N attribué par la bibliothèque

THÈSE

Présentée à

L'Université de Pau et des Pays de l'Adour

École Doctorale des Sciences Exactes
et de leurs Applications

Par

Kossivi GOKPI

Pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : Mécanique des Fluides et Energétique

Modélisation et Simulation des écoulements compressibles par la méthode des éléments finis Galerkin discontinus

Soutenue le **28 Février 2013**

Après avis de :

MM.	Amer CHPOUN	Professeur d'Université – Université Evry Val d'Essonne	Rapporteur
	Alain DERVIEUX	Directeur de recherche – INRIA, Sophia Antipolis	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

MM.	Yves BURTSCHELL	Professeur d'Université – Polytech Marseille	Président
	Amer CHPOUN	Professeur d'Université – Université Evry Val d'Essonne	Rapporteur
	Alain DERVIEUX	Directeur de recherche – INRIA, Sophia Antipolis	Rapporteur
	Grégoire HANSS	Dr. en sciences, Ing. Arts et Métiers – Responsable du dpt Acoustique et Aérodynamique, LIEBHERR Aerospace	Examinateur
	Laurent CAMBIER	Ing. Central Paris–Responsable du programme elsA, ONERA	Examinateur
	Roland BECKER	Professeur d'Université – Université de Pau et des Pays de l'Adour	Examinateur
	Mathieu MORY	Professeur d'Université – Université de Pau et des Pays de l'Adour	Examinateur
	Eric SCHALL	Maître de Conférence–Université de Pau et des Pays de l'Adour	Examinateur

– 2013 –

Dédicaces ...
A ma Mère, mes Frères et Soeurs
A ma Chère épouse Clémentine

A tous ceux qui un jour m'ont communiqué
ou qui me communiqueront
une part de savoir

Remerciements

Ce travail a été mené au sein du Laboratoire du Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au génie Electrique EA4581 (SIAME).

Je tiens tout d'abord à exprimer ma sincère gratitude à Monsieur Eric SCHALL, Maître de Conférence, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire, d'avoir mis à ma disposition les moyens qu'a nécessité cette étude. Je remercie par la même occasion Monsieur le Professeur Roland BECKER, chef du projet CONCHA de l'INRIA, pour m'avoir accueilli dans l'équipe CONCHA.

Je tiens à faire part de ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Yves BURTSCHELL, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Je remercie mes rapporteurs de thèse, Monsieur le Professeur Amer CHPOUN et Monsieur le Directeur de recherche Alain DERVIEUX, pour l'intérêt et le regard critique qu'ils ont porté sur mon travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Eric SCHALL, pour la confiance qu'il m'a accordée en me confiant ce travail de recherche, sa disponibilité, ses remarques objectives et son goût du partage de la connaissance scientifique qu'il m'a témoigné tout au long des ces trois années.

Je remercie vivement Monsieur David TRUJILLO, Maître de conférences, pour sa disponibilité et son aide précieuses qui m'ont été très bénéfiques tout au long de la thèse. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance pour ses différents apports dans ce travail de recherche.

Mon séjour au sein de l'équipe CONCHA a été une belle aventure scientifique et intellectuelle, et je suis de ce fait reconnaissant à tous les membres de l'équipe pour cette atmosphère propice au développement personnel et collectif qu'ils ont su créer, et pour l'aide que chacun d'eux m'a

apportée.

Merci à tous les enseignants du département GTE de l'IUT de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, pour leurs encouragements et l'amitié qu'ils m'ont témoignée.

Je voudrais remercier également mes collègues du bureau à l'IUT Maxime, Rabah, ainsi que mes collègues de bureau de l'équipe CONCHA, Eliès, Julie, et Nelly, pour la convivialité partagée durant ces années.

Enfin je tiens à témoigner de ma reconnaissance à mon épouse Clémentine, pour ses encouragements et soutiens pendant toutes ces années.

Table des matières

Table des figures **15**

1 Introduction **17**
1.1 Contexte du travail 18
1.1.1 Motivations industrielles 18
1.1.2 Les méthodes numériques d'ordre élevé 20
1.1.3 Estimateurs d'erreur et Adaptation de maillage 23
1.2 Outils de programmation 25
1.3 Contributions et Plan du document 27
1.4 Valorisation du travail 28

2 Discrétisation Eléments Finis de Galerkin Discontinus des Equations d'Euler **29**
2.1 Les lois de conservations dans un milieu continu 30
2.1.1 Conservation de masse 30
2.1.2 Conservation de quantité de mouvement 31
2.1.3 Conservation de l'énergie 33
2.1.4 Equations de Navier-Stokes sous formes de variables conservatives . 34
2.2 Discrétisation des équations d'Euler par la méthode des éléments finis DG 35
2.2.1 Les équations d'Euler 35
2.2.2 Discrétisation par la méthode élément finis de Galerkin Discontinus des équations d'Euler 36
2.2.2.1 Le système d'équation d'Euler 36
2.2.2.2 La discrétisation spatiale élément fini de Galerkin discontinu 38
2.3 Conditions aux limites et implémentation 42
2.4 Intégration en temps du système discret non linéaire 45

2.4.1 Schéma de résolution explicite 46
2.4.2 Schéma de résolution implicite : 47
2.5 Tests numériques 49
2.6 Méthode de shock-capturing 55
2.6.1 Méthode de limiteur de pente 56
2.6.1.1 Procédure de calcul du limiteur de pente 56
2.6.1.2 Exemples numériques 60
2.6.1.2.a Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe 60
2.6.1.2.b Cas test d'un écoulement à Mach 3 dans un scramjet 61
2.6.2 Terme de viscosité artificielle 65
2.6.2.1 Indicateur de choc 65
2.6.2.2 Exemples numériques 67
2.6.2.2.a Cas test d'un écoulement autour d'une aile $NACA0012$ 67
2.6.2.2.b Cas test d'un écoulement dans un Scramjet à Mach 3 71

3 Raffinement adaptatif automatique de maillage et estimateurs d'erreurs à posteriori 73
3.1 Estimateurs d'erreurs a posteriori pour le raffinement de maillage 75
3.1.1 Estimateur d'erreur hiérarchique 76
3.1.2 Estimateur d'erreur de saut 76
3.2 Stratégie d'adaptation de maillage 77
3.2.1 Optimisation du maillage 77
3.2.2 Procédure d'adaptation de maillage et implémentation 78
3.3 Résultats numériques 81
3.3.1 Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe 81
3.3.1.1 Comparaison des deux estimateurs 81
3.3.1.2 Influence du taux de raffinement θ 82
3.3.2 Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 3 dans un scramjet . 85
3.3.2.1 Intérêt du raffinement de maillage adaptatif : critère de saut 86
3.3.2.2 Estimateur d'erreur de saut pour différentes variables physiques 86

3.3.2.3 Evolution du temps de calcul au cours du raffinement adaptatif successif de maillage 89
3.3.3 Comparaison d'un maillage uniformément raffiné et d'un maillage adapté par raffinements adaptatifs non-conformes 91
3.3.4 Cas test d'un écoulement autour d'un cylindre : Etude de la performance des deux estimateurs d'erreurs 93
3.3.5 Cas test d'un écoulement autour d'un NACA0012 : Etude de l'influence du flux numérique dans la procédure de raffinement adaptative 96

4 Analyse de la robustesse de la Méthode DGFEM pour les écoulements compressibles à faible nombre de Mach 101
4.1 Introduction 102
4.2 Résultats numériques 103
4.2.1 Ecoulement rotationnel autour d'un demi-cylindre 103
4.2.1.1 Comparaison de deux solutions en DG0 sur des maillages en triangles et quadrangles 103
4.2.1.2 Comparaison entre la solution calculée et la solution exacte 105
4.2.1.3 Comparaison d'une solution DG1 à celle d'un code Volumes Finis MUSCL d'ordre deux préconditionné bas Mach 106

5 Conclusion et Perspectives 107

A Les équations d'Euler 2D 109
A.1 Le système des équations d'Euler 109
A.2 Ecriture des termes de flux en fonction de $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ 110

B Les types de flux numériques 113
B.1 Les flux numériques et conditions de bord 113
B.2 Les flux numériques utilisés sur les interfaces intérieures 114

C Approximation de la matrice Jacobienne 117
C.1 Dérivées des termes de la discrétisation spatiale 117
C.2 Matrice Jacobienne des termes de bord 118
C.3 Matrice Jacobienne des flux numériques 119

D Les éléments géométriques (FEM), avec les fonctions de transformation 121
D.1 Définitions sur la transformation géométrique en éléments finis 121
D.2 Géométrie de référence 123

Table des figures

1.1 *Information sur l'automatisation de la procédure de calcul et d'adaptation de maillage* 25

2.1 *La transformation géométrique qui associe l'élément de référence à un des éléments du maillage.* 39

2.2 *Figure montrant la trace de u à l'interface d'un élément K.* 40

2.3 *Maillage initial grossier du canal bump* 50

2.4 *Courbe de convergence : norme L_2 de l'erreur entropique en fonction du nombre de degré de liberté (a) et du temps d'exécution (b) pour les différents schémas de discrétisation sur le cas test du canal bump* 53

2.5 *Contours de la pression avec les schéma DG1 (a) et DG3 (b) sur le maillage de* 512 *éléments* 54

2.6 *Solution de l'entropie sur le schéma DG3 pour le maillage 8192 cellules sur le cas test du canal bump* 55

2.7 *Stencil pour l'algorithme du limiteur de pente* 57

2.8 *maillage du cas test rampe contenant 200 triangles* 60

2.9 *Coupe suivant $y = 0.2$ de la masse volumique : solution limitée (rouge), solution non limitée (noir)* 61

2.10 *Coupe axiale de la masse volumique avec les schémas DG1 (1040 quadrangles) avec limiteur de pente en noir et DG0 (4160 quadrangles) en rouge* 62

2.11 *Ecoulement supersonique dans un scramjet à $Mach3$: masse volumique avec les schémas DG1 et limiteur de pentes et DG0* 63

2.12 *Coupe axiale de la masse volumique avec les schémas DG1 (1040 quadrangles) avec limiteur de pente en noir et DG0 (4160 quadrangles) en rouge après un raffinement adaptatif de maillage* 64
2.13 *Maillage initial contenant* 560 *éléments quadrangles* 68
2.14 *Ecoulement transsonique autour d'une aile NACA0012 à* $Mach = 0.8$ *avec un angle d'attaque de* $1.25°$*, résolu avec le schéma DG2* 69
2.15 *Ecoulement supersonique autour d'une aile NACA0012 à* $Mach = 1.5$ *avec un angle d'attaque de* $1.5°$*, résolu avec le schéma DG2* 70
2.16 *Coupe axiale de la masse volumique avec les schémas DG1 (1040 quadrangles) avec viscosité artificielle en noir et DG0 (4160 quadrangles) en rouge* 71

3.1 *Raffinement adaptatif de maillage non-conforme* 78
3.2 *Superposition des maillages initial (couleur rouge) au raffinement local adaptatif non-conforme (couleur noire) avec des quadrangles (a) et triangles (b) -cas test Scramjet* 79
3.3 *Diagramme du raffinement adaptatif de maillage* 80
3.4 *Zoom des maillages à l'arrière de l'obstacle au quatrième niveau de raffinement* 83
3.5 *Zoom des maillages à l'arrière de l'obstacle au quatrième niveau de raffinement* 84
3.6 *Maillages initiaux : (a) quadrangles (1040 cellules) , (b) triangles (1594 cellules) -Scramjet-* 85
3.7 *Coupe axiale du champ de masse volumique : bleu* ($M1$)*, rouge* ($M3$) *et noir* ($M6$). 87
3.8 *Les isolignes de masse volumique sur le troisième (M3) et le septième (M7) raffinement maillages avec l'estimateur de saut* 88
3.9 *Influence du choix de la variables physiques pris en compte dans l'estimateur d'erreur non hiérarchique : bleue (masse volumique), rouge (température) , noire (pression)* 90
3.10 *Isovaleurs de la masse volumique obtenus avec le raffinement adaptatif non-conforme (a) quadrangles and (b) triangles -Scramjet-* 92
3.11 *Coupe axiale sur le champs de masse volumique Comparison entre maillages uniformes et adaptés -Scramjet-* 93

3.12 *Superposition des maillages au second neiveau de raffinement pour les deux estimateurs d'erreur* 94
3.13 *Zoom des maillages à l'arrière de l'obstacle au quatrième niveau de raffinement* 95
3.14 *Ecoulement supersonique à Mach 3 autour d'un cylindre : comparaison de lignes de courant avec les deux estimateurs d'erreurs* 95
3.15 *Maillage initial du NACA0012 contenant 1860 quadrangles* 96
3.16 *Isovaleurs de masse volumique pour les flux Vijasundaram (noir) et HLLC (jaune)* 98
3.17 *Isovaleurs de masse volumique pour les flux RL*1 *(noir) and RL*2 *(jaune)* . 99
3.18 *Isovaleurs de masse volumique pour les flux LaxFriedrich (jaune) et HLL (noir)* 100

4.1 *Comparaison des lignes de courants en DG0 pour des maillages en triangles et quadrangles* 104
4.2 *Comparaison des lignes de courants de la solution avec schéma DG2 (228 quadragles) et la solution exacte :* ***haut*** *: solution calculée avec le schéma DG2* ***bas*** *: solution exacte de Fraenkel [1]* 105
4.3 *Comparaison des lignes de courants entre un calcul DG1 et un calcul VF (ordre deux) préconditionné à bas Mach quadrangles* 106

D.1 *Les géométries de référence de quelques éléments 2D triangles et quadrangles (DG1, DG2)* 123

Liste des tableaux

2.1 *Les types de conditions de Dirichlet pour un écoulement compressible non-visqueux* 42
2.2 *Ecoulement dans un canal bump : DG0 est d'ordre* $\mathcal{O}(h^1)$ 51
2.3 *Ecoulement dans un canal bump : DG1 est d'ordre* $\mathcal{O}(h^2)$ 52
2.4 *Ecoulement dans un canal bump : DG2 est d'ordre* $\mathcal{O}(h^3)$ 52
2.5 *Ecoulement dans un canal bump : DG3 est d'ordre* $\mathcal{O}(h^4)$ 52

3.1 *Comparaison des deux types d'estimateurs : hiérarchique et non-hiérarchique - cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe* . . . 82
3.2 *Influence du choix du taux de raffinement* θ *: estimateur non-hiérarchique - cas test d'un écoulement autour d'une rampe* 82
3.3 *Coordonnées du bord et de l'obstacle supérieurs du domaine de calcul du scramjet* 85
3.4 *Raffinement de maillages successifs avec le saut de masse volumique comme estimateur d'erreur* 89
3.5 *paramètres choisi pour le raffinement de maillage -Scramjet-* 91
3.6 *Information sur les maillages : adaptés et uniformes (quadrangles, triangles) -Scramjet-* 92
3.7 *Comparaison de l'influence des flux numériques aux interfaces pour l'estimateur non hiérarchique* 97

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de l'étude exposée dans ce manuscrit est la modélisation et la simulation des écoulements liés aux équations de Navier-Stokes compressibles en utilisant la formulation de la méthode des éléments finis de Galerkin discontinus. Cette formulation présente des avantages aux méthodes traditionnelles de volumes finis en facilitant l'implémentation de l'ordre élevé et donne des souplesses par rapport à l'adaptation de maillage. En simulations numériques, un des challenges est de disposer d'un code robuste et précis en calcul capable de simuler des écoulements compressibles du supersonique au subsonique en prenant en compte toutes les échelles des phénomènes physiques en présence. Une des applications est la simulation du refroidissement par impact de jet dans les turbomachines à relativement faible nombre de Mach. Dans ce chapitre, nous présentons le contexte du travail en précisant les motivations industrielles et l'état de l'art des méthodes de simulations numériques en mécaniques des fluides ainsi que la méthode des éléments finis de Galerkin discontinu (DGFEM).

Sommaire

1.1 Contexte du travail 18

1.1.1 Motivations industrielles 18

1.1.2 Les méthodes numériques d'ordre élevé 20

1.1.3 Estimateurs d'erreur et Adaptation de maillage 23

1.2 Outils de programmation 25

1.3 Contributions et Plan du document 27
1.4 Valorisation du travail 28

1.1 Contexte du travail

1.1.1 Motivations industrielles

La mise en place du projet OPTIMAL conduit par la société LIEBHERR Aerospace, a pour but de trouver des moyens plus efficaces pour les systèmes de refroidissement des avions dits "plus électriques". Une réflexion préalable plus générale de la gestion des charges thermiques a conduit le "systémier" LIEBHERR Aerospace, à proposer quatre méthodes qui pourraient permettre un refroidissement "OPTIMAL" (dans le sens de la performance) des stators des turbomachines motorisées. Dans notre cas, il s'agit donc de simuler des systèmes de refroidissement par impact de jets d'air dans des configurations dans lesquelles les vitesses de l'écoulement sont relativement faibles. Ces vitesses de jets sont à la limite entre le compressible et l'incompressible. Par conséquent cela pose le problème du choix du modèle physique à prendre en compte pour la simulation de cette application. Il existe en effet deux communautés quant à la considération du modèle pour les écoulements à la limite entre le compressible et l'incompressible. La première communauté considère le modèle compressible mais à faible vitesse, la matrice de rigidité devient singulière et dégénère lorsque le Mach tend vers zéro. Une solution pour la méthode compressible est de rendre les équations compressibles adéquates à la limite de l'incompressible. Les méthodes de préconditionement et d'ajout de compressibilité artificielle sont souvent utilisées [2,3]. L'autre communauté utilise le modèle incompressible et l'adapte au compressible en s'assurant que la limite définie entre le compressible et l'incompressible soit bien préservée [4]. Une autre question qui se pose souvent est l'ordre de précision de ces méthodes ainsi que leur efficacité à donner des résultats probants pour des applications industrielles complexes comme le cas du refroidissement des turbomachines à faible vitesses.

Dans les codes commerciaux usuels utilisant le modèle compressible pour ces types

d'écoulements, les méthodes traditionnelles de discrétisation en Volumes Finis (VF) sont utilisées. Ces méthodes sont connues poser des problèmes pour monter en ordre de précision. De plus à bas Mach, une des difficultés est que la performance du calcul se dégrade ce qui ralentit la convergence, et souvent la précision numérique décroît lorsque le nombre de Mach tend vers zéro [5, 6]. Pour pallier ce problème dans les méthodes de VF, on procède au raffinement de maillage, mais la méthode devient très coûteuse sans pour autant garantir une précision acceptable des solutions obtenues. De nos jours, la puissance et les améliorations sans cesse croissantes, liées à l'informatique couplées aux performances des méthodes numériques telles que les méthodes éléments finis de Galerkin discontinus permettent d'élargir considérablement l'ensemble des échelles caractéristiques du compressible à l'incompressible à travers la simulation numérique.

Aux vues de cette analyse, deux objectifs principaux se dégagent et font l'objet de notre étude. La première est d'analyser et de comprendre le comportement des schémas compressibles non seulement dans le sens traditionnel de résolution des discontinuités ou des chocs, mais également dans les écoulements à bas Mach. En second lieu, utiliser une méthode de discrétisation nouvelle et efficace qui permet de monter en ordre et de donner des résultats avec des schémas précis et robustes.

Pour l'ordre élevé, les méthodes de discrétisation éléments finis de Galerkin discontinus (DGFEM) sont attrayantes et peuvent permettre de résoudre les écoulements compressibles à bas nombres de Mach [7, 8]. L'objectif de notre travail est de considérer le fluide compressible et d'utiliser la méthode de discrétisations DGFEM pour répondre à notre problématique et faire des comparaisons avec des codes existants. Etant donné qu'un des avantages de la méthode DG est la facilité d'adaptation de maillage [9], on proposera une méthode d'adaptation de maillage qui est un outil essentiel aujourd'hui en CFD (Computational Fluid Dynamics) pour gagner en temps de calcul et avoir des solutions précises.

Dans les sections suivantes, nous présentons la méthode élément fini de Galerkin discontinu d'ordre élevé tout en évoquant ces avantages aux méthodes usuelles. L'adaptation de maillage et les estimateurs d'erreur seront aussi abordées. Ce travail est dédié aux équations compressibles non visqueuses [10] pour les applications en dynamiques des fluides avec la discrétisation DG à l'ordre élevé.

1.1.2 Les méthodes numériques d'ordre élevé

Le développement pratique de codes de calculs pour des applications industrielles en dynamique des fluides (CFD) a significativement mûri durant ces dernières années. Les schémas numériques de discrétisation ont largement évolué avec pour but de représenter aussi précise que possible, les solutions dans les domaines de calculs considérés. Cet objectif n'est réalisé qu'avec une méthode de discrétisation d'ordre élevé. Une discrétisation d'ordre élevé permet aux calculs numériques pratiques d'ingénierie d'atteindre des tolérances d'erreur exigées. L'avantage de l'ordre élevé est remarquable par le temps mis pour atteindre la solution de façon aussi précise que possible. Supposons que la norme de l'erreur e d'une solution converge à la vitesse de $e = \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$, où h est la taille de la maille. Le temps T pour obtenir la solution peut être exprimé comme :

$$log\ T = a\ log\left(p\right) - \frac{d}{p+1} log\left(e\right) - log\, V + constante.$$

Dans cette équation, d, désigne la dimension spatiale, V désigne la vitesse de calcul, et a est la complexité de l'algorithme. Par exemple, $a = 2$, si le calcul est dominé par des multiplications de matrices vecteurs assez denses. Lorsque l'ordre de précision demandé est élevé ($e << 1$), et a pris modérément, le terme $log\left(e\right)$ domine celui de $log(p)$; par conséquent, la solution dépendra exponentiellement de $d/(p+1)$. Ceci étant, pour des calculs assez précis, augmenter l'ordre d'interpolation peut faire décroître significativement le temps pour atteindre la solution ou alternativement, permettre des solutions assez précises de problèmes d'une complexité beaucoup plus grande.

Malheureusement, les méthodes de discrétisations d'ordre élevé ne sont pas assez répandues dans les outils actuels de CFD dans l'ingénierie aérospatiale. Les méthodes de Volumes Finis constituent l'approche standard des méthodes CFD dans l'industrie pour le calcul des écoulements compressibles [11]. De nombreux efforts de recherche ont été effectués pour développer des algorithmes précis d'ordre élevé [12–16] pour les méthodes VF. Au début des années 1980, des mécanismes dits "décentrés" ou "Upwinding mechanisms" [17–21], ont été ajoutés aux méthodes de volumes finis pour accroître la robustesse et avoir des solutions plus précises à l'ordre élevé [22–25]. Ces méthodes d'ordre élevé, utilisent l'extension des “stencils”. Cette technique complique la discrétisation des conditions

aux bords et rend les algorithmes itératifs instables. Même avec ces techniques, ces algorithmes restent au mieux précis au second ordre, signifiant que l'erreur décroît suivant $\mathcal{O}(h^2)$, lorsque la taille de la maille h tend vers zéro. Dans des applications plus complexes, avec cette technique, l'ordre est réduit entre le premier et le second ordre. De plus, les méthodes de reconstruction d'ordres élevés telles que ENO ("Essentially Non Oscillatory") et WENO ("Weighted Essentially Non Oscillatory") sur les maillages non structurés sont difficilement applicables aux cas industriels réels [26–29]. La question qui se pose est : est-ce que cet ordre de précision est adéquat pour des cas pratiques d'ingénierie ? Les résultats des travaux de AIAA CFD workshops [30, 31], ont montré que ceci ne peut être le cas suivant les tailles des mailles et des méthodes de maillage du domaine de calcul. Or pour les applications industrielles, l'objectif est d'obtenir des solutions plus précises et plus fiables, d'où la nécessité de basculer vers des méthodes robustes et capables d'atteindre l'ordre élevé en s'affranchissant des contraintes posées par les méthodes Volumes Finis d'ordre élevé.

Les méthodes d'éléments finis de Galerkin discontinus sont attrayantes du fait qu'elles introduisent l'ordre élevé de façon compacte dans les éléments. Pour des problèmes "smooth", l'ordre de précision est contrôlé par les fonctions d'approximation spatiales. Contrairement aux méthodes VF qui utilisent une agglomération d'éléments pour l'ordre élevé, les méthodes éléments finis DG utilisent pour chaque élément du domaine un polynôme d'interpolation dont le degré peut augmenter. Venkatakrishnan et al. [32] ont montré que les méthodes éléments finis d'ordre élevés possèdent des avantages significatifs pour les écoulements "smooth" (faibles nombres de Mach ou des écoulements compressibles sans chocs) non-visqueux et visqueux [33–36].

Les Méthodes éléments finis de Galerkin Discontinus (DGFEM)

En 1973, Reed et Hill [37], ont introduit la méthode DG pour les équations de transport de neutrons. Depuis ce temps, il y a eu une grande avancée de la méthode. Cockburn et al. ont présenté un aperçu extensif de la méthode DG dans [38].

En 1974, LeSaint et Raviart [39] ont présenté le premier estimateur d'erreur à priori de la méthode DG pour les problèmes hyperboliques linéaires. Ils ont montré que la vitesse

de convergence est de l'ordre $\mathcal{O}(h^p)$ en norme $L_2(\Omega)$. En 1986, Johnson et Pitkaranta [40] et Richter en 1988 [41], ont amélioré cet estimateur d'erreur. Johnson et Pitkaranta ont montré que l'ordre de convergence optimal est de $\mathcal{O}\left(h^{p+\frac{1}{2}}\right)$ de manière générale, tandis que Richter a montré qu'en supposant que la direction caractéristique de l'écoulement n'est pas exactement alignée avec le maillage, on obtient un ordre de convergence de $\mathcal{O}(h^{p+1})$.

Cockburn et Shu [42] ont permis une percée dans l'utilisation des méthodes DG pour les problèmes hyperboliques non-linéaires en introduisant la méthode de Galerkin discontinue de Runge Kutta (RKDG). La méthode originale de RKDG utilise un "Total Variation Diminishing" explicite de Runge Kutta d'ordre deux introduit par Shu et Osher [26]. En 1989, Cockburn et Shu [42] ont généralisé la méthode à l'ordre élevé en temps et en espace. Cockburn et Shu ont résumé la méthode RKDG, avec des détails sur les limiteurs de pentes généralisés pour éliminer les oscillations inhérentes à la montée en ordre, dans [43].

Parallèlement aux travaux sus cités, Allmaras [44] et Allmaras et Giles [45] ont développé un schéma DG de second ordre pour les équations d'Euler 2-D. Leur méthode est l'extension de la méthode introduite par van Leer [46] pour les équations d'onde linéaire 1-D. Pour les équations elliptiques, dans les années 1970 et au début des années 1980, Arnold [47] et Wheeler [48] ont introduit les méthodes DG de type pénalité. Les méthodes DG ont été alors appliquées aux problèmes de diffusion [34, 43, 49–52]. La procédure introduite par les pionniers comme Bassi et Rebay [34, 53] est généralisée par Cockburn et Shu [20, 19]. Elle consiste à récrire une équation du second ordre comme un système du premier ordre et par la suite discrétiser cette équation du premier ordre en utilisant la formulation DG. Cette méthode a été successivement appliquée aux équations compressibles de Navier-Stokes par Bassi et Rebay [53, 54]. Arnold et al. [55], ont fourni une analyse unifiée, incluant des estimateurs d'erreurs, de la plus part des méthodes DG disponibles pour les équations elliptiques.

La méthode DG est référée comme une méthode hybride du fait qu'elle combine à la fois les caractéristiques des méthodes Eléments Finis de Galerkin Continus (Méthode CG) et celles des Volumes Finis. Dans chaque élément, la solution est approchée par un polynôme de degré $p \geq 0$ (comme dans la méthode CG), alors qu'elle est discontinue aux frontière de l'élément (comme dans la méthode VF) qui rend nécessaire la construction

d'un flux numérique aux interfaces. Théoriquement des solutions d'ordre élevé de précision arbitraire peuvent être obtenues en augmentant le degré du polynôme d'interpolation.

La méthode DG possède plusieurs propriétés intéressantes qui la rendent attrayante et populaire :

- Capacité à capturer des discontinuités de la solution relative à un domaine de calcul donné
- Les propriétés de conservation local (exemple : la quantité de mouvement et l'énergie) sur chaque élément
- Facilité de raffinement et d'adaptation de maillage de type h et p puisque le continuité inter-élement n'est pas requise .
- Utilisation des maillages non structurés et aussi des maillages non-conformes
- Elle peut être appliquée aux problèmes de géométrie complexe
- Indépendamment de l'ordre, la communication entre les éléments se fait aux interfaces, ce qui la rend aisément parallélisable

Pour répondre aux exigences de précision, de stabilité, de robustesse et de l'applicabilité de la méthode numérique aux problèmes réels, la méthode DG apparaît comme la solution "idéale" par rapport aux méthodes Volumes Finis dont la précision dépasse difficilement le second ordre. Les méthodes DG par cet état de l'art offrent un large éventail de solutions qui permettent de simuler des écoulements compressibles allant du supersonique au subsonique. Cette thèse présente les solutions techniques pour les méthodes de discrétisation d'ordre élevé pour les équations de Navier-Stokes compressibles.

1.1.3 Estimateurs d'erreur et Adaptation de maillage

Dans plusieurs applications en aérodynamique, l'estimation d'erreur est essentielle à l'utilité d'un code de simulation numérique. Une solution CFD sans estimation d'erreur peut compromettre la fidélité de l'analyse. Dans la plus part des codes de calculs, respecter les exigences des tailles de maille est un processus manuel (ou d'un utilisateur) et requiert une expérience a priori dans la détermination des endroits de discontinuités ou de chocs ou d'autres caractéristiques de l'écoulement. L'estimateur d'erreur et l'adap-

tation de maillage sont une étape supplémentaire indispensable dans la résolution des applications industrielles. Ils ne sont pas souvent exécutés dans les applications pratiques de CFD ou dans les codes de façon automatique. L'estimation d'erreur consiste à estimer l'erreur de la solution et fournir un indicateur pour cibler les zones dans lesquelles l'erreur est élevée. Cet indicateur adaptatif peut alors être employé pour changer (par exemple raffiner) le maillage avec pour objectif de réduire au minimum l'erreur. Les raisons pour lesquelles cette étape est rarement exécutée dans les codes industriels sont qu'un indicateur d'erreur fiable est rarement disponible et que le re-maillage adaptatif d'une géométrie complexe peut être très long, et aussi souvent par manque de robustesse de la méthode de résolution.

L'erreur dans la solution peut être quantifiée de différentes manières [56, 57]. Elle peut être intégrée suivant une norme choisie sur tout le domaine pour obtenir une erreur globale, ou sur chaque élément pour obtenir une erreur locale.

L'adaptation de maillage qui raffine le maillage en fonction des caractéristiques de l'écoulement permet de profiter des avantages de l'ordre élevé à moindre coût. Lorsqu'un maillage est uniformément raffiné, la précision est souvent limitée par la régularité de la solution plutôt qu'à l'ordre de discrétisation. Cependant lorsque le maillage est raffiné de façon adaptative en suivant des caractéristiques singulières de l'écoulement à travers le domaine de calcul, la pénalité des irrégularités de la solution est réduite et l'avantage de la discrétisation à l'ordre élevé est récupéré. La résolution aussi précise que possible de ces caractéristiques de l'écoulement nécessite l'utilisation de méthodes de raffinement ou d'adaptation locale de maillage efficace pour mieux capter ces phénomènes. Les techniques adaptatives utilisant les estimateurs d'erreur a posteriori sont devenues un outil indispensable pour un grand nombre d'applications. Ces estimateurs permettent de mesurer la qualité de la solution calculée et fournissent une information pour contrôler l'algorithme d'adaptation de maillage.

Pour répondre à une exigence d'optimisation de maillage, ce travail repose sur des stratégies d'automatisation de l'estimation de l'erreur et de l'adaptation de maillage suivant le diagramme de la figure 1.1. Dans les parenthèses sur la figure sont indiqués les chapitres dans lesquels ces termes sont traités.

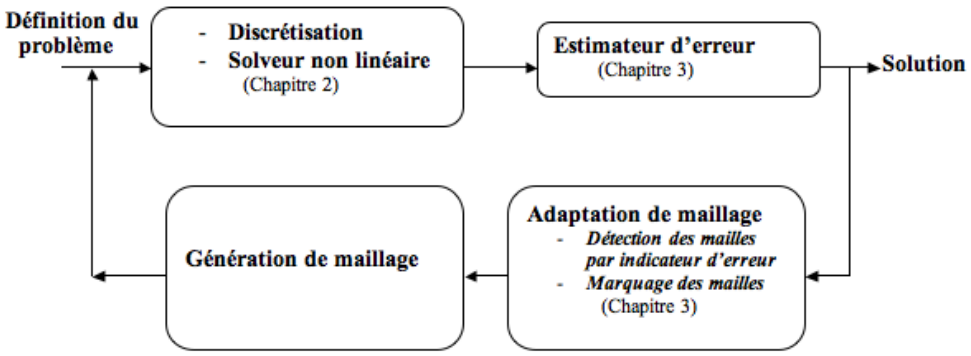


FIGURE *1.1: Information sur l'automatisation de la procédure de calcul et d'adaptation de maillage*

1.2 Outils de programmation

L'implémentation d'un algorithme en élément fini commence par l'établissement de la formulation faible du système des équations aux dérivées partielles et le choix des fonctions de bases pour la discrétisation spatiale (cf. chapitre 2). Après le choix de la méthode de discrétisation du modèle, l'étape suivante est le développement d'un algorithme pour transcrire le modèle et la méthode. Une implémentation correcte non seulement doit résoudre numériquement le problème au niveau du code mais doit aussi offrir de la flexibilité pour déterminer les différentes propriétés de l'algorithme, telles que l'ordre des polynômes (la facilité de passer d'un ordre à un autre), les vitesses de convergence ainsi que les coûts de calcul etc. L'outil d'implémentation ainsi que la programmation informatique doivent être conçus de manière à offrir plus de souplesse et de flexibilité quant à la modification du modèle avec la possibilité d'extension avec un minimum d'effort. Cette analyse demande des compétences à trois niveaux différents que sont : des compétences mathématiques, physiques et de programmation. Le code Concha en développement au sein de l'équipe EPI-CONCHA de l'INRIA a pour but de répondre à ces exigences.

Ce travail a été réalisé dans la librairie Concha. Concha est une librairie éléments finis traitant d'une large variété de modèles mathématiques tels que ceux liés aux écoulements compressibles, incompressibles et viscoélastiques [58]. Le code utilise différents types de maillage structurés et non structurés avec différents types d'éléments finis (continus et discontinus). Ces maillages peuvent contenir des triangles, des quadrangles, des tétraèdres

et des hexaèdres avec des mailles conformes ou non-conformes possédant des "hanging nodes". L'objectif principal du Projet Concha est d'améliorer la conception des méthodes aérodynamiques pour des configurations complexes en réduisant de façon significative le temps de calcul avec des méthodes d'adaptation d'ordre élevé, de la géométrie à la solution numérique, en fonction des degrés de précision souhaités. Il a pour but de devenir un outil académique permettant d'aborder des applications industrielles dans différents domaines.

La modélisation d'une large gamme d'application n'est possible que par différents types d'algorithmes numériques. Par conséquent la programmation est renforcée par l'utilisation de fonctions virtuelles, qui apportent de la souplesse et de la flexibilité. Idéalement, l'ajout d'une nouvelle équation ou le changement des lois constitutives d'un modèle donné, devrait être simple. Basculer vers une autre méthode de discrétisation ou une autre méthode, la solution doit être possible avec un minimum d'effort de programmation. Ces objectifs sont réalisés par programmation orientée objet dont les avantages sont clairs de nos jours. Le choix du langage de programmation est le C++. En effet un important effort est fait pour orthogonaliser le plus possible les tâches informatiques. On utilise donc des exécutables qui communiquent par fichiers et pilotés par des scripts en python. Ceci donne de la souplesse quant à l'utilisation des outils externes pour la génération de maillages ou de raffinements ainsi que des algorithmes de résolutions numériques. La librairie Concha contient des outils pour la construction des éléments spatiaux suivants :

- Eléments continus en espace Pk, Qk,
- Espaces éléments finis non-conformes (Crouzeix-Raviart, Rannacher-Turek),
- Espaces vectoriels (les éléments Raviart-Thomas),
- Eléments finis entièrement discontinus

En somme les lignes directives de cette librairie sont : **a)** La réutilisation du code autant que possible, **b)** L'orthogonalisation informatique des différentes parties , **c)** Garantir la flexibilité tout en respectant les méthodes et les modèles. Les outils techniques pour cela sont : ***a)*** l'utilisation d'exécutables, ***b)*** l'utilsation d'héritage et de polymorphisme, ***c)*** la conception de projet orientée objet.

Notre apport dans cette librairie s'est principalement focalisé sur la partie des écoulements compressibles avec la mise en place et validation des différents aspects dont ce travail fait l'objet.

1.3 Contributions et Plan du document

Comme évoqué plus haut, les motivations tant du coté industriel que de la recherche scientifique se résument à élaborer une méthode permettant de comprendre les écoulements à bas nombre de Mach avec une meilleure précision sur la solution calculée. L'objectif de la thèse est d'exploiter et d'analyser les différents atouts sus cités qu'offre la méthode DG pour simuler les équations d'Euler et de Navier-Stokes compressibles tout en montrant les aptitudes de la méthode à résoudre des écoulements à bas Mach.

Dans le cadre de ce travail, nous avons apporté des contributions dans la validation de la méthode DG pour l'ordre élevé en espace ainsi que la programmation de plusieurs types de flux numériques aux interfaces à travers différents cas tests.

Dans le chapitre 2, nous détaillons la méthode de discrétisations des schémas d'éléments finis de Galerkin discontinus (DG FEM) pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes compressibles. Nous montrerons des tests de convergence et de précision de la méthode pour différents ordres en espace. En montant en ordre, pour les écoulements transsoniques et supersoniques, il apparaît des oscillations numériques entraînées par les ondes de chocs dans l'écoulement, nous avons développé des schémas de shock-capturing pour éliminer ces oscillations numériques qui émanent de l'ordre élevé.

Nous proposerons dans le chapitre 3, deux types d'estimateurs d'erreur a posteriori utilisés comme indicateurs dans les procédures d'adaptations de maillages. Ce calcul d'adaptation complètement automatisé permet à un utilisateur de lancer n'importe quelle simulation sans se soucier au préalable du maillage de départ qui est grossier.

Motivé par le potentiel des méthodes DG et par la nécessité de converger vers des solutions précises à bas nombre de Mach avec l'ordre élevé, dans le chapitre 4, nous analysons l'aptitude du code à résoudre le bas Mach.

Enfin dans le dernier chapitre nous abordons la conclusion et les perspectives.

1.4 Valorisation du travail

Ce travail a fait l'objet de quatre articles dont 2 publications dans des revues internationales ([1] et [2]), et de 2 conférences internationales ([3] et [4]). On note que la présentation faite lors du congrès St Petersburg [3] a été sélectionnée pour proposition de soumission et finalement acceptée dans la revue internationale : Journal of Aerospace Engineering, Institution of Mechanical Engineers Part G [PIG].

[1] R. Becker, K. Gokpi, E. Schall, D. Trujillo, Fully implicit adaptive method using discontinuous Galerkin finite elements for high speed flows, Int. J. Aerodynamics, Vol. 2, Nos. 2/3/4, 2012

[2] R. Becker, K. Gokpi, E. Schall, D. Trujillo, Comparison of hierarchical and non-hierarchical error indicators for adaptive mesh refinement for the Euler equations, Article Number : 446287, Journal of Aerospace Engineering, Institution of Mechanical Engineers Part G [PIG].

[3] Roland Becker, Kossivi Gokpi, Eric Schall, David Trujillo, Comparison of two types of a posteriori error estimators on mesh adaptation in discontinuous Galerkin finite elements methods. 4th European Conference for Aerospace Sciences, EUCASS 2011, July 2011, St- Petersburg Russia.

[4] Roland Becker, Kossivi Gokpi, Eric Schall, David Trujillo, A posteriori error estimators for grid adaptation with Galerkin discontinuous finite element method. 8th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, HEFAT2011, July 2011, Pointe Aux Piments, Mauritius.

Chapitre 2

Discrétisation Eléments Finis de Galerkin Discontinus des Equations d'Euler

Sommaire

2.1 Les lois de conservations dans un milieu continu 30

2.1.1 Conservation de masse 30

2.1.2 Conservation de quantité de mouvement 31

2.1.3 Conservation de l'énergie 33

2.1.4 Equations de Navier-Stokes sous formes de variables conservatives 34

2.2 Discrétisation des équations d'Euler par la méthode des éléments finis DG 35

2.2.1 Les équations d'Euler 35

2.2.2 Discrétisation par la méthode élément finis de Galerkin Discontinus des équations d'Euler 36

2.3 Conditions aux limites et implémentation 42

2.4 Intégration en temps du système discret non linéaire 45

2.4.1 Schéma de résolution explicite 46

2.4.2 Schéma de résolution implicite : 47

2.5 Tests numériques 49

2.6 Méthode de shock-capturing 55
2.6.1 Méthode de limiteur de pente 56
2.6.2 Terme de viscosité artificielle 65

Dans ce chapitre nous décrivons la discrétisation de la méthode des éléments finis DG que nous avons développé pour résoudre les équations hyperboliques (Equations d'Euler) non linéaires. Ce chapitre concerne principalement la partie hyperbolique, et traite principalement de la formulation de discrétisation, de la solution numérique du problème ainsi que la convergence des solutions numériques.

Dans la section 2.1 sont introduites les lois de conservations qui gouvernent le système des équations d'Euler. Dans la section 2.2, on aborde la méthode de discrétisation des éléments finis de Galerkin discontinus et dans la section 2.3 sont formulées les différentes conditions de bord pour le système d'équations Euler. La section 2.4 traite de la discrétisation en temps. La section 2.5 concerne des tests numériques pour montrer la convergence optimale des méthodes DG et dans la dernière section sera abordée la méthode de "shock-capturing".

2.1 Les lois de conservations dans un milieu continu

Les lois de conservation décrivent les principes physiques régissant le mouvement du fluide et le transfert de chaleur dans un milieu continu [59, 60]. La description du milieu continu est basée sur l'hypothèse selon laquelle l'échelle macroscopique d'étude est suffisamment grande devant celle des particules élémentaires en présence. Les formulations mathématiques sont données par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

2.1.1 Conservation de masse

La conservation de masse est la loi fondamentale du comportement d'un milieu continu. Elle stipule que la variation temporelle de la masse dans une région donnée est identique-

ment égale à zéro. Mathématiquement, la conservation de masse est décrite par *l'équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.1}$$

avec ρ : la masse volumique du fluide, $\mathbf{v}$, le vecteur vitesse de composantes (v_1, v_2)

2.1.2 Conservation de quantité de mouvement

En raison de l'interaction des molécules d'un fluide son mouvement évoque des forces, qui peuvent redistribuer *le moment ou la quantité de mouvement* $\psi = \rho\mathbf{v}$ dans le fluide. Par conséquent à travers chaque surface élémentaire (imaginaire) dans le fluide, il existe un flux de quantité de mouvement non nul. Par des considérations physiques on déduit que la force par unité de surface, qu'on appelle fréquemment contrainte, à chaque point de la surface peut être représentée comme le produit scalaire $\mathbb{P}.n$ d'un tenseur symétrique $\mathbb{P}$ de rang 2 et de la normale surfacique locale n. En plus, l'écoulement peut être modifié par d'autres forces extérieures $\mathbf{F}$, par exemple les forces de gravité. Ces forces extérieures de nature volumique $\mathbf{F}$ sont exprimées comme le produit de masse volumique et de la force par unité de masse : $\mathbf{F} = \rho\mathbf{f}$; la force par unité de masse $\mathbf{f}$ peut également être interprétée comme une accélération, par exemple dans le cas de la gravité, elle est donnée par l'accélération gravitationnelle, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. En somme l'équation de *la quantité de mouvement* est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial \rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla.(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbb{P}) - \rho\mathbf{f} = 0 \tag{2.2}$$

Du point de vue physique le tenseur $\mathbb{P}$ peut être décomposé en une partie liée à la pression et à une contribution par les contraintes visqueuses dans le fluide : $\mathbb{P} = -p\mathbb{I} + \tau$, avec $\mathbb{I}$ étant le tenseur unité. p est la pression thermodynamique dans le fluide et dépend

des autres variables à travers une relation d'état du fluide, telle $p = \rho r T$ avec $r = R/M$, M étant la masse molaire.

Avec :
R : la constante universelle des gaz parfaits
T : la température du fluide.

La contribution visqueuse dépend des propriétés du fluide et de l'écoulement, i.e. le champ des variables dynamiques en particulier la vitesse $\mathbf{v}$. Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\tau = \eta \left(\nabla . \mathbf{v}\right) \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D} \tag{2.3}$$

avec :

$$\mathbb{D} := \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T\right) \tag{2.4}$$

μ : désigne la viscosité dynamique du fluide
η : désigne la viscosité de volume du fluide

On montre que la deuxième loi de la thermodynamique impose les conditions suivantes sur μ et η :

$$3\eta + 2\mu \geq 0, \qquad \mu \geq 0 \tag{2.5}$$

Les viscosités dynamique et de volume sont supposées constantes. L'ensemble des fluides pour lesquels cette hypothèse est vérifiée est appelé fluide newtonien. On lui adjoint généralement l'hypothèse de Stokes :

$$3\eta + 2\mu = 0 \ . \tag{2.6}$$

L'équation (eq :2.2) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + (\rho\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \mu\left[\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{3}\nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{v})\right] + \rho\mathbf{f} \tag{2.7}$$

2.1.3 Conservation de l'énergie

Les changements mécaniques sont donnés par le travail effectué par les forces externes **F** et de forces de surface $\mathbb{P}.n$ sur le fluide. En plus, de l'énergie peut être échangée à travers la frontière d'un volume sous forme de flux thermique **q**. D'après le premier principe de la thermodynamique, *La conservation d'énergie*, s'exprime par l'équation suivante :

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t} + \nabla.\,(\rho E\mathbf{v}) - \nabla.\,(\mathbb{P}.\mathbf{v}) + \nabla.q - \rho\mathbf{f}.\mathbf{v} = 0 \tag{2.8}$$

Avec :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \tag{2.9}$$

et

$$\mathbf{q} = -k\nabla\mathbf{T} \qquad (Loi \quad de \quad Fourier) \tag{2.10}$$

E : énergie totale
e : l'énergie interne spécifique
k : la conductivité thermique du fluide

2.1.4 Equations de Navier-Stokes sous formes de variables conservatives

En se basant sur les équations de continuité (eq. 2.1), de quantité de mouvement (eq. 2.2) et d'énergie (eq. 2.8), les équations de Navier-Stokes compressibles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{v}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbb{P}\right) - \rho \mathbf{f} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla.\left(\rho E \mathbf{v}\right) - \nabla.\left(\mathbb{P}.\mathbf{v}\right) + \nabla.q - \rho \mathbf{f}.v = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

En prenant en compte les hypothèses de fluide newtonien ainsi que de l'égalité de Stokes et en négligeant la force gravitationnelle, le système conservatif devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{v}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\right) + \nabla p = -\nabla.\tau \\ \dfrac{\partial \left(\rho E\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\left(\rho E + p\right)\mathbf{v}\right) = -\nabla.\left(\tau.\mathbf{v}\right) - \nabla.q \end{cases} \tag{2.12}$$

en rappelant que ρ est la masse volumique, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ le vecteur vitesse en 2D, p la pression. τ le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\tau = -\mu\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T\right) + \frac{2}{3}\mu\left(\nabla.\mathbf{v}\right)\mathbf{I}$$

avec μ le coefficient de viscosité.

En notant $u = (\rho, \rho\mathbf{v}, \rho E) \in \mathbb{R}^4$ le vecteur des variables conservatives solution de (2.12), les équations conservatives ou communément appelées (par abus de langage) les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.\mathcal{F}^c(u) - \nabla.\mathcal{F}^v(u, \nabla u) = 0, \tag{2.13}$$

Dans cette section nous avons décrit les équations de continuité de quantité de mouvement et d'énergie les équations qui gouvernent les équations de Navier-Stokes compressibles. Le comportement du fluide est modélisé par l'application des lois de conservation physiques pour un fluide en mouvement à l'échelle macroscopique. Le système d'équation 2.13 plus la loi d'état des gaz parfait forment un système fermé qui peut être résolu par des méthodes numériques. Dans la section suivante nous allons introduire la discrétisation mathématique par la méthode des éléments finis de Galerkin discontinus.

2.2 Discrétisation des équations d'Euler par la méthode des éléments finis DG

2.2.1 Les équations d'Euler

Le système des équations d'Euler en 2-D, peut se mettre la sous forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.\mathcal{F}(u) = 0, \tag{2.14}$$

définie avec les conditions initiales et de bord qui conviennent. Le vecteur des variables conservatives u et les composantes $F_1(u)$ et $F_2(u)$ du flux conservatif Eulerien $\mathcal{F}(u)$ sont donnés par :

$$u = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho H v_1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho H v_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

L'équations d'état des gaz parfaits $p = \rho RT$, et H est donnée par :

$$H = E + \frac{p}{\rho} = e + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} \tag{2.16}$$

avec :

$$p = (\gamma - 1)\,\rho e, \tag{2.17}$$

où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ est la rapport entre les capacités thermiques massiques c_p, et c_v et e l'énergie interne.

2.2.2 Discrétisation par la méthode élément finis de Galerkin Discontinus des équations d'Euler

La méthode DG est une combinaison des méthodes de Volumes finis et Eléments finis standards [61]. Résoudre un problème par la méthode DG implique à approcher le domaine par un domaine de calcul. Ce domaine de calcul est subdivisé en cellules. La solution sur chaque cellule est approchée par des polynômes de degré arbitraire. La méthode DG permet à la solution d'être discontinue aux interfaces des cellules. Ceci veut dire que deux cellules voisines peuvent avoir des valeurs différentes aux interfaces. Par conséquent, il est nécessaire d'approcher le flux entre deux cellules adjacentes par une fonction de flux numérique. La méthode DG pour les équations d'Euler est décrite comme suit.

2.2.2.1 Le système d'équation d'Euler

On considère l'équation sous forme vectorielle, (eq. 2.14), dans le domaine Ω. Nous allons introduire dans un premier temps les notations. Pour un temps final $T > 0$, on a le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i(u)}{\partial x_i} = 0 \qquad dans \qquad ([0,T] \times \Omega)\,, \\ u(0,.) = g_D(.) \qquad dans \qquad \Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, avec $u = (u_1, ..., u_m)^T : \Omega(\subset \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m$ ($m = 4$ dans le cas 2D, i.e. $d = 2$), et $F = (F_1(u), ..., F_d(u))$ avec $F_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m \times d}$, $i = 1, ..., d$ continument différentiable. On dit que (2.18) est hyperbolique, si la matrice :

$$B(u, \nu) := \sum_{i=1}^{d} \nu_i A_i(u) \tag{2.19}$$

possède un nombre réel m de valeurs propres ainsi que des vecteurs propres linéairement indépendants pour tout vecteur $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d) \in \mathbb{R}^d$. Ici, $A_i(u)$ dénote la matrice jacobienne du flux $F_i(u)$, i.e :

$$A_i(u) := \frac{\partial F_i(u)}{\partial u}, \qquad i = 1, ..., d.$$

Le système des lois de conservation (eq. 2.19) doit être complété par les conditions aux limites adéquates. Par exemple, pour les problèmes hyperboliques (équations d'Euler) les conditions de bord de Dirichlet doivent être prescrites de la façon suivante :

$$B^-(u, n)(u - g_D) = 0,$$

où n désigne la normale extérieure à la frontière Γ et g_D est une fonction vectorielle donnée. $B^-(u, n)$ dénote la partie négative de la matrice $B(u, n)$,

$$B^-(u, n) = P\Lambda^- P^{-1}, \tag{2.20}$$

où $P = [r_1, ..., r_m]$ représente la matrice $m \times m$ des vecteurs propres de $B(u, n)$ et $\Lambda^- = diag(min(\lambda_i, 0))$ la matrice diagonale $m \times m$ des valeurs propres négatives de $B(u, n)$ avec $Br_i = \lambda_i r_i$, ($B(u, n) = P\Lambda P^{-1}$), $i = 1, ..., d$. On note que la partie positive B^+ de la matrice B se définit de manière analogue.

2.2.2.2 La discrétisation spatiale élément fini de Galerkin discontinu

On suppose que T_h est la subdivision du domaine Ω, en éléments disjoints K tels que : $\overline{\Omega} = \cup_{K \in T_h} \overline{K}$. Ici, h désigne la fonction de maille constante par morceaux définie par : $h \mid_K = diam\,(K)$ pour tout $K \in T_h$. Supposons que chaque élément $K \in T_h$ soit l'image d'un élément de référence fixe noté $\hat{K}$, ce qui implique, $K = \sigma_K\left(\hat{K}\right)$ pour tout $K \in T_h$. On considère que les cas où $\hat{K}$ est un hypercube ouvert unité dans $\mathbb{R}^d$. De plus la transformation σ_K de l'élément de référence $\hat{K}$ en K dans l'espace réel est supposée bijective et régulière (voir fig.2.1), avec des valeurs propres de sa matrice jacobienne bornées [62]. Sur l'élément de référence $\hat{K}$, on définit des polynômes spatiaux de degré $p \geq 0$ tels que :

$$Q_p = span\left\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq p,\ 0 \leq i \leq d\right\},$$

où α est un multi-indice et $x^\alpha = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha i}$. Maintenant, nous introduisons l'espace des éléments finis V_h^p composé de fonctions polynomiales de degré $p \geq 0$, défini par :

$$V_h^p = \left\{v_h \in \left[L_2\left(\Omega\right)\right]^m :\ v_h \mid_K \circ \sigma_K \in \left[Q_p\right]^m\right\}, \tag{2.21}$$

Supposons que $v \in H^1(K)$ pour tout $K \in T_h$. Pour tout $K \in T_h$ et pour tout $x \in \partial K$, on dénote par v_K^+ la trace intérieure de v sur ∂K et par v_K^-, celle extérieure sur ∂K. La trace intérieure v_K^+ sur ∂K est celle prise de l'intérieure de K. La trace extérieure v_K^- sur ∂K est celle prise de l'intérieur de l'élément voisin $K_K^{'}(x)$ pour $x \in \partial K \setminus \Gamma$. $K_K^{'}(x)$ est l'unique élément $(K_K^{'}(x) \neq K)$, dépendant du choix de x, tel que $x \in \partial K_K^{'}(x)$. Pour $x \in \partial K \cap \Gamma$, la trace extérieure est donnée par $v_K^- := g_D$, avec g_D une fonction des conditions aux limites adéquates. Pour simplifier les notations, les quantités v_K^+ et v_K^- sont notées respectivement v^+ et v^-. On note $\mathcal{S}$, l'ensemble des faces du domaine ; et $\mathcal{S}^\partial$ l'ensemble des bords. Si Γ_{ij} désigne une face entre deux cellules adjacentes K_i et K_j, alors :

$$\partial K_i = \cup_{j \in \mathcal{S}} \Gamma_{ij}, \qquad \Gamma = \partial K_i \cap \partial \Omega_h = \cup_{j \in \mathcal{S}^\partial} \Gamma_{ij} \tag{2.22}$$

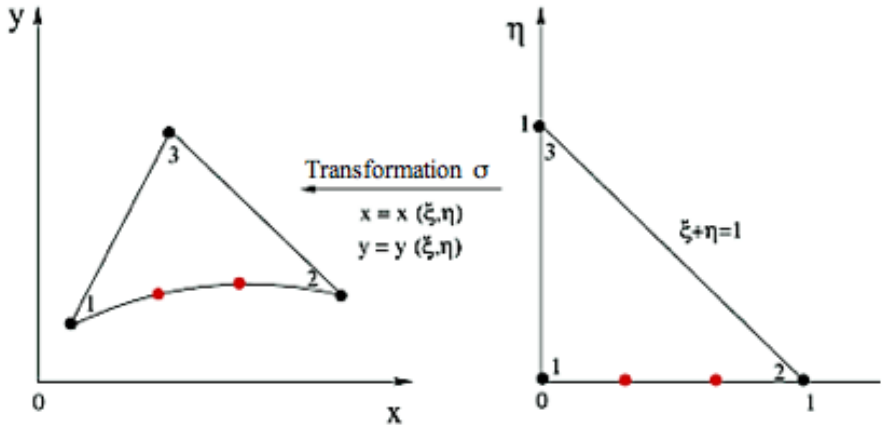


FIGURE *2.1: La transformation géométrique qui associe l'élément de référence à un des éléments du maillage.*

Pour formuler la discrétisation par éléments finis DG, on introduit en premier *la formulation faible*. Ceci est obtenu en multipliant le système d'équations (2.18) par une fonction test arbitraire v et en intégrant par partie sur un élément K du maillage T_h ; On obtient donc :

$$\int_K \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int_K F(u) . \nabla v dx + \int_{\partial K} F(u) . n v ds = 0 \tag{2.23}$$

où $n \mid_{\partial K}$ dénote le vecteur normal unité à ∂K

Pour discrétiser (2.23), on remplace la solution analytique u par l'approximation élément fini de Galerkin discontinu u_h ainsi que la fonction test v par v_h, les deux appartenant à l'espace élément fini V_h^p défini plus haut. De plus puisque la solution u_h est discontinue à travers les interfaces, on doit remplacer le flux $F(u.n)$ par un *flux numérique* $H(u_h^+, u_h^-, n)$, qui dépend à la fois de la trace intérieure et extérieure de u_h sur ∂K, $K \in T_h$, et de la normale unité extérieure à ∂K (figure 2.2) .

En sommant sur tous les éléments K de la grille T_h, on obtient la discrétisation par élément fini de Galerkin discontinu du système d'équation (2.19) comme suit : trouver

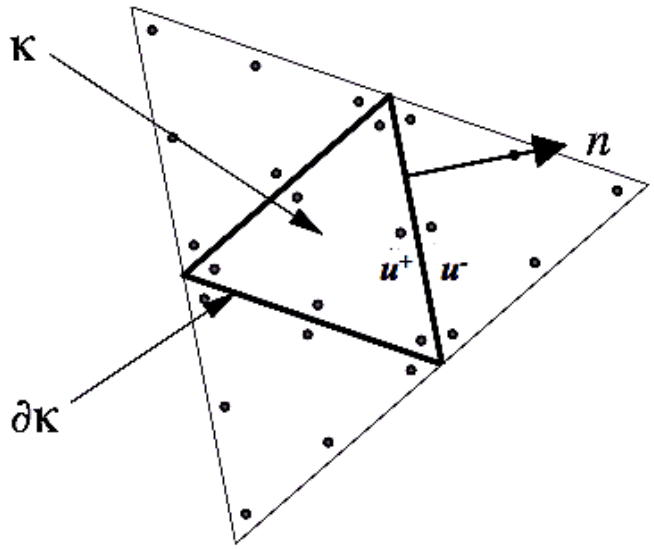


FIGURE *2.2: Figure montrant la trace de u à l'interface d'un élément K.*

$u_h \in V_h^p$ tel que [38, 63, 64] :

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K \frac{\partial u}{\partial t} v - \int_K F(u_h) . \nabla v_h dx + \int_{\partial K} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds \right\} = 0 \qquad \forall v_h \in V_h^p, \quad (2.24)$$

nous subdivisons le terme des faces en deux termes à savoir le terme des faces intérieures et celui des faces de bord :

$$\sum_K \int_{\partial K} = \sum_K \int_{\partial K \setminus \Gamma} \cup \sum_K \int_{\partial K \cap \Gamma} \quad (2.25)$$

L'équation 2.24 devient :

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K \frac{\partial u}{\partial t} v - \int_K F(u_h) . \nabla v_h dx + \int_{\partial K \setminus \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds + \int_{\partial K \cap \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds \right\} = 0 \quad (2.26)$$

Ce schéma est appelé la méthode de Galerkin discontinu de degré p. Pour tout élément $K \in T_h$ dont les bords coïncident avec le domaine de calcul Ω, nous remplaçons u_h^- par la condition de bord appropriée sur la partie de ∂K pour laquelle $\partial K \cap \Gamma \neq \emptyset$. La première intégrale de l'équation 2.26, est la matrice de masse et doit être calculée une seule fois

pour toute pour tous les éléments du domaine. Les deux dernières intégrales représentent le flux numérique.

Calcul du flux numérique $H(.,.,.)\mid_{\partial K}$

Les fonctions tests v, et les solutions u_h, sont discontinues aux interfaces des éléments. Le flux aux interfaces possède plusieurs valeurs à l'interface (voir figurei 2.2). Par conséquent, un traitement particulier s'impose aux interfaces. La discontinuité spatiale peut être interprétée comme un problème de Riemann dont la solution approchée est utilisée pour définir le flux aux interfaces. Dans l'équation (2.26), le flux $F(u).n$ est remplacée par le flux numérique $H\left(u_h^+, u_h^-, n\right)$ aux interfaces des éléments K, $(K \in T_h)$. Ce Flux numérique sur les bords du domaine correspond à une imposition faible des données aux conditions de bord [63, 65]. De plus, le choix du flux numérique est indépendant de l'espace élément fini utilisé et doit être consistant et conservatif. En effet, le flux numérique $H(.,.,.)$ peut être choisi comme une fonction monotone de Lipschitz qui satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $H(.,.,.)\mid_{\partial K}$ est consistant avec le flux $F(.).n$ pour tout $K \in T_h$, i.e sur les interfaces internes et de bords du domaine, l'expression $F(.).n$ de l'équation () est remplacée par $H(.,.,.)\mid_{\partial K}$, telle que :

$$H(v,v,n)\mid_{\partial K} = F(v).n \qquad \forall K \in T_h;$$

(ii) $H(.,.,.)$ est conservatif, i.e étant donné deux éléments adjacents K et $K^{'}$ de la partition élément finie T_h, à tout point $x \in \partial K \cap \partial K' \neq \emptyset$, $(n_{K'} = -n)$, on a :

$$H(v,w,n) = -H(v,w,-n).$$

Il existe plusieurs types de fonctions flux numériques satisfaisant ces conditions, telles que les flux numériques de Roe, Steger-Warming, Laxfriedrich, Vijayasundaram, HLLC, HLL, HLLE, AUSM... [66, 67]. En annexe (B.2), on trouvera les diverses expressions des flux numériques développés dans ce travail.

2.3 Conditions aux limites et implémentation

Pour le système d'équations d'Euler 2D, les conditions de bord sont imposées faiblement en suivant les directions caractéristiques. Le flux numérique H en 2D, remplace le terme :

$$F(u).n = \left(n_1 \frac{\partial F_1(u)}{\partial u} + n_2 \frac{\partial F_2(u)}{\partial u} \right) u = B(u,n)u,$$

avec $n = (n_1, n_2)$ et la matrice $B(u,n) = \left(n_1 \frac{\partial F_1(u)}{\partial u} + n_2 \frac{\partial F_2(u)}{\partial u} \right) u$ en utilisant la définition (2.18) et en utilisant la définition d'homogénéité de $F(u) = (F_1(u), F_2(u)) = (A_1(u)u, A_2(u)u)$. Les matrices $A_1(u) = \frac{\partial F_1(u)}{\partial u}$, $A_2(u) = \frac{\partial F_2(u)}{\partial u}$, sont définies en annexe (A.2 et A.3).

Les valeurs propres de la matrice B sont classiquement :

$$\lambda_1 = \mathbf{v}.n - c, \qquad \lambda_{2,3} = \mathbf{v}.n, \qquad \lambda_4 = \mathbf{v}.n + c \tag{2.27}$$

avec $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ la vitesse du son. En raison du signe des valeurs propres, on impose les types de condition de bord de Dirichlet suivant : (tableau 2.1) :

type	écoulement	écoulement vs. vitesse du son	variables à prescrire
entrée subsonique	$\mathbf{v} \cdot n < 0$	$\mathbf{v} \cdot n + c > 0$, $\mathbf{v} \cdot n - c < 0$	combinaison de 3 variables
entrée supersonique	$\mathbf{v} \cdot n < 0$	$\mathbf{v} \cdot n + c < 0$, $\mathbf{v} \cdot n - c < 0$	toutes les variables
sortie subsonique	$\mathbf{v} \cdot n > 0$	$\mathbf{v} \cdot n + c > 0$, $\mathbf{v} \cdot n - c < 0$	une variable
sortie supersonique	$\mathbf{v} \cdot n > 0$	$\mathbf{v} \cdot n + c > 0$, $\mathbf{v} \cdot n - c > 0$	rien

Tableau 2.1: Les types de conditions de Dirichlet pour un écoulement compressible non-visqueux

En plus de ces conditions sur l'entrée et la sortie, on y ajoute la condition réfléchie sur les bords pariétaux. Dans ce qui suit, nous allons décrire la manière d'imposer les variables

aux différentes conditions de bord sus mentionnées. Notons Γ la frontière du domaine. Cette frontière est subdivisée en différentes parties concernant les bords étudiés :

- Entrée supersonique notée : $\Gamma_{e,sup}$;
- Entrée subsonique notée : $\Gamma_{e,sub}$;
- Sortie supersonique notée : $\Gamma_{o,sup}$,
- Sortie subsonique notée : $\Gamma_{s,sub}$;
- Condition pariétale notée : Γ_{ref}

Γ s'écrit alors :

$$\Gamma = \Gamma_{e,sup} \cup \Gamma_{e,sub} \cup \Gamma_{s,sup} \cup \Gamma_{s,sub} \cup \Gamma_{ref} \tag{2.28}$$

En rappelant la discrétisation DG du système d'équations d'Euler (équation 2.26) ; il existe $u \in V_h^p$ tel que :

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K \frac{\partial u}{\partial t} v - \int_K F(u_h) . \nabla v_h dx + \int_{\partial K \setminus \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds + \int_{\partial K \cap \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds \right\} = 0$$

En posant :

$$a_\Gamma(u, v) = \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K \cap \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds, \tag{2.29}$$

pour inclure les conditions de bord mentionnées en 2.28, le terme (2.29), s'écrit alors :

$$a_\Gamma(u, v) = a_{\Gamma e,sup}(u, v) + a_{\Gamma e,sub}(u, v) + a_{\Gamma s,sup}(u, v) + a_{\Gamma s,sub}(u, v) + a_{\Gamma ref}(u, v) \tag{2.30}$$

Il s'agit maintenant de remplacer u_h^- par $u_\Gamma(u)$ dans l'expression (2.29) ; $u_\Gamma(u)$ étant les données initiales g_D (equation 2.18), ou une combinaison des variables u et des données g_D liées aux différentes conditions de Dirichlet décrites au tableau 2.1.

- Sur $\Gamma_{e,sup}$, entrée supersonique, la trace u_h^- est remplacée par la fonction donné g_D :

$$a_{\Gamma e,sup}(u,v) = \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K\cap\Gamma e,sup} H\left(u_h^+, g_D, n\right) v_h^+ ds,$$

- Sur $\Gamma_{e,sub}$ et $\Gamma_{s,sub}$, entrée subsonique et la Sortie subsonique on a :

$$a_{\Gamma e,s,sub}(u,v) = \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K\cap\Gamma e,s,sub} H\left(u_h^+, u_\Gamma(u), n\right) v_h^+ ds,$$

avec :

⋆ Entrée subsonique :

$$u_\Gamma(u) = \left((g_D)_1, (g_D)_2, (g_D)_3, \frac{p(u)}{\gamma-1} + \frac{(g_D)_2^2 + (g_D)_3^2}{2(g_D)_1}\right)^T, \tag{2.31}$$

$p(u)$ étant le calcul de la pression à partir de la trace u_h^+.

⋆ Sortie subsonique :

$$u_\Gamma(u) = \left(u_1, u_2, u_3, \frac{p_{sortie}}{\gamma-1} + \frac{u_2^2+u_3^2}{2u_1}\right)^T, \tag{2.32}$$

p_{sortie} est la pression imposée à la sortie du domaine et $u_1, ..., u_3$ sont les composantes de la trace u_h^+.

- Sur $\Gamma_{s,sup}$, sortie supersonique, la trace extérieure u_h^- est remplacée par celle intérieure u_h^+ ce qui donne :

$$a_{\Gamma s,sup}(u,v) = \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K\cap\Gamma e,sup} H\left(u_h^+, u_h^+, n\right) v_h^+ ds,$$

- Sur le bord solide Γ_{refl}, le flux $H\left(u_h^+, u_h^-, n\right)$, inclut un état modifié $u^- = u_{refl}^-$.

$$a_{\Gamma_{refl}}(u,v) = \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K\cap\Gamma_{refl}} H\left(u_h^+, u_{refl}^-(u_h^+), n\right) v_h^+ ds.$$

$u_{refl}^-(u_h^+)$ émane de u en changeant simplement le signe de la vitesse normal de u. Avec $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ désignant le vecteur vitesse de l'état $u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho E)$, la vitesse $\mathbf{v}^- = \left(v_1^-, v_2^-\right)$ de u^- est déterminée par :

$$\mathbf{v}^- = (\mathbf{v} - 2\,(\mathbf{v}.n)\,n)$$

$u^- = u^-_{refl}\,(u)$ est alors donnée par cette transformation linéaire :

$$u^- = u^{-'}_{refl}\,(u)\,u := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & 0 \\ 0 & -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u \tag{2.33}$$

Cette définition assure que les composantes de la vitesse normale de la moyenne $\bar{u} = \frac{1}{2}\,(u^+ + u^-)\,.n$ sont nulles, $\bar{\mathbf{v}}.n = \frac{1}{2}\,(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)\,.n = 0$.

Dans l'implémentation du flux numérique pour les conditions aux limites décrites plus haut, nous avons utilisé les flux numériques de type LaxFriedrich. On fait remarquer qu'on peut utiliser un flux numérique sur les conditions aux limites qui soit différent de celui qu'on impose sur les faces intérieures. Le détail sur l'écriture de ces flux pour les conditions de bord est explicité en annexe (voir B.1).

2.4 Intégration en temps du système discret non linéaire

En regroupant les contributions temporelle et spatiale, la formulation variationnelle discrète peut s'écrire sous la forme telle qu'il faut : trouver $u_h \in V_h^p$ tel que :

$$M\frac{1}{\triangle t}(u_h^{n+1} - u_h^n) + a_h(u_h)(v_h) = l_h(v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^p, \tag{2.34}$$

où l_h est la fonction non-linéaire représentant les données d'entrée. M est la matrice de masse et la forme a_h est composée de trois termes correspondant aux cellules, aux faces intérieures et aux arrêtes des bords du domaine :

$$a_h(u_h)(v_h) = a_h^{T_h}(u_h)(v_h) + a_h^{\mathcal{S}_h}(u_h)(v_h) + a_h^{\Gamma_h}(u_h)(v_h). \tag{2.35}$$

Les trois termes sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_h^{T_h}(u_h)(v_h) &:= -\sum_{K\in T_h}\int_K (u_h) : \nabla v_h \, dx, \\ a_h^{\mathcal{S}_h}(u_h)(v_h) &:= \sum_{S\in\mathcal{S}_h}\int_S H(u_h, n)\cdot[v_h]\, ds, \\ a_h^{\Gamma}(u_h)(v_h) &:= \sum_{S\in\Gamma h}\int_S H(u, u_d, n)\cdot v_h \, ds. \end{aligned} \tag{2.36}$$

L'equation 2.34 peut aussi être écrite de la façon suivante :

$$M\frac{1}{\triangle t}(u_h^{n+1} - u_h^n) + \mathcal{R}\,(u_h) = 0, \tag{2.37}$$

$\mathcal{R}\,(u_h) = a_h(u_h)(v_h)$ représente le résidu non-linéaire stationnaire de l'équation.

Pour résoudre le problème transitoire, l'équation 2.34 résultant de la discrétisation spatiale doit être intégrée en temps. Pour des raisons évidentes liées à une programmation plus simple, la plupart des codes en éléments finis DG, sont programmés avec des schémas en temps explicites [68, 69]. Cependant nous avons choisi dans ce travail d'implémenter une résolution en temps implicite dans le but d'une part de s'affranchir de la contrainte de CFL, donc capable d'utiliser de grands pas de temps et d'autre part la méthode implicite est mieux adaptée aux problèmes raides [7]. La raison de changer un schéma en temps explicite en implicite est que l'explicite requiert de petits pas de temps pour maintenir la stabilité (condition CFL), en particulier à l'ordre élevé. Toutefois, nous avons implémenté les deux schémas (explicite et implicite) en temps. Le schéma en temps implicite utilisé est du second ordre (BDF2). Les schémas en temps explicites sont Euler et les schémas Runge-Kutta.

2.4.1 Schéma de résolution explicite

Il existe plusieurs méthodes pour atteindre la solution stationnaire pour le problème non-linéaire :

$$\nabla.F = 0 \tag{2.38}$$

La plus commune est de considérer le problème instationnaire (eq. 2.14) et de le résoudre pour obtenir la solution stationnaire.

- ***Schéma de résolution Euler explicite (Forward Euler scheme)*** :

$$\begin{aligned} &u^{(0)} = u^n, \\ &u^{n+1} = u^n + \triangle t M^{-1}\mathcal{R}\left(u^n\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

- ***Schéma de résolution Runge-Kutta*** :
  Le schéma de Runge-Kutta employé dans ce travail est le schéma : *s-stage SSP Runge-Kutta*. La solution d'avancement en temps de t à $t + \triangle t$, est donnée par l'expression suivante [70] :

$$\begin{aligned} &u^{(0)} = u^n, \\ &u^{(i)} = \textstyle\sum_{k=0}^{i-1}\left(\alpha_{i,k}u^{(k)} + \triangle t\beta_{i,k}M^{-1}\mathcal{R}\left(u^k\right)\right), \qquad \alpha_{i,k} \geq 0, \qquad \beta_{i,k} \geq 0, \qquad i = 1, ..., m, \\ &u^{n+1} = u^m. \end{aligned} \tag{2.40}$$

2.4.2 Schéma de résolution implicite :

Dans le schéma implicite, à chaque pas de temps, le problème non linéaire est résolu par itération de Newton. Le schéma implicite considéré est le schéma BDF2 (*two-step Backward Differentiation Formulas*). Le schéma implicite BDF2 est un schéma multi-pas du second ordre qui possède de bonnes propriétés de stabilité .

- ***Le schéma implicite BDF2*** :
  A partir de l'équation (2.37), *le schéma implicite BDF2* s'écrit sous la forme :

$$\frac{M}{\triangle t}\left(\frac{3}{2}u^{n+1}\right) + \mathcal{R}\left(u^{n+1}\right) - \frac{M}{\triangle t}\left(2u^n - \frac{1}{2}u^{n-1}\right) = 0 \tag{2.41}$$

Ce schéma implicite est relativement efficace parce qu'il ne résout le résidu non linéaire $\mathcal{R}(u_h)$ qu'une seule fois à chaque pas de temps. De plus on a introduit dans l'algorithme des schémas de pas de temps variables dans la résolution du schéma de Newton, ce qui permet de gagner du temps par rapport aux schémas classiques.

- ***Itération de Newton*** :
  Pour résoudre l'équation implicite (2.41), de l'étape $n+1$, on utilise *le schéma d'itération de Newton*.
  Le problème non linéaire génère une séquence d'itérations w^k. Etant donné un itéré w^k, l'itération suivante est obtenue par :

$$\begin{array}{l} w^1 = u_h^n, \\ \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial w}\right]^k \triangle w^{k+1} = -\mathcal{R}\left(w^k\right), \\ w^{k+1} = w^k + \alpha \triangle w^{k+1}, \qquad k = 1, 2, ..., m \\ u_h^{n+1} = w^m, \qquad si \qquad \mathcal{R}\left(w^m\right) = 0 \end{array} \tag{2.42}$$

  où k se réfère aux index des itérations du système linéaire dans le schéma de Newton. w représente les solutions courantes (u_h^n), dans l'*itération de Newton*, pour le calcul de la solution u_h^{n+1}, qui satisfait : $\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_h}\right] = \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial w}\right]$. α est un paramètre de relaxation satisfaisant :

$$\left\| \alpha \frac{\triangle w^{k+1}}{w^k} \right\|_{L\infty} \leq 10\%. \tag{2.43}$$

  L'utilisation de *l'itération de Newton* pour résoudre le problème non linéaire introduit l'utilisation de la dérivée du terme $\mathcal{R}$, i.e. ($\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_h}\right]$), qui intervient dans chaque *itération de Newton*. Cette matrice jacobienne sera obtenue en utilisant la méthode de Fréchet pour les dérivées. Les détails sur la dérivation des trois termes de l'équation (2.35) sont données en annexe D.

- ***Implémentation de la méthode implicite et technique de pas de temps adaptatif*** :

  L'objectif du solveur en temps est la robustesse c'est à dire rendre la méthode applicable à plusieurs variétés de problèmes. Etant donné que le solveur est basé sur

la forme linéarisée de l'équation 2.34, on peut observer un échec de la méthode si les valeurs initiales sont trop éloignées de la solution finale. En pratique ces échecs sont observables par l'apparition des valeurs négatives de pression ou de masse volumique. Pour éviter cela, deux stratégies sont utilisées : la première est de vérifier le critère du paramètre de relaxation α (2.43) utilisé pour que la variation de la solution courante soit inférieure à 10% dans tous les éléments afin de ne pas altérer la performance du solveur. Ce critère permet donc de limiter les variations de pression et de masse volumique dans les éléments. Cependant en pratique le solveur peut encore échouer dès les premières itérations. Le solveur échoue lorsqu'une valeur acceptable de α n'est pas obtenue après un certain nombre de pas de temps. Dans ce cas, la seconde stratégie est de diviser le pas de temps jusqu'à ce que le critère (2.43) soit vérifié. Un algorithme de pas de temps adaptatif (augmentation ou décroissance du pas de temps) est aussi implémenté permettant d'accélérer le calcul.

2.5 Tests numériques

Précision et performance de la méthode de discrétisation de Galerkin discontinu

Dans cette section , nous présentons un cas test sur lequel nous allons montrer l'ordre de convergence optimal $\mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$ pour les problèmes réguliers (smooth).

• Cas test d'un écoulement dans un canal bump

Ce cas test concerne un écoulement subsonique dans un canal dont le bord inférieur est représenté par la fonction gaussienne suivante : $y = 0.00623e^{-25x^2}$. Le domaine est compris entre $x = -1.5$ à $x = 1.5$, et $y = 0.8$. A l'entrée du domaine, on impose un écoulement subsonique de nombre de Mach égal à 0.2. Des conditions d'entrée et de sortie subsoniques sont imposées respectivement aux frontières gauche et droite du domaine (figure 2.3). Sur les bords inférieur et supérieur on impose la condition de glissement. L'écoulement étant

subsonique, l'entropie à travers l'écoulement doit rester constante. Nous utilisons la norme L_2 de l'erreur sur l'entropie comme indicateur de précision des solutions obtenues pour le schéma DG. La norme de l'erreur sur l'entropie est calculée suivant l'expression :

$$\varepsilon_{\mathbf{ent}} = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\left(\frac{p/\rho^{\gamma} - p_{\infty}/\rho_{\infty}^{\gamma}}{p_{\infty}/\rho_{\infty}^{\gamma}}\right)^{2} dx}, \tag{2.44}$$

Cette expression représente la racine carrée de la somme de la variation entre l'entropie sur un élément et l'entropie initiale ramenée à la surface du domaine.
Pour ce faire, on considère une séquence de maillages non structurés possédant respectivement (32, 128, 512, 2048, et 8192) de cellules triangulaires. Le test de précision est effectué pour les fonctions d'interpolation $p = 0$ à $p = 3$ du schéma DG. Le maillage grossier de départ est montré à la figure 2.3. Les maillages séquentiels sont obtenus par raffinements uniformes successifs.

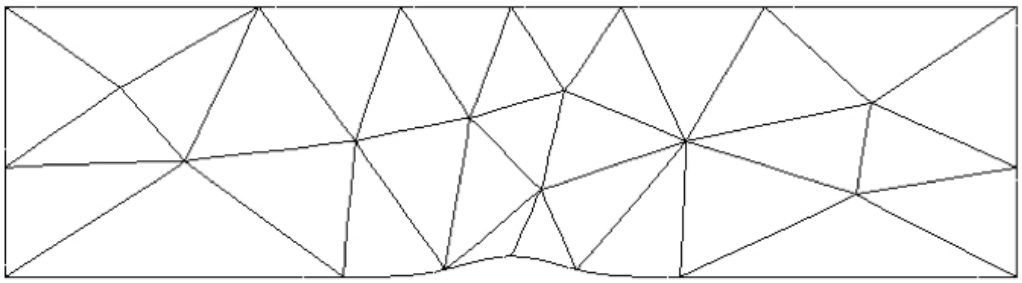


FIGURE *2.3: Maillage initial grossier du canal bump*

Dans les tableaux (2.2, 2.3, 2.4, 2.5) on donne les indications suivantes :

- Le nombre d'éléments (**elts**) dans le domaine,
- Le nombre de degré de liberté du maillage (**ndofs**)
- L'erreur entropique calculée dans le domaine (ε_{ent})
- L'ordre de convergence (**Ordre**) du schéma calculé de la façon suivante :

$$\textbf{Ordre} = \frac{ln\left(\frac{E_{k+1}}{E_k}\right)}{ln\left(\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}$$

où $E_k = \varepsilon_{ent_k}$, k représente le maillage sur lequel l'erreur est calculée. h étant définie comme : $h = \frac{1}{\sqrt{ndofs}}$

- La vitesse de convergence (**Vitesse**) calculée de la façon suivante : $\frac{E_{k+1}}{E_k}$
- Le temps d'exécution (**temps d'exéc**) du calcul.

Pour les schémas de discrétisation $DG0$, $DG1$, $DG2$ et $DG3$ considérés, l'ordre de convergence optimal ($\mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$) est obtenu. Les figures 2.4a-b montrent les tracés de la norme L_2 de l'erreur de l'entropie (eq. 2.57) respectivement en fonction du nombre de degré de liberté des maillages successifs et du temps d'exécution. L'intérêt de l'ordre élevé devient clair : pour obtenir la même erreur de précision, le schéma $DG3$ nécessite moins de degré de liberté que les schémas $DG2$, $DG1$ et $DG0$. En effet pour obtenir par exemple une erreur de précision de 6.12×10^{-6}, il suffit d'avoir 9412 degrés de liberté pour le schéma $DG3$ alors qu'il en faut respectivement pour 20727 et 155982 pour les schémas $DG1$ et $DG2$. De même, on observe que pour atteindre la précision de 6.12×10^{-6} d'une solution avec une approximation $p = 3$, le temps d'exécution est de 2.25×10^{-2} alors que pour les calculs avec les schémas $p = 2$, $p = 1$ nécessitent respectivement un temps de 1.8 à 3.2 plus long.

elts	**ndofs**	**Erreur** ε_{ent}	**Ordre**	**Vitesse**	**temps d'exéc**
32	128	1.01e-2	-	-	9.51e-4
128	512	5.505e-3	0.874	1.63	2.23e-3
512	2048	2.725e-3	1.014	2.42	6.76e-3
2048	8192	1.42e-3	0.940	1.82	1.23e-2
8192	32768	7.39011e-4	0.942	2.22	2.33e-2

Tableau 2.2: Ecoulement dans un canal bump : DG0 est d'ordre $\mathcal{O}\left(h^1\right)$

elts	ndofs	Erreur ε_{ent}	Ordre	Vitesse	temps d'exéc
32	384	2.498e-3	-	-	3.16e-3
128	1536	6.52e-4	1.922	4.21	5.86e-3
512	6144	1.49e-4	2.128	2.81	1.43e-2
2048	24576	3.57e-5	2.06	3.44	3.57e-2
8192	98304	8.84e-6	2.012	3.8	5.67e-2

Tableau 2.3: Ecoulement dans un canal bump : DG1 est d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$

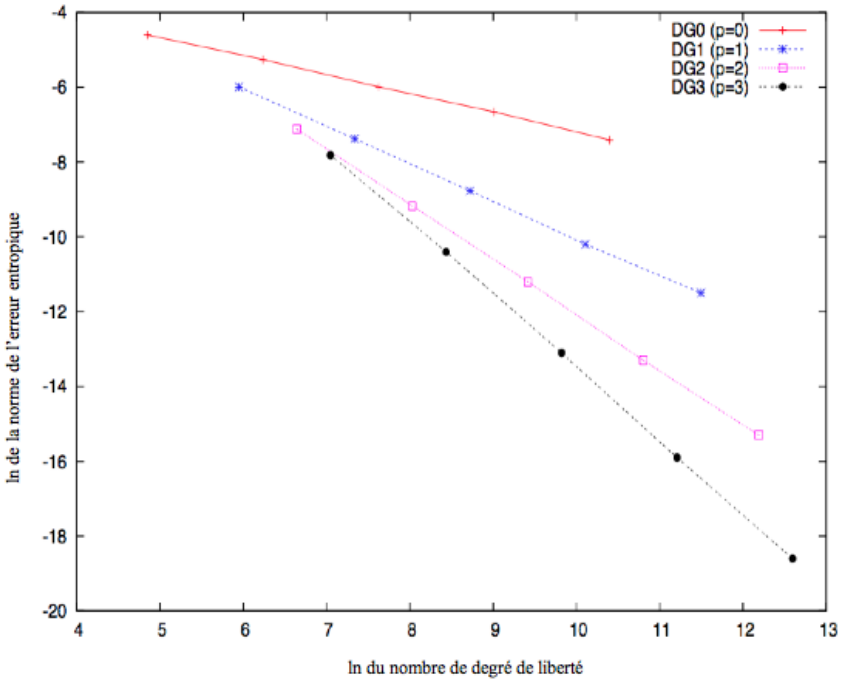
elts	ndofs	Erreur ε_{ent}	Ordre	Vitesse	temps d'exéc
32	768	1.81e-3	-	-	1.54e-3
128	3072	2.332e-4	2.956	7.80	5.26e-3
512	12288	2.82e-5	3.046	8.22	2.49e-2
2048	49152	3.82e-6	2.882	7.98	4.30e-2
8192	196608	4.317e-7	3.145	8.17	6.67e-2

Tableau 2.4: Ecoulement dans un canal bump : DG2 est d'ordre $\mathcal{O}(h^3)$

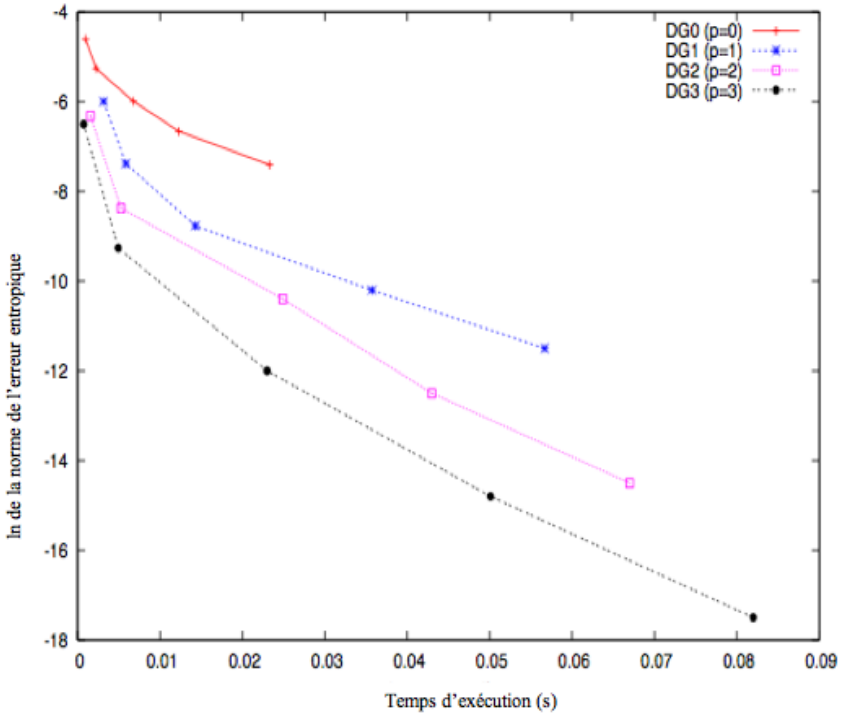
elts	ndofs	Erreur ε_{ent}	Ordre	Vitesse	temps d'exéc
32	1152	1.52e-3	-	-	2.72e-3
128	4608	9.41e-5	4.01	16.15	4.92e-3
512	18432	5.97e-6	3.97	15.76	2.3e-2
2048	73728	3.53e-7	4.08	16.91	5.01e-2
8192	294912	2.29e-8	3.95	15.41	8.2e-2

Tableau 2.5: Ecoulement dans un canal bump : DG3 est d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$

La figure (2.5) montre les contours de la pression obtenus avec une solution stationnaire convergée à partir de la discrétisation $DG1$ et $DG3$ ordre sur le maillage de 512 éléments. Nous pouvons observer que l'ordre élevé permet d'obtenir une solution plus précise avec un maillage relativement grossier.

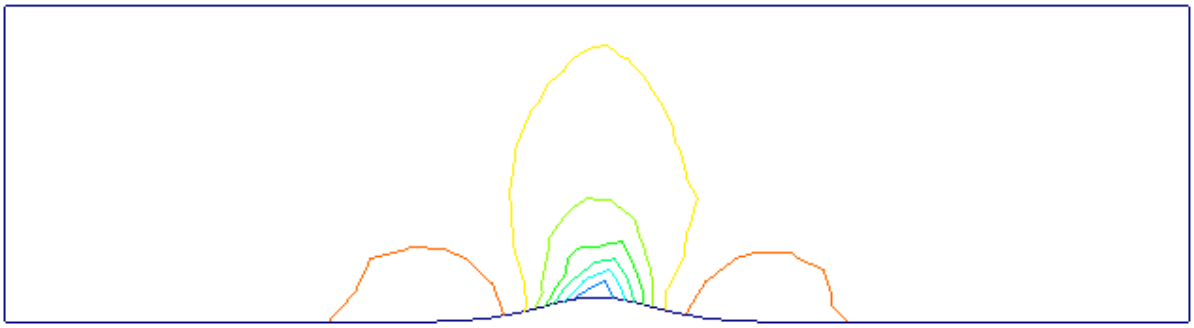


(a) erreur entropique vs degré de liberté

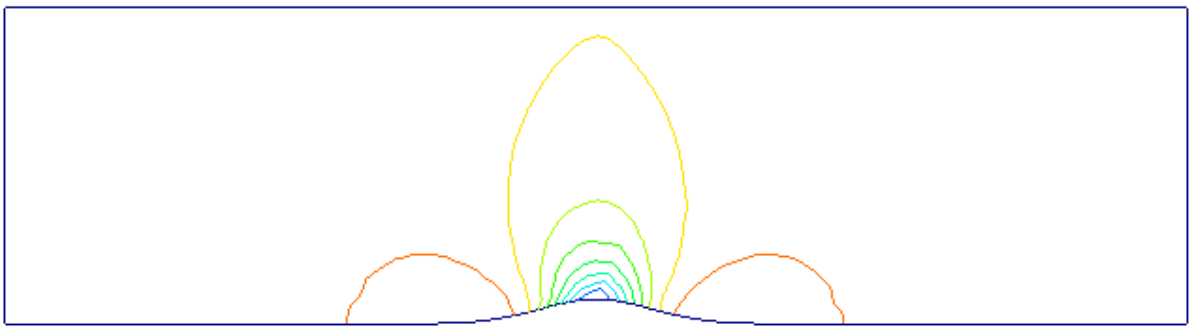


(b) erreur entropique vs temps d'exécution

FIGURE *2.4: Courbe de convergence : norme L_2 de l'erreur entropique en fonction du nombre de degré de liberté (a) et du temps d'exécution (b) pour les différents schémas de discrétisation sur le cas test du canal bump*



(a) schéma DG1



(b) schéma DG3

FIGURE *2.5: Contours de la pression avec les schéma DG1 (a) et DG3 (b) sur le maillage de* 512 *éléments*

La figure (2.6) montre la solution de l'entropie sur le cinquième maillage en $DG3$. Cette figure montre que l'entropie reste quasiment constante sur un schéma d'ordre élevé avec un maillage relativement fin, ce qui vérifie l'hypothèse de constance de l'entropie dans un écoulement subsonique.

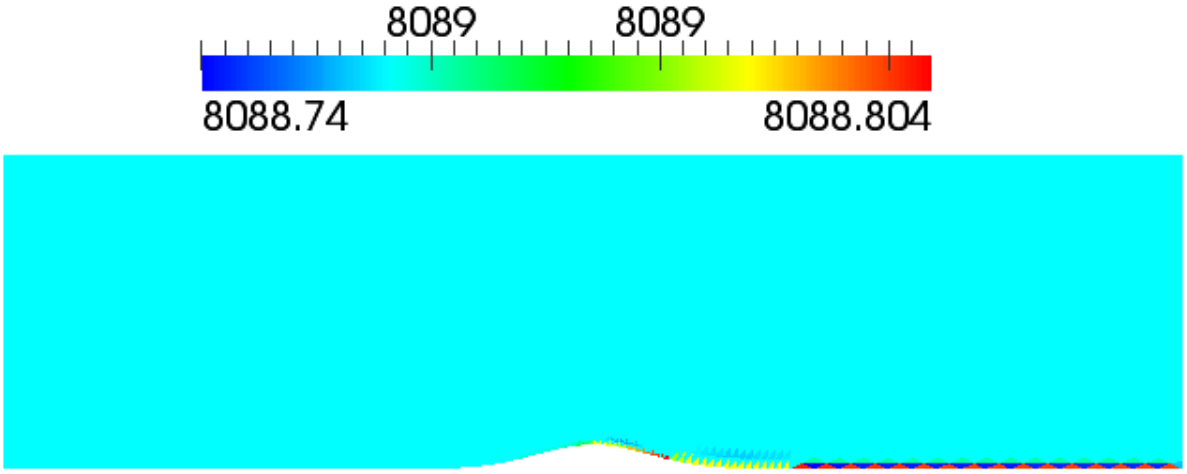


FIGURE *2.6: Solution de l'entropie sur le schéma DG3 pour le maillage 8192 cellules sur le cas test du canal bump*

2.6 Méthode de shock-capturing

Même si les flux numériques aux interfaces sont décentrés introduisant un terme dissipatif à travers les sauts, des oscillations numériques peuvent être toujours générées par les schémas DG (eq.2.26), aux voisinages des chocs, lorsque l'ordre du polynôme d'interpolation augmente ($p > 0$). Pour simuler les problèmes d'écoulements compressibles transsoniques et supersoniques à l'ordre élevé ($p > 0$) de façon efficace sans que la solution ne dégénère à cause des oscillations numériques appelées phénomènes de Gibbs, plusieurs stratégies sont utilisées. Dans la littérature, plusieurs recherches ont mis en évidence diverses méthodes de stabilisation [38, 68, 71–73]. Les méthodes DG, combinent d'une façon optimale les stratégies de limitation de pente ou de shock-capturing bien développées pour les méthodes de volumes finis avec la capacité d'utiliser des discrétisations d'ordre élevé sur les maillages non structurées quelconques [74, 75]. Plusieurs types de schémas de diffusion ou de techniques de stabilisation ont été proposés dans la littérature. En voici deux :

- les limiteurs de pente comme ceux proposés par Cockburn et Shu [64], pour les schémas de discrétisations de Runge-Kutta Galerkin discontinus (RKDG) [76],
- La viscosité artificielle où la forme standard du schéma DG est augmentée d'un terme dissipatif non-linéaire qui n'affecte pas l'ordre de précision du schéma [77, 78].

Dans cette étude, nous proposerons une méthode de limiteur de pente basée sur le travail de Tu et al. [76] ainsi qu'une méthode de viscosité artificielle basée sur le travail de Persson et al [77] et de Batter [78].

2.6.1 Méthode de limiteur de pente

Le limiteur de pente implémenté est une modification et une adaptation à la méthode DG, de celui proposé par Jawahar et Kamath [79] appliqué aux méthodes de Volumes Finis sur les maillages non structurés. Il est initialement conçu pour les maillages en triangles, nous avons proposé une extension aux quandrangles. Cependant la description de la procédure de limitation de pente est faite sur les triangles. La partie modifiée pour l'adaptation aux maillages quadrangulaires sera précisée lors de la description.

2.6.1.1 Procédure de calcul du limiteur de pente

Le but est de limiter la solution aux sommets de l'élément (DG1). Dans la procédure, les gradients de la solution sont limités. Ensuite on effectue une reconstruction pour obtenir la solution limitée. La variable conservative est $u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho E)$. La procédure de limitation de pente est conservative. La valeur de la solution moyenne sur chaque élément reste non modifiée après la procédure de limitation. Soit $\bar{u}_K$ la valeur moyenne de la solution u_h sur un élément K. $\bar{u}_K$ est donnée par l'expression :

$$\bar{u}_K = \frac{1}{|K|} \int_K u_h dx \tag{2.45}$$

La procédure de limitation se fait sur les variables primitives : $V = (p, v_1, v_2, \rho)$ où p, v_1, v_2 et ρ sont respectivement la pression, les composantes de la vitesse $\mathbf{v}$ et la masse volumique.

Considérons par exemple l'élément triangulaire abc dont le centre est noté 0 et les sommets sont notés abc (figure 2.7). $\bar{u}_K$ est la valeur moyenne de la solution sur l'élément abc associé au centre de l'élément.

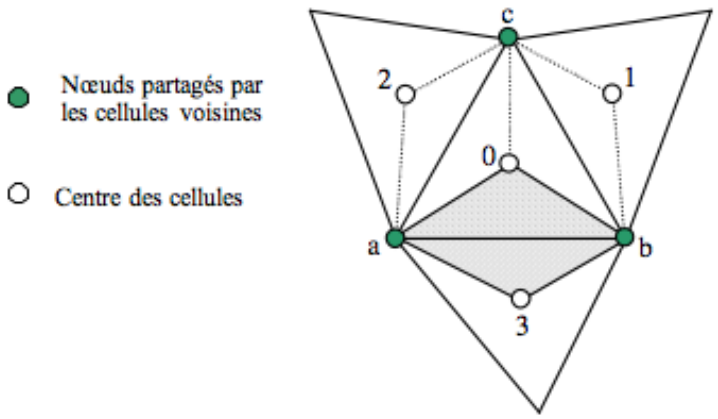


FIGURE *2.7: Stencil pour l'algorithme du limiteur de pente*

La procédure de limitation de pente est décrit par les étapes suivantes :

- Etape 1 : Identification de l'élément 0 et de ses voisins et calcul des composantes de la variable primitive en chaque noeud.

- Etape 2 : Calcul du gradient à travers chaque interface de chaque élément :

Le gradient à travers l'interface $\bar{ab}$ est obtenu en résolvant le système linéaire suivant [80] :

$$\begin{pmatrix} x_3 - x_0 & y_3 - y_0 \\ x_a - x_b & y_a - y_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (V_x)_{\bar{ab}} \\ (V_y)_{\bar{ab}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_3 - V_0 \\ V_a - V_b \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Du système d'équations (2.46), les gradients à travers les interfaces sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(V_x)_{\bar{ab}} &= \frac{1}{2A_{a3b0}}\left[(V_3 - V_0)(y_b - y_a) + (V_a - V_b)(y_3 - y_0)\right] \\ (V_y)_{\bar{ab}} &= \frac{1}{2A_{a3b0}}\left[(V_3 - V_0)(x_b - x_a) + (V_a - V_b)(x_3 - x_0)\right]\end{aligned} \tag{2.47}$$

où A_{a3b0} est l'aire de la surface représentée par les points $a3b0$; $A_{a3b0} = A_{a3b} + A_{b0a}$. Les termes $(V_x)_{\bar{ab}}$ et $(V_y)_{\bar{ab}}$ sont les composantes du gradient de la variable primitive $V = (p, v_1, v_2, \rho)$. Les gradients à travers les faces $\bar{bc}$ et $\bar{ca}$ sont calculés de la même manière.

- Etapes 3 : Calcul du gradient non limité sur chaque élément :

Le gradient non limité sur l'élément 0 est construit à partir des gradients de ses interfaces pondérés par l'aire correspondante telle que :

$$\nabla V_0 = \frac{A_{a3b0}(\nabla V)_{\bar{ab}} + A_{b1c0}(\nabla V)_{\bar{bc}} + A_{c2a0}(\nabla V)_{\bar{ca}}}{A_{a3b0} + A_{b1c0} + A_{c2a0}} \tag{2.48}$$

avec $\nabla V = (V_x, V_y)$.

- Etape 4 : Calcul du gradient limité sur chaque élément

Une fois le gradient non limité calculé sur chaque élément (l'élément courant 0 et ses voisins), on calcule le gradient limité $(\nabla V_0)^l$ sur l'élément 0 par l'expression suivante :

$$(\nabla V_0)^l = w_1(\nabla V)_1 + w_2(\nabla V)_2 + w_3(\nabla V)_3 \tag{2.49}$$

où les poids w_1, w_2, w_3 sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{g_2 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon} \\
w_2 &= \frac{g_1 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon} \\
w_3 &= \frac{g_1 g_2 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + 3\epsilon}
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

où g_1, g_2, et g_3 sont choisis étant les carrés en norme L_2 des gradients non limités sur les éléments voisins 1, 2 et 3, ie, $g_1 = \|(\nabla V)_1\|^2$, $g_2 = \|(\nabla V)_2\|^2$et $g_3 = \|(\nabla V)_3\|^2$. ϵ est une petite valeur introduite pour éviter l'obtention de valeur indéterminée et prise égale à 10^{-10}.

Pour les quadrangles les étapes sont les mêmes et les coefficients de pondérations sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{g_2 g_3 g_4 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 + 4\epsilon} \\
w_2 &= \frac{g_1 g_3 g_4 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 + 4\epsilon} \\
w_3 &= \frac{g_1 g_2 g_4 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 + 4\epsilon} \\
w_4 &= \frac{g_1 g_2 g_3 + \epsilon}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2 + 4\epsilon}
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

- Etape 5 : Calcul des composantes de la variable conservative limitée aux sommets de chaque élément.

La solution sur l'élément K est reconstruite à partir du développement de Taylor tel que :

$$
V^l = \bar{V_0} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} . (\nabla V_0)^l \mid_{(x_0, y_0)} \tag{2.52}
$$

avec : $dx = x - \frac{1}{|K|}\int_K x dx$, $dy = y - \frac{1}{|K|}\int_K y dx$, et $\bar{V_0} = \frac{1}{|K|}\int_K V dx$.

Une fois la variable primitive limitée V^l calculée, on reconstruit les composantes de la variable conservative u^l.

2.6.1.2 Exemples numériques

Dans les exemples numériques, nous considérons deux cas tests. Un écoulement externe à Mach 2 autour d'une rampe ainsi qu'un écoulement interne à Mach 3 dans un scramjet. Pour le cas test du cylindre le maillage est en triangles et pour celui du scramjet le maillage est en quadrangles. Le cas test du scramjet sera décrit en détail à la section 3.3.2.

2.6.1.2.a Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe

On considère le cas test d'un écoulement à Mach 2 sur une rampe inclinée d'un angle de 10 degré (figure 2.8). Le maillage du cas test contient 200 triangles. La solution est calculée avec le schéma DG1. La figure montre la coupe suivant $y = 0.2$ de la solution limitée (courbe en rouge) et celle de la solution non limitée (courbe en noir). On remarque que le limiteur de pente permet de supprimer l'oscillation au pieds du choc (figure 2.9).

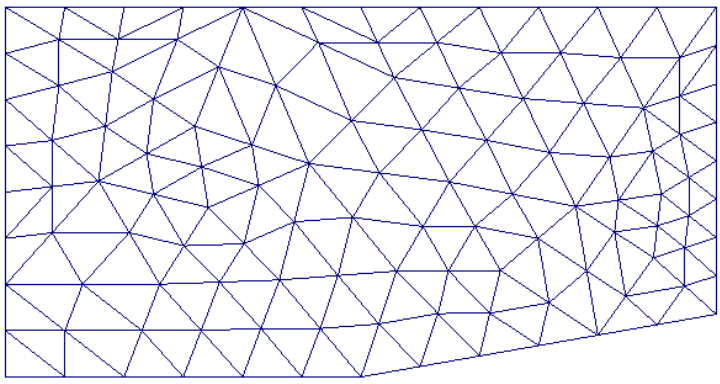


FIGURE *2.8: maillage du cas test rampe contenant 200 triangles*

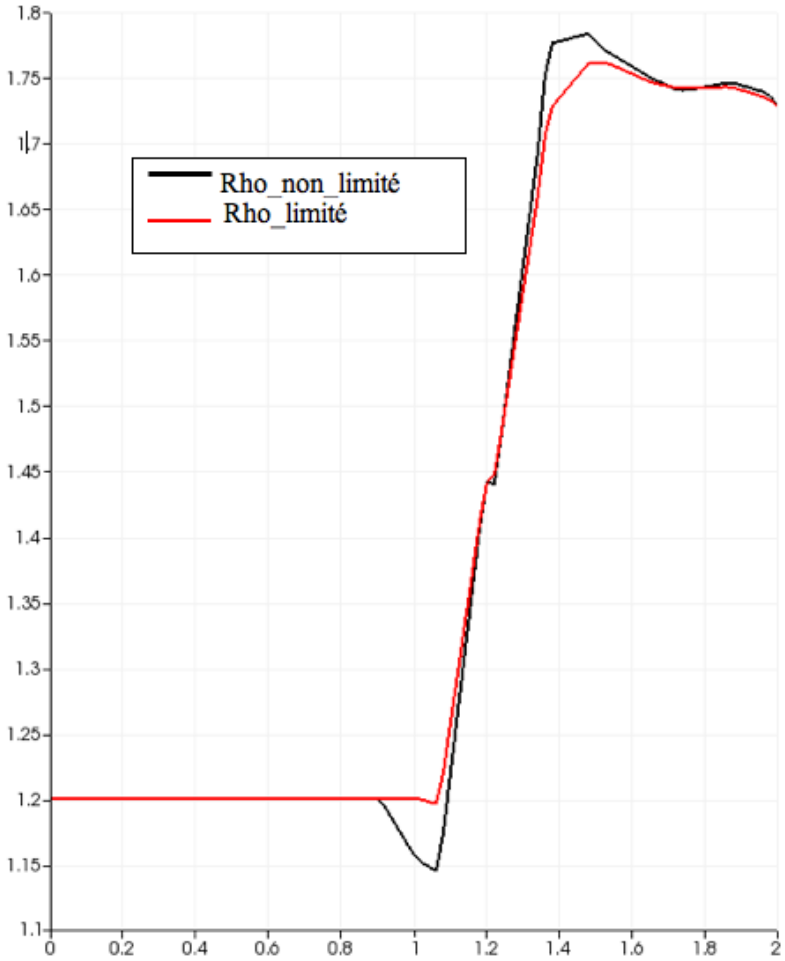


FIGURE *2.9: Coupe suivant* $y = 0.2$ *de la masse volumique : solution limitée (rouge), solution non limitée (noir)*

2.6.1.2.b Cas test d'un écoulement à Mach 3 dans un scramjet

Dans ce cas test, on souhaite comparer une solution DG1 à une solution DG0 sur un maillage en quadrangles. Pour avoir le même nombre de degré de liberté pour les schémas $DG1$ et $DG0$, le maillage avec la résolution en $DG1$ contient 1040 mailles et celui avec la résolution $DG0$ contient 4160 mailles. La figure 2.11 montre l'évolution de la masse

volumique dans le domaine pour les deux calculs en $DG1$ et $DG0$. On observe que la procédure de limitation de pente fonctionne aussi bien avec des maillages en quadrangles. La figure 2.10 montre une coupe axiale de la masse volumique pour les schémas $DG1$ et $DG0$. On observe que le schéma DG1 semble bien capturer l'évolution de la masse volumique dans le domaine de calcul. En effet, une zone de recompression est capturée dans le divergent, ce qui n'est pas le cas avec le schéma $DG0$. On utilise un raffinement adaptatif de maillage avec pour estimateur d'erreur le saut aux interfaces des éléments (voir détail dans le chapitre 3). La figure 2.12 montre une coupe axiale de la masse volumique du maillage obtenu après un raffinement adaptatif de maillage avec les deux schémas. La zone de recompression est mieux capturée pour le schéma DG1. Cette zone de recompression n'est toujours pas capturée même après un raffinement de maillage pour la résolution avec le schéma $DG0$ avec le même nombre de degré de liberté que le schéma DG1. Ceci montre d'une part la performance du limiteur de pente pour ce cas test et d'autre part l'intérêt de l'ordre élevé pour un calcul.

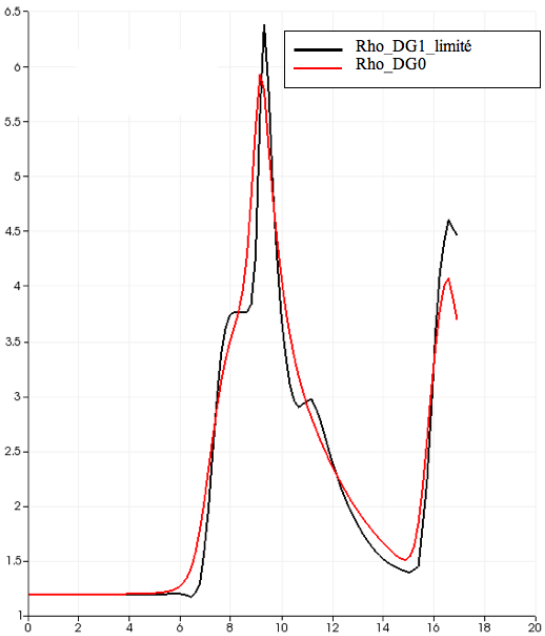
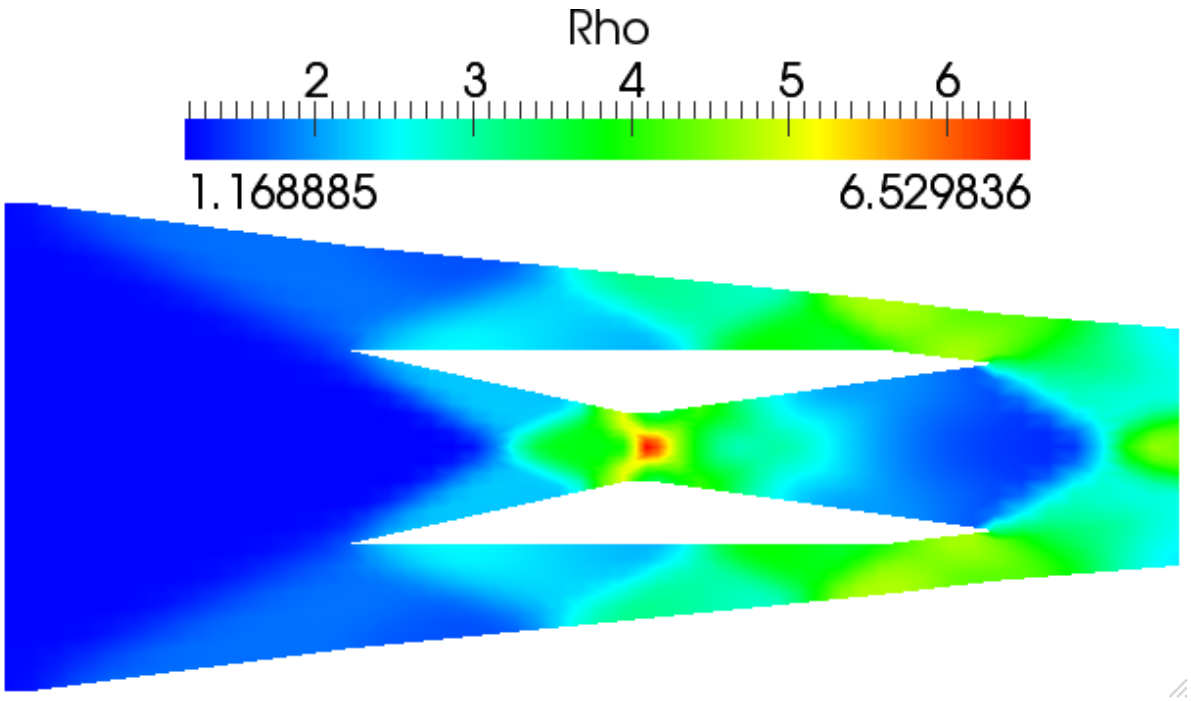
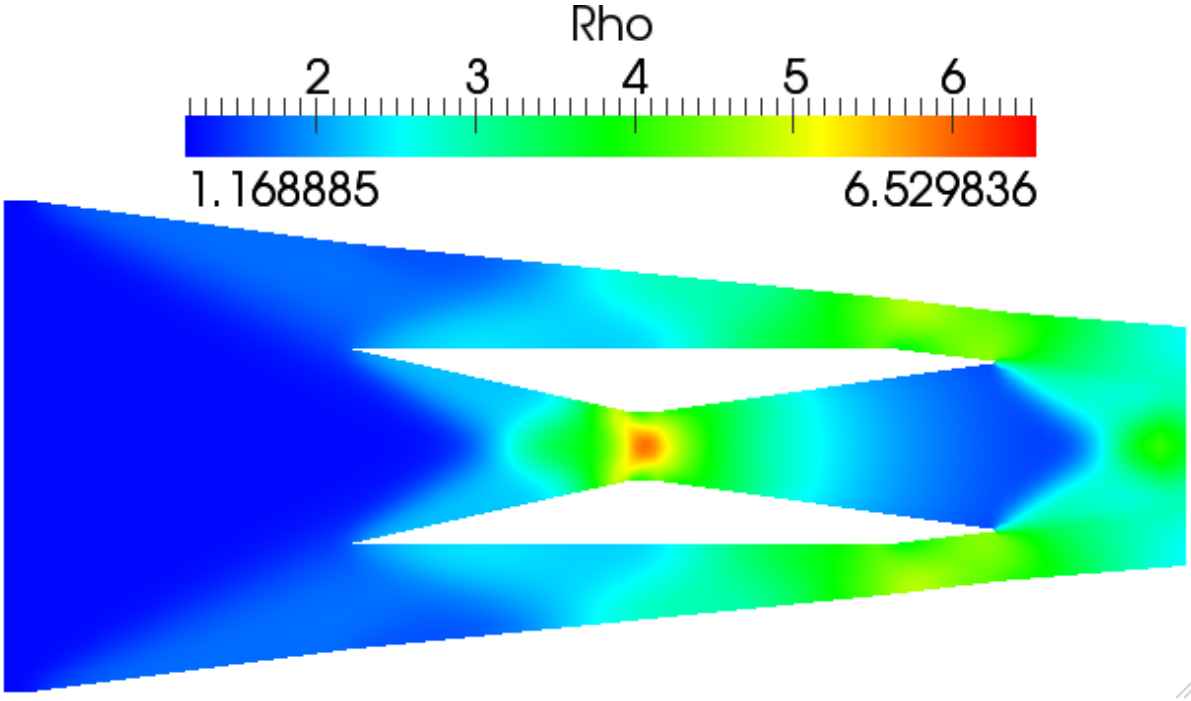


FIGURE *2.10: Coupe axiale de la masse volumique avec les schémas DG1 (1040 quadrangles) avec limiteur de pente en noir et DG0 (4160 quadrangles) en rouge*



(a) schéma DG1avec 1040 mailles en quadrangles



(b) schéma DG0 avec 4160 mailles en quadrangles

FIGURE *2.11: Ecoulement supersonique dans un scramjet à Mach3 : masse volumique avec les schémas DG1 et limiteur de pentes et DG0*

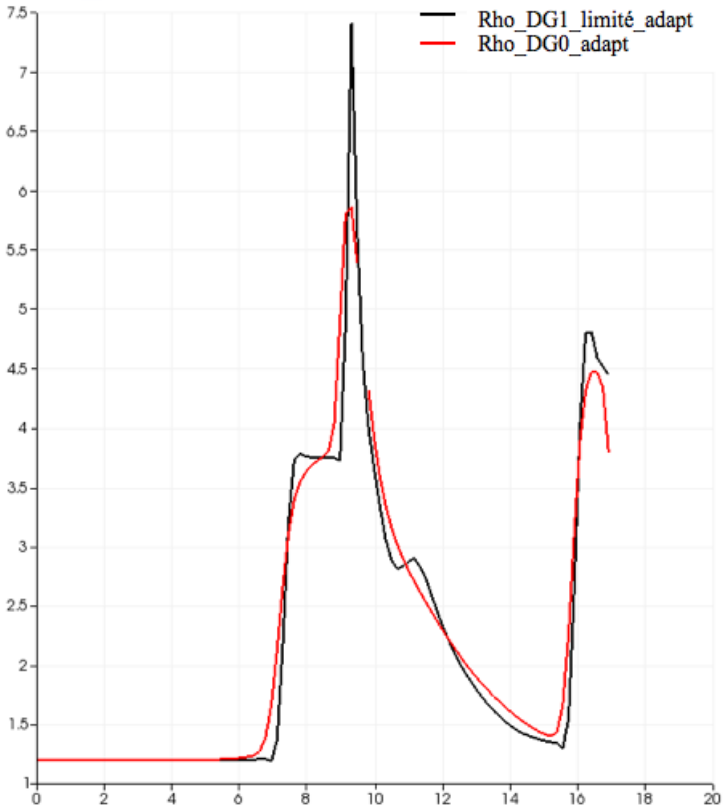


FIGURE *2.12: Coupe axiale de la masse volumique avec les schémas DG1 (1040 quadrangles) avec limiteur de pente en noir et DG0 (4160 quadrangles) en rouge après un raffinement adaptatif de maillage*

La méthode de limiteur de pente semble mieux supprimer les oscillations numériques inhérentes à la montée en ordre. Cependant pour chaque $p > 0$, il faudrait implémenter un limiteur de pente approprié. La méthode de viscosité artificielle permet de s'affranchir de cette contrainte.

2.6.2 Terme de viscosité artificielle

Le rajout d'un terme de viscosité artificielle modifie la nature de l'équation d'Euler qui n'est plus hyperbolique. Lorsque l'équation d'Euler 2.18 n'est pas purement hyperbolique mais contient une petite quantité de viscosité (équation 2.53), les chocs ou les discontinuités deviennent des couches réduites où la solution changent rapidement. L'intérêt de la méthode de viscosité artificielle par rapport à celle d'un limiteur de pente est qu'elle est a priori applicable quelque soit le degré du polynôme.

L'équation hyperbolique avec l'ajout du terme de viscosité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla . F = \nabla . \left(\varepsilon \nabla u \right) \tag{2.53}$$

La forme discrétisée de l'équation (2.53) donne :

$$\sum_{K \in T_h} \left\{ \int_K \frac{\partial u}{\partial t} v - \int_K F\left(u_h\right) . \nabla v_h dx + \int_{\partial K \setminus \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds \right\} + \int_{\partial K \cap \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds + \int_K \varepsilon \nabla u_h . \nabla v_h dx \tag{2.54}$$

2.6.2.1 Indicateur de choc

Dans l'équation (2.53), le paramètre ε contrôle la quantité de viscosité ajoutée. La formulation de la viscosité artificielle est définie par un détecteur non linéaire de choc par élément telle que :

$$\varepsilon|_K = \frac{h}{p} \lambda_{max}\left(u\right) S_K\left(u\right), \tag{2.55}$$

où S_K est un indicateur qui détermine les cellules où les oscillations numériques se produisent. Il indique la quantité de viscosité artificielle qu'il faut rajouter dans l'élément K.

λ_{max} est la valeur de la vitesse caractéristique maximale : $c + |\mathbf{v}|$; où c est la célérité, et $|\mathbf{v}|$ est le module de la vitesse.

Comme proposé par Persson et Peraire, le terme de viscosité est multiplié par h/p pour permettre une résolution du choc par élément [77]. h, est le diamètre du cercle circonscrit à l'élément K, et p, le degré du polynôme d'interpolation. Le terme S_K est mis pour forcer la viscosité à être non nulle au voisinage des chocs et nulle dans les zones régulières.

Le terme S_K dans l'équation (2.55), proposé dans ce travail est tel qu'il doit varier entre zéro et la valeur maximale,

$$S_K\left(J_K, \theta_S\right) = \begin{cases} 0 & si \quad J_K \leq \frac{1}{K} \\ \theta_S & si \quad J_K > \frac{1}{K} \end{cases} \tag{2.56}$$

où θ_S est la valeur maximum ($\theta_S = 1$). Le paramètre K est une constante arbitraire qui doit être suffisamment large. L'expression du terme J_K est choisi pour détecter les endroits où la viscosité artificielle doit être ajoutée. Loin des chocs et des discontinuités, il est souhaitable que la quantité de viscosité artificielle ajoutée soit faible ou nulle, pour préserver la précision à l'ordre élevé. J_K est la production entropique et est définie de la façon suivante :

$$J_K = \frac{S - S\infty}{S\infty} = \frac{P}{P_\infty}\left(\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)^\gamma - 1. \tag{2.57}$$

où S est l'entropie, et P la pression. Ce terme semble être un bon critère pour détecter les zones dans lesquelles la viscosité doit agir. Dans les écoulements d'Euler, l'entropie est constante. Par conséquent dans un écoulement régulier ou dans les zones régulières, la production entropique J_K doit être nulle. Dans les zones de choc, la production entropique n'est pas nulle par conséquent une viscosité sera rajoutée pour supprimer les oscillations numériques inhérentes à l'ordre élevé. Dans les tests numériques $K = 10^{10}$.

2.6.2.2 Exemples numériques

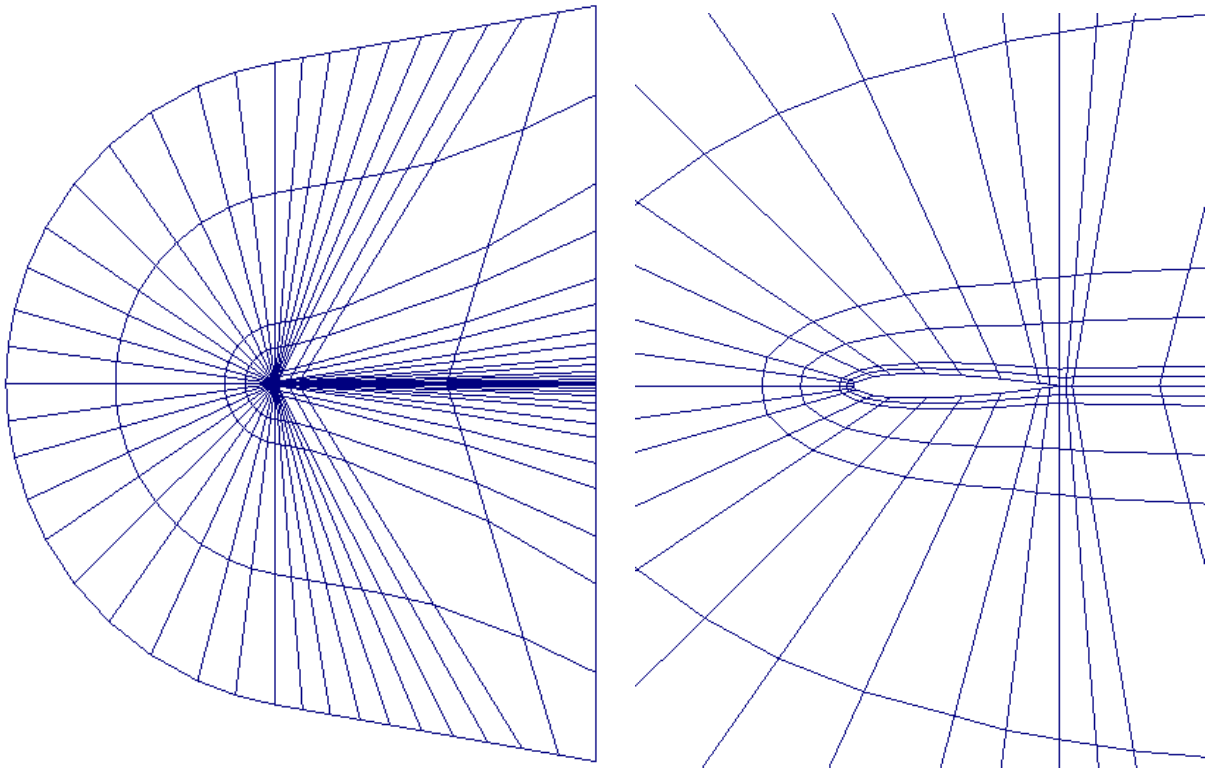
Dans les exemples numériques, nous considérons deux cas tests. Un écoulement externe autour d'une aille NACA0012 dans une configuration transsonique à Mach 0.8 et dans une configuration supersonique à Mach 1.5. Il s'agit de montrer l'effet de la viscosité artificielle dans les cellules détectées par l'indicateur de choc avec un schéma DG2. Ensuite on considère un écoulement interne supersonique dans un scramjet à *Mach 3*. Dans ce cas nous comparons le schéma DG1 résolu avec la viscosité artificielle et le schéma DG0 dans une procédure de raffinement de maillage.

2.6.2.2.a Cas test d'un écoulement autour d'une aile $NACA0012$

- ***Cas d'un écoulement transsonique à Mach = 0.8***

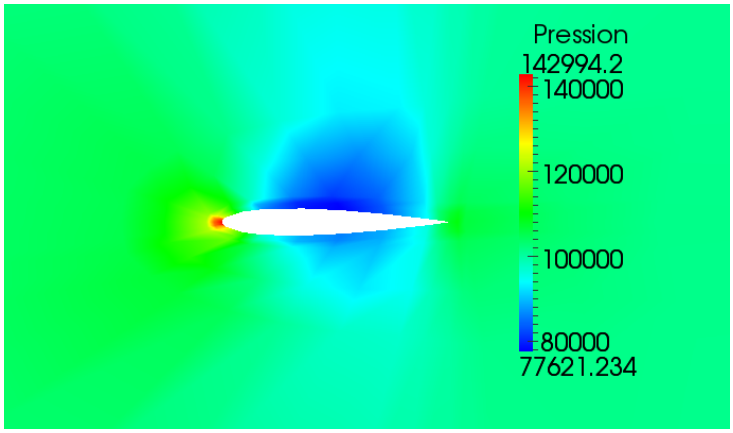
Dans cette section, nous montrons le schéma de la viscosité artificielle implémentée sur écoulement Euler non visqueux autour d'une aille $NACA0012$. Les figure a-b montre la configuration ainsi que le maillage initial avec un zoom pour voir l'aile dans le domaine pour un écoulement à Mach 0.8 avec un angle d'attaque de de 1.25 °. Le schéma DG est utilisé avec un polynôme d'ordre $p = 2$. Le maillage contient 560 mailles quadrangulaires. Dans ce cas de figure, on observe un choc fort sur l'extrados et un faible choc sur l'intrados. Les conditions de bord sont les conditions subsoniques d'entrée et de sortie et de glissement sur l'aile.

Les figures 2.14a-b, montrent les solutions stationnaires de pression et d'entropie obtenues. On observe que la viscosité artificielle introduite permet de localiser les chocs. La figure de l'entropie (figure 2.14b) montre que reste du domaine n'est pas pollué par des oscillations numériques et la viscosité n'agit pas dans les zones régulières de l'écoulement loin des chocs. L'ordre élevé permet aussi une faible dissipation loin du choc, comme peut le montrer l'entropie sur la figure 2.14b.

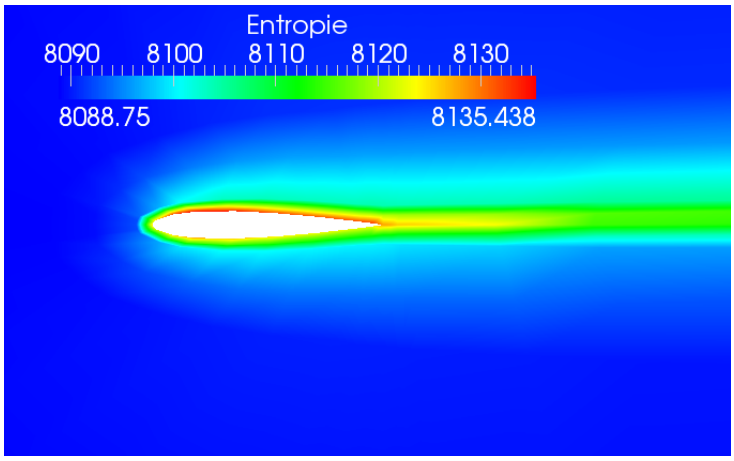


(a) maillage initial 560 cellules (b) zoom du maillage initial

FIGURE *2.13: Maillage initial contenant* 560 *éléments quadrangles*



(a) Pression



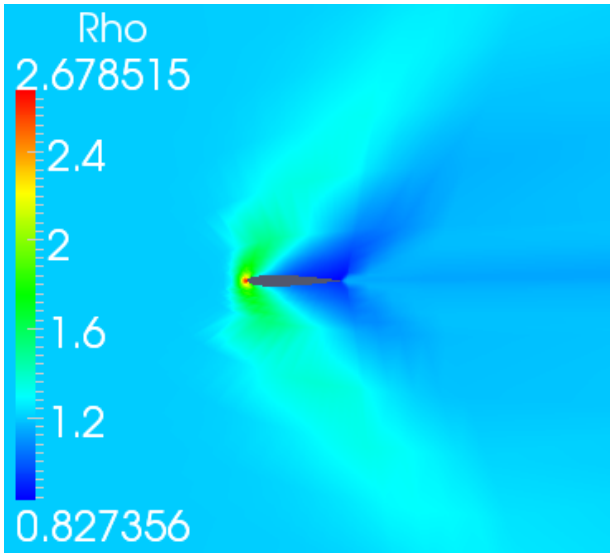
(b) Entropie

FIGURE *2.14: Ecoulement transsonique autour d'une aile NACA0012 à* $Mach = 0.8$ *avec un angle d'attaque de* $1.25\,°$*, résolu avec le schéma DG2*

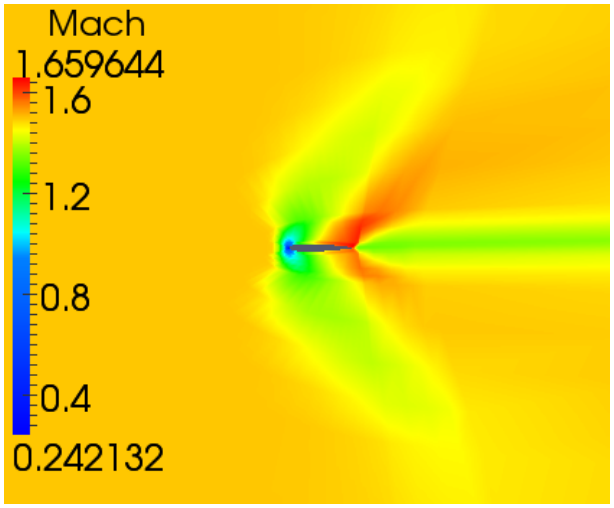
- ***Cas d'un écoulement supersonique à Mach = 1.5***

L'écoulement est maintenant supersonique autour du NACA0012 avec un nombre de $Mach = 1.5$ et un angle d'attaque de $1.5\,°$, sur un maillage quadrangulaires de 2240 cellules. La résolution se fait avec le schéma $DG2$. Dans ce cas test, les non linéarités sont plus fortes mais le schéma adaptatif en temps permet de trouver la solution sans quelques modifications que ce soit. Les figures 2.15 a-b, montrent l'évolution du nombre de Mach, ainsi que la masse volumique dans le domaine. On voit dans ce cas test aussi

que le choc semble être bien localisé dans les éléments sans perturber pour autant le reste de l'écoulement où il y a pas de discontinuités.



(a) Masse volumiqque



(b) Mach

FIGURE *2.15: Ecoulement supersonique autour d'une aile NACA0012 à Mach* $= 1.5$ *avec un angle d'attaque de* $1.5°$*, résolu avec le schéma DG2*

2.6.2.2.b Cas test d'un écoulement dans un Scramjet à Mach 3

Dans cet exemple, on considère un écoulement supersonique dans un scramjet à *Mach 3*. On utilise la viscosité artificielle avec le schéma DG1 sur un maillage de 1040 mailles quadrangulaires. On compare la solution obtenue avec le schéma DG1 à celle d'un schéma DG0 comme dans le cas du limiteur de pente. La figure 2.16 représente une coupe axiale des valeurs de la masse volumique pour les deux schémas. On obtient les mêmes observations que celles avec le limiteur de pente.

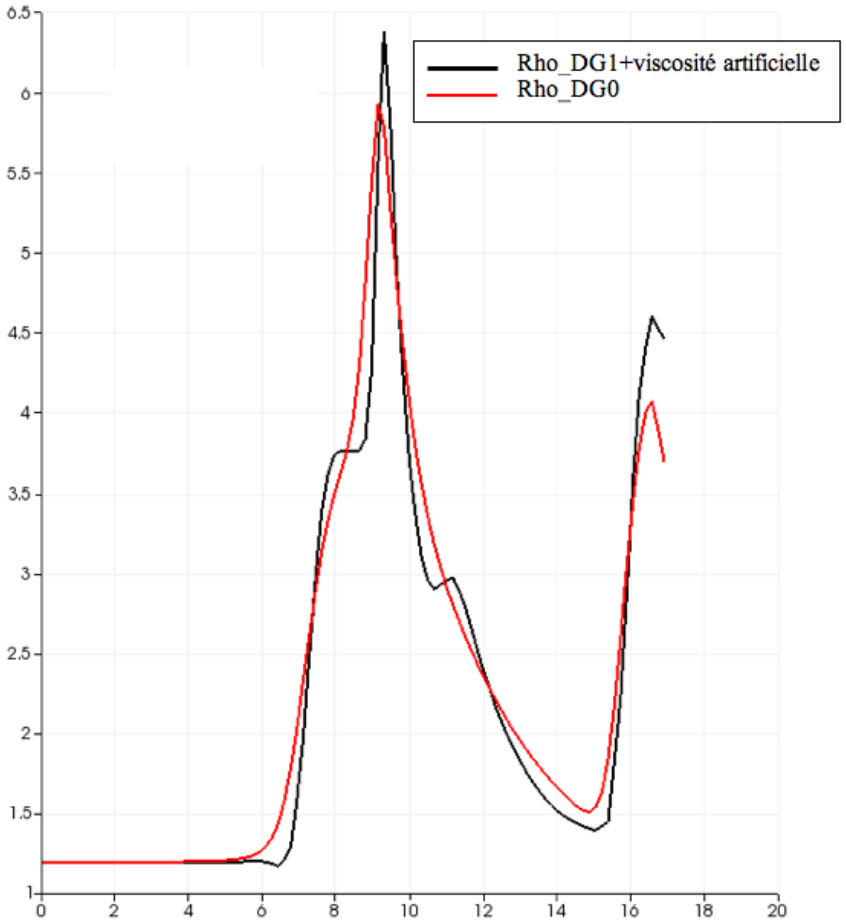


FIGURE *2.16: Coupe axiale de la masse volumique avec les schémas DG1 (1040 quadrangles) avec viscosité artificielle en noir et DG0 (4160 quadrangles) en rouge*

Chapitre 3

Raffinement adaptatif automatique de maillage et estimateurs d'erreurs à posteriori

Sommaire

3.1 Estimateurs d'erreurs a posteriori pour le raffinement de maillage 75

3.1.1 Estimateur d'erreur hiérarchique 76

3.1.2 Estimateur d'erreur de saut 76

3.2 Stratégie d'adaptation de maillage 77

3.2.1 Optimisation du maillage 77

3.2.2 Procédure d'adaptation de maillage et implémentation 78

3.3 Résultats numériques 81

3.3.1 Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe 81

3.3.2 Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 3 dans un scramjet 85

3.3.3 Comparaison d'un maillage uniformément raffiné et d'un maillage adapté par raffinements adaptatifs non-conformes 91

3.3.4 Cas test d'un écoulement autour d'un cylindre : Etude de la performance des deux estimateurs d'erreurs 93

3.3.5 Cas test d'un écoulement autour d'un NACA0012 : Etude de l'influence du flux numérique dans la procédure de raffinement adaptative 96

En simulation numérique, l'adaptation de maillage se révèle être un outil essentiel à l'obtention de résultats admissibles dans un laps de temps raisonable. Un maillage mal adapté à un problème se traduit par une mauvaise capture des phénomènes physiques. La simulation des problèmes de plus en plus complexes augmente la difficulté de garantir la fiabilité de la solution numérique. Cette difficulté se traduit par une détérioration de la précision globale due aux discontinuités locales telles que les forts gradients. Pour capturer la solution de façon précise, il s'impose donc de trouver des critères de raffinement adaptatif de maillage permettant de mettre assez de mailles dans les zones du domaine de calcul où il existe ces discontinuités. L'estimateur d'erreur a posteriori est devenu un outils indispensable pour vérifier que le modèle de l'équation est correctement résolu par adaptation de maillage [81]. Un avantage des méthodes DG est de faciliter le raffinement local de maillage adaptatif étant donnée la compacité du schéma [82, 83]. Il existe dans la littérature une grande variété d'estimateurs d'erreurs a posteriori pour la méthode DG développée pour le raffinement de maillage [84–86]. L'objectif de l'adaptation de maillage est d'améliorer de manière itérative la qualité de la solution numérique en se basant sur des critères d'analyse de l'erreur a posteriori.

Les deux éléments principaux de toute méthode adaptative sont l'estimateur d'erreur et la technique de raffinement. La partie la plus importante est le développement d'un critère d'erreur efficace qui permet de localiser des zones où un raffinement de maillage doit s'effectuer. Une fois l'erreur calculée, une procédure optimale d'adaptation de maillage permet de minimiser l'erreur en raffinant les endroits du domaine qui contribue largement à l'erreur globale de la solution approchée. Un indicateur d'erreur robuste couplée à une adaptation de maillage optimale pour un calcul donné permet de gagner considérablement de temps pour l'industriel.

Dans ce chapitre, nous montrons des exemples de raffinement adaptatif de maillage basés sur deux critères d'erreur a posteriori :

- Un critère de l'erreur locale basée sur le calcul de l'erreur entre deux maillages h et

$h/2$. $h/2$ étant le raffinement uniforme de h,

- Un critère de saut basé sur le calcul du saut entre deux éléments voisins.

L'adaptation de maillage implémenté se fait de façon automatique. A partir d'une séquence de raffinements choisie, le calcul se déroule automatiquement sans interruption. Nous illustrons les différents aspects des critères d'erreurs a posteriori implémentés ainsi que ceux du raffinement adaptatif de maillage. Les exemples numériques présentés mettent l'emphase sur les performances du raffinement adaptatif de maillage basé sur les deux critères.

3.1 Estimateurs d'erreurs a posteriori pour le raffinement de maillage

Les algorithmes de raffinement local de maillage pour les problèmes stationnaires améliorent considérablement la qualité de la solution et permettent de réduire la mémoire de stockage au cours du calcul et par conséquent augmentent la vitesse de convergence [87–89]. Les régions critiques sont raffinées de manière à capturer les forts gradients. La capture des phénomènes physiques dans les zones à raffiner dépend du critère de raffinement qui peut être basé soit sur des quantités physiques ou sur l'estimation de l'erreur de la solution. Nous avons implémenté deux estimateurs d'erreurs a posteriori. Le premier estimateur appelé hiérarchique est basé sur la différence entre deux solutions obtenues de deux maillages ; un uniformément raffiné et l'autre grossier. Le deuxième estimateur est basé sur le saut à l'interface de deux éléments, d'une quantité physique telle que la pression, la masse volumique ou l'entropie que l'on choisi au préalable.

3.1.1 Estimateur d'erreur hiérarchique

L'estimateur d'erreur hiérarchique ou critère hiérarchique est basé sur la mesure de la différence entre deux quantités physiques g_h et $g_{h/2}$ obtenues par la résolution sur deux maillages : un grossier de taille h et l'autre de taille $h/2$. L'indicateur d'erreur a donc pour expression :

$$\eta_K^2 = \|g_h - g_{h/2}\|_K^2. \tag{3.1}$$

L'implémentation de cette erreur est coûteuse en temps, puisque deux séquences de calculs sont traitées à chaque étape de raffinement. En effet le raffinement de maillage est obtenu par un dé-raffinement du maillage $h/2$ [58,90]. Bien que des variantes moins coûteuses de cet algorithme existent, nous avons préféré traiter cette forme parce notre objectif est de savoir si les informations données par la résolution complète du problème non linéaire est bénéfique aux performances de la procédure globale de raffinement [90].

3.1.2 Estimateur d'erreur de saut

Soit l'élément $K \in \mathcal{K}_h$ dont le diamètre est noté d_K et ses arêtes notées $\mathcal{S}_K$. Pour une arrête S le saut à l'interface d'une fonction polynomiale approchée g_h est donnée par $[g_h]$ (à noter que le saut dépend du choix du vecteur normal n_S sur la face). On définit donc l'estimateur ou l'indicateur de saut comme étant le saut d'une quantité physique g_h dérivée de la solution numérique u_h :

$$\eta_K^2 = d_K^{0.5} \sum_{S \in \mathcal{K}_K} \int_S [g_h]^2 \, ds. \tag{3.2}$$

Cet indicateur est propre aux méthodes DG, où la solution à l'interface est discontinue. L'idée d'utiliser le saut aux interfaces des éléments comme indicateur d'erreur a été introduite en premier par Dolejsi et al. [91] et a été repris par Krivodonova et al. [92] basé sur le travail de Adjerid et al. [93]. Pour une solution d'un écoulement régulier "smooth", l'ordre de grandeur du saut à l'interface doit être convergent,

$$|[g_h]| = \begin{cases} \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right) & pour\ les\ écoulements\ réguliers\ (\text{"}smooth\text{"}) \\ \mathcal{O}\left(1\right) & discontinuité \end{cases}$$

Dans les exemples numériques, nous avons choisi la pression, la masse volumique, ou le Mach comme quantité physique pour l'indicateur non hiérarchique.

3.2 Stratégie d'adaptation de maillage

Etant donné un estimateur d'erreur, la méthode d'adaptation automatique de maillage modifie le maillage en essayant de redistribuer et diminuer l'erreur. Les stratégies d'adaptation de maillage possibles en éléments finis, incluent les adaptations de type h, p, et hp [81,94]. L'adaptation de type p consiste à changer uniquement l'ordre d'interpolation, celle de type h consiste à modifier uniquement le maillage en réduisant la taille des mailles, et celle de type hp, est la combinaison des deux.

La stratégie d'adaptation choisie dans ce travail est l'adaptation de type h à p constant. L'adaptation de type h est choisie à celle de type p pour permettre une résolution efficace de forts gradients. Une extension à la méthode d'adaptation hp fait partie des futurs travaux. La méthode d'adaptation h, consiste à une détection des endroits de forts gradients permettant d'optimiser le maillage. Les données d'entrée de cette méthode sont le maillage courant, la solution convergée sur ce maillage, un indicateur d'erreur, et une tolérance spécifiée par l'utilisateur. La sortie est le nouveau maillage obtenu avec raffinement des éléments détectés.

3.2.1 Optimisation du maillage

En adaptation de maillage de type h, l'optimisation de maillage consiste à décider du choix des éléments à raffiner ou à dé-raffiner. L'optimisation de maillage est indispensable dans une simulation : un taux de raffinement élevé risque d'exiger un effort de résolution inutile. Plusieurs stratégies d'adaptation reposent sur la méthode de fraction fixée [90,94].

Elle consiste à choisir une fraction à raffiner des éléments détectés par le critère choisi. L'optimisation de maillage est effectuée à chaque itération d'adaptation en fonction de l'indicateur d'erreur et du taux de raffinement choisis par l'utilisateur [58, 90, 95, 96].

La stratégie de raffinement utilisée est le raffinement adaptatif hiérarchique non-conforme. Le raffinement adaptatif local non-conforme consiste à diviser les éléments indépendamment, conduisant à la création des noeuds pendants ("hanging nodes") (figure 3.1). Pour faciliter la programmation, nous nous restreignons à un noeud par face. L'utilisation du raffinement de maillage non-conforme est facilitée par la méthode DG [82, 83].

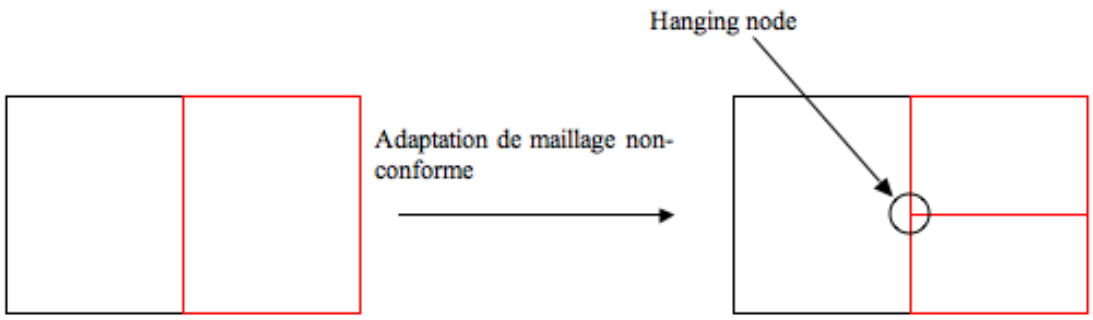
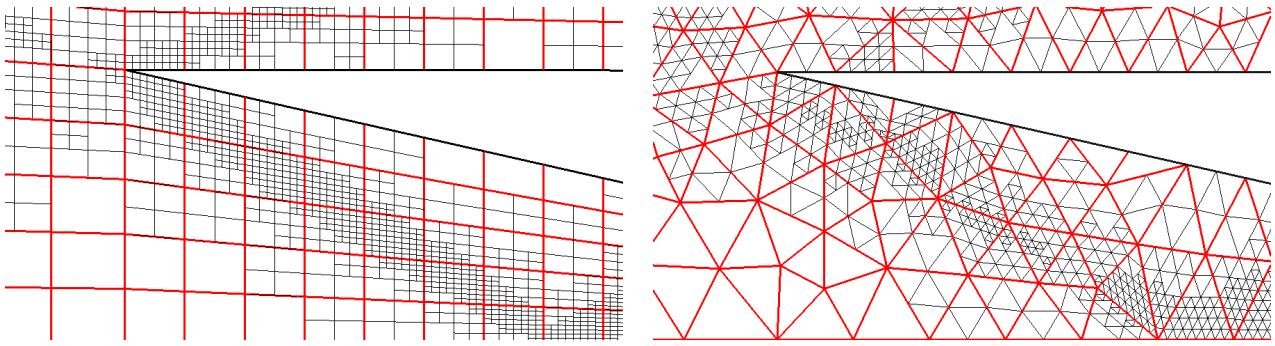


FIGURE *3.1: Raffinement adaptatif de maillage non-conforme*

La figure 3.2 représente un zoom de l'obstacle supérieur du cas test scramjet, où nous superposons deux maillages. Le maillage initial est en rouge et le maillage adapté non-conforme est en noir pour des mailles en triangles ou en quadrangles. On peut observer que le maillage adaptatif non-conforme accroît la résolution du maillage dans les zones de forts gradients.

3.2.2 Procédure d'adaptation de maillage et implémentation

Dans la procédure d'adaptation automatique de maillage que nous avons implémentée, le calcul commence sur un maillage initial sur lequel une solution convergée est obtenue. Le critère de raffinement est ensuite utilisé pour détecter les régions dans lesquelles, le



(a) (b)

FIGURE *3.2: Superposition des maillages initial (couleur rouge) au raffinement local adaptatif non-conforme (couleur noire) avec des quadrangles (a) et triangles (b) -cas test Scramjet*

maillage doit être adapté pour mieux capturer les caractéristiques de l'écoulement. Les cellules détectées sont marquées puis raffinées. Le nouveau maillage obtenu complété d'une interpolation des grandeurs conservatives à l'endroit des nouvelles cellules sert de plan de départ pour le calcul suivant. La détermination des éléments à raffiner est basée sur l'un des deux critères mentionnés aux sections précédentes.

Pour le critère de saut l'algorithme d'adaptation de maillage est classique. Dans le cas du critère hiérarchique, on stocke la solution obtenue à partir d'un maillage uniformément raffiné en utilisant le maillage grossier de départ. Ensuite selon le paramètre de marquage des cellules identifiées par le critère, l'algorithme entame le dé-raffinement des zones sélectionnées. En supposant qu'un seul niveau de raffinement soit demandé, le raffinement avec le critère hiérarchique peut être vu comme un dé-raffinement du maillage fin.

Le graphique de la figure 3.3 indique le diagramme de la procédure de raffinement pour les deux critères mentionnés. La partie gauche du diagramme montre la procédure de raffinement classique utilisée pour l'estimateur de saut, et celle de droite indique celle du critère hiérarchique. Dans les deux cas, nous utilisons une stratégie de marquage telle que : Trouver $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_h$ avec une cardinalité minimale telle que :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \eta_K^2 \geq \theta \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \eta_K^2, \tag{3.3}$$

spécifiant qu'au moins θ pour cent doit être raffiné.

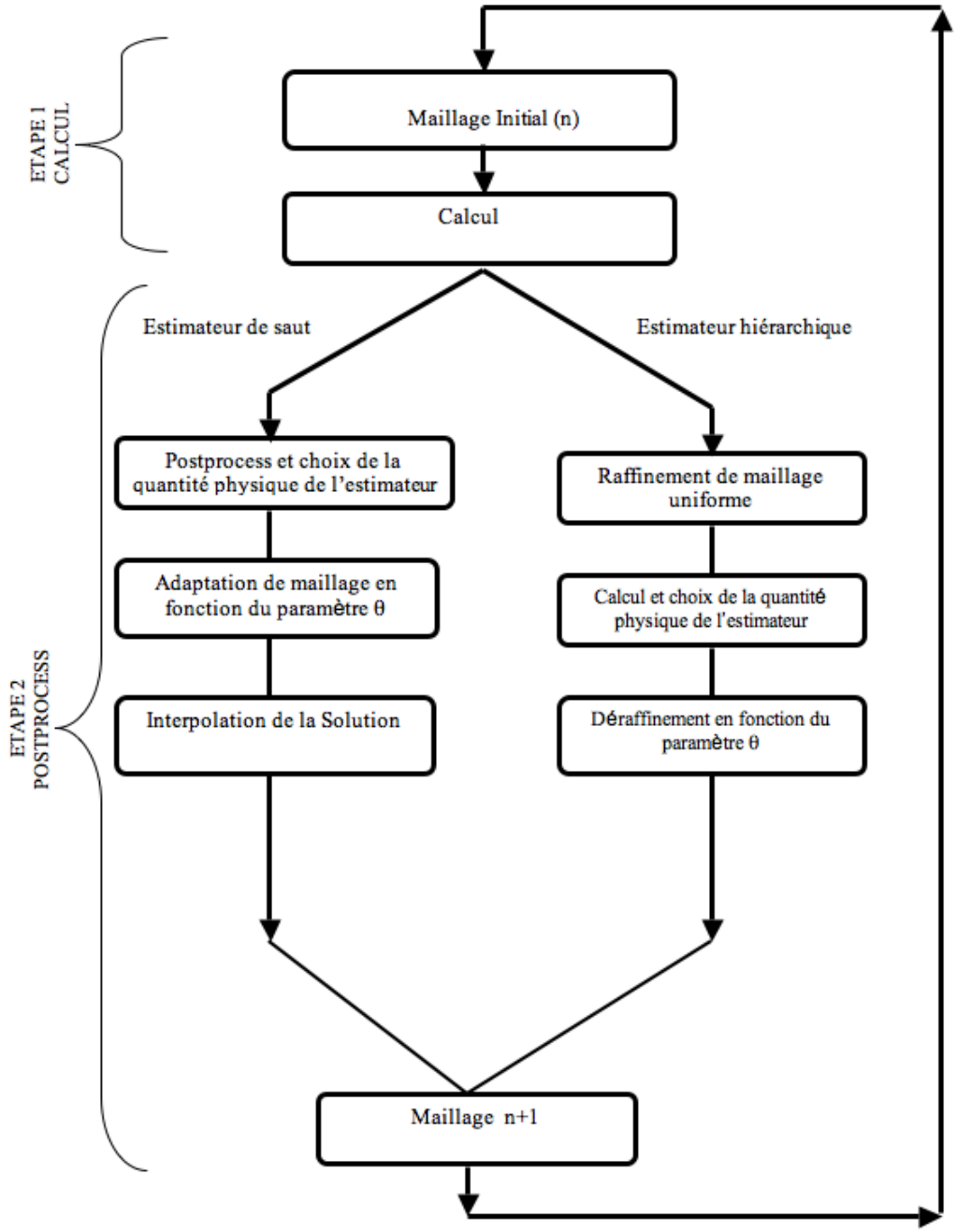


FIGURE *3.3: Diagramme du raffinement adaptatif de maillage*

3.3 Résultats numériques

3.3.1 Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe

3.3.1.1 Comparaison des deux estimateurs

Nous reprenons le cas test décrit à la section (2.6.1.2.a) du chapitre précédent. Dans cet exemple, nous voulons étudier la comparaison des deux estimateurs. Nous rappelons que ce cas test consiste en un écoulement supersonique d'un nombre de Mach égal à 2 sur une plaque inclinée d'un angle de 10 degré. La quantité sur laquelle l'erreur est estimée est la masse volumique pour les deux types de raffinement. Le paramètre θ (voir section 3.2.2) est choisi égal à 0.8 pour les deux types de raffinement. Nous montrons dans le tableau 3.1, le nombre de cellules (**N. elts**) de départ pour chaque étape de raffinement, l'erreur globale liée à l'estimateur (**erreur**), le nombre de cellules marquées (**N. cel marquées**), ainsi que le temps d'exécution (**temps d'exéc**) à chaque itérations pour la résolution du problème. Le maillage initial de départ pour les deux procédures est de 50 cellules triangulaires. On observe comme indiqué dans la section précédente, que l'estimateur hiérarchique est plus coûteux en temps. En effet pour chaque étape de raffinement, la solution est calculée sur le maillage initial et sur celui uniformément raffiné. Dans le cas précis le maillage uniformément raffiné donne 200 cellules en triangles pour la procédure de raffinement hiérarchique. Dans le cas de l'estimateur hiérarchique, le nombre de cellules marquées indique le nombre de cellules dé-raffinées sur le maillage uniformément raffiné. L'erreur dans les deux cas diminue au fur et à mesure que plus de mailles sont rajoutées ou enlevées au domaine de calcul.

On remarque que dans le cas du critère hiérarchique, d'une itération à l'autre le nombre de mailles rajoutées augmente peu alors que dans celui du saut le nombre de mailles augmente considérablement pour l'estimateur de saut. A la fin du calcul des quatre niveaux de raffinement demandés, le maillage obtenu avec l'estimateur d'erreur hiérarchique ne comporte que 416 mailles alors que celui du saut est de 1313 mailles.

Estimateur Hiérarchique				**Estimateur saut**			
N. elts	erreur	tps d'exéc	N. cel marquées	**N. elts**	erreur	tps d'exéc	N. cel marquées
200	4.194e-01	2.51e-01	195	50	7.19e-01	7.01e-02	14
248	4.321e-01	3.13e-01	243	92	6.021e-01	1.26e-01	27
284	3.869e-01	3.99e-01	278	218	5.065e-01	2.55e-01	64
320	3.632e-01	4.28e-01	309	530	4.671e-01	6.38e-01	172
416	3.515e-01	5.44e-01	-	1313	4.095e-01	1.81e+00	-

Tableau 3.1: Comparaison des deux types d'estimateurs : hiérarchique et non-hiérarchique - cas test d'un écoulement supersonique à Mach 2 autour d'une rampe

3.3.1.2 Influence du taux de raffinement θ

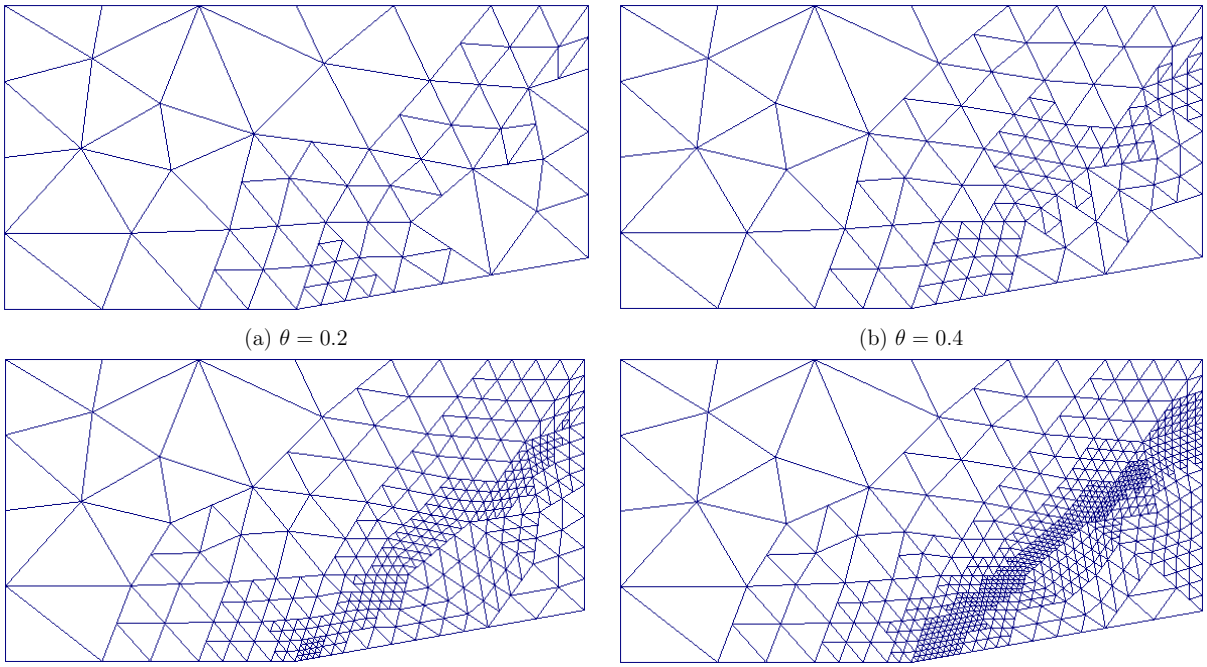
Dans la procédure de raffinement, le choix du taux de raffinement (θ) est indispensable. Dans notre procédure un taux de 0.8 signifie que 80% des mailles détectées par l'indicateur de saut sont raffinés ou que 80% des cellules détectées par l'indicateur d'erreur hiérarchique sont dé-raffinés. Dans cet exemple nous utilisons l'indicateur de saut. Dans le tableau 3.2, on montre le nombre de cellules marquées ainsi que l'erreur en faisant varier le taux θ. On observe que pour différentes valeurs de θ, l'erreur reste quasiment constante. Cependant le pourcentage des cellules identifiées qu'on décide de raffiner étant défini par θ, on remarque que les cellules marquées ne sont pas suffisamment nombreuses dans le cas de faible valeur de θ. θ doit être donc choisi de manière à représenter une quantité suffisante de cellules à raffiner pour capturer au mieux le choc. Une valeur de $\theta = 1$, correspond à raffinement uniforme de tout le domaine.

Valeur de θ	**0.2**			**0.4**			**0.6**			**0.8**		
	N. elts	N. cel M	erreur	**N. elts**	N. cel M	erreur	**N. elts**	N. cel M	erreur	**N. elts**	N. cel M	erreur
	50	3	7.18e-01	50	6	7.19e-01	50	10	7.190e-01	50	14	7.19e-01
	59	3	6.62e-01	68	5	5.76e-01	80	14	6.038e-01	92	27	6.021e-01
	68	3	5.63e-01	83	9	5.36e-01	143	27	5.150e-01	218	64	5.065e-01
	77	4	5.29e-01	143	14	5.38e-01	302	53	4.950e-01	530	172	4.67e-01

Tableau 3.2: Influence du choix du taux de raffinement θ : estimateur non-hiérarchique - cas test d'un écoulement autour d'une rampe

Les figures 3.4 montrent les maillages du quatrième niveau de raffinement pour les

différentes valeurs de θ considérées. On observe qu'au fur et à mesure que le taux de raffinement augmente, d'avantage de mailles sont rajoutées dans la zone du choc, (cf. figure 3.4). La figure 3.5, montre le champ de pression sur le dernier maillage obtenu lors du raffinement pour les différents taux de raffinement.

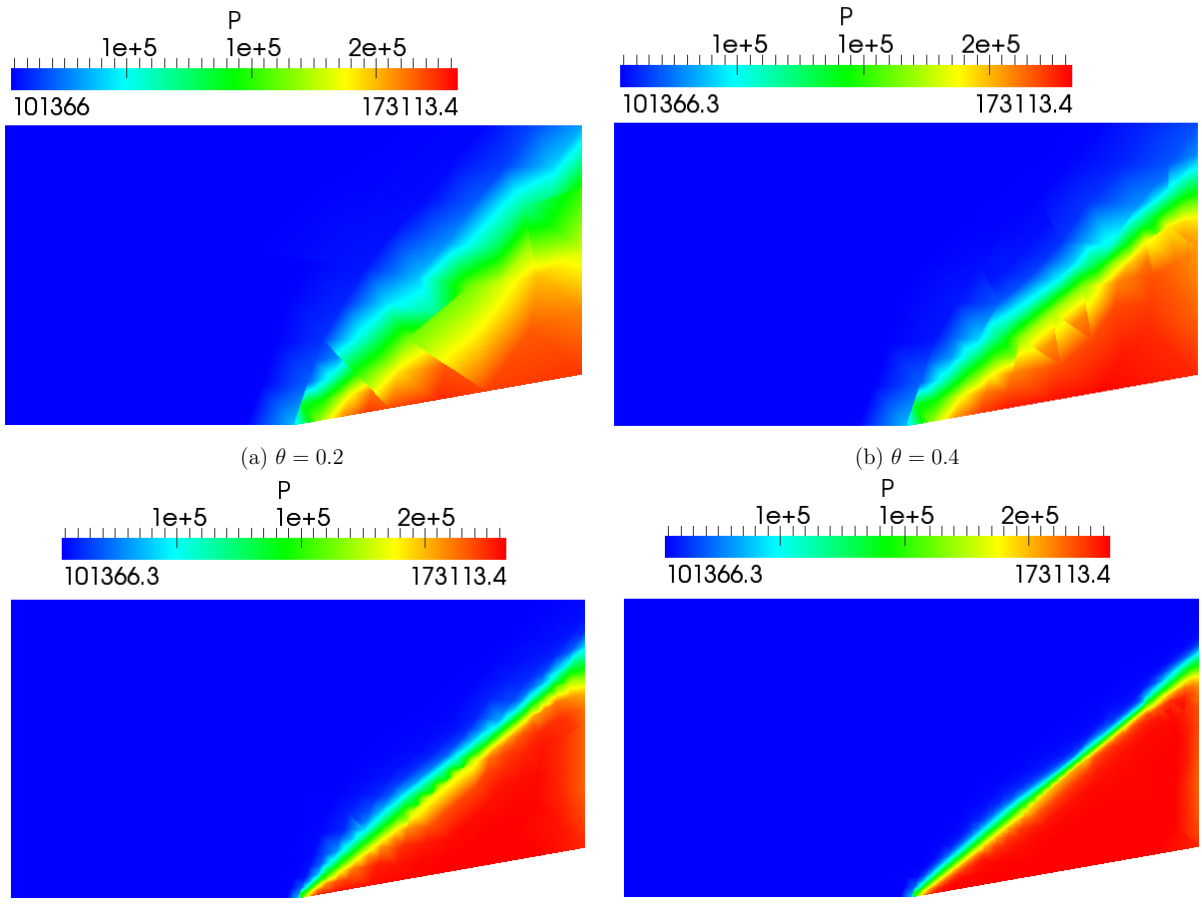


(a) $\theta = 0.2$ (b) $\theta = 0.4$

(c) $\theta = 0.6$ (d) $\theta = 0.8$

FIGURE *3.4: Zoom des maillages à l'arrière de l'obstacle au quatrième niveau de raffinement*

Par expériences numériques effectuées, nous avons trouvé que le taux $\theta = 0.8$ est le mieux adapté pour tous les cas test étudiés. Par conséquent dans tous nos cas tests sauf indication contraire, le taux $\theta = 0.8$ est la valeur par défaut. Toute la procédure de raffinement de maillage est automatisée. Dans une procédure de calcul , il suffit à l'utilisateur de choisir le nombre de niveau de raffinement et de lancer le calcul tout en choisissant au préalable la méthode en temps qu'il souhaite pour son calcul. Une possible extension de cette méthode est la comparaison de l'erreur calculée sur chaque maillage à une erreur minimale ce qui permettrait de s'affranchir du choix du nombre de raffinement à indiquer au départ par l'utilisateur.



(a) $\theta = 0.2$ (b) $\theta = 0.4$

(c) $\theta = 0.6$ (d) $\theta = 0.8$

FIGURE *3.5: Zoom des maillages à l'arrière de l'obstacle au quatrième niveau de raffinement*

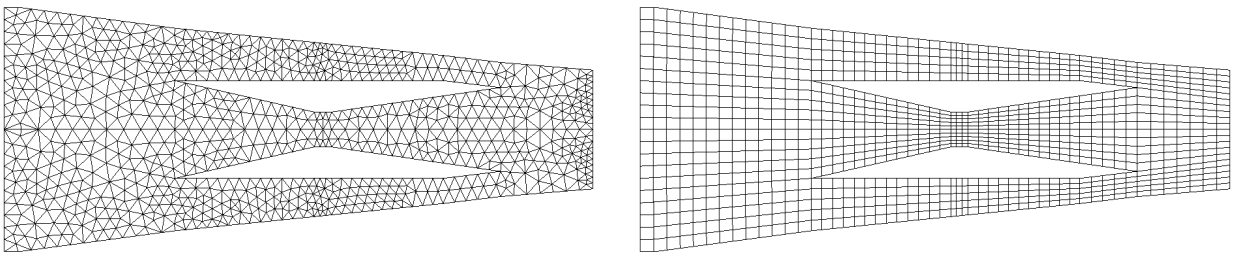
3.3.2 Cas test d'un écoulement supersonique à Mach 3 dans un scramjet

Ce cas test consiste en un écoulement supersonique dans un scramjet [97]. Le domaine de simulation est décrit au tableau (3.3). Le domaine étant symétrique (figure 3.6), les coordonnées de l'obstacle inférieur et du mur inférieur sont obtenues par symétrie (x_i, $-y_i$). L'objectif est d'obtenir une solution stationnaire avec un écoulement à Mach 3 à l'entrée du domaine (entrée du domaine à gauche cf. figure 3.6) . Sur ce cas test nous étudions l'intérêt du raffinement de maillage, le choix de diverses quantités physiques pour le critères d'erreur ainsi que le temps de calcul au cours d'une procédure de raffinement. Dans ce cas test l'estimateur de saut est utilisé.

	bord supérieur						obstacle supérieur				
x_i	0.0	0.4	4.9	12.6	14.25	16.9	4.9	8.9	9.4	14.25	12.6
y_i	3.5	3.5	2.9	2.12	1.92	1.7	1.4	0.5	0.5	1.2	1.4

Tableau 3.3: Coordonnées du bord et de l'obstacle supérieurs du domaine de calcul du scramjet

Dans les calculs qui vont suivre les maillages initiaux en triangles et quadrangles sont représentés à la figure 3.6 et contiennent repectivement 1594 triangles et 1040 quadrangles au départ.



(a) (b)

FIGURE *3.6: Maillages initiaux : (a) quadrangles (1040 cellules) , (b) triangles (1594 cellules) -Scramjet-*

3.3.2.1 Intérêt du raffinement de maillage adaptatif : critère de saut

Dans ce cas test nous voulons montrer la performance de l'estimateur basé sur le critère de saut. Le maillage contient 1040 quadrangles (figure 3.6b). Dans ce cas test, le schéma DG utilisé est DG0. Le paramètre de marquage $\theta = 0.8$. Le flux utilisé aux interfaces est HLLC. On effectue une série de sept raffinements adaptatifs de maillage. L'objectif est de montrer l'évolution du raffinement de maillage d'un niveau de raffinement à un autre.

La figure (Fig. 3.7) est une coupe axiale du champ de masse volumique pour les raffinements successifs adaptatifs obtenus au bout du premier $M1$, du troisième $M3$, et du sixième $M6$ raffinement. Les figures 3.8 (a et b) sont les isolignes pour les maillages raffinés $M3$ et $M7$ respectivement. Ces figures montrent la performance du critère de saut. On observe qu'au cours de la procédure de raffinement les mailles sont de plus en plus raffinées dans les zones critiques de l'écoulement (zones de chocs par exemple). En effet la courbe du maillage $M6$ (figure 3.7-couleur noire) semble mieux capturer l'évolution de la masse volumique le long de l'axe de symétrie. En effet, on observe la zone de recompression dans le divergent qui apparaît au sixième niveau de raffinement.

3.3.2.2 Estimateur d'erreur de saut pour différentes variables physiques

Sur le même cas test du scramjet, on compare la performance de l'estimateur en choisissant différentes variables physiques pour calculer l'estimateur de saut. Les variables physiques choisies sont : la masse volumique, la température, la pression pour le processus de raffinement adaptatif. Le flux numérique utilisé ici est celui de Vijayasundaram.

On effectue comme dans le cas précédent sept raffinements adaptatifs. La figure 3.9 représente une coupe axiale de la masse volumique sur le troisième maillage $M3$ (figure 3.9-a), et le sixième $M6$ (figure 3.9-b) obtenus respectivement lors du processus de raffinement. On observe sur la figure 3.9 que les indicateurs de saut de pression et de masse volumique

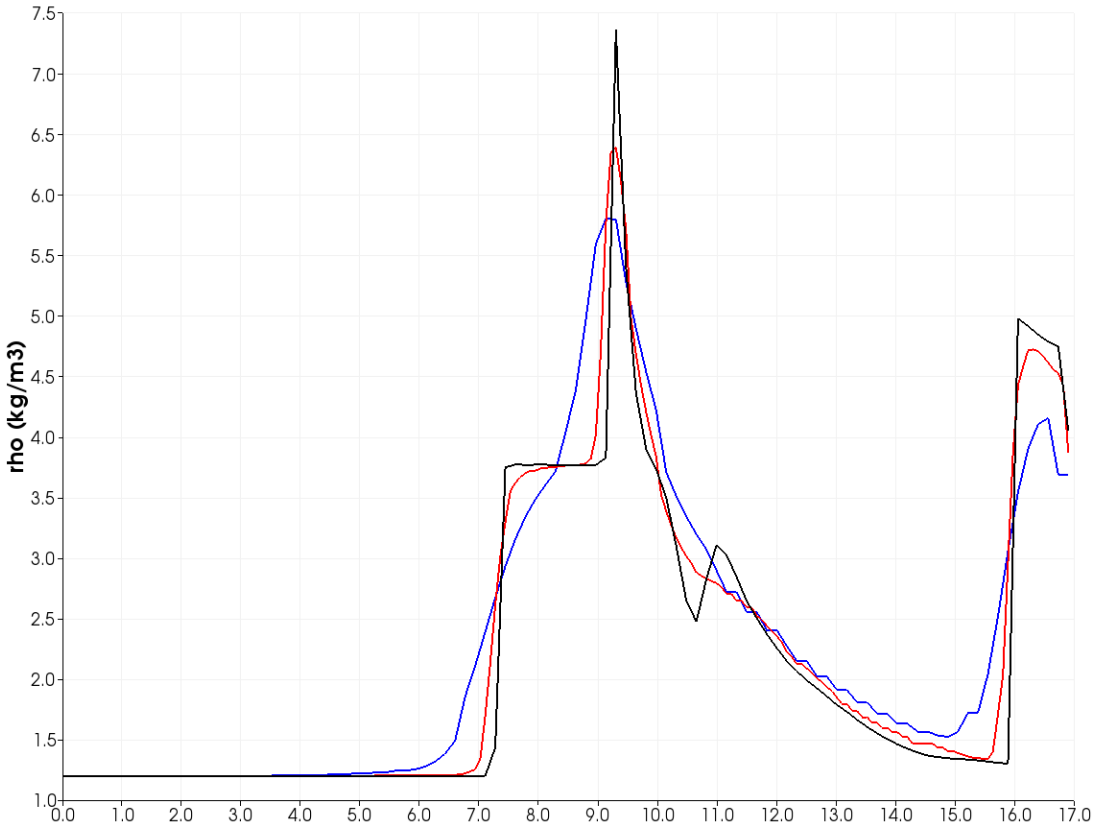
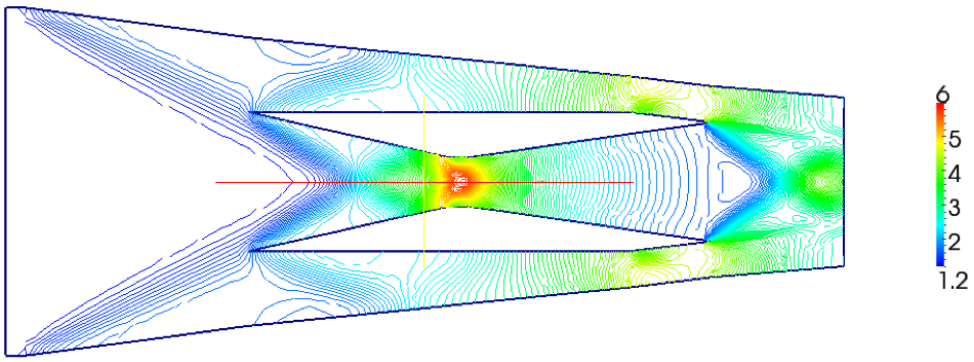
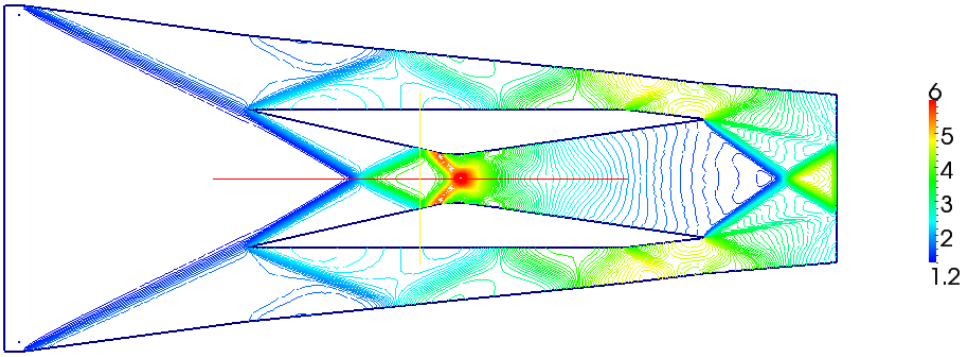


FIGURE *3.7: Coupe axiale du champ de masse volumique : bleu (M1), rouge (M3) et noir (M6).*



(a) M3



(b) M7

FIGURE *3.8: Les isolignes de masse volumique sur le troisième (M3) et le septième (M7) raffinement maillages avec l'estimateur de saut*

semblent mieux capturer les zones de chocs que l'indicateur de saut de température (figure 3.9-a). Cependant quand le nombre de mailles atteint une certaine limite, les différences ne sont plus très significatives. En effet sur la figure 3.9-b, on remarque que sur le maillage $M6$, les solutions obtenues sont quasiment les mêmes quelque soit la variable physique choisie pour l'indicateur de saut.

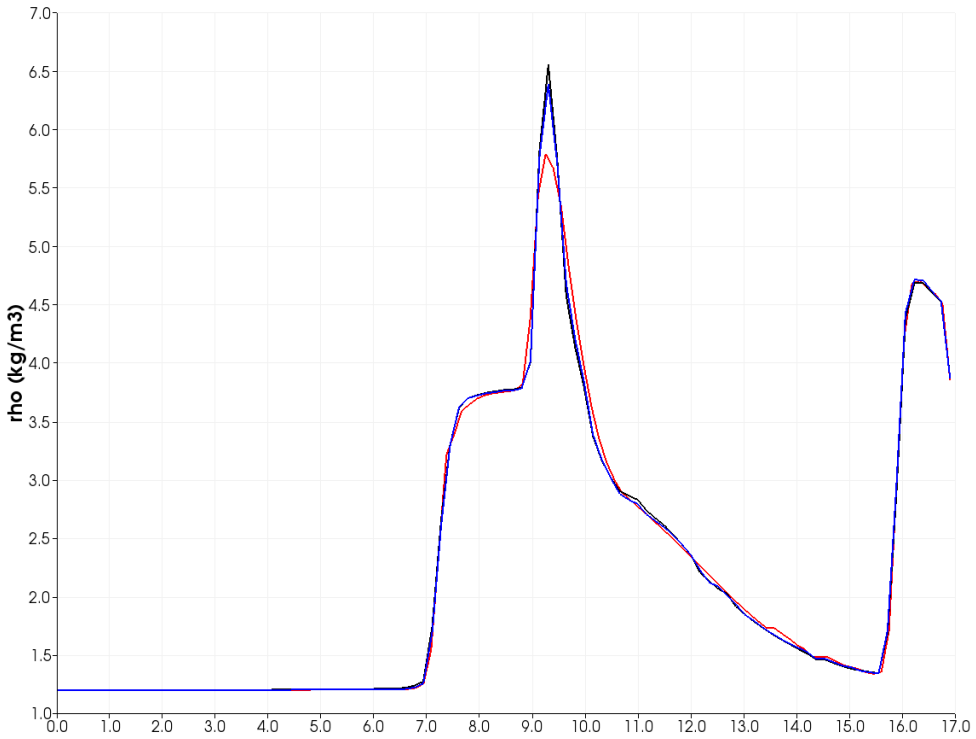
3.3.2.3 Evolution du temps de calcul au cours du raffinement adaptatif successif de maillage

Le tableau 3.4 indique le temps total de calcul, le temps par itération et par cellule, ainsi que le nombre de cellules pour les sept niveaux de raffinement de maillages effectués dans la section précédente. Nous pouvons observer que le nombre de cellules est approximativement multiplié par 2.5 d'un raffinement à l'autre. Le pas de temps moyen par itération ramené à la cellule est approximativement égal $5.10^{-5}s$. Le temps final de calcul sur le dernier maillage est de *9 min* pour un nombre de cellules de 277151.

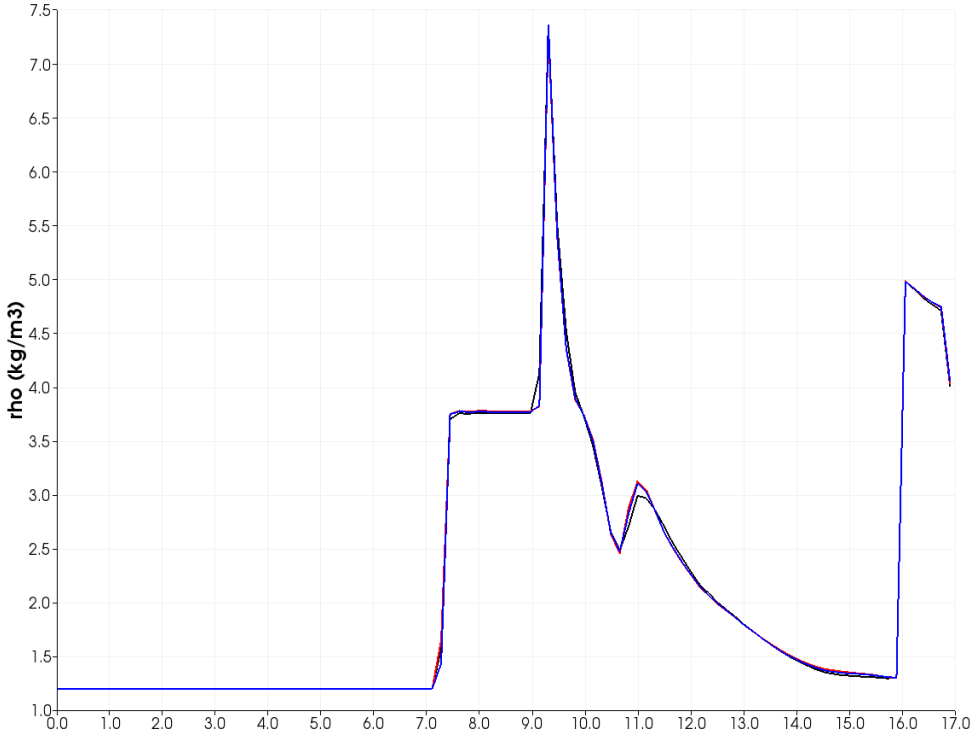
	Mesh1	**Mesh2**	**Mesh3**	**Mesh4**	**Mesh5**	**Mesh6**	**Mesh7**
niter[1]	**23**	**18**	**17**	**16**	**16**	**23**	**28**
Temps total (s)	1.1401	2.7268	6.1044	17.1538	46.5524	160.2157	520.3359
Nombre de Points	1175	2997	7520	19299	48868	119966	293055
Nombre de cellules	1040	2666	6812	17687	45353	112553	277151
Nombre de segments	2216	5942	15183	39357	99958	245394	599023
Tps/iter/cel ($\times 10^{-5}$s)	4.77	5.68	5.27	6.06	6.41	6.19	6.71

[1]niter : nombre d'itérations de Newton pour atteindre la convergence fixée pour chaque raffinement.

Tableau 3.4: Raffinement de maillages successifs avec le saut de masse volumique comme estimateur d'erreur



(a) Mesh3



(b) Mesh6

FIGURE *3.9: Influence du choix de la variables physiques pris en compte dans l'estimateur d'erreur non hiérarchique : bleue (masse volumique), rouge (température) , noire (pression) .*

3.3.3 Comparaison d'un maillage uniformément raffiné et d'un maillage adapté par raffinements adaptatifs non-conformes

On propose de comparer deux types de maillages : des maillages uniformément raffinés et des maillages adaptés avec le cas test du scramjet. Les maillages uniformément raffinés sont obtenus sur des maillages triangulaires et quadrangulaires en faisant des raffinements uniformes des maillages initiaux de la figure 3.6. Les figures 3.10a-b montrent les isovaleurs de la masse volumique avec le raffinement adaptatif sur les maillages triangulaire et quadrangulaires. Pour avoir une comparaison rigoureuse, un effort a été fourni pour avoir à peu près les mêmes nombres de mailles aussi bien pour les maillages adaptés que ceux uniformément raffinés (voir le tableau 3.6).

Les paramètres du calcul et de l'adaptation de maillages sont indiqués dans le tableau 3.5 . On a effectué quatre raffinements adaptatifs successifs pour obtenir le même nombre de mailles que les maillages uniformes en triangles ($Scram_Tri_4$) et en quadrangles ($Scram_Quad_4$).

Paramètre de marquage (θ)	0.77
Flux Numérique	HLLC
Estimateur d'erreur	non-hiérarchique (saut de la masse volumique)
Schéma en temps	BDF2 implicite

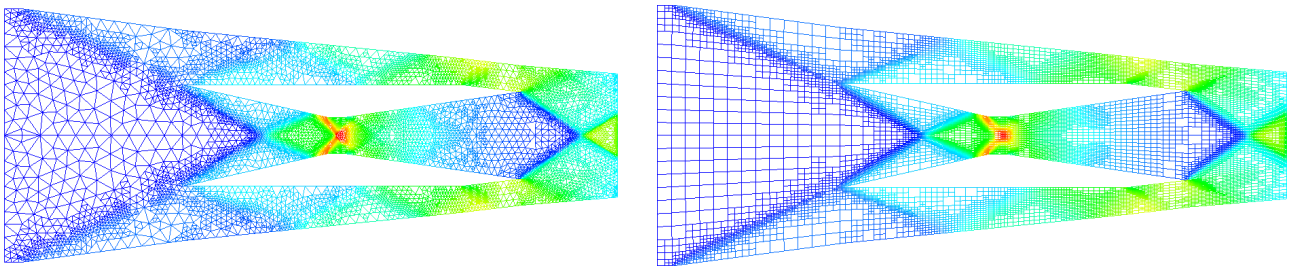
Tableau 3.5: paramètres choisi pour le raffinement de maillage - Scramjet-

Les temps de calcul pour les deux maillages obtenus sont indiqués dans le tableau 3.6. Avec approximativement le même nombre de mailles pour le maillage uniforme et le maillage adapté localement, on observe un gain en temps important de plus de 35 fois en utilisant l'adaptation de maillage local non-conforme. Ce résultat montre l'intérêt de l'adaptation de maillage par rapport au raffinement uniforme. L'adaptation de maillage permet de mettre des mailles dans les zones qui contribuent plus largement à l'erreur. Dans les zones à faibles erreurs la solution converge rapidement ce qui réduit considérablement le temps de calcul. Le raffinement de maillage améliore donc la vitesse de convergence du calcul et permet un gain de temps considérable.

La figure 3.11 représente une coupe axiale de masse volumique pour les solutions obtenues avec les maillages en triangles (figure 3.11a) et quadrangles (figure 3.11b). Nous observons la qualité du raffinement de maillage local par rapport au maillage uniformément raffiné. L'adaptation de maillages non-conforme semble mieux capturer la solution que le maillage uniformément raffiné.

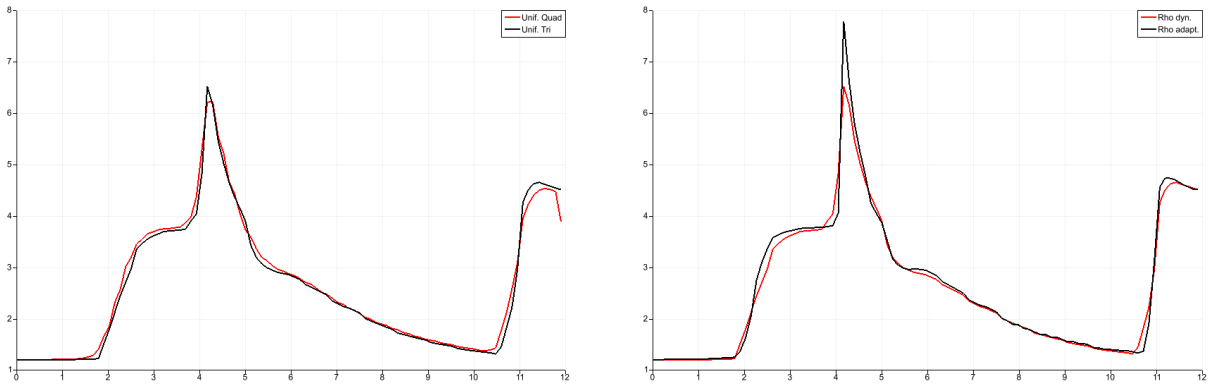
	Points	**Cellules**	**Segments**	**Temps de Calcul(s)**
Scram_Quad_4	17043	15485	34308	25.0236
Scram_Quad_Uniform	17183	16640	33824	865.0177
Scram_Tri_4	9951	17005	29138	22.3141
Scram_Tri_Uniform	13295	25504	38800	2000.4269

Tableau 3.6: Information sur les maillages : adaptés et uniformes (quadrangles, triangles) -Scramjet-



(a) (b)

FIGURE *3.10: Isovaleurs de la masse volumique obtenus avec le raffinement adaptatif non-conforme (a) quadrangles and (b) triangles -Scramjet-*



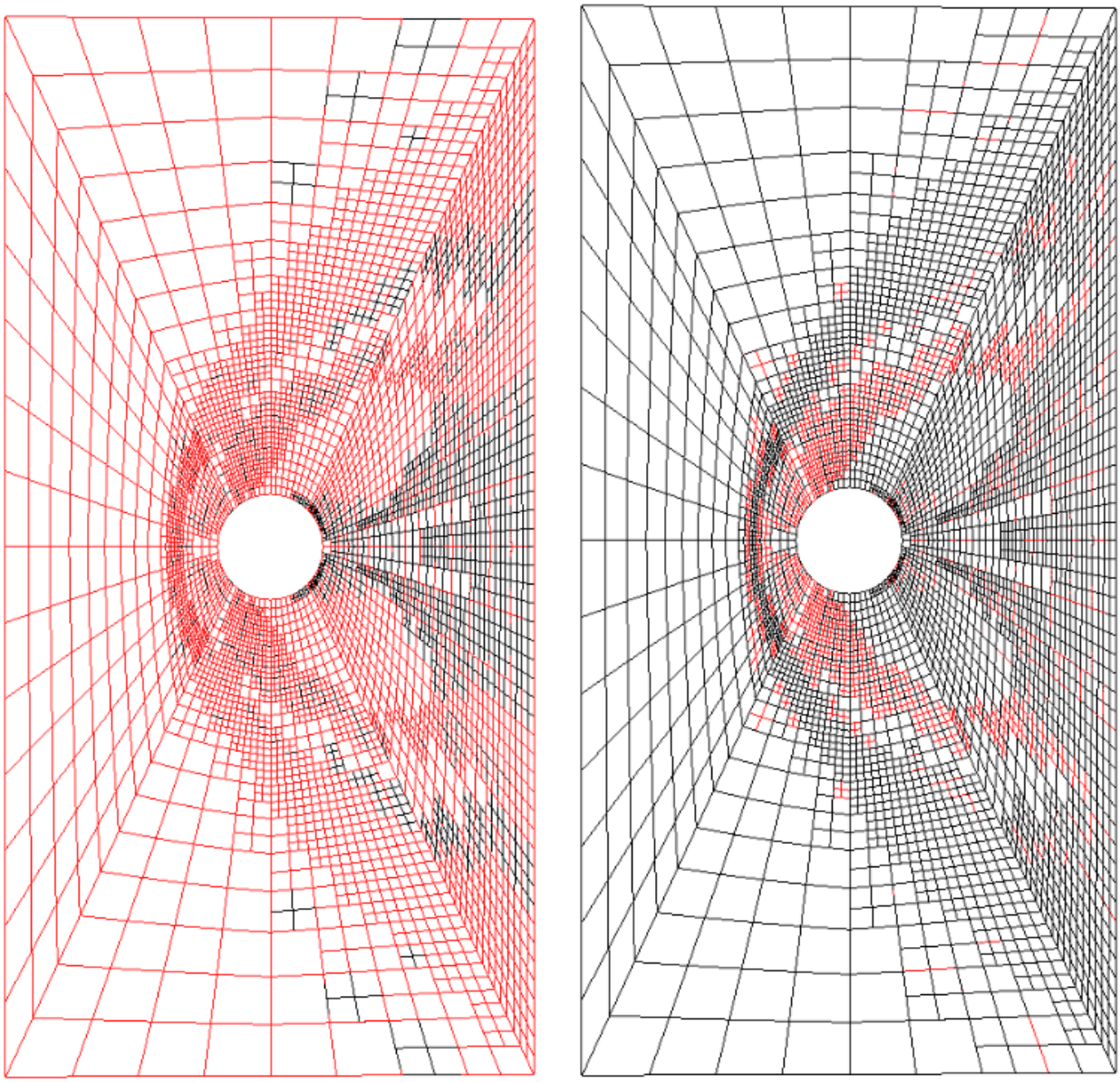
(a) quadrangles (b) triangles

FIGURE *3.11: Coupe axiale sur le champs de masse volumique Comparison entre maillages uniformes et adaptés -Scramjet-*

3.3.4 Cas test d'un écoulement autour d'un cylindre : Etude de la performance des deux estimateurs d'erreurs

Le but de ce cas test est de faire une comparaison sur la performance des deux estimateurs d'erreur. Pour les estimateurs, l'erreur est calculée sur la masse volumique. Le flux numérique aux interfaces est HLLC. Le cas test du cylindre est un écoulement supersonique externe autour d'un cylindre à Mach 3 à l'entrée (à gauche du domaine cf. figure 3.12). Le paramètre de marquage est fixé à $\theta = 0.8$. L'influence de la stratégie de raffinement pour les deux estimateurs est remarquable pour ce cas test. Les maillages obtenus au second niveau de raffinement pour les deux types d'estimateurs sont superposés à la figure 3.12. On observe que les maillages ne sont pas raffinés dans les mêmes régions pour les deux estimateurs. Sur la figure 3.12-a, les cellules marquées en rouge indiquent les régions raffinées par l'estimateur de saut et vice versa (Fig 3.12-b).

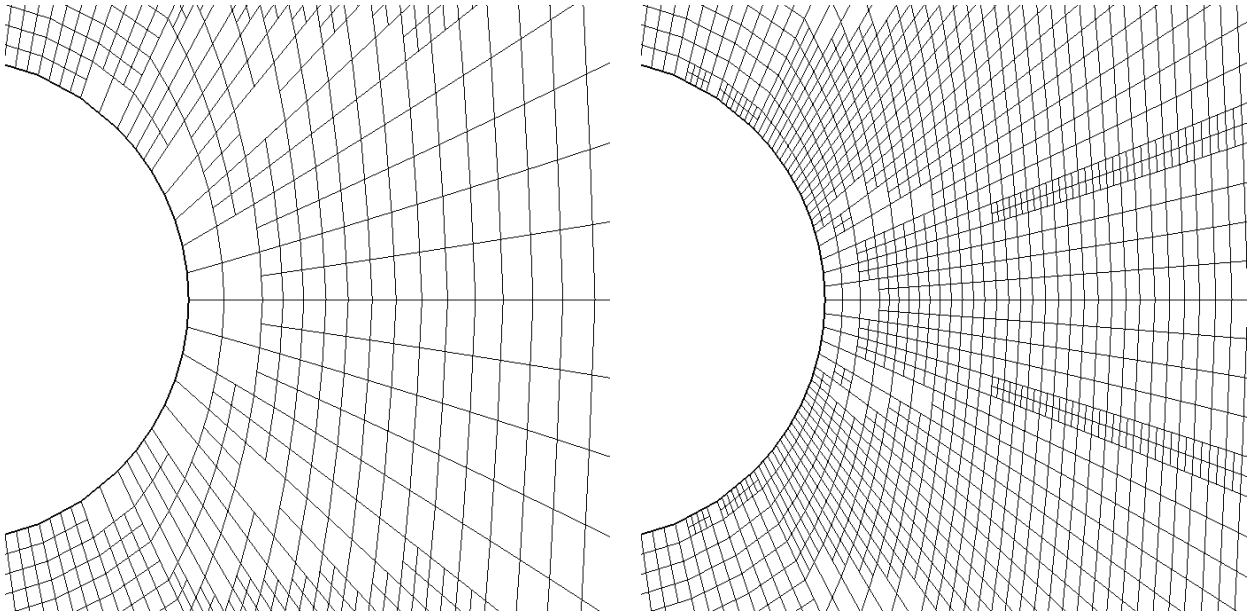
Les figures 3.13 et 3.14, montrent des zooms des lignes de courant de ρv_1 à l'arrière de l'obstacle des maillages raffinés obtenus au quatrième niveau de raffinement. Nous observons que l'estimateur hiérarchique capture des re-circulations à l'arrière de l'obstacle que l'estimateur de saut ne capture pas à ce niveau de raffinement. Cette observation



(a) N-H (rouge) superposé à H (noir) (b)H (noir) superposé à N-H (rouge)

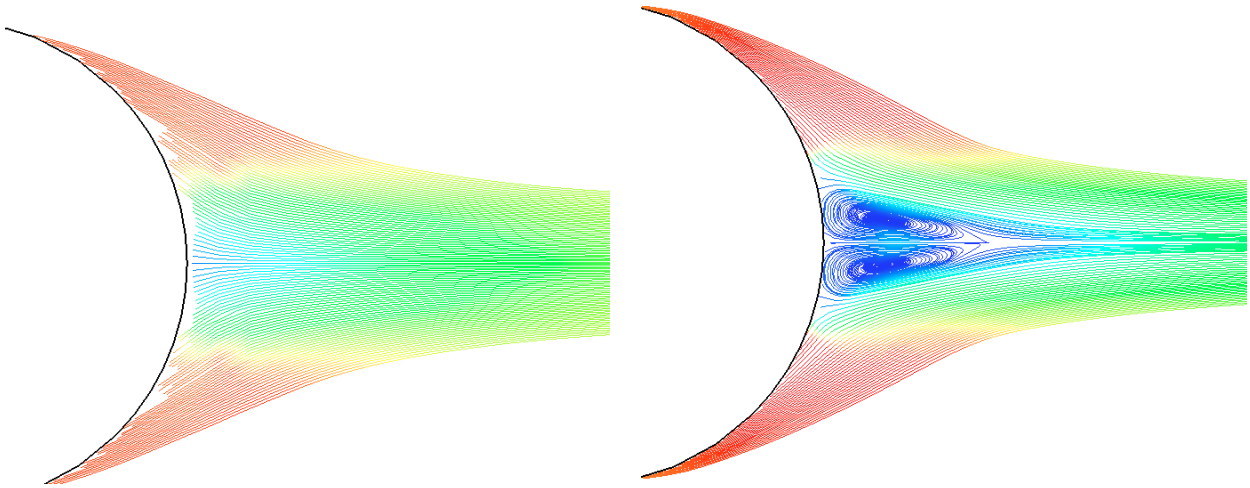
FIGURE *3.12: Superposition des maillages au second neiveau de raffinement pour les deux estimateurs d'erreur*

indique l'importance du choix de l'estimateur d'erreur dans une procédure de raffinement adaptatif.



(a) *raffinement-estimateur non hiérarchique* (b) *raffinement-estimateur hiérarchique*

FIGURE *3.13: Zoom des maillages à l'arrière de l'obstacle au quatrième niveau de raffinement*



(a) *raffinement-estimateur non hiérarchique* (b) *raffinement-estimateur hiérarchique*

FIGURE *3.14: Ecoulement supersonique à Mach 3 autour d'un cylindre : comparaison de lignes de courant avec les deux estimateurs d'erreurs*

3.3.5 Cas test d'un écoulement autour d'un NACA0012 : Etude de l'influence du flux numérique dans la procédure de raffinement adaptative

Nous considérons dans ce cas test un écoulement transsonique autour d'une aile NACA0012, avec les conditions d'entrée suivantes : Nombre de Mach $M_\infty = 0.8$, et angle d'attaque $\alpha = 1.25\,^\circ$. Le maillage initial contient 1860 quadrangles (figure 3.15). L'objectif de cette étude est d'analyser l'influence du choix du flux aux interfaces des cellules au cours d'un raffinement de maillage. On choisit l'estimateur de saut de masse volumique. On effectue deux niveaux de raffinement. Le tableau 3.7 montre les détails concernant les maillages obtenus à chaque niveau pour six flux numériques différents : Vijasundaram (Vija), HLLC, HLL, Laxfriedrich(LF), et deux variantes du flux de Roe nommés RL1 et RL2 (voir annexe B).

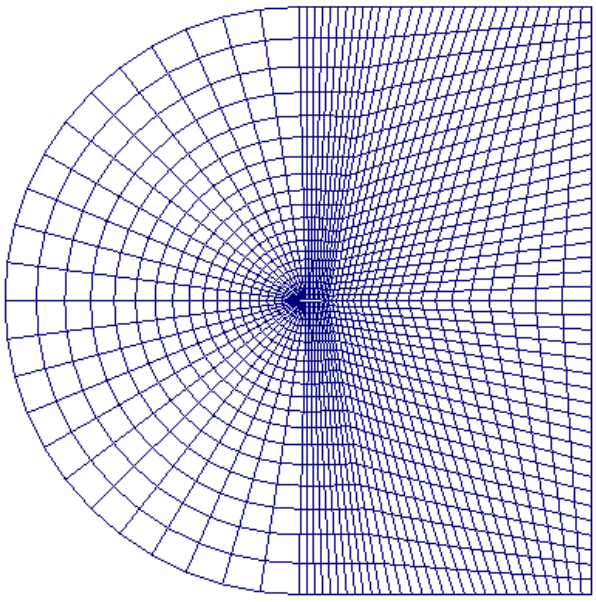


FIGURE *3.15: Maillage initial du NACA0012 contenant 1860 quadrangles*

Du tableau 3.7, nous observons que les maillages sont globalement raffinés de la même

	Vija	**HLLC**	**HLL**	**LF**	**RL1**	**RL2**
M0 niter :	**23**	**22**	**22**	**34**	**21**	**22**
Points	1764	1764	1764	1764	1764	1764
Cells	1680	1680	1680	1680	1680	1680
Segments	3444	3444	3444	3444	3444	3444
M1 niter :	**59**	**24**	**24**	**31**	**21**	**23**
Points	3661	3670	3615	3888	3777	3774
Cells	3471	3480	3435	3684	3600	3597
Segments	7285	7303	7189	7731	7505	7499
M2 niter	**76**	**62**	**36**	**33**	**111**	**29**
Points	9203	9353	9289	10915	10063	10060
Cells	8781	8934	8895	10164	9627	9624
Segments	18471	18768	18617	22229	20191	20185

Tableau 3.7: Comparaison de l'influence des flux numériques aux interfaces pour l'estimateur non hiérarchique

manière pour les différents types de flux considérés. Au second niveau d'adaptation de maillage, il semblerait que le calcul converge moins bien pour le flux $RL1$. En effet pour ce dernier, il faut 111 itérations pour atteindre l'ordre de convergence désiré alors que pour les autres flux 29 à 76 suffisent.

Les figures 3.16, 3.17 et 3.18, représentent des comparaisons entre les isovaleurs de masse volumique des flux pris deux à deux. On observe que les flux Vijayasundaram et HLLC (figure 3.16) se superposent parfaitement de même que les flux $RL1$ et $RL2$ (figure 3.17). Des différences plus importantes sont observées en comparant les isovaleurs des flux HLL et Laxfriedrich (figure 3.18). On observe que la solution obtenue avec le flux HLL semble être plus diffusive pour ce cas test que celle obtenue avec le flux de Laxfriedrich. Globalement, les flux HLL et Laxfriedrich sont plus diffusifs que les autres.

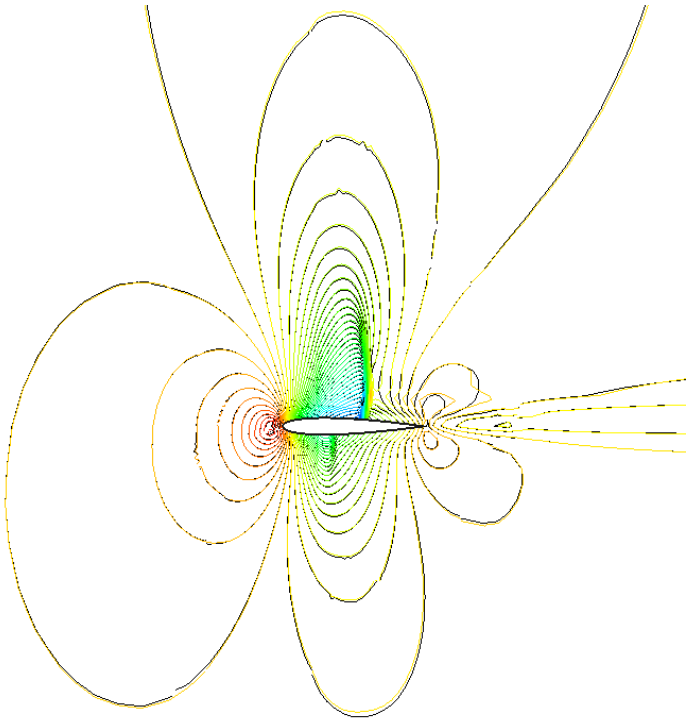


FIGURE *3.16: Isovaleurs de masse volumique pour les flux Vijasundaram (noir) et HLLC (jaune)*

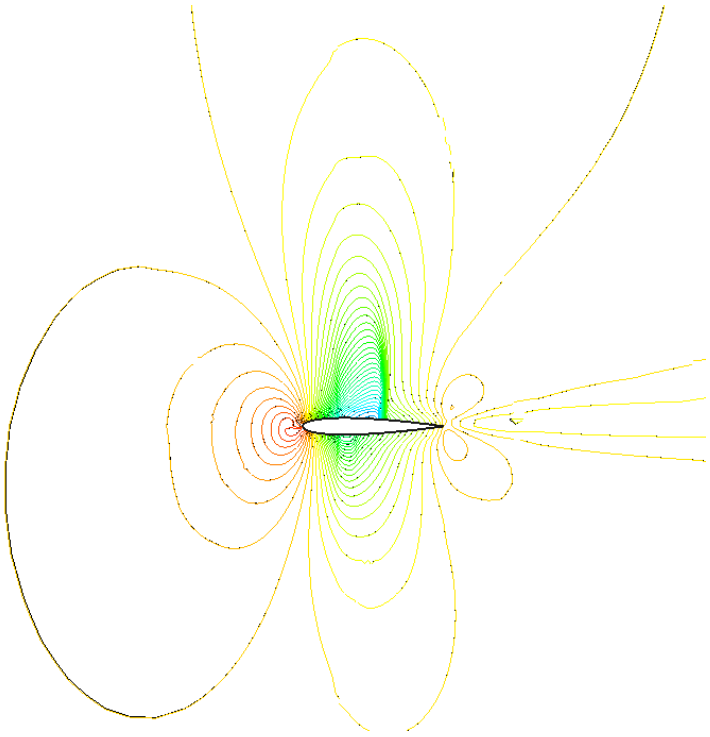


FIGURE *3.17: Isovaleurs de masse volumique pour les flux RL*1 *(noir) and RL*2 *(jaune)*

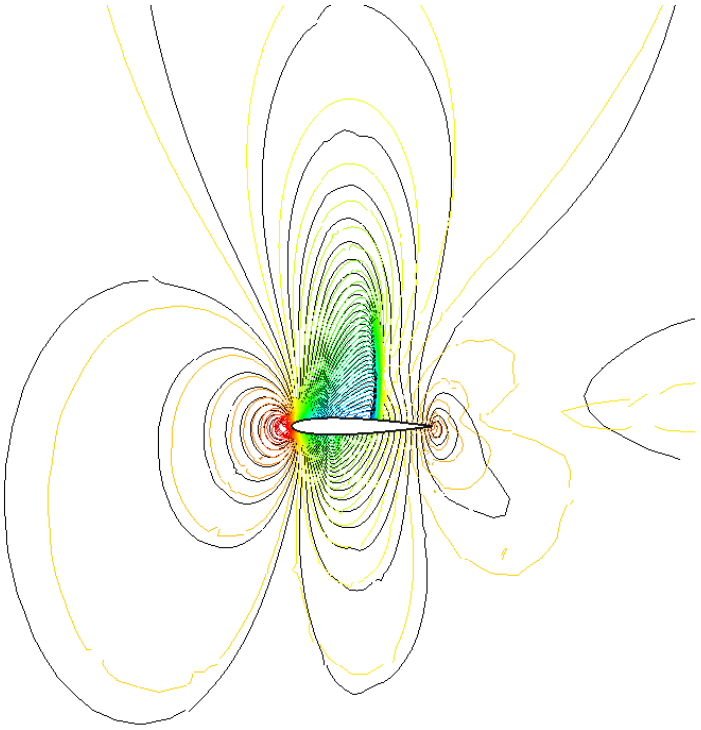


FIGURE *3.18: Isovaleurs de masse volumique pour les flux LaxFriedrich (jaune) et HLL (noir)*

Chapitre 4

Analyse de la robustesse de la Méthode DGFEM pour les écoulements compressibles à faible nombre de Mach

Dans ce chapitre, nous montrons la capacité de la méthode proposée en DG, à simuler une large gamme d'écoulements compressibles allant des nombres de Mach très élevés aux nombres de Mach très faibles. La méthode DG proposée couplée à un schéma robuste en temps et un traitement adéquat des conditions de bord permet d'obtenir une technique robuste pouvant simuler des écoulements compressibles à faibles nombres de Mach avec des résultas efficaces. Nous présentons dans ce chapitre des exemples numériques classiques d'écoulements à faibles nombres de Mach pour montrer de la robustesse et la précision de la méthode à bas Mach.

Sommaire

4.1 Introduction 102

4.2 Résultats numériques 103

4.2.1 Ecoulement rotationnel autour d'un demi-cylindre 103

4.1 Introduction

En simulation numérique des écoulements compressibles il existe plusieurs obstacles à franchir pour les écoulements subsoniques à la limite de l'incompressible. Dans la simulation des écoulements à bas nombre de Mach, la difficulté rencontrée est le comportement singulier des schémas numériques, lorsqu'on tend vers la limite de l'incompressible. Lorsque l'on tend vers la limite de l'incompressible, le modèle compressible, échoue à donner la bonne solution. Le développement de diverses techniques pour contourner cette difficulté afin de rendre le code capable de simuler des écoulements compressibles à faible nombre de Mach existe dans la littérature [2,98]. Une de ces techniques s'intéresse au modèle incompressible qui est étendu aux applications de fluides faiblement compressibles. L'inconvénient principal de cette approche réside dans le fait que le modèle choisi ne contient pas les effets de la compressibilité qu'il faut rajouter. Une autre technique s'intéresse aux équations de conservation de la mécanique des fluides compressibles. Le modèle cette fois contient une physique beaucoup plus vaste tenant compte des phénomènes acoustiques. Le problème de la résolution réside dans la diversité des échelles physiques à prendre en compte et donc dans la précision des calculs [99–102]. Ces techniques sont plus répandues dans la communauté de ceux qui utilisent les méthodes de volumes finis avec des méthodes de correction de pression ou des méthodes de précondionnement du flux [3, 103–106].

Dans notre étude, les équations d'Euler ne sont pas modifiées. La combinaison de la méthode DG avec un schéma en temps complètement implicite d'ordre deux (*schéma implicite BDF2*), permet d'obtenir un schéma numérique robuste et efficace pour les écoulements compressibles, en particulier à faible nombre Mach. On utilise des tests numériques de cas classique à bas nombre Mach pour montrer la précision des solutions à l'ordre élevé ainsi que la robustesse du schéma.

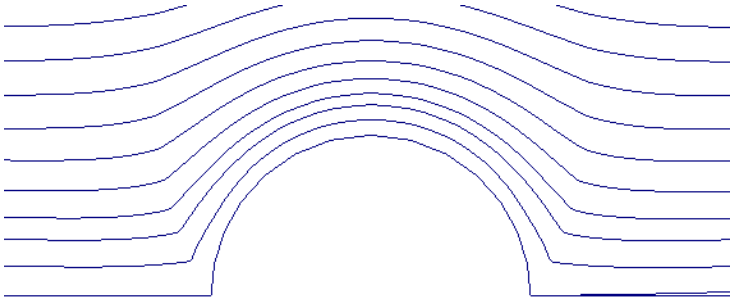
4.2 Résultats numériques

4.2.1 Ecoulement rotationnel autour d'un demi-cylindre

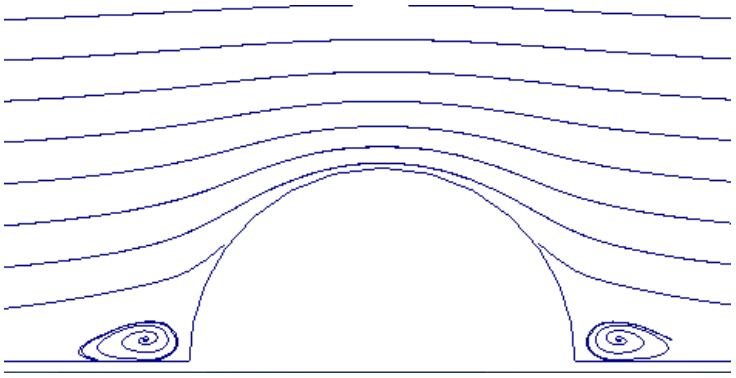
Dans cet exemple numérique nous considérons un écoulement non visqueux autour d'un demi-cylindre centré à l'origine et dont le diamètre est égal à l'unité. Le nombre de Mach à l'infini amont est en moyenne égal à 10^{-4} et les composantes de la vitesse sont $v_1 = \omega y$, $v_2 = 0$, avec ω, la vorticité. La solution analytique exacte est obtenue dans [1]. Cet écoulement est intéressant du fait des vortex ou des recirculations qu'on obtient dans les coins du demi-cylindre. Le domaine de calcul est rectangulaire de longueur 10 m et de largeur 5 m. Nous présentons, dans le cadre de cette étude, les résultats des lignes de courant au voisinage du demi-cylindre. Les résultats sont présentés en utilisant les schémas DG0, DG1 et DG2, sur des maillages contenant des quadrangles ou des triangles.

4.2.1.1 Comparaison de deux solutions en DG0 sur des maillages en triangles et quadrangles

Les figures 4.1a-b, montrent les solutions obtenues avec le schéma DG0 sur deux maillages contenant des triangles (4608 cellules) et des quadrangles (13056 cellules). On observe que malgré le nombre de degré de liberté élevé du maillage quadrangulaire, on arrive pas a capter les vortex attendus dans les coins du demi-cylindre. Cependant dans le cas des triangles en DG0, avec un nombre de degrés de liberté moindre (près du tiers du nombre des quadrangles), on arrive à capter les recirculations. On précise dans ce cas test, le résidu baisse de six ordres de grandeur et que le temps physique auquel on compare les solutions convergées est d'environ 0.61 secondes. A partir du schéma DG1, quelque soit le type d'éléments quadrangles ou triangles, les recirculations sont capturées.



(a) solutions sur DG0 sur un maillage de 13056 cellules en quadrangles



(b) solutions sur DG0 sur un maillage de 4608 cellules en triangles

FIGURE *4.1: Comparaison des lignes de courants en DG0 pour des maillages en triangles et quadrangles .*

4.2.1.2 Comparaison entre la solution calculée et la solution exacte

Nous comparons maintenant la solution exacte à celle obtenue par les calculs sur les maillages quadrangulaires pour les schémas DG1 et DG2. La figure 4.2 montre la comparaison des lignes de courant entre le calcul sur un maillage relativement grossier de 228 mailles quadranqulaires, et la solution exacte pour un écoulement incompressible [7]. Sur la figure 4.2 , les lignes de courant avec la solution calculée sont en haut et celles de la solution exacte pour l'écoulement incompressible sont représentées en bas. On voit que le schéma DG2, même avec un maillage relativement grossier, arrive à capter les caractéristiques de l'écoulement à bas nombre de Mach. Ceci révèle de la robustesse et de la précision du schéma proposé avec la capacité de donner des résultats satisfaisants à bas Mach même sans préconditionnement.

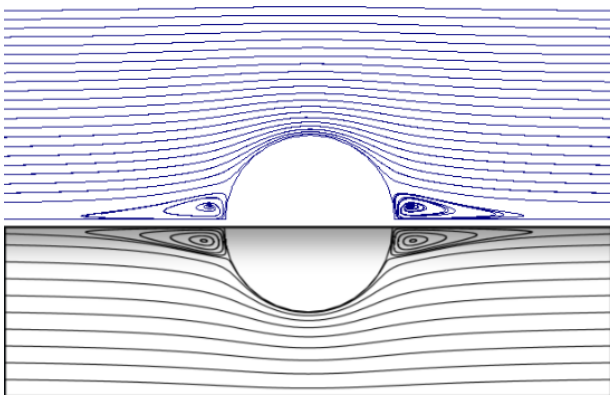
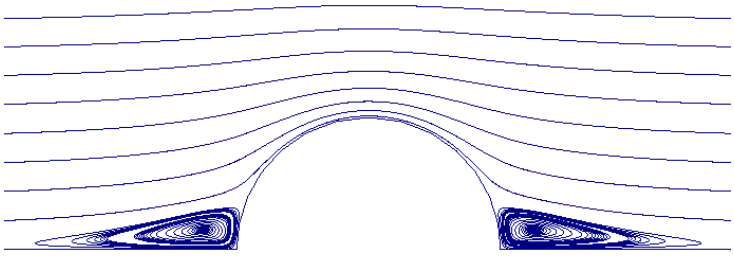


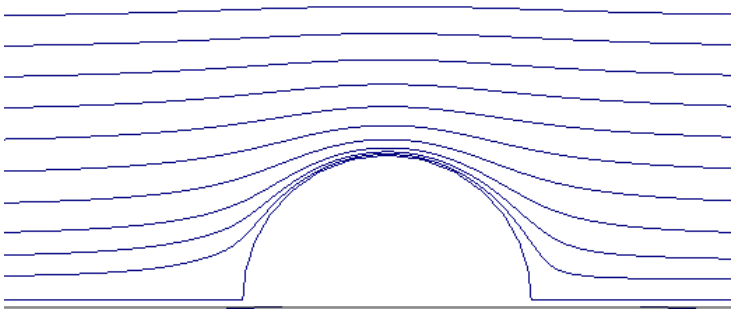
FIGURE *4.2: Comparaison des lignes de courants de la solution avec schéma DG2 (228 quadragles) et la solution exacte :*
***haut** : solution calculée avec le schéma DG2*
***bas** : solution exacte de Fraenkel [1]*

4.2.1.3 Comparaison d'une solution DG1 à celle d'un code Volumes Finis MUSCL d'ordre deux préconditionné bas Mach

Nous proposons cette fois de comparer nos résultats avec ceux obtenus avec un code Volumes Finis MUSCL d'ordre deux préconditionné pour les écoulements à bas nombre de Mach. Dans la figure 4.3, nous comparons un calcul DG1 avec 3264 cellules en quadrangles à celui du code Volumes Finis préconditionné contenant 10192 mailles en quandrangles [107]. Les résultats de la figure 4.3, montrent que la solution en DG1 capture les recirculations dans les coins du demi-cylindre ce qui n'est pas le cas du schéma Volumes Finis MUSCL d'ordre deux préconditionné bas Mach.



(a) solutions sur DG1 sur un maillage de 3264 cellules en quadrangles



(b) solutions sur VF1 sur un maillage de 10192 cellules en quadrangles

FIGURE *4.3: Comparaison des lignes de courants entre un calcul DG1 et un calcul VF (ordre deux) préconditionné à bas Mach quadrangles .*

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Le but de ce travail de recherche est de contribuer au développement de méthode précise d'ordre élevé en élément fini de Galerkin discontinu (DG) pour les écoulements compressibles pour une plage de nombre de Mach la plus large possible. Nous avons étudié différents aspects des caractéristiques de la méthode numérique DG.

Méthode de discrétisation DG : Nous avons implémenté une méthode de discrétisation de Galerkin discontinue en élément fini pour le système des équations d'Euler compressibles. Cette méthode satisfait à la fois aux propriétés de conservation locale et globale. Nous avons montré par un exemple numérique la performance de la méthode en donnant l'ordre de convergence optimal lorsque des polynômes de degré $p > 0$ sont utilisés. Pour éviter des oscillations numériques aux voisinages des chocs qui peuvent rendre la résolution instable pour les écoulements transsoniques et supersoniques, nous avons implémenté deux techniques de stabilisation de schéma DG à l'ordre élevé : méthodes de limiteur de pente et de viscosité artificielle.

Estimateur d'erreur et adaptation de maillage : Nous avons mis en oeuvre deux types d'estimateurs d'erreurs a posteriori dont on se sert comme critère pour l'adaptation de maillage. Nous avons comparé les performances de ces deux estimateurs sur différents cas tests. L'adaptation de maillage utilise des "hanging nodes" qui est une des facilité qu'offre la méthode élément fini. Nous avons montré sur des exemples numériques que le

raffinement adaptatif permet d'optimiser le maillage permettant un gain de temps considérable et de capturer les discontinuités en présence dans un écoulement. L'algorithme d'adaptation de maillages est automatisé permettant à un utilisateur de lancer un calcul sans se soucier du maillage de départ d'un cas test donné.

Analyse de la robustesse de la méthode DG proposée à bas nombre de Mach : Dans notre étude, nous avons implémenté des conditions aux bords efficaces ainsi que la méthode implicite en temps qui permet de résoudre des équations d'Euler compressibles à bas nombre de Mach dans la limite de l'incompressible. Nous avons montré que, sans modifier les équations de conservation et sans changement de variable, la méthode DG implémentée peut donner des résultats satisfaisants à bas nombre de Mach. La comparaison avec un code Volumes Finis d'ordre deux avec un schéma de préconditionnement à bas Mach, montre que notre méthode arrive à trouver les résultats de la solution exacte incompressible ce qui n'est pas le cas du code volume fini. Nous avons montré la précision et la qualité des solutions obtenues à bas Mach ce qui démontre de la robustesse et de précision de la méthode.

Perspectives et Futurs travaux : Dans le cadre de ce travail, nous avons plusieurs travaux en perspectives notamment la validation de la partie visqueuse des équations de Navier-Stokes. L'ajout des termes visqueux est déjà mis en oeuvre, il reste la validation par des cas test, avec éventuellement l'introduction de modèles de turbulence. Plusieurs questions restent à approfondir sur la méthode d'adaptation de maillage proposée. Une d'entre elles est la possibilité de rendre complètement l'adaptation de maillage indépendant du choix d'un nombre de raffinement quelconque. Il est possible de fixer une erreur minimale au dessus de laquelle, le maillage doit continuer à être raffiné. D'autres types d'estimateurs d'erreur seront étudiés notamment l'utilisation de l'adjoint pour estimer l'erreur permettant d'avoir un critère plus efficace pour tout type d'écoulement allant du subsonique au supersonique.

Pour une meilleure compréhension du comportement du modèle compressible à bas Mach, nous envisageons l'implémentation d'une méthode de préconditionnement pour la méthode DG, et de passer aux variables entropiques qui permettraient de résoudre tout type d'écoulement allant du compressible tout Mach à l'incompressible suivant la méthode introduite par Hughes et Pesch [108, 109].

Annexe A

Les équations d'Euler 2D

A.1 Le système des équations d'Euler

Le système des équations d'Euler en dimension 2 s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F_1(u)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(u)}{\partial y} = 0,$$

avec le vecteur conservatif $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho E)^T$. les flux F_1 et F_2 s'écrivent :

$$F_1 = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho H v_1 \end{bmatrix} \ , \ F_2 = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho H v_2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur vitesse $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ et la pression est donnée par : $p = (\gamma - 1)e$; e : énergie interne, $E = e + 0.5\mathbf{v}^2$, et H est l'enthalpie spécifique est donnée par :

$$H = E + \frac{p}{\rho} = e + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho},$$

En forme quasi-linéaire l'équation d'Euler devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} \tag{A.1}$$

Avec les matrices A_1 et A_2 définies par : $A_1 = \frac{\partial F_1(u)}{\partial u}$ et $A_2 = \frac{\partial F_2(u)}{\partial u}$ où :

$$A_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_1^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)\mathbf{v}^2 & (3-\gamma)v_1 & -(\gamma-1)v_2 & (\gamma-1) \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ v_1\left(\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathbf{v}^2 - H\right) & H - (\gamma-1)v_1^2 & (\gamma-1)v_1 v_2 & \gamma v_1 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

$$A_2(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ -v_2^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)\mathbf{v}^2 & -(\gamma-1)v_1 & (3-\gamma)v_2 & (\gamma-1) \\ v_2\left(\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathbf{v}^2 - H\right) & -(\gamma-1)v_1 v_2 & H - (\gamma-1)v_2^2 & \gamma v_2 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

A.2 Ecriture des termes de flux en fonction de $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$

Le système de vecteur conservatif s'écrit sous la forme : $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho E)$.
En réécrivant p en fonction des composantes de u on obtient : $p = p(u) = (\gamma-1)\left(u_4 - \frac{u_2^2+u_3^2}{2u_1}\right)$.
Les composantes de la fonction $\mathcal{F}$ sont exprimées en fonction de celles de u et cela nous donne :

$$\mathcal{F}(u) := \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2^2/u_1 + p(u) & u_2u_3/u_1 \\ u_2u_3/u_1 & u_3^2/u_1 + p(u) \\ u_2u_4/u_1 + pu_2/u_1 & u_3u_4/u_1 + pu_3/u_1 \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

Ce qui donne :

$$A_1(u) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_2^2/u_1^2 + p_1 & 2u_2/u_1 + p_2 & p_3 & p_4 \\ -u_2u_3/u_1^2 & u_3/u_1 & u_2/u_1 & 0 \\ -u_2(u_4+p)/u_1^2 + p_1u_2/u_1 & (u_4+p)/u_1 + p_2u_2/u_1 & p_3u_2/u_1 + p_3u_2/u_1 & u_2/u_1 + p_4u_2/u_1 \end{bmatrix},$$

$$A_2(u) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_2u_3/u_1^2 & u_3/u_1 & u_2/u_1 & 0 \\ -u_3^2/u_1^2 + p_1 & p_2 & 2u_3/u_1 + p_3 & p_4 \\ -u_3(u_4+p)/u_1^2 + p_1u_3/u_1 & p_2u_3/u_1 + p_2u_3/u_1 & (u_4+p)/u_1 + p_3u_3/u_1 & u_3/u_1 + p_4u_3/u_1 \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

avec : $p_i = \frac{\partial p(u)}{\partial u_i}$, $i = 1, ..., 4$.

Annexe B

Les types de flux numériques

Les numériques flux non-visqueux pour le problème discret sont évalués par des schémas de répartition de flux [67]. Ces schémas évaluent le flux convectif aux interfaces entre deux cellules voisines (discontinues en général), en résolvant le problème de Riemann (tube à choc). Pour réduire l'effort de calcul pour la solution exacte du problème de Riemann (schéma de Godunov), des solveurs approchés de Riemann ont été développés. Nous détaillons ici, les différents types de solveurs de Riemann utilisés à l'intérieur du domaine, aux interfaces des éléments.

B.1 Les flux numériques et conditions de bord

Nous avons implémentés trois types de flux numériques de types LaxFriedric sur les bords que nous notons ici : FluxTypeI, FluxTypeII et FluxTypeIII. On définit u^+ et u^- les traces intérieure et extérieure respectivement de la variable u. Soit : la moyenne de u est notée par : $\bar{u} = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$, λ_i, les valeurs propres de la matrice $A = A_1 n_1 + A_2 n_2$, et $B^+(\bar{u}, n)$ et $B^-(\bar{u}, n)$, désignant les matrices positive et négative respectives de la matrice Jacobienne $A(\bar{u}, n)$ (voir §2.2.2). i.e. :

$$B^{\pm}(\bar{u},n)=P\Lambda^{\pm}P^{-1},\qquad \Lambda^{\pm}=diag\left\{\lambda_i^{\pm},i=1,...;4\right\},\tag{B.1}$$

avec $\lambda^{+}=max\{\lambda,0\}$et $\lambda^{-}=min\{\lambda,0\}$et les colonnes de P sont les vecteurs issus des valeurs propres λ_i, $i=1,\ldots,4$.

- Le $FluxTypeI$ (LaxFriedrich) est donnée par :

$$H_{TypeI}\left(u^{+},u^{-},n\right)=\frac{1}{2}\left(F\left(u^{+}\right).n+F\left(u^{-}\right).n-\alpha\left(\bar{u}\right)\left(u^{-}-u^{+}\right)\right)\tag{B.2}$$

  où $\alpha(u)$ dénote la plus grande valeur propre en valeur absolue, i.e.

$$\alpha\left(\bar{u}\right)=\underset{w=\bar{u}}{max}\bar{\alpha}\left(w\right)\equiv\underset{w=\bar{u}}{max}\left\{\mid v_n\left(w\right)\mid+c\left(w\right)\right\}\tag{B.3}$$

  avec $v_n(u)=\mathbf{v}.n$ la vitesse normale et $c(u)=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ celle du son.
- Le $FluxTypeII$ est défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} H_{TypeII}\left(u^{+},u^{-},n\right)=B^{+}\left(\bar{u},n\right)\lambda_i B^{-}\left(\bar{u},n\right)u^{-} & si \quad \lambda_i>0\\ H_{TypeII}\left(u^{+},u^{-},n\right)=B^{+}\left(\bar{u},n\right)\lambda_i B^{-}\left(\bar{u},n\right)u^{+} & si \quad \lambda_i<0 \end{cases}\tag{B.4}$$

- Le $FluxTypeIII$ est donné par :

$$H_{TypeIII}\left(u^{+},u^{-},n\right)=F_1\left(u_s\right)n_1+F_2\left(u_s\right)n_2\tag{B.5}$$

  avec :

$$\begin{cases} u_s=B^{+}\left(\bar{u},n\right)B^{-}\left(\bar{u},n\right)u^{-}, & si \quad \lambda_i>\epsilon\\ u_s=B^{+}\left(\bar{u},n\right)B^{-}\left(\bar{u},n\right)u^{+}, & si \quad \lambda_i<-\epsilon\\ u_s=B^{+}\left(\bar{u},n\right)B^{-}\left(\bar{u},n\right)\left(qu^{-}+(1-q)u^{+}\right), & ailleurs \end{cases}\tag{B.6}$$

B.2 Les flux numériques utilisés sur les interfaces intérieures

- **Flux numérique de Roe** :

$$H_{Roe}\left(u^{+},u^{-},n\right)=\frac{1}{2}\left(F\left(u^{+}\right).n+F\left(u^{-}\right).n-\mid\tilde{A}\mid\triangle u\right) \tag{B.7}$$

avec $\triangle u=u^{-}-u^{+}$. Dans l'équation (B.7), le terme $\mid\tilde{A}\mid\triangle u$ est considéré comme un terme de dissipation. La matrice $\tilde{A}$ est appelée la matrice de dissipation de Roe, et est égale à la jacobienne de $\frac{\partial F}{\partial u}$, où les variables u sont remplacées par les variables moyennes de Roe [67].

- **le Flux numérique Vijayasundaram** :

$$H_{Vija}\left(u^{+},u^{-},n\right)=B^{+}\left(\bar{u},n\right)u^{+}+B^{-}\left(\bar{u},n\right)u^{-} \tag{B.8}$$

Nous avons aussi implémenté d'autres flux numériques de types *Roe*, que nous notons RoelikeFluxI, RoelikeFluxII, RoelikeFluxIII. Posons :

$$\mathcal{F}_{1}(u^{+},u^{-},n)=\frac{1}{2}(F(u^{+}).n+F(u^{-}).n), \tag{B.9}$$

$$\mathcal{F}_{2}(u^{+},u^{-},n_{s})=F(u^{+}).n-F(u^{-}).n, \tag{B.10}$$

$$\mathcal{B}(\overline{u},n_{s})=B^{+}\left(\bar{u},n\right).\psi_{i}.B^{-}\left(\bar{u},n\right), \tag{B.11}$$

RoelikeFluxI, RoelikeFluxII, RoelikeFluxIII définis comme suit :

- **le Flux numérique RoelikeFluxI** :

$$H_{RI}\left(u^{+},u^{-},n\right)=\mathcal{B}(\overline{u},n).\mathcal{F}_{2}(u^{+},u^{-},n)+\mathcal{F}_{1}(u^{+},u^{-},n) \tag{B.12}$$

Pour le flux RoelikeFluxI les ψ_i sont definis comme :

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & si \quad \lambda_i > 0; \\ -1 & si \quad \lambda_i < 0; \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- **le Flux numérique RoelikeFluxII** :

$$H_{RII}\left(u^+, u^-, n\right) = \mathcal{B}(\overline{u}, n).u_s + \mathcal{F}_1(u^+, u^-, n) \tag{B.13}$$

où : $u_s = u^+ - u^-$.
Pour le flux numérique RoelikeFluxII les ψ_i son définis de la manière suivante :

$$\psi_i = \mid \lambda_i \mid \tag{B.14}$$

- **le Flux numérique RoelikeFluxIII** :

$$H_{RIII}\left(u^+, u^-, n\right) = H_{TypeIII}\left(u^+, u^-, n\right). \tag{B.15}$$

Annexe C

Approximation de la matrice Jacobienne

C.1 Dérivées des termes de la discrétisation spatiale

La forme non-linéaire (eq. 2.35) peut être écrite sous la forme suivante :

$$a(u,v) = \sum_{K \in T_h} \left\{ - \int_K F\left(u_h\right) . \nabla v_h dx + \int_{\partial K \setminus \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds \right\} + a_\Gamma\left(u,v\right) = 0 \quad \text{(C.1)}$$

avec, le terme $a_\Gamma\left(u,v\right)$ défini en (2.29) et inclut les conditions de bord,

$$a_\Gamma\left(u,v\right) = \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K \cap \Gamma} H\left(u_h^+, u_h^-, n\right) v_h^+ ds,$$

avec $u^-|_\Gamma$ la condition de bord appropriée comme décrite dans la section (2.3). Les flux numériques $H\left(u_h^+, u_h^-, n\right)$ sont différentiables respectivement par rapport à u^+ et u^-. Généralement $a_\Gamma\left(u,v\right)$ n'est pas différentiable par rapport à u. On utilise alors des approximations adéquates qu'on peut écrire sous la forme :

$$a'\left[w\right]\left(u,v\right)=\sum_{K\in T_h}\Bigg\{-\int_K\left(F'\left(w\right)u\right).\nabla v dx+\int_{\partial K\setminus\Gamma}\Bigg(\tilde{H}'_{u^+}\left(w^+,w^-,n\right)u^+ + \tilde{H}'_{u^-}\left(w^+,w^-,n\right)u^-\Bigg)v ds\Bigg\}+a'_\Gamma\left[w\right]\left(u,v\right), \tag{C.2}$$

où les termes $w\rightarrow\tilde{H}'_{u^+}\left(w^+,w^-,n\right)$ et $w\rightarrow\tilde{H}'_{u^-}\left(w^+,w^-,n\right)$ sont des approximations aux dérivées de H respectivement à u^+ et à u^-. $a'_\Gamma\left[w\right]\left(u,v\right)$ constitue l'approximation aux dérivées de $u\rightarrow a_\Gamma\left(u,v\right)$

C.2 Matrice Jacobienne des termes de bord

En utilisant les dérivées des approximations $\tilde{H}_{u^+}$ et $\tilde{H}_{u^-}$ sur les arrêtes de bord, comme sur les faces internes, les termes de droite de l'équation (C.2) sont donnés par :

- Sur le Entrée supersonique et subsonique : $\Gamma_e=\Gamma_{e,sup}\cup\Gamma_{e,sub}$:

$$a'_{\Gamma_i}\left[w\right]\left(u,v\right)=\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_i}H'_{u^+}\left(w^+,g,n\right)u^+v^+ds. \tag{C.3}$$

- Sortie supersonique : $\Gamma_{s,sup}$:

$$a'_{\Gamma s,sup}\left[w\right]\left(u,v\right)=\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_i}\left(H'_{u^+}\left(w^+,w^+,n\right)+H'_{u^-}\left(w^+,w^+,n\right)\right)u^+v^+ds. \tag{C.4}$$

- Sortie subsonique : $\Gamma_{s,sub}$:

$$a'_{\Gamma s,sub}\left[w\right]\left(u,v\right)=\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K\cap\Gamma_i}\Bigg(H'_{u^+}\left(w^+,u^-_{s,sub}(w^+),n\right) + H'_{u^-}\left(w^+,u^-_{s,sub}(w^+),n\right)u^{-'}_{s,sub}\left(w^+\right)\Bigg)u^+v^+ds. \tag{C.5}$$

avec $u^-_{s,sub}(u)$ défini à l'équation (2.32). En écrivant $u^-_{s,sub}(u)$, en variables conservatives $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ on a :

$$u^-_{s,sub}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \frac{p_{s,sub}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\left(u_2^2 + u_3^2\right)/u_1 \end{pmatrix}, \tag{C.6}$$

Par conséquent :

$$u^{-'}_{s,sub}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2^2+u_3^2}{2u_1^2} & \frac{u_2}{u_1} & \frac{u_3}{u_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 & v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

- Sur le bord solide : Γ_{refl} :

$$a'_{\Gamma refl}[w](u,v) = \sum_{K\in T_h} \int_{\partial K\cap\Gamma_{refl}} \Big(H'_{u^+}\left(w^+, u^-_{refl}(w^+), n\right) + H'_{u^-}\left(w^+, u^-_{refl}(w^+), n\right) u^{-'}_{refl}(w^+) \Big) u^+ v^+ ds. \tag{C.8}$$

avec $u^-_{refl}(u)$ et $u^{-'}_{refl}(u)$ définis dans l'équation (2.33)

C.3 Matrice Jacobienne des flux numériques

Généralement, Les flux numériques ne sont pas facilement différentiables par rapport à u^+ et u^-. Par conséquent, dans la plupart des cas on utilise des approximations.

- **Matrice jacobienne du flux de Roe** :
  En se référant à l'équation (B.7), la jacobienne du flux de Roe est donné par :

$$\begin{aligned} H_{u^+} &= \frac{\partial H}{\partial u^+} = \frac{1}{2}\left(A^+ - \frac{\partial|\tilde{A}|}{\partial u^+}\triangle u+ \mid \tilde{A}\mid\right), \\ H_{u^-} &= \frac{\partial H}{\partial u^-} = \frac{1}{2}\left(A^- - \frac{\partial|\tilde{A}|}{\partial u^-}\triangle u- \mid \tilde{A}\mid\right), \end{aligned} \tag{C.9}$$

où A^+ et A^- sont les matrices jacobiennes des traces intérieure u^+ et extérieure u^- sur une face ∂K.

$$A^{\pm} = A_1\left(u^{\pm}\right) n_1 + A_2\left(u^{\pm}\right) n_2 \tag{C.10}$$

Les dérivées $\frac{\partial|\tilde{A}|}{\partial u^+}$ et $\frac{\partial|\tilde{A}|}{\partial u^-}$ sont les dérivées par approximation de la matrices de diffusion $|\tilde{A}|$ par rapport aux traces.

- **Matrice jacobienne du flux de Vijayasundaram** :

$$H_{u^+} = A^+(\hat{u}, n) + \frac{\partial A^+(\hat{u}, n)}{\partial u^+} u^+ + \frac{\partial A^-(\hat{u}, n)}{\partial u^+} u^- \tag{C.11}$$

La partie H_{u^-} s'obtient par le même procédé.

- **Matrice jacobienne du flux de FluxTypeI (LaxFriedrich)** :
A partir de l'équation (B.2) on a :

$$\begin{array}{l} H_{u^+} = \frac{\partial H}{\partial u^+} = \frac{1}{2}\left(A^+ + \alpha I\right), \\ H_{u^-} = \frac{\partial H}{\partial u^-} = \frac{1}{2}\left(A^- - \alpha I\right), \end{array} \tag{C.12}$$

Annexe D

Les éléments géométriques (FEM), avec les fonctions de transformation

D.1 Définitions sur la transformation géométrique en éléments finis

Les éléments d'un maillage peuvent avoir des géométries très différentes les uns des autres, même s'ils sont tous de même type : ils peuvent posséder des dimensions différentes, des orientations différentes, des angles différents... L'idée est donc de se ramener à une géométrie commune à l'aide de transformations géométriques, et de calculer les intégrales sur cette géométrie commune à l'aide d'un changement de variable.

Soit $K \in T_h$ un élement de la triangulation T_h tel que : $K = \sigma_K(\hat{K})$, où σ_K est la transformation bijective régulière de l'élément de référence $\hat{K}$ en l'élément K (voir fig. 2.1).
Pour une fonction $\phi : K \to \mathbb{R}$, on défini $\hat{\phi} : \hat{K} \to \mathbb{R}$ pour satisfaire :

$$\hat{\phi} = \phi(\sigma(\hat{x})), \qquad \hat{x} \in \hat{K}. \tag{D.1}$$

Les différentiations par rapport aux variables x_j et $\hat{x}_j$ dans l'espace réel et de référence sont respectivement : $\partial_j = \partial_{x_j}$ et $\hat{\partial}_j = \partial_{\hat{x}_j}$. De façon analogue, nous définissons ∇ et $\hat{\nabla}$ comme les vecteurs gradients des variables x et $\hat{x}$ respectivement. L'integration des fonctions sur l'élément $K = \sigma\left(\hat{K}\right)$ dans l'espace réel est obtenue par la transformation telle que :

$$\int_K \varphi(x)\, dx = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x}) \mid detJ(\hat{x}) \mid d\hat{x}$$

où J est la matrice jacobienne de la transformation σ, i.e. $J_{ij}(\hat{x}) := \hat{\partial}_j \sigma_i(\hat{x})$.

ce qui résulte en :

$$\mid K \mid = \int_K \mid detJ(\hat{x}) \mid d\hat{x},$$

$\mid K \mid$ est l'aire de l'élément K. Les dérivées $\hat{\partial}_{j\hat{\varphi}}$, $\partial_{j\varphi}$ sont reliées par :

$$\hat{\partial}_{j\hat{\varphi}}(\hat{x}) = \partial_{j\varphi}(\sigma(\hat{x})) = \partial_{i\varphi}(\sigma(\hat{x}))\, \hat{\partial}_{j\sigma i}(\hat{x}) = \partial_i \varphi(\sigma(\hat{x}))\, J_{ij}(\hat{x}).$$

Ainsi, $\nabla\varphi(x)$ est donné par cette transformation covariante :

$$\nabla\varphi(x) = \left(J^T\right)^{-1}(\hat{x})\, \hat{\nabla}\hat{\varphi}(\hat{x})$$

D.2 Géométrie de référence

Chaque type d'élément est ramené à élément de référence de ce type. La Figure (D.1) représente les géométries des éléments de référence avec les degrés de polynômes 1, 2 pour les triangles et quadrangles en 2D.

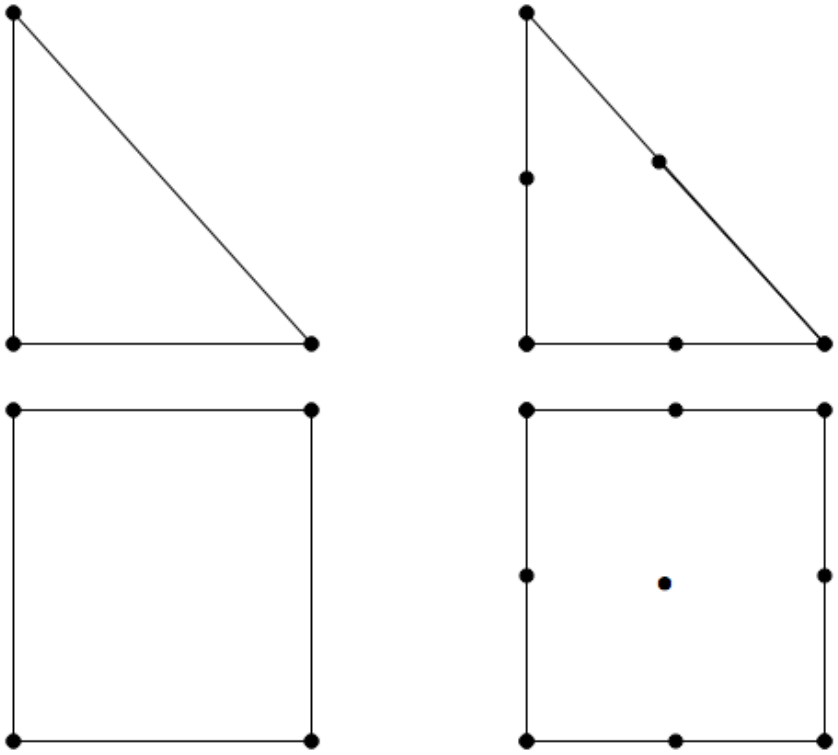


FIGURE *D.1: Les géométries de référence de quelques éléments 2D triangles et quadrangles (DG1, DG2)*

Bibliographie

Bibliographie

[1] L. Fraenkel. On corner eddies in plane inviscid shear flow. *J. Fluid Mech.*, 11 :400–406, 1961.

[2] Turkel, R. Radespiel, and N. Kroll. Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics. *Comput. & Fluids*, 26(6) :613–634, 1997.

[3] Hervé Guillard and Cécile Viozat. On the behavior of upwind schemes in the low mach number limit, 1997.

[4] H. Bijl and P. Wesseling. A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates. *J. Comput. Phys*, 141(2) :153–173, 1998.

[5] G. Deliége D. Vigneron and J. A. Essers. Low mach number local preconditioning for unsteady viscous finite volumes simulations on 3d unstructured grids. *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference 2006*, 228(11) :1–14, 2006.

[6] G. VOLPE. Performance of compressible flow codes at low mach numbers. AIAA Fluid dynamics, plasma dynamics, and laser conference No22, Honolulu HI , USA, Jun 1993.

[7] M. Feistauer and V. Kuçera. On a robust discontinuous galerkin technique for the solution of compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 224(1) :208 – 221, 2007.

[8] Hong Luo, Joseph D. Baum, and Rainald Lhöner. A discontinuous galerkin method based on a taylor basis for the compressible flows on arbitrary grids. *Journal of Computational Physics*, 227(20) :8875 – 8893, 2008.

[9] Herman Deconinck Vincent Couaillier Harmen van der Ven Norbert Kroll, Heribert Bieler and Kaare Sørensen. Adigma – a european initiative on the development

of adaptive higher-order variational methods for aerospace applications : Results of a collaborative research project funded by the european union, 2006–2009. Berlin : Springer, 2010.

[10] Alfio. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations (book) Publisher*. Springer-Verlag, 1994.

[11] H. Versteeg and W. Malalasekera. An introduction to computational fluid dynamics : The finite volume method. 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.

[12] Sanjiva K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1) :16 – 42, 1992.

[13] D.W. Zingg, S. De Rango, M. Nemec, and T.H. Pulliam. Comparison of several spatial discretizations for the navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 160(2) :683 – 704, 2000.

[14] Miguel R Visbal and Datta V Gaitonde. On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes. *Journal of Computational Physics*, 181(1) :155 – 185, 2002.

[15] T. J. Barth. Recent developments in high-order k-exact reconstruction on unstructured meshes, 1993.

[16] Z.J. Wang. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. basic formulation : Basic formulation. *Journal of Computational Physics*, 178(1) :210 – 251, 2002.

[17] B. Van Leer. Flux-vector splitting for the euler equations, 1981. Technical Report 81-11.

[18] P.L Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2) :357 – 372, 1981.

[19] B. Van Leer. Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the euler equations. In B. E. Engquist, S. Osher, and R. C. J. Somerville, editors, *Large-Scale Computations in Fluid Mechanics*, pages 327–336, 1985.

[20] P L Roe. Characteristic-based schemes for the euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18(1) :337–365, 1986.

[21] P L Roe R. Newsome B. Van Leer, James L. Thomas. A comparison of numerical flux formulas for the euler and navier-stokes equations, 1987.

[22] W.Kyle Anderson, Russ D. Rausch, and Daryl L. Bonhaus. Implicit/multigrid algorithms for incompressible turbulent flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 128(2) :391 – 408, 1996.

[23] Niles A. Pierce and Michael B. Giles. Preconditioned multigrid methods for compressible flow calculations on stretched meshes. *Journal of Computational Physics*, 136(2) :425 – 445, 1997.

[24] D.J. Mavriplis. Multigrid strategies for viscous flow solvers on anisotropic unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 145(1) :141 – 165, 1998.

[25] Dimitri J. Mavriplis. Large-scale parallel viscous flow computations using an unstructured multigrid algorithm. In D. Keyes, J. Periaux, A. Ecer, N. Satofuka, and P. Fox, editors, *Parallel Computational Fluid Dynamics 1999*, pages 57 – 72. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[26] C. W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock- capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77 :439–471, 1988.

[27] I. Christov and B. Popov. New non-oscillatory central schemes on unstructured triangulations for hyperbolic systems of conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 227(11) :5736–5757, 2008.

[28] T. Zhou, Y. Li, and C.-W. Shu. Numerical comparison of weno finite volume and runge-kutta discontinuous galerkin methods. *SIAM J. Sci. Comput*, 16 :145–171, 2001.

[29] C.-W. Shu J. Qiu. Hermite weno schemes and their application as limiters for runge-kutta discontinuous galerkin method : one dimensional case. *J. Comput. Phys. ()*, 193 :115–135, 2003.

[30] David W. Levy, Thomas Zickuhr, John Vassberg, Shreekant Agrawal, Richard A. Wahls, Shahyar Pirzadeh, and Michael J. Hemsch. Data summary from the first aiaa computational fluid dynamics drag prediction workshop. *Journal of Aircraft*, 40(5) :875–882, 2003.

[31] Richard A. Wahls Joseph H. Morrison Olaf Broder-sen Mark Rakowitz Edward N. Tinoco Kelly R. Laflin, John C. Vassberg and Jean-Luc Godard. Summary of data from the second aiaa cfd drag prediction workshop, 2004.

[32] D. S. Kamenetskii V. Venkatakrishnan, S. R. Allmaras and F. T. Johnson. Higher order schemes for the compressible navier-stokes equations, 2003.

[33] B.A. Szabo I. Babuska and I. N. Katz. The p-version of the finite element method. siam journal on numerical analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(3) :515–545, 1981.

[34] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 131(2) :267 – 279, 1997.

[35] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. SIAM, 1977.

[36] A. Quarteroni C. Canuto, M. Y. Hussaini and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.

[37] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equations, 1973.

[38] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C. W. Shu. The development of discontinuous galerkin methods., 2000.

[39] Pierre-Arnaud Raviart P. Lesaint. On a finite element method for solving the neutron transport equation, 1974.

[40] C. Johnson and J. Pitkaranta. An analysis of the discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. Comp.*, 46 :1–26, 1986.

[41] G. R. Richter. An optimal-order error estimate for the discontinuous galerkin method. *Math. Comp.*, 50 :75–88, 1988.

[42] B. Cockburn and C. W. Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for scalar conservation laws ii : General framework. *Math. Comp.*, 52 :411–435, 1989.

[43] B. Cockburn and C. W. Shu. Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. *J. of Sci. Comput.*, 16(3) :173–261, September 2001.

[44] S. R. Allmaras. A coupled euler/navier-stokes algorithm for 2d unsteady transonic shock/boundary-layer interaction, 1989.

[45] S. R. Allmaras and M. B. Giles. A second-order flux split scheme for the unsteady 2-d euler equations on arbitrary meshes. AIAA 87, 1987.

[46] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. iv. a new approach to numerical convection. *J. Comput. Phys.*, 23 :276–299, 1977.

[47] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 :742–760, 1982.

[48] M. Wheeler. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 :152–161, 1978.

[49] C. E. Baumann. An hp-adaptive discontinuous finite element method for computational fluid dynamics, December 1997.

[50] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discountinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier-stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 131 :267–279, 1997.

[51] B. Cockburn and C. W. Shu. The local discontinuous galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6) :2440–2463, December 1998.

[52] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra, and A. Russo. Discontinuous galerkin approximations for elliptic problems. *Numer. Methods for Partial Differential Eqns*, 16(3) :65–378, 2000.

[53] F. Bassi and S. Rebay. Gmres discontinuous galerkin solution of the compressible navier-stokes equations, 2000.

[54] F. Bassi and S. Rebay. An implicit high-order discontinuous galerkin method for the steady state compressible navier-stokes equations, 1998.

[55] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontin- uous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.

[56] J. Dompierre P. Labbe D. Pelletier J.-Y. Trepanier R. Camarero J. V. Lassaline L. M. Manzano X. D. Zhang, M.-G. Vallet and D. W. Zingg. Mesh adaptation using different error indicators for the euler equations. AIAA Paper 2001-2549, 2001.

[57] P. Houston and E. Süli. Error estimation and adaptive discretization methods in computational fluid dynamics. In T. Barth, and H. Deconinck, editors, Error Estimation and Adaptive Discretization Methods in Computational Fluid Dynamics, pages 269–344. Springer-Verlag, Heidelberg, Lecture Notes in Computational Science and Engineering Vol 25, 2002.

[58] R. Becker and D. Trujillo. Concepts of the finite element library concha. Tenth International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics, Monogr. Semin. Mat. Garcia Galdeano, Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2011.

[59] Rutherford Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics.* New York : Dover Publications, Inc., 1962.

[60] Malvern LE. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Englewood Cliffs, 1969.

[61] Jan S Hesthaven and Tim Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods : algorithms, analysis, and applications.* Springer, 2008.

[62] Raf Hartmann. *Adaptive Finite Element Methods for the Compressible Euler Equations.* PhD thesis, University of Heidelberg, 2002.

[63] Bernardo Cockburn, Suchung Hou, and Chi-Wang Shu. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. the multidimensional case. *J-MATH-COMPUT*, 54(190) :545–581, April 1990.

[64] B. Cockburn and C.-W. Shu. The runge-kutta discontinuous galerkin finite element method for conservation laws v : Multidimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 141 :199–224, 1998.

[65] Christoph Schwab Paul Houston and Endre Suli. Stabilised hp-finite element methods for first order hyperbolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(5) :1618–1643, 2000.

[66] D. Kröner. *Numerical Schemes for Conservation Laws.* Wiley-Teubner, 1997.

[67] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* Springer-Verlag, 1997.

[68] S. Hou B. Cockburn and C.-W. Shu. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws iv : The multidimensional case. *Math. Comp.*, 54 :545–581, 1990.

[69] B. Cockburn and C. W. Shu. The runge-kutta local projection p1-discontinuous galerkin method for scalar conservation laws. *RAIRO Model Math. Anal. Numer.*, 25 :337–361, 1991.

[70] Sigal Gottlieb. On high-order strong stability preserving runge-kutta and multi step time discretizations. *Journal of Scientific Computing*, 25(1) :105 – 128, 2005.

[71] A. Jameson. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 2 : Artificial diffusion and discrete shock structure. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 5 :1–38, 1995.

[72] T. J. R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Iv a discontinuity capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 58 :329–336, 1986.

[73] T. J. R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for compu- tational fluid dynamics : Iii the generalized streamline operator for mul- tidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 58 :305–328, 1986.

[74] H.C. Yee, G.H. Klopfer, and J.-L. Montagné. High-resolution shock-capturing schemes for inviscid and viscous hypersonic flows. *Journal of Computational Physics*, 88(1) :31 – 61, 1990.

[75] A. Jameson. Solutionoftheeulerequationsfortwo-dimensionaltransonic flow by a multigrid method. *Applied Mathematics and Computation*, 13 :327–356, 1983.

[76] S.Tu and S.Aliabadi. A slope limiting procedure in discontinuous galerkin finite element method for gasdynamics applications. *Int. J. Numer. Anal. Model*, 2 :63–178, 2005.

[77] P.-O. Persson and J Peraire. Sub-cell shock capturing for discontinuous galerkin methods. AIAA Paper 2006-112, 2006.

[78] Garrett E. Barter and David L. Darmofal. Shock capturing with pde-based artificial viscosity for dgfem : Part i. formulation. *Journal of Computational Physics*, 229(5) :1810 – 1827, 2010.

[79] P. Jawahar and H. Kamath. A high-resolution procedure for euler and navier-stokes computations on unstructured grids. *J. Comput. Phys.*, 164 :165–203, 2000.

[80] N. T. Frink. Assessment of an unstructured grid method for predicting 3d turbulent viscous flow. AIAA paper 96-0292.

[81] P. Houston, E. Süli, and C. Schwab. Stabilized hp-finite element methods for hyperbolic problems,. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(6) :1618–1643, 2001.

[82] B. Cockburn. A simple introduction to error estimation for nonlinear hyperbolic conservation laws. In Berlin Springer, editor, *in : Proceedings of the 1998 EPSRC Summer School in Numerical Analysis, SSCM, Graduate Students Guide for Numerical Analysis*, volume vol. 26, page 146, 1999.

[83] T. Barth M. Larson. A posteriori error estimation for adaptive discontinuous galerkin approximation of hyperbolic systems. In Berlin Springer, editor, *Proceedings of the International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications in : B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Shu (Eds.)*, 2000.

[84] Tie Zhang and Nan Feng. A posteriori error analysis of the discontinuous finite element methods for first order hyperbolic problems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(5) :1752 – 1764, 2011.

[85] P. R. M. Lyra and K. Morgan. A review and comparative study of upwing biased schemes for compressible flow computation. iii : Multidimensional extension on unstructured grids. *Arch. Comput. Methods Eng*, 9(3) :207–256, 2002.

[86] K.S. Bey and J.T. Oden. hp-version discontinuous galerkin method for hyperbolic conservation laws. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 133 :259–286, 1996.

[87] R. Biswas, K. Devine, and J.E. Flaherty. Parallel adaptive finite element methods for conservation laws. *Appl. Numer. Math.*, 14 :255–284, 1994.

[88] E. Süli. A posteriori error analysis and adaptivity for finite element approximations of hyperbolic problems, springer, berlin. *in : D. Kroner, M. Ohlberger, C. Rhode (Eds.), An Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws, Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 5 :123–194, 1999.

[89] R. Hartmann and P. Houston. Adaptive discontinuous galerkin finite element methods for the compressible euler equations. *J. Comput. Phys.*, 183(2) :508–532, 2002.

[90] R. Becker. The gendarme algorithm for adaptive mesh refinement. Ninth International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics, volume 33 of Monogr. Semin. Mat. Garcia Galdeano, pages 343, 348. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2006.

[91] Feistauer M. Dolejsi, V. and Schwab C. On some aspects of the discontinuous galerkin finite element method for conservation laws. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61(3) :333 – 346, 2003.

[92] L. Krivodonova, J. Xin, J.-F. Remacle, N. Chevaugeon, and J.E. Flaherty. Shock detection and limiting with discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 48(3) :323 – 338, 2004.

[93] Adjerid S., Devine K. D., Flaherty J. E., and Krivodonova L. A posteriori error estimation for discontinuous galerkin solutions of hyperbolic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, 191 :1097–1112, 2002.

[94] Paul Houston and Endre Sûli. A note on the design of hp-adaptive finite element methods for elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :229 – 243, 2005.

[95] Roland Becker, Kossivi Gokpi, Eric Schall, and David Trujillo. Comparison of two types of a posteriori error estimators on mesh adaptation in discontinuous galerkin finite elements methods. 4th European Conference for Aerospace Sciences, St-Petesburg Russia, 2011.

[96] Roland Becker, Kossivi Gokpi, Eric Schall, and David Trujillo. A posteriori error estimators for grid adaptation with galerkin discontinuous finite element method. In *8th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Pointe Aux Piments, Mauritius*, 2011.

[97] D. Kuzmin and M. Möller. *Algebraic Flux Correction II. Compressible Euler Equations.* In : D. Kuzmin, R. Löhner and S. Turek (eds.) Flux-Corrected Transport : Principles, Algorithms, and Applications. 207-250, 2005.

[98] E. Turkel. Preconditioning techniques in computational fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31 :385–416, 1999.

[99] R. Klein. Semi-implicit extension of a godunov-type scheme based on low mach number asymptotics 1 : one-dimensional flow. *J. Comput. Phys.*, 121 :213–237, 1995.

[100] A. Meister and J. Struckmeier. *Hyperbolic Partial Differential Equations, Theory, Numerics and Applications.* Vieweg, 2002.

[101] A. Meister. Viscous flow fields at all speeds : analysis and numerical simulation. *J. Appl. Math. Phys.*, 54 :1010–1049, 2003.

[102] S. Roller, C.-D. Munz, K.J. Geratz, and R. Klein. The multiple pressure variables method for weakly compressible fluids. *Z. Angew. Math. Mech.*, 77 :481–484, 1997.

[103] J.H. Park and C.-D. Munz. Multiple pressure variables methods for fluid flow at all mach numbers. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 49 :905–931, 2005.

[104] P. Wesseling. Principles of computational fluid dynamics. Springer, Berlin, 2001.

[105] [27] P. Wesseling and D.R. van der Heul. Uniformly effective numerical methods for hyperbolic systems. *Computing*, 66 :249–267, 2001.

[106] D.R. van der Heul, C. Vuik, and P. Wesseling. A conservative pressure-correction method for flow at all speeds. *Comput. Fluids*, 32 :1113–1132, 2003.

[107] ONERA code elsA. http ://www.onera.fr/synindex/elsa.html.

[108] L. Pesch and J.J.W. van der Vegt. A discontinuous galerkin finite element discretization of the euler equations for compressible and incompressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 227 :5426–5446, 2008.

[109] Guillermo Hauke and Thomas J.R. Hughes. A comparative study of different sets of variables for solving compressible and incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engr.*, 153 :1–44, 1998.