
THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR D'AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES DE LA MATIÈRE

Mention : ASTROPHYSIQUE ET COSMOLOGIE

Présentée par

Clément SURVILLE

**MORPHOLOGIE ET ÉVOLUTION DES
TOURBILLONS DE ROSSBY
BIDIMENSIONNELS DANS LES DISQUES
PROTOPLANÉTAIRES**

Directeur de thèse : **M. Pierre BARGE**

Soutenue le 11 décembre 2013

JURY

M. Thierry Lehner	LUTH, Observatoire de Paris	Rapporteur
M. Sébastien Charnoz	AIM CEA, Université Paris Diderot	Rapporteur
M. Jan-Bert Flor	LEGI, CNRS	Examineur
M. Hervé Guillard	INRIA Sophia-Antipolis	Examineur
Mme. Véronique Buat	LAM, Aix Marseille Université	Président du jury
M. Pierre Barge	LAM, Aix Marseille Université	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été un véritable parcours initiatique, tant sur le point scientifique que personnel. La confrontation de l'idée que l'on s'en fait à l'issue du Master avec la réalité, qui est parfois plus dure que prévue, est un élément de construction personnelle formidable.

C'est pourquoi je remercie de tout coeur Pierre, avec qui le travail a pris des chemins parfois inattendus. Mais il a toujours su voir en moi un potentiel scientifique envers lequel j'ai parfois douté. Sa confiance m'a permis de me découvrir dans les domaines numériques en particulier, mais aussi de développer mon sens physique. Car si le sujet de recherche dans lequel nous nous sommes lancés était ambitieux, et parfois difficile, son expérience astrophysique m'a souvent aidé à venir à bout des difficultés. Enfin, il m'a soutenu dans de nombreuses situations : le monitorat, l'obtention d'un post-doc avec Hubert Klahr, les démarches auprès de l'Université afin de terminer mes travaux. Notre rencontre a beaucoup contribué à ma nouvelle vie de jeune chercheur et j'espère que nous pourrions continuer à réaliser des projets en commun.

La collaboration qu'il a entreprise avec Patrice Le Gal, Stéphane Le Dizès et Michael Le Bars de l'IRPHE a été l'occasion d'échanges constructifs et parfois décisifs dans le domaine de l'hydrodynamique. Je remercie chaleureusement ces derniers pour cela, et je leur dois mon goût prononcé pour la mécanique des fluides. Je remercie par ailleurs mon oncle Michel Quintard, avec qui j'ai aussi eu des discussions fluides constructives, et dont le soutien et les conseils m'ont beaucoup aidé.

Je remercie globalement les membres du LAM, où j'ai passé trois années passionnantes, et créé des liens particuliers avec les thésards, Julien, Élodie, Johan, Mathilde, Samuel et tous les autres. Que les membres de l'équipe informatique reçoivent également mes remerciements, pour leur aide avec les machines et les discussions de "geek" que j'apprécie toujours. Je remercie aussi particulièrement Philippe Amram, Annie Zavagno et Mossadek Talby pour leur soutien et la confiance qu'ils m'ont témoigné.

Ensuite, je remercie Jean-Marc Huré et Franck Hersant qui, depuis ma ville d'origine de Bordeaux, ont suivi d'un regard amical et constructif mes travaux. Je leur dois pour beaucoup mon goût pour l'astrophysique et surtout pour ces équations qu'on cherche à résoudre sur un coin de bureau à l'occasion de mes passages à Floirac. Je souhaite que nous continuions à travailler ensemble.

Je remercie aussi mon équipe actuelle du MPIA à Heidelberg, Hubert Klahr en particulier, pour son soutien, son accueil et les échanges scientifiques passionnants que nous avons. Je lui dois beaucoup en ce qui concerne les conséquences astrophysiques de mes recherches, car son regard global sur la formation planétaire et les disques est précieux.

Pour finir, je ne saurais comment remercier ma famille, Marine, mes parents, mon frère et ma soeur, et tous mes proches, qui ont dû vivre avec moi cette aventure, et qui m'ont si souvent soutenu et poussé à me surpasser. C'est aussi grâce à eux que j'ai pu aboutir à ce travail, dont je suis fier, et que je souhaite poursuivre aussi loin que possible.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
I Les disques protoplanétaires et leur simulation	5
I Disques protoplanétaires et scénarios de formation	7
1 Les disques protoplanétaires	7
1.1 Formation et évolution des disques	8
1.2 Structure et accréition des disques	10
1.3 Problématiques et contraintes	12
2 Scénarios standards de formation planétaire	14
2.1 Modèle d'instabilité gravitationnelle	14
2.2 Modèle d'accréition sur coeur	16
2.3 Problématiques et contraintes	17
3 La place grandissante des tourbillons	18
3.1 Formation des tourbillons par instabilités	19
3.2 Capture des particules solides	24
3.3 Transport de moment cinétique	26
4 Conclusions	26
Références bibliographiques	29
II Description dynamique des disques	31
1 Description d'un fluide	31
2 Équations de conservation	32
2.1 Conservation de la masse	32
2.2 Conservation de l'impulsion	33
2.3 Conservation de l'énergie	35

2.4	Équation d'état	36
3	Potentiel de gravité	38
3.1	Le potentiel képlérien central	38
3.2	Le potentiel du disque	39
4	Particules solides	41
4.1	Le régime de Epstein	41
4.2	Le régime de Stokes	42
4.3	Rétroaction	43
5	Modèle de la Nébuleuse Solaire de Masse Minimale	44
5.1	Densité de gaz	44
5.2	Température	44
5.3	Échelle de hauteur	45
5.4	Modèle de disque 2D et solution stationnaire	46
5.5	Équation de la vorticité	49
6	Conclusions	51

Références bibliographiques 53

III Résolution numérique des équations : le code ROSSBI 55

1	La méthode des volumes finis	56
1.1	Le système d'équations	56
1.2	Définition de la grille	57
1.3	Intégration temporelle	59
1.4	Les termes de flux	61
1.5	Les termes source	63
1.6	Phase de particules solides	64
2	Un schéma équilibré pour les disques képlériens	65
2.1	Les contraintes spécifiques aux disques képlériens	65
2.2	Les termes de flux	67
2.3	Les termes de source	68
2.4	Validation du schéma	71
3	Conditions aux limites	75
3.1	Conditions azimutales	76
3.2	Conditions radiales	76
4	Le traitement de l'auto-gravité	83
4.1	Calcul de l'intégrale de la gravité	83
4.2	Test et implémentation numérique	86
5	Performances du code ROSSBI	88
5.1	Viscosité numérique	88
5.2	Parallélisation et temps de calcul	93

6	Conclusions	96
	Références bibliographiques	97
II	Formation, structure et dynamique des tourbillons	101
IV	Instabilité en Ondes de Rossby	103
1	Description de l'instabilité	103
1.1	Conditions de la solution radiale stable	103
1.2	Perturbation linéaire	105
1.3	Croissance de l'instabilité linéaire	106
2	Étude numérique de la phase linéaire	108
2.1	Implémentation numérique	108
2.2	Croissance des modes pour $A = 20\%$	109
2.3	Croissance des modes pour $A = 30\%$	113
2.4	Influence de l'amplitude du mode perturbant	116
3	Instabilité secondaire : cascade des modes	118
3.1	Cascade des modes pour $A = 20\%$	119
3.2	Cascade des modes pour $A = 30\%$	123
3.3	Décroissance de la valeur des modes	126
4	Formation d'un tourbillon isolé	127
4.1	Développement de l'instabilité	128
4.2	Étude des modes pour différentes gaussiennes	133
4.3	Formation de tourbillons pour différentes gaussiennes	137
4.4	Évolution et structure des tourbillons	140
5	Conclusions	149
	Références bibliographiques	151
V	Structure et stabilité des tourbillons	153
1	Les différents modèles de tourbillons	153
1.1	Le modèle de Kida	154
1.2	Le modèle de GNG	154
2	Équations de conservation dans le repère tournant	156
2.1	Équations stationnaires des vitesses du tourbillon	156
2.2	Linéarisation du système	157
2.3	Équation d'état	160
2.4	Validation sur une solution numérique	162
3	Modèle gaussien de tourbillon	168
3.1	Modèle d'enthalpie et champ de vitesses	168

3.2	Mesure de χ_r et de χ_θ	170
3.3	Confrontation du modèle gaussien à la solution numérique	175
4	Ajustement de tourbillons issus du modèle	177
4.1	Relaxation d'un petit tourbillon	177
4.2	Relaxation d'un gros tourbillon	178
5	Géométrie et diversité des tourbillons	189
5.1	Extension radiale	190
5.2	Nombre de Rossby	195
5.3	Rapport d'aspect	198
6	Évolution à long terme et familles de tourbillons	203
6.1	Évolution caractéristique	204
6.2	Effets des paramètres du disque	206
6.3	Effets de l'auto-gravité du disque	209
6.4	Deux familles de tourbillons	214
7	Conclusions	215
Références bibliographiques		217
VI Migration des tourbillons bidimensionnels		219
1	État des lieux	220
1.1	Ondes spirales de densité	220
1.2	Migration de tourbillons extrêmes dans un disque localement isotherme . . .	225
2	Description de la migration dans les disques adiabatiques	226
2.1	Importance de la migration	227
2.2	Migration et résolution spatiale	231
2.3	Transport radial de moment cinétique	234
3	Migration et géométrie du tourbillon	237
3.1	Effets de la largeur radiale	237
3.2	Effets du rapport d'aspect	240
4	Migration et paramètres du disque	242
4.1	Gradient de densité	243
4.2	Gradient de température	244
4.3	Gradient de pression	246
4.4	Température et échelle de hauteur	248
5	Une formulation synthétique du taux de migration	249
5.1	Expression du taux de migration	249
5.2	Cas d'un disque auto-gravitant	252
5.3	Conséquences sur l'accrétion du disque	255
6	Conclusions	261
Références bibliographiques		263

Conclusion générale et perspectives	265
III Annexes	269
Détails sur les limiteurs de flux	271
Publications	277

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La place de l'humanité dans l'Univers a toujours été, depuis des millénaires, une question centrale pour les Hommes. Chaque nouvelle découverte scientifique est une étape nouvelle dans la quête de réponses à cette question. De la place unique et centrale de la Terre dans l'Univers, nous sommes passés au *XVI^{ème}* siècle à l'héliocentrisme, plaçant la Terre et les Hommes au même rang que les planètes, et autres comètes, cortège astronomique du Soleil. Cependant, l'unicité du système Solaire n'en est pas pour autant remise en question. Plus tard, les modèles "nébulaires" avancent que les planètes et le Soleil se seraient formés dans le même nuage, menant à une chronologie naissante de la formation des systèmes planétaires.

Cependant, les détails et étapes précises de ce phénomène ne sont, pas même aujourd'hui, encore entièrement élucidés, ce qui fait de la formation planétaire un des plus grands et plus anciens défis de l'astronomie, voire de l'Humanité si l'on imagine le nombre "astronomique" d'autres Terres ou planètes habitables qui doivent exister dans l'Univers. La découverte presque quotidienne de planètes extra-solaires, depuis les années 1990 et notamment 51 *Pegasi*, première planète détectée autour d'une étoile de type solaire, donne des contraintes de plus en plus précises sur les modèles, puisqu'il ne s'agit plus uniquement d'expliquer la formation du système Solaire, mais de tous les systèmes planétaires possibles, ou observés.

Conjointement, le développement des méthodes d'observation des disques de gaz dans lesquels les planètes se forment, apporte également des contraintes observationnelles sur les modèles. La récente entrée en fonction d'*ALMA*, le plus grand radio-télescope du monde dans le domaine millimétrique, annonce des observations détaillées de ces disques, permettant de confronter directement simulations numériques et observations. La présence de tourbillons de gaz ou de surdensités de particules solides, qui sont supposés être au coeur des mécanismes de formation des planètes, pourrait, dans les années qui viennent, être directement détectée par ce télescope géant.

C'est dans ce cadre passionnant que se situe notre travail, focalisé sur la simulation numérique des tourbillons dans les disques protoplanétaires. Nous avons pour ambitieux projet d'apporter des éléments concrets de réponse sur le rôle que peuvent jouer les tourbillons dans l'évolution des disques et dans les mécanismes de formation planétaire. Comment peuvent se former ces structures de gaz,

qui peuvent être des pièges à particules solides et ainsi faciliter la création de protoplanètes ou de petits corps, comme les comètes ? Quelle est la structure mais aussi la diversité des tourbillons qui peuvent exister ? Combien de temps peuvent-ils persister et quelle est leur évolution dans le disque ? Ont-ils vraiment un rôle dans l'évolution et la dynamique des disques ? Voici quelques questions cruciales auxquelles nous avançons des réponses tout au long de ce travail.

Dans le Chapitre 1, nous présentons le cadre scientifique dans lequel notre étude se place. En particulier, nous décrivons la formation et les phases d'évolution des disques protoplanétaires d'après les observations, en mettant en avant les contraintes temporelles et physiques que cela implique pour les modèles d'évolution. Ensuite nous présentons un état des lieux des mécanismes de formation des planètes dans ces disques et montrons les limites et problématiques actuelles. Le rôle que peuvent jouer les tourbillons dans ces deux domaines est enfin mis en avant, ainsi que quelques mécanismes qui peuvent les créer. Ce chapitre constitue le point de départ de la suite de ce travail.

Le Chapitre 2 est consacré à la mise en place des différentes équations permettant de décrire mathématiquement l'évolution temporelle du système étoile/disque. Les équations de conservation hydrodynamiques sont établies dans le cadre précis des disques protoplanétaires, et les grandeurs physiques qui nous intéressent sont mises en évidence.

La résolution numérique de ces équations est abordée dans le Chapitre 3. Nous détaillons la méthode aux volumes finis que nous avons utilisée, ainsi que les nombreuses améliorations nécessaires par rapport à la méthode standard qui permettent d'obtenir un code numérique spécialement développé et optimisé pour la description de notre problème astrophysique. À l'issue de cette première partie, nous disposons donc du cadre, de la méthodologie et des outils numériques nécessaires à l'obtention de résultats scientifiques nouveaux.

La seconde partie débute sur le Chapitre 4, consacré à l'étude d'un mécanisme menant à la formation de tourbillons, *l'Instabilité en Ondes de Rossby*. À l'issue d'un état des lieux, nous présentons une analyse non linéaire de cette instabilité qui permet de mieux comprendre comment cette dernière crée des tourbillons isolés. Un mécanisme complexe de cascade est mis en évidence.

Le Chapitre 5, un des chapitres principaux de ce travail, s'attache à décrire la structure et l'évolution de ces tourbillons isolés. Nous présentons en particulier un nouveau modèle de type gaussien qui représente une avancée significative dans la description analytique des tourbillons. Ce modèle nous permet d'explorer la diversité de géométries et de forces de ces tourbillons, ainsi que d'obtenir un tableau détaillé de leur évolution dans les disques. De nombreux aspects controversés sur les tourbillons 2D sont éclaircis.

Cette seconde partie se termine sur l'analyse de la migration des tourbillons, présentée Chapitre 6. Ce mécanisme, évoqué et étudié dans peu de travaux, est systématique, et nous en expliquons l'origine. Nous paramétrisons cette migration en fonction du type du tourbillon, mais aussi en fonction du disque lui-même, et pour la première fois, explicitons une relation analytique du taux de migration en fonction de tous ces différents paramètres. En ouverture, nous montrons une application possible de ce résultat pour décrire le mécanisme d'accrétion du gaz du disque sur l'étoile, dont l'origine est toujours sujette à controverse.

La mise en perspective de tous ces résultats est établie dans la Conclusion Générale, au cours de laquelle nous expliquons également les différentes difficultés rencontrées, mais aussi les sujets qui ne restent que partiellement élucidés ainsi que nos projets futurs. On trouvera enfin en Annexes des détails sur la méthode numérique utilisée et les publications que nous avons réalisées tout au long de ce projet.

Première partie

Les disques protoplanétaires et leur
simulation

DISQUES PROTOPLANÉTAIRES ET SCÉNARIOS DE FORMATION

Les systèmes protoplanétaires constituent la première grande phase de la vie des systèmes planétaires comme notre système solaire. Elle débute par la formation de l'étoile et se termine par la réorganisation dynamique des planètes et corps solides, après dissipation du gaz dans lequel ils se sont formés. C'est lors de cette phase que les poussières, de la taille de quelques microns au départ, vont s'agglomérer et s'accumuler pour former des objets de plusieurs dizaines, voire centaines de kilomètres. Ce mécanisme de croissance des particules solides est intimement lié à la vie et à la dynamique du gaz qui les entoure. C'est pourquoi leur étude conjointe est indispensable.

Nous allons voir dans ce chapitre les différentes étapes de la vie de ces disques protoplanétaires, puis les scénarios standards de formation des planètes. Nous verrons les difficultés et contraintes que cela soulève, et pourquoi les tourbillons de gaz sont une réponse intéressante à ces problèmes. Différents mécanismes de formation des tourbillons seront présentés, et enfin en quoi ces derniers pourraient être utiles pour expliquer l'accrétion et la croissance des particules solides.

C'est donc la mise en place du cadre scientifique dans lequel notre travail se situe qui est l'objet de ce chapitre.

1 Les disques protoplanétaires

Les disques protoplanétaires sont couramment observés dans la galaxie autour des étoiles qui viennent de se former. Leur interaction avec le rayonnement stellaire, par le biais des poussières et de l'absorption/émission du rayonnement par le gaz, permet de détecter leur présence au travers du spectre électromagnétique total émis par le système. Les différentes composantes de ce spectre, c'est-à-dire celle de type corps noir due à l'étoile, et celles à plus grandes longueurs d'ondes (infrarouge, ou millimétrique) dues au disque, permettent de catégoriser ces systèmes, et en déduire une chronologie d'évolution.

1.1 Formation et évolution des disques

Une vue synthétique de cette chronologie est présentée Figure I.1. On distingue, I.1 (a), cinq étapes principales dans cette évolution. Tout commence par un nuage primordial, composé d'un gaz principalement d'hydrogène et d'hélium et contenant une fraction plus ou moins grande variable d'éléments plus lourds, et notamment de silicates sous la forme de particules solides de tailles inférieures au micron. Ce type de nuage se trouve dans le milieu interstellaire avec une composition qui dépend de l'histoire de cette région (supernovae, enrichissement stellaire...). Les conditions propices à l'effondrement de ces nuages se rencontrent au sein des nuages moléculaires dans les régions les plus denses et les plus froides.

Lorsque le refroidissement du nuage est suffisamment avancé, les forces gravitationnelles ne sont plus compensées par la pression du gaz et un effondrement du coeur se produit, menant à la naissance d'une étoile. À l'issue de cette première étape, le reste du nuage conserve son moment cinétique initial, ce qui implique la formation d'un disque, et l'accrétion violente des parties internes du nuage sur la protoétoile. Pendant cette étape, un jet bipolaire se forme sous l'action des forces magnétiques. Il est représenté en bleu sur la seconde image de la Figure I.1 (a).

Les résidus du nuage sont ensuite dispersés par l'action des vents stellaires, violents à cette époque, et par photoévaporation. Il ne reste alors, au bout de 10^4 à 10^6 années, qu'un disque au sein duquel l'accrétion se poursuit. C'est l'étape à laquelle nous nous intéressons. Dans ce disque, les poussières, qui représentent environ 1% de la masse du disque, commencent à sédimenter et à s'agglomérer, par différents mécanismes que nous évoquerons plus loin. C'est la période de formation planétaire.

Au bout d'environ 10 millions d'années, des protoplanètes se sont formées, capturant une fraction importante du gaz, le reste s'étant en partie dissipé ou ayant été accrété par l'étoile. Les dernières étapes d'organisation des planètes se déroulent alors : migration et réajustement des ceintures d'astéroïdes. Après 10^8 années, le disque a quasiment disparu et le système planétaire s'est mis en place. Il se réajustera ensuite vers un système stable sous l'action des forces gravitationnelles.

La seconde figure, I.1 (b), met en parallèle les quatre principales étapes avec le spectre électromagnétique observé. Cela permet de différencier les objets observés en quatre classes :

- la *Classe 0*, qui correspond à la formation de l'étoile. Les objets de cette classe présentent un spectre de type corps noir, typique de l'émission d'une protoétoile.
- la *Classe I*, qui correspond à la phase de formation du disque et l'apparition d'un jet. Le spectre est alors composé de l'émission de la protoétoile, aux plus hautes énergies, mais est dominé par l'émission du disque en formation et des jets, aux plus faibles énergies.
- la *Classe II* correspond à l'étape qui nous intéresse le plus, où l'étoile est entourée d'un disque d'accrétion plutôt calme. On distingue alors sa présence par une déviation du spectre, dans la partie aux plus faibles énergies, par rapport au spectre de l'étoile. Cet "excédent infrarouge" permet d'estimer la proportion du disque dans le système.
- la *Classe III*, enfin, correspond à l'étape finale, le "disque de débris", où le gaz est dissipé, et les particules solides sont de la taille de protoplanètes. Le disque n'émet plus qu'une émission

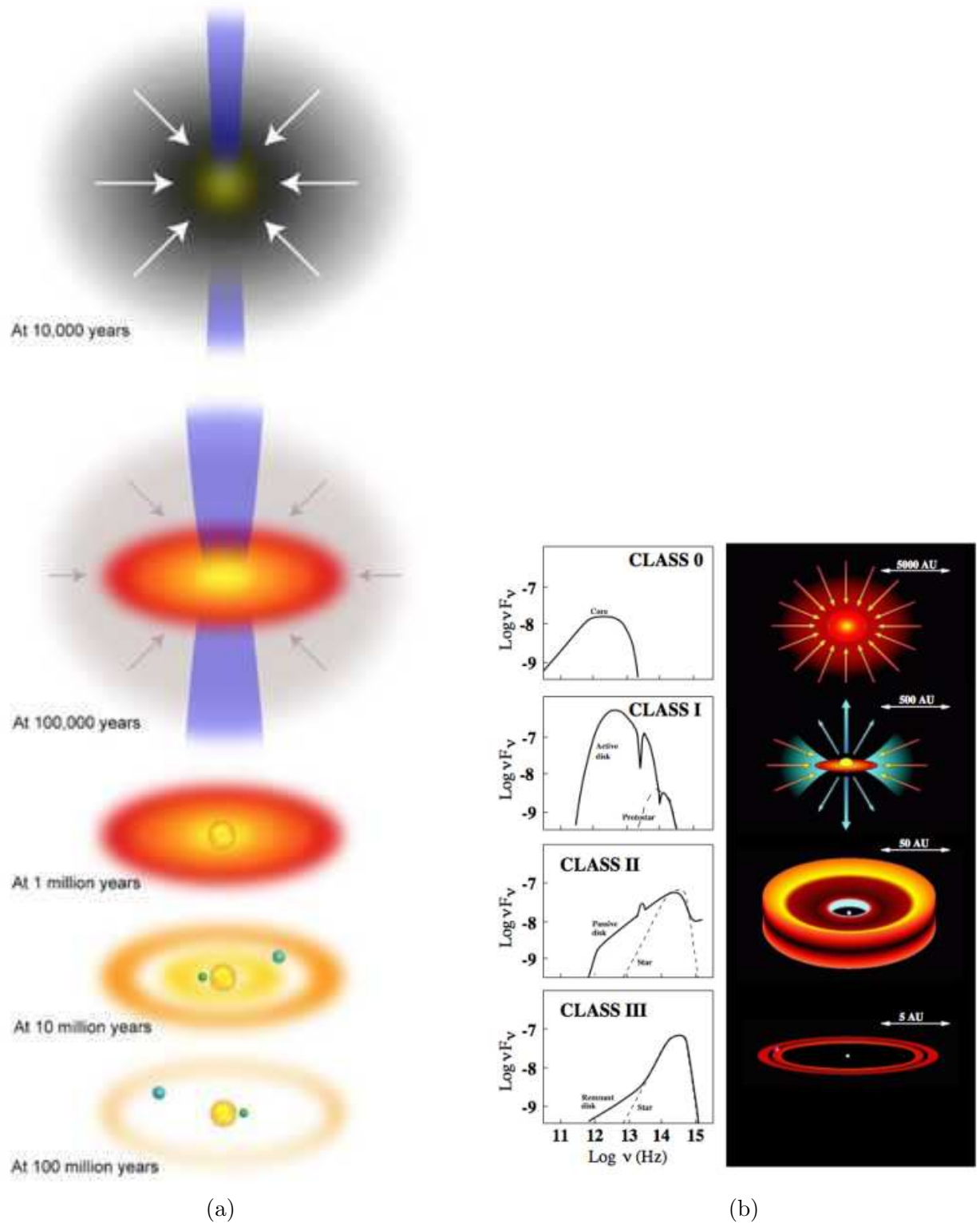


Figure I.1 — (a) : Principales phases de l'évolution d'un système protoplanétaire, depuis l'effondrement du nuage primordial, jusqu'au système planétaire, au bout d'environ 100 millions d'années. (crédit : NAOJ <http://www.naoj.org/Pressrelease/2011/02/17/>) (b) : Différentes classes d'objets protoplanétaires, de la classe 0, qui correspond à l'effondrement du nuage primordial, jusqu'à la classe III, qui correspond à un disque de débris, c'est-à-dire la dernière étape du schéma (a). Dans la partie gauche est représenté le spectre d'émission de l'objet, où l'on distingue les différentes répartitions entre émission de l'étoile et émission du disque. Les spectres permettent de discriminer les différentes classes d'objets observés. (crédit : Andrea Isella, <http://ay201b.wordpress.com/category/journal-club/>)

résiduelle, et le spectre observé se rapproche de celui de l'étoile.

1.2 Structure et accrétion des disques

Les disques protoplanétaires, correspondant à la classe II, ont une masse qui varie entre 10^{-3} et quelques 10^{-1} fois la masse stellaire, qui est de l'ordre de la masse solaire $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$. Leur taille est de l'ordre de la centaine d'Unités Astronomiques ($UA = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$). Ils possèdent généralement une cavité interne, de rayon inférieur à 0.1 UA , provenant de l'accrétion du gaz de cette région sur l'étoile.

Une vue en coupe de leur structure est présentée Figure I.2, et permet de bien comprendre leur dynamique. Cette figure est tirée de Armitage, 2011 [1]. Entre le bord interne et une région située à environ 5 UA , le gaz est chauffé et excité par le rayonnement de l'étoile. On considère que dans cette zone, le gaz est ionisé et constitue un plasma, y compris dans l'intérieur même du disque, dans le plan de rotation. Ce plasma est donc sensible au champ magnétique de l'étoile.

Au-delà, jusqu'à une distance d'environ 20 UA , seule la surface du disque peut être ionisée par le rayonnement de l'étoile. Plus on s'enfonce dans l'intérieur du disque, plus la recombinaison est importante, et on considère que sur une bonne partie de la hauteur du disque le gaz est neutre. Cette région est appelée "zone morte", car elle n'est quasiment pas couplée au champ magnétique de l'étoile.

Enfin les régions les plus externes du disque, très peu denses, peuvent être sujettes à une ionisation du gaz, due à l'interaction avec le rayonnement ambiant, en particulier avec les rayons cosmiques. Cependant, le taux d'ionisation de ce plasma est très mal contraint, ce qui rend les études de ces régions controversables.

La dissipation du disque, au cours de l'évolution du système, traduit une accrétion du gaz sur l'étoile. Or par principe de conservation du moment cinétique, cette accrétion n'est possible que si le moment cinétique est transporté et redistribué dans le disque. Sans quoi, l'écoulement du gaz resterait laminaire et aucune accrétion n'existerait. Le taux d'accrétion moyen peut être estimé, d'après les observations, de 10^{-7} à $10^{-4} M_{\odot}.an^{-1}$. Il n'est bien évidemment pas constant dans le temps, et plus le disque est âgé, plus l'accrétion est faible. Il faut donc trouver un mécanisme qui permette une redistribution du moment cinétique dans le disque, afin d'obtenir un taux d'accrétion compatible avec ces valeurs.

Un mécanisme couramment invoqué est l'Instabilité Magnéto Rotationnelle (en anglais MRI). Cette instabilité n'existe que dans les parties ionisées du disque, puisqu'elle est entretenue par le couplage entre la rotation du gaz et la force magnétique exercée sur le plasma par l'étoile. Les régions qui sont ionisées sont donc propices à cet effet, et la turbulence générée par la MRI permettrait d'y expliquer la redistribution du moment cinétique et donc l'accrétion, voir en particulier Balbus et al., 1998 [2].

La Figure I.3 montre le développement de cette instabilité. À gauche (a), on distingue une coupe d'une structure de gaz, dont la répartition de densité est similaire à celle d'un disque, avec les zones les plus denses au centre. Lors de son évolution, cette structure est déstabilisée par l'effet

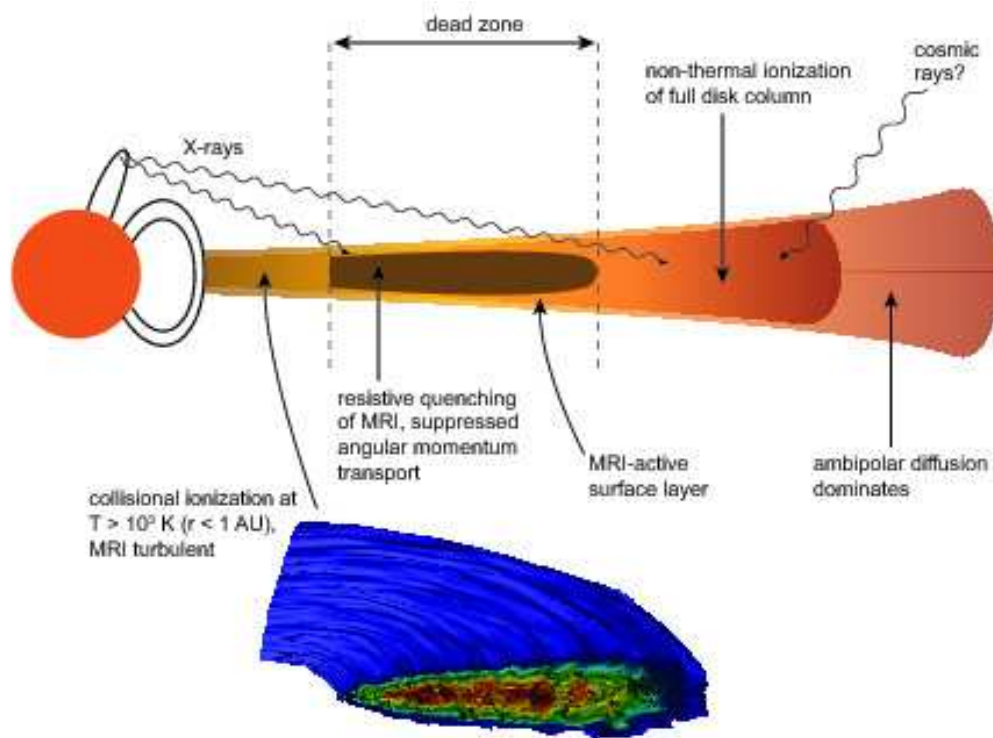


Figure I.2 — Structure schématique d'un disque protoplanétaire. Dans la partie interne, jusqu'à environ 5 UA , le rayonnement de l'étoile ionise le gaz du disque. Au-delà, jusqu'à environ 20 UA , seule la surface du disque peut subir cette ionisation. Une grande partie de l'intérieur du disque n'est pas ionisée dans cette zone. C'est la "zone morte". Au-delà, le disque est de plus en plus froid, mais le gaz peut être ionisé par un rayonnement externe, par exemple dû aux rayons cosmiques. Le taux d'ionisation est mal contraint dans cette région. Les parties ionisées sont sujettes à l'Instabilité Magnéto Rotationnelle (MRI), comme l'illustre la coupe en bas de la figure, qui crée de la turbulence.

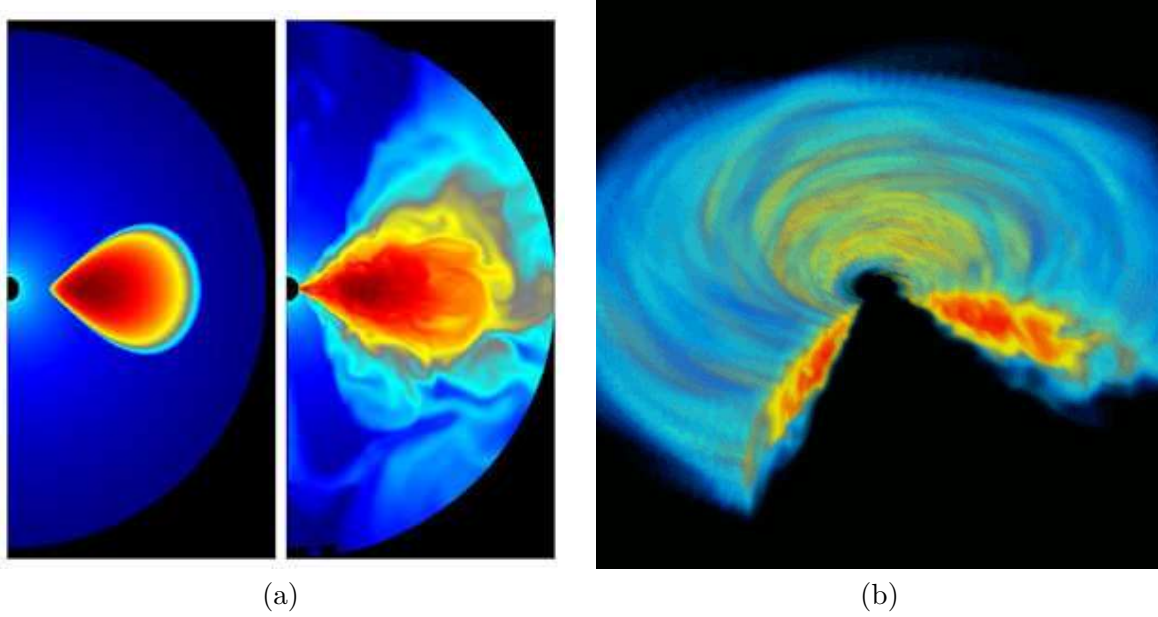


Figure I.3 – (a) : Développement de l'Instabilité Magnéto Rotationnelle (MRI), d'une sphère dont la partie équatoriale possède une stratification en densité (partie gauche). Après plusieurs rotations, le couplage magnétique avec le champ de l'étoile déstabilise le gaz ionisé, et crée une structure turbulente, qui ne se dissipe pas dans le temps (partie droite). (b) : Application au cas d'un disque, avec une vue en 3D de la structure turbulente de la densité que l'on peut obtenir.

des forces magnétiques, et à un instant ultérieur (plan de droite), la densité est très perturbée, et un régime turbulent est entretenu, la saturation de l'instabilité n'étant jamais laminaire. Lorsque l'on applique cela à un disque de plasma de type disque protoplanétaire, figure (b), on constate que cette instabilité établit un régime turbulent, dans toute la structure tridimensionnelle du disque. Ces résultats sont dus à Hawley, et on peut trouver plus de détails dans Hawley, 2000 [9].

C'est donc pourquoi la "zone morte" est dénommée ainsi, car la faible ionisation du gaz ne permet pas l'entretien de cette turbulence MRI. On suppose donc que l'accrétion dans cette région est beaucoup plus faible que dans le reste du disque, actif à la turbulence MRI. L'explication de l'accrétion par ce procédé rencontre cependant des difficultés, en particulier dans les zones externes du disque, où l'on suppose une ionisation par les rayons cosmiques. En effet, la turbulence obtenue, et la viscosité effective responsable de l'accrétion, dépend fortement du taux d'ionisation, mais ce dernier est mal contraint dans cette zone.

1.3 Problématiques et contraintes

On constate donc que l'on est confronté à un premier problème majeur. Comment expliquer l'accrétion dans toutes les zones du disque ? La seule turbulence MRI n'explique pas entièrement ce phénomène, surtout dans la "zone morte". Il est donc nécessaire de déterminer un processus qui permette de transporter du moment cinétique dans le disque, sans avoir recours à l'ionisation du gaz. Certaines instabilités hydrodynamiques peuvent répondre à cette question, mais le transport se

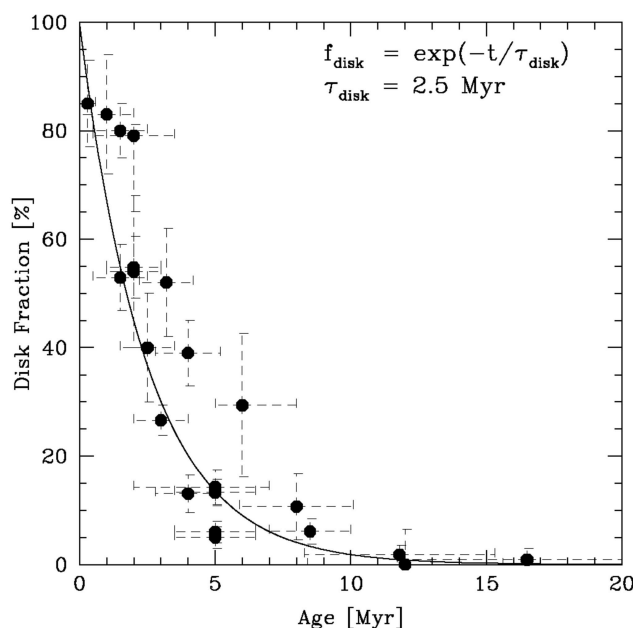


Figure I.4 — Diagramme de durée de vie des disques, obtenu par observation de différents amas stellaires. La part de l'émission du disque dans le spectre par rapport à celle de l'étoile permet de déduire la proportion du disque dans le système. Lorsque que l'on reporte cela en fonction de l'âge de l'étoile, on constate qu'au-delà de 10 millions d'années, les systèmes étudiés ne comporte presque plus de disque. Le comportement exponentiel de ces données permet d'obtenir un temps de vie $\tau_{disk} = 2.5 \times 10^6$ années. (d'après Mamajek et al., 2009 [16])

limite généralement à la période de développement de l'instabilité. Une fois la saturation atteinte, le transport de moment se réduit et le problème reste présent. On peut supposer que des instabilités peuvent se succéder, mais ce n'est pas une réponse suffisante. Nous verrons que des tourbillons de gaz peuvent contribuer à ce transport, mais il reste à déterminer dans quelle mesure, et à savoir si les taux d'accrétion obtenus sont compatibles avec les valeurs attendues.

Un second problème qui découle de l'évolution des disques est leur durée de vie. La formation de protoplanètes se déroule en effet durant la période où le disque entoure encore l'étoile. Une fois le disque dissipé, il n'y a plus suffisamment de matériau disponible pour continuer la formation. Il ne peut y avoir que transfert de masse entre les différents objets présents dans le disque de débris.

Pour estimer cette durée de vie, on effectue des observations de différentes régions de formation d'étoiles, en particulier dans des amas contenant des étoiles jeunes. En analysant le spectre d'émission des étoiles on peut, comme nous l'avons illustré précédemment, évaluer la contribution d'un disque à ce spectre. On peut alors estimer la fraction du rayonnement due au disque et celle due à l'étoile. Connaissant l'âge de l'étoile par d'autres moyens, en particulier sa composition chimique et sa température, on a accès à l'âge du système protoplanétaire, et donc du disque.

La Figure I.4 compile les résultats obtenus dans plusieurs régions de la Voie Lactée. Chaque point correspond à une étoile, et représente la fraction du disque au spectre, en fonction de l'âge de l'objet, donc du disque. Ces résultats sont dus à Mamajek, ([15], [16]) et la figure tirée de Mamajek

et al., 2009 [16]. On constate que plus le disque est âgé, plus cette fraction diminue, traduisant la dissipation du disque. Sans entrer dans les détails permettant de déterminer cette fraction, on peut supposer qu’au-delà de 10 millions d’années, les étoiles ne possèdent presque plus de disque, et que le résidu restant est dû au spectre d’un disque de débris. Une approximation exponentielle a été faite pour décrire ces données, et cela montre que la présence du disque décroît dans le temps avec une durée caractéristique de 2.5×10^6 années, ce qui signifie que dès 5 millions d’années, la masse contenue dans le disque a diminué de 90%.

Cette interprétation montre que les mécanismes de formation de planètes doivent se dérouler dans un temps inférieur à quelques millions d’années, car ensuite la masse de gaz et de poussières disponible dans le disque n’est plus suffisante pour créer de nombreuses planètes. Cette contrainte temporelle doit être prise en compte dans les scénarios de formation de planètes, que nous allons aborder maintenant.

2 Scénarios standards de formation planétaire

Au cours des décennies, de nombreuses théories ont été avancées pour expliquer la formation des planètes dans les disques. Nous allons décrire les deux principales, qui sont toujours au centre des théories modernes, mais qui peuvent être combinées à d’autres phénomènes, pour palier leur lacunes.

2.1 Modèle d’instabilité gravitationnelle

La première théorie de formation planétaire est dans la suite logique de celle de la formation stellaire. Il s’agit en effet de l’instabilité gravitationnelle. Si le nuage primordial s’est effondré pour former l’étoile, on peut supposer que le disque peut lui aussi s’effondrer et former des étoiles miniatures en quelque sorte, les protoplanètes.

L’instabilité gravitationnelle ne peut avoir lieu que si la gravité dans la hauteur du disque n’est plus compensée par la pression du gaz. Dans le cas des disques de faible épaisseur, on peut paramétrer ce critère par le rapport des deux forces, menant au critère de Toomre :

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \sigma} \sim 1 \quad (\text{I.1})$$

où c_s est la vitesse du son dans le gaz, qui est proportionnelle à la température du gaz, κ est la fréquence épicyclique que nous définirons plus tard, mais elle est environ égale à la vitesse angulaire de rotation du gaz. Enfin G est la constante de la gravitation et σ est la densité de surface du gaz. On peut remanier cette équation pour obtenir :

$$Q = \frac{H}{r} \frac{M_\star}{M_d} \sim 1 \quad (\text{I.2})$$

en introduisant H , l’échelle de hauteur du disque, proportionnelle à la température, r la distance à l’étoile, et M_d la masse du disque. On peut signaler que H/r varie très peu dans les disques et vaut

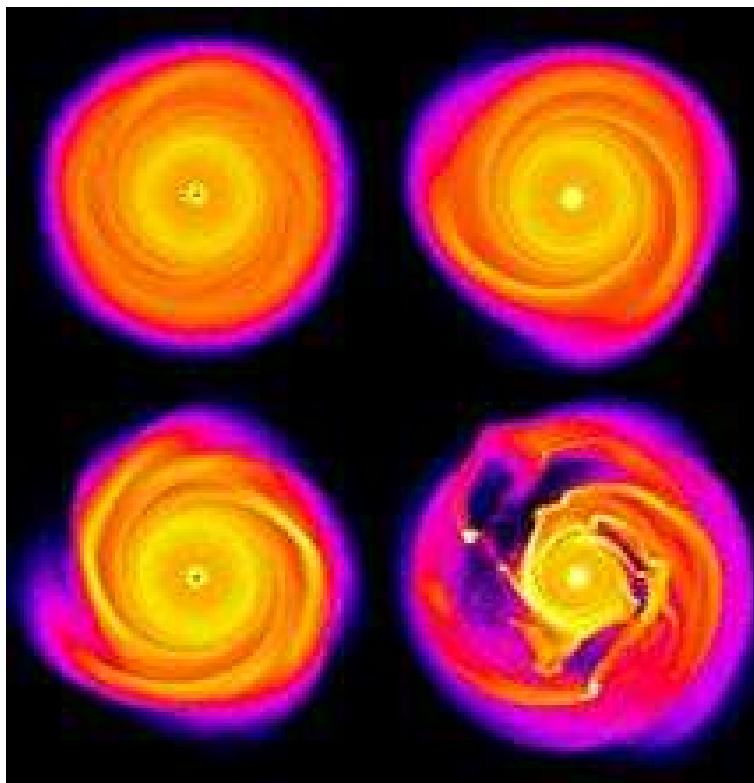


Figure I.5 – Résultats de simulation de l’instabilité gravitationnelle d’un disque. Le disque, qui doit être suffisamment massif, environ 5×10^{-2} à 10^{-1} masses solaires, est perturbé par sa propre gravité. Lors de l’évolution au cours du temps (de droite à gauche et de haut en bas), on distingue la formation de bras spiraux de plus en plus denses, puis la formation de globules très localisés, où la densité est très élevée, pouvant contenir plusieurs masses de Jupiter.

10^{-2} pour les disques les plus froids, jusqu’à quelques 10^{-1} pour les disques les plus chauds. On voit donc que pour que le critère de l’instabilité soit atteint, il faut que la température du disque soit plutôt faible et que la masse du disque soit la plus grande possible.

Si ce n’est pas le cas, on peut avoir localement une instabilité gravitationnelle, si la température est suffisamment faible et que la densité σ de gaz ou de particules est assez élevée, comme le montre la première équation. Dans ce cas, les régions instables peuvent se contracter et créer des nodules denses qui peuvent devenir des protoplanètes.

La Figure I.5 montre des résultats de simulation numérique de l’instabilité gravitationnelle d’un disque obtenue par Mayer et al., 2002 [17]. Les quatre images montrent l’évolution de la densité du gaz au cours du temps. On observe la formation de bras spiraux dont la densité augmente avec le temps (trois premières images). À l’issue de la simulation (en bas à droite), ces bras se sont disloqués, et des régions très localisées où la densité est amplifiée de plusieurs ordres de grandeurs apparaissent, et sont visibles comme des points brillants. Ces nodules peuvent chacun contenir l’équivalent de la masse d’une protoplanète.

Cependant ce scénario possède différentes limites. Si le disque n’est pas suffisamment massif, c’est-à-dire de masse inférieure à environ $10^{-1} M_{\odot}$, il faut que la densité du mélange de gaz et

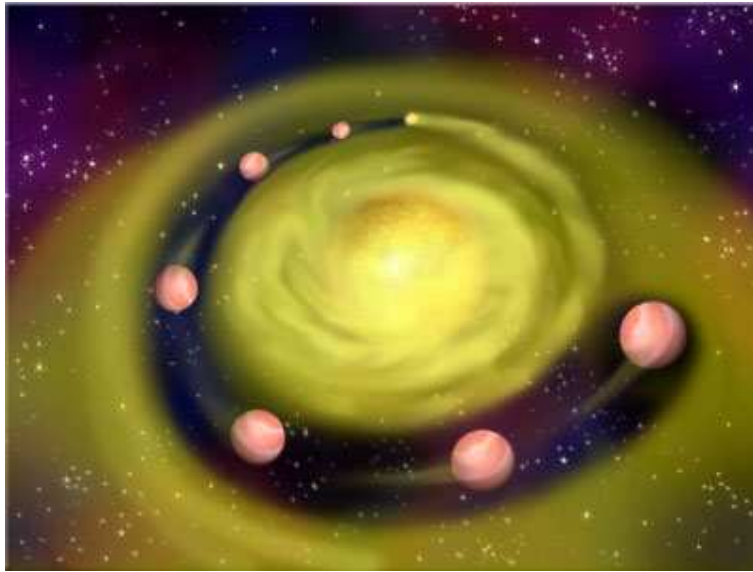


Figure I.6 — Vue schématique du mécanisme d'accrétion sur coeur. Les différentes étapes temporelles sont représentées à la suite. Au début, un coeur protoplanétaire de plusieurs kilomètres de dimensions accrète le gaz et les particules solides qui l'entourent. À l'instar d'une boule de neige, la protoplanète grossit, en vidant peu à peu de leur matière les zones environnantes.

de particules solides soit d'au moins 10 fois supérieure à la densité moyenne dans le disque. On suppose que la sédimentation des grains solides dans le plan de rotation permet d'atteindre ces densités. Or, les mouvements de convection dans la hauteur du disque limitent généralement cette densité à des valeurs insuffisantes pour obtenir l'instabilité gravitationnelle. Cette dernière n'est donc possible que dans certains types de disques, mais ne s'applique pas à la majorité des cas.

D'autres scénarios doivent donc être développés, comme le modèle d'accrétion sur coeur.

2.2 Modèle d'accrétion sur coeur

Cette approche s'apparente à la boule de neige, qui, à partir d'un caillou, grossit à mesure qu'elle dévale la pente enneigée. Ce scénario, bien adapté à la formation de petites planètes, débute à partir d'un coeur solide (un planétésimal) de la taille du kilomètre. Celui-ci est donc assez massif pour avoir une sphère d'influence gravitationnelle autour de lui, capable de capturer le matériau qui l'entoure.

À mesure qu'il orbite dans le disque, ce coeur va donc grossir en accumulant du gaz et des particules solides, poussières ou planétésimaux. Cela va vider petit à petit la région de corotation, ainsi que les régions adjacentes de leur matière. Un sillon va apparaître et s'élargir au cours du temps, à mesure que la distance de capture gravitationnelle du coeur augmente. On peut visualiser ce processus grâce à la Figure I.6, due à Meg Stalcup, <http://sciencenotes.ucsc.edu/0101/planets.html>. On y distingue différentes étapes du mécanisme d'accrétion sur coeur, représentées successivement sur la même image.

Si le coeur se situe dans une région du disque où l'accrétion est présente, le sillon peut se

remplir avec la matière qui provient des régions plus externes, et contribuer ainsi à la croissance de la protoplanète. Cependant, ce mécanisme possède plusieurs limitations. D'une part, pour être efficace, il faut qu'il se déroule dans une partie du disque où le matériau disponible est le plus dense possible, afin d'accélérer l'augmentation de la masse de la protoplanète. La zone la plus favorable se situe assez loin dans le disque, au-delà de la "ligne de glace", où la solidification de certains composants du gaz permet d'augmenter la densité. En deçà de la ligne de glace, la température dans le disque réduit la capacité du coeur à capturer le gaz, à cause de la pression qui s'oppose à l'attraction gravitationnelle du coeur. Paradoxalement, plus on s'éloigne dans le disque, plus la densité de gaz et de particules diminue mais aussi plus la durée d'une orbite augmente.

On en arrive au deuxième problème, qui est l'échelle de temps de formation par ce scénario. Pour atteindre des masses supérieures à plusieurs masses terrestres ($5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$), il faut près de 1 à 10 millions d'années, selon le type de disque et la position du coeur dans le disque. Sachant que cela devient comparable à la durée de vie du disque, on comprend bien que l'on ne peut pas espérer former des géantes gazeuses comme Jupiter par le scénario d'accrétion sur coeur.

Enfin, ce scénario est basé sur le prérequis qu'un planétésimal de quelques kilomètres est présent dans le disque. Il est donc dépendant des mécanismes de formation de tels planétésimaux. Nous allons expliquer comment ils peuvent se former, et les problèmes que cela soulève.

2.3 Problématiques et contraintes

Les planétésimaux se forment à partir des grains solides de plus petites tailles. On pense que la taille des grains est initialement de l'ordre du micron. À cette taille, les forces moléculaires de Van der Waals leur permettent de s'agglomérer, jusqu'à quelques dixièmes de millimètres. Au-delà de cette taille, les collisions entre les grains leur permettent de former des grains plus gros, ce qui est notamment accentué au-delà de la ligne de glace, car la glace facilite le collage des grains entre eux. On estime qu'à partir de plusieurs dizaines de mètres, l'interaction gravitationnelle peut devenir le moteur de la croissance, à condition que la distance entre les particules soit assez faible.

Cependant un phénomène limite drastiquement cette peinture de la croissance des grains. Il s'agit des forces aérodynamiques que subissent les particules solides dans le gaz. En effet, les particules orbitent autour de l'étoile selon les lois de la gravitation imposée par l'étoile. Mais le gaz, lui, orbite légèrement moins vite, car le gradient radial de pression compense une partie de la force centrale due à l'étoile. Ainsi, les particules orbitent légèrement plus vite que le gaz, et subissent alors un vent frontal systématique qui s'oppose à leur mouvement orbital.

Cette friction aérodynamique dépend de la taille des particules, ainsi que de la pression du gaz. On montre Figure I.7 l'effet de cette friction en fonction de la taille des grains, à une distance de 7 UA de l'étoile (tirée de Ciesla et al., 2010 [6]). Les particules, freinées par ce vent frontal, migrent vers l'étoile à une vitesse indiquée en ordonnées. On constate que ce couplage aérodynamique est maximal pour des particules d'environ un mètre de rayon. C'est ce qu'on appelle "la barrière du mètre". Cette taille critique dépend évidemment d'où l'on se place dans le disque, mais est toujours comprise entre 10 cm et 10 m .

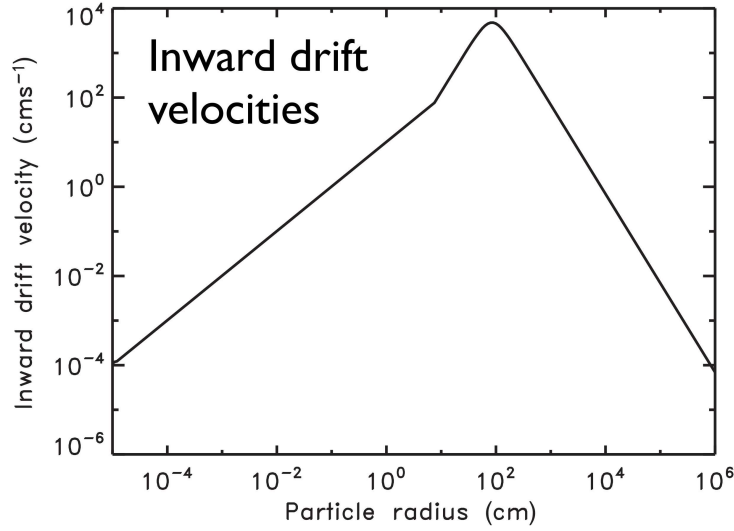


Figure I.7 — Vitesse radiale de migration des particules solides, due à la friction aérodynamique avec le gaz, à environ 7 UA . On constate qu'en fonction de la taille des particules, la vitesse de migration vers l'étoile peut varier de près de huit ordres de grandeur, et que la vitesse est maximale pour des particules d'un mètre de rayon. Cette "barrière du mètre" est un problème majeur dans les scénarios de formation planétaire, en particulier pour le modèle d'accrétion sur coeur.

Il en résulte que les grains les plus affectés par cette friction peuvent tomber sur l'étoile en quelque 10^5 à 10^4 ans, limitant ainsi leur durée de vie dans le disque et par conséquent leur capacité à grossir davantage. Les particules, migrant radialement à des vitesses différentes, peuvent entrer en collision avec d'autres orbitant plus près de l'étoile. Si la différence de vitesse est trop importante, ces collisions fractionnent les grains, plutôt que de contribuer à leur croissance. Le problème de migration radiale des particules est étudié notamment dans Brauer et al., 2007 [4].

Il est donc très difficile de dépasser cette barrière du mètre, ce qui réduit le potentiel de création de planètes par le modèle d'accrétion sur coeur. Il faut donc trouver un moyen de limiter cette migration radiale : par exemple en confinant les grains dans une région limitée du disque. Cela est valable également pour le mécanisme d'instabilité gravitationnelle, le confinement permettant d'atteindre de fortes densités favorable à l'instabilité. Une revue des mécanismes liés à la croissance des grains et à la formation des planétésimaux a été réalisée par Chiang et al., 2010 [5].

Les tourbillons anticycloniques sont capables de jouer ce rôle, mais ont aussi d'autres atouts que nous allons maintenant dévoiler.

3 La place grandissante des tourbillons

La présence de tourbillons anticycloniques de grande taille dans les disques est une théorie qui permettrait de répondre en partie au problème de la formation des planétésimaux de taille supérieure au mètre, et de combler les lacunes des modèles de formation planétaire. Ce scénario a

été décrit pour la première fois par Barge et Sommeria, 1995 [3], puis repris de façon plus détaillée par Klahr et al., 2006 [12]. La survie des tourbillons dans le disque a commencé à être étudiée depuis plus de 20 ans déjà. Godon et Livio, 1999 [8], montraient déjà que leur durée de vie est inversement proportionnelle à la viscosité effective. Cela rend ces structures particulièrement viables dans la zone morte, où se déroule une grande partie de la création des planètes.

Les mécanismes de formation de ces structures sont multiples et nous allons en décrire les principaux. Nous montrerons ensuite le rôle possible des tourbillons dans la redistribution du moment cinétique et enfin leur capacité à capturer des particules solides.

3.1 Formation des tourbillons par instabilités

Différentes instabilités du disque sont efficaces pour former des tourbillons de grande taille. Nous en présentons les trois principales.

Instabilité barocline des disques

L'instabilité dite barocline des disques est un analogue de l'instabilité barocline atmosphérique, qui est responsable du renforcement des cyclones et anticyclones. Elle provient de la présence de gradients d'entropie dans le disque, qui peuvent renforcer la *vorticité*, c'est-à-dire le caractère tourbillonnant du gaz. Ce renforcement est catalysé lorsque le gaz n'est pas adiabatique, ce qui signifie que des échanges d'énergie thermique sont possibles entre différentes régions du disque. Ce transfert de chaleur, ou relaxation thermique, est en partie dû au rayonnement des grains, mais aussi à la convection à petite échelle. Le cadre et les premiers résultats sur cette instabilité du disque sont publiés en deux articles par Petersen et al., 2007 [18] et [19].

On peut paramétrer cette relaxation par un temps caractéristique d'échange thermique, τ_{cool} , dont la valeur peut varier de 0, pour un gaz isotherme, à l'infini, pour un gaz adiabatique. Le renforcement des tourbillons est maximal lorsque le temps τ_{cool} est de l'ordre de la période de rotation locale.

Cette instabilité se déroule en deux phases. Une phase de croissance, à partir de petites perturbations de température, d'amplitude finie, et qui pourraient être dues à des collisions ou des condensations. Ces perturbations créent une première génération de petits tourbillons. La seconde phase, qu'on appelle aussi amplification barocline des tourbillons, contribue à renforcer les tourbillons créés par couplage entre l'énergie disponible dans le gradient d'entropie, et la relaxation thermique. Cette amplification barocline peut agir également sur des tourbillons formés par d'autres instabilités.

La Figure I.8 montre l'évolution d'une partie du disque lors de cette seconde phase, issue de Lyra et al., 2011 [13]. La colonne de gauche montre l'état 100 rotations après l'instant initial, celle du milieu 200 rotations après et celle de droite 1000 rotations après. Les lignes montrent la densité, la pression, l'entropie et la vorticité du gaz, de haut en bas, respectivement. On constate qu'après 100 rotations, deux petits tourbillons sont présents, résultant de la phase de croissance de

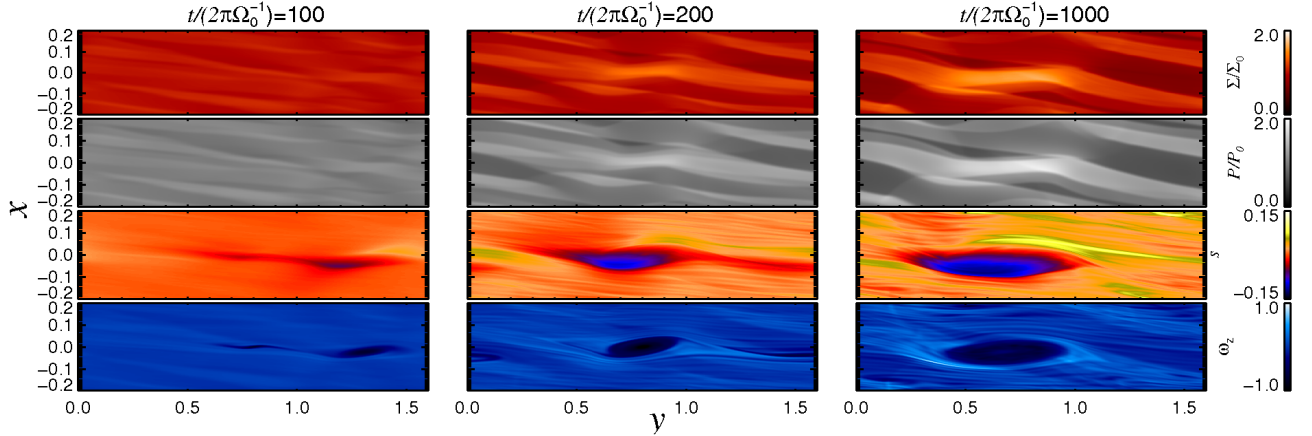


Figure I.8 — Résultats de l'instabilité de disque dite barocline. Les trois colonnes représentent l'instant après 100, 200 et 1000 rotations, respectivement. Les lignes montrent la densité, la pression, l'entropie et la vorticité, de haut en bas. On constate le renforcement au cours du temps d'une structure tourbillonnaire. Cela est moins visible en densité ou en pression, mais cela est souvent le cas pour les simulations locales, dites "shearing box".

l'instabilité. Mais au fur et à mesure du temps, la vorticité et l'entropie se renforcent, ainsi que la surface occupée par le tourbillon. Au bout de 1000 rotations un unique gros tourbillon est présent.

L'instabilité barocline a donc la capacité à former des tourbillons, mais aussi et c'est ce qui fait y porter un grand intérêt, la capacité à renforcer les tourbillons existants, ce qui pourrait compenser leur dissipation par d'autres phénomènes. Elle peut se dérouler dans de nombreuses régions du disque où le gradient radial d'entropie est favorable.

Instabilité en ondes de Rossby

L'instabilité en ondes de Rossby (IOR) est une instabilité purement hydrodynamique. Elle ne nécessite pas de transfert de chaleur comme la précédente, ni d'ionisation du gaz, comme la MRI. Elle a donc sa place dans la zone morte, où le gaz n'est pas ionisé ni ne possède de viscosité effective.

Il s'agit de la déstabilisation d'une région du disque où la densité ou la température présentent de fortes variations radiales. Il peut s'agir d'une surdensité, ou d'un saut de densité comme par exemple à la ligne de glace. Les bords de la zone morte sont également favorables à cette situation. En effet, s'il y a un changement du taux d'accrétion à ce niveau, l'accumulation du gaz va créer une surdensité, qui peut se déstabiliser par l'IOR (voir Varni  re et al., 2006 [24]).

La Figure I.9 montre le déroulement de cette instabilité, lorsque qu'elle se déclenche pour une surdensité. Ces résultats ont été obtenus au cours de ce travail. Les cartes de densité relative à celle du disque montrent l'instant initial, et les instants après 25, 40 et 185 rotations, de (a)    (d), respectivement. On constate que la surdensité initiale, d'une amplitud   de 20%, se déstabilise et se scinde en 6 tourbillons au bout de 25 rotations. Ces tourbillons fusionnent ensuite pour n'être plus que 4 après 40 rotations puis plus qu'un tourbillon isolé au bout de 185 rotations. On remarque une augmentation du contraste de densité, et la densité dans le tourbillon final atteint une valeur qui est de 50% supérieure à celle du reste du disque.

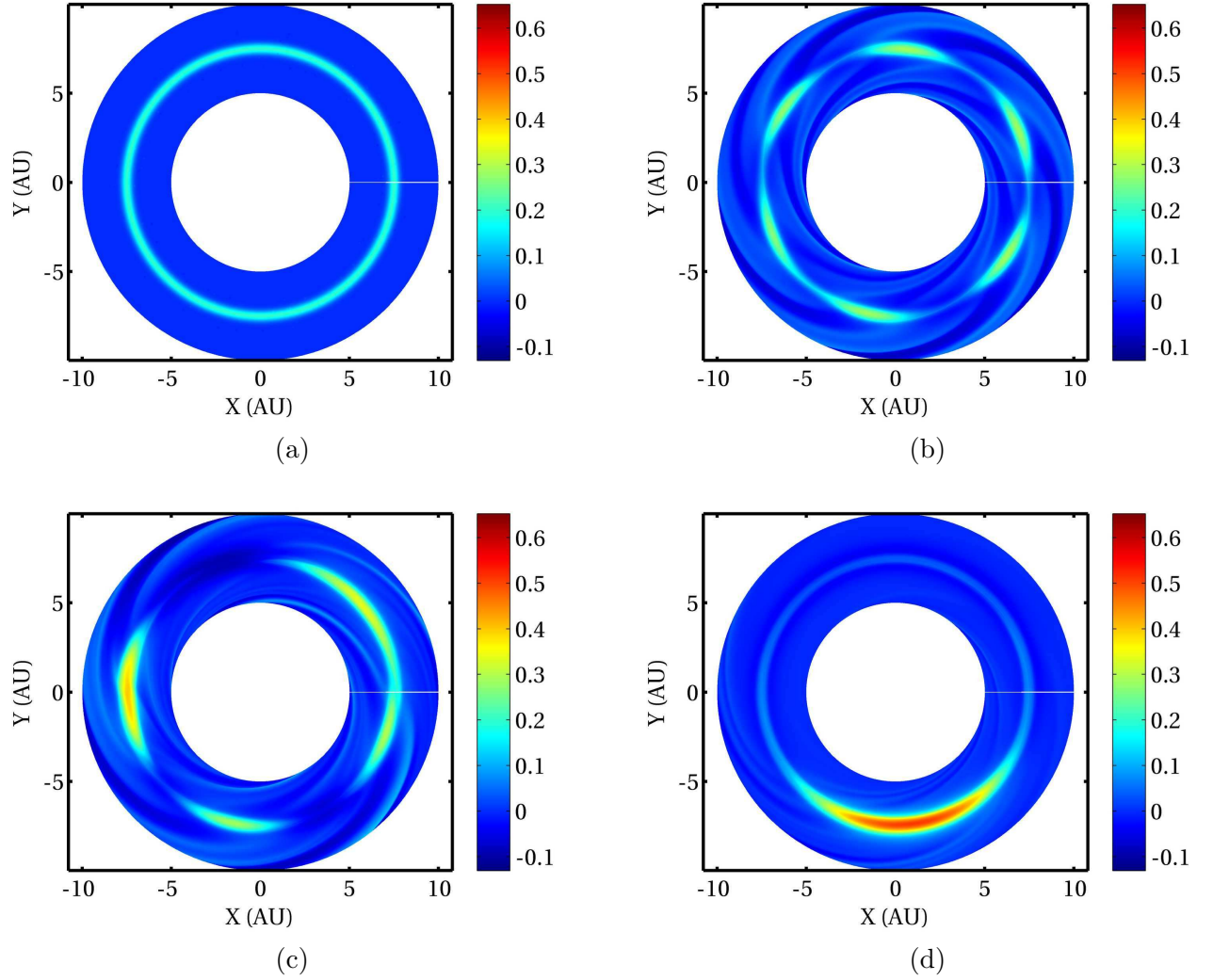


Figure I.9 – Déroulement de l'Instabilité en Ondes de Rossby, obtenue dans cette étude. La perturbation de densité relative est montrée à l'instant initial, après 25, 40 et 185 rotations du disque, de (a) à (d), respectivement. La perturbation annulaire initiale génère une chaîne de tourbillons qui fusionnent au cours du temps, pour obtenir, à l'état final, un tourbillon isolé.

Cette instabilité permet de former des tourbillons isolés en une centaine de rotations. Le temps de croissance de l'instabilité est en effet de l'ordre d'une période orbitale, ce qui est presque 100 fois plus rapide que la croissance de l'instabilité barocline. Nous étudierons en détail la croissance et le déroulement de cette instabilité en ondes de Rossby dans le Chapitre 4, car elle permet de former efficacement et rapidement des tourbillons. Elle peut également se dérouler lorsque le gaz est ionisé, voir Lyra et al., 2012 [14].

La densité atteinte dans le tourbillon pourrait devenir suffisante pour déclencher une instabilité gravitationnelle du tourbillon et favoriser la formation de protoplanètes. Enfin, le devenir de ces tourbillons isolés doit être étudié afin de savoir si le site de création de l'instabilité, comme par exemple le bord de la zone morte, a une influence sur l'évolution du tourbillon. De telles réponses permettent de mieux contraindre les scénarios impliquant les tourbillons, comme ceux de formation des planétésimaux.

Instabilité de bord

La dernière instabilité que nous présentons est celle du bord du sillon, ou gap, ouvert par une planète. Cela présuppose évidemment qu'une planète est déjà présente dans le disque, ce qui ne résout pas le problème de sa formation, mais permet de complexifier les scénarios d'évolution du disque à une époque plus avancée de son évolution.

Lorsque le sillon creusé par la planète est suffisamment profond, ses bords, où les gradients de densité et de pression sont raides, peuvent être sujets à une instabilité en ondes de Rossby. Mais la présence de la planète, ainsi que le forçage du gap, qui entretient le profil du bord du gap, modifie le déroulement de l'IOR. En particulier, la présence d'ondes de densité excitées par la planète, joue un rôle dans la création de vorticité et donc des tourbillons. On peut trouver des résultats intéressants sur ce sujet notamment dans De Val-Borro et al., 2007 [7] et Shangli et al., 2007 [21].

Nous illustrons ce phénomène par une simulation effectuée avec le code développé dans cette thèse, ainsi que des résultats obtenus par De Val-Borro et al., 2007 [7], présentés Figure I.10, (a) et (b), respectivement. Dans les deux simulations, une planète de la masse de Jupiter orbite dans le disque. Son interaction gravitationnelle avec le disque génère deux ondes spirales, visibles particulièrement en (a), et crée le sillon visible sur ces cartes de densité.

La figure du haut montre l'état après 60 rotations de la planète. On observe l'apparition de deux tourbillons à l'extérieur du bord externe du sillon. Après 130 rotations, en bas, un unique tourbillon de densité supérieure à 100% de celle du disque persiste. La densité atteinte en son coeur est le double de celle obtenue par l'IOR classique. La présence de la planète renforce donc la création de vorticité. Les résultats de De Val-Borro (b) sont obtenus après 50 et 100 rotations, de haut en bas, et montrent des structures comparables.

L'impact de l'état du gaz sur le tourbillon, qu'il soit adiabatique, isotherme ou possédant une relaxation thermique, peut être important dans sa formation. De plus, la configuration du gap, contre lequel le tourbillon orbite, peut contribuer à un renforcement ou une atténuation barocline. On comprend que ces trois instabilités sont donc efficaces pour former et modifier des tourbillons,

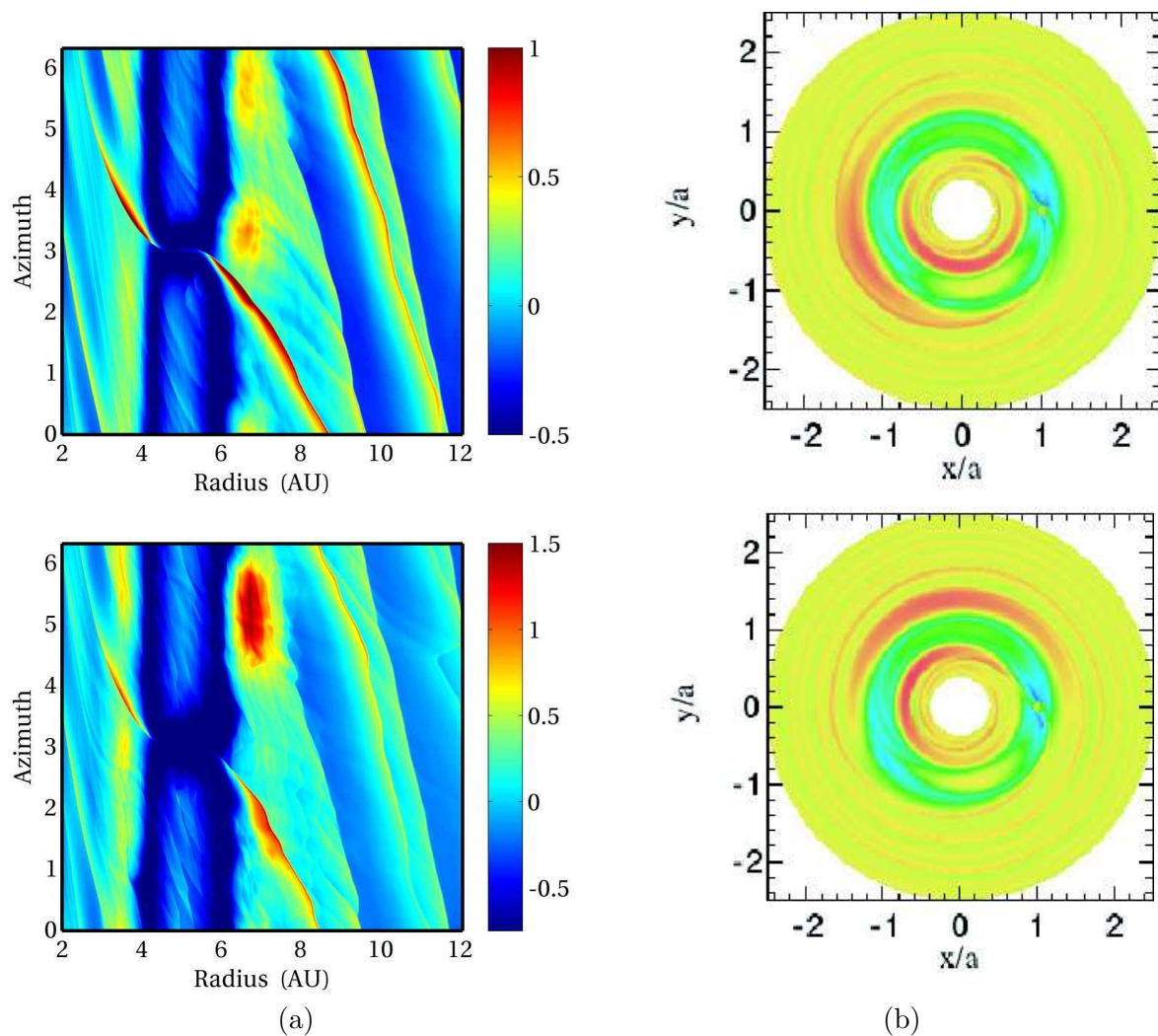


Figure I.10 – Lorsqu’une planète de la masse de Jupiter est contenue dans le disque, elle crée un creux de densité, appelé gap, qui devient instable à l’IOR, et forme un tourbillon à l’extérieur du gap. (a) : Résultats obtenus grâce au code ROSSBI développé dans cette thèse (projet en cours), après 60 et 130 rotations, de haut en bas. (b) : Résultats de De Val-Borro et al., 2007 [7], obtenus avec le code FLASH, après 50 et 100 rotations, de haut en bas. L’échelle de couleur pour la densité est différente (logarithmique, sans indication des correspondances de couleurs), mais on estime la densité du tourbillon à plus de 80% de celle du disque, ce qui est compatible avec les résultats montrés en (a).

et leur combinaison offre des possibilités multiples et complexes pour les scénarios de formation des protoplanètes.

3.2 Capture des particules solides

Le confinement des particules solides nécessaire pour pallier les lacunes des scénarios de formation de planétésimaux et de protoplanètes est sans doute la première raison qui a dirigé l'intérêt vers la présence de tourbillons dans les disques. Des articles précurseurs décrivant un tel rôle sont dus à Barge et Sommeria, 1995 [3] et Tanga et al., 1996 [22]. Ces auteurs étudient la possibilité de capture de particules individuelles dans un tourbillon, et montrent qu'en fonction du paramètre d'impact de la particule, certaines peuvent être capturées dans les tourbillons anticycloniques.

Cet effet provient de la présence d'un gradient de pression dans un tourbillon, qui augmente localement la force de friction aérodynamique par rapport au reste du disque. Dans un tourbillon anticyclonique, cette force fait migrer les particules vers le centre du tourbillon. Dans le cas d'un tourbillon cyclonique, qui est une sousdensité, la force aérodynamique éjecte les particules loin du centre du tourbillon. Elles ont donc toujours tendance à s'accumuler dans les maxima locaux de pression. Cela peut conduire à des densités très élevées, qui peuvent conduire à un effondrement gravitationnel. Tel est l'attractivité d'un tel mécanisme.

Depuis, de nombreux résultats de simulations numériques confirment et approfondissent ce scénario. Des différences subsistent selon la façon de modéliser les grains, avec une approche individuelle (N-corps) ou collective (fluide), ou si l'on tient compte de l'effet de la force aérodynamique sur le gaz (rétroaction). Cependant, la capacité à augmenter la densité de particules de plusieurs centaines de fois au centre du tourbillon est un consensus.

Nous montrons Figure I.11 deux exemples de simulations de capture de particules dans un tourbillon. Celle de gauche, (a), a été effectuée avec le code ROSSBI présenté dans cette thèse, pour des particules de 5 cm de diamètre, modélisées par un fluide. Celle de droite, (b), est tirée de Johansen et al., 2004 [11], et traite individuellement chaque particule. Dans les deux cas on montre la densité relative du gaz, en haut pour (a), et celle des particules, en bas pour (a). Cet état obtenu au bout de 50 rotations, montre une accumulation des particules solides dans le tourbillon, dans une région proche de son centre. Leur densité est augmentée de 100 fois, ce qui est comparable à la densité du gaz. Le même résultat est obtenu par Johansen, où il montre également, indiqué par des flèches, le mouvement tourbillonnaire des particules.

Ainsi ce mouvement collectif, confiné dans le tourbillon, permet de favoriser la croissance des grains par collisions, car la dispersion des vitesses est réduite, en comparaison de celle du reste du disque. Ce type d'analyse est abordé dans Heng et al., 2010 [10]. À plusieurs égards, la capture des poussières par les tourbillons est d'un grand intérêt pour ces scénarios, et doit être étudiée précisément, en particulier en fonction de la taille des grains, et de la forme du tourbillon, ce qui n'est pas encore bien contraint.

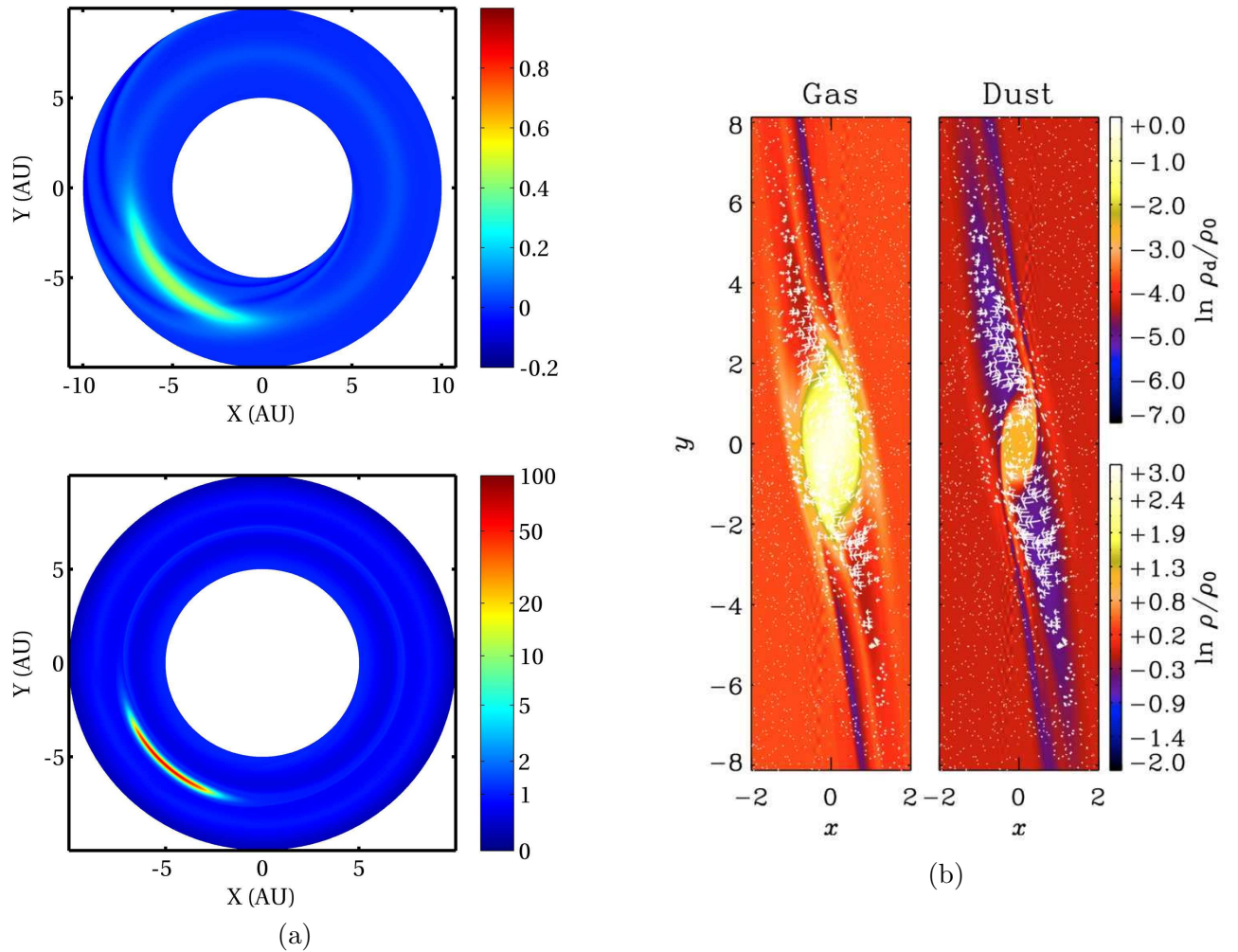


Figure I.11 – (a) : Capture de particules solides dans un tourbillon, obtenue avec le code ROSSBI, développé dans cette thèse. La densité du gaz, relative à celle du disque, est montrée en haut, celle des particules est montrée en bas. On observe le confinement de ces particules de taille 5 *cm* dans le tourbillon, avec une augmentation locale de la densité d'un facteur 100. (b) : Résultats de simulations locales de capture, issus de Johansen et al., 2004 [11], avec à gauche la densité du gaz, et à droite celle des particules. Ici encore, les particules sont confinées et leur densité est augmentée de plusieurs dizaines de fois.

3.3 Transport de moment cinétique

Pour finir, nous abordons le problème de l'accrétion dans les disques, surtout dans la zone morte, et le rôle potentiel des tourbillons. Le rôle joué par les tourbillons dans le phénomène d'accrétion n'est pas clairement établi, même si le transport de moment cinétique lors de la phase de formation des tourbillons, via des instabilités, a déjà été mis en évidence.

Cependant, ce transport de moment cinétique, même s'il permet d'atteindre les taux d'accrétion observés, n'est d'une durée que de quelques dizaines de rotations, c'est-à-dire la durée de développement de l'instabilité. Lorsque le tourbillon formé atteint un régime quasi stationnaire, le transport de moment cinétique chute vers des valeurs trop faibles pour expliquer l'accrétion. Ce transport est en effet dû à des ondes de densité excitées généralement lors des instabilités à l'origine des tourbillons.

Cependant, nous pensons que si un grand nombre de tourbillons persiste dans le disque, la somme de ces petites contributions pourrait devenir suffisante pour participer significativement à l'accrétion du gaz dans les zones mortes. Cette hypothèse doit être vérifiée. Pour cela nous devons simuler l'évolution d'une telle distribution de tourbillons. Les conditions initiales d'une telle simulation doivent être établies, ce qui est un des buts de notre travail.

4 Conclusions

Les scénarios classiques de formation planétaire souffrent de différents problèmes que nous avons présentés. Il s'agit principalement d'une échelle de temps de formation de 10 millions d'années, imposée par la durée de vie observée des disques, et d'un problème de croissance des grains au-delà de la barrière du mètre. Enfin, le moteur de l'accrétion des disques n'est pas encore bien défini, en particulier dans la zone morte.

Les tourbillons anti-cycloniques, qui peuvent être formés par plusieurs instabilités, y compris dans la zone morte, constituent une réponse prometteuse à ces problèmes. L'observation de leur présence dans les disques, qui était hypothétique jusqu'à aujourd'hui (Wolf et al., 2002 [25]) est désormais à la portée des instruments actuels (Regaly et al., 2012 [20]), en particulier ALMA. Récemment, Van der Marel et al., 2013 [23] clament l'observation d'un tourbillon capturant des particules de la taille du millimètre.

Ce rôle fondamental dans la capture des grains doit cependant être affiné, par une connaissance plus approfondie de la structure et de la durée de vie des tourbillons. En fonction de leur géométrie, de leur vorticité, cette capture peut être plus ou moins efficace, et l'implication sur les scénarios de formation de planétésimaux en dépend. C'est pourquoi un préalable important à l'étude de cette capture est la connaissance précise des propriétés des tourbillons.

Cela permettra aussi de préciser le rôle possible des tourbillons dans le maintien d'une accrétion dans les régions non ionisées du disque, et donc insensibles à la turbulence MRI. C'est donc dans ce cadre que nous envisageons l'étude de la structure et de l'évolution des tourbillons, enfin de mieux contraindre les rôles de capture de particules, de création de planètes, et de transport de

moment cinétique qu'on leur attribue.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ARMITAGE, P. J. Dynamics of Protoplanetary Disks. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 49, 1 (Sept. 2011), 195–236. [10](#)
- [2] BALBUS, S. A., AND HAWLEY, J. F. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of Modern Physics* 70, 1 (Jan. 1998), 1–53. [10](#)
- [3] BARGE, P., AND SOMMERIA, J. Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? *Astronomy & Astrophysics* 295, 1 (1995), L1–L4. [19](#), [24](#)
- [4] BRAUER, F., DULLEMOND, C. P., JOHANSEN, A., HENNING, T., KLAHR, H., AND NATTA, A. Survival of the mm-cm size grain population observed in protoplanetary disks. *Astronomy & Astrophysics* 469, 3 (2007), 1169–1182. [18](#)
- [5] CHIANG, E., AND YODIN, A. Forming Planetesimals in Solar and Extrasolar Nebulae. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 38, 1 (Apr. 2010), 493–522. [18](#)
- [6] CIESLA, F. J., AND DULLEMOND, C. P. *Evolution of Protoplanetary Disk Structures*. Cambridge University Press, 2010, pp. 66–96. [17](#)
- [7] DE VAL-BORRO, M., ARTYMOWICZ, P., D’ANGELO, G., AND PEPLINSKI, A. Vortex generation in protoplanetary disks with an embedded giant planet. *Astronomy & Astrophysics* 471, 3 (Sept. 2007), 1043–1055. [22](#), [23](#)
- [8] GODON, P., AND LIVIO, M. Vortices in Protoplanetary Disks. *The Astrophysical Journal* 523, 1 (Sept. 1999), 350–356. [19](#)
- [9] HAWLEY, J. F. Global Magnetohydrodynamical Simulations of Accretion Tori. *The Astrophysical Journal* 528, 1 (2000), 462. [12](#)
- [10] HENG, K., AND KENYON, S. J. Vortices as nurseries for planetesimal formation in protoplanetary discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 408, 3 (Nov. 2010), 1476–1493. [24](#)
- [11] JOHANSEN, A., ANDERSEN, A. C., AND BRANDENBURG, A. Simulations of dust-trapping vortices in protoplanetary discs. *Astronomy & Astrophysics* 417, 1 (Apr. 2004), 361–374. [24](#), [25](#)

- [12] KLAHR, H., AND BODENHEIMER, P. Formation of Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas inside an Anticyclonic Vortex. *The Astrophysical Journal* 639, 1 (Mar. 2006), 432–440. [19](#)
- [13] LYRA, W., AND KLAHR, H. The baroclinic instability in the context of layered accretion. *Astronomy & Astrophysics* 527 (Feb. 2011), A138. [19](#)
- [14] LYRA, W., AND MAC LOW, M.-M. Rossby Wave Instability at dead zone boundaries in three-dimensional resistive magnetohydrodynamical global models of protoplanetary disks. *The Astrophysical Journal* 756, 1 (Sept. 2012), 62. [22](#)
- [15] MAMAJEK, E. E., MEYER, M. R., HINZ, P. M., HOFFMANN, W. F., COHEN, M., AND HORA, J. L. Constraining the Lifetime of Circumstellar Disks in the Terrestrial Planet Zone : A Mid-Infrared Survey of the 30 Myr old Tucana-Horologium Association. *The Astrophysical Journal* 612, 1 (2004), 496. [13](#)
- [16] MAMAJEK, E. E., USUDA, T., TAMURA, M., AND ISHII, M. Initial Conditions of Planet Formation : Lifetimes of Primordial Disks. *AIP Conference Proceedings* 1158, 1 (2009), 3–10. [13](#), [14](#)
- [17] MAYER, L., QUINN, T., WADSLEY, J., AND STADEL, J. Formation of giant planets by fragmentation of protoplanetary disks. *Science* 298, 5599 (Nov. 2002), 1756–9. [15](#)
- [18] PETERSEN, M. R., JULIEN, K., AND STEWART, G. R. Baroclinic vorticity production in protoplanetary disks. I. Vortex formation. *The Astrophysical Journal* 658, 2 (2007), 1236–1251. [19](#)
- [19] PETERSEN, M. R., STEWART, G. R., AND JULIEN, K. Baroclinic vorticity production in protoplanetary disks. II. Vortex growth and longevity. *The Astrophysical Journal* 658, 2 (2007), 1252–1263. [19](#)
- [20] REGALY, Z., JUHASZ, A., SANDOR, Z., AND DULLEMOND, C. P. Possible planet-forming regions on submillimetre images. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 419, 2 (Jan. 2012), 1701–1712. [26](#)
- [21] SHANGLI OU, JIANGHUI JI, LIN LIU, AND XIAOMENG PENG. Disk-planet interaction simulations. I. Baroclinic generation of vortensity and nonaxisymmetric Rossby wave instability. *Astrophysical Journal* 667, 2 (2007), 1220–1228. [22](#)
- [22] TANGA, P. Forming Planetesimals in Vortices. *Icarus* 121, 1 (May 1996), 158–170. [24](#)
- [23] VAN DER MAREL, N., VAN DISHOECK, E. F., BRUDERER, S., BIRNSTIEL, T., PINILLA, P., DULLEMOND, C. P., VAN KEMPEN, T. A., SCHMALZL, M., BROWN, J. M., HERCZEG, G. J., MATHEWS, G. S., AND GEERS, V. A major asymmetric dust trap in a transition disk. *Science* 340, 6137 (June 2013), 1199–202. [26](#)
- [24] VARNIÈRE, P., AND TAGGER, M. Reviving Dead Zones in accretion disks by Rossby vortices at their boundaries. *Astronomy & Astrophysics* 446, 2 (Feb. 2006), L13–L16. [20](#)
- [25] WOLF, S., AND KLAHR, H. Large-scale vortices in protoplanetary disks : On the observability of possible early stages of planet formation. *The Astrophysical Journal* 578, 1 (2002), L79–L82. [26](#)

DESCRIPTION DYNAMIQUE DES DISQUES

Pour de nombreux problèmes physiques, et en particulier en astrophysique, il est irréaliste de considérer toutes les échelles du système. Par exemple, pour un disque protoplanétaire, dont la taille peut atteindre 100 UA, soit $1.5 \times 10^{13} m$, considérer l'ensemble des molécules de gaz, ou des grains solides présents en son sein dont la taille est de l'ordre de $10^{-6} m$, serait impossible. Cela représenterait la résolution d'un système de plusieurs millions d'équations. En revanche, on cherche un comportement moyen de cet ensemble de particules fluides ou de solide. C'est cette description statistique qui permet d'étudier un tel problème.

L'étude statistique du mouvement d'un grand nombre de particules peut se faire dans le cadre de la cinétique des gaz, communément appelée Mécanique des Fluides. Nous allons décrire ce qu'on appelle un gaz et quelles sont les équations qui en régissent le mouvement. Ensuite, nous détaillerons ce qui rend les disques protoplanétaires différents des autres systèmes fluides.

1 Description d'un fluide

Un fluide est un milieu continu. Cela signifie que dans n'importe quel volume suffisamment grand devant le volume de libre parcours d'une particule de ce fluide, le nombre de particules est très grand. Il est donc impossible de décrire le mouvement d'un tel système. On peut en revanche chercher à étudier le mouvement d'un paquet de particules. En effet, le mouvement de chaque particule est dépendant du mouvement des autres. Dans un volume arbitraire $d\mathcal{V}$, on suppose qu'il y a N particules et une masse de $\rho d\mathcal{V}$. Ces particules se déplacent à une vitesse moyenne $\vec{V}$. Nous appellerons ρ la *densité* du fluide et $\vec{V}$ la *vitesse* du fluide. Mais chaque particule i de ce volume a une vitesse $\vec{v}_i$ qui peut être différente de la vitesse moyenne $\vec{V}$. Pour tenir compte de cet écart, on introduit un terme de *pression* P . En effet si :

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \vec{v}_i = \vec{V} \quad (\text{II.1})$$

il n'en est pas de même pour le carré :

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \vec{v}_i^2 = \vec{V}^2 + \frac{P}{\rho} \quad (\text{II.2})$$

Ainsi la pression est une formulation statistique de la dispersion des vitesses des particules du fluide par rapport à la vitesse moyenne. Cette définition qualitative sera bien sûr précisée plus tard.

On va donc chercher à décrire l'évolution temporelle de la densité, de la vitesse, de la pression et des autres grandeurs conservatives pour chaque élément du fluide.

2 Équations de conservation

Chaque volume de fluide est un système ouvert. c'est-à-dire qu'à travers la surface de ce volume, des flux de masse, d'impulsion et d'énergie, peuvent passer. La description de l'évolution temporelle d'un fluide est donc basée sur l'équilibre de ce système ouvert. On appelle cela les équations de conservation. La description de ces équations est basée sur la riche littérature qui concerne l'hydrodynamique. Nous nous sommes notamment servis des ouvrages de Batchelor, 2000 [3], de Landau, 1987 [13], de Shore, 2007 [19] et de Pringle, 2007 [18].

2.1 Conservation de la masse

La première quantité qui est conservée est la masse. C'est une propriété des milieux continus. Il n'y a pas de source de masse, par conséquent les variations de la masse d'un volume de fluide sont dues à du transport à travers sa surface. Pour un volume $\mathcal{V}$, délimité par une surface $\mathcal{S}$, les variations de la masse durant un intervalle de temps sont dues au flux de masse à travers la surface $\mathcal{S}$:

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

où le vecteur $d\vec{\mathcal{S}}$ est le vecteur unité de surface orienté vers l'extérieur du volume $\mathcal{V}$. On remarquera que l'on notera dans toute la suite, pour le confort de lecture, ∂_t la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$. De même pour la dérivée par rapport à n'importe quelle grandeur x : $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$. Le vecteur de flux est dû au transport de la quantité ρ par la vitesse moyenne du fluide $\vec{V}$. Ainsi on peut écrire l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = 0 \quad (\text{II.3})$$

On appelle cela la formulation conservative. Si on suppose que la fonction de flux $\rho \vec{V}$ est continue, on peut appliquer le théorème de Green et exprimer l'intégrale de surface comme une intégrale de volume :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) d\mathcal{V} = 0$$

Comme on a choisi un volume arbitraire $\mathcal{V}$, cette équation est valable lorsque celui-ci tend vers 0. Ainsi, on peut établir l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Cette équation est utilisée pour l'étude analytique des équations de conservation. On l'appelle aussi équation de continuité, car elle traduit le caractère continu du fluide.

Dérivée Eulérienne et Lagrangienne

Nous avons établi l'équation de conservation pour un volume de l'espace. Nous nous plaçons dans ce cas dans le point de vue Eulérien. c'est-à-dire que l'observateur est lié à l'espace et le fluide est en déplacement dans cet espace. Le point de vue Lagrangien est lié à un volume de fluide. Il se déplace avec ce volume. Le repère Lagrangien se déplace donc par rapport au repère Eulérien à la vitesse $\vec{V}$. On passe alors de l'un à l'autre par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\end{aligned}\quad (\text{II.5})$$

On note D_t la dérivée Lagrangienne par rapport au temps. Si on reprend l'équation de conservation et que l'on développe le terme $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})$ on obtient :

$$\partial_t \rho + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$D_t \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Cette équation met en évidence que l'on décrit ainsi un fluide *compressible*. En effet, la densité du fluide, dont on suit la trajectoire de ce point de vue Lagrangien, peut varier au cours du temps par le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Pour un fluide *incompressible*, la densité ne varie pas au cours du temps. On a alors :

$$D_t \rho = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Soit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Le comportement d'un fluide incompressible est différent car les solutions en ondes sont absentes. Un tel fluide possède donc des propriétés particulières qui peuvent être utiles pour l'étude analytique du problème.

2.2 Conservation de l'impulsion

La quantité de mouvement ou *impulsion* est également une grandeur conservée. C'est l'implication de la 2^{ème} loi de la dynamique. Dans le cas d'un fluide son expression est plus compliquée. Pour un volume $\mathcal{V}$, ses variations sont dues :

- au flux $\vec{F}$ à travers la surface $\mathcal{S}$
- à l'action d'un tenseur de contraintes $\vec{\tau}_s$ appliquée à $\mathcal{S}$
- aux forces volumiques extérieures $\vec{f}_e$ exercées sur le volume $\mathcal{V}$

Comme on décrit l'évolution temporelle du vecteur impulsion $\rho\vec{V}$, on est dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Par conséquent les termes de surface sont des tenseurs d'ordre 2 notés $\bar{\bar{F}}$ qui appartiennent à $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$. On peut trouver des éclaircissements sur la notion de tenseurs dans Aris, 1989 [1].

Tenseur de flux

Le tenseur de flux est toujours l'expression du transport de l'impulsion par la vitesse moyenne $\vec{V}$. Ainsi son expression est $\bar{\bar{F}} = \rho\vec{V} \otimes \vec{V}$.

Tenseur de contraintes

Le tenseur de contraintes est l'expression des forces de surface qui s'appliquent au volume de fluide. Ces forces de surface sont la modélisation de la dispersion des vitesses des particules du volume, des termes de collision entre particules, et des termes de diffusion à travers cette surface. On modélise souvent ce tenseur de contraintes par un tenseur de *pression* P isotrope, et un tenseur de *diffusion* décrit par la relation de Navier-Stokes $\bar{\bar{\tau}}_{NV}$:

$$\bar{\bar{\tau}}_s = P\mathbb{I} + \bar{\bar{\tau}}_{NV} \quad (\text{II.10})$$

$$\bar{\bar{\tau}}_{NV} = -\eta \left[\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{V} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{V})^t \right) - \frac{2}{3} \mathbb{I} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right] \quad (\text{II.11})$$

On a introduit $\mathbb{I}$ l'identité de l'espace des tenseurs d'ordre 2, et un coefficient de viscosité η . Ce dernier s'exprime souvent sous la forme $\eta = \mu\rho$, avec la constante μ qu'on appelle *viscosité cinématique*. Le tenseur de Navier-Stokes a été introduit à l'origine pour décrire la viscosité moléculaire du fluide. On peut cependant modéliser de la même façon une viscosité macroscopique due à de multiples effets moyennés sur le volume qui traduisent la diffusion de l'impulsion à travers la surface du volume.

Forces volumiques extérieures

Ce terme est l'expression des forces extérieures exercées sur le volume. Cela peut être une force de gravité, une force électromagnétique, une force de frottement aérodynamique... Nous verrons dans les paragraphes suivants l'expression de ces forces dans le modèle de disque protoplanétaire.

Si l'on combine toute ces composantes que nous venons de décrire, on exprime l'équation de conservation de l'impulsion ainsi :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \rho\vec{V} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \left(\rho\vec{V} \otimes \vec{V} + P\mathbb{I} + \bar{\bar{\tau}}_{NV} \right) \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_e d\mathcal{V} \quad (\text{II.12})$$

ou bien si on fait tendre $\mathcal{V}$ vers 0 :

$$\partial_t \rho\vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho\vec{V} \otimes \vec{V} + P\mathbb{I} + \bar{\bar{\tau}}_{NV} \right) = \vec{f}_e \quad (\text{II.13})$$

2.3 Conservation de l'énergie

La troisième équation de conservation est celle de l'énergie. Dans le cas d'un fluide, l'énergie totale qui se conserve est répartie en deux composantes principales :

- l'énergie cinétique du volume de fluide $E_c = \frac{1}{2}\rho V^2$ où $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$
- l'énergie interne du volume, ou énergie thermique E_{int}

L'énergie cinétique

La conservation de l'énergie cinétique se détermine par la combinaison de la conservation de l'impulsion et la conservation de la masse. En effet :

$$\begin{aligned}\partial_t E_c &= \rho \vec{V} \cdot \partial_t \vec{V} + \frac{1}{2} V^2 \partial_t \rho \\ &= \vec{V} \cdot \partial_t \rho \vec{V} - \frac{1}{2} V^2 \partial_t \rho\end{aligned}\tag{II.14}$$

On peut alors écrire, lorsque $\mathcal{V}$ tend vers 0, et en ne tenant pas compte du tenseur de Navier-Stokes :

$$\partial_t E_c + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + P \mathbb{I}) - \frac{1}{2} V^2 \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{f}_e\tag{II.15}$$

$$\text{Soit} \quad \partial_t E_c + \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho \vec{V} + \frac{1}{2} \rho V^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P - \frac{1}{2} V^2 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho = \vec{V} \cdot \vec{f}_e\tag{II.16}$$

Nous avons utilisé la propriété vectorielle $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$.

Après le développement selon cette propriété du 2^{ème} terme on obtient :

$$\partial_t E_c + \frac{1}{2} \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V^2 + \frac{1}{2} V^2 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \frac{1}{2} \rho V^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{V} \cdot \vec{f}_e\tag{II.17}$$

$$\text{Soit} \quad \partial_t E_c + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \rho V^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{V} \cdot \vec{f}_e\tag{II.18}$$

Ainsi en regroupant les termes on aboutit à l'équation de conservation de l'énergie cinétique :

$$\partial_t E_c + \vec{\nabla} \cdot [(E_c + P) \vec{V}] - P \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{f}_e\tag{II.19}$$

L'énergie interne

Il ne reste maintenant qu'à établir comment l'énergie interne du fluide est conservée. Pour un volume de fluide de densité ρ , l'énergie interne vaut : $E_{int} = \rho e$. On appelle e l'énergie interne par unité de masse du fluide, ou énergie interne spécifique. Cette dernière est reliée aux grandeurs thermodynamiques du fluide par le 2^{ème} principe de la thermodynamique :

$$T \delta S = \delta e + P \delta \mathcal{V}\tag{II.20}$$

avec T la température, S l'entropie, P la pression et $\delta\mathcal{V}$ la variation de volume par unité de masse de l'élément de fluide. Pour plus de détail, consulter Chan Eu, 2002 [4], ou Vallis, 2006 [21]. On peut établir que $\mathcal{V} = 1/\rho$. On obtient ainsi les variations par unité de temps pour l'élément fluide :

$$TD_tS = D_te - \frac{P}{\rho^2}D_t\rho \quad (\text{II.21})$$

On note que la dérivée temporelle est dans l'expression Lagrangienne. Donc pour un volume de densité ρ , l'énergie interne E_{int} varie ainsi :

$$D_tE_{int} = \frac{E_{int}}{\rho}D_t\rho + \rho TD_tS + \frac{P}{\rho}D_t\rho \quad (\text{II.22})$$

Si l'on injecte l'équation de continuité, on peut remplacer $D_t\rho = -\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Dans le repère Eulérien, la conservation de l'énergie interne s'écrit donc :

$$\partial_tE_{int} + \vec{\nabla} \cdot (E_{int}\vec{V}) = -P\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \rho TD_tS \quad (\text{II.23})$$

Nous avons laissé l'expression Lagrangienne de la variation temporelle de l'entropie. En effet, selon que le modèle de fluide est adiabatique ou non, ce terme peut avoir différentes expressions. Par exemple si le fluide possède une conductivité thermique λ , on peut exprimer les variations d'entropie par :

$$\rho TD_tS = \vec{\nabla} \cdot (\lambda\vec{\nabla}T) \quad (\text{II.24})$$

Il ne reste plus désormais qu'à combiner l'équation de l'énergie cinétique avec celle de l'énergie interne pour obtenir l'équation de conservation de l'énergie totale du fluide E . Comme on a $E = E_{int} + E_c$, on obtient alors :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} E d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} (E + P) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{V} \cdot \vec{f}_e d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \rho TD_tS d\mathcal{V} \quad (\text{II.25})$$

ou si l'on fait tendre $d\mathcal{V}$ vers 0 :

$$\partial_tE + \vec{\nabla} \cdot [(E + P)\vec{V}] = \vec{V} \cdot \vec{f}_e + \rho TD_tS \quad (\text{II.26})$$

2.4 Équation d'état

Nous avons établi les trois équations de conservation qui décrivent l'évolution temporelle des grandeurs conservatives d'un fluide : la densité ρ , l'impulsion $\rho\vec{V}$, et l'énergie totale E . Cependant cette dernière fait appel à l'énergie interne du fluide, dont a priori il nous manque l'expression pour fermer le système d'équations. C'est l'équation d'état du fluide qui va nous permettre de résoudre ce problème.

L'équation d'état la plus simple qui décrit pourtant très bien les fluides dilués, est le modèle de gaz parfait. Dans ce modèle on suppose que la pression est une fonction de la température et de la

densité selon la relation :

$$P = (c_P - c_V)\rho T \quad (\text{II.27})$$

avec les capacités calorifiques à pression constante $c_P = T \partial_T S)_P$ et à volume constant $c_V = T \partial_T S)_V$.

Si on note $\gamma = c_P/c_V$, on peut écrire que :

$$P = (\gamma - 1)E_{int} \quad (\text{II.28})$$

en introduisant $E_{int} = \rho c_V T$.

On a maintenant un système d'équations qui relie la densité, l'impulsion, la pression et la température de façon consistante.

Cas adiabatique

On peut encore simplifier l'équation d'énergie en supposant que le fluide est en mouvement lent par rapport au transfert thermique dans le fluide. Ainsi durant un déplacement, le fluide est toujours à l'équilibre thermique. On appelle cela l'approximation adiabatique. Dans ce cas on peut écrire que $D_t S = 0$. Cela enlève le terme présent dans l'équation de conservation de l'énergie. On peut alors établir que pour un volume de fluide :

$$D_t \frac{P}{\rho^\gamma} = 0 \quad (\text{II.29})$$

Cela est valable du point de vue Lagrangien. Cela ne signifie pas pour autant que le fluide est isentropique. Il va de soi que du point de vue Eulérien l'entropie peut varier d'un point à l'autre de l'espace.

Cas barotropique

Ce cas est plus général. Il est utile lorsque l'on n'a pas besoin de décrire précisément les propriétés thermiques du gaz. On suppose alors que la pression est simplement une fonction de la densité via la relation :

$$P = A\rho^{1+1/n} \quad (\text{II.30})$$

On appelle n l'indice polytropique. On remarque que l'on retrouve le cas adiabatique en posant $1 + 1/n = \gamma$. C'est l'approximation que nous utiliserons plus tard pour décrire le modèle de tourbillons.

Les équations de conservation étant maintenant établies, nous allons détailler quelles sont les forces volumiques qui s'appliquent au fluide dans le cas des disques protoplanétaires. Dans notre modèle, nous n'en considérons que deux : la force de *gravité* et la force de *frottement aérodynamique*.

3 Potentiel de gravité

La force de gravité est la principale force qui s'applique au fluide. Elle est due à l'interaction gravitationnelle de chaque élément massif du système. Comme nous l'avons vu, un système proto-planétaire est composé d'un astre central, de masse de l'ordre de 0.1 à 5 $M_\odot$, où $M_\odot$ est la masse solaire, et d'un disque de masse 10^{-2} à 1 $M_\odot$. La force de gravité va donc être séparée en deux composantes :

- la force centrale $\vec{F}_{kep}$, due au potentiel képlérien de l'astre central
- la force d'auto-gravité $\vec{F}_{ag}$, due au potentiel gravitationnel du disque

L'ouvrage de Franck, 2002 [6], consacré aux phénomènes d'accrétion, donne des exemples d'effets de la gravité sur les disques.

3.1 Le potentiel képlérien central

On considère que l'astre central de masse $M_\star$ est suffisamment sphérique et homogène pour considérer que son potentiel est assimilable à celui d'un point de masse $M_\star$. Dans ce cas, le potentiel de gravité dit képlérien que crée un tel objet en un point repéré, dans un repère centré sur l'astre, par le vecteur position $\vec{r}$ a pour expression :

$$\Psi_{kep} = -\frac{GM_\star}{r} \quad (\text{II.31})$$

où $r = \|\vec{r}\|$ est la distance entre le point de l'espace et le centre de l'astre. Le potentiel képlérien est à géométrie sphérique. La force képlérienne volumique qui découle de ce potentiel, et qui s'applique sur un élément de fluide de densité ρ a pour expression :

$$\vec{F}_{kep} = -\rho \vec{\nabla} \Psi_{kep} \quad (\text{II.32})$$

Dans le choix naturel d'un repère sphérique, centré sur l'astre, le potentiel et donc la force képlérienne s'expriment seulement en fonction de la distance r au centre. Ainsi :

$$\vec{F}_{kep}(r) = -\rho \frac{GM_\star}{r^3} \vec{r} \quad (\text{II.33})$$

Si on considère un élément de fluide sans pression de densité ρ plongé dans ce potentiel, on peut facilement montrer que dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, on a l'équilibre entre la force képlérienne et l'accélération centrale :

$$\vec{F}_{kep}(r) = -\rho \frac{V_\perp^2}{r^2} \vec{r} \quad (\text{II.34})$$

où $\vec{V}_\perp$ est la composante de la vitesse de l'élément de fluide selon la direction perpendiculaire à la force képlérienne. Nous voulons montrer que la présence du potentiel képlérien impose, dans le cas

d'un mouvement circulaire uniforme, une vitesse de rotation V_{kep} :

$$V_{kep}(r) = \left(\frac{GM_\star}{r} \right)^{1/2} \quad (\text{II.35})$$

Ainsi plus on s'éloigne de l'astre, plus la vitesse de rotation diminue. Dans le cas d'un fluide, cela impliquera un écoulement cisailé. Nous verrons que cela a une importance sur la stabilité du disque.

L'écoulement du gaz est enfin caractérisé par une vitesse angulaire de rotation $\Omega_{kep}(r)$ définie ainsi :

$$\Omega_{kep}(r) = V_{kep}(r)/r \quad (\text{II.36})$$

Cette grandeur est utile car souvent utilisée dans l'étude des écoulements des fluides en rotation. Dans le cas képlérien, $\Omega_{kep}(r)$ varie en $r^{-3/2}$ ce qui montre le cisaillement de ce type d'écoulement.

3.2 Le potentiel du disque

Le potentiel gravitationnel du disque est l'intégration sur tout le disque du potentiel de chaque élément de fluide. Si le disque a pour volume $\mathcal{V}$, alors le potentiel en un point repéré par le vecteur position $\vec{r}$ est :

$$\Psi_{ag}(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{V}} \frac{G\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}(\vec{r}') \quad (\text{II.37})$$

où $d\mathcal{V}(\vec{r}')$ représente l'élément de volume repéré par la position $\vec{r}'$. La force volumique d'auto-gravité qui en découle sera donc :

$$\vec{F}_{ag} = -\rho \vec{\nabla} \Psi_{ag} \quad (\text{II.38})$$

L'expression de ce potentiel et de cette force est très compliquée, et n'a généralement pas d'expression analytique. Nous verrons dans la partie suivante que l'on peut déterminer sa valeur par évaluation numérique de l'intégrale.

Cependant, dans certains cas, on peut exprimer ce potentiel de façon analytique. Supposons un disque sans épaisseur, donc 2D, de géométrie circulaire, possédant un bord interne au rayon r_{int} et un bord externe au rayon r_{ext} . La densité de masse par unité de surface σ est axisymétrique, et dépend du rayon de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \sigma(r_{ext}) \left(\frac{r}{r_{ext}} \right)^{\beta_\sigma} \\ &= \sigma_{ext} \omega^{\beta_\sigma} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

en introduisant $\omega = r/r_{ext}$. L'exposant β_σ peut prendre des valeurs variées mais généralement $\beta_\sigma < 0$ pour les disques protoplanétaires.

Les travaux de Huré et de Pierens consacrés au potentiel axisymétrique et ses solutions de l'équation de Poisson du potentiel [8], [9] et [17], montrent que dans ce cas, le potentiel est solution d'une équation différentielle du premier ordre dont la solution est une série infinie du rayon. Après

accélération de la convergence de la série en utilisant le potentiel au bord interne et externe, on peut écrire le potentiel d'auto-gravité dans le disque, c'est-à-dire pour un point compris entre r_{int} et r_{ext} de la façon suivante :

$$\frac{\Psi_{ag}(\omega)}{\Psi_{ag}(r_{ext})} = A\omega^{1+\beta_\sigma} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\omega^{2n} + \frac{b_n}{\omega^{2n+1}} \right) \quad (\text{II.40})$$

si $\beta_\sigma \neq -1$ ou $\beta_\sigma \neq -2$. On pose $\Psi_{ag}(r_{ext}) = \Psi_{ext} = 2\pi r_{ext} G\sigma(r_{ext})$. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Huré, 2008 [9], pour l'expression détaillée des coefficients A , a_n et b_n . Cette série exprime le potentiel avec une précision inférieure à 5% par rapport à la valeur convergée dès troncation à $n = 1$. L'ajout d'ordres supérieurs diminue encore cette erreur.

La troncation à l'ordre $n = 0$ donne le potentiel approché $\Psi_{ag}^{(0)}$:

$$\frac{\Psi_{ag}^{(0)}(\omega)}{\Psi_{ext}} = - \left[\frac{1}{1+\beta_\sigma} + \left(-\frac{1-6C}{\pi} - 1 - \frac{1}{(1+\beta_\sigma)(2+\beta_\sigma)} \right) \omega^{1+\beta_\sigma} - \frac{1}{2+\beta_\sigma} \frac{\Delta^{2+\beta_\sigma}}{\omega} \right] \quad (\text{II.41})$$

où on a introduit pour plus de clarté $\Delta = r_{int}/r_{ext}$. La constante C est la constante de Catalan. Numériquement, on utilisera que $(1-6C)/\pi \simeq -1.43106$. La précision à cet ordre est de $\sim 10\%$, pour $\beta_\sigma \sim [-3, 0]$.

Si on ajoute l'ordre suivant, $n = 1$, on a le potentiel approché à l'ordre 1, $\Psi_{ag}^{(1)}$:

$$\frac{\Psi_{ag}^{(1)}(\omega)}{\Psi_{ext}} = \frac{\Psi_{ag}^{(0)}(\omega)}{\Psi_{ext}} + \frac{1}{4(1-\beta_\sigma)}\omega^2 + \frac{1}{4(4+\beta_\sigma)}\frac{\Delta^{4+\beta_\sigma}}{\omega^3} \quad (\text{II.42})$$

La précision est maintenant inférieure à 5%, et reste de cet ordre également pour $\beta_\sigma \sim [-3, 0]$.

Nous avons utilisé la troncation à $n = 2$ pour assurer une précision inférieure à 1%. Dans ce cas, l'expression du potentiel est $\Psi_{ag}^{(2)}$:

$$\frac{\Psi_{ag}^{(2)}(\omega)}{\Psi_{ext}} = \frac{\Psi_{ag}^{(1)}(\omega)}{\Psi_{ext}} + \frac{9}{64(3-\beta_\sigma)}\omega^4 + \frac{9}{64(6+\beta_\sigma)}\frac{\Delta^{6+\beta_\sigma}}{\omega^5} \quad (\text{II.43})$$

L'expression analytique du potentiel du disque permet de corriger la vitesse de rotation du gaz dans l'approximation de mouvement circulaire. Ce potentiel étant axisymétrique, son gradient ne dépend que du rayon r . Ainsi on peut écrire l'équilibre des forces radiales de la façon suivante :

$$\partial_r \Psi_{kep} + \partial_r \Psi_{ag} = \frac{V_\perp^2}{r} \quad (\text{II.44})$$

Selon la forme du disque, c'est-à-dire la valeur de r_{int} , de r_{ext} , de l'exposant β_σ et la valeur de Ψ_{ext} , la correction sur la vitesse de rotation par rapport au seul potentiel central peut être de près de 1%. Dans certains cas, le potentiel du disque peut compenser la composante de vitesse due au gradient radial de pression dans le disque.

Lorsque l'on suppose que le disque est peu supporté par la pression, mais que la vitesse de rotation du gaz est dominée par le potentiel central et celui du disque, on peut obtenir des infor-

mations précieuses sur la répartition de masse entre le disque et l'astre central. Dans le cas des Noyaux Actifs de Galaxie, en anglais AGN, l'écoulement du gaz du disque est précisément dans ce type de configuration. En étudiant les courbes de rotation du gaz dans les parties externes de ces disques, par mesure de vitesse des masers H_2O , on peut remonter à la masse du trou noir et du disque, en inversant l'équation précédente. Ce type d'application permet pour la première fois d'estimer les masses, avec une précision bien plus grande que jusqu'à présent. Cela a fait l'objet d'une publication en 2011 dans *Astronomy and Astrophysics*. (Huré, Hersant, Surville, et al. [10])

4 Particules solides

Pour simuler la présence de particules solides dans le disque, nous considérons qu'elles constituent un fluide non collisionnel. Nous avons suivi la démarche que Pierre Barge avait utilisée avant ce travail, voir Inaba, 2005 [11]. Par conséquent, il s'agit d'un fluide sans tenseur de pression. La description de la dynamique de cette phase est la même que celle décrite plus haut, à l'exception de l'équation de conservation de l'énergie. En effet, un tel fluide n'a pas d'énergie interne, puisqu'il est non collisionnel. Décrire l'évolution de sa simple énergie cinétique serait redondant avec l'équation de conservation de l'impulsion. Pour un fluide de particules de densité ρ_p , de vitesse moyenne $\vec{V}_p$, on a alors les équations de conservation suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t \int_V \rho_p dV + \oint_S \rho_p \vec{V}_p \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \partial_t \int_V \rho_p \vec{V}_p dV + \oint_S \rho_p \vec{V}_p \otimes \vec{V}_p \cdot d\vec{S} &= \int_V \vec{f}_{ep} dV\end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante dans le cas de fonctions continues :

$$\partial_t \rho_p + \vec{\nabla} \cdot (\rho_p \vec{V}_p) = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$\partial_t \rho_p \vec{V}_p + \vec{\nabla} \cdot (\rho_p \vec{V}_p \otimes \vec{V}_p) = \vec{f}_{ep} \quad (\text{II.46})$$

Les forces volumiques qui s'appliquent à un élément de fluide de particules sont :

- La force de gravité : $\rho_p (\vec{F}_{kep} + \vec{F}_{ag})$
- La force de frottement aérodynamique : $\vec{F}_{aéro}$

Cette dernière force est la force d'interaction aérodynamique entre le fluide de particule et le fluide du disque. Nous allons voir que sa valeur dépend du rapport entre la taille caractéristique des particules et le libre parcours d'une molécule de gaz. Les ouvrages de Peker, 2008 [16], et de Armitage, 2009 [2], nous ont permis de détailler ces lois.

4.1 Le régime de Epstein

Lorsque une particule est petite devant le libre parcours d'une molécule de gaz, on dit que l'on est dans le régime d'Epstein. Dans ce cas, on modélise la force aérodynamique comme le résultat des

collisions entre les molécules de gaz et la particule solide. Dans ce cas, la force est proportionnelle à la section de la particule, et au flux d'impulsion moléculaire du gaz. Si on note $\Delta\vec{V} = \vec{V}_p - \vec{V}$ la vitesse relative des particules par rapport au gaz, et r_p le rayon caractéristique de la particule, alors la force que subit une particule a le comportement suivant :

$$\vec{F}_{aéro}^E \propto -r_p^2 \rho v_{th} \Delta\vec{V}$$

Le terme v_{th} est la vitesse d'agitation thermique du gaz. Ainsi le terme $\rho v_{th} \Delta\vec{V}$ représente le flux d'impulsion des molécules de gaz. Pour une particule sphérique, on peut exprimer la force par :

$$\vec{F}_{aéro}^E = -\frac{4}{3}\pi r_p^2 \rho v_{th} \Delta\vec{V}$$

Cela est valable pour une particule de masse m . Si on considère une particule solide sphérique, de densité interne ρ_{sol} , alors $m = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{sol}$. Donc pour un élément de fluide de particules, où il y a ρ_p/m particules, la force volumique aérodynamique vaut :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{aéro}^E &= -\frac{\rho_p}{m} \frac{4}{3}\pi r_p^2 \rho v_{th} \Delta\vec{V} \\ &= -\frac{\rho_p}{\rho_{sol} r_p} \rho v_{th} \Delta\vec{V} \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Ce régime est valable lorsque les particules sont de taille inférieure au libre parcours d'une molécule de gaz l_g . Pour un gaz de masse moléculaire μM_H , où M_H est la masse molaire de l'hydrogène, et dont la section efficace de collision moléculaire est $\check{\sigma}_{mol} = 2 \times 10^{-15} \text{ cm}^2$, alors le libre parcours vaut :

$$l_g = \left(\frac{\rho}{\mu M_H} \check{\sigma}_{mol} \right)^{-1} \quad (\text{II.48})$$

4.2 Le régime de Stokes

À l'inverse, si le rayon moyen de la particule solide est grand devant le libre parcours d'une particule de gaz, alors on est dans le régime de Stokes. Dans ce cas, la particule solide subit le comportement fluide du gaz et non plus des collisions individuelles avec les molécules de ce dernier. La force que subit une particule solide est maintenant proportionnelle à la section de la particule, et au flux d'impulsion moyen du gaz :

$$\vec{F}_{aéro}^S \propto -r_p^2 \rho \parallel \Delta\vec{V} \parallel \Delta\vec{V}$$

La particule solide va ressentir les effets de viscosité du gaz. Ces effets sont estimables via le nombre de Reynolds R_e pour la particule :

$$R_e = 2 \frac{r_p \parallel \Delta\vec{V} \parallel}{\check{\nu}_{mol}} \quad (\text{II.49})$$

Dans ce cas $\check{\nu}_{mol}$ est la viscosité moléculaire du gaz. On modélise cette viscosité moléculaire par $\check{\nu}_{mol} \sim l_g v_{th}$, avec $v_{th} = \left(\frac{8k_B T}{\pi \mu M_H} \right)^{1/2}$.

La force aérodynamique dans le régime de Stokes peut s'exprimer ainsi pour une particule solide de masse $m = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_{sol}$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{aéro}^S &= -\frac{C_D}{2}\pi r_p^2 \rho \parallel \Delta \vec{V} \parallel \Delta \vec{V} \\ &= -\frac{C_D}{4}\pi r_p \nu_{mol} R_e \rho \Delta \vec{V}\end{aligned}$$

Pour un élément de fluide de particules, où il y a ρ_p/m particules, la force finale aérodynamique vaut alors :

$$\vec{F}_{aéro}^S = -\frac{3}{8}C_D \frac{\rho_p}{\rho_{sol} r_p^2} \nu_{mol} R_e \rho \Delta \vec{V} \quad (\text{II.50})$$

Le coefficient de frottement C_D est défini par morceau selon le nombre de Reynolds des particules, d'après Weidenschilling, 1977 [22] :

$$C_D = \begin{cases} 24R_e^{-1} & \text{Si } R_e < 1 \\ 24R_e^{-0.6} & \text{Si } 1 < R_e < 800 \\ 0.44 & \text{Si } R_e > 800 \end{cases}$$

4.3 Rétroaction

Nous venons de considérer la force aérodynamique qu'exerce le gaz sur le fluide de particule. Mais par principe de rétroaction, la même force est ressentie par le gaz, mais dans le sens opposé. Ainsi le gaz subit la force volumique $-\vec{F}_{aéro}$.

Vue générale des équations

Nous pouvons récapituler les équations de conservation, en introduisant les forces volumiques que nous venons de décrire pour le gaz et pour le fluide de particules.

Pour le gaz nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \partial_t \rho \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + P \mathbb{I} + \tau_{NV}) &= \rho (\vec{F}_{kep} + \vec{F}_{ag}) - \vec{F}_{aéro} \\ \partial_t \rho E + \vec{\nabla} \cdot [(\rho E + P) \vec{V}] &= \rho \vec{V} \cdot (\vec{F}_{kep} + \vec{F}_{ag}) - \vec{V} \cdot \vec{F}_{aéro} \\ &\quad + \rho T D_t S - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \tau_{NV})\end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Pour les particules, nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_p + \vec{\nabla} \cdot (\rho_p \vec{V}_p) &= 0 \\ \partial_t \rho_p \vec{V}_p + \vec{\nabla} \cdot (\rho_p \vec{V}_p \otimes \vec{V}_p) &= \rho_p (\vec{F}_{kep} + \vec{F}_{ag}) + \vec{F}_{aéro}\end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Nous allons maintenant décrire le modèle standard de disque, et expliciter l'écriture de ces équations dans le cadre de ce modèle.

5 Modèle de la Nébuleuse Solaire de Masse Minimale

5.1 Densité de gaz

Le modèle standard de disque est basé sur les modèles de Weidenschilling cité plus haut et de Hayashi, 1981 [7] qui, à partir des observations du système solaire, ont cherché à déterminer la distribution de masse dans le disque protoplanétaire solaire. En comparant la métallicité de chaque planète avec celle du soleil, ils ont déterminé la masse initiale de gaz à l'orbite de chaque planète. Puis en répartissant uniformément ces masses sur les orbites, ils en ont déduit la densité surfacique de la nébuleuse. Cette densité varie comme une puissance du rayon. On utilise cette loi dans le Modèle de la Nébuleuse Solaire de Masse Minimale (NSMM) :

$$\sigma_0(r) = 1700 \left(\frac{r}{1AU} \right)^{\beta_\sigma} g.cm^{-2} \quad (II.53)$$

avec $\beta_\sigma = -3/2$

La masse totale contenue dans un tel disque est d'environ $0.01 M_\odot$. Aujourd'hui, plusieurs observations de disques protoplanétaires permettent d'étendre l'exposant de la loi de puissance β_σ entre -1 et -2 . La masse de ces disques est comprise entre 0.1 et $0.001 M_\odot$. L'estimation du modèle NSMM est donc compatible avec ces observations. Cependant, ce modèle est bien valable dans la région des planètes géantes ($5 - 15 AU$) mais peut être amélioré dans la région centrale, où l'on trouve les planètes telluriques. En particulier, on suppose dans le modèle NSMM que tous les planétésimaux et le gaz sont accrétés sur les planètes, alors qu'il peut y avoir des pertes (photoévaporation, vents stellaires...). Des modèles plus détaillés existent et permettent d'affiner les résultats en terme de formation planétaire comme d'évolution des systèmes planétaires (Modèle "Nice", Tsigani, 2005 [20]).

5.2 Température

La distribution de température peut elle aussi être estimée de la même façon. En considérant la densité de surface décrite plus haut et en supposant une étoile de type solaire, d'après Chiang et Goldreich, 1997 [5], donnent une température dans le plan du disque, pour un rayon r compris entre 0.4 et $84 AU$:

$$T_{CG}(r) = 150 \left(\frac{r}{1AU} \right)^{-3/7} K \quad (II.54)$$

On peut utiliser une autre expression, compromis entre le modèle de Chiang et le modèle de disque évasé (Kenyon et Hartmann, 1987 [12]) :

$$T_0(r) = 180 \left(\frac{r}{1AU} \right)^{\beta_T} K \quad (II.55)$$

avec $\beta_T = -1/2$

Ces deux expressions sont similaires, de plus il semble que les observations des poussières dans les disques protoplanétaires donnent une marge d'exposant β_T assez large, entre -0.3 et -1 .

5.3 Échelle de hauteur

La structure verticale du disque est une inconnue qu'il faut déterminer. Si on se place dans l'hypothèse d'une température uniforme en altitude, cela constitue une bonne approximation dans les parties internes du disque car les disques sont de manière générale optiquement épais. Par conséquent le rayonnement de l'étoile, et la réémission du gaz et des poussières de surface ne parviennent pas dans les zones internes.

Dans cette approximation isotherme en altitude, on peut établir que la pression est reliée à la densité par la relation des gaz parfaits :

$$P(z) = c_s^2 \rho(z) \quad (\text{II.56})$$

avec $c_s = \left(\frac{k_B T}{\mu M_H}\right)^{1/2}$ la vitesse du son isotherme, constante en altitude. Si on appelle g_z la composante verticale de la force de gravité képlérienne au rayon r , l'équilibre des forces dans la direction verticale s'écrit à une altitude z :

$$\begin{aligned} \rho g_z &= -c_s^2 \partial_z \rho \\ \text{avec } g_z &= \frac{GM_\star}{r^2} \frac{z}{r} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

On peut réécrire cette expression en introduisant Ω_{kep} , de façon à obtenir l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\partial_z \rho = -r \left(\frac{c_s}{\Omega_{kep}}\right)^{-2} \frac{z}{r} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \rho \quad (\text{II.58})$$

Cette écriture met en évidence une échelle de hauteur $H(r)$ du disque que l'on définit ainsi :

$$H(r) = \frac{c_s(r)}{\Omega_{kep}(r)} \quad (\text{II.59})$$

en rappelant la vitesse képlérienne angulaire $\Omega_{kep}(r) = V_{kep}(r)/r$.

En exprimant la vitesse du son avec le modèle de température $T_0(r)$ discuté dans la section précédente :

$$c_{s0}(r) = \left(\frac{k_B T_0(r)}{\mu M_H}\right)^{1/2} \quad (\text{II.60})$$

on obtient une variation radiale de l'échelle de hauteur :

$$H_0(r) \propto r^{5/4} \quad (\text{II.61})$$

pour $\beta_T = -1/2$.

Ainsi un tel modèle de disque est évasé vers les parties externes. Ce raisonnement est également valable dans le cas adiabatique. Dans ce cas, la pression est reliée à la densité ρ par l'expression de la vitesse du son adiabatique :

$$\begin{aligned} c_s^2 &= \frac{\partial P}{\partial \rho} \\ &= \gamma \frac{P}{\rho} \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

On a donc toujours $P \propto c_s^2 \rho$, et le résultat reste identique si la température est constante en altitude.

On peut noter enfin que l'expression de l'échelle de hauteur est obtenue par l'équilibre entre la composante verticale de la résultante des forces et le gradient vertical de la pression. Ainsi, si le disque est en rotation à une vitesse angulaire $\Omega(r)$ quelconque, on définit toujours l'échelle de hauteur par :

$$H(r) = \frac{c_s(r)}{\Omega(r)} \quad (\text{II.63})$$

5.4 Modèle de disque 2D et solution stationnaire

Dans le cas du modèle que l'on vient de décrire, l'échelle de hauteur du disque est de l'ordre de $10^{-2} r$. Par conséquent, le terme $\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2}$ est de l'ordre de 1 et *le modèle de disque que nous considérons est mince*, c'est-à-dire que sur toute sa hauteur, $\frac{z}{r} \ll 1$. Nous pouvons donc intégrer toutes les grandeurs sur l'altitude et ne considérer que les variations dans le plan de rotation. L'intégration en altitude de l'équation II.58 donne dans ce cas $\sigma = \frac{\pi}{2} H \rho$. C'est donc un modèle 2D des équations fluides qui va décrire la dynamique du disque. L'utilisation d'un modèle 2D se justifie dans le cas où l'on cherche à étudier la dynamique générale du disque, et en particulier une grande étendue de sa surface. De plus, ce sont les grandes structures telles que les tourbillons qui sont au centre de notre étude. Les mouvements dans la troisième dimension seront donc négligés dans notre travail. Lorsque la température du disque est trop grande pour négliger le terme $\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2}$, alors une approche 3D est nécessaire. Nous nous limitons donc aux disques relativement froids.

On peut écrire les équations fluides, dans le cas d'un gaz non visqueux, soumis au potentiel de gravité que nous avons décrit, dans cette approche bidimensionnelle. Dans un repère cylindrique, centré sur l'étoile centrale, dont la base des vecteurs est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, ces équations s'expriment ainsi :

$$\partial_t \sigma + \frac{1}{r} \partial_r r \sigma U + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma V = 0 \quad (\text{II.64})$$

$$\partial_t \sigma U + \frac{1}{r} \partial_r r (\sigma U^2 + P) + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma U V = \sigma \vec{f}_e \cdot \vec{e}_r + \sigma \frac{V^2}{r} + \frac{P}{r} \quad (\text{II.65})$$

$$\partial_t \sigma V + \frac{1}{r} \partial_r r (\sigma V U) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\sigma V^2 + P) = \sigma \vec{f}_e \cdot \vec{e}_\theta - \sigma \frac{U V}{r} \quad (\text{II.66})$$

$$\partial_t E + \frac{1}{r} \partial_r r (E + P) U + \frac{1}{r} \partial_\theta (E + P) V = \sigma \vec{V} \cdot \vec{f}_e \quad (\text{II.67})$$

avec $\vec{V} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta$.

Les termes additionnels dans les membres de droite des équations du mouvement proviennent de l'expression de la divergence des termes tensoriels $\rho\vec{V} \otimes \vec{V}$. Enfin, le terme P/r provient de l'égalité $\partial_r P = r^{-1}\partial_r(rP) - P/r$.

Ce système d'équation est au coeur de notre travail. C'est ce qui nous permet de décrire l'évolution du disque $2D$, et de suivre les structures qui s'y forment. Ce système non linéaire devra être résolu numériquement, mais on pourra également le linéariser afin d'obtenir des résultats analytiques.

C'est pour cette dernière raison qu'il est indispensable de connaître un comportement statique du disque. C'est cette solution stationnaire que nous allons perturber par un tourbillon, ou par une instabilité, et autour de laquelle nous pouvons linéariser les équations. Nous allons proposer une solution stationnaire axisymétrique associée au profil de densité $\sigma_0(r)$ et de température $T_0(r)$ que nous venons de discuter dans le modèle de disque.

Potentiel képlérien

Nous commencerons par considérer uniquement la force képlérienne de l'étoile. La force extérieure $\vec{f}_e$ vaut alors :

$$\vec{f}_e = \vec{F}_{kep}(r) = -\sigma_0 \frac{V_{kep}^2(r)}{r} \vec{e}_r \quad (\text{II.68})$$

La stationnarité implique que les dérivées temporelles sont nulles. Si on impose une vitesse radiale nulle, c'est-à-dire un disque sans accrétion, on obtient la solution stationnaire suivante :

$$U_0 = 0 \quad (\text{II.69})$$

$$V_0(r) = \left(V_{kep}^2(r) + \frac{r}{\sigma_0(r)} \partial_r P_0(r) \right)^{1/2} \quad (\text{II.70})$$

$$\sigma_0(r) = \sigma_0(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\beta_\sigma} \quad (\text{II.71})$$

$$T_0(r) = T_0(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\beta_T} \quad (\text{II.72})$$

$$P_0(r) = \frac{k_B}{\mu M_H} T_0(r) \sigma_0(r) \quad (\text{II.73})$$

Notons que cette expression permet de modifier la normalisation de la densité et de la température, en définissant $\sigma_0(r_0)$ et $T_0(r_0)$, où r_0 est le rayon de référence, le plus souvent au centre du disque. Lorsque le choix des gradients de densité et de température β_σ et β_T est similaire aux observations, l'exposant de la pression vaut $-3/2 + -1/2 = -2$. La pression est alors une fonction décroissante du rayon. La vitesse de rotation du gaz V_0 est par conséquent inférieure à la vitesse képlérienne. L'écoulement dans le disque est *subképlérien* en raison du gradient radial de pression.

Cette remarque est importante en particulier en présence de particules solides. En effet, ces dernières ont tendance à orbiter à la vitesse képlérienne. De fait, même en écoulement laminaire, elles

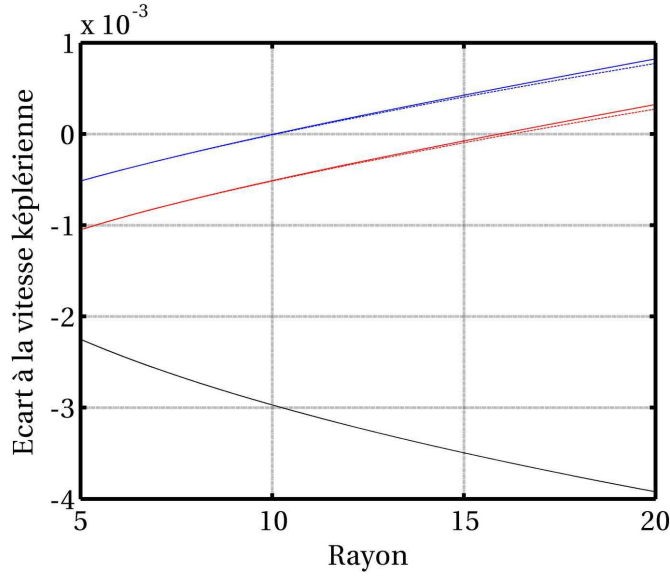


Figure II.1 – Écart relatif entre la vitesse de rotation azimutale et la vitesse képlérienne, dans le cas sans auto-gravité, c'est-à-dire avec la seule contribution du gradient de pression (en noir) et dans différents cas d'auto-gravité. En rouge est tracé l'écart relatif entre la vitesse de rotation induite par un disque d'extension 2 à 50 UA (trait plein) et d'extension 2 à 100 UA (tirets) avec la vitesse képlérienne. En bleu est tracé l'écart relatif entre la vitesse de rotation induite par un disque d'extension 1 à 50 UA (trait plein) et d'extension 1 à 100 UA (tirets) avec la vitesse képlérienne.

subissent une force de friction qui, comme on l'a vu, est proportionnelle à l'écart de vitesse entre les deux phases. Par conséquent, elles sont constamment freinées et ont tendance à migrer radialement vers l'étoile. On peut exprimer une solution stationnaire des vitesses dans l'approximation linéaire des équations fluides. Une telle solution a été proposée par Nakagawa, 1986 [15].

Potentiel total, incluant l'auto-gravité

Si on tient compte de la force d'auto-gravité du disque, le potentiel gravitationnel du disque ajoute encore à cet écart à l'écoulement képlérien. En effet, si on considère le potentiel d'auto-gravité d'un disque axisymétrique tel que discuté dans la section précédente, on a l'équilibre des vitesses tangentielles suivant :

$$V_0^2(r) = V_{kep}^2(r) + r \partial_r \Psi_{ag}(r) + \frac{r}{\sigma_0(r)} \partial_r P_0(r) \quad (\text{II.74})$$

Dans le cas de la densité $\sigma_0(r)$ en puissance β_σ du rayon, on peut calculer l'expression du

gradient de Ψ_{ag} , à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \partial_r \Psi_{ag}(r) = 2\pi G \frac{\sigma_0(r_0)}{r_0^{\beta_\sigma+1}} & \left[(\beta_\sigma + 1) A r^{\beta_\sigma} - \frac{r_{int}^{\beta_\sigma+2}}{(\beta_\sigma + 2)} r^{-2} - \frac{1}{2} \frac{r_{ext}^{\beta_\sigma-1}}{(\beta_\sigma - 1)} r \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \frac{r_{int}^{\beta_\sigma+4}}{(\beta_\sigma + 4)} r^{-4} - \frac{36}{64} \frac{r_{ext}^{\beta_\sigma-3}}{(\beta_\sigma - 3)} r^3 - \frac{45}{64} \frac{r_{int}^{\beta_\sigma+6}}{(\beta_\sigma + 6)} r^{-6} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Nous avons introduit pour simplifier :

$$A = \left(-\frac{1-6C}{\pi} - 1 - \frac{1}{(1+\beta_\sigma)(2+\beta_\sigma)} \right) \quad (\text{II.76})$$

La solution stationnaire d'un disque auto-gravitant est donc similaire à celle d'un disque képlérien, seule la vitesse azimutale $V_0(r)$ est modifiée par l'ajout du gradient du potentiel du disque. Ce terme a pour effet de changer le caractère subképlérien imposé par le gradient de pression. Nous avons comparé cette influence en fonction de la taille du disque, pour un disque de type NMSM, avec $\beta_\sigma = -1.5$ et $\beta_T = -0.5$.

La Figure II.1 montre la comparaison entre les vitesses azimutales d'un modèle sans auto-gravité et celles d'un modèle dans lequel on la considère pour un disque de différentes tailles. En rouge, le potentiel est calculé pour un rayon interne $r_{int} = 2 \text{ AU}$ et un rayon externe $r_{ext} = 50 \text{ AU}$ (trait plein) ou $r_{ext} = 100 \text{ AU}$ (tirets). En bleu, le potentiel est calculé pour un rayon interne $r_{int} = 1 \text{ AU}$ et un rayon externe $r_{ext} = 50 \text{ AU}$ (trait plein) ou $r_{ext} = 100 \text{ AU}$ (tirets). On constate tout d'abord que dans la zone comprise entre 5 AU et 20 AU , l'extension externe du disque a peu d'influence sur la vitesse de rotation du gaz. C'est surtout l'influence du bord interne qui modifie cette vitesse. C'est en effet dans cette partie que l'essentiel de la masse est distribuée. Pour finir on remarque que la contribution de l'auto-gravité peut permettre à un disque possédant un gradient de pression de s'écouler de manière quasi képlérienne.

5.5 Équation de la vorticité

Pour clore ce chapitre sur les équations qui décrivent la dynamique d'un disque protoplanétaire dans le cadre de notre étude, nous allons aborder la notion de vorticité. C'est une grandeur qui caractérise le caractère tournant du gaz, sa rotation dans l'espace. Les tourbillons sont précisément des structures qui possèdent une rotation propre dans le disque, comme une toupie tourne sur elle-même. Cette grandeur est donc le choix évident pour décrire les tourbillons. Nous avons trouvé dans l'ouvrage de Madja, 2002 [14], consacré à la vorticité des gaz incompressibles, des développements également intéressants.

La vorticité $\vec{\omega}_T$ est définie mathématiquement comme le rotationnel du champ des vitesses $\vec{V}$:

$$\vec{\omega}_T = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (\text{II.77})$$

Nous appelons $\vec{\omega}_T$ la vorticité totale, dans le repère utilisé. Si ce repère est à trois dimensions, il

s'agit évidemment d'un vecteur, mais dans le cas $2D$ de notre modèle de disque, la vorticité se réduit à un scalaire, correspondant à la norme du produit vectoriel. Selon notre choix de coordonnées $2D$, la vorticité totale s'exprime ainsi :

$$\omega_T = \frac{1}{r} \partial_r r V - \frac{1}{r} \partial_\theta U \quad (\text{II.78})$$

On peut dériver l'équation d'évolution de la vorticité $\vec{\omega}_T$ en prenant le rotationnel des équations des vitesses pour obtenir que :

$$\partial_t \vec{\omega}_T + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}_T + \vec{\omega}_T \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = (\vec{\omega}_T \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \vec{\nabla} \times \vec{f}_e + \sigma^{-2} \vec{\nabla} \sigma \times \vec{\nabla} P \quad (\text{II.79})$$

avec $\vec{f}_e$ le vecteur résultant des forces volumiques extérieures. Dans notre cas, il s'agira de la somme de la force centrale de gravité képlérienne de l'étoile, de la force d'auto-gravité du disque et de la force de friction aérodynamique.

En reconsidérant le cas $2D$, on se rend compte que le premier terme du membre de droite est nul, car en coordonnées cylindriques, la vorticité étant alignée à la direction vertical, il se réduit à $\omega_T \partial_z V_z = 0$, puisqu'il n'y a pas de vitesse vertical V_z dans le cas $2D$. On peut donc écrire de façon scalaire :

$$\partial_t \omega_T + \frac{1}{r} \partial_r r \omega_T U + \frac{1}{r} \partial_\theta \omega_T V = \| \vec{\nabla} \times \vec{f}_e \| + \| \sigma^{-2} \vec{\nabla} \sigma \times \vec{\nabla} P \| \quad (\text{II.80})$$

L'équation d'évolution de la vorticité est donc une équation d'advection similaire à celle de l'impulsion. On constate que les termes source de vorticité sont de deux origines différentes :

- un terme dû aux *forces externes*, qui est nul dans le cas du simple potentiel képlérien. Il devient non nul lorsque l'auto-gravité du disque n'est pas axisymétrique, et lorsque les forces aérodynamiques sont présentes.
- un terme dû aux *forces internes*, dit barocline, qui provient d'un désalignement des isocontours de densité et de pression. Dans le cas d'un gaz polytropique, ce terme est nul car les gradients de pression et de densité sont colinéaires.

On voit donc comment la vorticité peut être crée ou diluée dans le disque.

Pour terminer, nous insistons sur le fait qu'un disque protoplanétaire possède une vorticité propre, qui est associée à la solution stationnaire que nous avons développée. Cette dernière a pour expression :

$$\omega_0(r) = \frac{1}{r} \partial_r r V_0(r) - \frac{1}{r} \partial_\theta U_0 \quad (\text{II.81})$$

$$= 2\Omega_0(r) + r \partial_r \Omega_0(r) \quad (\text{II.82})$$

où nous avons introduit la vitesse angulaire de la solution stationnaire $\Omega_0(r) = V_0(r)/r$. Cette dernière est légèrement différente de la vitesse angulaire képlérienne $\Omega_{kep}(r) \propto r^{-3/2}$, à cause de la contribution du gradient de pression à la rotation $V_0(r)$.

Nous allons introduire la notation suivante, très utile tout au long de notre étude. Pour une

fonction quelconque $f(r)$, on note :

$$\beta_f(r) = \frac{r}{f(r)} \partial_r f(r) \quad (\text{II.83})$$

On remarque que lorsque $f(r) \propto r^p$, avec p constant, alors $\beta_f = p$, ce qui nous donne l'exposant de la loi de puissance.

Ainsi, dans le cas de la vorticité stationnaire, on obtient :

$$\omega_0(r) = 2\Omega_0(r)(1 + \beta_\Omega(r)/2) \quad (\text{II.84})$$

On peut montrer que l'erreur que l'on introduit, en considérant que $\beta_\Omega(r) = -3/2$ comme dans le cas d'un disque purement képlérien, est inférieure à 10^{-3} pour un disque d'échelle de hauteur $H_0(r_0)/r_0 = 0.1$, ce qui est assez épais, et cette erreur se réduit à 10^{-5} pour un disque mince où $H_0(r_0)/r_0 = 0.01$. On utilisera donc $\beta_\Omega = -3/2$, dans le cas du disque képlérien, ce qui mène à la vorticité du disque :

$$\omega_0(r) = 2\Omega_0(r)(1 + \beta_\Omega/2) = \frac{1}{2}\Omega_0(r) \quad (\text{II.85})$$

Un disque protoplanétaire possède donc une vorticité non nulle et positive, ce qui traduit la rotation du gaz autour de l'étoile. Nous verrons dans la suite de ce travail l'utilité que nous ferons de ces notions de vorticité et de gradient $\beta_f(r)$.

6 Conclusions

Nous venons de décrire les équations qui régissent le mouvement d'un fluide dans le cadre de la cinétique des gaz. L'expression des équations de conservation d'Euler a été donnée tout d'abord dans le cadre général $3D$, sans présumer de topologie de l'espace, c' st à dire de système de coordonnées. Cela nous permet de garder la généralité nécessaire pour comprendre le cadre physique de notre étude. Nous avons également abordé le tenseur de Navier-Stokes, qui décrit la viscosité du fluide, et que nous prévoyons d'utiliser à l'avenir. Enfin, l'utilisation de l'équation d'énergie, associée à l'équation d'état adiabatique, place notre description du gaz dans un cadre plus général que l'approche isotherme utilisée plus couramment dans la simulation des disques.

Nous avons décrit les différentes forces volumiques qui entrent en jeu dans le système étoile/disque, en décrivant le potentiel képlérien de l'étoile, mais aussi le potentiel d'auto-gravité du disque. En association avec J.M. Huré, nous utilisons une description analytique de ce dernier potentiel lorsque la distribution de densité du gaz est une loi de puissance du rayon axisymétrique. Cette approche originale, permet de tenir compte de la contribution de tout le disque, sous la forme d'une force centrale. Elle permet aussi des applications de mesure de la masse du système astre/disque.

La présence d'une phase de particules solides est décrite dans l'approximation fluide, où l'on néglige les collisions entre particules. De fait, les équations d'évolution de cette phase sont similaires à celle du gaz, mais en négligeant le tenseur de pression. Cette approche permet d'utiliser la même

écriture pour les deux phases. Le couplage aérodynamique entre ces dernières est décrit par le régime de Stokes ou d'Epstein, selon le rapport entre la taille des particules, et le libre parcours moyen des molécules de gaz. La rétroaction de cette force de couplage sur le gaz est aussi prise en compte.

Enfin, nous avons détaillé l'ensemble de ces équations dans le cadre des disques protoplanétaires $2D$, dans un système de coordonnées cylindriques centré sur l'étoile. Le modèle NSMM permet d'exprimer une solution axisymétrique stationnaire, lorsque la densité et la température du disque sont des lois de puissance du rayon. Cette solution stationnaire est au coeur de notre approche générale, car nous allons la perturber par une instabilité ou un tourbillon. La connaissance précise de son écriture est donc primordiale.

La solution de ces systèmes d'équations doit maintenant être obtenue de façon numérique, afin de respecter leur caractère non linéaire. Le chapitre suivant est donc consacré à la description de la méthode numérique que nous allons utiliser. La conservation de la stationnarité de la solution stationnaire sera un des défis que nous devrons relever.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, New York, 1989. [34](#)
- [2] ARMITAGE, P. J. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, New York, USA, 2009. [41](#)
- [3] BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2000. [32](#)
- [4] CHAN EU, B. *Generalized Thermodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 2002. [36](#)
- [5] CHIANG, E. I., AND GOLDREICH, P. Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars with Passive Circumstellar Disks. *The Astrophysical Journal* *490*, 1 (Nov. 1997), 368–376. [44](#)
- [6] FRANCK, J., KING, A., AND REINE, D. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, New York, 2002. [38](#)
- [7] HAYASHI, C. Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement* *70* (1981), 35–53. [44](#)
- [8] HURÉ, J.-M., AND HERSANT, F. A new equation for the mid-plane potential of power law disks. *Astronomy & Astrophysics* *467*, 3 (June 2007), 907–910. [39](#)
- [9] HURÉ, J.-M., HERSANT, F., CARREAU, C., AND BUSSET, J.-P. A new equation for the mid-plane potential of power law discs. *Astronomy & Astrophysics* *490*, 2 (Nov. 2008), 477–486. [39](#), [40](#)
- [10] HURÉ, J.-M., HERSANT, F., SURVILLE, C., NAKAI, N., AND JACQ, T. AGN disks and black holes on the weighting scales. *Astronomy & Astrophysics* *530* (May 2011), A145. [41](#)
- [11] INABA, S., BARGE, P., DANIEL, E., AND GUILLARD, H. A two-phase code for protoplanetary disks. *Astronomy & Astrophysics* *431*, 1 (Feb. 2005), 365–379. [41](#)
- [12] KENYON, S. J., AND HARTMANN, L. Spectral energy distributions of T Tauri stars - Disk flaring and limits on accretion. *The Astrophysical Journal* *323* (Dec. 1987), 714. [44](#)

- [13] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1987. [32](#)
- [14] MADJA, A. J., AND BERTOZZI, A. L. *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge University Press, New York, 2002. [49](#)
- [15] NAKAGAWA, Y., SEKIYA, M., AND HAYASHI, C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass solar nebula. *Icarus* 67, 3 (1986), 375–390. [48](#)
- [16] PEKER, AND HELVACI. *Solid-Liquid Two Phase Flow*. Elsevier, Amsterdam, 2008. [41](#)
- [17] PIERENS, A., AND HURÉ, J.-M. Solutions of the axi-symmetric Poisson equation from elliptic integrals. *Astronomy & Astrophysics* 434, 1 (2005), 17–23. [39](#)
- [18] PRINGLE, J. E., AND KING, A. R. *Astrophysical flows*. Cambridge University Press, New York, 2007. [32](#)
- [19] SHORE, S. N. *Astrophysical Hydrodynamics*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany, July 2007. [32](#)
- [20] TSIGANIS, K., GOMES, R., MORBIDELLI, A., AND LEVISON, H. F. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature* 435, 7041 (May 2005), 459–61. [44](#)
- [21] VALLIS, G. K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2006. [36](#)
- [22] WEIDENSCHILLING, S. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 180 (1977), 57–70. [43](#)

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS : LE CODE ROSSBI

L'évolution accélérée des technologies informatiques, en particulier l'apparition de machines multicoeurs, rend la simulation numérique indispensable à l'étude des problèmes complexes. L'acquisition de ce type de machines est désormais accessible aux laboratoires de recherche, et permet une souplesse bien plus grande que l'utilisation des moyens de calculs massifs nationaux. Cela est particulièrement valable lors de la phase de développement logiciel.

Nous sommes partis d'un code numérique issu d'une collaboration entre le LAM (Pierre Barge), l'IUSTI (Éric Daniel) et l'INRIA (Hervé Guillard). Une partie du développement a été effectuée par Satoshi Inaba de l'Université Waseda au Japon et a abouti à la réalisation d'un premier outil de simulation numérique dédié aux disques protoplanétaires (voir référence déjà citée au Chapitre 2, Inaba 2005 [20]). Notons que de nombreuses équipes préfèrent une autre démarche : adapter au cas étudié un des nombreux codes hydrodynamiques aujourd'hui disponibles en libre accès, comme notamment ZEUS (Stone, 1992 [27]), VAC (voir le site web initié par Toth [30]), ou le Pencil Code (un projet dirigé par Brandenburg, voir le site web [2]). Ce premier code, développé en Fortran 90, n'était cependant pas optimisé car le schéma numérique utilisé n'était pas un schéma équilibré, et l'exécution était séquentielle et non parallèle.

Nous allons aborder dans cette partie la description des différentes approches numériques possibles en soulignant les spécificités de l'écoulement d'un disque et les raisons pour lesquelles il est crucial de développer un code dédié.

La résolution numérique des équations fluides fait appel à différentes techniques dont chacune impose des problématiques diverses. Il faut s'assurer de la stabilité de l'algorithme, c'est-à-dire que la solution ne doit pas diverger lorsque des erreurs numériques s'accumulent. La convergence du schéma est une condition nécessaire à cette stabilité. Cela signifie que lorsque la résolution numérique augmente, la solution numérique doit converger vers une solution exacte des équations. Enfin, en particulier dans le cas des équations d'Euler, la diffusion numérique doit être minimale afin d'éviter une viscosité effective qui fausserait l'étude des fluides non visqueux.

Afin de vérifier ces contraintes, il est utile de commencer par présenter les deux approches numériques classiques. Ces deux approches découlent de l'écriture des équations fluides. Les équations

de continuité et du mouvement peuvent s'écrire dans une formulation conservative :

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{\mathcal{V}} \sigma d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= 0 \\ \partial_t \int_{\mathcal{V}} \sigma \vec{V} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \left(\sigma \vec{V} \otimes \vec{V} + P \mathbb{I} \right) \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= \int_{\mathcal{V}} \sigma \vec{f}_e d\mathcal{V}\end{aligned}$$

Les variations des variables conservatives d'un volume $\mathcal{V}$ sont dues à des termes de flux à travers sa surface $\mathcal{S}$, traduits par les intégrales de surface, et des termes de sources, traduits par les intégrales de volume. Ainsi, on a bien la conservation des grandeurs sur un élément de volume. Les méthodes numériques qui résolvent ces équations sont dites à *volumes finis*. On peut se référer aux ouvrages de Chung, 2002 [7], et de Ferziger, 2002 [9], qui détaillent de façon conséquente ces méthodes, et qui ont constitué la base bibliographique de ce Chapitre.

Si on utilise le théorème de Green, on peut transformer les intégrales de surface en intégrales de volume et on a :

$$\begin{aligned}\partial_t \sigma + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \sigma + \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\ \partial_t \sigma \vec{V} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \sigma \vec{V} + \sigma \vec{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \sigma \vec{f}_e - \vec{\nabla} P\end{aligned}$$

Dans ce cas on fait apparaître le gradient des grandeurs physiques. En discrétisant ces gradients, on aboutit à des méthodes dites à *différences finies*. Les problèmes de ces méthodes sont que la formulation n'est plus conservative et que le schéma numérique est généralement diffusif. Ces méthodes sont adaptées à la résolution des équations de Navier-Stokes mais peu à celle des équations d'Euler. De plus, l'usage du théorème de Green suppose que les fonctions à intégrer sont continues. Ainsi, une méthode aux différences finies est peu précise en cas d'écoulements compressibles où des chocs et des discontinuités sont présents. Nous avons trouvé dans Smith, 2004 [26], des éléments de comparaison entre les deux méthodes.

Nous avons donc choisi la méthode des volumes finis car celle-ci est la mieux adaptée pour résoudre les équations d'Euler compressibles. C'est une des particularités importantes du code que nous développons. Nous allons présenter en détail cette méthode dans le cas de son implémentation pour la simulation d'un disque protoplanétaire. L'aboutissement de ce travail est un code numérique spécifique dédié aux fluides en rotation, tels que les disques, que nous avons baptisé *ROSSBI*, acronyme de *ROtating System Simulation code for BI fluids*.

1 La méthode des volumes finis

1.1 Le système d'équations

Comme nous l'avons déjà mentionné, la méthode des volumes finis est basée sur l'écriture conservative des équations d'Euler. Réécrivons les dans un repère cylindrique de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, pour

un fluide soumis à la seule force extérieure képlérienne, dans une géométrie 2D :

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathcal{V}} \sigma U d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} (\sigma U \vec{V} + P \vec{e}_r) \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= \int_{\mathcal{V}} \sigma \frac{V^2}{r} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \sigma \frac{V_{kep}^2}{r} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{P}{r} d\mathcal{V} \\
\partial_t \int_{\mathcal{V}} \sigma V d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} (\sigma V \vec{V} + P \vec{e}_\theta) \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= - \int_{\mathcal{V}} \sigma \frac{UV}{r} d\mathcal{V} \\
\partial_t \int_{\mathcal{V}} E d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} (E + P) \vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= - \int_{\mathcal{V}} \sigma U \frac{V_{kep}^2}{r} d\mathcal{V} \\
\partial_t \int_{\mathcal{V}} \sigma d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \sigma \vec{V} \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= 0
\end{aligned}$$

avec pour rappel le vecteur vitesse $\vec{V} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta$.

Nous allons introduire des variables conservatives dites d'Euler E_k , des termes de flux $\vec{F}_k$ et des termes sources S_k , pour chacune des équations. Ainsi on peut écrire :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} E_1 d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} S_1^1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} S_1^2 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} S_1^3 d\mathcal{V} \quad (\text{III.1})$$

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} E_2 d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} S_2 d\mathcal{V} \quad (\text{III.2})$$

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} E_3 d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \vec{F}_3 \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} S_3 d\mathcal{V} \quad (\text{III.3})$$

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} E_4 d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}} \vec{F}_4 \cdot d\vec{\mathcal{S}} = 0 \quad (\text{III.4})$$

avec :

$$\begin{cases} E_1 = \sigma U \\ E_2 = \sigma V \\ E_3 = E \\ E_4 = \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{F}_1 = (\sigma U^2 + P) \vec{e}_r + \sigma UV \vec{e}_\theta \\ \vec{F}_2 = \sigma V U \vec{e}_r + (\sigma V^2 + P) \vec{e}_\theta \\ \vec{F}_3 = (E + P) \vec{e}_r + (E + P) \vec{e}_\theta \\ \vec{F}_4 = \sigma U \vec{e}_r + \sigma V \vec{e}_\theta \end{cases} \quad \begin{cases} S_1^1 = \sigma V^2/r & S_1^2 = -\sigma V_{kep}^2/r & S_1^3 = P/r \\ S_2 = -\sigma UV/r \\ S_3 = -\sigma UV_{kep}^2/r \\ S_4 = 0 \end{cases}$$

Nous allons maintenant présenter les différents aspects de la méthode numérique aux volumes finis permettant de résoudre ce système d'équations.

1.2 Définition de la grille

La base des méthodes à volumes finis consiste à diviser le domaine spatial d'étude en cellules sur chacune desquelles on résout les équations. Ce découpage est la conséquence de leur écriture dans le référentiel Eulérien. Il définit ce qu'on appelle une grille et doit satisfaire le principe de non chevauchement, voir en particulier le Chapitre 6 de Hirsch, 1988 [18]. Pour une cellule de dimension N , l'interface avec les cellules adjacentes doit être de dimension $N - 1$. Par exemple pour une grille 2D, chaque cellule doit avoir une unique ligne de contact avec les autres cellules. La géométrie cylindrique d'un disque et de la force képlérienne impose le choix naturel d'une grille polaire. Nous définirons la coordonnée radiale par l'indice i , et la coordonnée azimutale par l'indice j . Les variables d'Euler sont ainsi définies sur la cellule et non pas en un point de l'espace. On

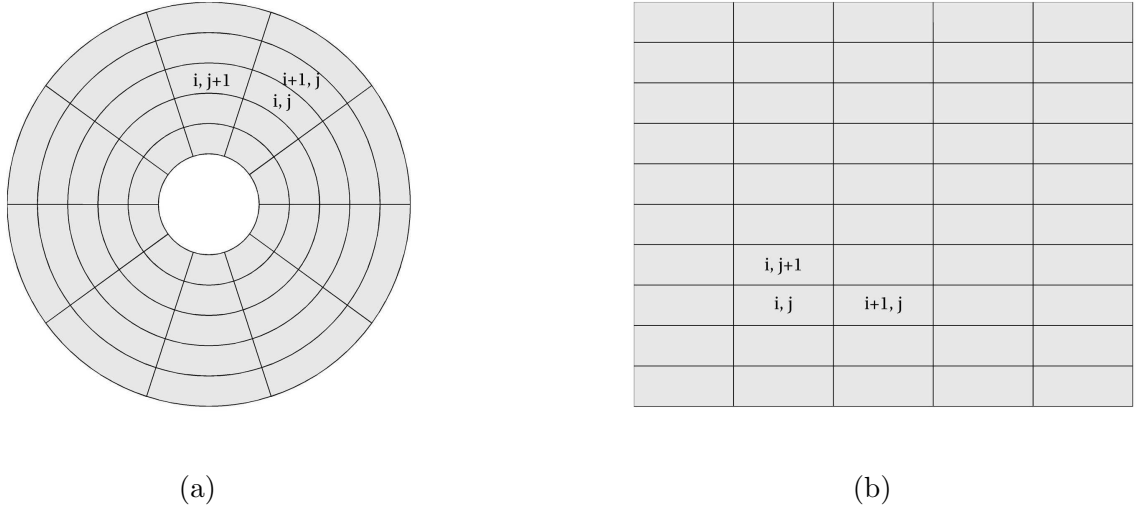


Figure III.1 – Illustration de la grille géométrique (a) cylindrique. Les cellules sont des sections de couronne. Dans l'espace numérique (b), la grille est simplement cartésienne.

notera par exemple $E_1(i, j)$ la variable d'Euler E_1 sur la cellule (i, j) .

La Figure III.1 montre comment la grille découpe l'espace géométrique. On peut associer à cette représentation une grille numérique qui représente l'espace sur lequel les équations seront résolues. Ces deux grilles peuvent être différentes selon les coordonnées physiques. Dans notre cas par exemple, la grille géométrique est cylindrique alors que la grille numérique est cartésienne. Cela peut être également le cas si le découpage n'est pas uniforme. Il est courant d'utiliser une grille physique dont la taille des cellules est variable pour s'adapter à des géométries compliquées.

Nous utilisons deux découpages différents. Le premier est uniforme. Dans la direction radiale, l'extension du disque qui est définie par le bord interne r_{int} et par le bord externe r_{ext} est divisée en N_r couronnes. Dans la direction azimutale, les 2π radians sont divisés en N_θ quartiers. Ainsi, le disque possède $N_r \times N_\theta$ cellules. La résolution dans la direction radiale est donc $\Delta r = (r_{ext} - r_{int})/N_r$ et dans la direction azimutale $\Delta \theta = 2\pi/N_\theta$. Afin de respecter la géométrie cylindrique, nous utilisons au moins deux fois plus de cellules dans la direction azimutale que dans la direction radiale.

Le deuxième est logarithmique dans la direction radiale. La longueur Δr de chaque cellule est une suite géométrique telle que l'on repère chaque couronne par :

$$r(i) = r_{int} \delta^{\frac{i+1/2}{N_r}} \quad (\text{III.5})$$

On a donc toujours N_r couronnes dont la largeur vaut :

$$\Delta r(i) = r(i) \left(\delta^{1/2} - \delta^{-1/2} \right) \quad (\text{III.6})$$

avec $\delta = r_{ext}/r_{int}$. Le découpage dans la direction azimutale est identique au découpage uniforme. L'utilisation de cette grille logarithmique sera justifiée lorsque nous présenterons le calcul de l'auto-

gravité. Nous verrons qu'il est alors indispensable de l'utiliser. Le corollaire d'un tel découpage est que la résolution est plus élevée dans les parties internes que dans les parties externes. Nous contrôlerons que cela n'a pas d'effet important sur la dynamique et que les résultats obtenus sur cette grille sont comparables à ceux obtenus sur la grille uniforme.

Maintenant que nous avons défini la grille, nous allons montrer comment résoudre les équations de conservation sur chaque cellule.

1.3 Intégration temporelle

Le système d'équations d'Euler décrit avant tout l'évolution au cours du temps des variables d'Euler en chaque portion de l'espace. Comme nous l'avons montré plus haut, les termes de flux et de source de ces équations dépendent des variables d'Euler. Ainsi on peut écrire de façon générale, pour une variable d'Euler E_k , avec $k = 1..4$:

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} E_k d\mathcal{V} = \mathcal{S}_k[E_{1..4}(t)] - \mathcal{F}_k[E_{1..4}(t)] \quad (\text{III.7})$$

où les intégrales de volumes des termes de source sont contenues dans $\mathcal{S}_k[E_{1..4}(t)]$ et les intégrales de surface des termes de flux dans $\mathcal{F}_k[E_{1..4}(t)]$. Nous avons noté $\mathcal{V}$ le volume de la cellule, qui dans le cas $2D$ qui nous intéresse, correspond à la surface de cette cellule.

Cette équation n'est donc qu'une équation différentielle du premier ordre en temps. Différentes approches numériques permettent de résoudre un tel système. Cependant, plus l'ordre de la méthode est élevé, plus le temps de calcul est long. C'est pourquoi une méthode d'ordre 2 est plus souvent utilisée. Nous avons choisi la méthode de Runge Kutta d'ordre 2. Si on discrétise la dérivée temporelle, on a :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}} (E_k(t + \Delta t) - E_k(t)) d\mathcal{V} = \mathcal{S}_k[E_{1..4}(t)] - \mathcal{F}_k[E_{1..4}(t)] \quad (\text{III.8})$$

Appelons t_n un instant discrétisé et $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. La méthode d'intégration de Runge Kutta d'ordre 2 nous donne alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} E_k(t_{n+1}) d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} E_k(t_n) d\mathcal{V} \\ &+ \Delta t \mathcal{S}_k \left[\frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} E_{1..4}(t_n) d\mathcal{V} + \frac{\Delta t}{2\mathcal{V}} (\mathcal{S}_{1..4}[E_{1..4}(t_n)] - \mathcal{F}_{1..4}[E_{1..4}(t_n)]) \right] \\ &- \Delta t \mathcal{F}_k \left[\frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} E_{1..4}(t_n) d\mathcal{V} + \frac{\Delta t}{2\mathcal{V}} (\mathcal{S}_{1..4}[E_{1..4}(t_n)] - \mathcal{F}_{1..4}[E_{1..4}(t_n)]) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Certaines méthodes numériques calculent indépendamment les termes de flux $\mathcal{F}_k[E_{1..4}(t)]$ et les termes source $\mathcal{S}_k[E_{1..4}(t)]$, en les intégrant séparément. Nous avons vérifié numériquement que cela a une influence sur la stabilité du schéma numérique. C'est pourquoi, dans notre schéma, nous les calculons simultanément afin de garantir stabilité et précision. La détermination des variables d'Euler à l'instant t_{n+1} fait appel uniquement aux variables à l'instant t_n . Un tel schéma est dit

explicite. L'utilisation d'un schéma explicite implique des conditions sur le pas de temps afin de garantir sa stabilité.

Le pas de temps

La valeur du pas de temps Δt est importante dans le cas des méthodes aux volumes finis. En effet il ne faut pas que quelque part sur la grille, une variation d'une des grandeurs d'Euler passe d'une cellule à une autre durant un pas de temps, sans quoi cela introduirait une erreur dans l'évolution temporelle. Ce critère est important dans toutes les résolutions de problèmes advectifs, en particulier pour les schémas explicites. Cette condition est plus connue sous le nom de *condition CFL*, d'après l'article sur les méthodes d'advection de Courant, Friedrichs, Lewy, 1928 [8]. Dans un cas à une dimension, on définit un nombre de Courant par :

$$C = \frac{a\Delta t}{\Delta r} \quad (\text{III.10})$$

avec a la vitesse d'advection dans une direction, et Δr l'intervalle entre deux cellules dans cette direction. Un schéma explicite est stable si, sur toute la grille, on a :

$$0 < C \leq 1 \quad (\text{III.11})$$

C'est l'expression classique de cette condition pour un problème d'advection à une dimension à la vitesse a . Dans notre cas, le problème est à la fois advectif et compressible. L'advection est dirigée par la vitesse $\vec{V}$ du fluide, et la compressibilité est représentée par la vitesse du son $c_s = \sqrt{\gamma P/\sigma}$. Une perturbation se propage en effet à la vitesse du son dans un milieu compressible. On utilisera donc la formulation suivante pour la condition CFL :

$$0 < \frac{\Delta t}{\mathcal{V}} \left(\|\vec{V}\| + c_s \right) \max \left(\|\vec{d}\vec{S}\| \right) \leq 1 \quad (\text{III.12})$$

Ainsi pour chaque cellule on a maximisé la valeur du nombre de Courant en tenant compte de la surface maximale de la frontière de cette cellule. Dans le cas à deux dimensions, $\mathcal{V}$ est la surface de la cellule, et $\max \left(\|\vec{d}\vec{S}\| \right)$ est la longueur maximale de la frontière. On peut enfin, pour garantir une meilleure stabilité, comparer le nombre de Courant à un *paramètre CFL*, $N_{CFL} \leq 1$. On a alors :

$$0 < C \leq N_{CFL} \quad (\text{III.13})$$

avec communément $N_{CFL} = 1/2$. Finalement, le pas de temps est donné par le nombre de Courant minimal sur toute la grille :

$$\Delta t = \min \left(N_{CFL} \frac{\mathcal{V}}{\left(\|\vec{V}\| + c_s \right) \max \left(\|\vec{d}\vec{S}\| \right)} \right) \quad (\text{III.14})$$

Nous allons ensuite aborder le calcul des termes de flux et des termes de sources.

1.4 Les termes de flux

Dans un schéma aux volumes finis, les variables d'Euler sont définies sur la cellule, et non pas en un point. La difficulté est donc de déterminer leur valeur à l'interface entre les cellules, valeurs indispensables au calcul des intégrales de flux. Il est donc nécessaire d'interpoler les fonctions de flux. Plusieurs méthodes existent, et dépendent du degré de l'interpolation. Afin d'illustrer ces différentes méthodes, nous allons étudier un modèle à une dimension. On pourra facilement transposer ces approches à des modèles à multiples dimensions car on sépare généralement le calcul sur les vecteurs de base.

Soit une cellule i , on définit son interface avec sa voisine $i + 1$ par la frontière $i + \frac{1}{2}$ et sa voisine $i - 1$ par la frontière $i - \frac{1}{2}$. La méthode dite de *Godunov*, qui découle de l'étude historique de Godunov sur les solutions discontinues des équations d'advection en 1959 [13], consiste à définir pour chaque frontière un terme de flux à droite F_k^d et un terme de flux à gauche F_k^g . Ainsi à l'ordre le plus bas, on a pour la cellule i :

$$F_k^d(i + \frac{1}{2}) = F_k(i + 1) \quad (\text{III.15})$$

$$F_k^g(i + \frac{1}{2}) = F_k(i) \quad (\text{III.16})$$

$$F_k^d(i - \frac{1}{2}) = F_k(i) \quad (\text{III.17})$$

$$F_k^g(i - \frac{1}{2}) = F_k(i - 1) \quad (\text{III.18})$$

À partir de ces flux de part et d'autre de chaque frontière, on définit un flux final F_k^* à la frontière. Ce flux final est généralement déterminé par la résolution d'un problème de Riemann à cette frontière. Nous n'entrerons pas dans le détail de ce problème. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de Ben-Artzy, 2003 [1], pour une description générale et détaillée, ou à Toro, 1999 [29], dans lequel nous avons tiré le solveur de Riemann exact utilisé dans notre schéma. Notons simplement que la solution du problème de Riemann consiste généralement à la superposition de deux ondes de compression et de détente qui correspondent à une base de la matrice des flux. La Figure III.2 illustre le principe de la méthode de Godunov, avec les flux à gauche et à droite de chaque cellule. Le flux final, calculé par le problème de Riemann, est dans la limite d'une résolution infinie, égal au flux à l'interface. Cette méthode permet de tenir compte d'une discontinuité, soit d'un choc, située à la frontière entre deux cellules. C'est l'intérêt principal des méthodes aux volumes finis, par rapport aux autres méthodes.

On peut améliorer le schéma de Godunov en interpolant les fonctions de flux aux frontières. Le schéma de MUSCL établit une interpolation linéaire des flux. Ce schéma, dû en partie à van Leer, 1979 [31], est un des premiers schémas d'ordre élevé, dont l'acronyme signifie "Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws". Par exemple, si les variables d'Euler $E_k(i)$ sont définies au centre des cellules, alors on peut définir deux interpolations pour le calcul des flux à gauche et à droite de la frontière $i + \frac{1}{2}$:

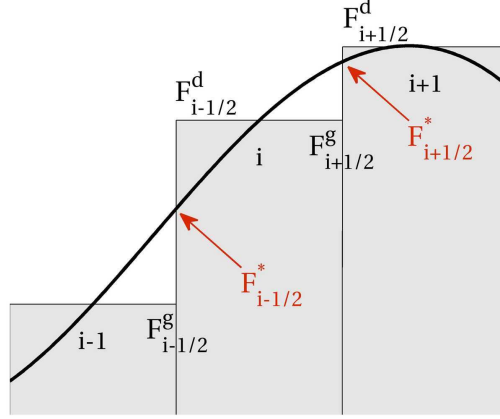


Figure III.2 – Illustration de la méthode de Godunov. La fonction flux de référence est en noir. Les flux à gauche et à droite des frontières $i - \frac{1}{2}$ et $i + \frac{1}{2}$ sont déterminés par les flux dans les cellules. La résolution du problème de Riemann permet d'évaluer les flux F^* , dont on suppose qu'ils sont très proches de la valeur théorique en noir. On constate que dans certains cas, comme ici pour l'interface $i - \frac{1}{2}$, on a $F^* \sim (F^g + F^d)/2$. Mais la méthode de Riemann est indispensable pour éviter des oscillations et des divergences dans la solution.

- On calcule les flux sur chaque cellule et on les interpole linéairement :

$$F_k^d(i + \frac{1}{2}) = F_k(i + 1) - \left(x(i + 1) - x(i + \frac{1}{2}) \right) \mathcal{L}[\Delta F_k(i + 1), \Delta F_k(i)]$$

$$F_k^g(i + \frac{1}{2}) = F_k(i) + \left(x(i + \frac{1}{2}) - x(i) \right) \mathcal{L}[\Delta F_k(i), \Delta F_k(i - 1)]$$

- On interpole les variables d'Euler et on calcule les flux sur ces variables aux frontières :

$$E_k^d(i + \frac{1}{2}) = E_k(i + 1) - \left(x(i + 1) - x(i + \frac{1}{2}) \right) \mathcal{L}[\Delta E_k(i + 1), \Delta E_k(i)]$$

$$E_k^g(i + \frac{1}{2}) = E_k(i) + \left(x(i + \frac{1}{2}) - x(i) \right) \mathcal{L}[\Delta E_k(i), \Delta E_k(i - 1)]$$

$$F_k^d(i + \frac{1}{2}) = F_k[E_{1..4}^d(i + \frac{1}{2})]$$

$$F_k^g(i + \frac{1}{2}) = F_k[E_{1..4}^g(i + \frac{1}{2})]$$

où $x(i)$ représente la position de la cellule i dans le repère. Dans ces écritures, nous avons introduit, d'une part, l'expression $\Delta E_k(i)$, qui est le gradient $(E_k(i + 1) - E_k(i))/(x(i + 1) - x(i))$. On peut évidemment remplacer E_k par F_k . Et d'autre part, la fonction limiteur de gradient $\mathcal{L}[\Delta E_k(i + 1), \Delta E_k(i)]$, qui donne un gradient permettant de conserver la stabilité du schéma lorsque des discontinuités sont présentes, et d'éviter des oscillations ou des pressions négatives. On pourra par exemple utiliser les limiteur *van Leer* (van Leer, 1979 [31]), *Sweby* (Sweby, 1984 [28]), qui sont tous deux symétriques, ou bien *MinMod* qui est plus radical (Roe, 1986 [25]). Cela permet de s'assurer

de la monotonie de la solution, qui se traduit par la contrainte suivante :

$$E_k(i - \frac{1}{2}) \in [E_k(i - 1), E_k(i)] \text{ et } E_k(i + \frac{1}{2}) \in [E_k(i), E_k(i + 1)] \quad (\text{III.19})$$

Les fonctions de flux sont, comme nous l'avons montré plus haut, des fonctions non linéaires des variables d'Euler. Ainsi les deux méthodes d'interpolation donnent des résultats différents. On peut montrer que la seconde donne un schéma plus précis. De plus, la résolution du problème de Riemann à la frontière se fait généralement sur les grandeurs physiques σ , $\vec{V}$ et P , ce qui justifie l'utilisation de cette méthode. Le problème de Riemann nous donne les variables d'Euler à la frontière, et on en déduit les flux aux frontières :

$$E_k^* = \text{Riemann}(E_{1..4}^g, E_{1..4}^d) \quad (\text{III.20})$$

$$F_k^* = F_k(E_{1..4}^*) \quad (\text{III.21})$$

Différentes méthodes d'interpolation existent à des ordres plus élevés mais leur impact sur le temps de calcul peut être important. De plus, plus l'ordre est élevé, plus le schéma peut être sensible à des oscillations numériques au voisinage des discontinuités. En outre, les méthodes à ordre élevé introduisent une viscosité numérique supérieure, ce qui réduit l'aptitude du code à résoudre les chocs et à garantir la solution des équations d'Euler à long terme. La Figure III.3 montre différentes interpolations : une interpolation linéaire en bleu et une interpolation parabolique en rouge. On remarque que dans la plupart des cas, une interpolation du deuxième degré est plus proche de la fonction de référence à interpoler en noir. On peut s'attendre à une meilleure précision car cette interpolation préserve les variations de la fonction référence. Nous utiliserons dans la partie suivante cette interpolation et la décrirons en détails.

1.5 Les termes source

Le calcul des termes source est plus simple. En effet, il s'agit d'une intégrale sur la surface $\mathcal{V}$ de chaque cellule des fonctions sources. Pour cela, la méthode classique considère que les variables d'Euler sont constantes sur la cellule. Ainsi, les fonctions source sont constantes elles aussi et le terme de source devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k[E_{1..4}(t)] &= \int_{\mathcal{V}} S_k d\mathcal{V} \\ &= S_k \mathcal{V} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

où S_k est le terme de source présent dans le membre de droite de l'équation correspondant à l'évolution temporelle de la variable E_k . Pour E_1 , en particulier, il s'agira de la somme $S_1^1 + S_1^2 + S_1^3$. Enfin, on remarque que l'on obtient alors une intégrale précise au premier ordre, puisque l'égalité ci-dessus est vraie si S_k varie linéairement sur la cellule.

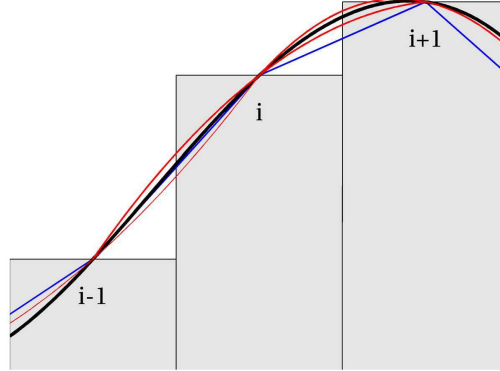


Figure III.3 — Illustration des méthodes d'interpolation des variables d'Euler. La fonction de référence est en noir. On remarque que l'interpolation linéaire (en bleu) effectuée à la cellule i présente un écart important à la frontière $i + \frac{1}{2}$, alors qu'elle en est proche à la frontière $i - \frac{1}{2}$. En revanche l'interpolation parabolique (en rouge) a un bon ajustement sur les deux frontières.

1.6 Phase de particules solides

Nous terminons cette section en abordant le problème de la phase fluide de particules solides. L'écriture sous la forme d'équations de conservation pour un fluide sans pression permet d'utiliser le même schéma numérique que pour le gaz. L'évolution temporelle des grandeurs physiques de la phase solide sera donc traitée de la même façon que celle du gaz, à la différence près que la pression est nulle.

Cela modifie donc légèrement le problème de Riemann aux frontières, mais différentes méthodes sont disponibles, notamment dans Toro, 1999 [29]. Nous utilisons donc un solveur de Riemann dédié à la phase de particules, qui s'apparente d'ailleurs à celui dédié au gaz, en négligeant la pression. Les détails sont disponibles dans la référence citée plus haut.

La possibilité d'obtenir de grandes concentrations de particules, par exemple dans les tourbillons, implique que de forts gradients de densité ou de vitesses peuvent exister dans cette phase de particules. C'est pourquoi, afin de garantir la stabilité du schéma numérique, nous utilisons un limiteur de pente $\mathcal{L}$ drastique, *MinMod*, qui utilise le plus faible (en valeur absolue) des gradients à droite et à gauche de la cellule, afin d'effectuer l'interpolation linéaire des grandeurs physiques.

Enfin, le terme source dû à la force aérodynamique est calculé de la façon classique, par intégrale du premier ordre, pour la phase de particules, comme pour la phase gazeuse. Nous avons testé le schéma sur de multiples configurations, avec tourbillons, et le code donne des résultats satisfaisants. Cependant, nous n'avons pas présenté de résultats concernant les particules dans ce travail, les possibilités d'étude constituant réellement un projet à part entière. Nous signalons simplement que, durant le développement du code numérique, nous avons pris en compte cette phase de particules, afin d'obtenir un code bi-phase, gaz/particules, adapté aux disques protoplanétaires.

Cette description simple de la méthode des volumes finis est suffisante dans le cas des fluides de laboratoire, et en particulier pour les fluides qui ne sont pas en rotation différentielle. Nous allons voir que l'étude du modèle standard de disque nécessite une adaptation du schéma classique des volumes finis.

2 Un schéma équilibré pour les disques képlériens

2.1 Les contraintes spécifiques aux disques képlériens

La particularité d'un disque képlérien est d'avoir sa vitesse tangentielle de rotation qui varie radialement suivant les lois de Kepler, avec également une dépendance radiale de la densité et de la pression. Ainsi, l'approximation classique qui consiste à considérer les variables d'Euler constantes sur chaque cellule est inexacte dès le premier ordre. L'utilisation d'un schéma classique tel que décrit précédemment est insuffisante pour garantir la stabilité du schéma, en particulier sur la solution stationnaire. Gardons à l'esprit que nous voulons étudier le disque sur un nombre de rotations supérieur à la centaine.

C'est pourquoi nous avons développé un schéma équilibré permettant de répondre à cette contrainte en nous appuyant sur une étude préliminaire de H. Guillard et E. Daniel, 2005 [15]. Nous nous sommes également inspirés des travaux de Lerat, 2007 [21], et de Holm, 1996 [19], qui cherchent des schémas qui conservent la vortacité et l'énergie. Mais ces schémas sont basés sur une écriture différente des équations, et ne résolvent pas toutes les équations de conservation comme nous cherchons à le faire.

Nous allons commencer par montrer les principaux défauts du schéma classique sur la solution stationnaire d'un disque képlérien.

Considérons cette solution stationnaire. Nous appelons E_k^0 les variables d'Euler associées. On a :

$$\begin{cases} E_1^0 = 0 \\ E_2^0 = \sigma_0(r)V_0(r) \\ E_3^0 = \frac{P_0(r)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\sigma_0(r)V_0^2(r) \\ E_4^0 = \sigma_0(r) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

avec, comme décrit dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\sigma_0(r) &= \sigma_0(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\beta_\sigma} \\
P_0(r) &= \frac{k_B}{\mu M_H} T_0(r) \sigma_0(r) \\
T_0(r) &= T_0(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\beta_T} \\
V_0(r) &= \left(V_{kep}^2(r) + \frac{r}{\sigma_0(r)} \partial_r P_0(r) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

avec généralement $r_0 = 7.5 \text{ UA}$, $\sigma_0(r_0) = 82.8 \text{ g.cm}^{-2}$ et $T_0(r_0) = 83.6 \text{ K}$. Enfin, les gradients valent $\beta_\sigma = -1.5$ et $\beta_T = -0.5$, mais leurs valeurs peuvent être modifiées pour étudier différents types de disques. Cette solution doit être stationnaire dans le schéma numérique, au moins avec une bonne précision, pendant plusieurs centaines de rotations. C'est une des contraintes de notre étude.

Or si on injecte cette solution dans le schéma numérique classique, on constate que la stationnarité n'est pas préservée pour toutes les équations. En particulier, l'équation de la conservation de l'impulsion dans la direction radiale n'est pas stationnaire. Elle se résume ainsi pour une cellule i , la solution ne dépendant pas de j car elle est axisymétrique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \partial_t E_1^0(i) &= - \left(P_0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \\
&+ \int_{\mathcal{V}} \sigma_0(i) \frac{V_0^2(i)}{r(i)} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \sigma_0(i) \frac{V_{kep}^2(i)}{r(i)} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{P_0(i)}{r(i)} d\mathcal{V}
\end{aligned} \tag{III.24}$$

Le premier terme du membre de droite provient du terme de flux, c'est-à-dire la différence du produit $Pr\Delta\theta$ entre la frontière de droite et de gauche. Les trois autres termes sont les intégrales sur la cellule des termes sources. En utilisant le fait que :

$$\sigma_0(r) V_0^2(r)/r = \sigma_0(r) V_{kep}^2(r)/r + \partial_r P_0(r) \tag{III.25}$$

on peut simplifier la somme d'intégrales en :

$$\int_{\mathcal{V}} \sigma_0(i) \frac{V_0^2(i)}{r(i)} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \sigma_0(i) \frac{V_{kep}^2(i)}{r(i)} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \beta_P \frac{P_0(i)}{r(i)} d\mathcal{V} \tag{III.26}$$

puisque $\beta_P = r P_0^{-1}(r) \partial_r P_0(r)$. Enfin, si on utilise l'égalité $\mathcal{V} = r(i)(r(i + 1/2) - r(i - 1/2))\Delta\theta$, on obtient finalement, pour le schéma classique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \partial_t E_1^0(i) &= - \frac{\left(P_0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right)}{r(i + \frac{1}{2}) - r(i - \frac{1}{2})} \frac{\mathcal{V}}{r(i)} \\
&+ \mathcal{V} \beta_P \frac{P_0(i)}{r(i)} + \mathcal{V} \frac{P_0(i)}{r(i)}
\end{aligned} \tag{III.27}$$

On constate que l'écart à la stationnarité est dû à la précision avec laquelle on calcule $P_0(i \pm \frac{1}{2})$, et à la précision avec laquelle on détermine les intégrales de surface. Dans le cas classique on considère les termes sources, comme ici $P_0(i)/r(i)$, constant sur chaque cellule. Or cette fonction n'est pas constante mais dépend de la distance à l'étoile. De plus, les flux $P(i \pm 1/2)r(i \pm 1/2)$ sont généralement déterminés par interpolation linéaire, si l'on suit le schéma MUSLC classique. Or, ce flux varie en r^{β_P+1} , ce qui induit une erreur lors de l'interpolation par une droite. La somme de ces écarts des termes de flux et de source induit une erreur systématique sur la variable d'Euler E_1^0 de l'ordre de 10^{-8} . Bien sûr cette erreur se réduit quand on augmente la résolution radiale, mais elle se répercute néanmoins sur toutes les autres variables et le schéma n'est pas stationnaire. De plus, cette erreur s'accumule au cours de l'évolution temporelle, et ainsi croît au cours du temps. Il n'est donc pas possible de suivre correctement l'évolution d'un disque dans le cadre de cette approximation. C'est pourquoi nous avons développé un schéma qui corrige ces erreurs systématiques, afin de respecter la stationnarité.

2.2 Les termes de flux

Pour déterminer les termes de flux à l'interface d'une cellule, nous interpolons les variables d'Euler puis calculons les termes de flux à partir de ces variables, comme pour le schéma classique. La première différence par rapport au schéma classique est qu'on va prendre en compte la solution stationnaire lors de cette interpolation. En effet, on connaît la solution stationnaire en n'importe quel point du disque et en particulier aux frontières des cellules. Nous allons exprimer l'écart à la solution stationnaire en posant pour toute variable d'Euler E_k , $E_k = E_k^0 + E_k'$. La solution est donc stationnaire lorsque $E_k' = 0$. Pour une cellule i , on a alors :

$$E_k(i + \frac{1}{2}) = E_k'(i + \frac{1}{2}) + E_k^0(i + \frac{1}{2}) \quad (\text{III.28})$$

$$E_k(i - \frac{1}{2}) = E_k'(i - \frac{1}{2}) + E_k^0(i - \frac{1}{2}) \quad (\text{III.29})$$

en utilisant la valeur exacte des termes $E_k^0(i \pm \frac{1}{2})$. De cette façon, on peut garantir une plus grande précision sur le calcul des flux et sur la stabilité de la solution stationnaire, puisque l'on utilise maintenant la valeur analytique des flux aux frontières pour la solution stationnaire.

Pour tirer parti de cette amélioration, nous calculons les termes $E_k'(i \pm \frac{1}{2})$ par interpolation parabolique. Cela permet de développer un schéma d'ordre 3 en espace. On suppose que l'on a une parabole qui passe par les points $E_k'(i - 1)$, $E_k'(i)$ et $E_k'(i + 1)$. Cette dernière a pour équation :

$$y(x) = a * (x - r(i))^2 + b * (x - r(i)) + E_k'(i) \quad (\text{III.30})$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{r(i+1) - r(i-1)} [\Delta E'_k(i+1) - \Delta E'_k(i)] \\ b &= \frac{1}{r(i+1) - r(i-1)} [\Delta E'_k(i+1)(r(i) - r(i-1)) + \Delta E'_k(i-1)(r(i+1) - r(i))] \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

On a ainsi réduit le calcul de l'interpolation de trois points à l'expression de seulement deux variables a et b . Les variables d'Euler aux frontières s'écrivent alors :

$$E_k^g(i + \frac{1}{2}) = E_k^0(i + \frac{1}{2}) + a \left(r(i + \frac{1}{2}) - r(i) \right)^2 + b \left(r(i + \frac{1}{2}) - r(i) \right) + E'_k(i) \quad (\text{III.32})$$

$$E_k^d(i - \frac{1}{2}) = E_k^0(i - \frac{1}{2}) + a \left(r(i - \frac{1}{2}) - r(i) \right)^2 + b \left(r(i - \frac{1}{2}) - r(i) \right) + E'_k(i) \quad (\text{III.33})$$

En effectuant l'interpolation pour la cellule $i - 1$, on va obtenir la variable $E_k^g(i - \frac{1}{2})$, et pour la cellule $i + 1$ on obtient la variable $E_k^g(i + \frac{1}{2})$. Ainsi de proche en proche on peut déterminer les variables à gauche et à droite de chaque frontière, permettant de calculer le terme de flux F_k^* par résolution du problème de Riemann. Pour la direction azimutale, selon laquelle les variables stationnaires sont constantes, on effectue la même interpolation parabolique, mais sans retrancher les variables stationnaires E_k^0 .

On peut noter qu'il est toujours nécessaire de conserver la stabilité de la solution sur des solutions discontinues en utilisant un limiteur de pente, qui s'applique ici aux coefficients a et b . On peut, en effet, obtenir des variables aux frontières interpolées qui ne sont pas comprises dans l'intervalle $[E_k(i-1), E_k(i)]$ pour la variable à la frontière $1 - 1/2$ et dans $[E_k(i), E_k(i+1)]$ pour la variable à la frontière $1 + 1/2$. Dans ce cas là, on réduit les valeurs de a et de b afin de respecter cette contrainte, ce qui revient généralement à réduire la courbure de la fonction d'interpolation.

2.3 Les termes de source

Pour garantir la stabilité du schéma sur la solution stationnaire, nous devons tenir compte de la variation sur chaque cellule des variables d'Euler lors de l'intégrale de surface nécessaire au calcul des termes de source. Rappelons leur expression :

$$\begin{cases} S_1^1 = \sigma V^2/r & S_1^2 = -\sigma V_{kep}^2/r & S_1^3 = P/r \\ S_2 = -\sigma UV/r \\ S_3 = -\sigma V V_{kep}^2/r \\ S_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

Seules les variables σ , V et P dépendent du rayon même pour la solution stationnaire. C'est pourquoi nous allons les décomposer en une composante provenant de la solution stationnaire $\sigma_0(r)$, $V_0(r)$ et $P_0(r)$, et une composante représentant la déviation à cette solution stationnaire. Le principe est le suivant. Si une fonction f est proche de sa valeur stationnaire $f_0(r)$, alors il existe un δf tel que $f = f_0(r)(1 + \delta f)$. Si on considère que cette déviation varie moins que $f_0(r)$, alors on aura une

meilleure précision à la considérer constante et à tenir compte seulement des variations de $f_0(r)$. On note alors $f = f_0(r)\tilde{f}$, où $\tilde{f} = (1 + \delta f)$ est proche de 1 lorsqu'on est proche de la solution stationnaire $f_0(r)$.

Si l'on applique ce raisonnement aux termes de sources, en les exprimant en fonction des variables d'Euler, on obtient :

$$\begin{cases} S_1^1 = \frac{E_2^0}{E_4^0} \frac{E_2^0}{r} \tilde{S}_1^1, & S_1^2 = -E_4^0 \frac{V_{kep}^2}{r} \tilde{S}_1^2, & S_1^3 = \frac{P_0}{r} \tilde{S}_1^3 \\ S_2 = -\frac{E_2^0}{r} \tilde{S}_2 \\ S_3 = -E_4^0 \frac{V_{kep}^2}{r} \tilde{S}_3 \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

On peut faire de même pour les variables d'Euler, en posant $E_k = E_k^0 \tilde{E}_k$, et pour la pression $P = P_0 \tilde{P}$. On a alors l'expression des termes sources tildés :

$$\begin{cases} \tilde{S}_1^1 = \frac{\tilde{E}_2}{\tilde{E}_4} \tilde{E}_2, & \tilde{S}_1^2 = \tilde{E}_4, & \tilde{S}_1^3 = \tilde{P} \\ \tilde{S}_2 = \tilde{E}_2 \frac{E_1}{E_4} \\ \tilde{S}_3 = \tilde{E}_4 \frac{E_1}{E_4} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Le terme $E_1/E_4 = U$ est déjà un terme de déviation, puisque la valeur de la solution stationnaire est nulle, donc si $U = U_0 + \delta U$, alors $U = \delta U$, selon notre raisonnement précédent. Considérer que ces termes tildés des termes de source sont constants sur chaque cellule est donc une meilleure approximation que celle du schéma classique. On remarquera de plus qu'ils valent tous 1 lorsque l'on considère la solution stationnaire, sauf $\tilde{S}_2$ et $\tilde{S}_3$ qui sont nuls.

Les intégrales de volume de ces termes sources vont donc s'exprimer comme le produit des termes tildés par l'intégrale de volume des termes variant radialement, et dépendant des $E_k^0(r)$, $V_{kep}(r)$ et $P_0(r)$. Après le calcul de ces intégrales pour une cellule (i, j) , on obtient :

Pour S_1^1

$$\begin{aligned} \int_V S_1^1 dV = & \left[\frac{1}{\beta_\sigma + 2\beta_\Omega + 3} \left(E_4^0(i + \frac{1}{2})r(i + \frac{1}{2})V_{kep}^2(i + \frac{1}{2}) - E_4^0(i - \frac{1}{2})r(i - \frac{1}{2})V_{kep}^2(i - \frac{1}{2}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\beta_P}{\beta_P + 1} \left(P_0(i + \frac{1}{2})r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2})r(i - \frac{1}{2}) \right) \right] \Delta\theta \tilde{S}_1^1 \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

pour $\beta_\sigma \neq -2\beta_\Omega - 3$, et $\beta_P \neq -1$.

Si $\beta_\sigma = -2\beta_\Omega - 3$, le premier terme du membre de droite devient :

$$E_4^0(i)r(i)V_{kep}^2(i) \ln \left(\frac{r(i + \frac{1}{2})}{r(i - \frac{1}{2})} \right)$$

Et si $\beta_P = -1$, le second terme du membre de droite devient :

$$\beta_P P_0(i) r(i) \ln \left(\frac{r(i + \frac{1}{2})}{r(i - \frac{1}{2})} \right)$$

Pour S_1^2

$$\int_{\mathcal{V}} S_1^2 d\mathcal{V} = -\frac{1}{\beta_\sigma + 2\beta_\Omega + 3} \left(E_4^0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) V_{kep}^2(i + \frac{1}{2}) - E_4^0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) V_{kep}^2(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \tilde{S}_1^2 \quad (\text{III.38})$$

pour $\beta_\sigma \neq -2\beta_\Omega - 3$.

Si $\beta_\sigma = -2\beta_\Omega - 3$, le terme de source devient :

$$\int_{\mathcal{V}} S_1^2 d\mathcal{V} = -E_4^0(i) r(i) V_{kep}^2(i) \ln \left(\frac{r(i + \frac{1}{2})}{r(i - \frac{1}{2})} \right) \Delta\theta \tilde{S}_1^2$$

Pour S_1^3

$$\int_{\mathcal{V}} S_1^3 d\mathcal{V} = \frac{1}{\beta_P + 1} \left(P_0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \tilde{S}_1^3 \quad (\text{III.39})$$

pour $\beta_P \neq -1$.

Si $\beta_P = -1$, le terme de source devient :

$$\int_{\mathcal{V}} S_1^3 d\mathcal{V} = P_0(i) r(i) \ln \left(\frac{r(i + \frac{1}{2})}{r(i - \frac{1}{2})} \right) \Delta\theta \tilde{S}_1^3$$

Pour S_2

$$\int_{\mathcal{V}} S_2 d\mathcal{V} = -\frac{1}{\beta_\sigma + \beta_\Omega + 2} \left(E_2^0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - E_2^0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \tilde{S}_2 \quad (\text{III.40})$$

pour $\beta_\sigma \neq -\beta_\Omega - 2$.

Si $\beta_\sigma = -\beta_\Omega - 2$, le terme de source devient :

$$\int_{\mathcal{V}} S_2 d\mathcal{V} = -E_2^0(i) r(i) \ln \left(\frac{r(i + \frac{1}{2})}{r(i - \frac{1}{2})} \right) \Delta\theta \tilde{S}_2$$

Pour S_3

$$\int_{\mathcal{V}} S_3 d\mathcal{V} = -\frac{1}{\beta_\sigma + 2\beta_\Omega + 3} \left(E_4^0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) V_{kep}^2(i + \frac{1}{2}) - E_4^0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) V_{kep}^2(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \tilde{S}_3 \quad (\text{III.41})$$

pour $\beta_\sigma \neq -2\beta_\Omega - 3$.

Si $\beta_\sigma = -2\beta_\Omega - 3$, le terme de source devient :

$$\int_{\mathcal{V}} S_3 d\mathcal{V} = -E_4^0(i) r(i) V_{kep}^2(i) \ln \left(\frac{r(i + \frac{1}{2})}{r(i - \frac{1}{2})} \right) \Delta\theta \tilde{S}_3$$

en rappelant que β_σ et $\beta_P = \beta_\sigma + \beta_T$ sont les exposants de la densité et de la pression de la solution stationnaire, $\sigma_0(r) \propto (r/r_0)^{\beta_\sigma}$ et $P_0(r) \propto (r/r_0)^{\beta_P}$. On ne se limite donc pas à un cas isotherme ou polytropique, mais on tient compte de toutes les distributions en loi de puissance possibles, pour la densité et la température.

2.4 Validation du schéma

Nous allons maintenant vérifier que le schéma est bien stable sur la solution stationnaire. Si l'on reprend l'équation de conservation de l'impulsion selon la direction radiale, telle que nous l'avons écrite dans la partie précédente :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \partial_t E_1^0(i) &= - \left(P_0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}} \sigma_0(i) \frac{V_0^2(i)}{r(i)} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \sigma_0(i) \frac{V_{kep}^2(i)}{r(i)} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{P_0(i)}{r(i)} d\mathcal{V} \\ &= - \left(P_0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}} S_1^1 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} S_1^3 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} S_1^3 d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Nous calculons les intégrales de source en utilisant la méthode introduite au paragraphe précédent. Or dans le cas de la solution stationnaire, les termes tildés introduits dans S_1^1 , S_1^2 , et S_1^3 valent 1. Le calcul des intégrales nous donne alors :

$$\int_{\Omega} S_1^1 d\Omega + \int_{\Omega} S_1^2 d\Omega + \int_{\Omega} S_1^3 d\Omega = \left(P_0(i + \frac{1}{2}) r(i + \frac{1}{2}) - P_0(i - \frac{1}{2}) r(i - \frac{1}{2}) \right) \Delta\theta \quad (\text{III.43})$$

Par conséquent, les deux membres de droite de l'équation III.42 s'annulent. La stationnarité est donc garantie analytiquement pour E_1^0 . Et comme cette dernière est nulle initialement, toutes les équations du système d'Euler sont stationnaires.

Le schéma que nous avons développé garantit donc la conservation de la solution stationnaire *analytiquement*, c'est-à-dire que ce résultat ne dépend pas de la résolution numérique utilisée. Il s'agit d'une amélioration très importante pour la simulation des disques képlériens utilisant la méthode des volumes finis. En effet sans un schéma équilibré, la simulation du disque est sujette à des erreurs systématiques, qui peuvent s'amplifier au cours du temps.

Nous avons voulu comparer et quantifier l'erreur que le choix du schéma numérique introduit sur la solution stationnaire afin de montrer l'efficacité et la validité de cette approche. Pour cela nous avons perturbé un disque stationnaire en imposant une perturbation axisymétrique de la vitesse

radiale de la forme :

$$u = 10^{-9} \cos \left(10 \frac{r - r_{int}}{r_{ext} - r_{int}} 2\pi \right) \quad (\text{III.44})$$

C'est une perturbation qui introduit un mode 10 dans le disque. On s'attend à ce que le disque relaxe vers la solution stationnaire. Les écarts à cette solution seront dus à l'erreur que le schéma numérique introduit. Nous avons réalisé 3 simulations avec cette même condition initiale et la même résolution spatiale de $(N_r, N_\theta) = (200, 400)$. L'usage d'une résolution spatiale faible permet d'accentuer les erreurs. En effet, nous avons vérifié que les erreurs diminuent lorsque le nombre de mailles augmente. L'intégration se déroule sur 200 rotations qui est le temps moyen sur lequel nous désirons étudier le disque.

La première simulation est réalisée avec *le schéma standard* des volumes finis. La seconde introduit la compensation des flux que nous venons d'expliquer au paragraphe 2.2. Nous pouvons appeler ce schéma *le schéma partiellement équilibré*. Enfin la troisième utilise la méthode complète avec compensation des termes de flux et des termes de source, comme expliqué au paragraphe 2.3. Nous appellerons ce schéma *le schéma totalement équilibré*. Nous présentons dans les figures III.4 et III.5 les erreurs relatives entre les vitesses radiales, azimutales et la densité et leurs valeurs stationnaires, à différents instants.

La Figure III.4 montre la comparaison entre le schéma standard et le schéma partiellement équilibré. On constate que le schéma standard, présenté colonne de gauche (sous figures a1, b1, c1), génère de fortes erreurs dans les grandeurs physiques. Tout d'abord la vitesse radiale (a1) passe en quelques rotations de la valeur initiale de 10^{-9} à une valeur stable comprise entre -4 et -0.5×10^{-8} . Cela montre que le schéma standard introduit un flux radial dans le disque. L'erreur de la vitesse azimutale (b1) augmente au cours du temps et atteint plus de 10^{-5} au bout de 200 rotations. En outre, elle présente une accentuation de l'erreur dans la partie interne du disque. L'erreur dans les parties externes est réduite d'un facteur 4. Pour finir, la densité (c1) diminue au cours du temps dans le disque. L'erreur est maximale dans la partie interne du disque et atteint 10^{-3} après 200 rotations. Il est évident que les erreurs s'accumulent dans le disque et une étude à long terme de l'évolution du disque est impossible à faible résolution en utilisant un schéma standard.

Le schéma partiellement équilibré, présenté colonne de droite (sous figures a2, b2, c2) de la Figure III.4, corrige de façon claire les défauts du schéma standard surtout dans la partie externe du disque. Cela est nettement visible sur la vitesse radiale (a2). On passe d'une erreur de 10^{-8} à 10^{-13} au bout de 200 rotations. Sur les parties externes, on atteint même une valeur uniforme de 10^{-14} . L'équipartition des erreurs autour de zéro montre que la compensation des flux a une importance primordiale sur la conservation de la stationnarité. Seules les parties internes présentent encore de plus fortes erreurs. La vitesse azimutale (b2) est comprise entre -8 et -2×10^{-9} ce qui correspond à une amélioration d'un facteur 10^3 par rapport au schéma standard. De plus, l'erreur est stable au cours du temps ce qui est satisfaisant. Enfin la densité (c2) présente elle aussi ce caractère stationnaire, surtout dans les parties externes. Néanmoins, l'erreur est positive et de l'ordre de 10^{-8} . L'amélioration est d'un facteur 10^5 sur le schéma standard. La compensation des termes de flux permet de réduire considérablement les erreurs systématiques induites par le schéma

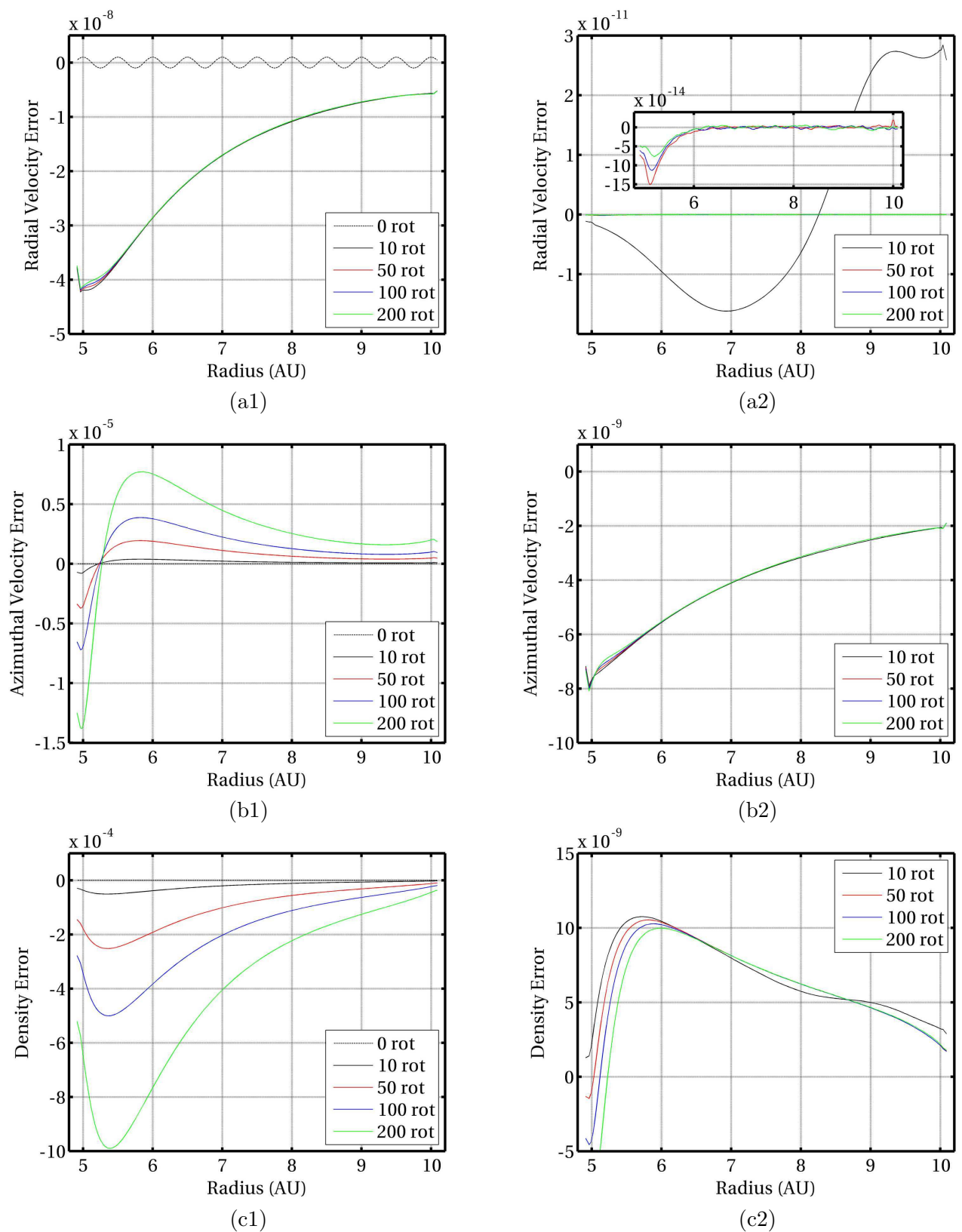
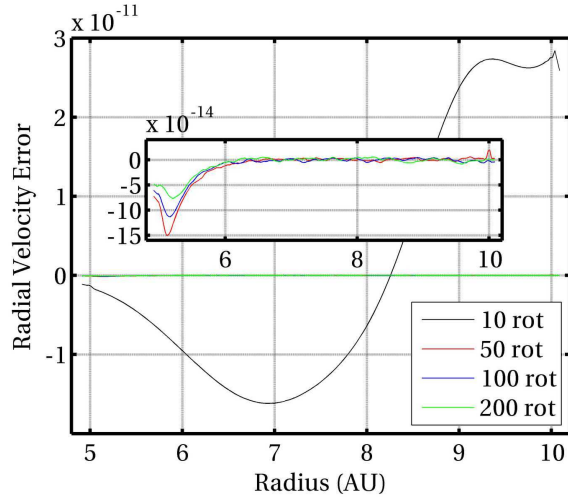
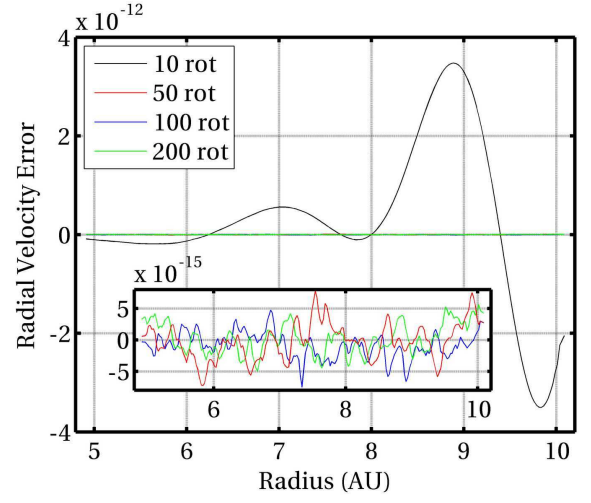


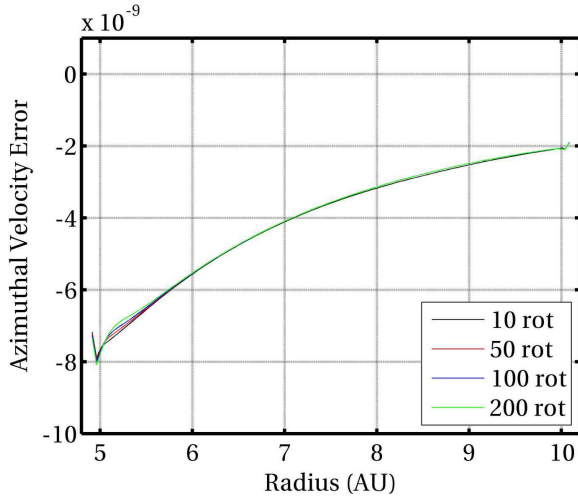
Figure III.4 – Cette figure montre les résultats du schéma volumes finis standard dans la colonne de gauche et du schéma partiellement équilibré dans la colonne de droite. Nous présentons ici les erreurs relatives entre la vitesse radiale, la vitesse azimutale et la densité par rapport aux valeurs stationnaires. Les couleurs représentent différents instants. En pointillés noirs est représenté l’instant initial. En trait plein noir l’instant 10 rotations. En trait rouge, 50 rotations, en trait bleu 100 rotations et enfin en trait vert 200 rotations. La résolution de la grille est 200 radialement et 400 azimutalement. Sur la figure (a2), nous avons intégré un zoom sur les 3 derniers instants afin de mieux distinguer l’erreur pour ces courbes.



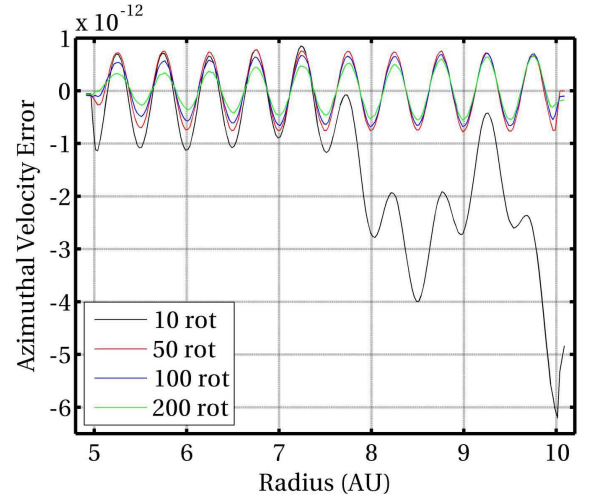
(a1)



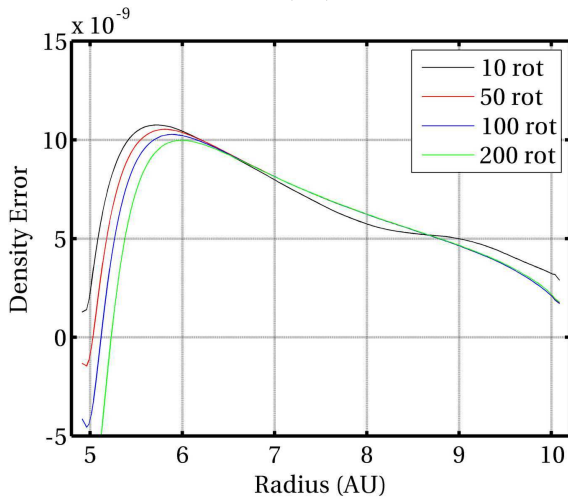
(a2)



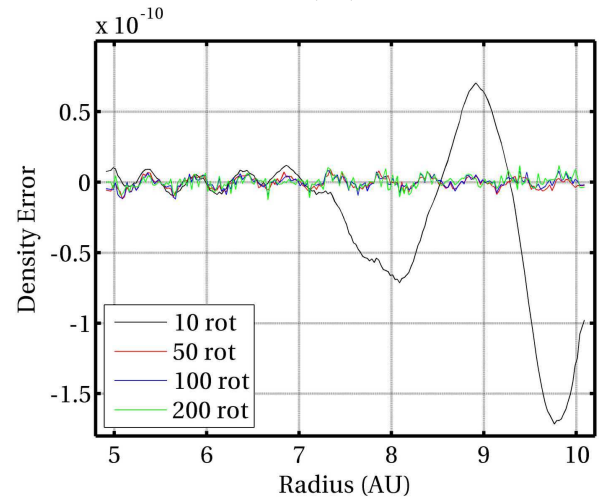
(b1)



(b2)



(c1)



(c2)

Figure III.5 — Cette figure montre le schéma partiellement équilibré dans la colonne de gauche et le schéma totalement équilibré dans la colonne de droite. La nomenclature est la même que pour la Figure III.4. Sur la figure (a2), nous avons intégré un zoom sur les 3 derniers instants afin de mieux distinguer l'erreur pour ces courbes.

classique mais ne résulte pas en un schéma complètement équilibré. En particulier, des erreurs croissantes existent encore dans les parties internes du disque.

La Figure III.5 montre la comparaison entre le schéma partiellement équilibré, colonne de gauche, et le schéma totalement équilibré, colonne de droite (sous figures a2, b2, c2). La correction des termes de source permet d'homogénéiser les erreurs sur le disque et d'obtenir des valeurs similaires en fonction du rayon. Nous avons donc développé un schéma bien équilibré. Tout d'abord la vitesse radiale (a2) est confinée entre -5 et 5×10^{-15} ce qui représente un gain d'un facteur 10 sur le schéma partiellement équilibré et l'écart important dans la partie interne est résorbé. Les erreurs ne présentent pas d'amortissement au cours du temps ce qui laisse supposer que l'on a atteint la précision limite que l'on peut atteindre avec cette résolution. L'usage d'une résolution spatiale supérieure peut réduire encore ces erreurs. La vitesse azimutale présente une nette amélioration entre ces deux schémas. Le schéma équilibré (b2) permet d'obtenir une erreur uniforme comprise entre -1 et 1×10^{-12} soit près d'un gain de 10^4 par rapport au schéma partiellement équilibré. On remarque qu'elle diminue sensiblement au cours du temps et qu'elle présente un profil sinusoïdal, traduisant la relaxation de la perturbation initiale. Enfin, l'erreur de la densité (c2) présente le même profil sinusoïdal dont la norme est de 1×10^{-11} . L'erreur est ainsi améliorée d'un facteur 10^3 sur le schéma partiellement équilibré. Pour finir, nous insistons sur la répartition équilibrée des erreurs autour de zéro, ce qui n'est pas observé sur les autres schémas c'est-à-dire le schéma standard et le schéma partiellement équilibré. Seule la compensation simultanée des termes de flux et des termes de source permet d'obtenir ce résultat. Au final, un gain supérieur à 10^7 peut être atteint sur les erreurs générées par le schéma numérique sur la solution stationnaire, grâce à l'utilisation du schéma totalement équilibré.

3 Conditions aux limites

Le choix des conditions aux limites du domaine de simulation est crucial pour l'étude des disques. Il faut en effet préserver la stabilité du disque durant plusieurs centaines de rotations, en évitant des pertes artificielles d'énergie ou de matière. Le caractère compressible du gaz ajoute à la complexité car la présence éventuelle d'ondes rend plus délicate l'implémentation des conditions aux limites radiales. Il faut en particulier éviter la réflexion des ondes sur les bords internes et externes, qui risquent de perturber le domaine d'étude ou conduire à des instabilités du disque.

Dans le cas des schémas numériques sur grille, comme les schémas aux volumes finis, il est courant d'utiliser ce qu'on appelle des *cellules fantômes*. C'est un ensemble de cellules qui se trouve à l'extérieur du domaine d'études, et dont le but est de raccorder la zone d'étude avec le reste du disque non perturbé. On implémente dans ces cellules les conditions aux limites pour le problème étudié. Le choix de ces conditions est délicat car il ne doit pas dégrader la zone d'étude. En général le degré de dégradation diminue quand le nombre de cellules croît.

Dans notre code, nous utilisons quatre cellules fantômes dans chaque direction. Dans la direction radiale, on ajoute quatre anneaux de part et d'autre des rayons interne et externe, et dans la direction azimutale, quatre quartiers de part et d'autre de 0 et 2π , comme le montre la Figure III.6.

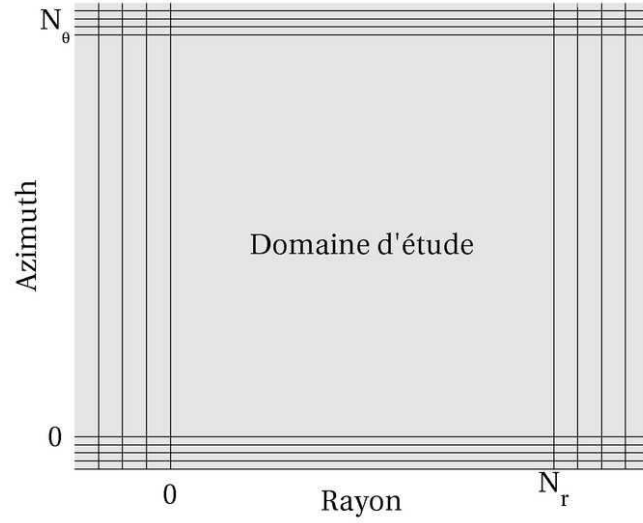


Figure III.6 – Illustration de l'implémentation des cellules fantômes. Dans la partie adjacente au domaine d'étude, le découpage s'effectue dans les deux directions. Ce double découpage n'est représenté que dans les quatre "coins".

Au total, c'est donc $8N_r + 8N_\theta + 4 \times 16$ cellules fantômes se trouvant à l'extérieur du domaine d'étude qui vont permettre d'implémenter les conditions aux limites.

3.1 Conditions azimutales

Les conditions aux limites dans la direction azimutale sont les plus simples à définir. Elles expriment simplement la périodicité de cette dimension. Si on numérote de -4 à -1 les cellules en deçà du quartier d'azimut 0 , que l'on appellera cellules fantômes inférieures, et de $N_\theta + 1$ à $N_\theta + 4$ celles au delà du quartier d'azimut 2π , que l'on appellera cellules fantômes supérieures, la condition aux limites azimutales s'écrit pour une variable d'Euler E_k :

$$E_k(j = -4..-1) = E_k(j = N_\theta - 4..N_\theta - 1) \quad (\text{III.45})$$

$$E_k(j = N_\theta + 1..N_\theta + 4) = E_k(j = 1..4) \quad (\text{III.46})$$

Autrement dit, on a dans la direction azimutale un chevauchement des cellules fantômes lié à la périodicité du domaine de simulation dans cette direction.

3.2 Conditions radiales

Les conditions aux limites radiales sont plus difficiles à implémenter. En effet, la rotation différentielle du disque $\Omega(r)$, qui est différente de la rotation solide $\Omega = \text{constante}$, induit un cisaillement et tend à spiraler toute perturbation se propageant radialement dans le disque. Par contraste, l'uti-

lisation de conditions réfléchives tend à perturber le domaine d'étude et peut donner lieu à une instabilité de bord, comparable à l'instabilité de Papaloizou-Pringle, 1984 [24], ou à celle illustrée dans Goldreich, 1985 [14]. La recherche des conditions dites "libres", c'est à dire qui s'adaptent à la solution numérique, et qui soient absorbantes, est toujours difficile. Dans cette recherche, nous avons consulté notamment Hayder, 1997 [16].

Les deux contraintes à respecter sont donc d'une part de développer des conditions non réfléchives et absorbantes, et d'autre part qu'elles tiennent compte des caractéristiques de l'écoulement à savoir la rotation différentielle. Nous allons détailler ces deux conditions et montrer leurs différences avec d'autres conditions.

Conditions de non réflexion

Afin d'implémenter des conditions aux limites radiales qui perturbent le moins possible le disque, nous utilisons, comme pour les conditions azimutales, quatre cellules fantômes de part et d'autre du disque. Numérotions de $i = -4$ à $i = -1$ les cellules en deçà du rayon interne r_{int} , que l'on va appeler cellules fantômes intérieures, et de $i = N_r + 1$ à $i = N_r + 4$ celles au delà du rayon externe r_{ext} , que l'on va appeler cellules fantômes extérieures.

Le calcul des flux radiaux nécessitant une interpolation des variables d'Euler, ces derniers ne peuvent être calculés qu'à partir de $i = -2$, et jusqu'à $i = N_r + 2$. Il faut en effet déterminer les flux à gauche et à droite de chaque frontière.

Pour conserver la continuité de la portion de disque simulée avec le reste du disque, nous considérons que les variables d'Euler des cellules $i = -4, -3$ et $i = N_r + 3, N_r + 4$, pour lesquelles l'évolution temporelle n'est pas calculée, gardent les valeurs de la solution stationnaire E_k^0 .

Selon l'approche déjà évoquée dans la partie dédiée au calcul des termes de source, nous exprimons les variables d'Euler dans les cellules fantômes par :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^0 + E'_1 \\ E_2 &= E_2^0 \tilde{E}_2 \\ E_3 &= E_3^0 \tilde{E}_3 \\ E_4 &= E_4^0 \tilde{E}_4 \end{aligned}$$

Pour limiter les réflexions, et garantir une certaine continuité dans la solution, nous amortissons

les variables calculées dans les cellules $i = -2, -1$ et $i = N_r + 1, N_r + 2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_1(i) &= E_1^0(i) + (1 - \epsilon)E_1'(i) \\ E_2(i) &= E_2^0(i)(1 - \epsilon)(\tilde{E}_2(i) - 1) \\ E_3(i) &= E_3^0(i)(1 - \epsilon)(\tilde{E}_3(i) - 1) \\ E_4(i) &= E_4^0(i)(1 - \epsilon)(\tilde{E}_4(i) - 1) \end{aligned}$$

pour $i = -1$ et $i = N_r + 1$, et de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_1(i) &= E_1^0(i) + (1 - \epsilon)^2 E_1'(i) \\ E_2(i) &= E_2^0(i)(1 - \epsilon)^2(\tilde{E}_2(i) - 1) \\ E_3(i) &= E_3^0(i)(1 - \epsilon)^2(\tilde{E}_3(i) - 1) \\ E_4(i) &= E_4^0(i)(1 - \epsilon)^2(\tilde{E}_4(i) - 1) \end{aligned}$$

pour $i = -2$ et $i = N_r + 2$, avec $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$.

L'amortissement exponentiel, via le terme $(1 - \epsilon)^2$ permet d'éviter les réflexions et donne un caractère absorbant aux conditions aux limites.

Dans la Figure III.8, on peut voir un exemple de simulation utilisant ces conditions, en présence d'ondes dans le disque. Sur la figure de gauche (a) en particulier on utilise des conditions absorbantes. On constate la présence de bandes de vorticité au niveau des rayons internes et externes, dues au forçage des deux premières et deux dernières cellules fantômes à la solution stationnaire. Ces perturbations de bord sont suffisamment faibles pour garantir un résultat fiable de la simulation, ce qui ne serait pas le cas en l'absence de conditions amortissantes.

Ce choix de conditions aux limites est satisfaisant dans la plupart de nos simulations, mais lorsque le disque est fortement perturbé par des ondes de grande amplitude, il devient moins performant. C'est pourquoi certaines simulations présentées dans ce travail montrent des bandes de vorticité aux limites internes et externes, dues à ce type de conditions aux limites radiales.

Conditions de cisaillement

Afin d'éviter l'instabilité du bord interne, nous cherchons à éviter de forcer les valeurs des deux premières et deux dernières cellules fantômes à leurs valeurs stationnaires. Pour cela nous devons considérer la propagation radiale des perturbations présentes dans le disque, dans le but d'obtenir des limites radiales les plus transparentes possibles.

Nous nous plaçons dans une approximation balistique. Une particule de fluide située à la position (r_0, θ) et se propageant radialement à la vitesse du son c_s va être advectée tangentiellement par la rotation du disque $\Omega_0(r)$. Comme $\Omega_0(r) \propto r^{\beta_{\Omega} = -3/2}$ est une fonction décroissante du rayon, la

particule va être déphasée de $\Delta\theta$. Après un temps $\Delta t = \Delta r/c_s$, sa position va devenir $(r_0 + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$. Déterminons ce déphasage. Si $\theta = \Omega_0(r)t$, et que l'on paramètre $t = r/c_s$, on a alors :

$$\begin{aligned} d\theta &= t d\Omega_0 + \Omega_0(r) dt = (\beta_\Omega + 1) \Omega_0(r) \frac{dr}{c_s} \\ \text{d'où} \\ \Delta\theta &= \int_{r_0}^{r_0 + \Delta r} (\beta_\Omega + 1) \Omega_0(r) \frac{dr}{c_s} \\ &= \left[r \frac{\Omega_0(r)}{c_s} \right]_{r_0}^{r_0 + \Delta r} \end{aligned}$$

On pose c_s égal à la vitesse du son de l'état stationnaire au rayon r_0 , soit $c_{s0}(r_0)$. Notons que $r\Omega_0(r) = V_0(r)$, c'est à dire $E_2^0(r)/E_4^0(r)$ dans notre écriture des variables d'Euler. Enfin, on calcule le déphasage de l'indice azimutal Δj associé à $\Delta\theta$:

$$\Delta j = \Delta\theta \frac{N_\theta}{2\pi} \quad (\text{III.47})$$

Les valeurs des variables d'Euler dans les deux premières et deux dernières cellules radiales du disque sont finalement définies de la même façon que pour des conditions amortissantes, auxquelles on ajoute la propagation spirale. Pour la première cellule radiale soit $i = -4$, on a $r_0 = r(i = 0)$ et :

$$E_1(-4, j) = E_1^0(-4) + (1 - \epsilon)^2 E_1'(0, j + \Delta j) \quad (\text{III.48})$$

$$E_2(-4, j) = E_2^0(-4)(1 - \epsilon)^2 (\tilde{E}_2(0, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.49})$$

$$E_3(-4, j) = E_3^0(-4)(1 - \epsilon)^2 (\tilde{E}_3(0, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.50})$$

$$E_4(-4, j) = E_4^0(-4)(1 - \epsilon)^2 (\tilde{E}_4(0, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.51})$$

$$\Delta j = \frac{N_\theta}{2\pi} c_{s0}(0)^{-1} (E_2^0(0)/E_4^0(0) - E_2^0(-4)/E_4^0(-4)) \quad (\text{III.52})$$

Pour la seconde cellule radiale, $i = -3$:

$$E_1(-3, j) = E_1^0(-3) + (1 - \epsilon) E_1'(0, j + \Delta j) \quad (\text{III.53})$$

$$E_2(-3, j) = E_2^0(-3)(1 - \epsilon) (\tilde{E}_2(0, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.54})$$

$$E_3(-3, j) = E_3^0(-3)(1 - \epsilon) (\tilde{E}_3(0, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.55})$$

$$E_4(-3, j) = E_4^0(-3)(1 - \epsilon) (\tilde{E}_4(0, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.56})$$

$$\Delta j = \frac{N_\theta}{2\pi} c_{s0}(0)^{-1} (E_2^0(0)/E_4^0(0) - E_2^0(-3)/E_4^0(-3)) \quad (\text{III.57})$$

Pour ces cellules, on a utilisé une propagation vers l'intérieur du disque, soit une vitesse du son $\vec{c}_{s0} = -c_{s0}\vec{u}_r$. C'est pourquoi l'expression de Δj est de signe opposé à celle de l'équation III.47.

Pour la dernière cellule radiale soit $i = N_r + 4$, on a $r_0 = r(i = N_r)$ et :

$$E_1(N_r + 4, j) = E_1^0(N_r + 4) + (1 - \epsilon)^2 E_1'(N_r, j + \Delta j) \quad (\text{III.58})$$

$$E_2(N_r + 4, j) = E_2^0(N_r + 4)(1 - \epsilon)^2 (\tilde{E}_2(N_r, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.59})$$

$$E_3(N_r + 4, j) = E_3^0(N_r + 4)(1 - \epsilon)^2 (\tilde{E}_3(N_r, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.60})$$

$$E_4(N_r + 4, j) = E_4^0(N_r + 4)(1 - \epsilon)^2 (\tilde{E}_4(N_r, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.61})$$

$$\Delta j = \frac{N_\theta}{2\pi} c_{s0}(N_r)^{-1} (E_2^0(N_r + 4)/E_4^0(N_r + 4) - E_2^0(N_r)/E_4^0(N_r)) \quad (\text{III.62})$$

Et pour l'avant dernière cellule radiale, $i = N_r + 3$:

$$E_1(N_r + 3, j) = E_1^0(N_r + 3) + (1 - \epsilon) E_1'(N_r, j + \Delta j) \quad (\text{III.63})$$

$$E_2(N_r + 3, j) = E_2^0(N_r + 3)(1 - \epsilon) (\tilde{E}_2(N_r, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.64})$$

$$E_3(N_r + 3, j) = E_3^0(N_r + 3)(1 - \epsilon) (\tilde{E}_3(N_r, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.65})$$

$$E_4(N_r + 3, j) = E_4^0(N_r + 3)(1 - \epsilon) (\tilde{E}_4(N_r, j + \Delta j) - 1) \quad (\text{III.66})$$

$$\Delta j = \frac{N_\theta}{2\pi} c_{s0}(N_r)^{-1} (E_2^0(N_r + 3)/E_4^0(N_r + 3) - E_2^0(N_r)/E_4^0(N_r)) \quad (\text{III.67})$$

Cette approche balistique donne de bons résultats et réduit au maximum les réflexions sur les limites. De plus, combinée au schéma numérique équilibré, la stabilité du disque semble très bonne. Enfin la procédure numérique est simple, et l'on s'abstient du calcul complexe de la décomposition en ondes qui est parfois utilisé pour tenir compte de la propagation radiale de la solution, comme proposé par Godon, 1996 [12]. La Figure III.7 montre l'efficacité de cette compensation ou déphasage, sur des cellules les proches, pour un profil de densité obtenu dans une de nos simulations. Pour illustrer la stabilité de cette approche nous avons comparé la solution obtenue pour une séparation radiale de 5 cellules, ce qui est le double de la séparation utilisée pour les conditions aux limites. En noir on montre la densité à $r(20)$, qui est la solution connue. En pointillés noir est tracée la densité en $r(15)$, qui est la fonction recherchée. Lorsque l'on effectue l'algorithme de déphasage sur la valeur en $r(20)$, on obtient une estimation de la valeur en $r(15)$, qui est tracée en rouge. Malgré un écart de 5 cellules, la solution approchée issue du déphasage de la fonction à $r(20)$ est proche de la solution numérique, à quelques pourcents près, comme l'illustre la figure de droite (b). L'écart se réduit de près de la moitié lorsque l'écart entre la solution à déphaser et la référence se réduit de 5 à 2. Cela donne une estimation de l'erreur que l'on produit dans nos conditions aux limites radiales.

Sur la Figure III.8, la partie droite (b) montre l'implémentation de ces conditions de cisaillement dans une simulation de disque présentant des ondes. On remarque qu'elles sont spiralées mais que les conditions radiales sont très performantes et ne créent quasiment aucune perturbation dans les zones adjacentes. En comparaison, la figure (a) montre des conditions simplement absorbantes mais non cisillées. L'effet de ces conditions sur le disque est indéniable, avec la création de bandes de vorticité près des limites radiales, et la rupture des ondes spirales à cet endroit. De telles conditions ne permettent pas de flux de matière ni d'énergie à travers les limites radiales, ce qui peut avoir

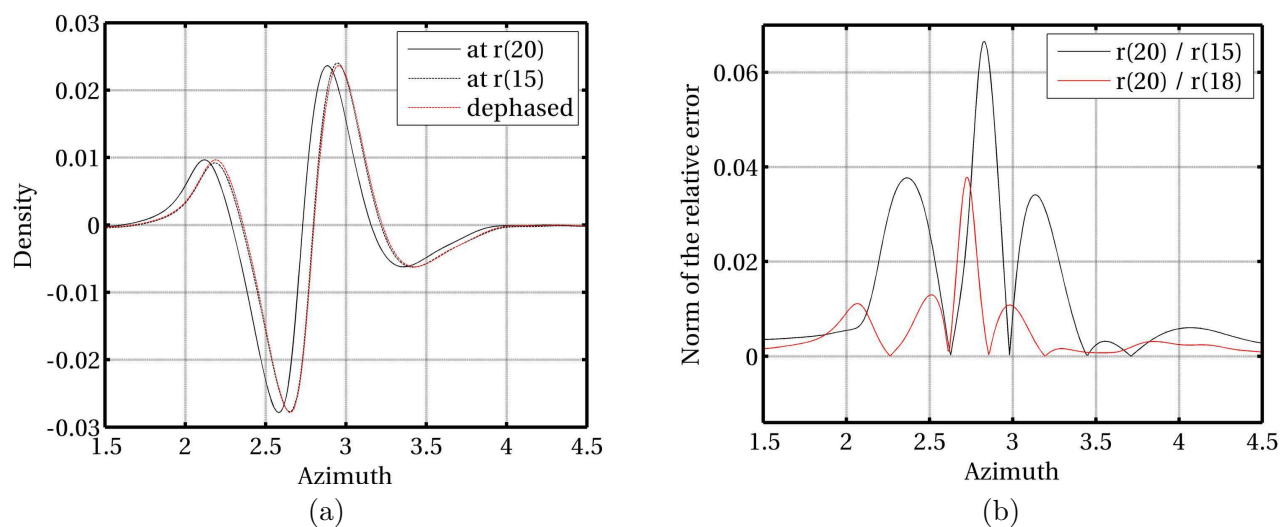


Figure III.7 – Sur la partie gauche de la figure (a), est représentée la densité pour une simulation avec onde. En trait plein noir est tracée la dépendance azimutale pour la position $r(20)$. En pointillés noir la dépendance azimutale pour la position $r(15)$. Pour cette simulation, nous calculons un $\Delta j = 10$. En pointillés rouge nous traçons la courbe noire déphasée de Δj . La correspondance est évidente. La partie droite (b) montre l'erreur entre les deux courbes. Elle est de l'ordre de 5% dans le cas entre $r(20)$ et $r(15)$ en trait noir, et inférieure à 3% dans le cas entre $r(20)$ et $r(18)$ en trait rouge. Cette dernière erreur est donc celle que l'on peut attendre dans les conditions aux limites.

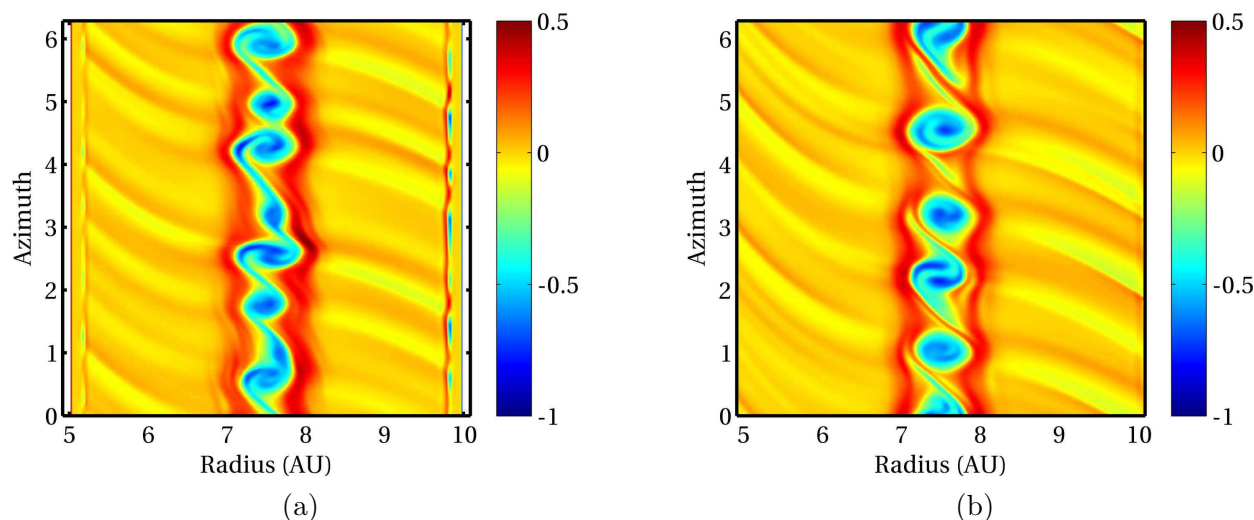


Figure III.8 – Cette figure montre la vorticité d'un disque obtenue en utilisant différentes conditions aux limites radiales. La figure de gauche (a) est obtenue avec le code VAC et nous a été fournie par H. Meheut. Elle utilise des conditions radiales absorbantes mais non cisaillées. La figure de droite (b) montre le résultat pour une simulation comparable avec les conditions aux limites radiales développées dans cette section, incluant les conditions de cisaillement. La transparence des limites radiales est grandement améliorée.

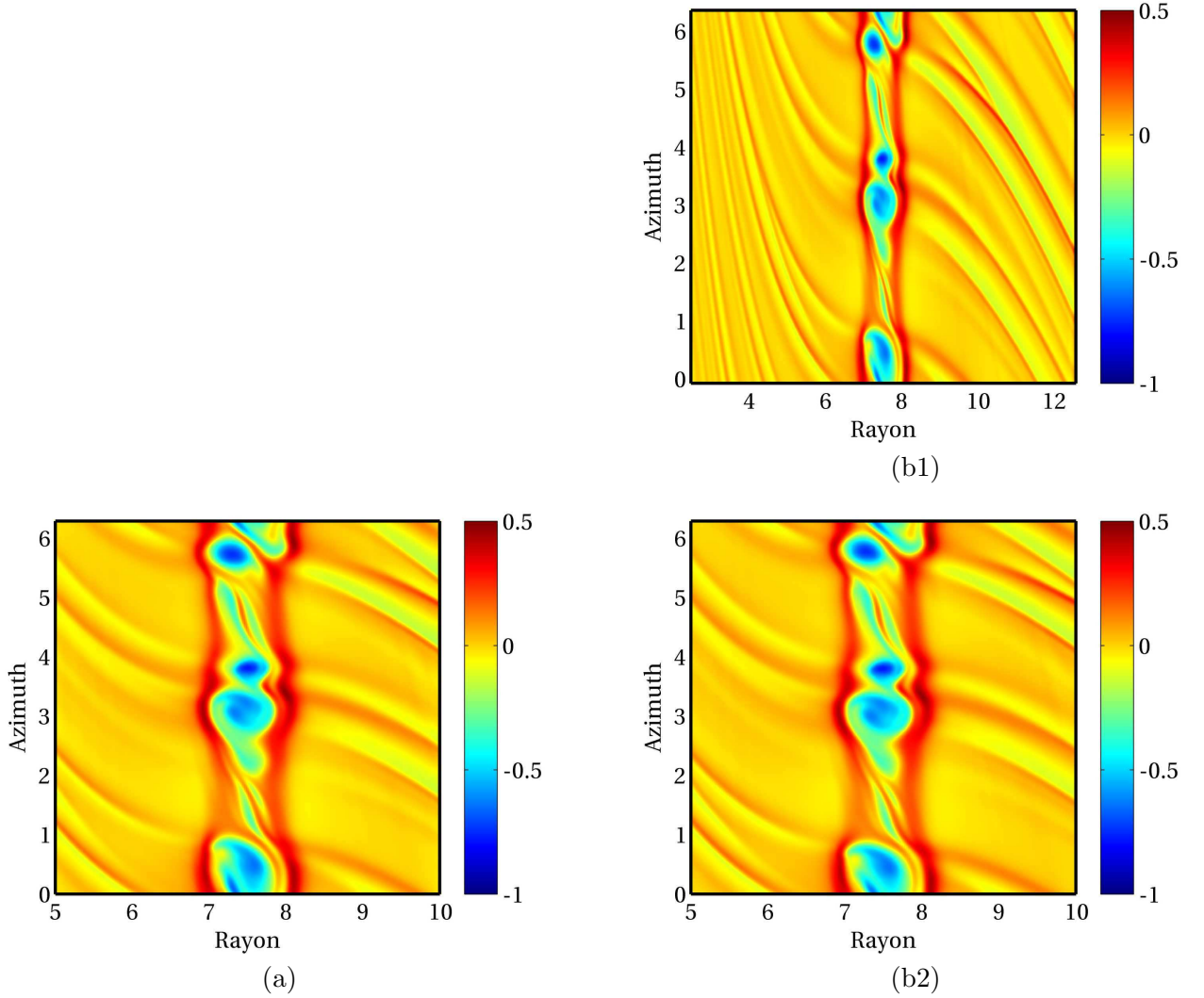


Figure III.9 — La vorticité pour deux disques de taille différentes. Les mêmes conditions initiales ont été utilisées. La résolution spatiale est comparable avec 50 cellules par UA radialement et 400 cellules azimutalement. La figure (a) montre la simulation pour le disque de taille $r_{int} = 5 UA$ et $r_{ext} = 10 UA$. La figure (b1) montre la simulation pour le disque de taille $r_{int} = 2.5 UA$ et $r_{ext} = 12.5 UA$. La figure (b2) est un zoom du disque de plus grande taille dans la région comprise entre 5 et 10 UA .

une influence à long terme sur les résultats physiques qui découlent des simulations, en particulier lorsqu'il s'agit d'étudier le transport de moment angulaire, l'accrétion ou les effets de migration.

Pour terminer nous présentons Figure III.9 la comparaison entre deux simulations contenant des ondes. Elles possèdent la même résolution par unité de longueur c'est-à-dire 50 cellules par UA radialement et 400 cellules azimuthalement. La première simulation est effectuée sur un domaine s'étendant de 2.5 à 12.5 UA et la seconde sur un domaine de 5 à 10 UA. Sur cette figure la vorticité du gaz résulte d'une même condition initiale, dans la région de 5 à 10 UA. On peut constater que la figure de gauche (a) correspondant à la simulation entre 5 et 10 UA donne un résultat très semblable à celui de droite (b2), qui correspond à une simulation effectuée entre 2.5 et 12.5 UA. On ne constate aucune bande de vorticité, et les ondes sont r solv es de la même façon. On en déduit que ces conditions aux limites sont extrêmement transparentes et ne perturbent pas l'évolution du disque. Ce test permet de montrer que les résultats de simulation que nous obtenons ne sont que très peu affectés par la taille du disque. Par conséquent on peut se limiter à la simulation d'un disque de taille modeste, ce qui permet d'atteindre des résolutions spatiales plus élevées.

Nous allons maintenant aborder l'implémentation de l'auto-gravité, ce qui nécessite des particularités numériques spécifiques.

4 Le traitement de l'auto-gravité

4.1 Calcul de l'intégrale de la gravité

Nous avons présenté dans le Chapitre précédent l'expression de la force d'auto-gravité. Elle dérive du potentiel d'auto-gravité du disque. Celui-ci s'écrit comme l'intégrale sur tout le disque du potentiel de chaque élément de volume du fluide :

$$\Psi_{ag}(\vec{r}) = - \int_{disque} \frac{G\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}(\vec{r}') \quad (\text{III.68})$$

Mais nous pouvons également exprimer la force de gravité comme étant :

$$\vec{F}_{ag} = -\vec{\nabla}\Psi_{ag} \quad (\text{III.69})$$

Si on peut introduire le gradient dans l'intégrale on obtient :

$$\vec{F}_{ag}(\vec{r}) = - \int_{disque} \frac{G\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\mathcal{V}(\vec{r}') \quad (\text{III.70})$$

Comme nous l'avons montré, la gravité d'un disque axisymétrique dont la densité varie en loi de puissance du rayon s'exprime comme une série. La gravité associée au disque stationnaire

$\sigma_0(r) \propto (r/r_0)^{\beta_\sigma}$, peut s'écrire analytiquement sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ag}^0(r) = -2\pi G \frac{\sigma_0(r_0)}{r_0^{\beta_\sigma+1}} & \left[(\beta_\sigma + 1) A r_\sigma^\beta - \frac{r_{int}^{\beta_\sigma+2}}{(\beta_\sigma + 2)} r^{-2} - \frac{1}{2} \frac{r_{ext}^{\beta_\sigma-1}}{(\beta_\sigma - 1)} r \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \frac{r_{int}^{\beta_\sigma+4}}{(\beta_\sigma + 4)} r^{-4} - \frac{36}{64} \frac{r_{ext}^{\beta_\sigma-3}}{(\beta_\sigma - 3)} r^3 - \frac{45}{64} \frac{r_{int}^{\beta_\sigma+6}}{(\beta_\sigma + 6)} r^{-6} \right] \vec{e}_r \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

si $\beta_\sigma \neq -1$ ou $\beta_\sigma \neq -2$, et où nous avons introduit :

$$A = \left(-\frac{1-6C}{\pi} - 1 - \frac{1}{(1+\beta_\sigma)(2+\beta_\sigma)} \right) \quad (\text{III.72})$$

On peut décomposer la gravité du disque entre un terme dû à la densité en loi de puissance et un terme dû aux résidus :

$$\vec{F}_{ag}(\vec{r}) = \vec{F}_{ag}^0(r) - \int_{disque} \frac{G[\sigma(\vec{r}') - \sigma_0(r)]}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\mathcal{V}(\vec{r}') \quad (\text{III.73})$$

Le dernier membre sera aussi noté $\vec{F}_{ag}^1(\vec{r})$. Nous tenons donc pour la première fois compte de la gravité d'un disque en loi de puissance. Cette décomposition entre une contribution $\vec{F}_{ag}^0$ due à la densité non perturbée $\sigma_0(r)$ et une contribution $\vec{F}_{ag}^1(\vec{r})$ due aux écarts, dans la région simulée, à la loi de puissance, permet une plus grande précision, et une meilleure description physique du disque. En effet, si l'on ne simule qu'une petite partie du disque, comprise entre r_{int} et r_{ext} , généralement comprise entre 1 et 20 UA , nous pouvons par cette approche prendre malgré tout en compte l'auto-gravité d'un disque non perturbé qui peut s'étendre de 1 à 200 UA par exemple. On peut donc décrire par l'auto-gravité, l'influence d'un disque réaliste, hors domaine de simulation. Ce raisonnement est d'autant plus valable que l'intervalle $r_{ext} - r_{in}$ est grand. En effet, la partie axisymétrique non simulée étant loin de la zone d'étude, l'effet de la gravité des ondes ou perturbations qui devraient s'y trouver est réduit. Considérer que, loin de la zone simulée, le disque n'est pas perturbé, est alors d'autant plus valable. Cette approche est donc une spécificité supplémentaire du Code ROSSBI.

Si l'on se place dans le repère cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, l'intégrale de $\vec{F}_{ag}^1(\vec{r})$ s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r &= - \int_{disque} \frac{G[\sigma(r', \theta') - \sigma_0(r)]}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{r}{r'} \cos(\theta - \theta')}}^3 \left[\frac{r}{r'} - \cos(\theta - \theta') \right] \frac{dr'}{r'} d\theta' \\ \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\theta &= - \int_{disque} \frac{G[\sigma(r', \theta') - \sigma_0(r)]}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{r}{r'} \cos(\theta - \theta')}}^3 [\sin(\theta - \theta')] \frac{dr'}{r'} d\theta' \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

Si l'on effectue maintenant le changement de variable $X = \ln(r)$, les intégrales s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r &= \\
 &- \int_{disque} \frac{G[\sigma(r', \theta') - \sigma_0(r)]}{\sqrt{1 + \exp[2(X - X')] - 2 \exp[X - X'] \cos(\theta - \theta')]^3} [\exp[X - X'] - \cos(\theta - \theta')] dX' d\theta' \\
 \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\theta &= \\
 &- \int_{disque} \frac{G[\sigma(r', \theta') - \sigma_0(r)]}{\sqrt{1 + \exp[2(X - X')] - 2 \exp[X - X'] \cos(\theta - \theta')]^3} [\sin(\theta - \theta')] dX' d\theta'
 \end{aligned} \tag{III.75}$$

On fait apparaître de cette façon le produit de convolution de la densité par une fonction de Green :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r &= - \int_{disque} G[\sigma(r', \theta') - \sigma_0(r)] \mathcal{G}_r(X - X', \theta - \theta') dX' d\theta' \\
 \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\theta &= - \int_{disque} G[\sigma(r', \theta') - \sigma_0(r)] \mathcal{G}_\theta(X - X', \theta - \theta') dX' d\theta'
 \end{aligned} \tag{III.76}$$

Le calcul de ces intégrales est alors très simple dans l'espace de Fourier. En effet, le produit de convolution de deux fonctions est égal à la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier des deux fonctions. Si l'on note $\mathcal{F}[\]$ l'opération transformée de Fourier, et $\mathcal{F}^{-1}[\]$ l'opération transformée de Fourier inverse, alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r &= \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F} \left[-G(\sigma(\vec{r}) - \sigma_0(r)) \right] \mathcal{F}[\mathcal{G}_r] \right] \\
 \vec{F}_{ag}^1(\vec{r}) \cdot \vec{e}_\theta &= \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F} \left[-G(\sigma(\vec{r}) - \sigma_0(r)) \right] \mathcal{F}[\mathcal{G}_\theta] \right]
 \end{aligned} \tag{III.77}$$

C'est pourquoi lorsque l'on veut calculer l'auto-gravité nous utilisons la grille à découpage logarithmique que nous avons décrit au paragraphe 1.2. L'utilisation de méthodes rapides appelées *FFT*, permet de calculer ces transformées et transformées inverses de façon simple et rapide. Nous avons trouvé dans Chu, 2000 [6], les notions nécessaires pour l'implémentation numérique.

Quelques prescriptions numériques s'imposent cependant. Si la densité et les fonctions de Green $\mathcal{G}_r$ et $\mathcal{G}_\theta$ sont périodiques dans la direction azimutale, elles ne le sont pas dans la direction radiale. Or la transformation de Fourier s'applique sur des fonctions périodiques. Afin de réduire les erreurs dans la direction radiale induites par cette remarque, nous étendons le domaine radial de r_{int} à $2r_{ext} - r_{int}$, ce qui revient à doubler la taille du domaine d'étude vers l'extérieur. Dans la partie ajoutée, la densité $\sigma(\vec{r}) - \sigma_0(r)$ est nulle. De ce fait nous périodisons la fonction, car à l'extérieur du domaine r_{int} à r_{ext} la densité est égale à σ_0 . La Figure III.10 illustre ce principe. Introduire la zone de densité nulle permet de créer un comportement périodique. La densité a alors la forme présentée sur cette figure. Si le domaine d'étude est compris entre 5 et 10 UA, on ajoute une zone entre 10 et 15 UA pour faciliter le calcul du produit de convolution. Ce dernier est donc calculé pour un signal périodique.

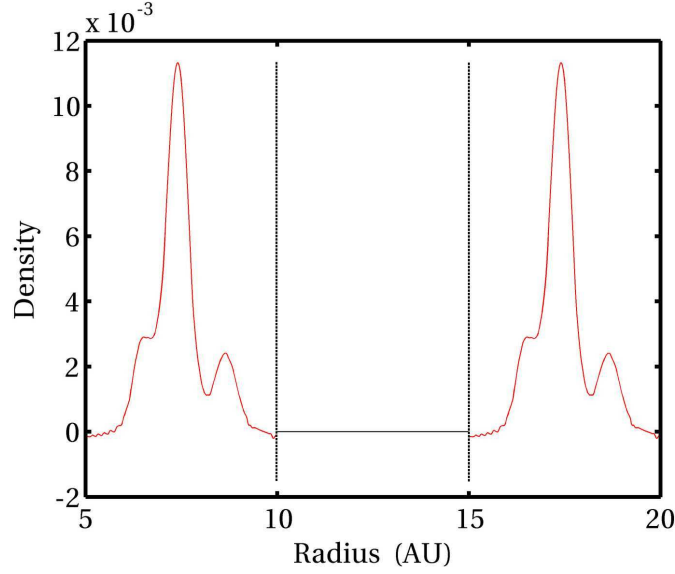


Figure III.10 – Illustration de la périodisation dans la direction radiale. Le domaine d’étude, qui s’étend ici de 5 à 10 UA et dans lequel l’évolution de la densité est calculée, est doublé pour atteindre 15 UA. Dans la zone ajoutée, la densité est nulle. De ce fait, la fonction est périodique et nous montrons la zone suivante, entre 15 et 20 UA. Cette procédure permet un calcul précis du produit de convolution dans l’espace de Fourier.

4.2 Test et implémentation numérique

Le calcul de la gravité effectué de cette façon est très rapide, car on évite le calcul direct de l’intégrale. Ce calcul est remplacé par la transformation de Fourier qui demande moins de complexité numérique. La complexité algorithmique est en $O(N_r * N_\theta * \ln(N_r) * \ln(N_\theta))$ pour le produit de convolution dans l’espace de Fourier, alors qu’elle est en $O(N_r^2 * N_\theta^2)$ pour le calcul direct de l’intégrale. L’implémentation dans le code est aisée grâce à l’utilisation de bibliothèques numériques qui fournissent des procédures de transformée de Fourier très stables et performantes. Nous avons utilisé l’une des plus rapides, *FFTW3*, voir le manuel de Frigo sur le site web [11], ou bien l’ouvrage détaillé du même auteur (Frigo, 2005 [10]). Elle permet le calcul de transformées de Fourier en 2D et 3D, en variables double précision. Le codage est aisé, et ne fait appel qu’à quelques fonctions de cette bibliothèque. De plus, *FFTW3* dispose de versions parallèles qui permettent d’utiliser la puissance des plate-formes multicoeurs ou des clusters. Nous avons utilisé la bibliothèque *FFTW3_thread* qui permet le calcul parallèle sur des plate-formes multicoeurs avec de bonnes performances.

Nous avons vérifié la précision de cette méthode en déterminant la gravité d’un disque stationnaire, dont la densité est en loi de puissance du rayon. On a pu ainsi comparer le résultat avec l’expression analytique $\bar{g}_{ag}^0$. Notons toutefois que cette dernière est la troncation de la série qui exprime le potentiel d’un tel disque. Son expression est valable loin des bords du disque, dans la partie centrale du domaine d’étude. Nous avons déterminé la gravité d’un disque de densité σ_0 , s’étendant de 2 à 22 UA. Nous calculons le produit de convolution de la densité σ_0 par la fonction de Green radiale. Nous avons utilisé deux résolutions, $(N_r, N_\theta) = (400, 200)$ et $(N_r, N_\theta) = (800, 200)$. La faible résolution dans la direction azimutale n’a pas d’influence car le disque est axisymétrique.

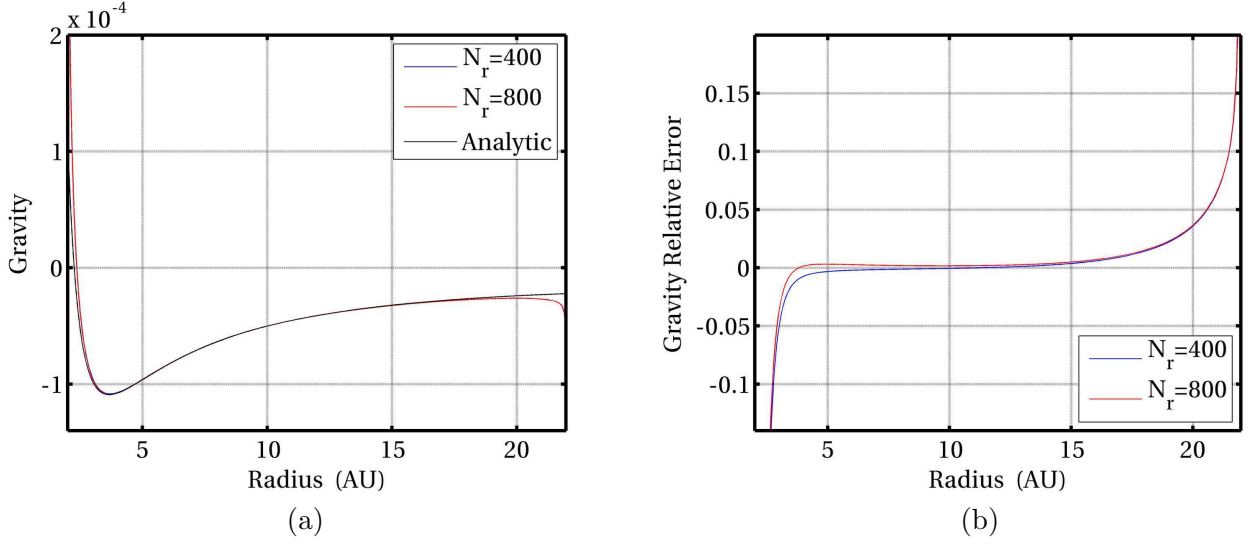


Figure III.11 – Sur la figure de gauche (a), nous montrons la force de gravité en fonction du rayon. Le trait noir représente l'expression analytique. Le trait bleu représente la gravité calculée avec une résolution de $(N_r, N_\theta) = (400, 200)$. Le trait rouge représente la gravité calculée avec une résolution de $(N_r, N_\theta) = (800, 200)$. On constate le bon accord entre les trois courbes sauf près des bords du disque. La figure de droite (b) montre l'erreur relative entre la gravité calculée pour les différentes résolutions (mêmes codes de couleur que sur la figure de gauche) et la solution analytique.

La Figure III.11 montre les résultats obtenus. À gauche (a) on peut voir la comparaison entre la gravité calculée avec les différentes résolutions et la valeur analytique. La courbe bleue représente la plus faible résolution et la rouge, la plus forte. Les résultats numériques sont en bon accord avec l'expression analytique. La gravité est calculée correctement par la méthode numérique. Cependant les résultats numériques montrent un écart significatif près des bords du disque. La partie droite, figure (b), présente les erreurs relatives entre les résultats numériques et la solution analytique. L'erreur près du bord interne est supérieure à 20% et près du bord externe de l'ordre de 20%. En revanche, dans la zone comprise entre 3 et 21 UA, l'erreur est inférieure à 5%. Le résultat dépend peu de la résolution, car l'écart entre la courbe bleue et la courbe rouge n'est perceptible que près du rayon 5 UA. Pourtant la résolution est doublée dans le cas représenté en rouge. On peut affirmer que l'on a atteint la convergence de la solution numérique dès $N_r = 400$.

Les erreurs près des bords sont donc dues à la précision avec laquelle on calcule la gravité de façon analytique. On peut augmenter le nombre de termes de la série qui exprime le potentiel afin de limiter cette erreur. Cependant, notre approche est d'utiliser cette expression analytique pour déterminer la gravité d'un grand disque, et de calculer numériquement la gravité dans la zone d'étude dans laquelle les équations d'Euler sont résolues. Ainsi si on résout lesdites équations entre 5 et 10 UA par exemple, on peut tenir compte de la gravité du disque qui s'étend de 1 à 100 UA typiquement par l'expression analytique, et calculer directement la gravité du disque entre 5 et 10 UA par la méthode numérique décrite plus haut. Les erreurs de l'expression analytique près des rayons 1 et 100 UA ne sont donc pas importantes, dès lors que l'on sait que l'erreur est

inférieure à 5% dans la partie centrale, et en particulier entre 5 et 10 UA. Cette approche hybride analytique/numérique est innovante et permet pour la première fois de décrire correctement la gravité globale du disque, avec la prescription que loin de la zone d'étude effective où les équations d'Euler sont résolues, le disque n'est pas ou très peu perturbé.

5 Performances du code ROSSBI

Pour terminer ce chapitre, nous présentons les performances du code que nous avons développé, en terme de diffusion numérique, que nous voulons la plus faible possible, et en terme de temps d'exécution sur différentes machines. Nous commencerons par présenter la viscosité numérique contenue dans le schéma. Puis nous discuterons des performances obtenues grâce à de multiples optimisations sur le temps de calcul.

5.1 Viscosité numérique

La construction d'un code équilibré permet de conserver la solution stationnaire pendant un très grand nombre de rotations. Cela permet également d'étudier les problèmes de transport radial d'énergie et de moment angulaire. Cependant la viscosité numérique ou diffusivité du schéma est un effet numérique qui peut réduire le gain obtenu par l'équilibrage du schéma. En effet si l'amortissement visqueux diffuse trop les structures présentes dans le disque, une étude à long terme est impossible.

Nous avons réalisé un test qualitatif qui permet d'évaluer la diffusion numérique du schéma afin d'en mesurer l'impact sur les perturbations présentes dans le disque. Ce test ne fournit pas un coefficient de viscosité mais plutôt une échelle de temps sur laquelle la diffusion numérique devient significative, sous la forme d'un écart à la solution initiale stationnaire. Pour cela, une surdensité axisymétrique stationnaire est introduite dans le disque. Son profil est le suivant :

$$\sigma(r) = \sigma_0(r) \left[1 + A \exp \left(-\chi_r^{-2} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2 \right) \right] \quad (\text{III.78})$$

La surdensité est placée au milieu d'un disque qui s'étend de $r_{int} = 5$ à $r_{ext} = 10$ UA. Ainsi $r_0 = 7.5$ UA. L'amplitude de la surdensité est $A = 0.2$ et sa largeur radiale est $\chi = 4.10^{-2}$. Le champ de vitesse est dérivé de la stationnarité de la solution :

$$U = 0 \quad (\text{III.79})$$

$$V(r) = \left(V_{kep}^2(r) + \frac{r}{\sigma(r)} \partial_r P(r) \right)^{1/2} \quad (\text{III.80})$$

$$P(r) = \frac{k_B}{\mu M_H} T_0(r) \sigma(r) \quad (\text{III.81})$$

Dans un premier temps, nous comparons la viscosité induite par l'interpolation des flux. Comme nous l'avons vu les schémas classiques interpolent linéairement les flux, alors que le schéma déve-

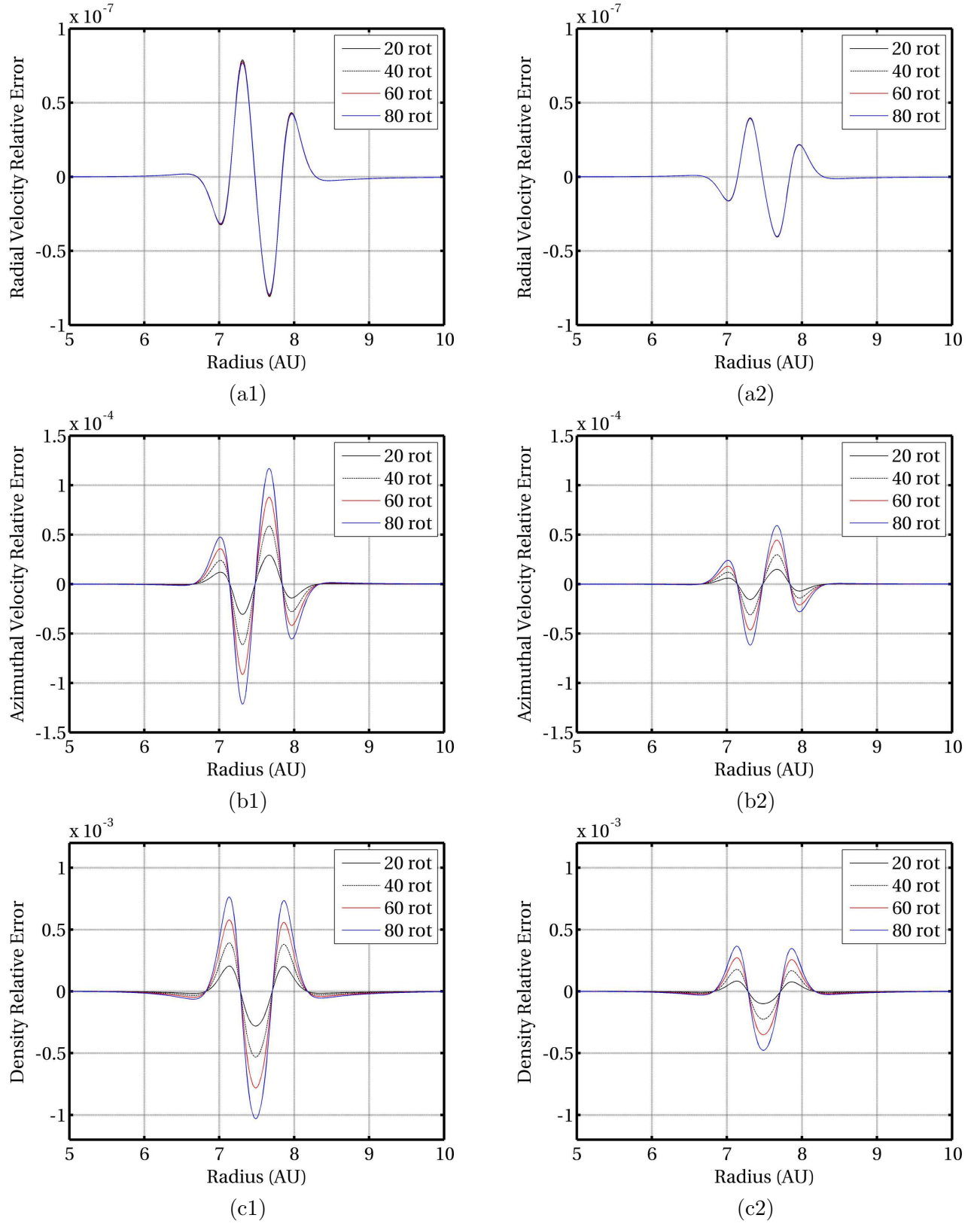


Figure III.12 – Comparaison entre l'interpolation linéaire et parabolique des variables d'Euler dans le calcul des flux, colonne de gauche et de droite respectivement. Nous montrons l'erreur relative de vitesse radiale (a), azimutale (b) et de densité (c). Les couleurs représentent différents instants. Le trait plein noir représente 20 rotations, les pointillés noir 40 rotations, le trait plein rouge 60 rotations et le trait plein bleu 80 rotations.

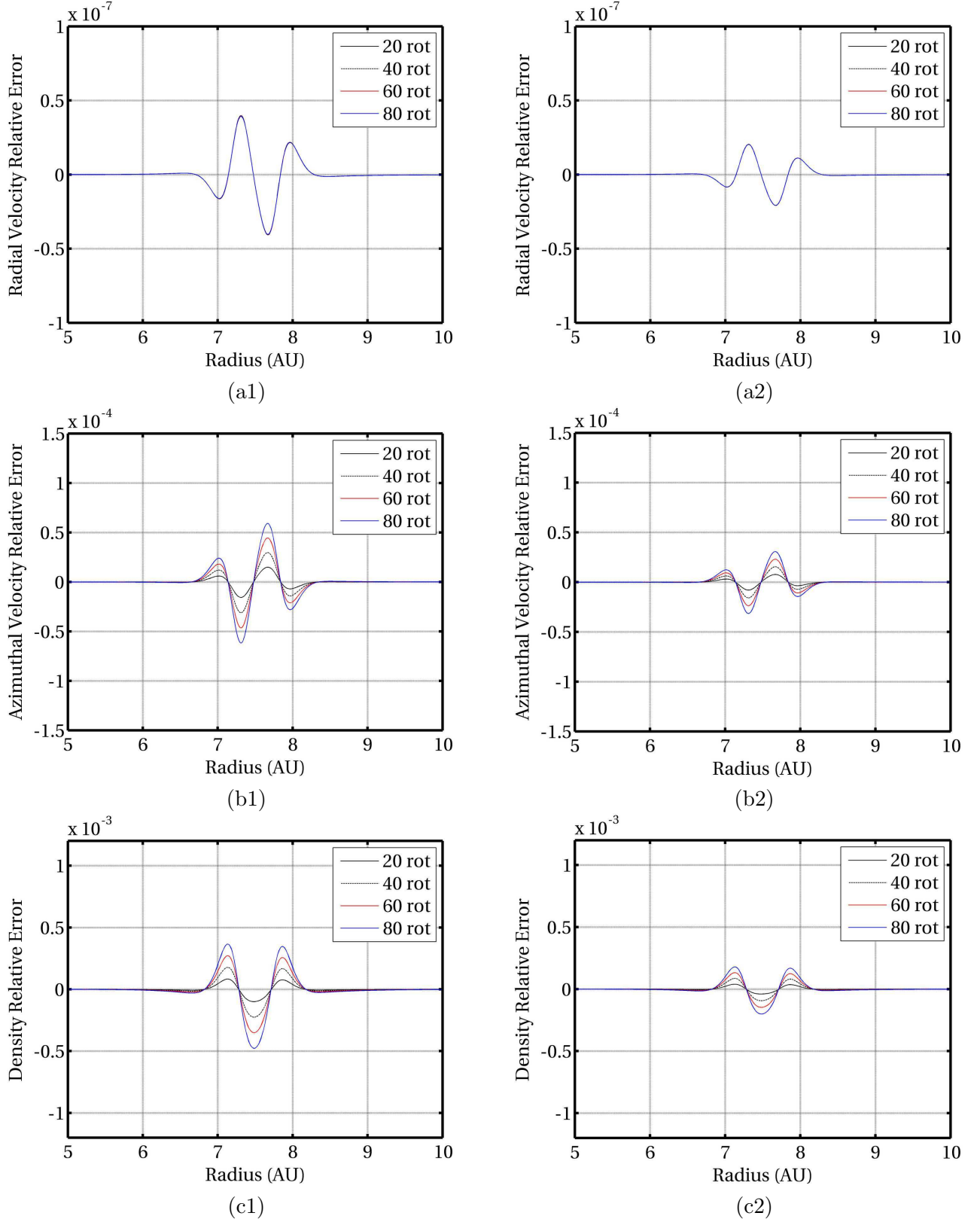


Figure III.13 – Comparaison entre une résolution spatiale de 400 radialement et 800 azimutalement et de 500 radialement et 1000 azimutalement, colonne de gauche et de droite respectivement. Nous montrons l'erreur relative sur la vitesse radiale (a), azimutale (b) et de densité (c). Les couleurs représentent différents instants. Le trait plein noir représente 20 rotations, les pointillés noir 40 rotations, le trait plein rouge 60 rotations et le trait plein bleu 80 rotations.

loppé ici est basé sur une interpolation parabolique. La Figure III.12 montre les résultats de ces deux tests. La colonne de gauche présente les erreurs relatives de vitesse radiale (a1), de vitesse azimutale (b1) et de densité (c1) pour l'interpolation linéaire. La colonne de droite montre les erreurs relatives de vitesse radiale (a2), de vitesse azimutale (b2) et de densité (c2) pour l'interpolation parabolique. On remarque tout d'abord que dans les deux cas, les erreurs sur la vitesse azimutale et sur la densité augmentent au cours du temps. Le signe de ces erreurs traduit une diminution de l'amplitude de la perturbation présente dans le disque. Le profil de vitesse radiale, initialement nul, présente un profil quasi stationnaire, qui est cohérent avec l'étalement de la perturbation. L'évolution du profil de densité ressemble à l'évolution des fonctions de Green, solution de l'évolution visqueuse d'un disque 1D. (Lynden-Bell, 1974 [22]). L'amplitude de la densité diminue en même temps que la largeur de la perturbation augmente. Cependant, la variation de largeur radiale est très peu visible sur ces résultats, car il semble que la viscosité soit faible. Cet effet serait visible si on laissait évoluer le disque durant plusieurs centaines de rotations.

En comparant les deux colonnes, on met en évidence que l'erreur induite par la viscosité numérique est réduite de moitié par l'usage de l'interpolation parabolique. Cela constitue un gain important car cela permet d'effectuer une intégration temporelle deux fois plus longue, tout en atteignant les mêmes erreurs que le schéma classique.

La Figure III.13 est une comparaison entre deux résolutions spatiales différentes, dans le but d'illustrer la diminution de la viscosité numérique avec la résolution. La colonne de gauche (a1, b1, c1) montre les erreurs relatives des différentes variables que nous avons déjà explicitées, pour une résolution spatiale de $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$. La colonne de droite (a2, b2, c2) montre les résultats obtenus pour une résolution spatiale de $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$. Nous avons implémenté l'interpolation parabolique dans les deux simulations. Bien entendu l'impact de la résolution azimutale est nul car la perturbation est axisymétrique. Par contre, la résolution radiale est augmentée de 25% entre les deux simulations. Tout d'abord, le comportement est semblable entre les deux simulations, avec une augmentation de l'erreur sur la densité et la vitesse azimutale au cours du temps. La vitesse radiale a également le même profil. Mais on remarque ensuite que les erreurs sont réduites de près de la moitié avec la résolution la plus élevée. Pourtant le nombre de cellules n'est supérieur que de 25%. Il semble que la viscosité numérique est très sensible au nombre de mailles, et ce comportement non linéaire avec la résolution est une conséquence de l'interpolation parabolique. C'est donc un choix performant d'interpolation.

Pour conclure cette approche, nous résumons sur la Figure III.14 l'évolution temporelle du maximum de l'erreur de la densité (a) et de la vitesse azimutale (b), pour les trois cas discutés précédemment. On peut voir que l'erreur augmente linéairement au cours du temps, ce qui confirme ce que nous avons remarqué plus haut. À partir de ces courbes on peut estimer un temps caractéristique visqueux découlant des erreurs numériques pour chaque cas. Pour la densité, on peut le

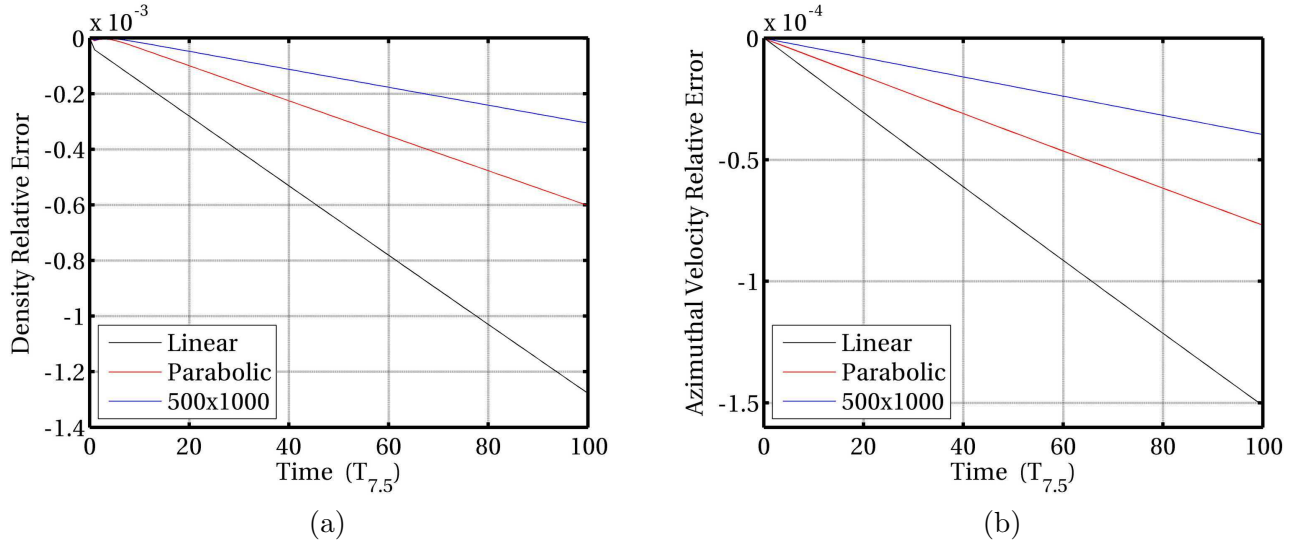


Figure III.14 – Sur la figure de gauche (a), nous montrons le maximum d’erreur relative de la densité au cours du temps. En noir est représenté le cas de résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$ et avec interpolation linéaire. En rouge est représenté le cas de résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$ et avec interpolation parabolique. Enfin en bleu est représenté le cas de résolution $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$ et avec interpolation parabolique. La figure de droite (b) montre le maximum d’erreur relative de la vitesse azimutale au cours du temps. Les mêmes codes de couleur sont utilisés. Le temps est normalisé à une rotation au rayon $r_0 = 7.5 \text{ UA}$.

définir lorsque l’erreur atteint 1% :

- Interpolation linéaire, résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$: $\Delta\sigma = -10^{-2} \frac{t}{800T_{7.5}}$
- Interpolation parabolique, résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$: $\Delta\sigma = -10^{-2} \frac{t}{1604T_{7.5}}$
- Interpolation parabolique, résolution $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$: $\Delta\sigma = -10^{-2} \frac{t}{3141T_{7.5}}$

L’erreur sur la vitesse azimutale obtenue sur ce temps visqueux est :

- Interpolation linéaire, résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$: $\Delta V = -1.21 \times 10^{-3} \frac{t}{800T_{7.5}}$
- Interpolation parabolique, résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$: $\Delta V = -1.23 \times 10^{-3} \frac{t}{1604T_{7.5}}$
- Interpolation parabolique, résolution $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$: $\Delta V = -1.24 \times 10^{-3} \frac{t}{3141T_{7.5}}$

L’utilisation d’une méthode d’interpolation parabolique combinée à une résolution spatiale suffisante permet d’atteindre une échelle de temps visqueux de plus de 1000 rotations. Cela est bien supérieur à la durée sur laquelle nous réaliserons les simulations présentées par la suite. Pour une résolution spatiale de $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$ et une durée d’intégration de 200 rotations, ce qui

constitue les conditions typiques de nos simulations, l'erreur attendue sur la densité, due aux effets visqueux, est de 6×10^{-4} . On peut donc avancer que la viscosité numérique n'a pas d'effet notable sur les résultats des simulations.

5.2 Parallélisation et temps de calcul

Atteindre des résolutions spatiales importantes et a fortiori intégrer les équations pendant plusieurs centaines de rotations demande des ressources informatiques importantes. La disponibilité de machines multicoeurs permet de répondre à nos besoins. Cependant il est nécessaire d'optimiser le code pour obtenir de bonnes performances sur ces machines.

Lorsque nous avons développé le code, le calcul se faisait de façon séquentielle, c'est-à-dire que chaque opération était effectuée à la suite des autres. Par conséquent, le programme n'utilisait qu'un coeur de la machine. Pour pouvoir profiter des ressources multicoeurs, nous avons dû paralléliser le code. Pour cela, il existe une bibliothèque utilisable en Fortran90, *OpenMP*, qui permet par l'insertion de commandes dans le code, de créer des régions parallèles, qui distribuent les opérations sur les coeurs disponibles. Consulter notamment Chandra, 2001 [3], et Chapman, 2008 [4], pour les détails sur cette bibliothèque et son utilisation.

L'analyse du code est une étape nécessaire afin de déterminer quelles parties du code sont parallélisables. L'ouvrage de Herlihy, 2008 [17], est très étoffé sur le sujet de la parallélisation, et de ce type d'analyse. L'algorithme de notre schéma est une suite de boucles qui actualisent soit les variables d'Euler, soit les termes de flux, soit les termes de source. Elles sont donc toutes parallélisables. Près de 100% du code est parallélisable, ce qui promet un très bon comportement sur les machines multicoeurs. On peut s'attendre à ce que le temps de calcul décroisse linéairement avec le nombre de coeurs.

Nous avons donc développé une version parallèle du code dans laquelle des optimisations supplémentaires de gestion de la mémoire ont été ajoutées. Ce type d'optimisations, spécifiques au langage Fortran 90, permet d'obtenir de meilleures performances (voir Chapman, 1998 [5], et Metcalf, 1999 [23]) :

- la permutations des indices des boucles, qui permet en Fortran d'optimiser l'accès aux cellules d'un tableau,
- la réduction des calculs répétitifs et le stockage dans des tableaux des grandeurs qui n'évoluent pas au cours du temps, comme les variables stationnaires E_k^0 , les termes en $\frac{1}{r(i+1)-r(i)}$ des gradients...
- le découpage des tableaux les plus gros en plus petits, afin d'optimiser leur appel dans la mémoire vive,
- le stockage au maximum possible des variables dans le cache du processeur, pour réduire le temps d'accès mémoire, et gagner en temps de calcul.

Nous avons ensuite vérifié les performances du code sur les machines dont nous disposions. Exécuter le code Fortran nécessite l'utilisation d'un compilateur, qui interprète le langage Fortran, le traduit en langage machine, et produit un exécutable. De nombreux compilateurs Fortran sont

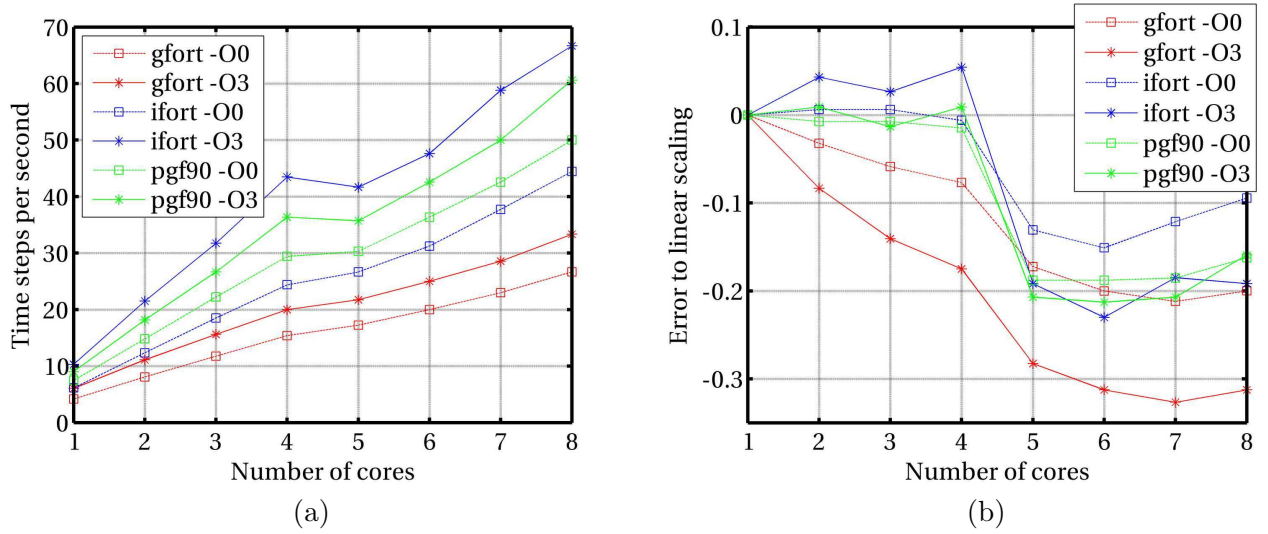


Figure III.15 — La figure de gauche (a) montre le nombre de pas de temps réalisés par seconde en fonction du nombre de coeurs utilisés. Les compilateurs utilisés sont représentés par des couleurs différentes. Enfin les options de compilations sont représentées par des carrés (optimisations minimales) et par des étoiles (optimisations maximales). La figure de droite (b) montre l'erreur relative entre le temps passé par coeur et le temps de calcul sur un seul coeur. Cela permet de voir l'effet de la parallélisation du code suivant le nombre de coeurs utilisés.

disponibles sur le marché, permettant d'exécuter le code sur des machines multicoeurs. La comparaison de leurs performances est une étape nécessaire pour garantir le meilleur choix et les meilleurs temps de calcul. Nous avons comparé les trois compilateurs les plus répandus :

- Le compilateur GNU, *gfortran*, version 4.4
- Le compilateur Intel, *ifort*, version 11.1
- Le compilateur Portland Group, *pgf90*, version 12.5

Les deux derniers sont payants mais leur coût est accessible à un laboratoire. Nous avons effectué la comparaison sur deux machines représentatives des ressources dont nous disposons. La Machine 1 est une plateforme Intel Xeon, équipée de 2 processeurs quadricoeurs E5420 à 2.5 GHz, de 32 GB de mémoire vive à 667 MHz sous le système d'exploitation Linux SLES 11.0. La Machine 2 est une plateforme Intel Xeon de dernière génération, équipée de 4 processeurs octocoeurs X7560 à 2.3 GHz, de 64 GB de mémoire vive à 1333 MHz sous le système Linux CentOS 5.5.

Tout d'abord nous avons comparé les compilateurs sur la Machine 1 afin de déterminer le plus performant. Chaque compilateur dispose d'une option d'optimisation qui permet en particulier de vectoriser les boucles, ce qui s'accompagne par un gain de temps de calcul. À cela est ajoutée la parallélisation. On peut utiliser ou non l'optimisation via l'option de compilation -O0, pas d'optimisation ou -O3, optimisation totale. La Figure III.15 montre les résultats obtenus. La figure (a) présente le nombre de pas de temps effectués par seconde en fonction du nombre de coeur, pour une simulation de résolution $(\Delta r, \Delta \theta) = (200, 400)$. On constate que plus le nombre de coeurs augmente, plus on effectue de calculs par seconde. Les compilateurs utilisés sont repérés par les différentes couleurs. Les résultats obtenus avec le compilateur *gfortran* sont en rouge, ceux obtenus

avec *ifort* sont en bleu et ceux obtenus avec *pgf90* sont en vert. On remarque que les compilateurs propriétaires sont presque 2 fois plus rapides que le compilateur libre *gfortran*. Les options de compilation sont représentées par des carrés pour -O0 et par des étoiles pour -O3. On remarque que l'utilisation de l'optimisation est très performante avec *ifort*, car elle introduit un gain de 50% d'opérations par seconde en plus. Les compilateurs *pgf90* et *gfortran* n'atteignent qu'un gain de 20%.

Lorsque la résolution du code augmente, le nombre d'opérations par seconde diminue, mais la hiérarchie des compilateurs est conservée, le compilateur *gfortran* étant toujours 2 fois plus lent. En revanche, l'écart entre *ifort* et *pgf90* se réduit à 5%. Nous avons donc privilégié le choix du compilateur Intel pour réaliser nos simulations, car c'est celui qui offre les meilleures performances.

La figure (b) montre comment le code se comporte en fonction du nombre de coeurs. On s'attend en effet à ce que le temps de calcul soit linéairement dépendant du nombre de coeurs utilisés. Pour cela nous avons évalué l'erreur entre le nombre d'opérations effectuées sur un seul coeur avec le nombre d'opérations effectuées par N coeurs, divisé par N . Cette erreur relative permet de quantifier l'écart au comportement linéaire en fonction du nombre de coeurs utilisés. On remarque que cet écart est inférieur à 20%. Le brusque saut présent lorsqu'on dépasse 4 coeurs est dû à l'usage du deuxième processeur de la machine. Cela introduit une latence qui ensuite ne dépend plus du nombre de coeurs supplémentaires. Le comportement linéaire est bien respecté pour le compilateur *ifort*.

Nous avons testé le comportement du code pour un plus grand nombre de coeurs. Les tests effectués sur la Machine 2 qui possède 32 coeurs ont révélé que la portabilité est satisfaisante. Cependant nous n'avons pas présenté de graphique car il est difficile de déterminer précisément le comportement en fonction du nombre de coeurs sur une machine en possédant autant. En effet, nous voulons comparer le temps mis sur 1 coeur avec l'équivalent mis par N coeurs. Or pour utiliser au maximum les coeurs disponibles nous devons activer l'optimisation -O3 du compilateur. Cette dernière active les 32 coeurs disponibles pour la vectorisation, même si la parallélisation explicite via OpenMP a lieu sur un nombre inférieur de coeurs. Mais en comparant le temps mis par 1 seul coeur, sans optimisation (-O0), qui est de 0.41 pas de temps par seconde, au temps équivalent mis avec les 32 coeurs avec optimisation (-O3), qui est de $11.7/32 = 0.37$ pas de temps par seconde, on obtient un écart relatif de 10%. Le même raisonnement effectué sur les résultats obtenus sur la Machine 1 donne un écart relatif nul.

Les efforts consacrés à l'optimisation du codage, et à la parallélisation ont permis d'atteindre des performances excellentes sur les machines multicoeurs. On peut attendre d'aussi bons résultats sur les nouvelles architectures multicoeurs à 64 coeurs d'AMD ou à 80 coeurs d'Intel. Cela permettra d'effectuer des simulations à plus haute résolution, et sur un plus grand nombre de rotations. Le temps nécessaire pour réaliser une simulation est proportionnel $N_r * N_\theta * N_\theta$, où le dernier terme provient du pas de temps. Ainsi, si sur la Machine 2 une simulation de 100 rotations à $(N_r, N_\theta) = (800, 1600)$ prend 16.9 heures, réaliser une simulation sur 100 rotations à $(N_r, N_\theta) = (1600, 3200)$ prendrait $2 * 2 * 2 * 16.9 = 135.2$ heures, soit 5.6 jours. On peut ainsi estimer le temps nécessaire

pour une simulation donnée, ce qui permet de bien gérer les ressources informatiques, et de prévoir les ressources nécessaires pour des simulations de plus grandes tailles.

6 Conclusions

Le développement d'un code numérique permettant de simuler un disque protoplanétaire est un travail de longue haleine.

À partir d'un schéma aux volumes finis du second ordre, non parallélisé, dont les conditions aux limites réfléchissantes ne permettait pas l'utilisation de hautes résolutions, nous avons dû refondre entièrement ce code afin d'atteindre les contraintes nécessaires à notre étude que nous nous étions fixées.

Il a fallu tout d'abord comprendre les méthodes numériques aux volumes finis, afin de développer un schéma numérique du 3^{ème} ordre spatialement, qui puisse résoudre convenablement les ondes spirales que nous attendons dans l'étude de l'instabilité en ondes de Rossby, ou l'étude des tourbillons. Mais il a également fallu définir de bonnes conditions aux limites qui respectent les caractéristiques de l'écoulement, en particulier le cisaillement. Cette étape nécessaire pour atteindre de hautes résolutions a été complexe, mais le résultat est à la hauteur du temps investi.

Au coeur de ce nouveau schéma numérique réside l'équilibre entre les termes de flux et de source qui permet de conserver de façon quasi-analytique la stationnarité de la solution non perturbée du disque. Cela est primordial pour une étude sur un nombre de rotations du disque de l'ordre du millier, alors que jusqu'alors, les simulations se limitent à quelques centaines. La réduction drastique des erreurs numériques résiduelles dans les grandeurs physiques permet une interprétation des résultats numériques plus fiable que dans le cas des schémas classiques.

Le résultat de ce travail est un nouveau code, baptisé ROSSBI, qui permet de décrire un disque de gaz et de particules solides sous forme fluide, dont la viscosité numérique et les performances informatiques dues à une parallélisation et une optimisation avancée, sont à un niveau élevé d'exigence et offrent des résultats supérieurs à ceux de la concurrence. Le temps nécessaire au développement de ce code est à mettre en regard avec les avantages que la création d'un code apporte.

Le code ROSSBI est un outil numérique créé spécifiquement pour les disques, ce qui permet de répondre aux problèmes numériques intrinsèques à ces systèmes. Nous continuons de contribuer à cette démarche innovante initiée à Marseille.

Ensuite, être le développeur du code que l'on utilise est un gain de temps considérable pour l'utilisation, et en particulier pour les développements futurs apportés à ce code.

Enfin, connaître tous les détails du code, de l'algorithme aux techniques de codage, permet un diagnostic et un débogage rapide, ainsi qu'un regard critique supérieur sur les résultats numériques obtenus.

C'est pourquoi nous avons décidé de créer une communauté d'utilisateurs du code ROSSBI, afin de partager les avantages de notre code et de réaliser des améliorations ou des enrichissements plus rapidement. Nous avons créé un site internet consacré à cette communauté, et espérons un futur favorable à ce projet : <http://projets.oamp.fr/projects/rossbi>.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BEN-ARTZY, M., AND FALCOVITZ, J. *Generalized Riemann Problems in Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2003. 61
- [2] BRANDENBURG, A. The Pencil Code. <http://pencil-code.nordita.org/> (2012). 55
- [3] CHANDRA, R., DAGUM, L., KOHR, D., AND MAYDAN, D. *Parallel Programming in OpenMP*. Morgan Kaufmann, San Francisco, USA, 2001. 93
- [4] CHAPMAN, B., JOST, G., AND VAN DER PAS, R. *Using OpenMP*. The MPI Press, Cambridge, UK, 2008. 93
- [5] CHAPMAN, S. J. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. WCB/McGraw-Hill, Boston, USA, 1998. 93
- [6] CHU, E., AND GEORGE, A. *Inside the FFT Black Box*. CRC Press, Boca Raton, USA, 2000. 85
- [7] CHUNG, T. J. *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London, 2002. 56
- [8] COURANT, R., FRIEDRICHS, K., AND LEWY, H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen* 100, 1 (Dec. 1928), 32–74. 60
- [9] FERZIGER, J. H., AND PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed. Springer-Verlag Berlin, Berlin, Germany, 2002. 56
- [10] FRIGO, M., AND JOHNSON, S. The Design and Implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE* 93, 2 (Feb. 2005), 216–231. 86
- [11] FRIGO, M., AND JOHNSON, S. G. *FFTW*. <http://www.fftw.org/#documentation>, 2010. 86
- [12] GODON, P. Non-reflective boundary conditions and the viscous instability in accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 282 (1996), 1107–1113. 80
- [13] GODUNOV, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik* 47(89), 3 (1959), 271–306. 61
- [14] GOLDBREICH, P., AND NARAYAN, R. Non-axisymmetric instability in thin discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 213 (1985), 7P–10P. 77

- [15] GUILLARD, H., AND DANIEL, E. A well balanced scheme for gas flows in protoplanetary nebulae. In *Finite Volumes for Complex Applications IV : Problems and Perspectives* (London, UK, 2005), F. Benkhaldoun, D. Ouazar, and S. Raghay, Eds., Wiley-ISTE, p. 752. 65
- [16] HAYDER, M. E., HU, F. Q., AND HUSSAINI, M. Y. Toward perfectly absorbing boundary conditions for Euler equations. In *AIAA 13th Computational Fluid Dynamics Conference* (Snowmass Village, Colorado, 1997), Astronaut, Ed., Amer Inst Aeronaut Astronaut, pp. 912–918. 77
- [17] HERLIHY, M., AND SHAVIT, N. *The Art of Multiprocessor Programming*. Morgan Kaufmann, Burlington, USA, 2008. 93
- [18] HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows Vol.I : Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, 1988. 57
- [19] HOLM, E. V. Energy and enstrophy conservation properties of high-order non-oscillatory advection schemes. *Tellus series A-Dynamic meteorology an oceanography* 48, 1 (Jan. 1996), 122–137. 65
- [20] INABA, S., BARGE, P., DANIEL, E., AND GUILLARD, H. A two-phase code for protoplanetary disks. *Astronomy & Astrophysics* 431, 1 (Feb. 2005), 365–379. 55
- [21] LERAT, A., FALISSARD, F., AND SIDÈS, J. Vorticity-preserving schemes for the compressible Euler equations. *Journal of Computational Physics* 225, 1 (July 2007), 635–651. 65
- [22] LYNDEN-BELL, D., AND PRINGLE, J. The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 168 (1974), 603–637. 91
- [23] METCALF, M., AND REID, J. *Fortran 90/95 Explained*, 2d ed. Oxford University Press, New York, USA, 1999. 93
- [24] PAPALOIZOU, J., AND PRINGLE, J. E. The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 208 (1984), 721–750. 77
- [25] ROE, P. L. Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations. *Annual Review of Fluid Mechanics* 18, 1 (Jan. 1986), 337–365. 62
- [26] SMITH, I. M., AND GRIFFITHS, D. V. *Programming the Finite Element Method*, 4th ed. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, 2004. 56
- [27] STONE, J. M., AND NORMAN, M. L. ZEUS-2D : A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. II - The magnetohydrodynamic algorithms and tests. *The Astrophysical Journal Supplement Series* 80 (June 1992), 753. 55
- [28] SWEBY, P. K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21, 5 (Oct. 1984), 995–1011. 62
- [29] TORO, E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2d ed. Springer-Verlag Berlin, Berlin, Germany, 1999. 61, 64
- [30] TOTH, G. Versatile Advection Code. <http://grid.engin.umich.edu/~gtoth/VAC/> (2012). 55

-
- [31] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics* 32, 1 (July 1979), 101–136. [61](#), [62](#)

Deuxième partie

Formation, structure et dynamique
des tourbillons

INSTABILITÉ EN ONDES DE ROSSBY

L'existence de tourbillons dans les disques protoplanétaires peut être due à différents mécanismes. Ils peuvent exister dès la formation du disque, par conservation des perturbations des vitesses présentes dans le nuage protostellaire, juste après l'effondrement primordial, ou bien ils peuvent apparaître plus tard à la suite d'instabilités du disque lui-même. Nous avons abordé dans le Chapitre 1 les différentes instabilités qui peuvent se déclencher dans un disque. Certaines font appel à des processus physiques complexes, avec des couplages possibles, comme le couplage du gaz avec le champ magnétique de l'étoile. Nous avons fait le choix de considérer la physique la plus simple possible dans les disques, c'est-à-dire les mécanismes purement hydrodynamiques qui découlent des équations d'Euler.

L'Instabilité en Ondes de Rossby (dans la suite IOR) est un de ces mécanismes. Nous allons décrire quelle est cette instabilité, dans le cadre de l'étude linéaire effectuée par Lovelace, 1999 [7], puis montrer son étude numérique. Nous présenterons les résultats numériques de sa croissance et de sa saturation, et la sélection des modes qui se déroule. Puis, nous montrerons que cette instabilité permet la formation de tourbillons de différentes tailles, en fonction de la perturbation initiale. Enfin nous analyserons la structure de ces tourbillons et mettrons en avant les questions que cela soulève.

1 Description de l'instabilité

La description complète linéaire de l'instabilité en ondes de Rossby a été effectuée par Lovelace, 1999 [7], puis dans un article plus détaillé, avec l'étude numérique linéaire par Li, 2000 [4]. Il s'agit d'une instabilité présente dans les disques protoplanétaires. L'analogie des ondes qui y entrent en jeu avec les ondes de Rossby atmosphériques est à l'origine du nom que les auteurs lui ont donné. Il s'agit d'ondes azimutales dans le gradient de vortacité du disque, qui peuvent déstabiliser, par amplification, une structure axisymétrique du disque initialement stable radialement.

1.1 Conditions de la solution radiale stable

On considère un disque dont l'écoulement radial est nul, et dont la vitesse angulaire est $\Omega(r)$. La densité est $\sigma(r)$, la pression est $P(r)$, et la température $T(r)$. La pression est définie par la

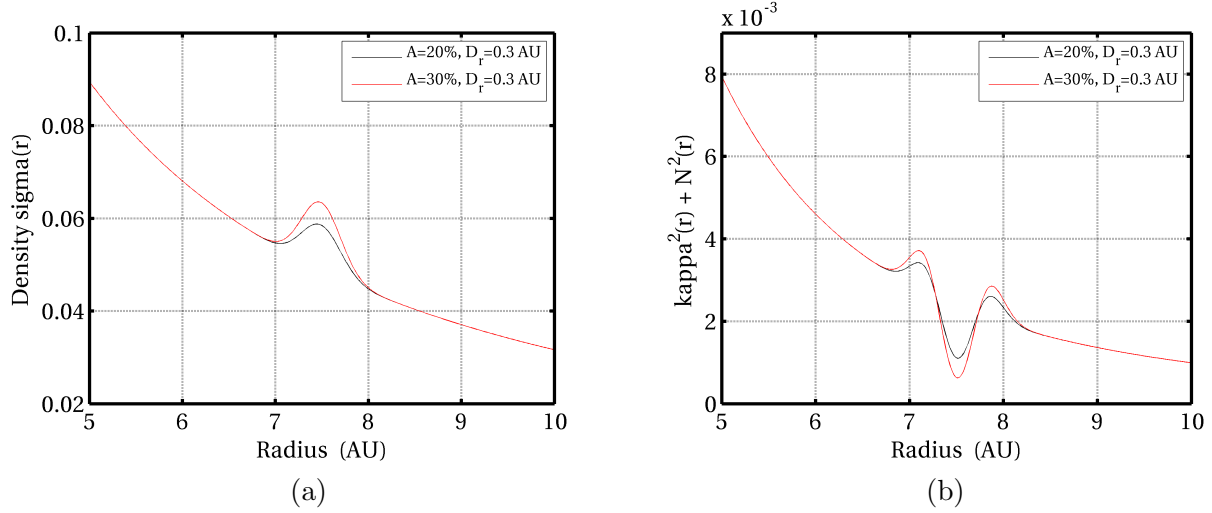


Figure IV.1 — Profils radiaux de densité de deux solutions initiales gaussiennes utilisées dans notre étude, à gauche (a). Elles ont la même largeur radiale $\Delta_r = 0.3 UA$, mais une amplitude $A = 20\%$ en noir, et $A = 30\%$ en rouge (voir Section 2 pour la description de cette solution). À droite (b) sont présentées les valeurs du critère de Solberg-Hoiland $\kappa^2(r) + N^2(r)$ pour ces deux solutions. On constate qu'il est toujours positif dans les deux cas. Ces deux solutions sont donc stables aux perturbations axisymétriques.

relation des gaz parfaits : $P(r) = k_B T(r) \sigma(r)$. Cela conserve le caractère non homentropique du gaz, et on évite la simplification inhérente aux cas isotherme ou polytropique. La vitesse du son adiabatique est donnée par $c_s^2(r) = \gamma P(r) / \sigma(r)$, avec $\gamma = 1.4$ par exemple. On peut enfin définir l'entropie $S(r) = P(r) / \sigma^\gamma(r)$. Le disque n'est donc pas a priori isentropique, ce qui est un des intérêts de l'étude de cette instabilité. Le critère de stabilité radiale d'un profil de disque est défini par la relation de Solberg-Hoiland, explicité en particulier dans Endal, 1978 [1]. On peut le définir ainsi :

$$\kappa^2(r) + N^2(r) \geq 0 \quad (\text{IV.1})$$

avec $\kappa(r)$ la fréquence épicyclique, et $N(r)$ la fréquence de Brunt-Väisälä pour la stratification radiale. La fréquence épicyclique peut s'écrire ainsi :

$$\kappa^2(r) = 4\Omega^2(r) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{\Omega(r)} \partial_r \Omega(r) \right) \quad (\text{IV.2})$$

Si on définit pour une fonction $f(r)$ donnée l'opérateur $\beta_f(r) = r/f(r) \partial_r f(r)$, qui est constant pour une loi de puissance, comme nous l'avons introduit au Chapitre 2, alors on peut écrire :

$$\kappa^2(r) = 4\Omega^2(r) \left(1 + \frac{1}{2} \beta_\Omega(r) \right) \quad (\text{IV.3})$$

De la même façon, la fréquence $N(r)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$N^2(r) = -\frac{c_s^2(r)}{r^2} \frac{\beta_P(r) \beta_S(r)}{\gamma^2} \quad (\text{IV.4})$$

Cette fréquence joue un rôle crucial dans le critère de stabilité pour la stratification radiale et dépend, en particulier, du gradient d'entropie. Cependant, on remarque qu'elle est proportionnelle à la vitesse du son. De ce fait, elle est souvent bien plus petite que la fréquence épicyclique qui définit la stabilité de l'écoulement. En effet, les disques minces ont une échelle de hauteur $H(r) = c_s(r)/\Omega(r)$ qui vaut généralement quelques dixièmes de fois la distance à l'étoile r . Par conséquent, la rotation stabilise la stratification, si κ^2 est positif. La Figure IV.1 montre deux profils de densité utilisés dans notre étude et la valeur de $\kappa^2(r) + N^2(r)$ pour ces solutions. La contribution du terme $N^2(r)$ est si faible que $\kappa^2(r) + N^2(r)$ est dominé par la valeur de $\kappa^2(r)$. Ces deux profils sont stables car le critère de positivité est respecté.

Pour finir, on définit la vitesse angulaire $\Omega(r)$ par l'équilibre centrifuge :

$$\Omega^2(r) = \left(\Omega_{kep}^2(r) + \frac{c_s^2(r)}{\gamma r^2} \beta_P(r) \right)^{1/2} \quad (\text{IV.5})$$

avec $\Omega_{kep}(r) \propto r^{\beta_\Omega}$ la vitesse angulaire d'un écoulement képlérien avec $\beta_\Omega = -3/2$. La solution radiale stable peut être par exemple une bosse gaussienne de densité, surimposée à une loi de puissance radiale.

1.2 Perturbation linéaire

L'étude de la stabilité de cette solution radiale consiste à additionner à chaque grandeur physique f , une variation de petite amplitude δf , de sorte que tous les termes d'ordre supérieur ou égal à $(\delta f)^2$ soient négligeables. On peut donc linéariser le système des équations de continuité, d'Euler et d'isentrope autour de la solution stable, et obtenir un système d'équations pour les perturbations δf :

$$D_t \delta \sigma + \sigma(r) \left(\partial_r \delta u + \frac{\delta u + \beta_\sigma(r)}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta \delta v \right) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

$$D_t \delta u - 2\Omega(r) \delta v = \frac{c_s^2(r)}{\gamma} \frac{\beta_P(r)}{r} \frac{\delta \sigma}{\sigma(r)} - \frac{1}{\sigma(r)} \partial_r \delta P \quad (\text{IV.7})$$

$$D_t \delta v + \frac{\kappa^2(r)}{2\Omega(r)} \delta u = -\frac{1}{\sigma(r)} \frac{1}{r} \partial_\theta \delta P \quad (\text{IV.8})$$

$$D_t \delta P - c_s^2(r) D_t \delta \sigma = -\frac{c_s^2(r)}{\gamma} \frac{\beta_S(r)}{r} \sigma(r) \delta u \quad (\text{IV.9})$$

dans lequel l'opérateur $D_t \equiv \partial_t + \Omega(r) \partial_\theta$ est l'advection par la vitesse de la solution stable, $v(r) = r\Omega(r)$.

Pour résoudre ce système d'équations, on décompose les δf sur une base d'ondes planes azimutales $\delta f \propto \exp(im\theta - i\omega t)$, avec m le mode azimutal, et ω la pulsation de l'onde. Cette dernière est complexe, de sorte que si sa partie imaginaire est positive, l'amplitude de l'onde va croître au cours du temps. C'est le critère de croissance de l'onde, c'est-à-dire de l'instabilité.

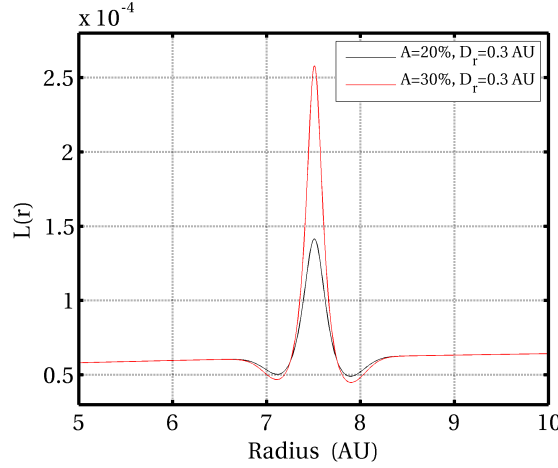


Figure IV.2 – Valeurs de la fonction $\mathcal{L}(r)$ pour deux profils initiaux utilisés dans notre étude, et déjà présentés Figure IV.1. Ces deux fonctions possèdent un maximum en $r_0 = 7.5 \text{ UA}$, et c’est dans cette région de corotation que les modes perturbants vont s’amplifier et faire croître l’instabilité. La solution représentée en rouge a une amplitude plus élevée, ce qui la rend plus instable que celle en noir. Les taux de croissance des modes perturbants doivent être supérieurs.

On peut simplifier ce système pour obtenir une unique équation différentielle du second ordre radialement, en fonction de la variable $\Psi = \delta P / \sigma(r)$. Nous renvoyons à la lecture des articles cités plus haut pour plus de détails. Le résultat le plus important est que cette équation admet une solution si la fonction $\mathcal{L}(r)$ qui apparaît dans les coefficients de cette équation admet un extremum. Cette fonction s’écrit :

$$\mathcal{L}(r) = \frac{\sigma(r)\Omega(r)}{\kappa^2(r) + N^2(r)} S^{2/\gamma(r)} \quad (\text{IV.10})$$

pour les modes proches de la corotation, c’est-à-dire pour une onde dont $|\Delta\omega|^2 = |\omega - m\Omega(r)|^2$ est négligeable devant $\Omega^2(r)$.

On constate que l’instabilité est possible par exemple si la densité présente un extremum. Par ailleurs, on remarque que dans tous les cas un extremum de la fonction $\mathcal{L}$ implique aussi un extremum dans la vorticité de la solution initiale. On trouvera dans le chapitre 1 de Ogilvie, 2005 [12], et surtout dans Umurhan, 2010 [17], une étude détaillée de la linéarisation des équations et des solutions en ondes, applicables à ce problème.

1.3 Croissance de l’instabilité linéaire

La présence d’un extremum dans la fonction $\mathcal{L}$ signifie physiquement qu’elle joue le rôle de puits de potentiel pour les modes de perturbation. De ce fait, il est possible que les modes soient piégés dans ce puits, et que dans certains cas, ils soient amplifiés. Cette amplification n’est possible que si la forme du potentiel répond à certains critères concernant l’amplitude de ce puits, et sa largeur radiale. Malheureusement, l’expression de ces critères n’est pas possible analytiquement, et ce n’est que par résolution numérique que l’on peut déterminer l’amplitude et la largeur critiques

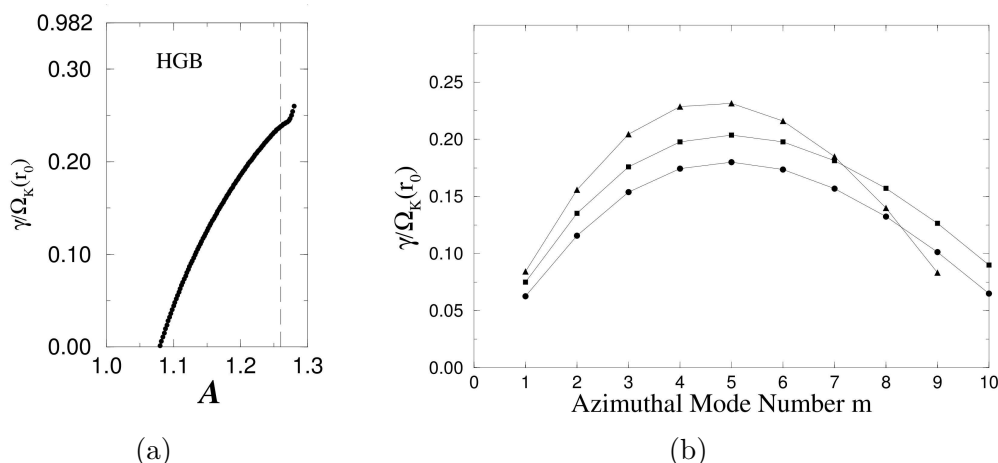


Figure IV.3 — À gauche (a) est représentée la valeur du taux de croissance d'un mode $m = 5$ pour un profil gaussien, en fonction de l'amplitude de la gaussienne. On constate qu'en dessous d'un seuil, ici $A = 1.09$ (ce qui correspond à $A = 0.09$ dans la notation que nous utiliserons plus tard), le taux de croissance de ce mode est nul. Si ce seuil est dépassé, le taux de croissance croît avec l'amplitude. À droite (b) est présentée la dépendance du taux de croissance en fonction du mode de perturbation, pour différentes solutions initiales. Les profils sont similaires et mettent en évidence le caractère sélectif de l'instabilité, certains modes ayant un plus grand taux de croissance que d'autres. (Résultats tirés de Li, 2000 [4])

qui permettent l'amplification des ondes, comme le montre le second article fondamental de Li, 2000 [4]. De ce fait, toutes les fonctions $\mathcal{L}$ possédant un extremum ne sont pas en mesure de conduire à une amplification des modes et donc à une instabilité. La Figure IV.2 montre deux profils initiaux de $\mathcal{L}$ utilisés dans notre étude. On remarque que le maximum se situe en r_0 , où l'instabilité va se déclencher. Ces deux profils sont instables, cependant le profil rouge, de plus grande amplitude, doit créer des taux de croissance plus élevés que le profil noir.

Dans ce second article, Li et al. résolvent numériquement les équations linéaires pour les perturbations, de façon à obtenir les taux de croissance et les pulsations des ondes pour différents modes et différentes fonctions $\mathcal{L}$. Ils mettent en évidence que l'instabilité ne se déclenche que pour certains profils $\mathcal{L}$. En particulier, si la fonction initiale est une surpression gaussienne, alors l'amplitude de cette surpression doit avoir une valeur minimale pour autoriser la croissance des modes. Certains de leur résultats sont présentés Figure IV.3. Le graphique de gauche (a) illustre le seuil d'instabilité en fonction de la forme de $\mathcal{L}$, ici l'amplitude d'une gaussienne de pression, pour un mode de perturbation $m = 5$. La figure de droite (b) montre le taux de croissance en fonction du mode de perturbation, pour différentes fonctions $\mathcal{L}$. Le profil gaussien est représenté par des triangles. On constate que chaque profil a un mode préférentiel, pour lequel le taux de croissance est maximal. Il y a donc une sélection des modes. D'autres études linéaires, locales cette fois ("shearing-sheet"), ont aussi confirmé la production et l'amplification des ondes de Rossby, menant à la formation de tourbillons (Tagger, 2001 [14], Sheehan, 1999 [13]).

Les résultats de l'étude linéaire sont également confirmés en résolvant les équations non linéaires d'évolution du gaz, dans le troisième article Li, 2001 [3]. Cependant, les résultats sont obtenus seulement pour une vingtaine de rotations, pour certains modes et pour quelques types de fonctions

initiales. Ils observent la saturation de l'instabilité et la formation d'une chaîne de tourbillons. Même lorsque que l'auto-gravité du disque est prise en compte, ce mécanisme semble robuste pour former des tourbillons (Lovelace, 2012 [6]).

Nous proposons d'étudier à l'aide de notre méthode numérique la croissance de l'instabilité et son évolution à plus long terme, pour différentes fonctions initiales et différents types de perturbations, modales ou aléatoires. La croissance des modes est-elle modifiée par le caractère non linéaire des équations? La chaîne de tourbillons formée à l'issue de la saturation est-elle stable comme le laissent penser les résultats obtenus sur 20 rotations? Obtenons-nous les mêmes résultats lorsque l'instabilité est déclenchée par un bruit aléatoire? Telles sont les questions auxquelles nous allons essayer de répondre.

2 Étude numérique de la phase linéaire

Il est intéressant de confronter les résultats de l'étude linéaire avec les résultats numériques. En effet, la résolution numérique des équations d'Euler tient compte des termes non linéaires qui ont été négligés dans l'approche analytique. Dans un premier temps, nous allons étudier le développement de l'instabilité dans la phase de croissance linéaire, afin de confirmer les taux de croissance prédits précédemment.

2.1 Implémentation numérique

Dans un disque adiabatique, de densité $\sigma_0(r) = 82.8 (r/r_0)^{-3/2} \text{ g.cm}^{-2}$ et de température $T_0(r) = 83.6 (r/r_0)^{-1/2} \text{ K}$, nous allons imposer des conditions initiales perturbantes, qui déclenchent l'instabilité. Le disque s'étend de 5 à 10 unités astronomiques et le rayon de référence r_0 est à 7.5 UA. Le puits de potentiel de vorticité qui va amplifier les ondes est imposé par une gaussienne isotherme de densité. L'amplitude A et la largeur Δ_r de cette gaussienne modifie la fonction $\mathcal{L}$ et par conséquent le déroulement de l'instabilité, en particulier les taux de croissance. La densité et la pression initiales sont donc :

$$\sigma(r) = \sigma_0(r) \left[1 + A \exp \left(-\frac{(r - r_0)^2}{\Delta_r^2} \right) \right] \quad (\text{IV.11})$$

$$P(r) = P_0(r) \left[1 + A \exp \left(-\frac{(r - r_0)^2}{\Delta_r^2} \right) \right] \quad (\text{IV.12})$$

de telle façon que la température n'est pas modifiée dans cette surdensité par rapport à celle de la solution stationnaire.

Le champ de vitesse initial est déterminé par l'équilibre centrifuge et une vitesse radiale nulle :

$$U = 0 \quad (\text{IV.13})$$

$$V(r) = \left(V_k^2(r) + \frac{r}{\sigma(r)} \partial_r P(r) \right)^{1/2} \quad (\text{IV.14})$$

Si on développe le second terme du membre de droite de l'équation de la vitesse azimutale, on obtient :

$$V(r) = V_0(r) \left[1 + \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma V_0^2(r)} r \partial_r \ln \left[1 + A \exp \left(-\frac{(r - r_0)^2}{\Delta_r^2} \right) \right] \right]^{1/2} \quad (\text{IV.15})$$

où $V_0(r)$ est la vitesse azimutale de la solution stationnaire déjà abordée précédemment, et $c_{s0}^2 = \gamma P_0(r)/\sigma_0(r)$ est la vitesse du son adiabatique de la solution stationnaire. De cette façon, on montre que la vitesse azimutale est perturbée par le gradient de la gaussienne, avec une vitesse supérieure à la solution stationnaire dans la partie interne, et inférieure à cette solution dans la partie externe au rayon de référence r_0 . C'est donc ce cisaillement qui va devenir instable.

Il est enfin nécessaire de perturber cette solution initiale avec des modes dont l'amplitude est finie et petite devant l'amplitude A de la gaussienne, afin de déclencher l'instabilité. Autrement, la simple perturbation numérique n'est pas suffisante. Par ailleurs, nous cherchons à étudier la croissance de modes donnés et à comparer cette croissance avec l'étude linéaire. Nous introduisons un mode m d'amplitude $\epsilon = 1\%$ sur la densité et la pression, de façon à obtenir une perturbation isotherme et incompressible :

$$\sigma_{per} = \sigma(r) \left[1 + \epsilon \sin(m\theta) \exp \left(-\frac{(r - r_0)^2}{\Delta_r^2} \right) \right] \quad (\text{IV.16})$$

$$P_{per} = P(r) \left[1 + \epsilon \sin(m\theta) \exp \left(-\frac{(r - r_0)^2}{\Delta_r^2} \right) \right] \quad (\text{IV.17})$$

Nous avons choisi de perturber la densité car cela ne modifie pas le champ de vitesse, et donc la vortacité de la perturbation initiale. D'autres études, par exemple celle de Meheut, 2013 [11], perturbent la vitesse initiale par un mode, ce qui crée une perturbation de $\mathcal{L}$ via la vortacité. L'amplitude de la perturbation aléatoire en vitesse est donc plus délicate à initialiser. Nous verrons cependant que les taux de croissance sont légèrement différents mais que le déroulement de l'instabilité reste inchangé.

Nous avons réalisé les simulations numériques avec une résolution de $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$. La largeur radiale de la gaussienne est fixée à $\Delta_r = 0.3 \text{ } UA$. Nous avons étudié deux cas d'amplitude : $A = 20\%$ et $A = 30\%$. Pour chaque amplitude, nous avons étudié les modes $m = 3$, $m = 5$, $m = 6$, $m = 7$, $m = 9$ et $m = 11$. Cela représente donc 12 simulations, qui couvrent chacune une durée de 200 rotations du disque.

2.2 Croissance des modes pour $A = 20\%$

L'analyse des résultats numériques consiste à calculer l'amplitude des 40 premiers modes de la densité et de la vortacité, exprimées relativement aux valeurs stationnaires du disque, par transformée de Fourier. Cette mesure est effectuée pour chaque rayon de la grille. La densité présente une évolution comparable à celle de la vortacité, cependant des oscillations dues à la transformée de Fourier rendent les résultats moins lisibles que ceux donnés par la vortacité. De plus, ce choix permet aussi des comparaisons avec des résultats déjà publiés qui étudient souvent l'évolution de la

vorticité (voir la précédente référence, [11]). C'est pourquoi nous présentons l'évolution de l'amplitude des modes de la vorticité relative lors des 25 premières rotations du disque, ce qui correspond à la saturation de la phase linéaire. Nous nous plaçons au rayon r_0 , qui correspond au maximum de la perturbation.

La Figure IV.4 montre les résultats obtenus pour la gaussienne d'amplitude $A = 20\%$. Pour chaque mode de perturbation, l'amplitude des modes analysés est montrée dans différentes couleurs en fonction du temps. L'échelle de l'amplitude est en logarithme de base 10 afin de retrouver la croissance exponentielle de l'instabilité. Dans cette échelle, cette croissance est linéaire. La figure (a) montre les résultats lorsque l'on perturbe la gaussienne par le mode $m = 3$. La figure (b) montre les résultats lorsque l'on perturbe la gaussienne par le mode $m = 5$. La figure (c) montre les résultats du mode $m = 6$. La figure (d) montre les résultats du mode $m = 7$. La figure (e) montre ceux du mode $m = 9$ et enfin la figure (f) ceux du mode $m = 11$. Dans chaque cas, nous montrons en noir le mode principal de perturbation. Les couleurs correspondent aux harmoniques de ce mode principal, jusqu'à $m < 40$.

L'instabilité se déroule de la même façon quelque soit le mode initial de perturbation. L'amplitude du mode principal croît de façon exponentielle dès l'instant initial, ce qui se traduit par une évolution linéaire sur les graphiques. Cette croissance sature au bout d'un temps compris entre 6 et 10 rotations. L'amplitude du mode principal est alors quasiment constante au cours du temps. On remarque que cette amplitude de saturation est presque identique pour les modes $m = 3, 5, 6$ et 7 et vaut $10^{-0.5} = 30\%$. Les modes $m = 9$ et surtout $m = 11$ ont une amplitude de saturation inférieure aux autres. L'instabilité est dans ce cas sensible aux modes inférieurs à $m = 9$. Il y a une sélection des modes perturbants.

Cette évolution du mode perturbant est bien en accord avec les études précédentes, cependant nous mettons en évidence que ce n'est pas le seul mode qui existe dans le disque. Dans chaque cas, l'excitation de modes harmoniques est significative. Ces derniers sont absents de la solution initiale, et leur amplitude à $t = 0$ est inférieure à 5×10^{-4} . Cette valeur est dépendante de la transformée de Fourier et est due à la présence d'une constante non nulle dans la fonction dont on calcule la transformée. On peut améliorer l'algorithme afin de retrancher cette constante et d'obtenir une fonction proche de zéro. Cependant les résultats ne sont pas modifiés dès que l'amplitude des modes dépasse cette valeur de 5×10^{-4} . C'est pourquoi nous n'avons pas réduit à nouveau les données. On peut affirmer que l'amplitude des modes différents du mode perturbant est nulle à l'instant initial.

Nous n'avons pas tracé l'amplitude des modes autres que les harmoniques car elle reste identique à sa valeur initiale. Il n'y a donc pas d'amplification de ces modes. Seuls les modes $m' = n \times m$ avec $n = [1, 2, 3, 4, \dots]$ et m le mode perturbant, sont présents. Ils sont également amplifiés de façon exponentielle sur une durée comparable à celle de l'amplification du mode principal. Ils saturent sur la même échelle de temps. On peut remarquer que les harmoniques s'amplifient de façon successive, avec en premier le mode $m' = 2 \times m$, puis $m' = 3 \times m$ et ainsi de suite. Il y a donc un couplage non linéaire entre les modes présents dans le disque. Le taux de croissance des différents harmoniques est quasiment identique mais est supérieur à celui du mode principal. Enfin, on remarque que seul le mode $m' = 2 \times m$ sature aussi vite que le mode principal. L'amplitude des autres harmoniques

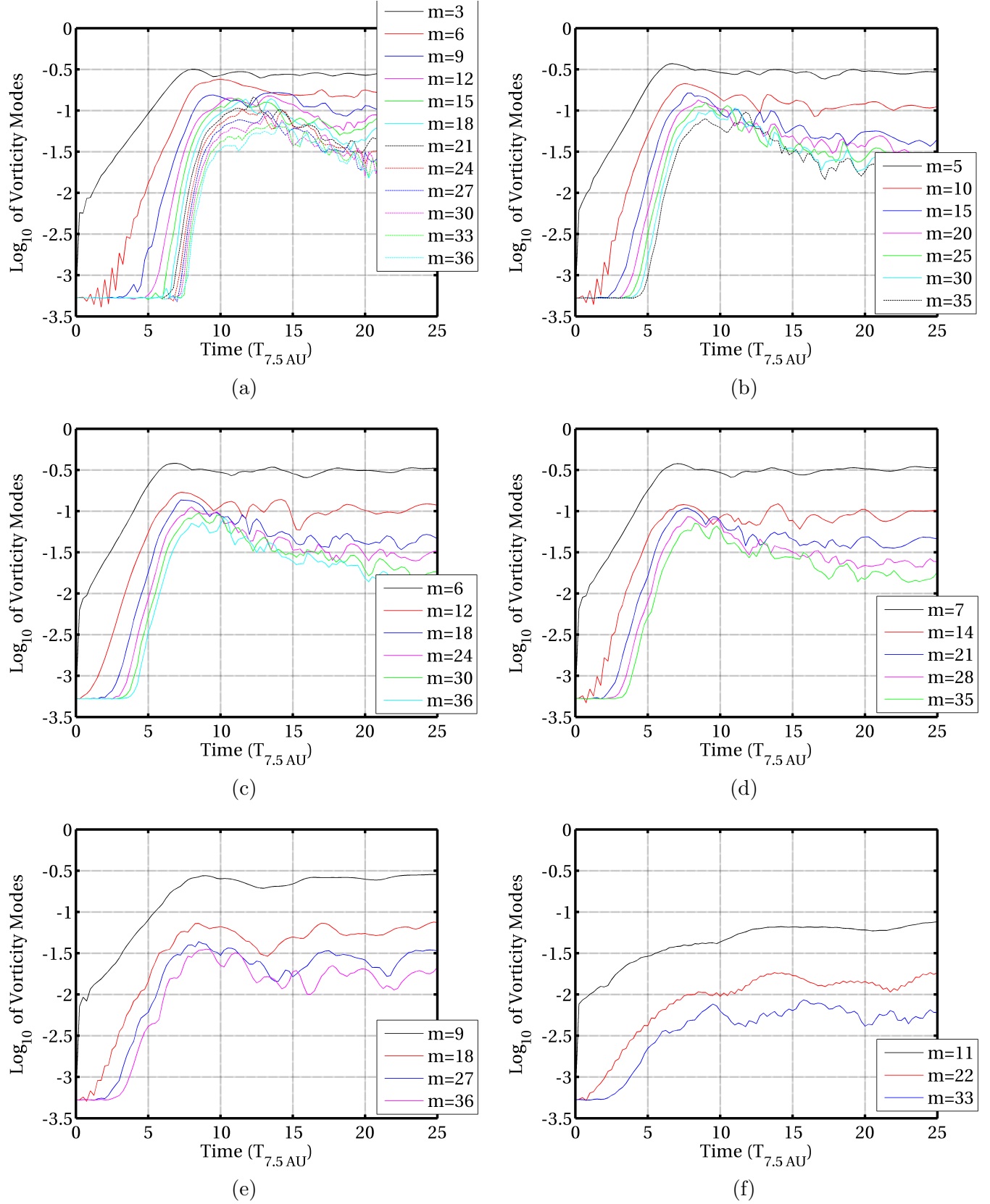


Figure IV.4 – Évolution de l'amplitude des modes de vortacité relative pour différents modes initiaux de perturbation, pour la gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 \text{ UA})$. Le mode principal ($m = 3, m = 5, m = 6, m = 7, m = 9, m = 11$) est représenté en noir sur les figures de (a) à (f), respectivement. Les modes harmoniques présents dans le disque sont représentés dans différentes couleurs. Les autres modes de l'analyse de Fourier ont une amplitude négligeable.

	$m = 3$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
$m' = 1 \times m$	0.53	0.69	0.71	0.68	0.51	0.32
$m' = 2 \times m$	0.91	1.30	1.27	1.21	0.84	0.56
$m' = 3 \times m$	1.16	1.52	1.48	1.35	0.90	0.56

Tableau IV.1 – Taux de croissance γ des trois premiers modes harmoniques m' pour chaque mode principal m de perturbation pour la gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 UA)$.

décroît après avoir atteint une valeur maximale et ne devient stationnaire qu'au bout de 20 rotations environ.

Lorsque l'on compare l'évolution des différentes simulations, on remarque une grande similitude entre celles pour $m = 5$, $m = 6$ et $m = 7$. Le mode principal sature de la même façon. Le mode $m' = 2 \times m$ sature également à une même valeur de 10^{-1} au bout de 7 rotations. Les harmoniques plus élevés décroissent de manière comparable vers une amplitude moyenne de $10^{-1.5} = 3\%$. Cela montre que le mécanisme de couplage non linéaire est indépendant de la valeur intrinsèque des harmoniques, mais dépend plutôt de l'ordre n de ces harmoniques.

Les simulations pour $m = 9$ et $m = 11$ ont une évolution différente des cas précédemment évoqués. Les harmoniques n'atteignent pas la même amplitude que dans le cas des autres simulations. On retrouve ici le fait que la surdensité initiale est moins sensible aux modes perturbants supérieurs à 9 environ. Le cas présenté en (a) pour un mode perturbant $m = 3$ est lui aussi un peu différent des autres. Les harmoniques commencent leur croissance plus tardivement jusqu'à 7 rotations, alors que pour les autres cas, ils commencent à s'amplifier avant 5 rotations. Le mode $m' = 2 \times m$, ici $m' = 6$, a une amplitude de saturation supérieure, de l'ordre de $10^{-0.7} = 20\%$. C'est le troisième harmonique $m' = 9$ qui sature vers la valeur 10^{-1} . Les modes plus élevés relaxent quant à eux vers une valeur comparable aux autres simulations, c'est-à-dire $10^{-1.5}$.

On peut paramétrer l'amplitude des modes de vorticité dans la phase linéaire par : $\omega(m) \times \exp[\gamma t / (2\pi\Omega_0(r_0))]$ où $2\pi\Omega_0(r_0)$ est la période de rotation au rayon r_0 . Nous avons reporté dans le Tableau IV.1 la valeur du taux de croissance γ pour chaque simulation. Nous avons mesuré le γ des trois premiers harmoniques m' pour chaque mode principal de perturbation m . On constate que le mode principal a le plus faible taux de croissance dans chaque cas, avec un taux maximal obtenu pour la simulation avec $m = 6$. On retrouve le fait que si l'on perturbe la gaussienne avec un mode supérieur à 9, les taux de croissance diminuent rapidement.

Les modes harmoniques ont un taux de croissance supérieur au mode principal. Le premier harmonique $m' = 2 \times m$ a un taux de croissance environ 1.93 fois supérieur à celui du mode principal. Le second harmonique $m' = 3 \times m$ a un taux de croissance environ 2.41 fois supérieur à celui du mode principal. Au delà, le taux de croissance sature vers une valeur proche de 3.2 fois le taux de croissance du mode principal. Ils est donc remarquable que les taux de croissance des harmoniques soient en rapport avec celui du mode principal, quelque soit ce mode principal. Nous trouvons en effet les mêmes rapports pour des modes principaux allant de 3   11. En revanche, ces rapports sont-ils indépendants de la gaussienne initiale ?

	$m = 3$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
$m' = 1 \times m$	0.72	0.99	1.05	1.07	0.96	0.69
$m' = 2 \times m$	1.40	1.90	1.90	1.91	1.62	1.08
$m' = 3 \times m$	1.80	2.36	2.40	2.23	1.90	1.29

Tableau IV.2 – Taux de croissance γ des trois premiers modes harmoniques m' pour chaque mode principal m de perturbation pour la gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 UA)$.

2.3 Croissance des modes pour $A = 30\%$

Nous avons effectué la même étude pour une amplitude de la gaussienne initiale $A = 30\%$. La vorticité dans la surdensité est alors supérieure au cas précédent. Nous présentons les résultats sur la Figure IV.5. La nomenclature est identique au cas $A = 20\%$. On remarque que l'excitation de l'instabilité est plus rapide. Pour les modes initiaux $m = 5$   $m = 9$, la saturation du mode principal est obtenue au bout de 5 rotations, au lieu de 7 rotations pour le cas précédent. La valeur de saturation du mode principal est également supérieure, et est de l'ordre de $10^{-0.32} = 48\%$. Les modes $m = 9$ et $m = 11$ ont maintenant une excitation et une saturation comparables aux autres modes. L'instabilité est sensible à des modes plus élevés lorsque la perturbation gaussienne est plus forte.

Les modes harmoniques sont également excités plus rapidement. Ilsaturent en 6 rotations typiquement. Le mode $m' = 2 \times m$ atteint une valeur stationnaire de $10^{-0.65} = 22\%$ et c'est le mode $m' = 3 \times m$ qui sature à 10^{-1} . Il semble que tous les modes harmoniques aient une valeur de saturation $10^{-0.25}$ fois supérieure à celle qu'ils obtenaient pour la gaussienne d'amplitude $A = 20\%$. Le déroulement de l'instabilité n'est donc pas modifié par le changement de la perturbation initiale. Ce sont les taux de croissance qui sont modifiés, ainsi que la vitesse de saturation des modes.

Le Tableau IV.2 montre les taux de croissance du mode principal et des deux premiers harmoniques $m' = 2 \times m$ et $m' = 3 \times m$. On constate que les valeurs sont supérieures à celles du cas précédent. Mais la hiérarchie est conservée. Le mode harmonique $m' = 2 \times m$ a un taux de croissance environ 1.85 fois supérieur à celui du mode principal. Le taux de croissance du mode $m' = 3 \times m$ est 2.39 fois supérieur à celui du mode principal. On retrouve des rapports comparables à ceux obtenus pour $A = 20\%$.

Nous avons tracé le taux de croissance du mode principal m afin de vérifier que l'amplitude de la perturbation initiale a une influence sur les modes les plus instables. La Figure IV.6 montre en noir les taux de croissance pour $A = 20\%$ et en rouge les taux de croissance pour $A = 30\%$. On constate tout d'abord qu'ils sont plus élevés dans le cas $A = 30\%$. Cela est compatible avec la remarque déjà avancée. Mais la valeur du taux de croissance en fonction du mode de perturbation a une forme qui est comparable pour les deux amplitudes. Il y a un maximum pour un mode préférentiel. Le mode le plus instable dans le cas $A = 20\%$ est proche de $m = 6$. C'est pourquoi nous avons remarqué une nette chute du taux de croissance entre $m = 7$ et $m = 9$. Dans le cas $A = 30\%$, le mode le plus instable est proche de $m = 7$. Ces résultats sont compatibles avec l'étude linéaire de l'instabilité. Mais elle ne traite pas du couplage des modes harmoniques.

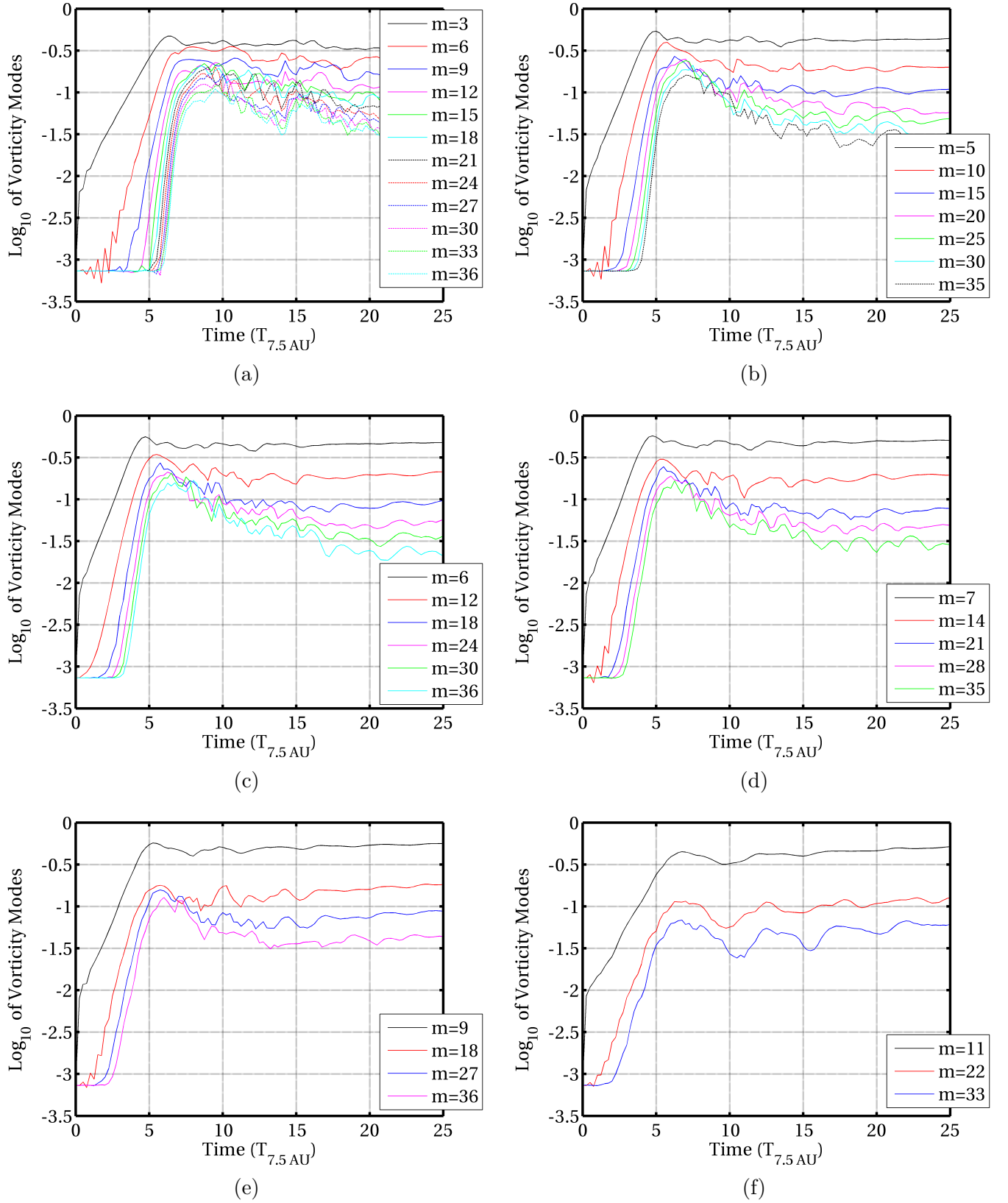


Figure IV.5 — Évolution de l'amplitude des modes de vorticité relative pour différents modes initiaux de perturbation, pour la gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ UA})$. Le mode principal ($m = 3, m = 5, m = 6, m = 7, m = 9, m = 11$) est représenté en noir sur les figures de (a)   (f), respectivement. Les modes harmoniques présents dans le disque sont représentés dans différentes couleurs. Les autres modes de l'analyse de Fourier ont une amplitude négligeable.

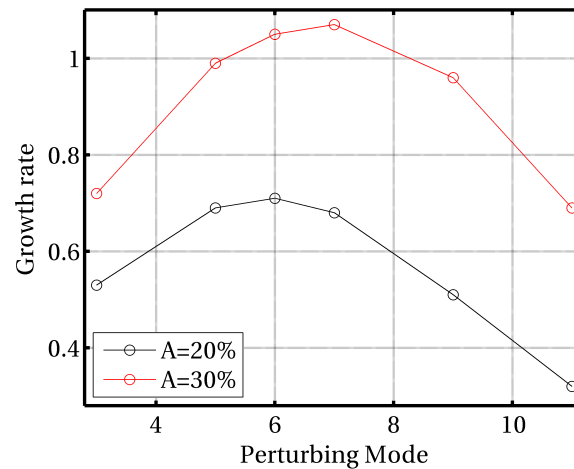


Figure IV.6 – Taux de croissance γ du mode principal de perturbation m , pour la gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 UA)$ en noir, et la gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 UA)$ en rouge.

La Figure IV.7 présente les taux de croissance des deux premiers harmoniques en fonction du taux de croissance du mode perturbant. Les ronds noirs représentent les résultats obtenus pour l'amplitude $A = 20\%$, et les ronds bleus, les résultats obtenus pour l'amplitude $A = 30\%$. La figure (a) correspond à l'harmonique $m' = 2 \times m$ et la figure (b) correspond à l'harmonique $m' = 3 \times m$. On retrouve la proportionnalité que nous avons constatée de façon indépendante pour chaque amplitude. Mais on montre ici clairement que le rapport entre les taux de croissance des harmoniques et ceux des modes principaux sont identiques pour les deux amplitudes. L'harmonique $m' = 2 \times m$ a un taux de croissance 1.87 fois supérieur à celui du mode principal m . L'harmonique $m' = 3 \times m$ a un taux de croissance 2.40 fois supérieur à celui du mode principal m . Le mécanisme d'excitation des harmoniques est donc indépendant de la perturbation initiale. La sélection des modes harmoniques les plus instables est proportionnelle à celle des modes principaux. Ainsi dans le cas $A = 20\%$, les harmoniques les plus instables sont $m' = n \times 6 = 12, 18, 24, \dots$. Dans le cas $A = 30\%$, les harmoniques les plus instables sont $m' = n \times 7 = 14, 21, 28, \dots$.

Cette étude montre que l'IOR n'est pas idéalement linéaire car des modes harmoniques d'amplitude significative apparaissent même lorsqu'un seul mode perturbant est présent initialement. Les taux de croissance du mode principal sont en accord avec les résultats analytiques de même que la valeur du mode le plus instable. Mais la présence des harmoniques complexifie le déroulement de l'instabilité. Si la gaussienne est perturbée non plus par un mode unique, mais par un bruit aléatoire dont le spectre couvre une large gamme de modes, on peut s'attendre à ce que le mode le plus instable soit excité en priorité. De ce fait, les harmoniques de ce mode seront également présents avec une amplitude et un taux de croissance tels que nous les avons décrits. Nous présentons donc une description plus complexe de l'instabilité, même dans la phase linéaire de croissance. Il est remarquable que les modes harmoniques couplés aient une croissance exponentielle similaire à la description linéaire, mais avec des taux de croissance proportionnels à ceux du mode principal.

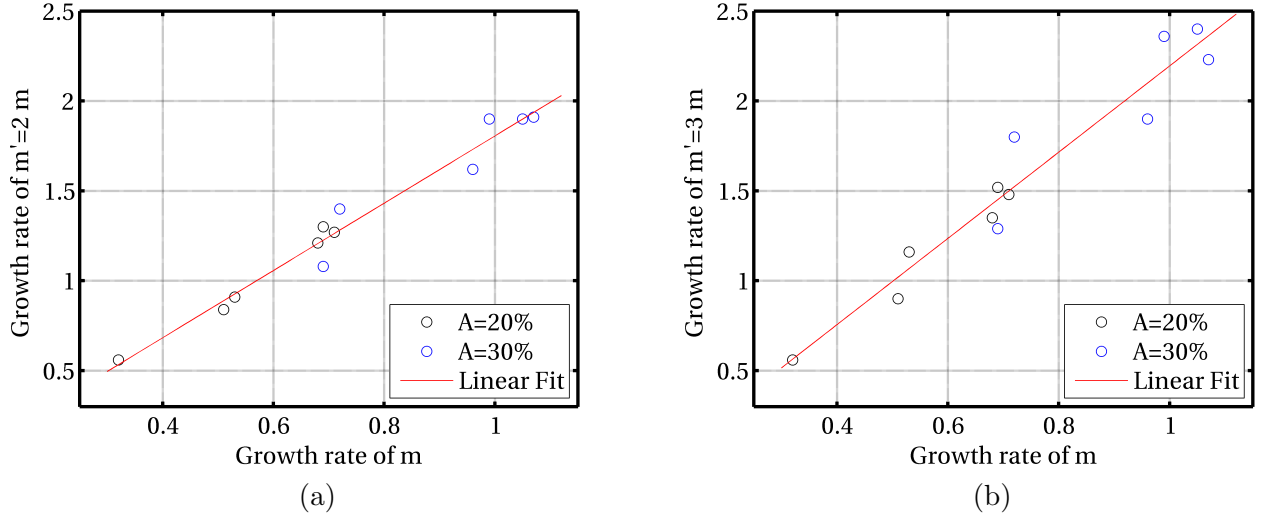


Figure IV.7 — Relation entre le taux de croissance γ des harmoniques $m' = 2 \times m$ et le taux de croissance du mode principal de perturbation m , figure (a), et des harmoniques $m' = 3 \times m$, figure (b). Les résultats obtenus pour la gaussienne d'amplitude $A = 20\%$ sont en noir et ceux obtenus pour la gaussienne d'amplitude $A = 30\%$ sont en bleu. La linéarité est représentée dans chaque cas par un lissage linéaire en rouge.

2.4 Influence de l'amplitude du mode perturbant

Cela dit, l'aspect non linéaire mis en évidence nous pousse à vérifier que notre description n'est pas dépendante de l'amplitude du mode perturbant. On peut en effet supposer que ce caractère non linéaire est dû à une trop forte perturbation de la gaussienne, et que des termes non linéaires des équations hydrodynamiques peuvent alors devenir importants par rapport aux termes linéaires.

C'est pourquoi nous avons étudié le déroulement de l'instabilité pour différentes amplitudes du mode perturbant. La gaussienne a une amplitude $A = 20\%$, comme précédemment. Nous avons fait varier l'amplitude ϵ de la fonction sinus qui la perturbe de $\epsilon = 10^{-2}$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-4}$ et $\epsilon = 10^{-5}$. Le mode principal est le même dans chaque cas et vaut $m = 7$. Ce mode est proche du mode le plus instable $m = 6$, mais nous avons délibérément choisi un mode différent afin de décrire de façon plus générale l'influence de l'amplitude du mode perturbant. En effet, comme nous l'avons vu sur la Figure IV.6, les modes $m = 7$ et $m = 5$, par exemple, ont presque le même taux de croissance. De ce fait, on peut supposer que la description du mode $m = 7$ est similaire à celle du mode $m = 5$.

Nous avons rassemblé les résultats des quatre simulations dans la Figure IV.8. La figure (a) correspond à une amplitude $\epsilon = 10^{-2}$, la figure (b) à une amplitude $\epsilon = 10^{-3}$, la figure (c) à une amplitude $\epsilon = 10^{-4}$ et enfin la figure (d) à une amplitude $\epsilon = 10^{-5}$. Nous avons représenté les harmoniques jusqu'à $m' = 35$ en différentes couleurs. Nous rappelons que l'amplitude minimale de $10^{-3.3}$ n'est pas réelle, mais est due à l'algorithme de calcul de l'amplitude des modes par transformée de Fourier. Nous avons vérifié qu'elle est en réalité inférieure de plusieurs ordres de grandeur, de sorte que l'on peut affirmer que l'amplitude initiale des modes de vorticité est nulle.

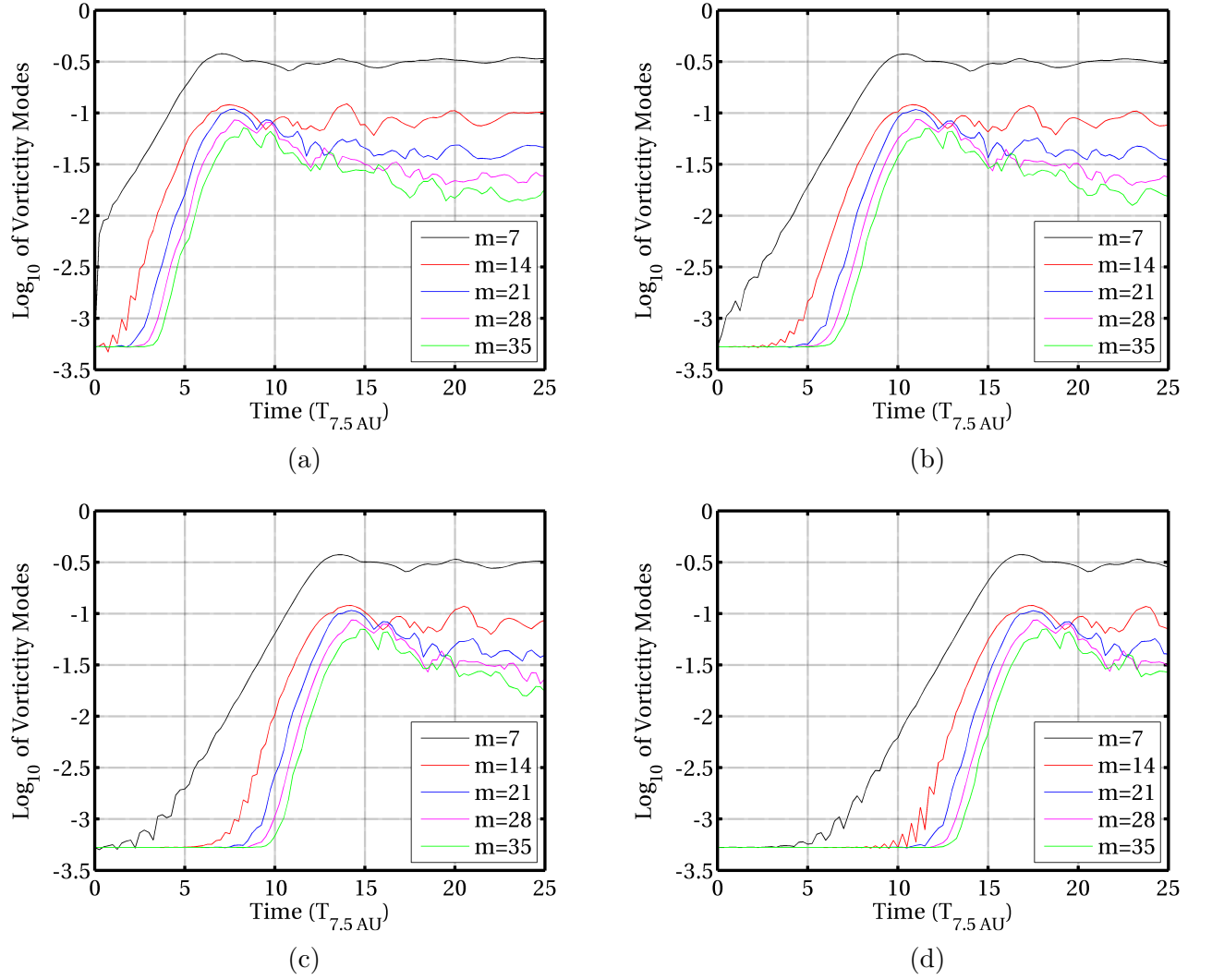


Figure IV.8 – Influence de l'amplitude initiale ϵ du mode de perturbation sur le développement de l'instabilité, pour une gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 \text{ } U_A)$, et un mode $m = 7$. L'amplitude des modes harmoniques de vorticité est représentée dans différentes couleurs.

En première constatation, on remarque que diminuer l'amplitude initiale de la perturbation retarde la saturation de l'instabilité. Celle-ci est atteinte au bout de 7 rotations pour $\epsilon = 10^{-2}$, pour le mode principal $m = 7$. Dans le cas $\epsilon = 10^{-3}$, la saturation est obtenue au bout de 10 rotations. Ce n'est qu'après 13 rotations que le cas $\epsilon = 10^{-4}$ sature, alors qu'il faut 17 rotations au mode d'amplitude $\epsilon = 10^{-5}$ pour atteindre la saturation. Ce décalage est dû au fait que l'amplitude du mode excité doit croître d'une quantité d'autant plus grande que l'amplitude de la perturbation initiale est petite. La valeur de la saturation étant identique dans les quatre cas, la durée pour l'atteindre doit être plus grande. Mis à part le décalage temporel de la saturation, l'évolution de la vorticité est presque la même dans les différents cas.

Mais on remarque également que les taux de croissance du mode principal ainsi que des harmoniques sont identiques quelque soit l'amplitude ϵ de départ. L'ordre d'apparition des harmoniques est inchangé de même que leurs valeurs de saturation. Il n'y a donc pas d'influence de l'amplitude du mode de perturbation sur le couplage non linéaire avec les harmoniques. Ce phénomène est lié à la nature même de l'instabilité, même dans la phase linéaire.

Les taux de croissance, et les valeurs de saturations sont identiques à ceux obtenus dans le paragraphe précédent pour le cas $\epsilon = 10^{-2}$. Nos résultats et conclusions sont donc indépendants de l'amplitude des modes initiaux. On peut extrapoler ces résultats obtenus pour $m = 7$ aux autres modes principaux de perturbation.

Nous avons ainsi mis en évidence que le déclenchement de l'instabilité est plus complexe que dans l'étude linéaire actuelle. Même si on en retrouve les résultats pour le mode principal de perturbation, la présence d'harmoniques couplés à ce mode est importante. La corrélation entre les harmoniques et le mode principal est indépendante de la gaussienne, et également indépendante de l'amplitude du mode de perturbation. De ce fait, ce phénomène est non linéaire, mais du premier ordre, c'est-à-dire qu'il est présent même dans le cas de petites perturbations.

L'existence de modes harmoniques peut avoir un rôle lors de la phase non linéaire de l'instabilité, lorsque tous les modes sont saturés. Il apparaît alors une cascade vers des modes plus bas, ce qui aboutit à la formation de gros tourbillons. C'est bien évidemment cette phase qui nous intéresse plus particulièrement, car les tourbillons sont les structures que nous souhaitons étudier dans le cadre de la formation planétaire. La section suivante est donc consacrée à cette phase non linéaire et à la cascade des modes.

3 Instabilité secondaire : cascade des modes

L'instabilité en ondes de Rossby crée, à l'issue de la saturation observée des modes, une chaîne de tourbillons. Le nombre de tourbillons dépend du mode initial qui perturbe la gaussienne. Cet  tat saturé semble ensuite stable dans le temps, comme le montrent différents résultats numériques obtenus jusqu'alors (Li, 2001 [3], Varni re, 2006 [18]). Cependant on peut supposer que cette chaîne peut se déstabiliser, et causer la fusion des tourbillons de la chaîne. Nous poursuivons donc l'évolution de l'instabilité au delà de la phase de saturation. Ainsi, la chaîne de tourbillons obtenue après

environ 30 rotations, et où l'amplitude des modes présents dans le disque est quasiment constante, constitue l'état initial des simulations. Au bout de plusieurs dizaines de rotations, il arrive que les modes saturés lors des premières rotations décroissent et laissent place à des modes plus bas, ce que nous appelons la cascade des modes. Nous avons suivi l'évolution du disque durant 200 rotations, dans les 12 cas précédents. Nous allons montrer le mécanisme de cette cascade.

3.1 Cascade des modes pour $A = 20\%$

Nous présentons sur la Figure IV.9 l'évolution des modes $m = 1$ à $m = 12$, présents dans la vorticité relative à celle du disque, pour les différents modes principaux de perturbation. L'amplitude initiale du mode principal est ici $\epsilon = 10^{-2}$. Comme nous l'avons vu, les résultats seraient semblables si on choisissait ϵ plus petit. Nous avons constaté, lors de l'évolution du disque, un déplacement radial des perturbations présentes dans le disque. Nous expliquerons plus tard ce phénomène, mais nous en tenons compte ici dans la mesure de l'amplitude de chaque mode. Nous traçons en effet le maximum d'amplitude d'un mode sur une zone radiale qui s'étend de 6 à 9 UA . De ce fait, nous suivons chaque mode dans son déplacement radial, et pallions les erreurs qui en découlent pour son amplitude.

La figure (a) montre les modes obtenus lorsque l'on perturbe la gaussienne avec un mode principal $m = 3$. Suite à la croissance linéaire lors des 10 premières rotations, ce mode est saturé ainsi que les harmoniques $m = 6$, $m = 9$ et $m = 12$. Les harmoniques supérieurs ne sont pas montrés car nous nous restreignons aux 12 premiers modes pour des raisons de lisibilité. On remarque que durant les 200 rotations de la simulation, l'amplitude de ces modes est inchangée, et qu'aucun mode différent n'est excité. Il n'y a pas de cascade de modes dans ce cas. Il semble donc que le mode $m = 3$ soit assez stable et ne donne pas naissance à des modes inférieurs.

La figure (b) montre les résultats du mode principal $m = 5$. Nous avons restreint la fenêtre autour de la phase de cascade, sur une durée de 40 rotations. Pour faciliter la comparaison avec les autres simulations, nous utilisons la même fenêtre pour les résultats suivants. On remarque une croissance de modes différents des modes harmoniques présents après la croissance linéaire, et qui débute après une centaine de rotations. Il y a une croissance exponentielle de ces modes suivie d'une saturation et d'une évolution complexe. Le mode principal ainsi que ses harmoniques décroissent lorsque les modes de cascade commencent à saturer, autour de 130 rotations.

On constate le même déroulement pour le mode principal $m = 6$, figure (c), $m = 7$, figure (d), $m = 9$, figure (e), et $m = 11$, figure (f). Cependant, la phase de cascade débute d'autant plus tôt que le mode principal est élevé.

Ainsi la cascade se déroule entre 70 et 80 rotations pour $m = 6$, entre 50 et 60 rotations pour $m = 7$ et entre 30 et 40 rotations pour $m = 9$ et $m = 11$. La valeur de saturation des modes excités est en moyenne égale à 10^{-1} pour toutes les simulations. La seule exception est le cas du mode principal $m = 6$. Seuls les modes 3, 6, 9 et 12 ont une amplitude à la saturation supérieure ou égale à 10^{-1} . Tous les autres modes saturent vers une valeur de $10^{-1.5} = 3.2\%$. On peut expliquer cette différence en rappelant que le mode principal $m = 6$ est le mode le plus instable pour la gaussienne

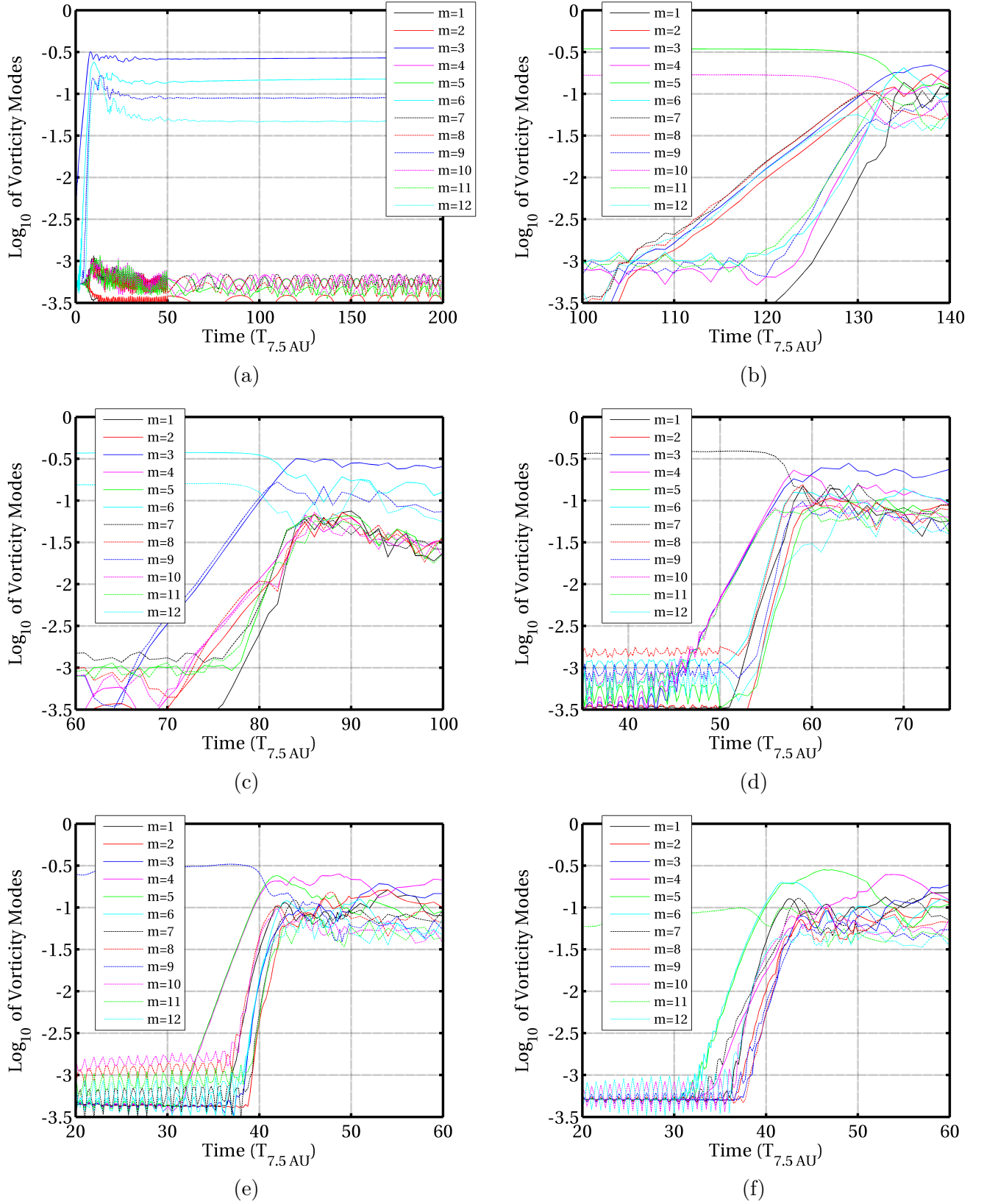


Figure IV.9 – Évolution de l'amplitude des 12 premiers modes de la vorticité relative lors de la cascade secondaire, pour différents modes initiaux de perturbation. La gaussienne a les paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 \text{ UA})$. Le mode principal est $m = 3, m = 5, m = 6, m = 7, m = 9$, et $m = 11$ sur les figures de (a)   (f) respectivement.

	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
Phase 1	2, 3, 7, 8, 12	2, 3, 4, 8, 9, 10	3, 4, 10, 11	4, 5	4, 5, 6, 7
Phase 2	1, 4, 6, 9, 11	1, 5, 7, 11	1, 2, 5, 6, 8, 9, 12	1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11	1, 2, 3, 8, 9, 10, 12

Tableau IV.3 – Différents modes présents dans chaque phase de la cascade secondaire, en fonction du mode initial de perturbation de l'instabilité.

d'amplitude $A = 20\%$ discutée ici.

On distingue dans tous les cas, sauf bien sûr pour la première simulation $m = 3$, deux phases de cascade :

- Une première phase de croissance exponentielle, qui crée les modes qui ont la plus grande amplitude après la saturation.
- Une seconde phase de croissance exponentielle, qui se déclenche ensuite, et dont le taux de croissance est visiblement plus élevé que celui de la première phase.

L'intervalle de temps qui sépare ces deux phases est également d'autant plus court que le mode principal d'excitation est élevé. Dans le cas du mode principal $m = 6$, la première phase est séparée en deux, car on constate que les modes 2, 4, 8 et 10 débutent leur croissance exponentielle en même temps que les modes 3 et 9, maisaturent après ces derniers, ce qui décale de 6 rotations leur croissance. Cependant, ils ont le même taux de croissance que les modes 3 et 9, ce qui nous permet de les classer dans la première phase. On constate le même phénomène dans la simulation avec $m = 11$, figure (f), dans laquelle les modes 4 et 7 sont en retard par rapport aux modes 5 et 6, mais ont le même taux de croissance.

On observe donc une seconde instabilité, qui concerne la chaîne de tourbillons créée à l'issue de l'IOR, et qui se déroule en deux phases. La croissance exponentielle de modes absents de l'état initial, et qui sont différents des harmoniques du mode principal, montre que cette chaîne peut être instable, et que les taux de croissance de ces nouveaux modes semblent différents de ceux de l'IOR.

Le Tableau IV.3 récapitule les modes présents dans les deux phases de cascade pour chaque simulation. On constate, tout d'abord, que la simulation avec $m = 6$ est celle qui a le plus de modes différents dans la première phase. Mais ce qui est le plus remarquable est que dans chaque phase, les modes excités ne sont pas quelconques. *Ils constituent des paires harmoniques.* En effet, pour le mode principal $m = 5$, figure (b), les modes 7 et 8 croissent ensemble. Ils forment une paire harmonique $7 + 8 = 15$. Les modes 3 et 12 croissent également ensemble et forment également une paire de deuxième harmonique $12 + 3 = 15$. Par ailleurs, les modes 2 et 3 sont également appairés et constituent un couple $2 + 3 = 5$, le mode principal d'excitation. Dans la seconde phase de cascade, on retrouve le même type de croissance par paire, avec les couples $9 + 11 = 20$, $4 + 6 = 10$ et la résonance avec le mode 1, $9 + 1 = 10$, qui apparaît plus tardivement.

Si on analyse le mode principal $m = 6$, figure (c), on constate le même mécanisme. Tout d'abord, lors de la première phase, la paire $3 + 9 = 12$ est excitée et forme un couple de première harmonique. Ensuite les couples $8 + 10 = 18$ et $2 + 4 = 6$ sont excités plus tardivement, mais avec le même

	$m = 5$	γ
Phase 1	7 + 8, 3 + 12, 2 + 3	0.20
Phase 2	9 + 11, 4 + 6, 1 + 4	0.43
	$m = 6$	γ
Phase 1	9 + 3, 8 + 10, 2 + 4	0.33
Phase 2	5 + 7, 1 + 11	0.68
	$m = 7$	γ
Phase 1	3 + 4, 10 + 11	0.46
Phase 2	6 + 8, 6 + 1, 12 + 2, 2 + 5, 9 + 5	0.93
	$m = 9$	γ
Phase 1	5 + 4	0.64
Phase 2	8 + 10, 8 + 1, 6 + 3, 6 + 12, 7 + 11, 2 + 7	1.26
	$m = 11$	γ
Phase 1	5 + 6, 4 + 7	0.57
Phase 2	10 + 12, 1 + 10, 2 + 9, 3 + 8	0.98

Tableau IV.4 – Les paires harmoniques présentes dans chaque phase de la cascade des modes, pour les différents mode initiaux de perturbation. La gaussienne a pour paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 \text{ UA})$. Pour chaque cas, le taux de croissance γ de ces paires est indiqué.

taux de croissance. Lors de la seconde phase, la paire $7 + 11 = 18$ constitue un couple de seconde harmonique. Enfin, la paire $1 + 5 = 6$ est excitée en dernier.

Nous avons consigné les paires harmoniques présentes dans chaque simulation dans le Tableau IV.4. Pour chaque mode principal, les deux phases sont indiquées, avec pour chacune, les paires excitées et le taux de croissance exponentielle γ correspondant. Ce dernier est la moyenne du taux de croissance de chaque paire. La dispersion des valeurs autour de cette moyenne est très faible, inférieure à 10%, ce qui montre que les deux phases sont bien distinctes. Les paires sont indiquées dans l'ordre dans lequel elles sont excitées au cours du temps.

Dans tous les cas, on observe qu'une paire de modes dont la somme est égale à la valeur du mode principal est excitée dans la phase 1. Les modes qui la constituent sont les plus proches possibles l'un de l'autre. Par exemple, pour le mode principal $m = 9$, la paire qui est présente dans la phase 1 est $4 + 5$. Les autres paires qui valent 9, comme $3 + 6$ et $2 + 7$ n'apparaissent que lors de la phase 2. Cela est le cas pour toutes les simulations. Cependant, des paires harmoniques plus élevées peuvent être présentes lors de la phase 1. Nous n'avons pas pu établir de hiérarchie temporelle claire. Mais l'existence de cet appariage est déjà un résultat nouveau par rapport aux études précédentes.

Les taux de croissance des paires harmoniques sont différents de ceux de la phase linéaire de l'instabilité en ondes de Rossby décrite dans la section précédente. Il semble qu'il s'agisse d'un mécanisme différent, mettant en jeu un couplage non linéaire avec la création de paires harmoniques suivant deux phases distinctes. En revanche, on remarque que les taux de croissance dans la seconde phase de la cascade sont proches du double de ceux de la première phase de cascade. Cela est comparable au rapport 1.87 que nous avons trouvé dans l'étude de la croissance linéaire entre le mode principal et le premier harmonique.

Nous allons maintenant comparer la cascade des modes lorsque l'amplitude A de la gaussienne est plus élevée, afin de déterminer si ce phénomène dépend de ce paramètre, et du taux de croissance du mode principal.

3.2 Cascade des modes pour $A = 30\%$

Nous allons voir que l'évolution de l'instabilité, une fois la croissance linéaire saturée, est comparable à ce que nous venons de décrire, lorsque $A = 20\%$. On obtient une cascade de modes dont les résultats sont présentés Figure IV.10. Le mode principal $m = 3$, figure (a) ne présente pas de cascade, comme lorsque $A = 20\%$. Il n'y a donc pas de déstabilisation induite par une vorticité plus importante dans la zone d'instabilité. Les modes excités conservent les valeurs de saturation atteintes à l'issue de la croissance linéaire.

Les autres simulations présentent quelques différences cependant. L'instabilité perturbée par le mode $m = 5$, figure (b), a une cascade de modes qui est retardée, et qui se déroule entre 130 et 150 rotations. Par ailleurs, les modes 5 et 10 issus de la croissance linéaire ne décroissent pas, contrairement au cas $A = 20\%$. La simulation pour $m = 6$, figure (c), montre que la cascade est aussi retardée mais dans une moindre mesure. Elle se déroule entre 75 et 85 rotations, contre 70 et 80 rotations dans le cas $A = 20\%$.   partir du mode principal $m = 7$, la cascade se déroule en avance par rapport à $A = 20\%$. Cette avance va de 3 rotations pour $m = 7$ à 10 rotations pour $m = 11$. Un changement de l'amplitude A de la gaussienne modifie donc de façon sélective l'instant d'apparition de la cascade des modes.

La valeur de saturation des modes à l'issue de la cascade n'est pas modifiée. En particulier, on remarque que pour le mode principal $m = 11$, figure (f), cette valeur après 30 rotations est de l'ordre de 10^{-1} , comme dans le cas $A = 20\%$, alors que l'amplitude du mode 11 avant la cascade est de $10^{-0.3} = 50\%$, ce qui est 60 fois supérieur à l'amplitude qu'il avait dans le cas $A = 20\%$. Il semble donc que la valeur de saturation à l'issue de la cascade soit peu dépendante de l'amplitude du mode principal.

Cela dit, le principal constat que l'on peut faire est que la cascade des modes se déroule de la même façon que dans le cas $A = 20\%$. Il y a une croissance des mêmes paires de modes, dans le même ordre d'apparition. Nous avons consigné dans le Tableau IV.5 la valeur de ces paires dans les deux phases de cascade, pour chaque simulation, ainsi que le taux de croissance exponentielle correspondant.

Il n'y a pas de modification des paires présentes, mais plus remarquablement, les taux de croissance des modes appairés, dans chaque phase, sont très similaires à ceux mesurés pour $A = 20\%$, à valeur m du mode principal égale. Or, les taux de croissance des modes principaux et de leurs harmoniques, mesurés pour $A = 30\%$, sont 60% supérieurs à ceux mesurés pour $A = 20\%$, lors de la croissance linéaire. Cet écart de croissance n'existe pas lors de la cascade des modes.

Il semble donc que l'instabilité de la chaîne de tourbillons soit différente de l'IOR proprement dite, car les taux de croissance sont indépendants de l'amplitude des modes de la chaîne, et par conséquent, sont indépendants de l'amplitude de la gaussienne qui a crée cette chaîne. Le mécanisme

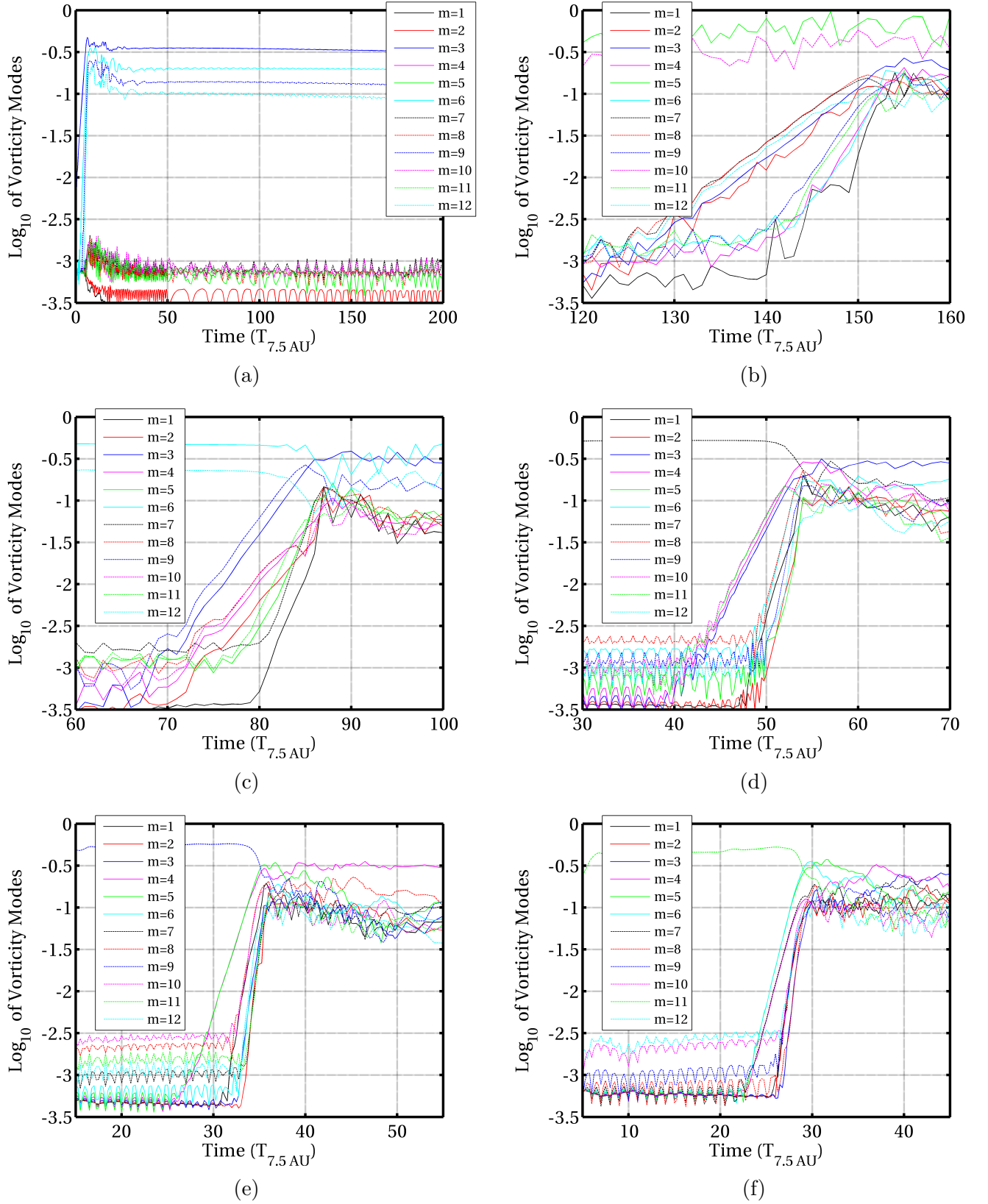


Figure IV.10 — Évolution de l'amplitude des 12 premiers modes de la vorticité relative lors de la cascade secondaire, pour différents modes initiaux de perturbation. La gaussienne a les paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ UA})$. Le mode principal est $m = 3, m = 5, m = 6, m = 7, m = 9$, et $m = 11$ sur les figures de (a)   (f) respectivement.

	$m = 5$	γ
Phase 1	7 + 8, 3 + 12, 2 + 3	0.19
Phase 2	9 + 11, 4 + 6, 1 + 4	0.38
	$m = 6$	γ
Phase 1	9 + 3, 8 + 10, 2 + 4	0.34
Phase 2	5 + 7, 1 + 11	0.72
	$m = 7$	γ
Phase 1	10 + 11, 3 + 4	0.49
Phase 2	6 + 8, 6 + 1, 9 + 5, 12 + 2, 2 + 5,	1.02
	$m = 9$	γ
Phase 1	5 + 4	0.79
Phase 2	8 + 10, 8 + 1, 6 + 12, 6 + 3, 7 + 11, 2 + 7	1.60
	$m = 11$	γ
Phase 1	5 + 6, 4 + 7	0.98
Phase 2	10 + 12, 1 + 10, 2 + 9, 3 + 8	2.01

Tableau IV.5 – Les paires harmoniques présentes dans chaque phase de la cascade des modes, pour les différents modes initiaux de perturbation. La gaussienne a pour paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ } UA)$. Pour chaque cas, le taux de croissance γ de ces paires est indiqué.

sous-jacent est le même, c'est-à-dire une amplification de modes dans un puits de vorticité, mais la différence du profil de ce puits, par rapport à l'étude classique de l'IOR, modifie les taux de croissance de l'instabilité.

Pour comparer de façon claire les effets dus à l'amplitude A , nous avons tracé les taux de croissance des deux phases de la cascade, pour les amplitudes $A = 20\%$ et $A = 30\%$, en fonction du mode principal initial. Les résultats sont visibles Figure IV.11. Les ronds représentent les taux de croissance de la première phase de la cascade et les étoiles ceux de la seconde phase. L'amplitude $A = 20\%$ est représentée en noir, et $A = 30\%$ est identifiée en rouge.

On remarque que pour les modes initiaux les plus élevés, les taux de croissance sont plus élevés pour $A = 30\%$, et ce dans les deux phases de la cascade. Les modes supérieurs à $m = 7$ sont donc favorisés par une amplitude élevée, ce qui traduit une certaine sensibilité de cette instabilité au nombre de tourbillons présents dans la chaîne. En effet, on constate la présence d'un mode le plus instable, dont le taux de croissance est maximal. Dans le cas $A = 20\%$, c'est la chaîne de tourbillons, $m = 9$ qui a le plus grand taux de croissance des modes de cascade. Dans le cas $A = 30\%$, ce maximum est décalé vers un mode plus élevé, supérieur à $m = 12$, que nous n'avons pas atteint avec nos simulations.

En revanche, pour un mode initial $m < 7$, les taux de croissance sont les mêmes pour les deux amplitudes, et dépendent linéairement du mode principal de perturbation. Nous avons tracé en noir la droite qui s'ajuste aux données pour la première phase (traits pleins), et pour la seconde phase (pointillés). Nous retrouvons par ce moyen le fait que le taux de croissance des modes de la seconde phase est le double de celui des modes de la première phase.

Nous mettons également en évidence que plus l'amplitude A augmente, plus les taux de crois-

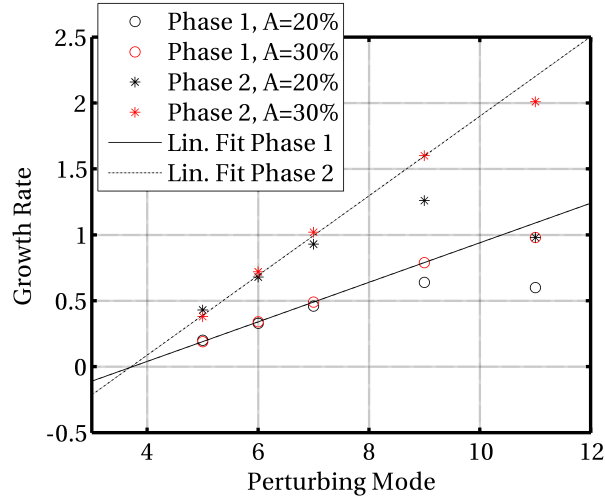


Figure IV.11 — Taux de croissance γ des paires présentes dans la première phase de la cascade (ronds) et dans la seconde phase de la cascade (étoiles), en fonction du mode initial m de perturbation de l'instabilité. L'amplitude de la gaussienne est $A = 20\%$ (en noir) et $A = 30\%$ (en rouge). Le comportement linéaire de ces données est mis en évidence par une droite en trait plein pour la phase 1 et une droite en pointillés pour la phase 2.

sance des modes principaux supérieurs à $m = 7$ tendent vers le comportement linéaire déjà présent pour les plus petits modes. Nous montrons que plus le nombre de tourbillons présents dans la chaîne est élevé, plus cette dernière est instable, avec un comportement asymptotique du taux de croissance linéaire en fonction de ce nombre, c'est-à-dire en fonction du mode principal m présent dans cette chaîne.

Les deux droites qui traduisent le comportement asymptotique s'annulent pour une valeur de m comprise entre 3 et 4. Cela signifie qu'en deçà de cette valeur, il n'y a pas de croissance des modes de cascade, puisque le taux de croissance est négatif. Cela explique pourquoi nous n'avons pas observé de cascade des modes dans la simulation avec un mode initial $m = 3$. Il est nécessaire que le mode de perturbation initial soit supérieur ou égal à 4, pour que la cascade non linéaire se produise. Ce seuil d'instabilité montre qu'une chaîne de moins de 4 tourbillons est stable dans le disque, à condition que le spectre de modes présents dans cette chaîne soit compatible avec nos simulations, c'est-à-dire qu'ils constituent une somme de modes multiples du mode principal $m = 4$, d'amplitudes décroissantes lorsque le nombre d'onde augmente.

3.3 Décroissance de la valeur des modes

Nous avons donc montré que l'amplitude de la gaussienne ne change pas beaucoup le taux de croissance des modes présents lors de la cascade. En particulier, les paires qui croissent sont les mêmes, et sont excitées dans le même ordre. La somme des modes présents dans chaque paire est égale à un multiple du mode principal d'excitation. Cela fait apparaître dans le disque des modes qui n'étaient pas présents initialement.

C'est donc par ce processus que la chaîne de tourbillons formée par l'instabilité en ondes de

Rossby permet de former des tourbillons solitaires dans le disque. Un tourbillon unique peut être considéré comme un mode $m = 1$. Nous l'avons vu, l'IOR est généralement plus instable pour des modes élevés. La gaussienne d'amplitude $A = 30\%$ est par exemple instable préférentiellement pour un mode $m = 7$, voir Figure IV.6.

C'est donc à l'issue de la cascade non linéaire que le mode $m = 1$ va croître et devenir dominant. Lors de la première phase de la cascade, la paire $3 + 4$ est excitée. À l'issue de la saturation, les modes $m = 4$ puis $m = 3$ ont l'amplitude la plus grande. Le mode dominant est donc passé de $m = 7$ à $m = 3$. Lors de la seconde phase, les modes $m = 5$ et $m = 2$ forment une paire ainsi que les modes $m = 6$ et $m = 1$. On a donc une suite de modes appairés, dont l'un des modes qui la compose devient de plus en plus petit, jusqu'à atteindre $m = 1$.

La succession de croissances de ces paires est donc le mécanisme qui crée des modes de plus en plus bas. Une fois présents dans le disque, ces modes de bas ordre vont entrer en compétition et former éventuellement un tourbillon unique, correspondant à un mode $m = 1$. Ce mécanisme non linéaire est complexe mais nous avons pu le décrire en nous basant sur l'étude de l'instabilité perturbée par un unique mode initial.

Nous avons mis en évidence comment apparaissent les modes les plus faibles. Cependant si la gaussienne est déstabilisée par un bruit aléatoire par exemple, ce qui semble plus réaliste pour une description physique des disques, la perturbation initiale contiendra un grand nombre de modes différents. On s'attend à ce que le mécanisme reste néanmoins le même, et qu'après la croissance du mode le plus instable, qui dépend de la forme de la gaussienne, la cascade fasse apparaître des paires harmoniques de ce mode, et qu'à la fin, un tourbillon unique soit formé. C'est l'objet de la section suivante.

4 Formation d'un tourbillon isolé

Nous perturbons maintenant la gaussienne $\sigma(r)$, $P(r)$, $V(r)$, décrite au paragraphe 2.1, par un bruit aléatoire, constitué de 200 petites perturbations gaussiennes distribuées aléatoirement dans la région de la gaussienne, qui est centrée en $r_0 = 7.5 \text{ UA}$ pour rappel. Chaque petite bosse de densité est de la forme suivante :

$$\sigma_{\text{bruit}} = \epsilon_{\text{alea}} \times \exp\left(-\frac{(r - r_{\text{alea}})^2 + r^2(\theta - \theta_{\text{alea}})^2}{\Delta_r'^2}\right) \quad (\text{IV.18})$$

Dans cette expression, ϵ_{alea} est un nombre aléatoire entre -10^{-1} et 10^{-1} . Cela représente l'amplitude de la perturbation aléatoire. Chaque gaussienne est centrée en $(r_{\text{alea}}, \theta_{\text{alea}})$, qui est une position aléatoire dans la région comprise entre 6.5 et 8.5 UA radialement, et 0 et 2π azimutalement. Enfin, la largeur $\Delta_r' = 0.1 \text{ UA}$ est la largeur de la gaussienne de perturbation. De ce fait les

perturbations initiales de densité et de pression ont la forme suivante :

$$\sigma_{per} = \sigma(r) \left[1 + \sum_{i=1}^{200} \sigma_{bruit}(i) \right] \quad (\text{IV.19})$$

$$P_{per} = P(r) \left[1 + \sum_{i=1}^{200} \sigma_{bruit}(i) \right] \quad (\text{IV.20})$$

où $\sigma_{bruit}(i)$ est une bosse aléatoire.

4.1 Développement de l'instabilité

Nous avons simulé l'évolution de cette instabilité durant 200 rotations, pour différents types de gaussiennes initiales. Nous présentons ici les résultats pour une gaussienne que nous avons utilisée lors de l'étude linéaire. L'amplitude est donc $A = 30\%$ et la largeur est $\Delta_r = 0.3 UA$. Cela permet d'avoir un élément de comparaison avec les résultats précédents. Les figures suivantes sont des cartes d'évolution dans le plan (r, θ) des grandeurs physiques du disque.

La Figure IV.12 montre l'évolution de la vitesse radiale à différents instants. La figure (a) représente l'instant initial, la figure (b) la densité après 7 rotations puis après 11, 20, 30 et 80 rotations sur les figures (c), (d), (e) et (f) respectivement. La Figure IV.13 présente avec la même nomenclature la vitesse azimutale relative à celle du disque. La Figure IV.14 montre la densité relative à celle du disque. Enfin la Figure IV.15 montre la vorticité relative à celle du disque.

À l'instant initial, la gaussienne isotherme de densité crée une zone de vorticité négative relativement à celle du disque (Figure IV.15). Le minimum au rayon r_0 est environ de -60% la vorticité du disque au même rayon. Cette configuration est associée à un cisaillement relatif de la vitesse azimutale que l'on peut voir Figure IV.13. Après 7 rotations, la zone est déstabilisée par la croissance de l'instabilité. Les modes les plus instables excités par la perturbation aléatoire croissent et l'on observe, au bout de 11 rotations, la présence d'un mode $m = 7$ dans la gaussienne présente dans le disque. Ce mode se caractérise par une chaîne de 7 tourbillons anticycloniques, car leur vorticité relative à celle du disque vaut environ -60% . Ils conservent la vorticité initialement présente dans la gaussienne.

Chaque tourbillon de la chaîne excite des ondes spirales, qui sont présentes dans toutes les grandeurs physiques représentées dans ces figures. On constate que chaque tourbillon n'est pas exactement sur la même orbite, car les perturbations aléatoires sont dispersées entre 6.5 et $8.5 UA$. De ce fait, ils n'orbitent pas avec la même période, ce qui facilite la fusion. Cela est également d u à la cascade des modes que nous avons observée précédemment. Au bout de 20 orbites, il ne reste plus que trois zones de surdensité, qui sont en réalité le résultat de la fusion des tourbillons. En effet, on remarque clairement sur la Figure IV.15 (d), que les zones de vorticité anticyclonique se mélangent. Même après 30 rotations, on distingue encore la présence de sous structures de vorticité (e) à l'intérieur des deux tourbillons qui subsistent.

Dans cette simulation, la cascade des modes a permis d'obtenir la formation d'un unique tourbillon final au bout de 80 rotations. La perturbation initiale axisymétrique s'est donc transformée

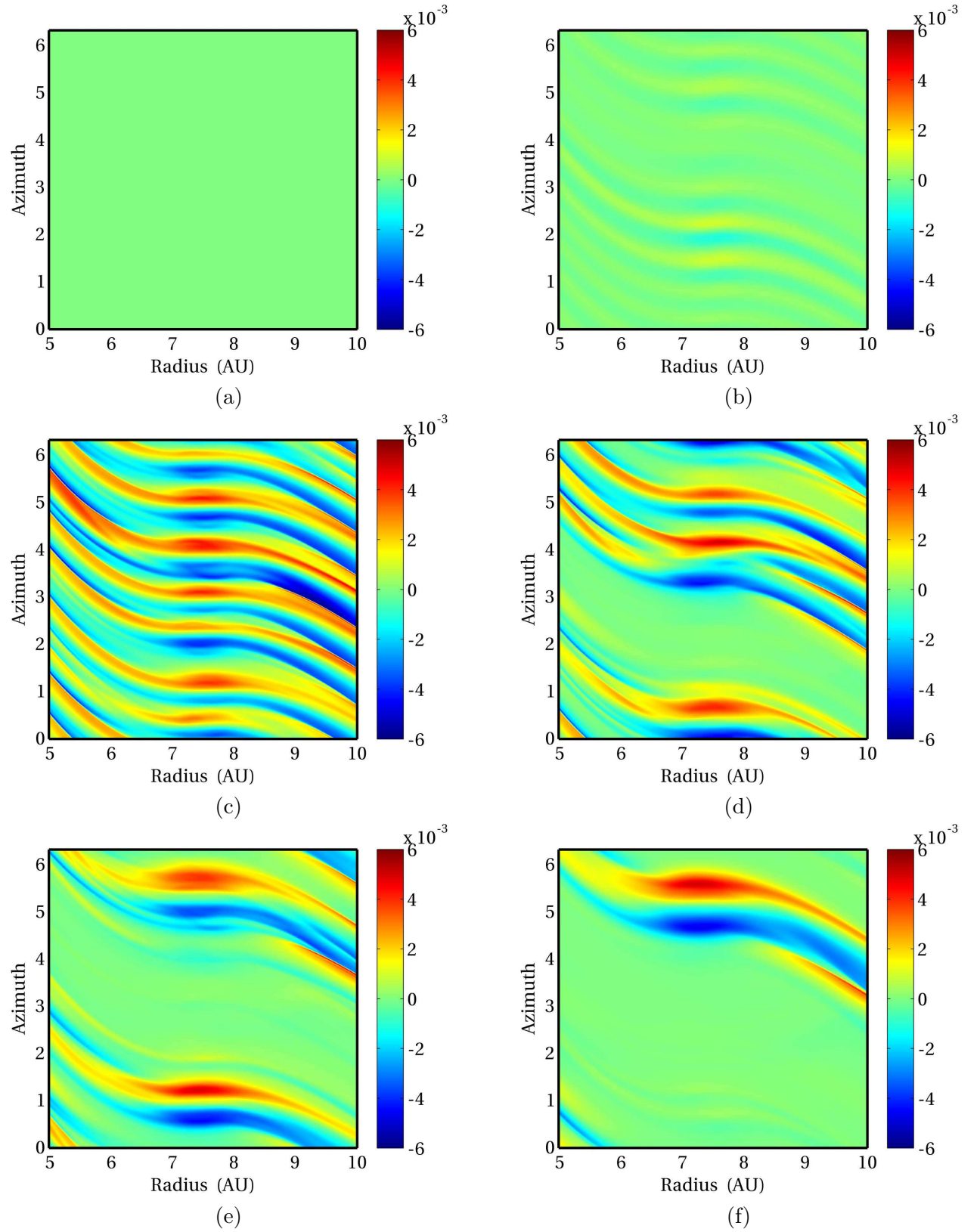


Figure IV.12 – Évolution de la vitesse radiale du disque en déstabilisant une gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ UA})$ avec un bruit aléatoire. Les cartes dans le plan (r, θ) correspondent à l'instant initial, à 7 rotations, 11, 20, 30 et 80 rotations, sur les figures (a), (b), (c), (d), (e) et (f), respectivement.

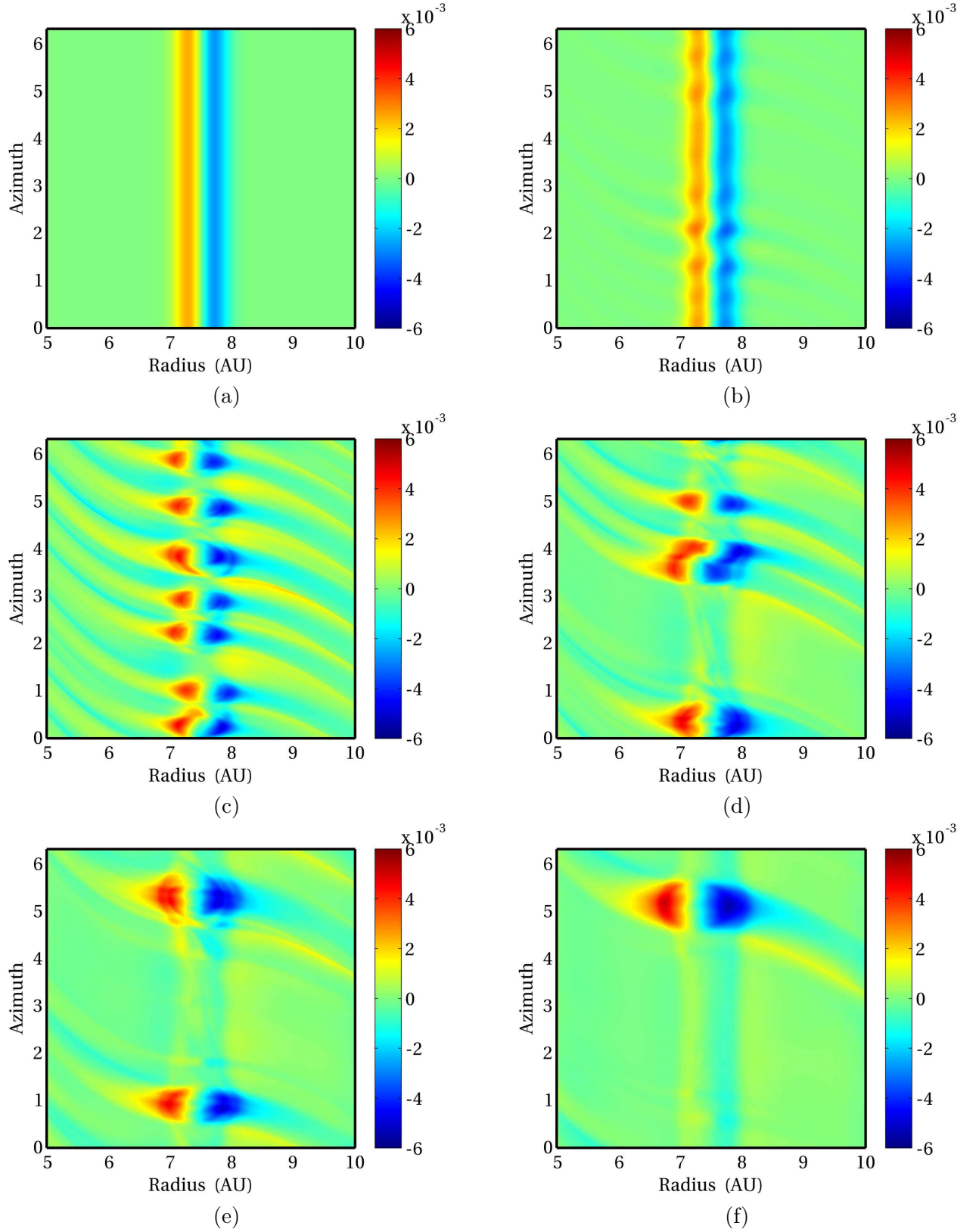


Figure IV.13 — Évolution de la vitesse azimutale relative du disque en déstabilisant une gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ UA})$ avec un bruit aléatoire. Les cartes dans le plan (r, θ) correspondent à l'instant initial, à 7 rotations, 11, 20, 30 et 80 rotations, sur les figures (a), (b), (c), (d), (e) et (f), respectivement.

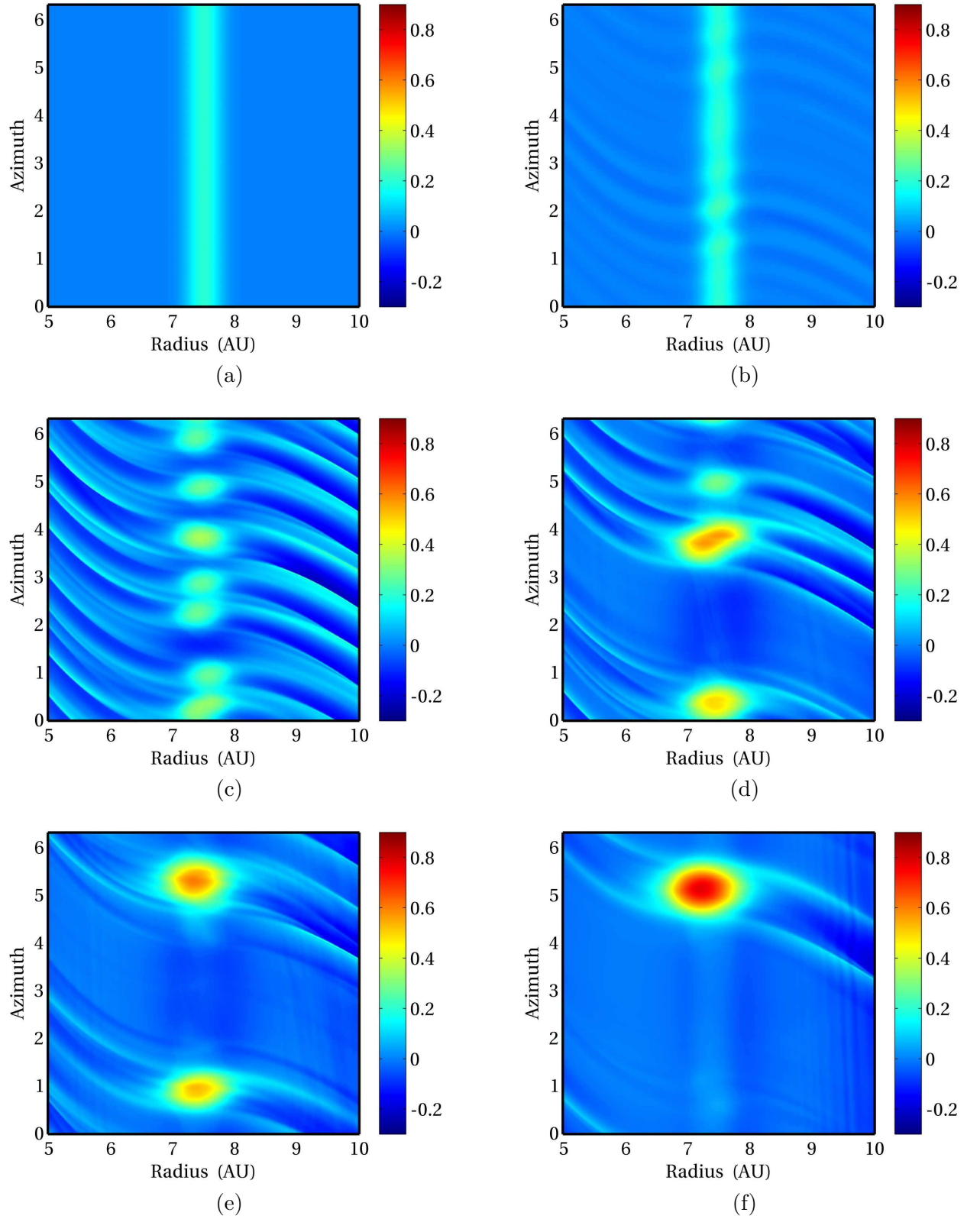


Figure IV.14 – Évolution de la densité relative du disque en déstabilisant une gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ UA})$ avec un bruit aléatoire. Les cartes dans le plan (r, θ) correspondent à l'instant initial, à 7 rotations, 11, 20, 30 et 80 rotations, sur les figures (a), (b), (c), (d), (e) et (f), respectivement.

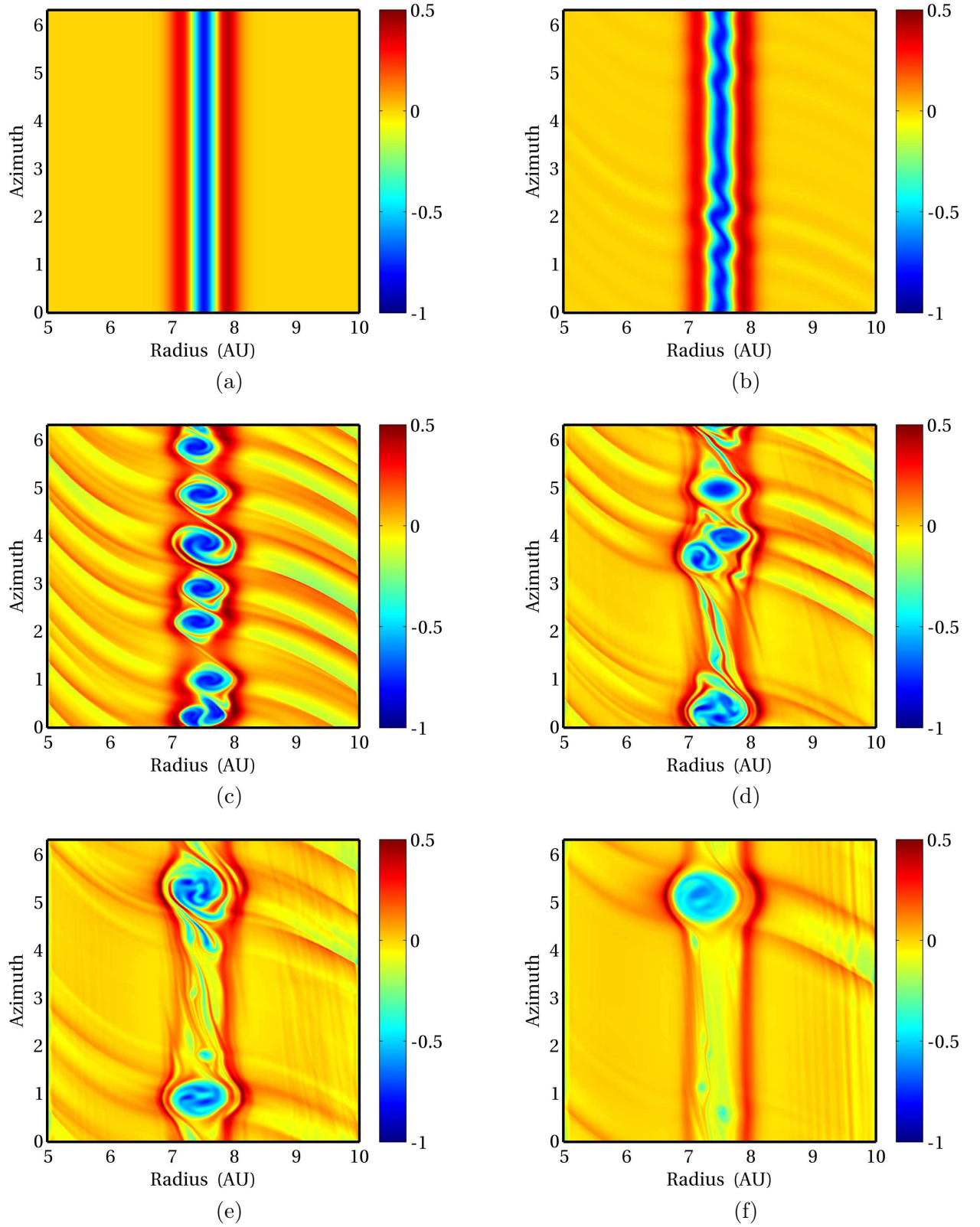


Figure IV.15 — Évolution de la vorticité relative du disque en déstabilisant une gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 \text{ } U_A)$ avec un bruit aléatoire. Les cartes dans le plan (r, θ) correspondent à l'instant initial, à 7 rotations, 11, 20, 30 et 80 rotations, sur les figures (a), (b), (c), (d), (e) et (f), respectivement.

en une structure localisée. Il ne reste quasiment plus de surdensité dans la zone initiale d'instabilité. La densité y est en moyenne de moins de 5% supérieure à celle du disque, alors qu'initialement, la densité était de 30% supérieure à celle du disque. De même, la vorticité y est presque égale à celle du disque. Seules les deux bandes de vorticité positive localisées aux rayons $r = 7 UA$ et $r = 8 UA$ persistent. Le tourbillon apparaît isolé, et survit dans une zone où les conditions initiales de l'IOR ont disparu.

Cette évolution est comparable aux résultats obtenus dans les travaux antérieurs, y compris en présence de particules (Inaba, 2006 [2], ou Lyra, 2009 [8]), mais aussi en 3D (Lin, 2013 [5], Meheut, 2010 et 2012 [9] [10]), ce qui montre que le mécanisme de cette instabilité est très robuste aux différentes physiques du disque, ce qui donne une portée d'autant plus générale à nos conclusions.

Après cette description du déroulement de l'instabilité, nous allons étudier comment les modes excités évoluent afin de comparer les résultats de la déstabilisation par un bruit aléatoire avec ceux produits par un mode excitateur unique.

4.2   tude des modes pour différentes gaussiennes

Nous l'avons vu, lorsque l'on perturbe la gaussienne par un mode unique m , l'amplitude de ce mode croît de façon exponentielle, de même que celle de ses harmoniques $m' = n \times m$. Le taux de croissance du mode principal dépend de la forme de la gaussienne initiale. Les taux de croissance des harmoniques sont eux proportionnels à celui du mode principal. Après saturation, l'instabilité se poursuit en une cascade si le mode initial de perturbation est supérieur ou égal à $m = 4$.

Quand la gaussienne est perturbée par un bruit aléatoire, l'évolution est un peu différente. Tout d'abord, une sélection des modes présents dans le bruit va favoriser celui qui a le taux de croissance le plus élevé. Mais ensuite, les autres modes présents dans le bruit vont également croître. Il n'y a plus un unique mode et ses harmoniques, mais une somme des modes initialement présents dans le bruit aléatoire.

Nous avons généré un bruit aléatoire, comme décrit plus haut, et l'avons utilisé pour déstabiliser 6 gaussiennes différentes. Les paramètres de ces gaussiennes initiales sont donnés dans le Tableau IV.6. De ce fait, chacune est perturbée par le même bruit et on peut supposer que les mêmes modes initiaux sont présents dans chacune des simulations. Ces six gaussiennes ont des profils de vorticité et de densité différents, ce qui permet d'explorer différents taux de croissance et les modes les plus instables.

Nous présentons sur la Figure IV.16 l'analyse de Fourier de la vorticité relative à celle du disque en fonction du temps, comme nous l'avons effectué dans l'étude linéaire. L'amplitude des 12 premiers modes présents dans le disque est représentée dans différentes couleurs. Chaque figure représente l'évolution à partir d'une gaussienne initialement fixée. L'ordre choisi, de (a) jusqu'à (f), correspond aux paramètres de gaussienne décrits dans le Tableau IV.6. De ce fait, la première ligne représente les gaussiennes d'amplitude $A = 10\%$, la seconde les gaussiennes d'amplitude $A = 20\%$ et la troisième les gaussiennes d'amplitude $A = 30\%$. Chaque colonne correspond à une largeur différente pour chaque amplitude. On peut ainsi visualiser l'effet des paramètres de la gaussienne

Figure	A	Δ_r
(a)	10%	0.2 UA
(b)	10%	0.3 UA
(c)	20%	0.2 UA
(d)	20%	0.3 UA
(e)	30%	0.3 UA
(f)	30%	0.4 UA

Tableau IV.6 – Repérage des paramètres des différentes gaussiennes étudiées, pour les Figures IV.16, IV.17, IV.18, IV.19 et IV.20

sur l'évolution.

Nous constatons tout d'abord une croissance exponentielle de tous les modes, sur une échelle de temps de quelques rotations, puis une saturation de l'amplitude de ces modes. Il s'ensuit une compétition entre chacun d'eux, avec une domination successive de modes de plus en plus bas, comme nous l'avons observé à la fin de la cascade non linéaire. Cela montre qu'une chaîne de tourbillons se forme et que ceux-ci peuvent fusionner les uns avec les autres. Cependant, nous n'avons pas observé de cascade secondaire comme c'est le cas pour un mode unique de perturbation.

Cela est probablement dû à la compétition entre les différents modes déjà présents à l'instant initial, dans le bruit aléatoire. Dans le cas d'un unique mode de perturbation, les modes présents dans les paires harmoniques doivent croître à partir d'une amplitude initiale qui est proche de zéro. C'est le délai nécessaire à l'apparition de la cascade. Or dans le cas d'un bruit aléatoire, presque tous les modes sont présents dans l'état initial, ou du moins, leur amplitude n'est pas négligeable. De ce fait, leur croissance s'effectue sur une durée comparable à celle des modes qui ont la plus grande amplitude.

Tous les modes croissent donc lors des premières rotations. C'est pourquoi nous avons limité la durée représentée sur les figures à 20 rotations, et à 40 rotations pour la gaussienne $(A, \Delta_r) = (10\%, 0.3 UA)$, figure (b) et $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.4 UA)$, figure (f).

On observe que, pour chaque amplitude, l'instabilité se déclenche et croît d'autant plus vite que la largeur de la gaussienne est faible. L'amplitude maximale atteinte est également plus grande lorsque la largeur Δ_r est plus faible. Cela est cohérent avec une plus grande vorticité présente dans la gaussienne, lorsque sa largeur est plus faible. Les taux de croissance sont donc plus élevés, car le puits amplificateur de l'instabilité est plus fort. De plus, le premier mode excité est d'autant plus bas que la gaussienne est plus large, mais aussi de plus faible amplitude. Cela est en accord avec nos précédents résultats.

Pour une gaussienne de type (a), le mode le plus instable est $m = 6$, de la même façon que pour la gaussienne (d). Cependant les taux de croissance sont différents. Pour ce dernier cas, on mesure $\gamma = 0.71$, ce qui est exactement le taux de croissance du mode $m = 6$ mesuré lors de l'étude linéaire pour le cas $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 UA)$. Par conséquent, la présence d'autres modes dans la perturbation initiale ne modifie pas les taux de croissance individuels de chaque mode, qui sont imposés par la gaussienne initiale.

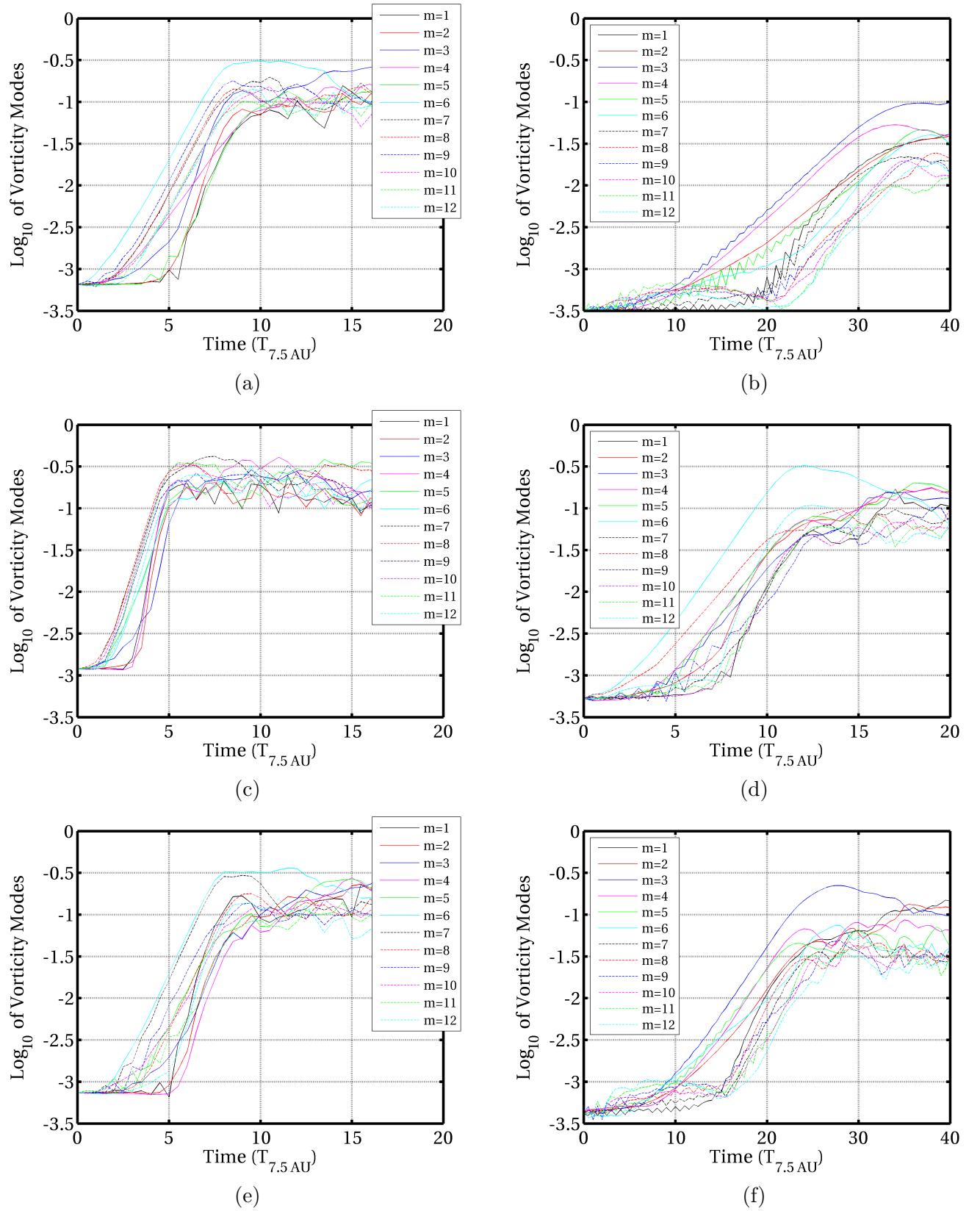


Figure IV.16 – Croissance des modes de vorticité lors du déclenchement de l'instabilité par un bruit aléatoire, pour différentes gaussiennes. Leur paramètres sont répertoriés dans le Tableau IV.6. Les douze premiers modes sont représentés dans différentes couleurs.

De la même façon, pour la gaussienne $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 UA)$, figure (e), on mesure un taux de croissance du mode $m = 7$ égal à $\gamma = 1.08$, ce qui correspond à celui mesuré précédemment. Par contre on constate la présence du mode $m = 6$ dans cette simulation, qui croît avec le même taux de croissance. Nous avons montré Figure IV.6 que le mode le plus instable est $m = 7$. Cependant le mode $m = 6$ a presque le même taux de croissance, ce qui justifie qu'il soit excité de façon comparable lorsqu'on déclenche l'instabilité par un bruit.

Dans tous les cas, on peut constater deux phases de croissance, décalées de quelques rotations. Cela est clairement visible pour la gaussienne $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.2 UA)$, figure (c). Les taux de croissance des modes présents dans cette seconde phase sont doubles de ceux des modes excités au début de l'instabilité. Cela correspond à ce que nous avons montré Section 3 sur la cascade de modes.

Il existe donc bien un couplage non linéaire entre modes. En effet, on peut remarquer la présence d'harmoniques du mode le plus excité parmi les modes présents dans cette seconde phase. C'est le cas par exemple pour la gaussienne de la figure (b). Le mode le plus excité est $m = 3$, mais les modes $m = 6$ et $m = 9$ apparaissent après 20 rotations et ont un taux de croissance double de celui de $m = 3$. On observe aussi cela pour la gaussienne de la figure (e), avec l'harmonique $m = 12$ du mode le plus instable $m = 6$, qui croît avec un taux double de ce dernier, après 5 rotations.

On retrouve donc, de façon plus complexe, le déroulement de la croissance que nous avons décrite à l'aide de modes uniques. Par contre, même si la cascade de paires harmoniques ne se déroule pas de façon identique, nous pouvons observer la présence de telles paires. Par exemple pour la gaussienne $(A, \Delta_r) = (10\%, 0.2 UA)$, figure (a), où le mode dominant est $m = 6$, la paire $5 + 1 = 6$ est excitée dans la seconde phase. De même pour la gaussienne $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 UA)$, figure (e), les modes $m = 6$ et $m = 7$ sont les plus excités. On observe la présence de la paire $5 + 9 = 14$, harmonique que $m = 7$, et la paire $8 + 10 = 18$, harmonique de $m = 6$.

Mais, si dans le cas d'un mode pur de perturbation, ce sont les paires harmoniques qui créent la cascade vers les modes les plus bas, ces derniers sont souvent déjà excités par le bruit initial. De ce fait, la chaîne de tourbillon créée par le mode le plus instable de l'IOR, excité dès le début de la simulation, est déstabilisée simultanément. La cascade se déroule de façon concomitante, ce qui explique qu'il est plus difficile d'identifier les paires harmoniques et les taux de croissance montrés précédemment dans l'étude avec un mode unique. Ce processus de cascade apparaît donc moins clairement lorsque l'instabilité est déclenchée par un bruit.

À l'issue de l'instabilité, la concurrence des modes peut conduire à des tourbillons isolés. Mais l'échelle de temps pour les obtenir dépend de l'instabilité. En effet, les taux de croissance et la valeur de saturation des modes influent sur la durée nécessaire pour obtenir des modes bas qui sont caractéristiques d'un unique tourbillon. Nous allons maintenant montrer quelle est l'évolution de la densité et de la vorticité dans ces différents cas, et comment ces instabilités peuvent former des tourbillons isolés.

4.3 Formation de tourbillons pour différentes gaussiennes

Si l'étude des modes de vorticité est importante pour comprendre le mécanisme de l'instabilité, notre intérêt astrophysique se porte sur la structure dans l'espace de la densité et de la vorticité. C'est pourquoi nous allons montrer dans le plan (r, θ) la densité relative à celle du disque et la vorticité relative au cours des différentes simulations, à deux instants distincts, $t = 20$ rotations, et $t = 95$ rotations.

La Figure IV.17 montre tout d'abord la densité des 6 simulations d'instabilité, avec la même nomenclature que décrite au Tableau IV.6, après 20 rotations. On remarque des degrés d'évolution différents, avec une densité du gaz qui dépend de la gaussienne initiale. La gaussienne $(A, \Delta_r) = (10\%, 0.3 UA)$, figure (b), ne semble presque pas perturbée. En effet, les modes sont dans leur phase de croissance à cet instant et la saturation n'est pas atteinte. Cela explique pourquoi la densité a une structure presque identique à l'instant initial. La gaussienne $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.4 UA)$, figure (f), dont le taux de croissance de l'instabilité est faible, est à peine plus évoluée, on commence à distinguer des structures isolées, mais dont l'amplitude est comparable à la valeur initiale.

Les autres simulations montrent qu'au bout de 20 rotations, l'instabilité a crée une chaîne de tourbillons, associés à des ondes spirales de densité. L'amplitude de ces tourbillons et des ondes associées dépend de la gaussienne initiale, mais est corrélée à l'amplitude de saturation des modes de vorticité. On remarque en effet que la densité est plus forte dans les cas où l'amplitude atteinte par les modes de vorticité est la plus élevée, en particulier pour la gaussienne $(A, \Delta_r) = (30\%, 0.3 UA)$, figure (e).

Après 95 rotations, l'évolution est plus nette, avec des tourbillons plus gros formés à la suite d'une succession de fusions. Les résultats sont présentés Figure IV.18. Les deux gaussiennes dont les instabilités sont les plus lentes, figure (b) et (f), ne sont pas favorables à la création de tourbillons isolés. Deux tourbillons très allongés sont malgré tout présents dans le cas (f). On remarque dans ces deux cas l'absence d'ondes spirales. Les tourbillons allongés excitent donc très peu d'ondes.

Dans les cas où la gaussienne a une amplitude $A = 20\%$, un tourbillon est formé après 95 rotations. La surdensité maximale est de 60% pour $\Delta_r = 0.2 UA$, figure (c), et de 50% pour $\Delta_r = 0.3 UA$, figure (d). Il paraît surprenant que le tourbillon issu de la gaussienne la plus large et qui contient donc le plus de masse, ait la densité la moins élevée. En fait, cela est dû à la conservation de la masse. La densité maximale est donc d'autant plus faible que l'extension du tourbillon est grande. Par contre, le tourbillon de la figure (c) excite plus d'ondes spirales que ce dernier. La taille du tourbillon n'est donc pas ce qui favorise l'émission d'ondes.

Les instabilités présentées en (a) et (e) n'ont pas encore formé un tourbillon isolé ; il ne reste qu'un couple de tourbillons résultant de la présence des modes $m = 2$ et $m = 3$ dans le disque, d'après l'analyse spectrale de la vorticité. Le mode $m = 2$ explique qu'il y ait deux tourbillons ; le mode $m = 3$ traduit la position azimutale de ce couple, l'écart entre les tourbillons étant en effet proche de $2\pi/3$ radians. On remarque que dans le cas (a), les deux tourbillons n'ont pas la même taille, ni la même densité, contrairement au cas (e).

La vorticité de ces simulations est présentée Figure IV.19, au bout de 20 rotations, et Figure

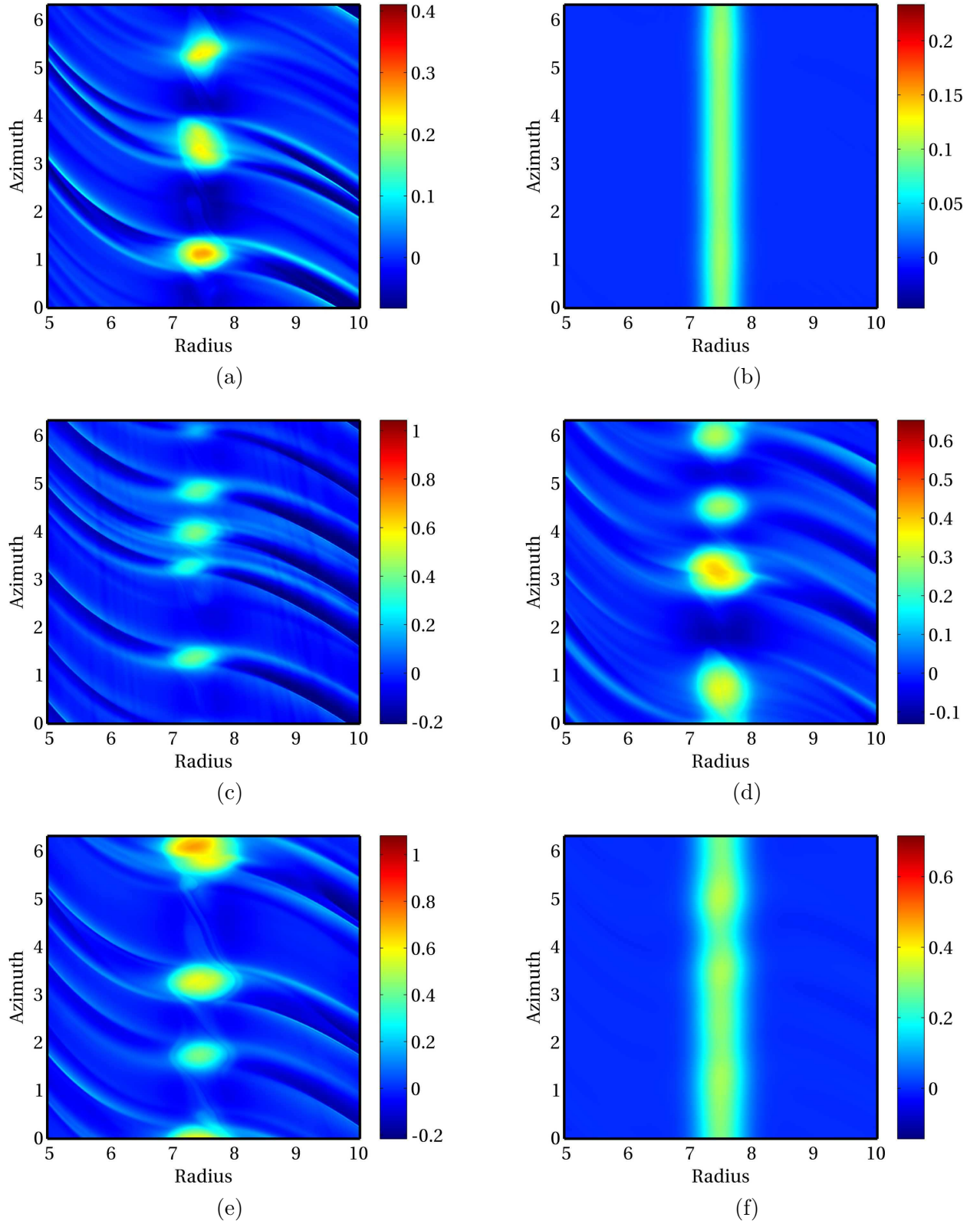


Figure IV.17 — Cartes dans le plan (r, θ) de la densité relative obtenue au bout de 20 rotations, pour différentes gaussiennes initiales. Elles sont repérées par des lettres selon la nomenclature du Tableau IV.6.

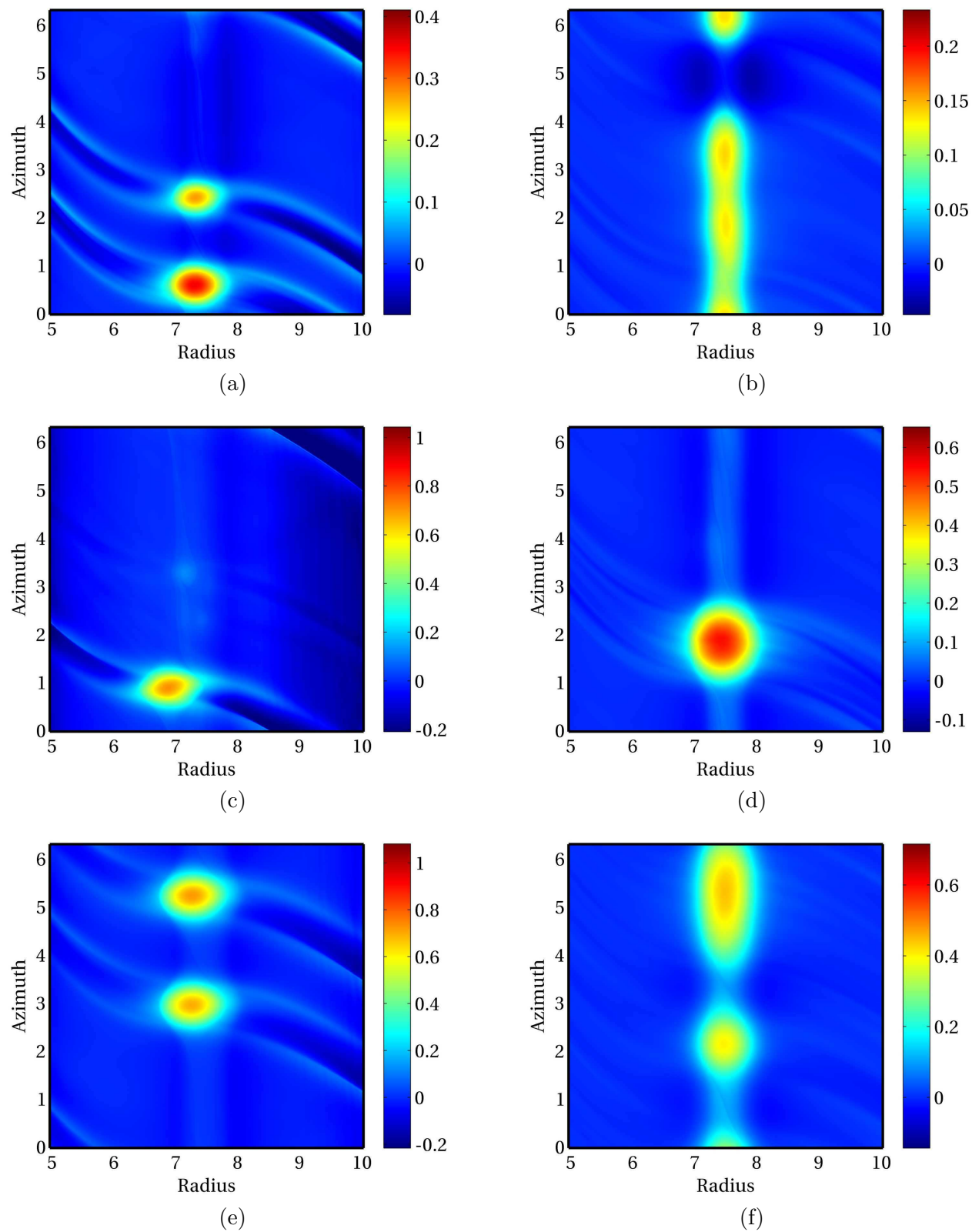


Figure IV.18 — Cartes dans le plan (r, θ) de la densité relative obtenue au bout de 95 rotations, pour différentes gaussiennes initiales. Elles sont repérées par des lettres selon la nomenclature du Tableau IV.6.

IV.20, au bout de 95 rotations. On y retrouve les mêmes structures que celles que nous avons décrites pour la densité. Cependant, on y distingue clairement les traces de la fusion des tourbillons, en particulier sur les simulations (a), (d) et (e). La vorticité minimale au coeur des tourbillons dépend de celle imposée initialement par la gaussienne. Mais on constate que le minimum de vorticité au centre des tourbillons est plus important lors des premières phases de l'instabilité. À mesure que les tourbillons fusionnent, leur vorticité minimale diminue en valeur absolue.

Cela est clairement visible après 95 rotations, et en particulier pour les simulations (c) et (d) qui ne contiennent plus qu'un seul tourbillon. Il est difficile de prédire quelle est la valeur de la vorticité à l'issue de l'instabilité et de la fusion, en fonction de celle associée à la perturbation initiale. On constate néanmoins que plus grande est la vorticité initiale, plus grande est la vorticité dans le tourbillon final. Cela provient de la conservation de l'énstrophie, qui est définie comme l'intégrale de surface sur tout le disque du carré de la vorticité :

$$\mathcal{E} = \iint_{Disque} \frac{1}{2} \omega(r, \theta)^2 r dr d\theta \quad (\text{IV.21})$$

où $\omega(r, \theta)$ est la vorticité.

La Figure IV.21 montre l'énstrophie de chaque simulation au cours du temps. On constate que dans tous les cas sauf $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.2 UA)$, cette grandeur est conservée avec un accord meilleur que 2%. Dans le cas le plus défavorable, l'erreur au bout de 100 rotations ne dépasse pas 8%, et cette valeur reste stable. On constate, de plus, que dans cette simulation, les conditions aux limites perturbent légèrement les zones extrêmes du disque, ce qui peut contribuer à l'erreur sur la mesure de l'énstrophie. Par conséquent, si l'énstrophie est conservée, cela signifie que le produit du carré de la vorticité par la surface du tourbillon est constant. En conséquence, plus le tourbillon est étendu, suite à des fusions, plus la vorticité en son coeur est faible.

L'instabilité en ondes de Rossby est donc un processus qui permet de former des tourbillons de différentes tailles et de différentes vorticités. Cependant, la marge de choix sur les conditions initiales, A et Δ_r , restreint la diversité des tourbillons que nous pouvons obtenir. Enfin, la succession de fusions ne permet pas de bien contrôler la forme finale du tourbillon ainsi formé.

4.4 Évolution et structure des tourbillons

Nous voulons maintenant étudier l'évolution au cours du temps de ces tourbillons de Rossby, afin de contraindre les modèles de disques protoplanétaires. Pour cela, nous poursuivons l'intégration temporelle sur plusieurs centaines de rotations. Les tourbillons restent-ils confinés dans la région où se déroule l'instabilité ? Sont-ils dépendants de l'instabilité ou ont-ils une évolution propre ?

Pour répondre à ces questions, nous avons suivi l'évolution d'une instabilité déclenchée par une gaussienne de paramètres $(A, \Delta_r) = (20\%, 0.3 UA)$, sur une durée de 1000 rotations. Au bout de 80 rotations, un seul tourbillon persiste dans le disque, comme nous l'avons observé dans les précédents résultats. Nous montrons ensuite l'état du disque au bout de 500 et 720 rotations Figure IV.22. Les figures (a1) et (a2) montrent la densité relative à celle du disque après 500 et 720 rotations,

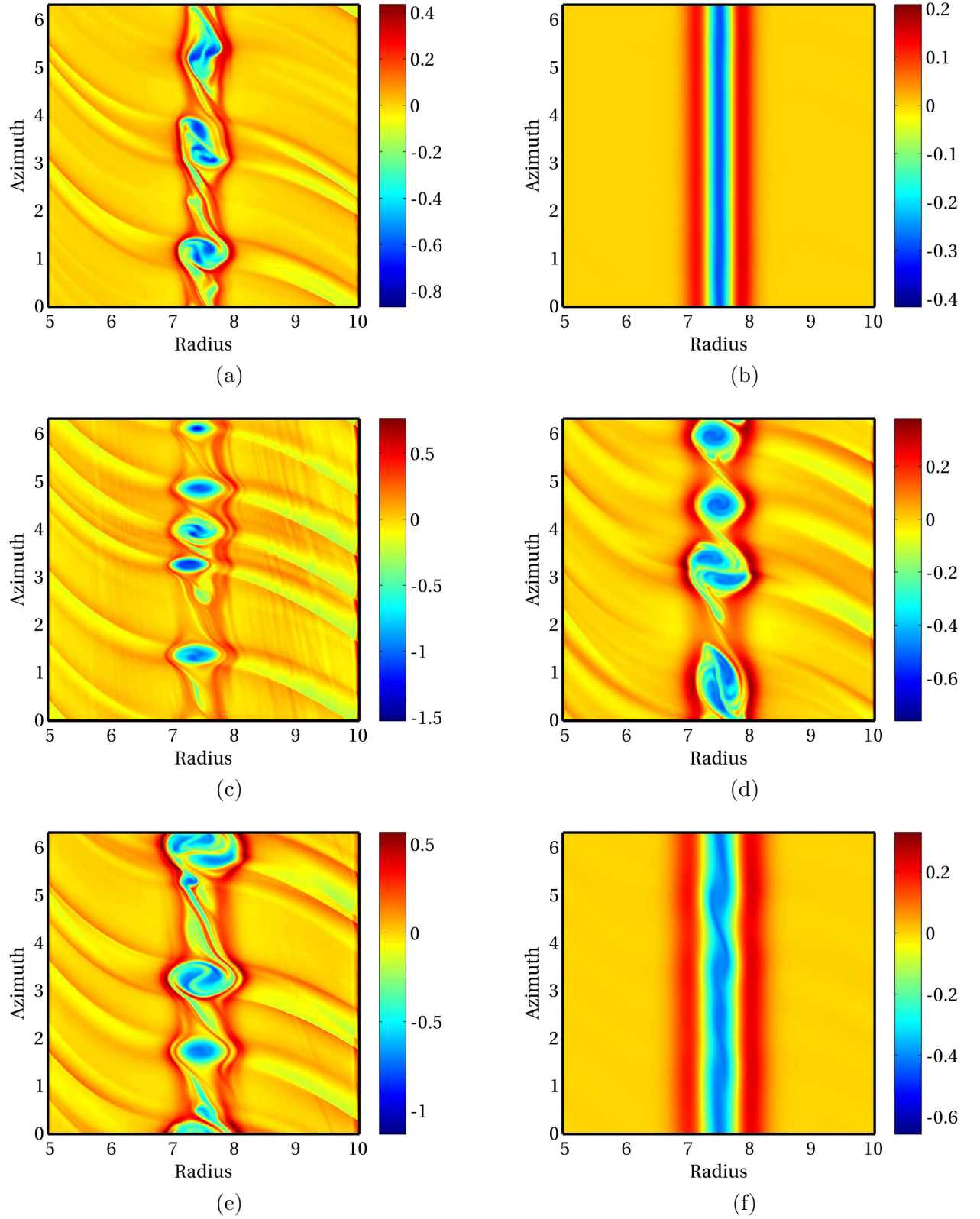


Figure IV.19 – Cartes dans le plan (r, θ) de la vorticité relative obtenue au bout de 20 rotations, pour différentes gaussiennes initiales. Elles sont repérées par des lettres selon la nomenclature du Tableau IV.6.

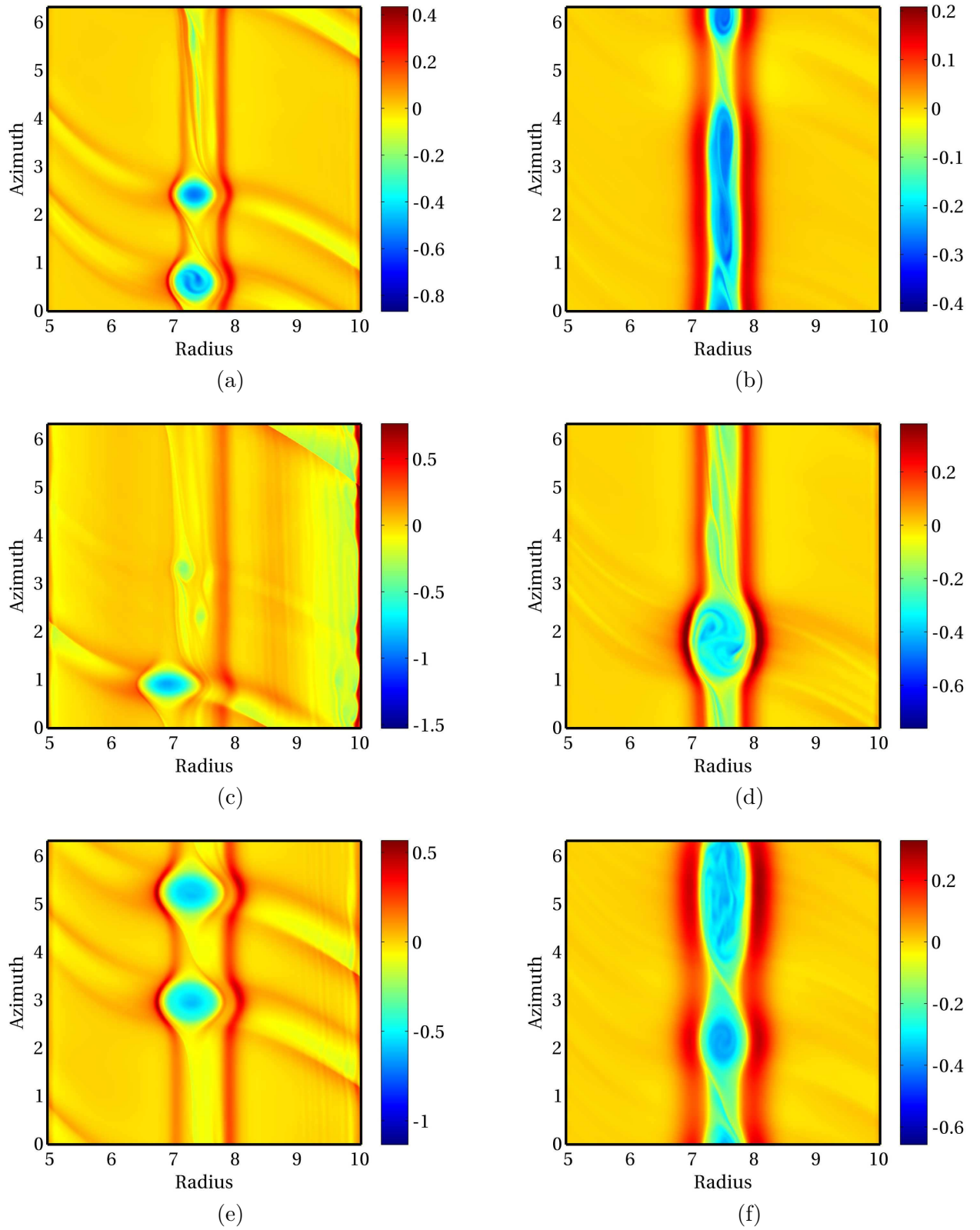


Figure IV.20 — Cartes dans le plan (r, θ) de la vorticité relative obtenue au bout de 95 rotations, pour différentes gaussiennes initiales. Elles sont repérées par des lettres selon la nomenclature du Tableau IV.6.

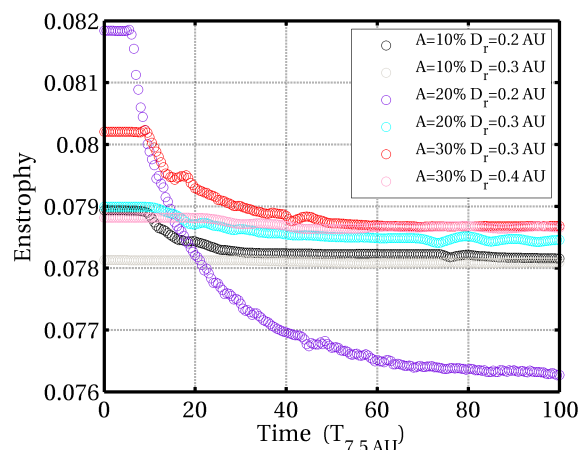


Figure IV.21 — Évolution au cours du temps de l'entrophie définie par l'équation IV.21, dans les différents cas. Les couleurs correspondent aux différentes conditions initiales. La conservation de l'entrophie sur 100 rotations est de l'ordre de 5%.

respectivement. Nous montrons la vorticité relative à celle du disque après 500 et 720 rotations, figures (b1) et (b2), respectivement. Sur chaque carte, nous avons superposé en noir des lignes de courant qui permettent de visualiser la forme de l'écoulement dans ces structures.

Que ce soit en considérant les profils de densité ou de vorticité, on remarque tout d'abord que la forme du tourbillon et l'amplitude de la perturbation en son coeur sont conservées au cours du temps. La structure des lignes de courant est elle aussi conservée. On observe un écoulement anti-cyclonique dans le coeur du tourbillon, avec des lignes de courant qui suivent les lignes d'isodensité. Dans les ondes spirales excitées par le tourbillon, l'écoulement a une circulation de l'intérieur vers l'extérieur du disque, dans le bras situé aux plus grands azimuts, et de l'extérieur vers l'intérieur du disque, dans le bras situé aux plus faibles azimuts. Il y a donc un transport de matière et d'énergie dans les ondes.

Ce transport peut être responsable d'une redistribution de moment cinétique dans le disque, qui mène à une migration du site excitateur des ondes, comme c'est le cas pour les planètes (Tanaka, 2002 [15]). On observe en effet un changement de l'orbite du tourbillon entre l'état après 500 rotations, et celui après 720 rotations. La position du tourbillon au bout de 500 rotations est à $r = 7.1 UA$, ce qui est déjà inférieur à la position initiale de l'instabilité ($r = 7.5 UA$). Au bout de 720 rotations, le tourbillon se trouve à une orbite de $r = 6.3 UA$. On remarque qu'il est en dehors de la zone de vorticité induite par l'instabilité, qui est bornée par les deux bandes de vorticité relative positive à 7 et 8 UA visibles sur la figure (b1). Au bout de 1000 rotations, le tourbillon entre en contact avec le bord interne du disque et il s'estompe ensuite à cause des conditions aux limites absorbantes de la simulation.

Ces résultats sont confirmés lorsque l'on étudie les coupes des grandeurs physiques au centre du tourbillon. Nous avons mesuré la vitesse radiale, la vitesse azimutale, la densité, la pression et la vorticité au centre d'un tourbillon, pour deux instants différents. La Figure IV.23 (a) montre la

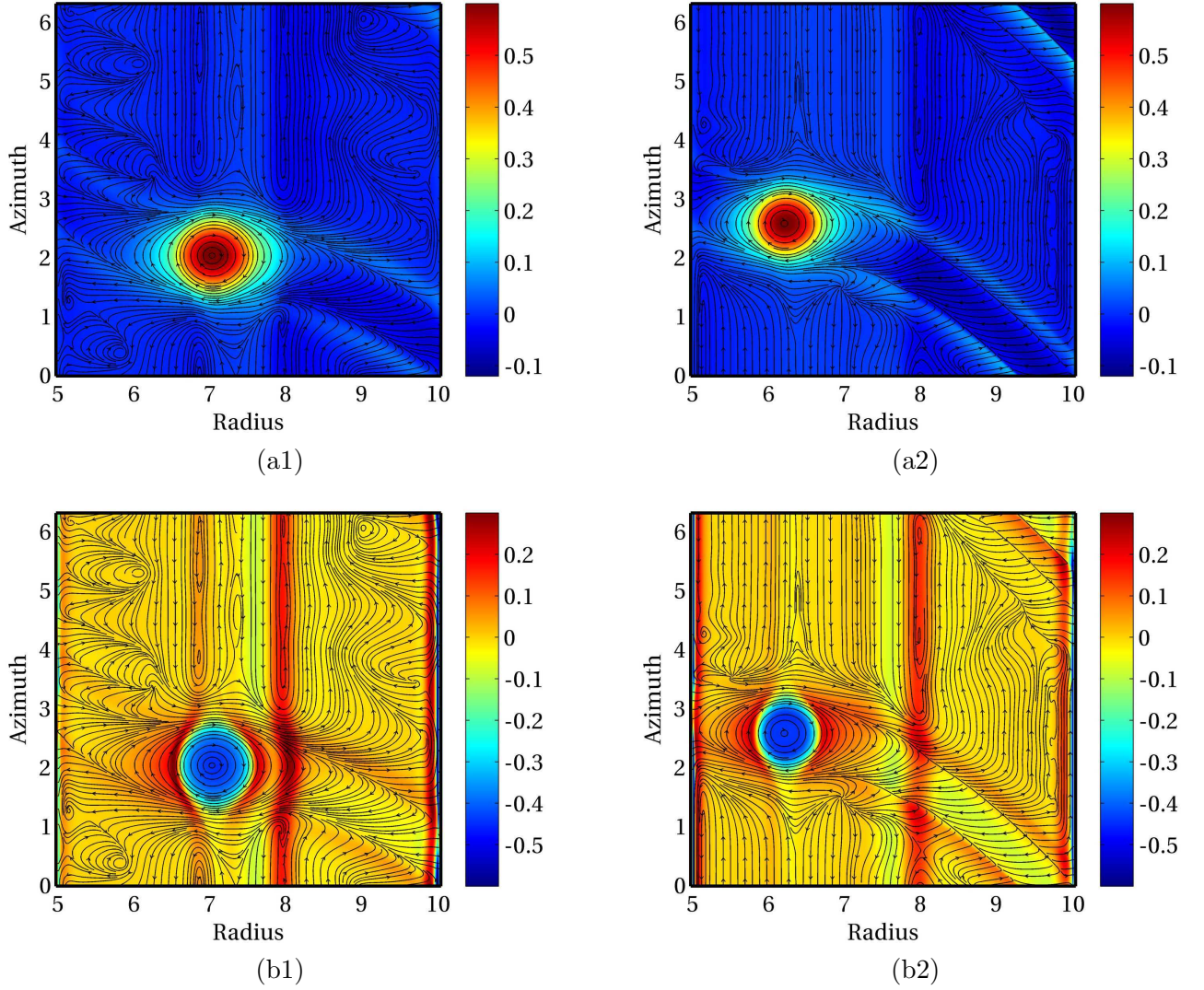


Figure IV.22 – Cartes de la densité relative d'un tourbillon obtenu par l'instabilité d'une gaussienne de paramètres $(A, \Delta r_r) = (20\%, 0.3 UA)$ après 500 rotations (a1) et 720 rotations (a2). La vorticité relative correspondante est montrée en dessous, figures (b1) et (b2). Sur chaque carte, des lignes de courant sont représentées en noir, indiquant la structure de l'écoulement dans le coeur du tourbillon et dans les ondes spirales.

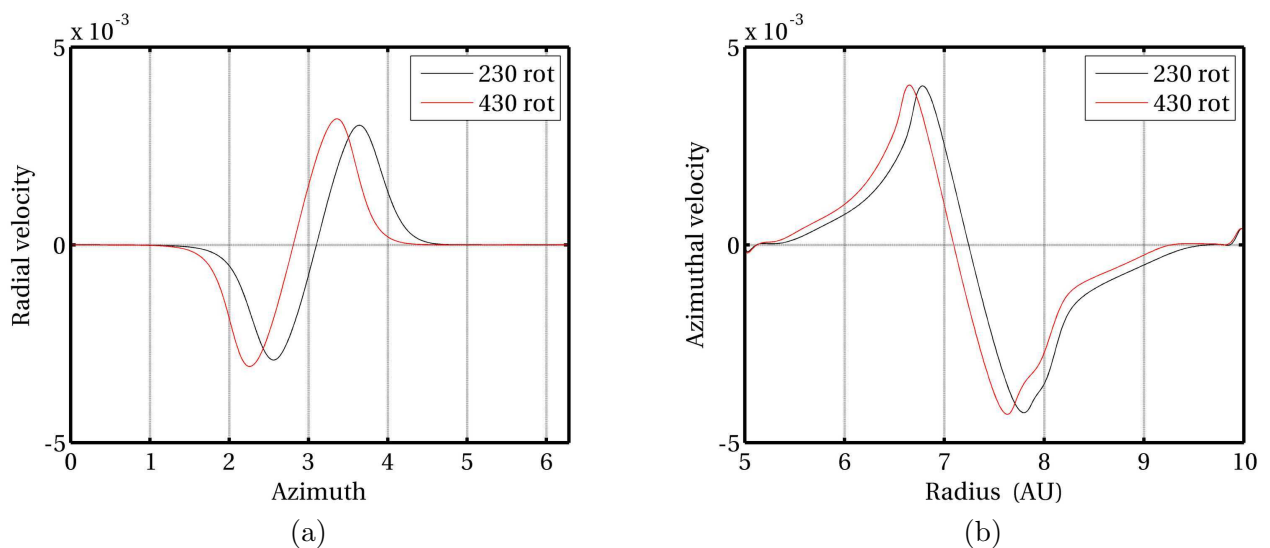


Figure IV.23 – Coupe azimuthale de la vitesse radiale, figure (a), d'un tourbillon obtenu par l'IOR, après 230 et 430 rotations en noir et en rouge respectivement. La figure (b) montre de la même façon les coupes radiales de la vitesse azimuthale du tourbillon, c'est-à-dire en retranchant la composante sub-képlérienne du reste du disque (coupes effectuées au centre du tourbillon).

vitesse radiale en fonction de l'azimut au rayon r_0 du centre du tourbillon. On observe une région linéaire près de l'azimut $\theta = 3$, puis un raccordement au reste du disque où la vitesse radiale est nulle. On remarque que ce profil est très semblable au bout de 230 rotations (en noir) et au bout de 430 rotations (en rouge). La figure (b) représente la vitesse azimuthale à laquelle est retranchée celle du disque $V_0(r)$, afin de distinguer la composante due au tourbillon. Cette coupe radiale est centrée à l'azimut θ_0 du centre du tourbillon. Ce profil de vitesse est similaire à celui de la vitesse radiale, avec une zone linéaire qui se raccorde au reste du disque de façon continue. Au cours du temps, les pentes des régions linéaires, ainsi que les extrema des vitesses sont conservés, que ce soit pour la vitesse radiale ou azimuthale. On remarque un décalage du profil de vitesse azimuthale de $0.2 UA$ vers l'intérieur du disque, ce qui traduit une migration du tourbillon selon un mécanisme qui sera décrit au Chapitre 6.

Les profils de densité relative et de pression relative à celles du disque sont donnés Figure IV.24 et Figure IV.25 respectivement. La figure (a) montre une coupe dans la direction radiale centrée sur l'azimut du centre du tourbillon, et la figure (b) montre une coupe dans la direction azimuthale centrée sur le rayon du centre du tourbillon.

La densité maximale au centre du tourbillon est de 60% celle du disque, valeur qui reste constante au cours du temps, même après plus de 400 rotations. La largeur de la surdensité que ce soit dans la direction radiale, ou azimuthale, semble être aussi constante. La pression maximale au centre est de 84%, valeur elle aussi constante dans le temps. On constate que le maximum de pression est supérieur au maximum de densité relative. Or, dans les conditions initiales de l'instabilité, la gaussienne est isotherme, ce qui signifie que les maxima relatifs de pression et de densité y sont égaux.

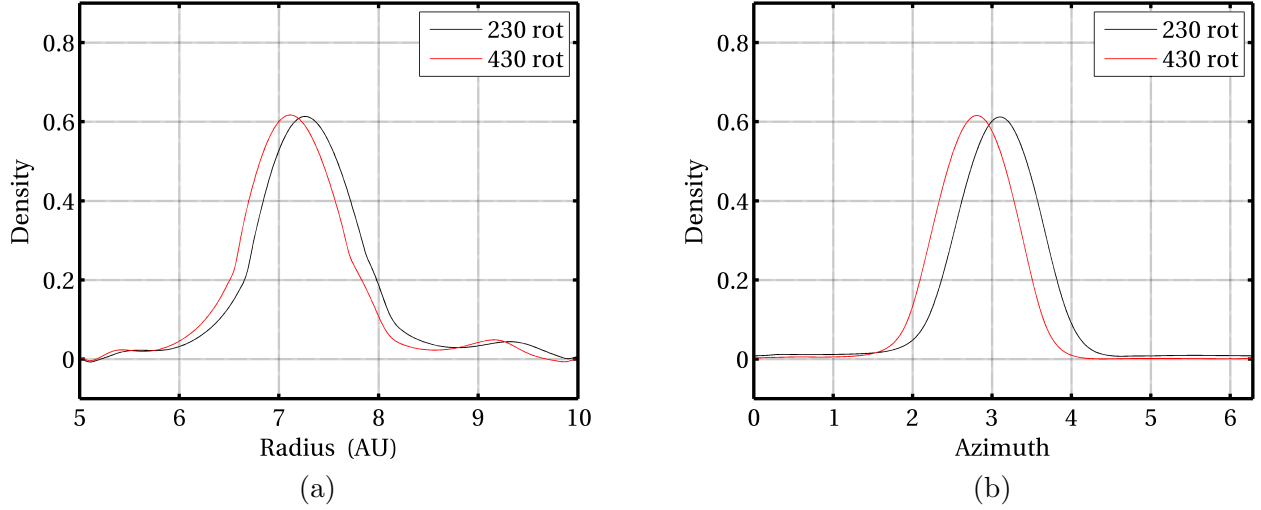


Figure IV.24 – Coupe radiale de la densité relative, figure (a), d'un tourbillon obtenu par l'IOR, après 230 et 430 rotations en noir et en rouge respectivement. La figure (b) montre de la même façon les coupes azimutales effectuées à ces différents instants au centre du tourbillon.

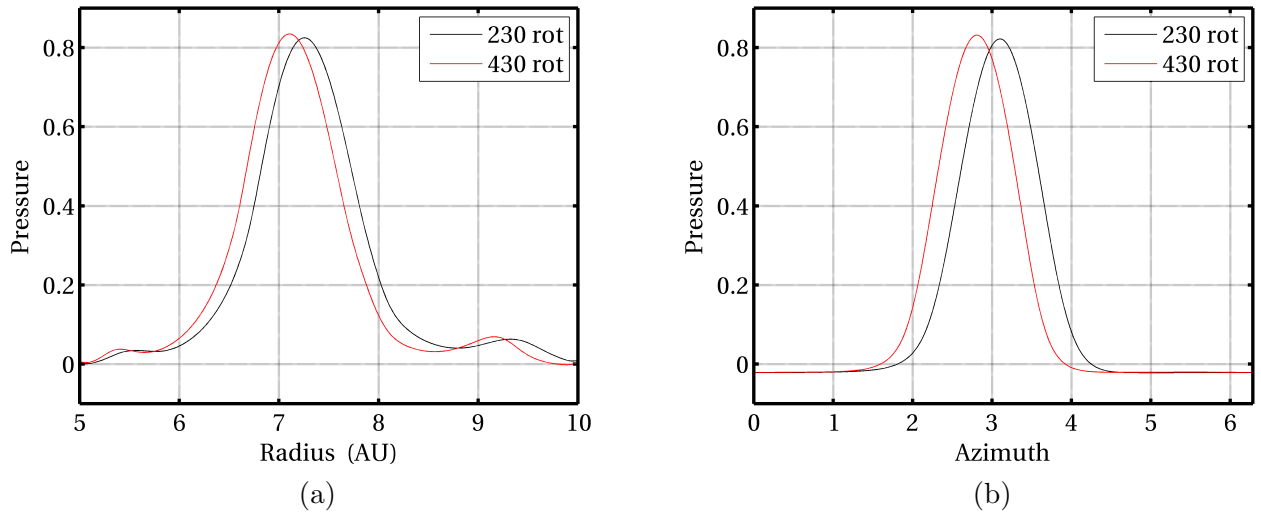


Figure IV.25 – Coupe radiale de la pression relative, figure (a), d'un tourbillon obtenu par l'IOR, après 230 et 430 rotations en noir et en rouge respectivement. La figure (b) montre de la même façon les coupes azimutales effectuées à ces différents instants au centre du tourbillon.

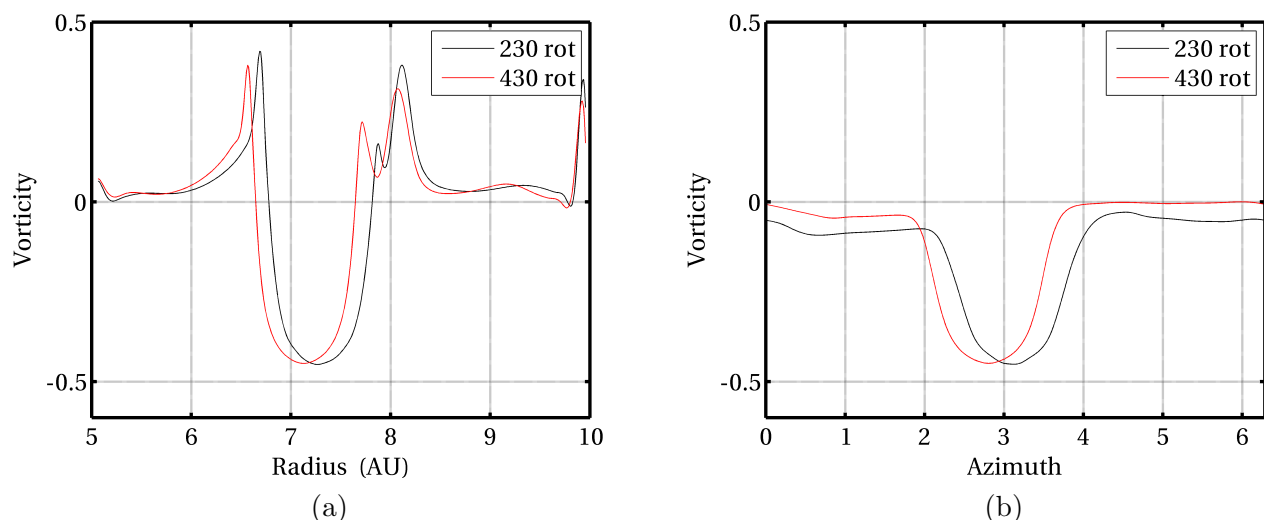


Figure IV.26 — Coupe radiale de la vorticité relative, figure (a), d'un tourbillon obtenu par l'IOR, après 230 et 430 rotations en noir et en rouge respectivement. La figure (b) montre de la même façon les coupes azimutales effectuées à ces différents instants au centre du tourbillon.

On met ici en évidence que suite au déroulement de l'instabilité, et à cause de l'état adiabatique du gaz, le tourbillon devient une structure où la température est supérieure à celle du disque. Il y a un échauffement adiabatique lors de l'instabilité. Si l'on considère un gaz polytropique, on écrit $P \propto \sigma^\gamma$. Ici si l'on effectue un simple raisonnement qualitatif, on peut retrouver que :

$$\sigma_{max}^{1.3} = P_{max} \quad (\text{IV.22})$$

$$\text{Soit} \quad (1 + 0.6)^{1.3} = 1 + 0.84 \quad (\text{IV.23})$$

ce qui justifie que les maxima des valeurs relatives de la densité et de la pression sont en accord avec le comportement adiabatique du gaz, même si on pouvait s'attendre à un exposant $\gamma = 1.4$, qui est l'indice polytropique d'un gaz adiabatique. Ensuite, la température est conservée puisque le profil de pression et de densité sont constants au cours du temps.

La densité et la pression présentent également un profil proche d'une gaussienne, dans la direction radiale, comme dans la direction azimutale. Il semble que le tourbillon soit une solution simple des équations non linéaires. Les paramètres de largeur de cette gaussienne dans les directions radiale et azimutale semblent être constants au cours du temps. Mais nous devons confirmer cela en étudiant de nombreux tourbillons différents, ce qui est difficile car l'IOR ne crée pas une grande diversité de tourbillons.

Le profil de vorticité présente lui aussi une forme plutôt en bosse, comme on peut le voir Figure IV.26, qui présente la vorticité relative à celle du disque. La figure (a) montre une coupe radiale, et la figure (b) une coupe azimutale, positionnées sur le centre du tourbillon. Le minimum de la vorticité semble conservé au cours du temps, de même que la géométrie de ce puits de vorticité.

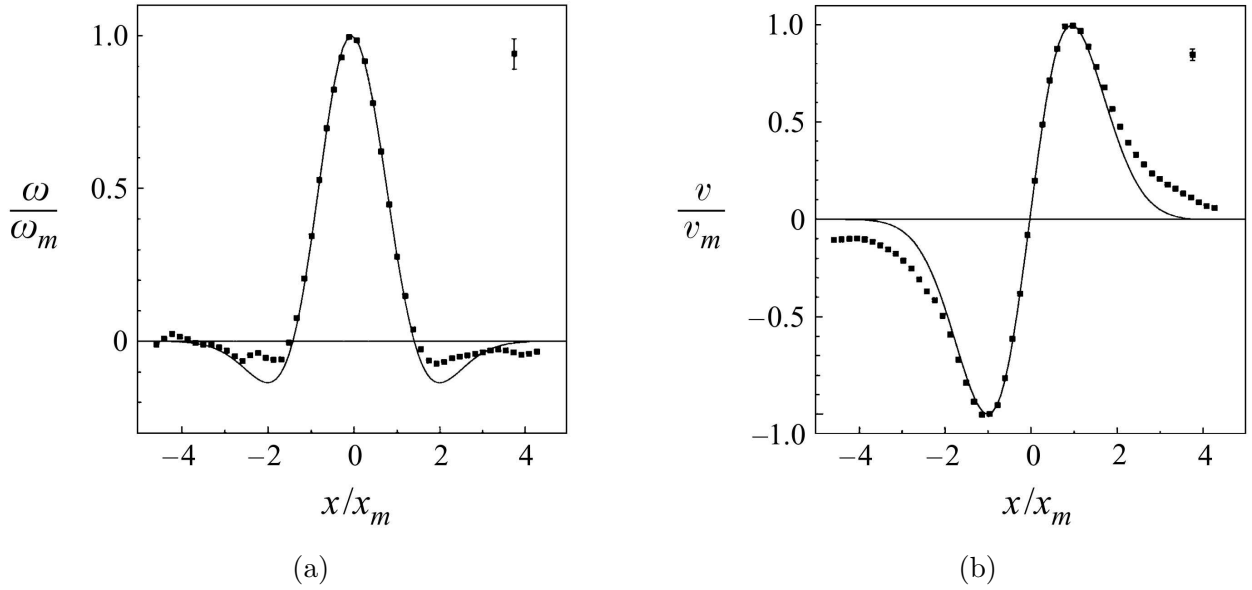


Figure IV.27 — Mesures expérimentales (carrés) de la vorticité normalisée, figure (a) et de la vitesse normalisée, figure (b), obtenues dans un tourbillon. Les traits pleins représentent les valeurs données par un modèle gaussien qui s'ajuste aux données. Extrait de Treiling, 1997 [16].

On remarque que le minimum est négatif, ce qui traduit le caractère anticyclonique du tourbillon, mais aussi deux pics de vorticité positive de part et d'autre de la région négative, dans la direction radiale. Ces deux pics ne sont pas présents sur la coupe azimutale, figure (b).

Il est très intéressant de confronter nos constatations sur cette solution numérique avec des résultats expérimentaux, obtenus par Treiling, 1997 [16]. Les auteurs étudient la structure de tourbillons créés par un écoulement complexe mais où la vorticité et la vitesse du fluide varient avec la distance. Nous renvoyons le lecteur à cet article pour plus de détails. Malgré la différence d'écoulement, la grande similitude de la structure du tourbillon obtenu est frappante. Nous montrons Figure IV.27 les mesures de vorticité et de vitesse obtenues dans cette expérimentation. La vorticité (a) est positive, mais présente un profil similaire à celui de nos simulations, y compris les deux pics de signe opposé à celui de l'extremum. La vitesse dans le tourbillon, qui équivaut à une vitesse radiale, a le même type de profil que ceux présentés Figure IV.23. Les points correspondent aux mesures expérimentales, alors que les courbes noires sont des lissages gaussiens. Ils constatent que la structure de ces tourbillons expérimentaux sont proches d'une gaussienne et que la vitesse et la vorticité mesurées sont compatibles avec un tel modèle. Les auteurs ne détaillent pas ce modèle mais il semble qu'il s'agisse d'un ajustement des données. Il n'y a pas de modèle analytique sous-jacent développé par les auteurs.

Les résultats de nos simulations de l'IOR, ainsi que les mesures expérimentales soulèvent la possibilité d'avoir une solution proche d'une gaussienne pour décrire les tourbillons. Nous devons mettre en évidence cette solution, afin d'étudier tous les profils possibles dans les disques et leur évolution au cours du temps.

5 Conclusions

Nous avons mené une étude numérique de l'Instabilité en Ondes de Rossby qui met en évidence différents aspects de la complexité de ce phénomène. La croissance des modes lors de la phase linéaire est en réalité non linéaire et des modes harmoniques sont excités. Le taux de croissance de ces harmoniques est proportionnel à celui du mode principal qui excite l'instabilité. Cela est dû à notre résolution des équations d'Euler non linéaires, et non de leur écriture linéarisée. Par conséquent, les termes non linéaires de ces équations ont un rôle, même lors de la croissance de l'instabilité.

À l'issue de la croissance d'un mode unique, la saturation forme une chaîne de vorticité, déjà montrée par les études précédentes. Cependant, la saturation de ce mode et de ses harmoniques donne naissance à une seconde instabilité que l'on a appelé *cascade*, qui est l'instabilité de cette chaîne, sous certaines conditions. Cette cascade crée, via la croissance de paires de modes harmoniques, des modes absents de la condition initiale. La création de ces paires conduit à des modes de plus en plus bas. La croissance des paires est proportionnelle, de façon asymptotique au nombre de tourbillons de la chaîne, c'est-à-dire au mode principal issu de la saturation de l'IOR. Cette croissance ne se produit pas pour un mode perturbatif inférieur à $m = 4$. On peut donc supposer qu'une structure proche d'une chaîne de tourbillons, contenant très peu de modes différents, et constituée d'une somme d'harmoniques d'un mode m , est instable dans les disques, à condition que le mode dominant soit plus grand que $m = 4$. Ce critère semble indépendant de la fonction gaussienne initiale, et par conséquent de la fonction $\mathcal{L}$ de l'instabilité en onde de Rossby. Enfin, les taux de croissance des paires harmoniques lors de la cascade sont indépendants du taux de croissance du mode principal de l'IOR. Cela montre que la cascade des modes qui caractérise l'instabilité de la chaîne est un type d'instabilité en ondes de Rossby, mais dans un profil initial très diff rent, non axisymétrique, ce qui change les taux de croissance.

Ce mécanisme non linéaire est dans une moindre mesure toujours présent lorsque l'instabilité en ondes de Rossby est déclenchée par un bruit contenant tout un spectre de modes. Les modes les plus instables sont excités de même que certains harmoniques et paires harmoniques. Le mécanisme de cascade est présent simultanément, et déstabilise la chaîne formée par le mode le plus instable de l'IOR en même temps que l'IOR se développe et sature. On a alors la création de modes de plus en plus bas, et les tourbillons de la chaîne fusionnent au bout d'un temps d'autant plus court que l'instabilité est forte. Un unique tourbillon peut alors être formé dont la taille et la force, c'est-à-dire la vorticité, dépendent également de la condition initiale.

Il n'y a pas de fixation du tourbillon dans la région où l'instabilité s'est déroulée, et on observe un mouvement propre de cette structure, qui conserve visiblement sa forme et sa force, que ce soit en densité ou en vorticité. La structure du champ de vitesses, de la densité, de la pression et de la vorticité montre un profil simple, du moins dans la région centrale du tourbillon, qui s'apparente à une gaussienne. Les résultats expérimentaux de Treiling menés en laboratoire montrent également un tel profil. Cela fait penser que la structure d'un tourbillon est universelle et peu dépendante du mécanisme de formation. Pour finir, une migration radiale du tourbillon est présente dans certains

cas, ce qui reste à expliquer.

Quelle est précisément la forme du champ des vitesses, de la densité, de la pression et de la vortacité des tourbillons ? Quelles sont les formes possibles et viables dans le disque ? Quelle est l'influence de la structure du tourbillon sur la migration que l'on observe ? Quel est le moteur de cette migration ? Ce sont les questions que l'étude de l'instabilité en ondes de Rossby soulève et auxquelles nous voulons apporter des éléments de réponse.

Pour cela nous devons pallier l'usage de l'instabilité et trouver un modèle de type gaussien qui permette de déterminer les conditions initiales suffisantes pour obtenir un tourbillon dès les premières rotations du disque. Cela permettra de contrôler la géométrie et la force de ces tourbillons et d'en analyser la structure et la dynamique au cours du temps. Tels sont les buts des prochains chapitres de ce travail.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ENDAL, A. S., AND SOFIA, S. The evolution of rotating stars. II - Calculations with time-dependent redistribution of angular momentum for 7- and 10-solar-mass stars. *The Astrophysical Journal* 220, 1 (Feb. 1978), 279. [104](#)
- [2] INABA, S., AND BARGE, P. Dusty Vortices in Protoplanetary Disks. *The Astrophysical Journal* 649, 1 (2006), 415. [133](#)
- [3] LI, H., COLGATE, S. A., WENDROFF, B., AND LISKA, R. Rossby wave instability of thin accretion disks. III. Nonlinear simulations. *The Astrophysical Journal* 551, 2 (2001), 874–896. [107](#), [118](#)
- [4] LI, H., FINN, J. M., LOVELACE, R. V. E., AND COLGATE, S. A. Rossby wave instability of thin accretion disks. II. Detailed linear theory. *The Astrophysical Journal* 533, 2 (2000), 1023–1034. [103](#), [107](#)
- [5] LIN, M.-K. Non-barotropic Linear Rossby wave Instability in Three-dimensional Disks. *The Astrophysical Journal* 765, 2 (Mar. 2013), 84. [133](#)
- [6] LOVELACE, R. V. E., AND HOHLFELD, R. G. Rossby wave instability with self-gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 429, 1 (Dec. 2012), 529–533. [108](#)
- [7] LOVELACE, R. V. E., LI, H., COLGATE, S. A., AND NELSON, A. F. Rossby wave instability of Keplerian accretion disks. *The Astrophysical Journal* 513, 2 (1999), 805–810. [103](#)
- [8] LYRA, W., JOHANSEN, A., ZSOM, A., KLAHR, H., AND PISKUNOV, N. Planet formation bursts at the borders of the dead zone in 2D numerical simulations of circumstellar disks. *Astronomy & Astrophysics* 497, 3 (Apr. 2009), 869–888. [133](#)
- [9] MEHEUT, H., CASSE, F., VARNIERE, P., AND TAGGER, M. Rossby wave instability and three-dimensional vortices in accretion disks. *Astronomy & Astrophysics* 516 (June 2010). [133](#)
- [10] MEHEUT, H., KEPPENS, R., CASSE, F., AND BENZ, W. Formation and long-term evolution of 3D vortices in protoplanetary discs. *Astronomy & Astrophysics* 542 (May 2012), A9. [133](#)
- [11] MEHEUT, H., LOVELACE, R. V. E., AND LAI, D. How strong are the Rossby vortices? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 430, 3 (Feb. 2013), 1988–1993. [109](#), [110](#)

- [12] OGILVIE, G. I. Accretion discs. In *Fluid Dynamics and Dynamos in Astrophysics and Geophysics*, A. M. Soward, C. A. Jones, D. W. Hughes, and N. O. Weiss, Eds. CRC Press, Boca Raton, USA, 2005, pp. 20–47. [106](#)
- [13] SHEEHAN, D. P., DAVIS, S. S., CUZZI, J. N., AND ESTBERG, G. N. Rossby Wave Propagation and Generation in the Protoplanetary Nebula. *Icarus* 142, 1 (Nov. 1999), 238–248. [107](#)
- [14] TAGGER, M. On Rossby waves and vortices with differential rotation. *Astronomy & Astrophysics* 380, 02 (Dec. 2001), 750–757. [107](#)
- [15] TANAKA, H., TAKEUCHI, T., AND WARD, W. R. Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *The Astrophysical Journal* 565, 2 (Feb. 2002), 1257–1274. [143](#)
- [16] TRIELING, R. R., BECKERS, M., AND VANHEIJST, G. J. F. Dynamics of monopolar vortices in a strain flow. *Journal of Fluid Mechanics* 345 (1997), 165–201. [148](#)
- [17] UMURHAN, O. M. Potential vorticity dynamics in the framework of disk shallow-water theory. *Astronomy & Astrophysics* 521 (Oct. 2010). [106](#)
- [18] VARNIÈRE, P., AND TAGGER, M. Reviving Dead Zones in accretion disks by Rossby vortices at their boundaries. *Astronomy & Astrophysics* 446, 2 (Feb. 2006), L13–L16. [118](#)

STRUCTURE ET STABILITÉ DES TOURBILLONS

L'étude de l'instabilité de Rossby a permis de montrer que des tourbillons de grande taille peuvent exister durant plusieurs centaines de rotations dans le disque. Cependant, nous ne pouvons pas savoir quels sont tous les tourbillons possibles, car ceux que l'on obtient dépendent des conditions initiales qui ont permis de déclencher l'instabilité. Pour aller plus en profondeur dans leur étude, nous voulons nous passer de l'instabilité et imposer des conditions initiales permettant d'obtenir un tourbillon directement. Cela permet aussi de se détacher du choix d'une instabilité et de proposer une étude plus générale, incluant des tourbillons formés par d'autre processus.

Comment décrire précisément leur structure en densité et en pression, le champ de vitesse en leur coeur ? Ces données sont importantes pour pouvoir prédire le comportement de particules à l'intérieur et étudier la croissance du matériau solide. Mais il est également crucial de savoir combien de temps peuvent survivre ces structures, comment évoluent au cours du temps leur densité, leur pression et leurs vitesses. C'est l'objectif de ce chapitre.

Dans cette partie, nous présenterons les modèles de tourbillon existants, leurs avantages et leurs défauts. Puis, nous montrerons le modèle que nous avons développé et en quoi il diffère des précédents. Ensuite, nous présenterons les résultats numériques qui confirment la validité de notre modèle et différents résultats analytiques que nous pouvons confirmer numériquement. Nous décrirons également les gammes possibles de forme et de force que les tourbillons peuvent couvrir. Enfin, nous distinguerons les familles qui permettent de les classer en mettant en avant certaines caractéristiques de densité ou de vitesse.

1 Les différents modèles de tourbillons

Les tourbillons sont des structures qui ont un grand intérêt en hydrodynamique. Ils apparaissent dès que l'écoulement d'un fluide est irrotationnel. Leur étude détaillée a commencé il y a plus d'un siècle et demi avec les travaux de Helmholtz. Une monographie qui fait l'état des lieux de l'étude de la vorticité dans les fluides incompressibles et non visqueux due à Saffman est à la base des modèles de tourbillons utilisés dans le cadre de l tude des disques (Saffman, 1992 [21]). Dans cette

approche, on considère une zone où les parcelles de fluide décrivent des ellipses concentriques. Les deux principaux modèles qui en découlent sont celui décrit par Kida, 1981 [13], et celui décrit par Goodman, Narayan et Goldreich, 1987 [11], dans la suite GNG.

1.1 Le modèle de Kida

Le modèle de Kida donne une solution exacte de tourbillon quand on se place dans un écoulement incompressible de vorticité et de densité constante. Considérons un repère cartésien. Un tourbillon elliptique dont les axes sont alignés sur le repère et dont le centre est à l'origine, est défini par le système suivant :

$$x(t) = a \cos(\Omega_v t) \quad (\text{V.1})$$

$$y(t) = a\chi \sin(\Omega_v t) \quad (\text{V.2})$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées d'une parcelle de fluide, a et χ sont respectivement la largeur et le rapport d'aspect, et Ω_v est la vitesse angulaire de rotation autour du centre du tourbillon. Le champ de vitesse est alors obtenu par différenciation sur le temps :

$$V_x(t) = a\Omega_v \sin(\Omega_v t) = \Omega_v y(t)/\chi \quad (\text{V.3})$$

$$V_y(t) = -a\chi\Omega_v \cos(\Omega_v t) = -\Omega_v x(t)\chi \quad (\text{V.4})$$

Le champ de vitesse est donc *linéaire dans le tourbillon*. On peut vérifier que la condition d'incompressibilité $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ est respectée. On obtient alors sa vorticité propre $\omega_v = \vec{\nabla} \times \vec{V}$:

$$\omega_v = -\frac{1 + \chi^2}{\chi} \Omega_v \quad (\text{V.5})$$

Ce sont là les fondements du modèle elliptique de Kida qui a été récemment utilisé dans l'étude des disques protoplanétaires. Dans l'étude publiée, il est en réalité décrit la déformation et la rotation d'un tel tourbillon elliptique dans un repère fixé. Ce tourbillon est au centre de l'écoulement, ce qui n'est pas le cas pour les disques protoplanétaires. C'est pourquoi le nom de Kida est plutôt associé au modèle elliptique, bien qu'en réalité dans son *Hydrodynamics*, Lamb, 1932 [15] et plus tard, Moore, 1975 [19] abordent déjà ce sujet.

Si l'on se place dans un repère cartésien tournant avec le disque protoplanétaire à un rayon r_0 , on peut localement reproduire le modèle de Kida. Cependant l'écoulement est maintenant cisailé. C'est l'approche de la couche cisailée, dite "shearing sheet", qui est utilisée par Goodman, Narayan et Goldreich.

1.2 Le modèle de GNG

C'est un modèle plus évolué et assez bien adapté aux disques protoplanétaires, car il tient compte de la variation de la densité à l'intérieur du tourbillon. Cependant, la densité est supposée

globalement constante dans le disque. On peut définir l'enthalpie $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} = (n+1)K\sigma^{1/n} \quad (\text{V.6})$$

avec K une constante et n l'indice polytropique. Dans l'approche cartésienne locale "shearing sheet" autour d'une orbite située à r_0 de l'étoile, on peut alors établir le système d'équations d'évolution, qui sont l'équation de continuité où l'on a remplacé σ en fonction de $\mathcal{Q}$ et les équations d'évolution des vitesses (V_x, V_y) :

$$\partial_t \mathcal{Q} + V_x \partial_x \mathcal{Q} + V_y \partial_y \mathcal{Q} + \frac{\mathcal{Q}}{n} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{V.7})$$

$$\partial_t V_x + V_x \partial_x V_x + V_y \partial_y V_x = -2\beta_\Omega \Omega_0^2 x + 2\Omega_0 V_y - \partial_x \mathcal{Q} \quad (\text{V.8})$$

$$\partial_t V_y + V_x \partial_x V_y + V_y \partial_y V_y = -2\Omega_0 V_x - \partial_y \mathcal{Q} \quad (\text{V.9})$$

Le repère cartésien local de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ tourne à la vitesse angulaire constante Ω_0 autour de l'étoile, et l'écoulement est linéairement cisailé, avec $\beta_\Omega = -3/2$ dans le cas des disques képlériens. Le vecteur $\vec{e}_x$ est dans la direction radiale, et le vecteur $\vec{e}_y$ est dans la direction azimuthale. On trouve une description précise de l'approche "shearing sheet" dans l'article de Umurhan, 2004 [24].

Si l'on prend une vitesse $V_x = 0$, alors la vitesse stationnaire V_y associée à un écoulement laminaire stationnaire est $V_y = \beta_\Omega \Omega_0 x$, qui est légèrement différente de la vitesse képlérienne $V_{kep}(r)$. Cette expression provient de la linéarisation du terme $r\Omega_{kep}^2(r) - r\Omega_0^2$, où $\Omega_{kep}(r) = \Omega_0 (r/r_0)^{\beta_\Omega}$ est la vitesse angulaire képlérienne.

Si l'on cherche une solution avec un champ de vitesse elliptique, comme celui de Kida, on peut trouver une solution stationnaire, qui résolve les trois équations ; cette solution est de la forme :

$$V_x = \eta \Omega_0 y / \chi \quad (\text{V.10})$$

$$V_y = -\eta \Omega_0 x \chi \quad (\text{V.11})$$

où η paramétrise la vitesse angulaire propre du tourbillon en fonction de Ω_0 . On se ramène donc à la notation de Kida par $\Omega_v = \eta \Omega_0$.

De ce fait l'équation de continuité se ramène $V_x \partial_x \mathcal{Q} + V_y \partial_y \mathcal{Q} = 0$, puisque le champ de vitesse de Kida est sans divergence, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Les équations des vitesses nous donnent alors :

$$\partial_x \mathcal{Q} = (-2\beta_\Omega - 2\chi\eta + \eta^2) \Omega_0^2 x \quad (\text{V.12})$$

$$\partial_y \mathcal{Q} = \left(-\frac{2}{\chi}\eta + \eta^2\right) \Omega_0^2 y \quad (\text{V.13})$$

Il suffit de les insérer dans ce qui reste de l'équation de continuité pour obtenir que $\eta =$

$\sqrt{-2\beta_\Omega}/\sqrt{\chi^2 - 1}$. Pour finir, l'intégration du système d'équation précédent nous donne :

$$\Omega = \chi\eta \left(1 - \frac{\chi}{2}\eta\right) \left(a^2 - x^2 - \frac{y^2}{\chi^2}\right) \quad (\text{V.14})$$

où a est le demi-petit axe de l'ellipse. On a donc une solution parabolique en enthalpie qui crée un champ de vitesse linéaire dans le repère tournant à Ω_0 . Enfin, on obtient la vorticité à l'intérieur de l'ellipse :

$$\omega_v = \frac{\sqrt{-2\beta_\Omega}}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \frac{\chi^2 + 1}{\chi} \quad (\text{V.15})$$

Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit de la vorticité dans le repère cartésien tournant, et qu'il y a donc une composante due à la vorticité du repère lui-même et qui est différente de la vorticité globale du disque. Les limites de ce modèle sont donc dans le domaine de validité de l'approche "shearing sheet". En effet, lorsque le tourbillon est de grande taille, les termes de courbure de l'espace qui sont négligés dans le système d'équations d'évolution peuvent devenir significatifs. Enfin, si l'on veut tenir compte des gradients de densité et de température, le système d'équations devient plus difficile à résoudre, et n'est en pratique pas utilisé.

Le modèle GNG est parmi les plus utilisés, comme par exemple pour la capture des particules (Johansen, 2004 [12]), ou pour des études linéaire de stabilité des tourbillons 2D (Chang, 2010 [5]) ou 3D (Lesur, 2009 [16]).

Ces deux modèles basés sur un tourbillon elliptique sont également limités par la linéarité du champ de vitesse, qui ne correspond pas à la solution numérique, hormis dans une région très limitée proche du centre du tourbillon. C'est pourquoi un modèle plus réaliste doit être utilisé. C'est ce que nous proposons dans la section suivante.

2 Équations de conservation dans le repère tournant

2.1 Équations stationnaires des vitesses du tourbillon

À l'inverse de l'approche développée dans les modèles de Kida et de GNG, nous ne nous plaçons pas dans l'approximation cartésienne locale. Par conséquent, on peut rappeler les équations d'évolution des vitesses radiales et azimutales dans le repère cylindrique :

$$\partial_t U + U \partial_r U + \frac{V}{r} \partial_\theta U = \frac{V^2}{r} - \frac{V_{kep}^2}{r} - \sigma^{-1} \partial_r P \quad (\text{V.16})$$

$$\partial_t V + U \partial_r V + \frac{V}{r} \partial_\theta V = -\frac{UV}{r} - \sigma^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (\text{V.17})$$

Nous allons maintenant décomposer le champ des vitesses en une composante du disque, repré-

sentée par la solution stationnaire du disque axisymétrique $\vec{V}_0(r)$, et d'une déviation $\vec{v}$:

$$U = U_0(r) + u \quad (\text{V.18})$$

$$V = V_0(r) + v \quad (\text{V.19})$$

Sachant que la composante stationnaire ne dépend ni du temps, ni de l'azimut, et que $U_0(r) = 0$, le système d'équations des vitesses devient :

$$\partial_t u + u \partial_r u + \frac{V_0 + v}{r} \partial_\theta u = \frac{v^2}{r} + 2v \frac{V_0}{r} + \frac{V_0^2}{r} - \frac{V_{kep}^2}{r} - \sigma^{-1} \partial_r P \quad (\text{V.20})$$

$$\partial_t v + u \partial_r (V_0 + v) + \frac{V_0 + v}{r} \partial_\theta v = -\frac{uv}{r} - \frac{uV_0}{r} - \sigma^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (\text{V.21})$$

On peut maintenant considérer que l'on a la composition d'un mouvement dû au disque, dirigé par la vitesse d'écoulement $\vec{V}_0$, et d'un mouvement dû à la déviation $\vec{v}$. Le premier mouvement peut être condensé dans le terme Lagrangien $D_t = \partial_t + \frac{V_0}{r} \partial_\theta$. Le système devient donc :

$$D_t u + u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u = \frac{v^2}{r} + 2v \frac{V_0}{r} + \frac{V_0^2}{r} - \frac{V_{kep}^2}{r} - \sigma^{-1} \partial_r P \quad (\text{V.22})$$

$$D_t v + u \partial_r (V_0 + v) + \frac{v}{r} \partial_\theta v = -\frac{uv}{r} - \frac{uV_0}{r} - \sigma^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (\text{V.23})$$

La première approximation que nous faisons dans ce modèle est la *stationnarité*. Par conséquent, on suppose que $D_t u = D_t v = 0$. On obtient un système d'équations qui décrit les composantes u, v . C'est un champ de vitesse superposé à l'écoulement stationnaire du disque, qui va nous permettre de décrire le champ de vitesse d'un tourbillon. Nous conservons dans ces équations les termes de courbure et de Coriolis résultant de la géométrie cylindrique, qui sont négligés dans l'approche locale des modèles précédents. Nous n'avons pour le moment linéarisé aucun terme et ce système est donc entièrement non linéaire. Cette linéarisation est l'objet de la prochaine étape.

2.2 Linéarisation du système

Avant de linéariser le système et de déterminer les termes dominants, nous allons réécrire les équations en simplifiant le terme $V_{kep}^2(r)/r$, de façon à n'avoir que des expressions dépendantes de $V_0(r)$, vitesse azimutale l'écoulement du disque soumis à sa pression. Rappelons sa valeur :

$$V_0^2(r) = V_{kep}^2(r) + r \sigma_0^{-1}(r) \partial_r P_0(r) \quad (\text{V.24})$$

En introduisant enfin la vitesse angulaire $\Omega_0(r) = V_0(r)/r$, on peut simplifier l'écriture de ce système :

$$u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u = \frac{v^2}{r} + v 2\Omega_0(r) - \sigma^{-1} \partial_r P + \sigma_0^{-1}(r) \partial_r P_0(r) \quad (\text{V.25})$$

$$u \partial_r (r \Omega_0(r) + v) + \frac{v}{r} \partial_\theta v = -\frac{uv}{r} - u \Omega_0(r) - \sigma^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (\text{V.26})$$

Une des idées innovantes de notre modèle est d'utiliser l'expression de la vorticité afin de simplifier d'avantage l'écriture du système. Cela nous a semblé naturel car un tourbillon est avant tout une zone de l'écoulement, dont la valeur de la vorticité diffère de celle du reste du disque. Notons $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \omega + \omega_0(r)$, on a alors :

$$\omega = \partial_r v + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \partial_\theta u \quad (\text{V.27})$$

$$\omega_0(r) = r \partial_r \Omega_0(r) + 2\Omega_0(r) \quad (\text{V.28})$$

De cette façon, la vorticité du tourbillon ou de la perturbation est représentée par ω et celle du disque non perturbé par ω_0 . Afin de conserver à notre modèle la plus grande généralité, nous prendrons la vitesse angulaire $\Omega_0(r)$ sous la forme d'une loi de puissance du rayon. Cela inclut naturellement le disque képlérien :

$$\Omega_0(r) \propto r^{\beta_\Omega} \quad (\text{V.29})$$

On aura pour le disque képlérien, $\beta_\Omega = -3/2$. Une remarque importante est à faire cependant. Suivant le formalisme du modèle, $\Omega_0(r)$ représente la vitesse angulaire du disque, *en tenant compte du gradient de pression global*. Par conséquent $\Omega_0(r)$ diffère légèrement du comportement purement képlérien décrit par $\Omega_{kep}(r)$, comme nous le détaillons Chapitre 2. Cependant l'écart de vitesse entre l'écoulement képlérien et celui d'un disque supporté par sa pression est faible, de l'ordre de 10^{-3} selon la valeur de la température du disque. Nous ferons donc l'approximation que $\Omega_0(r)$ varie comme une puissance β_Ω du rayon, uniquement dans sa dérivée radiale. Cela nous mène à l'expression suivante de la vorticité du disque :

$$\omega_0(r) = 2\Omega_0(r) (1 + \beta_\Omega/2) \quad (\text{V.30})$$

Cela permet finalement d'obtenir le système d'équations des vitesses suivant :

$$u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u = \frac{v^2}{r} + v 2\Omega_0(r) - \sigma^{-1} \partial_r P + \sigma_0^{-1}(r) \partial_r P_0(r) \quad (\text{V.31})$$

$$\frac{1}{r} \partial_\theta \frac{(u^2 + v^2)}{2} + u 2\Omega_0(r) (1 + \beta_\Omega/2) + u \omega = -\sigma^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (\text{V.32})$$

Nous pouvons maintenant linéariser ce système. Cela signifie que nous conservons uniquement les termes dominants, ou du premier ordre en vitesse. Il est évident à ce stade que nous conservons les termes dépendants des dérivées de la pression, car ce sont eux qui définissent la présence d'un tourbillon. Les termes de gauche de la première équation ainsi que le terme en v^2/r sont petits devant les autres car du second ordre en u et v . De même le terme cinétique de la seconde équation est du second ordre par rapport aux autres. Ces termes quadratiques sont négligeables si les vitesses sont largement inférieures à la vitesse du son, c'est-à-dire pour des tourbillons de vorticité moyenne, ou de rapport d'aspect bien supérieur à 1, d'après ce qu'on peut déduire des modèles déjà existants. Sinon, la valeur de ces termes peut être comparable au terme de gradient de pression, dont la valeur est de l'ordre de la vitesse du son. Le système ne peut pas être linéarisé dans ce cas là. Il reste le

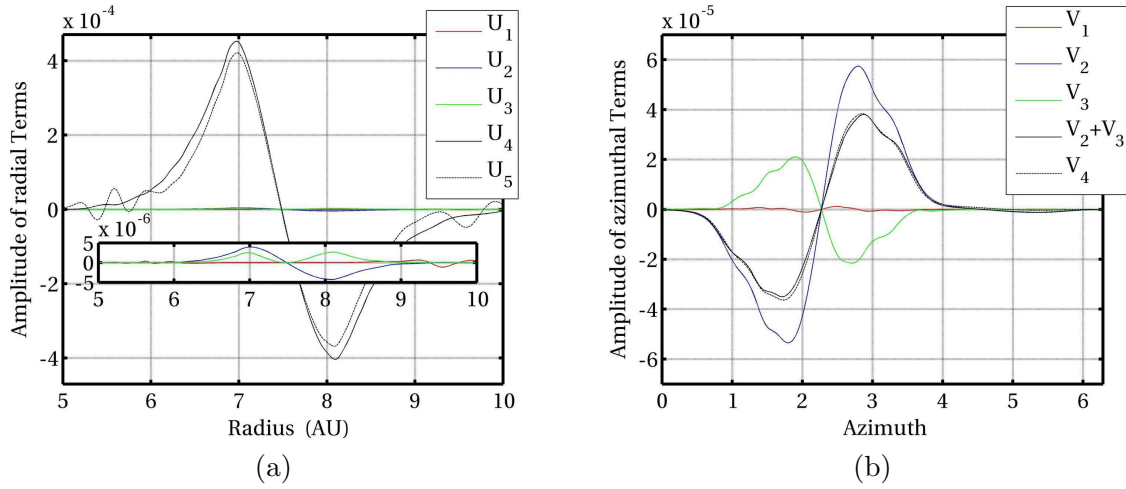


Figure V.1 – Valeurs numériques des différents termes des équations des vitesses, évaluées au centre d’un tourbillon obtenu par l’IOR. La figure de gauche (a) montre les termes de l’équation dans la direction radiale. Les différents termes, U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 sont représentés en rouge, bleu, vert, noir et pointillés noir respectivement. Les trois premiers termes sont négligeables devant U_4 et U_5 . Ces derniers sont presque égaux. La figure de droite (b) montre les termes dans la direction azimuthale. Les différents termes, V_1 , V_2 , V_3 , $V_2 + V_3$, V_4 sont représentés en rouge, bleu, vert, noir et pointillés noir respectivement. Le terme V_1 est négligeable devant les autres. Le terme $V_2 + V_3$ est presque égal au terme V_4 .

terme en $u\omega$ qui nécessite d’être discuté. Dans notre contexte, c’est-à-dire l’étude des tourbillons, la vorticité du tourbillon ω sera toujours une fraction de la vorticité du disque $\omega_0(r)$. Cette fraction est supérieure à 10% afin de pouvoir identifier clairement un tourbillon. Par conséquent, ce terme ainsi que le terme dépendant de $\omega_0(r) = 2\Omega_0(r)(1 + \beta_\Omega/2)$ sont à conserver parmi les termes du premier ordre dans l’équation.

La Figure V.1 montre les valeurs numériques des différents termes des équations du système. Voici la nomenclature que nous avons adoptée :

$$U_1 = u\partial_r u, \quad U_2 = \frac{v}{r}\partial_\theta u, \quad U_3 = \frac{v^2}{r}, \quad U_4 = v2\Omega_0(r), \quad U_5 = \sigma^{-1}\partial_r P - \sigma_0^{-1}(r)\partial_r P_0(r) \quad (\text{V.33})$$

$$V_1 = \frac{1}{r}\partial_\theta \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad V_2 = u2\Omega_0(r)(1 + \beta_\Omega/2), \quad V_3 = u\omega, \quad V_4 = -\sigma^{-1}\frac{1}{r}\partial_\theta P \quad (\text{V.34})$$

Nous avons tracé la valeur de ces termes au centre d’un tourbillon obtenu après simulation numérique d’une instabilité en ondes de Rossby. Sur la partie gauche de la figure, nous montrons ceux correspondants à la direction radiale. Il s’agit d’une coupe radiale centrée sur l’azimut du centre du tourbillon. On vérifie ainsi numériquement que les termes U_1 , U_2 et U_3 sont effectivement du second ordre. Un zoom en encadré montre que leur valeur est inférieure à 5×10^{-6} dans tout le disque, et en particulier à l’intérieur du tourbillon. Les deux seuls termes dominants sont U_4 et U_5 . Ils ont par ailleurs des valeurs numériques très proches. Ils sont presque identiques au coeur du tourbillon, c’est-à-dire dans la partie linéaire autour de $7.5 UA$, et ne diffèrent que de seulement 7% au niveau de leurs extrema.

Sur la partie droite de la figure sont tracées les valeurs numériques des termes de l’équation

tangentielle, V_1 , V_2 , V_3 , et V_4 . De plus nous avons ajouté la somme des termes dépendants de la vortacité, $V_2 + V_3$. Il s'agit d'une coupe azimutale, centrée sur le rayon du centre du tourbillon. Le terme cinétique V_1 est lui aussi très inférieur aux autres, comme prévu ; il n'excède pas 2×10^{-6} alors que les autres termes sont de l'ordre de 5×10^{-5} . Il ne représente donc que 5% de la valeur des autres termes. Enfin, ces derniers se compensent avec un bon accord. On constate que la somme $V_2 + V_3$ est à plus de 95% près égale à V_4 . Cela met en évidence la nécessité de tenir compte du terme V_3 qui dépend de la vortacité du tourbillon. Ce dernier n'est pas toujours pris en compte dans les modèles de tourbillon, comme celui de Kida.

Nous venons donc de vérifier numériquement que seuls certains termes du système d'équation obtenu sont nécessaires pour décrire le profil des vitesses radiales et azimutales d'un tourbillon obtenu par simulation numérique. Ces termes semblent du premier ordre par rapport aux autres, c'est pourquoi ce sont les seuls que nous conservons dans les équations. Cette validation numérique permet de s'assurer que le système d'équations obtenu est suffisamment bien écrit pour décrire de façon fiable le champ des vitesses d'un tourbillon. On obtient donc, dans cette approximation linéaire :

$$v2\Omega_0(r) = \sigma^{-1}\partial_r P - \sigma_0^{-1}(r)\partial_r P_0(r) \quad (\text{V.35})$$

$$u2\Omega_0(r)(1 + \beta_\Omega/2) + u\omega = -\sigma^{-1}\frac{1}{r}\partial_\theta P \quad (\text{V.36})$$

Nous introduisons le *nombre de Rossby*, R_0 , qui caractérise le rapport entre l'écart de vortacité et la vitesse angulaire du disque :

$$R_0 = \frac{\omega}{2\Omega_0(r)} \quad (\text{V.37})$$

Cela permet d'écrire de façon claire le système d'équations linéaires qui décrit le champ de vitesse du tourbillon :

$$v2\Omega_0(r) = \sigma^{-1}\partial_r P - \sigma_0^{-1}(r)\partial_r P_0(r) \quad (\text{V.38})$$

$$u2\Omega_0(r)(R_0 + 1 + \beta_\Omega/2) = -\sigma^{-1}\frac{1}{r}\partial_\theta P \quad (\text{V.39})$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les dérivées des membres de droite pour obtenir le champ des vitesses. Pour cela nous devons choisir une équation d'état qui relie la pression à la densité.

2.3 Équation d'état

On suppose que le disque non perturbé est globalement à l'équilibre thermodynamique autour d'une température $T_0(r)$ que nous avons déjà mentionnée au Chapitre 2. Nous rappelons que nous

pouvons décrire la densité et la pression du disque ainsi :

$$\sigma_0(r) \propto r^{\beta_\sigma} \quad (\text{V.40})$$

$$T_0(r) \propto r^{\beta_T} \quad (\text{V.41})$$

$$P_0(r) \propto r^{\beta_P} \quad (\text{V.42})$$

avec $\beta_P = \beta_\sigma + \beta_T$.

Nous allons écrire la densité σ et la pression P en fonction des ces variables stationnaires du disque, de façon à simplifier les équations des vitesses, selon l'approche que nous avons introduite au Chapitre 3 pour équilibrer le schéma numérique :

$$\sigma = \sigma_0(r)\sigma^* \quad (\text{V.43})$$

$$P = P_0(r)P^* \quad (\text{V.44})$$

La considération de l'équation d'état intervient à ce niveau. Afin de garder toute généralité, nous allons utiliser une relation polytropique. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent sur les tourbillons issus de l'IOR, la pression P^* suit un comportement polytropique, avec $P^* \equiv \sigma^{*\gamma}$ dans le cas adiabatique. Ici nous considérerons un indice polytropique arbitraire α , qui pourra valoir γ comme dans les simulations adiabatiques déjà présentées, ou 1 pour décrire un gaz localement isotherme, ou enfin n'importe quelle valeur entre les deux. On a alors :

$$\sigma = \sigma_0(r)\sigma^* \quad (\text{V.45})$$

$$P = P_0(r)\sigma^{*\alpha} \quad (\text{V.46})$$

Cette approche permet de décrire une thermodynamique diverse. Lorsque $\alpha = 1$, le gaz est localement isotherme, par conséquent la pression suit uniquement les variations de densité, la température restant inchangée et égale à celle du disque. Lorsque $\alpha = \gamma$, le gaz est adiabatique, ce qui signifie que toute variation de température due à une compression ou à une détente du gaz est conservée dans le disque. La pression varie alors comme la densité et cet échauffement compressible. On peut de la sorte décrire un modèle de vortex valable dans ces deux approximations. Une valeur intermédiaire de α peut décrire un gaz dit barocline, c'est-à-dire dont le refroidissement est possible, de même qu'un échauffement. Une valeur très grande de la relaxation thermique tend vers un gaz isotherme, alors qu'une valeur très petite tend vers un gaz adiabatique.

Pour terminer la simplification des équations, nous pouvons définir une quantité homogène à une enthalpie $\mathcal{H}$ dont l'expression est :

$$\mathcal{H} = c_{s0}^2(r) \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sigma^{*(\alpha-1)} - 1}{\alpha - 1} \quad (\text{V.47})$$

en introduisant $c_{s0}^2(r) = \gamma P_0(r)/\sigma_0(r)$, la vitesse du son adiabatique du disque non perturbé. Cette

enthalpie permet d'écrire le système d'équations des vitesses de la façon suivante :

$$v2\Omega_0(r) = \partial_r \mathcal{H} + \frac{(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{\alpha} \frac{\mathcal{H}}{r} \quad (\text{V.48})$$

$$u2\Omega_0(r) = -(R_0 + 1 + \beta_\Omega/2)^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta \mathcal{H} \quad (\text{V.49})$$

On peut vérifier le calcul qui permet d'obtenir ce système en utilisant la propriété suivante :

$$\partial \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sigma^{*(\alpha-1)}}{\alpha - 1} = \partial \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sigma^{*(\alpha-1)} - 1}{\alpha - 1} \quad (\text{V.50})$$

pour la dérivée dans n'importe quelle direction.

Enfin, nous vérifions que cette écriture de $\mathcal{H}$ permet de retrouver le cas du gaz isotherme lorsque α tend vers 1, car le terme $\alpha - 1$ est au dénominateur. Pour un tel gaz, $P^* = \sigma^*$. Par conséquent, les membres de droite du système V.38 deviennent :

$$\sigma^{-1} \partial_r P - \sigma_0^{-1}(r) \partial_r P_0(r) = \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma} \sigma^{*-1} \partial_r P^* \quad (\text{V.51})$$

$$= \partial_r \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma} \ln(\sigma^*) - \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma} \ln(\sigma^*) \frac{\beta_T}{r} \quad (\text{V.52})$$

$$\sigma^{-1} \partial_\theta P = \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma} \sigma^{*-1} \partial_\theta P^* \quad (\text{V.53})$$

$$= \partial_\theta \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma} \ln(\sigma^*) \quad (\text{V.54})$$

Maintenant, si on fait tendre α vers 1 dans l'expression de $\mathcal{H}$, on obtient :

$$\mathcal{H} = \frac{c_{s0}^2(r)}{\gamma} \ln(\sigma^*) \quad (\text{V.55})$$

car on peut écrire la limite suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X^\epsilon - 1}{\epsilon} = \ln(X) \text{ pour tout } X > 0 \quad (\text{V.56})$$

En remplaçant cette expression de $\mathcal{H}$ dans les membres de droite du système V.48, on retrouve les résultats des équations du système V.51. Notre écriture des équations en fonction de cette enthalpie permet donc de décrire tous les cas possibles de paramètres α , qui décrivent la thermodynamique du gaz dans le cas homentropique.

2.4 Validation sur une solution numérique

À cette étape, avant de déterminer et de paramétrer analytiquement la valeur de l'enthalpie, nous avons vérifié que le champ de vitesse ainsi obtenu est compatible avec celui issu des résultats numériques. L'étude non linéaire de l'IOR nous donne des tourbillons de différentes formes sur lesquels nous pouvons comparer les valeurs du champ de vitesse avec les valeurs analytiques. Pour

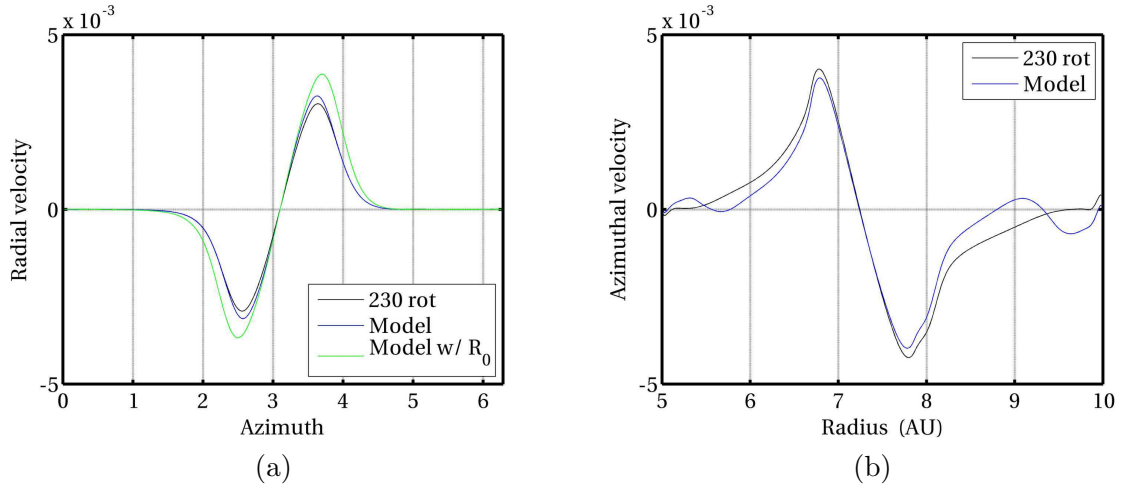


Figure V.2 – Coupe de la vitesse radiale (figure de gauche (a)) et de la vitesse azimutale à laquelle est retranchée la vitesse du disque $V_0(r)$ (figure de gauche (b)) au centre d'un tourbillon issu de l'IOR. Les valeurs simulées sont représentées en noir sur les deux figures. Sur la figure (a), nous avons tracé en vert les valeurs modélisées en prenant un nombre de Rossby fixe, égal à la valeur au centre du tourbillon. En bleu sont tracées les valeurs modélisées en utilisant un nombre de Rossby dépendant de l'espace et donné par $\omega(r, \theta)/(2\Omega_0(r))$. L'accord est meilleur dans ce dernier cas. Sur la figure (b), la vitesse azimutale donnée par le modèle est tracée en bleu et est proche de la valeur obtenue par la simulation.

un tourbillon donné, nous calculons l'enthalpie à partir de la solution numérique de la pression. D'après l'équation V.45, nous avons :

$$\sigma^* = P_*^{\alpha-1} \quad (\text{V.57})$$

dans laquelle nous choisissons $\alpha = \gamma$, car ces simulations sont adiabatiques.

La valeur du nombre de Rossby R_0 est déterminée par la valeur numérique de la vorticité. Nous utiliserons soit la valeur dépendante de l'espace, soit la valeur au centre du tourbillon. Nous appellerons "modèle" le système d'équations qui donne les vitesses radiales et azimutales en fonction des dérivées de la pseudo enthalpie. Dans la partie suivante nous modéliserons également l'enthalpie.

La Figure V.2 montre les valeurs des vitesses radiales et azimutales au centre du tourbillon. Sur la figure de gauche, la valeur de la vitesse radiale au centre est tracée en fonction de l'azimut. On remarque tout d'abord que la solution numérique en noir est linéaire dans la région proche du centre, pour $\theta = 3.1$, sur une portion comprise entre $\theta = 2.9$ et $\theta = 3.3$. Cette zone est donc très comparable avec la solution incompressible de Kida (Kida, 1981 [13] ou Chavanis, 2000 [6]). Cependant, quand on s'éloigne du centre, le comportement de la vitesse radiale montre un raccordement graduel à la vitesse radiale nulle du disque, ce qui n'est pas décrit par ce dernier modèle.

La vitesse radiale obtenue grâce à notre modèle est représentée en bleu. Dans ce cas nous avons défini $R_0(r, \theta) = \omega(r, \theta)/(2\Omega_0(r))$ par sa valeur numérique. On constate que cette solution est bien en accord avec la solution numérique au centre du tourbillon, à moins de 5% près. Le comportement linéaire est décrit de façon satisfaisante, ce qui montre que notre modèle est compatible avec les modèles précédents dans cette partie linéaire. Dans la zone de raccordement, par contre, notre modèle parvient à décrire correctement le passage de la partie linéaire à la partie non perturbée du

disque, contrairement aux modèles précédents. L'erreur avec la solution numérique est maximale au niveau des extrema de vitesse. L'écart est de l'ordre de 10%. Notre approche apporte donc une amélioration certaine, qui sera utile ultérieurement.

La courbe verte correspond à notre modèle quand le nombre de Rossby R_0 est supposé constant et est égal au minimum de sa valeur numérique. Dans ce cas, la partie linéaire est toujours décrite correctement, mais dans une zone azimutale réduite par rapport au modèle en bleu. L'écart avec la solution numérique est encore plus prononcé dans la zone de raccordement. On surestime alors la valeur de la vitesse radiale. Cela vient du fait que la vorticité n'est pas constante dans la solution numérique. Par conséquent la valeur du nombre de Rossby au niveau des extrema de vitesse est trop grande, c'est-à-dire trop négative, et la valeur de la vitesse donnée par le modèle est surestimée.

La partie droite de la figure montre la vitesse azimutale $v = V - V_0(r)$ au centre du tourbillon en fonction du rayon. La valeur numérique est tracée en noir. On constate, de même que pour la vitesse radiale, un comportement linéaire de la vitesse dans la partie centrale du tourbillon. Le centre se trouve au rayon $r = 7.3 \text{ UA}$ et la partie linéaire s'étend de $r = 6.9$    $r = 7.6 \text{ UA}$. Le raccordement avec le disque non perturbé se fait sur une distance de 1 UA . L   encore le modèle de Kida ne décrit pas ce raccordement.

La valeur de la vitesse azimutale donnée par notre modèle est représentée en bleu, et présente un écart inférieur à 1% dans la partie linéaire. Le raccordement est également bien décrit. Contrairement à la vitesse radiale, la vitesse azimutale de notre modèle ne dépend pas du nombre de Rossby, ce qui rend la solution analytique moins sensible à la façon dont on définit ce nombre. L'erreur est inférieure à 5% au niveau des extrema mais est plus importante à la jonction avec le disque non perturbé. Cependant, cette zone contient aussi des ondes spirales qui ne sont pas décrites par notre modèle.

Notre modèle s'ajuste bien aux coupes de vitesses passant par le centre du tourbillon, mais qu'en est-il des autres parties du tourbillon, c'est-à-dire lorsque l'on n'est pas proche du centre? Pour cela nous allons montrer la comparaison entre les valeurs numériques et les valeurs du modèle dans le plan (r, θ) .

La Figure V.3 montre la comparaison entre les solutions numériques, les valeurs données par le modèle et la différence entre les deux. La colonne de gauche montre la vitesse radiale. La figure (a1) est la solution numérique. Le tourbillon est associé à des ondes spirales dans lesquelles la vitesse radiale dépend des valeurs présentes dans le tourbillon. Sur la figure (a2) nous avons tracé la solution donnée par le modèle. Le tourbillon est clairement visible au centre du plan. Sa structure est plus compacte car la perturbation de vitesse introduite par les ondes n'est pas décrite par ce modèle. Cela est plus clair figure (a3) qui montre la différence entre la solution numérique et le modèle. On peut constater que seules les ondes demeurent dans ce résidu. Le modèle décrit correctement le tourbillon jusqu'à ses parties externes, c'est-à-dire jusqu'à la zone où les ondes sont excitées, avec une erreur inférieure à 10%.

La colonne de droite montre la vitesse azimutale $v = V - V_0(r)$. La figure (b1), présente la solution numérique, qui fait apparaître 3 structures :

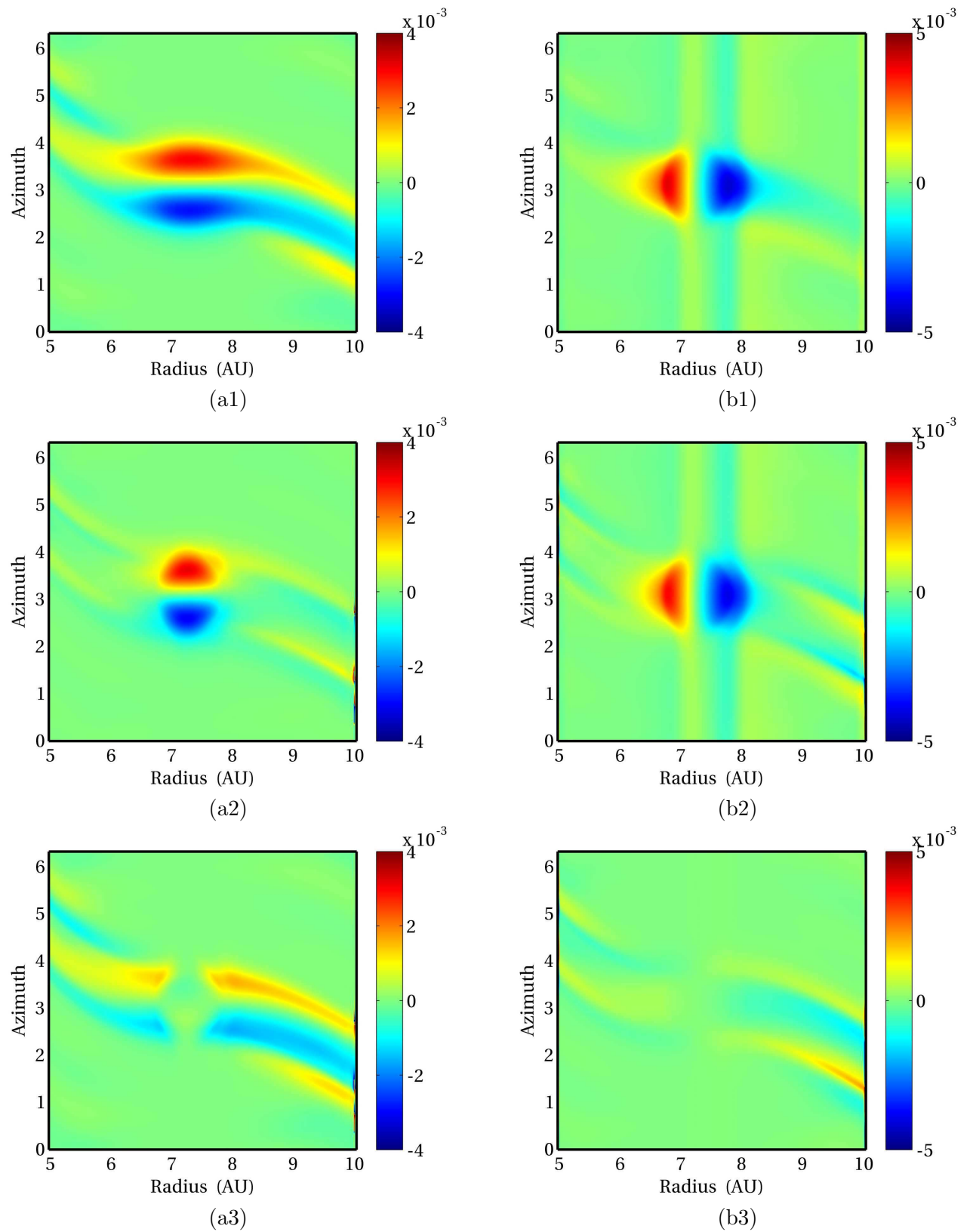


Figure V.3 – Comparaison entre la solution numérique d'un tourbillon issu de l'IOR et le modèle des vitesses. La colonne de gauche montre la carte dans le plan (r, θ) de la vitesse radiale de la solution numérique (a1), du modèle de vitesses (a2) et de la différence (a3). La colonne de droite montre la carte dans le plan (r, θ) de la vitesse azimutale à laquelle on a retranché $V_0(r)$ pour la solution numérique (b1), pour le modèle de vitesses (b2) et la différence entre les deux (b3).

- le tourbillon qui est présent au centre
- les ondes spirales qui sont excitées par le tourbillon
- une bande d'écoulement zonal, axisymétrique, située entre $r = 7$ et $r = 8 UA$

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, cette bande est un résidu de la perturbation initiale qui a généré l'IOR. La figure (b2) présente la vitesse azimutale modélisée. Le vortex est bien décrit dans la partie centrale, jusqu'au contact avec la zone d'émission des ondes. La bande de vitesse de l'écoulement zonal est elle aussi décrite par le modèle. En effet, cette partie axisymétrique est en équilibre géostrophique, et associée à une surdensité axisymétrique. Une partie des ondes est également présente dans le résultat du modèle, mais ne correspond pas exactement à la solution numérique. Sur la dernière figure (b3), qui montre la différence, on vérifie clairement ces constatations. Tout d'abord le vortex est bien décrit avec une erreur relative inférieure à 10%. La bande axisymétrique est quand à elle déterminée par le modèle avec une erreur relative inférieure à 0.5%. C'est un résultat auquel on s'attend car la vitesse azimutale déduite du modèle est identique à un équilibre géostrophique. Seules les ondes ne sont pas décrites. On constate qu'elles sont bien excitées au niveau de la frontière du tourbillon.

Pour terminer, nous vérifions que la vorticité issue du champ de vitesses modélisé est bien similaire à la vorticité de la solution numérique. La Figure V.4 montre la comparaison entre ces deux valeurs. La figure (a) présente la vorticité relative à celle du disque, c'est-à-dire $\omega/\omega_0 - 1$. La zone de valeur négative traduit la présence du tourbillon. On remarque également une bande de faible valeur négative entourée de bandes de valeur positive aux rayons $r = 7$ et $r = 8 UA$, qui correspond à l'écoulement zonal. La vorticité relative donnée par le modèle est montrée figure (b). Les deux structures sont très bien décrites par le modèle, avec une erreur inférieure à 2%. On peut s'attendre à ce résultat du fait que la plus grande contribution à la vorticité provient du terme $1/r \partial_r(r v)$. Comme la vitesse azimutale est bien décrite par le modèle, il en est de même pour la vorticité. De plus, nous avons vérifié que même si l'on définit la vitesse radiale à partir d'un nombre de Rossby minimum comme sur la courbe verte de la Figure V.2 (a), qui présente un écart supérieur de vitesse radiale, la vorticité fournie par le modèle reste comparable à la valeur numérique à plus de 98%. La figure (c) confirme ce résultat en montrant l'écart entre la solution numérique et la vorticité issue des équations. On constate que le tourbillon et l'écoulement zonal sont décrits de façon satisfaisante par le modèle, l'amplitude des résidus étant inférieure à 2%. Les deux bandes spirales présentes dans ces résidus montrent que le système d'équations ne décrit pas correctement les ondes spirales excitées par le tourbillon. Par conséquent le modèle d'équations des vitesses décrit aussi bien le champ de vitesse que sa vorticité qui en découle.

Nous venons de montrer que le champ de vitesse d'un tourbillon, ou d'une perturbation axisymétrique du disque, ne dépend que de la fonction d'enthalpie $\mathcal{H}$, et du nombre de Rossby. La vitesse azimutale est entièrement déterminée par la dérivée radiale de l'enthalpie. Seule la vitesse radiale dépend à la fois de la dérivée azimutale de l'enthalpie et du nombre de Rossby. Ce champ de vitesse est en accord à une très bonne précision avec les résultats numériques. Le tourbillon

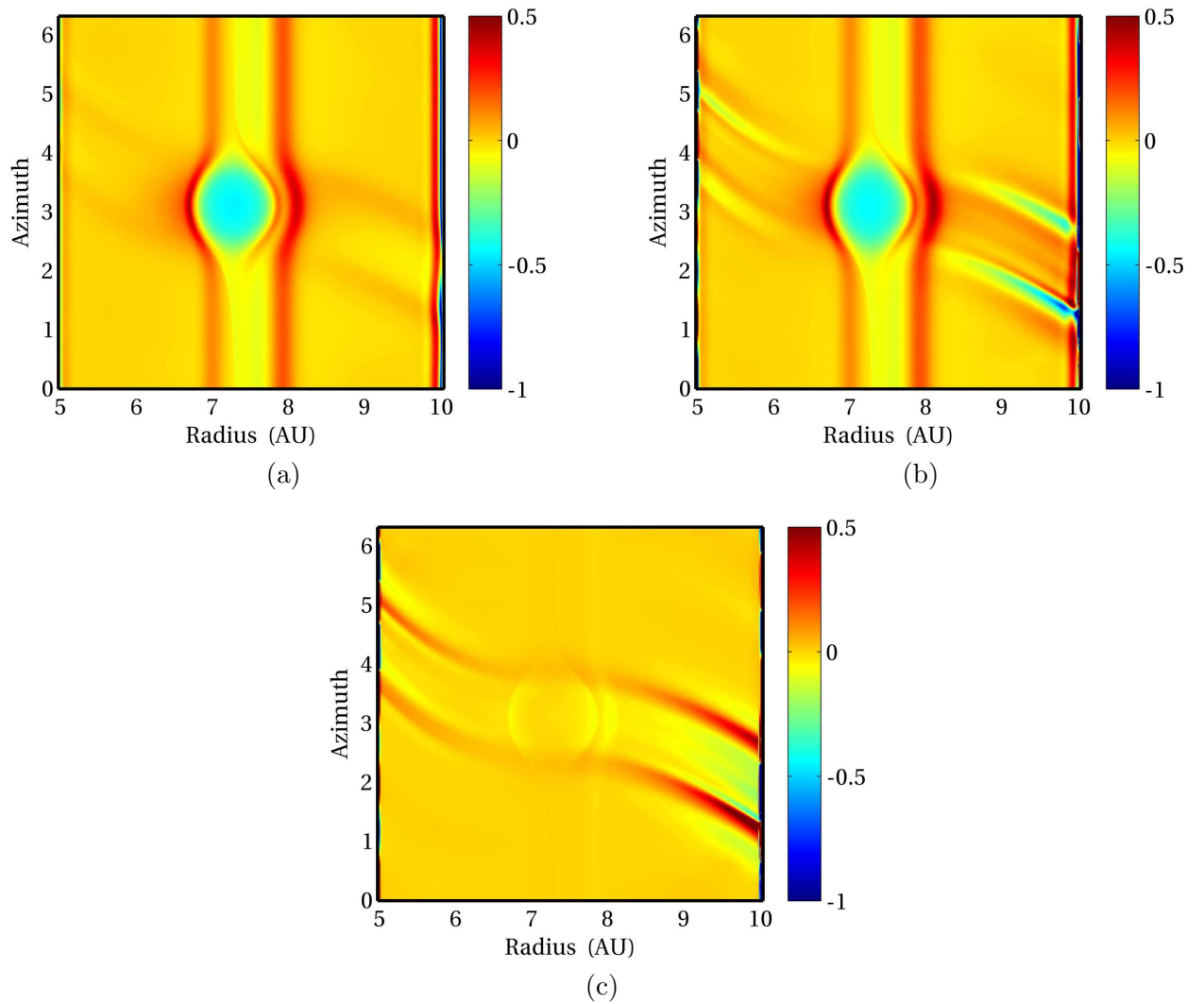


Figure V.4 – Comparaison entre la solution numérique d'un tourbillon issu de l'IOR et le modèle des vitesses. On présente la carte dans le plan (r, θ) de la vorticité évaluée relativement à celle du disque ; (a) dans le cas de la solution numérique, (b) dans le cas du modèle de vitesses, (c) montre la différence entre la solution numérique et le modèle analytique.

est correctement décrit jusqu'à la zone où les ondes spirales sont excitées. Cependant il reste à déterminer le nombre de Rossby et la valeur de cette enthalpie de façon analytique. Il est évident que le nombre de Rossby dépend lui aussi de $\mathcal{H}$ car la vorticité dépend du champ de vitesse.

   ce stade, nous nous trouvons dans l'approche inverse de celle du modèle GNG. En effet, si ce dernier détermine la perturbation de densité et de pression à partir d'un champ de vitesse présupposé et basé sur le modèle de Kida, notre modèle déduit, à l'inverse, le champ de vitesse à partir d'une enthalpie présupposée. L'objet de la section suivante est de définir l'expression de cette fonction.

3 Modèle gaussien de tourbillon

3.1 Modèle d'enthalpie et champ de vitesses

Nous nous basons sur les résultats numériques pour estimer le profil d'enthalpie d'un tourbillon. Les résultats numériques de l'IOR ont montré que le tourbillon obtenu a un profil radial et azimutal de pression proche d'un profil gaussien. Des modèles de champ de vitesse de type gaussien ont déjà été utilisés par exemple en conditions initiales de simulation hydrodynamique par Bodo, 2005 et 2007 [3] [4], ou de façon statique pour la capture de particules par de la Fuente Marcos, 2001 [9]. Cependant, ce champ de vitesse n'est, comme le modèle de Kida, pas combiné à une perturbation de densité.

C'est donc un profil gaussien qui va nous servir à déterminer l'enthalpie $\mathcal{H}$ permettant de dériver notre champ de vitesse gaussien. Cette fonction d'enthalpie est centrée au point de coordonnées (r_0, θ_0) . Nous définissons un rapport radial $\chi_r = \Delta_{r \text{ vortex}}/r_0$, où $\Delta_{r \text{ vortex}}$ représente une largeur radiale de la gaussienne. Puis un rapport d'aspect $\chi_\theta = r_0 \Delta_{\theta \text{ vortex}}/\Delta_{r \text{ vortex}}$, où $\Delta_{\theta \text{ vortex}}$ représente une largeur azimutale de la gaussienne. Ainsi, on modélise la fonction $\mathcal{H}$ par la gaussienne suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \exp \left[-\chi_r^{-2} \left[\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2 + \chi_\theta^{-2} (\theta - \theta_0)^2 \right] \right] \quad (\text{V.58})$$

   partir de cette fonction, il est possible de calculer les vitesses u et v d'après ses dérivées radiales et azimutales :

$$u = (2\Omega_0(r))^{-1} (R_0 + 1 + \beta_\Omega/2)^{-1} \frac{2}{r} (\chi_r^2 \chi_\theta^2)^{-1} (\theta - \theta_0) \mathcal{H} \quad (\text{V.59})$$

$$v = (2\Omega_0(r))^{-1} \left[-2(r_0 \chi_r^2)^{-1} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) + \frac{(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{\alpha} \frac{1}{r} \right] \mathcal{H} \quad (\text{V.60})$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de $\mathcal{H}_0$ en fonction du nombre de Rossby. Pour cela nous calculons la vorticité ω associée au tourbillon à partir de ces équations pour obtenir le nombre

de Rossby au centre du tourbillon :

$$\omega(r_0, \theta_0) = \partial_r v(r_0, \theta_0) + \frac{v(r_0, \theta_0)}{r} - \frac{1}{r} \partial_\theta u(r_0, \theta_0) \quad (\text{V.61})$$

$$R_0 = \frac{\omega(r_0, \theta_0)}{2\Omega_0(r_0)} \quad (\text{V.62})$$

Un calcul assez simple de dérivée nous donne l'équation suivante :

$$R_0 = -(\sqrt{2}\Omega_0(r_0)r_0\chi_r)^{-2} \left[1 + \left(\chi_\theta^2 (R_0 + 1 + \beta_\Omega/2) \right)^{-1} + \frac{\beta_\Omega}{2} \chi_r^2 \frac{(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{\alpha} \right] \mathcal{H}_0 \quad (\text{V.63})$$

Pour les valeurs de β_σ et β_T usuelles, et pour un gaz proche de l'état adiabatique, c'est-à-dire pour $\alpha = \gamma$, le terme $\frac{(\alpha-1)\beta_\sigma - \beta_T}{\alpha}$ est inférieur à 1. De plus le rapport radial est de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} , ce qui équivaut à un tourbillon de largeur radiale proche de l'échelle de hauteur du disque. On comprend donc aisément que le terme :

$$\frac{\beta_\Omega}{2} \chi_r^2 \frac{(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{\alpha} \sim 10^{-5} - 10^{-3} \quad (\text{V.64})$$

Ce terme est donc négligeable devant 1 et même devant celui qui dépend du rapport d'aspect χ_θ . Ce dernier est compris entre 1, pour un rapport d'aspect proche de 4, et 10^{-1} , pour un rapport d'aspect proche de 10. Dans tous les cas, le terme V.64 est au moins 100 fois plus petit que tous les autres. Le nombre de Rossby peut donc s'écrire :

$$R_0 = -(\sqrt{2}\Omega_0(r_0)r_0\chi_r)^{-2} \left[1 + \left(\chi_\theta^2 (R_0 + 1 + \beta_\Omega/2) \right)^{-1} \right] \mathcal{H}_0 \quad (\text{V.65})$$

Cela permet de déterminer l'amplitude de la gaussienne d'enthalpie $\mathcal{H}$ en fonction des paramètres R_0 , χ_r et χ_θ :

$$\mathcal{H}_0 = -2R_0(\Omega_0(r_0)r_0\chi_r)^2 \left[1 + \left(\chi_\theta^2 (R_0 + 1 + \beta_\Omega/2) \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{V.66})$$

Cette expression montre que l'amplitude du tourbillon est principalement déterminée par le nombre de Rossby et le rapport radial du tourbillon. La dépendance en χ_θ est faible surtout dès que ce dernier est supérieur à 6, valeur que nous avons obtenue fréquemment pour les tourbillons issus de l'IOR. Le terme entre crochets est alors environ de l'ordre de 1.2, et devient de l'ordre de 1.05 lorsque le rapport d'aspect dépasse 10. Par conséquent, on peut s'attendre à avoir moins de contraintes sur le rapport d'aspect χ_θ , pour le choix de l'amplitude $\mathcal{H}_0$. Cependant, il contraint fortement la valeur de la vitesse radiale. Nous verrons dans les sections suivantes comment un modèle initial de tourbillon s'ajuste numériquement dans le disque et quelle est l'importance du rapport d'aspect dans cette relaxation.

En utilisant un modèle gaussien pour l'enthalpie, nous obtenons un modèle de tourbillon cohérent dans lequel la donnée du nombre de Rossby au centre, R_0 , du rapport entre la largeur radiale et la position, χ_r , et du rapport d'aspect, χ_θ , définit le champ de vitesse et la perturbation de

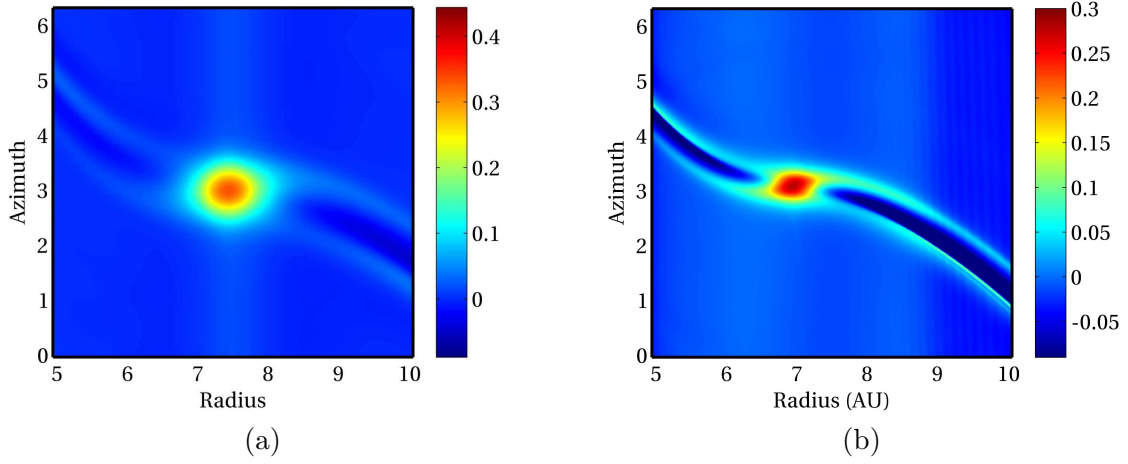


Figure V.5 — Cas de deux tourbillons de structure différente. Le cas de gauche (a) est le plus proche de la solution gaussienne. Il est aisé de définir une taille dans les deux directions. Le cas de droite (b) est très perturbé, avec une structure en "cacahuète", et associé à de fortes ondes spirales. La définition précise de la taille devient difficile.

densité et de pression qui découlent de l'enthalpie $\mathcal{H}$. Ce modèle permet d'étudier la structure de la solution numérique et d'en déduire ces trois grandeurs. Il va permettre aussi de définir un tourbillon test, proche de la solution numérique, et qui sera utilisable en conditions initiales pour différentes simulations numériques. De la sorte on peut étudier l'évolution de tourbillons de forme et de vorticité fixées initialement, qu'il serait difficile d'obtenir autrement (avec l'IOR par exemple). Mais tout d'abord nous allons décrire les outils de mesure que ce modèle permet de construire.

3.2 Mesure de χ_r et de χ_θ

Détermination de l'extension radiale

Mesurer la taille d'un tourbillon est indispensable d'une part pour en caractériser la forme, mais aussi pour étudier les différentes évolutions possibles en fonction de la géométrie du tourbillon. La largeur radiale est fréquemment définie comme la largeur à mi-hauteur de la perturbation de densité ou de pression. Par exemple Bodo, 2007 [4] définit une largeur radiale par le rayon de la surface définie par une vorticité de moins de 10% de la vorticité minimale du tourbillon. Cependant cette grandeur peut être difficile à obtenir, par exemple dans le cas de tourbillons associés fortement perturbés par les ondes spirales associées. Comme on peut le voir Figure V.5, la mesure de la largeur radiale sur le profil de densité est aisée dans le cas du tourbillon de gauche (a), dont la structure présente une symétrie adaptée à une telle mesure. En revanche, le tourbillon de droite (b) a une structure déformée par la présence des ondes. Il n'est pas possible de définir une largeur radiale sans ambiguïté, car la largeur de la surdensité varie avec l'azimut.

C'est pourquoi nous allons présenter une méthode découlant du modèle gaussien qui permet de définir la largeur radiale d'un tourbillon de façon systématique et univoque. Le rapport d'aspect

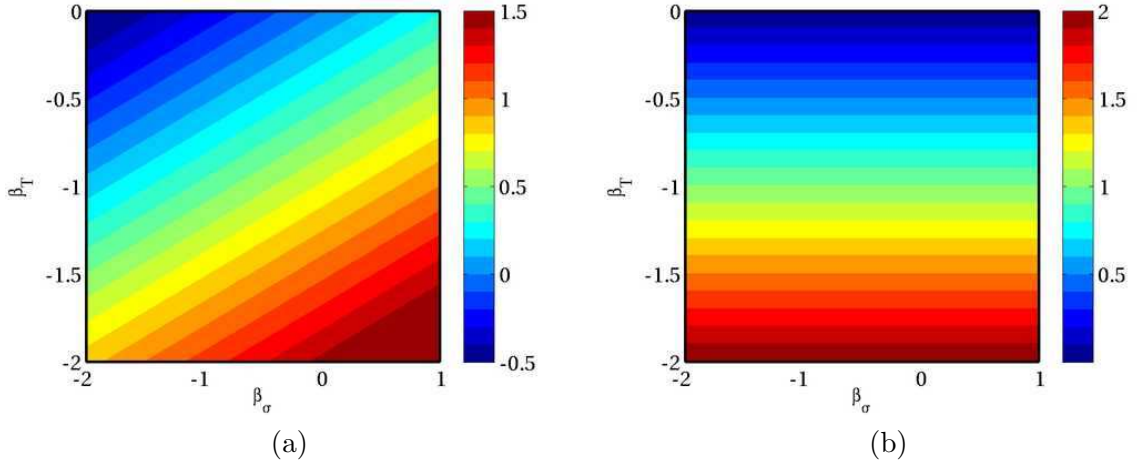


Figure V.6 — Dépendance du paramètre A en fonction de β_σ et de β_T . La figure de gauche (a) donne cette dépendance pour une valeur de $\alpha = 1.4$ équivalente à un gaz adiabatique. La figure de droite (b) donne cette dépendance pour une valeur de $\alpha = 1$ équivalente à un gaz isotherme. On remarque dans ce cas que A ne dépend plus du gradient de température dans le disque.

azimutal dépendant de la largeur radiale du tourbillon, il est d'autant plus important de la définir précisément.

La vitesse azimutale du tourbillon est définie dans le cadre de notre modèle par :

$$v = (2\Omega_0(r))^{-1} \left[-2(r_0\chi_r^2)^{-1} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) + A \frac{1}{r} \right] \mathcal{H} \quad (\text{V.67})$$

avec l'enthalpie $\mathcal{H}$ définie comme dans l'équation V.58. Nous avons posé :

$$A = \frac{(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{\alpha} \quad (\text{V.68})$$

dans lequel β_σ et β_T sont les exposants des lois de puissance de la densité et de la température respectivement, et α est l'indice polytropique utilisé dans le modèle.

Cette vitesse possède deux extrema comme nous l'avons décrit dans la section précédente, un négatif et l'autre positif. La largeur radiale du tourbillon est définie par la distance séparant ces deux extrema. Nous pouvons calculer analytiquement la position de ces extrema. Si l'on cherche les racines de l'équation $\partial_r v = 0$, on peut déterminer l'extension radiale du tourbillon. On peut écrire cette équation sous la forme équivalente suivante :

$$1 - X^2 + \frac{\chi_r}{\sqrt{2}}(A - \beta_\Omega) \frac{X}{1 + X\chi_r/\sqrt{2}} + \frac{\chi_r^2}{2} A(1 + \beta_\Omega)(1 + X\frac{\chi_r}{\sqrt{2}})^{-2} = 0 \quad (\text{V.69})$$

où nous avons introduit :

$$X = \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \sqrt{2}/\chi_r \quad (\text{V.70})$$

On remarque dès à présent que si $\chi_r < 1$, les racines de cette équation sont symétriques et

valent $X = \pm 1$, ce qui revient à :

$$\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) = \pm \frac{\chi_r}{\sqrt{2}} \quad (\text{V.71})$$

Ainsi la distance entre le centre du tourbillon et un extremum de vitesse azimutale permet directement d'estimer la largeur radiale de la gaussienne d'enthalpie.

Nous devons cependant tenir compte des termes de l'équation V.69 qui dépendent de χ_r et de A . Plutôt que de résoudre analytiquement l'équation du 4^e degré qui donne les racines, nous avons réalisé une étude semi-analytique. En calculant numériquement les racines de cette équation pour différents paramètres χ_r et A , qui correspondent aux simulations que voulons réaliser, on peut déterminer de combien la racine s'écarte de la valeur $X = \pm 1$.

Tout d'abord nous avons déterminé la valeur de A en fonction du gradient de densité défini par β_σ , du gradient de température donné par β_T et de l'exposant de thermodynamique α . La Figure V.6 montre la valeur numérique pour $\alpha = 1.4$ sur la partie gauche (a) (qui correspond à un disque adiabatique), et pour $\alpha = 1$ sur la partie droite (b) (qui correspond à un disque localement isotherme). Nous avons couvert l'espace du gradient de densité avec $-2 < \beta_\sigma < 1$, ce qui est assez large pour les disques protoplanétaires, mais qui permet de donner une dimension générale à ce modèle. De même l'espace des gradients de température s'étend de $-2 < \beta_\sigma < 0$. Le choix de tels gradients s'explique par le fait que de forts gradients de température ont un rôle dominant dans les disques non adiabatiques. Ils contribuent au renforcement de la vorticité par couplage barocline (Klahr, 2003 [14]). Cela donne une plus grande généralité qui permet de fournir un modèle consistant dans d'autres études, en particulier celle des disques baroclines.

Cela dit, on remarque que pour un disque adiabatique ($\alpha = 1.4$), le coefficient A est compris entre -0.5 et 1.5 . Ces valeurs extrêmes ne sont en revanche atteintes que pour des disques dont les gradients correspondent à des cas limites. Dans la zone plus probable définie par $-1.5 < \beta_\sigma < -0.5$ et $-1 < \beta_T < -0.5$, le coefficient A est compris entre -0.25 et 0.5 . Pour un disque localement isotherme ($\alpha = 1$), le coefficient A ne dépend pas de la densité, et sa valeur s  tend de 0 à 2 . On remarque que la variation de α a pour effet de décaler les valeurs extrêmes de A , tout en gardant la même étendue. Dans le domaine probable de β_T évoqué ci-dessus, A est compris entre 0.5 et 1 .

Nous allons donc utiliser les valeurs suivantes de A : -0.5 , 0 , 0.25 , 0.5 et 1 . Nous pouvons ensuite tracer léquation V.69 en fonction de X , pour différentes valeurs de A et de χ_r . Ce dernier est compris typiquement entre 0.01 , ce qui correspond à un tourbillon de largeur proche d'un cinquième d'échelle de hauteur du disque, et 0.1 ce qui correspond à deux échelles de hauteur du disque. Ce sont évidemment des valeurs tests, qui ne sont en rien limitatives, mais donnent des valeurs caractéristiques permettant de poursuivre notre étude. Nous montrons Figure V.7 la valeur du membre de gauche de léquation V.69, qui s'annule pour la valeur de X recherchée. La figure de gauche (a) est la zone proche de la racine négative, et la figure de droite (b) la zone proche de la racine positive. Les traits pleins représentent différentes valeurs de A pour $\chi_r = 0.1$, les traits pointillés différentes valeurs de A pour $\chi_r = 0.01$. Dans chaque cas, les couleurs représentent ces différentes valeurs de A . On remarque que pour une valeur de $\chi_r = 0.01$, les racines valent -0.99 et 1.01 quelle que soit la valeur de A . Pour le cas le plus défavorable, c'est-à-dire $\chi_r = 0.1$ et $A = 1$,

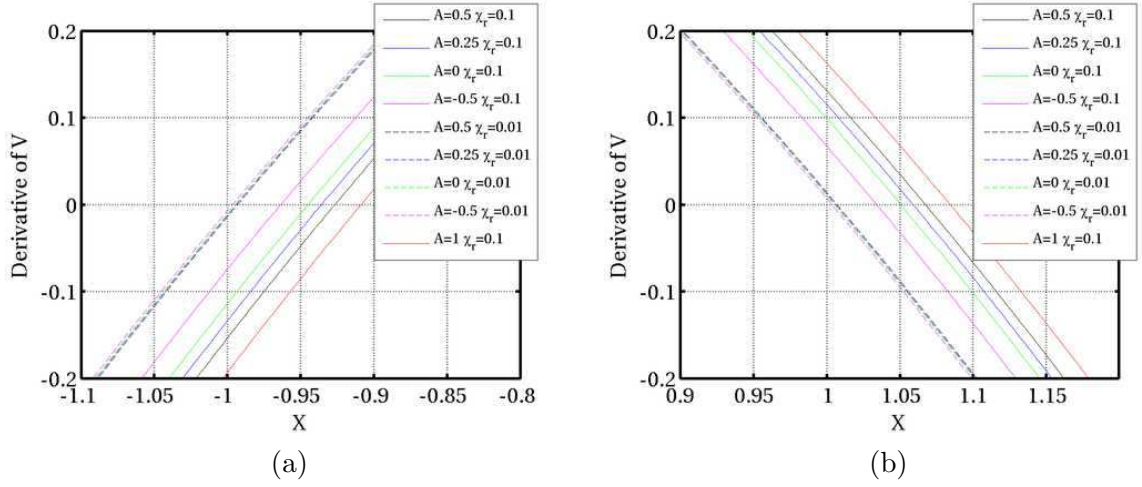


Figure V.7 – Valeurs négatives à gauche (a) et positives à droite (b) de la valeur du terme de gauche de l'équation V.69, qui est la dérivée de la vitesse v , en fonction de X . Les courbes représentent différents cas avec des valeurs de A et χ_r diverses. La nomenclature est la même pour la figure (a) et (b). La valeur de X associée à une valeur nulle de la dérivée de v est la solution de l'équation recherchée.

les racines valent -0.91 et 1.08 . Pour les différents paramètres χ_r et A , les racines ne diffèrent de ± 1 que de moins de 10%.

Par contre, on remarque dans tous les cas présentés ici que l'intervalle séparant ces racines est égal à 2 avec un écart de moins de 1%. L'effet des différentes valeurs de χ_r et de A est donc de décaler les racines d'une même valeur positive, en conservant l'écart entre les deux égal à 2. Si on appelle X^- la racine négative et X^+ la racine positive, on a :

$$X^+ - X^- = 2 \pm 0.01 \quad (\text{V.72})$$

Par conséquent on obtient le rapport radial χ_r à partir des extrema de vitesse azimutale de la façon suivante. Si v^+ est l'extremum positif associé à la position r^- , et v^- l'extremum négatif associé à la position r^+ , on a, en remplaçant X par la valeur donnée par l'équation V.70 :

$$\chi_r = \frac{r^+ - r^-}{r_0 \sqrt{2}} \quad (\text{V.73})$$

avec une précision inférieure à 1%.

Dans la pratique, nous mesurons les positions moyennes r^+ et r^- sur la région comprise entre 90% et 100% de l'extremum. De cette façon nous évitons l'effet des pics prononcés de vitesse dus aux ondes spirales.

Détermination du rapport d'aspect

Le rapport d'aspect χ_θ est un paramètre important pour caractériser différentes familles de tourbillons. Sa mesure se fait généralement sur les lignes de courant, qui sont les lignes tangentes

aux vecteurs vitesses. Ces lignes ont une forme proche d'une ellipse, du moins près du centre du tourbillon. Le rapport d'aspect est alors donné par le rapport entre le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Cela est valable en particulier pour le modèle de Kida, mais lorsque les lignes ne sont pas fermées, leur géométrie peut s'éloigner nettement d'une ellipse. Dans ce cas, il n'est pas possible de définir un unique rapport d'aspect. De plus, lorsque l'on s'éloigne du centre du tourbillon, le calcul basé sur les lignes de courant conduit à des valeurs de rapport d'aspect qui sont de plus en plus grandes.

La Figure V.8 montre deux tourbillons qui illustrent ce problème. Sur chaque carte de densité, nous avons tracé certaines lignes de courant qui apparaissent en noir. On remarque clairement que celles du tourbillon de la figure (a) sont presque fermées. En revanche, celles du tourbillon de la figure (b) sont ouvertes, spiralant vers l'extérieur de la surdensité. Même pour le tourbillon (a), la définition d'un unique rapport d'aspect est délicate. Figure (c), nous avons repéré trois lignes de courant différentes du tourbillon, identifiées en blanc, cyan, et bleu. La ligne de courant blanche donne un rapport d'aspect de $\chi_\theta = 14.1$. Si l'on mesure le rapport d'aspect sur la ligne de courant cyan, qui est plus externe, on obtient $\chi_\theta = 15.0$. Enfin sur la dernière, repérée en bleu, le rapport d'aspect mesuré est $\chi_\theta = 16.3$. On a donc une variation de 15% sur la mesure du rapport d'aspect, ce qui peut rendre toute classification ambiguë.

Pour pallier ce problème, nous choisissons de définir le rapport d'aspect d'une manière consistante avec le modèle de tourbillon gaussien que nous avons développé. Si l'on considère l'expression de la vitesse radiale, on trouve que les extrema de cette fonction, au rayon r_0 , sont les racines de l'équation suivante :

$$\partial_\theta u = 0 \quad (\text{V.74})$$

$$\text{Soit} \quad 1 - 2(\chi_r \chi_\theta)^{-2}(\theta - \theta_0)^2 = 0 \quad (\text{V.75})$$

Ainsi, les deux racines sont :

$$\theta^- - \theta_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_r \chi_\theta \quad (\text{V.76})$$

$$\theta^+ - \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_r \chi_\theta \quad (\text{V.77})$$

Si l'on mesure la position des extrema de la vitesse radiale, on peut donc déterminer un unique rapport d'aspect χ_θ par l'expression suivante :

$$\chi_\theta = \frac{\theta^+ - \theta^-}{\chi_r \sqrt{2}} \quad (\text{V.78})$$

Si l'on applique cette procédure sur le tourbillon de la figure (c) précédemment évoqué, on mesure un rapport d'aspect unique de $\chi_\theta = 13.5$. Cette valeur est de 10% inférieure à la valeur mesurée sur les lignes de courant, mais cela permet d'écarter, d'une certaine façon, l'ambiguïté de ce type de mesure. Cela est utile, surtout lorsque ces lignes sont déformées par rapport à l'ellipse,

et situées loin du centre du tourbillon. Nous obtenons ainsi une unique valeur du rapport d'aspect χ_θ qui permet de caractériser le tourbillon.

Comme pour la vitesse azimutale, nous mesurons les positions moyennes θ^+ et θ^- sur la région comprise entre 90% et 100% de l'extremum correspondant. La vitesse radiale est parfois très perturbée par la présence des ondes excitées par le tourbillon. De plus, la périodicité dans la direction azimutale rend difficile la mesure de χ_θ lorsque les extrema se situent de part et d'autre de $\theta = 0$. Cela explique les valeurs étranges de rapport d'aspect qu'on obtient lors de l'étude de l'évolution temporelle des paramètres des tourbillons. Cela est simplement dû à la méthode de mesure.

Ce modèle gaussien est à la fois une description analytique d'un tourbillon, mais aussi un outil de mesure qui permet d'en caractériser les dimensions afin de pouvoir les comparer. En particulier, la largeur radiale du tourbillon peut être déterminée, ce qui n'est pas possible de façon claire avec les modèles précédents. Enfin, un unique rapport d'aspect est accessible même dans les cas les plus exotiques.

3.3 Confrontation du modèle gaussien à la solution numérique

Pour terminer nous allons vérifier que la relation qui relie la perturbation d'enthalpie $\mathcal{H}$ au nombre de Rossby R_0 , au rapport radial χ_r et au rapport d'aspect χ_θ est confirmée sur les résultats numériques. Pour cela nous avons comparé le nombre de Rossby mesuré sur les simulations, $R_0 \text{ Num}$, avec celui obtenu grâce au modèle gaussien, $R_0 \text{ Mod}$:

$$R_0 \text{ Mod} = -\frac{1 + \beta_\Omega/2 + Y}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4(1 + \beta_\Omega/2 + 1/\chi_\theta^2) \frac{Y}{(1 + \beta_\Omega/2 + Y)^2}} \right] \quad (\text{V.79})$$

où $Y = \mathcal{H}_0/(2\Omega_0^2(r_0)r_0^2\chi_r^2)$. Ce résultat est la solution de l'équation du second degré que l'on obtient en inversant l'équation V.66, et en choisissant la racine la moins négative.

Nous avons mesuré χ_r , χ_θ et $\mathcal{H}_0$ sur quatre tourbillons obtenus par l'IOR. Le tableau 3.3 présente ces résultats. Le nombre de Rossby numérique est donné par le minimum au centre du tourbillon. Ces quatre tourbillons ont été choisis pour leur géométries différentes. Le rapport radial varie de 0.055 ce qui correspond à une échelle de hauteur du disque, jusqu'à 0.133 qui est plus de 2 échelles de hauteur. Les rapports d'aspect varient de 7 à 11 typiquement. Enfin l'amplitude de l'enthalpie $\mathcal{H}_0$ varie du simple au double, c'est-à-dire de 8×10^{-5} à 1.7×10^{-4} .

Malgré cette diversité, le nombre de Rossby donné par notre modèle est à moins de 10% près égal à celui mesuré sur chaque tourbillon. On peut remarquer que l'écart est plus important pour les tourbillons qui ont le plus grand rapport d'aspect χ_θ . Cependant nous pouvons conclure que le modèle gaussien est en accord avec les résultats numériques et que la relation qui relie les divers paramètres de la gaussienne est confirmée numériquement.

Nous pouvons maintenant utiliser ce modèle pour explorer la diversité des tourbillons qui peuvent exister dans les disques. Le modèle gaussien sera utilisé pour définir les conditions initiales des simulations numériques. De plus les résultats théoriques permettront de mesurer précisément les

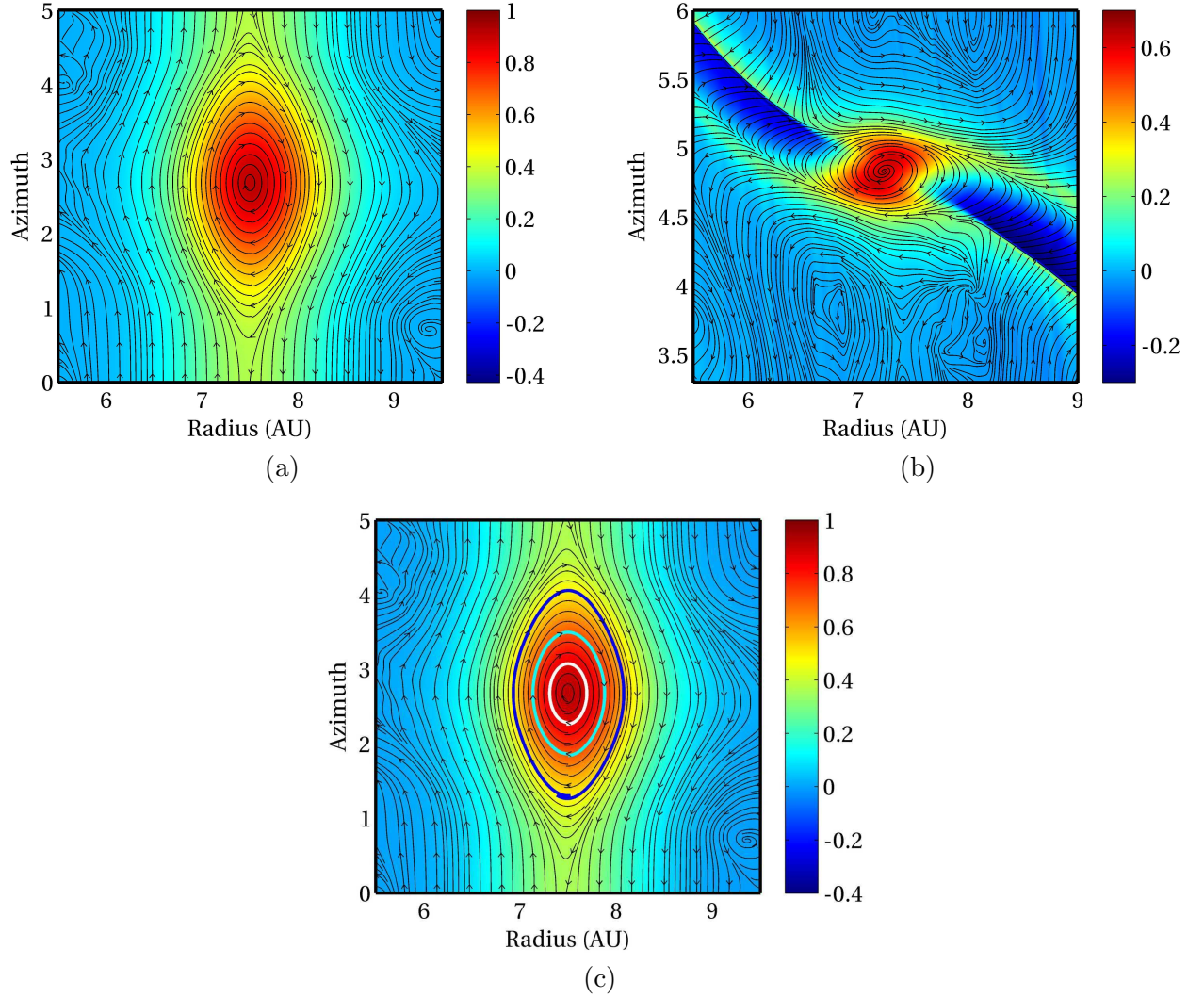


Figure V.8 — Cartes de densité relative à celle du disque, dans le plan (r, θ) , pour deux tourbillons différents (a) et (b). Sont superposées en noir quelques lignes de courant. Sur la figure (a) les lignes sont fermées dans le tourbillon et légèrement déformées à son extérieur. Sur la figure (b) elles spiralent vers l'extérieur du tourbillon et présentent une structure complexe dans la région des ondes spirales. On remarque notamment la présence de chocs dans le bras supérieur à gauche du tourbillon, et dans le bras inférieur à sa droite. La figure (c) est quant à elle la reproduction du cas (a) avec l'identification de trois lignes de courant différentes colorées en blanc, cyan et bleu, suivant leur éloignement du centre du tourbillon.

χ_r	χ_θ	$\mathcal{H}_0$	R_0 Num	R_0 Mod	Erreur
0.133	7.47	5.36×10^{-4}	-0.138	-0.132	-4.3 %
0.055	8.10	8.41×10^{-5}	-0.105	-0.115	10 %
0.107	10.8	3.42×10^{-4}	-0.111	-0.121	9.0 %
0.076	6.76	1.71×10^{-4}	-0.127	-0.131	3.1 %

Tableau V.1 – Comparaison entre les nombres Rossby mesurés et les valeurs données par le modèle pour différents tourbillons. Les trois premières colonnes sont les valeurs de χ_r , χ_θ et $\mathcal{H}_0$ mesurées sur chaque tourbillon. La quatrième colonne reporte les valeurs mesurées du nombre de Rossby au centre de chaque tourbillon, alors que la cinquième donne les valeurs calculées par le modèle gaussien, d’après celles de paramètres χ_r , χ_θ et $\mathcal{H}_0$ mesurés. Enfin, on montre en dernière colonne l’écart relatif entre les deux valeurs du nombre de Rossby.

dimensions des tourbillons afin des les caractériser, de définir des familles et d’étudier la variabilité temporelle de ces structures.

4 Ajustement de tourbillons issus du modèle

Dans cette partie nous allons montrer comment le modèle gaussien évolue au cours des premières rotations du disque, c’est-à-dire lors de la phase de relaxation numérique du modèle. Ce dernier étant une solution stationnaire des équations linéaires, on s’attend à ce que des effets non linéaires, comme la compressibilité du gaz, affectent sa structure. Ce phénomène a été constaté et discuté en détail dans Bodo, 2005 [3], mais les limitations de leur modèle de tourbillon initial biaisent, d’après nous, leurs conclusions.

Nous allons comparer deux tourbillons de géométrie et de vorticité (ou nombre de Rossby) différentes. Ils sont tous les deux placés dans un disque qui s’étend de 5 à 10 UA , de densité $\sigma_0(r) = 82.8(\frac{r}{r_0})^{-3/2} g.cm^{-2}$ et de température $T_0(r) = 83.6(\frac{r}{r_0})^{-1/2} K$. Leur position initiale est $r_0 = 7.5 UA$ et $\theta_0 = 3$. La résolution numérique utilisée est $(N_r, N_\theta) = (200, 400)$, ce qui est assez faible mais suffisant pour décrire la phase de relaxation.

4.1 Relaxation d’un petit tourbillon

Le premier cas est un tourbillon de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.175, 0.07, 4)$. C’est un tourbillon de largeur radiale faible, proche de l’échelle de hauteur, et de Rossby important. La vorticité en son centre représente 70% de la vorticité locale du disque. Le rapport d’aspect de 4 est petit et correspond à ce qui est mesuré communément dans la littérature (comme ceux de Lyra, 2011 [18]). Le choix de ces paramètres est arbitraire. Pour l’instant aucune relation entre les trois n’est supposée. On s’attend à ce que cette condition initiale perturbe le disque.

Les figures qui suivent montrent l’évolution de la vitesse radiale (Figure V.9), de la vitesse azimutale à laquelle est retranchée la vitesse du disque $V_0(r)$ (Figure V.10), de la densité relative à celle du disque (Figure V.11), de la température relative (Figure V.12), qui traduit la pseudo enthalpie $\mathcal{H}$, et de la vorticité relative (Figure V.13). Dans chaque cas, la figure (a) montre l’instant initial, (b) montre l’évolution après 1 rotation, (c) après 2 rotations, et (d) après 15 rotations.

On remarque en premier lieu que la solution reste à la position initiale (r_0, θ_0) , ce qui montre que la solution stationnaire linéaire est une bonne solution à l'ordre le plus bas. Cependant des déformations importantes ont lieu lors des toutes premières rotations. Après 1 rotation (b), toutes les grandeurs, mais dans une moindre mesure la vitesse azimutale, montrent l'émission d'un paquet qui s'éloigne radialement du centre du tourbillon. Après 2 rotations (c), ce paquet est dissipé et cisailé par l'écoulement du disque. Ce phénomène provient de la compression exercée par la condition initiale dans la direction radiale. En effet, on remarque que la vitesse radiale initiale du tourbillon n'est pas conservée après les premières rotations. Les extrema dans le tourbillon sont 50% plus faibles après relaxation. La vitesse radiale initiale est donc surestimée par le modèle gaussien dans le cas des petits tourbillons.

On note ensuite l'apparition de bras spiraux dès la première rotation. Ils sont excités par le tourbillon et leur amplitude se stabilise après 15 rotations (d), suite à une phase d'oscillation. Malgré cela, le tourbillon en lui-même conserve sa forme et son amplitude. Seule son orientation dans l'écoulement est modifiée lors de cette relaxation. Cela est particulièrement visible sur l'évolution de la vorticité (Figure V.13). Il semble se mettre en rotation anticyclonique pour finalement retrouver quasiment la géométrie initiale. Au cours de ce phénomène, une partie de la vorticité contenue dans le tourbillon est déposée dans le disque sous la forme de bandes étirées dans la direction azimutale, que l'on peut voir notamment figure (c). La vitesse azimutale (Figure V.10) traduit cette adaptation au sein de l'écoulement, car le grand axe du tourbillon, initialement aligné avec l'axe azimutal, passe d'un angle négatif après 1 rotation (b),   un angle positif par rapport à la direction azimutale après 2 rotations. Il conserve ensuite cette orientation pour le reste de son évolution. Ce déroulement est similaire à celui décrit par Davis, 2000 et 2002 [8] [7], ce qui montre que cette émission d'onde et cette orientation prise dans l'écoulement est générale à la relaxation d'un tourbillon, quelque soit le modèle initial utilisé.

La relaxation d'un tourbillon de grand nombre de Rossby et de petit rapport d'aspect perturbe donc le disque lors des premières rotations mais la structure du tourbillon n'est pas affectée. Cette relaxation consiste essentiellement en l'apparition d'ondes spirales, les autres structures étant transitoires. La solution gaussienne est donc un modèle qui résiste à la non linéarité de la relaxation. La continuité de la solution, contrairement aux modèles de Kida ou GNG, est responsable ce phénomène. Seule la vitesse radiale subit la plus forte modification.

4.2 Relaxation d'un gros tourbillon

Ce deuxième cas est un tourbillon de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.125, 0.10, 11)$. La largeur radiale est proche de 2 échelles de hauteur, le Rossby correspond à une vorticité au centre du tourbillon valant 50% celle du disque, et le rapport d'aspect est élevé. Cette solution ressemble aux tourbillons que nous avons obtenus après l'IOR. Nous allons présenter son évolution lors des 15 premières rotations.

Comme nous l'avons fait pour le petit tourbillon, les figures qui suivent montrent l'évolution de la vitesse radiale (Figure V.14), de la vitesse azimutale à laquelle est retranchée la vitesse du

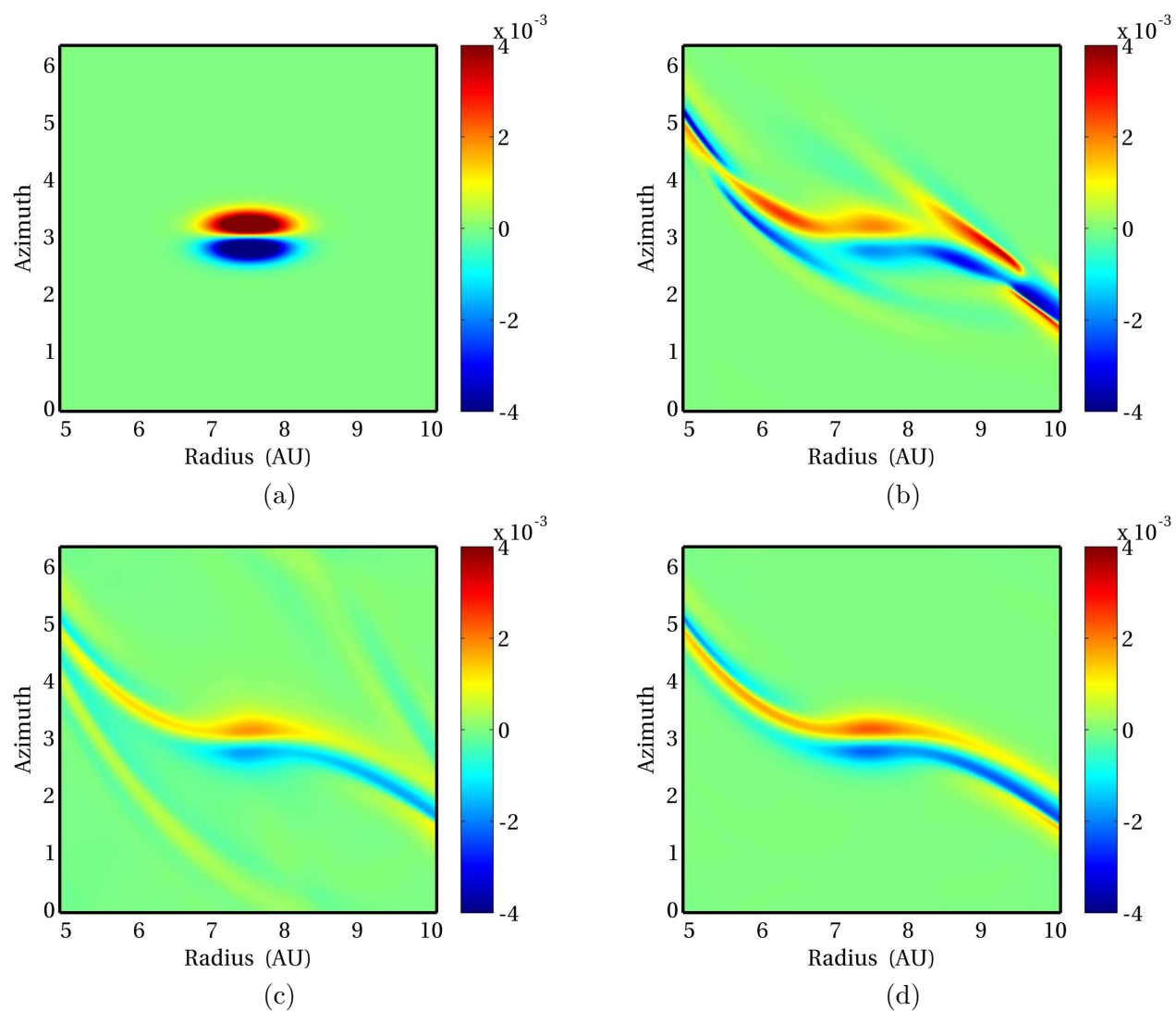


Figure V.9 – Relaxation de la vitesse radiale d'un petit tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

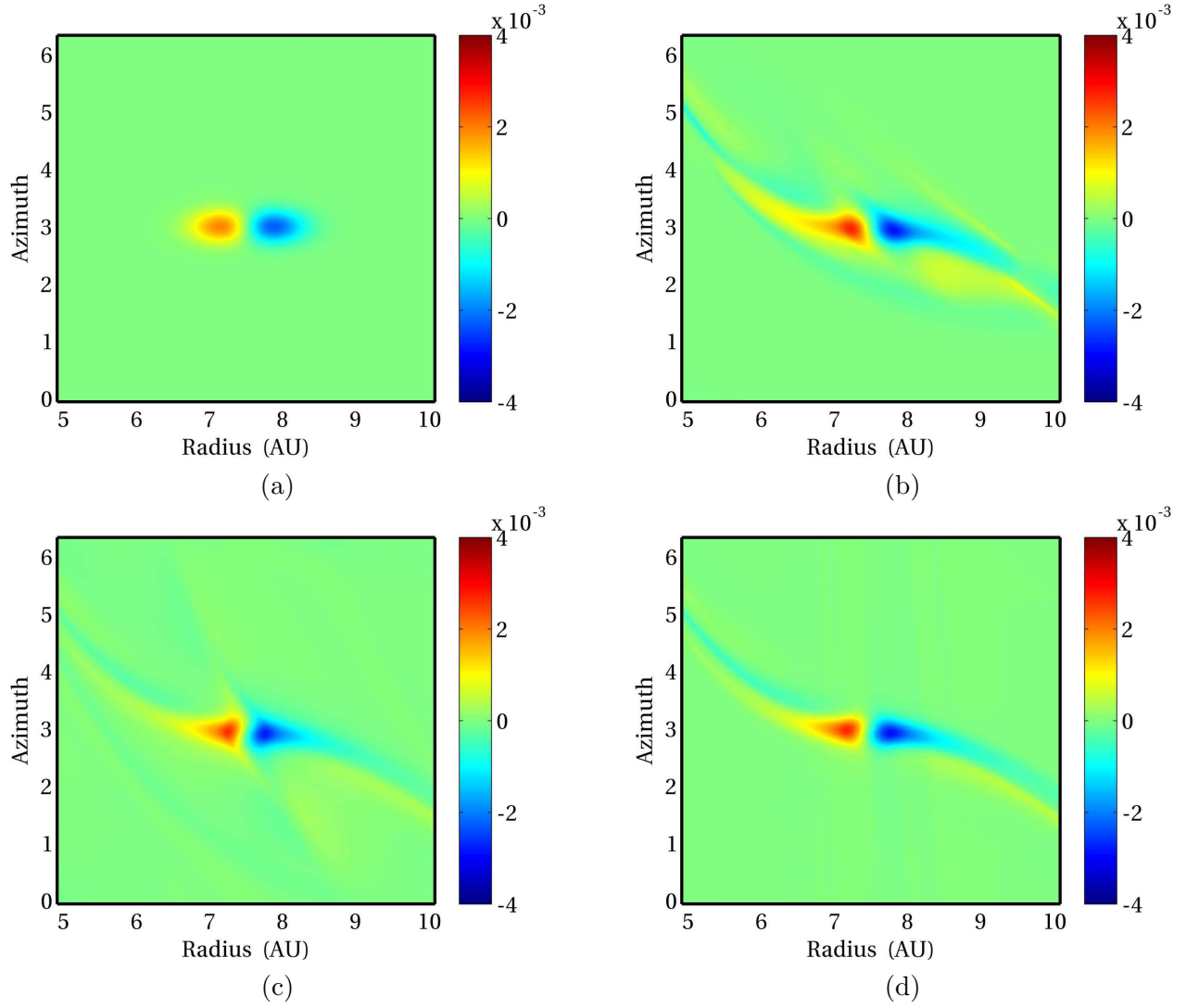


Figure V.10 — Relaxation de la vitesse azimutale d'un petit tourbillon, à laquelle est retranchée la vitesse du disque $V_0(r)$, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

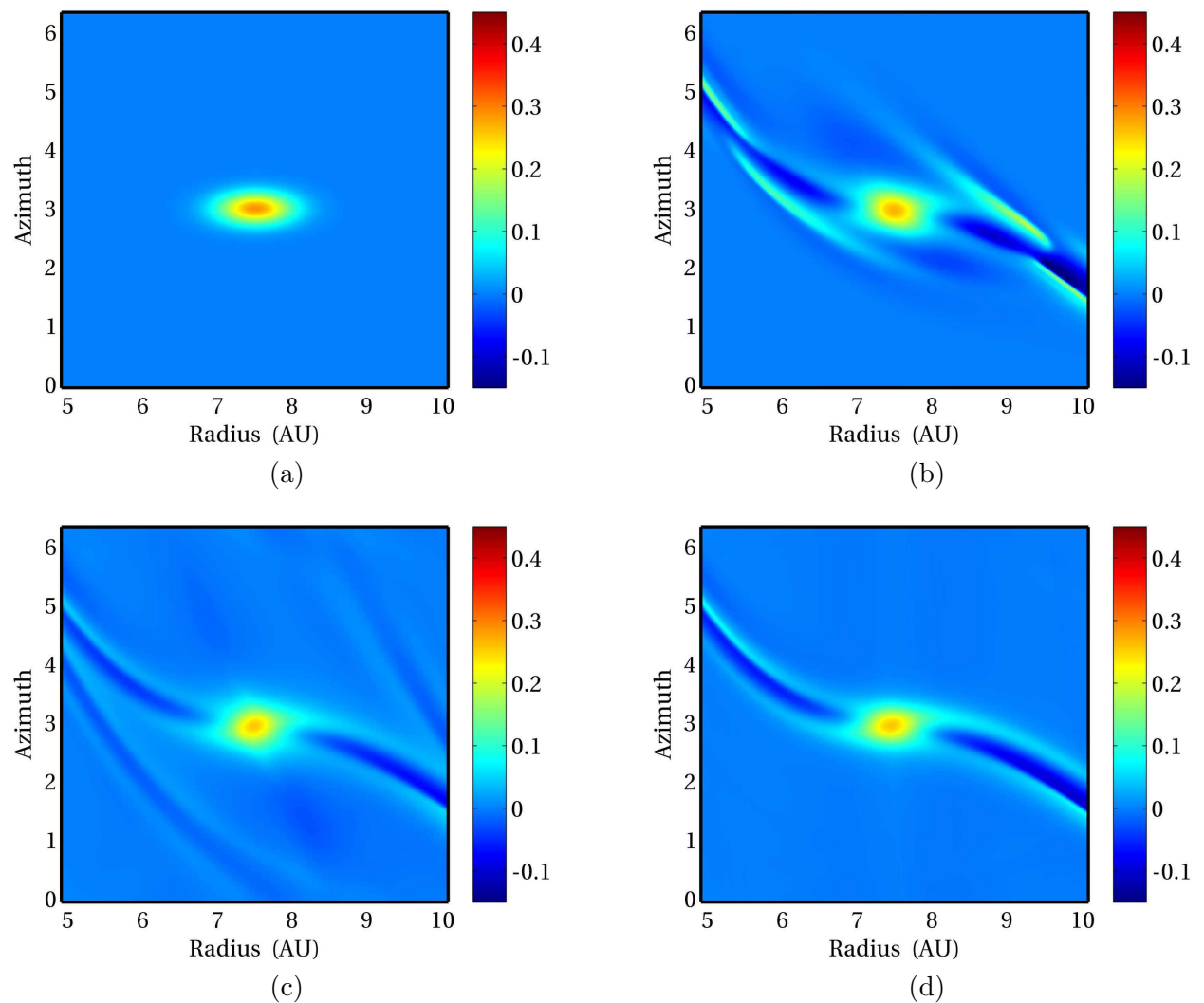


Figure V.11 — Relaxation de la densité relative à celle du disque d'un petit tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

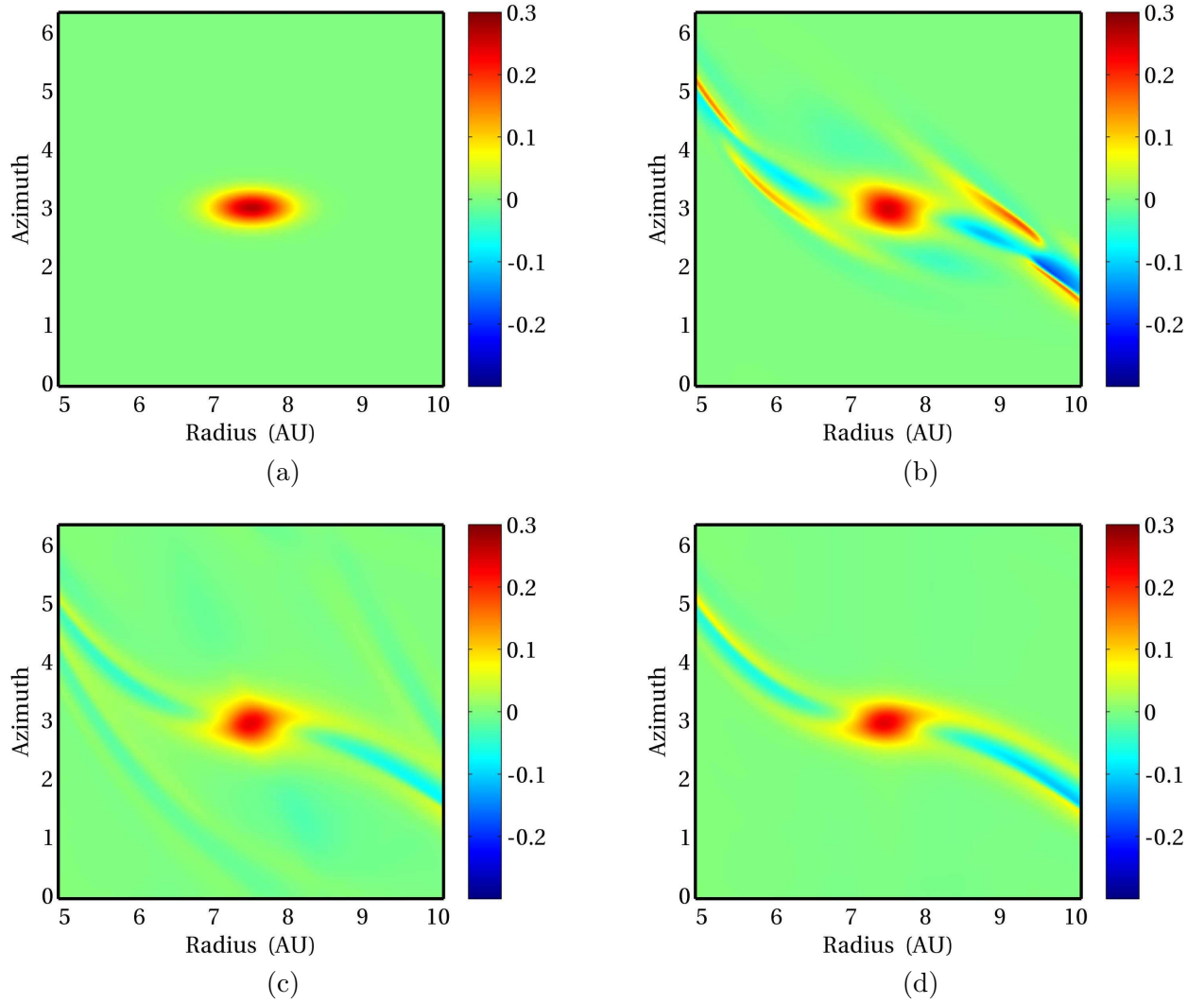


Figure V.12 — Relaxation de la température relative à celle du disque d'un petit tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

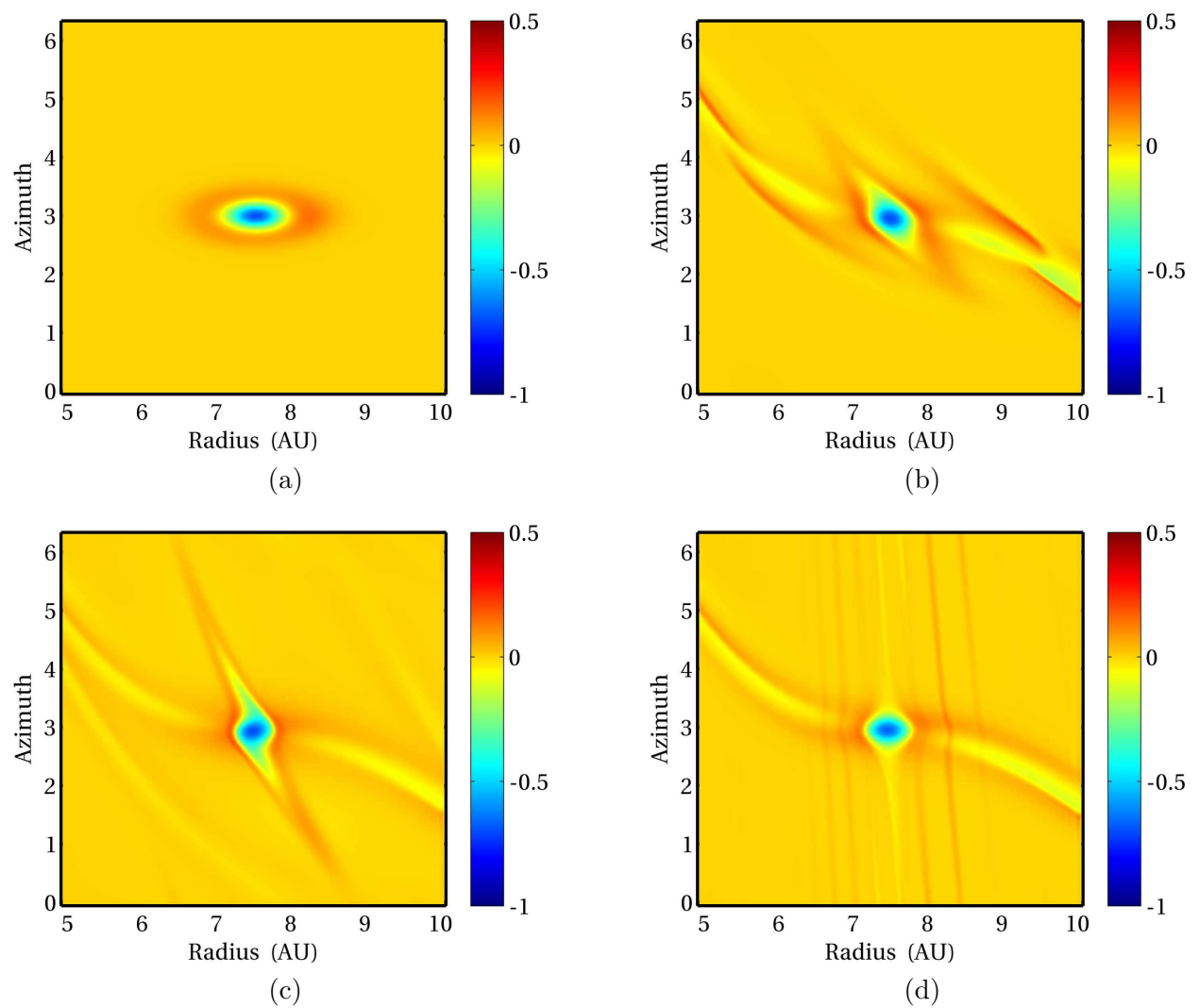


Figure V.13 – Relaxation de la vorticité relative à celle du disque d’un petit tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l’état initial, la figure (b) l’état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

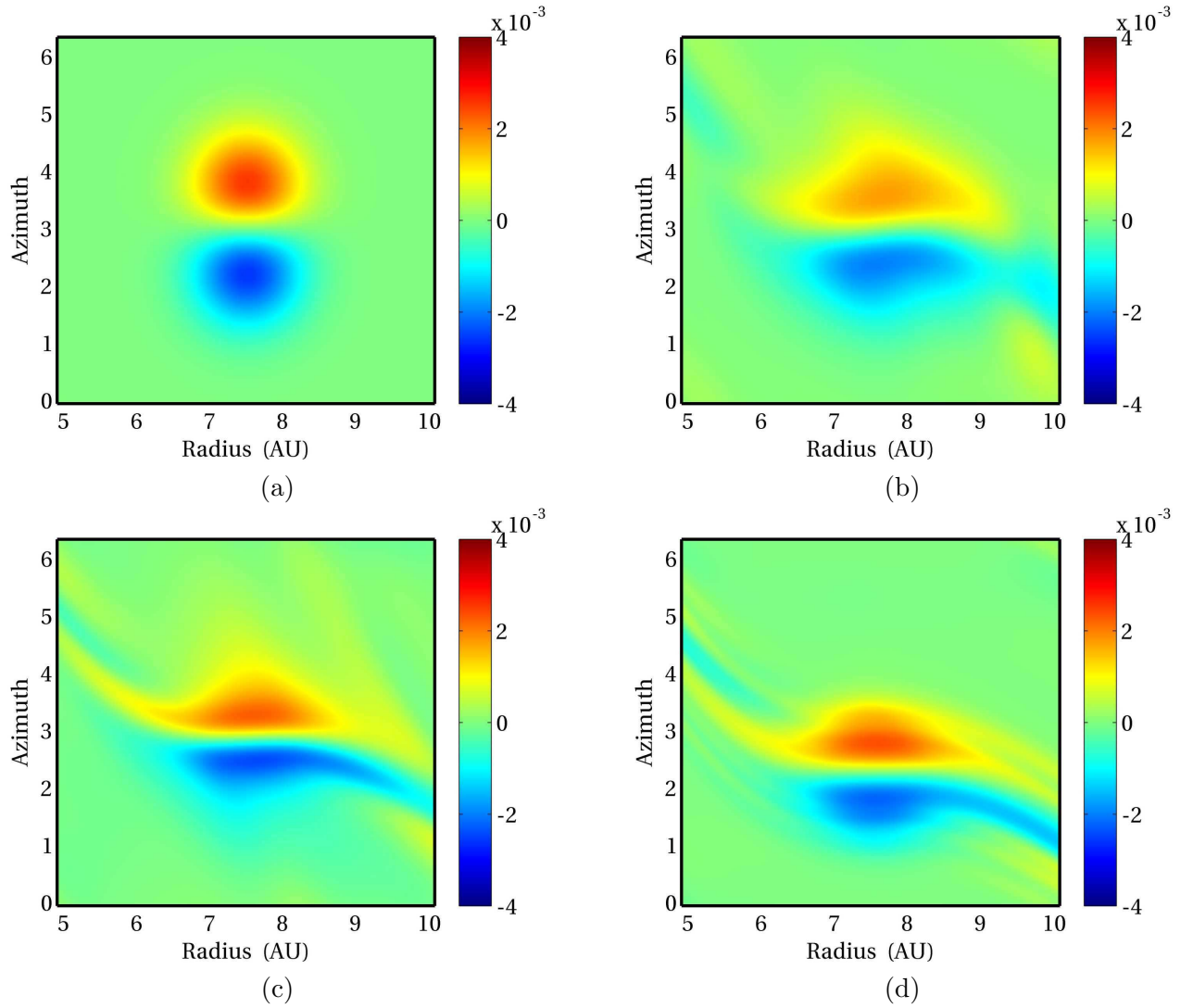


Figure V.14 – Relaxation de la vitesse radiale d'un gros tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'instant initial, la figure (b) l'instant après 1 rotation, la figure (c) l'instant après 2 rotations et la figure (d) l'instant après 15 rotations.

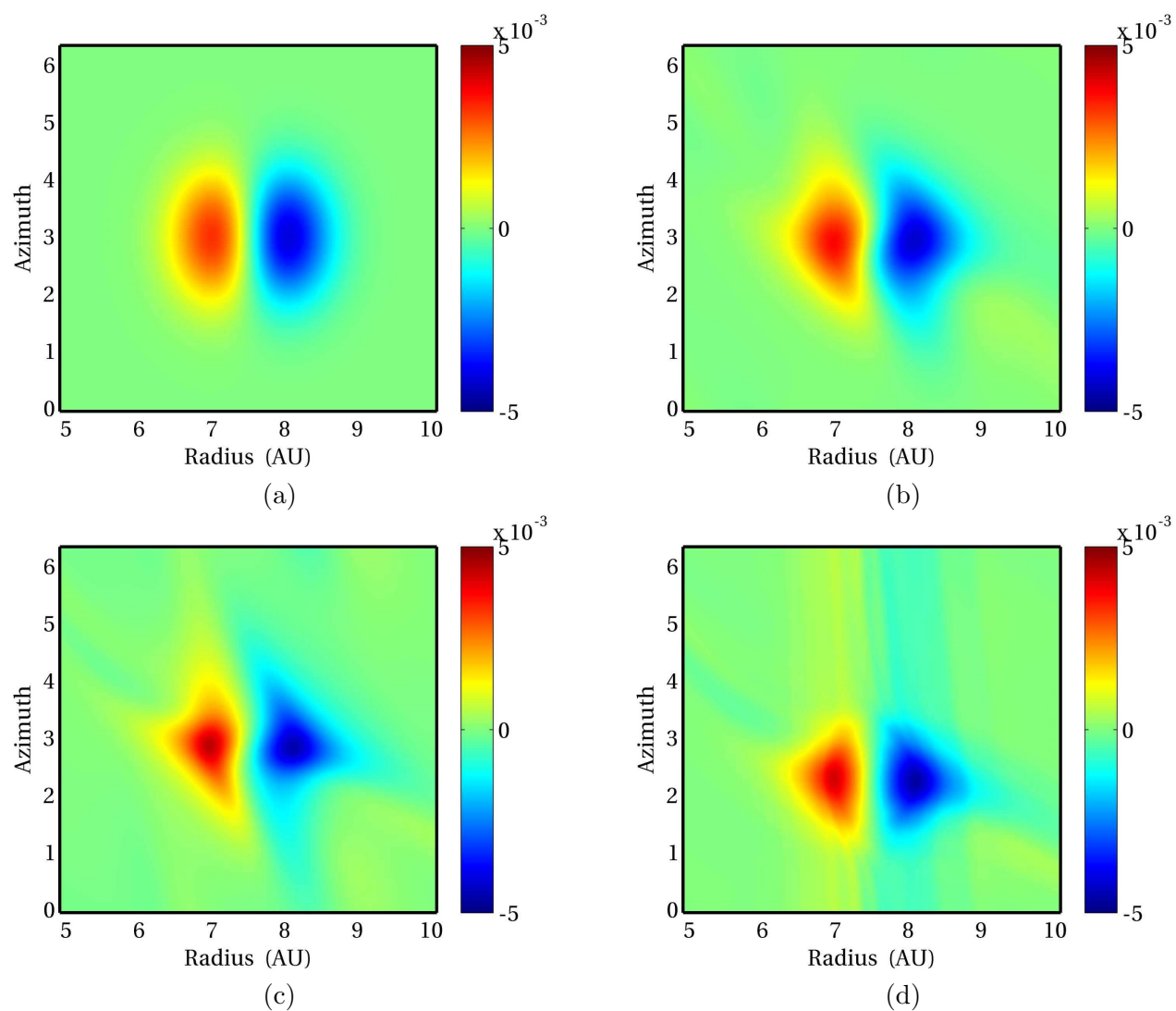


Figure V.15 — Relaxation de la vitesse azimutale d'un gros tourbillon, à laquelle est retranchée la vitesse du disque $V_0(r)$, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

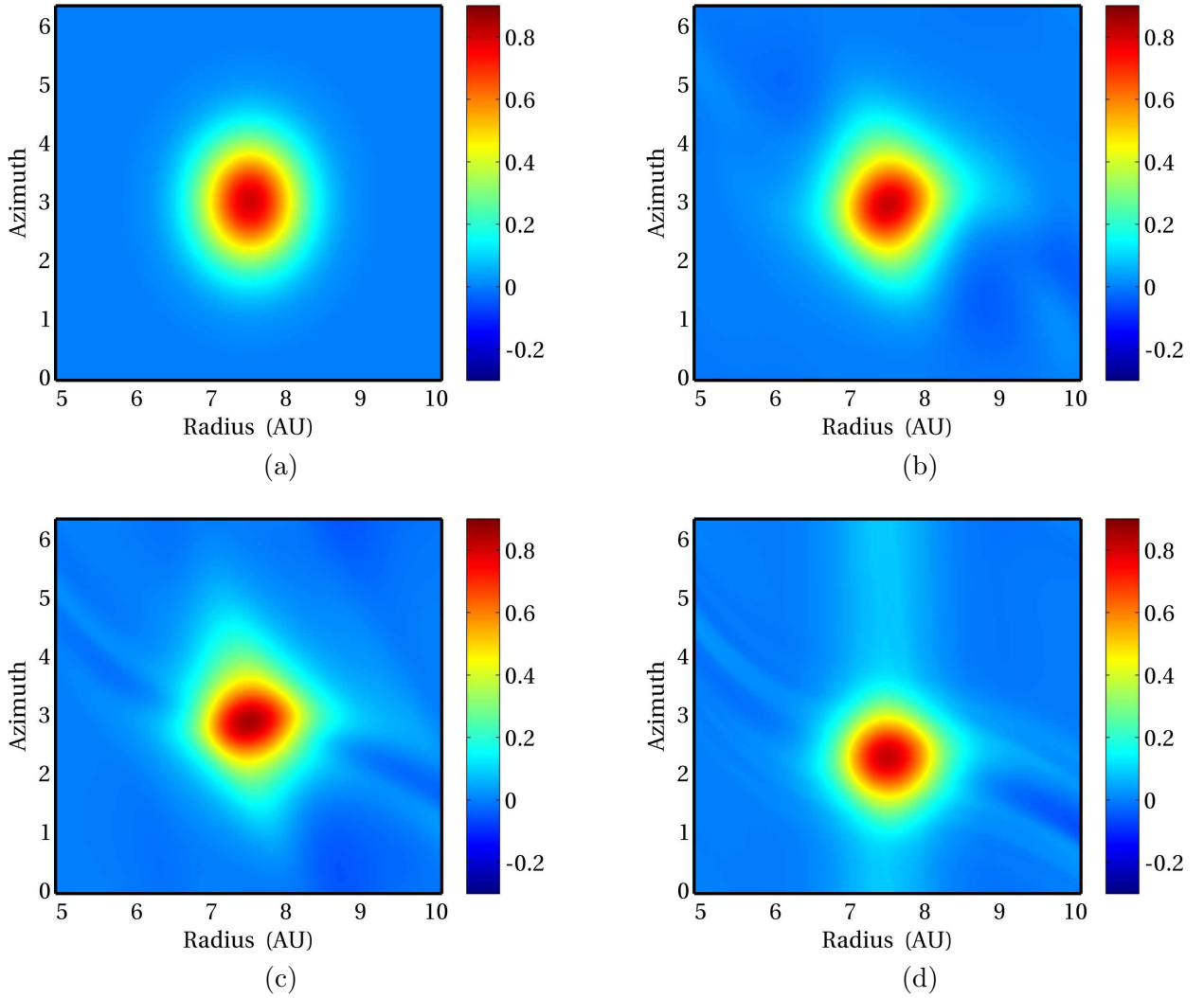


Figure V.16 — Relaxation de la densité relative à celle du disque d'un gros tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

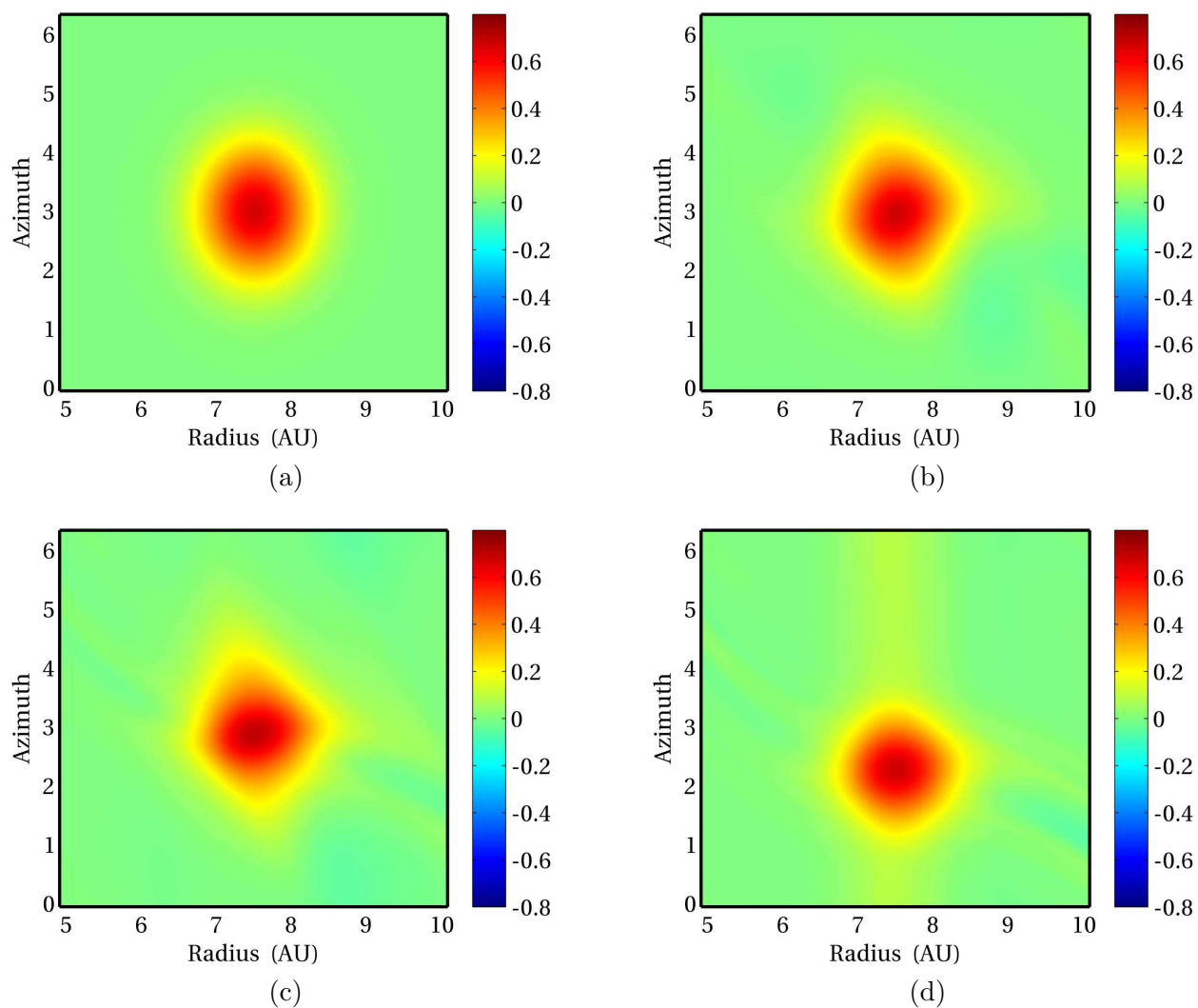


Figure V.17 — Relaxation de la température relative à celle du disque d'un gros tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

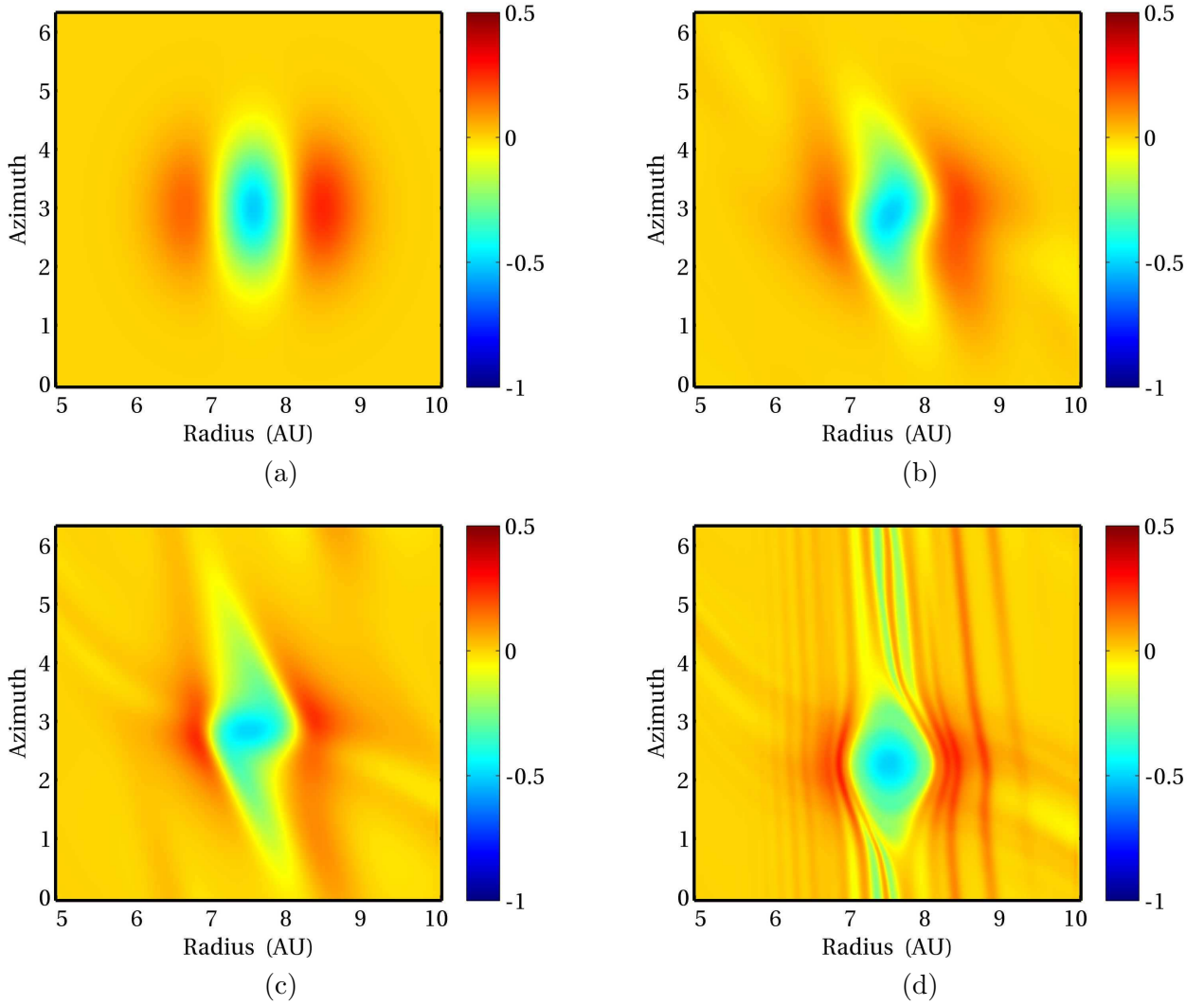


Figure V.18 — Relaxation de la vorticité relative à celle du disque d'un gros tourbillon, cartes dans le plan (r, θ) . La figure (a) montre l'état initial, la figure (b) l'état obtenu après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations et la figure (d) après 15 rotations.

disque $V_0(r)$ (Figure V.15), de la densité relative à celle du disque (Figure V.16), de la température relative (Figure V.17) qui traduit la pseudo enthalpie $\mathcal{H}$, et de la vorticité relative (Figure V.18). Dans chaque cas, la figure (a) montre l’instant initial, la figure (b) l’évolution après 1 rotation, la figure (c) après 2 rotations, et la figure (d) après 15 rotations.

L’ajustement de la solution initiale dans le disque se déroule de façon similaire au cas précédent. Cependant toutes les grandeurs gardent avec une bonne précision les valeurs extrêmes qu’elles avaient lors de l’instant initial. C’est le cas en particulier pour la vitesse radiale. Le paquet éjecté dans la direction radiale est très ténu dans ce cas et l’apparition des ondes spirales est retardée. Elles ne sont établies qu’après 15 rotations, et leur amplitude est très faible en comparaison avec les valeurs présentes dans le tourbillon.

La forme du tourbillon est légèrement modifiée comme on peut le voir sur la température (Figure V.17). Le profil gaussien symétrique est modifié et un profil plus anguleux s’établit après 15 rotations, figure (d). De plus, une bande axisymétrique apparaît dans le disque dans la zone de corotation, ce qui n’était pas le cas pour le tourbillon précédent. Ce changement provient du dépôt plus important de vorticité dans le disque (Figure V.18). Il faut plus de temps au tourbillon pour se stabiliser dans l’écoulement, et cette relaxation déphase sa position qui passe de $\theta_0 = 3$ à $\theta_0 = 2.5$.

On remarque enfin que la vitesse azimutale (Figure V.15) est aussi perturbée. Une phase d’inclinaison par rapport à l’axe azimutal se déroule jusqu’à une dizaine de rotations, avec l’apparition d’une structure en S au niveau du centre du tourbillon. Il n’y a pas d’inclinaison aussi nette que dans le cas précédent. De plus cet effet disparaît après 15 rotations, le tourbillon reprenant la géométrie initiale.

La relaxation d’un tourbillon de grande taille semble moins perturber le disque qu’un tourbillon de petite taille mais requiert plus de temps. Les valeurs initiales de vitesse et d’amplitude sont très bien conservées, ainsi que la géométrie du tourbillon. Corrélativement, on note la quasi-absence d’ondes spirales. Dans ce cas, la solution stationnaire que nous avons développée semble bien résister à la relaxation.

5 Géométrie et diversité des tourbillons

Si le modèle gaussien relaxe de façon quasi stationnaire dans le disque, la diversité des solutions qui peuvent exister reste encore à explorer. L’instabilité de Rossby a tendance à créer des tourbillons de grande taille et de nombres de Rossby de valeurs similaires. Les tourbillons 2D que l’on trouve dans la littérature sont eux aussi de grande taille avec des rapports d’aspect proches de 4. De plus, l’extension radiale est souvent de l’ordre de l’échelle de hauteur. Il est admis qu’au-delà, le cisaillement de l’écoulement déforme et détruit les parties externes du tourbillon, le confinant dans une taille de l’ordre de l’échelle de hauteur (comme le discute Tagger, 2001 [23]). Cependant aucune étude numérique non linéaire n’a exploré ce problème. C’est dans cette optique que notre travail se situe.

Nous avons simulé plus de 250 tourbillons de largeur radiale, de rapport d’aspect et de nombre de Rossby différents, dans des disques de gradient de densité et de température différents. Toutes

ces simulations ont été réalisées avec la même taille de disque et la même résolution numérique. Le disque s'étend de 5 à 10 UA , une rotation étant définie au rayon $r_0 = 7.5 UA$. La résolution numérique est $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$. La densité du disque est $\sigma_0(r) = 82.8(\frac{r}{r_0})^{\beta_\sigma} g.cm^{-2}$ et de température $T_0(r) = 83.6(\frac{r}{r_0})^{\beta_T} K$, de façon à ce que changer les gradients de densité β_σ et de température β_T ne change pas les paramètres du disque au rayon r_0 . Le tourbillon est initialement imposé au rayon r_0 et à l'azimut $\theta_0 = 3$. Enfin nous suivons l'évolution sur plusieurs centaines de rotations, 200 dans la plupart des cas.

5.1 Extension radiale

Nous avons imposé initialement, de façon arbitraire, les paramètres du modèle gaussien, en essayant de couvrir la plus large gamme de valeurs possibles. Dans certains cas, le choix des paramètres débouchait sur une relaxation déformant significativement le tourbillon. Cependant nous verrons que le paramètre le plus critique dans cette étude est le rapport d'aspect. Par conséquent, lorsque ce dernier est choisi convenablement par différents tests, nous avons pu constater que le choix du rapport radial a peu d'influence sur la relaxation du modèle, et qu'il peut varier significativement.

Nous avons mesuré la largeur radiale, en particulier le rapport radial χ_r , par la procédure expliquée au paragraphe 3.2. La diversité des valeurs mesurées est présentée sur la Figure V.19, qui représente la valeur du rapport radial pour chaque tourbillon de l'échantillon après sa relaxation. Ces valeurs s'étalent de 0.02 à 0.15 de façon continue. Il y a presque un ordre de grandeur de différence entre la valeur minimale et la valeur maximale.

Un tourbillon de largeur radiale égale à l'échelle de hauteur du disque a pour rapport radial 0.055. On met en évidence que la majorité des tourbillons que nous avons simulés a un rapport radial supérieur à celui de l'échelle de hauteur. Le plus large a même une largeur de 3 échelles de hauteurs. Par ailleurs, on trouve aussi des tourbillons dont la taille est inférieure à l'échelle de hauteur. Les tourbillons injectés ne sont donc pas tous cisailés par l'écoulement képlérien. En effet, ce ne sont pas des structures rigides comme le précisaient certains (Tagger, 2001 déjà cité), et elles supportent donc l'écoulement différentiel. C'est l'adaptation de leur vitesse azimutale dans les parties externes qui leur permet de résister dans l'écoulement.

L'étude à deux dimensions est valable si l'échelle de hauteur est très petite devant le rayon du disque, c'est à dire si $H_0(r)/r \ll 1$, ce qui est conforme à nos hypothèses de travail. Par conséquent, les résultats numériques sont pertinents si la taille du tourbillon devient supérieure à l'échelle de hauteur. Dans le cas contraire, l'évolution d'un tourbillon de taille inférieure à l'échelle de hauteur peut être modifiée par les mouvements verticaux, et il est alors nécessaire de résoudre les équations dans les 3 dimensions. C'est pourquoi nous ne considérerons la plupart du temps que les tourbillons plus grands que l'échelle de hauteur.

Nous avons comparé la structure d'un tourbillon de même nombre de Rossby $R_0 = -0.13$ et de même rapport d'aspect $\chi_\theta = 7$ pour des largeurs radiales différentes. Sur la Figure V.20, on montre la densité relative ainsi que des lignes de courant pour quatre largeurs radiales. Le premier (a) a un rapport radial $\chi_r = 0.06$, le second (b) a un rapport radial $\chi_r = 0.08$, le troisième (c) a

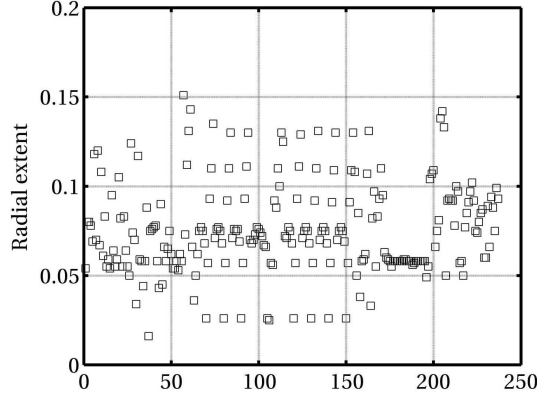


Figure V.19 – Valeurs du rapport radial χ_r pour chaque tourbillon de l'échantillon. En abscisse est simplement repéré l'indice arbitraire de numérotation du tourbillon. L'échelle de hauteur correspond à un rapport radial de $H_0(r_0)/r_0 = 0.055$.

un rapport radial $\chi_r = 0.11$ et enfin le dernier (d) a un rapport radial $\chi_r = 0.13$. Ces valeurs sont mesurées après 120 rotations. On remarque que la structure est similaire pour les quatre largeurs. Les ondes spirales excitées sont de même amplitude dans chacun des cas. La taille radiale n'a donc pas d'influence notable sur l'amplitude des ondes émises par le tourbillon. Il semble donc y avoir radialement une auto-similarité de la solution.

Les lignes de courant montrent que l'écoulement est perturbé par la présence du tourbillon, mais la forme de ces lignes est similaire pour les différentes largeurs. Il semble que le tourbillon soit confiné entre les ondes spirales, qui ont des écoulements de sens opposé. Dans l'onde de "front", qui se situe aux azimuts les plus élevés, le gaz s'écoule de l'extérieur vers l'intérieur du disque. Dans l'onde de "queue", qui se situe aux azimuts les moins élevés, le gaz s'écoule de l'intérieur vers l'extérieur du disque. L'écart azimutal entre ces deux ondes augmente avec la largeur radiale du tourbillon. Ainsi, l'écoulement dans le tourbillon, compris entre ces deux ondes est similaire, avec des lignes à la forme quasi elliptique, qui suivent un rapport d'échelle avec la largeur radiale.

Enfin on remarque que le maximum de densité dans chaque tourbillon augmente avec la largeur radiale, à nombre de Rossby et rapport d'aspect fixés. Plus particulièrement, on retrouve la dépendance prédite par le modèle gaussien :

$$\sigma_{max} \propto -R_0 \chi_r^2 \quad (\text{V.80})$$

la dépendance en rapport d'aspect étant faible, dès que celui-ci est supérieur à 4, comme c'est le cas ici. Pour les quatre tourbillons envisagés ici, dont les nombres de Rossby et rapports d'aspect sont les mêmes à 10% près, cette relation est vérifiée à 10% près. La largeur d'un tourbillon ne semble donc pas limitée et on peut donc supposer que des structures de taille très supérieure à l'échelle de hauteur peuvent exister dans le disque.

Pour qu'un tourbillon soit stable dans l'écoulement, il faut que cette structure reste subsonique,

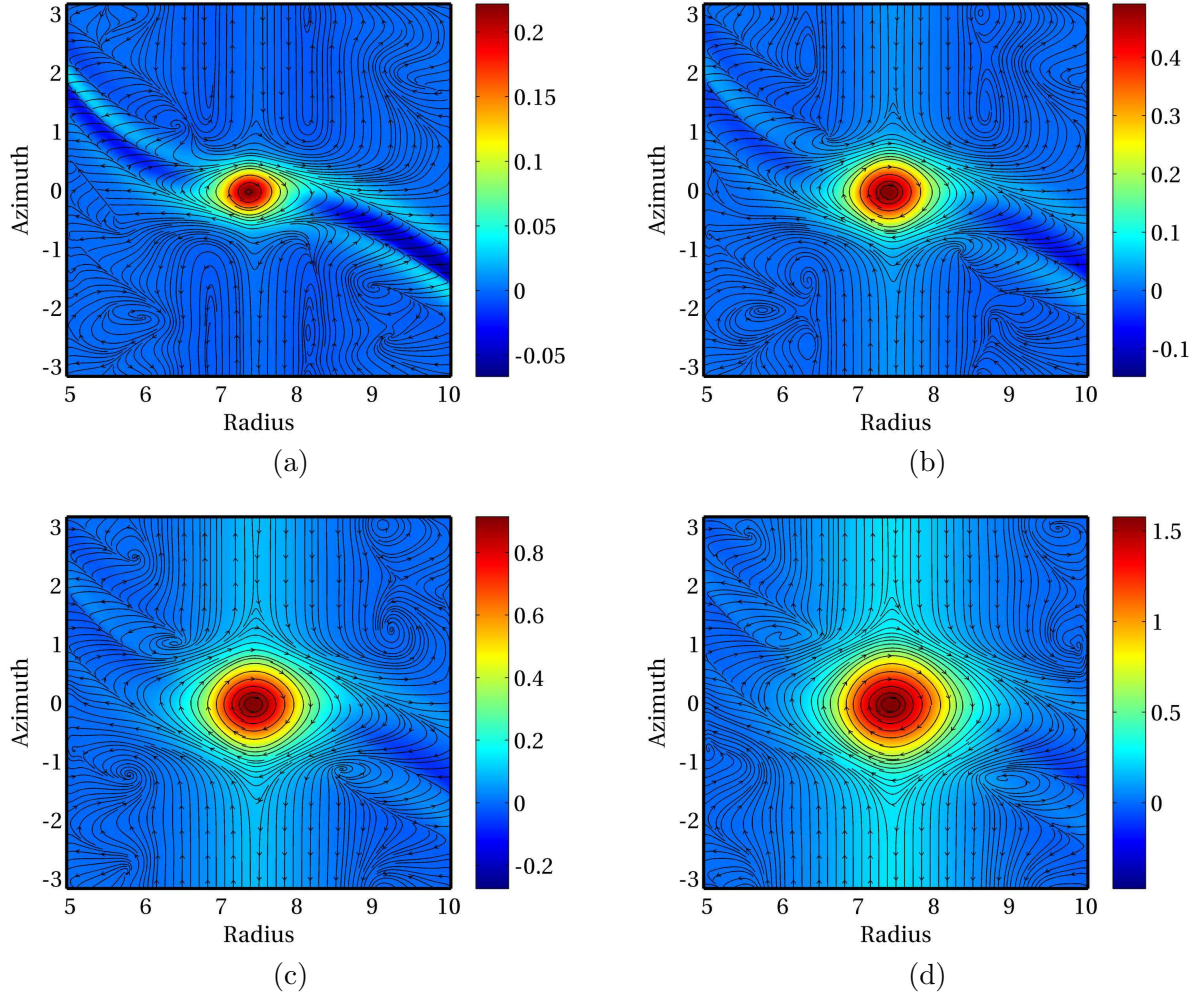


Figure V.20 – Cartes de la densité relative à celle du disque pour différents tourbillons de même nombre de Rossby $R_0 = -0.13$ et rapport d'aspect $\chi_\theta = 7$. Le tourbillon (a) a un rapport radial $\chi_r = 0.06$, le tourbillon (b) un rapport radial $\chi_r = 0.08$, le tourbillon (c) un rapport radial $\chi_r = 0.11$ et le tourbillon (d) un rapport radial $\chi_r = 0.13$. Sur chacun est superposé un certain nombre de lignes de courant en noir afin de caractériser l'écoulement du gaz dans le repère du tourbillon.

c'est-à-dire que localement, la vitesse du gaz dans le tourbillon doit être inférieure à la vitesse du son. Sinon, un choc se produit et détruit la cohésion de l'écoulement dans le tourbillon, limitant ainsi sa taille. C'est pourquoi il est souvent admis que la largeur radiale d'un tourbillon doit être inférieure à l'échelle de hauteur. En effet, dans une approche localement cartésienne, comme c'est le cas dans le modèle GNG, le champ de vitesse du tourbillon est linéaire. Donc si le tourbillon centré en r_0 s'étend jusqu'à une distance $x = H_0(r_0) = c_{s0}(r_0)/\Omega_0(r_0)$, et que la vitesse à cet endroit vaut la vitesse du son, alors la vorticité du tourbillon vaut $-\Omega_0(r_0)$. Ce critère est donc valable pour un tourbillon de forte vorticité. En fait, cette détermination de l'extension radiale maximale d'un tourbillon reste très qualitative et doit être reconsidérée.

Pourtant, les résultats de Bodo, 2007 [4], montrent déjà que certains tourbillons peuvent avoir une dimension radiale largement plus grande que l'échelle de hauteur, et cela s'accroît lorsque la vitesse du son dans le disque diminue. Le modèle gaussien permet de déterminer plus précisément la relation entre cette largeur radiale maximale et la vitesse du son du disque, en tenant compte de la vorticité effective du tourbillon. En reprenant les équations du modèle, on peut écrire :

$$v \sim -(\Omega_0(r_0)r_0\chi_r^2)^{-1} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \mathcal{H} \quad (\text{V.81})$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \exp \left[-\chi_r^{-2} \left[\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2 + \chi_\theta^{-2} (\theta - \theta_0)^2 \right] \right] \quad (\text{V.82})$$

$$\mathcal{H}_0 \sim -2R_0r_0^2\Omega_0^2(r_0)\chi_r^2 \quad (\text{V.83})$$

La vitesse azimutale sera donc maximale pour $r/r_0 - 1 = \chi_r/\sqrt{2}$. On obtient alors la valeur maximale de la vitesse azimutale :

$$v_{max} \sim \sqrt{2} \exp(-1/2) r_0 \Omega_0(r_0) \chi_r \quad (\text{V.84})$$

le terme exponentiel provenant de la gaussienne.

Si l'on impose que cette vitesse doit être inférieure à la vitesse du son, on obtient un critère sur la largeur radiale maximale en fonction du nombre de Rossby :

$$\chi_r < \frac{H_0(r_0)}{r_0} \frac{1}{|R_0|} \frac{\exp(1/2)}{\sqrt{2}} \sim \frac{H_0(r_0)}{r_0} \frac{1}{|R_0|} \quad (\text{V.85})$$

Cette équation montre que la largeur radiale, en terme d'échelle de hauteur $H_0(r_0) = c_{s0}(r_0)/\Omega_0(r_0)$, est bornée par l'inverse du nombre de Rossby. La largeur radiale n'est donc limitée à une échelle de hauteur que dans le cas où le nombre de Rossby du tourbillon vaut $R_0 = -1$, ce qui est extrêmement fort. Nous verrons dans le paragraphe suivant que nos simulations montrent que le nombre de Rossby est le plus souvent supérieur à -0.3 typiquement.

Pour vérifier la relation de l'équation V.85, nous avons simulé un tourbillon de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.2, 0.19, 4.5)$, par conséquent dont la taille radiale est égale à 3 échelles de hauteur. La Figure V.21 montre la densité relative (a) et la vorticité relative (b) de ce tourbillon après 50 rotations. Les perturbations près des bords du disque sont dues au contact du tourbillon avec

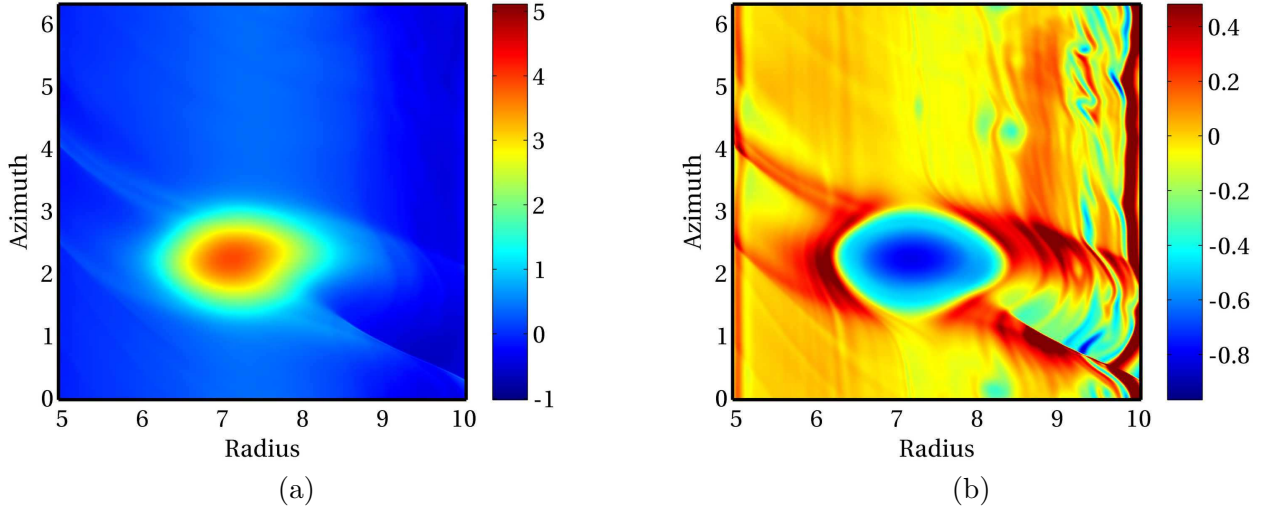


Figure V.21 – Simulation d’un tourbillon de très grande taille. Le rapport radial est $\chi_r = 0.19$, le nombre de Rossby $R_0 = -0.2$ et le rapport d’aspect est $\chi_\theta = 4.5$. La figure de gauche (a) montre la densité relative à celle du disque. La figure de droite (b) montre la vorticité relative à celle du disque.

les limites du disque lors de la relaxation du modèle, car son extension radiale est élevée. Un tel tourbillon résiste donc dans le disque malgré une taille de plus de $2 AU$. La perturbation de densité relative de ce grand tourbillon est de 300% la densité locale ce qui signifie que la densité en son coeur vaut 4 fois celle du disque. Malgré l’importance de la perturbation, en masse et en étendue, la structure tourbillonnaire n’est pas détruite et se stabilise.

Un tourbillon d’une telle largeur radiale semble donc résister au cisaillement. En utilisant les paramètres du disque, ici $H_0/r_0 \sim 0.06$ et la relation obtenue à l’équation V.85, on peut déterminer la valeur limite de χ_r qui permet au tourbillon de survivre. Il faut que $\chi_r < \sim 0.25$, ce qui est le cas de ce tourbillon, puisque nous mesurons $\chi_r = 0.19$. Cependant on constate qu’il est proche de la limite de taille dans la direction radiale. Nous avons mesuré le rapport entre la norme de la vitesse du gaz dans le tourbillon et la vitesse du son dans le disque. Ce nombre de Mach permet de déterminer si l’écoulement reste subsonique à l’intérieur du tourbillon, et de vérifier la valeur de notre critère. Le résultat obtenu après 65 rotations est montré Figure V.22.

On constate que dans le tourbillon, le nombre de Mach est de l’ordre de 0.6, ce qui montre que la structure est bien subsonique. Cela confirme que notre critère est suffisant pour justifier la survie du tourbillon. On remarque en revanche que dans la zone où se forment les ondes, le nombre de Mach augmente vers des valeurs proches de 0.8. Les ondes excitées par ce tourbillon approchent le régime transsonique. Il apparaît même un choc dans la région comprise entre $r = 9$ et $r = 10 UA$. À cet endroit le nombre de Mach mesuré vaut 0.98, ce qui est compatible avec la présence d’un choc. Les ondes semblent donc davantage compressibles que le tourbillon.

La dimension radiale d’un tourbillon est donc bien limitée par le respect du régime transsonique, mais n’est pas simplement bornée par l’échelle de hauteur du disque. On obtient une limite supé-

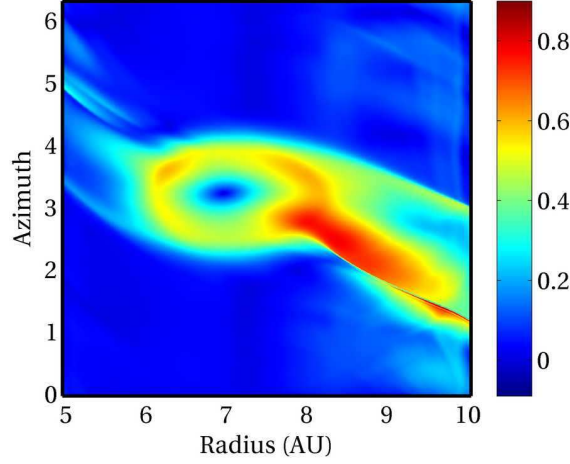


Figure V.22 — Carte du nombre de Mach déterminé par le rapport $\sqrt{u^2 + v^2}/c_{s0}(r)$ avec u et v les vitesses du tourbillon par rapport à celle du disque, et $c_{s0}(r)$ la vitesse du son adiabatique dans le disque. Le grand tourbillon présenté Figure V.21 est donc toujours une structure subsonique stable, malgré sa grande extension radiale.

rieure égale à H_0/R_0 . De plus, la densité au coeur du tourbillon augmente avec sa taille, puisqu'elle est proportionnelle à χ_r^2 . Bien sûr, la question est de savoir comment une perturbation de densité aussi importante peut apparaître dans le disque ? L'instabilité IOR, déclenchée avec des conditions réalistes, semble ne pouvoir former que des tourbillons dont la densité maximale est égale à 2 fois celle du disque. On peut supposer que si une telle instabilité se déclenche avec une perturbation encore plus importante, de telles surdensités peuvent être atteintes. C'est donc à la fois la possibilité d'atteindre de très grandes surdensités et le respect d'un écoulement subsonique qui semble limiter l'extension radiale des tourbillons de Rossby.

5.2 Nombre de Rossby

Le nombre de Rossby est le paramètre qui définit la vorticité du tourbillon, donc sa force de rotation. Sur l'échantillon de tourbillons que nous avons réalisé, le nombre de Rossby s'échelonne de -0.05 à -0.3 . La Figure V.23 montre les valeurs pour chaque tourbillon de l'échantillon. La grande majorité a un nombre de Rossby compris entre -0.1 et -0.2 , mais des valeurs différentes sont aussi présentes.

Premièrement, il semble qu'un minimum de -0.05 soit requis pour que le modèle relaxe vers un tourbillon qui survive dans le disque. Cette valeur est sans doute liée à la résolution numérique qui doit être suffisante pour limiter la diffusion numérique. Cependant, cela dépend aussi de la perturbation que crée un tel tourbillon de faible nombre de Rossby. En effet, la densité atteinte dans le coeur est très faible, de l'ordre de quelques pourcents. Une telle structure ne dispose donc pas de suffisamment d'énergie de rotation pour survivre dans le disque.

Deuxièmement, nous avons obtenu des tourbillons dont le nombre de Rossby peut être inférieur

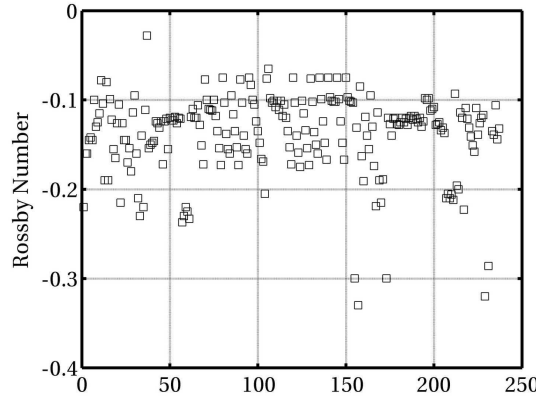


Figure V.23 – Valeurs du nombre de Rossby R_0 pour chaque tourbillon de l'échantillon. En abscisse est simplement repéré l'indice de numérotation du tourbillon.

à -0.25 . D'après notre modèle, il faut que $R_0 + 1 + \beta_\Omega/2$ soit positif. Or dans un disque képlérien, cela impose que $R_0 > -0.25$. Ces tourbillons ne respectent pas notre modèle, mais ils peuvent satisfaire les équations d'Euler. Certains termes de ces équations négligés dans l'approche linéaire quasi-stationnaire deviennent prépondérants pour ces tourbillons. Ceci explique pourquoi nous ne pouvons pas les décrire à l'aide du modèle gaussien.

En revanche, ce modèle a permis de créer les conditions initiales permettant de les obtenir. La vitesse radiale est du mauvais signe, mais les autres grandeurs sont suffisamment bien évaluées pour que l'évolution aboutisse à ces tourbillons. La Figure V.24 montre les vitesses, la densité et la vorticité à l'instant initial et après relaxation. On constate que malgré certaines différences, la condition initiale conduit à un tourbillon assez proche. La structure en densité est par contre très différente d'un profil gaussien, de même que la vitesse azimutale. Il n'y a pas de coeur bien défini, et les ondes spirales se mélangent avec la partie centrale du tourbillon. On se rapproche dans une certaine mesure du cas que l'on appelle tourbillon point ou "point vortex", qui est une perturbation de vorticité associée à peu de perturbation de densité, hormis les ondes qu'elle excite. Adam, 1995 [1] montre cette solution et sa relaxation dans un disque.

Le profil de vorticité à l'intérieur du tourbillon est aussi très diff  rent entre le cas $R_0 = -0.3$, que l'on appellera ici modèle 1, et le cas $R_0 = -0.1$, que l'on appellera modèle 2. La Figure V.25 montre la vorticité au centre de ces tourbillons. Ils ont le même rapport radial $\chi_r = 0.09$, afin de pouvoir les comparer. De plus ils ont été repositionnés au rayon $7.5 UA$ pour mieux distinguer leurs différences. Le modèle de plus forte vorticité a une vorticité qui n'est pas constante près du centre, mais possède un pic bien défini.    l'inverse le modèle de plus faible vorticité a une valeur minimale quasiment constante dans la région centrale, sur près de $0.5 UA$. Les bords des deux profils se superposent, mais pour le modèle 2, la vorticité sature très vite à la valeur au centre. C'est pourquoi le modèle 2 est plus proche de la solution gaussienne. Le modèle 1 a une vorticité très piquée, ressemblant à une fonction Dirac, qui se rapproche de la solution "point vortex".

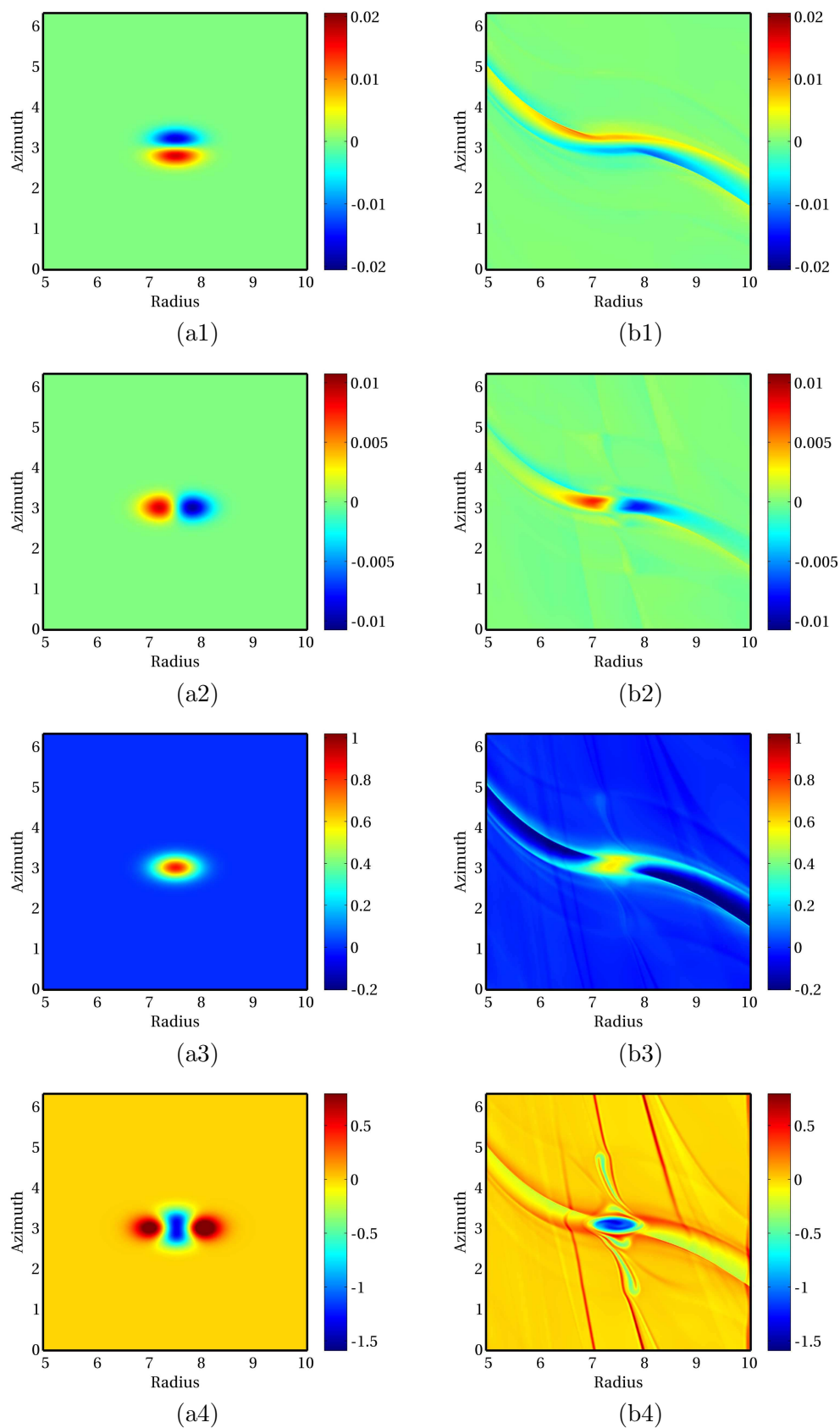


Figure V.24 — Relaxation d'un tourbillon de nombre de Rossby $R_0 = -0.33$ de largeur radiale $\chi_r = 0.085$ et de rapport d'aspect $\chi_\theta = 3.2$. La colonne de gauche montre l'instant initial (lettres a). La colonne de droite montre les grandeurs après 10 rotations (lettres b). La première ligne présente la vitesse radiale. La seconde ligne, la vitesse azimutale soustraite de celle du disque $V_0(r)$. La troisième ligne montre la densité relative à celle du disque et la dernière ligne la vortacité relative à celle du disque.

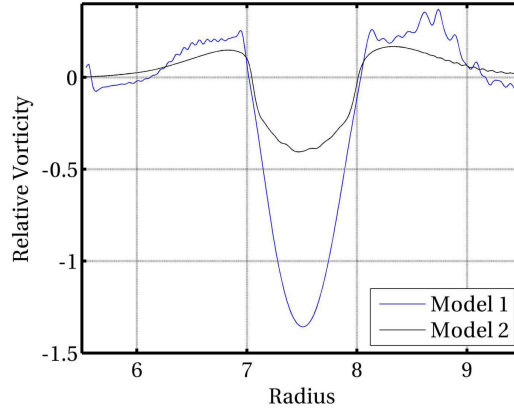


Figure V.25 – Comparaison du profil de vorticité relative à celle du disque de deux tourbillons de même rapport radial $\chi_r = 0.09$ mais de nombre de Rossby différents. Nous représentons la vorticité relative à l’azimut du centre de chaque tourbillon en fonction du rayon. Les deux ont été recalés au rayon $r_0 = 7.5 UA$ pour les comparer. Le modèle 1 (en bleu) a un nombre de Rossby $R_0 = -0.34$. Le modèle 2 (en noir) a un nombre de Rossby $R_0 = -0.1$. Les oscillations des parties externes sont dues aux ondes spirales présentes dans le disque.

Ces solutions à nombre de Rossby inférieur à -0.25 sont donc différentes du modèle gaussien que nous avons détaillé. Néanmoins, cela montre que des tourbillons ayant des nombres de Rossby très variés peuvent exister dans les disques.

5.3 Rapport d’aspect

Le dernier paramètre important du modèle gaussien est le rapport d’aspect. Nous avons exploré l’espace de ce paramètre pour différentes largeurs radiales et nombres de Rossby. La Figure V.26 montre les valeurs que l’on a obtenues sur les 250 tourbillons de notre échantillon. Le rapport d’aspect s’échelonne de 2.5 à 18, ce qui représente une très vaste gamme de valeurs possibles. Nous n’avons pas identifié de valeurs interdites comme cela se produit dans le cas des tourbillons tridimensionnels, à cause de l’instabilité elliptique (Barranco, 2005 [2] ou Lesur, 2009 [16]). Ces valeurs ne sont pas dépendantes de la largeur radiale du tourbillon, c’est-à-dire que la largeur radiale ne limite pas les valeurs de rapports d’aspects possibles.

Cependant nous avons constaté que pour un nombre de Rossby et une largeur radiale donnés, la valeur initiale du rapport d’aspect est importante. Si ce paramètre n’est pas bien choisi, la solution initiale relaxe vers un rapport d’aspect différent de celui imposé. Nous avons illustré ce phénomène à travers 2 choix de largeurs radiales pour un même nombre de Rossby $R_0 = -0.1$. Le Choix 1 est pour une largeur radiale $\chi_r = 0.06$ et des rapports d’aspect initiaux $\chi_\theta = 6, 8$, et 10. Le Choix 2 est pour une largeur radiale $\chi_r = 0.12$ et des rapports d’aspect initiaux $\chi_\theta = 10, 12$, et 14. La Figure V.27 montre les résultats. La colonne de gauche présente le Choix 1, celle de droite le Choix 2. Pour chacun, nous avons montré l’évolution au cours des 70 premières rotations du rapport radial χ_r (première ligne), du rapport d’aspect χ_θ (deuxième ligne) et du nombre de Rossby R_0 (troisième ligne). Pour les deux choix, la largeur radiale et le nombre de Rossby sont conservés à 10% près

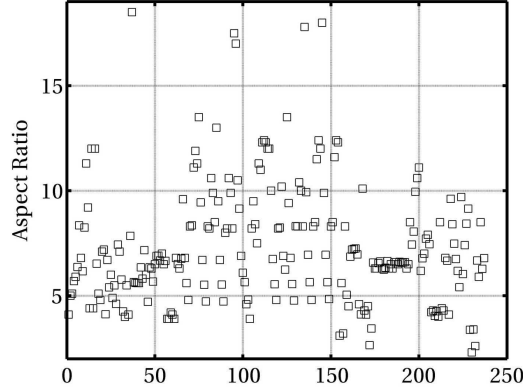


Figure V.26 — Valeurs du rapport d'aspect χ_θ pour chaque tourbillon de l'échantillon. En abscisse est simplement repéré l'indice de numérotation du tourbillon.

lors de la relaxation. La seule exception est le tourbillon de χ_r initial 0.06 et de rapport d'aspect 6 dont le rapport radial diminue à 0.05 après la relaxation.

Dans les deux cas, on peut montrer que le rapport d'aspect relaxe vers une valeur qui est déterminée par la largeur radiale et le nombre de Rossby. Pour le Choix 1, le tourbillon de χ_θ initial 8 conserve cette valeur, alors que celui de χ_θ initial 6 passe à 7.4, et celui de χ_θ initial 10 relaxe vers 8.3. Pour le Choix 2, les trois tourbillons relaxent vers un rapport d'aspect compris entre 10 et 11.3 malgré des valeurs initiales comprises entre 10 et 14. Ces deux choix ont initialement le même nombre de Rossby, qui reste constant après relaxation (à moins de 10%); la valeur du rapport d'aspect final est donc modifiée par la valeur de la largeur radiale. On met en évidence une relation du type :

$$\chi_\theta \propto \sqrt{\chi_r} \quad (\text{V.86})$$

Cependant, ce comportement n'est valable que pour les petits nombres de Rossby, c'est-à-dire plus grand que -0.1 . Pour des nombres de Rossby plus négatifs, la dépendance en χ_r est moins forte, et le rapport d'aspect est dominé par le nombre de Rossby du tourbillon. On remarque que cette limite correspond au nombre de Rossby critique au dessus duquel un tourbillon résiste peu à l'écoulement, du moins à une relaxation numérique du modèle. Nous n'avons obtenu que très peu de tourbillons de nombre de Rossby supérieur à -0.1 . Les rapports d'aspect sont alors supérieurs à 12, et plus la largeur radiale est grande, moins le tourbillon relaxe facilement.

La dépendance entre le rapport d'aspect et le nombre de Rossby est donc à déterminer. Le modèle GNG propose une relation qui découle de la condition d'incompressibilité et de l'équation de continuité (Johansen, 2004 [12] développe bien les détails de ce modèle et de ce raisonnement) . On obtient alors :

$$R_0^{GNG} = -\frac{1}{2} \frac{\chi_\theta^2 + 1}{\chi_\theta} (\chi_\theta^2 - 1)^{-1/2} \sqrt{-2\beta_\Omega} - \frac{\beta_\Omega}{2} \quad (\text{V.87})$$

Cette relation déduite du modèle GNG s'applique aux tourbillons proches de l'incompressibilité.

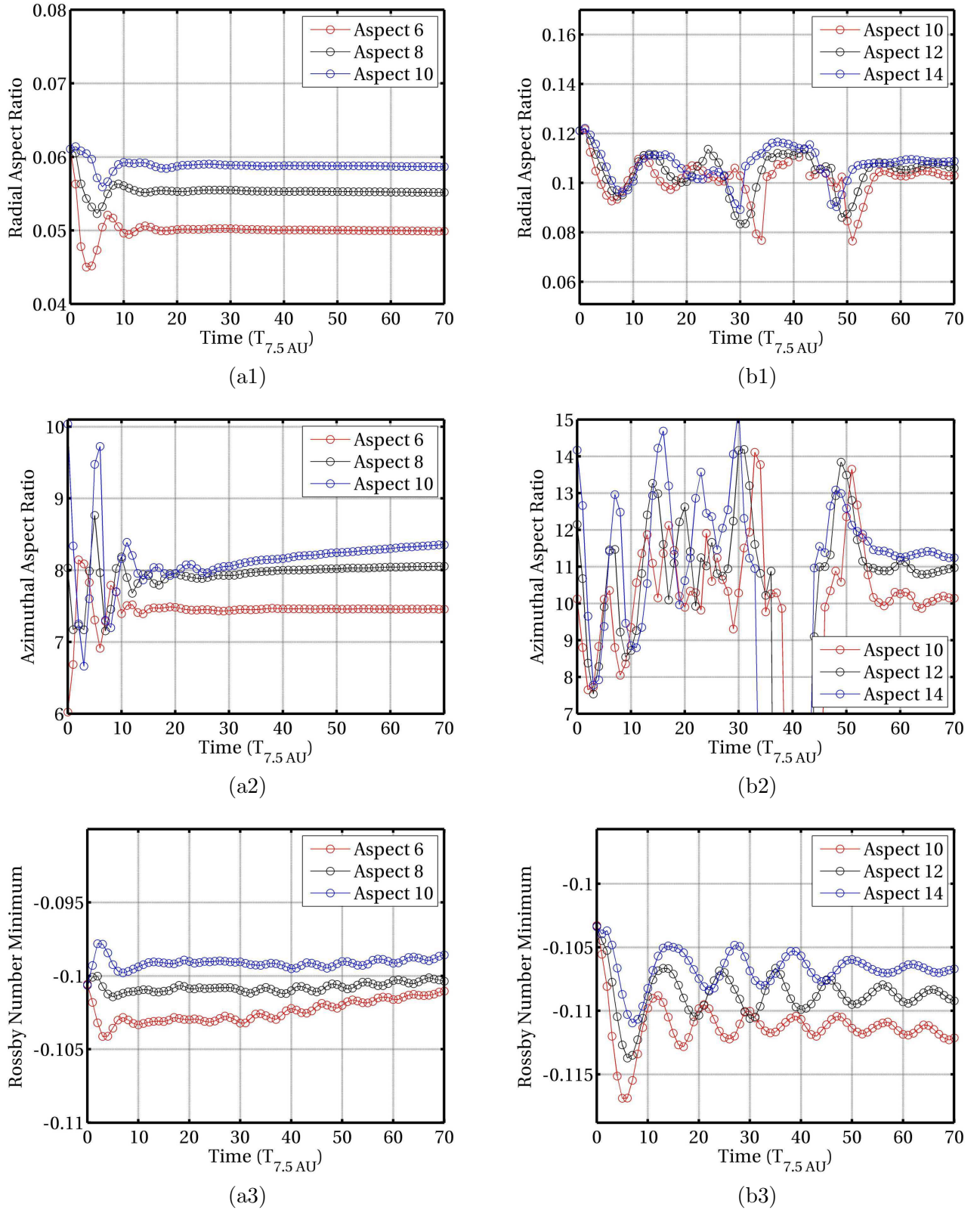


Figure V.27 – Relaxation de tourbillons en fonction du rapport d'aspect sur 70 rotations. La colonne de gauche présente trois tourbillons de rapport d'aspect initial $\chi_\theta = 6$ (en rouge), $\chi_\theta = 8$ (en noir) et $\chi_\theta = 10$ (en bleu). Ils ont le même nombre de Rossby initial $R_0 = -0.1$ et le même rapport radial $\chi_r = 0.06$ initial. La première ligne montre l'évolution temporelle de χ_r , la seconde l'évolution temporelle de χ_θ et la dernière celle du nombre de Rossby. La colonne de gauche présente de la même façon la relaxation de trois tourbillons de rapport d'aspect initial $\chi_\theta = 10$ (en rouge), $\chi_\theta = 12$ (en noir) et $\chi_\theta = 14$ (en bleu). Ils ont le même rapport radial initial $\chi_r = 0.12$ et le même nombre de Rossby initial $R_0 = -0.103$.

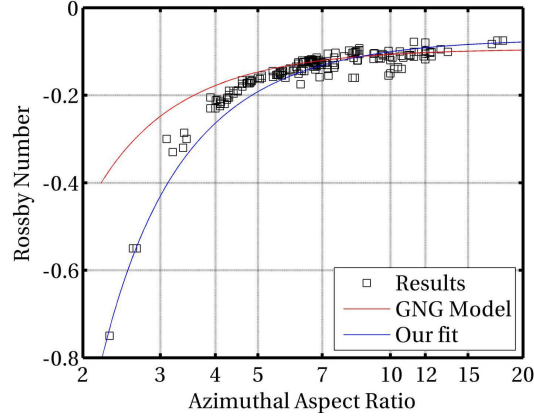


Figure V.28 – Représentation pour tous les tourbillons de l'échantillon de la corrélation entre le nombre de Rossby R_0 en fonction du rapport d'aspect χ_θ mesurés après relaxation (carrés noirs). La relation donnée par le modèle GNG est tracée en rouge. Elle s'accorde pour les grands χ_θ mais s'écarte des valeurs numériques pour $\chi_\theta < 6$. La relation déduite de notre modèle gaussien est tracée en bleu. L'accord avec les valeurs numériques est meilleur sur toute la gamme de valeurs de χ_θ .

Cependant, comme nous l'avons déjà évoqué, certains tourbillons de notre échantillon sont loin de cet état et leurs lignes de courant sont alors ouvertes. La relation suscitée est certainement inadéquate dans ces cas là. C'est pourquoi nous avons comparé les résultats de notre échantillon à cette relation, afin d'en examiner la validité. La Figure V.28 montre le nombre de Rossby en fonction du rapport d'aspect pour l'échantillon. On remarque que le nombre de Rossby diminue avec le rapport d'aspect. Nous avons ajouté à l'échantillon étudié deux tourbillons extrêmes dont les nombres de Rossby valent -0.55 et -0.75 . Comme nous l'avons dit, les tourbillons de nombre de Rossby inférieurs à -0.25 ne sont plus décrits par le modèle gaussien, mais il nous a semblé pertinent de confronter la relation entre R_0 et χ_θ dans ces cas limites. La courbe rouge montre le nombre de Rossby donné par le modèle GNG. On remarque qu'il est en bon accord avec nos résultats numériques jusqu'à $\chi_\theta = 6$ environ. Pour des rapports d'aspect inférieurs, ce modèle sous-estime clairement le nombre de Rossby du tourbillon.

Nous avons essayé de déterminer une relation entre ces deux grandeurs en suivant la même approche que celle du modèle GNG, en utilisant notre modèle, dans une région proche du centre du tourbillon. On suppose alors que les vitesses y sont linéaires. Un tel calcul est difficile et nous n'avons malheureusement pas réussi de façon rigoureuse à obtenir une relation simple. Cependant, nous avons trouvé une tendance empiriquement qui, si nous ne pouvons pas la démontrer, constitue une bonne approximation des valeurs numériques. Nous continuerons nos recherches dans ce sens afin de démontrer une telle relation. Nous pouvons donc considérer la relation suivante comme un bon ajustement des valeurs numériques :

$$R_0^{Gauss} = \frac{1}{2} \frac{\chi_\theta^2 + 1}{\chi_\theta^2 - 1} (\beta_\Omega - \sqrt{-2\beta_\Omega}) - \beta_\Omega \quad (\text{V.88})$$

On remarque la similitude avec la relation de GNG. Cette relation présente un meilleur com-

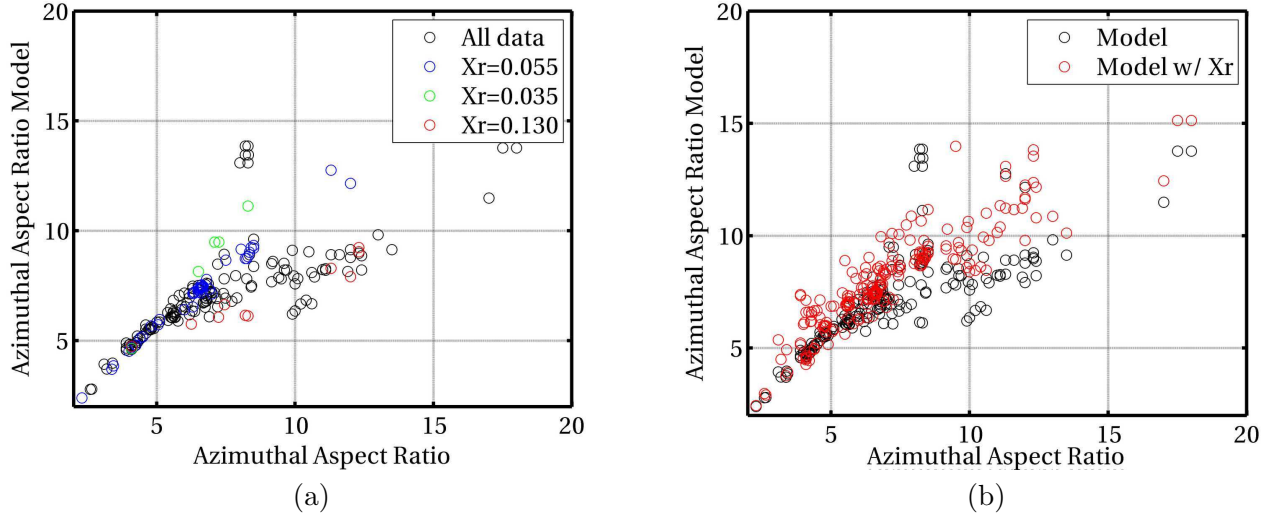


Figure V.29 – Représentation du rapport d’aspect donné par le modèle gaussien (équation V.89) d’après les valeurs numériques de R_0 mesurées sur l’échantillon, en fonction du rapport d’aspect numérique mesuré sur l’échantillon. Les ronds noirs montrent la totalité de l’échantillon. Figure de gauche (a), sont mis en valeur en bleu les tourbillons dont $\chi_r = 0.055 \pm 10\%$, en vert ceux dont $\chi_r = 0.035 \pm 10\%$, et en rouge ceux dont $\chi_r = 0.130 \pm 10\%$. Figure de droite (b), est ajouté en rouge le résultat du modèle gaussien de l’équation V.90 qui tient compte du rapport radial χ_r .

portement pour les petits rapports d’aspect. La courbe bleue de la Figure V.28 montre sa valeur. Cette relation prédit avec une meilleure précision le nombre de Rossby des tourbillons de rapports d’aspect inférieurs à 6. De plus, elle tend vers les mêmes valeurs que le modèle GNG pour les grands χ_θ . Il est remarquable que même pour les cas extrêmes de nombres de Rossby inférieurs à -0.25 cette relation issue du modèle gaussien soit une bonne approximation des couples (χ_θ, R_0) .

Comme il est plus commode de comparer les tourbillons en fonction de leur nombre de Rossby, on cherche la relation qui donne le rapport d’aspect en fonction du nombre de Rossby. Cela permet de déterminer avec une bonne précision les conditions initiales des simulations. L’inversion de l’équation V.88 nous donne :

$$\chi_\theta = \left(\frac{R_0 + \beta_\Omega + (\beta_\Omega - \sqrt{-2\beta_\Omega})/2}{R_0 + \beta_\Omega - (\beta_\Omega - \sqrt{-2\beta_\Omega})/2} \right)^{1/2} \quad (\text{V.89})$$

La confrontation avec les valeurs numériques montre que cela correspond aux données si le coefficient $(\beta_\Omega - \sqrt{-2\beta_\Omega})/2$ est réduit de 3%. On peut expliquer cela par le fait que la vitesse angulaire du gaz est réduite de sa valeur képlérienne par le terme dû au gradient de pression. De ce fait, ce terme doit être légèrement inférieur à sa valeur nominale, afin de respecter l’écoulement subképlérien. La Figure V.29 (a) montre la confrontation de cette équation avec les valeurs mesurées sur les tourbillons de l’échantillon (axe des abscisses). Les cercles noirs représentent tous les tourbillons. Les cercles bleus identifient ceux dont le rapport radial χ_r est à 10% près égal à 0.055, soit une échelle de hauteur. Les cercles verts identifient ceux dont le rapport radial χ_r est à 10% près égal

à 0.035, soit une demi échelle de hauteur. Enfin les cercles rouges identifient ceux dont le rapport radial χ_r est à 10% près égal à 0.13, soit plus de deux échelles de hauteur. On remarque tout d'abord la répartition linéaire de ces points, traduisant le bon comportement de notre équation. On note ensuite que certains points sont loin du comportement linéaire. Le modèle surestime le rapport d'aspect pour le paquet de points noirs de coordonnées (7, 14). Et au-delà de l'abscisse 7, le modèle sous-estime le rapport d'aspect. Cela est dû à la dépendance du rapport d'aspect avec la largeur radiale. Plus grand est le rapport radial des tourbillons, plus on sous-estime le rapport d'aspect. Ceux de largeur égale à une demi-échelle de hauteur se trouvent au-dessus de la zone linéaire. Ceux de largeur égale au double de l'échelle de hauteur se trouvent au dessous.

En introduisant une dépendance en racine de la largeur radiale, comme constaté précédemment, on rétablit le bon comportement de ce modèle :

$$\chi_\theta = \left(\frac{\chi_r}{0.055} \frac{R_0 + \beta_\Omega + 0.97(\beta_\Omega - \sqrt{-2\beta_\Omega})/2}{R_0 + \beta_\Omega - 0.97(\beta_\Omega - \sqrt{-2\beta_\Omega})/2} \right)^{1/2} \quad (\text{V.90})$$

où dans notre cas $H(r_0)/r_0 = 0.055$. Cette relation est illustrée sur la figure (b). On confronte le modèle précédant en noir avec cette nouvelle relation, qui inclut la largeur radiale, en rouge. Le modèle est désormais linéaire, avec une dispersion plus importante, mais limitée à 30%, ce qui est une bonne estimation. Les points de coordonnées (7, 14) sont désormais dans la zone linéaire.

Le rapport d'aspect est donc déterminé par le nombre de Rossby et la largeur radiale des tourbillons. Ce dernier point n'est pas abordé par le modèle GNG, ce qui le limite aux tourbillons de faible nombre de Rossby et de faible taille. Le modèle gaussien permet, lui, de décrire les tourbillons de façon précise et en accord avec les simulations numériques. Chacun est défini par un unique triplet $(R_0, \chi_r, \chi_\theta)$, qui peuvent être choisis dans un grand domaine de valeurs. Il reste désormais à aborder l'évolution dans le temps de ces tourbillons.

6 Évolution à long terme et familles de tourbillons

La solution gaussienne relaxe de façon satisfaisante dans le disque vers une solution qui semble stable pendant les premières rotations. Nous allons maintenant suivre son évolution sur une durée de plusieurs centaines de rotations du disque. Si la période de rotation est définie au rayon $r_0 = 7.5 UA$, alors 100 rotations représentent 2054 ans. Nous avons suivi l'évolution d'un tourbillon jusqu'à 1000 rotations du disque, soit environ 20×10^3 ans. Cela représente 1% de la durée de vie estimée du gaz dans les disques protoplanétaires. Par conséquent, la survie des tourbillons sur cette échelle de temps montrerait que ces structures peuvent ne pas être transitoires à l'échelle de la vie du disque, et pourraient contribuer réellement à sa dynamique et à son évolution. Il est donc d'un grand intérêt de déterminer la durée de vie de ce type de tourbillons.

6.1 Évolution caractéristique

Nous avons mesuré les paramètres du modèle gaussien dans quatre cas différents, sur 500 rotations et pour l'un d'eux sur 1000 rotations. Le modèle 1 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.10, 0.075, 9)$. Le modèle 2 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.135, 0.095, 6.5)$. Le modèle 3 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.15, 0.10, 5.8)$. Pour ces trois modèles, la résolution numérique du code est $(N_r, N_\theta) = (500, 1000)$. Enfin, le modèle 4 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.10, 0.09, 11)$. Ce dernier est suivi sur 1000 rotations avec une résolution de $(N_r, N_\theta) = (800, 1600)$. Ces quatre tourbillons couvrent ainsi une large gamme de paramètres et sont représentatifs des tourbillons de notre échantillon. Le disque a pour paramètres $\beta_\sigma = -3/2$ et $\beta_T = -1/2$. Nous présentons sur la Figure V.30 l'évolution au cours du temps de χ_r en (a), de χ_θ en (b), du nombre de Rossby minimal R_0 en (c) et du nombre de Rossby moyen du tourbillon en (d). Cette dernière grandeur permet de limiter l'influence de zones de vorticité excessivement négative dans le coeur du tourbillon, et qui peuvent apparaître lors de la relaxation du modèle.

L'évolution de χ_r montre que la largeur radiale du tourbillon par rapport à sa position dans le disque est conservée sur plusieurs centaines de rotations avec une précision inférieure à 5%. Cet écart maximal est observé pour le modèle 2. Les autres conservent encore davantage leurs valeurs de χ_r . Il n'y pas de corrélation entre l'évolution de χ_r et les autres paramètres.

Le rapport d'aspect est également bien conservé, avec un accord inférieur à environ 10%. Seul le modèle 1 présente une diminution significative de son rapport d'aspect. Cependant cette diminution semble ralentir avec le temps. De plus l'écart relatif avec la valeur initiale est aussi de l'ordre de 10%. Il est à noter que cette diminution de χ_θ n'est pas associée à une augmentation du nombre de Rossby. Nous avons remarqué que ce phénomène s'accroît lorsque le rapport radial du tourbillon diminue. Cela est dû à la diffusion numérique du code. Il faudrait en effet augmenter significativement la résolution numérique pour étudier ces petits tourbillons, de façon à avoir un nombre comparable de cellules de la grille sur la surface. Il s'agit donc d'un effet de diffusion numérique, et non d'un effet physique. En effet, comme le montre explicitement Godon, 1999 [10], la durée de vie d'un tourbillon est inversement proportionnelle à la viscosité du disque, qu'elle soit explicite ou due à la diffusion numérique.

L'évolution du nombre de Rossby minimal R_0 présente dans tous les cas une relaxation lors des 100 premières rotations. Il diminue de 10    20% par rapport à la valeur initiale, et ce sur une échelle de temps d'autant plus grande que le rapport d'aspect est grand. Cela est en accord avec le fait que les tourbillons les plus allongés relaxent plus lentement dans le disque. Après cette diminution du nombre de Rossby, les 4 modèles montrent une augmentation presque linéaire sur une grande échelle de temps. Il ne semble pas y avoir de dépendance avec les valeurs des paramètres des modèles. Malgré cette augmentation, les valeurs des nombres de Rossby sont à 10% près égales aux valeurs initiales, même après 1000 rotations.

On peut comparer cela au nombre de Rossby moyen qui évolue de façon beaucoup plus stationnaire. On remarque en effet que l'amplitude de la relaxation initiale lors des 100 premières rotations est nettement réduite (moins de 5% d'écart par rapport à la valeur initiale). Cette grandeur traduit

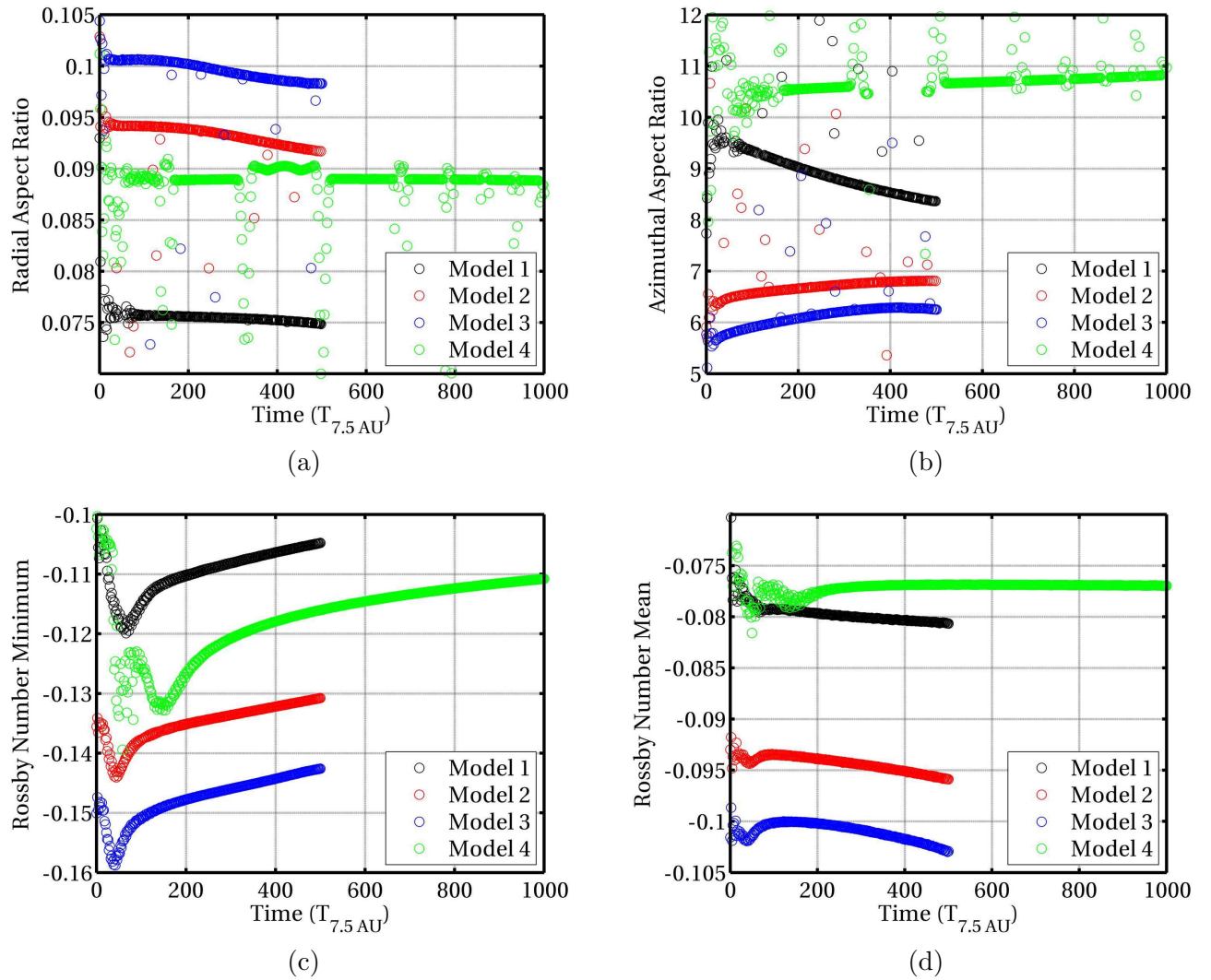


Figure V.30 – Évolution sur 1000 rotations du disque de quatre tourbillons différents. La figure (a) montre le rapport radial χ_r , la figure (b) le rapport d'aspect χ_θ . Les figures du bas montrent le nombre de Rossby minimum dans chaque tourbillon figure (c), et le nombre de Rossby moyen figure (d). Les tourbillons sont repérés par différents couleurs.

également que la forte relaxation du nombre de Rossby minimal du modèle 4 est localisée dans certaines zones du tourbillon. Cependant la vorticité moyenne décrite par le Rossby moyen est conservée. Ainsi les modèles 1 et 4 qui ont même nombre de Rossby initial conservent quasiment le même nombre de Rossby moyen, bien que leur Rossby minimal soient différents au cours du temps. Enfin les 4 modèles montrent une conservation de cette grandeur au cours du temps avec une bonne précision, l'écart au cours du temps reste en effet inférieur à 5%.

Les paramètres du modèle gaussien sont donc conservés au cours de l'évolution du disque et ce durant au moins 1000 rotations. Cela laisse penser que ces structures peuvent persister encore plus longtemps, même si une dissipation est présente. Cette conclusion est bien entendu restreinte à l'approximation $2D$, et est donc valable dans ce régime, c'est à dire pour les disques minces, de faible température. Si le disque est tridimensionnel, la stabilité des tourbillons en son sein est encore à confirmer (Shen, 2006 [22] ou Lithwick, 2009 [17]). La résolution numérique affecte la constance des paramètres du tourbillon. Lorsque la viscosité du disque, qu'elle soit numérique ou physique, est négligeable, les tourbillons conservent leurs rapports d'échelle et leurs nombres de Rossby. Nous allons maintenant présenter l'influence des paramètres du disque sur cette évolution.

6.2 Effets des paramètres du disque

Lorsque l'on modifie les gradients de densité et de température, la structure du tourbillon devient différente. En effet, le modèle gaussien est défini sur la pseudo enthalpie $\mathcal{H}$, mais la densité et la pression dans le tourbillon sont dépendants des gradients du disque. Ainsi on peut s'attendre à une évolution différente lorsque β_σ et β_T sont modifiés.

L'équation de la vorticité abordée au Chapitre 1 montre que les gradients de température et de densité ont un rôle de terme de source de vorticité. Si l'on se place dans l'approche du modèle où $\sigma = \sigma_0(r)\sigma^*$ et $P = P_0(r)\sigma^{*\alpha}$, avec $\alpha = \gamma$ dans le cas adiabatique, on peut écrire l'équation d'évolution de la vorticité du tourbillon ω de la façon suivante :

$$\partial_t \omega + \frac{1}{r} \partial_r r (\omega + \omega_0(r)) U + \frac{1}{r} \partial_\theta (\omega + \omega_0(r)) V = \frac{(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{r} P \sigma^{-2} \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma \quad (\text{V.91})$$

Le terme $(\alpha - 1)\beta_\sigma - \beta_T$ représente le gradient d'entropie. S'il est différent de zéro, alors le membre de droite est un terme source de vorticité. C'est un des mécanismes de base de l'instabilité barocline des disques (Klahr, 2003 [14]). Si dans notre cas le disque ne possède pas de transfert thermique nécessaire pour entretenir cette croissance de vorticité (comme dans Petersen, 2007 [20]), ce terme peut néanmoins créer de la vorticité lors de la relaxation du modèle.

Nous avons comparé l'évolution d'un modèle de tourbillon dans quatre disques de gradients de densité et de température différents, mais de même valeurs de température au rayon de référence $r_0 = 7.5 \text{ UA}$: $T_0(r_0) = 83.6 \text{ K}$. Le modèle initial a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.125, 0.08, 6.5)$. La Figure V.31 présente l'évolution durant les 100 premières rotations des paramètres du modèle ainsi que du nombre de Rossby moyen sur le tourbillon. Les quatre couples de gradients de densité et de température sont $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-0.5, -0.5)$ en ronds noirs, $(\beta_\sigma, \beta_T) = (0.5, -0.5)$ en ronds bleus, $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-0.5, -1.5)$ en étoiles noires et $(\beta_\sigma, \beta_T) = (0.5, -1.5)$ en

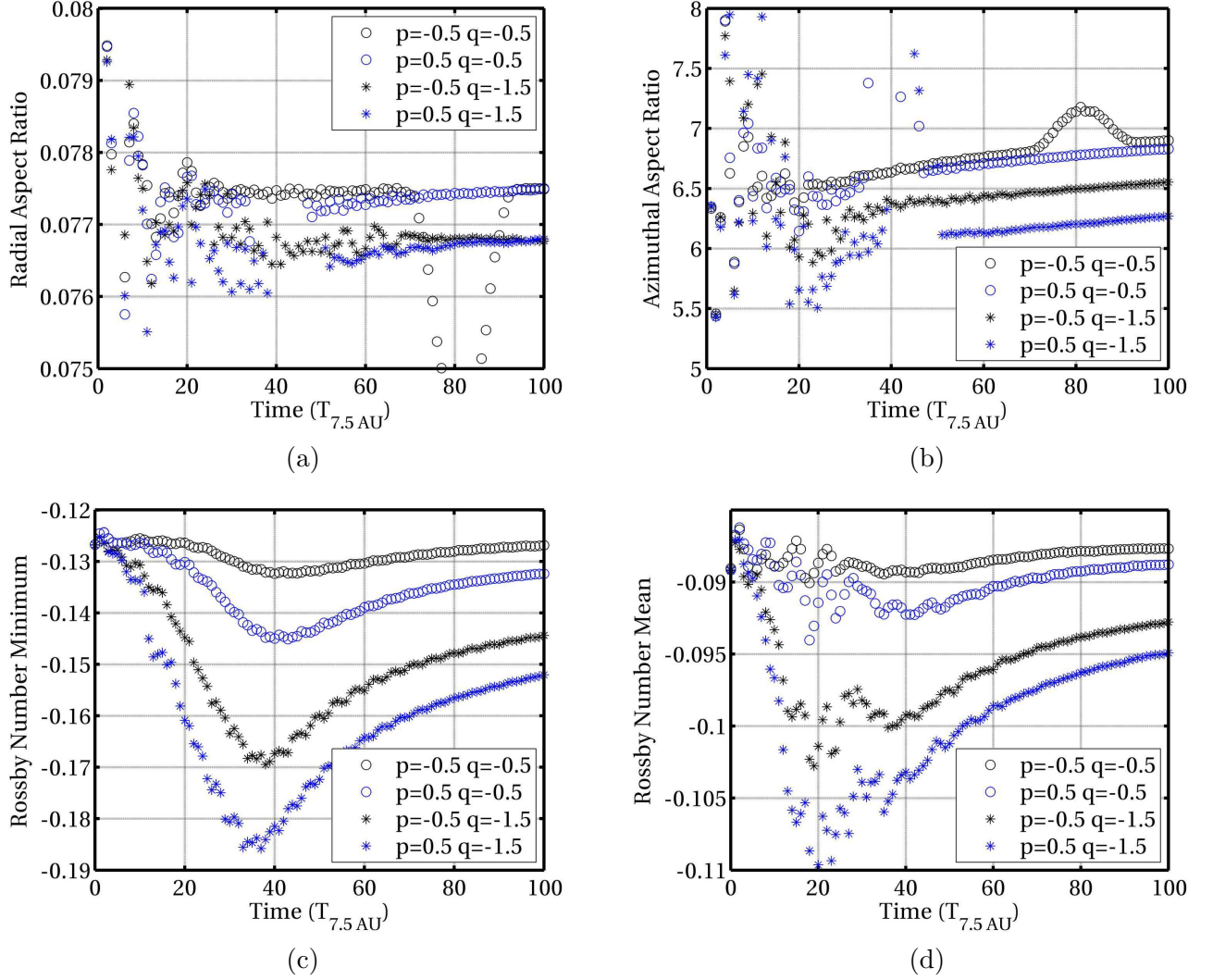


Figure V.31 – Évolution sur 100 rotations d'un même modèle de tourbillon dans quatre disques de gradients de densité β_σ et de température β_T différents. Pour des raisons pratiques β_σ est noté p , et β_T est noté q dans la légende. La figure (a) montre le rapport radial χ_r , la figure (b) le rapport d'aspect χ_θ . Les figures du bas montrent : le nombre de Rossby minimum dans chaque tourbillon figure (c), le nombre de Rossby moyen figure (d). Les ronds représentent un $\beta_T = -0.5$, et les étoiles un $\beta_T = -1.5$. La couleur noire représente un $\beta_\sigma = -0.5$ et la couleur bleue un $\beta_\sigma = 0.5$. Le pic visible à 80 rotations sur les grandeurs χ_r et χ_θ en ronds noirs est dû à une erreur de mesure de la position des extrema de la vitesse azimuthale, à cause d'un algorithme de réduction des données trop restrictif. Nous avons corrigé cette erreur dans les autres résultats.

étoiles bleues.

Tout d'abord on constate que les dimensions du tourbillon sont conservées durant les 100 premières rotations. En particulier, le rapport radial (a) passe de 0.08 à des valeurs comprises entre 0.077 et 0.078, quels que soient les gradients du disque, en moins de 20 rotations. Cela représente une variation de 4%, ce qui est très faible. Le rapport d'aspect (b) est compris entre 6 et 7 avec une petite différence en fonction du disque. Cela reste par ailleurs une variation de $\pm 10\%$ par rapport à la valeur initiale, ce qui laisse avancer que la géométrie est bien conservée.

La seule variable qui varie significativement lors de la relaxation est le nombre de Rossby. L'évolution du Rossby minimal présente deux phases (c). Lors des 40 premières rotations, il diminue jusqu'à des valeurs qui atteignent près de 150% de la valeur initiale. Cette diminution dépend des gradients du disque, mais l'échelle de temps correspondante est sensiblement la même dans tous les cas. Elle est comprise entre 37 et 42 rotations. Ensuite le nombre de Rossby augmente d'autant plus vite que le minimum atteint au bout de 40 rotations est plus bas. Finalement, l'évolution devient similaire vers 100 rotations et tend vers une valeur constante de la même façon que l'évolution caractéristique évoquée précédemment. Le nombre de Rossby moyen (d) évolue de façon similaire. Cependant, les écarts à la valeur initiale sont réduits de moitié, avec un maximum de 125% la valeur initiale. Ces variations du nombre de Rossby sont responsables des différences de rapports d'aspect obtenues après la relaxation, en accord avec le modèle gaussien.

On remarque que les simulations effectuées avec un gradient de température $\beta_T = -1.5$ conduisent à un nombre de Rossby inférieur à celles effectuées avec $\beta_T = -0.5$. L'écart relatif est de 30% au bout de 40 rotations et de 13% au bout de 100 rotations, écarts identiques pour les deux gradients de densité. La modification du nombre de Rossby est plus important lorsque l'on change β_T que lorsque l'on change β_σ . Cela a été également constaté par Klahr, 2003 [14]. On mesure un écart relatif de l'ordre de 10% à 40 rotations et de l'ordre de 4% au bout de 100 rotations entre les tourbillons placés dans un gradient de densité $\beta_\sigma = -0.5$ et $\beta_\sigma = 0.5$. On en déduit un rapport de 2.5 entre l'influence du gradient de température et l'influence du gradient de densité sur l'évolution de la vorticité.

Si l'on reprend l'équation de l'évolution de la vorticité V.91, on remarque que la contribution du disque est contenue dans le terme source, c'est-  dire le membre de droite. Précisément il s'agit du gradient d'entropie $\beta_S = \beta_T - (\alpha - 1)\beta_\sigma$. Les autres termes multiplicateurs qui dépendent de la pression et de la densité sont les mêmes quel que soit le disque. On peut en déduire deux constats :

- l'influence de β_T est $(\alpha - 1)^{-1}$ fois plus importante que celle de β_σ . Si l'on prend $\alpha = 1.4$ comme on l'a dit, on retrouve le rapport 2.5 que nous avons mesuré. Cela est bien en accord avec l'équation de la vorticité
- la dérivé temporelle de la vorticité, et donc du nombre de Rossby du tourbillon, est proportionnelle au gradient d'entropie β_S

Nous avons calculé le gradient d'entropie β_S correspondant aux quatre disques envisagés et mesuré la pente de l'évolution du nombre de Rossby minimal lors des 40 premières rotations. Le résultat présenté Figure V.32 montre une dépendance linéaire, c'est-  dire une proportionnalité entre ces deux paramètres. On retrouve donc avec une bonne précision le comportement du terme

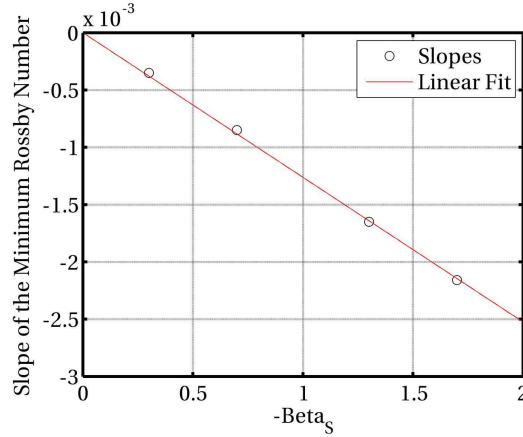


Figure V.32 – Variations de la croissance de la vortacité en fonction du gradient d’entropie $\beta_S = \beta_T - (\alpha - 1)\beta_\sigma$ pour les quatre simulations de la Figure V.31. Cette croissance est exprimée comme la pente par rapport au temps de la vortacité $\partial_t \omega$ au cours des 40 premières rotations. Une interpolation linéaire en rouge montre la proportionnalité de ces grandeurs.

source de vortacité.

Cette amplification est saturée au bout de 40 rotations car il n’y a pas de transfert thermique pour entretenir ce phénomène, car le gaz est adiabatique. Ainsi, la structure du tourbillon se modifie-t-elle de sorte que le facteur $P\sigma^{-2}r^{-1}\partial_\theta\sigma$ devienne nul après la relaxation. Le tourbillon poursuit ensuite sa lente évolution de façon similaire et quasiment indépendante du gradient d’entropie. Les gradients de densité et de température ne modifient donc l’évolution du tourbillon que lors des premières dizaines de rotations. L’importance de cette modification croît avec le gradient d’entropie β_S . Passée cette relaxation, l’évolution devient identique dans les différents cas.

Pour finir, nous avons comparé l’évolution de tourbillons dans des disques de températures différentes au rayon de référence, mais de même gradients de densité et de température. La structure des tourbillons est identique et l’évolution des paramètres également. En effet, le champ de vitesse du modèle gaussien est déterminé par la pseudo enthalpie $\mathcal{H}$, définie comme le montre l’équation V.58 par les paramètres χ_r , χ_θ et R_0 , via l’expression de $\mathcal{H}_0$ donnée par l’équation V.66. Ainsi, le champ de vitesse est indépendant de la valeur de la température au centre du tourbillon. La seule différence que crée un décalage de la température du disque est un décalage des profils de densité et de pression du tourbillon, qui s’adaptent en fonction de la vitesse du son $c_{s0}(r_0)$.

6.3 Effets de l’auto-gravité du disque

De la même façon que pour le gradient d’entropie, la prise en compte de la gravité du disque introduit un terme de source de vortacité. Ce terme est simplement : $\vec{\nabla} \times \vec{F}_{ag}$. Or puisque la force d’auto-gravité dérive du potentiel d’auto-gravité, $\vec{F}_{ag} = -\vec{\nabla}\Psi_{ag}$, on peut écrire le terme source de vortacité associé :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{ag} = -\frac{1}{r} (\partial_r \partial_\theta \Psi_{ag} - \partial_\theta \partial_r \Psi_{ag}) \quad (\text{V.92})$$

On remarque que la contribution de la densité du disque $\sigma_0(r)$ est nulle car axisymétrique. Seule la densité supplémentaire due au tourbillon participe à ce terme source. C'est donc l'écart à la symétrie par rapport aux axes polaires du centre du tourbillon qui va contribuer à la création de vorticité. Plus le profil de densité est incliné par rapport à l'axe azimutal, plus la vorticité peut se renforcer. Nous avons déjà constaté que plus le nombre de Rossby est fort, plus le tourbillon est incliné dans l'écoulement. Nous allons donc comparer l'effet de l'auto-gravité sur des tourbillons de nombres de Rossby différents.

Dans un premier temps nous posons les paramètres du disque. Les gradients de densité et de température sont $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$ et la densité et la température au rayon $r_0 = 7.5 \text{ UA}$ sont 82.8 g.cm^{-2} et 83.6 K . Le disque s'étend de 5 à 10 UA et la gravité analytique de solution stationnaire est prise en compte entre 1 et 100 UA. Elle modifie la valeur de la vitesse de rotation stationnaire.

Nous avons comparé le cas sans et avec auto-gravité pour trois tourbillons différents. La Figure V.33 présente l'évolution de deux tourbillons de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.125, 0.08, 6.5)$ et $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.175, 0.08, 4.8)$, que nous appellerons Modèle 1 et Modèle 2, respectivement. Les ronds noirs et rouges représentent le Modèle 1 sans et avec auto-gravité, respectivement. Les étoiles noires et rouges représentent le Modèle 2 sans et avec auto-gravité, respectivement. On remarque tout d'abord que le rapport radial est constant dans le temps dans chacun des cas. Pour le Modèle 2, la diminution observée lors des 10 premières rotations est due à la relaxation du tourbillon initial.

Malgré une différence de valeur du rapport d'aspect du Modèle 1, en accord avec la différence de nombre de Rossby, entre le cas sans ou avec auto-gravité, l'évolution de χ_θ est similaire dans les deux cas. Par contre pour le Modèle 2, le rapport d'aspect évolue différemment suivant que l'on tient compte ou non de l'auto-gravité : il augmente si on néglige l'auto-gravité, il diminue dans le cas contraire.

Le même phénomène se produit pour l'évolution du nombre de Rossby. Le Modèle 1 conserve sa vorticité même en présence d'auto-gravité. La différence de valeurs initiales entre les cas avec ou sans auto-gravité est due au fait que l'état stationnaire est modifié par la gravité du disque, comme expliqué au Chapitre 2. Dans ces simulations, les tourbillons initiaux ont été définis par une vorticité minimale dans le tourbillon ω , de -50% celle du disque par exemple. On en déduisait ensuite le nombre de Rossby R_0 nécessaire au calcul du modèle. C'est pourquoi le nombre de Rossby $R_0 = \omega/(2\Omega_0(r_0))$ est légèrement diff rent selon qu'on tienne compte ou non de l'auto-gravité, puisque $\Omega_0(r_0)$ est modifié par la gravité du disque. Cependant cet écart, de 10% environ, ne modifie pas l'analyse que l'on peut faire des résultats. Nous avons par ailleurs vérifié que si on impose initialement R_0 et non pas une vorticité ω initiale, la différence observée dans les résultats avec ou sans auto-gravité disparaît. C'est pourquoi nous n'avons pas refait les simulations présentées ici.

Le nombre de Rossby du Modèle 2 traduit le constat fait sur le rapport d'aspect. Le nombre de Rossby diminue en présence d'auto-gravité alors qu'il augmente légèrement en son absence. La comparaison des deux tourbillons montre qu'il faut un nombre de Rossby suffisamment négatif pour

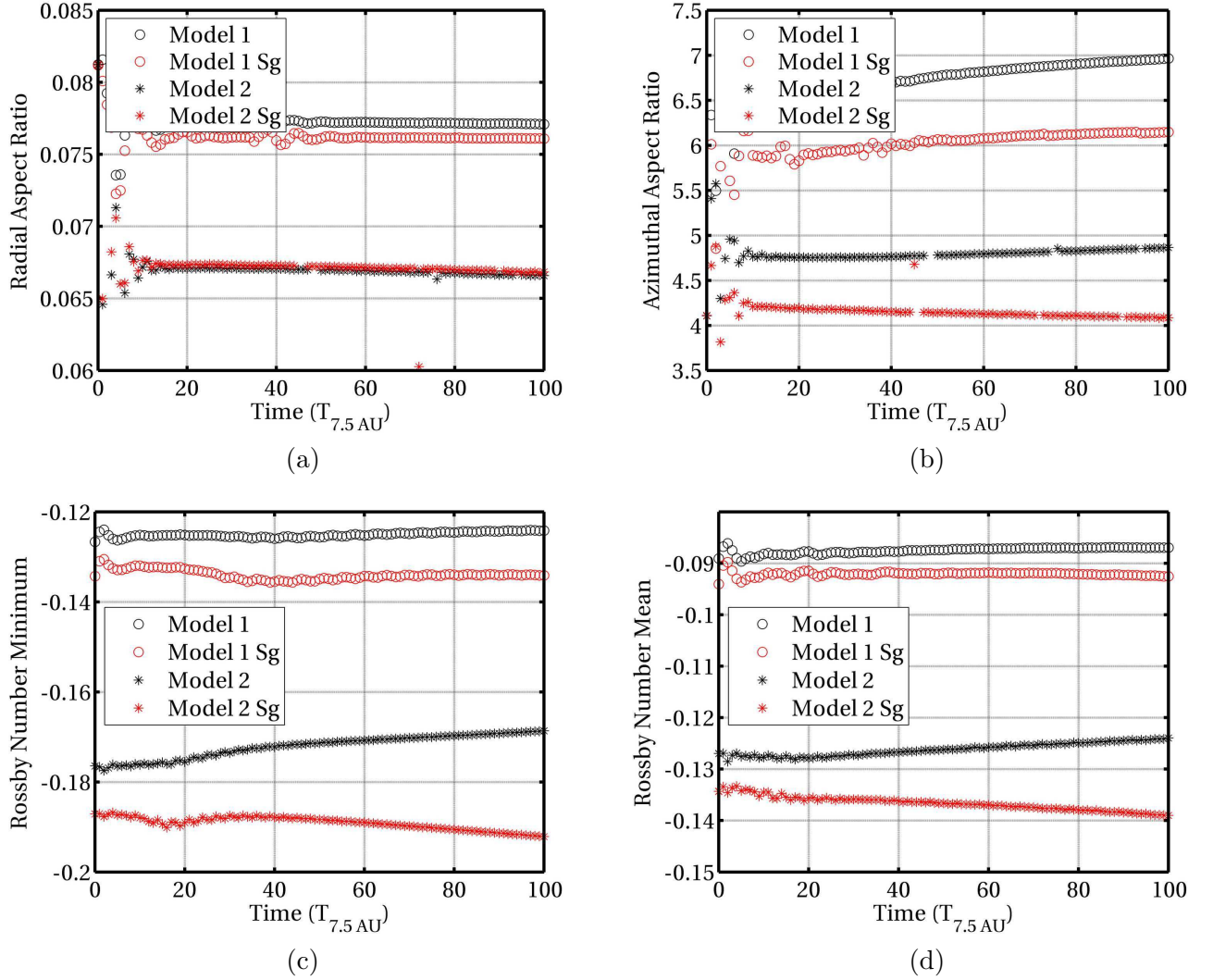


Figure V.33 – Comparaison de l'évolution de deux tourbillons évoluant dans un disque avec et sans auto-gravité. Le Modèle 1 représenté par des ronds a pour paramètres initiaux $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.125, 0.08, 6.5)$ et le Modèle 2 représenté par des étoiles $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.175, 0.08, 4.8)$. Les symboles noirs représentent le disque sans gravité et les symboles rouges le disque avec auto-gravité. La disposition des figures est identique à celle des Figures V.30 et V.31

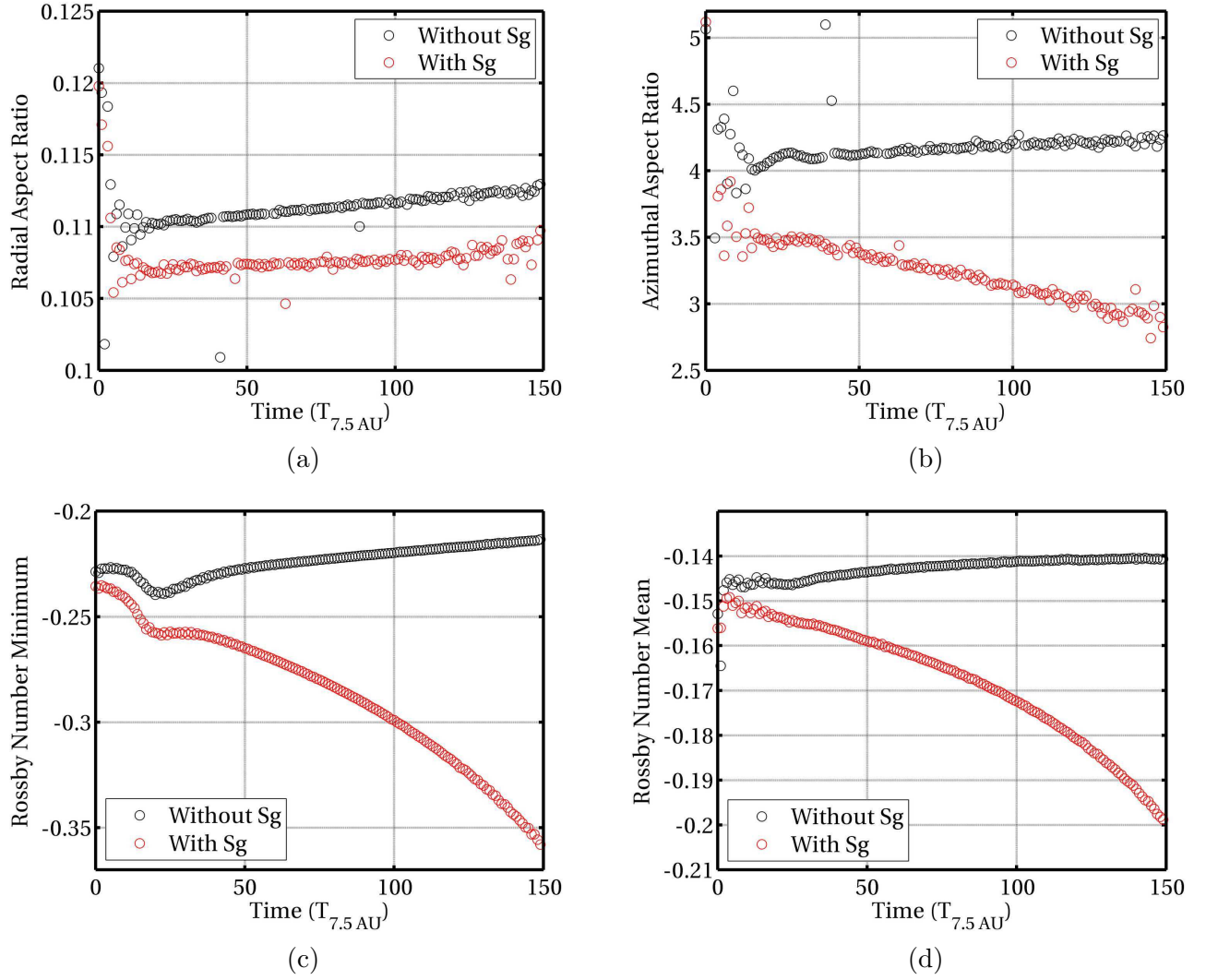


Figure V.34 – Évolution d'un tourbillon de forte vortacité en fonction de la gravité du disque. Les paramètres initiaux du tourbillon sont $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.225, 0.12, 5)$. Les symboles noirs représentent le disque sans gravité et les symboles rouges le disque avec auto-gravité. La disposition des figures est identique à celle des Figures [V.30](#), [V.31](#) et [V.33](#)

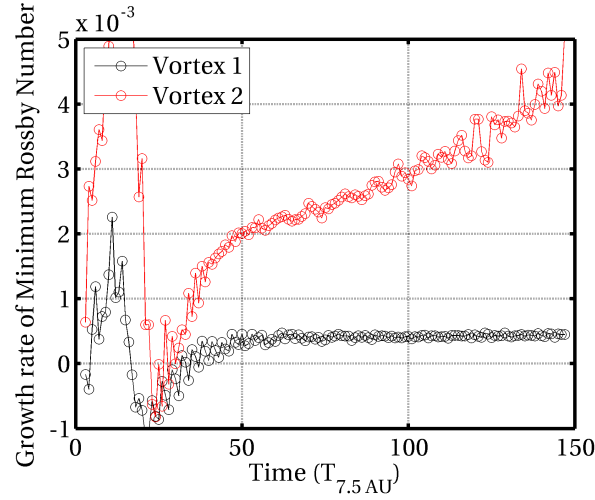


Figure V.35 — Évolution du taux de croissance exponentielle du nombre de Rossby, γ^{rossby} , en fonction du temps, pour deux tourbillons différents. Une valeur positive indique que la valeur absolue $|R_0|$ augmente, ce qui traduit un renforcement du tourbillon. Après une phase d'ajustement lors des 50 premières rotations, un régime uniforme de croissance s'établit.

que l'auto-gravité ait un effet significatif sur l'évolution de la vorticité.

Nous terminons par le cas d'un tourbillon de nombre de Rossby encore plus grand que pour le Modèle 2. Ce tourbillon a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.225, 0.12, 5)$. Le rapport d'aspect initial est plus grand que celui donné par l'équation V.90, qui relie χ_θ aux autres paramètres, soit 4.2. Ces simulations ont été faites avant d'obtenir cette relation. Ce cas, qui est proche de la limite de validité du modèle gaussien $R_0 = -0.25$, est un cas où le profil de densité du tourbillon est extrêmement incliné dans l'écoulement. Si le rapport radial est là encore bien conservé dans les cas avec ou sans auto-gravité, le rapport d'aspect et le nombre de Rossby montrent une variabilité encore plus forte que les exemples précédents, en présence de la gravité du disque. Le taux de croissance de la vorticité semble constant ce qui crée une augmentation non linéaire du nombre de Rossby. Cela est en accord avec l'équation V.92. En effet, si l'inclinaison avec l'axe azimutal est constante, ce terme est quasiment constant dans le temps, ce qui mène à une croissance quasi exponentielle de la vorticité.

Pour estimer ce taux de croissance de la vorticité nous avons mesuré le taux de croissance exponentielle du nombre de Rossby défini par :

$$\gamma^{rossby} = \frac{1}{R_0} \partial_t R_0 \quad (\text{V.93})$$

Cela permet de déterminer s'il est constant, ou s'il varie au cours du temps. Nous avons calculé ce taux de croissance en terme de $\Omega_0(7.5 \text{ UA})$ pour deux simulations différentes. Les résultats sont présentés au cours du temps sur la Figure V.35. Le tourbillon 1 a pour paramètres initiaux $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.19, 0.11, 4)$ dans un disque de gradients $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$. Le tourbillon 2 a pour paramètres initiaux $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (0.12, 5, -0.225)$, c'est-à-dire le Modèle 2 de la Figure

V.34, dans un disque de gradients $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1, -0.5)$. Chacun est représenté en noir et en rouge, respectivement.

On constate que le taux de croissance exponentiel du nombre de Rossby est positif pour ces deux tourbillons, ce qui signifie que le nombre de Rossby augmente en valeur absolue. Il devient donc de plus en plus négatif, comme les résultats précédemment présentés le montrent. Par contre, le tourbillon 1, de nombre de Rossby initial plus faible a un γ^{rossby} quasiment constant au cours du temps, et à peu près égal à $4 \times 10^{-4} \Omega_0$, et ce dès une cinquantaine de rotations. Dans le cas du tourbillon 2, le régime de croissance s'établit également en 50 rotations environ, puis s'installe une dépendance linéaire de γ^{rossby} au cours du temps. Il semble que pour les tourbillons de forte vortacité, la croissance exponentielle s'accélère. Cependant une étude plus poussée serait nécessaire pour quantifier la dépendance en fonction des paramètres du tourbillon. Ceci sera l'objet d'études ultérieures.

Il est évident que cette croissance dépend de la densité du disque. Le disque que nous avons utilisé est peu massif, conformément au modèle de nébuleuse solaire minimale. Mais dans un disque plus massif, la croissance de la vortacité serait encore plus rapide. En effet, le potentiel de gravité du disque est proportionnel à sa masse. En revanche, la dépendance en fonction du nombre de Rossby que nous avons mise en évidence serait identique dans un disque de masse différente.

Ainsi nous montrons que la gravité du disque peut agir comme une source de vortacité, qui est d'autant plus forte que le nombre de Rossby du tourbillon est important. L'influence de la largeur radiale n'a pas été mise en évidence et il semble qu'elle n'ait pas d'effet sur cette croissance. Par réaction à ce renforcement de la vortacité, le rapport d'aspect du tourbillon tend à diminuer. Mais la relation qui le relie au nombre de Rossby est identique à celle du cas sans auto-gravité. Ainsi le modèle gaussien est valable dans les deux cas, et seule l'évolution temporelle diffère.

6.4 Deux familles de tourbillons

Au reflet des différents résultats que nous venons de voir, nous pouvons mettre en évidence deux familles de tourbillons. Tout d'abord les résultats sur les différents nombres de Rossby montrent que plus il est fort, plus la solution s'éloigne du modèle gaussien, qui est une solution approchée des équations linéaires stationnaires. Ce modèle gaussien est symétrique et les lignes de courant sont fermées. Par conséquent il est quasi incompressible. Ensuite, la comparaison entre les rapports d'aspect de l'échantillon et le modèle de GNG a montré que ce dernier, qui est aussi incompressible, n'est valable que jusqu'à une valeur de χ_θ comprise entre 6 et 7.

Il y a une transition continue entre les solutions incompressibles, aux grands rapports d'aspect, et les solutions qu'on peut qualifier de compressibles, dont la limite est le 'point vortex'. C'est donc à partir d'un rapport d'aspect inférieur à ~ 7 que les effets de compressibilité apparaissent et modifient significativement la structure des lignes de courant du tourbillon.

Lors de cette transition, l'amplitude des ondes spirales de densité augmente significativement. Le rapport entre la vitesse, en particulier radiale, dans les ondes et la vitesse dans le tourbillon atteint, en terme d'amplitude, près de 50%. Le Figure V.37 illustre cela. Le modèle 1 en noir

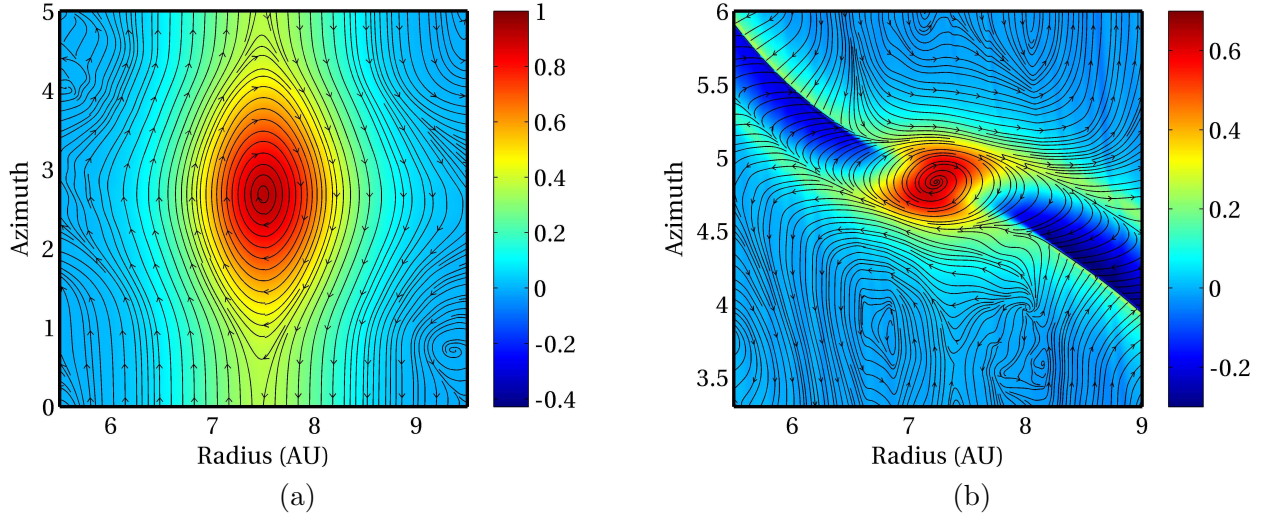


Figure V.36 — Cartes dans le plan (r, θ) de la densité relative à celle du disque pour les deux familles de tourbillons. La famille incompressible (a) a des lignes de courant fermées à l'intérieur du tourbillon et légèrement déformées à l'extérieur. La famille compressible (b) a des lignes qui spiralent vers l'extérieur du tourbillon et présentent une structure complexe dans les ondes spirales.

a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.101, 0.092, 11.3)$, mesurés après 95 rotations. Il appartient donc à la famille incompressible avec un profil de densité similaire au tourbillon (a) de la Figure V.36. Le modèle 2 en rouge a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.169, 0.067, 4.82)$, mesurés aussi après 95 rotations. Il appartient donc à la famille compressible. On constate que pour le tourbillon incompressible, le maximum de vitesse radiale dans les ondes se situe entre 0.2 et 0.3×10^{-3} , alors que le maximum au centre du tourbillon est de 1.2×10^{-3} . On a donc un rapport $1/4$ entre le centre et les ondes. En revanche, le tourbillon compressible a, dans les ondes, un maximum de vitesse plus important, de l'ordre de 2×10^{-3} , sur la partie interne du disque. Le ressaut présent entre 9 et 10 UA est dû à la présence d'un choc dans le disque. Le maximum au centre du tourbillon est de 2.9×10^{-3} . Ainsi le rapport entre les valeurs ondes/centre est proche de $1/1.5$, ce qui est supérieur à $1/2$.

7 Conclusions

Nous avons présenté un modèle analytique de tourbillon qui pallie les lacunes des modèles précédents (Kida, GNG). Le profil gaussien du champ de vitesse est en très bon accord avec les résultats numériques issus des simulations non linéaires à haute résolution. Le modèle analytique a permis de développer une méthode de mesure fiable permettant d'accéder aux trois paramètres de la gaussienne $(R_0, \chi_r, \chi_\theta)$ qui caractérisent le tourbillon. Nous avons décrit la relaxation et la structure des tourbillons dans le disque lors des premières rotations. Le modèle gaussien est robuste et conserve la structure imposée par les conditions initiales.

Nous avons étudié l'ensemble des tourbillons pouvant survivre de façon stationnaire dans les

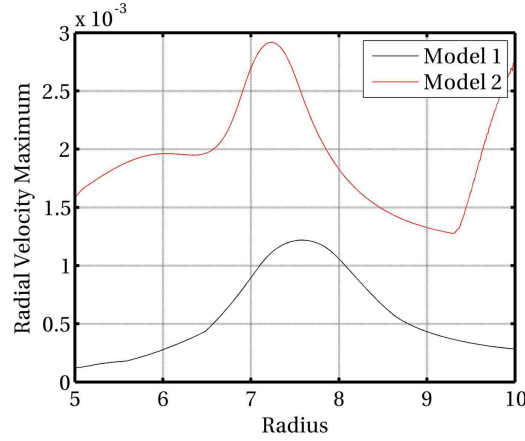


Figure V.37 — Maximum de vitesse radiale dans le disque, pour les deux familles de tourbillons. Les tourbillons s’étendent d’environ 6.5 à 8.5 UA , le reste du disque contient les ondes. Le modèle 1 (noir) est de la famille incompressible. Le maximum au centre du tourbillon est largement supérieur au double des valeurs dans le reste du disque, c’est-à-dire dans les ondes. Le modèle 2 (rouge) est de la famille compressible. Le maximum au centre du tourbillon est inférieur au double des valeurs dans le reste du disque, c’est-à-dire dans les ondes.

disques protoplanétaires, en explorant les domaines de valeurs possibles des paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta)$ des tourbillons gaussiens. Un échantillon de plus de 250 tourbillons différents a été construit dans ce but. C’est la première fois qu’une étude de cette envergure est entreprise. Nous avons montré que la largeur radiale peut atteindre plusieurs échelles de hauteur, contrairement à ce qui est couramment admis dans les travaux précédents, et est limitée par la rupture du régime transsonique. Le nombre de Rossby et le rapport d’aspect sont reliés par une relation complexe, que nous avons approchée par une formule analytique et qui s’accorde bien avec les résultats numériques. La gamme de rapport d’aspect est très large, et s’étend entre 2 et 20. Cependant il est à noter que les tourbillons de $\chi_\theta < 4$ semblent instables à 3D (Lesur, 2009 [16]), ce qui limite évidemment nos conclusions au problème 2D. Enfin, les nombres de Rossby obtenus vont de -0.75 à -0.05 .

L’évolution à long terme des tourbillons a ensuite été présentée. Les structures obtenues survivent plus de 1000 rotations, et pourraient donc jouer un rôle important dans l’évolution des disques. Les gradients de densité et de température semblent avoir un impact relativement restreint sur leur évolution adiabatique, bien qu’ils modifient la vortacité des tourbillons lors de la relaxation. L’auto-gravité, quant à elle, renforce la vortacité de façon plus systématique, à condition que le tourbillon soit suffisamment fort.

Deux familles pourraient être distinguées au vu de ces résultats. Celle que l’on appelle incompressible concerne les tourbillons de rapport d’aspect supérieurs à 6.5, dont la structure est proche de la solution elliptique. Les lignes de courant quasi fermées rappellent la solution de Kida. La famille compressible est bien décrite par le modèle gaussien, jusqu’à des nombres de Rossby très importants (< -0.25). Dans ce cas, l’excitation d’ondes spirales d’amplitude comparable à celle du coeur modifie la structure interne du tourbillon. L’impact de ces ondes sur la dynamique du disque et du tourbillon est maintenant à explorer, et fait l’objet du chapitre qui suit.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ADAMS, F. C., AND WATKINS, R. Vortices in circumstellar disks. *Astrophysical Journal Letters* 451, 1 (1995), 314–327. [196](#)
- [2] BARRANCO, J. A., AND MARCUS, P. S. Three-dimensional vortices in stratified protoplanetary disks. *The Astrophysical Journal* 623, 2 (2005), 1157–1170. [198](#)
- [3] BODO, G., CHAGELISHVILI, G., MURANTE, G., TEVZADZE, A., ROSSI, P., AND FERRARI, A. Spiral density wave generation by vortices in Keplerian flows. *Astronomy & Astrophysics* 437, 1 (2005), 9–22. [168](#), [177](#)
- [4] BODO, G., TEVZADZE, A., CHAGELISHVILI, G., MIGNONE, A., ROSSI, P., AND FERRARI, A. Stability and nonlinear adjustment of vortices in Keplerian flows. *Astronomy & Astrophysics* 475, 1 (Nov. 2007), 51–61. [168](#), [170](#), [193](#)
- [5] CHANG, P., AND OISHI, J. S. On the stability of dust-laden protoplanetary vortices. *The Astrophysical Journal* 721, 2 (Oct. 2010), 1593–1602. [156](#)
- [6] CHAVANIS, P. H. Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula. *Astronomy & Astrophysics* 356, 3 (2000), 1089–1111. [163](#)
- [7] DAVIS, S. S. Vorticity-induced wave motion in a compressible protoplanetary disk. *The Astrophysical Journal* 576, 1 (2002), 450–461. [178](#)
- [8] DAVIS, S. S., SHEEHAN, D. P., AND CUZZI, J. N. On the persistence of small regions of vorticity in the protoplanetary nebula. *The Astrophysical Journal* 545, 1 (2000), 494–503. [178](#)
- [9] DE LA FUENTE MARCOS, C., AND BARGE, P. The effect of long-lived vortical circulation on the dynamics of dust particles in the mid-plane of a protoplanetary disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 323, 3 (2001), 601–614. [168](#)
- [10] GODON, P., AND LIVIO, M. Vortices in Protoplanetary Disks. *The Astrophysical Journal* 523, 1 (Sept. 1999), 350–356. [204](#)
- [11] GOODMAN, J., NARAYAN, R., AND GOLDREICH, P. The stability of accretion tori. 2. Nonlinear evolution to discrete planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 225, 3 (1987), 695–711. [154](#)

- [12] JOHANSEN, A., ANDERSEN, A. C., AND BRANDENBURG, A. Simulations of dust-trapping vortices in protoplanetary discs. *Astronomy & Astrophysics* 417, 1 (Apr. 2004), 361–374. [156](#), [199](#)
- [13] KIDA, S. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear-flow. *Journal of the Physical Society of Japan* 50, 10 (1981), 3517–3520. [154](#), [163](#)
- [14] KLAHR, H. H., AND BODENHEIMER, P. Turbulence in Accretion Disks : Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability. *The Astrophysical Journal* 582, 2 (Jan. 2003), 869–892. [172](#), [206](#), [208](#)
- [15] LAMB, H. *Hydrodynamics*, 6th ed. Dover Publications, New York, USA, 1932. [154](#)
- [16] LESUR, G., AND PAPALOIZOU, J. C. B. On the stability of elliptical vortices in accretion discs. *Astronomy & Astrophysics* 498, 1 (2009), 1–12. [156](#), [198](#), [216](#)
- [17] LITHWICK, Y. Formation, Survival, and Destruction of Vortices in Accretion Disks. *The Astrophysical Journal* 693, 1 (Mar. 2009), 85–96. [206](#)
- [18] LYRA, W., AND KLAHR, H. The baroclinic instability in the context of layered accretion. *Astronomy & Astrophysics* 527 (Feb. 2011), A138. [177](#)
- [19] MOORE, D. W., AND SAFFMAN, P. G. The density of organized vortices in a turbulent mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics* 69, 3 (Mar. 1975), 465. [154](#)
- [20] PETERSEN, M. R., JULIEN, K., AND STEWART, G. R. Baroclinic vorticity production in protoplanetary disks. I. Vortex formation. *The Astrophysical Journal* 658, 2 (2007), 1236–1251. [206](#)
- [21] SAFFMAN, P. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992. [153](#)
- [22] SHEN, Y., STONE, J. M., AND GARDINER, T. A. Three-dimensional Compressible Hydrodynamic Simulations of Vortices in Disks. *The Astrophysical Journal* 653, 1 (Dec. 2006), 513–524. [206](#)
- [23] TAGGER, M. On Rossby waves and vortices with differential rotation. *Astronomy & Astrophysics* 380, 02 (Dec. 2001), 750–757. [189](#)
- [24] UMURHAN, O. M., AND REGEV, O. Hydrodynamic stability of rotationally supported flows : Linear and nonlinear 2D shearing box results. *Astronomy & Astrophysics* 427, 3 (Dec. 2004), 855–872. [155](#)

Chapitre VI

MIGRATION DES TOURBILLONS BIDIMENSIONNELS

Les résultats de l'Instabilité en Ondes de Rossby obtenus précédemment ont mis en évidence une migration radiale des tourbillons. À priori, le mécanisme responsable est lié à la présence d'ondes spirales dans le voisinage du tourbillon. Le modèle gaussien a permis de mettre en évidence deux familles différentes de tourbillons, caractérisées par le rapport entre l'amplitude du tourbillon et celle des ondes. Plus le nombre de Rossby est grand au centre du tourbillon, plus fortes sont les ondes excitées. Mais ce mécanisme est non linéaire et difficile à décrire analytiquement.

Nous allons étudier le mécanisme responsable de l'excitation de ces ondes, ainsi que sa dépendance en fonction des paramètres du tourbillon. De plus, ces ondes conduisent à un transport de moment angulaire qui peut être à l'origine de la perte d'énergie orbitale du tourbillon, et par conséquent mener à une migration radiale. En effet, le moment angulaire dans un disque képlérien croît vers l'extérieur, ainsi si une particule de fluide perd du moment, elle se déplace vers la région du disque où le moment est plus faible, afin d'équilibrer son énergie. C'est pourquoi une perte de moment angulaire se traduit par une migration radiale vers le centre du disque.

Cette description simple est toutefois modifiée quand on change les gradients de densité et de température du disque. De plus, dans le cadre des tourbillons, ce transport de moment a lieu par l'intermédiaire dans les ondes, qui sont des zones de compression. Il est par conséquent encore plus complexe de décrire ce mécanisme même de façon naïve. Nous commencerons par présenter les résultats des auteurs précédents sur ce problème, et nous en montrerons les limites. Nous présenterons ensuite la diversité des taux de migration obtenue à l'issue de l'étude menée sur la structure des tourbillons, et de l'échantillon présenté dans le chapitre précédent. Nous mettrons en évidence comment la migration est liée au transport de moment cinétique dans le disque. Enfin, nous décrirons la dépendance de la migration en fonction des paramètres du tourbillon, et des paramètres du disque afin de dégager une relation entre le taux de migration et l'ensemble de ces paramètres.

1 État des lieux

La migration des tourbillons n'a été évoquée et étudiée que dans un petit nombre d'articles ; elle est liée à la présence d'ondes de densité excitées par ces structures. De la même façon que les ondes excitées par une planète modifient son moment cinétique, ces ondes modifient également le moment cinétique du tourbillon. Il est donc nécessaire de présenter tout d'abord le mécanisme d'excitation des ondes de densité.

1.1 Ondes spirales de densité

Le gaz d'un disque est un milieu compressible, par conséquent une perturbation de pression ou de densité peut se propager de proche en proche, par compression, dans le milieu, donnant lieu à une onde. C'est le mécanisme de base à l'origine des ondes sonores. Les ondes de densité que l'on observe dans les disques sont donc principalement des ondes sonores.

Ces ondes sont décrites par une équation d'onde, du type :

$$\partial_t^2 \sigma + c_s^2 \vec{\nabla}^2 \sigma = 0 \quad (\text{VI.1})$$

Cette écriture simpliste permet de montrer que dans le cas adiabatique, où $D_t P / \sigma^\gamma = 0$, la vitesse de propagation de l'onde est $c_{s0}^2 = \gamma P_0 / \sigma_0$. En étudiant l'écoulement autour de la solution stationnaire, de façon linéaire, on peut se ramener à une équation de ce type pour les perturbations, qui, selon le repère utilisé, peut être compliquée. On peut alors montrer que la pulsation de l'onde, homogène à une vitesse du son, dépend du nombre d'onde de la perturbation ainsi que des caractéristiques du disque, en particulier β_Ω . De nombreux articles traitent de l'excitation d'ondes dans un disque, avec une approche cylindrique (Tevzadze et al., 2010 [12]) ou dans une approche "shearing sheet" (Goldreich et al., 1978 [3], Mamatsashvili et al., 2011 [7]). Ces travaux intéressants montrent que les caractéristiques des ondes spirales de densité dépendent du cisaillement dans le disque.

Nous allons ici illustrer plus simplement comment les caractéristiques de l'écoulement (β_Ω) peuvent modifier la formation d'ondes dans le disque. Dans le cas d'un tourbillon dans un disque, le tourbillon est le site perturbateur de l'écoulement et les ondes sont excitées à la frontière entre celui-ci et le disque. Le coeur, quasi linéaire, est stable dans l'écoulement s'il est entretenu par le disque. C'est le caractère différentiel de la vitesse angulaire $\Omega_0(r)$ qui permet cet entretien. Il faut donc que dans le tourbillon, surimposé au disque, la vitesse angulaire varie radialement dans le même sens que la vitesse angulaire du disque, afin que la rotation propre du coeur soit maintenue par cette dernière. C'est pourquoi dans un écoulement képlérien, seuls les tourbillons anticycloniques sont maintenus.

Ainsi à la limite de l'écoulement solide, avec $\Omega_0(r) = \Omega_0$ constant, un tourbillon ne peut pas exister hormis au centre de l'écoulement, car il n'est pas entretenu par la rotation différentielle. C'est donc bien le profil radial de vitesse angulaire $\Omega_0(r)$ qui définit le maintien ou non du tourbillon dans le disque. La gamme de paramètres β_Ω s'étend ainsi de $\beta_\Omega = -2$, limite instable puisqu'alors

la vorticité est nulle, à $\beta_\Omega = 0$, l'écoulement solide où le tourbillon n'est plus maintenu.

Ce problème classique de stabilité d'un tourbillon dans un écoulement cisailé montre que la caractéristique de l'écoulement du disque (en particulier β_Ω) joue un rôle central dans la dynamique du tourbillon. Cela modifie aussi la façon dont les ondes sont excitées ou non par le tourbillon. Nous avons illustré ce phénomène en étudiant un tourbillon gaussien dans des disques ayant des gradients de vitesse angulaire β_Ω différents.

Chaque disque possède une vitesse angulaire donnée par $\Omega_0(r) = \Omega_0(r/r_0)^{\beta_\Omega}$ avec Ω_0 la valeur utilisée dans le cas du disque képlérien, ayant une densité et une température $\sigma_0(r_0) = 82.8 \text{ g.cm}^{-2}$, et $T_0(r_0) = 83.6 \text{ K}$, leurs gradients valant $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1, -0.5)$. Nous avons testé différentes valeurs du gradient de $\Omega_0(r)$ de $\beta_\Omega = -1.5$, l'écoulement képlérien, $\beta_\Omega = -1.0$, l'écoulement à vitesse azimutale constante, $\beta_\Omega = -0.5$, un état intermédiaire et $\beta_\Omega = 0$, l'écoulement solide. Les vitesses angulaire et azimutale sont donc identiques en r_0 pour ces quatre cas, seuls leurs profils radiaux sont différents. En revanche, la vorticité est différente selon la valeur de β_Ω , y compris en r_0 , puisque $\omega_0(r) = 2\Omega_0(r)(1 + \beta_\Omega/2)$.

Les tourbillons initiaux ont été choisis de façon légèrement différente du modèle gaussien classique, puisque nous n'avons pas utilisé le nombre de Rossby donné mais une perturbation de vorticité initiale de -50% au centre. De cette façon, nous voulons compenser la différence de vorticité du disque due aux différentes valeurs de β_Ω . Il en résulte que les paramètres gaussiens initiaux des tourbillons obtenus sont : $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.129, 0.08, 6.6)$ pour $\beta_\Omega = -1.5$, $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.196, 0.08, 6.6)$ pour $\beta_\Omega = -1.0$, $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.239, 0.08, 7)$ pour $\beta_\Omega = -1.0$ et $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.255, 0.08, 7)$ pour $\beta_\Omega = -0$.

Les Figures VI.1 et VI.2 montrent les densités et vorticités relatives obtenues après 20 rotations pour chaque disque. On constate tout d'abord que le tourbillon résiste dans l'écoulement pour $\beta_\Omega = -1.5$, figure (a), $\beta_\Omega = -1.0$, figure (b) et $\beta_\Omega = -0.5$, figure (c). Seul le cas de rotation solide $\beta_\Omega = 0$, figure (d) ne permet pas l'entretien du tourbillon et celui-ci se disloque. On remarque aussi qu'à partir de $\beta_\Omega = -1$, la structure gaussienne est extrêmement bien conservée, bien mieux que dans le cas képlérien.

Ce qu'il apparaît clairement est la disparition des ondes spirales lorsque $\beta_\Omega > -1$. Certes, on distingue quelques ondes sur la figure (b), mais nous attribuons celles-ci au gradient de la vitesse du son. Lorsque $\beta_\Omega = -0.5$, toute ambiguïté est levée : le tourbillon n'excite pas d'ondes. Cette excitation est donc bien liée au profil de l'écoulement. Cela se comprend mieux lorsque l'on compare les profils de vitesses angulaire et azimutale dans le repère centré sur le tourbillon. La Figure VI.3 montre ces profils pour les différents choix de β_Ω pour lesquels le tourbillon subsiste.

On constate bien que la vitesse angulaire, figure (a), présente un cisaillement entre l'intérieur et l'extérieur de l'orbite du tourbillon, $r_0 = 7.5 \text{ UA}$. C'est le mécanisme qui l'entretient dans le disque. En revanche, la vitesse azimutale, figure(b), diffère clairement lorsque β_Ω est plus petit ou plus grand que -1 . Dans le cas $\beta_\Omega = -1.5$, en noir, cette vitesse est supérieure à celle du centre du tourbillon vers l'intérieur du disque, et inférieure dans la partie externe du disque. De ce fait, la perturbation de vitesse due au tourbillon, que l'on distingue par l'inflexion près de $r = 7.5 \text{ UA}$, peut, en se propageant vers l'extérieur du tourbillon, résonner et exciter une partie du disque de

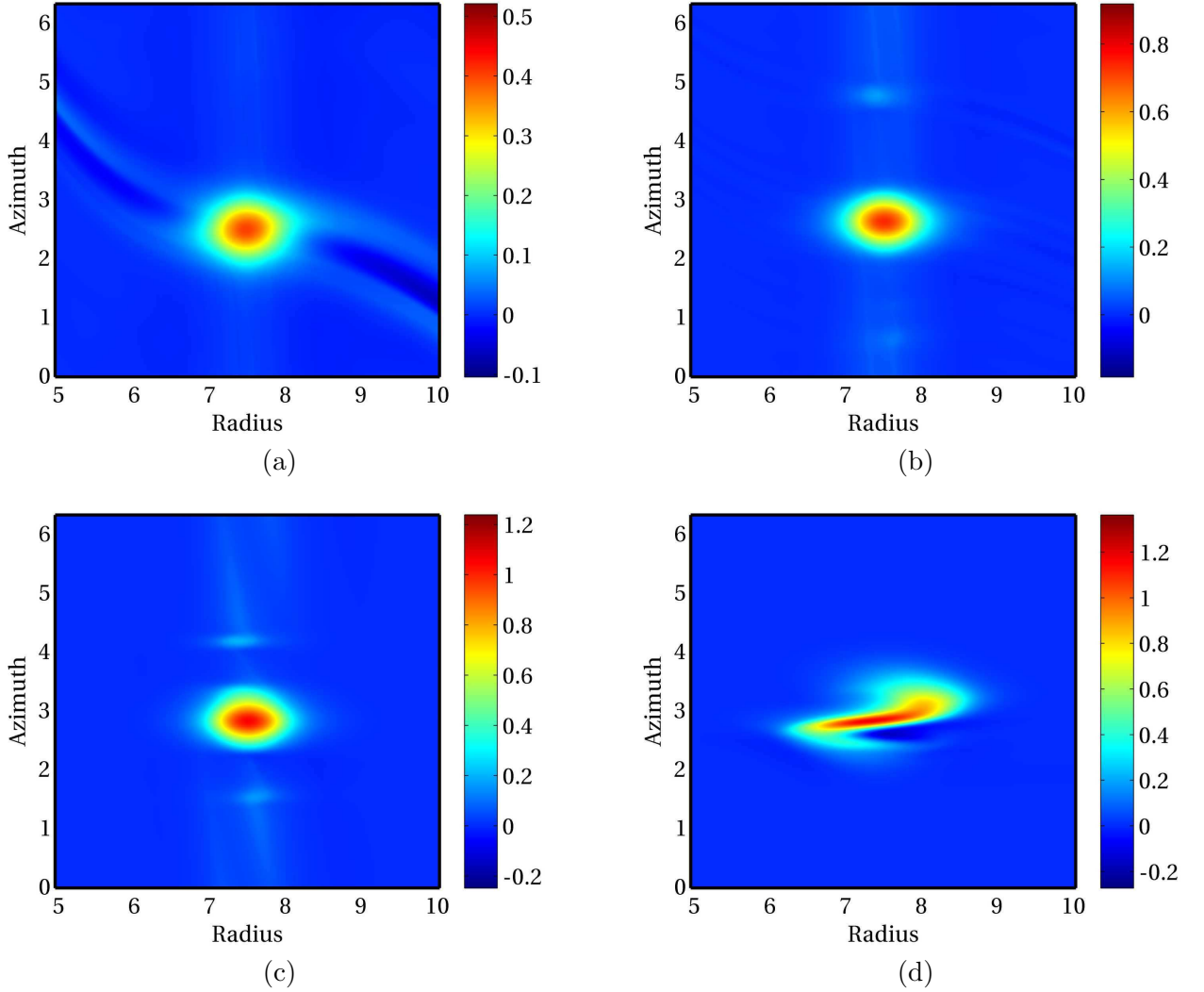


Figure VI.1 – Densité relative à celle du disque pour différents types d'écoulement. Le tourbillon initial a pour paramètres gaussiens $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.08, 6.6)$ pour $\beta_\Omega = -1.5$. Cela correspond à une perturbation de vorticité de $-\omega_0(r_0)/2$ au centre du tourbillon. On compare l'état après 20 rotations pour différentes valeurs de β_Ω : (a) $\beta_\Omega = -1.5$, (b) $\beta_\Omega = -1.0$, (c) $\beta_\Omega = -0.5$ et (d) $\beta_\Omega = -0$. Les nombres de Rossby obtenus pour chaque écoulement valent : (a) $R_0 = -0.129$, (b) $R_0 = -0.196$, (c) $R_0 = -0.223$ et (d) $R_0 = -0.220$.

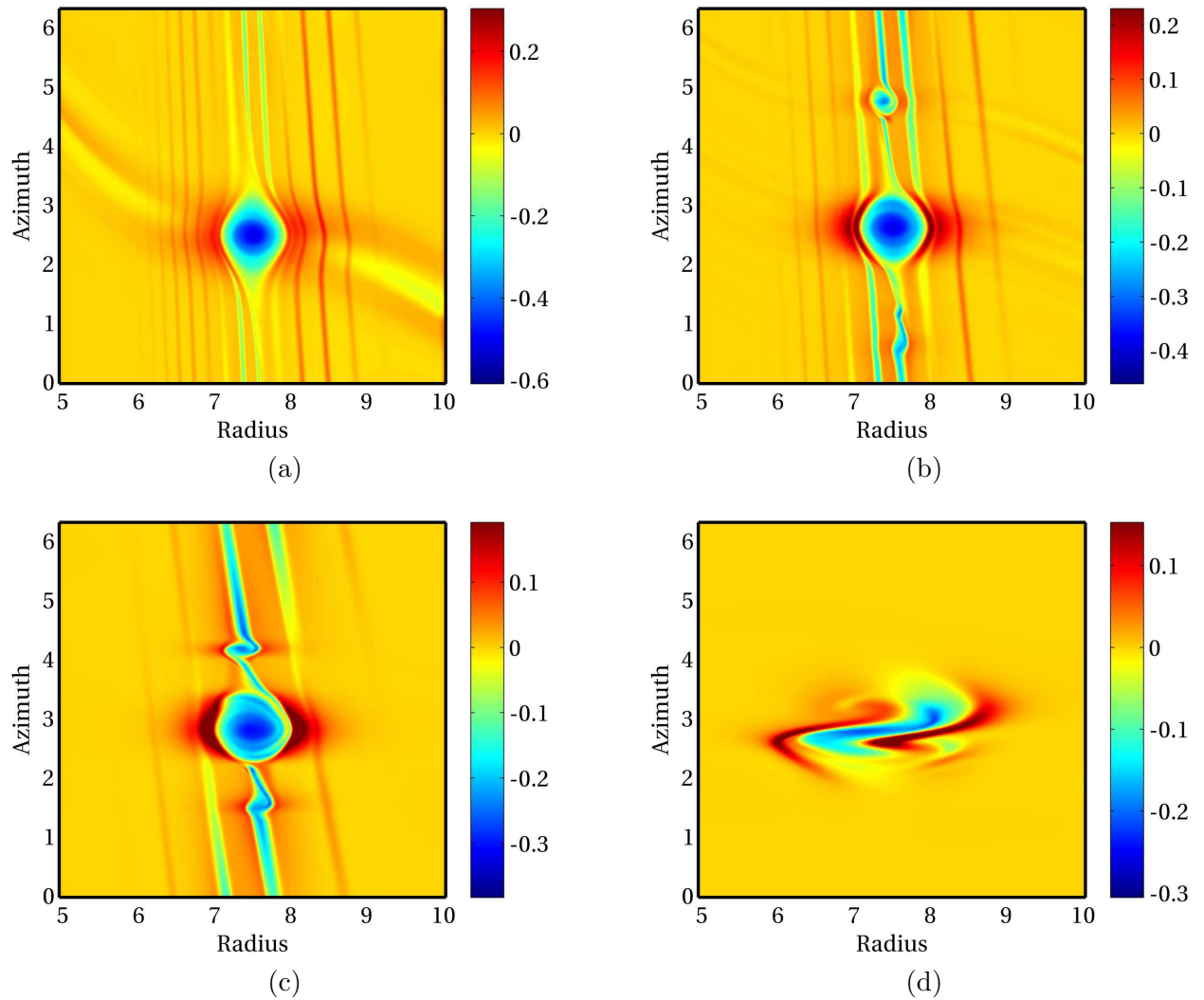


Figure VI.2 – Vorticité relative à celle du disque pour différents types d'écoulement. Le tourbillon initial a pour paramètres gaussiens $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.08, 6.6)$ pour $\beta_\Omega = -1.5$. Cela correspond à une perturbation de vorticité de $-\omega_0(r_0)/2$ au centre du tourbillon. On compare l'état après 20 rotations pour différentes valeurs de β_Ω : (a) $\beta_\Omega = -1.5$, (b) $\beta_\Omega = -1.0$, (c) $\beta_\Omega = -0.5$ et (d) $\beta_\Omega = 0$. Les nombres de Rossby obtenus pour chaque écoulement valent : (a) $R_0 = -0.129$, (b) $R_0 = -0.196$, (c) $R_0 = -0.223$ et (d) $R_0 = -0.220$.

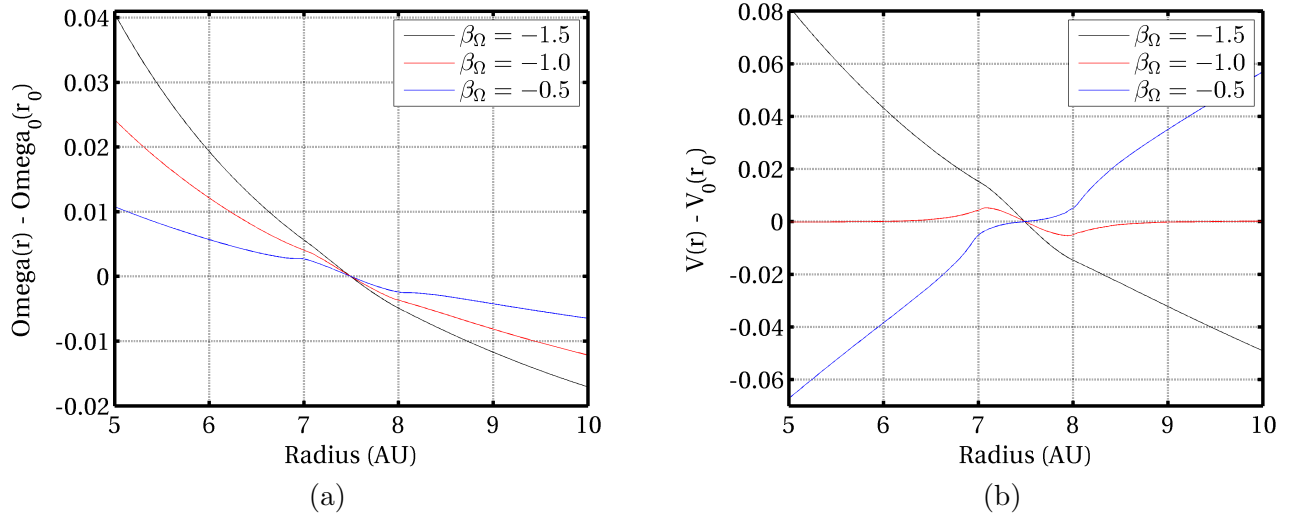


Figure VI.3 – A gauche (a) : coupe au centre du tourbillon de la vitesse angulaire $\Omega(r)$ dans le repère tournant à $\Omega_0(r_0)$, pour différents types d'écoulements. À droite (b) : coupe au centre du tourbillon de la vitesse azimutale $V(r)$ dans le repère tournant à $\Omega_0(r_0)$, pour différents types d'écoulements. Ces écoulements sont normalisés de la même façon en r_0 afin de comparer l'effet du gradient de $\Omega_0(r)$. Sur les deux figures on a $\beta_\Omega = -1.5$ (noir), $\beta_\Omega = -1$. (rouge) et $\beta_\Omega = -0.5$ (bleu)

vitesse azimutale égale. Comme le profil n'est pas symétrique par rapport à r_0 , la zone d'excitation n'est pas à égale distance du centre du tourbillon. Nous verrons que de cette dissymétrie naît le déséquilibre entre l'onde intérieure et l'onde extérieure à l'origine de la migration.

Lorsque $\beta_\Omega = -1$, en rouge, la vitesse azimutale est constante, et donc égale à celle du centre du tourbillon. Il n'y a donc aucune zone du disque dont la vitesse est égale aux maxima de perturbation due au tourbillon. Les ondes sont donc excitées à une distance infinie. De même lorsque $\beta_\Omega = 0.5$, les perturbations de vitesse dues au tourbillon sont soit supérieures à la vitesse du disque en deçà de r_0 , soit inférieures à la vitesse du disque au-delà de r_0 . Dans les deux cas, cette perturbation ne peut pas résonner avec une partie du disque de vitesse égale. C'est pourquoi aucune onde spirale n'est émise.

La résistance d'un tourbillon anticyclonique dans le disque est donc déterminée par la décroissance du profil de vitesse angulaire, en particulier par le critère $-2 < \beta_\Omega < 0$. L'excitation des ondes est, elle, un mécanisme lié au profil de vitesse azimutale, et à la résonance de la perturbation introduite par le tourbillon avec une zone du disque. Lorsque la vitesse azimutale est croissante par rapport au centre du tourbillon, cette résonance n'est plus possible : l'écoulement devient incompressible. C'est pourquoi le profil gaussien est mieux conservé dans ces cas là, car il provient d'une approche incompressible.

Cette illustration permet de comprendre que les paramètres géométriques du disque caractérisés par β_Ω sont les principaux facteurs d'asymétrie des ondes et qu'ainsi l'effet de ces ondes sur le transport de moment cinétique est dominé par cela. Les gradients de densité et de température peuvent aussi entrer en jeu, et c'est la compétition entre les asymétries générées par ces différents

paramètres qui va déterminer la migration finale du tourbillon. La détermination de ces différents effets est l'objet de ce chapitre.

1.2 Migration de tourbillons extrêmes dans un disque localement isotherme

En fait, les seuls résultats qui traitent exclusivement de la migration des tourbillons ont été publiés par Paardekooper et al. en 2010 [9]. Ces auteurs discutent de l'asymétrie des ondes spirales, que nous venons d'illustrer, mais dans une approche locale, linéaire, et en ne tenant pas compte réellement de la présence du tourbillon, en particulier de son extension. Ils montrent que dans l'approche linéaire "shearing sheet", il n'y a pas d'asymétrie des ondes, puisque la vitesse tangentielle est linéaire. Cela est en accord avec l'illustration que nous avons faite au paragraphe précédent. En revanche, une étude linéaire dans un repère cylindrique montre une asymétrie due aux termes de courbure, en particulier dus à β_Ω . Mais ils en restent à l'écriture d'une équation d'onde, dont la résolution n'est pas faite. Ils présentent uniquement une estimation du rapport entre l'amplitude de l'onde externe, et de celle de l'onde interne au rayon r_0 , montrant que ce rapport augmente lorsque le mode azimutal de l'onde augmente (nombre d'onde). Ainsi, l'asymétrie des ondes augmente avec la valeur du mode azimutal de perturbation. Cette étude est comparable à celles effectuées par Mamatsashvili et al., 2007 [5] mais surtout Muto et al., 2010 [8] qui étudient la forme des ondes excitées par une planète. Paardekooper et al., [9] considèrent en effet que le tourbillon est ponctuel, cas qui peut se ramener à celui d'une planète.

Après une discussion théorique (paragraphe 5 de l'article [9]), basée sur la forme de l'équation d'onde radiale, les auteurs présentent des simulations globales et discutent brièvement de l'effet de plusieurs paramètres : la largeur radiale et le rapport d'aspect du tourbillon, importance du gradient de densité du disque. Cependant aucune expression claire et analytique de la dépendance de ces paramètres n'est mise en avant, et les hypothèses décrivant le disque et le tourbillon sont restrictives :

- Le disque est localement isotherme, avec une échelle de hauteur linéairement croissante avec le rayon, soit $\beta_T = -1$. Aucune étude de l'impact de ce gradient sur la migration n'est proposée. La nature des ondes excitées dans le cas localement isotherme est différente de celle des ondes excitées dans le cas adiabatique (dans lesquelles une augmentation de la température est généralement présente).
- Le tourbillon initial est un champ de vitesse linéaire, comme le modèle de Kida, sans aucune perturbation de densité. La relaxation d'un tel état initial est généralement mal défini et perturbe beaucoup le disque : le contrôle sur l'état relaxé est limité.
- La perturbation initiale de vitesse est très élevée, dans la plupart des cas égale à $3/4c_{s0}(r_0)$, menant à des tourbillons de nombre de Rossby très élevé.

Grâce à ces simulations, qui par ailleurs utilisent un schéma aux volumes finis (code Zeus) avec une résolution spatiale similaire à celle que nous utilisons, les auteurs avancent trois résultats principaux. La migration semble dépendre linéairement du gradient de densité β_σ , comme le montre

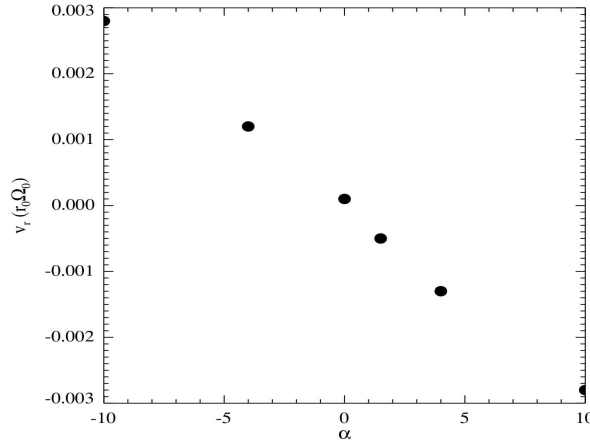


Figure VI.4 — Résultats de Paardekooper et al. montrant la valeur de la vitesse de migration en fonction du gradient de densité $\alpha = -\beta_\sigma$. Il s'agit de la Figure 7 de l'article [9]. Ici l'échelle de hauteur vaut $H_0(r_0) = 0.1r_0$.

la Figure VI.4. La vitesse de migration exprimée en terme de $V_0(r_0)$ est tracée en fonction de leur exposant $\alpha = -\beta_\sigma$. La vitesse de migration s'annule pour $0 < \beta_\sigma < 1$, mais aucune vérification de ce résultat n'est faite en faisant varier le gradient de température. En faisant varier l'extension radiale du tourbillon de Kida, les auteurs semblent trouver que la migration augmente avec le rayon s_{vortex} du tourbillon, voir Figure VI.5 (a). Cependant, ils n'ont pas vérifié si les autres paramètres du tourbillon, comme χ_θ ou R_0 , étaient comparables entre les simulations. De plus, ils se limitent à une taille bien inférieure à l'échelle de hauteur. Enfin, ils montrent une réduction de la vitesse de migration quand le rapport d'aspect augmente, voir Figure VI.5 (b). Là encore, le rapport d'aspect donné est celui des conditions initiales, et peut, par expérience, être significativement différent de la valeur après relaxation dans le disque. Le profil exact de cette dépendance n'est pas établi.

Nous considérerons que l'origine de la migration, basée sur l'asymétrie des ondes est expliquée par Paardekooper et al., [9], et nous renvoyons à la lecture de cet article lorsque nous évoquons cette asymétrie, mais il semble que de nombreuses questions restent sans réponse à l'issue de leurs résultats, et sur lesquelles nous nous focaliserons. C'est pourquoi nous nous proposons de vérifier et d'approfondir les premières constatations qu'il en ressort, dans le cas plus général d'un disque adiabatique, dont les effets des gradients de densité et de température, de l'échelle de hauteur, et de la géométrie précise du tourbillon seront examinés. Le modèle gaussien permet de contrôler précisément ce type de paramètres, en simulant des tourbillons plus réalistes, dans le sens où ils correspondent à des tourbillons que l'IOR peut produire.

2 Description de la migration dans les disques adiabatiques

L'ensemble des simulations de tourbillon que nous avons effectué se placent dans le cadre d'un disque adiabatique, ce qui rend nos résultats différents de ceux publiés jusqu'à présent. Dans ce cadre, nous observons une migration radiale mais on peut s'attendre à des comportements différents

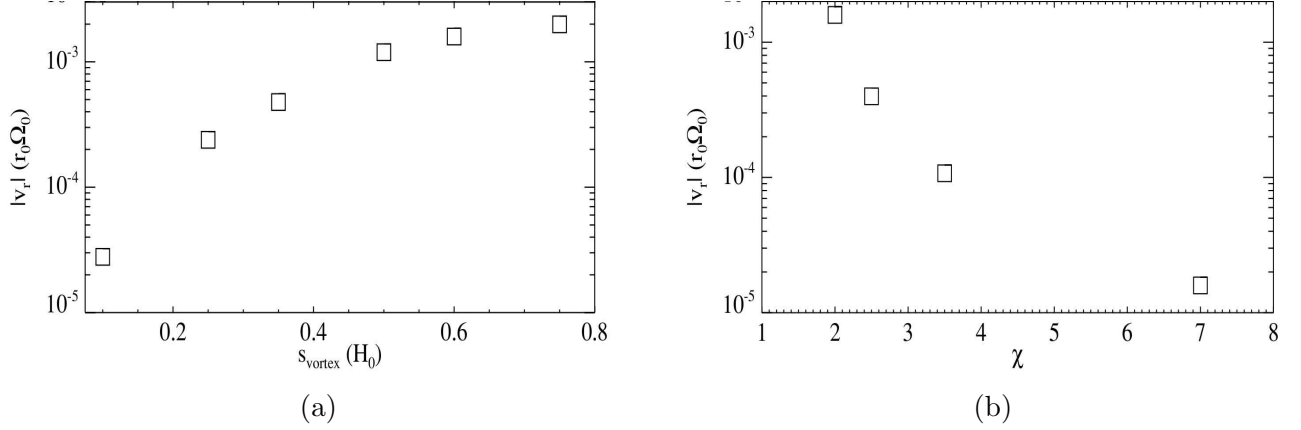


Figure VI.5 — Résultats de Paardekooper et al. montrant l'effet des valeurs initiales de la géométrie du tourbillon sur la migration. À gauche (a) : vitesse de migration pour différentes largeurs radiales. Ici s_{vortex} est le rayon du modèle de Kida initial. (Figure 10 de l'article [9]) À droite (b) : vitesse de migration pour différents rapports d'aspect, évalués par le paramètre du modèle de Kida initial. (Figure 11 de [9])

de ceux obtenus dans un disque isotherme. En effet, l'approximation adiabatique autorise une variation de température dans les zones de compression, en particulier dans les ondes et les chocs. De ce fait, les phénomènes qui se déroulent dans les ondes sont modifiés par rapport à l'approximation isotherme. Nous allons donc montrer la variété de vitesses de migration que nous obtenons dans cette approximation.

2.1 Importance de la migration

Dans toutes les simulations que nous avons effectuées, pour les différentes géométries de tourbillons, et différents gradients de densité et de température, nous observons une migration radiale, orientée vers le centre du disque. Nous avons mesuré les largeurs radiale et azimutale de chaque tourbillon, les nombres de Rossby associés, ainsi que la position moyenne du tourbillon au cours du temps.

Compte tenu de la présence éventuelle d'ondes de densité et de pression au voisinage du tourbillon, il a fallu déterminer une méthode de mesure de la position qui ne soit pas dégradée par la présence de ces ondes. Comme nous l'avons évoqué au Chapitre 5 au paragraphe consacré à la mesure de χ_r , il est parfois difficile de distinguer le cœur du tourbillon de la zone de production des ondes, en particulier pour les grands nombres de Rossby. C'est pourquoi nous avons mesuré la position moyenne du tourbillon grâce une moyenne pondérée par la vorticité. Cette dernière grandeur est en effet peu modifiée par l'existence d'ondes spirales, et l'essentiel des variations de la vorticité est d u à la partie gaussienne du tourbillon. Ainsi, la position moyenne r_v du tourbillon sera évaluée par l'équation :

$$r_v = \frac{\sum_{i,j} r(i,j) \omega(i,j) F(i,j)}{\sum_{i,j} \omega(i,j) F(i,j)} \quad (\text{VI.2})$$

dans laquelle ω est la vorticité du tourbillon $\omega = \vec{\nabla} \times \vec{V} - \omega_0(r)$, $\omega_0(r)$ est la vorticité du disque et $F(i, j)$ est une fonction de filtrage. Elle permet de définir une zone de la grille dans laquelle la vorticité du tourbillon ω est inférieure au tiers de la vorticité minimale présente au centre du tourbillon. Elle vaut donc 1 dans cette zone, et 0 ailleurs. Les sommes couvrent enfin tout l'ensemble des indices (i, j) de la grille (  l'exception des cellules fantômes). Cette méthode permet d'obtenir une position moyenne du tourbillon qui varie presque continuellement au cours du temps, et ne présente pas de discontinuité due à la résolution radiale de la simulation.

Nous montrons Figure VI.6 l'évolution des valeurs de la position, des extensions radiale et azimutale χ_r et χ_θ et du nombre de Rossby R_0 pour cinq tourbillons différents, au cours du temps. Ces cinq cas représentent la diversité des solutions que notre échantillon a fourni, et sont représentés par cinq couleurs différentes. On remarque que χ_r s'échelonne de 0.04 à 0.09, χ_θ varie de 3   8.2 et le nombre de Rossby varie de -0.34 à -0.09 . Seuls les tourbillons 3 et 4 en bleu et en vert, respectivement, ont le même rapport radial $\chi_r = 0.058$. Dans tous les autres cas, les tourbillons ont des paramètres différents.

On remarque pour commencer que l'évolution au cours du temps des paramètres géométriques et du nombre de Rossby est similaire à ce que nous avons déjà montré au chapitre précédent. Ces grandeurs sont conservées avec un très bon accord, inférieur à 5%. On précise que le nombre de Rossby est ici à peu près constant, y compris lors des 10 premières rotations, car le gradient d'entropie $\beta_S = -0.1$ est faible. De ce fait, la variation du nombre de Rossby observée lors des premières rotations, due à la création de vorticité par le terme barocline, est très petite. Les paramètres des tourbillons varient très peu par rapport à leurs valeurs initiales.

La position de chaque tourbillon au cours du temps est montrée figure (a). On constate que chaque tourbillon dérive radialement avec un taux constant ; il n'y a pas d'inflexion de la courbe de position. Cette courbe de position moyenne est une droite qui, à l'instant $t = 0$, a pour valeur la position initiale du tourbillon, ce qui permet de vérifier que la procédure donnant cette position est fiable. Chacun des tourbillons a un taux de migration, caractérisé par la pente de la droite, qui est diff rent d'un tourbillon à l'autre. Le tourbillon 5 a un taux de migration si grand, qu'il atteint $6 UA$ en moins de 100 rotations.

Ces résultats mettent en avant plusieurs constatations qu'il nous faudra éclairer. Tout d'abord, le taux de migration est constant dans le temps, ce que nous pouvons mettre en regard de la constance des paramètres du tourbillon. Au cours de cette migration, le rapport radial est conservé, ce qui signifie que l'extension radiale du tourbillon diminue au fur et à mesure qu'il se déplace vers l'intérieur du disque. Ensuite, le taux de migration croît avec le nombre de Rossby. Comme le rapport d'aspect χ_θ évolue comme l'inverse du nombre de Rossby, les tourbillons de petit rapport d'aspect migrent plus vite que ceux de grand rapport d'aspect.

La diversité des paramètres des tourbillons de l'échantillon que nous avons présenté au chapitre précédent est donc à l'origine d'une diversité des taux de migration au sein de cet échantillon. Pour chaque tourbillon, nous avons mesuré le taux de migration et reporté le résultat Figure VI.7 en fonction de l'index du tourbillon dans l'échantillon. Cela permet de visualiser la gamme des vitesses de migration que nous obtenons.

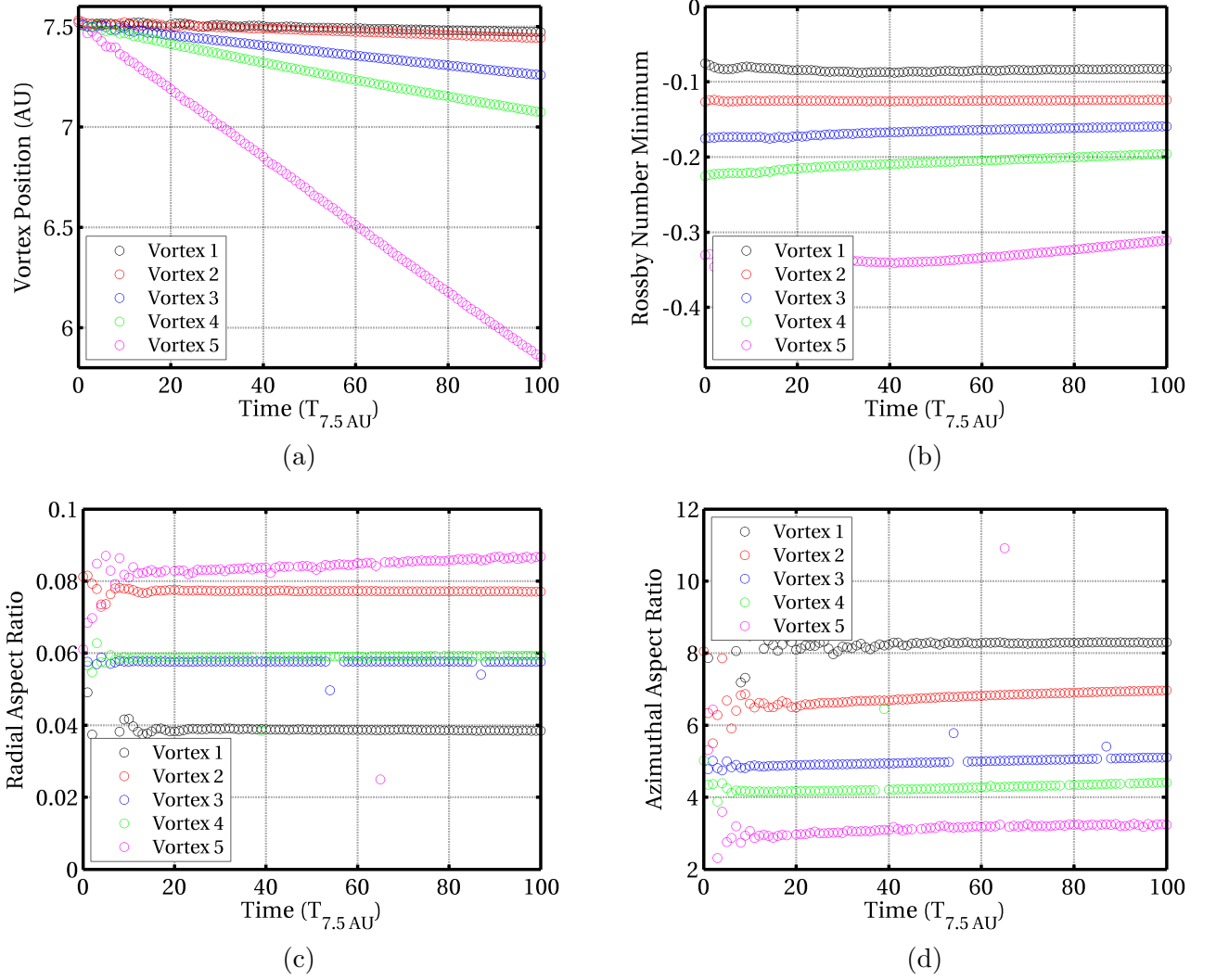


Figure VI.6 – Comparaison de l'évolution au cours du temps de 5 tourbillons différents, dans un disque de gradients $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$. On montre figure (a) la position moyenne de chacun, le nombre de Rossby minimum R_0 au centre des tourbillons figure (b), le rapport radial χ_r figure (c) et le rapport d'aspect χ_θ figure (d). Les pentes des courbes de position traduisent des taux de migration différents selon les paramètres des tourbillons.

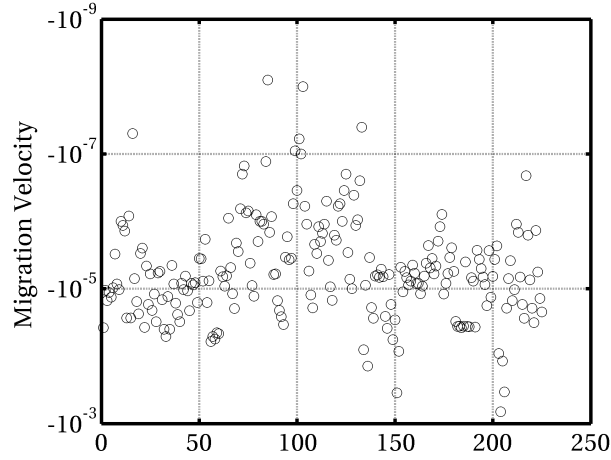


Figure VI.7 — Valeurs des vitesses de migration de chaque tourbillon de l'échantillon simulé. Les valeurs des vitesses sont normalisées à la vitesse képlérienne à $1 UA$, normalisation du code ROSSBI. En abscisse est simplement repéré l'index du tourbillon dans l'échantillon.

Les vitesses de migration, en ordonnées, sont exprimées en fonction de la vitesse képlérienne à $1 UA$, ce qui est la normalisation du code ROSSBI. On peut comparer ces résultats à d'autres travaux en modifiant cette normalisation. On constate que les vitesses de migration couvrent un espace de valeurs de près de 5 ordres de grandeurs, entre environ -1×10^{-3} pour la plus rapide, et -1×10^{-8} pour la plus lente. Ces données regroupent l'ensemble de l'échantillon, c'est-à-dire des tourbillons de formes très différentes, et évoluant dans différents profils de disque. Cette diversité est donc à contraindre en fonction de tous ces paramètres. On voit enfin que la migration peut être très importante, car pour un taux de -1×10^{-4} , le tourbillon dérive d'une unité astronomique en près de 100 rotations du disque (définie au rayon initial $r_0 = 7.5 UA$). Les valeurs maximales et minimales des vitesses de migration évoquées ci-dessus donnent des temps caractéristiques de chute sur l'étoile de 10^6 rotations pour la plus petite, à 100 rotations pour la plus grande. C'est pourquoi on observe dans de nombreuses simulations, le contact entre le tourbillon et le bord interne du disque, qui est situé à $5 UA$. Il semble donc nécessaire de caractériser cette migration, pour mieux en tenir compte dans les scénarios d'évolution des disques protoplanétaires.

Par ailleurs, l'existence de faibles taux de migration nous a conforté dans notre démarche de développer un code équilibré dans le code ROSSBI. En effet, la présence d'erreurs résiduelles systématiques dans le disque dues au schéma numérique est de nature à polluer la mesure de la migration propre des tourbillons. Les résultats de cet algorithme nous permettent de s'assurer que les taux de migration obtenus sont bien inhérents à la présence du tourbillon, et non pas dus à une vitesse radiale systématique du disque.

2.2 Migration et résolution spatiale

Avant de déterminer les liens entre migration et structure du tourbillon et du disque, nous devons vérifier que les taux de migration sont mesurés correctement avec la résolution numérique spatiale utilisée dans l'échantillon, $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$. En effet, si la résolution spatiale n'est pas suffisante, la diffusion numérique du schéma peut modifier et en particulier réduire le taux de migration effectif, et ainsi fausser l'analyse physique que nous voulons faire.

C'est pourquoi nous avons comparé les résultats de plusieurs simulations d'un même tourbillon, avec les mêmes paramètres de disque, pour différentes résolutions spatiales, afin de déterminer à partir de quelle résolution les mesures de vitesse de migration convergent.

Le tourbillon gaussien initial a pour paramètres : $R_0 = -0.13$, $\chi_r = 0.07$ et $\chi_\theta = 6$. Le disque est le même que celui utilisé le plus fréquemment. Les gradients de densité et de température sont $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$ et la densité et la température au rayon $r_0 = 7.5 UA$ sont $82.8 g.cm^{-2}$ et $83.6 K$. Nous avons utilisé quatre résolutions différentes, avec un même rapport entre la résolution radiale et azimutale, de façon à pouvoir comparer les taux de migration, et éviter des effets dus à un déséquilibre entre la diffusion numérique radiale et azimutale. Ces quatre résolutions sont : $(N_r, N_\theta) = (200, 400)$, $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$, $(N_r, N_\theta) = (800, 1600)$ et $(N_r, N_\theta) = (1200, 2400)$. Cela représente un gain de 2, 4 et 6 fois la résolution spatiale dans chaque direction par rapport à la plus faible résolution.

Les paramètres du tourbillon ainsi que sa position moyenne sont représentés Figure VI.8, sur une durée de 200 rotations. Les différentes résolutions spatiales utilisées sont représentées de la plus faible à la plus élevée dans différentes couleurs : noir, rouge, bleu et magenta. La remarque la plus évidente est que la résolution la plus faible n'est pas du tout suffisante pour décrire correctement l'évolution du tourbillon. Sans même considérer la position moyenne obtenue, on constate que les paramètres géométriques du modèle ne sont pas conservés. Le nombre de Rossby, figure (b), croît de façon significative, et sa valeur absolue est réduite de près de 15% pendant la durée de la simulation, alors qu'elle est conservée à moins de 5% près pour les autres résolutions. De même le rapport radial χ_r , figure(c), décroît au cours du temps de plus de 15% alors qu'il est conservé à moins de 2% pour les autres résolutions. On observe enfin un écart important à la dépendance linéaire, figure(a), qui correspond à une réduction du taux de migration pour les faibles résolutions.

Les autres résolutions conservent mieux les paramètres du tourbillon, et on observe une convergence des résultats à partir d'une résolution comprise entre $(400, 800)$ et $(800, 1600)$. Les deux résolutions les plus élevées donnent en effet des résultats similaires à moins de 1% près. On peut cependant constater que plus la résolution spatiale est élevée, plus le modèle se stabilise vers une structure dont les paramètres sont proches des valeurs initiales. Cela est particulièrement visible sur la figure (d) qui montre l'évolution du rapport d'aspect χ_θ . On remarque un écart entre la valeur obtenue après plusieurs centaines de rotations et la valeur initiale de 6 d'autant plus faible que la résolution augmente. Il semble que l'on n'ait pas encore atteint une résolution suffisante pour obtenir une valeur stable de χ_θ . Les autres paramètres sont moins sensibles à cet effet et on peut considérer qu'à partir de $(800, 1600)$, une convergence est assurée.

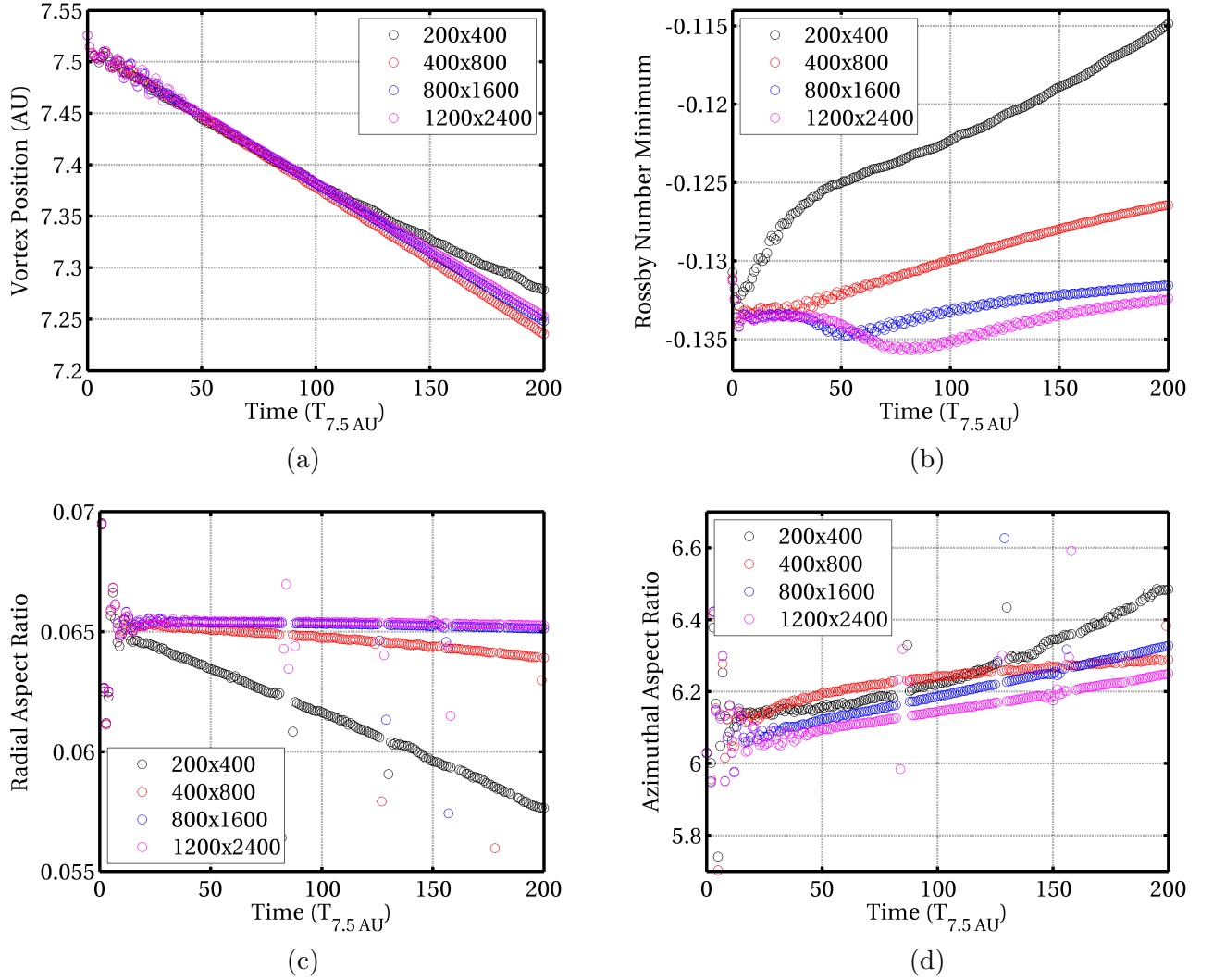


Figure VI.8 – Comparaison de l'évolution au cours du temps d'un tourbillon de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.07, 6)$ pour différentes résolutions numériques. En noir, on a utilisé la résolution $(N_r, N_\theta) = (200, 400)$, en rouge $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$, en bleu $(N_r, N_\theta) = (800, 1600)$ et en magenta $(N_r, N_\theta) = (1200, 2400)$. Les évolutions de la position moyenne, du nombre de Rossby R_0 , du rapport radial χ_r et du rapport d'aspect χ_θ sont présentées figures (a) à (d) respectivement.

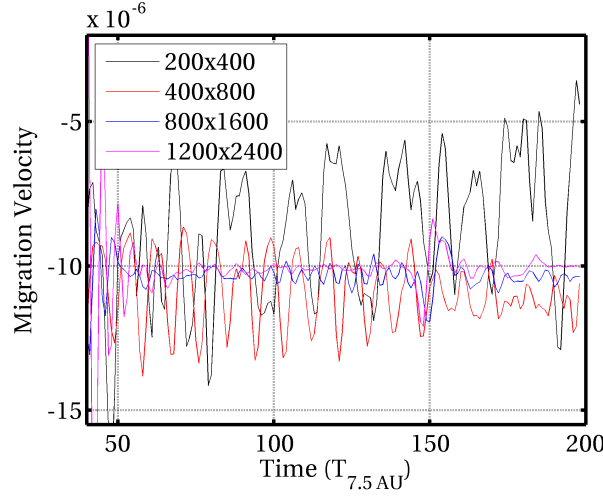


Figure VI.9 — Mesures de la vitesse de migration des tourbillons présentés Figure VI.8, pour chaque résolution, selon le même code de couleurs. Ces valeurs sont obtenues par calcul de la pente des courbes de position au cours du temps, et pour chaque tourbillon.

Déterminer la courbe de position n'est pas suffisant pour comparer précisément les taux de migration obtenus et trouver la résolution minimale à respecter. Il faut aussi déterminer la variation au cours du temps de la position, c'est-à-dire la pente de ces courbes. C'est pourquoi nous avons tracé la dérivée au cours du temps de la position moyenne. La différentiation est faite numériquement en discrétisant l'opérateur ∂_t à l'ordre 2, par une méthode limitant les oscillations, obtenue en pondérant les valeurs voisines à chaque instant.

Les résultats obtenus pour chaque résolution sont représentés suivant la même norme de couleurs que celle de la Figure VI.9. Nous avons volontairement omis de montrer les valeurs obtenues avant 50 rotations car ce temps correspond à la durée d'ajustement du tourbillon dans le disque. Les valeurs sont très oscillantes dans cet intervalle de temps et n'ont pas d'intérêt puisque nous nous intéressons à une évolution à long terme, la migration.

Les résultats obtenus avec la résolution la plus faible confirment la remarque précédente sur l'étude de la position moyenne. La vitesse de migration n'est pas constante, et croît au cours du temps. Si l'on fait abstraction des oscillations, la valeur médiane de la courbe augmente au cours du temps et vaut environ -7×10^{-6} . Pour la résolution $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$, nous obtenons un taux de migration beaucoup moins variable, et qui se stabilise autour de -12×10^{-6} , après 200 rotations. Lorsque l'on augmente la résolution, le taux de migration tend vers une valeur de -10×10^{-6} , qui demeure constante entre 70 et 200 rotations. Le faible degré d'oscillation des valeurs obtenues pour ces résolutions traduit une relaxation vers une meilleure description numérique de la dynamique du tourbillon.

On peut donc conclure que malgré les différences observées pour des simulations à plus haute résolution sur les valeurs de R_0 , χ_r et χ_θ , l'utilisation d'une résolution spatiale supérieure à $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$ garantit une mesure de la vitesse de migration à moins de 20% près, cette

erreur diminuant significativement lorsque l'on augmente la résolution. C'est pourquoi le compromis entre le temps de calcul nécessaire à une simulation sur 200 rotations, et la bonne estimation du taux de migration nous a porté vers l'utilisation majoritaire d'une résolution spatiale de $(N_r, N_\theta) = (400, 800)$. Les résultats obtenus sont alors fiables à plus de 20% près, ce qui est suffisant pour déterminer les principales propriétés de la migration. Nous verrons que ces propriétés peuvent se traduire par des relations assez simples entre les paramètres du tourbillon et les paramètres du disque.

Mais avant cela, nous allons décrire cette migration, et montrer comment elle est reliée au transport de moment cinétique dans le disque et dans les ondes.

2.3 Transport radial de moment cinétique

L'analyse linéaire effectuée par Paardekooper et al. 2010 [9] montre que l'amplitude d'une onde excitée par un mode azimuthal donné n'est pas symétrique par rapport au rayon d'orbite de ce mode. Cette asymétrie est due au gradient de la vitesse de rotation ainsi qu'aux gradients de densité et de température. L'approche linéaire est locale et ne décrit pas les ondes émises par un tourbillon, mais nous verrons que l'on peut toujours supposer que cette asymétrie reste présente dans les ondes émises par un tourbillon, et demeure responsable de la perte de moment cinétique du tourbillon.

Nous avons effectué une étude dans le repère cylindrique inertiel du système, qui donne la variation au cours du temps du moment cinétique :

$$\vec{l} = \vec{r} \times \sigma \vec{V} \quad (\text{VI.3})$$

Dans un système à deux dimensions, le moment cinétique est un scalaire, qui représente la coordonnée verticale du vecteur ci-dessus. Il est donc orienté dans la direction du vecteur de rotation $\vec{\Omega}$ imposé par le potentiel képlérien. On peut donc écrire une équation scalaire de la variation de l au cours du temps à partir des équations de conservation. On obtient alors :

$$\partial_t l + \frac{1}{r} \partial_r r l U + \frac{1}{r} \partial_\theta l V = -r \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (\text{VI.4})$$

où U et V sont les composantes de la vitesse dans les directions radiale et azimuthale, respectivement. Notons que nous n'avons pas retranché de vitesse stationnaire dans ces composantes. Enfin le membre de droite provient de $\vec{r} \times (-\vec{\nabla} P)$. Ainsi, le moment cinétique est une fonction qui répond à une équation de conservation similaire à celle de l'impulsion, mais où le terme dû à la force centrale est nul. Cette équation est au coeur des études sur l'accrétion des disques (Papaloizou et al., 1995 [10]) et peut être utilisée ici pour la migration des tourbillons.

Nous nous proposons d'effectuer une intégration dans la direction azimuthale, de façon à obtenir l'évolution de la partie radiale de cette équation, puisque c'est dans cette direction que le transport de moment nous intéresse. On obtient à l'issue de cette intégration :

$$\partial_t \langle l \rangle + \frac{1}{r} \partial_r r \langle l U \rangle = 0 \quad (\text{VI.5})$$

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 4	Modèle 5
β_σ	-1.5	-0.5	0.5	0.5	-0.5
β_T	-0.5	-0.5	0.5	0.5	-0.5
R_0	-0.148	-0.151	-0.148	-0.101	-0.100
χ_r	0.074	0.075	0.075	0.091	0.057
χ_θ	5.65	5.60	5.65	11.6	8.35

Tableau VI.1 – Récapitulatif des paramètres des simulations présentées Figure VI.10. Pour chaque modèle, numéroté de 1 à 5, nous présentons les gradients de densité et de température du disque β_σ et β_T , ainsi que les paramètres (R_0, χ_r, χ_θ) du modèle gaussien du tourbillon simulé.

Les termes dépendants de ∂_θ disparaissent puisque pour une fonction f , on définit $2\pi < \partial_\theta f >$ par $\int_0^{2\pi} \partial_\theta f d\theta = f(2\pi) - f(0) = 0$ par périodicité de la direction azimutale.

Cela étant dit, il nous reste à relier la variation de moment cinétique à la vitesse de migration. Pour cela nous partons de la constatation faite lors de l'étude de la structure et de la stabilité d'un tourbillon au cours du temps, qui montre que le champ de vitesse et la densité du gaz dans le tourbillon sont conservés par rapport aux valeurs stationnaires du disque. Il y a une mise à l'échelle lors de la migration et l'écart relatif aux valeurs stationnaires est toujours conservé. De ce fait, on peut admettre que :

$$\partial_t < l > \sim < \partial_t r > V_0(r) \sigma_0(r) \quad (\text{VI.6})$$

où $V_0(r)$ et $\sigma_0(r)$ sont les valeurs stationnaires de la vitesse azimutale et de la densité du disque. Nous avons conservé l'expression du terme $< \partial_t r >$, car c'est celui qui représente l'évolution temporelle de la position moyenne du tourbillon. C'est donc ce terme qui traduit la vitesse radiale de migration. On obtient donc :

$$\partial_t < l > = v_d V_0(r) \sigma_0(r) \quad (\text{VI.7})$$

La vitesse de migration du tourbillon v_d est donc reliée au moment cinétique par l'équation suivante :

$$v_d = -[r V_0(r) \sigma_0(r)]^{-1} \partial_r r < l U > \quad (\text{VI.8})$$

Cette équation montre que la vitesse de migration est reliée au transport radial de moment cinétique. Nous avons mesuré la valeur de cette expression pour différentes simulations de tourbillon, afin de la confronter aux taux de migration mesurés.

La Figure VI.10 montre à gauche (a) la valeur de l'opposé du membre de droite de l'équation VI.8, en fonction du rayon, pour cinq tourbillons différents, dans des disques de densité et de température différentes. De la sorte, on peut vérifier que la dépendance en fonction de la vitesse $V_0(r)$ et de la densité $\sigma_0(r)$ est correcte. Le Tableau VI.1 récapitule les paramètres des simulations effectuées. On couvre ainsi toute une gamme de géométries et de gradients différents.

L'étude de la figure (a) montre que notre modélisation de la vitesse de migration est une fonction quasiment symétrique, qui s'annule au centre du tourbillon. Sa valeur présente un extremum puis tend vers zéro à mesure que l'on s'éloigne du centre du tourbillon. Cela montre qu'il n'y a pas de vitesse de migration résiduelle dans le reste du disque. C'est donc seulement la structure du

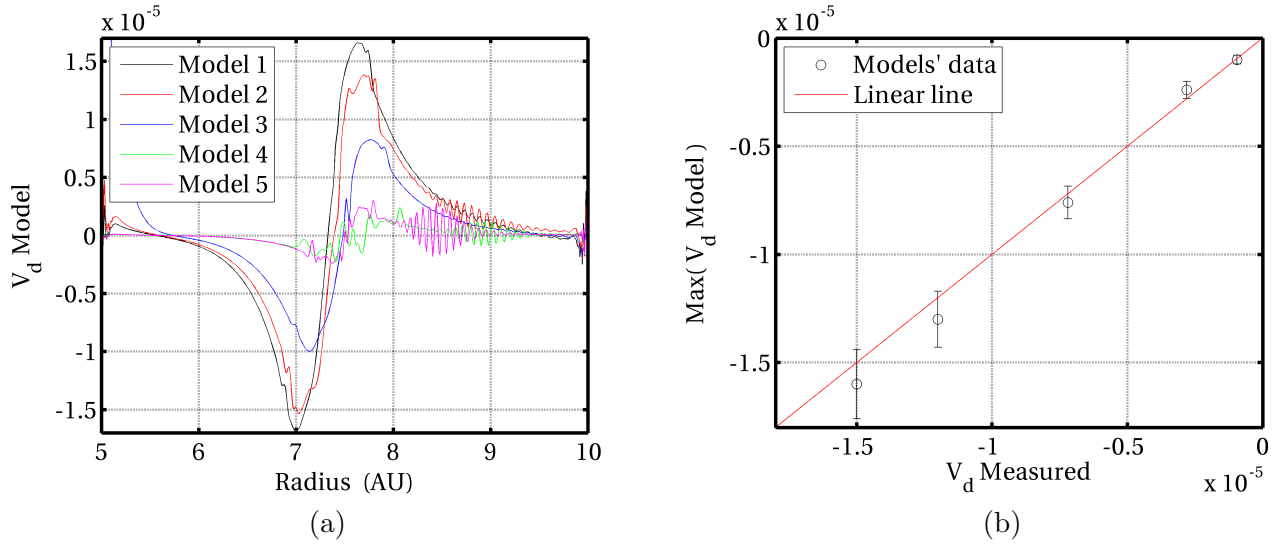


Figure VI.10 — La figure de gauche (a) montre la valeur, en fonction du rayon, du membre de droite de l'équation VI.8 qui permet d'estimer la vitesse de migration d'un tourbillon, pour les cinq modèles détaillés Tableau VI.1. Ces valeurs sont obtenues au bout de 100 rotations du disque, ce qui permet d'atteindre le régime linéaire de migration. Le maximum de ces courbes permet d'estimer la vitesse de migration du tourbillon. La figure (b) compare les valeurs obtenues, en ordonnées, avec les valeurs mesurées par la pente de la courbe de position, en abscisses. La droite rouge montre la correspondance à 10% près entre les deux valeurs, confirmant la bonne approximation de l'équation VI.8.

tourbillon qui migre radialement. Cette expression est établie dans un repère centré sur l'étoile, ce qui explique son changement de signe. Si l'on se place par rapport au centre du tourbillon, alors on a bien un flux positif dans la partie externe au centre du tourbillon, et également un flux positif dans la partie interne, puisque en deçà de la position du centre du tourbillon, vers 7.5 UA, la coordonnée radiale est négative dans le repère du tourbillon.

La valeur maximale de cette fonction correspond à la vitesse de migration. C'est ce que nous avons vérifié en comparant ce maximum avec la valeur de la vitesse de migration mesurée sur la courbe de position moyenne du tourbillon. La figure de droite (b) montre cette comparaison. La vitesse mesurée sur chaque simulation est indiquée sur l'axe des abscisses, alors que celle obtenue d'après le maximum des courbes qui sont tracées figure (a) est en ordonnées. On observe une correspondance satisfaisante, même pour des tourbillons différents, et des disques de paramètres différents. La droite rouge a une pente égale à l'unité, montrant la quasi égalité des valeurs, du moins dans la fourchette des barres d'erreurs, qui représentent un écart de 10%.

La vitesse de migration est donc bien estimée par ce modèle de conservation du moment cinétique, moyenné en azimuth. Malgré des hypothèses restrictives, comme cette moyenne et l'expression de la vitesse de migration à partir du moment cinétique, nous décrivons correctement la relation entre la vitesse de migration et la perte de moment cinétique par le tourbillon. On constate que cette perte atteint son maximum dans la région du tourbillon où la vitesse est maximale. C'est cette zone qui excite les ondes spirales et génère un flux radial de moment cinétique.

Cependant, dans le membre de droite de l'équation VI.8, on remarque que le terme $\partial_r r < lU >$

doit être non nul. Cela implique que le produit UV doit avoir une valeur finie. Or si le champ de vitesse du tourbillon est symétrique par rapport aux axes $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, alors ce produit est nul. C'est donc bien l'inclinaison du tourbillon dans l'écoulement, comme on a pu l'observer précédemment pour les grandes valeurs du nombre de Rossby, qui permet une vitesse de migration significative.

Cela montre que la vitesse de migration doit dépendre des paramètres du tourbillon et en particulier de son nombre de Rossby. Nous allons donc caractériser cette migration en fonction de ces paramètres dans la partie suivante.

3 Migration et géométrie du tourbillon

Nous avons montré que la vitesse de migration obtenue pour tous les tourbillons simulés peut varier de plusieurs ordres de grandeur. Compte tenu de la diversité des paramètres du modèle gaussien contenu dans cet échantillon, la dépendance de la migration en fonction de ces paramètres ressort de façon évidente. Les résultats des auteurs précédents, obtenus pour un disque localement isotherme, montraient déjà une dépendance en fonction de la largeur radiale, du rapport d'aspect et de la force du tourbillon. Cependant, le tourbillon initial était un tourbillon de Kida, sans perturbation de densité, et avec des vitesses initiales inappropriées. En effet, le maximum de vitesse y était de $3/4c_{s0}$, ce qui est conséquent, en comparaison aux valeurs de nos simulations. De ce fait, la vorticité relative présente dans le tourbillon était de plusieurs fois supérieure à celle du disque. La largeur radiale de ces tourbillons était comprise entre $1/10$ et 1 fois l'échelle de hauteur.

Les tourbillons que nous étudions ici sont donc en tous aspects différents de ceux de cette étude précédente, et ne couvrent pas le même domaine de paramètres. Nous allons présenter maintenant les résultats obtenus avec notre échantillon et discuterons des différences avec les résultats des autres auteurs.

3.1 Effets de la largeur radiale

La largeur radiale des tourbillons de notre échantillon varie de $\chi_r = 0.025$ à $\chi_r = 0.19$, c'est-à-dire de $1/2$ à près de 4 fois l'échelle de hauteur du disque. Malgré ce grand domaine de valeurs, nous n'avons pas trouvé de variation significative de la vitesse de migration en fonction de ce paramètre. Il faut bien sûr prendre soin de comparer des tourbillons de différents χ_r , mais pour lesquels le rapport d'aspect χ_θ et le nombre de Rossby R_0 sont identiques, autant que possible. En effet, nous cherchons à étudier l'impact de la largeur radiale et non des différences résultant de la méconnaissance des autres paramètres.

Nous avons comparé quatre tourbillons de rapport radial $\chi_r = 0.033$, $\chi_r = 0.082$, $\chi_r = 0.106$ et $\chi_r = 0.131$, numérotés de 1 à 4 respectivement. Leur rapport d'aspect χ_θ est de 7 initialement et de $\chi_\theta = 7.1 \pm 5\%$ après ajustement dans le disque, ce que nous considérerons comme identique. Enfin, leur nombre de Rossby est initialement $R_0 = -0.125$.

Nous montrons Figure VI.11 l'évolution au cours du temps de ces paramètres ainsi que celle de la position moyenne du tourbillon. On peut constater que les rapports radiaux χ_r , figure (c), sont

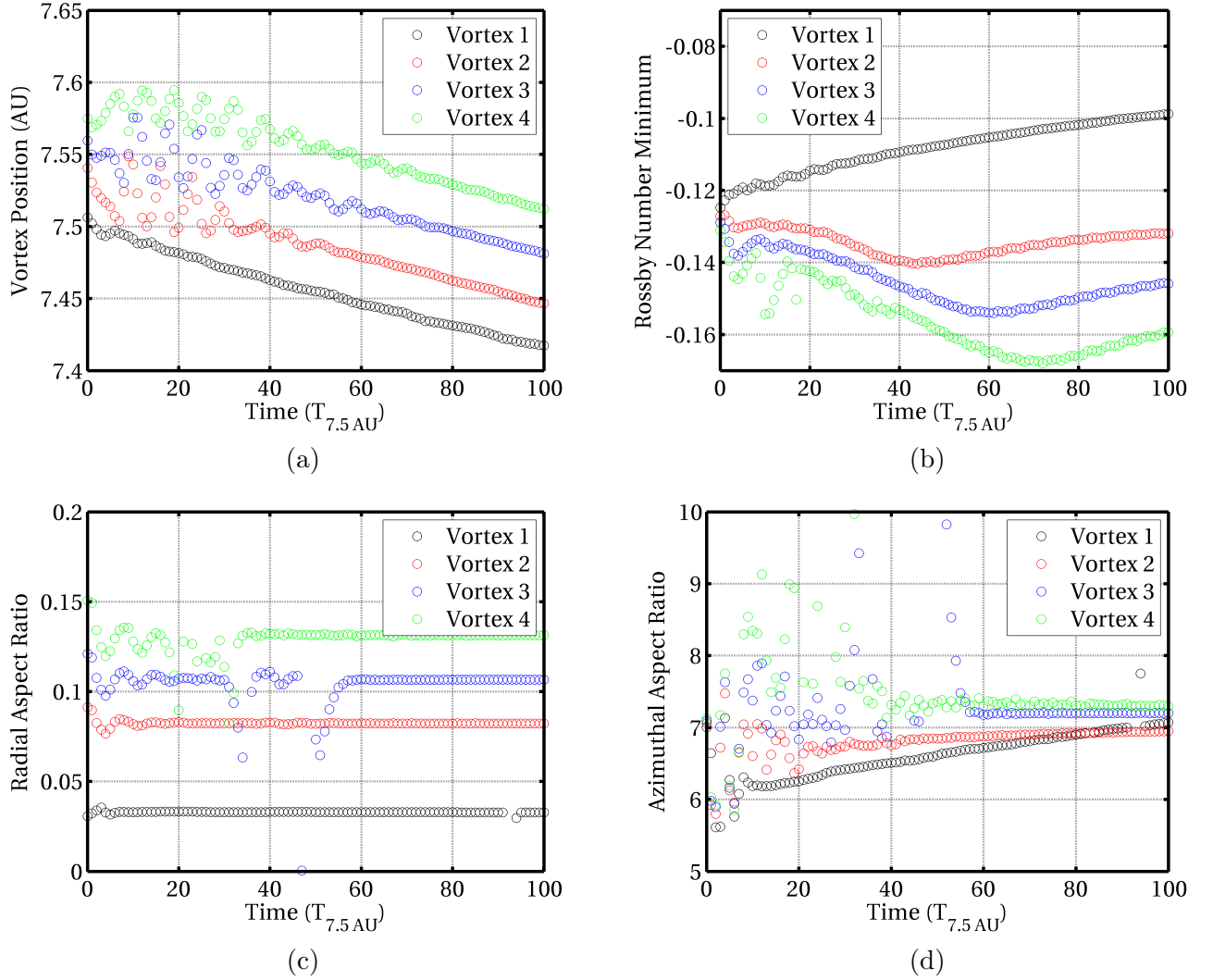


Figure VI.11 — Comparaison de l'évolution au cours du temps de quatre tourbillons de largeurs radiales différentes, pour un même nombre de Rossby et rapport d'aspect initial $R_0, \chi_\theta = (-0.125, 7)$. L'évolution de la position moyenne, du nombre de Rossby (R_0), du rapport radial χ_r et du rapport d'aspect χ_θ sont présentées figures (a) à (d) respectivement. Les tourbillons numérotés de 1 à 4 sont représentés en noir, rouge, bleu et magenta respectivement.

constants dans le temps pour les quatre tourbillons. Ils conservent leur valeurs obtenues après 20 rotations, temps nécessaire à l'ajustement des tourbillons dans le disque. Le rapport d'aspect χ_θ , figure (d), décroît au cours des premières rotations jusqu'à $\chi_\theta = 6$, puis rejoint la valeur initiale de 7 rapidement. Ainsi, à partir de 60 rotations, les quatre tourbillons possèdent le même rapport d'aspect à 5% près. Le nombre de Rossby, présenté figure (b), varie par contre davantage, car plus le tourbillon est étendu radialement, plus les effets baroclines dus au gradient d'entropie sont importants. C'est pourquoi on observe une augmentation linéaire du nombre de Rossby pour les tourbillons 2 à 4. Cependant, on distingue une relaxation de cet effet à partir de 50 rotations environ, à la suite de laquelle le nombre de Rossby revient vers la valeur initiale de -0.125 . Cela vient du fait que l'on trace le nombre de Rossby minimal au centre du tourbillon. Si l'on trace le nombre de Rossby moyen, cet effet est estompé comme nous l'avons montré au paragraphe 6.2 du chapitre précédent. Nous avons vérifié que les nombres de Rossby moyens des quatre tourbillons gardent une valeur comparable à moins de 10% près.

Ainsi la comparaison de la position moyenne des tourbillons, figure (a), permet de montrer que la seule différence de largeur radiale n'a pas d'effet sur la migration. On constate en effet que la pente des courbes de position est presque identique, et ce dès 60 rotations après l'instant initial. La mesure de la vitesse de migration de ces tourbillons donne une valeur comprise entre -6×10^{-6} pour le tourbillon de plus faible χ_r , et -6.8×10^{-6} pour le tourbillon de plus grand rapport radial. On obtient donc une dispersion des valeurs de 10% autour d'une valeur de -6.5×10^{-6} , alors que la largeur radiale testée peut varier d'un facteur 5 entre la plus forte et la plus faible valeur. On peut donc en déduire que la vitesse de migration ne dépend pas de la largeur radiale.

La légère différence observée peut sans doute être imputée à la résolution spatiale qui est la même pour les quatre simulations. En effet, nous avons vu que la "convergence" de la valeur de la vitesse de migration nécessite une forte résolution. Dans le cas d'une faible valeur de χ_r , les faibles dimensions du tourbillon réduisent la résolution effective, puisqu'il y a moins de cellules sur sa surface. Un tourbillon de grand χ_r est donc mieux résolu, en utilisant le même couple (N_r, N_θ) , qu'un tourbillon de petit χ_r . Cela explique pourquoi le rapport d'aspect χ_θ croît au cours du temps pour le tourbillon 1, figure (d).

Lorsque l'on s'assure que les autres paramètres du tourbillon sont les mêmes, on montre que la vitesse de migration ne dépend pas de la largeur radiale. Ce résultat semble mettre en défaut les résultats obtenus par Paardekooper et al, qui concluent à une croissance du taux de migration avec la taille du tourbillon, dans le régime de largeurs inférieures à une échelle de hauteur (entre 0.1 et 0.8 échelles de hauteur). Les auteurs observent aussi une saturation du taux de migration pour des extensions radiales supérieures à une échelle de hauteur. Cependant leurs résultats mettent en évidence que si l'on fait varier la largeur radiale de 0.5 échelle de hauteur à une échelle de hauteur, le taux de migration varie du simple au double. Dans notre cas, nous montrons qu'en faisant varier la largeur radiale de $0.6 H$ ($\chi_r = 0.033$), à $2.4 H$ ($\chi_r = 0.131$), la vitesse de migration ne varie que de seulement 10%. Cela montre qu'il est nécessaire de s'assurer de l'égalité des autres paramètres du tourbillon (R_0 et χ_θ), sans quoi l'effet de la largeur radiale sur la migration est faussé, comme cela semble le cas pour les résultats de ces auteurs.

On peut retrouver ce résultat, en rappelant que la vitesse de migration est égale au flux de moment cinétique, voir l'équation VI.8. Or dans cette expression, le terme dominant est dû au produit UV , qui contient principalement les termes liés à la présence du tourbillon, et qui dépend donc de la valeur des vitesses en son coeur. Ces vitesses peuvent être estimées grâce au modèle gaussien développé dans le chapitre précédent. Si on suppose que la valeur caractéristique des vitesses radiale et azimutale est donnée par l'amplitude de ces fonctions, on peut montrer grâce au modèle gaussien que :

$$u \text{ ou } v \sim -2r_0\Omega_0 R_0 \times f(r, \theta) \quad (\text{VI.9})$$

où $f(r, \theta)$ est une gaussienne d'amplitude unité, multipliée par $r/r_0 - 1$ ou $\theta - \theta_0$. Les vitesses radiale et azimutale du tourbillon sont donc normalisées par une fonction dépendant uniquement du nombre de Rossby, et indépendante de la largeur radiale. Ce raisonnement est bien évidemment très restrictif, car l'intégrale définissant v_d peut être difficile, cependant à l'ordre le plus bas, cela permet d'expliquer pourquoi la vitesse de migration ne dépend pas de la largeur radiale.

3.2 Effets du rapport d'aspect

L'étude de la structure et de la stabilité d'un tourbillon effectuée au chapitre précédent a montré que plus le rapport d'aspect est faible, plus le tourbillon excite des ondes spirales de forte amplitude. Nous avons montré que pour $\chi_r < 7$, le rapport entre l'amplitude des ondes et celle du coeur du tourbillon devient plus grand que l'unité, et nous nous sommes basés sur ce critère pour différencier les tourbillons *incompressibles* des tourbillons *compressibles*.

La migration étant due au transport de moment cinétique par les ondes, qui exercent un couple sur le tourbillon, la vitesse de migration dépend de l'amplitude de ces ondes, et doit donc fortement dépendre du rapport d'aspect. Les résultats actuels montrent effectivement que la vitesse de migration tend à augmenter lorsque le rapport d'aspect diminue. Nous allons maintenant expliciter la dépendance de la vitesse de migration en fonction du rapport d'aspect χ_θ .

Nous avons utilisé pour cela trois groupes de simulation, chacun correspondant à des paramètres du disque différents. Chaque groupe est constitué de huit tourbillons de rapports d'aspects différents, mais ces huit tourbillons sont les mêmes d'un groupe à l'autre. Cela permet de vérifier que la loi obtenue en fonction du rapport d'aspect est indépendante par rapport au choix des gradients du disque.

Le groupe 1 est réalisé pour un disque de paramètres $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$. Le groupe 2 est réalisé pour un disque de paramètres $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, 0.5)$. Enfin, le groupe 3 est réalisé pour un disque de paramètres $(\beta_\sigma, \beta_T) = (0.5, -0.5)$. Les tourbillons de chaque groupe ont des rapports d'aspect qui s'échelonnent de 4.8 à 12.3, ce qui couvre une grande partie des rapports d'aspect possibles dans les disques.

Nous avons mesuré la vitesse de migration pour chaque tourbillon des différents groupes, et tracé Figure VI.12 les valeurs obtenues en fonction du rapport d'aspect. Chaque groupe est représenté dans une couleur différente. On constate tout d'abord que l'on trouve une augmentation de la vitesse de migration quand le rapport d'aspect diminue. Nous avons tracé les valeurs de façon logarithmique

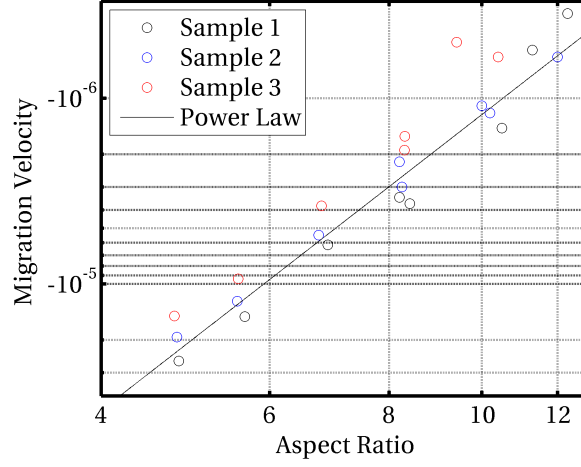


Figure VI.12 – Valeurs des vitesses de migration des tourbillons des groupes 1 à 3, représentés en noir, rouge et bleu respectivement, en fonction du rapport d’aspect χ_θ . L’échelle est logarithmique en abscisses comme en ordonnées. La droite noire d’équation $y = ax^{-4}$ montre la relation entre les deux valeurs, qui semble indépendante du choix du groupe, c’est-à-dire du choix des gradients de densité et de température.

en abscisses et en ordonnées. La dépendance linéaire entre les deux grandeurs montre que la vitesse de migration varie comme une puissance du rapport d’aspect.

Nous remarquons que la pente de la droite qui détermine la relation entre la vitesse de migration et le rapport d’aspect est presque la même pour les trois groupes. Cela montre que cette dépendance en loi de puissance ne dépend pas des paramètres du disque. Cette pente est mise en évidence par la droite noire. Nous déterminons une relation de la forme :

$$v_d \propto \chi_\theta^{-4} \quad (\text{VI.10})$$

Cette relation simple est en accord avec les données des trois groupes, la constante de proportionnalité étant différente pour chacun. Cela explique le décalage des valeurs de la vitesse de migration entre les trois groupes, pour un même rapport d’aspect. Cette constante de proportionnalité est une fonction des paramètres du disque que nous trouvons dans la section suivante.

La vitesse de migration varie donc comme une puissance du rapport d’aspect, relation simple qui montre que la vitesse de migration dépend fortement du spectre des ondes dans la direction azimutale. Plus le rapport d’aspect est petit, plus la perturbation créée par le tourbillon peut exciter des modes azimutaux élevés. Or, d’après l’analyse linéaire, l’amplitude des ondes est d’autant plus grande que leur mode azimutal est d’ordre élevé. On peut donc en déduire que le transport de moment cinétique qui dirige la migration sera également plus important si l’amplitude des ondes est importante.

Cette dépendance de la vitesse de migration en fonction du rapport d’aspect implique également une dépendance en fonction du nombre de Rossby. Cependant nous n’avons pas pu mettre en évidence de relation simple en confrontant les deux grandeurs. Nous avons vu dans le chapitre

précédent que le rapport d'aspect est relié au nombre de Rossby d'un tourbillon. Cette relation est compliquée et dépend du modèle de tourbillon. Dans le cas du modèle gaussien, nous avons obtenu une équation qui correspond aux données. La forme de cette équation permet de comprendre que, bien que la migration dépende comme une simple puissance du rapport d'aspect, l'expression de la vitesse de migration en fonction du nombre de Rossby est, elle, très compliquée.

Compte tenu de l'existence d'une relation entre nombre de Rossby et rapport d'aspect, il nous semble plus intéressant de montrer uniquement la dépendance de la vitesse de migration en fonction de χ_θ . C'est finalement le seul paramètre du tourbillon qui détermine la vitesse de migration, puisque la dimension radiale n'a pas d'effet et le nombre de Rossby est relié au rapport d'aspect.

La migration dépend de la géométrie du tourbillon, mais cette dépendance n'est pas modifiée quand on change les gradients du disque comme semble le montrer la Figure VI.12. Quels que soient les gradients de densité et de température, ainsi que la température du disque au rayon r_0 , la vitesse de migration semble toujours proportionnelle à χ_θ^{-4} . Nous montrons clairement que la vitesse de migration s'exprime comme le produit d'une fonction des paramètres du disque et d'une fonction du rapport d'aspect que nous venons d'explicitier. Reste à exprimer la fonction qui dépend des paramètres du disque.

4 Migration et paramètres du disque

Nous avons montré que la migration radiale des tourbillons est due au transport radial de moment angulaire, plus exactement de moment cinétique $l = r\sigma V$. La distribution spatiale de moment cinétique dépend du profil de densité du disque. En particulier, le gradient de densité β_σ joue un rôle central dans la répartition centre/bord du moment cinétique au sein du tourbillon, mais surtout dans la région où les ondes de densité sont excitées. Or le flux de moment cinétique responsable de la migration radiale dépend de cette distribution de densité. Comme le montre l'équation VI.8, la vitesse de migration est proportionnelle à $\sigma_0^{-1}(r)\partial_r r < lU >$, dans lequel on peut expliciter $\beta_\sigma = r/\sigma_0(r)\partial_r \sigma_0(r)$.

Ensuite le produit UV qui découle du produit lU fait apparaître une quantité proportionnelle à la vitesse du son $c_{s0}(r)$. En effet, comme le modèle gaussien le montre, le champ de vitesse d'un tourbillon dérive de la pseudo enthalpie $\mathcal{H}$. Par conséquent, le gradient de température β_T , de même que la valeur de la température au rayon de référence $T_0(r_0)$, contribuent également à modifier la vitesse de migration.

Ce sont ces différentes contributions que nous allons expliciter maintenant. Pour cela nous avons simulé un ensemble de quatre tourbillons différents, de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.11, 0.07, 9.5)$, $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.07, 6.8)$, $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.15, 0.07, 5.8)$ et $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.17, 0.07, 4.8)$ dans des disques de gradients de densité valant $\beta_\sigma = -1.5, -0.5$ et 0.5 , et de gradient de température $\beta_T = -1.5, -0.5$ et 0.5 . De cette façon, pour 9 disques différents, nous disposons de quatre tourbillons de nombre de Rossby et de rapport d'aspect différents. Cela permet de comparer l'effet des gradients en réduisant au minimum l'effet de la géométrie du tourbillon.

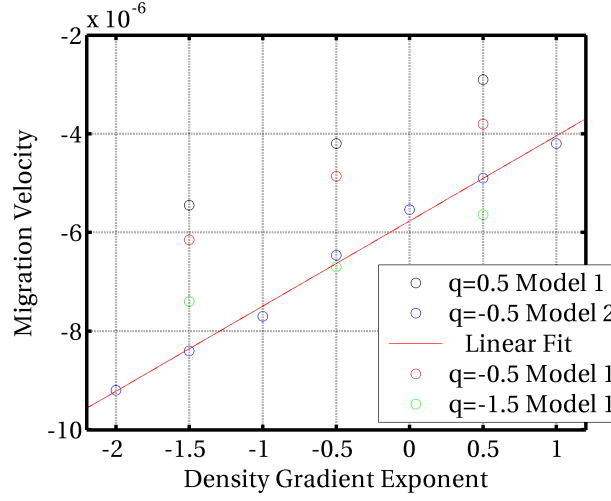


Figure VI.13 – Corrélation entre la vitesse de migration et l'exposant de densité β_σ , pour différents tourbillons. En noir, rouge et vert sont représentés les tourbillons de mêmes paramètres gaussiens $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.07, 6.8)$ (Modèle 1), dans des disques de gradients de température $\beta_T = 0.5, -0.5$ et -1.5 respectivement. Le tourbillon de paramètres gaussiens $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.121, 0.058, 6.6)$ (Modèle 2) et $\beta_T = -0.5$ est représenté en bleu. La droite rouge est un ajustement linéaire qui montre la relation entre la vitesse de migration et β_σ .

4.1 Gradient de densité

Le gradient de densité modifie la distribution de densité au niveau des ondes excitées par le tourbillon. La dépendance en loi de puissance crée une dissymétrie de la densité par rapport à l'orbite r_0 du tourbillon. En effet, si l'on se place à une distance $x > 0$ de part et d'autre de r_0 , on a $|(r_0 + x)^{\beta_\sigma} - r_0^{\beta_\sigma}| < |(r_0 - x)^{\beta_\sigma} - r_0^{\beta_\sigma}|$ puisque $\beta_\sigma < 0$, comme on peut l'attendre dans un disque protoplanétaire standard. On obtiendrait l'inverse pour $\beta_\sigma > 0$. Par conséquent, cette dissymétrie va induire une différence entre le moment cinétique transporté par l'onde externe et celui transporté par l'onde interne.

Pour quantifier cette contribution, nous avons comparé la vitesse de migration des tourbillons dans des disques de gradients de densité différents. Dans cette section, le tourbillon Modèle 1 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.07, 6.8)$, et le tourbillon Modèle 2 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.121, 0.058, 6.6)$.

Nous avons tout d'abord fait varier β_σ de -2 à 1 par pas de 0.5 , pour le tourbillon Modèle 2. Le gradient de température est ici $\beta_T = -0.5$. De cette façon nous voulons vérifier la dépendance de la migration en fonction de β_σ . Les résultats sont présentés Figure VI.13. Il s'agit de l'ensemble des données représentées en ronds bleus.

On peut mettre en évidence une relation linéaire entre la vitesse de migration et le gradient de densité β_σ . La droite rouge est un ajustement linéaire de ces données et confirme la linéarité de ces deux grandeurs. Nous trouvons la même dépendance que celle avancée dans les travaux localement isothermes de Paardekooper. La vitesse de migration diminue quand le gradient de densité augmente vers des valeurs positives. Sa valeur est réduite de moitié, en passant d'environ

-8×10^{-6} à $-4 \times 10^{-6} V_0(1UA)$, lorsque β_σ passe de -1.5 à 1 . Une extrapolation montre que la vitesse de migration s'annule dans ce cas pour $\beta_\sigma = 3.5$, ce qui est très élevé.

Ainsi, nos résultats montrent qu'une densité constante n'est pas suffisante pour compenser l'asymétrie des ondes et annuler la migration. En conséquence, les résultats obtenus pour un disque localement isotherme avec des tourbillons de Kida extrêmement forts et de petites tailles sont différents de ceux que nous obtenons. Dans le cas des tourbillons que nous modélisons, et qui correspondent à ceux que l'on peut obtenir à l'issue de l'IOR, la dissymétrie de l'écoulement képlérien domine d'avantage le transport de moment angulaire dans les ondes. Pour inverser la migration, des gradients de densité plus importants seraient nécessaires.

Nous avons vérifié que cette relation linéaire reste valable pour des disques ayant des gradients de température différents. On peut avancer en effet que les résultats de Paardekooper sont obtenus pour un gradient de température $\beta_T = -1$, donnant une évolution linéaire de l'échelle de hauteur en fonction du rayon. C'est pourquoi nous montrons les valeurs des vitesses de migration obtenues pour le tourbillon Modèle 1. Ces résultats sont également présentés Figure VI.13, pour différents gradients de température, $\beta_T = 0.5$, $\beta_T = -0.5$ et $\beta_T = -1.5$ en ronds noirs, rouges et verts, respectivement.

On obtient toujours une évolution linéaire de la vitesse de migration avec β_σ . On remarque cependant que cette vitesse est d'autant plus faible que le gradient de température augmente, en passant de valeurs négatives à des valeurs positives. Changer le gradient de température modifie donc la valeur critique du gradient de densité pour laquelle la migration change de signe. Plus la valeur de β_T est petite, c'est-à-dire vers des valeurs négatives, plus β_σ doit être grand c'est-à-dire tendre vers des valeurs positives. Pour finir, on note qu'une pression constante n'est pas non plus suffisante pour annuler la migration comme l'avance Paardekooper. Nous devons étudier la dépendance de la migration en fonction de β_T pour définir clairement ce critère d'inversion possible de la migration.

4.2 Gradient de température

Nous étudions ici toujours le même tourbillon Modèle 1 de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.07, 6.8)$, mais en comparant cette fois la vitesse de migration en fonction du gradient de température β_T . Les résultats sont présentés Figure VI.14, qui montre en noir, rouge et vert les vitesses de migration en fonction de β_T pour des gradients d'indice β_σ valant 0.5 , -0.5 et -1.5 , respectivement.

Si l'on compare les valeurs du taux de migration pour un exposant β_T donné, on retrouve que la vitesse de migration diminue lorsque β_σ augmente, ce qui est visible sur la figure en comparant les valeurs des ronds verts à celles des ronds noirs. Mais ce que nous voulons mettre en valeur est le comportement linéaire de la dépendance de la vitesse de migration avec le gradient de température. Ce comportement, similaire à celui mis en évidence pour le gradient de densité, est matérialisé par l'ajustement des données suivant la droite rouge. La vitesse de migration diminue lorsque le gradient de température passe de valeurs négatives à des valeurs positives. On remarque là encore qu'un gradient $\beta_T = 0$, c'est-à-dire une température constante en fonction du rayon, n'inverse pas la

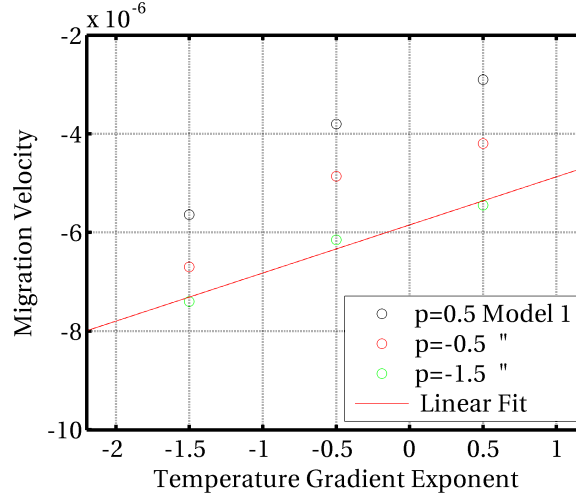


Figure VI.14 — Corrélation entre vitesse de migration et exposant de température β_T , pour différents tourbillons. En noir, rouge et vert sont représentés des tourbillons de mêmes paramètres gaussiens $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.13, 0.07, 6.8)$, dans des disques de gradients de densité $\beta_\sigma = 0.5, -0.5$ et -1.5 , respectivement. La droite rouge est un ajustement linéaire qui montre la relation entre la vitesse de migration et le gradient de température.

migration.

La température du disque détermine directement la vitesse du son dans le gaz, puisque $T_0(r) \propto c_{s0}^2(r)$. Par conséquent, sa dépendance radiale modifie le déséquilibre du transport de moment cinétique vers l'extérieur et vers l'intérieur du disque, relativement à l'orbite du tourbillon. Nous avons montré que la vitesse de migration est déterminée par le gradient radial du produit $\langle UV \rangle$ dans le tourbillon. Ce produit étant proportionnel au carré de la vitesse du son, d'après le modèle gaussien, il semble donc cohérent de trouver une relation linéaire entre vitesse de migration et gradient de température. Cette relation est nouvelle et montre la nature compressible des ondes avec une relation directe entre vitesse du son et transport de moment cinétique.

L'équation de la droite qui relie la vitesse de migration au gradient de température, pour chaque gradient de densité, met en évidence que plus β_σ est négatif, plus le gradient β_T doit être positif pour compenser l'asymétrie des ondes et inverser la migration. Malheureusement, il est difficile de déterminer la bonne relation d'après ces données, car nous avons mesuré un écart significatif entre les paramètres gaussiens des tourbillons simulés pour $\beta_T = 0.5$ et ceux obtenus pour $\beta_T = -0.5$ et -1.5 .

En particulier, un écart de plus de 5% est présent entre les valeurs du rapport d'aspect entre les résultats obtenus pour différents β_T . Or, nous l'avons vu, le rapport d'aspect modifie fortement la valeur du taux de migration, par la relation $v_d \propto \chi_\theta^{-4}$. De fait, les valeurs des vitesses de migration tracées sur la Figure VI.14, en $\beta_T = 0.5$, sont inférieures aux valeurs qu'on obtiendrait si le tourbillon avait les mêmes paramètres que pour les autres valeurs de β_T , et ce d'environ $1.05^{-4} \sim 20\%$. Les pentes des droites sont donc sous estimées. Cela explique le léger écart d'alignement des points en fonction de β_T .

En effectuant cette correction, le cas correspondant à $\beta_\sigma = -1.5$, en vert, donne un gradient de

	R_0	χ_r	χ_θ
Modèle 1	-0.113	0.074	9.5
Modèle 2	-0.133	0.077	6.8
Modèle 3	-0.153	0.074	5.6
Modèle 4	-0.172	0.067	4.8

Tableau VI.2 – Paramètres gaussiens des quatre différents tourbillons modèles utilisés pour déterminer la dépendance du taux de migration en fonction du gradient de pression.

température nécessaire à l’annulation de la migration égal à $\beta_T = 4.5$, ce qui est particulièrement élevé. Même pour un gradient de densité positif, comme $\beta_\sigma = 0.5$ en noir sur la Figure VI.14, la température doit malgré tout croître dans le disque avec un gradient $\beta_T = 2.5$ pour que la migration puisse s’inverser. On voit que la migration d’un tourbillon est, dans la plupart des cas, dirigée vers l’étoile, à moins qu’une région du disque, perturbée par une planète par exemple, puisse avoir des gradients positifs de densité et de température suffisamment forts.

4.3 Gradient de pression

La linéarité de la dépendance de la vitesse de migration en fonction des gradients de densité et de température laisse entrevoir une dépendance linéaire en fonction du gradient de pression. Bien que nous ayons mis en évidence l’origine de ces relations pour la densité et la température grâce à l’équation VI.8 et au modèle gaussien, il semble que la pression soit la grandeur qui permette de distinguer l’asymétrie des ondes due à l’écoulement, c’est-à-dire au cisaillement β_Ω , de l’asymétrie due à la distribution des grandeurs thermodynamiques du gaz. Car finalement, le produit $\langle lU \rangle$ qui entre en jeu dans l’expression de la migration, correspond à une énergie cinétique. La pression n’est autre que l’énergie interne du gaz, et par conséquent peut être reliée à la migration par homogénéité des grandeurs.

Le gradient de pression peut s’écrire $\beta_P = \beta_\sigma + \beta_T$. Afin de déterminer l’expression du facteur multiplicatif dépendant des gradients du disque qui apparaît dans l’expression de la vitesse de migration, nous allons reprendre les résultats présentés dans les deux paragraphes précédents. Lorsque ce coefficient s’annule, alors la vitesse de migration devient nulle. L’étude du gradient de densité a mis en évidence que dans le cas d’un disque de température telle que $\beta_T = -0.5$, la migration s’annule lorsque $\beta_\sigma = 3.5$. On peut donc en déduire qu’elle s’annule lorsque $\beta_P = 3$. Le même raisonnement peut être fait sur les résultats de l’étude de la température. Nous avons montré que pour un disque avec $\beta_\sigma = -1.5$, la migration change de signe lorsque $\beta_T = 4.5$, ce qui donne un coefficient $\beta_P = 3$.

On met donc en évidence que la migration est proportionnelle à un facteur qui s’annule lorsque $\beta_P = 3$, soit $v_d \propto 3 - \beta_P$. Cependant, ces résultats sont obtenus pour des simulations de tourbillons de mêmes paramètres gaussiens. Nous avons vérifié si cette expression est valable pour d’autres valeurs de ces paramètres, en particulier d’autres valeurs du rapport d’aspect, qui détermine fortement la valeur de la vitesse de migration. Pour cela nous avons utilisé un groupe de quatre tourbillons

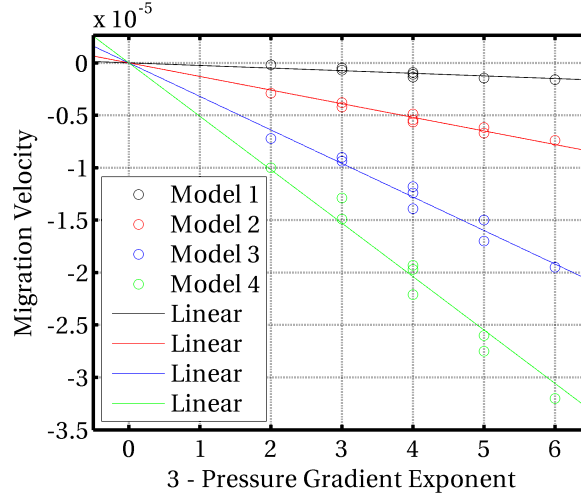


Figure VI.15 — Taux de migration en fonction du gradient de pression. Pour chaque tourbillon d'un même groupe, Modèle 1 à 4, représentés en noir, rouge, bleu et vert, on met en évidence la linéarité de la vitesse de migration en fonction du facteur $3 - \beta_P$. La pente est déterminée par le rapport d'aspect du tourbillon.

différents dans des disques de gradients de densité β_σ valant -1.5 , -0.5 et 0.5 , et de température β_T valant -1.5 , -0.5 et 0.5 . Ce sont donc 9 simulations d'un même tourbillon, dans des gradients différents, qui constituent les Modèles 1 à 4.

Dans cette section, les paramètres gaussiens des quatre tourbillons constituant les Modèles 1 à 4 sont récapitulés Tableau VI.2. Ces valeurs sont obtenues par moyenne des paramètres gaussiens pour les 9 simulations dans les différents gradients. L'écart type à ces valeurs moyennes est inférieur à 5%, ce qui permet de confirmer que les tourbillons sont identiques au sein d'un Modèle.

Nous montrons Figure VI.15 la relation entre la vitesse de migration des tourbillons de chaque Modèle en fonction du facteur $3 - \beta_P$. Les Modèles 1 à 4 sont représentés en noirs, rouge, bleu et vert respectivement. On constate que les neuf combinaisons de gradients de densité et de température mènent à cinq gradients de pression seulement. Malgré cela, nous disposons d'un nombre suffisant de données pour mettre en évidence le comportement linéaire de la migration en fonction du gradient de pression. On remarque que les tourbillons de mêmes paramètres gaussiens, ici ceux appartenant à un même "Modèle", sont alignés, et que la pente est de plus en plus forte lorsque le rapport d'aspect augmente, c'est-à-dire lorsque l'on passe du Modèle 1 au Modèle 4.

Les droites tracées en différentes couleurs, c'est-à-dire pour chaque groupe, passent par l'origine et montrent que la vitesse de migration est bien proportionnelle au facteur $3 - \beta_P$. Ce n'est donc pas simplement la distribution de pression qui dirige la migration mais bien la compétition entre celle-ci et un facteur constant égal à 3, qui ne dépend pas des grandeurs thermodynamiques. Cette contribution systématique à la migration peut être imputée à l'écoulement proprement dit, c'est-à-dire à l'asymétrie des ondes qui découle de la rotation différentielle. Ce facteur doit donc dépendre du cisaillement β_Ω , bien qu'obtenir une expression analytique semble difficile, cela fait partie de nos projets futurs.

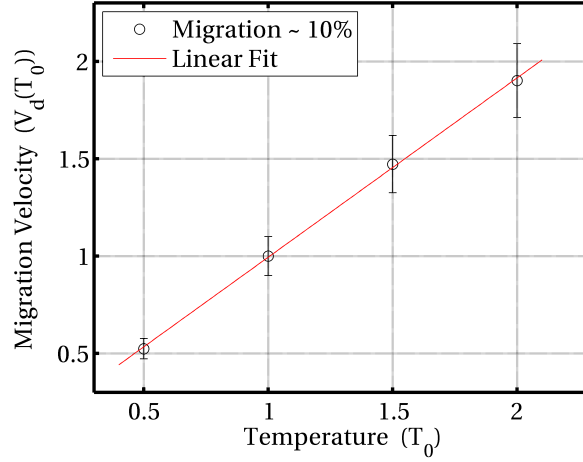


Figure VI.16 — Dépendance de la vitesse de migration en fonction de la température du disque au rayon de référence r_0 . Les valeurs sont normalisées aux résultats obtenus pour $T_0(r_0) = 83.6$ K. La vitesse de migration vaut alors $v_d(T_0) = -1.63 \times 10^{-5}$. La droite montre la linéarité de la migration en fonction de la température en r_0 , avec des barres d'erreurs de $\pm 10\%$.

4.4 Température et échelle de hauteur

La dernière caractéristique du disque qui peut modifier la migration est la température du disque, non plus en considérant sa variation radiale, mais sa valeur intrinsèque. En effet, dans les résultats précédents la température du disque était $T_0(r) = T_0(r_0)(r/r_0)^{\beta_T}$, avec $T_0(r_0) = 83.6$ K. Cette normalisation détermine la vitesse du son au rayon r_0 . Comme le transport de moment angulaire est un phénomène lié aux ondes, nous pouvons avancer que changer la vitesse du son au rayon de référence va modifier la migration. D'une part, parce que l'onde se propage à la vitesse du son, d'autre part, parce que le changement de température peut modifier la structure du tourbillon, en particulier la valeur des vitesses qui sont liées à la pseudo enthalpie $\mathcal{H}_0$ elle-même proportionnelle à c_{s0}^2 .

Pour étudier la dépendance de la vitesse de migration en fonction de la valeur de la température à r_0 , nous avons simulé un tourbillon de paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.150, 0.077, 5.6)$, dans des disques dont la température au rayon r_0 est égale à $T_0 = 83.6$ K (nous notons ici $T_0 = T_0(r_0)$ pour plus de clarté), $T_0/2$, $3/2T_0$ et $2T_0$. Les gradients de densité et de température sont identiques et valent $\beta_\sigma = -1.5$ et $\beta_T = -0.6$. Nous avons mesuré dans chaque cas la vitesse de migration obtenue et nous l'avons comparée à celle obtenue pour T_0 . Les résultats obtenus sont présentés Figure VI.16, qui montre la vitesse de migration en fonction de la température à r_0 .

Les résultats s'alignent sur une droite qui traduit la proportionnalité entre la vitesse de migration et la température au rayon r_0 . Lorsque l'on double cette température, la vitesse de migration double. Nous avons tracé des barres d'erreurs de $\pm 10\%$, pour confirmer cette relation, et éviter les variations dues aux éventuelles différences de rapport d'aspect qui, bien que faibles, peuvent légèrement modifier l'estimation de la vitesse de migration.

La vitesse de migration est proportionnelle au carré de la vitesse du son, $c_{s0}^2(r_0)$, elle est donc fonction de l'échelle de hauteur au rayon de référence, car on a :

$$H_0(r_0) = c_{s0}(r_0)\Omega_0^{-1}(r_0) \quad (\text{VI.11})$$

Par conséquent, le taux de migration dépend directement du carré de l'échelle de hauteur du disque. Plus le disque est épais, plus la migration est importante. Dans les quatre simulations présentées Figure VI.16, quand la température vaut $T_0/2$, T_0 , $3/2T_0$ et $2T_0$, l'échelle de hauteur au rayon r_0 vaut : $0.042r_0$, $0.059r_0$, $0.073r_0$ et $0.084r_0$, respectivement. Nous avons donc doublé l'échelle de hauteur, et quadruplé la vitesse de migration entre les deux cas extrêmes.

Selon le modèle de disque que l'on utilise, le phénomène de migration sera donc plus ou moins important, et il semble nécessaire d'en tenir compte pour décrire l'évolution d'un disque contenant des tourbillons. Cette étude permet d'estimer la vitesse de migration que l'on peut attendre pour un tourbillon donné, dans un disque donné. La section suivante est consacrée à la dérivation d'une expression globale de la vitesse de migration en fonction des différents paramètres.

5 Une formulation synthétique du taux de migration

Après avoir montré la dépendance de la migration en fonction de la géométrie du tourbillon, du gradient de pression et de l'échelle de hauteur, nous sommes capables d'exprimer la vitesse de migration de façon consistante, ce qui permettra de prédire le taux de migration de n'importe quel tourbillon, dans n'importe quel disque décrit par des lois de puissance du rayon. Nous montrerons quelques applications de cette expression pour l'évolution des disques.

5.1 Expression du taux de migration

Nous récapitulons maintenant chacune des dépendances mises en évidence dans les sections précédentes, en fonction desquelles le taux de migration est proportionnel :

- *Facteur géométrique* : la vitesse de migration est directement reliée au rapport d'aspect du tourbillon par $v_d \propto \chi_\theta^{-4}$
- *Facteur de gradient* : la vitesse de migration est liée au cisaillement de l'écoulement et au gradient de pression par $v_d \propto 3 - \beta_P$, le coefficient 3 étant une expression qui dépend de β_Ω mais qui nécessite d'autres développements pour expliciter cette dépendance
- *Facteur d'échelle* : plus l'échelle de hauteur du disque est élevée, plus la migration est importante, $v_d \propto H_0^2$

La combinaison de ces trois effets permet d'obtenir une expression analytique de la vitesse de migration :

$$v_d = -2V_0(r_0)\frac{H_0^2(r_0)}{r_0^2}\chi_\theta^{-4}(3 - \beta_P) \quad (\text{VI.12})$$

avec l'échelle de hauteur $H_0(r) = c_{s0}(r)/\Omega_0(r)$. Selon la thermodynamique du gaz, on utilisera la vitesse du son adiabatique $c_{s0}^2(r) = \gamma P_0(r)/\sigma_0(r)$, ce que nous utilisons ici, ou bien la vitesse du

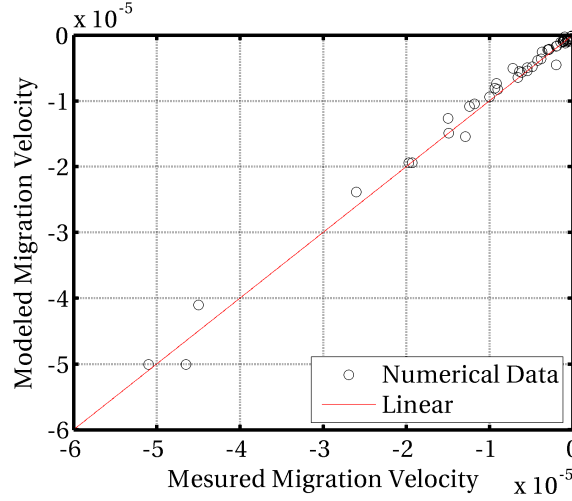


Figure VI.17 — Comparaison entre la vitesse de migration obtenue par l'équation VI.12 en ordonnées, et la valeur mesurée sur les données en abscisses. Résultats obtenus sur l'ensemble des 36 simulations des 4 types de tourbillons, dans les 9 couples de gradients (β_σ, β_T) qui sont décrits à la section précédente. La courbe rouge montre l'accord entre l'expression analytique et les mesures de vitesse.

son isotherme $c_{s0}^2(r) = P_0(r)/\sigma_0(r)$.

On voit ici que la vitesse de migration d'un tourbillon dans un disque localement isotherme est inférieure à celle atteinte dans un disque adiabatique. Cependant, il faut préciser qu'on ne peut affirmer que cette expression déduite d'une étude adiabatique soit valable dans le cas isotherme. Par exemple, la température du gaz dans les ondes excitées par le tourbillon peut augmenter significativement par rapport à celle du disque, en particulier dans le régime transsonique ou supersonique, car l'entropie est conservée dans un gaz adiabatique. Cela peut mener à un transport de moment cinétique différent du cas localement isotherme, où la température des ondes est identique à celle du disque.

Cette digression cherche à montrer la différence entre nos résultats et les seuls travaux existants sur la migration qui se placent dans le régime localement isotherme. L'obtention d'une expression claire du taux de migration constitue une avancée certaine, puisqu'elle permet de l'estimer en tenant compte des différents paramètres du système. Pour valider cette expression, nous l'avons confrontée à l'ensemble des tourbillons que nous avons simulés et qui nous ont permis d'obtenir les différentes dépendances. La diversité de rapports d'aspect, de gradients de densité, de température ainsi que d'échelles de hauteur du disque constitue un test crucial de l'équation VI.12.

Nous montrons Figure VI.17 la comparaison entre la vitesse de migration déterminée par l'expression analytique, représentée en ordonnées, et la vitesse de migration mesurée sur chaque simulation, en abscisses. Les vitesses de migration mesurées varient de -7×10^{-7} à -5×10^{-5} , soit près de 2 ordres de grandeur (l'unité des vitesses est ici la vitesse $V_0(1UA)$). La droite rouge qui traduit la linéarité entre les deux grandeurs, montre que même sur une telle étendue de valeurs différentes, l'expression déterminée à l'équation VI.12 est en très bon accord avec les valeurs mesurées. Grâce à cette relation, la vitesse de migration peut être estimée à 10% près. C'est l'obtention de cet

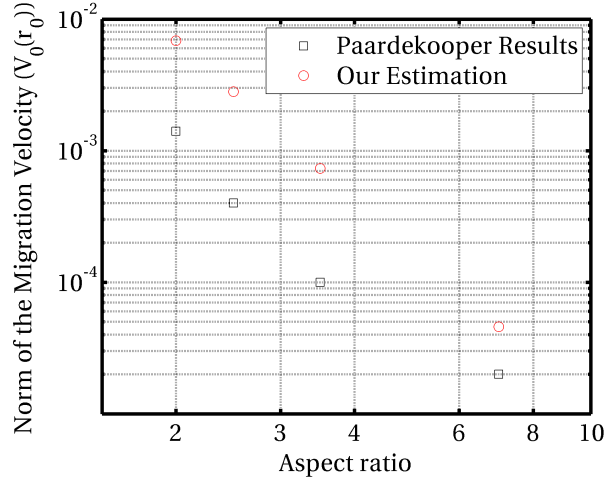


Figure VI.18 — Comparaison des résultats obtenus par Paardekooper et al. [9] avec le modèle de migration que nous proposons. Vitesse de migration en fonction du rapport d'aspect : les données de [9], en noir, sont extraites de la figure 11 de l'article, et obtenues pour un disque localement isotherme. Les auteurs reportent les rapports d'aspect utilisés en conditions initiales, et ne tiennent donc pas compte de la relaxation du modèle de Kida utilisé. Les valeurs de vitesse de migration que donne l'équation VI.12 pour chaque rapport d'aspect, sont représentées en rouge.

accord qui nous a mené à introduire un coefficient 2 supplémentaire devant le membre de droite de l'équation. Cependant, on peut le justifier également en avançant que l'onde externe et l'onde interne transportent chacune la moitié du moment cinétique perdu par le tourbillon, c'est-à-dire une quantité caractérisée par $V_0(r_0)H_0^2(r_0)/r_0^2\chi_\theta^{-4}(3 - \beta_P)$. C'est pourquoi la vitesse de migration du tourbillon est le double de cette quantité.

Nous avons confronté également cette expression analytique aux résultats de Paardekooper et al et essayé de retrouver les valeurs qu'ils ont obtenues. Bien qu'ils se placent dans l'approximation localement isotherme, et utilisent un modèle de tourbillon de Kida, dont l'extension radiale est inférieure à l'échelle de hauteur, nous devons obtenir un ordre de grandeur similaire à leurs résultats. La Figure VI.18 montre des données extraites de leurs résultats pour un disque de gradients $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$, et d'échelle de hauteur $H_0(r_0) = 0.1r_0$ (voir Figure 11 de [9]). Les vitesses de migrations sont exprimées en fonction de la vitesse képlérienne à r_0 . Lorsque l'on trace ces résultats de façon logarithmique, comme nous l'avons fait, on constate que la vitesse de migration ne varie pas exactement comme une loi de puissance du rapport d'aspect, mais s'en rapproche, en particulier dans la région $2 < \chi_\theta < 4$.

Nous avons évalué la vitesse de migration que des tourbillons de rapports d'aspect similaires auraient dans un disque adiabatique de mêmes paramètres, en utilisant notre équation de migration. Les résultats obtenus sont représentés en rouge. On constate que les valeurs de vitesses que nous proposons sont supérieures à celles des résultats isothermes, mais sont du même ordre de grandeur que les valeurs obtenues par Paardekooper et al. Ce résultat est compatible avec la remarque que les ondes sont plus fortement excitées dans un disque adiabatique que dans un disque isotherme. Il

semble bien que le mécanisme sous-jacent à la migration soit semblable, ce qui explique l'accord à l'ordre de grandeur près entre les deux résultats. On remarque enfin que la dépendance en fonction du rapport d'aspect est compatible avec celle que nous obtenons dans la région $2 < \chi_\theta < 4$; ceci est cohérent puisque les tourbillons générés par un modèle de Kida tendent à relaxer vers un modèle Gaussien.

Dans ce domaine de rapports d'aspect, la vitesse de migration que nous estimons est environ 3 fois supérieure à leurs résultats. Cela semble correspondre au facteur de gradient 3 que nous avons mis en évidence, et qui semble dépendre de l'écoulement. C'est pourquoi la migration ne s'annule que lorsque $\beta_P = 3$. Or Paardekooper explique que dans leurs cas la migration s'annule lorsque le gradient de pression est proche de zéro, soit $\beta_P = 0$. Cet écart est, d'après nous, lié à la faible extension radiale de leurs tourbillons, qui sont généralement de tailles inférieures à une demi échelle de hauteur. De ce fait, la région couverte par le tourbillon est moins sensible au gradient global de l'écoulement, et davantage au gradient de pression. Lorsque la taille radiale est supérieure à l'échelle de hauteur comme c'est le cas de nos tourbillons, l'asymétrie des ondes liée à β_Ω est plus forte, avec un facteur proche de 3 dans l'expression de la migration. Cependant, seule une étude complète, comparable à celle que nous avons faite, dans un disque localement isotherme, avec des tourbillons de taille inférieure à l'échelle de hauteur, permettrait de lever le doute sur cette question.

5.2 Cas d'un disque auto-gravitant

La validité de la relation de migration a été effectuée pour des simulations dans lesquelles nous ne tenions pas compte de la gravité du disque. Or, l'auto-gravité a un impact direct sur la morphologie du tourbillon et aussi des ondes, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. De plus, l'auto-gravité peut créer une interaction gravitationnelle entre les ondes et le tourbillon, exerçant un couple de forces comme c'est le cas dans la migration de type I des planètes (Baruteau et al. 2008 [1]). Ce couple peut contribuer à modifier la migration que nous avons décrite dans le cas non gravitant.

Pour aborder ce point, nous avons considéré deux cas de tourbillons pour lesquels l'auto-gravité modifie significativement leur évolution. Le tourbillon 1 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.19, 0.066, 4.2)$, dans un disque de gradients $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1.5, -0.5)$. Le tourbillon 2 a pour paramètres $(R_0, \chi_r, \chi_\theta) = (-0.235, 0.108, 3.5)$, dans un disque de gradients $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1, -0.5)$. La densité et la température au rayon $r_0 = 7.5 \text{ UA}$ valent $\sigma_0(r_0) = 82.8 \text{ g.cm}^{-2}$, et $T_0(r_0) = 83.6 \text{ K}$, comme dans la plupart des simulations de cette étude. La valeur de la densité en r_0 détermine directement l'importance de l'auto-gravité, ce qui pourrait être l'objet d'approfondissements futurs. Pour l'instant, ces paramètres correspondent au modèle de disque le plus couramment utilisé pour l'étude des disques protoplanétaires.

Les évolutions au cours du temps du rapport d'aspect, de la position moyenne et du nombre de Rossby des tourbillons sont présentées Figure VI.19, (a), (b), et (c) respectivement. On remarque tout d'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, que le rapport d'aspect et le nombre de Rossby diminuent au cours du temps, la vortacité du tourbillon se renforçant à cause de la source de vortacité

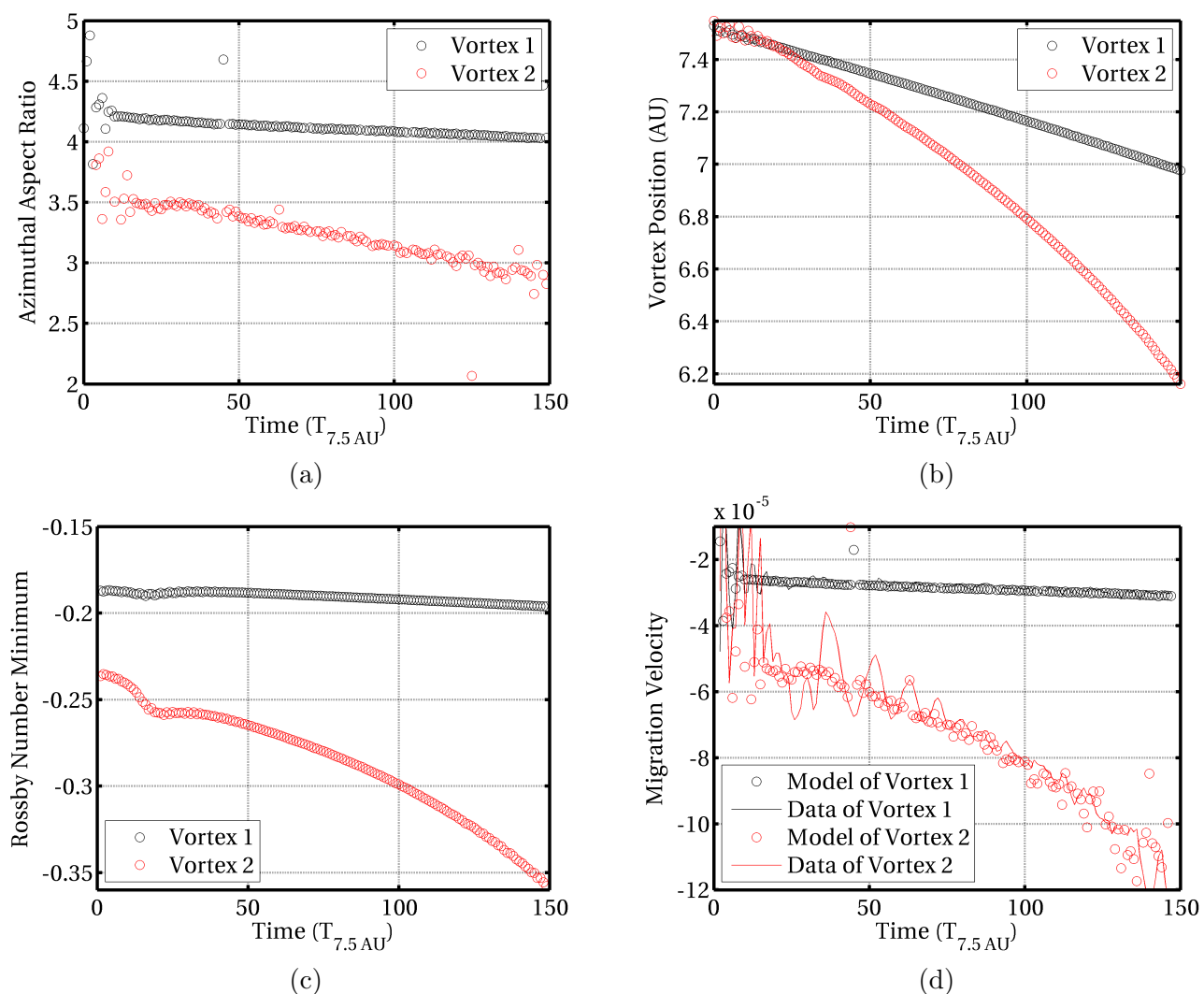


Figure VI.19 — Évolution au cours du temps de χ_r , de la position du tourbillon et de χ_θ , figures (a), (b) et (c) respectivement, en présence d'auto-gravité. Les tourbillons 1 et 2 décrits dans le texte sont représentés en noir et rouge. La figure (d) montre la comparaison entre la vitesse de migration mesurée pour chaque tourbillon (traits pleins aux couleurs respectives), et la valeur de la vitesse de migration estimée par notre modèle (ronds aux couleurs respectives), au cours du temps.

produite par l'auto-gravité. Ce renforcement est accéléré pour les tourbillons de plus forte vorticité, comme le tourbillon 2 en rouge. L'évolution de la position traduit une accélération de la migration pour ce cas là. En effet, la courbe de position est presque linéaire pour le tourbillon 1, en noir, de plus faible nombre de Rossby, alors qu'elle a une pente qui croît au cours du temps pour le tourbillon 2.

Comme le montre la relation de migration, le taux de dérive augmente lorsque le rapport d'aspect diminue. Cela semble cohérent avec les courbes de position que l'on obtient, mais la contribution de la gravité des ondes doit être quantifiée. Pour cela, nous avons mesuré sur les données de position au cours du temps, la vitesse de migration à chaque instant, pour chaque tourbillon. Les résultats sont présentés sur la figure (d), en traits pleins. On observe bien la quasi constance de la migration pour le cas 1, et l'accélération pour le cas 2. Nous avons confronté les vitesses de migration que l'équation VI.12 donne pour chacun d'eux, à partir des valeurs de χ_θ au cours du temps. Ces résultats sont tracés en ronds de chaque couleur.

Le modèle de migration obtenu pour le tourbillon 1 recouvre les valeurs numériques mesurées sur les données, ce qui rend la distinction difficile. On a un très bon accord entre les valeurs mesurées et l'estimation donnée par le modèle de migration. Les résultats obtenus pour le tourbillon 2 sont également à moins de 5% près égaux aux valeurs numériques, malgré une variabilité importante sur les 100 rotations qui suivent l'ajustement dans le disque. La vitesse de migration varie en effet entre -5×10^{-5} et $-12 \times 10^{-5} V_0(1UA)$, soit plus de 100% d'augmentation. Les oscillations des données (en trait plein) sont dues à la méthode de calcul de la position par dérivation par rapport au temps. Elles ne sont pas présentes dans les résultats du modèle de migration, car le rapport d'aspect mesuré n'oscille pas. On peut vérifier que les valeurs données par le modèle correspondent aux valeurs médianes des résultats numériques oscillants. Pour finir, on remarque que c'est parce que le rapport d'aspect diminue au cours du temps, sous l'effet de l'auto-gravité, que le taux de migration augmente. C'est pourquoi dans le cas sans auto-gravité la vitesse de migration est constante, car les paramètres géométriques du tourbillon sont constants au cours du temps dans ce cas.

La concordance entre les mesures de la vitesse de migration et les valeurs estimées par l'équation VI.12, semble montrer qu'il n'y a pas de modification de l'expression analytique due à l'interaction gravitationnelle des ondes sur le tourbillon. C'est uniquement le changement de géométrie qui modifie la vitesse de migration et conformément au modèle établi sans auto-gravité. Cette migration des tourbillons est bien de nature différente de la migration des planètes, pour lesquelles seule l'interaction gravitationnelle entre en jeu. Dans le cas des tourbillons, c'est le transport de moment cinétique dans le fluide même (dans les ondes) qui est le moteur de la migration. La présence d'auto-gravité modifie le taux de transport dans le fluide uniquement en changeant la géométrie du tourbillon.

5.3 Conséquences sur l'accrétion du disque

Nous avons obtenu un modèle robuste qui permet d'estimer la vitesse de migration de façon correcte, même dans le cas d'un disque auto-gravitant. C'est un résultat nouveau qui peut avoir des conséquences importantes pour étudier l'évolution des disques. Nous abordons dans ce paragraphe une application possible de ce résultat, dans le cas des disques d'accrétion.

L'accrétion observée dans les disques protoplanétaires est encore mal comprise, en particulier dans les régions non ionisées du disque (Fromang et al., 2002 [2]). Le moteur du transport de moment cinétique responsable de cette accrétion est encore mal identifié. On avance souvent le rôle de différentes d'instabilités, qui en créant des ondes et de la turbulence maintiennent, durant leur déroulement, un taux d'accrétion qui peut être compatible avec les taux observés. Cependant, les instabilités sont des phénomènes transitoires, et leur rôle ne peut pas être maintenu durant une durée suffisante pour décrire l'évolution du disque.

En excitant de façon continue des ondes spirales qui transportent du moment cinétique, les tourbillons pourraient jouer un rôle dans le mécanisme d'accrétion. C'est une idée que nous souhaitons maintenant explorer en estimant le taux d'accrétion induit par des tourbillons en train de migrer dans le disque. Selon l'approche classique de Shakura [11], on peut relier le flux de masse à travers le disque en fonction d'une viscosité effective, qui peut se mesurer par un nombre sans dimension α . Ce modèle de viscosité α est très souvent utilisé dans l'étude des disques, et on estime que pour être en accord avec les observations, la valeur de α doit être comprise entre 10^{-6} et 10^{-2} . Ce paramètre α est relié au tenseur de Reynolds, et peut s'exprimer ainsi :

$$\alpha = S_{Disque}^{-1} \iint_{Disque} P_0^{-1}(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) U(\vec{r}) [V(\vec{r}) - V_0(\vec{r})] dS(\vec{r}) \quad (\text{VI.13})$$

où l'intégrale court sur tout le disque, et sa surface vaut S_{Disque} . Il s'agit donc de la moyenne totale sur le disque du produit présent sous l'intégrale. Ici, $V_0(r)$ est la vitesse azimutale stationnaire du disque. On peut donc faire apparaître le produit σuv , où u , et v sont les écarts aux valeurs stationnaires des vitesses. Cette valeur moyenne évaluée sur le disque permet d'estimer le transport moyen de moment cinétique. Cette relation entre le paramètre α et les grandeurs physiques est utilisée dans Johnson et al., 2005 [4] et Mamatsashvili et al., 2009 [6]. La similitude avec l'expression qui donne la vitesse de migration en fonction du flux de moment cinétique, équation VI.8, nous a menés à comparer ces deux grandeurs.

Nous avons mesuré la valeur de ce coefficient α en fonction du temps, pour différentes simulations de tourbillons, positionnés initialement en $r_0 = 7.5 UA$, afin d'étudier les valeurs atteintes et leurs évolutions dans le temps. Le Tableau VI.3 montre les différentes géométries des tourbillons ainsi que les gradients des disques utilisés. Nous traçons Figure VI.20 (a) la valeur de α au cours du temps, pour chaque modèle de disque, les modèles 1 à 5 étant repérés en noir, rouge, bleu, vert et magenta, respectivement.

On constate tout d'abord que, malgré la diversité des tourbillons simulés, le paramètre α est approximativement constant au cours du temps. La variabilité est plus importante pour les modèles

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 4	Modèle 5
β_σ	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.0
β_T	-0.5	-0.5	-0.5	-0.6	-0.5
R_0	-0.110	-0.120	-0.127	-0.132	-0.190
χ_r	0.107	0.085	0.075	0.093	0.059
χ_θ	10.6	8.43	6.81	6.75	4.52

Tableau VI.3 — Récapitulatif des paramètres des simulations présentées Figure VI.20. Pour chaque modèle, numéroté de 1 à 5, nous présentons les gradients de densité et de température du disque β_σ et β_T , ainsi que les paramètres (R_0, χ_r, χ_θ) du modèle gaussien du tourbillon simulé.

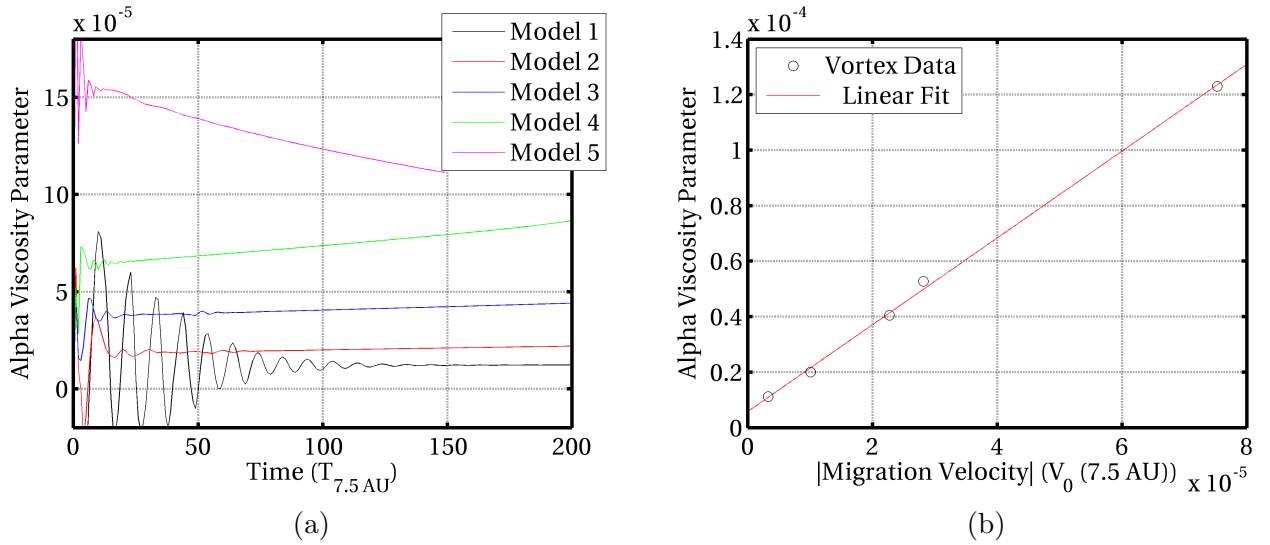


Figure VI.20 — A gauche (a) : évolution au cours du temps du paramètre α de viscosité mesuré sur chaque simulation, appelée ici "Modèle", répertoriées dans le Tableau VI.3. Ces Modèles 1 à 5 sont représentés en noir, rouge, bleu, vert et magenta respectivement. On peut noter la quasi constance de α au cours du temps pour ces 5 simulations. À droite (b) : valeurs de α obtenues après 100 rotations pour chaque "Modèle", en fonction de la vitesse de migration du tourbillon mesurée en terme de $V_0(r_0)$. Un ajustement linéaire est montré en rouge, dont la pente vaut 1.52.

4 et 5, mais reste cependant limitée à 25% sur 200 rotations. Cet effet est moins important pour les tourbillons de plus grands rapports d'aspect. Cela montre que la présence d'un tourbillon dans le disque génère un transport de moment cinétique menant à un paramètre α constant dans le temps, et par conséquent, à une accréation constante du disque. Cela est compatible avec la constance de la migration pour ces modèles, puisque le disque n'est pas auto-gravitant.

On remarque ensuite que les valeurs du paramètre α sont comprises environ entre 1.2×10^{-5} et 1.2×10^{-4} . Cela constitue une valeur modérée, qui n'est pas aussi forte que $\alpha = 10^{-3}$ que l'on peut espérer pour décrire l'accréation observée, mais cela est tout de même significatif. De plus, aucune turbulence n'est présente ici, seulement un tourbillon unique qui excite une paire d'ondes spirales.

Nous avons ensuite comparé la valeur du paramètre α obtenue pour chaque modèle avec la vitesse de migration de chaque tourbillon. Pour cela, la valeur de cette vitesse est divisée par la vitesse képlérienne au rayon r_0 , de façon à obtenir un paramètre sans dimension. Cela est cohérent puisque la vitesse de migration est proportionnelle à $V_0(r_0)$, comme le montre l'équation VI.12. La valeur absolue de ce résultat est ensuite comparée à la valeur de α , Figure VI.20 (b).

La relation entre ces deux valeurs a un comportement presque linéaire comme le montre l'ajustement réalisé Figure VI.20 (b), en rouge. Bien qu'on n'obtienne pas une valeur de α nulle lorsque la vitesse de migration est nulle, la valeur extrapolée en 0 est faible, de l'ordre de $\alpha = 5 \times 10^{-6}$. Le coefficient directeur de cette droite vaut 1.5, par conséquent, en négligeant la valeur en zéro, on obtient une relation du type :

$$\alpha \sim 3 \frac{H_0^2(r_0)}{r_0^2} \chi_\theta^{-4} (3 - \beta_P) \quad (\text{VI.14})$$

Cette proportionnalité est un résultat intéressant, puisque cela relie directement le paramètre α de viscosité aux paramètres du disque et du tourbillon. Cependant, on remarque qu'une valeur $\alpha = 10^{-3}$ ne serait possible, selon ce raisonnement, que par exemple, pour un tourbillon de rapport d'aspect $\chi_\theta = 4$, dans un disque de gradient de pression $\beta_P = -2$ et d'échelle de hauteur $H_0(r_0) = 0.13 r_0$. Par conséquent, une telle accréation provoquée par un tourbillon nécessiterait un nombre de Rossby élevé, ainsi qu'une température élevée. Cela n'est toutefois pas impossible, puisque ce sont les disques les plus chauds qui présentent les plus grands taux d'accréation.

Ce lien direct, entre paramètre α et vitesse de migration permet donc de prédire un taux d'accréation dans le disque. Qu'en est-il lorsque l'on cherche à déterminer le paramètre α d'un disque turbulent ? C'est en effet pour décrire la turbulence que la notion de viscosité α a été introduite. Nous essayons maintenant de mimer un disque turbulent dans lequel la vorticité est dominée par les grandes échelles, sous la forme de tourbillons, ceci dans le but d'estimer la viscosité effective associée. Nous partons d'un disque de paramètres $(\beta_\sigma, \beta_T) = (-1, -0.5)$, et de densité et température en r_0 égales à $\sigma_0(r_0) = 82.8 \text{ g.cm}^{-2}$, et $T_0(r_0) = 83.6 \text{ K}$ qui mène à une échelle de hauteur égale à $H_0(r_0) = 0.06 r_0$. 100 tourbillons gaussiens sont répartis aléatoirement dans le disque, avec un nombre de Rossby $-0.065 < R_0 < -0.03$, un rapport radial $0 < \chi_r < 0.04$ et un rapport d'aspect $9 < \chi_\theta < 20$, en respectant la relation entre χ_θ et R_0 .

Nous présentons Figures VI.21 et VI.22 l'évolution de la densité et de la vorticité relatives :   l'instant initial, sous-figure (a), après 200 rotations, sous-figure (b), après 500 rotations, sous-

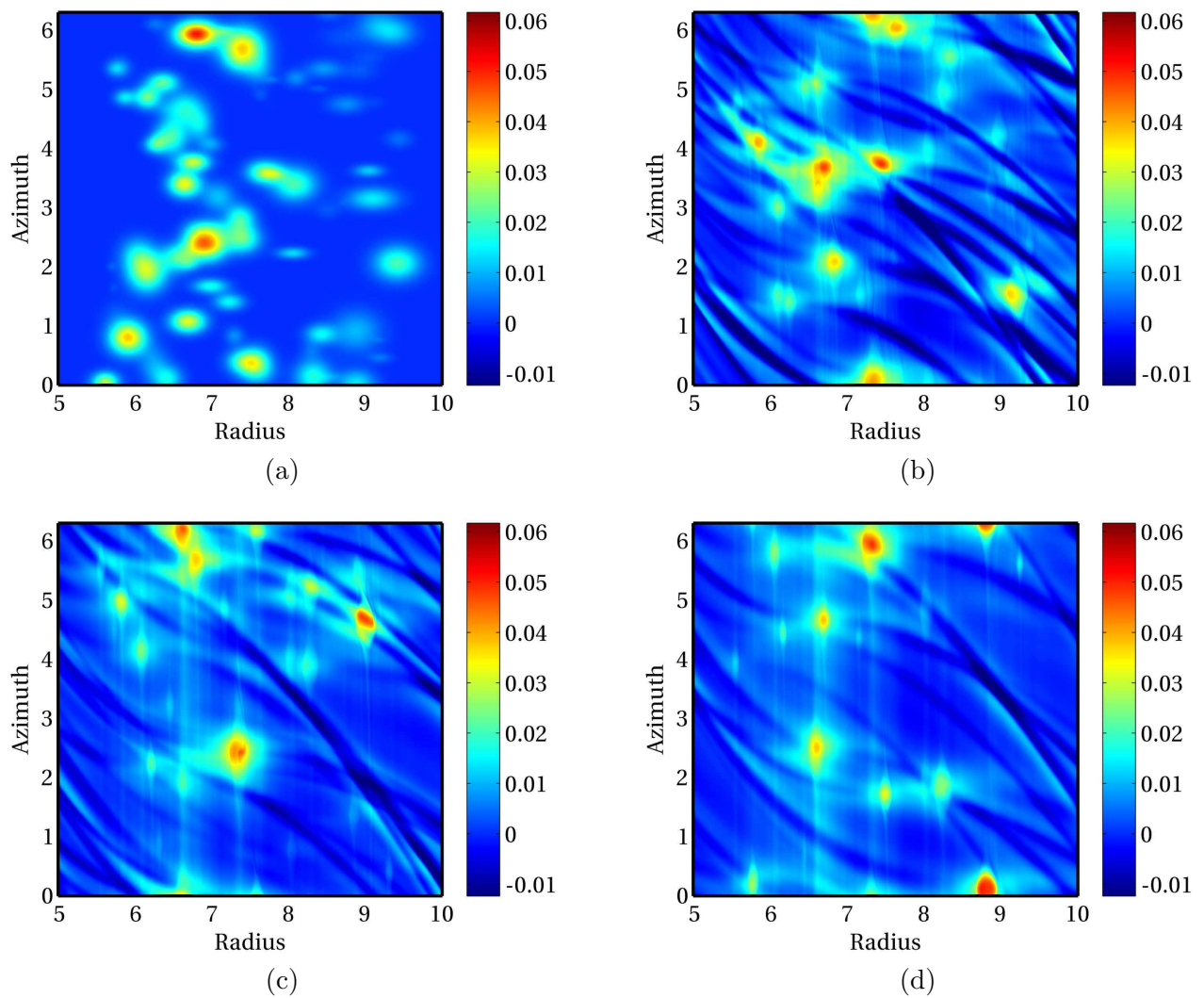


Figure VI.21 – Densité relativement à celle du disque pour la simulation d'un disque contenant initialement 200 tourbillons gaussiens aléatoires. On présente l'instant initial, l'état après 200 rotations, l'état après 500 rotations et après 1000 rotations; figures de (a) à (d), respectivement.

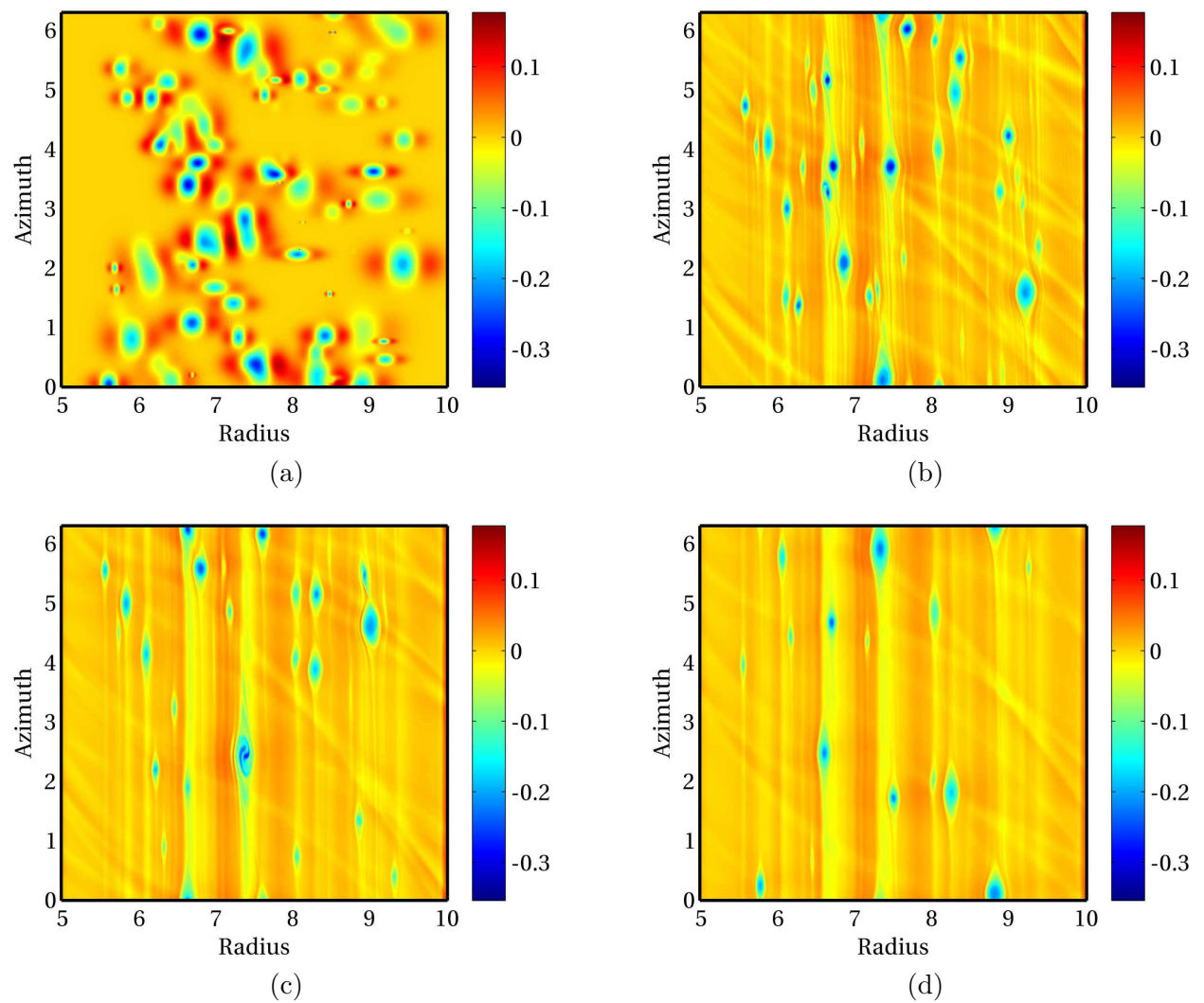


Figure VI.22 – Vorticité relativement à celle du disque pour la simulation d'un disque contenant initialement 200 tourbillons gaussiens aléatoires. On présente l'instant initial, l'état après 200 rotations, l'état après 500 rotations et après 1000 rotations ; figures de (a) à (d), respectivement.

figure (c), et après 1000 rotations, sous-figure (d). La résolution numérique de cette simulation est $(N_r, N_\theta) = (1000, 2000)$ afin de réduire autant que possible la diffusion numérique.

On constate que la perturbation de densité associée à cet état initial est faible, de l'ordre de 5%, alors que la perturbation de vorticité est de l'ordre de 15%. Cela étant, on obtient une perturbation aléatoire assez bien répartie sur tout le disque, malgré la présence de 2 tourbillons plus importants. Au bout de 200 rotations, on remarque la présence d'ondes excitées par chaque tourbillon, qui perturbent le disque de façon complexe. Certains tourbillons présents initialement ont fusionné avec d'autres, réduisant le nombre total de tourbillons dans le disque, mais les excès de masse et de vorticité initialement introduits sont globalement conservés.

Au bout de 500 rotations, le disque est bien sûr moins perturbé qu'au début, car la vorticité moyenne des tourbillons a diminué sous l'effet de la diffusion numérique. Par la suite, l'état du disque semble très peu évoluer ; au bout de 1000 rotations, on retrouve pratiquement les mêmes structures. Les tourbillons ont des dimensions radiales différentes, mais des vorticités comparables, avec des nombres de Rossby $-0.05 < R_0 < -0.04$. Les tourbillons restants sont très allongés, avec $12 < \chi_\theta < 14$. Le domaine de valeurs des paramètres géométriques gaussiens des tourbillons s'est donc nettement réduit par rapport à l'état initial, traduisant la fusion successive des perturbations.

Nous avons ensuite mesuré l'évolution au cours du temps du paramètre α de viscosité pour cette simulation, afin de déterminer l'impact d'une telle distribution de tourbillons sur le processus d'accrétion. Les résultats sont présentés Figure VI.23. La courbe noire montre la valeur de α toutes les deux rotations du disque. On constate une variabilité importante, cependant autour d'une valeur médiane qui décroît lentement au cours du temps. Nous avons estimé cette valeur médiane, afin d'obtenir en rouge une courbe plus lisse permettant de mieux visualiser l'évolution de α . Pour cela nous avons déterminé toutes les 20 rotations la moyenne des valeurs sur un intervalle de temps de 20 rotations.

Lors des 60 premières rotations, la valeur de α est relativement constante et vaut 1.3×10^{-5} . Cette valeur est assez faible et diminue ensuite pour atteindre 0.8×10^{-5} au bout de 200 rotations. Cette évolution correspond à la phase de fusion des tourbillons que nous avons constatée en étudiant les distributions de densité et de vorticité. Il s'ensuit une diminution presque linéaire de la viscosité α sur environ 500 rotations. Alors, le paramètre α devient presque constant, avec une valeur finale de 2×10^{-6} et n'évolue plus significativement jusqu'à la fin de la simulations (1000 rotations). On peut supposer que ce comportement demeure si l'on poursuit la simulation.

Cette simulation tend à montrer qu'un disque turbulent dominé par les grandes échelles (correspondant à des tourbillons quasi-stationnaires) pourrait avoir un taux d'accrétion significatif. La valeur atteinte par la viscosité α dépend des paramètres gaussiens moyens des tourbillons présents dans le disque. Nous avons vu, dans le cas d'un unique tourbillon, que α est déterminé aussi bien par les paramètres gaussiens que par ceux du disque, suivant l'équation VI.14. Si l'on inverse cette équation en utilisant la valeur de $\alpha = 2 \times 10^{-6}$ obtenue à la fin de la simulation et les paramètres du disque, on peut déduire une valeur de $\chi_\theta \sim 12.5$. Or nous avons mis en évidence que les tourbillons qui persistent dans le disque entre 500 et 1000 rotations, ont une diversité réduite avec un rapport d'aspect compris entre 12 et 14. Il est remarquable de retrouver une valeur cohérente avec

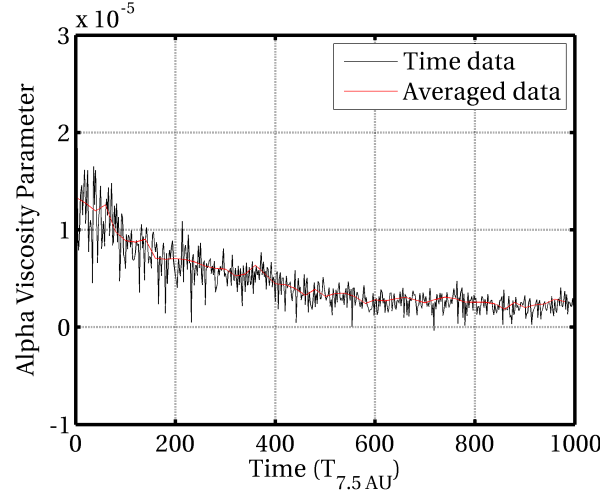


Figure VI.23 — Évolution au cours du temps du paramètre α de viscosité mesuré sur le disque de la simulation de turbulence grâce aux tourbillons gaussiens aléatoires. En noir sont reportées les mesures effectuées toutes les 2 rotations, en rouge, les valeurs moyennées sur 20 rotations, de façon à réduire les oscillations et montrer les valeurs médianes de la courbe noire.

ce résultat lorsque l'on inverse l'équation VI.14.

Il semble donc que l'on soit capable d'estimer simplement une viscosité α induite par une distribution de tourbillons, à partir des valeurs de leurs paramètres gaussiens. Cette viscosité α s'exprime comme la valeur moyenne des valeurs de α générées par chacun des tourbillons présents à la fin de l'évolution. La présence d'un grand nombre de tourbillons n'additionne pas la contribution de chacun, mais contribue à mieux répartir le flux de moment cinétique dans le disque. C'est donc le spectre des valeurs de χ_θ qui contribue le plus à l'accrétion.

Cette étude nécessite bien sûr de plus amples développements, mais ces premiers résultats permettent de montrer que la migration des tourbillons pourrait contribuer de façon non négligeable à l'accrétion des disques, notamment dans la "zone morte" où la turbulence d'origine magnétique est absente.

6 Conclusions

À l'issue de ce dernier chapitre, nous avons montré que les propriétés de l'écoulement képlérien sont à l'origine des ondes excitées par les tourbillons, en particulier ceux de la famille *compressible*. L'asymétrie de ces ondes, due aux effets géométriques tels que le cisaillement β_Ω , mais aussi due aux gradients de densité et de température, entraîne une perte de moment cinétique du tourbillon. Ce moteur de la migration est bien identifié par Paardekooper et al., mais leurs résultats numériques sont limités et discutables. Mais nous sommes allés bien plus loin dans cette étude, en utilisant un modèle de tourbillon plus réaliste et une thermodynamique adiabatique.

Le transport de moment cinétique dans les ondes est à l'origine de la perte de moment subie par le tourbillon. Nous avons montré qu'il existe une relation de proportionnalité entre le taux de

migration et le flux radial de moment cinétique. Les taux de migration mesurés sur l'échantillon de plus de 250 tourbillons de notre étude ont permis de mettre en évidence un certain nombre de résultats. Ils varient de plusieurs ordres de grandeur, correspondant à des échelles de temps de migration de 10^6 de rotations à juste 100 rotations, montrant l'importance de ce phénomène dans l'évolution des disques.

Ensuite nous avons caractérisé cette migration en fonction des caractéristiques du tourbillon, définies par les paramètres gaussiens R_0 , χ_r et χ_θ . Nous avons mis en évidence que la dimension radiale n'influe pas sur la migration, lorsque les autres paramètres sont identiques. Ce résultat met en défaut les résultats plus anciens, qui ne tenaient pas compte de l'indépendance des paramètres du tourbillon. La migration est finalement essentiellement influencée par la valeur du rapport d'aspect χ_θ . C'est lui qui définit le spectre des modes azimuthaux présents dans les ondes, et en conséquence, l'asymétrie à l'origine de la migration. Une dépendance en χ_θ^{-4} est pour la première fois explicitée, ce *facteur géométrique* permettant d'obtenir un comportement clair du taux de migration en fonction du tourbillon.

L'étude du rôle joué par les caractéristiques du disque a permis de montrer la linéarité du taux de migration en fonction des gradients de densité β_σ et, pour la première fois, de température β_T . Nous avons ensuite établi que la vitesse de migration est proportionnelle au gradient de pression β_P , via un terme en $(3 - \beta_P)$, que nous appelons *facteur de gradient*. Cela montre que plus la densité et la température décroissent rapidement dans le disque, plus la migration est rapide. Cela montre aussi qu'un gradient très important de pression est nécessaire si l'on veut stopper cette migration. Cela pourrait être possible au bord d'un sillon créé par une planète, car la pression peut devenir croissante avec le rayon. Enfin, nous montrons que plus l'échelle de hauteur du disque est grande, plus les tourbillons migrent vite, avec un *facteur d'échelle* en $H_0^2(r_0)/r_0^2$. La migration serait donc plus importante dans les disques chauds, avec des effets 3D qui restent à évaluer, ce qui constituerait une étude intéressante.

Nous obtenons finalement une expression analytique du taux de migration qui est en très bon accord avec les taux mesurés. Une comparaison avec les travaux isothermes de Paardekooper montre la cohérence de nos résultats. Enfin, nous avons montré que la migration est accélérée par l'auto-gravité du disque, mais uniquement à cause du changement de forme (χ_θ) du tourbillon. Ce n'est donc que la compaction de la structure qui modifie la migration, et non le couple gravitationnel des ondes. La migration des tourbillons est donc fondamentalement différente de la migration planétaire. Le tourbillon migre par perte de moment angulaire au travers du transport dissymétrique de moment dans l'onde interne et externe. C'est donc le gaz constituant le tourbillon lui-même qui se déplace dans le disque. En revanche, une planète migre principalement par action d'un couple gravitationnel généré sur elle par la gravité des ondes qu'elle excite.

Cette équation permet enfin d'estimer un taux d'accrétion à l'aide d'un paramètre α de viscosité. En effet, nous avons montré que le taux de migration est proportionnel à ce coefficient α . Même lorsque le disque contient un grand nombre de tourbillons, la valeur moyenne des paramètres gaussiens des tourbillons permet d'estimer le paramètre α résultant. Nous pouvons donc rattacher directement la migration des tourbillons aux mécanismes moteurs de l'accrétion des disques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BARUTEAU, C., AND MASSET, F. Type I planetary migration in a self-gravitating disk. *The Astrophysical Journal* 678, 1 (2008), 483–497. [252](#)
- [2] FROMANG, S., TERQUEM, C., AND BALBUS, S. A. The ionization fraction in alpha models of protoplanetary discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 329, 1 (2002), 18–28. [255](#)
- [3] GOLDREICH, P., AND TREMAINE, S. The excitation and evolution of density waves. *The Astrophysical Journal* 222 (June 1978), 850. [220](#)
- [4] JOHNSON, B. M., AND GAMMIE, C. F. Vortices in thin, compressible, unmagnetized disks. *The Astrophysical Journal* 635, 1 (2005), 149–156. [255](#)
- [5] MAMATSASHVILI, G. R., AND CHAGELISHVILI, G. D. Transient growth and coupling of vortex and wave modes in self-gravitating gaseous discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 381, 2 (Oct. 2007), 809–818. [225](#)
- [6] MAMATSASHVILI, G. R., AND RICE, W. K. M. Vortices in self-gravitating gaseous discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 394, 4 (Apr. 2009), 2153–2163. [255](#)
- [7] MAMATSASHVILI, G. R., AND RICE, W. K. M. Excitation of spiral density waves by convection in accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 417, 1 (Oct. 2011), 634–648. [220](#)
- [8] MUTO, T., SUZUKI, T. K., AND INUTSUKA, S.-I. Two-dimensional Study of the Propagation of Planetary Wake and the Indication of Gap Opening in an Inviscid Protoplanetary Disk. *The Astrophysical Journal* 724, 1 (2010), 448. [225](#)
- [9] PAARDEKOOPER, S.-J., LESUR, G., AND PAPALOIZOU, J. C. B. Vortex migration in protoplanetary disks. *The Astrophysical Journal* 725, 1 (Dec. 2010), 146–158. [225](#), [226](#), [227](#), [234](#), [251](#)
- [10] PAPALOIZOU, J. C. B., AND LIN, D. N. C. Theory of Accretion Disks I : Angular Momentum Transport Processes. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 33, 1 (1995), 505–540. [234](#)
- [11] SHAKURA, N., AND SUNYAEV, R. Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy & Astrophysics* 24 (1973), 337–355. [255](#)

- [12] TEVZADZE, A. G., CHAGELISHVILI, G. D., BODO, G., AND ROSSI, P. Linear coupling of modes in two-dimensional radially stratified astrophysical discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* *401*, 2 (Jan. 2010), 901–912. [220](#)

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

La présence de tourbillons persistants dans les disques protoplanétaires pourrait participer à l'évolution des disques à travers :

- le transfert de moment cinétique entre les tourbillons et le disque, qui contribue à l'accrétion de la matière du disque vers l'étoile,
- la capture des particules solides au sein des tourbillons, qui permet de concentrer le matériau nécessaire pour former les planètes.

La phase préliminaire, afin d'éclaircir ces différents rôles, est une étude détaillée de la formation des tourbillons par une instabilité hydrodynamique, l'IOR, ainsi que l'étude de leur évolution dans le disque.

Cela n'a pu être mené à bien qu'à l'aide d'un outil numérique de simulation le plus performant possible. Le développement de cet outil, le code ROSSBI, a été une phase importante de la thèse. D'une part, parce que l'écriture, le débogage du code numérique ainsi que son optimisation a pris plus d'un an. Cependant cela a permis d'aboutir à un code parmi les plus performants du moment pour étudier les disques sur plus de 1000 rotations. D'autre part, cela m'a permis d'acquérir des compétences numériques de haut niveau, et une connaissance précise des secrets des méthodes aux volumes finis. Cela permet de mieux comparer les résultats produits par différentes équipes, utilisant différentes méthodes numériques.

Dès lors, nous avons pu effectuer une étude numérique non linéaire de l'IOR. Cette instabilité, qui entre en jeu dans de nombreuses configurations possibles dans les disques, tel qu'aux bords de la "zone morte", est par conséquent la plus à même de former des tourbillons. En déclenchant l'instabilité par différents modes calibrés, nous avons mis en évidence un processus de couplage non linéaire entre les modes excités, qui n'a pas été mis à jour jusqu'alors. Ces modes harmoniques du mode de perturbation saturent à l'issue d'une croissance exponentielle, dont le taux de croissance est proportionnel à celui du mode principal. Ensuite, la cascade de ces modes harmoniques permet d'expliquer comment cette instabilité permet d'obtenir un tourbillon isolé. Cette cascade se déroule par création de paires de modes, dont la somme des nombres d'onde (m) est égale à un multiple du mode initial de perturbation. Même lorsque l'instabilité est déclenchée par un bruit aléatoire, on peut distinguer dans la fusion des tourbillons cette cascade des modes. Nous avons donc caractérisé comment un tourbillon isolé peut être créé dans le disque grâce à l'instabilité de Rossby.

Cependant, la diversité de géométries et de force des tourbillons créés par cette instabilité est limitée par les conditions initiales de l'IOR. C'est pourquoi, afin de déterminer l'espace possible des paramètres géométriques et du nombre de Rossby, il a fallu déterminer un modèle de tourbillon, qui décrive au mieux les tourbillons obtenus par l'instabilité. Nous avons détaillé un modèle de profil gaussien, dont le champ de vitesse et les profils de densité et de pression, s'accordent remarquablement aux valeurs numériques. Ce modèle innovant surpasse les modèles existants (Kida et GNG) notamment parce que le champ de vitesse obtenu n'est plus discontinu aux frontières du tourbillon, là où le raccordement avec le disque se situe. Cela permet d'obtenir des conditions initiales qui s'ajustent calmement dans le disque, contrairement aux modèles précédents.

Le développement de ce modèle gaussien a été un travail de longue haleine, à cause de la complexité des équations non linéaires que l'on cherche à résoudre. Le choix de l'approche de linéarisation des équations d'Euler nous a parfois conduit à des impasses. A l'issue de la thèse, certains problèmes restent encore à résoudre, en particulier la relation analytique qui relie le rapport d'aspect χ_θ au nombre de Rossby R_0 . Mais de nombreuses avancées ont été réalisées. Nous montrons notamment que la diversité des géométries et le domaine de valeur du nombre de Rossby sont plus vastes que supposé dans les travaux antérieurs. En particulier, la largeur radiale des tourbillons n'est pas limitée par l'échelle de hauteur, mais par le respect du caractère subsonique de la structure, ce qui est dû au caractère compressible des tourbillons. La largeur maximale se trouve ainsi reliée au nombre de Rossby. Nous mettons aussi en évidence deux familles principales, les tourbillons "incompressibles", caractérisés par un faible nombre de Rossby et donc un rapport d'aspect supérieur à 7, pour lesquels les modèles de Kida ou GNG donnent une description approximative, et les tourbillons "compressibles", associés à un fort nombre de Rossby, et $\chi_\theta < 7$, qui sont bien décrits par le modèle gaussien. Ces derniers sont associés à des ondes de densité importantes, qui peuvent contribuer à modifier leur évolution. Enfin, la structure des tourbillons reste constante dans le temps, sur plus de 1000 rotations, ce qui en fait un élément central à prendre en compte dans la description de la dynamique et de l'évolution des zones du disque où la viscosité effective est négligeable, comme dans les zones mortes.

Or l'origine de l'accrétion dans les zones mortes, caractérisées par une faible turbulence liée à la MRI, reste très mal connue. Nous proposons une réponse possible dans le dernier chapitre de cette thèse. La présence d'ondes de densité excitées aux bords du tourbillon, surtout pour la famille "compressible", engendre un transport radial de moment cinétique, responsable d'une redistribution de ce dernier dans le disque. En conséquence, le tourbillon perd généralement du moment, ce qui entraîne sa migration vers l'étoile. Nous avons caractérisé le taux de migration en fonction de la géométrie du tourbillon, et montré que ce taux est contraint par le rapport d'aspect, mais aussi en fonction des caractéristiques du disque. Le taux est proportionnel à la température du disque, et au gradient de pression. De ce fait, l'inversion de la migration n'a lieu que pour un profil local de pression en r^3 , ce qui ne peut se produire qu'au bord externe d'un gap ouvert par une planète, ou de la zone morte ou enfin au bord interne du disque. Ces régions sont donc propices à l'accumulation de gaz, les tourbillons qui migrent venant s'y ajouter au fur et à mesure du temps. Cette accumulation pourrait par la suite devenir instable gravitationnellement, ou bien

capturer efficacement les particules solides, avec pour conséquence la formation possible de planètes. Ce phénomène peut se produire au bord d'un gap ouvert par une planète, et sera l'objet de nos recherches futures.

La mise en relation du transport de moment cinétique avec un paramètre α de viscosité effective, permet d'obtenir une équation entre ce dernier et le taux de migration des tourbillons présents dans le disque. Grâce à cette approche innovante, nous pouvons estimer la viscosité effective présente dans le disque à partir de la distribution des tourbillons. Les valeurs obtenues peuvent être en accord avec celles attendues dans les disques, c'est à dire $\alpha \sim 10^{-4} - 10^{-2}$. L'accrétion dans la zone morte des disques pourrait donc être en partie expliquée par la migration de tourbillons persistants.

L'obtention de ces résultats n'a été possible qu'à l'issue d'un nombre considérable de simulations numériques, afin d'obtenir un échantillon suffisamment fourni, pour valider statistiquement les relations que nous avons déduites. Les 300 simulations effectuées sur la durée de la thèse représentent plus de 20 mois consécutifs de temps de calcul, à l'aide d'une dizaine d'ordinateurs multicœurs. C'est pourquoi près de deux ans supplémentaires ont été nécessaires pour aboutir aux résultats que nous présentons. Mais les conséquences scientifiques sont à la hauteur de cet investissement.

Cette étude détaillée permet en effet de commencer une étude de la capture des particules solides dans les tourbillons, grâce à un modèle de tourbillon très réaliste. L'effet de la géométrie de ce dernier sur la capture peut être contrôlé précisément, ce qui n'est pas forcément le cas avec les modèles de Kida ou GNG. L'impact de la rétroaction des forces aérodynamiques sur le gaz peut modifier la structure même du tourbillon, ce qui peut également être quantifié précisément grâce au modèle gaussien. C'est le projet que j'ai entamé au MPIA, à l'issue de la thèse, et qui par conséquent, est dans la suite logique de ce travail.

Pour terminer, la migration des tourbillons comme moteur de l'accrétion dans les zones mortes, est une voie qui paraît très intéressante mais qui doit néanmoins être confirmée et approfondie par une étude de plus grande ampleur. Qu'elle soit le résultat de notre travail, ce qui fait partie de nos projets de recherche, mais également qu'elle soit produite par d'autres équipes, utilisant des méthodes numériques différentes. La compétition permet dans ces cas là de mieux critiquer, par comparaison, la réalité des résultats scientifiques obtenus. Nous souhaitons que, dans le futur, de tels résultats aboutissent, ce qui constituerait une découverte fondamentale dans l'évolution des disques.

Troisième partie

Annexes

DÉTAILS SUR LES LIMITEURS DE FLUX

De la nécessité des limiteurs de flux

L'atout majeur des méthodes aux volumes finis est le respect de la formulation conservative des équations d'Euler. Cela leur permet de pouvoir tenir compte de discontinuités, à condition qu'elles se situent à l'interface entre deux cellules. Cependant, le biais de cet atout est de garantir une estimation correcte des flux à travers ces interfaces.

Ces flux sont évalués par résolution d'un problème de Riemann à l'interface, comme nous l'avons abordé au Chapitre 3, à partir d'estimations des grandeurs physiques par la gauche et par la droite de l'interface. Mais même si le solveur de Riemann est le plus précis disponible, et que l'intégration temporelle est d'un ordre élevé, la stabilité du schéma numérique reste en grande partie dominée par l'estimation de ces valeurs à gauche et à droite de la frontière.

Une condition nécessaire à cette stabilité est que ces valeurs soient bornées par les valeurs moyennes dans les cellules adjacentes. Par exemple pour une grandeur $f(i)$, valeur moyenne de la fonction f sur la cellule i , l'estimation à l'interface avec la cellule $i + 1$ doit vérifier :

$$f(i + 1/2) \in [f(i), f(i + 1)] \quad (1)$$

L'interpolation des grandeurs physiques permet d'obtenir une valeur $f(i + 1/2)$ et $f(i - 1/2)$ pour chaque cellule, mais ne garantit pas le respect de la condition nécessaire ci-dessus, Eq. 1. Par exemple, une interpolation linéaire naïve ou parabolique, entre les valeurs $f(i - 1)$, $f(i)$ et $f(i + 1)$ donne lieu à un schéma instable, lorsque les gradients de f varient beaucoup.

Nous avons testé ce type de schéma sur une discontinuité advectée vers la droite à vitesse constante. C'est un choc 1D incompressible, qui permet de tester efficacement les schémas d'advection. Les conditions aux limites en 1 et 2 sont périodiques, la résolution est de 400 cellules entre 1 et 2, et le paramètre de la condition CFL vaut $N_{CFL} = 0.5$. L'intégration en temps est du second ordre, comme décrite au Chapitre 3. La partie gauche de la Figure A.1, (a), montre les résultats obtenus pour ces deux types d'interpolations naïves, après 10 rotations du créneau.

On observe dans les deux cas des oscillations à proximité des discontinuités, ce qui est encore plus important pour le schéma à interpolation linéaire. On remarque aussi que le schéma parabolique, d'ordre plus élevé, respecte mieux la discontinuité car les gradients sont presque deux fois plus

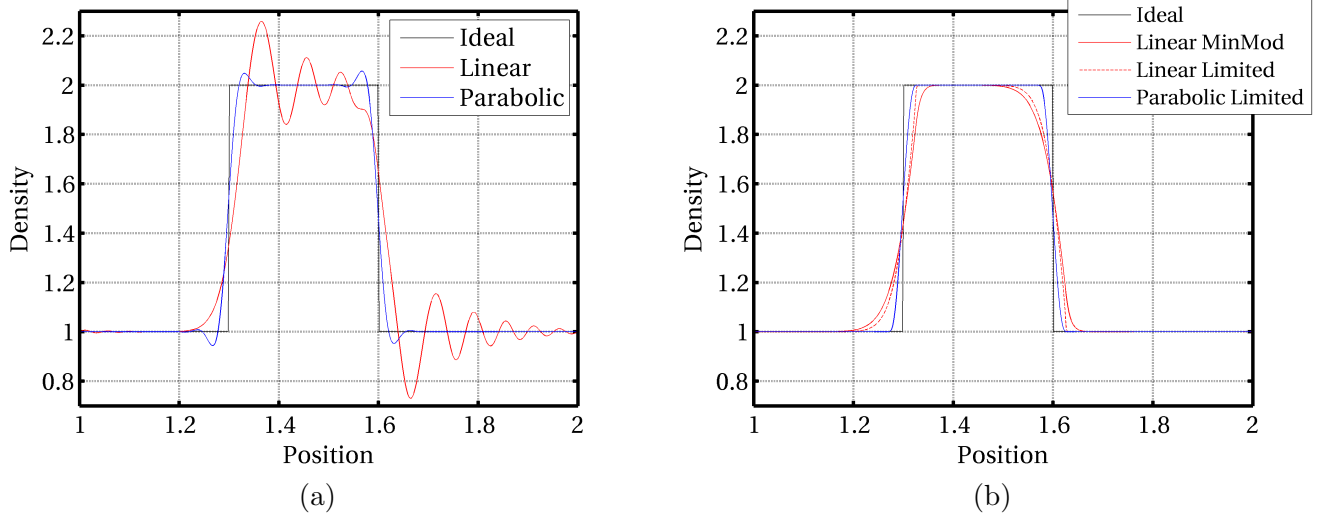


Figure A.1 – (a) : Advection 1D d'un créneau après 10 périodes. L'interpolation linéaire naïve, en rouge, montre de fortes oscillations en amont des discontinuités. L'interpolation parabolique est meilleure, en particulier dans le respect d'un gradient élevé aux discontinuités, mais le schéma reste oscillant de part et d'autre. (b) : L'utilisation d'un limiteur de flux permet de respecter la condition Eq. 1. Deux types de limiteurs du second ordre, pour l'interpolation linéaire, sont montrés en rouge, et notre limiteur du 3^{ème} ordre, pour l'interpolation parabolique, est montré en bleu. Les oscillations sont annulées dans les deux cas.

élevés au niveau des chocs qu'avec le schéma linéaire.

L'utilisation d'un limiteur de flux, permettant de respecter la condition Eq. 1 résout drastiquement ces problèmes d'oscillations. On constate, figure (b), qu'elles ont totalement disparu, et une évolution à plus long terme confirme qu'elles ne s'amplifient pas avec le temps. Cela permet d'obtenir un schéma dit *TVD*, c'est-à-dire que les variations de la fonction advectée ne s'amplifient pas mais diminuent au cours du temps. Cela garantit la stabilité du schéma.

Nous allons montrer comment définir des limiteurs de flux pour les schémas à interpolation linéaire (second ordre) et parabolique (troisième ordre).

Limiteur du second ordre

Le principe d'un limiteur est de permettre de déterminer des valeurs aux frontières qui respectent Eq. 1 en fonction du profil de la fonction f à interpoler. Pour cela, on calcule les gradients de la fonction à gauche et à droite de la cellule i pour déterminer le caractère doux ou discontinu de f :

$$\Delta f^+ = \frac{f(i+1) - f(i)}{x(i+1) - x(i)} \quad (2)$$

$$\Delta f^- = \frac{f(i) - f(i-1)}{x(i) - x(i-1)} \quad (3)$$

Si l'une de ces valeurs est nulle, ou si elles sont de signes opposés, alors les valeurs $f(i+1/2)$ et $f(i-1/2)$ valent celle de $f(i)$. Cela est nécessaire pour le respect du caractère *TVD*.

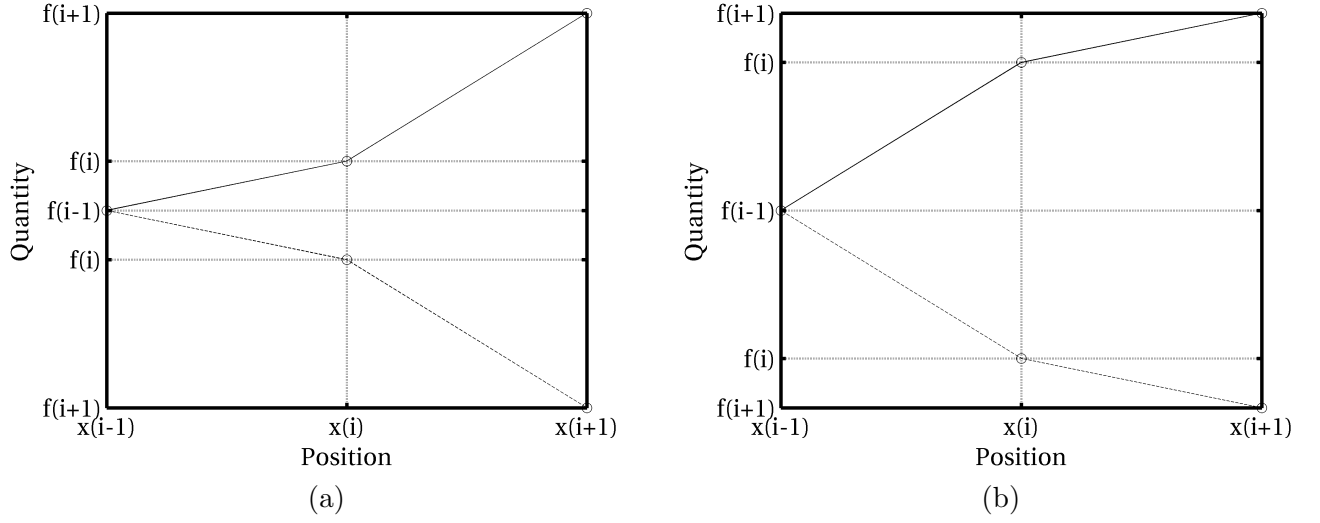


Figure A.2 – (a) : Exemples de cas de la Catégorie 1, où la valeur absolue de la pente à droite de $x(i)$ est supérieure à celle à gauche. Le cas du dessus est pour une fonction croissante, le cas du bas pour une fonction décroissante. (b) : Exemples de cas de la Catégorie 2, où la valeur absolue de la pente à droite de $x(i)$ est inférieure à celle à gauche. Le cas du dessus est pour une fonction croissante, le cas du bas pour une fonction décroissante.

Les autres cas peuvent se ramener à deux catégories, illustrées Figure A.2 :

- *Catégorie 1*, les pentes sont croissantes en valeur absolue, $|\Delta f^+| \geq |\Delta f^-|$. Cela correspond aux deux exemples présentés à gauche, (a)
- *Catégorie 2*, les pentes sont décroissantes en valeur absolue, $|\Delta f^+| < |\Delta f^-|$. Cela correspond aux deux exemples présentés à droite, (b)

On va chercher à ramener ces deux catégories à un même problème défini par les points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(\tilde{x}, \tilde{f})$. Cela est possible si l'on effectue les changements de repères suivants :

- *Catégorie 1*, on définit la fonction $\tilde{x}(j) = [x(j) - x(i-1)]/[x(i) - x(i-1)]$ et la fonction $\tilde{f}(j) = [f(j) - f(i-1)]/[f(i) - f(i-1)]$. Dans ce cas, on obtient $\tilde{x} = \tilde{x}(i+1)$, et $\tilde{f} = \tilde{f}(i+1)$.
- *Catégorie 2*, on définit la fonction $\tilde{x}(j) = [x(j) - x(i+1)]/[x(i) - x(i+1)]$ et la fonction $\tilde{f}(j) = [f(j) - f(i+1)]/[f(i) - f(i+1)]$. Dans ce cas, on obtient $\tilde{x} = \tilde{x}(i-1)$, et $\tilde{f} = \tilde{f}(i-1)$.

Cela permet de se ramener à un problème unique, permettant de définir la fonction d'interpolation appropriée des points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(\tilde{x}, \tilde{f})$. On notera que si la grille est d'espacement constant, alors $\tilde{x} = 2$. Les frontières avec les cellules adjacentes se situent aussi en $\tilde{x}(i-1/2) = 0.5$ et $\tilde{x}(i+1/2) = 1.5$. Pour plus de clarté de l'exposé, nous nous placerons dans ce cas.

Dans le cas linéaire, on interpole les points par une droite : $\tilde{f}(j) = 1 + a * (\tilde{x}(j) - 1)$. Afin que la condition de stabilité soit respectée, il faut donc que la pente a respecte la condition :

$$0 < a < 2 \quad (4)$$

On retrouve ici l'intervalle de valeurs que les limiteurs classiques (MinMod, Van Leer,...) possèdent. Le facteur 2 provient de la valeur $\tilde{x}(i-1/2)^{-1}$, qui vaut 2 dans le cas de grille linéaire.

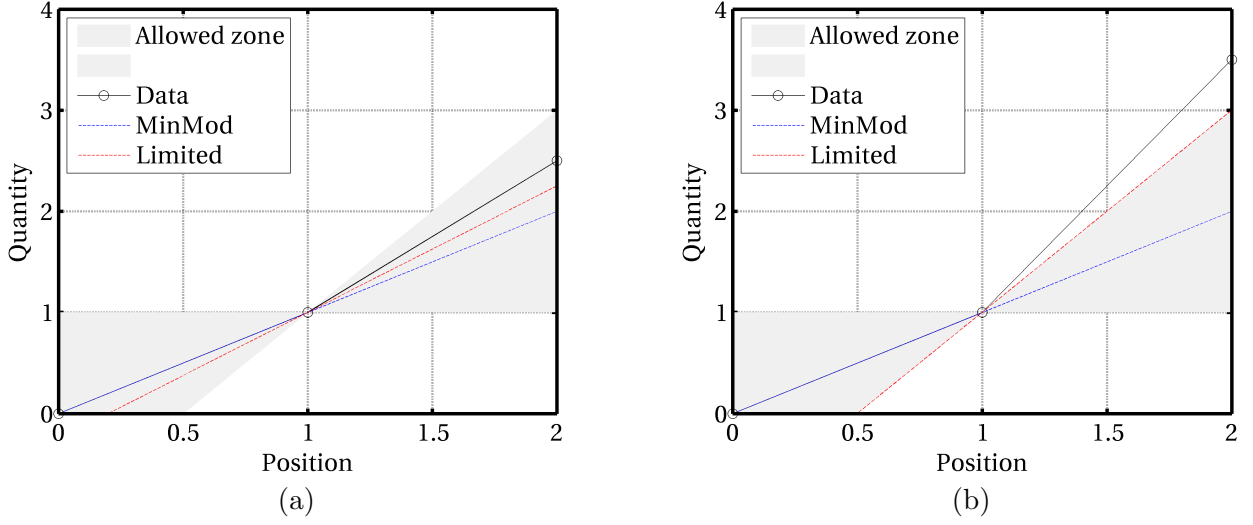


Figure A.3 – (a) : Situation où les points sont favorables à une interpolation linéaire. Ils sont compris dans la zone acceptable en gris. La pente de la droite d'interpolation est bien comprise entre 0 et 2. (b) : Situation où le point en $\tilde{x} = 2$ est en dehors de la zone acceptable. Il faut que la pente de la droite d'interpolation reste comprise dans la zone grise. Si ce n'est pas le cas, on la limite à $a = 2$, en rouge.

Cela garantit que la valeur $\tilde{f}(j - 1/2)$ est comprise entre 0 et 1. Nous montrons clairement d'où ces limites sur la pente proviennent. Deux exemples sont montrés pour ces limiteurs du second ordre Figure A.3.

En gris est représenté l'espace des valeurs possibles de la fonction d'interpolation. La figure (a) montre un cas favorable, car $\tilde{f} = 2.5$ est dans la zone acceptable. On peut alors utiliser un limiteur *MinMod*, en bleu, qui impose $a = 1$, ou notre limiteur qui donne une pente $a = \tilde{f}/2$, qui est la pente de l'interpolation naïve. Mais si $\tilde{f}$ est hors de la région acceptable, comme figure (b), où $\tilde{f} = 4.5$, la pente naïve donne une valeur supérieure à 2. Le limiteur *MinMod*, en bleu, fixera toujours $a = 1$, alors que notre limiteur bloquera $a = 2$, dès que $\tilde{f}/2 > 2$.

Limiteur du troisième ordre

Lorsqu'on utilise une interpolation parabolique, on définit : $\tilde{f}(j) = a * \tilde{x}(j)^2 + b * \tilde{x}(j)$. Le respect de la condition de stabilité impose que :

$$a + b = 1 \quad (5)$$

$$0 \leq a \leq 1 \quad (6)$$

C'est de cette façon que l'on implémente le limiteur du troisième ordre. On peut alors capturer au maximum une valeur de $\tilde{f} = 4$ sans limiter. Comme on peut le voir Figure A.4, (a), un cas compris dans la zone acceptable est identique à l'interpolation parabolique naïve. Mais si $\tilde{f}$ est en dehors de la zone acceptable, comme figure (b), l'interpolation parabolique naïve, en vert, sort de

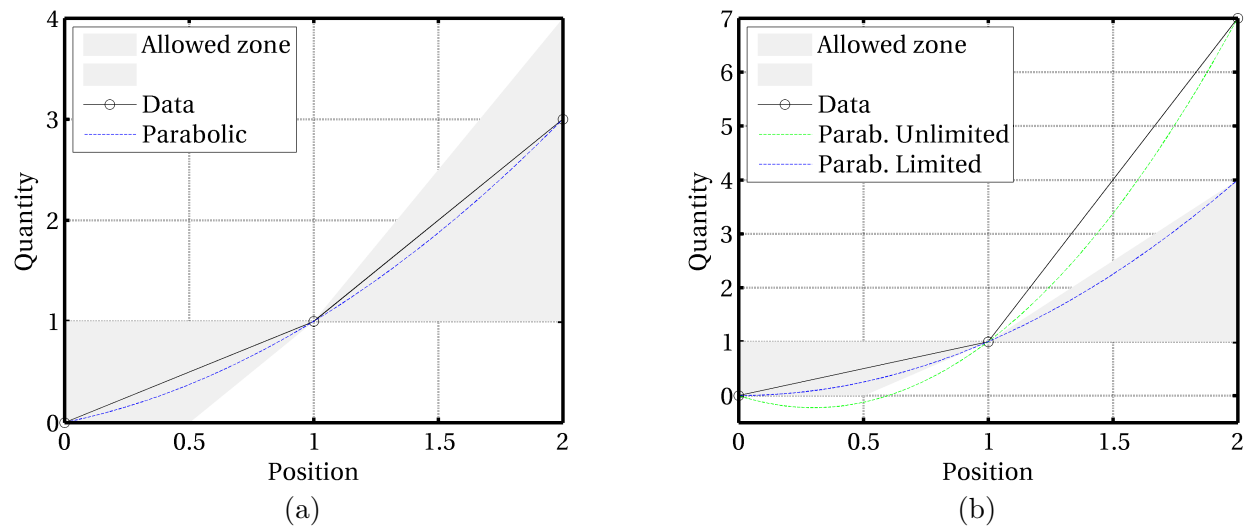


Figure A.4 – (a) : Situation où les points sont favorables à une interpolation parabolique. Ils sont compris dans la zone acceptable en gris. Les paramètres a et b de la parabole ne sont pas limités. (b) : Situation où le point en $\tilde{x} = 2$ est en dehors de la zone acceptable. Il faut que la parabole d'interpolation reste comprise dans la zone grise. Si ce n'est pas le cas (en vert), on limite les coefficients à $a = 1$, $b = 0$, en bleu.

cette région, et les valeurs interpolées ne respectent plus la relation Eq. 1. Dans ce cas, on trouve que $a > 1$. Il faut donc limiter la valeur de a et b par : $a = 1$ et $b = 0$. On obtient alors la courbe d'interpolation bleue.

Les résultats présentés Figure A.1, témoignent de l'efficacité de ces limiteurs, et surtout du limiteur du troisième ordre. Nous n'avons pas trouvé de limiteur de cet ordre dans la littérature, ce qui justifie le développement présent, et montre la grande qualité du code ROSSBI, en terme de spécificités dédiées aux disques protoplanétaires.

PUBLICATIONS

Nous présentons ici l'ensemble des trois publications réalisées au cours de la thèse. La première a été publiée dans une revue de rang A, *Astronomy and Astrophysics*. La seconde est une communication à l'occasion du *Congrès Français de Mécanique* qui a eu lieu à Besançon en août 2011. Cet article a été accepté à la suite d'un comité de lecture et a donné droit à une présentation orale. La dernière est un rapport de la conférence *Instabilités et Structures dans les Disques Protoplanétaires* qui a eu lieu à Marseille en septembre 2012, publiée par EPJ Web of Conferences. A l'heure actuelle, deux publications issues de nos travaux sur le modèle gaussien et sur la migration sont en cours de finalisation pour une publication dans une revue de rang A.

Références :

- Huré, J.-M. et al. "AGN Disks and Black Holes on the Weighting Scales." *Astronomy and Astrophysics* 530.2008 (2011) : A145
- Surville, C. and Barge, P. "Migration of anticyclonic vortices in the protoplanetary disk" *20ème Congrès Français de Mécanique* (2011) DOI :<http://hdl.handle.net/2042/46389>
- Surville, C. and Barge, P. "Structure and Migration of 2D Vortices" Ed. Barge P. and Jorda L. *EPJ Web of Conferences* 46 (2013) : 05002

AGN disks and black holes on the weighting scales

J.-M. Huré^{1,2}, F. Hersant^{1,2}, C. Surville³, N. Nakai⁴, and T. Jacq^{1,2}

¹ Université de Bordeaux, OASU, 2 rue de l'Observatoire, BP 89, 33271 Floirac Cedex, France
 e-mail: jean-marc.hure@obs.u-bordeaux1.fr

² CNRS, UMR 5804, LAB, 2 rue de l'Observatoire, BP 89, 33271 Floirac Cedex, France

³ LAM, Université de Provence, 13388 Marseille, France

⁴ Institute of Physics, University of Tsukuba, Ten-noudai, Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

Received 28 May 2010 / Accepted 20 March 2011

ABSTRACT

We exploit our formula for the gravitational potential of finite size, power-law disks to derive a general expression linking the mass of the black hole in active galactic nuclei (AGN), the mass of the surrounding disk, its surface density profile (through the power index s), and the differential rotation law. We find that the global rotation curve $v(R)$ of the disk in centrifugal balance does not obey a power law of the cylindrical radius R (except in the confusing case $s = -2$ that mimics a Keplerian motion), and discuss the local velocity index. This formula can help to understand how, from position-velocity diagrams, mass is shared between the disk and the black hole. To this purpose, we checked the idea by generating a sample of synthetic data with different levels of Gaussian noise, added in radius. It turns out that, when observations are spread over a large radial domain and exhibit low dispersion (standard deviation $\sigma \lesssim 10\%$ typically), the disk properties (mass and s -parameter) and black hole mass can be deduced from a *non linear fit of kinematic data* plotted on a (R, Rv^2) -diagram. For $\sigma \gtrsim 10\%$, masses are estimated fairly well from a *linear regression* (corresponding to the zeroth-order treatment of the formula), but the power index s is no longer accessible. We have applied the model to 7 AGN disks whose rotation has already been probed through water maser emission. For NGC 3393 and UGC 3789, the masses seem well constrained through the linear approach. For IC 1481, the power-law exponent s can even be deduced. Because the model is scale-free, it applies to any kind of star/disk system. Extension to disks around young stars showing deviation from Keplerian motion is thus straightforward.

Key words. accretion, accretion disks – gravitation – methods: analytical – galaxies: active

1. Introduction

The mass of astrophysical objects – except maybe for stars – is generally difficult to determine with precision, mostly because of inappropriate tracers, relatively low spatial resolution, and a certain misunderstanding of the internal structure and physical processes involved. This is the case for giant disks orbiting supermassive black holes in active galactic nuclei (AGN). For some nearby objects, the cold gas rotating in the outermost regions (the subparsec scale typically from the center) is detected at radio wavelengths through water vapor emission (e.g. Miyoshi et al. 1995; Braatz et al. 2009). The inner regions, not accessible yet to current instruments, could host the bulk of the mass if the total surface density in the disk varies roughly with the cylindrical radius R as R^{-2} or faster (Shakura & Sunyaev 1973; Collin-Souffrin & Dumont 1990). Estimating the disk mass is a complex task. It necessitates a global disk model capable of describing the dynamics of gas, its thermodynamics, its chemical complexity, as well as its interaction with radiation (lines and continuum). The disk mass is an important quantity in understanding the AGN phenomenon. Along with the accretion rate, turbulent viscosity, and black hole mass, it helps to put constraints on the activity of the AGN in terms of stability, lifetime, luminosity, and matter supplied from the host galaxy (Combes 2001; Collin & Zahn 2008).

The mass of disks can also be probed via the consequences of their gravity. All the material contained within a disk exerts

gravitational forces on itself – the so-called “self-gravity” – which influences or even strongly governs (like in galaxies) internal orbital motions, sometimes up to instability (e.g. Mestel 1963; Binney & Tremaine 1987; Papaloizou & Lin 1995). Even in the presence of a massive central object, self-gravity may cause a slight deviation in Kepler’s law, which is interesting to analyze and to quantify. Obviously, non-Keplerian rotation can have other origins like pressure effects such as in slim/thick disks (Abramowicz et al. 1988) or magnetic fields (Heyvaerts & Priest 1989). Here, we focus on self-gravity, which is expected to play a role in geometrically thin disks (Shore & White 1982; Shlosman & Begelman 1987).

There are many articles that aims to establish the relation between the dynamics (through gravitational potentials) and mass density distribution, especially in the context of galactic dynamics (Binney & Tremaine 1987). Existing potential/density pairs do not however seem fully appropriate to gaseous disks surrounding a central object, probably because star/disk systems where the gas exhibit non-Keplerian motions are still marginal. As models and theories suggest (e.g. Shakura & Sunyaev 1973; Pringle 1981; Collin-Souffrin & Dumont 1990; Huré 1998), gaseous disks in AGN are large and are expected to exhibit a self-similar behavior over some radial range. Huré et al. (2008) determined an accurate formula for the gravitational potential in the midplane of a flat power-law disk with *finite size and mass*. It is valid for a wide range of the power index for surface density. In this article, we use this result to derive an *algebraic relation*

A&A 530, A145 (2011)

between the orbital velocity of the gas, the disk parameters (surface density profile, mass, size), and the mass of the central object, assuming a pressure-less disk at centrifugal equilibrium, as commonly done. This relation furnishes a simple method for determining how the mass is shared between the disk and the central object. As expected, the “modified” rotation law is not, in this model, a power law of the radius as often considered in this context (Herrnstein et al. 2005). Although this study is valid for any kind of astrophysical star/disk system (like in circumstellar environments), we focus on AGN disks whose kinematics have been observed in VLBI through water-maser emission.

This article is organized as follows. In Sect. 2, we recall the model of a pressure-less disk at centrifugal equilibrium surrounding a central black hole. We introduce the formula for the gravitational potential in the disk midplane by Huré et al. (2008), and derive the general expression for the velocity of the orbiting gas as a function of the disk mass, black hole mass, and surface density profile through the power-law index. In Sect. 3, we show how this expression (or its zero-order version) can be used to estimate how the mass is shared between a central object and its surrounding disk by analyzing observational data in a “position-dynamical mass” diagram (instead of the classical position-velocity diagram). We first applied the method to IC 1481, thereby refining the disk parameters reported in Mamayoda et al. (2009). We discuss uncertainties in Sect. 4, and show how dispersion naturally goes against the method. Section 5 is devoted to applying the method to a sample of a few well known AGN hosting a masing outer disk. We conclude in Sect. 6.

2. The basic model

2.1. A pressure-less disk at centrifugal equilibrium

We consider a gaseous disk with inner edge a_{in} and outer edge $a_{\text{out}} \gg a_{\text{in}}$, orbiting a central black hole with mass M_{BH} . This disk is assumed to be axially symmetrical, flat (i.e. no vertical thickness), pressure-less, and steady. At centrifugal equilibrium, the rotation velocity v of material at cylindrical distance R in the midplane of the disk, in the reference frame of the black hole, is given by the standard relation:

$$v^2(R) = \frac{GM_{\text{BH}}}{R} + R \frac{d\psi_d}{dR}, \quad (1)$$

where ψ_d is the gravitational potential of the disk. This latter function critically depends on the surface density profile $\Sigma(R)$ through the Poisson integral. It is generally not easily accessed by analytical means, even in the actual one-dimensional case.

There is a broad literature devoted to determining potential-density pairs (ψ_d, Σ) for axially symmetric systems (e.g. Binney & Tremaine 1987; Evans & Collett 1993). Here, we consider the class of flat, power-law distributions where the surface density varies according to

$$\Sigma = \begin{cases} \Sigma_{\text{out}} \varpi^s & \text{if } \varpi \in [\Delta, 1], \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (2)$$

where $R = a_{\text{out}} \varpi$, $\Delta = a_{\text{in}}/a_{\text{out}}$ is the axis ratio, Σ_{out} the surface density at the outer edge, and s is a constant. Such a profile seems well-suited for large, gaseous disks in AGN, at least in the framework of geometrically thin disk models that predict $s \approx -1$ typically (Shakura & Sunyaev 1973; Pringle 1981; Collin-Souffrin & Dumont 1990; Huré 1998). Potential-density pairs for flat

power-law disks, including Mestel’s solution ($s = -1$), are summarized in Evans & Read (1998). These correspond to infinite disks (i.e. $a_{\text{in}} = 0$ and $a_{\text{out}} \rightarrow \infty$) whose mass is infinite as soon as $s > -2$. Conway (2000) has produced formal solutions corresponding to finite disks and no inner edge (i.e. $a_{\text{in}} = 0$), but for even positive indexes (i.e. $s = 0, 2, \dots$). Unfortunately, accounting for edges increases the mathematical difficulties. Huré et al. (2008) have recently produced a reliable approximation for ψ_d associated with Eq. (2), namely (see their Eq. (53))

$$-\frac{\psi_d(\varpi)}{\psi_{\text{out}}} \approx B \varpi^{1+s} + \frac{1}{\varpi} \frac{\varpi^{2+s} - \Delta^{2+s}}{2+s} + \frac{1 - \varpi^{1+s}}{1+s}, \quad (3)$$

where¹ $\psi_{\text{out}} = 2\pi G \Sigma_{\text{out}} a_{\text{out}}$ and

$$B = \frac{6C - \pi - 1}{\pi} \approx 0.431, \quad (4)$$

where C is the Catalan’s constant. This approximation is accurate within a few percent, provided the disk is large enough ($\Delta \ll 1$) and $-3 \lesssim s \lesssim 0$. These conditions are probably met in most astrophysical disks, especially in AGN disks (Shakura & Sunyaev 1973; Pringle 1981; Collin-Souffrin & Dumont 1990; Huré 1998), and others (e.g. Dubrulle 1992). Actually, we have $\Delta \sim 3R_s/a_{\text{out}} \approx 10^{-5}$ for a $10^8 M_\odot$ AGN black hole accreting a parsec size disk (R_s being the Schwarzschild radius). Besides, Eq. (3) does not suffer from the edge singularities expected when considering sharp edges.

2.2. The dynamical mass

As Eq. (1) shows, a “good” variable to measure masses in this model is (e.g. Yamauchi et al. 2004):

$$\mu = \frac{Rv^2}{G} \equiv \mu(\varpi), \quad (5)$$

and the disk makes its own contribution through ψ_d . In the case of a spherical distribution (where $R \rightarrow r$), this dynamical mass would represent the enclosed mass at a given radius (Herrnstein et al. 2005). Here, things are quite different since matter is gathered in a plane. There is no obvious use of the Gauss theorem, although the monopole approximation gives the right order of magnitude. Inserting in Eq. (5) the velocity v given by Eq. (1), and using Eq. (3) for the disk potential ψ_d , we finally get

$$\mu(\varpi) = M_{\text{BH}} - M_d \frac{\Delta^{2+s} - \varpi^{s+2} P_2(s)}{1 - \Delta^{2+s}}, \quad (6)$$

where M_d is the disk mass (at a_{out}), and

$$P_2(s) = 1 - B(1+s)(2+s) \quad (7)$$

is a second-order polynomial in s . It is displayed in Fig. 1. In the range of interest, $P_2(s)$ is always positive and has a limited range of variation, since $0.14 \lesssim P_2(s) \lesssim 1.11$. We also have $P_2(-2) = P_2(-1) = 1$ and a mean value of ~ 0.8 .

From Eq. (6), we expect two extreme behaviors of the function $\mu(\varpi)$ depending on the disk properties. If $s \leq -2$ (the case of “centrally peaked” distributions), we have

$$\mu \sim M_{\text{BH}} + M_d = \text{const.} \quad (8)$$

In the absence of radial gradient of μ , it is not possible to separate the disk and the central black hole, *regardless of the disk mass*.

¹ This constant ψ_{out} has dimension of a potential, but it is not the value at the outer edge.

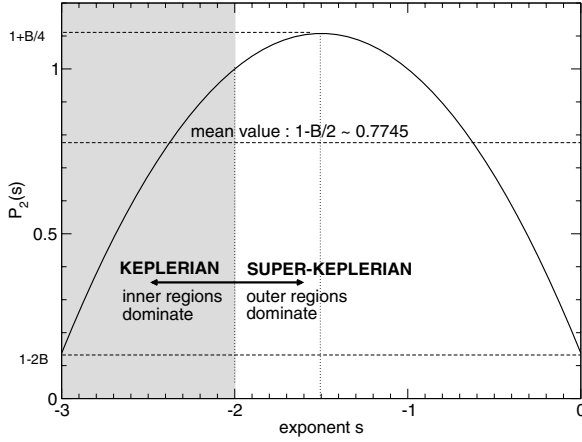


Fig. 1. $P_2(s)$ in the range of validity of Eq. (3).

A Keplerian rotation curve result from a massive disk (without central object) or to a massive central object (with a light disk, as often considered). If $s > -2$ (the bulk of the disk mass stands in the outermost regions), we have

$$\mu(\varpi) \sim M_{\text{BH}} + M_{\text{d}} \varpi^{s+2} P_2(s), \quad (9)$$

which is essentially an increasing function of the radius (positive gradient). Disk rotation is therefore always *super-Keplerian*. The larger the disk mass, the larger the deviation from Kepler's law.

We conclude that, if the disk mass is significant with respect to the central mass, $v^2(R)$ is the sum of two power laws of the radius, and *this sum is not a power law* (see below). In other words, fitting the global rotation curve of a system containing a massive disk and a black hole with a single power law (e.g. $v \propto R^\gamma$), cannot give any quantitative information about the mass distribution in the framework of Newtonian gravity. This approach is often considered when a massive disk is suspected (see e.g. [Herrnstein et al. 2005](#); [Kondratko et al. 2008](#); [McCallum et al. 2009](#)). See, however, Appendix A for a short discussion of the velocity index γ .

For $s = -1$, Eq. (6) reads

$$\mu(\varpi) = M_{\text{BH}} + M_{\text{d}} \frac{\varpi - \Delta}{1 - \Delta}, \quad (10)$$

which is to be compared to the case of a Mestel disk ([Mestel 1963](#))

$$\mu_{\text{Mestel}}(\varpi) = M'_{\text{d}}(\varpi), \quad (11)$$

where M'_{d} is the cumulative disk mass at the actual radius (linear with the radius ϖ). As already pointed out elsewhere ([Binney & Tremaine 1987](#)), this equation “happens to give the same answer” as what is deduced from the Gauss theorem for a spherically symmetric distribution. In contrast, Eq. (10) corresponds to a Mestel disk truncated on both sides. It includes *edge effects and total disk mass*, and *explicitly contains the central point mass* (which is not part of Mestel's disk model). In the limit $\Delta \rightarrow 0$, we then recover Mestel's solution.

3. AGN disk/black hole mass determination method. The case of IC 1481

3.1. Position-dynamical mass diagram

We immediately see from above that, if the rotation curve of the disk is partly known in the form of N observational points $\{(R_i, v_i)\}$, then some constraints can be set on the disk mass, black hole mass, and surface density profile by fitting the data $\{(R_i, \mu_i)\}$ through Eqs. (8) or (9). Obviously, this procedure does not guarantee that the triplet $(M_{\text{BH}}, M_{\text{d}}, s)$ is physically meaningful given the simplicity of our model and assumptions. Uncertainties in data also fragilize the inversion. Thus, there are three different possibilities.

- A: Data points $\{(R_i, \mu_i)\}_N$ show *no noticeable variation* around a constant value, only a certain dispersion. The systems thus appears in Keplerian rotation. We deduce that either there is a light disk surrounding a massive black hole or the disk is rather massive but the gas is distributed such that $s \leq -2$. The diagram only gives the quantity $M_{\text{BH}} + M_{\text{d}}$, which can be identified with the so-called “binding mass” M_{b} (or enclosed mass). There is no way to separate the black hole and the disk in this analysis.
- B: Data points show *a significant variation*, still with a certain dispersion (see Sect. 4). The gas rotates faster than Keplerian. If μ increases faster than ϖ , then $s > -1$, otherwise $s < -1$. In either case, fitting the data points through Eq. (9) can yield a triplet $(M_{\text{BH}}, M_{\text{d}}, s)$.
- C: Data cannot be fitted by Eq. (9), or inferred parameters are non physical. In this case, our model is inappropriate. Various reasons can be invoked (see Sect. 6).

3.2. Zeroth-order: disk mass and central mass

The zeroth-order treatment of the non linear formula is interesting and instructive because it gives the orders of magnitude. Actually, if we consider that astrophysical disks are characterized by $s \approx -1$, we can expand Eq. (9) around $s = -1$. We find (see also Eq. (10) with $\Delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \mu &\approx M_{\text{BH}} + M_{\text{d}} \varpi + M_{\text{d}}(s+1) \varpi \ln \varpi, \\ &\approx M_{\text{BH}} + M_{\text{d}} \varpi. \end{aligned} \quad (12)$$

We conclude that, if observational data plotted on a position-dynamical mass diagram are almost linearly distributed in a position-dynamical mass diagram, then *the slope is the disk mass M_{d} and the intercept is the black hole mass*. In the following, we discuss both approaches in the context of AGN disks whose rotation, for some of them, is known from maser emission.

3.3. Scale-free formula. Scaling to AGN disks

Equation (9) is totally scale-free if we divide μ by the black hole mass. Actually, if $q = M_{\text{d}}/M_{\text{BH}}$ denotes the mass ratio in the system, Eq. (9) writes

$$\frac{\mu(\varpi)}{M_{\text{BH}}} \sim 1 + q \varpi^{s+2} P_2(s), \quad (13)$$

so that the model applies to any kind of star/disk system. In the context of AGN, black holes are supermassive (several million solar masses), the central accretion disk typically has the parsec

A&A 530, A145 (2011)

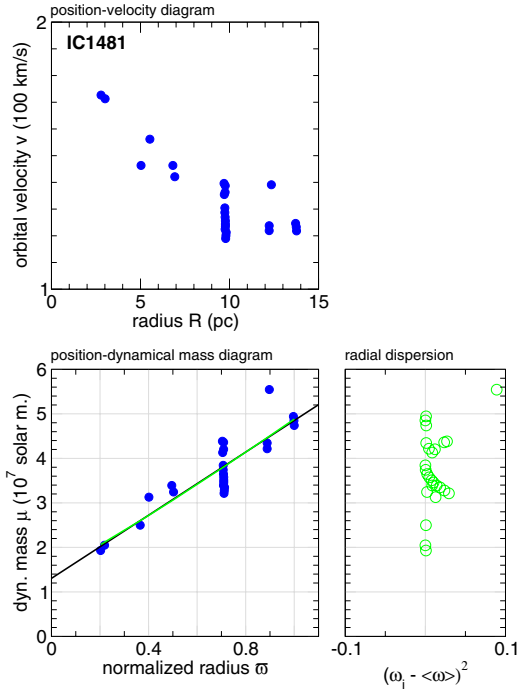


Fig. 2. Position-velocity data of maser spots in the disk of IC 1481 (*top*), and corresponding position-dynamical mass diagram (*bottom*). A non linear fit of the data (green curve) gives the disk mass, the black hole mass and the s -parameter. The linear fit (black line) is also shown. Data are from Mamyoda et al. (2009).

size, and rotational velocities are, at such distances, hundreds of km s^{-1} . With this scaling, the formula for the dynamical mass becomes²

$$\frac{\mu_i}{10^7 M_\odot} \approx 0.232 \left(\frac{R_i}{1 \text{ pc}} \right) \left(\frac{v_i}{100 \text{ km s}^{-1}} \right)^2 \quad (15)$$

$$\equiv \tilde{\mu}_i \quad (16)$$

where v_i is, following our model, the disk rotational velocity measured relative to the systemic/receding velocity of the system, and R_i relative to the rotation axis of the disk. In the following, masses are expressed in units of $10^7 M_\odot$, and denoted $\tilde{M}$. Then, Eq. (9) becomes

$$\tilde{\mu}(\varpi) = \tilde{M}_{\text{BH}} + \tilde{M}_d \varpi^{s+2} P_2(s), \quad (17)$$

and its linear version is

$$\tilde{\mu}(\varpi) = \tilde{M}_{\text{BH}} + \tilde{M}_d \varpi. \quad (18)$$

3.4. An example: the case of IC 1481

The top panel in Fig. 2 shows the rotational velocity of maser spots observed in the outer disk of the active nucleus in galaxy

² For a circumstellar system, we would have, for instance,

$$\frac{\mu_i}{1 M_\odot} \approx 1.12 \left(\frac{R_i}{100 \text{ AU}} \right) \left(\frac{v_i}{100 \text{ km s}^{-1}} \right)^2. \quad (14)$$

Table 1. Results of non linear fit through Eq. (17) for IC 1481 (*top*), and results for the linear fit (a least-square fit) through Eq. (18) (*bottom*).

AGN	Points	$\langle \tilde{\mu}_i \rangle$	$\tilde{M}_{\text{BH}}$	$\tilde{M}_d$	s	Cor.
IC 1481	26	3.67	1.51	3.59	-0.88	0.89
IC 1481	26	3.67	1.30	3.55	(-1)	0.89

Notes. Last column is the correlation coefficient. Maser data are from Mamyoda et al. (2009).

IC 1481 versus the distance from the center (Mamyoda et al. 2009). The radius of the outermost maser spot is set to a_{out} (although the gas disk can extend farther away³). The bottom panel displays the same data once converted into a (ϖ, μ) -diagram, as well as the result of the fit by Eq. (17) (non-linear) and by Eq. (18) (linear). For each point, the square of the radial deviation between the data and the linear fit is shown (see below). The parameters of the two fits are gathered in Table 1. These are in good agreement, especially because the solution of the non linear fit gives an s -parameter close to -1. In such a case, the curvature is difficult to detect by eye. As announced in Mamyoda et al. (2009)⁴, the disk mass is higher than the black hole mass by a factor of 2–3.

4. Uncertainties and data dispersion

Position-velocity data deduced from observations generally suffer from dispersion and uncertainties, which can have different origins: physical (e.g. variability, non uniform dynamics, geometry and deprojection) and instrumental (i.e. lack of resolution). In particular, locating the position of emitters precisely is a critical point (e.g. Uscanga et al. 2007). In order to check whether the method is “robust” enough to infer some reliable information about masses, we generated a sample of N points $\{\varpi_i, \tilde{\mu}_i\}$, obeying exactly Eq. (17) for a given reference triplet $(\tilde{M}_{\text{BH}}, \tilde{M}_d, s)^{\text{ref}}$. To these synthetic data, we added uncertainties on the radius (without presuming their origin) with three different levels of “noise”. We considered a Gaussian noise, with various standard deviations σ . The perturbed radii ϖ_i were then all rescaled so that finally $\varpi_N = 1$. Unfortunately, this rescaling procedure introduce a slight bias by tending to overestimate both the black hole mass and the disk mass.

Here, we report a typical experiment obtained for

- a massive disk configuration with $(\tilde{M}_{\text{BH}}, \tilde{M}_d)^{\text{ref}} = (1, 4)$ corresponding to mass ratio $q = 4$;
- a massive black hole configuration with $(\tilde{M}_{\text{BH}}, \tilde{M}_d)^{\text{ref}} = (4, 1)$ corresponding to $q = \frac{1}{4}$;

with $s^{\text{ref}} = -1.5$ and $N = 20$ points in both cases. Initially, data were randomly spread over the range $[0.5, 1]$, and we considered 3 levels of noise: $\sigma = \{0.03, 0.05, 0.1\}$. The synthetic $(\varpi, \tilde{\mu})$ -diagram obtained for $\sigma = 0.03$, which is presumed to mimic dispersed observational data, is shown in Fig. 3 with the exact rotation law given by Eq. (17). We tried to determine the best triplet $(\tilde{M}_{\text{BH}}, \tilde{M}_d, s)$ in three ways:

- by the linear approach;

³ It can be shown that Eqs. (8) and (9) still hold if one uses a reference value $a_0 \leq a_{\text{out}}$ other than the outer radius a_{out} since $\tilde{M}_d \propto R^{s+2}$. Then $\tilde{M}_d$ refers to the cumulative disk mass up to this reference radius a_0 .

⁴ In Mamyoda et al. (2009), an extreme case without black hole was considered.

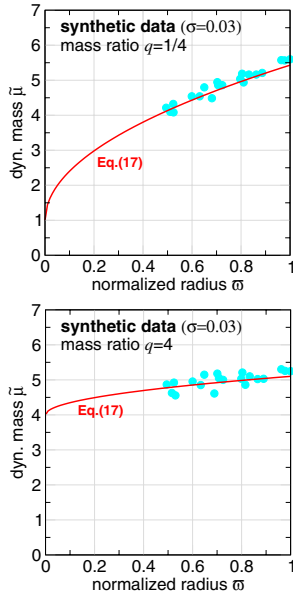


Fig. 3. Synthetic data set made with $N = 20$ points generated from Eq. (17) with $(\tilde{M}_{\text{BH}}, \tilde{M}_{\text{d}}, s)^{\text{ref}} = (1, 4, -1.5)$ (top) and with $(\tilde{M}_{\text{BH}}, \tilde{M}_{\text{d}}, s)^{\text{ref}} = (4, 1, -1.5)$ (bottom). Uncertainties corresponding to a Gaussian noise with a standard deviation $\sigma = 0.03$ have been added to all the radii. Data were rescaled in radius such that the outer point has a normalized radius $\varpi_N = 1$.

- by the non linear approach, but forcing $s = s^{\text{ref}}$;
- by the non linear approach.

The second case is only illustrative, as it can not be used in practice since s is not known a priori. For each configuration, the relative distance between the reference triplet and the one deduced by fitting the synthetic noisy data is measured by the parameter δ , with

$$\delta^2 = \left(1 - \frac{\tilde{M}_{\text{BH}}}{\tilde{M}_{\text{BH}}^{\text{ref}}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\tilde{M}_{\text{d}}}{\tilde{M}_{\text{d}}^{\text{ref}}}\right)^2 + \left(1 - \frac{s}{s^{\text{ref}}}\right)^2. \quad (19)$$

As a result, $\delta \rightarrow 0$ when the method works, whereas $\delta \gtrsim 1$ when it fails (i.e. when the output and the input triplets differ significantly⁵). Practically, the linear approach is performed from a least-square procedure. The results are gathered in Table 2. As expected, the lower the dispersion, the better the method. For the massive disk configuration and $\sigma = 0.03$ (low dispersion), we recover the disk mass within a few percent by the non linear fit, while the error in the black hole mass is about 30%. By the linear approach, we get the disk mass within 30%, while there is a factor 2–3 for the black hole mass. This is not all that surprising since the curvature of the function $\tilde{\mu}(\varpi)$ is noticeable in this case, so the error on the intercept can be large. As the dispersion increases, the linear approach becomes more and more reliable for getting the disk mass (within a few percent), but the black hole mass is still poorly determined (a factor 2 typically). Regarding the massive black hole configuration and $\sigma = 0.03$ (low dispersion), the black hole mass and the disk mass are deduced correctly within a few percent typically, especially

⁵ This norm can introduce a bias into the interpretation as, a relative discrepancy of 60% in each direction suffices to produce $\delta = 1$, but δ can be large even if two of the three parameters are correct.

Table 2. Results for synthetic data generated from Eq. (17), for the massive disk configuration (top), and for the massive black hole configuration (bottom).

Massive disk configuration ($q = 4$)				
σ	0.03	0.05	0.1	comments
δ	1.79	1.67	1.24	linear approach ($s = -1$)
$\tilde{M}_{\text{BH}}$	2.74	2.62	2.19	
$\tilde{M}_{\text{d}}$	2.89	3.11	3.91	
δ	0.33	0.61	1.57	non-linear approach (with $s = -1.5$)
$\tilde{M}_{\text{BH}}$	0.68	0.42	-0.49	
$\tilde{M}_{\text{d}}$	4.43	4.75	5.89	
δ	0.32	0.83	no solution	non-linear approach
$\tilde{M}_{\text{BH}}$	1.31	0.20	–	
$\tilde{M}_{\text{d}}$	3.88	4.95	–	
s	-1.41	-1.52	–	
Massive black hole configuration ($q = \frac{1}{4}$)				
σ	0.03	0.05	0.1	comments
δ	0.34	0.46	1.44	linear approach ($s = -1$)
$\tilde{M}_{\text{BH}}$	4.28	4.06	3.38	
$\tilde{M}_{\text{d}}$	0.96	1.31	2.39	
δ	0.49	1.03	2.70	non-linear approach (with $s = -1.5$)
$\tilde{M}_{\text{BH}}$	3.59	3.13	1.71	
$\tilde{M}_{\text{d}}$	1.48	2.01	3.64	
δ	0.20	4.52	no solution	non-linear approach
$\tilde{M}_{\text{BH}}$	4.07	-0.45	–	
$\tilde{M}_{\text{d}}$	1.09	5.46	–	
s	-1.24	-1.83	–	

Notes. Values in bold correspond to the best approach.

using the non linear method. As the dispersion increases, the uncertainty in both two quantities rises, for the same reason as mentioned hereabove; however, the black hole mass is determined with about 15%.

Since the errors on the radius propagate to the variable μ , we made the same fit in the (R, v) -diagram and found very similar results. In brief, we see that when the “global slope” is steep (massive disk configuration), the disk mass is determined with precision. Conversely, when the “global slope” is almost zero (massive black hole configuration), the black hole mass (value at the intercept) is well determined. When dispersion is too large, the correlation becomes too weak for interpretation, and the method fails to give the triplet, but it is important to note that the linear approach always gives the value of the most massive component within a factor less than about 15%, and the less massive by a factor 2–3.

5. Application to a few AGN masing disks

In the case where position-velocity diagrams are available in the literature, we analyzed a few AGN masing disks to try to put constraints on masses. This is not a new problem regarding the mass of black hole. The mass of disks is, however, much a subject of debate, since there is almost no systematic or generic study like the one presented here, except isolated attempts (see e.g. Huré 2002; Lodato & Bertin 2003; Herrnstein et al. 2005; Kondratko et al. 2008; McCallum et al. 2009). Table 3 lists the systems considered here. Position-velocity data points were obtained by digitizing graphs when published, without special treatment (in

A&A 530, A145 (2011)

Table 3. List of AGN hosting a masing disk considered here, references for position-velocity data and associated disk/black hole parameters reported by authors ([†] model only).

AGN	Reference	$\tilde{M}_b$	$\tilde{M}_{BH}$	$\tilde{M}_d$	s	
IC 1481	Mamyoda et al. (2009)	–	<1	4.3	–1.38	no black hole limit
UGC 3789	Reid et al. (2009)	1.1	1.1	–		
NGC 3393	Kondratko et al. (2008)	3.1 at 0.36 pc	2.6	1.9		
NGC 4258	Herrnstein et al. (2005)	3.8	3.8	0.089		
NGC 1068	Greenhill & Gwinn (1997)	1.5	?	?		
	[†] Lodato & Bertin (2003)	1.5	0.8	0.8	–1	thin disk solution
	[†] Huré (2002)	–	1.2	0.6 (0.8 at 1.5 pc)	–1	thin disk solution
		–	1.2	0.9 (1.1 at 1.3 pc)	–1.05	thick disk solution
NGC 4945	Greenhill et al. (1997)	0.14 at 0.3 pc	?	–		
Circinus	McCallum et al. (2009) (epoch 1)	–	0.17	–		

Notes. Columns 3–5 gives values found by the authors. Masses are given in units of $10^7 M_\odot$; M_b is the binding mass as determined from spherically symmetric models.

Table 4. Results of linear-fitting through Eq. (18).

AGN	N	$\langle \tilde{\mu}_i \rangle$	$\tilde{M}_{BH}$	$\tilde{M}_d$	Cor.	Case*	St. dev. σ	Comment for non linear fitting agreement
IC 1481	26	3.67	1.30	3.55	0.89	B	0.11	
UGC 3789	39	1.09	0.81	0.62	0.89	B	0.07	$(\tilde{M}_{BH}, \tilde{M}_d, s) \approx (5.91, -2.13, -0.056)$
NGC 3393	17	2.85	0.59	3.48	0.95	B	0.06	no solution
NGC 4258	50	3.78	3.63	0.16	0.37	AB	0.3	$(\tilde{M}_{BH}, \tilde{M}_d, s) \approx (3.20, 0.60, -1.97)$, cor. 0.38
NGC 1068	32	1.63	0.72	1.09	0.49	BC	0.2	$(\tilde{M}_{BH}, \tilde{M}_d, s) \approx (2.77, -0.89, -3.58)$
NGC 4945	6	0.09	0.11	–0.02	–0.11	C	2	$(\tilde{M}_{BH}, \tilde{M}_d, s) \approx (0.025, 0.053, -3.38)$, cor. 0.14 ($s < -2$)
Circinus	21	0.12	0.04	0.14	0.37	C	0.6	no solution

Notes. Column 8 gives the standard deviation σ . ^(*) For the classification, see Sect. 3.

particular, we fully trust in the analysis by the authors to furnish deprojected position-velocity data in the reference frame of the black hole). The table also contains masses previously proposed for the black hole and disk, mostly through models of spherical distributions. In each case listed in Table 3, we have tried to fit the data by the linear formula and by the non linear formula as well. Position-dynamical mass diagrams, together with the linear fit and averaged value, are displayed in Fig. 4. The results are given in Table 4. In particular, from the linear regression, we estimated the degree of dispersion by computing the standard deviation σ (Col. 8). From the simple analysis performed in Sect. 4, we immediately expect no precise values for NGC 4945 and Circinus. For NGC 4258 and NGC 1068, the dispersion is much weaker with $\sigma \approx 0.2$ – 0.3 . For these two objects, the linear approach should give the mass of the most massive component quite correctly (i.e. see Table 2). Finally, for IC 1481, UGC 3789 and NGC 3393, dispersion is less than $\sim 10\%$, so both mass components should be obtained with “accuracy”.

It was not possible to derive a triplet $(\tilde{M}_{BH}, \tilde{M}_d, s)$ for all these systems through the non linear approach (negative mass or non convergence of the fitting procedure), even for UGC 3789 and NGC 3393 whose data, like for IC 1481, are spread over a large radial domain and little dispersed. In two cases (NGC 4945 and Circinus), the method is inappropriate: no correlation really exists in the position-dynamical mass and inferred parameters are non physical (in particular, $\tilde{M}_d < 0$ for NGC 4945). We are aware that some disks have been predicted to be geometrically thick, so the model of flat disk used here should naturally fail. In contrast, results obtained through the linear approach are satisfactory for UGC 3786, NGC 3393, and NGC 1068 where disk mass is similar to, or higher than the mass of the central

black hole. For these objects, the massive disk should be prone to instabilities. For NGC 4258, the slope is very weak and a mass ratio of about 0.05 is expected.

6. Concluding remarks

In this paper, we have reported a simple method to estimate the mass of a disk surrounding a central black hole and assuming a flat, pressure-less disk at centrifugal balance. This model obviously applies to other kinds of systems containing a disk and (possibly) a central star. Instead of the conventional position-velocity diagram, the position-dynamical mass diagram makes the measurement of possible deviations to Kepler’s law easier. Using recent calculations for the gravitational potential of “truncated self-similar” disks, we have shown that i) the rotation law is generally not a power law of the radius, and ii) such deviations are, at zero order at least, directly related to the cumulative disk mass.

It is clear that the disk model is very simple and can be improved in several ways. At the same time, it is difficult to make the method robust and universal, since position-velocity data generally show a certain dispersion that can have several origins like thickness effects, instabilities (warps), etc. Through a simple analysis of uncertainties, we have shown that the linear approach gives quite correctly the most massive component (typically with a few tens of percent) if data dispersion is large (standard deviation larger than 0.1). For weak dispersion, both the disk mass and the black hole mass should be accessible through non linear data fitting, as well as the surface density power index. Moreover, the systemic velocity plays a major role, and the asymmetry often observed between the redshifted part and the

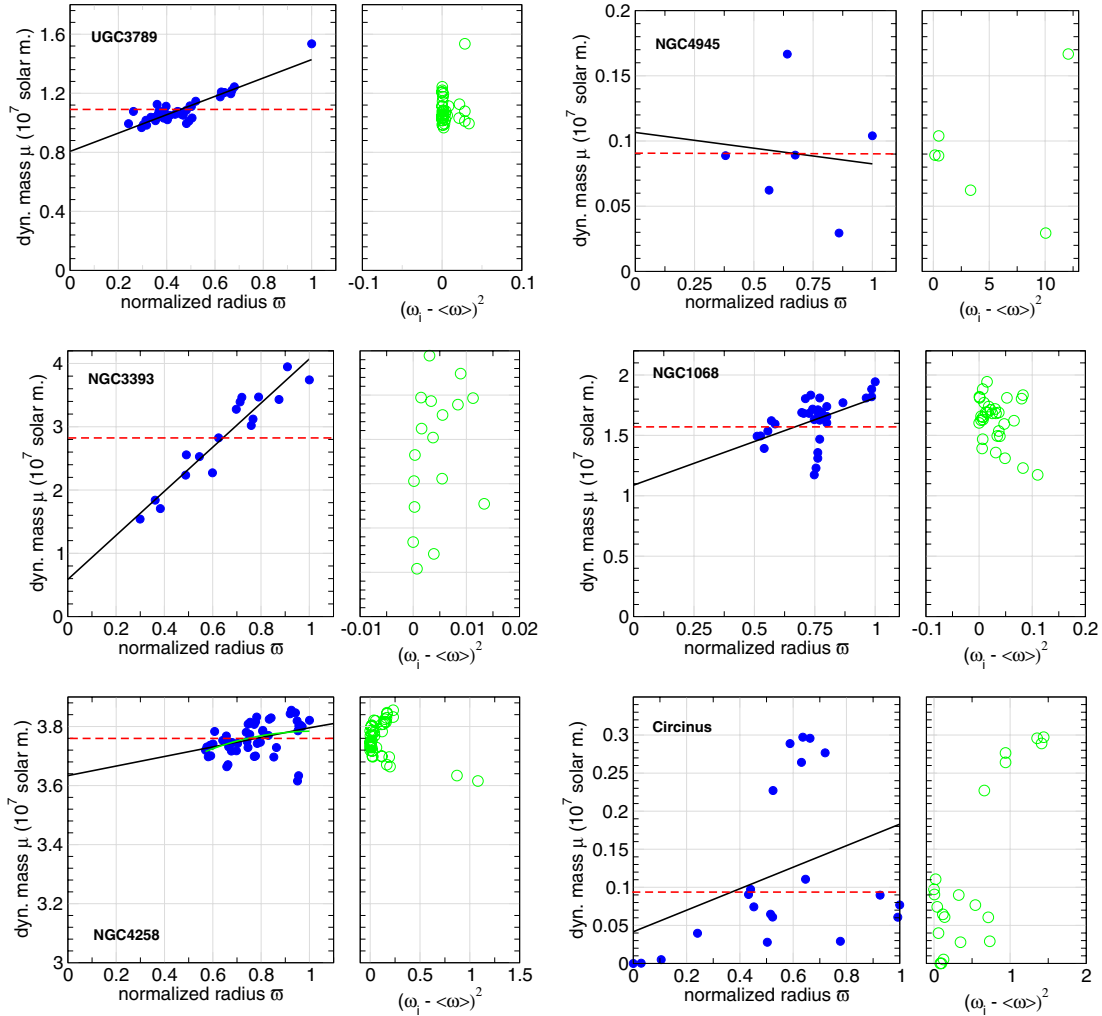


Fig. 4. Position-dynamical mass diagram for each AGN listed in Table 3 (*left*) and deviation in radius with the linear fitting (*right*). Observational data are circles, and the red dashed line is the averaged value of the $\{\bar{\mu}_i\}$ considered. The linear fit through Eq. (18) is the bold line (see Table 4).

blueshifted part of the rotation curve must be accounted for. This method must therefore be seen as a first step in the analysis of masses in star/disk systems based on gravity.

Acknowledgements. We thank S. Collin and F. Herpin for useful comments. The referees are acknowledged for their comments and suggestions, in particular about the problem of uncertainties.

Appendix A: Note on the power index of the rotation curve

Let γ be the local index of the rotation velocity, namely

$$v = \sqrt{GM_0 R^\gamma}, \quad (\text{A.1})$$

where M_0 is a reference mass. In the present model, it is not a constant, but a function of the radius. We easily find from Eq. (5)

$$\frac{d \ln \mu}{d \ln \varpi} = 1 + 2\gamma, \quad (\text{A.2})$$

with $\gamma = -\frac{1}{2}$ for a Keplerian motion associated with a central point mass M_0 . From Eq. (9), we also deduce

$$\frac{d \ln \mu}{d \ln \varpi} = \frac{M_d}{\mu} P_2(s)(s+2)\varpi^{s+2}, \quad (\text{A.3})$$

and then γ can be written in the form:

$$\gamma = -\frac{1}{2} + \delta\gamma_{\text{kep}}, \quad (\text{A.4})$$

where

$$\delta\gamma_{\text{kep}} = \frac{M_d}{2\mu} P_2(s)(s+2)\varpi^{s+2} \quad (\text{A.5})$$

is the deviation to the Keplerian index. For $s = -2$, we have $\delta\gamma_{\text{kep}} = 0$: the rotation curve resembles a Keplerian curve due to a point mass (see above). This result was already known. The mean deviation is

$$\langle \delta\gamma_{\text{kep}} \rangle = \frac{1}{1-\Delta} \int_{\Delta}^1 \frac{M_d}{2\mu} P_2(s)(s+2)\varpi^{s+2} d\varpi, \quad (\text{A.6})$$

A&A 530, A145 (2011)

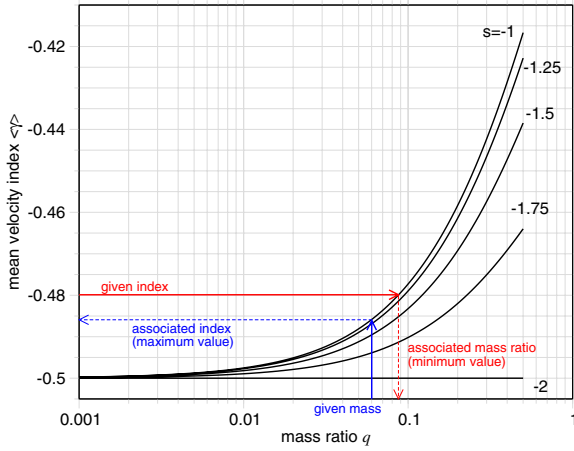


Fig. A.1. Relation between the mean index of the super-Keplerian rotation law and the disk mass to black hole mass ratio for some values of the s -parameter. To a given mean index $\langle\gamma\rangle$, it corresponds a minimum mass ratio q (red). To a given mass ratio, it corresponds a maximal mean index (blue).

where $q = M_d/M_{\text{BH}}$ is the disk-to-black hole mass ratio. The above expression can be integrated exactly for some values of the s -parameter. For instance, with $s = -1$, we find $\langle\delta\gamma_{\text{kep}}\rangle \approx \frac{q}{4}$. It means that a deviation to Kepler's law as low as 0.02 on the velocity index (i.e. $\gamma = -0.48$) could imply a mass ratio $q = 10\%$. This value is, in magnitude, consistent (within a factor ~ 2) with the monopole approximation that predicts a mass ratio ~ 0.4 . For systems containing a disk significantly less massive than the central object (i.e. $q \lesssim 1$) and $\Delta \ll 1$, we find

$$\langle\delta\gamma_{\text{kep}}\rangle \approx \frac{q}{1+q} \times \frac{(s+2)}{2(s+3)} P_2(s). \quad (\text{A.7})$$

Figure A.1 displays the mean velocity index $\langle\gamma\rangle$ versus q for a few values of the s -parameter. This plot enables either to predict

the maximum departure to Kepler's law for a given mass or to bound the disk mass given a mean velocity index. Practically, if deviations remain of small amplitude for low-mass disks, these may not be exploitable (data dispersion, thickness effects).

References

- Abramowicz, M. A., Czerny, B., Lasota, J. P., & Szuszkiewicz, E. 1988, *ApJ*, 332, 646
- Binney, J., & Tremaine, S. 1987, *Galactic dynamics* (Princeton, NJ: Princeton University Press), 747
- Braatz, J. A., Reid, M. J., Greenhill, L. J., et al. 2009, in *ASP Conf. Ser.* 402, ed. Y. Hagiwara, E. Fomalont, M. Tsuboi, & M. Yasuhiro, 274
- Collin, S., & Zahn, J. 2008, *A&A*, 477, 419
- Collin-Souffrin, S., & Dumont, A. M. 1990, *A&A*, 229, 292
- Combes, F. 2001, in *Advanced Lectures on the Starburst-AGN*, ed. I. Aretxaga, D. Kunth, & R. Mújica, 223
- Conway, J. T. 2000, *MNRAS*, 316, 540
- Dubrulle, B. 1992, *A&A*, 266, 592
- Evans, N. W., & Collett, J. L. 1993, *MNRAS*, 264, 353
- Evans, N. W., & Read, J. C. A. 1998, *MNRAS*, 300, 83
- Greenhill, L. J., & Gwinn, C. R. 1997, *Ap&SS*, 248, 261
- Greenhill, L. J., Moran, J. M., & Herrnstein, J. R. 1997, *ApJ*, 481, L23
- Herrnstein, J. R., Moran, J. M., Greenhill, L. J., & Trotter, A. S. 2005, *ApJ*, 629, 719
- Heyvaerts, J. F., & Priest, E. R. 1989, *A&A*, 216, 230
- Huré, J. 2002, *A&A*, 395, L21
- Huré, J.-M. 1998, *A&A*, 337, 625
- Huré, J.-M., Hersant, F., Carreau, C., & Busset, J.-P. 2008, *A&A*, 490, 477
- Kondratko, P. T., Greenhill, L. J., & Moran, J. M. 2008, *ApJ*, 678, 87
- Lodato, G., & Bertin, G. 2003, *A&A*, 398, 517
- Mamyoda, K., Nakai, N., Yamauchi, A., Diamond, P., & Hur , J. 2009, *PASJ*, 61, 1143
- McCallum, J. N., Ellingsen, S. P., Lovell, J. E. J., Phillips, C. J., & Reynolds, J. E. 2009, *MNRAS*, 392, 1339
- Mestel, L. 1963, *MNRAS*, 126, 553
- Miyoshi, M., Moran, J., Herrnstein, J., et al. 1995, *Nature*, 373, 127
- Papaloizou, J. C. B., & Lin, D. N. C. 1995, *ARA&A*, 33, 505
- Pringle, J. E. 1981, *ARA&A*, 19, 137
- Reid, M. J., Braatz, J. A., Condon, J. J., et al. 2009, *ApJ*, 695, 287
- Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
- Shlosman, I., & Begelman, M. C. 1987, *Nature*, 329, 810
- Shore, S. N., & White, R. L. 1982, *ApJ*, 256, 390
- Uscanga, L., Cant , J., & Raga, A. C. 2007, *ApJ*, 663, 857
- Yamauchi, A., Nakai, N., Sato, N., & Diamond, P. 2004, *PASJ*, 56, 605

Migration of anticyclonic vortices in the protoplanetary disk

C. Surville^a, P. Barge^a

a. Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, Université de Provence, CNRS, 38 rue Frédéric Joliot-Curie, F-13388 Marseille Cedex 13, France

Résumé :

Nous présentons la simulation numérique de l'évolution d'un disque protoplanétaire en 2D. Les équations d'Euler en coordonnées cylindriques sont résolues par la méthode des volumes finis. Ces simulations numériques permettent d'étudier la persistance et la migration des vortex anticycloniques. Nous présentons deux cas : (1) des vortex produits par l'instabilité de Rossby, (2) des modèles non-linéaires de vortex introduits dans le disque. La migration des vortex est due à l'excitation d'ondes spirales de densité dans le disque.

Abstract :

This contribution describes the evolution of the protoplanetary disk using 2D numerical simulations. The 2D Euler equations are solved with the finite volume method. The numerical simulations are used to study the persistence and migration of anticyclonic vortices. Two cases are presented : (1) vortices produced by a Rossby wave instability, (2) a non-linear vortex model initially implemented into the disk. The migration of the vortices is due to spiral density waves excited by the vortex in the gas of the disk.

Mots clefs : hydrodynamics ; vortex ;

1 Introduction

La compréhension de l'évolution des disques protoplanétaires est cruciale dans la problématique de la formation des planètes. Nous sommes confrontés à deux problèmes majeurs. Le premier est une contrainte temporelle. En effet les observations de disques protoplanétaires en particulier dans l'excès infrarouge résultant des poussières laissent penser qu'au delà de 10^7 ans le disque est dissipé ([3]). Le second est la croissance des grains dans le disque. Plusieurs théories ont été proposées pour expliquer comment les grains de la taille du micron présents au début de la vie du disque peuvent atteindre le km et former des planétésimaux ou des coeurs de planètes ([12], [4], [2]). La principale limite à la croissance des grains est que l'écoulement est sub-képlérien alors que celui des particules est képlérien. Lorsque la taille des particules solides est grande devant le libre parcours moyen des molécules de gaz, de l'ordre de 10 cm à 1 m, celles-ci subissent un vent qui les fait tomber sur l'étoile en 100 ans typiquement. Le temps de coagulation ou de sédimentation des grains est au moins d'un ordre de grandeur supérieur.

Le confinement des grains dans un environnement où cette migration radiale est réduite est donc favorable à la croissance des grains dans une échelle de temps suffisamment courte pour former des géantes gazeuses. C'est pourquoi les vortex anticycloniques sont étudiés car ils capturent en leur coeur les particules ([1], [5]). Seuls les vortex anticycloniques persistent assez longtemps dans l'écoulement, les cyclones étant dissipés rapidement par le cisaillement képlérien. Plusieurs processus permettent de former des anticyclones. En particulier les instabilités des ondes de Rossby ou baroclines conduisent à la formation de grandes structures anticycloniques.

Nous nous proposons d'étudier ces vortex dans le cadre d'un modèle 2D, basé sur le modèle de la Nébuleuse Solaire de Masse Minimale, qui est le modèle standard des disques protoplanétaires. Nous

explicitons ce modèle et les équations d'Euler cylindriques dans une première partie. Une approche quasi linéaire des équations d'Euler nous permet de présenter un modèle de vortex. La deuxième partie est consacrée à la présentation des simulations numériques. Différentes simulations d'instabilités de Rossby et de modèles de vortex seront étudiées. Enfin nous détaillerons les différents résultats de ces simulations, en particulier la robustesse des vortex et leur migration.

2 Equations d'Euler et modèle de vortex

Le modèle standard des disques protoplanétaires en 2D est basé sur l'étude de la répartition de la matière dans le système solaire et sur les observations des disques. On suppose que la densité, la température et la pression décroissent comme une puissance du rayon. On fait l'hypothèse que l'on a un gaz diatomique d'hydrogène, polytropique, avec les conditions suivantes à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1700 \left(\frac{r}{1AU} \right)^p \text{ g.cm}^{-2} & T_0 &= 280 \left(\frac{r}{1AU} \right)^q \text{ K} \\ P_0 &= k_B T_0 \sigma_0 & p+q &= \gamma \end{aligned}$$

avec $-2 < p < 0$ et $-1 < q < 0$. On choisit dans notre étude $p = -3/2$, et $\gamma = 1.4$.

2.1 Equations d'Euler

La gaz du disque est en rotation dans le potentiel képlérien de l'étoile de masse M_* . Les équations de conservation d'Euler permettent de décrire l'évolution de ce gaz. En coordonnées cylindriques, avec $\vec{V} = u \vec{u}_r + v \vec{u}_\theta$, on écrit :

$$\partial_t \sigma + \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma u) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\sigma v) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t \sigma u + \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma u^2) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\sigma u v) = \sigma \frac{v^2}{r} - \sigma \frac{v_k^2}{r} - \partial_r P \quad (2)$$

$$\partial_t \sigma v + \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma v u) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\sigma v^2) = -\sigma \frac{u v}{r} - \frac{1}{r} \partial_\theta P \quad (3)$$

$$\partial_t \sigma e + \frac{1}{r} \partial_r (r (\sigma e + P) u) + \frac{1}{r} \partial_\theta ((\sigma e + P) v) = -\sigma u \frac{v_k^2}{r} \quad (4)$$

avec $v_k = \sqrt{\frac{GM_*}{r}}$, et l'énergie totale du gaz $\sigma e = \frac{P}{\gamma-1} + \frac{\sigma}{2} (u^2 + v^2)$.

Une solution stationnaire associée aux grandeurs thermodynamiques σ_0 et P_0 est donnée par la vitesse $\vec{V}_0 = u_0 \vec{u}_r + v_0 \vec{u}_\theta$ suivante :

$$u_0 = 0 \quad (5)$$

$$v_0 = \left(v_k^2 + \gamma p \frac{P_0}{\sigma_0} \right)^{1/2} \quad (6)$$

où le deuxième terme du membre de droite dérive de $\frac{r}{\sigma_0} \partial_r P_0$. On remarque que du fait de sa pression, le gaz est en rotation sub-képlérienne. Nous l'appellerons dans la suite "la solution stationnaire", bien qu'il y en ait d'autres.

2.2 Modèle de vortex

On cherche une solution quasi stationnaire non axisymétrique des équations d'Euler pour cet écoulement. On pose :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V} \quad (7)$$

$$\vec{V} = \tilde{u} \vec{u}_r + \tilde{v} \vec{u}_\theta \quad (8)$$

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{\sigma} \quad (9)$$

$$P = P_0 \tilde{P} \quad (10)$$

$$c_s^2 = \frac{P}{\sigma} = c_{s_0}^2 \frac{\tilde{P}}{\tilde{\sigma}} \quad (11)$$

Si on se place dans un repère tournant à $\vec{V}_0$, les équations de la densité et des vitesses deviennent :

$$\partial_t \sigma + \tilde{u} \partial_r \sigma + \frac{\tilde{v}}{r} \partial_\theta \sigma + \sigma \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \tilde{u}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{v} \right] = 0 \quad (12)$$

$$\partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \partial_r \tilde{u} + \frac{\tilde{v}}{r} \partial_\theta \tilde{u} = \frac{\tilde{v}}{r} + \tilde{v} \frac{2v_0}{r} - c_{s_0}^2 \left[\frac{\gamma p}{r} \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{\sigma}} - 1 \right) + \frac{1}{\tilde{\sigma}} \partial_r \tilde{P} \right] \quad (13)$$

$$\partial_t \tilde{v} + \tilde{u} \partial_r \tilde{v} + \frac{\tilde{v}}{r} \partial_\theta \tilde{v} = -\tilde{u} \frac{\tilde{v}}{r} - \tilde{u} \frac{v_0 + r \partial_r v_0}{r} - \frac{c_{s_0}^2}{\tilde{\sigma}} \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{P} \quad (14)$$

On cherche une solution stationnaire donc on pose $\partial_t = 0$. Si on suppose que les termes en $\tilde{u}\tilde{v}$, $\tilde{v}^2$, $\tilde{u} \partial_r$ et $\frac{\tilde{v}}{r} \partial_\theta$ sont petits devant les autres termes, alors le champ de vitesse est donné par :

$$\tilde{u} = -v_0 \frac{M_{a_0}^{-2}}{1 + r \partial_r \ln(v_0)} \frac{r}{\tilde{\sigma}} \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{P} \quad (15)$$

$$\tilde{v} = v_0 \frac{M_{a_0}^{-2}}{2} \left[\gamma p \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{\sigma}} - 1 \right) + \frac{r}{\tilde{\sigma}} \partial_r \tilde{P} \right] \quad (16)$$

où on a défini le nombre de Mach de la solution stationnaire $M_{a_0}^2 = \frac{v_0^2}{c_{s_0}^2} \sim 10^3 \left(\frac{r}{1AU} \right)^{-(q+1)}$.

Ainsi, en considérant un gaz polytropique, la seule prescription de $\tilde{\sigma}(r, \theta)$ donne la solution quasi stationnaire. Notre modèle de vortex est donné par :

$$\tilde{\sigma} = 1 + A \exp \left[-\frac{r_0^2}{\omega_r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{\chi^2} (\theta - \theta_0)^2 \right] \right] \quad (17)$$

où r_0 et θ_0 définissent la position du vortex, A l'amplitude au centre du vortex, ω_r la largeur radiale et χ le rapport d'aspect du vortex.

3 Simulations

La résolution temporelle des équations d'Euler est effectuée grâce à un code numérique aux volumes finis, utilisant un solveur de Riemman exact et dont la méthode de calcul des flux radiaux a été améliorée par rapport au schéma MUSCL classique. L'intégration en temps est basée sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. La stabilité temporelle du schéma est vérifiée ce qui permet d'intégrer la solution pendant plus de 1000 rotations du disque sans erreurs significatives (10^{-8} sur les vitesses et 10^{-6} sur la densité). Les conditions aux limites sont la continuité vers la solution stationnaire σ_0 , P_0 , $\vec{V}_0$ radialement, et la périodicité azimuthalement.

Nous utilisons une grille polaire, avec $n_r = 500$ mailles radiales et $n_\theta = 1000$ mailles azimuthales. De plus 4 mailles fantômes sont ajoutées aux frontières du domaine pour réduire les effets de bords. Le disque est étendu de 5 *AU* à 10 *AU*.

3.1 Instabilité de Rossby

La première famille de simulations est l'étude de l'instabilité dite de Rossby. Nous n'aborderons pas son étude détaillée, nous renvoyons aux articles [8] et [9]. Ces études montrent qu'une perturbation axisymétrique de profil radial gaussien permet de la déclencher si la hauteur et la largeur de cette perturbation sont suffisantes. Nous introduisons donc les conditions initiales suivantes dans nos simulations :

$$\tilde{\sigma}_{ini} = 1 + f \quad (18)$$

$$\tilde{P}_{ini} = (1 + f)^\gamma \quad (19)$$

$$\tilde{u}_{ini} = 0 \quad (20)$$

$$\tilde{v}_{ini} = v_0 M_{a_0}^{-2} \gamma (1 + f)^{\gamma-1} \left[p \left(1 - (1 + f)^{1-\gamma} \right) + \frac{r}{1+f} \partial_r f \right] \quad (21)$$

où f est la perturbation. On utilise $f = f_0 \exp\left[-\frac{(r-r_0)^2}{\omega_f^2}\right]$ et $r_0 = 7.5 \text{ AU}$. Nous avons réalisé 6 simulations avec les paramètres f_0 et ω_f suivants :

f_0	20%	20%	20%	30%	30%	30%
ω_f	0.2 AU	0.3 AU	0.4 AU	0.2 AU	0.3 AU	0.4 AU

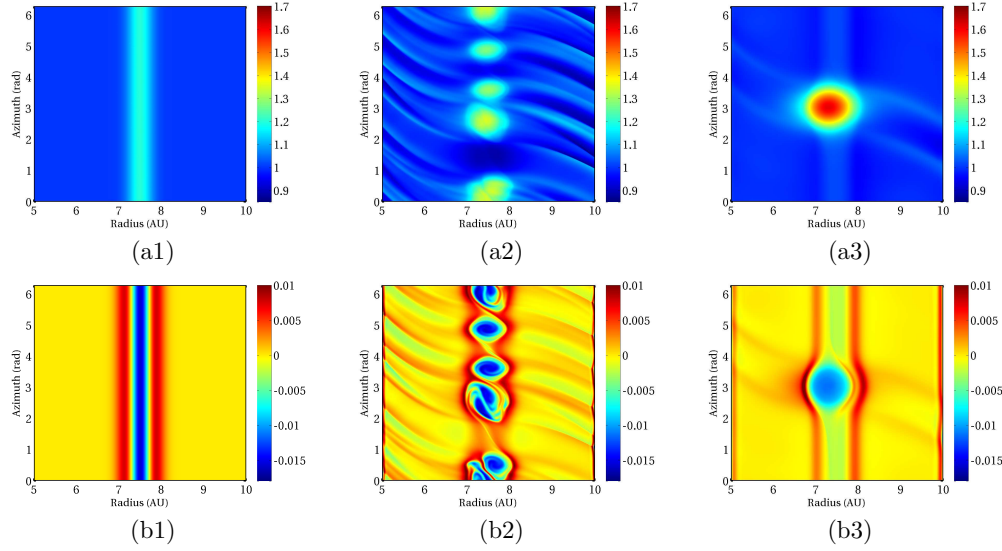


FIGURE 1 – Densité et vorticité relatives à la solution stationnaire à l’instant initial (a1 et b1), après 16 rotations (a2 et b2) et après 180 rotations (a3 et b3) pour $f_0 = 20\%$ et $\omega_f = 0.3 \text{ AU}$

3.2 Modèles de vortex

Nous avons réalisé une étude de modèles de vortex en changeant les paramètres du vortex de façon systématique. Le vortex est positionné à $r_0 = 7.5 \text{ AU}$ et $\theta_0 = 3 \text{ rad}$. Trois types de simulations ont été réalisés :

$\omega_r \text{ (AU)}$	0.6					0.6				0.5	0.7	0.9
χ	10					12.5	10	7.5	5	12	8.57	6.67
A	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.6				0.6		

4 Discussion

Que les vortex soient issus de l’instabilité de Rossby ou imposés dans le disque, leur évolution est similaire. Tout d’abord, les différentes simulations confirment que les vortex sont des solutions robustes des équations d’Euler. Les Figures 1 et 2, montrant l’évolution de différentes simulations au cours du temps, mettent en évidence que sur plusieurs centaines de rotations, ces structures conservent leur masse et leur vorticité. Elles persistent pendant plus de 10^4 ans, ce qui représente une fraction importante de la vie du disque. Ce ne sont donc pas des solutions transitoires. La gamme de solutions stables est très étendue, en terme de largeur radiale et de rapports d’aspect. La Figure 3 montre ces différents paramètres pour différentes simulations. Seule la largeur radiale est plus contrainte. En effet, le cisaillement du gaz environnant limite cette largeur à l’échelle de hauteur du disque :

$$H = \frac{rc_{s0}}{v_0} \sim 0.45 \text{ AU à } 7.5 \text{ AU} \quad (22)$$

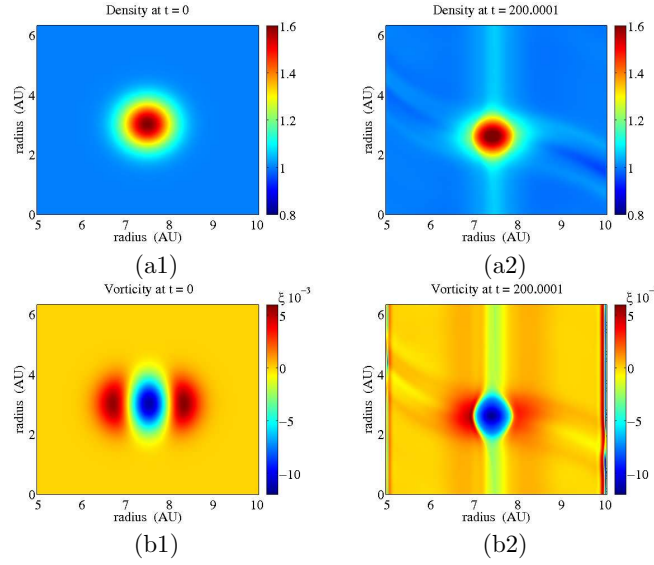


FIGURE 2 – Densité et vorticité relatives à la solution stationnaire à l’instant initial (a1 et b1) et après 200 rotations (a2 et b2) pour un modèle avec $A = 60\%$, $\omega_r = 0.6 \text{ AU}$ et $\chi = 10$

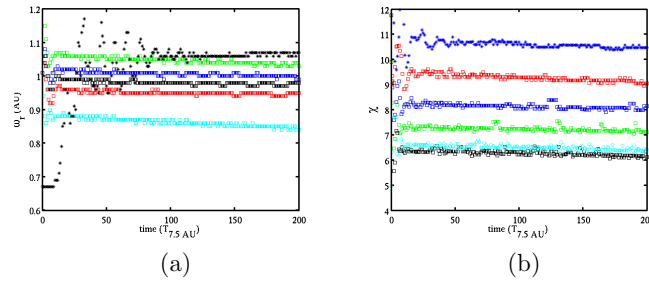


FIGURE 3 – Evolution de ω_r (a) et χ (b) au cours du temps pour différentes simulations

Cependant, la plupart des vortex ont une largeur radiale ω_r plus grande que $2H$ et sont stables ([7]). Il semble que tout l’écoulement se réorganise en présence du vortex. De fait la structure subit un faible cisaillement entre ses bords internes et externes.

Mais ce qui est majeur est la migration radiale des vortex. Ils perdent du moment cinétique avec un taux constant, comme le montre la Figure 4. L’émission d’ondes de densité qui sont spiralées par le cisaillement du gaz est systématique et est responsable du transport de moment cinétique. L’article [10] fait une étude des ondes linéaires émises par une perturbation et introduit le terme de flux radial du moment cinétique qui s’écrit :

$$F_r = 2\pi r \langle r\sigma\tilde{v}\tilde{u} \rangle \quad (23)$$

où $\langle \rangle$ dénote la moyenne azimuthale. Un tel flux n’est pas associé à des ondes linéaires. Or nous mettons en évidence que les ondes des vortex de nos simulations ont un transport radial, constant dans le temps. L’onde dans la partie interne du disque a un taux inférieur à celle de la partie externe (Figure 5a). Le vortex situé au centre de la marche perd donc du moment cinétique. Ce flux radial est dirigé vers l’extérieur, donc le disque et le vortex migrent vers l’étoile. Nous montrons Figure 5b que ce transport dans les ondes est proportionnel à la vitesse de migration du vortex.

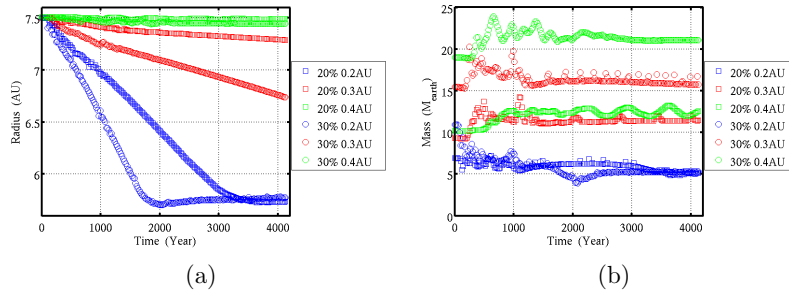


FIGURE 4 – Evolution de la position du vortex (a) et de sa masse (b) au cours du temps pour différentes simulations

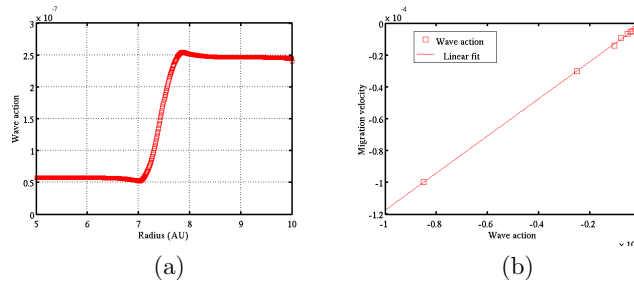


FIGURE 5 – Transport radial de moment cinétique (a) et relation entre celui-ci et la vitesse de migration (b) pour différentes simulations

La vitesse de migration des vortex est comprise entre $0.2 - 2 \frac{\text{AU}}{10^3 \text{ ans}}$. Cette migration est donc fondamentale dans les scénarios de formation de planètes et d'évolution des disques. Elle peut justifier la formation de jupiters chauds ou un scénario d'accrétion entretenue par un grand nombre de vortex répartis dans le disque. Le modèle de vortex que nous avons développé nous permet de mieux comprendre ce phénomène non-linéaire et nous comptons présenter la suite de nos travaux dans une publication à venir.

Références

- [1] Barge, P., Sommeria, J. 1995 *Astronomy & Astrophysics*. **295** L1
- [2] Barranco, J. A., Marcus P.S. 2005 *Astrophysical Journal* **623** 1157
- [3] Briceno, C. et al 2001 *Science* **291** 93
- [4] Goldreich, P., Tremaine, S. 1979 *Astrophysical Journal* **233** 857
- [5] Heng, K., Kenyon, S. J. 2010 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **408** 1476
- [6] Inaba, S., Barge, P. 2006 *Astrophysical Journal* **649** 415
- [7] Lesur, G., Papaloizou, J. C. B. 2009 *Astronomy & Astrophysics* **498** 1
- [8] Li, H. et al. 2000 *Astrophysical Journal* **533** 1023
- [9] Lovelace, R. V. E., et al. 1999 *Astrophysical Journal* **513** 805
- [10] Paardekooper et al 2010 *Astrophysical Journal* **725** 146
- [11] Tanga, P. et al. 1996 *Icarus* **121** 158
- [12] Weidenschilling, S. J. 1977 *MNRAS* **180** 57
- [13] Youdin, A. N. et al. 2007 *Astrophysical Journal* **662** 613

Structure and Migration of 2D Vortices

Clément Surville^{1,2,a} and Pierre Barge^{2,b}

¹Max Planck Institut für Astronomie, Königstuhl 17, 69117 Heidelberg, Germany

²Aix Marseille Université, CNRS, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, UMR 7326, 13388, Marseille, France

Abstract. The evolution of 2D vortices is studied in the case of an adiabatic disk. A new vortex model is derived using a gaussian assumption and tested against numerical solutions. This model is compared with previous ones and used as an initial solution for an accurate second order numerical method. Three parameters are necessary to constrain the model: the radial extent of the vortex, its aspect ratio and the local Rossby number. We explore the space of the parameters and find that two different families of vortices can be distinguished: (i) large elongated vortices and (ii) small compact vortices. The shape of the vortices is nearly unchanged even after thousands of rotations. We find that 2D vortices migrate inward at a nearly constant rate that depends on the disk parameters and on the vortex aspect ratio. They appear as quasi-steady structures in Keplerian disks.

1 Introduction

Two outstanding issues in the evolution of protoplanetary disks are the growth of the dust grains and the transport of the angular momentum. A number of mechanisms lead to the formation of vortices ([2], [9], [8]) that can act as particles trap ([1], [6], [5]) and also contribute to the transport of angular momentum by the excitation of density waves. These vortices can speed up particles growth by locally increasing the dust to gas ratio; they could also participate to the accretion onto the star at a rate compatible with the observations [8]. Nevertheless the lifetime and the dynamical evolution of these vortices is still an open question. Theoretical and numerical studies already showed that 2D vortices can survive hundred of rotations, in fact in relation with the viscous time-scale of the disk and the numerical diffusion. For example, inside the dead-zone, the gas is nearly inviscid and vortices should survive on longer time scales than in other disk regions. In the first section of the paper we derive an approximate vortex solution of the Euler's equation that better fits the numerical solutions than previous incompressible models. Many simulations were performed to study the dynamical evolution of the vortices and to explore the importance of the various parameters. Two families of vortices have been distinguished following the compression of the ambient gas. Finally, in section 3, vortex migration is discussed as a function of the various parameters.

^ae-mail: surville@mpia-hd.mpg.de

^be-mail: barge@oamp.fr

2 Euler's equations and vortex model

We use a standard model of protoplanetary disks in which surface density, temperature and consequently pressure decrease as power laws of the distance to the star r . We get: $\sigma_0(r) \propto (r/r_0)^{\beta_\sigma}$, $T_0(r) \propto (r/r_0)^{\beta_T}$, $P_0(r) = k_B T_0(r) \sigma_0(r)$ and assume that $\beta_\sigma = -3/2$ and $\beta_T = -1/2$. The density and temperature at the reference radius r_0 lead to a scale height $H_0(r_0) = \sqrt{\gamma P_0(r_0) / \sigma_0(r_0)} / \Omega_0(r_0) = 0.065 r_0$, where $\gamma = 1.4$ is the polytropic index of the gas. The angular velocity $\Omega_0(r) \sim (r/r_0)^{\beta_\Omega}$ results from the equilibrium between the centrifugal force, the stellar potential and the pressure gradient:

$$\Omega_0(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{GM_\star}{r} + \frac{r}{\sigma_0(r)} \partial_r P_0(r) \right)^{1/2} \quad (1)$$

The dynamical evolution of the gas is described using the compressible fluid equations: continuity, Euler's equation and an energy equation for an adiabatic disk; this last equation closes the system since pressure and density are related. We use a cylindrical system of coordinates centered on the star. At steady state density and pressure obey power laws ($\sigma_0(r)$ and $P_0(r)$) and the gas is flowing at the velocity $\vec{V}_0 = 0\vec{e}_r + r\Omega_0(r)\vec{e}_\theta$.

Then, in a frame of reference rotating at $\Omega_0(r_0)$, the system of equation reduces to:

$$u\partial_r\sigma + \frac{v}{r}\partial_\theta\sigma + \sigma\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$$u\partial_ru + \frac{v}{r}\partial_\theta u = \frac{v^2}{r} + 2\Omega_0(r_0)v - (\Omega_0(r)^2 - \Omega_0(r_0)^2)r - \frac{1}{\sigma}\partial_r P + \frac{1}{\sigma_0(r)}\partial_r P_0(r) \quad (3)$$

$$u\partial_rv + \frac{v}{r}\partial_\theta v = -\frac{uv}{r} - 2\Omega_0(r_0)u - \frac{1}{\sigma r}\partial_\theta P \quad (4)$$

where u and v are the radial and azimuthal components of the velocity, respectively, and where it is also assumed that $\partial_t + \Omega_0(r_0)\partial_\theta \equiv 0$. We are now looking for approximate solutions of the above equations that will be compared to numerical solutions obtained from an integration of the complete set of the fluid equations with a second order finite volume method.

2.1 The vortex model

Previous models [7] and [4] (thereafter GNG) start from the incompressible form of the above equations and use the shearing sheet approximation. This leads to a solution in elliptical streamlines with $u = \chi^{-1}\Omega_v r_0(\theta - \theta_0)$ and $v = -\chi\Omega_v(r - r_0)$, where Ω_v is the angular velocity inside the vortex and χ is the aspect ratio of the elliptical patch. Besides, GNG also derived a parabolic approximation of the pressure profile but the velocity field presents a discontinuity that is not suitable for numerical studies.

Here, we propose a more complete model based on an approximate solution of the above equations. To this end, we will set $v = v' + V_0(r) - r\Omega_0(r_0)$ and define a local Rossby number $R_0 = \omega/(2\Omega_0)$, where ω is the vorticity with respect to the rotating frame. We obtain:

$$\begin{aligned} v'2\Omega_0 &= \partial_r \mathcal{H} + \frac{(\gamma - 1)\beta_\sigma - \beta_T}{\gamma} \frac{\mathcal{H}}{r} \\ u2\Omega_0 &= -(R_0 + 1 + \beta_\Omega/2)^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta \mathcal{H} \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathcal{H}$ is a pseudo-enthalpy that we assume to be gaussian in the radial and the azimuthal directions. It reads:

Instabilities and Structures in Proto-Planetary Disks

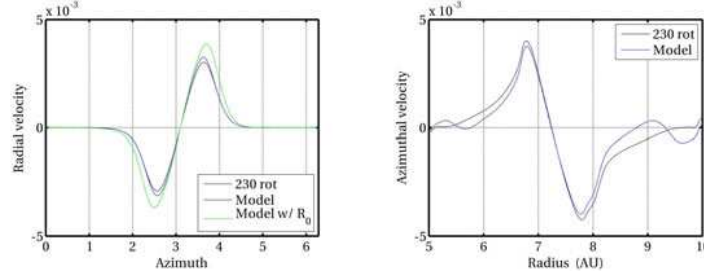


Figure 1. From left to right, the radial and the azimuthal components of the velocity, respectively. The numerical values are plotted in black; the values issued from the model are plotted in green or in blue following the Rossby number is defined as the minimum of the vorticity or as space varying function, respectively. Agreement between the black and the green curves is, at most, of the order of 10%; agreement between the black and the blue curves is, at most, of the order of 5%.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \exp \left[-\chi_r^{-2} \left[\left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2 + \chi_\theta^{-2} (\theta - \theta_0)^2 \right] \right] \quad (6)$$

where:

$$\mathcal{H}_0 = -2R_0(\Omega(r_0)r_0\chi_r)^2 \left[1 + (\chi_\theta^2(R_0 + 1 + \beta_\Omega/2))^{-1} \right]^{-1} \quad (7)$$

Thus the vortex can be defined by three independent parameters: a non-dimensional radial extent $\chi_r = \Delta_r/r_0$, an aspect ratio χ_θ and a Rossby number R_0 . We have simulated more than 250 vortices with parameters: $0.01 < \chi_r < 0.15$, $2.5 < \chi_\theta < 18$ and $-0.23 < R_0 < -0.05$. The radial extent of vortices ranges from a tenth of the scale height to more than two scales height. These vortices appear as stable and quasi-steady structures. If the parameters are not appropriately chosen, the initial vortex gently relaxes to another solution, usually by a change of its aspect ratio. We found also that the aspect ratio approximately varies as $1/|R_0|$. Figure 1 shows how well the velocity profile deduced from the models fits the numerical values. The fit is very good in the central region of the vortex but also in the outer regions where the vortex joins the background; this is in contrast with the previous models.

2.2 Two vortex families

The evolution of the vortices was followed numerically for ~ 200 rotations (up to 1000 rotations in some cases) and for a wide range of the possible parameters. From our sample two families of vortices can be distinguished as shown in figure 2. The family of *incompressible vortices* corresponds to big vortices with large χ_θ and $R_0 \simeq -0.1$; they have closed streamlines and excite only very weak density waves. The family of *compressible vortices* corresponds to small vortices with small χ_θ and $R_0 < -0.15$; they have spiral streamlines and a density bump whose amplitude is similar to the amplitude of the density waves. From our simulations we found that the vortex parameters change by less than 10% during their evolution, even if the vortex is moving radially in the disk.

3 Vortex migration

Compressible vortices can excite spiral density waves that transport angular momentum outward. So, they can lose angular momentum and lead to an inward migration [10]. Measuring a mean position

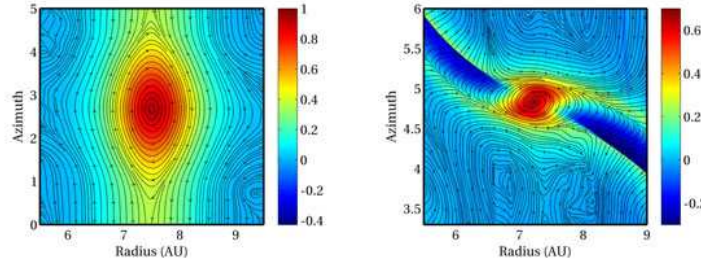


Figure 2. Density map of the two vortex families: on the left, the case of a nearly "incompressible vortex" with closed streamlines (in black), and consistently with the incompressible GNG solution; on the right, the case of a "compressible vortex" with opened streamlines and a strong spiral pattern excited by the compact core.

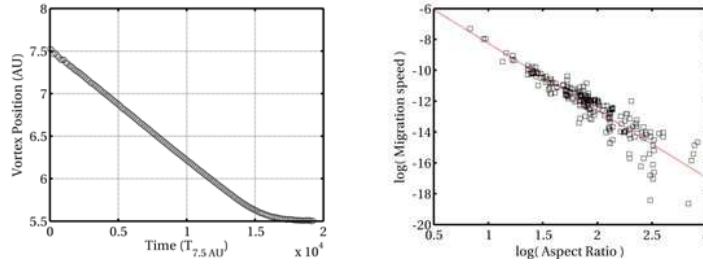


Figure 3. Vortex migration. On the left is presented the mean vortex position as a function of time (1 rotation is equivalent to 129 units on the x-axis); the vortex reaches the inner boundary after 115 rotations and the migration speed is given by the slope of the curve. On the right is presented the correlation between the aspect ratio and the migration speed; the -4.2 slope of this curve shows the strong dependence of migration with the vortex shape.

of the vortex we determined a migration rate (figure 3) that we found independent of its radial extent. On the other hand migration is highly dependent on the aspect ratio of the vortices; the migration rate is found to scale as $\chi_{\theta}^{-4.2}$, consistent with the weak emission of spiral waves by the elongated vortices.

The migration rate of the vortices also depends on the global properties of the disk. It is varying linearly with the density and temperature gradients, as noted by [10]; we found it can also vanish if the gradients satisfy the relation $\beta_{\sigma} + \beta_T = 3$. Finally, vortex migration is proportional to the square of the scale height, so the thicker the disk the faster the migration (fast migration is due to a fast transport of angular momentum resulting from a large sound speed in thick disks).

4 Conclusions

The model presented in this paper was used to construct a large number of possible vortex solutions that were tested numerically. We found that the injected vortex solutions evolve following two stages: (1) a relaxation of the initial solution toward a quasi-steady vortex, (2) a migration of the vortex toward the inner regions of the disk. The relaxation phase is found to last only a few rotation periods. During the second phase the vortex can survive a large number of rotation periods (up to 1000 rotation periods in our simulations) and migrates inward toward the star. The parameters necessary to get quasi-steady vortex solutions range in a larger domain than previously thought. The migration rate is found

Instabilities and Structures in Proto-Planetary Disks

to depend on the aspect ratio of the vortex and on the various parameters of the disk. Two vortex families can be distinguished following their size and shape. Large elongated vortices are weakly compressible structures that migrate very slowly toward the star. Small compact vortices are much more compressible structures that excite strong spiral waves and, thus, migrate very rapidly toward the star (migration can be as fast as 1 *AU* per 1000 years). Vortex migration can participate to the global evolution of the disk through the transport of angular momentum. This migration mechanism is due to the compression of the medium and is a robust effect. It could have a significant impact on the global disk evolution and should be included in a coherent scenario of planet formation involving vortical motions.

References

- [1] Barge, P., Sommeria, J. *Astronomy & Astrophysics*. **295**, L1 (1995)
- [2] Barranco, J. A., Marcus P.S. *The Astrophysical Journal* **623**, 1157 (2005)
- [3] Chang, P., Oishi, J.S. *The Astrophysical Journal* **721**, 1593 (2010)
- [4] Goodman, J., Narayan, R., Goldreich, P. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **225**, 695 (1987)
- [5] Heng, K., Kenyon, S. J. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **408**, 1476 (2010)
- [6] Inaba, S., Barge, P. *The Astrophysical Journal* **649**, 415 (2006)
- [7] Kida, S. *Journal Phy. Soc. Japan* **50**, 3517 (1981)
- [8] Li, H. et al. *The Astrophysical Journal* **533**, 1023 (2000)
- [9] Lovelace, R. V. E., et al. *The Astrophysical Journal* **513**, 805 (1999)
- [10] Paardekooper et al *The Astrophysical Journal* **725**, 146 (2010)

RÉSUMÉ

Comprendre l'évolution des disques protoplanétaires et, en particulier, les mécanismes de formation des planétésimaux, est au coeur des défis actuels de l'astrophysique moderne. La présence de tourbillons anticycloniques au sein de ces disques est une hypothèse largement débattue et qui semble se confirmer aujourd'hui avec un certain nombre d'observations ALMA. C'est la raison pour laquelle une étude approfondie de la structure et de la dynamique de ces tourbillons est primordiale pour contraindre aussi bien les modèles de disques que les futures observations.

Grâce à la mise en oeuvre d'un schéma de calcul équilibré, nous avons développé un outil de simulation numérique qui répond aux contraintes spécifiques des disques 2D et dont l'optimisation permet d'atteindre des résultats beaucoup plus performants que les codes existants. Cet outil a permis notamment de mener à bien des simulations plus fiables, sur de très grandes durées d'intégration.

En revisitant l'Instabilité en Ondes de Rossby dans le régime non linéaire nous avons découvert l'existence d'une cascade des modes de perturbation qui permet de mieux comprendre la formation des tourbillons par cette instabilité. La structure de ces tourbillons de Rossby a été décrite par un modèle gaussien entièrement nouveau et qui est remarquablement en accord avec les tourbillons issus des simulations numériques. Grâce à un échantillon de près de 300 tourbillons, nous avons borné le domaine des dimensions radiales, azimutales ainsi que de la vortacité des tourbillons. Deux familles de tourbillons possibles ont été distinguées : (i) la famille des tourbillons *incompressibles*, stables et quasi-stationnaires ; (ii) la famille des tourbillons *compressibles*, très mobiles et associés à l'émission d'ondes de densité. Leur persistance sur plus de 1000 rotations confirme l'observabilité de tous ces tourbillons.

Pour finir, nous avons caractérisé la migration des tourbillons *compressibles* vers l'étoile en fonction de leur géométrie, du gradient de pression et de l'échelle de hauteur. Pour la première fois, une expression analytique permet d'estimer le taux de migration en fonction de ces paramètres ; l'échelle de temps pour tomber sur l'étoile peut aller de 10^6 à 100 rotations. Cette migration ne peut s'inverser que pour des gradients de pression extrêmement raides. Suivant un modèle de viscosité α , la perte de moment cinétique pourrait être suffisante pour maintenir un taux d'accrétion significatif dans la zone morte.

Mots clés : Formation planétaire - Disques protoplanétaires - Tourbillons - Instabilités hydrodynamiques - Simulation numérique

SUMMARY

To understand the protoplanetary disk evolution and how do planetesimals form are among the most important challenges of the modern astrophysics. The existence of anticyclonic vortices in these disks is of active interest and is being confirmed by recent ALMA observations. For these reasons, an exhaustive study of the structure and the evolution of vortices is necessary. It will constrain the disk models and the future observations.

We designed a simulation code, based on a balanced numerical scheme, for the specific constraints of 2D disks. Thanks to its optimizations, we produce more efficient results than with other existing codes. In particular, the accuracy is improved on longer time scales of evolution of the simulated disk.

We have revisited the Rossby Wave Instability in the nonlinear regime, and have discovered that a cascade of the perturbation modes can explain the formation of the vortices created by this instability.

We have described the structure of these Rossby vortices with a new gaussian vortex model, which accurately fits the numerical results. A sample of 300 different vortices led us to define the boundaries of the radial and azimuthal extent as well as the vorticity of the vortices. We have distinguished two main families : (i) the *incompressible* family, which is stable and quasi stationary ; (ii) the *compressible* family, moving and exciting density waves. We found them surviving more than 1000 orbits, a clear confirmation of their observability.

Finally, we have characterized the inward migration of the vortices as a fonction of their shape, their vorticity, but also of the pressure gradient and the scale height of the disk. For the first time, we exhibit a equation relating the migration rate to these parameters. The time scale of the migration ranges from 10^6 to just 100 rotations of the disk. Extremely steep pressure gradients are needed to reverse the migration to an outward regime. Following the α viscosity approach, the loss of kinetic momentum due to this migration would be sufficient to sustain the accretion in the dead zone.

Keywords : Planetary formation - Protoplanetary disks - Vortices - Hydrodynamic instabilities - Numerical simulation