 > 0$  and any  $k_6^1, k_7^1 > 0$  such that the first inequality in (21) is satisfied. Now set  $k_3^2 = k_4^2 = s$ . Consider the second inequality in (21). The left-hand side is a polynomial in  $s$  with  $c_M^* k_5^1 s^4$  as monomial of highest degree. The right-hand side is also a polynomial in  $s$  with  $k_7^1 s^5$  as monomial of highest degree. Choosing  $s$  large enough ensures that this inequality is satisfied. The same argument ensures that the last inequality in (21) is satisfied for  $s$  large enough. Choosing  $k_3^1, k_4^1, k_5^2, k_6^2$  and  $k_7^2$  in order to satisfy (22) follows the same procedure.

4. Let us finally remark that, given a family of control gains, Conditions (19)–(22) allow to determine the maximum value of  $c_M^*$  for which exponential stability is obtained.

### 3.2. The case of a frontal target

The previous result does not address the case of a vertical target (i.e.  $n_3^* = 0$ ). This case is addressed by the following result, which is potentially applicable to any non-horizontal target. The control design uses another error function  $\bar{e}$ . Without loss of generality we assume that  $n_1^* > 0$  (e.g., the camera is pointing in a direction close to the  $b_1$  inertial axis at the reference location).

#### Theorem 3.4

Assume that  $n_1^* > 0$  and  $(R_c n^*)_3 > 0$ . Consider the control law (15)–(17) with  $\bar{e} = \bar{e}^1$  and  $\bar{e}_p \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\bar{e}_\Theta \in \mathbb{R}^3$ ) denoting the first (resp. last) three components of  $\bar{e}$ , i.e.  $\bar{e} = \bar{e}^1 = (\bar{e}_p^T, \bar{e}_\Theta^T)^T$ . Then,

1. Given any  $c_M^* > 0$ ,  $\delta \geq 0$ , there exist diagonal gain matrices  $K_i = \text{Diag}(k_i^j)$   $i = 3, \dots, 7$ ;  $j = 1, 2, 3$  and scalar gains  $k_1, k_2$ , such that the control law (15) makes the equilibrium  $(p, R, v, \omega, \nu) = (0, I_3, 0, 0, 0)$  of the closed-loop System (1), (15)-(17) locally exponentially stable provided that

$$\frac{1}{d^*} \in (0, c_M^*] \quad \text{and} \quad \frac{|n_3^*|}{|n_1^*|} \leq \delta \quad (25)$$

2. If the diagonal gain matrices  $K_i$  and scalar gains  $k_1, k_2$  make the closed-loop system locally exponentially stable for  $\frac{1}{d^*} = c_M^*$  and any  $n^*$  satisfying (25), then local exponential stability is guaranteed for any value of  $\frac{1}{d^*} \in (0, c_M^*]$ .

△

The proof is given in the Appendix.

Let us comment on this result.

1. As in the case of Theorem 3.3, extension to the case  $n_1^* < 0$  can be addressed by applying the control law with  $m_{c,k}^* = m_{c,1}^*$  replaced by  $-m_{c,k}^*$  in the definition of  $\bar{e} = \bar{e}_1$ . This is also equivalent to multiplying the first three components of  $\bar{e}$  by  $-1$ .
2. The main difference between Theorems 3.3 and 3.4 lies in conditions (18) and (25). Clearly, the latter is more demanding than the former since it cannot be reduced to a condition on  $d^*$  only. When  $n_3^* = 0$  (purely vertical target), however, these conditions are essentially the same.
3. Stability conditions on the control gains are similar to those of Theorem 3.3. More precisely, sufficient conditions of stability for  $c^* = c_M^*$  are still given by (19)–(22) with

$$\begin{aligned} a_0^1 &= k_7^1 - \frac{k_6^1}{1 - g \frac{n_3^*}{2k_5^1 n_1^*}}, a_1^1 = 2k_3^2 k_4^2 k_5^1 \left( 1 - g \frac{n_3^*}{2k_5^1 n_1^*} \right), a_2^1 = k_3^2 k_4^2 k_7^1, \\ a_3^1 &= k_3^2 (k_4^2 + k_7^1), a_4^1 = k_3^2 + k_7^1, D_2^1 = a_4^1 a_3^1 - a_2^1 \end{aligned} \quad (26)$$

and

$$\begin{aligned} a_0^2 &= k_7^2 - k_6^2, a_1^2 = 2k_3^1 k_4^1 k_5^2, a_2^2 = 4k_3^1 k_4^1 k_7^2, \\ a_3^2 &= 4k_3^1 (k_4^1 + k_7^2), a_4^2 = 4k_3^1 + k_7^2, D_2^2 = a_4^2 a_3^2 - a_2^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Existence of control gains that satisfy the above conditions for any  $n^*$  satisfying (25) can be proved as in the case of Theorem 3.3. Note in particular that given the upper-bound in (25) on the ratio  $n_3^*/n_1^*$ , the gain  $k_5^1$  can be chosen so that  $0 < \tau_1 \leq 1 - g \frac{n_3^*}{2k_5^1 n_1^*} \leq \tau_2$  for some constant scalars  $\tau_1, \tau_2$ . Then,  $k_6^1, k_7^1$  can be chosen so that the first inequality in (21) holds. The rest of the gain selection follows as in the case of Theorem 3.3.

## 4. REFINEMENTS

Theorem 3.3 provides the theoretical background to stabilize an underactuated VTOL UAV based on videocamera and gyroscope measurements. In practice, however, other issues need to be addressed in the perspective of experiments. One of these issues concerns unmodeled dynamics (like wind). Also, considering stability requirement only is not realistic, since very poor performance would lead to unacceptable behaviour, including possible escape from the stability domain. Thus, gain tuning must be achieved in order to include performance considerations. These two issues are considered next.

### 4.1. Unmodeled dynamics rejection

We consider in this section the presence of unmodeled dynamics acting on the system (like, e.g., wind). Different solutions can be proposed to address this issue, starting with the use of integral correction terms (see, e.g., [14] for more details in a similar context). Due to the simple relation between  $\bar{e}_p$  given by (12) and  $p$ , including integral correction terms in the control law of Theorem

3.3 is relatively straightforward. Tuning of the control gains in order to obtain good performance is more difficult, especially for the horizontal dynamics because the distance and normal to the target are unknown. For these dynamics we propose below another approach using accelerometers. We do not provide a complete stability analysis of the proposed solution but simulation results presented further illustrate the approach.

Consider the following model (compare with eq. (1)):

$$\begin{cases} \dot{p} &= Rv \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ m\dot{v} &= -mS(\omega)v - Tb_3 + m\gamma + R^T F_w \\ J\dot{\omega} &= -S(\omega)J\omega + \Gamma + \tau_w b_3 \end{cases} \quad (28)$$

where  $F_w$  corresponds to unmodeled translation dynamics, and  $\tau_w$  to unmodeled yaw dynamics. Both quantities are assumed to be constant. For convenience, we introduce  $a_w = \frac{F_w}{m}$ . Recall that accelerometers measure the following quantity ([22]):

$$y_{acc} = R^T \ddot{p} - \gamma = -ub_3 + R^T a_w \quad (29)$$

When  $a_{w,1} \neq 0$  or  $a_{w,2} \neq 0$ ,  $R = I_3$  is no longer the equilibrium orientation matrix. We do assume, however, that the new equilibrium orientation matrix is close to the identity matrix so that the approximation  $R^T a_w \approx a_w$  is valid. We are aware that this approximation is restrictive but it is justified in the case of "moderate" perturbations. Strong perturbations introduce couplings in the system dynamics which remain to be properly analyzed.

The following modification of the control law (15)–(16) is proposed:

$$\begin{cases} T &= m(g + k_0 I_{e_3} + k_1 \bar{e}_3 + k_2 \nu_3) \\ \Gamma &= -JK_3(\omega - \omega^d) \end{cases} \quad (30)$$

with

$$\begin{cases} \omega^d &= -\frac{K_4}{g}(g\bar{e}_\Theta + b_3 \wedge (\gamma^d - y_{acc}) + k_8 I_{e_6} b_3) \\ \gamma^d &= -K_5(\bar{e}_p + K_6 \nu) \\ \dot{I}_{e_3} &= \bar{e}_3 \\ \dot{I}_{e_6} &= \bar{e}_6 \end{cases} \quad (31)$$

The idea is to counteract the vertical and yaw unmodelled dynamics by integral terms ( $I_{e_3}$  and  $I_{e_6}$ ), and the horizontal unmodeled dynamics by the accelerometers measurements. Let us briefly analyze the linearized closed-loop dynamics for the control law of Theorem 3.3. For the vertical dynamics one obtains:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_3 &= 2c^*(g + a_{w3} - g - k_0 I_{e_3} - k_1 \bar{e}_3 - k_2 \nu_3) \\ &= -2c^*(k_0 I_{e_3} + k_1 \bar{e}_3 + k_2 \nu_3 - (R^T a_w)_3) \\ \dot{\nu}_3 &= -k_7^3 \nu_3 - \bar{e}_3 \end{cases} \quad (32)$$

with  $c^* = \frac{n_3^*}{d^*}$ . This dynamics is almost the same as in the case of the original control law (see Eq. (43) in the appendix), except for the presence of the projection  $(R^T a_w)_3$  and the integral correction term. Also, the characteristic polynomial –under the simplification  $R^T a_w = a_w$  and  $a_w$  constant – is given by:

$$\lambda^4 + k_7^3 \lambda^3 + 2c^* [k_1 \lambda^2 + (k_0 + k_1 k_7^3 - k_2) \lambda + k_0 k_7^3] \quad (33)$$

Contrary to the original vertical dynamics, this polynomial can go unstable for some values of  $c^*$ , whatever the choice of the gains. More precisely, the Routh-Hurwitz criterion ensures stability if  $k_i > 0$ ,  $k_0 + k_1 k_7^3 - k_2 > 0$  and  $2c^* k_0^2 + [(k_7^3)^3 + 2c^* (k_1 k_7^3 - k_2)] k_0 - 2c^* k_2 (k_1 k_7^3 - k_2) < 0$ . Now, it is always possible to define gains such that this system is stable for some values of  $c^*$ ; for instance, chose  $k_1, k_7^3, k_2 > 0$  such that  $k_1 k_7^3 - k_2 > 0$  (which is the main stability condition for the original dynamics). Then, one can find  $k_0 > 0$  such that the third condition is obtained for some  $c^*$

since, for  $c^*$  fixed,  $-2c^*k_2(k_1k_7^3 - k_2) < 0$  so that, as  $k_0$  decreases towards zero, the condition will be satisfied.

Similarly, upon convergence of  $\bar{e}_3$  to zero, the horizontal dynamics is given by (compare with (45)):

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_1 = c^*(-g\bar{e}_5 + y_{acc1}) \\ \ddot{\bar{e}}_2 = c^*(g\bar{e}_4 + y_{acc2}) \\ \ddot{\bar{e}}_4 = \dot{\omega}_1 = -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 - \omega_1^d) \\ \quad = -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 + \frac{k_4^1}{g}(g\bar{e}_4 + y_{acc2} + k_5^2\bar{e}_2 + k_5^2k_6^2\nu_2)) \\ \ddot{\bar{e}}_5 = \dot{\omega}_2 = -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 - \omega_2^d) \\ \quad = -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 + \frac{k_4^2}{g}(g\bar{e}_5 - y_{acc1} - k_5^1\bar{e}_1 - k_5^1k_6^1\nu_1)) \end{cases} \quad (34)$$

with  $y_{acc_i} \approx a_{w_i}$  for  $i = 1, 2$ . As a result, the same characteristic polynomials as in the case without perturbation are recovered. Under the same stability conditions on the control gains then, these variables converge asymptotically to zero.

Finally, the yaw dynamics is given by (compare with (52)):

$$\ddot{\bar{e}}_6 = 2\dot{\omega}_3 = -2k_3^3(\omega_3 - \omega_3^d) = -2k_3^3\left(\frac{\dot{\bar{e}}_6}{2} + k_4^3\bar{e}_6 + k_8I_{e_6}\right) + \|\Gamma_w\|b_3 \quad (35)$$

Assuming constant perturbation  $\|\Gamma_w\|$ , the integral term ensures that the yaw error tends to zero if  $k_8 < k_3^3k_4^3$ .

## 4.2. Gain tuning

While stability is a prerequisite for a closed-loop system, performance cannot be neglected in practice. In particular, it matters to ensure good damping properties. This issue is very important here since we have to cope with a large range of unknown parameters. In this section we propose gain tuning heuristics so as to obtain good performance. These heuristics do not *guarantee* performance levels, but they have proved effective to obtain good results in simulation. Furthermore, having tuned the gains as proposed, the Barmish theorem [2] can be used to verify performance afterwards. These heuristics are based on the cascade structure of the closed-loop linearized system which allows to address separately the yaw, vertical, and horizontal dynamics (see the proofs of Theorems 3.3 and 3.4 for details). This is similar to the case when full measurement of position, orientation, and velocities is available. We first propose heuristics for the ground target, and then briefly comment on the frontal target case.

**4.2.1. Yaw dynamics gain tuning:** The characteristic polynomial associated with the (linearized) yaw dynamics is  $P(\lambda) = \lambda^2 + k_3^3\lambda + 2k_3^3k_4^3$ . Thus, any given set of closed-loop poles  $(\lambda_1, \lambda_2)$  can be assigned by setting

$$k_3^3 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad k_4^3 = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

**4.2.2. Vertical dynamics gain tuning:** The characteristic polynomial associated with the vertical dynamics is  $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + k_7^3) + C^*(\lambda + k)$  with  $C^* = 2c^*k_1$  and  $k = k_7^3 - \frac{k_2}{k_1}$ . Recall that  $c^* = \frac{n_3^*}{d^*}$ . The following heuristic is proposed:

1. Define the gain  $k_7^3$  and a number  $k \neq k_7^3$  knowing that, as  $c^*$  grows from 0 to  $\infty$ , the closed loop gains will move from 0 and  $-k_7^3$  to  $-k$  and  $\frac{k-k_7^3}{2}$ .
2. The slowest poles' real parts will start from 0 and head to  $\frac{k-k_7^3}{2}$ : define the scaling factor  $k_1$  so as to define  $c_{min}^*$  for which a given real part is reached. Note that  $k_2$  is then given by:  $k_2 = k_1(k_7^3 - k)$ .
3. Use [2] to assess the performance of the obtained closed-loop system as  $c^*$  varies in its allowed range.

**Justification:** The root locus theory shows that the poles will start from  $(-k_7^3, 0, 0)$  as  $c^* = 0$  and head to  $-k$  and the two asymptotic directions  $\frac{k-k_7^3}{2} \pm j\infty$  as  $c^* \rightarrow \infty$ . One can also verify that, whatever the gains such that  $k \neq k_7^3$ , there is no root on the imaginary axis.

**Numerical example:** With  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $k_7^3 = 2.4$ , the root locus shows that:

1.  $\forall c^* > 0, \Re(\lambda_i) < 0$
2.  $\forall c^* \in [0.175; +\infty], -1 \leq \Re(\lambda_i) \leq -0.4$
3.  $\forall c^* \in [0.175; 2.34], \xi \geq 0.2$  ( $\xi$  is the damping ratio)

**4.2.3. Horizontal dynamics gain tuning:** The horizontal dynamics is composed of two fifth-order linear systems (47)-(48). Since the structure of these systems is the same we only address gain tuning for the first one. The associated characteristic polynomial is:

$$\lambda^2 (\lambda + k_7^1) (\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2) + C^* [\lambda + K]$$

where  $C = c^* k_3^2 k_4^2 k_5^1$ ,  $K = k_7^1 - k_6^1$ . The following heuristics is proposed:

1. Select  $k_3^2$  and  $k_4^2$  such that the roots of  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$  are as fast as possible;
2. Define a much slower dynamics for the "inside system" defined by:  $k_3^2 k_4^2 \lambda^2 (\lambda + k_7^1) + C^* [\lambda + K]$ , and select suitable  $k_5^1, k_6^1, k_7^1$  so that for  $c^* \in (0; c_M^*]$ , all poles are slower than the above defined maximum inside dynamics;
3. Use [2] to assess the performance of the obtained closed-loop system as  $c^*$  varies in its allowed range.

**Justification:** From the root locus theory there are poles at 0 (double),  $-k_7^1$  and at the roots of  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$ . The only zero is at  $-(k_7^1 - k_6^1)$  (zero of the inside dynamics). The two poles placed by  $k_3^2$  and  $k_4^2$  will go to infinity as  $c^*$  grows. The poles at 0 and  $-k_7^1$  will behave similarly to the vertical dynamics for small  $c^*$ , since they are close to zero and separated from the first two; for  $c^*$  large, two of these poles will escape to infinity with positive real part.

**Numerical Example:** With gains defined as  $k_3^2 = 10, k_4^2 = 12, k_5^1 = 5, k_6^1 = 2, k_7^1 = 2.4$  (inside dynamics being slower than -1, which is must slower than the roots of  $\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2$ ), the characteristic polynomial is given by:  $\lambda^5 + 12.4\lambda^4 + 144\lambda^3 + 288\lambda^2 + 600c^*\lambda + 240c^*$ , which is stable for  $c^* \in (0; c_M^*]$  with  $c_M^* \approx 4$ , and such that the roots real parts  $\Re(\lambda) \leq -0.2$  for  $c^* \in [c_1^*; c_2^*]$  with  $c_1^* \approx 0.2$  and  $c_2^* \approx 3.25$ .

For the simulations results reported next, the gain values were obtained through this procedure.

**Remark on the frontal target case:** For the control law of Theorem 3.4, almost the same heuristics can be used since the equations are similar. Stability conditions, however, involve the unknown ratio  $n_3^*/n_1^*$  (see (26)). As already mentioned in Section 3.2, choosing  $k_5^1$  large makes the root-locus less sensitive to this ratio. Then,  $k_3^2$  and  $k_4^2$  must also be chosen large enough so as to satisfy the stability condition (21). For instance, satisfactory results have been obtained by changing as follows the three gains  $k_5^1, k_3^2, k_4^2$  from their values designed for the ground target case:  $k_5^1$  multiplied by 5,  $k_3^2, k_4^2$  multiplied by 4. For this choice, expressing  $\frac{n_3}{n_1}$  as the tangent of an angle  $\alpha$  representing the verticality of the target, one obtains the following results:

- with  $\alpha = 0^\circ$ ,  $c_M^* = 1.8$  and the root locus is similar to the ground target case except for the  $k_3^2, k_4^2$  dynamics, which is much faster;
- with  $\alpha = -30^\circ$ ,  $c_M^* = 1.3$ ;
- with  $\alpha = +30^\circ$ ,  $c_M^* = 2.1$  but the slow dynamics is quite different, so that there is, for any value of  $c^*$  a slow dynamics around the new zero defined by  $-a_0^1$ .

## 5. SIMULATION RESULTS

We present simulation results for the basic control law (Theorems 3.3 and 3.4) and for its modified version proposed in Section 4.1. These results have been obtained for a dynamical model of an helicopter defined by (1) with  $m = 10$  and  $J = I_3$  the identity matrix. Simulations are presented for different values of the distance to the target at the reference pose, with initial position errors equal to:  $p_0 = (1.5, -1, 0.5)^T$ , and the other initial conditions (orientation error, linear and angular velocity) null.

### 5.1. Control law (15)–(17) of Section 3

**Case of a ground target:** Simulation results with the control law of Theorem 3.3 are reported on Fig. 3–4. The normal vector  $n^*$  which defines the target orientation was chosen as  $n^* = (-0.28, 0.28, 0.92)^T$ . Simulations results with  $d^* = 2$  and  $d^* = 10$  are reported. This corresponds to a very large range of nominal distances to the target. The rotation matrix  $R_c$  which defines the camera orientation in body frame was randomly generated, under the constraint that the associated rotation angle is equal to  $15^\circ$ . To test the robustness of the approach, a position offset  $p_c$  of the camera frame w.r.t. the body frame was also introduced. The values of  $R_c$  and  $p_c$  are the following:

$$R_c = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.20 & 0.16 \\ -0.19 & 0.98 & -0.06 \\ -0.17 & 0.03 & 0.99 \end{pmatrix} \quad p_c = (0.30, -0.20, 0.10)^T$$

The control gains in (15)–(16) have been chosen as follows, according to the gain tuning heuristics described above:

$$\begin{aligned} k_1 = 5, \quad k_2 = 10, \quad K_3 = \text{Diag}(10, 10, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad K_4 = \text{Diag}(12, 12, 4) \\ K_5 = \text{Diag}(5, 5, 0), \quad K_6 = \text{Diag}(2, 2, 0), \quad K_7 = \text{Diag}(2.05, 2.05, 2.5) \end{aligned} \quad (36)$$

From (21)–(22), this yields the stability upper-bound  $c_M^* < 3.99$ . Since  $n_3^* = 0.92$ , this yields  $d_M^* > 0.23$ , which is consistent with the simulation values  $d^* = 2$  and  $d^* = 10$ . Fig. 3–4 illustrate the capacity of the controller to perform well in all this range, without any depth or target's orientation information.

**Case of a frontal target:** Simulation results with the control law of Theorem 3.4 are reported on Fig. 5–6. The normal vector  $n^*$  is now given by  $n^* = (0.93, 0.16, -0.34)^T$ . Results for  $d^* = 2$  and  $d^* = 10$  are reported, with the following choice of  $R_c$  and  $p_c$ :

$$R_c = \begin{pmatrix} -0.21 & 0.97 & -0.15 \\ -0.07 & 0.13 & 0.99 \\ 0.98 & 0.22 & 0.04 \end{pmatrix} \quad p_c = (0.50, 0.30, -0.05)^T$$

The control gains are still given by (36). Performances are similar to those obtained for the previous set of simulations.

### 5.2. Control law (30)–(31) of Section 4.1 for unmodeled dynamics rejection

In this section we compare the performances of the original control law (15)–(17) and the modified control law (30)–(31) in the presence of wind, with the same simulation parameters as for Fig. 3–4. For both controllers the control gains (36) have been used. For the control law (30)–(31), the integral gain on the vertical dynamics is defined as  $k_0 = 1$ . From the expression of the vertical dynamics' characteristic polynomial, this value ensures stability as long as  $c^* > 0.36$ , or  $d^* < 2.53$  in this case. The wind effect has been modeled as a drag force (no lift). More precisely, a constant or slowly-time varying wind velocity  $\dot{p}_w$  has been used to compute the relative wind velocity:  $\delta\dot{p} = \dot{p}_w - \dot{p}$ , with  $\dot{p}_w$  the wind velocity. The drag force is then given by  $F_w = -\frac{1}{2}C_x\rho\Sigma\|\delta\dot{p}\|\delta\dot{p}$  where the total drag coefficient  $k_w = \frac{1}{2}C_x\rho\Sigma$  has been chosen equal to 0.1. This is a realistic value given the mass and inertia of the system. Fig. 7 and 8 have been obtained with the control laws (15)–(17) and (30)–(31)

respectively, with the constant wind velocity  $v_w = [-2.50, 3.00, 1.50]m/s$  and the distance to the target at the reference pose  $d^* = 2$  (i.e.  $c^* = 0.46$ ). The efficiency of the modified controller for wind effect rejection is clearly illustrated.

The case of a slowly varying wind has also been considered, according to the following random walk model:  $\ddot{p}_w = k_w \xi$  with  $\dot{p}_w(0) = [-2.50, 3.00, 1.50]m/s$ ,  $k_w = 1$  and  $\xi$  a centered white noise with spectrum one. Again, Fig. 9 and 10 clearly show that the modified controller outperforms the original one.

## 6. CONCLUSION

Feedback laws have been proposed for the vision-based stabilization of VTOL UAVs w.r.t. a planar target. The main contribution of this work is to show that such a stabilization can be achieved with a minimal sensor suite (a mono-camera and gyrometers), and with very poor knowledge about the environment. In particular, precise knowledge of the target's orientation or distance from the UAV to the target at the reference pose are not necessary. Knowledge of the UAV's attitude is not necessary either. Explicit stability conditions derived in this paper can be used to guarantee stability of the proposed controllers for a range of operational conditions. The approach, motivated by [3], relies on the definition of a new homography-based error vector. By using this vector, the classical (local) decoupling of vertical, roll, pitch, and yaw dynamics can be extended to the vision-based control framework. In addition to the control design and stability analysis, several practical issues have also been addressed like the influence of the camera's orientation in the control law definition, unmodeled dynamics rejection, and gain tuning. The approach has been validated in simulation. Extensions of this work include experimental validations on mini-drones, and nonlinear control design in order to possibly extend the stability domain and allow more aggressive manoeuvres.

## APPENDIX

**Proof of Proposition 3.1:** Recall from (11) that

$$H_c = I - S(R_c \Theta) - \frac{1}{d^*} R_c \bar{p} n_c^{*T} + O^2(p, \Theta) \quad (37)$$

with  $\bar{p} = p + S(R_c^T p_c) \Theta$ . Using the fact that  $n_c^* = R_c n^*$  and  $m_{c,k}^* = R_c b_k$ , we deduce from (6) and (37) that

$$\begin{aligned} e_p &= \frac{1}{d^*} \langle n_c^*, m_{c,k}^* \rangle R_c \bar{p} + S(R_c \Theta) m_{c,k}^* + O^2(p, \Theta) \\ &= R_c \left( \frac{n_k^*}{d^*} \bar{p} - S(b_k) \Theta \right) + O^2(p, \Theta) \\ e_\Theta &= 2R_c \Theta + \frac{1}{d^*} S(n_c^*) R_c \bar{p} + O^2(p, \Theta) \\ &= R_c \left( 2\Theta + \frac{1}{d^*} S(n^*) \bar{p} \right) + O^2(p, \Theta) \end{aligned} \quad (38)$$

where we have used the fact that  $xy^T - yx^T = S(S(y)x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ . We deduce from (38) that

$$\begin{aligned} 2R_c^T e_p + R_c^T S(m_{c,k}^*) e_\Theta &= 2R_c^T e_p + S(b_k) R_c^T e_\Theta \\ &= \frac{1}{d^*} (2n_k^* I_3 + S(b_k) S(n^*)) \bar{p} + O^2(p, \Theta) \\ &= \frac{1}{d^*} (n_k^* I_3 + n^* b_k^T) \bar{p} + O^2(p, \Theta) \end{aligned} \quad (39)$$

where the last equality comes from the fact that  $x \times (y \times z) = y(x^T z) - z(x^T y)$ . We also deduce from (38) that

$$\begin{aligned} R_c^T e_\Theta - R_c^T S(m_{c,k}^*) e_p &= R_c^T e_\Theta - S(b_k) R_c^T e_p + O^2(p, \Theta) \\ &= \frac{1}{d^*} S(n^* - n_k^* b_k) \bar{p} + (2I_3 + S(b_k)^2) \Theta + O^2(p, \Theta) \end{aligned} \quad (40)$$

Relation (13) follows from (39) and (40).

Finally, the second property in Proposition 3.1 follows directly from the block-triangular structure of  $L$ , and the (easily verified) fact that  $L_p$  is invertible when  $n_k^* \neq 0$  and  $L_\Theta$  is always invertible.  $\triangleleft$

**Proof of Theorem 3.3:** By definition,  $R \approx I_3 + S(\Theta)$  around  $R = I_3$ . Therefore,  $\gamma = gR^T b_3 \approx gb_3 + gS(b_3)\Theta$  around  $R = I_3$  and it follows from (1) and (15)–(17) that the linearized controlled system around  $(p, R, v, \omega, \nu) = (0, I_3, 0, 0, 0)$  is given by

$$\begin{cases} \ddot{p} &= gS(b_3)\Theta + (g - \frac{T}{m})b_3 \\ \ddot{\Theta} &= J^{-1}\Gamma \\ \dot{\nu} &= -K_7\nu - \bar{e}_p \end{cases} \quad (41)$$

Note that in the above (and forthcoming) equations, only the first-order linear approximations of  $T, \Gamma$ , and  $\bar{e}_p$  should be considered (i.e., the expressions obtained by omitting in (13) the term  $O^2(p, \Theta)$ ). To lighten the notation these linear approximations are still denoted as  $T, \Gamma$ , and  $\bar{e}_p$ . Finally, we denote  $c^* = \frac{n_3^*}{d^*}$ .

We now study the stability of the equilibrium  $(p, \Theta, \dot{p}, \dot{\Theta}, \nu) = 0$ . It follows from (13) and (14) that the linearized controlled system in the coordinates  $(\bar{e}, \dot{\bar{e}}, \nu)$  is given by

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}} &= L \begin{pmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\Theta} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} gS(b_3)\Theta + (g - \frac{T}{m})b_3 \\ J^{-1}\Gamma \end{pmatrix} \\ \dot{\nu} &= -K_7\nu - \bar{e}_p \end{cases} \quad (42)$$

with the components of  $L$  given by

$$L_p = c^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{n_1^*}{n_3^*} \\ 0 & 1 & \frac{n_2^*}{n_3^*} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_\Theta = \text{Diag}(1, 1, 2), \quad L_{\Theta p} = \frac{1}{d^*} \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_2^* \\ 0 & 0 & -n_1^* \\ -n_2^* & n_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

There remains to determine conditions under which  $(\bar{e}, \dot{\bar{e}}, \nu) = 0$  is an asymptotically stable equilibrium of this system. We proceed in three steps, in which the convergence to zero of the vertical, horizontal, and yaw variables are successively studied.

**Step 1:** It follows from the above relations and (15)–(17) that

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_3 &= 2c^*(g - T/m) = -2c^*(k_1\bar{e}_3 + k_2\nu_3) \\ \dot{\nu}_3 &= -k_7^3\nu_3 - \bar{e}_3 \end{cases} \quad (43)$$

Thus the dynamics of  $\bar{e}_3, \dot{\bar{e}}_3, \nu_3$  is independent of the other variables and the origin of the above system is asymptotically stable provided that the characteristic polynomial of the system's state matrix is Hurwitz-Stable. This polynomial is given by

$$P(\lambda) = \lambda^3 + k_7^3\lambda^2 + 2c^*k_1\lambda + 2c^*(k_1k_7^3 - k_2)$$

Considering that  $c^* > 0$ , application of the Routh-Hurwitz criterion yields that  $P$  is Hurwitz-Stable if and only if

$$k_1, k_2, k_7^3 > 0, k_1k_7^3 > k_2 \quad (44)$$

Note that this condition is independent of  $c^* (> 0)$ .

**Step 2:** Under the condition that  $\bar{e}_3, \dot{\bar{e}}_3$ , and  $\nu_3$  converge asymptotically to zero, we can concentrate on the zero-dynamics  $(\bar{e}_3, \dot{\bar{e}}_3, \nu_3) = 0$ . From (13),  $\bar{e}_3 = 0$  implies that  $p_3 = 0$  for the linearized equations so that,

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = c^* \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{e}_4 \\ \bar{e}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

This implies, using (41) and the expression (15) of  $\Gamma$ , that

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_1 &= -c^*g\bar{e}_5 \\ \ddot{\bar{e}}_2 &= c^*g\bar{e}_4 \\ \ddot{\bar{e}}_4 &= \dot{\omega}_1 = -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 - \omega_1^d) \\ &= -k_3^1(\dot{\bar{e}}_4 + \frac{k_4^1}{g}(g\bar{e}_4 + k_5^2\bar{e}_2 + k_5^2k_6^2\nu_2)) \\ \ddot{\bar{e}}_5 &= \dot{\omega}_2 = -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 - \omega_2^d) \\ &= -k_3^2(\dot{\bar{e}}_5 + \frac{k_4^2}{g}(g\bar{e}_5 - k_5^1\bar{e}_1 - k_5^1k_6^1\nu_1)) \end{cases} \quad (45)$$

From (17),

$$\begin{cases} \dot{\nu}_1 &= -k_7^1 \nu_1 - \bar{e}_1 \\ \dot{\nu}_2 &= -k_7^2 \nu_2 - \bar{e}_2 \end{cases} \quad (46)$$

System (45)-(46) can be decomposed into two independent 5-th order linear systems:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_1 &= -c^* g \bar{e}_5 \\ \ddot{\bar{e}}_5 &= -k_3^2 (\dot{\bar{e}}_5 + \frac{k_4^2}{g} (g \bar{e}_5 - k_5^1 \bar{e}_1 - k_5^1 k_6^1 \nu_1)) \\ \dot{\nu}_1 &= -k_7^1 \nu_1 - \bar{e}_1 \end{cases} \quad (47)$$

and

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_2 &= c^* g \bar{e}_4 \\ \ddot{\bar{e}}_4 &= -k_3^2 (\dot{\bar{e}}_4 + \frac{k_4^2}{g} (g \bar{e}_4 + k_5^2 \bar{e}_2 + k_5^2 k_6^2 \nu_2)) \\ \dot{\nu}_2 &= -k_7^2 \nu_2 - \bar{e}_2 \end{cases} \quad (48)$$

Let us analyze the stability of these systems. The characteristic polynomial of System (47) is

$$\begin{aligned} P_{c^*}^1(\lambda) &= \lambda^2 (\lambda + k_7^1) (\lambda^2 + k_3^2 \lambda + k_3^2 k_4^2) + c^* a_1^1 [\lambda + a_0^1] \\ &= \lambda^5 + a_4^1 \lambda^4 + a_3^1 \lambda^3 + a_2^1 \lambda^2 + c^* a_1^1 \lambda + c^* a_1^1 a_0^1 \end{aligned} \quad (49)$$

with the  $a_i^1$ 's defined by (23). Similarly, the characteristic polynomial of System (48) is

$$P_{c^*}^2(\lambda) = \lambda^5 + a_4^2 \lambda^4 + a_3^2 \lambda^3 + a_2^2 \lambda^2 + c^* a_1^2 \lambda + c^* a_1^2 a_0^2 \quad (50)$$

with the  $a_i^2$ 's defined by (24). Both polynomials are of the form

$$P_{c^*}^j(\lambda) = \lambda^5 + a_4^j \lambda^4 + a_3^j \lambda^3 + a_2^j \lambda^2 + c^* a_1^j \lambda + c^* a_1^j a_0^j$$

Let us determine necessary and sufficient conditions for the Hurwitz-stability of such polynomials. It is well known (and easy to verify) that a necessary stability condition is that all coefficients are strictly positive. Since  $c^* > 0$ , this implies that all  $a_i^j$  must be strictly positive. By application of the Routh-Hurwitz criterion, we obtain the following necessary and sufficient condition for stability of  $P_{c^*}^j$ :

$$\begin{cases} a_i^j > 0, \quad \forall i, \\ D_2^j = a_4^j a_3^j - a_2^j > 0 \\ D_3^j = a_2^j D_2^j - c^* a_4^j a_1^j (a_4^j - a_0^j) > 0 \\ D_4^j = c^* a_1^j [D_3^j - a_0^j (a_3^j D_2^j - c^* a_1^j (a_4^j - a_0^j))] > 0 \end{cases}$$

This set of inequalities is equivalent to:

$$\begin{cases} a_i^j > 0, \quad \forall i, \\ D_2^j = a_4^j a_3^j - a_2^j > 0 \\ c^* a_4^j a_1^j (a_4^j - a_0^j) < a_2^j D_2^j \\ c^* a_1^j (a_4^j - a_0^j)^2 < (a_2^j - a_0^j a_3^j) D_2^j \end{cases} \quad (51)$$

Since  $a_1^j$  must be strictly positive, the last inequality in (51) is satisfied for any  $c^* \in (0, c_M^*]$  if and only if it is satisfied for the maximum value  $c_M^*$ . Let us consider the last but one inequality. If  $a_4^j - a_0^j > 0$ , by a similar argument as above, this inequality is satisfied for any  $c^* \in (0, c_M^*]$  if and only if it is satisfied for  $c_M^*$ . If  $a_4^j - a_0^j \leq 0$ , it is satisfied for any  $c^* > 0$  due to the fact that  $a_4^j, a_1^j, a_2^j, D_2^j > 0$ . To summarize, we have shown that the polynomials  $P_{c^*}^j$ ,  $j = 1, 2$  are Hurwitz-stable for any  $c^* \in (0, c_M^*]$  if and only if they are Hurwitz-stable for  $c_M^*$ , with the stability conditions given by (51) for  $c^* = c_M^*$ .

**Step 3:** Assuming the convergence to zero of  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_5$ ,  $\dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_5$ , and  $\nu$ , let us consider the variables  $\bar{e}_6, \dot{\bar{e}}_6$ . It follows from (13) and (42) that on the zero-dynamics  $\bar{e}_1 = \dots = \bar{e}_5 = 0$ ,

$$\ddot{\bar{e}}_6 = 2\dot{\omega}_3 = -2k_3^3 (\omega_3 - \omega_3^d) = -2k_3^3 \left( \frac{\dot{\bar{e}}_6}{2} + k_4^3 \bar{e}_6 \right) \quad (52)$$

The dynamics of this second-order linear system is asymptotically stable if and only if

$$k_3^3, k_4^3 > 0 \quad (53)$$

To summarize, we have shown that the subsystems (43), (47), (48), and (52) are asymptotically stable for any  $c^* \in (0, c_M^*]$  if and only if they are asymptotically stable for  $c^* = c_M^*$ . In view of the cascade structure of the linearized system (42), it is easy to verify that asymptotic stability of these subsystems is necessary and sufficient for the asymptotic stability of (42), and thus for the local exponential stability of the original nonlinear system. This concludes the proof of Property 2) of the Theorem.

As for Property 1), one observes that Conditions (19), (21), (22) imply the stability conditions (44), (51) for  $j = 1, 2$  and  $c^* = c_M^*$ , and (53). Existence of control gains satisfying (19), (21), (22) has been shown in Section 3.  $\triangleleft$

**Proof of Theorem 3.4:** The expression (41) of the linearized system is still valid in this case but the components of  $L$  are now given by (see (14) with  $k = 1$ )

$$L_p = c^* \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{n_2^*}{n_1^*} & 1 & 0 \\ \frac{n_3^*}{n_1^*} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_\Theta = \text{Diag}(2, 1, 1), \quad L_{\Theta p} = \frac{1}{d^*} \begin{pmatrix} 0 & -n_3^* & n_2^* \\ n_3^* & 0 & 0 \\ -n_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where  $c^* = \frac{n_1^*}{d^*}$ .

**Step 1:** It follows from the above expression and (15)–(17), (41) that

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = 2c^* p_1 \\ \ddot{\bar{e}}_1 = -2c^* g \Theta_2 \\ \ddot{\Theta}_2 = -k_3^2 (\dot{\Theta}_2 - \omega_2^d) \\ \omega_2^d = -\frac{k_4^2}{g} (g \bar{e}_5 - k_5^1 \bar{e}_1 - k_5^1 k_6^1 \nu_1) \\ \dot{\nu}_1 = -k_7^1 \nu_1 - \bar{e}_1 \end{cases}$$

We deduce from these expressions, after a few calculations, that the characteristic polynomial associated with the dynamics of  $\bar{e}_1$  is given by (49) with the  $a_i^1$ 's defined by (26). Following the proof of Theorem 3.3, and using the fact that  $c^* = n_1^*/d^*$  and  $d^*$  is not involved in the definition of the  $a_i^j$ 's, this polynomial is Hurwitz-stable for  $1/d^* \in (0, c_M^*]$  if and only if it is Hurwitz-stable for  $1/d^* = c_M^*$ , with the stability condition given by (51) for  $j = 2$ .

**Step 2:** Under the condition that  $\bar{e}_1, \bar{e}_5 (= \Theta_2 + \frac{n_2^*}{2n_1^*} \bar{e}_1)$ , and  $\nu_1$  converge to zero, one has on the zero-dynamics  $\bar{e}_3 = c^* p_3$ . It follows from this relation and (15)–(17) that (compare with (43))

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_3 = c^* (g - T/m) = -c^* (k_1 \bar{e}_3 + k_2 \nu_3) \\ \dot{\nu}_3 = -k_7^3 \nu_3 - \bar{e}_3 \end{cases} \quad (54)$$

The characteristic polynomial associated with this linear system is

$$P(\lambda) = \lambda^3 + k_7^3 \lambda^2 + c^* k_1 \lambda + 2c^* (k_1 k_7^3 - k_2)$$

Considering that  $c^* > 0$ , application of the Routh-Hurwitz criterion yields that  $P$  is Hurwitz-Stable if and only if Condition (44) is satisfied.

**Step 3:** Under the condition that  $\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_5, \nu_1$ , and  $\nu_3$  converge to zero, one has on the zero dynamics  $\bar{e}_2 = c^* p_2$  and  $\bar{e}_4 = 2\Theta_1$ . The following dynamics for  $\bar{e}_2, \bar{e}_4$  is obtained (compare with (48)):

$$\begin{cases} \ddot{\bar{e}}_2 = c^* g \bar{e}_4 / 2 \\ \ddot{\bar{e}}_4 = -2k_3^1 (\dot{\bar{e}}_4 + \frac{k_4^1}{g} (g \bar{e}_4 + k_5^2 \bar{e}_2 + k_5^2 k_6^2 \nu_2)) \\ \dot{\nu}_2 = -k_7^2 \nu_2 - \bar{e}_2 \end{cases} \quad (55)$$

The characteristic polynomial associated with this system is given by (50) with the  $a_i^2$ 's defined by (27). Using the same arguments as above, we deduce that this polynomial is Hurwitz-stable for  $1/d^* \in (0, c_M^*]$  if and only if it is asymptotically stable for  $1/d^* = c_M^*$ , with the stability condition given by (51) for  $j = 1$ .

**Step 4:** Finally, on the zero-dynamics  $\bar{e}_1 = 0$ , we also have  $\bar{e}_6 = \Theta_3$  so that (compare with (52)),

$$\ddot{\bar{e}}_6 = \dot{\omega}_3 = -k_3^3(\omega_3 - \omega_3^d) = -k_3^3(\dot{\bar{e}}_6 + k_4^3\bar{e}_6)$$

The dynamics of this second-order linear system is asymptotically stable if and only if  $k_3^3, k_4^3 > 0$ .

From this point, the proof is similar to the proof of Theorem 3.3.  $\triangleleft$

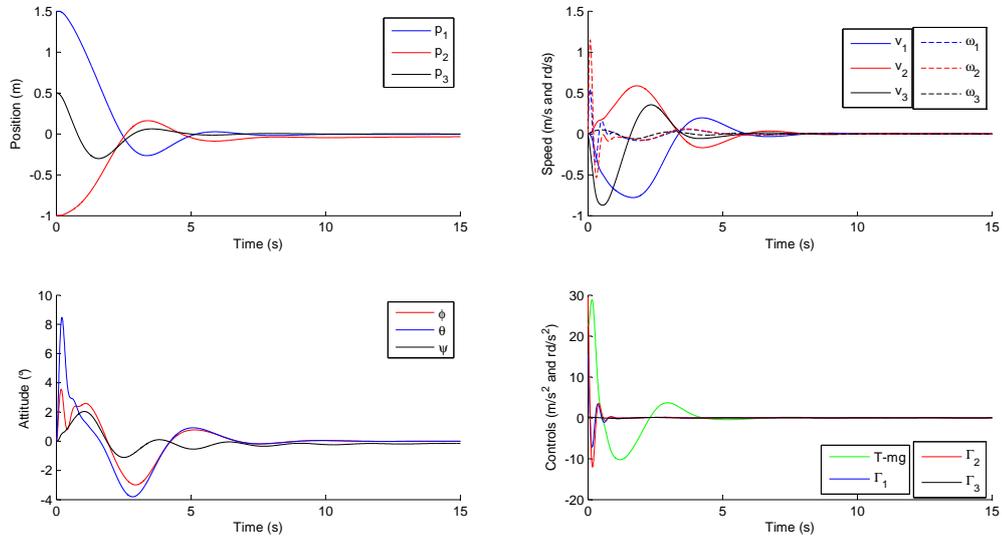


Figure 3. Simulation result for a ground target,  $d^* = 2$

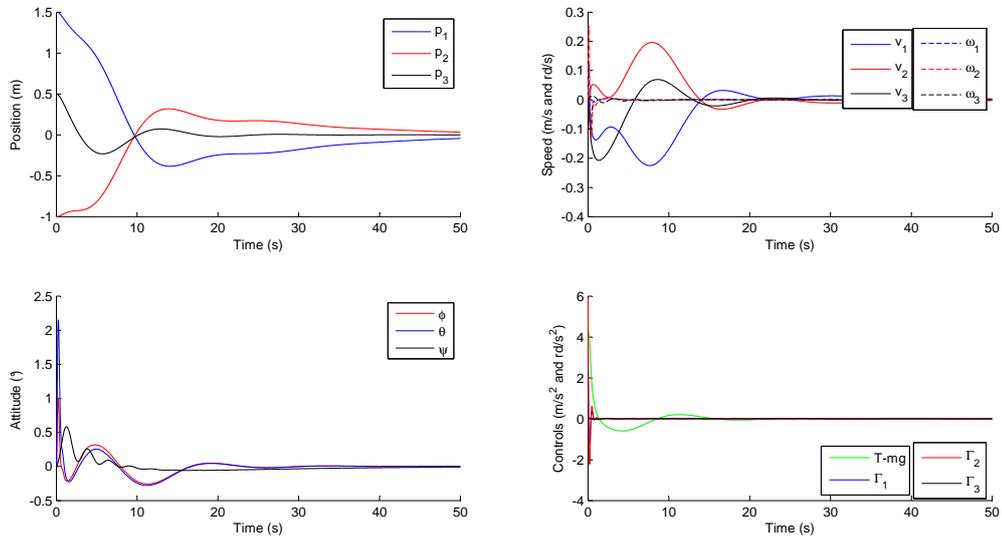


Figure 4. Simulation result for a ground target,  $d^* = 10$

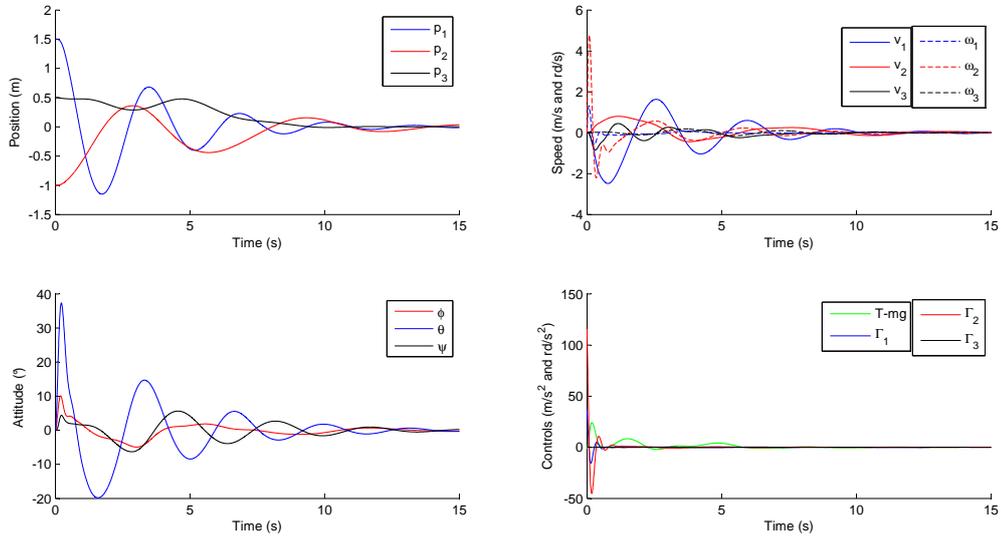


Figure 5. Simulation result for a frontal target,  $d^* = 2$

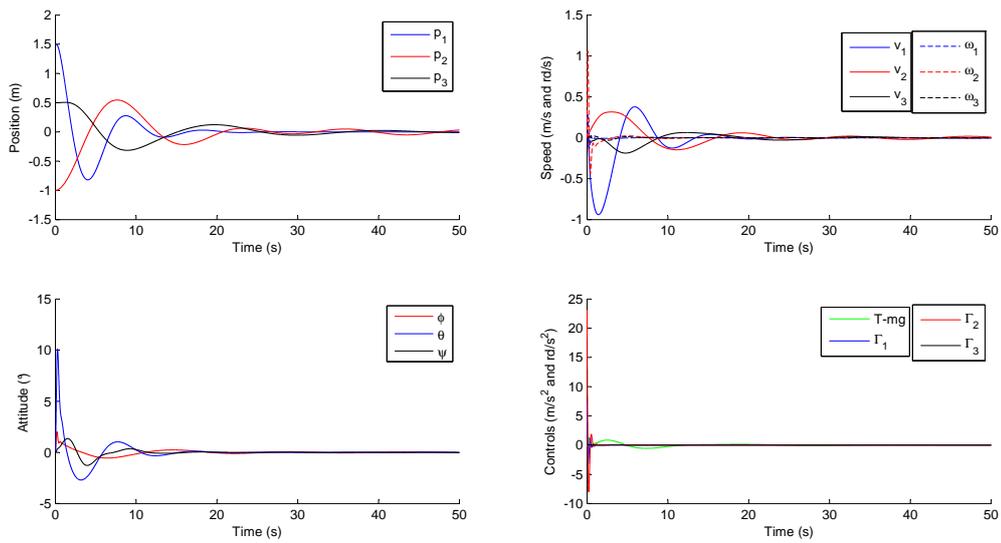


Figure 6. Simulation result for a frontal target,  $d^* = 10$

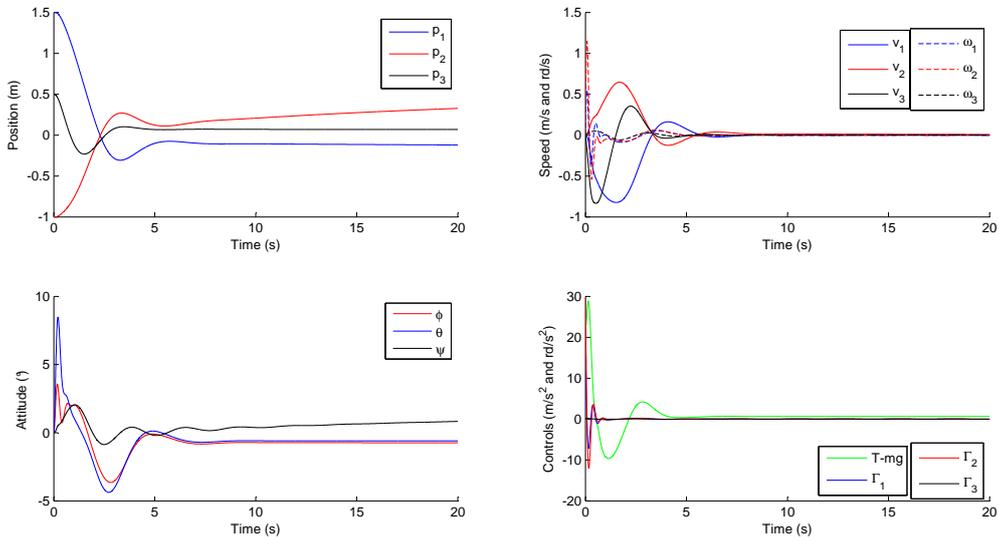


Figure 7. Simulation result with constant wind, without wind rejection action,  $d^* = 1$

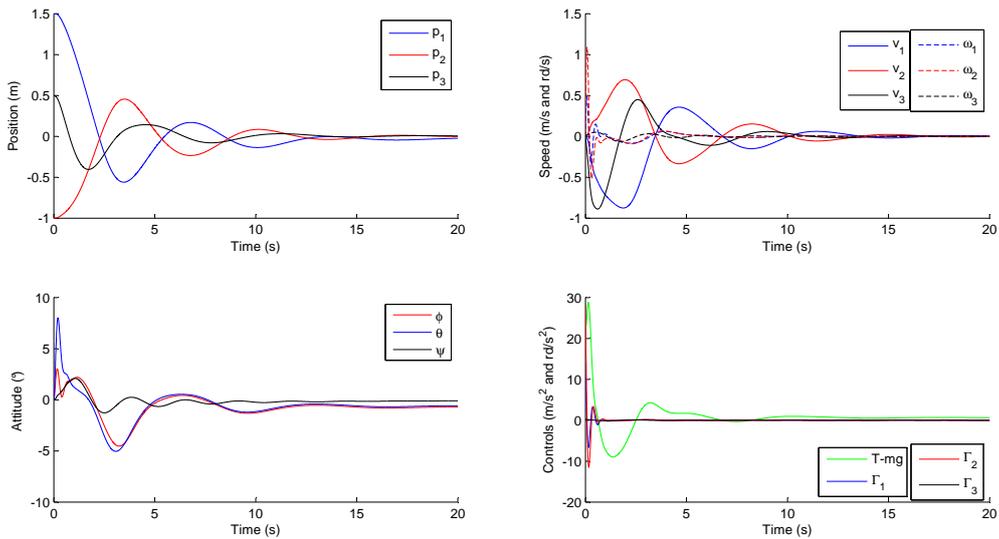


Figure 8. Simulation result with constant wind, with wind rejection action,  $d^* = 1$

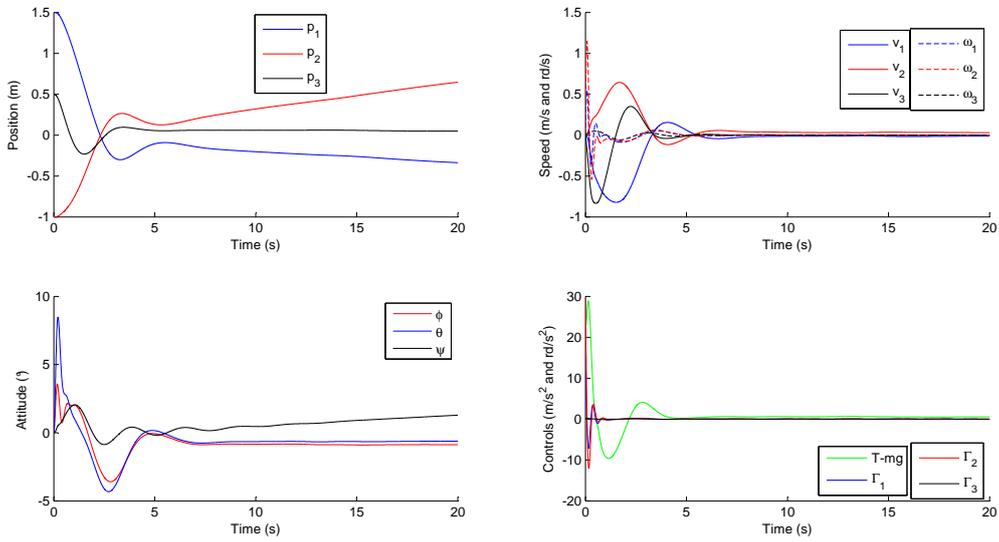


Figure 9. Simulation result with varying wind, without wind rejection action,  $d^* = 1$

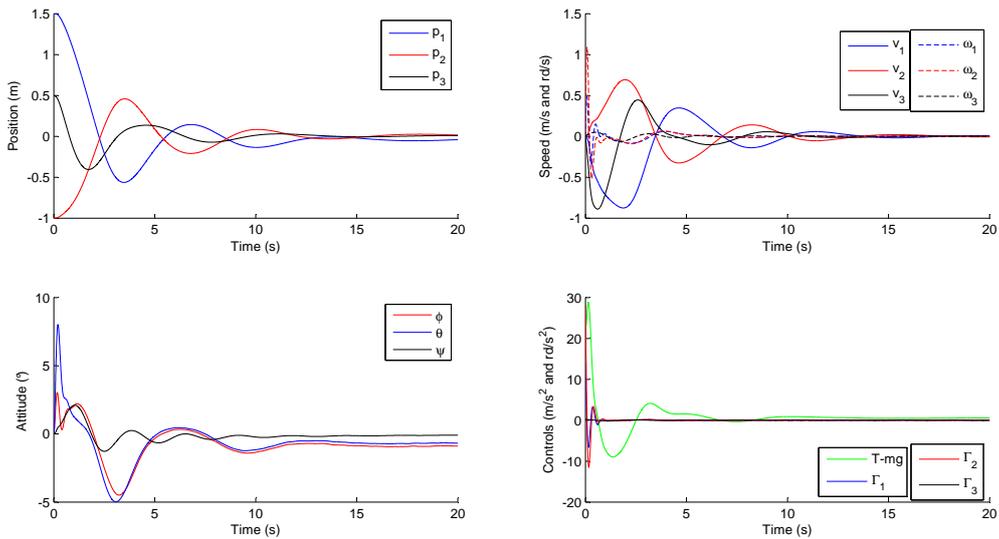


Figure 10. Simulation result with varying wind, with wind rejection action,  $d^* = 1$

## REFERENCES

1. J. Azinheira and P. Rives. Image-based visual servoing for vanishing features and ground lines tracking: Application to a UAV. *International Journal of Optomechatronics*, 2(3):275–295, 2008.
2. B. Barmish. A generalization of kharitonov's four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34:157–165, 1989.
3. S. Benhimane and E. Malis. Homography-based 2d visual tracking and servoing. *The International Journal of Robotics Research*, pages 661–676, 2007.
4. O. Bourquardez, R. Mahony, N. Guenard, F. Chaumette, T. Hamel, and L. Eck. Image-based visual servo control of the translation kinematics of a quadrotor aerial vehicle. *IEEE Trans. on Robotics*, 25(3):743–749, 2009.
5. F. Chaumette and S.Hutchinson. Visual servo control, part I: Basic approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 13(4):82–90, 2006.
6. F. Chaumette and S.Hutchinson. Visual servo control, part II: Advanced approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 14(1):109–118, 2007.
7. V.-K. Chitrakaran, D.-M. Dawson, J. Chen, and Feemster M. Vision assisted autonomous landing of an unmanned aerial vehicle. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1465–1470, 2005.
8. H. de Plinval, P. Morin, P. Mouyon, and T. Hamel. Visual servoing for underactuated vtol uavs: a linear, homography-based approach. In *IEEE Conference on Robotics and Automation*, 2011.
9. B. Espiau. Effect of camera calibration errors on visual servoing in robotics. In *3rd Int. Symp. on Exp. Robot. ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 200, pages 182–192, 1993.
10. T.F. Gonalves, J.R. Azinheira, and P. Rives. Homography-based visual servoing of an aircraft for automatic approach and landing. In *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pages 9–14, 2010.
11. N. Guénard, T. Hamel, and R. Mahony. A practical visual servo control for an unmanned aerial vehicle. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(2):331–340, 2008.
12. T. Hamel and R. Mahony. Visual servoing of an under-actuated dynamic rigid-body system: An image based approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(2):187–198, 2002.
13. M.-D. Hua. Attitude estimation for accelerated vehicles using gps/ins measurements. *Control Engineering Practice*, 18(7):723–732, 2010.
14. M.D. Hua, T. Hamel, P. Morin, and C. Samson. A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to vtol drones. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 54:1837–1853, 2009.
15. Sungsik Huh and David Hyunchul Shim. A vision-based automatic landing method for fixed-wing uavs. *J. Intell. Robotics Syst.*, 57:217–231, January 2010.
16. F. Le Bras, R. Mahony, T. Hamel, and P. Binetti. Dynamic image based visual servo control for an aerial robot: Theory and experiments. *International Journal of Optomechatronics*, 2(3):296–325, 2008.
17. Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S.S. Sastry. *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*. SpringerVerlag, 2003.
18. R. Mahony, T. Hamel, and J-M Pfimlin. Non-linear complementary filters on the special orthogonal group. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(5):1203–1218, 2008.
19. E. Malis and M. Vargas. Deeper understanding of the homography decomposition for vision-based control. Technical Report 6303, INRIA, 2007. Available at <http://hal.inria.fr/inria-00174036/fr/>.
20. Ezio Malis and Francois Chaumette.  $2\frac{1}{2}d$  visual servoing with respect to unknown objects through a new estimation scheme of camera displacement. *International Journal of Computer Vision*, 37(1):79–97, 2000.
21. P. Martin and E. Salaun. Design and implementation of a low-cost observer-based attitude and heading reference system. *Control Engineering Practice*, pages 712–722, 2010.
22. P. Martin and E. Salaun. The true role of accelerometer feedback in quadrotor control. In *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pages 1623–1629, 2010.
23. L. Mejias, S. Saripalli, P. Campoy, and G. Sukhatme. Visual servoing of an autonomous helicopter in urban areas using feature tracking. In *Journal of Field Robotics*, 23(3-4):185–199, 2006.
24. N. Metni, T. Hamel, and F. Derkx. A uav for bridges inspection: Visual servoing control law with orientation limits. In *5th Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles (IAV 04)*, 2004.
25. S. Rathinam, Z. Kim, and R. Sengupta. Vision based monitoring of locally linear structures using an UAV. *Journal of Infrastructure Systems*, 14(1):52–63, 2008.
26. O. Shakernia, Y. Ma, J. Koo, and S. Sastry. Landing an unmanned air vehicle: Vision based motion estimation and nonlinear control. *Asian Journal of Control*, 1(3):128–145, 1999.
27. D. Suter, T. Hamel, and R. Mahony. Visual servo control using homography estimation for the stabilization of an x4-flyer. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2002.

## **A.6 Article en version préliminaire**

# Trajectory Tracking for Underactuated Aerial Vehicles with Uncertain Position Measurements and Application to Visual Servoing

H. de Plinval<sup>a</sup>, P. Morin<sup>b</sup>, P. Mouyon<sup>a</sup>,

<sup>a</sup>ONERA - The French Aerospace Lab, Toulouse

<sup>b</sup>ISIR, UPMC, Paris

---

## Abstract

Trajectory tracking for underactuated vehicles with uncertain measurements of the position tracking error is addressed. Nonlinear feedback laws ensuring semi-global stability for a large class of uncertainties on these measurements are derived based on properties of saturated controls. Practical relevance of the proposed result is illustrated by two application examples for Vertical Take-Off and Landing aerial vehicles equipped with a mono-camera: point stabilization in front of a planar target and navigation based on interpolation of homography measures.

*Keywords:* Underactuated vehicle, aerial vehicle, stability, robustness, measurement uncertainties

---

## 1. Introduction

Underactuated vehicles have long been an important source of inspiration for nonlinear control theory. Recently, emerging robotic applications (with, e.g., aerial vehicles, underwater vehicles, hovercrafts) have renewed the interest on this topic. The present study is motivated in the first place by applications with *small* VTOL UAVs (i.e. Vertical Take-Off and Landing Unmanned Aerial Vehicles). Stabilization of the vehicle's pose (i.e. position and orientation) is clearly a critical issue in this context. Ensuring large stability domains is especially important for small vehicles due to their high sensitivity to wind and several nonlinear control designs have been proposed to address this issue (see, e.g., Hauser et al. (1992); Isidori et al. (2003); Pflimlin et al. (2007); Hua et al. (2009)). Ensuring good robustness properties of the closed-loop system is at least as important in practice but studies on this issue are not very numerous. A possible reason is the system's underactuation which leads to nonlinearities difficult to analyze from a robustness point of view. Robustness to unmodelled dynamics (e.g. wind effects) has been addressed in a few studies Pflimlin et al. (2007); Marconi and Naldi (2007); Hua et al. (2009). The present paper concerns robustness with respect to measurement uncertainties.

Recent results with motion capture systems (such as Vicon) have shown that high-frequency/high-precision position and orientation measurements can yield very impressive performance and reactivity for small aerial vehicles Lupashin et al. (2010); Mellinger et al. (2012). For most applications of interest, however, these systems cannot be used and the vehicle must rely on embarked sensors only. Precise high-frequency orientation estimations can be obtained with small and low-cost embarked IMUs (Inertial Measurement Units). Obtaining good estimates of

the vehicle's position is much more difficult. In some applications a GPS antenna is enough to collect the needed position information. In other applications, however, this solution is not satisfactory. Firstly, the GPS may be unavailable. Secondly, in many applications of interest (e.g., inspection) what is needed is a measurement of the *relative* position of the vehicle with respect to its environment rather than an absolute position measurement (GPS-like). The former type of information is best obtained from embarked exteroceptive sensors (cameras, lasers, etc). Unfortunately, with such sensors the relation between the output function (i.e. measurement) and the relative position error is seldom known precisely. Uncertainties encountered in practice may come, e.g., from calibration errors, lack of depth information with mono-camera sensors, poor estimation of this information for stereo camera systems with short baselines, uncertainties on the environment structure, etc... This leads to the control problem addressed in this paper: *Given a class of uncertainties on the position measurements, can one design feedback control laws that guarantee stability of the system for any position measurement in this class?*

To our knowledge this problem has not been addressed in a generic way so far. There exist, however, a few results on this issue for very specific classes of measurement uncertainties. In particular, the case when uncertainties reduce to a positive scale factor on the position vector has been addressed in Metni et al. (2004); Le Bras et al. (2010) for visual servoing applications with UAVs. The results proposed in this paper, which address a much larger class of uncertainties, make use of properties of saturated controls. This kind of control laws has been revisited several times for UAVs in order to ensure some type of robustness property (see, e.g., Teel (1996); López-Araujo et al. (2010) for

robustness w.r.t. input saturation, e.g. Marconi and Naldi (2007); Hua et al. (2009); Lòpez-Araujo et al. (2010) for robustness w.r.t. unmodelled dynamics). We show in this paper its importance for ensuring robustness properties w.r.t. measurement errors. More precisely, the main result of the paper concerns the design of nonlinear feedback laws that ensure semi-global stability of the pose tracking error for a large class of uncertainties on these measurements. We then illustrate the application of this result on visual servoing problems with mono-camera measurements. Let us remark that a preliminary version of this paper was presented at an international conference, de Plinval et al. (2012). The present paper addresses the general trajectory tracking problem while de Plinval et al. (2012) considered stabilization of a fixed position only. Also complete stability proofs are provided here.

The paper is organized as follows. Preliminary background and problem statement are provided in Section 2. The main result on the control design and stability analysis in presence of uncertain position measurements is exposed in Section 3. Application to the visual servoing of underactuated UAVs is briefly considered in Section 4. Final remarks conclude the paper.

## 2. Background and problem statement

### 2.1. Notation

The  $n \times n$  identity matrix is denoted as  $I_n$ . The transpose of a matrix  $M$  is denoted as  $M^T$ . For any square matrix  $M$ ,  $M_s := \frac{M+M^T}{2}$  and  $M_a := \frac{M-M^T}{2}$  respectively denote the symmetric and antisymmetric part of  $M$ .

Given a smooth function  $f$  defined on an open set of  $\mathbb{R}$ , its derivative is denoted as  $f'$ .

**Definition 1** Given  $\delta = [\delta_m; \delta_M]$  with  $0 < \delta_m < \delta_M$ , a function  $\text{sat}_\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  of class  $C^1$  is called a saturation function if the following properties hold:

- i) ("Classical" saturation property): the function  $s : \mathbb{R}^+ \ni \tau \mapsto \tau \text{sat}_\delta(\tau^2) \in \mathbb{R}^+$  is positive, non decreasing, bounded by  $\delta_M$  on  $\mathbb{R}^+$ , and is equal to the identity function on  $[0, \delta_m]$ ;
- ii) (Additional technical properties):
  - a)  $\tau \text{sat}_\delta(\tau) \rightarrow \infty$  when  $\tau \rightarrow \infty$
  - b)  $\text{sat}'_\delta(\tau) \leq 0$  for all  $\tau \geq 0$
  - c) the function  $\tau \mapsto \tau \text{sat}'_\delta(\tau)$  is bounded on  $\mathbb{R}^+$

An example of a saturation function is given by

$$\text{sat}_\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \leq \delta_m \\ \frac{\delta_M}{\sqrt{\tau}} - \frac{(\delta_M - \delta_m)^2}{\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau} + \delta_M - 2\delta_m)} & \text{if } \tau > \delta_m \end{cases} \quad (1)$$

### 2.2. Dynamics of thrust-propelled underactuated vehicles

We consider in this paper the class of thrust-propelled underactuated vehicles consisting of rigid bodies moving in 3D-space under the action of one body-fixed force control and full torque actuation Hua et al. (2009). This class contains most VTOL UAVs (quadrotors, ducted fans, helicopters, etc). The dynamics of these systems is described by the following well-known equations:

$$\begin{cases} \ddot{p} &= -uRe_3 + ge_3 \\ \dot{R} &= RS(\omega) \\ J\dot{\omega} &= J\omega \times \omega + \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

with  $p$  the position vector of the vehicle's center of mass, expressed in a reference (inertial) frame,  $R$  the rotation matrix from the body frame to the reference frame,  $\omega$  the angular velocity vector expressed in the body frame,  $S(\cdot)$  the matrix-valued function associated with the cross product, i.e.  $S(x)y = x \times y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ ,  $u$  the normalized thrust input, i.e.  $u = \frac{T}{m}$  where  $m$  is the mass and  $T$  the thrust input,  $e_3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $J$  the inertia matrix,  $\Gamma$  the torque vector, and  $g$  the gravity constant. We shall consider, by a standard time separation argument commonly used for VTOL UAVs, that the orientation control variable is the angular velocity  $\omega$ . Indeed, once a desired angular velocity  $\omega^d$  has been defined, the torque control input  $\Gamma$  is typically defined as a high gain controller:

$$\Gamma = -J\omega \times \omega + kJ(\omega^d - \omega)$$

with  $k$  chosen large enough. Therefore, we focus hereafter on the following system:

$$\begin{cases} \dot{p} &= \xi \\ \dot{\xi} &= -uRe_3 + ge_3 \\ \dot{R} &= RS(\omega) \end{cases} \quad (3)$$

with  $u$  and  $\omega$  as control inputs.

### 2.3. Problem statement

The main control objective for UAVs is the stabilization of the vehicle's position  $p$  to a reference value  $p_r$ . As a consequence of the system's underactuation, stabilization of  $p$  to  $p_r$  fixes two degrees of freedom on the vehicle's orientation. There is still one degree of freedom left (yaw angle). Its control is not considered in this paper since it does not affect the position control. So the main objective of the paper is to investigate the stabilization of  $p$  to a reference value  $p_r$  from some relative position measurement of the following form:

$$\sigma(t) = R(t)^T M(t) (p(t) - p_r(t)) \quad (4)$$

where  $M(t)$  is a matrix. In other words  $\sigma$  provides information on the tracking error  $p - p_r$  in the body frame and the unknown matrix  $M(t)$  accounts for uncertainties on these position measurements. These relative position

measurements are typically obtained from embarked exteroceptive sensors (cameras, lasers, etc). Examples will be provided in Section 4.

Before stating the main results of this paper, we introduce a few assumptions. The first one is made throughout the paper while the next ones, which refer to particular cases, are invoked only for some of the results presented next.

**Assumption 1** *There exist constant scalars  $\lambda_1, \lambda_2, \|\dot{M}\|_M$  and  $V_M$  such that, for all time  $t$ ,*

$$\begin{cases} 0 < \lambda_1 I \leq M(t) \leq \lambda_2 I \\ \|\dot{M}(t)\| \leq \|\dot{M}\|_M \\ \|\dot{p}_r(t)\| \leq V_M \end{cases} \quad (5)$$

**Assumption 2**  *$M(t)$  is a constant matrix.*

**Assumption 3**  *$R(t)^T \dot{p}_r(t)$  and  $R(t)^T \ddot{p}_r(t)$  are known functions.*

**Assumption 4**  *$\text{Sup}_t \|\ddot{p}_r(t)\| < g$ .*

### 3. Main results

In this section, the main result of the paper is stated. To provide a better understanding of the proposed control design and associated analysis, we first address the control of a fully actuated vehicle. This allows to understand the role of saturation functions in obtaining robustness properties w.r.t. measurement errors. Then, extension to the underactuated case is considered.

#### 3.1. The fully actuated case

Consider the following fully actuated system with body fixed thrust input:

$$\ddot{p} = Ru \quad (6)$$

where  $u \in \mathbb{R}^3$  denotes the thrust input and  $R$  satisfies the third kinematic relation in (3). It is assumed that the following measurements are available:

$$\sigma, \text{ and } v := R^T \dot{p} \quad (7)$$

where  $\sigma$  is defined by (4). These measurements are expressed in body frame and consist of: uncertain position error with respect to a reference trajectory and linear velocity in body frame. The measurement  $v$  can be obtained, e.g., from GPS measurements and from an estimation of  $R$  typically obtained by fusing gyrometer, accelerometer, and magnetometer measurements obtained from an IMU.

**Theorem 1** *Let  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  denote two saturation functions and denote  $C_0 = \max(C, \bar{C})$  with:*

$$\begin{cases} C &= \sup_\tau (\text{sat}_\delta(\tau) + 2\tau |\text{sat}'_\delta(\tau)|) \\ \bar{C} &= \sup_\tau (\overline{\text{sat}}_\delta(\tau) + 2\tau |\overline{\text{sat}}'_\delta(\tau)|) \end{cases} \quad (8)$$

*Consider control gains  $k_1, k_2 > 0$  such that*

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_1 > k_1 \|M_a\|_M \max\{C_0 \lambda_2, \|M_a\|_M\} \\ k_2 \overline{\delta}_m > k_1 \delta_M \end{cases} \quad (9)$$

*and define the control law*

$$\begin{cases} u &= -k_1 \text{sat}_\delta(|\sigma|^2) \sigma - k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(|\delta v|^2) \delta v + a_r(t) \\ \delta v &= v - v_r(t) \end{cases} \quad (10)$$

*where  $v_r(t)$  and  $a_r(t)$  are specified below. Then,*

- i) if Assumptions 1, 2, and 3 hold and  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , then  $(p, \dot{p}) = (p_r, \dot{p}_r)$  is a (uniformly) globally asymptotically stable and locally exponentially stable equilibrium trajectory for the closed-loop system (6)-(10).*
- ii) if Assumptions 1 and 3 hold and  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , then  $(p, \dot{p}) = (p_r, \dot{p}_r)$  is a (uniformly) semi-globally asymptotically stable and locally exponentially stable equilibrium trajectory for the closed-loop system (6)-(10).*
- iii) if Assumption 1 holds ( $M(t)$  may vary and the dynamics is unknown) and  $v_r(t) = 0$ ,  $a_r(t) = 0$ , then  $(p, \dot{p}) = (p_r, \dot{p}_r)$  is a semi-globally practically stable trajectory for the closed-loop system (6)-(10).*

The proof is provided in the Appendix.

Let us comment the above result. The main stability condition is given by (9). Roughly speaking, this condition allows one to specify admissible control gains given upper bounds on the norm of  $M$  and of its skew-symmetric part  $M_a$ . The larger  $M_a$ , the higher the gain  $k_2$ . When  $M$  is constant and the reference dynamics is known, global asymptotic stability can be obtained, while only semi-global asymptotic stability is obtained when  $M$  varies with time. Finally, when the dynamics of  $p_r$  is unknown the best result one can obtain is practical stability since the control law does not incorporate any feedforward term. The ultimate bound on the tracking error is then directly related to the amplitude of  $\dot{p}_r$  and  $\ddot{p}_r$ .

#### 3.2. The underactuated case

We now address the case of underactuated vehicles represented by the control model (3). Let us assume that the following measurements are available:

$$\sigma, \gamma := gR^T e_3, v, \text{ and } \omega \quad (11)$$

With respect to the fully actuated case, we consider two additional measurements; namely  $\gamma$  and  $\omega$ . The latter is typically obtained from the gyroscopes of an IMU, while the former is obtained by fusing accelerometer and gyrometer measurements, under an assumption of small acceleration (see, e.g. Mahony et al. (2012) for more details).

The main result of the paper, which is presented now, shows the stability of a reference trajectory which, contrary to the underactuated case, includes an orientation stabilization. This is done via the coordinate  $\gamma$ , which includes two of the three rotation degrees of freedom. As earlier stated, we recall that the third degree of freedom does not affect the position control, and is thus not considered in this result. We introduce the equilibrium trajectory for this coordinate, which is computed by use of the acceleration reference  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , namely:

$$\gamma_r(t) = [a_{r_1}(t), a_{r_2}(t), \sqrt{g^2 - a_{r_1}^2(t) - a_{r_2}^2(t)}]^T \quad (12)$$

We can now state the main result of this paper.

**Theorem 2** *Let  $\text{sat}_\delta, \overline{\text{sat}}_\delta$  denote two saturation functions and define  $C_0$  as in Theorem 1. Consider control gains  $k_1, k_2 > 0$  such that:*

$$\begin{cases} k_2^2 \lambda_1 & > k_1 \|M_a\|_M \max\{C_0 \lambda_2, \|M_a\|_M\} \\ k_2 \bar{\delta}_m & > k_1 \delta_M \\ k_1 \delta_M + k_2 \bar{\delta}_M & < g - \sup_t (|a_r(t)|) \end{cases} \quad (13)$$

where  $a_r(t)$  is specified below. Define a dynamic augmentation:

$$\dot{\eta} = \eta \times \omega - k_3(\eta - \sigma), \quad k_3 > 0 \quad (14)$$

together with the control law

$$\begin{cases} \omega_1 & = -\frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_2}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(e_1) R^T \dot{\mu} \\ \omega_2 & = \frac{k_4 |\bar{\mu}| \bar{\mu}_1}{(|\bar{\mu}| + \bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(e_2) R^T \dot{\mu} \\ u & = \bar{\mu}_3 \end{cases} \quad (15)$$

$$\leq k_1 \text{sat}_\delta (|\eta|^2) \eta + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta (|v|^2) v - a_r(t) \leq k_1 + k_2 \Delta + \sup_t (|a_r(t)|) < g = |\gamma| \quad (16)$$

where  $\bar{\mu}, \mu$ , and the feedforward term  $R^T \dot{\mu}$  are given by:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &:= \gamma + k_1 \text{sat}_\delta (|\eta|^2) \eta + k_2 \overline{\text{sat}}_\delta (|v|^2) v - a_r(t) \\ \delta v &:= v - v_r(t) \\ \mu &:= R \bar{\mu} \\ R^T \dot{\mu} &= -k_1 k_3 [\text{sat}_\delta (|\eta|^2) I_3 + 2 \text{sat}'_\delta (|\eta|^2) \eta \eta^T] (\eta - \sigma) \\ &\quad + k_2 [\overline{\text{sat}}_\delta (|v|^2) I_3 + 2 \overline{\text{sat}}'_\delta (|v|^2) v v^T] (\gamma - u e_3) \end{aligned}$$

and where  $v_r(t)$  and  $a_r(t)$  are specified below. Then,

- i) if Assumptions 1, 2, 3 and 4 hold and  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , then there exists  $k_{3,m} > 0$  such that, for any  $k_3 > k_{3,m}$ ,  $(p, \dot{p}, \gamma, \eta) = (p_r, \dot{p}_r, \gamma_r, 0)$  is a (uniformly) asymptotically stable and locally exponentially stable equilibrium trajectory for the closed-loop system (3)-(14)-(15), with convergence domain given by  $\{\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)|e_3\}$ .*
- ii) under Assumption 1, 3 and 4 only ( $M(t)$  may vary), defining  $v_r(t) = R^T \dot{p}_r(t)$ ,  $a_r(t) = R^T \ddot{p}_r(t)$ , then there exists  $k_{3,m} > 0$  such that, for any  $k_3 > k_{3,m}$ ,  $(p, \dot{p}, \gamma, \eta) = (p_r, \dot{p}_r, \gamma_r, 0)$  is a semiglobally asymptotically stable and locally exponentially stable equilibrium trajectory for the closed-loop system (3)-(14)-(15).*

- iii) if Assumption 1 holds ( $M(t)$  may vary and the dynamics is unknown), defining  $v_r(t) = 0$ ,  $a_r(t) = 0$ , then there exists  $k_{3,m} > 0$  such that, for any  $k_3 > k_{3,m}$ ,  $(p, \dot{p}, \gamma, \eta) = (p_r, \dot{p}_r, \gamma_r, 0)$  is a practically semiglobally asymptotically stable equilibrium trajectory for the closed-loop system (3)-(14)-(15), with convergence domain given by  $\{\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)|e_3\}$ .*

The proof is provided in the Appendix

Let us comment on the above result, in relation with the fully-actuated case addressed in Theorem 1. The second and third terms in the definition of  $\bar{\mu}$  are reminiscent of the control law (10), with  $\pi$  replaced by  $\eta$ . In view of (14), this latter variable can be viewed as a "filtered value" of  $\pi$ . Note that its time-derivative is known, since it is explicitly defined by (14), while the time derivative of  $\pi$  is not, since  $M$  is unknown. This allows to calculate the term  $R^T \dot{\mu}$  in (15). Compared to the fully-actuated case, the objective is to make  $\bar{\mu}$  converge to  $|\bar{\mu}|e_3$  via the definition of  $u$ ,  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . This ensures that the linear acceleration converges asymptotically to the linear acceleration of the fully-actuated case defined by (6)-(10). Note that  $\omega_3$ , which controls the yaw dynamics, is not involved in this objective. Thus, it can be freely chosen. In practice, however, some choices are better than others (see Section 4 and more specifically sub-Section 4.4 for an example). Finally, it follows from (13) that

This guarantees that  $\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)|e_3$  whenever:

$$g e_3^T R(0) e_3 > -(k_1 + k_2 \Delta)$$

and this ensures, from Property *i*) of the theorem, the semi-global stability of  $(p, \dot{p}, \gamma, \eta) = (p_r, \dot{p}_r, \gamma_r, 0)$ . Note that the orientation convergence domain is quite large from an application point of view.

Finally, compared to the fully-actuated case, for cases (i) and (ii) there is an additional assumption on the maximum magnitude of the reference acceleration (Assumption 3:  $\sup_t (|\ddot{p}_r(t)|) < g$ ). In these cases indeed, the reference acceleration is added as a feedforward term in the control and thus adds to the gravity. When the sum of these two terms vanishes, the system's linearization becomes non-controllable.

### 3.3. Simplified control law

The dynamic extension (14) introduces the complementary gain  $k_3$  with an associated stability condition (an explicit stability condition on  $k_3$  can be deduced from the stability proof but it is complex and probably much conservative). To avoid this extra condition, a simpler control expression with similar robustness properties is proposed in the following result.

**Theorem 3** *With the notation of Theorem 2, given a (time-varying) reference position, with the following extra assumption on the gains  $k_1, k_2$ :*

$$k_1 + k_2 \Delta \leq \frac{g}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

and under the following initial condition:

$$e_3^T R(0)e_3 > \frac{k_1 + k_2 \Delta}{g} \quad (18)$$

there exists  $k_4^* > 0$  such that all the conclusions of Theorem 2 also hold with  $\omega_1, \omega_2$  replaced by the following expression:

$$\begin{cases} \omega_1 &= -k_4 \bar{\mu}_2 \\ \omega_2 &= k_4 \mu_1 \\ u &= \mu_3 \end{cases} \quad (19)$$

with any  $k_4 > k_4^*$ .

The proof is provided in the Appendix.

## 4. Application to visual servoing

### 4.1. Preliminary recalls and problem statement

Consider an underactuated UAV with a video camera facing a planar target. Suppose that a "reference" picture of this target taken at a reference pose is known. This reference pose is represented on Fig. 1 by the reference frame  $\mathcal{R}^*$ . We assume that this pose is a possible equilibrium for the dynamics of this underactuated vehicle, meaning that the  $z$  axis of  $\mathcal{R}^*$  is vertical. Otherwise, asymptotic stabilization of this pose would not be possible. Finally, we also assume that the optical center of the camera corresponds to the vehicle's center of mass and the optical axis corresponds to the  $x$ -axis of  $\mathcal{R}^*$ . At every time, the "current" picture of the target, taken at the current pose represented by the frame  $\mathcal{R}$ , is compared to the reference one. From this comparison, the *homography matrix* is computed (see e.g. Ma et al. (2003); Benhimane and Malis (2007) for more details on homography matrices and associated computation algorithms). This matrix, which allows to transform the target's points coordinates from the reference pose to the current pose, is given by

$$H = R^T - \frac{1}{d^*} R^T p n^{*T} \quad (20)$$

where  $d^*$  is the distance from the UAV reference position to the target plane and  $n^*$  is the normal to the target plane expressed in the reference frame. Both variables are unknown since they cannot be extracted from the visual data. Thus, they are not available for the control design. We consider the case of a vertical target, which is of interest in many inspection applications. This assumption is equivalent to  $n_3^* = 0$ .

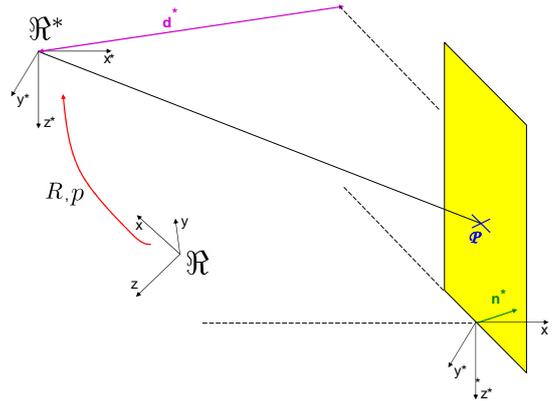


Figure 1: Problem scheme

### 4.2. Error vector definition

In this section, using the assumption of verticality for the planar target, we show that measurements  $\sigma$  and  $\gamma$  of the form of Eq. (4) can be extracted from the homography matrix  $H$ . More precisely, let

$$\begin{cases} \sigma &= H e_2 \times H e_3 - H e_1 \\ \gamma &= g H e_3 \end{cases} \quad (21)$$

From the assumption  $n_3^* = 0$ , one can verify that:

$$\begin{cases} \sigma &= R^T M \left( \frac{n^*}{d^*} \right) p \\ \gamma &= g R^T e_3 \end{cases} \quad (22)$$

with  $M(\tau) = \tau_1 I + S(\tau_2 e_3)$ .

### 4.3. Vision based stabilization

Let us first consider stabilizing the UAV at the reference pose. We assume that velocity measurements  $v$  are available. In this case, Theorem 2 applies directly with  $M = M \left( \frac{n^*}{d^*} \right)$  provided the gain condition (13) is satisfied. We deduce that the control law (14)-(15) ensures semi-global stabilization of the reference pose provided that:

$$\begin{cases} n_1^* > 0 \\ k_1, k_2 > 0 \\ k_2 \bar{\delta}_m > k_1 \delta_M \\ k_1 \delta_M + k_2 \bar{\delta}_M < g \\ n_1^* d^* k_2^2 > k_1 |n_2^*| \left( |n_2^*| + \frac{2n_1^*}{3\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (23)$$

Note that the first condition, which ensures that  $M$  is positive definite, essentially means that the camera is "facing" the target at the reference pose. This is a very natural assumption from an application point of view. When (loose) bounds are known for  $d^*$ :  $d_m \leq d^* \leq d_M$  and  $n_1^* \geq n_{1m}$ , and recalling that  $|n^*| = 1$ , the last condition of equation (23) can be replaced by:

$$n_{1m} d_m k_2^2 > k_1 \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \quad (24)$$

#### 4.4. Yaw control

The yaw degree of freedom is not involved in the stabilization objective. On the other hand, it matters to keep the target inside the field of view of the camera. We propose to use the following control law:

$$\omega_3 = k_5 H_{21} \quad (25)$$

Upon convergence of the position, velocity, roll and pitch angles due to the other controls, the yaw dynamics will be close to  $\dot{\psi} \approx -k_5 \sin \psi$ , thus ensuring the convergence of  $\psi$  to zero unless  $\psi$  is initially equal to  $\sigma$  (case contradictory with the visibility assumption). Another nice feature of this yaw control is that it vanishes when  $H_{21} = 0$ , i.e. when the target is seen -from yaw prospective- as it should be at the end of the control task. This means that the controller tries to reduce the yaw angle only when the position/velocity errors have been significantly reduced. This can be verified on the simulation results presented next.

#### 4.5. Visual servoing homography interpolation

Consider the case where two reference images are provided for the same scene, which are compared with the current image of the scene. This gives rise to two homography matrices, from which are computed two relative position measurements (as defined by Eq. (11)),  $\sigma_1, \sigma_2$ .

Now, the transformations from current to the two reference frames are given by:

$$\begin{cases} \chi_1^* &= R_1 \chi + p_1 \\ \chi_2^* &= R_2 \chi + p_2 \end{cases} \quad (26)$$

Then, the transformation between the two reference frames is defined as:

$$\chi_2^* = \delta R \chi_1^* + \delta p \quad (27)$$

where  $\delta R$  and  $\delta p$  are constant. As a result, the relationships between the two sets of transformation components are given by:

$$\begin{cases} R_2 &= \delta R R_1 \\ p_2 &= \delta R p_1 + \delta p \end{cases} \quad (28)$$

Now, let us consider  $\sigma$  the weighted average of  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ , with a time varying weight  $\lambda(t)$ . Consider the generic case where all parameters change from the two reference images:  $n^*, d^*, R$ . Then, we deduce from the above relations that

$$\begin{cases} \sigma &= (1 - \lambda(t)) \sigma_1 + \lambda(t) \sigma_2 \\ &= R_1^T \bar{M}(t) (p_1 - p_r(t)) \\ \bar{M}(t) &= (1 - \lambda(t)) M \left( \frac{n_1}{d_1} \right) + \lambda(t) \delta R^T M \left( \frac{n_2}{d_2} \right) \delta R \\ \tilde{M} &= \delta R^T M \left( \frac{n_2}{d_2} \right) \\ p_r(t) &= -\bar{M} \left( t, \frac{n_1}{d_1}, \lambda(t) \right)^{-1} \lambda(t) \tilde{M} \delta p \end{cases} \quad (29)$$

It follows that  $\sigma$  is of the form of Eq. (4), so that Theorem 2 can be used to ensure stability properties w.r.t. this non-stationary reference trajectory.

## 5. Simulation results

In this section we provide simulation results of the above presented control designs for visual servoing. First we present simulations for the stabilization case, Section 4.3 (Figures 2 and 3). Second, we present simulations for the trajectory tracking case introduced in Section 4.5 (Figures 4, 5, 6, and 7).

The controller gains parameters used for the simulations are as follows:

- $[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5] = [1, 2, 1, 1, 1]$
- saturation functions  $\text{sat}_\delta$  and  $\overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}$  are defined according to Equation (1) with  $\delta = [0.9; 1]$ ,  $\bar{\delta} = [1; 1.1]$ ,

We first consider the stabilization case, with the following initial conditions and parameters:

$$\begin{cases} n^* &= (0.7; -0.71; 0)^T, d^* = 3m \\ p_0 &= (-5.5m; 1.2m; 1.3m; )^T \\ v_0 &= (-2.3m/s; -1.6m/s; 0.4m/s)^T \\ \phi_0 &= -0.5^\circ, \theta_0 = 11.4^\circ, \psi_0 = 4.1^\circ \end{cases} \quad (30)$$

On Figure 2, the control law defined in Theorem 2 is used. On Figure 3, the simplified controller defined in Theorem 3 is used. It can be seen that both controller do stabilize the system.

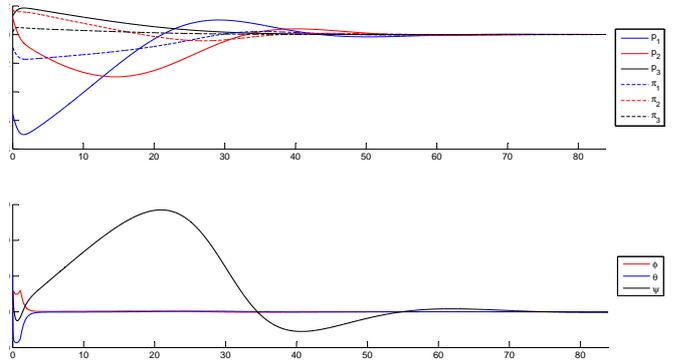


Figure 2: Result obtained with the control law defined in Theorem 2.

Next we present results obtained with the brutal switching versus interpolation methods. First a brutal switching between two reference images is performed, and the results are presented on Figure 4 (state evolution) and 5 (controls evolution). The switching is performed at time  $t = 15s$ . Next, the result obtained with the homography interpolation: Figure 6 for the state evolution, and Figure 7 for the controls evolution. As can be seen, both methods do stabilize the UAV. However, the brutal switching results in a more brutal behavior. Especially, the controls do have in this case a much greater magnitude, which can cause problems when actuators saturations are taken into account. This result shows the interest of the proposed method.

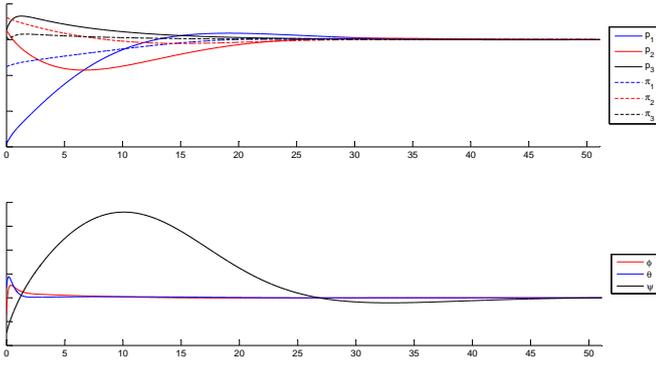


Figure 3: Result obtained with the control law defined in Theorem 3.

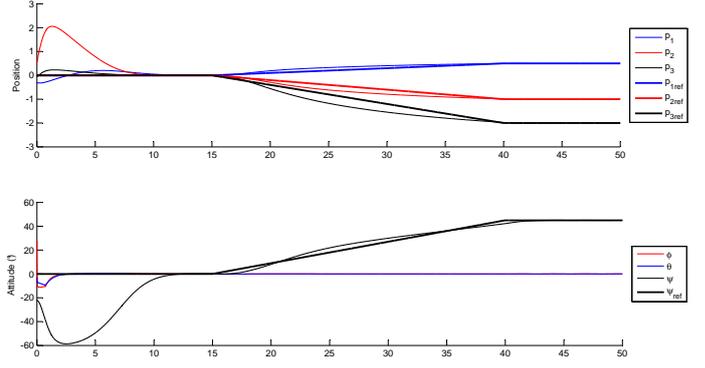


Figure 6: Result obtained with the homography interpolation proposed in Section 4.5.

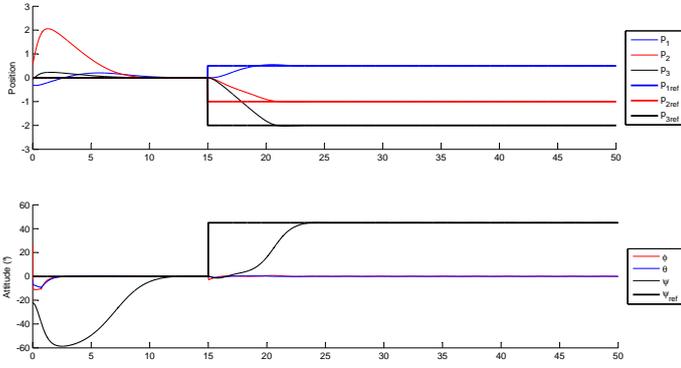


Figure 4: Result obtained with a brutal switching between two reference images.

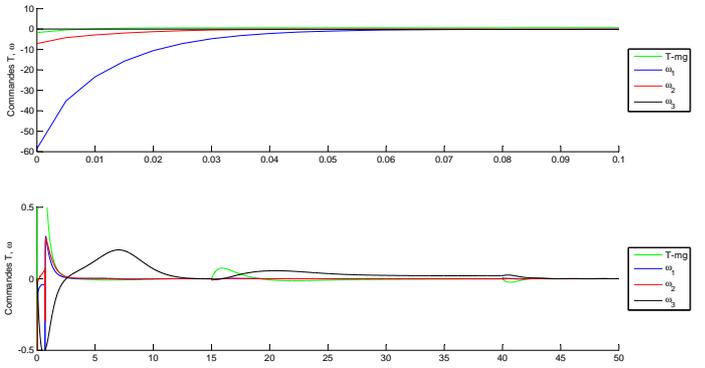


Figure 7: Evolution of the controls  $u, \omega$  obtained with the homography interpolation proposed in Section 4.5. Up: the beginning of the response. Down: zoom on the end of the response.

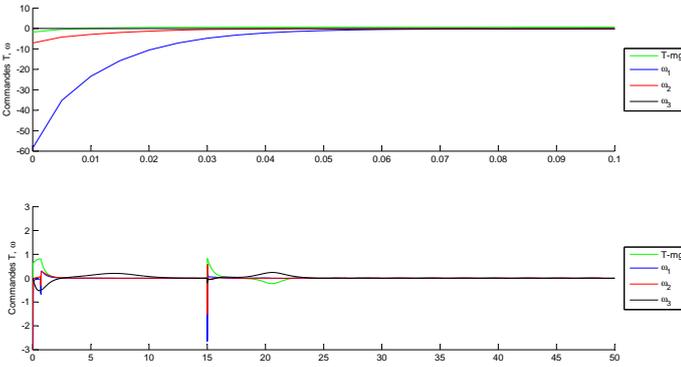


Figure 5: Evolution of the controls  $u, \omega$  obtained with a brutal switching between two reference images. Up: the beginning of the response. Down: zoom on the end of the response.

## 6. Conclusion

This paper investigates the control of a class of underactuated vehicles based on uncertain position measurements, together with linear and angular velocity and gravity measurements. A generic result has been proposed, with a control design able to perform stabilization or tra-

jectory following in a unified framework, depending on the position measurements provided. A simplified version of the design has been presented. These results have been applied to the VTOL UAV visual servoing case. Finally, simulation results have been presented, which show the efficiency of the control design.

## Annex: Proofs

### Theorem 1 case (i)

Theorem 1 being instrumental in the proof of Theorem 2, we shall first prove it. Let us first consider the case (i). In this case,  $\sigma$  and  $\delta v$  satisfy the following equations:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} &= \sigma \times \omega + R^T M R \delta v \\ \dot{v} &= v \times \omega - k_1 \text{sat}_{\delta}(|\sigma|^2) \sigma - k_2 \overline{\text{sat}}_{\delta}(|\delta v|) \delta v \end{cases} \quad (31)$$

Consider the following change of variables:

$$\begin{cases} x &= R \sigma \\ y &= R \delta v \end{cases}$$

Then, System (31) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x} &= M y \\ \dot{y} &= -k_1 \text{sat}_{\delta}(|x|^2) x - k_2 \overline{\text{sat}}_{\delta}(|y|^2) y \end{cases} \quad (32)$$

We now focus on the stability analysis of this system. We first show that, after some time, the  $y$ -correction term desaturates, i.e.

$$\exists T/\forall t \geq T, \left\{ \begin{array}{l} |y| \leq \bar{\delta}_m \\ \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2) = 1 \end{array} \right.$$

Recall that the two conditions above are equivalent by definition of the  $\overline{\text{sat}}$  function. Consider the function  $V$  defined by  $V(y) = \frac{1}{2}|y|^2$  and its derivative along the solutions of System (32). We have:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -k_1 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) y^T x - k_2 |y|^2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2) \\ &\leq k_1 |y| \delta_M - k_2 |y|^2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2) \end{aligned}$$

where the second inequality comes from the assumptions on  $\text{sat}_{\bar{\delta}}$ . By the definition of a saturation function,

$$|y| \geq \bar{\delta}_m \implies |y| \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2) \geq \bar{\delta}_m \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(\bar{\delta}_m) \geq \bar{\delta}_m$$

Therefore

$$|y| \geq \bar{\delta}_m \implies \dot{V} \leq (k_1 \delta_M - k_2 \bar{\delta}_m) |y| \leq (k_1 \delta_M - k_2 \bar{\delta}_m) \sqrt{2V}$$

which is equivalent to

$$V \geq \frac{(\bar{\delta}_m)^2}{2} \implies \dot{V} \leq (k_1 \delta_M - k_2 \bar{\delta}_m) \sqrt{2V}$$

Since  $k_1 \delta_M - k_2 \bar{\delta}_m < 0$  by assumption, we deduce that along any solution of System (32), there exists a time  $T$  such that  $V(y(t)) \leq (\bar{\delta}_m)^2/2$  for  $t \geq T$ . In other words,  $|y(t)| \leq \bar{\delta}_m$  for  $t \geq T$ . Then,  $\overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2) = 1$  and the solution is also solution to the following system:

$$\begin{cases} \dot{x} &= My \\ \dot{y} &= -k_1 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) x - k_2 y \end{cases} \quad (33)$$

Let us consider the candidate Lyapunov function  $V_0$  defined by:

$$\begin{aligned} V_0(\kappa, x, y) &= k_1 \int_0^{|x|^2} \text{sat}_{\bar{\delta}}(\tau) d\tau + y^T M a y \\ &\quad + \frac{2k_1}{k_2} \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) x^T M a y \\ &\quad + \kappa \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) x^T y \end{aligned} \quad (34)$$

where  $\kappa$  is a constant positive number to be defined. We show that, for  $\kappa$  small enough,  $V_0$  is indeed a Lyapunov function. More precisely, for  $k_1, k_2$  chosen according to the assumptions of the theorem, let:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\kappa} := k_2^2 \lambda_1 - k_1 \|M_a\|_M \|M\|_M C > 0 \\ \kappa_1 \triangleq 2\sqrt{k_1 \lambda_1} - 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M > 0 \\ \kappa_2 \triangleq \frac{2\bar{\kappa}}{k_2 \|M\|_M C} > 0 \\ \kappa_3 \triangleq \frac{2\bar{\kappa}}{k_2 \|M\|_M C + \frac{k_2^3}{4k_1}} > 0 \\ \kappa < \text{Min}\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\} \end{array} \right.$$

Note that  $\kappa_3 < \kappa_2$ . Note also that  $\bar{\kappa}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  are strictly positive from the theorem assumptions. Then  $\kappa$  can be chosen below this value. As we shall see, with such a

choice,  $V_0$  is a Lyapunov function. We first prove that  $V_0$  is positive definite and proper. Integrating by part and using the fact that  $\text{sat}'_{\bar{\delta}}(\tau) \leq 0 \forall \tau$ , we get

$$\begin{aligned} \int_0^{|x|^2} \text{sat}_{\bar{\delta}}(\tau) d\tau &= -\int_0^{|x|^2} \tau \text{sat}'_{\bar{\delta}}(\tau) d\tau \\ &\quad + |x|^2 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) \\ &\geq |x|^2 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{cases} V_0 &\geq a|x|^2 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) + b\sqrt{\text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2)}|x||y| + c|y|^2 \\ a &= k_1 \\ b &= -\left(\frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa\right) \\ c &= \lambda_1 \end{cases}$$

since  $\sup_{\tau} \sqrt{\text{sat}_{\bar{\delta}}(\tau)} = 1$ . Then we deduce that  $V_0$  is positive definite provided that

$$\left[ \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \right]^2 < 4k_1 \lambda_1$$

which is equivalent to  $\kappa < \kappa_1$ . Since  $\text{sat}_{\bar{\delta}}(\tau)$  is strictly positive, this ensures that  $V_0$  is a positive definite function of  $x$  and  $y$ , and  $V_0$  is proper due to the assumption  $\tau \text{sat}_{\bar{\delta}}(\tau) \rightarrow +\infty$  as  $\tau \rightarrow +\infty$ . Let us now prove that  $V_0$  is non-increasing along the solutions of System (33). Differentiating  $V_0$  along these solutions yields

$$\begin{cases} \dot{V}_0 &= -2k_2 y^T M_s y - 2\frac{k_1}{k_2} y^T M_a f_{\bar{\delta}}(x) M y \\ &\quad - \kappa k_1 \text{sat}_{\bar{\delta}}^2(|x|^2) |x|^2 + \kappa y^T M f_{\bar{\delta}}(x) y \\ &\quad - \kappa k_2 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) x^T y \\ f_{\bar{\delta}}(x) &:= \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) + 2\text{sat}'_{\bar{\delta}}(|x|^2) x x^T \end{cases}$$

We deduce that

$$\dot{V}_0 \leq -C_{1,1}|y|^2 + C_{1,2}|y| \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2) |x| - C_{1,3} \text{sat}_{\bar{\delta}}^2(|x|^2) |x|^2$$

with:

$$\begin{cases} C &\triangleq \sup_{\tau} (\text{sat}_{\bar{\delta}}(\tau) + 2\tau |\text{sat}'_{\bar{\delta}}(\tau)|) \\ C_{1,1} &\triangleq 2k_2 \lambda_1 - \left(\frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa\right) \|M\|_M C \\ C_{1,2} &\triangleq \kappa k_2 \\ C_{1,3} &\triangleq \kappa k_1 \end{cases}$$

We now show that this expression is negative definite with the choice of  $\kappa$  made above. Indeed,  $C_{1,1} > 0$  because  $\kappa < \kappa_2$ .  $C_{1,3} > 0$  obviously. Finally,  $C_{1,2}^2 < 4C_{1,1}C_{1,3}$  is equivalent to  $\kappa < \kappa_3$ . As a result, the derivative of  $V_0$  is negative definite which ends the proof.

*Theorem 1 case (ii)*

Let us now address case (ii). The system equations are now given by:

$$\begin{cases} \dot{x} &= M(t)y + \dot{M}(t)\delta p \\ \dot{y} &= -k_1 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|x|^2)x - k_2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2)y \end{cases} \quad (35)$$

with  $\delta p = p - p_r(t)$ . The same argument as before shows that the  $y$  term desaturates, the system becoming:

$$\begin{cases} \dot{x} &= M(t)y + \dot{M}(t)\delta p \\ \dot{y} &= -k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2)x - k_2 y \end{cases} \quad (36)$$

$V_0$  is still defined according to Eq. (34), but with an uncertain matrix  $M(t)$  which is now time-varying. Still, for all  $t$ ,  $V_0$  is positive definite and qualifies as a tentative Lyapunov function. In its derivation,  $\dot{M}$  terms appear; more precisely, the derivative now reads:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 &= \dot{V}_0 \Big|_{M=cst} + 2k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2)x^T \dot{M} \delta p \\ &+ 2 \frac{k_1}{k_2} \delta p^T \dot{M}^T f_\delta(x) M_a y + \kappa \delta p^T \dot{M}^T f_\delta(x) y \\ &+ y^T \dot{M} y + 2 \frac{k_1}{k_2} \text{sat}_\delta(|x|^2)x^T \dot{M}_a y \end{cases} \quad (37)$$

Thus, recalling that  $|\delta p| \leq \frac{1}{\lambda_1}|x|$  this derivative can be bounded according to:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &\leq \dot{V}_0 \Big|_{M=cst} \\ &+ \sup_t \left\{ \dot{M}(t) \right\} \left[ \frac{2k_1}{\lambda_1} \text{sat}_\delta(|x|^2)|x|^2 + |y|^2 \right] \\ &+ \left( \left( 2 \frac{k_1}{k_2} + \kappa \right) \frac{C}{\lambda_1} + 2 \frac{k_1}{k_2} \text{sat}_\delta(|x|^2) \right) |x||y| \end{aligned} \quad (38)$$

We thus get:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &\leq - \left( C_{1,1} - \|\dot{M}\|_M \right) |y|^2 - C_{1,3} \text{sat}_\delta^2(|x|^2)|x|^2 \\ &+ \left( C_{1,2} + 2 \frac{k_1}{k_2} \|\dot{M}\|_M \right) \text{sat}_\delta(|x|^2)|x||y| \\ &+ \|\dot{M}\|_M \left[ \frac{2k_1}{\lambda_1} \text{sat}_\delta(|x|^2)|x|^2 \right] \\ &+ \left( 2 \frac{k_1}{k_2} + \kappa \right) \frac{C}{\lambda_1} |x||y| \end{aligned} \quad (39)$$

In order to prove the semi-global asymptotic stability, for a given set of possible initial conditions, we shall show that there exists gains such that the system converges. Let  $\mathcal{C}_0$  be such a compact set of possible values for  $(x, y)$  at time 0. Next we define three bounds associated with  $V_0$  and  $\mathcal{C}_0$ :

- $V_{0,M} = \sup_{(x,y) \in \mathcal{C}_0} V_0(x, y)$  the maximum possible value for  $V_0$  with the assumed compact set for initial conditions. We shall prove that  $V_0$  will never exceed this value;
- $x_M = \sup_{(x,y)/V_0(x,y) \leq V_{0,M}} |x|$  the maximum value that  $|x|$  can take knowing that, as we will show below,  $V_0$  will never exceed the previously defined maximum;
- $s_m = \inf_{|x| \leq x_M} (\text{sat}_\delta(|x|^2))$  such that, for any  $x$ ,  $|x| \leq x_M \implies \text{sat}_\delta(|x|^2) \geq s_m$ .

We now show that these bounds do exist and are strictly positive.  $V_{0,M}$  exists because  $\mathcal{C}_0$  is compact by assumption, and  $V_0$  is continuous. It is strictly positive because  $\mathcal{C}_0$  is nonempty, and  $V_0$  is positive definite.  $x_M$  exists because  $V_0$  is radially unbounded. It is strictly positive because the set where the upper bound is defined,  $(x, y) / V_0(x, y) \leq V_{0,M}$ ,

at least contains  $\mathcal{C}_0$ , which is nonempty. Finally,  $s_m$  exists since  $\text{sat}_\delta(\tau^2) = 1$  for  $0 \leq \tau \leq \delta_m$  and the function  $\tau \mapsto \tau \text{sat}_\delta(\tau^2)$  is non decreasing on  $\mathbb{R}^+$ . As a result,  $\tau \geq \delta_m \implies \tau \text{sat}_\delta(\tau^2) \geq \delta_m$ . Thus  $\tau \geq \delta_m \implies \text{sat}_\delta(\tau^2) \geq \frac{\delta_m}{\tau}$ . Finally,  $|x| \leq x_M \implies \text{sat}_\delta(|x|^2) \geq s_m$  with  $s_m = \min\left(1, \frac{\delta_m}{x_M}\right)$ . As long as  $|x| \leq x_M$ , we have the following inequality:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 &\leq -C_{2,1}|y|^2 + C_{2,2} \text{sat}_\delta(|x|^2)|x||y| \\ &\quad - C_{2,3} \text{sat}_\delta^2(|x|^2)|x|^2 \\ C &= \sup_\tau (\text{sat}_\delta(\tau) + 2\tau |\text{sat}'_\delta(\tau)|) \\ C_{2,1} &\triangleq 2k_2 \lambda_1 - \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \|M\|_M C \\ &\quad - \|\dot{M}\|_M \\ C_{2,2} &\triangleq \kappa k_2 \\ &\quad + \left[ 2 \frac{k_1}{k_2} + \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \frac{C}{s_m \lambda_1} \right] \|\dot{M}\|_M \\ C_{2,3} &\triangleq \kappa k_1 - \frac{2k_1}{s_m \lambda_1} \|\dot{M}\|_M \end{cases} \quad (40)$$

We now want to show that, given the initial conditions and bound  $\|\dot{M}\|_M$ , it is possible to find gains such that this expression is negative definite, that is

$$\begin{cases} C_{2,2}^2 &< 4C_{2,1}C_{2,3} \\ C_{2,1} &> 0 \\ C_{2,3} &> 0 \end{cases} \quad (41)$$

In order to prove this, we will first gather all necessary conditions for the gains. There are three such conditions:

- Condition 1:  $V_0 > 0$
- Condition 2:  $\dot{V}_0 < 0$
- Condition 3: the  $y$  term desaturates

Condition 1 holds true as long as:

$$\left[ \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \sup_\tau \sqrt{\text{sat}_\delta(\tau)} \right]^2 < 4k_1 \lambda_1 \quad (42)$$

Condition 2 is true when Eq. (41) holds. For Condition 3, one also needs:

$$k_1 \delta_m < k_2 \bar{\delta}_m \quad (43)$$

To show that there are gains verifying all these conditions, we consider defining  $k_1 = \alpha k_2^2$  with  $\alpha$  constant and  $k_2$  going to infinity. Then, we first fix  $\alpha$ . Second, we show that for  $k_2$  large enough, it is possible to find  $\kappa$  satisfying Eq. (42) (Condition 1) and Eq. (41) (Condition 2). Finally, we fix  $\delta_{m,M}, \bar{\delta}_{m,M}$  to satisfy Eq. (43) (Condition 3). Indeed, with  $k_1 = \alpha k_2^2$ , the gain condition in the theorem is satisfied if  $\|M_a\|_M = 0$ , and otherwise reads:

$$\alpha < \frac{\lambda_1}{\|M_a\|_M M_a x \{C \lambda_2, \|M_a\|_M\}} \quad (44)$$

Also, noticing  $\sup_\tau \text{sat}_\delta(\tau) = 1$ , Eq. (42) boils down to:

$$\alpha < \frac{\lambda_1}{\|M_a\|_M^2} \quad (45)$$

which is below the previous value. Thus, fixing  $\alpha$  according to Eq. (44) is enough for both. Now, the conditions for  $V_0$  to be a Lyapunov function are the following:

- $V_0 > 0$  for  $\kappa < 2k_2(\sqrt{\alpha\lambda_1} - \alpha\|M_A\|_M)$ ;
- $C_{2,1} > 0$  iff  $\kappa < \frac{2k_2(\lambda_1 - \alpha\|M_A\|_M\|M\|_M C) - \|\dot{M}\|_M}{\|M\|_M C}$ ;
- $C_{2,3} > 0$  iff  $\kappa > \frac{2\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1}$ ;
- $C_{2,2}^2 < 4C_{2,1}C_{2,3}$ ;

Consider  $k_2 = k_2^1$  large enough that:

$$\begin{cases} 2k_2(\sqrt{\alpha\lambda_1} - \alpha\|M_A\|_M) & > \frac{2\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1} \\ \frac{2k_2(\lambda_1 - \alpha\|M_A\|_M\|M\|_M C) - \|\dot{M}\|_M}{\|M\|_M C} & > \frac{2\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1} \end{cases} \quad (46)$$

With such a value for  $k_2$ , the three conditions on  $\kappa$  can be satisfied, since there are two upper bounds, and one lower bound which is lower than the previous ones, all of them being strictly positive. Thus, fixing  $k_2$  larger than  $k_2^1$ , it is possible to find a compatible  $\kappa$ . Now, fix such a  $\kappa$  and we shall show that  $k_2$  possibly even larger renders it possible to satisfy  $C_{2,2}^2 < 4C_{2,1}C_{2,3}$ . Indeed, when  $k_2$  goes to infinity,  $C_{2,2}^2$  increases as  $k_2^2$  while  $4C_{2,1}C_{2,3}$  increases as  $k_2^3$ , which shows that the inequality will hold for  $k_2$  large enough. Note that  $k_2$  larger does not contradict the earlier choice for  $\kappa$  with the upper bound mentioned above. Let us chose such  $k_2$ , and the associated  $k_1 = \alpha k_2^2$ . Finally, fix  $\delta_{m,M}, \bar{\delta}_{m,M}$  to satisfy Eq. (43), together with:

$$\begin{cases} \delta_m & \leq \delta_M \\ \bar{\delta}_m & \leq \bar{\delta}_M \end{cases}$$

which is obviously possible. Now, the theorem is proven by absurd according to the following observation: if there is no convergence, then  $V_0$  does not decrease at some point. This means, from the previous development, that  $|x| > x_M$  at some point. Defining  $T_0$  the first time where this inequality holds, we see that, at  $T_0$ ,  $V_0 > V_{0,M}$  (if not,  $|x| \leq x_M$  by definition). Thus, at some point in time before  $T_0$ ,  $\dot{V}_0 > 0$ . But this would mean, in turn, that  $|x| > x_M$  at this point in time, which contradicts  $T_0$  being minimal. As a result,  $V_0$  always decreases,  $|x| \leq x_M$  always holds, and there is convergence, which ends the proof.

*Theorem 1 case (iii)*

Finally, let us address case (iii). In this case, the dynamics of the reference point cannot be accounted for as in the previous cases. The closed-loop equation in  $(x, y)$  coordinates is now given by:

$$\begin{cases} \dot{x} & = M(t)y - M(t)\dot{p}_r + \dot{M}(t)\delta p \\ \dot{y} & = -k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2)x - k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(|y|^2)y \end{cases} \quad (47)$$

The  $y$  term once more desaturates, giving:

$$\begin{cases} \dot{x} & = M(t)y - M(t)\dot{p}_r + \dot{M}(t)\delta p \\ \dot{y} & = -k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2)x - k_2 y \end{cases} \quad (48)$$

Thus, new terms appear in the derivative of  $V_0$ , according to:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 & \leq \dot{V}_0|_{\text{dynam known}} - \dot{p}_r^T M^T g(x, y) \\ g(x, y) & = 2k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2)x + f_\delta(x) \left[ 2\frac{k_1}{k_2} M_a y + \kappa y \right] \end{cases} \quad (49)$$

As a result of the study for case (ii), we get:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 & \leq -C_{2,1}|y|^2 + C_{2,2} \text{sat}_\delta(|x|^2)|x||y| \\ & \quad - C_{2,3} \text{sat}_\delta^2(|x|^2)|x|^2 - \dot{p}_r^T M^T g(x, y) \\ g(x, y) & = 2k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2)x + f_\delta(x) \left[ 2\frac{k_1}{k_2} M_a y + \kappa y \right] \end{cases} \quad (50)$$

Then:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 & \leq -C_{2,1}|y|^2 + C_{2,2} \text{sat}_\delta(|x|^2)|x||y| \\ & \quad - C_{2,3} \text{sat}_\delta^2(|x|^2)|x|^2 \\ & \quad + 2k_1 V_M M_M \text{sat}_\delta(|x|^2)|x| \\ & \quad + C V_M M_M \left[ 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right] |y| \\ C & = \sup_\tau (\text{sat}_\delta(\tau) + 2\tau|\text{sat}'_\delta(\tau)|) \end{cases} \quad (51)$$

In order to prove practical semi-global stability consider  $\epsilon > 0$  and let us prove that, for a given compact set  $\mathcal{C}_0$  of possible initial conditions, there are gains such that  $x, y$  enter the sphere of radius  $\epsilon$  around zero. Let  $V_0^\epsilon$  be such that, when  $V_0 \leq V_0^\epsilon$ ,  $\text{sat}_\delta(|x|^2)|x| \leq \epsilon$  and  $|y| \leq \epsilon$ . Let  $\epsilon'$  be the minimum value taken by the maximum between  $\text{sat}_\delta(|x|^2)|x|$  and  $|y|$  when  $V_0 > V_0^\epsilon$ . Consider the case when  $\text{sat}_\delta(|x|^2)|x| > \epsilon'$  (with no condition on the size of  $|y|$ ). Then we have:

$$\begin{cases} \dot{V}_0 & \leq -C_{3,1}|y|^2 + C_{3,2} \text{sat}_\delta(|x|^2)|x||y| \\ & \quad - C_{3,3} \text{sat}_\delta^2(|x|^2)|x|^2 \\ C & = \sup_\tau (\text{sat}_\delta(\tau) + 2\tau|\text{sat}'_\delta(\tau)|) \\ C_{3,1} & \triangleq 2k_2\lambda_1 - \left( 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \|M\|_M C \\ & \quad - \|\dot{M}\|_M \\ C_{3,2} & \triangleq \kappa k_2 + 2\frac{k_1}{k_2} \|\dot{M}\|_M \\ & \quad + C \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right) \left( 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \\ C_{3,3} & \triangleq \kappa k_1 - 2k_1 \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right) \end{cases} \quad (52)$$

Now, we state that, under a similar approach than the one developed for case (ii) above, it is possible to find gains making this expression negative definite. Indeed, this is the case iff

$$\begin{cases} C_{3,2}^2 & < 4C_{3,1}C_{3,3} \\ C_{3,1} & > 0 \\ C_{3,3} & > 0 \end{cases} \quad (53)$$

As for case (ii), three conditions need be satisfied:

- Condition 1:  $V_0 > 0$
- Condition 2:  $\dot{V}_0 < 0$
- Condition 3: the  $y$  term desaturates

Condition 1 is equivalent to:

$$\left[ \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \sup_{\tau} \sqrt{\text{sat}_{\delta}(\tau)} \right]^2 < 4k_1\lambda_1 \quad (54)$$

and Condition 3 to:

$$k_1\delta_M < k_2\bar{\delta}_m \quad (55)$$

Again, we seek  $k_1 = \alpha k_2^2$ , and first define the same condition as for case (ii) on  $\alpha$  so that the gain condition in the theorem be satisfied. This, in turn, ensures Condition 1 can be satisfied, as long as the same condition on  $\kappa, k_2$  holds. The conditions involving both  $\kappa$  and  $k_2$  now read:

- $V_0 > 0$  for  $\kappa < 2k_2(\sqrt{\alpha\lambda_1} - \alpha\|M_A\|_M)$ ;
- $C_{3,1} > 0$  iff  $\kappa < \frac{2k_2(\lambda_1 - \alpha\|M_A\|_M\|M\|_M C) - \|\dot{M}\|_M}{\|M\|_M C}$ ;
- $C_{3,3} > 0$  iff  $\kappa > 2\left(\frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'}\right)$ ;
- $C_{3,2}^2 < 4C_{3,1}C_{3,3}$ ;

Thus, choosing  $k_2$  large enough that:

$$\begin{cases} 2k_2(\sqrt{\alpha\lambda_1} - \alpha\|M_A\|_M) > \underline{\kappa} \\ \frac{2k_2(\lambda_1 - \alpha\|M_A\|_M\|M\|_M C) - \|\dot{M}\|_M}{\|M\|_M C} > \underline{\kappa} \end{cases} \quad (56)$$

with  $\underline{\kappa} \triangleq 2\left(\frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m\lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'}\right)$ , it is possible to find  $\kappa$  satisfying these inequalities. Next,  $\alpha$  and  $\kappa$  being thus fixed,  $C_{3,2}^2$  increases as  $k_2^2$  while  $4C_{3,1}C_{3,3}$  increase as  $k_2^3$  so that there is  $k_2$  such that the inequality holds. Finally, the inequality Eq. (55) is obtained by choice of  $\delta_{m,M}, \bar{\delta}_{m,M}$ . Thus, under these assumptions, we can find gains such that we get:

$$\dot{V}_0 \leq -\nu V_0$$

for some  $\nu > 0$ . Similar inequality holding for the case where  $y$  is large, as long as either  $\text{sat}_{\delta}(|x|^2)|x| > \epsilon'$  or  $|y| > \epsilon'$ , the previous inequality holds.

Then, we have the following: as long as either  $\text{sat}_{\delta}(|x|^2)|x| > \epsilon'$  or  $|y| > \epsilon'$ ,  $\dot{V}_0 \leq -\nu V_0$ . Thus, this inequality holds as long as  $V_0 > V_0^{\epsilon}$  since, when this last inequality holds, one of the other does as well. As a result,  $V_0$  decreases until  $V_0 \leq V_0^{\epsilon}$ . But this, in turn, implies that  $\text{sat}_{\delta}(|x|^2)|x| \leq \epsilon$  and  $|y| \leq \epsilon$ .

*Theorem 2 case (i)*

The proof shows similarities to the previous one although extra steps have to be considered. First, one easily verifies that  $\sigma, v, \gamma$ , and  $\eta$  satisfy the following equations:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \sigma \times \omega + R^T M R \delta v \\ \dot{v} = v \times \omega - k_1 \text{sat}_{\delta}(|\eta|^2) \eta - k_2 \overline{\text{sat}}_{\delta}(|\delta v|^2) \delta v + \tilde{\mu} \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega \\ \dot{\eta} = \eta \times \omega - k_3(\eta - \sigma) \end{cases} \quad (57)$$

where  $\tilde{\mu} = -\bar{\mu}_3 e_3 + \bar{\mu}$ .

Let us first prove that  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ . Recall the following lemma shown in Hua et al. (2009):

**Lemma 1** Assume that

- $\bar{\mu} = R^T \mu$  does not vanish,
- $\dot{\mu}$  does not depend on  $\omega$ ,
- $\bar{\mu}(0) \neq -|\bar{\mu}(0)|e_3$ .

Let  $k_4$  denote a strictly positive constant and

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{k_4|\bar{\mu}|_2}{(|\bar{\mu}|+\bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(e_1) R^T \dot{\mu} \\ \omega_2 = \frac{k_4|\bar{\mu}|_1}{(|\bar{\mu}|+\bar{\mu}_3)^2} - \frac{1}{|\bar{\mu}|^2} \bar{\mu}^T S(e_2) R^T \dot{\mu} \end{cases} \quad (58)$$

Then  $\bar{\mu}$  asymptotically converges to  $|\bar{\mu}|e_3$ .

The assumptions being obviously verified in our case, the lemma applies and shows that  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ . We now first analyze System (57) with  $\tilde{\mu} = 0$ . Consider the following change of variables :

$$\begin{cases} x = R\sigma \\ y = R\delta v \\ z = R\eta \end{cases}$$

System (57) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x} = My \\ \dot{y} = -k_1 \text{sat}_{\delta}(|z|^2) z - k_2 \overline{\text{sat}}_{\delta}(|y|^2) y \\ \dot{z} = -k_3(z - x) \end{cases} \quad (59)$$

As in the proof of Theorem 1 case (i), we show that the  $y$  term desaturates with the same function  $V$  and same argument with  $z$  instead of  $x$  in the  $\dot{y}$  equation. This ensures that for  $t \geq T$ ,  $\overline{\text{sat}}_{\delta}(|y|^2) = 1$  and the solution is also solution to the system without  $y$  saturation, which may be written as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} = My \\ \dot{y} = -k_1 \text{sat}_{\delta}(|x|^2) x - k_2 y \\ \quad - k_1 [\text{sat}_{\delta}(|z|^2) z - \text{sat}_{\delta}(|x|^2) x] \\ \dot{z} - \dot{x} = -k_3(z - x) - My \end{cases} \quad (60)$$

Note that System (60) is equivalent to System (33) when  $z = x$ . Asymptotic stability of this system can be proved using the following Lyapunov function:

$$V_1(\kappa, x, y, z) = V_0(\kappa, x, y) + (z - x)^2 \quad (61)$$

Due to space limitation, we only provide a sketch of the proof (details are available upon request to the authors). One can show that:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -C_{4,1}|y|^2 - C_{4,2}|z - x|^2 - C_{4,3}\text{sat}_{\delta}^2(|x|^2)|x|^2 \\ &\quad + C_{4,4}|y||z - x| + C_{4,5}|y|\text{sat}_{\delta}(|x|^2)|x| \\ &\quad + C_{4,6}|z - x|\text{sat}_{\delta}(|x|^2)|x| \end{aligned}$$

with:

$$\begin{cases} C &\triangleq \sup_{\tau} (\text{sat}_{\delta}(\tau) + 2\tau|\text{sat}'_{\delta}(\tau)|) \\ C_{4,1} &\triangleq 2k_2\lambda_1 - \left(\frac{2k_1}{k_2}\|M_a\|_M + \kappa\right)\|M\|C \\ C_{4,2} &\triangleq 2k_3 \\ C_{4,3} &\triangleq \kappa k_1 \\ C_{4,4} &\triangleq 2Ck_1\|M_s\| + 2\|M\| \\ C_{4,5} &\triangleq \kappa k_2 \\ C_{4,6} &\triangleq \left(2C\frac{k_1^2}{k_2}\|M_a\|_M + \kappa k_1 C\right) \end{cases}$$

Define and assume:

$$\begin{cases} \bar{\kappa} & := k_2^2 \lambda_1 - k_1 \|M_a\|_M \|M\|_M C > 0 \\ \kappa_1 & \triangleq 2\sqrt{k_1 \lambda_1} - 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M > 0 \\ \kappa_2 & \triangleq \frac{2\bar{\kappa}}{k_2 \|M\|_M C} > 0 \\ \kappa & < \text{Min}\{\kappa_1, \kappa_2\} \end{cases}$$

This condition ensures  $V_0 > 0$  and  $C_{4,1} > 0$ . Obviously,  $C_{4,2} > 0$  and  $C_{4,3} > 0$ . It remains to show that  $\kappa$  can be chosen possibly smaller, and  $k_3$  large enough that:

$$4C_{4,1}C_{4,2}C_{4,3} > C_{4,1}C_{4,6}^2 + C_{4,2}C_{4,5}^2 + C_{4,3}C_{4,4}^2 + \frac{1}{2}C_{4,4}C_{4,5}C_{4,6} \quad (62)$$

Now, the only term depending on  $k_3$  is  $C_{4,2}$ . It is multiplied by a term in  $\kappa^2$  to the right, and by  $\kappa$  to the left. As a result, with  $\kappa$  small enough and  $k_2$  large enough, the above inequality can be satisfied. Finally, when a vanishing term  $\tilde{\mu}$  is added to System (60) in the  $\dot{y}$  equation, the desaturation argument still holds since we get:

$$\frac{1}{2}|y|^2 \leq (k_1 \delta_M - k_2 \bar{\delta}_m - \tilde{\mu}(t))|y|$$

with  $\tilde{\mu}(t) \rightarrow 0$  and  $k_1 \delta_M - k_2 \bar{\delta}_m < 0$ . Also, to the derivative of  $V_1$  is added a term depending on  $\tilde{\mu}(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 & = \dot{V}_1 \Big|_{\tilde{\mu}=0} + \left( y^T M + \frac{2k_1}{k_2} \text{sat}_\delta(|x|^2) x^T M_a \right. \\ & \quad \left. + \kappa \text{sat}_\delta(|x|^2) x^T \right) \tilde{\mu}(t) \\ & \leq \dot{V}_1 \Big|_{\tilde{\mu}=0} + 2\lambda_2 |y| |\tilde{\mu}(t)| \\ & \quad + \left( 2\frac{k_1}{k_2} \lambda_2 + \kappa \right) \text{sat}_\delta(|x|^2) |x| |\tilde{\mu}(t)| \end{cases} \quad (63)$$

As a result, for each value of the decreasing function of time  $\tilde{\mu}(t)$ , the quadratic terms (quadratic in terms of  $\text{sat}_\delta(|x|^2), y$ ) in  $\dot{V}_1$  dominate these linear term as long as  $\text{sat}_\delta(|x|^2) |x| \gg |\tilde{\mu}(t)|$  or  $|y| \gg |\tilde{\mu}(t)|$ , having  $V_1$  decrease. Thus, as  $|\tilde{\mu}(t)|$  decreases, the system is stable. Note that one has to define the saturation levels  $\delta_{m,M}, \bar{\delta}_{m,M}$  such that:  $k_1 \delta_M + k_2 \bar{\delta}_m < g - A_M$  to avoid a singularity. This is possible since, by assumption  $A_M < g$ .

*Theorem 2 case (ii)*

Now, the system can be written as follows:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} & = \sigma \times \omega + R^T M R \delta v + R^T \dot{M}(t) \delta p \\ \dot{v} & = v \times \omega - k_1 \text{sat}_\delta(|\eta|^2) \eta - k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(|\delta v|^2) \delta v + \tilde{\mu} \\ \dot{\gamma} & = \gamma \times \omega \\ \dot{\eta} & = \eta \times \omega - k_3 (\eta - \sigma) \end{cases} \quad (64)$$

with  $\delta p = p - p_r(t)$  and  $\tilde{\mu} = -\bar{\mu}_3 e_3 + \bar{\mu}$ . Again, Lemma 1 in Hua et al. (2009) permits to conclude that  $\bar{\mu}$  asymptotically converges to  $|\bar{\mu}| e_3$  and  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ . We first analyze System (64) with  $\tilde{\mu} = 0$ . Consider the following change of variables :

$$\begin{cases} x & = R\sigma \\ y & = R\delta v \\ z & = R\eta \end{cases}$$

System (64) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x} & = My + \dot{M}(t) \delta p \\ \dot{y} & = -k_1 \text{sat}_\delta(|z|^2) z - k_2 \overline{\text{sat}}_\delta(|y|^2) y \\ \dot{z} & = -k_3 (z - x) \end{cases} \quad (65)$$

As before, we show that the  $y$  term desaturates with the same function  $V$  and same argument with  $z$  instead of  $x$  in the  $\dot{y}$  equation. This ensures that for  $t \geq T$ ,  $\overline{\text{sat}}_\delta(|y|^2) = 1$  and the solution is also solution to the system without  $y$  saturation, which may be written as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} & = My + \dot{M}(t) \delta p \\ \dot{y} & = -k_1 \text{sat}_\delta(|x|^2) x - k_2 y \\ & \quad - k_1 [\text{sat}_\delta(|z|^2) z - \text{sat}_\delta(|x|^2) x] \\ \dot{z} - \dot{x} & = -k_3 (z - x) - My - \dot{M}(t) \delta p \end{cases} \quad (66)$$

Note that System (66) is equivalent to System (36) when  $z = x$ . Asymptotic stability of this system can be proved using the following Lyapunov function:

$$V_1(\kappa, x, y, z) = V_0(\kappa, x, y) + (z - x)^2 \quad (67)$$

Due to space limitation, we only provide a sketch of the proof (details are available upon request to the authors). One can show that, under similar assumptions as to prove Theorem 1 case(ii), with the same definition for  $s_m$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq -C_{5,1}|y|^2 - C_{5,2}|z - x|^2 - C_{5,3} \text{sat}_\delta^2(|x|^2) |x|^2 \\ & \quad + C_{5,4}|y||z - x| + C_{5,5}|y| \text{sat}_\delta(|x|^2) |x| \\ & \quad + C_{5,6}|z - x| \text{sat}_\delta(|x|^2) |x| \end{aligned}$$

with:

$$\begin{cases} C & \triangleq \sup_\tau (\text{sat}_\delta(\tau) + 2\tau |\text{sat}'_\delta(\tau)|) \\ C_{5,1} & \triangleq 2k_2 \lambda_1 - \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \|M\|_M C \\ & \quad - \|\dot{M}\|_M \\ C_{5,2} & \triangleq 2k_3 \\ C_{5,3} & \triangleq \kappa k_1 - \frac{2k_1}{s_m \lambda_1} \|\dot{M}\|_M \\ C_{5,4} & \triangleq 2C k_1 \|M_s\| + 2\|M\| \\ C_{5,5} & \triangleq \kappa k_2 \\ & \quad + \left[ 2\frac{k_1}{k_2} + \left( 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \frac{C}{s_m \lambda_1} \right] \|\dot{M}\|_M \\ C_{5,6} & \triangleq \left( 2C \frac{k_1^2}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa k_1 C \right) + \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m \lambda_1} \end{cases}$$

We will now follow the earlier presented path to show that there exists a set of gains such that this is a negative definite function. As before, we gather all conditions needed for the gains. In this case, four conditions need be satisfied for gains to exist:

- Condition 1:  $V_0 > 0$
- Condition 2:  $\dot{V}_0 < 0$
- Condition 3: the  $y$  term desaturates
- Condition 4:  $k_1 \delta_M + k_2 \bar{\delta}_m < g - A_M$  (to avoid singularity)



with:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \triangleq \sup_{\tau} (\text{sat}_{\delta}(\tau) + 2\tau|\text{sat}'_{\delta}(\tau)|) \\ C_{6,1} \triangleq 2k_2\lambda_1 - \left( \frac{2k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \|M\|C \\ \quad - \|\dot{M}\|_M \\ C_{6,2} \triangleq 2k_3 \\ C_{6,3} \triangleq \kappa k_1 - 2k_1 \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m \lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right) \\ C_{6,4} \triangleq 2Ck_1 \|M_s\| + 2\|M\| \\ C_{6,5} \triangleq \kappa k_2 + 2\frac{k_1}{k_2} \|\dot{M}\|_M \\ \quad + C \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m \lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right) \left( 2\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa \right) \\ C_{6,6} \triangleq \left( 2C\frac{k_1}{k_2} \|M_a\|_M + \kappa k_1 C \right) \\ \quad + 2 \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m \lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right) \end{array} \right.$$

We will now follow the earlier presented path to show that there exists a set of gains such that this is a negative definite function. As before, we gather all conditions needed for the gains. In this case, four conditions need be satisfied for gains to exist:

- Condition 1:  $V_0 > 0$
- Condition 2:  $\dot{V}_0 < 0$
- Condition 3: the  $y$  term desaturates
- Condition 4:  $k_1\delta_M + k_2\bar{\delta}_M < g$  (to avoid singularity)

Again, we seek  $k_1 = \alpha k_2^2$ , and first define the same condition as for case (ii) on  $\alpha$  so that the gain condition in the theorem be satisfied. This, in turn, ensures Condition 1 can be satisfied, as long as the same condition on  $\kappa, k_2$  holds. The conditions involving both  $\kappa$  and  $k_2$  now read:

- $V_0 > 0$  for  $\kappa < 2k_2 (\sqrt{\alpha\lambda_1} - \alpha\|M_A\|_M)$ ;
- $C_{6,1} > 0$  iff  $\kappa < \frac{2k_2(\lambda_1 - \alpha\|M_A\|_M\|M\|_M C) - \|\dot{M}\|_M}{\|M\|_M C}$ ;
- $C_{6,2} > 0$  is readily satisfied;
- $C_{6,3} > 0$  iff  $\kappa > 2 \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m \lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right)$ ;

Thus, choosing  $k_2$  large enough that:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2k_2 (\sqrt{\alpha\lambda_1} - \alpha\|M_A\|_M) > \underline{\kappa} \\ \frac{2k_2(\lambda_1 - \alpha\|M_A\|_M\|M\|_M C) - \|\dot{M}\|_M}{\|M\|_M C} > \underline{\kappa} \end{array} \right. \quad (74)$$

with  $\underline{\kappa} \triangleq 2 \left( \frac{\|\dot{M}\|_M}{s_m \lambda_1} + \frac{V_M M_M}{\epsilon'} \right)$ , it is possible to find  $\kappa$ , while increasing  $k_2$  will still be compatible. Next, for Condition 2 to hold, the following condition is necessary and sufficient:

$$4C_{6,1}C_{6,2}C_{6,3} > C_{6,1}C_{6,6}^2 + C_{6,2}C_{6,5}^2 + C_{6,3}C_{6,4}^2 + \frac{1}{2}C_{6,4}C_{6,5}C_{6,6} \quad (75)$$

Now, with  $k_1 = \alpha k_2^2$  and  $k_2, k_3$  going to infinity, we have the following

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{6,1} \quad \alpha \quad k_2 \\ C_{6,2} \quad \alpha \quad k_3 \\ C_{6,3} \quad \alpha \quad k_2^2 \\ C_{6,4} \quad \alpha \quad k_2^2 \\ C_{6,5} \quad \alpha \quad k_2 \\ C_{6,6} \quad \alpha \quad k_2^3 \end{array} \right.$$

Thus, only  $C_{6,2}$  depends on  $k_3$ . On the left side, it is multiplied by  $C_{6,1}C_{6,3}$ , that is  $k_2^3$  term; on the right, by  $C_{6,5}^2$ , that is  $k_2^2$ . Now, let  $k_2$  be large enough that  $4C_{6,1}C_{6,3} > C_{6,5}^2$ . Then, for  $k_3$  large enough, the inequality holds. Finally, in order to satisfy Conditions 3 and 4, we define the four values  $\delta_{m,M}, \bar{\delta}_{m,M}$  in the following order and with the following conditions:

1. Step 1: fix  $\frac{g}{2k_2} < \bar{\delta}_M < \frac{g}{k_2}$ ;
2. Step 2: fix  $\delta_M < \frac{g - k_2\bar{\delta}_M}{k_1}$ ;
3. Step 3: fix  $\frac{k_1}{k_2}\delta_M < \bar{\delta}_m < \bar{\delta}_M$ ;
4. Step 4: fix  $\delta_m < \delta_M$

Indeed, Step 1 and 2 ensure Condition 4, while forcing  $k_2\bar{\delta}_M > k_1\delta_M$  which is necessary for Condition 3; Step 3 ensures Condition 3; and Step 3 and 4 ensure the proper definition of  $\delta, \bar{\delta}$  through  $\delta_m < \delta_M$  and  $\bar{\delta}_m < \bar{\delta}_M$ .

Finally, when a vanishing term  $\tilde{\mu}(t)$  is added to System (72) in the  $\dot{y}$  equation, the desaturation argument still holds since we get:

$$\frac{1}{2}|y|^2 \leq (k_1\delta_M - k_2\bar{\delta}_m - \tilde{\mu}(t))|y|$$

with  $\tilde{\mu}(t) \rightarrow 0$  and  $k_1\delta_M - k_2\bar{\delta}_m < 0$ . Also, to the derivative of  $V_1$  is added the same term as for case (i) above. For the same reason, the conclusion still holds with the perturbation term  $\tilde{\mu}(t)$ .

### Theorem 3

The proof is an application of Theorem 2.1 p 9 in Kokotovic (1987) that is, a particular case of application of the singular perturbation theory, with gain  $k_4$  considered large. The system is written as a two time-scale system. Let  $x = R\sigma$ ,  $y = Rv$  and  $\zeta = \bar{\mu}_{12}$  (where  $\bar{\mu}_{12} = [\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2]^T$ ) and  $\epsilon = \frac{1}{k_4}$ . The obtained closed-loop system is as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = My \\ \dot{y} = -k_1 \text{sat}_{\delta}(|x|^2)x - k_2 \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|y|^2)y \\ \quad + R \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \epsilon \dot{\zeta} = -\bar{\mu}_3 \zeta + \epsilon \bar{\mu}_{12}^T \omega_3 + \epsilon k_1 s_{\delta}(\sigma)v \\ \quad + \epsilon k_2 \bar{s}_{\bar{\delta}}(v)(\gamma - ue_3) \\ s_{\delta}(\sigma) \triangleq \text{sat}_{\delta}(|\sigma|^2)I + \text{sat}'_{\delta}(|\sigma|^2)\sigma\sigma^T \\ \bar{s}_{\bar{\delta}}(v) \triangleq \overline{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|v|^2)I + \overline{\text{sat}}'_{\bar{\delta}}(|v|^2)vv^T \end{array} \right. \quad (76)$$

With  $X = [x; y]^T$ , this system is written in compact form as:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = f(X, \zeta, \epsilon) \\ \epsilon \dot{\zeta} = g(X, \zeta, \epsilon) \end{array} \right. \quad (77)$$

with:

$$\begin{cases} f(X, \zeta, \epsilon) &= \begin{bmatrix} MX_2 \\ -k(X) + r(\zeta) \end{bmatrix} \\ k(X) &= k_1 \text{sat}_\delta(|X_1|^2) X_1 + k_2 \text{sat}_{\bar{\delta}}(|X_2|^2) X_2 \\ r(\zeta) &= R \begin{bmatrix} \zeta \\ 0 \end{bmatrix} \\ g(X, \zeta, \epsilon) &= -\bar{\mu}_3 \zeta + \epsilon \zeta^\perp \omega_3 + \epsilon k'(X, \zeta) \\ k'(X, \zeta) &= k_1 R^T s_\delta(X_1) X_2 + k_2 \bar{s}_{\bar{\delta}}(X_2) (\gamma - u e_3) \\ s_\delta(X_1) &\triangleq (\text{sat}_\delta(|X_1|^2) I + \text{sat}'_\delta(|X_1|^2) X_1 X_1^T) \\ \bar{s}_{\bar{\delta}}(X_2) &\triangleq (\bar{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(|X_2|^2) I + \bar{\text{sat}}'_{\bar{\delta}}(|X_2|^2) X_2 X_2^T) \end{cases} \quad (78)$$

Now, this system is in the proper form to apply Theorem 2.1 p 9 in Kokotovic (1987), which is known as Tychonov theorem. Indeed, the two required assumptions recalled in that paper are verified:

- Assumption 1: the equilibrium  $\bar{\zeta}(t_0)$  of:

$$\frac{d\hat{\zeta}(\tau)}{d\tau} = g(X^0, \hat{\zeta}(\tau), 0) \quad (79)$$

is asymptotically stable uniformly in  $x^0, t_0$ , and  $\hat{\zeta}(\tau)$  starts from  $\zeta^0$  which belongs to the domain of attraction of the equilibrium  $\bar{\zeta}(t_0)$ . Indeed, in our case, this equation can be written as  $\frac{d\hat{\zeta}(\tau)}{d\tau} = -\mu_3 \zeta$  with  $\mu_3$  lower bounded by a strictly positive quantity because of the assumptions on the saturation functions and reference acceleration  $\dot{p}_r$ ; as a result, this system is obviously asymptotically stable uniformly in  $X^0, t_0$ , and  $\zeta^0$  belongs to the domain of attraction of the equilibrium  $\bar{\zeta}(t_0)$  since this domain is the whole space.

- Assumption 2: the eigenvalues of  $\frac{\partial g}{\partial \zeta}$  evaluated along  $X(t), \bar{\zeta}(t)$  for all  $t \in [t_0, T]$  have real parts smaller than a fixed negative number. Indeed, in our case,  $\frac{\partial g}{\partial \zeta} = -\mu_3 I_2 + \epsilon k_2 s_{\bar{\delta}}(X_2)$ . Thus, for any  $Y \in \mathbb{R}^2$ :

$$Y^T \frac{\partial g}{\partial \zeta} Y \leq (-\mu_3 + \epsilon k_2 C_2) |Y|^2 \quad (80)$$

with  $C_2$  already defined as:

$$C_2 = \sup_\tau \left( \bar{\text{sat}}_{\bar{\delta}}(\tau) + 2\tau |\bar{\text{sat}}'_{\bar{\delta}}(\tau)| \right) \quad (81)$$

As a result, with  $\mu_3 \geq M$ , as long as  $\epsilon \leq \frac{M}{2k_2 C_2}$  (note that  $k_2 > 0$  and  $C_2 > 0$ ), the eigen values are lower than  $-\frac{M}{2}$ , which proves the assumption.

As a result, the theorem can be applied. We first need to define the reduced model, and to do so the roots:

$$0 = g(\bar{X}, \bar{\zeta}, 0) \quad (82)$$

namely:

$$\bar{\zeta} = \phi(\bar{X}, t) \quad (83)$$

In our case, it is simply  $\bar{\zeta} = 0, \forall X$ . Next we define the reduced model through:

$$\dot{\bar{X}} = f(\bar{X}, \phi(\bar{X}, t), 0) \quad (84)$$

Now, the theorem states that, for any given  $T > 0$ ,

$$X = \bar{X}(t) + O(\epsilon) \quad (85)$$

and

$$\zeta = \bar{\zeta}(t) + \hat{\zeta}(\tau) - \bar{\zeta}(t_0) + O(\epsilon) \quad (86)$$

hold for all  $t \in [t_0, T]$ , while

$$\zeta = \bar{\zeta}(t) + O(\epsilon) \quad (87)$$

holds for all  $t \in [t_l, T]$ , where the "thickness of the boundary layer"  $t_l - t_0$  can be made arbitrarily small by choosing small enough  $\epsilon$ .

Now, to conclude the proof, one can notice that both approximations  $\bar{X}$  and  $\bar{\zeta}$  do not depend on  $\epsilon$ , since they are solutions of very simple differential equations which do not depend on  $\epsilon$ , namely  $\dot{\bar{X}} = f(\bar{X}, 0, 0)$  (which is exactly the system obtained for the underactuated case) and  $\dot{\zeta} = -\mu_3 \zeta$ . Both solutions go to zero. As a result, for any small  $m > 0$ , there exist  $T_1, T_2$  such that  $t > T_1 \implies |\bar{X}(t)| \leq \frac{m}{2}$  and  $t > T_2 \implies |\bar{\zeta}(t)| \leq \frac{m}{2}$ . Next, there exist  $T_3, T_4$  such that  $t > T_3 \implies |\bar{X}(t) - X(t)| \leq \frac{m}{2}$  and  $t > T_4 \implies |\bar{\zeta}(t) - \zeta(t)| \leq \frac{m}{2}$ . Thus, for  $t > \max_i(T_i)$ ,  $|X(t)| \leq m$  and  $|\zeta(t)| \leq m$ , which proves the result.

## References

- Benhimane, S., Malis, E., 2007. Homography-based 2d visual tracking and servoing. *The International Journal of Robotics Research*, 661–676.
- de Plinval, H., Morin, P., mouyon, P., 2012. Nonlinear control of underactuated vehicles with uncertain position measurements and application to visual servoing. In: *American Control Conference*. pp. 3253–3259.
- Hauser, J., Sastry, S., Meyer, G., 1992. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to v/stol. *Automatica* 28, 651–670.
- Hua, M., Hamel, T., Morin, P., Samson, C., 2009. A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to vtol drones. *IEEE Trans. on Automatic Control* 54, 1837–1853.
- Isidori, A., Marconi, L., Serrani, A., 2003. Robust autonomous guidance : an internal model approach. *Advances in industrial control*. Springer Verlag.
- Kokotovic, P. V. (Ed.), 1987. *Singular Perturbation Techniques in Control Theory*. Vol. 90 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin.
- Le Bras, F., Hamel, T., Mahony, R., Treil, A., 2010. Output feedback observation and control for visual servoing of vtol uavs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 21, 1–23.
- López-Araujo, D., Zavala-Río, A., Fantoni, I., Salazar, S., Lozano, R., 2010. Global stabilisation of the pvtol aircraft with lateral force coupling and bounded inputs. *International Journal of Control* 83, 1427–1441.
- Lupashin, S., Schoellig, A., Sherback, M., D'Andrea, R., 2010. A simple learning strategy for high-speed quadcopter multi-flips. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 642–648.
- Ma, Y., Soatto, S., Kosecka, J., Sastry, S., 2003. *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*. SpringerVerlag.

- Mahony, R. E., Kumar, V., Corke, P., 2012. Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 19 (3), 20–32.
- Marconi, L., Naldi, R., 2007. Robust full degree-of-freedom tracking control of a helicopter. *Automatica* 43 (11), 1909 – 1920.
- Mellinger, D., Michael, N., Kumar, V., 2012. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *The International Journal of Robotics Research*, 1–11.
- Metni, N., Hamel, T., Derkx, F., 2004. A uav for bridges inspection: Visual servoing control law with orientation limits. In: *5th Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles (IAV 04)*.
- Pflimlin, J.-M., Souères, P., Hamel, T., 2007. Position control of a ducted fan vtol uav in crosswind. *International Journal of Control* 80, 666–683.
- Teel, A. R., 1996. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Trans. on Automatic Control* 41, 1256–1270.

## A.7 Démonstrations supplémentaires

### A.7.1 Démonstration du Lemme 1

On démontre ici le Lemme 1, c'est-à-dire la loi paramétrique pour l'adaptation. La théorie des perturbations singulières s'applique, et le système obtenu en boucle fermée, avec les changements de variable habituels, devient :

$$\begin{cases} \dot{x} &= My \\ \dot{y} &= -k_1 M (\hat{n})^{-1} \text{sat}_\delta(x) - k_2 y \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \dot{x} &= [MM(\hat{n})^{-1}] M(\hat{n}) y \\ M(\hat{n}) \dot{y} &= -k_1 \text{sat}_\delta(x) - k_2 M(\hat{n}) y \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Ou :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \tilde{M} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= -k_1 \text{sat}_\delta(x) - k_2 \tilde{y} \\ \tilde{M} &\triangleq [MM(\hat{n})^{-1}] \\ \tilde{y} &\triangleq M(\hat{n}) y \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Qui est de la forme du système obtenu avec la loi simplifiée. Il est stable pour les mêmes raisons dès lors que  $\tilde{M} > 0$ . Or, avec  $M = n_1 I + S(n_2 e_3)$ , cette condition revient à :  $\hat{n}^T n^* > 0$  et  $\hat{n}_1 > 0$ . Or l'optimisation est faite sous la contrainte  $\hat{n}_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , qui implique immédiatement  $\hat{n}_1 > 0$  et indirectement l'autre contrainte, puisqu'avec  $\hat{n}_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $n_1^* > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , il vient :  $\hat{n}^T n^* > 0$ , les deux vecteurs étant normés. Enfin, toute singularité dans l'inversion de  $M(\hat{n})$  est évitée par la contrainte  $\hat{n}_1 > 0$ , qui assure  $M(\hat{n}) > 0$  (voir Section A.4).

### A.7.2 Démonstration de la Proposition 8

On démontre ici la Proposition 8, c'est-à-dire la loi simplifiée avec mesure de flot optique. La démonstration suit celle de la loi simplifiée. La théorie des perturbations singulières permet de montrer que le système a la même stabilité que le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\sigma} &= \sigma \times \omega + R^T M R \nu \\ \dot{v} &= v \times \omega - k_1 \text{sat}_\delta(\sigma) - k_2 \overline{\text{sat}_\delta}(\nu) \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

dans lequel la matrice  $M$  contient une multiplication par  $d^*$  (constant) par rapport aux autres définitions. En posant alors :

$$\begin{cases} x &= R\sigma \\ y &= R\nu \end{cases}$$

le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= My \\ \dot{y} &= -\frac{k_1}{d^*} \text{sat}_\delta(z) - \frac{k_2}{d^*} \overline{\text{sat}}_\delta(y) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

qui est exactement le même système que dans la démonstration de la loi utilisant la vitesse, à ceci près que la matrice  $M$  contient une multiplication par  $d^*$  et que les gains sont au contraire divisés par  $d^*$ . Les conditions sur les gains sont donc modifiées de cette constante, mais tout le reste demeure.

# Bibliographie

- Abbeel, P., Coates, A., Hunter, T., and Ng, A. Y. (2008). Autonomous autorotation of an RC helicopter. In Khatib, O., Kumar, V., and Pappas, G. J., editors, *Experimental Robotics, The Eleventh International Symposium, ISER 2008, July 13-16, 2008, Athens, Greece*, volume 54 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*, pages 385–394. Springer.
- Abdessameud, A. and Tayebi, A. (2010). Global trajectory tracking control of VTOL-UAVs without linear velocity measurements. *Automatica*, 46(6) :1053–1059.
- Ahrens, S., Levine, D., Andrews, G., and How, J. P. (2009). Vision-based guidance and control of a hovering vehicle in unknown, GPS-denied environments. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3155–3160.
- Ahrens, S. G. (2008). Vision-based guidance and control of a hovering vehicle in unknown environments. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering.
- Alhaj, A. (2004). *Apports de la vision dynamique en asservissement visuel*. PhD thesis, Universite de Rennes 1, Cemagref Rennes.
- Allibert, G., Courtial, E., and Chaumette, F. (2010). Visual servoing via non-linear predictive control. In Chesi, G. and Hashimoto, K., editors, *Visual Servoing via Advanced Numerical Methods*, pages 375–394. LNCIS 401, Springer-Verlag.
- Allibert, G., Courtial, E., and Toure, Y. (2008). Visual predictive control for manipulators with catadioptric camera. In *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 510–515.
- Altuğ, E., Ostrowski, J. P., and Mahony, R. E. (2002). Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 72–77.
- Altuğ, E., Ostrowski, J. P., and Taylor, C. J. (2003). Quadrotor control using dual camera visual feedback. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4294–4299.
- Altuğ, E., Ostrowski, J. P., and Taylor, C. J. (2005). Control of a quadrotor helicopter using dual camera visual feedback. *International Journal of Robotic Research*, 24(5) :329–341.

- Altuğ, E. and Taylor, C. (2004). Vision-based pose estimation and control of a model helicopter. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Mechatronics*, pages 316–321.
- Amidi, O. (1996). *An Autonomous Vision-Guided Helicopter*. PhD thesis, Robotics Institute, Carnegie Mellon University.
- Amidi, O., Kanade, T., and Fujita, K. (1998). A visual odometer for autonomous helicopter flight. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Intelligent Autonomous Systems*.
- Amidi, O., Mesaki, Y., and Kanade, T. (1993). Research on an autonomous vision-guided helicopter. Technical report, Carnegie Mellon University.
- Amidi, T. and Miller, J. (1998). Vision-based autonomous helicopter research at Carnegie Mellon Robotics Institute 1991-1997. In *Proceedings of the American Helicopter Society International Conference*.
- Andreff, N., Espiau, B., and Horaud, R. (2001). Visual servoing from lines. Technical Report RR-4226, INRIA.
- Andreff, N., Marchadier, A., and Martinet, P. (2005). Vision-based control of a Gough-Stewart parallel mechanism using legs observation. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2535–2540.
- Apkarian, P. and Noll, D. (2006a). Controller design via nonsmooth multidirectional search. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 44(6) :1923–1949.
- Apkarian, P. and Noll, D. (2006b). Nonsmooth  $h_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86.
- Artieda, J., Sebastian, J. M., Campoy, P., Correa, J. F., Mondragón, I. F., Martínez, C., and Olivares, M. (2009). Visual 3-D SLAM from UAVs. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 55(4-5) :299–321.
- Astolfi, A., Hsu, L., Netto, M. S., and Ortega, R. (2001). A solution to the adaptive visual servoing problem. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 743–748.
- Astolfi, A., Hsu, L., Netto, M. S., and Ortega, R. (2002). Two solutions to the adaptive visual servoing problem. *IEEE Transactions on Robotics*, 18(3) :387–392.
- Azinheira, J., Moutinho, A., and de Paiva, A. (2006). Airship hover stabilization using a backstepping control approach. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*.
- Azinheira, J. R. and Rives, P. (2008). Image-based visual servoing for vanishing features and ground lines tracking : Application to a UAV automatic landing. *International Journal of Optomechatronics*, 2(3).

- Azinheira, J. R., Rives, P., Carvalho, J. R. H., Silveira, G. F., de Paiva, E. C., and Bueno, S. S. (2002). Visual servo control for the hovering of an outdoor robotic airship. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2787–2792.
- Baker, S., Datta, A., and Kanade, T. (2006). Parameterizing homographies. Technical Report CMU-RI-TR-06-11, Robotics Institute.
- Barmish, B. (1989). A generalization of Kharitonov’s four-polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations. *ITAC*, 34 :157–165.
- Barreto, J., Martin, F., and Horaud, R. P. (2003). *Visual servoing/tracking using central catadioptric images*, chapter VI, pages 245–254. Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Verlag.
- Bayraktar, S. and Feron, E. (2007). Experiments with small helicopter automated landings at unusual attitudes. *CoRR*, abs/0709.1744.
- Becerra, H. M. and Sagüés, C. (2010). *Sliding mode control for visual servoing of mobile robots using a generic camera*.
- Becerra, H. M. and Sagüés, C. (2011). Dynamic pose-estimation from the epipolar geometry for visual servoing of mobile robots. In *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 417–422.
- Bellot, D. and Danès, P. (2001). Handling visual servoing schemes through rational systems and LMIs. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 3601–3606.
- Bemporad, A., Pascucci, C. A., and Rocchi, C. (2009). Hierarchical and hybrid model predictive control of quadcopter air vehicles. In *Analysis and Design of Hybrid Systems*, pages 14–19. IFAC, 16th Sep - 18th Sep 2009.
- Benhimane, S. and Malis, E. (2007). Homography-based 2D visual tracking and servoing. *International Journal of Robotic Research*, 26(7) :661–676.
- Benhimane, S., Malis, E., Rives, P., and Azinheira, J. R. (2005). Vision-based control for car platooning using homography decomposition. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2161–2166.
- Bertrand, S., Guenard, N., Hamel, T., Piet-Lahanier, H., and Eck, L. (2011). A hierarchical controller for miniature VTOL UAVs : Design and stability analysis using singular perturbation theory. *Control Engineering Practice*.
- Bertrand, S., Hamel, T., and Piet-Lahanier, H. (2007). Stabilization of a small unmanned aerial vehicle model without velocity measurement. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 724–729.

- Blösch, M., Weiss, S., Scaramuzza, D., and Siegwart, R. (2010). Vision based MAV navigation in unknown and unstructured environments. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 21–28.
- Bonković, M. (2009). Nonlinear optimization methods for uncalibrated robot visual servoing. In *Proceedings of the 10th WSEAS international conference on Automation & information*, pages 146–151. World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS).
- Bonković, M., Cecić, M., and V.Papić (2007). Adaptive neural network (ANN) for visual servoing : the mimetic approach. *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, 1 :259–265.
- Borgstadt, J. A. and Ferrier, N. J. (2001). Visual servoing : path interpolation by homography decomposition. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 723–730.
- Bourdis, N., Denis, M., and Sahbi, H. (2012). Camera pose estimation using visual servoing for aerial video change detection. In *Proceedings of the 2012 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 3459–3462.
- Bourquardez, O. (2004). Asservissement visuel et localisation d’un hélicoptère miniature. Master’s thesis, ENSPS, Rennes France.
- Bourquardez, O. (2008). *Commande d’engins volants par asservissement visuel*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- Bourquardez, O. and Chaumette, F. (2007a). Visual servoing of an airplane for alignment with respect to a runway. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1330–1335.
- Bourquardez, O. and Chaumette, F. (2007b). Visual servoing of an airplane for auto-landing. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1314–1319.
- Bourquardez, O., Guenard, N., Hamel, T., Chaumette, F., Mahony, R., and Eck, L. (2008). Kinematic visual servo controls of an X4-flyer : practical study. In *Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation*.
- Bourquardez, O., Mahony, R., Guenard, N., Chaumette, F., Hamel, T., and Eck, L. (2009). Image-based visual servo control of the translation kinematics of a quadrotor aerial vehicle. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(3) :743–749.
- Bourquardez, O., Mahony, R. E., Hamel, T., and Chaumette, F. (2006). Stability and performance of image based visual servo control using first order spherical image moments. In *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4304–4309.

- Caballero, F., Merino, L., Ferruz, J., and Ollero, A. (2009). Unmanned aerial vehicle localization based on monocular vision and online mosaicking. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 55(4-5) :323–343.
- Campos, M. F. and de Souza Coelho, L. (1999). Visual navigation system for autonomous indoor blimps. In *Proceedings of the SPIE Conference on Visual Information Processing VIII*, volume 3716, pages 223–232.
- Campoy, P., Correa, J. F., Mondragón, I. F., Martínez, C., Olivares, M., Mejías, L., and Artieda, J. (2009). Computer vision onboard UAVs for civilian tasks. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 54(1-3) :105–135.
- Castano, A. and Hutchinson, S. A. (1994). Visual compliance : Task-directed visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(3) :334–342.
- Cervera, E., del Pobil, A. P., Berry, F., and Martinet, P. (2003). Improving image-based visual servoing with three-dimensional features. *International Journal of Robotic Research*, 22(10-11) :821–840.
- Cervera, E. and Martinet, P. (1999). Visual servoing with indirect image control and a predictable camera trajectory. In *Proceedings of the 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 381–386.
- Chaumette, F. (1990). *La relation vision-commande : théorie et application à des tâches robotiques*. PhD thesis, Université de Rennes I, France.
- Chaumette, F. (1998a). *De la perception à l'action : l'asservissement visuel ; de l'action à la perception : la vision active*. PhD thesis, Université de Rennes 1, IRISA.
- Chaumette, F. (1998b). Potential problems of stability and convergence in image-based and position-based visual servoing. In *The Confluence of Vision and Control, Lecture Notes in Control and Information Systems*. Springer-Verlag.
- Chaumette, F. (2004). Image moments : a general and useful set of features for visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics*, 20(4).
- Chaumette, F. (2009). Potential problems of stability and convergence in image-based and position-based visual servoing. In *The Confluence of Vision and Control, Lecture Notes in Control and Information Systems*, Springer Verlag.
- Chaumette, F. and Andreff, N. (2007). Quoi de neuf en asservissement visuel depuis les jnrr'03 ? In *Journées Nationales de la Recherche en Robotique, JNRR'07*.
- Chaumette, F. and Hutchinson, S. (2006). Visual servo control, Part I : Basic approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 13(4) :82–90.
- Chaumette, F. and Hutchinson, S. (2007). Visual servo control, part ii : Advanced approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 14(1) :109–118.

- Cheah, C. C., Liu, C., and Slotine, J. J. E. (2006). Adaptive tracking control for robots with unknown kinematic and dynamic properties. *International Journal of Robotic Research*, 25(3) :283–296.
- Chen, J., Behal, A., Dawson, D. M., and Dixon, W. E. (2003). Adaptive visual servoing in the presence of intrinsic calibration uncertainty. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 5396–5401 Vol.5.
- Chen, J., Dawson, D. M., Dixon, W. E., and Behal, A. (2005). Adaptive homography-based visual servo tracking for a fixed camera configuration with a camera-in-hand extension. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(5) :814–825.
- Chesi, G., Hashimoto, K., Prattichizzo, D., and Vicino, A. (2002). Keeping features in the camera’s field of view : a visual servoing strategy. In *Proceedings of the 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*.
- Chesi, G., Hashimoto, K., Prattichizzo, D., and Vicino, A. (2004). Keeping features in the field of view in eye-in-hand visual servoing : a switching approach. *IEEE Transactions on Robotics*, 20(5) :908–914.
- Chesi, G. and Hung, Y. S. (2007). Global path-planning for constrained and optimal visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(5) :1050–1060.
- Chesi, G., Malis, E., and Cipolla, R. (2000). Automatic segmentation and matching of planar contours for visual servoing. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2753–2758.
- Chevron, T., Chriette, A., and Plestan, F. (2009). Generic nonlinear model of reduced scale uavs. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Chien, M.-C. and Huang, A.-C. (2009). FAT-based adaptive visual servoing for robots with time varying uncertainties. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3700–3705.
- Cho, A., Kim, J., Lee, S., Kim, B., Park, N., Kim, D., and Kee, C. (2008). Fully automatic taxiing, take-off and landing of a UAV based on a single-antenna gnss receiver. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pages 4719–4724.
- Chriette, A., Hamel, T., and Mahony, R. E. (2001). Visual servoing for a scale model autonomous helicopter. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1701–1706.
- Collewet, C. (2008). *Vers des asservissements visuels sur des scènes inconnues*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- Colombo, C., Allotta, B., and Dario, P. (1995). Affine visual servoing : A framework for relative positioning with a robot. In *Proceedings of the*

- 1995 *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 464–471.
- Conte, G., Rudol, P., Wzorek, M., Petitti, P., Iocchi, L., and Doherty, P. (2008). Use of geo-referenced images with unmanned aerial systems. In *Proceedings of the Workshop on Mini and Micro UAV for Security and Surveillance*, pages 444–454.
- Conticelli, F. and Allotta, B. (1999). Adaptive nonlinear visual servoing using Lyapunov-based design. In *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 2329–2339.
- Corke, P. and Good, M. (1996). Dynamic effects in visual closed-loop systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5) :671–683.
- Corke, P. I. (1996). Visual control of robot manipulators – a review. In *Visual Servoing*, pages 1–31. World Scientific.
- Corke, P. I. and Hutchinson, S. A. (2001). A new partitioned approach to image-based visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(4) :507–515.
- Coutard, L., Chaumette, F., and Pflimlin, J.-M. (2011). Automatic landing on aircraft carrier by visual servoing. In *Proceedings of the 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2843–2848.
- Cowan, N. (2002). Binocular visual servoing with a limited field of view. In *In Mathematical Theory of Networks and Systems, Notre*.
- Cretual, A. (1998). Asservissement visuel à partir d’information de mouvement dans l’image.
- Crétual, A. and Chaumette, F. (1997). Positioning a camera parallel to a plane using dynamic visual servoing. In *Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 43–48.
- Cross, G. M. T. and Cipolla, R. (1996). Affine visual servoing. In *Proceedings of the 1996 British Machine Vision Conference*.
- Crowley, J., Mesrabi, M., and Chaumette, F. (1995). Comparison of kinematic and visual servoing for fixation. In *Proceedings of the 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 335–341.
- Cunha, R., Silvestre, C., Hespanha, J. P., and Aguiar, A. P. (2011). Vision-based control for rigid body stabilization. *Automatica*, 47(5) :1020–1027.
- Dallej, T., Andreff, N., Mezouar, Y., and Martinet, P. (2006). 3D pose visual servoing relieves parallel robot control from joint sensing. In *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4291–4296.

- Danès, P. and Bellot, D. (2006). Towards an LMI approach to multicriteria visual servoing in robotics. *European Journal of Control*, 12(1) :86–110.
- Danès, P. and Coutinho, D. F. (2006). Multicriteria analysis of visual servos via biquadratic Lyapunov functions. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, pages 561–566.
- de Plinval, H., Morin, P., and Mouyon, P. (2012). Nonlinear control of underactuated vehicles with uncertain position measurements and application to visual servoing. In *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, pages 3253–3259.
- de Plinval, H., Morin, P., Mouyon, P., and Hamel, T. (2011). Visual servoing for underactuated vtol uavs : a linear homography-based approach. In *Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 3004–3010.
- de Plinval, H., Morin, P., Mouyon, P., and Hamel, T. (2013). Visual servoing for underactuated vtol uavs : a linear homography-based framework. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Deguchi, K. (1998). Optimal motion control for image-based visual servoing by decoupling translation and rotation. In *Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 705–711.
- Dementhon, D. and Davis, L. (1995). Model-based object pose in 25 lines of code. *International Journal of Computer Vision*, 15 :123–141.
- Deng, L., Janabi-Sharifi, F., and Wilson, W. J. (2002). Stability and robustness of visual servoing methods. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1604–1609.
- Drummond, T. and Cipolla, R. (1999). Application of Lie algebras to visual servoing. *International Journal of Computer Vision*, 37 :2000.
- Duc Anh, T., Fantoni-Coichot, I., and Lozano, R. (2011). Modeling and control of a convertible mini-UAV. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 1492–1497.
- Entzinger, J. O. (2010). *Analysis of visual cues for human pilot control in the final approach and landing*. PhD thesis, University of Tokyo.
- Erginer, B. and Altuğ, E. (2007). Modeling and PD control of a quadrotor VTOL vehicle. In *Intelligent Vehicles Symposium*, pages 894–899.
- Espiau, B. (1993). Effect of camera calibration errors on visual servoing in robotics. In *Proceedings of the 3rd International Symposium on Experimental Robotics*, pages 182–192.
- Espiau, B., Chaumette, F., and Rives, P. (1990). Une nouvelle approche de la relation vision-commande en robotique. Rapport de recherche RR-1172, INRIA.

- Espiau, B., Chaumette, F., and Rives, P. (1992). A new approach to visual servoing in robotics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(3) :313–326.
- Evans, W. R. (1948). Graphical analysis of control systems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 67 :547–551.
- Evans, W. R. (1950). Control system synthesis by root locus method. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 69(1) :66–69.
- Fan, C., Song, B., Cai, X., and Liu, Y. (2009). Dynamic visual servoing of a small scale autonomous helicopter in uncalibrated environments. In *Proceedings of the 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 5301–5306.
- Fang, Y., Behal, A., Dixon, W., and Dawson, D. (2002a). Adaptive 2.5D visual servoing of kinematically redundant robot manipulators. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Decision and Control*.
- Fang, Y., Dawson, D., Dixon, W., and de Queiroz, M. (2002b). Homography-based visual servoing of wheeled mobile robots. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2866–2871.
- Fang, Y., Liu, X., and Zhang, X. (2012). Adaptive active visual servoing of nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 59(1) :486–497.
- Farahmand, A.-M., Shademan, A., and Jägersand, M. (2007). Global visual-motor estimation for uncalibrated visual servoing. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1969–1974.
- Faugeras, O. D. and Lustman, F. (1988). Motion and Structure From Motion in a Piecewise Planar Environment. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, (3) :485–508.
- Ficocelli, M. and Janabi-Sharifi, F. (2001). Adaptive filtering for pose estimation in visual servoing. In *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 19–24.
- Fleck, M. M. (1995). Perspective projection : the wrong imaging model. Technical report, University of Iowa, Department of Computer Science.
- Folio, D. (2007). *Stratégies de commande référencées multi-capteurs et gestion de la perte du signal visuel pour la navigation d’un robot mobile*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, LAAS, Toulouse, France.
- Franceschini, N. (2004). Visual guidance based on optic flow : a biorobotic approach. *Journal of Physiology-Paris*, 98(1-3) :281–292.
- Frew, E. W., Langelaan, J., and Joo, S. (2006). Adaptive receding horizon control for vision-based navigation of small unmanned aircraft. In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, pages 6 & +.

- Fritsch, O., Monte, P. D., Buhl, M., and Lohmann, B. (2012). Quasi-static feedback linearization for the translational dynamics of a quadrotor. In *Proceedings of the 2012 American Control Conference*.
- Fujita, M. and Kawai, H. (2002). Observer based dynamic visual servoing of nonlinear robotic systems : stability and  $L_2$ -gain performance analysis. In *Proceedings of the 10th Japanese-German Seminar on Nonlinear Problems in Dynamical Systems -Theory and Applications-*, pages 237–246.
- Gao, B. (2006). *Contribution à la synthèse de commandes référencées vision 2D multicritères*. Phd thesis, Université Paul Sabatier, LAAS, Toulouse, France.
- Garcia, G. J., Corrales, J. A., Pomares, J., and Torres, F. (2009). Survey of visual and force/tactile control of robots for physical interaction in Spain. *Sensors*, 9(12) :9689–9733.
- García-Aracil, N., Malis, E., Aracil-Santonja, R., and Perez-Vidal, C. (2005). Continuous visual servoing despite the changes of visibility in image features. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 21.
- Gille, J.-C., Decaulne, P., and Pélegrin, M. (1981). *Dynamique de la commande linéaire*. Dunod.
- Ginhoux, R., Gangloff, J., de Mathelin, M., Soler, L., Arenas Sanchez, M. M., and Marescaux, J. (2003). Active filtering of physiological motion in robotized surgery using predictive control. *IEEE Transactions on Robotics*.
- Ginhoux, R., Gangloff, J., de Mathelin, M., Soler, L., Arenas Sanchez, M. M., and Marescaux, J. (2005). Active filtering of physiological motion in robotized surgery using predictive control. *IEEE Transactions on Robotics*, 21 :67–79.
- Gonçalves, T. F., Azinheira, J. R., and Rives, P. (2009). Vision-based autonomous approach and landing for an aircraft using a direct visual tracking method. In Filipe, J., Andrade-Cetto, J., and Ferrier, J.-L., editors, *ICINCO-RA*, pages 94–101. INSTICC Press.
- Gonçalves, T. F., Azinheira, J. R., and Rives, P. (2010). Homography-based visual servoing of an aircraft for automatic approach and landing. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 9–14.
- Guenard, N., Hamel, T., and Mahony, R. E. (2007). A practical visual servo control for a unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1342–1348.
- Guerrero, J. J., Martinez-Cantin, R., and Sagués, C. (2005). Visual map-less navigation based on homographies. *Journal of Robotic Systems*, 22(10) :569–581.
- Guerrero-Castellanos, J. F., Rifai, H., Marchand, N., and Poulin, G. (2009). Bounded attitude stabilization of rigid bodies without attitude estimation

- and velocity measurement. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*.
- Ha, I.-J., Park, D.-H., and Kwon, J.-H. (2010). A novel position-based visual servoing approach for robust global stability with feature points kept within the field-of-view. In *ICARCV*, pages 1458–1465. IEEE.
- Hadj-Abdelkader, H., Mezouar, Y., Andreff, N., and Martinet, P. (2006a). Decoupled homography-based visual servoing with omnidirectional cameras. In *Proceedings of the IEEE/RSJ 2006 International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2332–2337.
- Hadj-Abdelkader, H., Mezouar, Y., Andreff, N., and Martinet, P. (2006b). Omnidirectional visual servoing from polar lines. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2385–2390.
- Hadj-Abdelkader, H., Mezouar, Y., and Martinet, P. (2007). Decoupled visual servoing from a set of points imaged by an omnidirectional camera. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1697–1702.
- Hadj-Abdelkader, H., Mezouar, Y., and Martinet, P. (2009). Decoupled visual servoing based on the spherical projection of a set of points. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1110–1115.
- Hafez, A. H. A., Nelakanti, A. K., and Jawahar, C. V. (2007). Path planning approach to visual servoing with feature visibility constraints : a convex optimization based solution. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1981–1986.
- Hamel, T. and Mahony, R. (2002). Visual servoing of an under-actuated dynamic rigid-body system : an image-based approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(2) :187–198.
- Hamel, T., Mahony, R., Trumpf, J., Morin, P., and Hua, M.-D. (2011). Homography estimation on the special linear group based on direct point correspondence. In *Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Decision and Control*, pages 7902–7908.
- Hamel, T. and Mahony, R. E. (2004). Pure 2D visual servo control for a class of under-actuated dynamic systems. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2229–2235.
- Hamel, T. and Mahony, R. E. (2007). Image based visual servo control for a class of aerial robotic systems. *Automatica*, 43(11) :1975–1983.
- Hamel, T., Mahony, R. E., and Chriette, A. (2002). Visual servo trajectory tracking for a four rotor VTOL aerial vehicle. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2781–2786.

- Han, S., Straw, A. D., Dickinson, M. H., and Murray, R. M. (2009). A real-time helicopter testbed for insect-inspired visual flight control. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3055–3060.
- Hashimoto, K. and Kimura, H. (1995). Visual servoing with nonlinear observer. In *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 484–489.
- Hashimoto, K. and Noritsugu, T. (2000). Enlargement of stable region in visual servo. In *Proceedings of the 2000 IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3927–3932.
- Herissé, B., Hamel, T., Mahony, R., and Russotto, F.-X. (2012). Landing a VTOL unmanned aerial vehicle on a moving platform using optical flow. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1) :77–89.
- Hill, J. and Park, W. T. (1979). Real time control of a robot with a mobile camera. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Industrial Robot*, pages 233–246.
- Hosoda, K. and Asada, M. (1997). Adaptive visual servoing for various kinds of robot systems.
- Hu, G., Gans, N., and Dixon, W. E. (2010). Quaternion-based visual servo control in the presence of camera calibration error. *International Journal Robust Nonlinear Control*, 20(5) :489–503.
- Hua, M.-D., Hamel, T., Morin, P., and Samson, C. (2009a). A control approach for thrust-propelled underactuated vehicles and its application to VTOL drones. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(8) :1837–1853.
- Hua, M.-D., Hamel, T., Morin, P., and Samson, C. (2009b). Control of a class of thrust-propelled underactuated vehicles and application to a VTOL drone. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 972–978.
- Hulls, C. C. W. and Wilson, W. J. (1998). Integration of camera and range sensors for 3D pose estimation in robot visual servoing. In *Proceedings of the SPIE*, volume 3523, pages 76–87.
- Hutchinson, S. A., Hager, G. D., and Corke, P. I. (1996). A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5) :651–670.
- I.A.Raptis and Valavanis, K. (2011). *Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopters*. Springer.
- Isidori, A., Marconi, L., and Serrani, A. (2003). Robust nonlinear motion control of a helicopter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3) :413–426.
- Iwatani, K. Y. and Hashimoto, K. (2008). Multi-camera visual servoing of multiple micro helicopters. In *Proceedings of the SICE Annual Conference*.

- Johnson, A. E., Montgomery, J. F., and Matthies, L. (2005). Vision guided landing of an autonomous helicopter in hazardous terrain. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3966–3971.
- Jung, D., Heinzmann, J., and Zelinsky, A. (1998). Range and pose estimation for visual servoing of a mobile robot. In *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1226–1231.
- Kadmiry, B. (2005). *Fuzzy gain scheduled visual servoing for an unmanned helicopter*. PhD thesis, Linköpings universitet.
- Karras, G. C., Loizou, S. G., and Kyriakopoulos, K. J. (2010). A visual-servoing scheme for semi-autonomous operation of an underwater robotic vehicle using an IMU and a laser vision system. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 5262–5267.
- Katake, A. and Choi, H. (2010). VisNav100 : a robust, compact imaging sensor for enabling autonomous air-to-air refueling of aircraft and unmanned aerial vehicles. In *Proceedings of the SPIE, the International Society for Optical Engineering*.
- Kawabata, A. and Fujita, M. (1998). Design of an  $h_\infty$  filter-based robust visual servoing system. *Control Engineering Practice*.
- Kelly, R. (1996). Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5) :759–766.
- Kendoul, F., Fantoni, I., and Lozano, R. (2008a). Adaptive vision-based controller for small rotorcraft UAVs control and guidance. In *17th IFAC World Congress*.
- Kendoul, F., Fantoni, I., and Lozano, R. (2008b). Asymptotic stability of hierarchical inner-outer loop-based flight controllers. In *17th IFAC World Congress*.
- Kendoul, F., Nonami, K., Fantoni, I., and Lozano, R. (2009). An adaptive vision-based autopilot for mini flying machines guidance, navigation and control. *Autonomous Robots*, 27(3) :165–188.
- Kermorgant, O. and Chaumette, F. (2011). Combining IBVS and PBVS to ensure the visibility constraint. In *Proceedings of the IEEE/RSJ 2011 International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2849–2854.
- Khadraoui, D. (1996). *La commande référencée vision pour le guidage automatique de véhicules*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II.
- Kim, J., Kang, M.-S., and Park, S. (2010). Accurate modeling and robust hovering control for a quadrotor VTOL aircraft. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 57(1-4) :9–26.

- Korpela, C. M., Danko, T. W., and Oh, P. Y. (2012). MM-UAV : mobile manipulating unmanned aerial vehicle. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 65(1-4) :93–101.
- Kragic, D. and Christensen, H. I. (2002). Survey on visual servoing for manipulation. Technical report, Computational Vision and Active Perception Laboratory.
- Kummer, N., Firouzi, H., Jacobs, D., and Najjaran, H. (2011). Autonomous UAV landing via eye in hand visual servoing. In *Proceedings of the Unmanned Systems Canada Conference*.
- Kuntz, N. and Oh, P. (2008). Development of autonomous cargo transport for an unmanned aerial vehicle using visual servoing. In *Proceedings of the 2008 ASME Dynamic Systems and Control Conference*.
- Kuntz, N. and Oh, P. (2009). Autonomous cargo transport system for an unmanned aerial vehicle, using visual servoing. In *Proceedings of the Cybernetics and Information Technologies, Systems and Applications Conference*, pages 41–46.
- Kyrki, V., Kragic, D., and Christensen, H. I. (2004). New shortest-path approaches to visual servoing. In *Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 349–354.
- Le Blanc, G., Mezouar, Y., and Martinet, P. (2005). Indoor navigation of a wheeled mobile robot along visual routes. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3354–3359.
- Le Bras, F. (2011). *Contributions à l’asservissement visuel de véhicules aériens autonomes*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- Le Bras, F., Hamel, T., Barat, C., and Mahony, R. (2009a). Nonlinear image-based visual servo controller for automatic landing guidance of a fixed-wing aircraft. In *Proceedings of the 2009 European Control Conference*.
- Le Bras, F., Hamel, T., and Mahony, R. (2007). Visual servoing of a VTOL vehicle using virtual states. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 6442–6447.
- Le Bras, F., Hamel, T., Mahony, R., and Treil, A. (2010). Output feedback observation and control for visual servoing of VTOL UAVs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(9) :1008–1030.
- Le Bras, F., Hamel, T., and Mahony, R. E. (2009b). Image-based visual servo control for circular trajectories for a fixed-wing aircraft. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 3430–3435.
- Le Bras, F., Mahony, R., and Hamel, T. (2008). Output based observation and control for visual servoing of VTOL UAVs. In *Proceedings of the 17th World Congress of The International Federation of Automatic Control*.

- Le Bras, F., Mahony, R., Hamel, T., and Binetti, P. (2006). Adaptive filtering and image based visual servo control of a ducted fan flying robot. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Decision and Control*.
- Lee, D. and Kim, H. (2010a). Adaptive visual servo control for a quadrotor helicopter. In *Proceedings of the International Conference on Control, Automation and Systems*.
- Lee, D. and Kim, H. J. (2010b). Adaptive visual servo control for a quadrotor helicopter. In *Proceedings of the International Conference on Control Automation and Systems*.
- Lefeberg, E., Kelly, R., Ortega, R., and Nijmeijer, H. (1998). Adaptive and filtered visual servoing of planar robots. In *Proceedings of the Fourth IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, pages 563–568.
- Leonard, N. E. and Graver, J. G. (2001). Model-based feedback control of autonomous underwater gliders. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 26(4) :633–645.
- Liu, Y.-H., Chen, Y., and Wang, H. (2008). Adaptive visual servoing of autonomous helicopters. In *Proceedings of the SICE Annual Conference*.
- Lohmann, B. and Lietmann, T. (2001). On the stability of visual servoing using a 3D camera. In *Proceedings of the 2001 European Control Conference*, pages 1140–1144.
- Loop, C. and Zhang, Z. (1999). Computing rectifying homographies for stereo vision. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference On Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 1, pages 125–131.
- López-Nicolás, G., Bhattacharya, S., Guerrero, J. J., Sagüés, C., and Hutchinson, S. (2007). Switched homography-based visual control of differential drive vehicles with field-of-view constraints. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4238–4244.
- Lots, J.-F. (2002). *Application of visual servoing to the dynamic positioning of an underwater vehicle*. PhD thesis, Heriot Watt University, Edinburgh.
- Luca, A. D., Oriolo, G., and Giordano, P. R. (2008). Feature depth observation for image-based visual servoing : Theory and experiments. *The International Journal of Robotics Research*, 27(10) :1093–1116.
- Mahony, R. and Hamel, T. (2001). Visual servoing using linear features for under-actuated rigid body dynamics. In *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1153–1158.
- Mahony, R., Hamel, T., and Chaumette, F. (2002). A decoupled image space approach to visual servo control of a robotic manipulator. In *Proceedings*

- of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 3, pages 3781–3786.
- Mahony, R., Hamel, T., Morin, P., and Malis, E. (2012). Nonlinear complementary filters on the special linear group. *International Journal of Control*, 85(10) :1557–1573.
- Mahony, R. E. and Hamel, T. (2005). Image-based visual servo control of aerial robotic systems using linear image features. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(2) :227–239.
- Malis, E. (1998). *Contributions à la modélisation et à la commande en asservissement visuel*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- Malis, E. (2001). Visual servoing invariant to changes in camera intrinsic parameters. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Computer Vision*, pages I : 704–709.
- Malis, E. (2004). Improving vision-based control using efficient second-order minimization techniques. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1843–1848.
- Malis, E. and Benhimane, S. (2005). A unified approach to visual tracking and servoing. *Robotics and Autonomous Systems*, 52(1) :39–52.
- Malis, E. and Chaumette, F. (2002). Theoretical improvements in the stability analysis of a new class of model-free visual servoing methods. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.
- Malis, E., Chaumette, F., and Boudet, S. (1999). 2 1/2 D visual servoing. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(2) :238–250.
- Malis, E., Hamel, T., Mahony, R., and Morin, P. (2009). Dynamic estimation of homography transformations on the special linear group for visual servo control. In *Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 1498–1503.
- Malis, E. and Rives, P. (2003a). Robustness of image-based visual servoing with respect to depth distribution error. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1056–1061.
- Malis, E. and Rives, P. (2003b). Uncalibrated active affine reconstruction closing the loop by visual servoing. In *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Robots and Systems*.
- Malis, E. and Vargas, M. (2007). Deeper understanding of the homography decomposition for vision-based control. Technical Report RR-6303, INRIA.
- Manecy, A., Juston, R., Marchand, N., and Viollet, S. (2013). *Decoupling the eye : a key toward a robust hovering for sighted aerial robots*, pages 317–336. Springer Verlag. Selected Papers of the Second CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation and Control.

- Mansard, N. and Chaumette, F. (2004). Tasks sequencing for visual servoing. In *Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 992–997.
- Mansard, N. and Chaumette, F. (2007). Task sequencing for high-level sensor-based control. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(1) :60–72.
- Marchand, E. (2004). *Contributions à la commande d'une caméra réelle ou virtuelle dans des mondes réels ou virtuels*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Rennes 1.
- Marchand, E. (2007). Control camera and light source positions using image gradient information. In *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 417–422, Roma, Italia.
- Marchand, E. and Chaumette, F. (1996). Reconstruction et exploration de scènes par vision active. In *10ème Congrès AFCET Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, volume 1, pages 405–414.
- Marchand, E. and Chaumette, F. (2001). A new formulation for nonlinear camera calibration using virtual visual servoing. Technical Report 1366, INRIA.
- Marchand, E. and Chaumette, F. (2002). Virtual visual servoing : a framework for real-time augmented reality. In *Eurographics'2002, Saarebruck, Allemagne, Septembre 2002*, volume 21, pages 289–298.
- Marchand, E. and Hager, G. (1998). Dynamic sensor planning in visual servoing. In *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1988–1993.
- Marchand, N. and Hably, A. (2005a). Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica*, 41(12) :2147–2152.
- Marchand, N. and Hably, A. (2005b). Improving the performance of nonlinear stabilization of multiple integrators with bounded controls. In *Proceedings of the 2005 IFAC World congress*.
- Marconi, L., Isidori, A., and Serrani, A. (2002). Autonomous vertical landing on an oscillating platform : an internal-model based approach. *Automatica*, 38(1) :21–32.
- Marconi, L. and Naldi, R. (2006). Robust nonlinear control of a miniature helicopter for aerobatic maneuvers. In *Proceedings of the 32nd Rotorcraft Forum*.
- Mariottini, G., Alunno, E., Piazzini, J., and Prattichizzo, D. (2005). Epipole-based visual servoing with central catadioptric camera. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3516–3521.

- Martin, P. and Salaün, E. (2010). The true role of accelerometer feedback in quadrotor control. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1623–1629.
- Martinet, P. and Gallice, J. (1999). Position based visual servoing using a nonlinear approach. In *Proceedings of the 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 531–536.
- Martínez, C., Mondragón, I. F., Olivares-Méndez, M. A., and Campoy, P. (2011). On-board and ground visual pose estimation techniques for UAV control. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 61(1-4) :301–320.
- Mattei, M. and Scordamaglia, V. (2008). A full envelope small commercial aircraft flight control design using multivariable proportional-integral control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16.
- Mcfadyen, A., Mejías, L., and Corke, P. (2012). Visual servoing approach to collision avoidance for aircraft. In *28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012*.
- M.D.Tandale, Bowers, R., and Valasek, J. (2006). Trajectory tracking controller for vision-based probe and drogue autonomous aerial refueling. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 29(4).
- Mejías, L., Saripalli, S., Campoy, P., and Sukhatme, G. (2006). Visual servoing of an autonomous helicopter in urban areas using feature tracking. In *Journal of Field Robotics*, 23(3-4) :185–199.
- Merz, T., Duranti, S., and Conte, G. (2004). Autonomous landing of an unmanned helicopter based on vision and inertial sensing. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Experimental Robotics*.
- Metni, N. and Hamel, T. (2007). A UAV for bridge inspection : Visual servoing control law with orientation limits. *Automation in Construction*, 17(1) :3–10.
- Metni, N., Hamel, T., and Fantoni, I. (2003). Visual servoing with orientation limits of a X4-flyer. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*.
- Mezouar, Y. and Chaumette, F. (2001). Design and tracking of desirable trajectories in the image space by integrating mechanical and visibility constraints. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 731–736.
- Mezouar, Y., Remazeilles, A., Gros, P., and Chaumette, F. (2002). Images interpolation for image-based control under large displacement. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3787–3794.
- Michaelsen, E., Kirchoff, M., and Stilla, U. (2004). Sensor pose inference from airborne videos by decomposing homography estimates. In *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, pages 1–6.

- Michel, H. and Rives, P. (1993). Singularities in the determination of the situation of a robot effector from the perspective view of 3 points. Technical Report RR-1850, INRIA.
- Mills, S., Ford, J. J., and Mejías, L. (2011). Vision based control for fixed wing UAVs inspecting locally linear infrastructure using skid-to-turn maneuvers. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 61(1) :29–42. This article was also published as a conference paper at : Proceedings of the 3rd International Symposium on Unmanned Aerial Vehicles, 21-23 June 2010, Al Bustan Rotana Hotel, Dubai.
- Mkrtchyan, A. A., Schultz, R., and Semke, W. H. (2009). Vision-based autopilot implementation using a quadrotor helicopter. In *Proceedings of the AIAA Aerospace Conference*.
- Mondragón, I. F., Campoy, P., Correa, J. F., and Mejías, L. (2007). Visual model feature tracking for UAV control. In *Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Intelligent Signal Processing*.
- Moreno-Armendariz, M. and Yu, W. (2005). A new fuzzy visual servoing with application to robot manipulator. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*.
- Mori, R., Hirata, K., and Kinoshita, T. (2007). Vision-based guidance control of a small-scale unmanned helicopter. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2648–2653.
- Moutinho, A. and Azinheira, J. (2005). Stability and robustness analysis of the aurora airship control system using dynamic inversion. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Murao, H., Tamaki, H., and Kitamura, S. (2003). Application of reinforcement learning to RC helicopter control. In *Proceedings of the SICE Annual Conference*.
- Muratet, L., Doncieux, S., Briere, Y., and Meyer, J.-A. (2005). A contribution to vision-based autonomous helicopter flight in urban environments. *Robotics and Autonomous Systems*, 50(4) :195–209.
- Murrieri, P., Fontanelli, D., and Bicchi, A. (2003). Visual-servoed parking with limited view angle. In *Experimental Robotics VIII, STAR 5*, pages 265–274. Springer-Verlag.
- Navab, N., Bascle, B., Loser, M., Geiger, B., and Taylor, R. (2000). Visual servoing for automatic and uncalibrated needle placement for percutaneous procedures. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference On Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 2327–2334.
- Ng, A. Y., Kim, H. J., Jordan, M. I., and Sastry, S. (2003). Autonomous helicopter flight via reinforcement learning. In Thrun, S., Saul, L. K., and Schölkopf, B., editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*

- 16 [*Neural Information Processing Systems, NIPS 2003, December 8-13, 2003, Vancouver and Whistler, British Columbia, Canada*]. MIT Press.
- N.Metni and Hamel, T. (2007). Visual tracking control of aerial robotic systems with adaptive depth estimation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 5(1) :51–60.
- Nordberg, K. (2008). Efficient three-view triangulation based on 3D optimization. In Everingham, M., Needham, C. J., and Fraile, R., editors, *Proceedings of the 2008 British Machine Vision Conference*. British Machine Vision Association.
- Odelga, M., Chriette, A., and Plestan, F. (2012). Control of 3 DOF helicopter : a novel autopilot scheme based on adaptive sliding mode control. In *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, pages 1–6.
- Oh, H., Won, D.-Y., Huh, S., Shim, D. H., Tahk, M.-J., and Tsourdos, A. (2011). Indoor UAV control using multi-camera visual feedback. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 61(1-4) :57–84.
- Olfati-saber, R. (2000). Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. In *Proceedings of the 2000 IEEE Conference on Decision and Control*.
- Olivares, M. A., Campoy, P., Mondragón, I., Martínez, C., and Mejías, L. (2011). Aerial object following using visual fuzzy servoing. In *Proceedings of the Research, Development and Education on Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)*.
- Olivares-Mendéz, M., Campoy Cervera, P., Mondragón, I., and Martínez, C. (2009). Visual servoing using fuzzy controllers on an unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the Eurofuse Workshop on Preference Modelling and Decision Analysis*.
- Olivares-Mendéz, M., Campoy Cervera, P., Mondragón, I., and Martínez, C. (2010). Non-symmetric membership function for fuzzy-based visual servoing onboard a UAV. In *Proceedings of the FLINS Conference on Foundations and Applications of Computational Intelligence*.
- Ordaz, J., Salazar, S., Mondie, S., Romero, H., and Lozano, R. (2013). Predictor-based position control of a quad-rotor with delays in GPS and vision measurements. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 70(1-4) :13–26.
- Ozawa, R. and Chaumette, F. (2011). Dynamic Visual Servoing with Image Moments for a Quadrotor Using a Virtual Spring Approach. In *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 5670–5676.
- Pagès, J. (2005). *Assisted visual servoing by means of structured light*. PhD thesis, Université de Rennes 1.

- Pagès, J., Collewet, C., Chaumette, F., and Salvi, J. (2005). Robust decoupled visual servoing based on structured light. In *Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2676–2681.
- Papanikolopoulos, N., Khosla, P., and Kanade, T. (1993). Visual tracking of a moving target by a camera mounted on a robot : A combination of control and vision. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(1) :14–35.
- Peliti, P., Rosa, L., Oriolo, G., and Vendittelli, M. (2012). Vision-based loitering over a target for a fixed-wing UAV. In *Proceedings of the 10th International IFAC Symposium on Robot Control*.
- Pence, W. G., Farelo, F., Alqasemi, R., Sun, Y., and Dubey, R. V. (2012). Visual servoing control of a 9-DoF WMRA to perform ADL tasks. In *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 916–922.
- Pflimlin, J.-M., Souères, P., and Hamel, T. (2007). Position control of a ducted fan VTOL UAV in crosswind. *International Journal of Control*, 80 :666–683.
- Pharmayeni, Akmeliawati, R., and Legowo, A. (2011). Development of non-linear energy-based method (NEM) controller for 3 DOF helicopter. In *Proceedings of the 4th International Conference on Mechatronics*.
- Preucil, L., Nitsche, M., Krajník, T., Pedre, S., and Mejail, M. (2012). A simple visual navigation system for an UAV. In *Proceedings of the 9th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*.
- Project-Team LAGADIC (2007). Visual servoing in robotics, computer vision, and augmented reality. Technical report, INRIA Rennes.
- Pucci, D., Hamel, T., Morin, P., and Samson, C. (2011). Nonlinear control of PVTOL vehicles subjected to drag and lift. In *Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6177–6183.
- Questa, P., Grossmann, E., and Sandini, G. (1995). Camera self orientation and docking maneuver using normal flow. In *Proceedings of the SPIE*, volume 2488, pages 274–283.
- Rao, R., Kumar, V., and Taylor, C. J. (2003). Visual servoing of a UGV from a UAV using differential flatness. In *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 743–748.
- Rathinam, S., Kim, Z., Soghikian, A., and Sengupta, R. (2005). Vision based following of locally linear structures using an unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 6085–6090.
- Remazeilles, A., Chaumette, F., and Gros, P. (2004). Robot motion control from a visual memory. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4695–4700.

- Remazeilles, A., Mansard, N., and Chaumette, F. (2006). A qualitative visual servoing to ensure the visibility constraint. In *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4297–4303.
- Rett, J. and Dias, J. (2004). Autonomous robot navigation - a study using optical flow and log-polar image representation. In *Proceedings of the colloquium of automation*.
- Rifai, H., Guerrero-Castellanos, J. F., and Marchand, N. (2011). Biomimetic-based bounded output feedback for attitude stabilization of a flapping micro aerial vehicle. In *Proceedings of the 1st International Workshop on bio-inspired robots*.
- Rifai, H., Marchand, N., and Poulin, G. (2008). Path tracking control of a flapping unmanned air vehicle (UAV). In *IFAC World Congress*.
- Rifai, H., Marchand, N., and Poulin, G. (2012). Bounded control of an underactuated biomimetic aerial vehicle - validation with robustness tests. *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, 60(9) :1165–1178.
- Rives, P. (2000). Visual servoing based on epipolar geometry. In *Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*.
- Rives, P. and Azinheira, J. (2004). Linear structures following by an airship using vanishing point and horizon line in a visual servoing scheme. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Rives, P. and Azinheira, J. R. (2002). Visual auto-landing of an autonomous aircraft. Technical Report RR-4606, INRIA.
- Rives, P., Chaumette, F., and Espiau, B. (1989). Visual servoing based on a task function approach. In Hayward, V. and Khatib, O., editors, *Proceedings of the International Symposium on Experimental Robotics*, volume 139 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 412–428. Springer.
- Rives, P. and Michel, H. (1993). Visual servoing based on ellipse features. In *SPIE*.
- Rudol, P., Wzorek, M., Conte, G., and Doherty, P. (2008). Micro unmanned aerial vehicle visual servoing for cooperative indoor exploration. In *Proceedings of the 2008 IEEE Aerospace Conference*, volume 2008.
- Sahin, T. and Zergeroglu, E. (2005). Adaptive visual servo control of robot manipulators via composite camera inputs. In *Fifth International Workshop on Robot Motion and Control*.
- Sahin, T. and Zergeroglu, E. (2006). Adaptive 3D visual servo control of robot manipulators via composite camera inputs. *Turkish Journal of Electrical Engineering*, 14(2).

- Samson, C. (1987). Robust control of a class of nonlinear systems and applications to robotics. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1 :49–68.
- Samson, C. and Espiau, B. (1990). Application of the task-function approach to sensor-based control of robot manipulators. In *Proceedings of the 1990 IFAC World Congress*.
- Samson, C., Le Borgne, M., and Espiau, B. (1991). *Robot Control. The Task Function Approach*. 22. Oxford engineering science series, 22, Clarendon Press.
- Sanderson, A. C. and Weiss, L. E. (1982). Image-based visual servo control of robots. In *26th Annual SPIE Technical Symposium*.
- Sanjay, G. and Ouzts, P. (1991). Integrated flight/propulsion control design for a STOVL aircraft using  $H_\infty$  control design techniques. In *Proceedings of the 1991 American Control Conference*.
- Saripalli, S., Montgomery, J. F., and Sukhatme, G. S. Vision-based autonomous landing of an unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2799–2804.
- Saripalli, S., Montgomery, J. F., and Sukhatme, G. S. (2003). Visually guided landing of an unmanned aerial vehicle. *IEEE Transactions on Robotics*, 19(3) :371–380.
- Sauvée, M., Poignet, P., and Dombre, E. (2008). Ultrasound image-based visual servoing of a surgical instrument through nonlinear model predictive control. *International Journal of Robotic Research*, 27(1) :25–40.
- Sauvée, M., Poignet, P., Dombre, E., and Courtial, E. (2006). Image based visual servoing through nonlinear model predictive control. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Decision and Control*, page 6.
- Schramm, F., Micaelli, A., and Morel, G. (2005). Calibration free path planning for visual servoing yielding straight line behaviour both in image and work space. In *Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2216–2221.
- Selig, J. (2005). Lie groups and Lie algebras in robotics. In *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Computational noncommutative algebra and applications*, volume 136, pages 101–125. Springer.
- Shademan, A., Farahmand, A.-M., and Jägersand, M. (2010a). Robust jacobian estimation for uncalibrated visual servoing. In *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 5564–5569.
- Shademan, A., Farahmand, A.-M., and Jägersand, M. (2010b). Robust uncalibrated visual servoing for autonomous on-orbit servicing. In *Proceedings of the i-SAIRAS*.

- Shademan, A. and Jägersand, M. (2012). Robust sampling-based planning for uncalibrated visual servoing. In *Proceedings of the 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*.
- Shakernia, O. (1999). Landing an unmanned air vehicle : Vision based motion estimation and nonlinear control. Technical Report UCB/ERL M99/64, EECS Department, University of California, Berkeley.
- Shakernia, O., Ma, Y., Koo, T. J., John, T., and Sastry, S. (1999). Landing an unmanned air vehicle : Vision based motion estimation and nonlinear control. *Asian Journal of Control*, 1 :128–145.
- Shakernia, O., Vidal, R., Sharp, C. S., Ma, Y., and Sastry, S. (2002). Multiple view motion estimation and control for landing an unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2793–2798.
- Sharp, C. S., Shakernia, O., and Sastry, S. (2001). A vision system for landing an unmanned aerial vehicle. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1720–1727.
- Shen, T. and Chesi, G. (2012a). Visual servoing path planning for cameras obeying the unified model. *Advanced Robotics*, 26(8-9) :843–860.
- Shen, T. and Chesi, G. (2012b). Visual servoing path-planning with spheres. In Ferrier, J.-L., Bernard, A., Gusikhin, O. Y., and Madani, K., editors, *Proceedings of the International Conference on Informatics in Control, automation and robotics (1)*, pages 22–30. SciTePress.
- Shirai, Y. and Inoue, H. (1973). Guiding a robot by visual feedback in assembling tasks. *Pattern Recognition*, 5 :99–108.
- Silveira, G., Azinheira, J., Rives, P., and Bueno, S. (2003). Line following visual servoing for aerial robots combined with complementary sensors. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Robotics*.
- Silveira, G., Malis, E., and Rives, P. (2008). The efficient E-3D visual servoing. *International Journal of Optomechatronics*, 2(3).
- Simond, N. and Laugeau, C. (2006). Vehicle trajectory from an uncalibrated stereo-rig with super-homography. In *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4768–4773.
- Souères, P., Tarbouriech, S., and Gao, B. (2005). A robust vision-based controller for mobile robots navigation : application to the task sequencing problem. In *Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2191–2196.
- Spratling, M. W. and Cipolla, R. (1996). Uncalibrated visual servoing. In *Proceedings of the 1996 British Machine Vision Conference*.

- Suter, D., Hamel, T., and Mahony, R.-P. (2002). Visual servo control using homography estimation for the stabilization of an X4-flyer. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Decision and Control*.
- Tahri, O. (2004). *Utilisation des moments en asservissement visuel et en calcul de pose*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- Tahri, O., Chaumette, F., and Mezouar, Y. (2008). New decoupled visual servoing scheme based on invariants from projection onto a sphere. In *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3238–3243.
- Tahri, O., Mezouar, Y., Chaumette, F., and Corke, P. I. (2009). Generic decoupled image-based visual servoing for cameras obeying the unified projection model. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1116–1121.
- Tarhan, M. and Altuğ, E. (2011). EKF based attitude estimation and stabilization of a quadrotor UAV using vanishing points in catadioptric images. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 62(3-4) :587–607.
- Tatsambon Fomena, R. (2008). *Asservissement visuel par projection sphérique*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- Tatsambon Fomena, R. and Chaumette, F. (2007). Visual servoing from spheres using a spherical projection model. In *Proceedings of the 2007 IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 2080–2085.
- Teel, A. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18(3) :165–171.
- Teuliere, C., Eck, L., Marchand, E., and Guenard, N. (2010). 3D model-based tracking for UAV position control. In *Proceedings of the 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1084–1089.
- Thuilot, B., Martinet, P., Cordesses, L., and Gallice, J. (2002). Position based visual servoing : keeping the object in the field of vision. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1624–1629.
- Vargas, M. and Malis, E. (2005). Visual servoing based on an analytical homography decomposition. In *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 5379–5384.
- Vincze, M. (2000). Dynamics and system performance of visual servoing. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 644–649.
- Vissière, D., Bristeau, P.-J., Martin, A. P., and Petit, N. (2008). Experimental autonomous flight of a small-scaled helicopter using accurate dynamics model and low-cost sensors. In *Proceedings of the 2008 World Congress of the International Federation of Automatic Control*, pages 14642–14650.

- Wang, H., Liu, Y.-H., and Zhou, D. (2008). Adaptive visual servoing using point and line features with an uncalibrated eye-in-hand camera. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(4) :843–857.
- Wang, J. and Liu, Y. (2006). Characteristic line of planar homography matrix and its applications in camera calibration. In *Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition - Volume 01*, ICPR '06, pages 147–150.
- Wang, Z., Kim, D.-J., and Behal, A. (2012). Design of stable visual servoing under sensor and actuator constraints via a lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technologies*, 20(6) :1575–1582.
- Weiss, L. E. (1984). *Dynamic visual servo control of robots : an adaptive image-based approach*. PhD thesis, The Robotics Institute, Carnegie-Mellon University.
- Weiss, L. E., Sanderson, A. C., and Neumann, C. P. (1987). Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback. *Journal of Robotics and Automation*, RA-3.
- Weng, J., Ahuja, N., and Huang, T. (1991). Motion and structure from point correspondences with error estimation : planar surfaces. *Transactions on Signal Processing*, 39(12) :2691–2717.
- Woodley, B., Jones, H., Le Master, E., Frew, E., and Rock, S. (1996). Carrier phase GPS and computer vision for control of an autonomous helicopter. In *Proceedings of the Institute of Navigation GPS-96 Conference*.
- Wu, A. D., Johnson, E. N., and Proctor, A. A. (2005). Vision-aided inertial navigation for flight control. In *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication*, page 2005.
- Yang, F. and Wang, C.-L. (2011). Adaptive stabilization for uncertain nonholonomic dynamic mobile robots based on visual servoing feedback. *Acta Automatica Sinica*, 37(7) :857.
- Yoshihata, Y., Watanabe, K., Iwatani, Y., and Hashimoto, K. (2007). Multi-camera visual servoing of a micro helicopter under occlusions. In *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2615–2620.
- Yoshimi, B. H. and Allen, P. K. (1994). Active, uncalibrated visual servoing. In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 156–161.
- Yu, W. and Li, X. (2004). Visual servoing with velocity observer and neural compensation. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent Control*.
- Zachi, A. R. L., Hsu, L., Ortega, R., and Lizarralde, F. C. (2006a). Dynamic control of uncertain manipulators through immersion and invariance adaptive visual servoing. *International Journal of Robotic Research*, 25(11) :1149–1159.

- Zachi, A. R. L., Liu, H., Lizarralde, F., and Leite, A. C. (2006b). Adaptive control of nonlinear visual servoing systems for 3D cartesian tracking. *Revista Controle & Automação*, 17.
- Zhang, H. and Ostrowski, J. P. (1999). Visual servoing with dynamics : Control of an unmanned blimp. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 618–.
- Zhang, X., Fang, Y., and Liu, X. (2009). Visual servoing of nonholonomic mobile robots based on a new motion estimation technique. In *Proceedings of the 2009 International Conference on Decision and Control*, pages 8428–8433.
- Zhang, Z. and Hanson, A. R. (1996). 3D reconstruction based on homography mapping. In *In ARPA Image Understanding Workshop*, pages 0249–6399.
- Zhu, Y. and Rong Li, X. (1999). Recursive least squares with linear constraints. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Decision and Control*, pages 2414–2419.
- Z.Yu, Nonami, K., Shin, J., and Celestino, D. (2007). 3D vision based landing control of a small scale autonomous helicopter. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 4(1).