

# THESE

PRÉSENTÉE A AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ

PAR

**Julien SOLLE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE  
DOCTEUR D'AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ  
SPÉCIALITÉ : MECANIQUE DU SOLIDE

---

## **Contribution à la caractérisation expérimentale et à la modélisation des champs de pression, de déformations et de contraintes induits par un contact élastique entre composants mécaniques**

---

**Soutenue le 16 octobre 2013 devant le jury composé de :**

|                     |                                       |                       |
|---------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| Alain LODINI        | Université de Reims Champagne-Ardenne | Président du Jury     |
| Chedly BRAHAM       | Arts et Métiers ParisTech             | Rapporteur            |
| Alain DAIDIÉ        | INSA de Toulouse                      | Rapporteur            |
| Emmanuel MERMOZ     | Eurocopter                            | Examineur             |
| Julien CHAVES-JACOB | Aix-Marseille Université              | Examineur             |
| Jean-Michel SPRAUEL | Aix-Marseille Université              | Directeur de thèse    |
| Jean-Marc LINARES   | Aix-Marseille Université              | Co-directeur de thèse |

**Laboratoire ISM / Equipe GIBOC / Entité EA(MS)<sup>2</sup>**  
Aix Marseille Université – IUT d'Aix-en-Provence  
Avenue Gaston Berger, 13625 Aix-en-Provence cedex

# Remerciements

---

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Jean-Michel Sprauel, qui m'a permis de mener à bien ce travail et qui, tout au long de ces années, s'est montré compréhensif et disponible.

Je tiens également à remercier mon co-directeur de thèse, Jean-Marc Linares, pour ses conseils et son encadrement et l'accueil qu'il m'a réservé dans l'équipe.

Je souhaite remercier Emmanuel Mermoz ingénieur à Eurocopter qui m'a accordé sa confiance pour traiter ce sujet qui lui tenait à cœur. Merci aussi à lui d'avoir accepté de faire parti du jury de cette thèse. Dans son service, je remercie aussi Magali Mailhé qui a donné un peu de son temps pour quelques calculs en éléments finis.

J'exprime toute ma gratitude à Alain Lodini de l'Université de Reims Champagne-Ardenne d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.

Je remercie aussi Chedly Braham des Arts et Métiers ParisTech et Alain Daidié de l'INSA de Toulouse d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon mémoire de thèse.

Merci aussi à Julien Chaves-Jacob d'Aix Marseille Université d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je souhaite remercier aussi tous les autres membres du laboratoire ISM de Aix-Marseille Université que j'ai pu croiser à un moment ou un autre : Sébastien Aranda, Stéphane Morière, David Guyonneau, Pierre Depouhon, Laetitia Rossi, Christophe Bovet et surtout Jean Mailhé, ami de longue date.

Ce travail n'aurait pas été possible sans l'aide technique d'Eric Pignan, animateur de la plateforme technologique du pays d'Aix, qui a réalisé le montage. Je remercie aussi pour cela Simon Gaignaire qui a conçu le montage lors de son stage de fin d'étude à l'IUT GMP d'Aix en Provence.

Je souhaite également remercier les enseignants des collèges et lycées que j'ai fréquentés pendant ces trois années tout en élaborant cette thèse. Leurs marques d'enthousiasme à l'égard de ce projet ont toujours été très motivantes.

Je tiens à remercier mes parents, mes frères et sœurs qui ont su me soutenir malgré leurs incompréhensions totales sur ce sujet.

Je remercie l'Ardèche, son calme, sa nature, ses rivières, qui m'a permis de me ressourcer.

Et je tiens à terminer ces remerciements par une grande pensée pour mes enfants, Eliot, Swan et Soren pour leur rappel constant à l'essentiel et pour ma femme, Aurélie, qui a su m'épauler tout au long de ce parcours.

À Eliot, Swan, Soren et surtout à Aurélie...

# Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Remerciements .....</b>   | <b>2</b>  |
| <b>Table des matières .....</b>  | <b>5</b>  |
| <b>Table des figures .....</b>   | <b>8</b>  |
| <b>Introduction .....</b>  | <b>12</b> |
| <b>Chapitre I. État de l'art .....</b>   | <b>14</b> |
| I.1 Introduction.....  | 14        |
| I.2 Méthodes de mesure des champs de pression, de contrainte et de déplacement .....         | 16        |
| I.2.1 Polarimétrie optique et acoustique.....  | 16        |
| I.2.2 Réflexion acoustique .....   | 19        |
| I.2.3 Films pressosensibles .....  | 21        |
| I.2.4 Diffraction des rayons X.....  | 22        |
| I.2.5 Diffraction de neutrons.....   | 23        |
| I.3 Méthode de calcul des champs de pression, de contrainte et de déplacement .....          | 24        |
| I.3.1 Contact de Hertz .....   | 24        |
| I.3.2 Méthode des éléments finis en élasticité linéaire .....                                | 25        |
| I.3.3 Méthode des éléments frontières.....   | 28        |
| I.3.4 Théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti.....                                   | 33        |
| I.4 Conclusion.....  | 39        |
| <b>Chapitre II. Simulation des champs de pression, de contrainte et de déplacement. ....</b> | <b>40</b> |
| II.1 Objectifs de la simulation de contact localisé.....                                     | 40        |
| II.2 Théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti.....                                    | 41        |
| II.2.1 Cadre théorique général .....   | 42        |
| II.3 Passage dans l'espace de Fourier .....  | 44        |
| II.3.1 Expressions fréquentielles des potentiels et grandeurs élastiques .....               | 44        |

|  |   |           |
|--|---|-----------|
| II.3.2   | Mises en œuvre et difficultés .....   | 49        |
| II.3.3   | Bouclage par contour actif .....  | 53        |
| II.4   | Etudes de cas .....   | 62        |
| II.4.1   | Cas de Hertz.....   | 62        |
| II.4.2   | Cas de géométries complexes .....   | 67        |
| II.5   | Perspectives.....   | 76        |
| II.5.1   | Géométrie à pression souhaitée.....   | 76        |
| II.5.2   | Passage dans l'espace de Fourier dans le cas général .....                        | 81        |
| II.5.3   | Calcul amélioré du champ de pression final.....                                   | 83        |
| II.6   | Conclusion.....   | 85        |
| <b>Chapitre III. Mesures de champs de déplacements .....</b> |   | <b>87</b> |
| III.1  | Mesure du déplacement vertical par transparence .....                             | 87        |
| III.1.1  | Schéma de principe du montage expérimental.....                                   | 87        |
| III.1.2  | Réalisation technique du montage .....  | 88        |
| III.2  | Imagerie confocale chromatique .....  | 89        |
| III.2.1  | Principe de l'imagerie confocale chromatique .....                                | 89        |
| III.2.2  | Station de Micromesure STIL .....   | 90        |
| III.3  | Mesure par transparence.....  | 92        |
| III.3.1  | Mesure de déplacement .....   | 92        |
| III.3.2  | Flexion de l'échantillon .....  | 92        |
| III.3.3  | Influence de l'indice de réfraction sur l'altitude mesurée par transparence. .... | 93        |
| III.3.4  | Traitement de surface.....  | 95        |
| III.4  | Traitement des données .....  | 95        |
| III.4.1  | Correction des pics.....  | 96        |
| III.4.2  | Défaut d'orientation .....  | 98        |
| III.4.3  | Filtrage spatial .....  | 99        |
| III.5  | Résultats et comparaison au modèle théorique .....                                | 102       |
| III.5.1  | Déformation mesurée et attendue .....   | 102       |
| III.5.2  | Pression mesurée et attendue .....  | 103       |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| III.5.3   | Causes probables d'erreur .....  | 103        |
| III.5.4   | Validation de la Méthode .....   | 103        |
| III.6   | Perspectives.....  | 106        |
| <b>Conclusion</b>   | <b>.....</b>   | <b>107</b> |
| <b>Références bibliographiques</b>  | <b>.....</b>   | <b>109</b> |
| <b>Annexe A. Expression des grandeurs élastiques dans l'espace de Fourier</b> | <b>.....</b>   | <b>112</b> |
| <b>Annexe B. Articles publiés et en cours de publication</b>                  | <b>.....</b>   | <b>113</b> |
| B.1.  | CIRP Annals Manufacturing Technology : Optical measurement for the estimation of contact pressure and stress ..... | 113        |
| B.2.  | Pressure, stress and strain field computing for localized contact using Fast Fourier Transform (FFT) .....         | 124        |

# Table des figures

---

|  |    |
|--|----|
| Fig. I-1 : Diagramme des pistes de recherches existantes .....   | 15 |
| Fig. I-2 : Principe de la photoélasticité.....   | 16 |
| Fig. I-3 : Frange d'interférence lors d'une expérience de photoélasticité .....  | 17 |
| Fig. I-4 : Principe du découpage optique.....  | 17 |
| Fig. I-5 : Montage expérimental de tomographie photoélastique .....  | 18 |
| Fig. I-6 : Principe de l'approche du chargement incrémental .....  | 18 |
| Fig. I-7 : Expérience de Karabutov et al. utilisant un transducteur opto-acoustique. ....  | 19 |
| Fig. I-8 Montage expérimental pour la mesure de la réflexion d'ultrasons.....  | 20 |
| Fig. I-9 : Principe de la réflexion des ultrasons au contact entre deux pièces .....   | 20 |
| Fig. I-10 : Contact et champ de pression convolué par le transducteur piézoélectrique .....  | 20 |
| Fig. I-11 : Principe du film pressosensible Fujii : (A) film faible pression double feuille, (B) film haute pression simple feuille.....   | 21 |
| Fig. I-12 : (à gauche) Principe de mesure par ultrasons de Pau et al. (à droite) Comparaison de la surface de contact mesurer à l'aide d'un film Prescale (haut) et par ultrasons (bas)..... | 21 |
| Fig. I-13 : Champs de pression simulés par éléments finis avec et sans film pressosensible.....  | 22 |
| Fig. I-14 : interférence des diffusions de Rayleigh entre les atomes d'un cristal. ....  | 22 |
| Fig. I-15 : Schéma du principe de mesure par diffraction de neutrons. ....   | 23 |
| Fig. I-16 : Notation adoptée pour le problème de Hertz. ....   | 24 |
| Fig. I-17 : Répartition de la pression selon Hertz au contact de la pièce ( <b>S1</b> ).....   | 25 |
| Fig. I-18 : Situation considérée dans la théorie des potentiels de Boussinesq.....   | 34 |
| Fig. I-19 : Champ de pression uniforme sur un polygone. ....   | 36 |
| Fig. II-1 : Passage d'une situation quelconque à une situation « Indenteur rigide sur plan ». ....   | 41 |
| Fig. II-2 : Notations prises pour le cadre théorique de l'étude.....   | 42 |
| Fig. II-3 : Calcul de <b>p</b> à l'aide du champ de déplacement vertical de la surface. ....   | 49 |
| Fig. II-4 : Déplacement vertical <b>uz(x, y, 0)</b> initial.....   | 50 |
| Fig. II-5 : Courbe de pression le long de l'axe <b>Ox</b> .....  | 53 |
| Fig. II-6 : Algorithme DECR – déconvolution, écrêtage, convolution, recollage.....   | 54 |
| Fig. II-7 : Schéma de principe du recollage de <b>uzk *</b> et <b>uzl</b> . ....   | 55 |
| Fig. II-8 : Quelques choix des points <b>C</b> possibles. ....   | 55 |



|  |    |
|--|----|
| Fig. II-9 : Organigramme de l'algorithme de contour actif.....   | 57 |
| Fig. II-10 : Convergence d'une courbe par la méthode du contour actif. ....  | 60 |
| Fig. II-11 : Évolution du champ de déplacement de la surface de contact au cours de l'algorithme.  | 61 |
| Fig. II-12 : Évolution du champ de pression au cours de l'algorithme.....  | 62 |
| Fig. II-13 : Comparaison entre le champ de pression de Hertz et celui trouvé par DECR.....   | 63 |
| Fig. II-14 : Comparaison entre le champ de déplacement trouvé par la théorie de Hertz et celui trouvé par DECR. ....   | 64 |
| Fig. II-15 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini. ....   | 64 |
| Fig. II-16 : Évolution du rayon du contact et de la pression maximale en fonction de l'enfoncement appliqué à la théorie de Hertz et à l'algorithme DECR. .... | 65 |
| Fig. II-17 : champ de déplacement imposé par un ellipsoïde d'après la théorie de Hertz. ....   | 65 |
| Fig. II-18 : Champ de déplacement calculé par DECR et la différence avec la théorie de Hertz en échelle de couleurs.....                                       | 66 |
| Fig. II-19 : Comparaison des demi grands-axes et de la pression maximale en fonction de l'enfoncement pour la théorie de Hertz et pour l'algorithme DECR.....  | 66 |
| Fig. II-20 : Géométrie du poinçon à correction tangente .....  | 67 |
| Fig. II-21 : Champ de pression obtenu pour un poinçon à correction tangente. ....  | 68 |
| Fig. II-22 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini.....  | 68 |
| Fig. II-23 : Comparaison des calculs pour l'évolution suivant $Oz$ de la contrainte de von Mises .....   | 69 |
| Fig. II-24 : Déformée de la surface au niveau du contact. ....   | 69 |
| Fig. II-25 : Evolution du rayon de contact en fonction de l'enfoncement. ....  | 70 |
| Fig. II-26 : Géométrie du poinçon à correction non tangente.....   | 70 |
| Fig. II-27 : Champ de pression obtenu pour un poinçon à correction tangente. ....  | 71 |
| Fig. II-28 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini. ....   | 71 |
| Fig. II-29 : Comparaison des calculs pour l'évolution suivant $Oz$ de la contrainte de von Mises.....  | 72 |
| Fig. II-30 : Déformée de la surface au niveau du contact. ....   | 73 |
| Fig. II-31 : Evolution du rayon de contact en fonction de l'enfoncement.....   | 73 |
| Fig. II-32 : Géométrie du rouleau à correction tangente. ....  | 73 |
| Fig. II-33 : Champ de pression obtenu pour un rouleau à correction tangente suivant l'axe $Ox$ . ....  | 74 |
| Fig. II-34 : Vue 3D du champ de pression imposé par un rouleau de roulement à correction tangente. ....  | 75 |
| Fig. II-35 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini. ....   | 75 |
| Fig. II-36 : Déformée de la surface suivant le plan de symétrie au niveau du contact.....  | 76 |
| Fig. II-37 : Champ de pression souhaité pour le poinçon "idéal". ....  | 77 |
| Fig. II-38 : Déformée d'un poinçon "idéal".....  | 77 |

|   |     |
|---|-----|
| Fig. II-39 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi infini. ....                      | 78  |
| Fig. II-40 : champ de pression qu'imposerait un rouleau "idéal".....                                | 79  |
| Fig. II-41 : Géométrie du rouleau "idéal" en contact avec le massif semi-infini.....                | 79  |
| Fig. II-42 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini. ....                      | 80  |
| Fig. II-43 : Profil de la déformée du rouleau "idéal" suivant l'axe $Ox$ .....                      | 80  |
| Fig. II-44 : Profil de la déformée du rouleau "idéal" suivant l'axe $Oy$ . ....                     | 81  |
| Fig. II-45 : Altitudes des centre de courbure des profils suivant $Oy$ (en mm). ....                | 81  |
| Fig. II-46 : approximation linéarisée du champ de pression. ....                                    | 83  |
| Fig. II-47 : Transformation des pressions élémentaires en potentiels élémentaires. ....             | 84  |
| Fig. III-1 : Schéma de principe du montage expérimental. ....                                       | 88  |
| Fig. III-2 : Coupe du dispositif expérimental.....  | 88  |
| Fig. III-3 : Photo du dispositif expérimental hors mesure. ....                                     | 88  |
| Fig. III-4 : Photo du dispositif expérimental pendant la mesure.....                                | 89  |
| Fig. III-5 : aberration chromatique d'une lentille convergente. ....                                | 89  |
| Fig. III-6 : Principe de l'imagerie confocale chromatique. ....                                     | 90  |
| Fig. III-7 : Station de micromesure STIL. ....  | 90  |
| Fig. III-8 : Définitions des principales caractéristiques techniques des sondes optiques.....       | 91  |
| Fig. III-9 : Caractéristiques techniques des différentes sondes optiques disponibles.....           | 91  |
| Fig. III-10 : Cumul de la déformation et de la flexion. ....  | 93  |
| Fig. III-11 : biais sur l'altitude mesurée par transparence.....                                    | 94  |
| Fig. III-12 : Mesure de l'escalier pour la calibration de la mesure par transparence. ....          | 94  |
| Fig. III-13 : Mesures de l'altitude des marches directement et par transparence ....                | 94  |
| Fig. III-14 : Mesures brutes de la face inférieure sous charge. ....                                | 96  |
| Fig. III-15 : Seuillage avec le logiciel Mountains Map. ....  | 97  |
| Fig. III-16 : Effet du seuillage sur la surface brute. ....   | 97  |
| Fig. III-17 : Ordre des mesures des points de chaque surface. ....                                  | 98  |
| Fig. III-18 : Redressement du plan moyen de la surface de déformation. ....                         | 99  |
| Fig. III-19 : Surface de déformation redressée. ....  | 99  |
| Fig. III-20 : Effet de quelques valeurs de la taille du filtre sur un profil de la surface. ....    | 100 |
| Fig. III-21 : Filtrage de la surface par un filtre gaussien. ....                                   | 100 |
| Fig. III-22 : Cartographie de la surface en contact avec l'indenteur, après filtrage.....           | 101 |
| Fig. III-23 : Cartographie de la surface en contact avec l'indenteur, après filtrage.....           | 101 |
| Fig. III-24 : Cartographie de la surface libre, après filtrage. ....                                | 102 |
| Fig. III-25 : Comparaison de l'enfoncement de la surface de contact et de la forme de la bille..... | 102 |
| Fig. III-26 : Champ de pression obtenu par déconvolution du champ de déplacement mesuré. ...        | 103 |

|   |     |
|---|-----|
| Fig. III-27 : Principe de l'algorithme fittant sur la déformé hors-contact..... | 104 |
| Fig. III-28 : Optimisation du modèle de Hertz sur les mesures.....              | 104 |
| Fig. III-29 : Champs de pression de Hertz et calculé par déconvolution.....     | 105 |
| Fig. III-30 : Champs de pression et de déplacement après optimisation.....      | 105 |

# Introduction

---

Toute conception d'un système mécanique passe inévitablement par le dimensionnement de chacune des pièces et le choix du matériau dans l'objectif d'assurer au système une durée de vie conforme au cahier des charges élaboré pour le projet tout cela en minimisant le coût global du produit. Ceci implique l'utilisation de modèles prenant en compte les différents modes de fonctionnement du système. Ainsi, il est possible de prévoir la façon dont seront sollicités tous les éléments d'un système et éviter des usures prématurées pouvant mener à la casse, celle-ci pouvant avoir d'énormes répercussions en terme de coût matériel, voire humain.

De nombreux systèmes mécaniques comportent des pièces roulant les unes sur les autres : roulements à billes, roulements à rouleaux, prothèses du genou, etc. Ces situations ont la particularité de fonctionner par un contact localisé entre pièces mécaniques. Il est alors absolument nécessaire de pouvoir prévoir les sollicitations sous charge que ces pièces vont endurer afin de les concevoir de façon à ce qu'elles assurent le bon fonctionnement du système de façon durable. Un des critères permettant de choisir les dimensions et les matériaux de ces pièces est la pression de contact qu'exerce l'une sur l'autre ces pièces sur la très faible surface qui les lie. Il est donc absolument nécessaire de pouvoir prévoir ce champ, dans des conditions d'utilisation donnée.

Les modèles physiques de contact localisé entre deux pièces mécaniques existent mais le plus souvent aucune mesure de champ de pression au contact n'a été réalisée afin de les valider. Le plus souvent ce sont des grandeurs indirectement liées à ce champ qui sont évaluées. Une des difficultés principales de la mesure d'un champ de pression au contact entre deux pièces mécaniques est de ne pas perturber la situation de contact à évaluer. C'est à cette problématique que ces travaux de recherche ont voulu répondre, à savoir : comment améliorer la mesure et la simulation d'un champ de pression entre deux pièces mécaniques en contact localisé ?

Répondre à cette problématique a évidemment nécessité de faire le point sur les différentes méthodes de mesure de champ de pression pour un contact localisé. Force est de constater que la diversité des moyens mis en œuvre pour cela touche à des domaines de la physique très nombreux : diffraction de rayon X ou de neutrons, polarimétrie optique ou acoustique... Tous ont un point commun cependant : ils exploitent la déformation induite par ce champ de pression à

l'intérieur d'une des pièces en contact. La méthode qui a été élaborée lors de ces travaux de recherche exploite aussi la déformation induite par ce champ de pression mais uniquement à la surface d'une des pièces en contact. En effet, l'approche des problèmes de contact par la théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti a révélé que l'unique information de déformation de la surface permet l'évaluation du champ de pression. En utilisant la microscopie par imagerie confocale chromatique, une méthode supplémentaire a été ajoutée aux différentes techniques permettant d'évaluer un champ de pression entre deux pièces en contact localisé.

La théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti a aussi permis l'élaboration d'une méthode de simulation de problèmes de contact dans des cas de géométries quelconques. Le caractère élastique du problème traité a été mis à profit pour utiliser les fonctions de Green associées au problème et les méthodes de déconvolution par des transformées de Fourier assurant ainsi une résolution rapide aux différentes situations suggérées.

# Chapitre I. État de l'art

---

## I.1 Introduction

Afin de répondre à notre problématique centrée sur la détermination et la caractérisation des champs de déplacement, de pression et de contrainte d'un contact mécanique, les recherches nous ont conduits à nous intéresser à un grand nombre de méthodes aussi bien du côté de la mesure que de la simulation. La Fig. I-1 propose sous la forme d'un diagramme d'ICHIKAWA, les méthodes expérimentales et de simulation permettant de déterminer et de caractériser l'état mécanique au niveau du contact.

D'un point de vue expérimental, lorsqu'un contact a lieu entre des pièces mécaniques, des déformations et des contraintes apparaissent au sein des solides. Ces changements de l'état mécanique de la matière modifient le comportement de tout type d'onde qui pourrait parcourir les deux solides. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au caractère biréfringent que pouvaient induire des contraintes dans une pièce sous charge. Ce phénomène se traduit alors par des modifications de polarisation sur la lumière et les ondes acoustiques. Une autre méthode explorée est d'envoyer des ultrasons directement vers le lieu de contact entre pièces. La réflexion au contact est dépendante de la répartition du champ de pression. Du côté des solutions commerciales, il existe aussi des films pressosensibles. Ces films qui s'intercalent entre deux pièces en contact se colorent plus ou moins en fonction de la pression. Le phénomène de diffraction est aussi en mesure de fournir des informations sur les modifications géométriques et mécaniques des matériaux. La diffraction de rayon X en se fondant sur le phénomène de diffusion de Rayleigh permet d'évaluer des déformations. Le même principe de mesure existe en diffractant des neutrons.

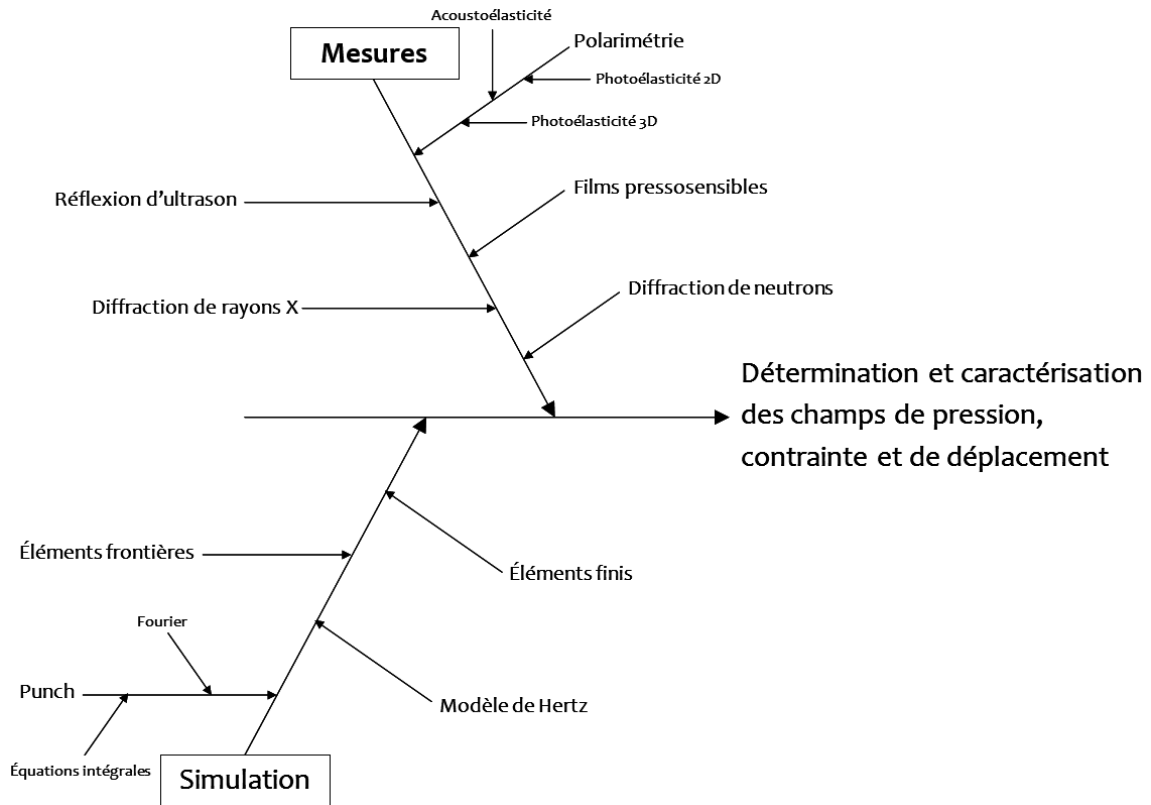


Fig. I-1 : Diagramme des pistes de recherches existantes

Du point de vue de la simulation, la mécanique des milieux continus (MMC) a ouvert la voie à de nombreuses méthodes de calcul des champs de pression, de contrainte et de déplacement.

Le modèle de Hertz est très efficace, car purement analytique, lorsque qu'il s'agit d'évaluer les différents champs en MMC pour des géométries simples (sphère, cylindre, plan) dans le cas de contacts localisés. Pour des géométries plus complexes, le modèle est inapplicable. La Méthode des Éléments Finis permet, elle, pour des géométries complexes qui sont maillées, d'obtenir de très bons résultats. Cependant, la gestion des contacts pour cette théorie et le maillage du volume nécessitent une résolution numérique qui est très gourmande en temps de calcul. Une autre possibilité, beaucoup moins implantée en milieu industriel, est la méthode des éléments frontières. Considérant uniquement les efforts et les déplacements imposés à la frontière d'une pièce, cette méthode ne peut s'appliquer qu'à des solides homogènes. Ici, le maillage de surface et la résolution associée sont moins couteux en temps de calcul. Enfin, la théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti qui permet d'envisager un contact complexe avec un plan semi-infini, est à l'origine des applications de « punch ». A partir du champ de pression réparti sur la surface, elle permet de calculer analytiquement les champs de contrainte et de déplacement.

Dans le prochain paragraphe, les méthodes de mesures seront présentées.

## I.2 Méthodes de mesure des champs de pression, de contrainte et de déplacement

Les techniques de mesures mises en œuvre afin de mesurer les champs de déformation élastique, dans un milieu soumis à des contraintes, reposent sur l'utilisation d'ondes de toutes sortes. Elles sont fondées sur la propagation d'un type d'onde donné dans un matériau subissant un chargement mécanique. Ce sont les changements internes imposés par les contraintes qui vont modifier le comportement de la propagation des ondes. Ce changement va permettre d'en déduire des informations sur les champs élastiques.

### I.2.1 Polarimétrie optique et acoustique

En polarimétrie optique ou acoustique, c'est l'anisotropie induite par les contraintes qui va être à l'origine des changements de la vitesse de propagation des ondes selon un plan de polarisation.

#### I.2.1.a Photoélasticité

La photoélasticité est la technique expérimentale d'évaluation de contraintes qui utilise la polarimétrie optique. Très utile lorsque la géométrie et/ou les conditions du chargement sont complexes, elle utilise la biréfringence optique induite d'un matériau soumis à un champ de contraintes (Fig. I-2). En envoyant une lumière polarisée sur une plaque d'épaisseur  $t$  soumise à un champ de contrainte, les polarisations d'une lumière subissent une différence de phase  $\bar{\varphi}$  proportionnelle à l'écart entre les deux contraintes principales associées aux plans principaux de contraintes ( $f$  un coefficient qui dépend du matériau et de la longueur d'onde utilisée) :

$$\bar{\varphi} = \frac{t}{2\pi f} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (I-1)$$

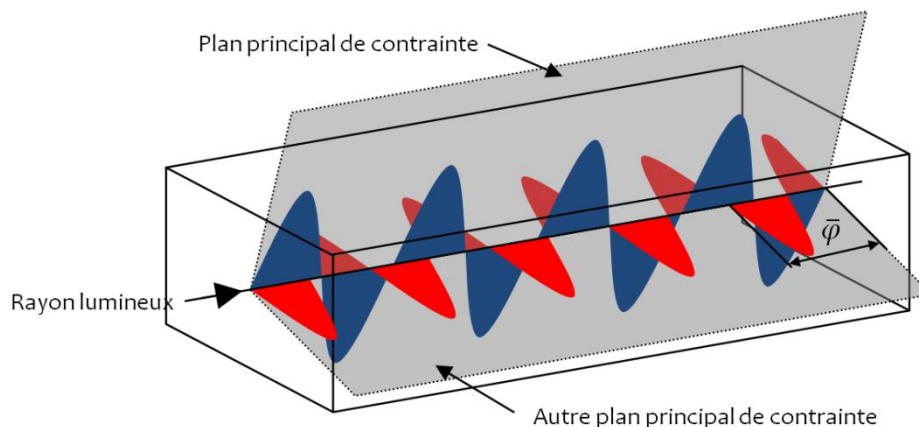


Fig. I-2 : Principe de la photoélasticité

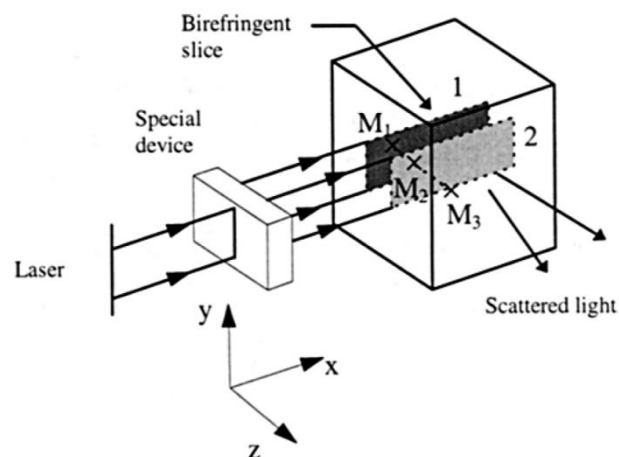




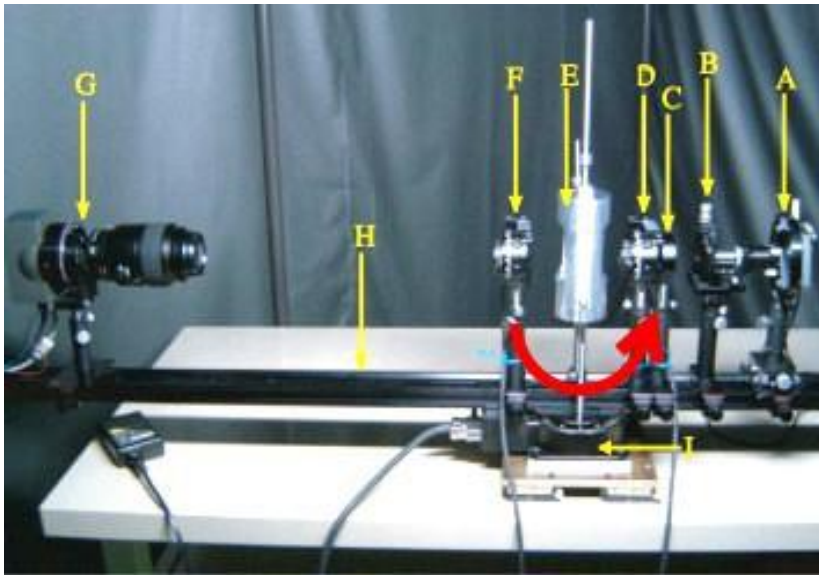
**Fig. I-3 : Frange d'interférence lors d'une expérience de photoélasticité**

En faisant interférer les deux polarisations, nous observons alors des franges d'interférence (Fig. I-3). L'analyse de ces franges d'interférence permet alors, dans le cas simple d'un objet contraint et plat, d'évaluer les contraintes principales et leurs directions. L'application de cette méthode à la mesure du champ de la contrainte dans une pièce volumique est rendue plus complexe par le caractère tridimensionnel de l'expérience. Récemment, de nombreuses équipes de recherche travaillent dans cette voie.

Dupré et al. [DUP97] ont introduit une méthode qu'ils nomment « découpage optique » (Fig. I-4) en délimitant une tranche d'une pièce par deux faisceaux lasers cohérents et en utilisant les propriétés de diffusion de la lumière (loi de Rayleigh) et leurs interférences possibles. Les propriétés du speckle et la corrélation des deux faisceaux permettent artificiellement de traiter le problème de photoélasticité pour la tranche de la même manière que la technique du gel de contrainte (« stress freezing ») [CER80]. Cette méthode, plus ancienne, consiste à charger une pièce au-delà de la température de transition vitreuse et à laisser décroître la température jusqu'à la température ambiante. En effet, dans ces conditions, les contraintes et la biréfringence de la pièce sont alors conservées. Un découpage de la pièce, en tranches, permet alors de mesurer par photoélasticité 2D les contraintes dans la pièce.



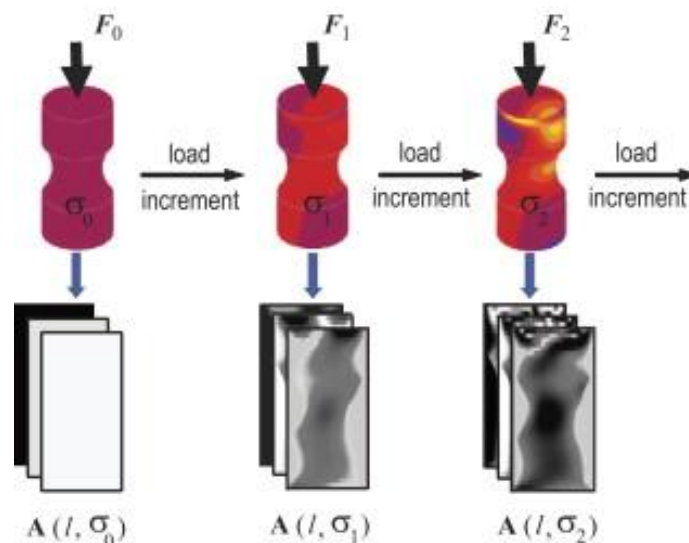
**Fig. I-4 : Principe du découpage optique**



- (A) Diode laser
- (B) Filtre spatial
- (C) lentille achromatique
- (D) polariseur
- (E) mise en charge
- (F) analyseur
- (G) camera CCD 16-bits
- (H) rail optique
- (I) platine de rotation.

**Fig. I-5 : Montage expérimental de tomographie photoélastique**

Une autre méthode introduite par Wijerathne et al. [WIJ02] consiste à appliquer le principe de la tomographie (Fig. I-5) et résoudre le problème de l'inversion non-linéaire d'un problème de photoélasticité en trois dimensions. Cette approche dite « du chargement incrémental » consiste à charger le système sous des efforts croissants (Fig. I-6) et à linéariser les équations pour les résoudre. Cette méthode est très sensible aux erreurs de mesures optiques. Wijerathne et al. [WIJ08] ont amélioré leur méthode de résolution en supposant la réponse optique comme une combinaison linéaire de fonctions indépendantes et en optimisant les paramètres de ces fonctions avec l'approche du chargement incrémental. Cette approche leur procure une robustesse accrue et des résultats, en accord, avec d'autres approches, numériques et expérimentales.



**Fig. I-6 : Principe de l'approche du chargement incrémental**

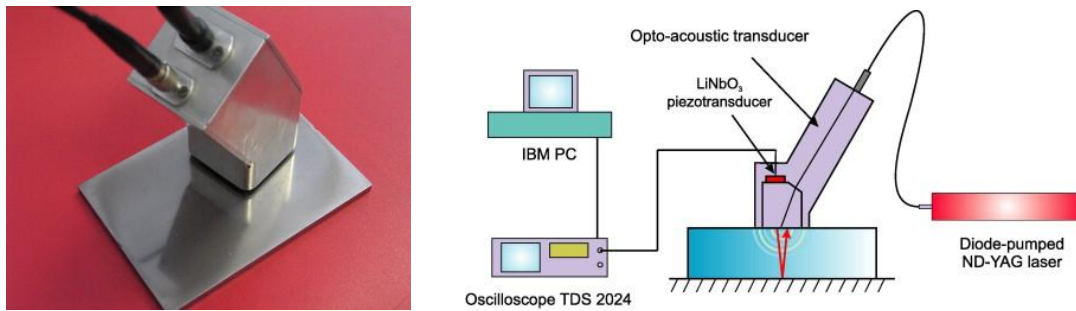


Fig. I-7 : Expérience de Karabutov et al. utilisant un transducteur opto-acoustique.

### I.2.1.b Acoustoélasticité

Le phénomène d'acoustoélasticité est similaire à celui de la photoélasticité (I.2.1.a). Dans un fluide, la propagation d'une onde acoustique se fait uniquement par propagation d'une perturbation de la contrainte de compression, les contraintes de cisaillement étant nulles. L'onde se propage alors de façon longitudinale, aucun phénomène de polarisation ne peut alors se produire. Mais dans un solide, la propagation d'ondes acoustiques transversales est possible via la perturbation de la contrainte de cisaillement. Elle est différente selon que l'onde se propage le long d'un plan principal de la contrainte ou d'un autre plan. Il en résulte un changement de polarisation de l'onde mesurable. Ce dernier est corrélé avec le niveau de la contrainte dans le milieu étudié [PAO84].

Dans les années 70 et 80 de nombreuses expérimentations ont utilisé ce procédé [HSU74]. Cependant, cette technique a peu été utilisée depuis, car les différences de vitesses suivant les axes sont très faibles. Cette propriété ne permet pas d'atteindre la précision requise. Nous signalerons, cependant, les travaux de Dorfi et al. [DOR96] sur la reconstruction des contraintes résiduelles par cette technique. Karabutov et al. [KAR08] préconisent l'utilisation de transducteur optoacoustique pour la production, contrôlée, d'ultrasons.

## I.2.2 Réflexion acoustique

Pau et Al. [PAU06] ont mis en œuvre une méthode intéressante exploitant les variations de la réflexion des ultrasons à l'interface entre deux pièces mécaniques (Fig. I-8). En effet, la mesure du taux de réflexion des ultrasons va diminuer avec la pression car celle-ci fait baisser le taux de microaspérités responsables de la réflexion des ondes au contact (Fig. I-9).

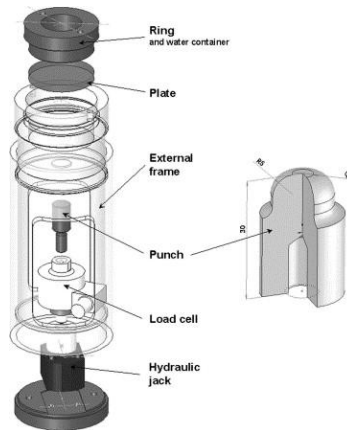


Fig. I-8 Montage expérimental pour la mesure de la réflexion d'ultrasons

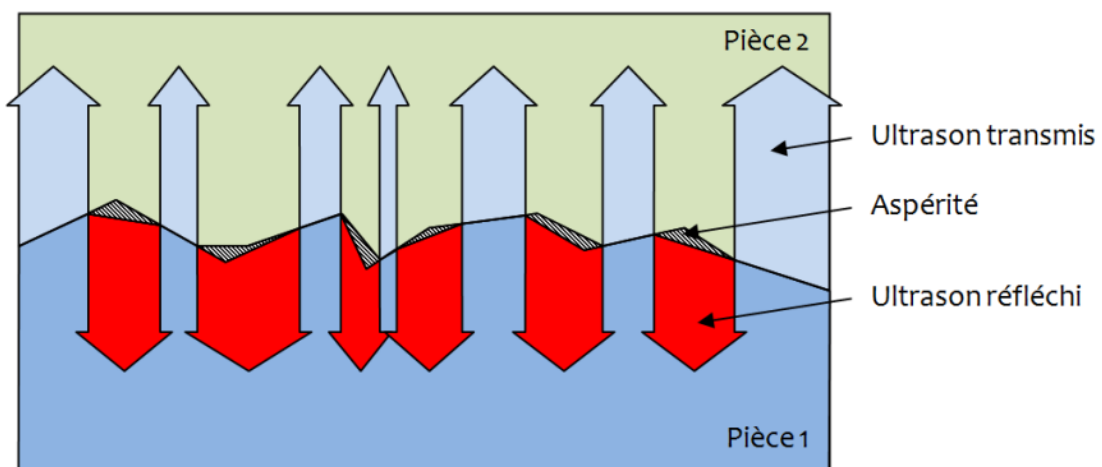


Fig. I-9 : Principe de la réflexion des ultrasons au contact entre deux pièces

Seulement, avec cette méthode, la dimension de la tache du faisceau acoustique est bien plus grande que les dimensions caractéristiques des variations du champ de pression lors d'un contact entre pièces mécaniques. Ainsi cette méthode mesure la convolution entre le champ de pression réel et la réponse du transducteur piézoélectrique. Connaissant cette réponse, la méthode permet néanmoins de comparer les résultats avec des simulations existantes (Fig. I-10).

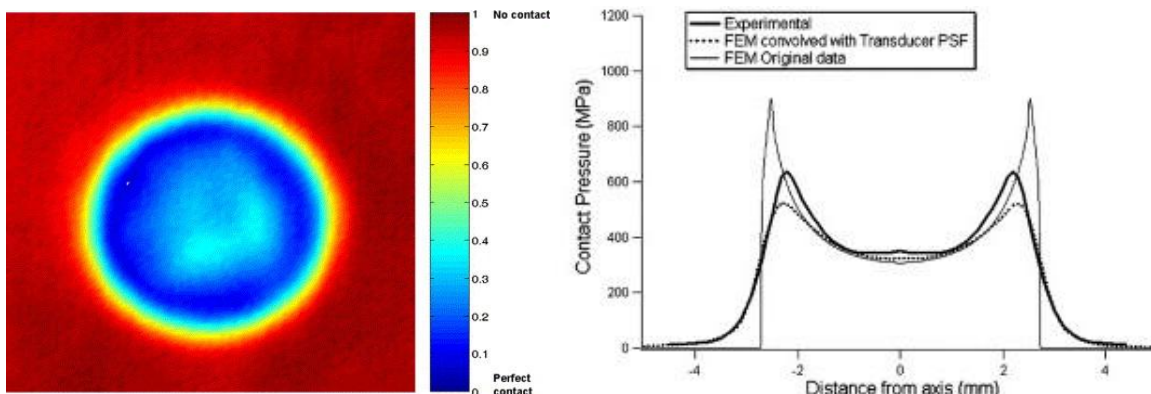
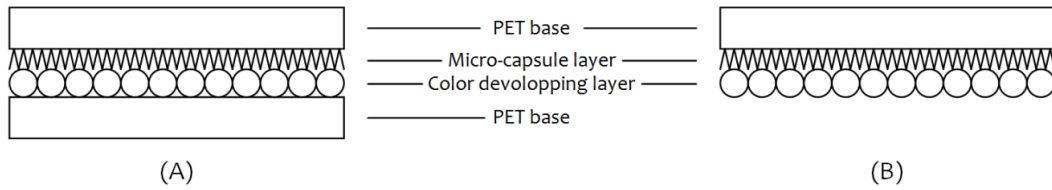


Fig. I-10 : Contact et champ de pression convolué par le transducteur piézoélectrique

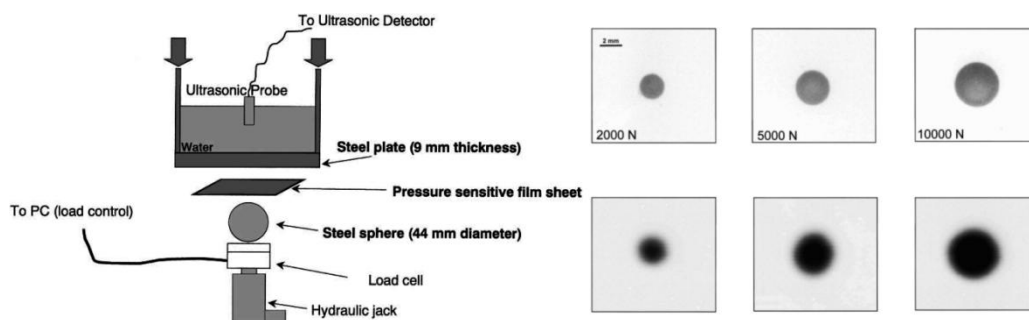


**Fig. I-11 : Principe du film pressosensible Fuji : (A) film faible pression double feuille, (B) film haute pression simple feuille.**

### I.2.3 Films pressosensibles

Les films pressosensibles, communément utilisés en biomécanique pour mesurer les pressions de contact intra ou extra articulaire, sont un moyen d'évaluation du champ de pression à l'interface entre deux pièces mécaniques. Ils sont constitués d'une couche de révélateur coincée entre une pellicule de microcapsules contenant une encre de couleur et une bande de polyéthylène téréphtalate (PET) (Fig. I-11). La pression appliquée en un point rompt plus ou moins de capsules. La densité de couleur indique un niveau de pression plus ou moins élevé. FujiFlim commercialise ce type de film nommé Prescale®. Ils disposent de gammes de pressions variées allant de 0.2 MPa à 300 MPa.

Pau et al. [PAU01] utilisent ces films pour mesurer l'évolution de l'étendue des surfaces de contact entre un plan et une bille et ainsi confronter les résultats à leur méthode de mesure acoustique (Fig. I-12 et I.2.2). Atkinson et al. [ATK98] ont même montré que l'utilisation combinée de plusieurs types de films pressosensibles pouvait, sous certaines conditions, augmenter la sensibilité de la mesure. Cependant, l'ajout d'un matériau supplémentaire lors d'un contact entre deux surfaces modifie la répartition de pression à la surface de contact. Liau et al. [LIA01] ont travaillé sur cette influence lors de la mesure de contacts tibiofémoraux. De plus, une simulation par la méthode des éléments finis avec le logiciel CATIA montre que, dans le cas d'un rouleau à correction non-tangente, les différences de pression sont conséquentes.



**Fig. I-12 : (à gauche) Principe de mesure par ultrasons de Pau et al. (à droite) Comparaison de la surface de contact mesurer à l'aide d'un film Prescale (haut) et par ultrasons (bas).**

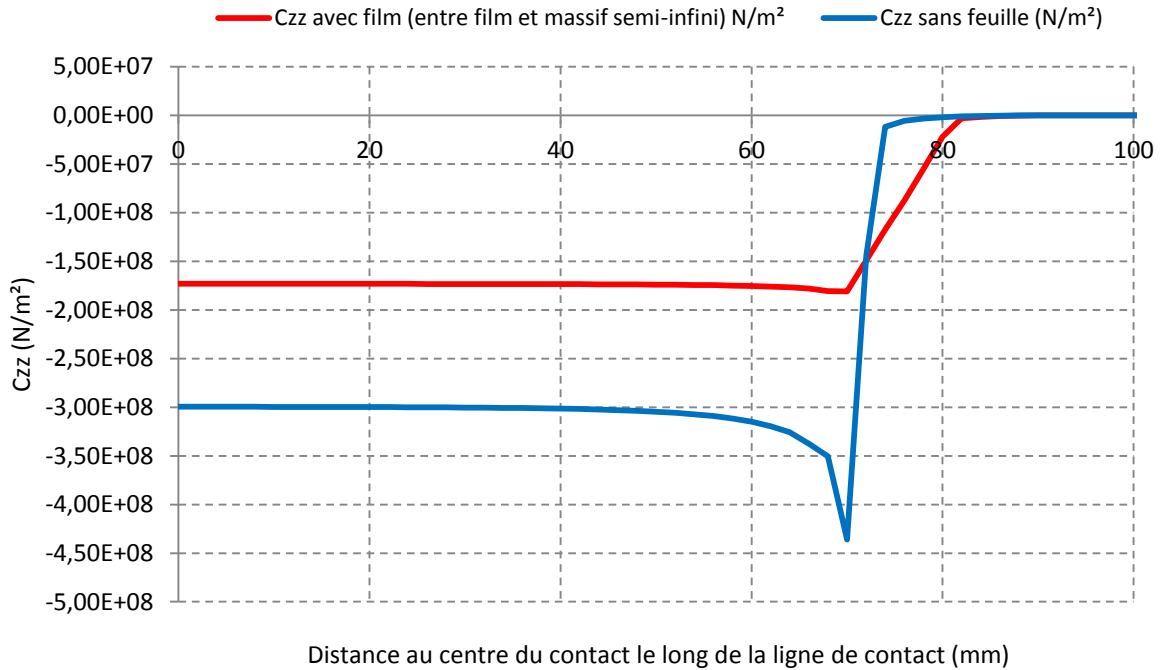


Fig. I-13 : Champs de pression simulés par éléments finis avec et sans film pressosensible.

## I.2.4 Diffraction des rayons X

L'utilisation de rayonnement X et la diffraction de ce type de rayonnement par un réseau cristallin permet aussi, de manière indirecte, d'évaluer les champs de contrainte à l'intérieur d'un système [MAE81]. Lorsqu'un rayonnement X rencontre un réseau cristallin, chaque atome du réseau va réémettre un rayonnement de même fréquence dans toutes les directions.

Ce phénomène, dit de diffusion Rayleigh, va permettre des interférences entre tous les rayonnements émis par les atomes suivant la loi de Bragg (Fig. I-14) [BRA12]. Les plans réticulaires distants de  $d$  vont alors interférer constructivement si l'angle  $\theta$  entre le rayonnement et la normale aux plans vérifie la condition :

$$n\lambda = 2d \sin(\theta) \tag{I-2}$$

$n$  étant l'ordre de la raie d'interférence et  $\lambda$  la longueur d'onde du rayonnement.

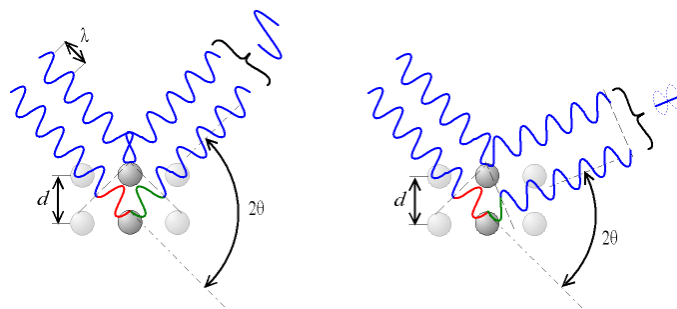


Fig. I-14 : interférence des diffusions de Rayleigh entre les atomes d'un cristal.

Les différentes raies de diffraction permettent alors de mesurer les premières distances interréticulaires et ainsi de trouver les paramètres de mailles compatibles avec les indices de Miller du réseau cristallin considéré. Ces paramètres de mailles permettent d'évaluer la déformation de la maille et ainsi d'obtenir la contrainte dans le système via le tenseur de Hooke.

### I.2.5 Diffraction de neutrons

D'après le principe de De Broglie et la dualité onde-corpuscule, le même phénomène peut être observé pour un faisceau de neutron rencontrant un cristal (Fig. I-15). En effet, on peut faire correspondre à un neutron animé d'une quantité de mouvement  $p$  une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (I-3)$$

Utilisé le plus souvent pour des évaluations de contraintes résiduelles, cette technique n'est pas efficacement applicable à la détermination de contraintes induites par un contact localisé. En effet, la taille du faisceau serait bien trop grande comparée à la dimension caractéristique de la surface d'influence d'un tel contact. Comme l'ont montré [WEB96] et [WAN96], lorsque le volume sonde du faisceau n'est pas complètement immergé dans la matière, des déplacements parasites importants sont observés dans les pics de diffractions. Ils provoquent des dispersions importantes des résultats. La maîtrise de cette zone est capitale pour les industriels car elle contient les zones d'amorçage de fissures de fatigue. Cependant, il existe des possibilités de correction de ces erreurs systématiques qui sont imputables à des aberrations instrumentales, en utilisant la simulation de Monte Carlo [SPR08].

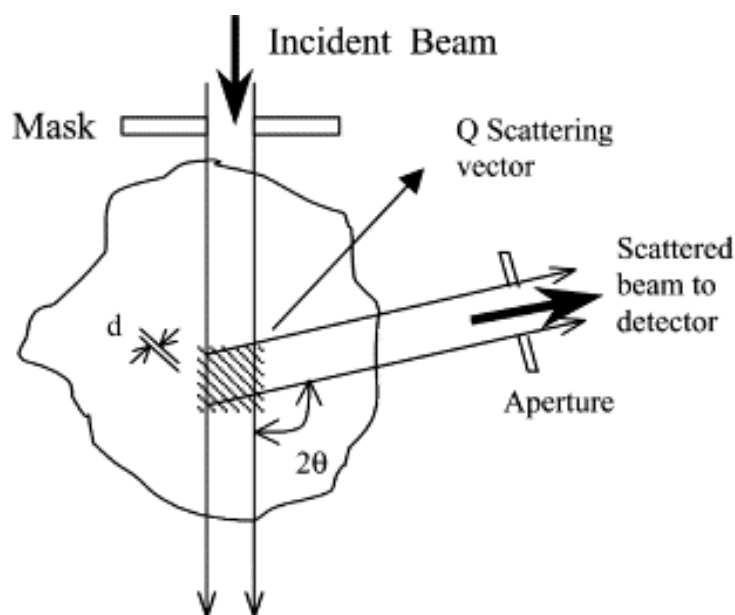


Fig. I-15 : Schéma du principe de mesure par diffraction de neutrons.

## I.3 Méthode de calcul des champs de pression, de contrainte et de déplacement

La prévision des champs de pression, de contrainte et de déplacement, pour une situation donnée, est un problème largement abordé dans la bibliographie. De nombreuses approches sont possibles.

### I.3.1 Contact de Hertz

La première théorie concernant la pression au niveau du contact entre deux solides élastiques est donnée par Hertz (1882). C'est en étudiant l'influence de la déformation des lentilles pour l'observation d'anneau de Newton lors d'un contact lentille – lentille qu'il a développé sa théorie.

Il considère deux solides élastiques de révolution ( $S_1$ ) de rayon de courbure  $R_1$ , de module d'Young  $E_1$  et de coefficient de Poisson  $\nu_1$ , et ( $S_2$ ) de rayon de courbure  $R_2$ , de module d'Young  $E_2$  et de coefficient de Poisson  $\nu_2$  en contact au point  $O$ . Chacun sous l'action d'une force  $F$ , ils se déplacent de  $\delta_1$  pour ( $S_1$ ) et  $\delta_2$  pour ( $S_2$ ). L'aire de contact est de rayon  $a$ .

Si  $R = \left(1/R_1 + 1/R_2\right)^{-1}$  est le rayon de courbure relatif et  $E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}$ , Hertz montre que la pression le long du rayon vaut :

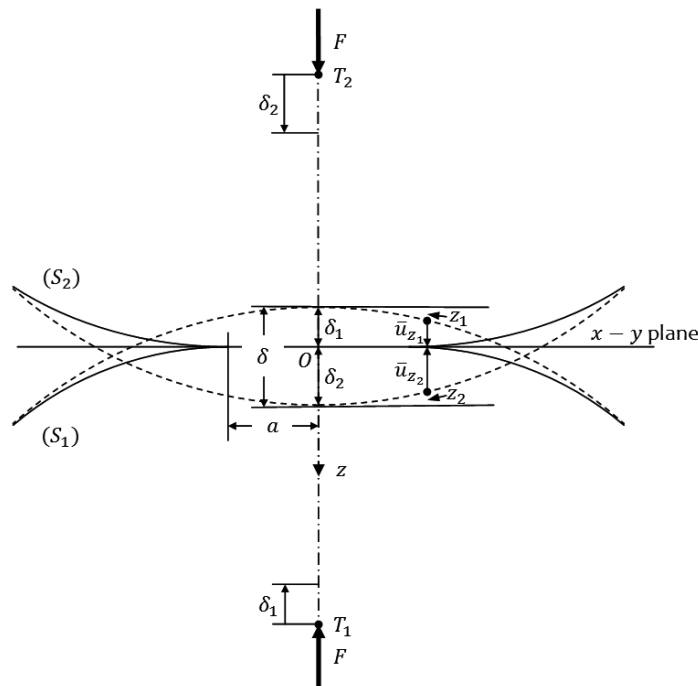


Fig. I-16 : Notation adoptée pour le problème de Hertz.



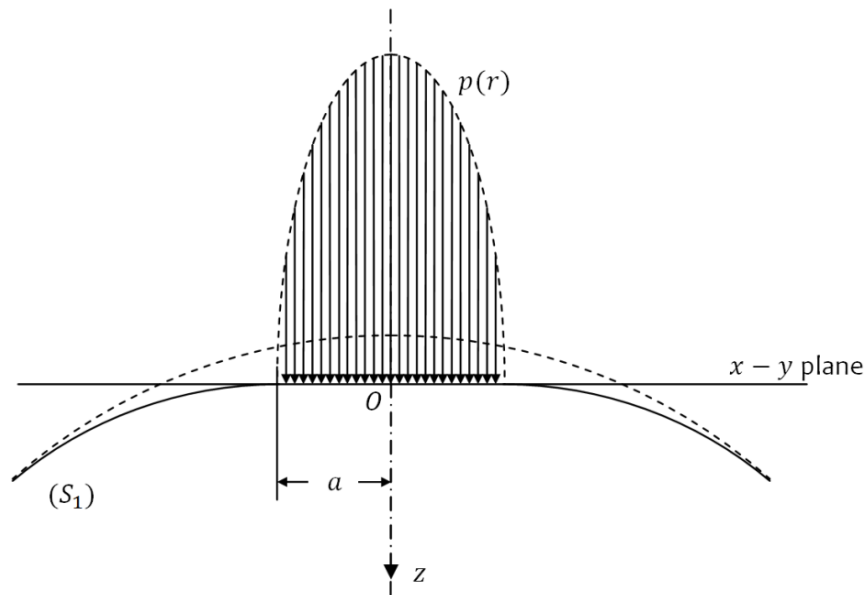


Fig. I-17 : Répartition de la pression selon Hertz au contact de la pièce ( $S_1$ ).

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (I-4)$$

avec :

$$a = \left( \frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (I-5)$$

$$p_0 = \left( \frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (I-6)$$

et :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \left( \frac{9F^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3} \quad (I-7)$$

Par analogie avec un problème d'électrostatique similaire, ces résultats sont généralisés dans le cas de paraboloides en contact (solides avec rayons de courbures différents suivant deux axes perpendiculaires). La résolution passe alors par le calcul d'intégrales elliptiques et permet de trouver l'enfoncement  $\delta$  et les demi-grands axes de l'ellipse de contact entre les solides. La théorie du contact de Hertz généralisé permet alors de résoudre toutes les situations de contact localisé entre deux pièces ayant des courbures fixes connues sur lesquelles s'appliquent des efforts de pression et/ou de traction. Les solutions font alors intervenir les fonctions elliptiques.

### I.3.2 Méthode des éléments finis en élasticité linéaire

Lorsque des situations avec des géométries plus complexes que celles d'un problème de Hertz sont à considérer, des méthodes alternatives doivent être utilisées. La méthode des éléments finis

[BONo6], consistant à résoudre numériquement le problème en maillant les solides mis en jeu, peut alors être envisagée. Elle considère un solide occupant dans son état naturel le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Le matériau du solide est élastique linéaire. Cette méthode se place dans l'hypothèse des petites déformations. Le solide est sollicité par :

- des densités de forces volumiques  $\mathbf{F}$ ,
- des déplacements imposés  $\bar{\mathbf{u}}$  sur une partie  $S_u$  de  $\partial\Omega$  (surface de  $\Omega$ ),
- des densités surfaciques d'effort  $\bar{\mathbf{t}}$  sur  $S_T$  partie complémentaire de  $S_u$  sur  $\partial\Omega$ .

Le solide étant élastique, à l'équilibre, il vérifie :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \quad (I-8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}:\boldsymbol{\epsilon} \quad (I-9)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (I-10)$$

Ces équations permettent, pour un champ de déplacement  $\mathbf{u}'$  quelconque, de démontrer le théorème des travaux virtuels [SAL92] :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}')dV = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}).\mathbf{u}'dS + \int_{\Omega} \rho\mathbf{F}.\mathbf{u}'dV \quad (I-11)$$

qui peut se réécrire, en tenant compte des conditions aux limites et de l'équilibre statique du solide élastique :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}):\mathbf{C}:\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}')dV = \int_{\Omega} \rho\mathbf{F}.\mathbf{u}'dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}}.\mathbf{u}'dS + \int_{S_u} (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}).\mathbf{u}'dS \quad (I-12)$$

Il faut alors trouver le champ  $\mathbf{u}$  qui satisfera à cette équation quel que soit  $\mathbf{u}'$ . Si le champ  $\mathbf{u}'$  est uniquement considéré parmi ceux qui sont nuls sur  $S_u$ ,  $\mathbf{u}$  est alors à chercher parmi ceux vérifiant  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  sur  $S_u$  et l'expression se simplifie en :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}):\mathbf{C}:\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}')dV = \int_{\Omega} \rho\mathbf{F}.\mathbf{u}'dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}}.\mathbf{u}'dS \quad (I-13)$$

En divisant notre solide en  $N_E$  régions  $E_e$  ( $1 \leq e \leq N_E$ ) de formes simples (parallélépipède, tétraèdre,...) et en considérant  $N_N$  nœuds  $\mathbf{x}^n$  ( $1 \leq n \leq N_N$ ) de  $\Omega$  aux sommets des régions  $E_e$ , le solide est paramétré. Dans l'élément fini  $E_e$  possédant  $N_e$  sommets  $\mathbf{x}^k$  ( $1 \leq k \leq N_e$ ) le paramètre relatif  $\boldsymbol{\xi}$  dans un volume élémentaire  $\Delta_e$  permet d'exprimer tout point  $\mathbf{x}$  de l'élément fini par :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\xi) \mathbf{x}^k \quad (I-14)$$

les fonctions  $N_k$  sont des fonctions de forme. Elles sont prises polynômiales le plus souvent.

Pour les déplacements, l'approximation va être un peu différente car il va falloir prendre en compte le fait que certains déplacements sont imposés pour utiliser l'équation (I-13). L'approximation du déplacement d'un point  $\mathbf{x}$  va alors être de la forme  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^D + \tilde{\mathbf{u}}^0$ . Et, en notant  $I_e = \{\mathbf{x}^k \in E_e \text{ tel que } \mathbf{x}^k \in S_u\}$  et  $\bar{I}_e = \{\mathbf{x}^k \in E_e \text{ tel que } \mathbf{x}^k \notin S_u\}$ , nous obtenons :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{x}^k \in I_e} \tilde{N}_k(\xi) \mathbf{u}^{Dk} + \sum_{\mathbf{x}^k \in \bar{I}_e} \tilde{N}_k(\xi) \mathbf{u}^{0k} \quad (I-15)$$

$\mathbf{u}^k$  étant les déplacements du nœud  $\mathbf{x}^k$ .

L'approximation du déplacement virtuel  $\mathbf{u}'$  est, elle, simplifiée par le fait qu'il est cherché parmi ceux qui sont nuls sur  $S_u$  :

$$\tilde{\mathbf{u}}' = \sum_{\mathbf{x}^k \in \bar{I}_e} \tilde{N}_k(\xi) \mathbf{u}^{0k} \quad (I-16)$$

Ainsi, (I-13) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^0) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}') dV = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^D) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}') dV + \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}' dV + \int_{S_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}' dS \quad (I-17)$$

et peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\mathbf{U}' \mathbf{}^t \mathbb{K} \mathbf{U} = \mathbf{U}' \mathbf{}^t \mathbb{F} \quad (I-18)$$

ou :

$$\mathbf{}^t \mathbb{K} \mathbf{U} = \mathbf{}^t \mathbb{F} \quad (I-19)$$

avec  $\mathbb{K}$  la matrice de rigidité et  $\mathbf{}^t \mathbb{F}$  le vecteur des efforts généralisés (forces nodales).

De part sa construction, la matrice  $\mathbf{}^t \mathbb{K}$  est « presque » vide, ce qui, après calcul de  $\mathbf{}^t \mathbb{F}$ , permet une résolution rapide du système. Le problème de cette méthode pour le traitement d'une situation de contact localisé, réside dans la définition des conditions aux frontières. En effet, les parties  $S_u$  et  $S_T$  de  $\partial\Omega$  sont bien définies. Or, la recherche de la limite contact/non-contact est une des difficultés de ce type de problème. Des développements existent utilisant par exemple les multiplicateurs de Lagrange [CHA86], la méthode de pénalisation [HAL85] ou la combinaison de

ces deux méthodes [WRI90] mais elles ont tardé à se développer, notamment, en raison du coût en calcul qu'elles génèrent.

### 1.3.3 Méthode des éléments frontières

Une autre méthode de résolution numérique d'un problème de mécanique des milieux continus est la méthode des éléments frontières [BON99]. Dans le cas d'un milieu homogène, elle s'appuie sur la connaissance de solutions générales à une sollicitation ponctuelle (fonction de Green) et à l'application de celle-ci à toute ou partie de la surface qui délimite le solide considéré.

#### 1.3.3.a Cadre théorique général de la méthode des équations intégrales

Le principe de la méthode des éléments frontières repose sur la résolution numérique de la méthode des équations intégrales :

Soit un problème aux limites, d'inconnue  $u$ , posé sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et associé à un opérateur aux dérivées partielles du second ordre  $\mathcal{L}$ . Il présente typiquement la structure suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_1 & \text{sur } S_u \\ T^n(u) = g_2 & \text{sur } S_T \end{cases} \quad (1-20)$$

où  $g_1$ ,  $g_2$  et la source  $f$  sont données, et  $u \rightarrow T^n(u)$  est un opérateur différentiel du premier ordre sur  $u$  et linéaire par rapport à la normale unitaire  $\mathbf{n}$  à  $\partial\Omega$  extérieur à  $\Omega$ ;  $S_u$ ,  $S_T$  définissent une partition de la frontière  $\partial\Omega$ . De plus,  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  sont lié par la relation suivante (type Stokes) :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u dV = \int_{\partial\Omega} T^n(u) dS \quad (1-21)$$

A l'aide de la formule de réciprocité suivante, obtenue par (1-21) combinée avec deux grandeurs  $u$  et  $v$  différentes :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u \cdot v - \mathcal{L}v \cdot u) dV = \int_{\partial\Omega} (T^n(u) \cdot v - T^n(v) \cdot u) dS \quad (1-22)$$

nous obtenons, pour tout  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  privé de  $\partial\Omega$ , une formule de représentation intégrale :

$$\kappa u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y + \int_{\partial\Omega} [T^n u(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) T^n G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \quad (1-23)$$

où :

- $\kappa = 1$  si  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\kappa = 0$  sinon,
- $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est fonction du point  $\mathbf{y}$  et représente la fonction de Green du problème, solution fondamentale, indépendante des conditions limites, pour une source ponctuelle appliquée en  $\mathbf{x}$ .

Appliqué à un problème associé à l'équation de Poisson

$$\Delta u + b = 0 \quad (I-24)$$

$b$  étant la source et  $u$  étant contraint à un flux imposé à la frontière

$$q = \nabla u \cdot \mathbf{n} \quad (I-25)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire à un point de la surface  $\partial\Omega$ , on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \Delta && \text{(Laplacien)} \\ T^n &\equiv \nabla(\cdot) \cdot \mathbf{n} && \text{(dérivée normale)} \end{aligned} \quad (I-26)$$

Dans cette situation :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi r} \\ T^n G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi r^2} \nabla r \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (I-27)$$

ou  $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ . (I-23) donne alors :

$$\kappa u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [q(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{y})H(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y + \int_{\Omega} b(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (I-28)$$

une formule de représentation intégrale permettant notamment de connaître  $u$  partout dans  $\Omega$  connaissant  $u$  à la surface. A la surface justement, le passage à la limite de (I-28) en excluant un voisinage de  $\mathbf{x}$  que l'on fait tendre vers 0 donne l'équation intégrale de frontière

$$\int_{\partial\Omega} \{[u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})]H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - q(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} dS_y = \int_{\Omega} b(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \quad (I-29)$$

La méthode des équations intégrales va alors se passer en deux temps :

- la résolution de l'équation intégrale de frontière (I-29), permettant de connaître les valeurs de  $u$  et  $q$  en tout point de  $\partial\Omega$ ,
- l'application de la formule de représentation intégrale (I-28) permettant le calcul explicite de  $u$  en tout point intérieur  $\mathbf{x}$ .

### I.3.3.b Application à l'élastostatique linéaire

Dans le cas de l'élastostatique linéaire, nous considérons un solide élastique occupant l'espace  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  borné, de frontière  $\partial\Omega$  supposée  $C^2$  par morceau. Les normales  $\mathbf{n}$  à  $\partial\Omega$  sont orientées à l'extérieur de  $\Omega$ . A l'équilibre, les champs du déplacement  $\mathbf{u}$ , de la déformation  $\boldsymbol{\epsilon}$  et de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  vérifient (I-8), (I-9), (I-10) qui nous permettent d'obtenir l'équation de Navier gouvernant les déplacements :

$$\Delta^* \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0 \quad (I-30)$$

$$\text{avec}^1 \Delta^* \mathbf{u} = C_{ijkl} u_{k,lj} \mathbf{e}_i$$

Or, en appliquant le théorème de travaux virtuels à deux situations élastostatiques différentes  $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \mathbf{F}^1)$  et  $(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \mathbf{F}^2)$  travaillant dans les déplacements respectifs  $\mathbf{u}^2$  et  $\mathbf{u}^1$ , la soustraction membre à membre donne :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^1 : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^2) - \boldsymbol{\sigma}^2 : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^1) dV - \int_{\partial\Omega} [(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^2 - (\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^1] dS = \int_{\Omega} [\rho \mathbf{F}^1 \cdot \mathbf{u}^2 - \rho \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{u}^1] dV \quad (I-31)$$

De plus :

- la loi de symétrie du comportement élastique implique :

$$\boldsymbol{\sigma}^1 : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^2) = \boldsymbol{\sigma}^2 : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^1) \quad (I-32)$$

- l'équation de Navier donne :

$$\rho \mathbf{F}^i = -\Delta^* \mathbf{u}^i \quad (I-33)$$

- par notation :

$$\mathbf{T}^n(\mathbf{u}^i) \equiv \boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n} \quad (I-34)$$

Toutes ces équations combinées donnent le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti :

$$\int_{\partial\Omega} [\mathbf{T}^n(\mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{u}^2 - \mathbf{T}^n(\mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{u}^1] dS = \int_{\Omega} [\Delta^* \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^2 - \Delta^* \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{u}^1] dV \quad (I-35)$$

qu'il convient de mettre en parallèle avec l'équation (I-22).

Ainsi, si le triplet  $(\mathbf{U}^k, \boldsymbol{\Sigma}^k, \mathbf{F}^k)$  est la solution fondamentale au problème de l'élastostatique pour une force ponctuelle en  $\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{e}_k$  :  $\rho \mathbf{F}^k(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{e}_k$  et si nous notons  $\mathbf{t} = \mathbf{T}^n(\mathbf{u})$  le vecteur contrainte associé à  $\mathbf{u}$  dans la direction  $\mathbf{n}$  alors :

- la formule de représentation intégrale (I-28) devient pour le déplacement ( $1 \leq i \leq 3$ )

<sup>1</sup> Nous utilisons la notation d'Einstein pour les sommes implicites et les dérivées partielles.

$$\kappa u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u_i(\mathbf{y})T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})]dS_y + \int_{\Omega} \rho F_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})dV_y \quad (I-36)$$

- l'équation intégrale de frontière (I-29) devient :

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})]T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}dS_y = \int_{\Omega} \rho F_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})dV_y \quad (I-37)$$

I.3.3.c Construction et résolution numérique du problème d'élasticité.

Si l'équation (I-37) est considérée en l'absence de champ de force volumique, elle devient :

$$\int_{\partial\Omega} \{[u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x})]T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}dS_y = 0 \quad (I-38)$$

Pour la résolution numérique de cette équation, la surface  $\partial\Omega$  est maillée en  $N_E$  éléments de frontière disjoints  $E_e$  ( $1 \leq e \leq N_E$ ). Ces éléments sont décrits par un paramétrage, sur une surface élémentaire  $\Delta_e$ , de la forme :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow \mathbf{y}(\xi) = \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\xi)\mathbf{y}^m \quad (I-39)$$

avec :

- $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{N_e}$  étant  $N_e$  nœuds géométriques de l'élément de surface  $E_e$  associé à  $\Delta_e$ .
- $N_1(\xi), \dots, N_{N_e}(\xi)$  étant  $N_e$  fonctions de forme (habituellement polynômiales) et vérifiant :

$$N_p(\xi^q) = \delta_{pq} \quad \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \Delta_e \quad (I-40)$$

ou  $\xi^q \in \Delta_e$  est l'antécédent du nœud  $\mathbf{y}^q \in E_e$ .

Les champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  doivent aussi être discrétisés en une nouvelle famille de  $N_I$  points  $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{N_I}$  de  $\partial\Omega$  dits points d'« interpolation », chaque élément  $E_e$  en contenant  $N_I(e)$ . De plus, sur chaque élément  $E_e$ ,  $N_I(e)$  fonctions d'interpolation  $M_p(\xi)$  ( $1 \leq p \leq N_I(e)$ ) vérifiant (I-40) sont introduites. Elles permettent l'approximation des champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  en :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \sum_{p=1}^{N_I(e)} M_p(\xi)\mathbf{u}^p \quad \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = \sum_{p=1}^{N_I(e)} M_p(\xi)\mathbf{t}^p \quad \forall \xi \in \Delta_e \quad (I-41)$$

$\mathbf{u}^p$  et  $\mathbf{t}^p$  étant les valeurs des champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  aux points  $\mathbf{z}^p$ .

Transformer (I-38) en utilisant les discrétisations précédentes, nécessite aussi la discrétisation de  $\mathbf{x}$  en  $N_c$  points de collocation  $\mathbf{x}^c$  paramétrés dans chaque élément  $E_e$  qui les contient par  $\boldsymbol{\eta}_e \in \Delta_e$  via le paramétrage (I-39). En ces points, (I-38) est forcée à être vérifiée, ce qui implique que  $\forall c \in [1, N_c]$  :

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \{ [u_i(\mathbf{y}) - u_i(\mathbf{x}^c)] T_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}) - t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}) \} dS_{\mathbf{y}} = 0 \quad (I-42)$$

Les fonctions  $T_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y})$  et  $U_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y})$  de  $\mathbf{y}$  étant équivalentes à  $\frac{1}{|\mathbf{x}^c - \mathbf{y}|}$  au voisinage de  $\mathbf{x}^c$ , les intégrales sont alors à séparer en deux classes :

- celles où  $\mathbf{x}^c \in E_e$  qui sont des intégrales singulières,
- celles où  $\mathbf{x}^c \notin E_e$  qui sont des intégrales régulières.

Pour chaque  $\mathbf{x}^c$ , soit  $I_S(\mathbf{x}^c) = \{e \in [1, N_E], \mathbf{x}^c \in E_e\}$  et  $I_R(\mathbf{x}^c) = \{e \in [1, N_E], \mathbf{x}^c \notin E_e\}$ , (I-42) devient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{e \in I_S(\mathbf{x}^c)} \sum_{p=1}^{N_I(e)} \{ AS_i^k(e, p) u_i^{m(e,p)} - BS_i^k(e, p) t_i^{m(e,p)} \} \\ &+ \sum_{e \in I_R(\mathbf{x}^c)} \sum_{p=1}^{N_I(e)} \{ AR_i^k(e, p) u_i^{m(e,p)} - BR_i^k(e, p) t_i^{m(e,p)} \} \\ &- \sum_{e \in I_R(\mathbf{x}^c)} \widehat{BR}_i^k(e) \times \sum_{p=1}^{N_I(e)} \{ M_p(\boldsymbol{\eta}_e) u_i^{m(e,p)} \} \end{aligned} \quad (I-43)$$

avec les intégrales élémentaires :

$$AS_i^k(e, p) = \int_{\Delta_e} [M_p(\boldsymbol{\xi}) - M_p(\boldsymbol{\eta}_e)] T_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

$$BS_i^k(e, p) = \int_{\Delta_e} M_p(\boldsymbol{\xi}) U_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

$$AR_i^k(e, p) = \int_{\Delta_e} M_p(\boldsymbol{\xi}) T_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

$$BR_i^k(e, p) = \int_{\Delta_e} M_p(\boldsymbol{\xi}) U_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\widehat{BR}_i^k(e) = \int_{\Delta_e} T_i^k(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$



$J(\xi)$  est le jacobien du changement de variable  $y \rightarrow \xi$  inverse du paramétrage (I-39) et  $m(e, p)$  est la table de connectivité ou le numéro global associé au  $e^{i\text{ème}}$  élément frontière et  $p^{i\text{ème}}$  point d'interpolation de cet élément. (I-42) correspond à un système à  $3N_c$  équation à  $6N_f$  inconnues –  $\{\mathbf{u}\} = \{u_i^m\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq m \leq N_f}$  et  $\{\mathbf{t}\} = \{t_i^m\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq m \leq N_f}$  – qui s'écrira :

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{B}]\{\mathbf{t}\} = 0 \quad (\text{I-44})$$

où  $[\mathbf{A}]$  et  $[\mathbf{B}]$  sont des matrices  $3N_c \times 3N_f$  pleines de combinaisons des intégrales élémentaires. En choisissant les points de collocation identiques aux points d'interpolation (choix le plus courant en pratique). En remarquant que les conditions aux limites imposent à chaque couple  $(u_i^m, t_i^m)$  d'être lié part une relation, nous avons à résoudre un système de  $3N_f$  équation à  $3N_f$  inconnues.

Ici, contrairement à la méthode des éléments finis, la matrice à inverser pour résoudre le système d'équations considéré est pleine mais le nombre d'éléments frontière étant bien moindre qu'un nombre d'éléments finis (le maillage se fait en deux et non trois dimensions), cette inversion reste bien plus simple dans la plupart des cas. Seulement le même problème se pose pour le traitement d'une situation de contact localisé. La surface où le contact avec une autre pièce mécanique a lieu n'est pas connue a priori.

### 1.3.4 Théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti

Dans les problèmes du contact localisé, il paraît intéressant de supposer que l'effet du contact est lui aussi localisé et que la géométrie complète de la pièce considérée importe peu au-delà d'un voisinage du contact. Alors, en considérant l'application d'un chargement sur un massif semi-infini, nous pouvons évaluer avec suffisamment de précision les conséquences internes qu'il implique. C'est dans ce cadre que Boussinesq a développé sa théorie des potentiels, appliquée à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques [BOU85]. Dans Contact Mechanics [JOH85], Johnson détaille l'utilisation des potentiels de Boussinesq et Cerruti. Il y approfondi, entre autres, le cadre théorique et quelques solutions particulières du problème d'un contact localisé sur un massif semi-infini.

#### 1.3.4.a Cadre théorique général

Dans sa théorie des potentiels, Boussinesq considère un espace semi-infini du côté des profondeurs  $z \geq 0$ , élastique (de module de cisaillement  $G$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ ) sur lequel une surface  $(S)$  paramétrée par  $\xi$  sur  $Ox$  et  $\eta$  sur  $Oy$ , subit un effort avec les composantes suivantes :

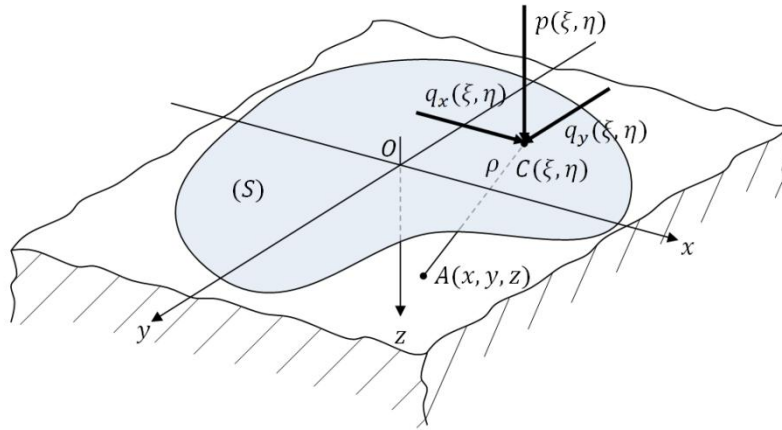


Fig. I-18 : Situation considérée dans la théorie des potentiels de Boussinesq

- $p(\xi, \eta)$  une pression normale,
- $q_x(\xi, \eta)$  et  $q_y(\xi, \eta)$  des tractions suivant respectivement l'axe  $Ox$  et l'axe  $Oy$ .

Il introduit les potentiels suivants :

$$F_1 = \iint_{(S)} q_x(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta$$

$$G_1 = \iint_{(S)} q_y(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta \quad (I-45)$$

$$H_1 = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) \Omega d\xi d\eta$$

ou :

$$\Omega = z \ln(\rho + z) - \rho \quad (I-46)$$

Il introduit aussi les potentiels :

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \iint_{(S)} q_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta$$

$$G = \frac{\partial G_1}{\partial z} = \iint_{(S)} q_y(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (I-47)$$

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial z} = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta$$

et :

$$\psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \quad (I-48)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \quad (I-49)$$

Love (1952) montre que ces potentiels permettent d'exprimer le déplacement en tout point du solide :

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \quad (I-50)$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \quad (I-51)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{\partial H}{\partial z} + (1 - 2\nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (I-52)$$

Ils permettent d'exprimer aussi les contraintes par la loi de Hooke :

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (I-53)$$

$$\sigma_y = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (I-54)$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (I-55)$$

$$\tau_{xy} = G \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right\} \quad (I-56)$$

$$\tau_{yz} = G \left\{ \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right\} \quad (I-57)$$

$$\tau_{zx} = G \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right\} \quad (I-58)$$

Cette méthode apparait alors très intéressante puisqu'à la seule donnée des champs  $p$ ,  $q_x$  et  $q_y$ , toutes les grandeurs élastiques peuvent être calculées en tout point du massif semi-infini. Mais en fait, c'est là un problème puisque dans la plupart des conditions d'un contact localisé, le chargement n'est pas connu a priori. C'est plutôt la géométrie d'un indenteur ou d'un punch qui charge la surface  $z = 0$  avec un effort donné qui est connu. Tout le problème de l'utilisation de ces potentiels réside alors dans la résolution d'équations intégrales. Les trois prochaines sections traitent ce problème sous trois aspects différents.

I.3.4.b Résolution de cas particuliers en 3D

L'application des potentiels de Boussinesq et Cerruti est facilitée dans l'analyse de cas particuliers. Notamment, dans le cas d'un effort purement normal. En effet, avec  $q_x = 0$  et  $q_y = 0$ , les potentiels  $F, F_1, G$  et  $G_1$  sont nuls,  $\psi_1 = H$  et :

$$\psi = \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \iint_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (I-59)$$

Ce qui implique :

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1-\nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (I-60)$$

Et en particulier à  $z = 0$  :

$$u_z(x, y, z = 0) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \psi(x, y, z = 0) \quad (I-61)$$

En plus des solutions connues de Hertz, Johnson donne des solutions à ce problème pour différents cas particuliers :

1) Champ de pression uniforme dans un polygone

Pour calculer le champ de déplacement vertical en surface  $u_z(x, y, 0)$  en  $B(x, y)$  induit par un champ de pression uniforme  $p_0$  sur un polygone  $EFGH$ , d'après Fig. I-19, nous remarquons que :

$$EFGH = BDE + BEF + BFG - BGD$$

ou  $DEFG = BEH_1 - BDH_1 + BEH_2 + BFH_2 + BFH_3 - BGH_3 - BGH_4 - BDH_4$

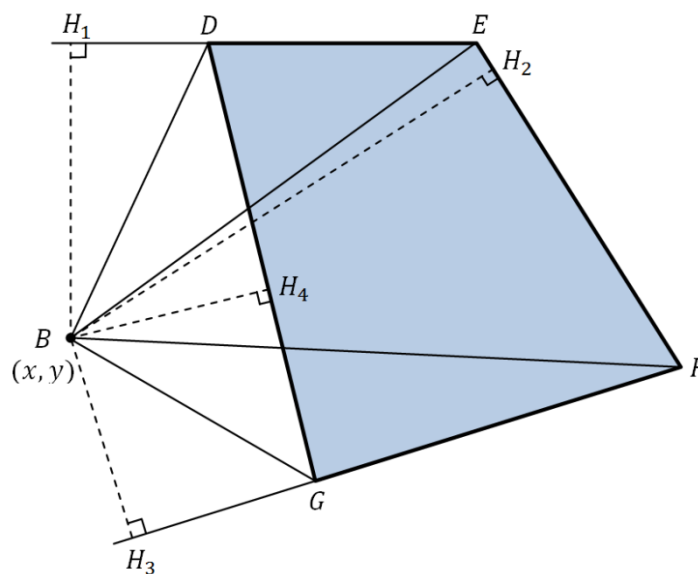


Fig. I-19 : Champ de pression uniforme sur un polygone.

Le calcul de l'intégrale se résume alors à plusieurs calculs d'intégrales dans un triangle rectangle d'angle droit  $H$ , d'angle  $\phi$  en  $B$  et de distance  $HB = h$ . Pour un tel triangle,  $u_z(x, y, 0)$  se calcule :

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1-\nu}{4\pi G} p_0 \int_0^\phi \int_0^{h/\cos(\varphi)} dr d\varphi \quad (I-62)$$

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1-\nu}{4\pi G} p_0 h \ln \left\{ \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\} \quad (I-63)$$

Il est même possible de calculer ce champ pour un champ de pression qui varierait linéairement en fonction de  $\xi$  et de  $\eta$  dans un triangle élémentaire :

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1-\nu}{4\pi G} p_0 \int_{(S)} \frac{p_0 + a\xi + b\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} dx dy \quad (I-64)$$

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1-\nu}{4\pi G} \int_0^\phi \int_0^{h/\cos(\varphi)} (p_0 + ar \cos(\varphi) + br \sin(\varphi)) dr d\varphi$$

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1-\nu}{4\pi G} \left\{ \left( p_0 h + \frac{ah^2}{2} \right) \int_0^\phi \frac{1}{\cos(\varphi)} d\varphi + \frac{bh^2}{2} \int_0^\phi \frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} d\varphi \right\}$$

Numériquement, cette solution est intéressante car elle permet, grâce à un champ de pression qui serait maillé en triangle, de calculer toutes les grandeurs élastiques dans le massif semi-infini.

2) Champ de pression uniforme dans un cercle :

Si un champ de pression uniforme  $p_0$  s'applique dans un cercle de rayon  $a$ , le champ  $u_z(r, 0)$  vaut :

$$\begin{cases} u_z(r, 0) = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} p_0 a E\left(\frac{r}{a}\right) & r < a \\ u_z(r, 0) = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} p_0 r \left[ E\left(\frac{a}{r}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) K\left(\frac{a}{r}\right) \right] & r \geq a \end{cases} \quad (I-65)$$

$E$  et  $K$  sont les intégrales elliptiques complètes du second et du premier ordre.

3) Champ de déplacement uniforme dans un cercle :

Si un champ de pression uniforme  $p(r) = p_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$  s'applique dans un cercle de rayon  $a$  le champ

$u_z(r, 0)$  vaut :

$$\begin{cases} u_z(r, 0) = \frac{\pi(1-\nu)}{2G} p_0 a & r < a \\ u_z(r, 0) = \frac{1-\nu}{G} p_0 a \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) & r \geq a \end{cases} \quad (I-66)$$

Dans ses solutions, Johnson utilise à priori des champs de pression connus dans des limites définies, pour en déduire la géométrie des punchs. La résolution des équations intégrales est alors faite dans le sens direct (calcul d'intégrale) et non en inversant le problème. La définition de la zone de contact est complexe en 3D de part le caractère courbe de la frontière contact/non contact. Elle l'est beaucoup moins dans le cas d'un problème invariant en translation suivant un des axes du plan. Dans la section suivante, l'inversion de ce type de problème est abordée.

### I.3.4.c Chargement linéaire d'un espace semi-infini élastique

Dans cette partie, la situation d'étude est considérée invariante suivant  $Oy$  et le massif semi-infini ne subit pas de traction suivant cet axe ( $q_y = 0$ ). Le contact est supposé se faire entre les abscisses  $-b$  et  $a$ . Johnson [JOH85] s'est intéressé à ce problème. En effet, dans le cas d'une invariance suivant  $Oy$ , les équations précédentes montrent que  $\frac{\partial u_x}{\partial x}(x, 0)$ ,  $\frac{\partial u_x}{\partial z}(x, 0)$ ,  $q_x(x)$  et  $p(\xi)$  vérifient le système d'équations intégrales suivant :

$$\int_{-b}^a \frac{q_x(\xi)}{x - \xi} d\xi = -\frac{\pi(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} p(x) - \frac{\pi G}{(1 - \nu)} \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, 0)$$

$$\int_{-b}^a \frac{p(\xi)}{x - \xi} d\xi = -\frac{\pi(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} q_x(x) - \frac{\pi G}{(1 - \nu)} \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, 0)$$
(I-67)

Et dans le cas, encore plus particulier, d'un effort purement normal cela s'écrit :

$$\int_{-b}^a \frac{p(\xi)}{x - \xi} d\xi = -\frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)} \frac{\partial u_z}{\partial x}(x, 0)$$
(I-68)

Si nous considérons qu'une forme bien plus rigide que l'espace semi-infini ayant une forme connue, presse normalement avec l'effort linéique  $F$ , il est possible de trouver le champ de pression correspondant, car l'équation intégrale (I-68) a pour solution [SOH39] :

$$p(x) = -\frac{G}{\pi(1 - \nu)} \frac{1}{\sqrt{(x + b)(a - x)}} \int_{-b}^a \frac{\sqrt{(\xi + b)(a - \xi)}}{x - \xi} \frac{\partial u_z}{\partial x} d\xi$$

$$+ \frac{\pi F}{\sqrt{(x + b)(a - x)}}$$
(I-69)

Goryacheva [GOR02] applique cette méthode de résolution inverse du problème à un punch à bord arrondi dans le cas d'un glissement partiel. Il en déduit les expressions analytiques des champs de pression, de traction, de contrainte, du glissement par la méthode de Muskhelishvili [MUS53]. Il montre que seule une zone d'adhérence existe dans la zone de contact et étudie l'évolution des zones d'adhérence et de glissement pour différents paramètres externes.

Bien qu'efficace, cette résolution est limitée au cas 2D. Pour une résolution équivalente en trois dimensions, il faut alors réaliser l'inversion du problème posé par les équations (I-59) et (I-61), ce qui paraît être complexe puisque les domaines où les grandeurs sont connues sont disjoints et la frontière entre les deux pièces n'est pas connue a priori.

## I.4 Conclusion

De toutes les méthodes de mesure du champ élastique étudiées, un petit nombre pouvait faire l'objet d'une investigation pour un travail de thèse. Pour explorer le champ de déformation élastique, lors d'un contact localisé, nous avons, toutefois, préféré développer une méthode originale utilisant la microscopie confocale chromatique. Afin de comparer les mesures à des résultats théoriques, un choix a dû être réalisé pour la méthode de calcul abordée. Nous avons ainsi décidé de développer la méthode des potentiels de Boussinesq et Cerruti. Cette approche sera, elle-même, comparée aux résultats que donnent les modèles de Hertz ou des calculs par Éléments Finis.

# Chapitre II. Simulation des champs de pression, de contrainte et de déplacement.

---

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les champs de pression, de contrainte et de déplacement induits par un contact élastique localisé entre deux pièces mécaniques peuvent être prédits par des simulations numériques diverses : contact de Hertz, méthode des éléments finis, méthode des éléments frontière, théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti. Pour un contact localisé, dont la dimension de contact peut être considérée petite devant les dimensions des pièces, une limitation au problème d'un contact entre un indenteur et un massif semi-infini est alors envisagée. Dans ce cas précis, l'application de la théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti est apparue adaptée. Dans ce chapitre, le contexte de l'étude est tout d'abord rappelé. La théorie de potentiels et les limitations prises pour l'étude sont introduites. Ensuite, la résolution numérique de l'inversion du problème de contact est traitée. L'étude de quelques cas est ensuite abordée afin de comparer les simulations avec d'autres méthodes de calcul existantes. Enfin, des perspectives d'amélioration et d'utilisation sont présentées.

## II.1 Objectifs de la simulation de contact localisé

La problématique initiale de ce travail de thèse était de prévoir et de mesurer le champ de pression induit par un contact entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$ . Ces deux solides seront considérés de module d'Young respectifs  $E_1$  et  $E_2$  et de coefficient de Poisson respectifs  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . La surface de contact ( $S$ ) entre les solides est considérée petite devant les dimensions des solides et les rayons de courbures au niveau du contact. ( $P$ ) est le plan de contact moyen.



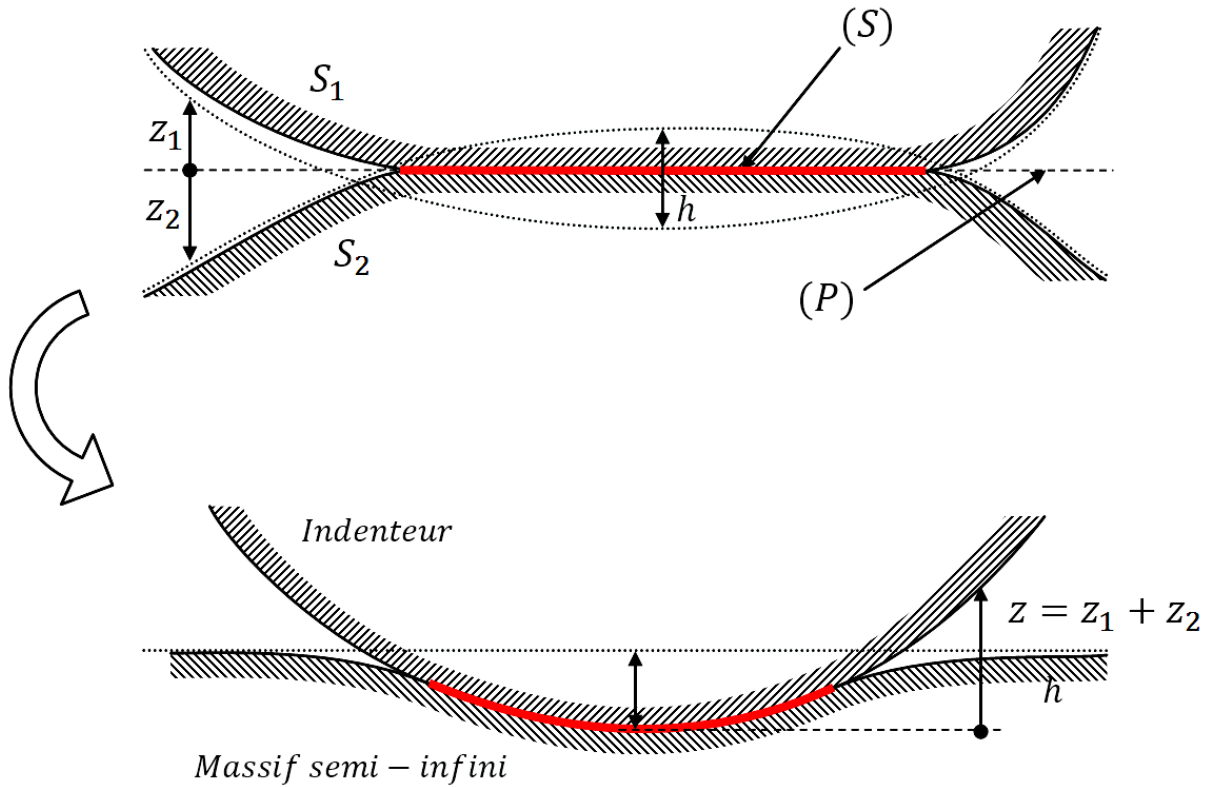


Fig. II-1 : Passage d'une situation quelconque à une situation « Indenteur rigide sur plan ».

Dans ces conditions, le problème se ramène à l'étude du contact entre un indenteur infiniment rigide et un massif semi-infini de module d'Young équivalent :

$$E = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (\text{II-1})$$

La forme de l'indenteur serait alors telle que la distance du plan à l'indenteur soit la distance entre les deux solides dans une direction orthogonale au plan moyen (Fig. II-1). La théorie qui permet d'aborder facilement cette situation est la théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti.

## II.2 Théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti

Joseph Boussinesq est un physicien mathématicien français de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Il s'est illustré dans plusieurs domaines traitant de la mécanique des fluides, la mécanique des milieux continus et la mécanique des sols appliquée au génie civil. En mécanique des milieux continus, il a élaboré une théorie faisant appel à des potentiels et permettant de traiter par des convolutions le problème d'un massif semi-infini soumis à des efforts à sa surface. Dans ce paragraphe, le cadre théorique général est présenté, ses conséquences sur les champs élastiques sont discutées ensuite faisant apparaître l'idée de la résolution du problème posé.

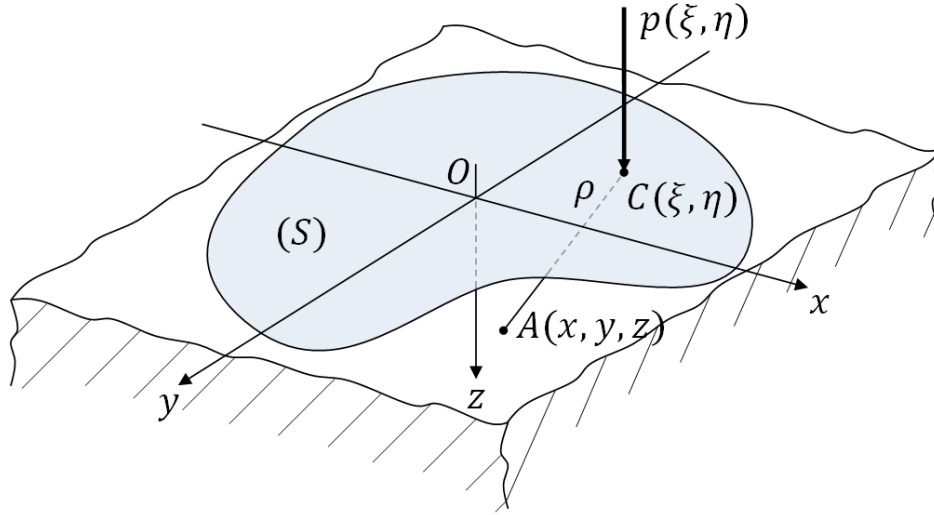


Fig. II-2 : Notations prises pour le cadre théorique de l'étude.

### II.2.1 Cadre théorique général

Le cadre théorique général de la théorie des potentiels de Boussinesq et Cerruti a été présenté au paragraphe I.3.4. La situation considérée est celle d'un massif semi-infini dans les profondeurs  $z > 0$  soumis à des efforts sur une surface (S). Le cadre de cette étude s'est limité à une situation où les efforts sont considérés purement normaux – pas de frottement – (Fig. II-2). Les notations prises seront celles de la figure.

Dans cette situation, les expressions des potentiels sont :

$$\psi_1(x, y, z) = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (II-2)$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \iint_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (II-3)$$

$$\text{avec } \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}.$$

Les champs élastiques s'expriment alors par les expressions suivantes :

$$u_x = -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \quad (II-4)$$

$$u_y = -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \quad (II-5)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1 - \nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (II-6)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right\} \quad (II-7)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right\} \quad (II-8)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} \quad (II-9)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\} \quad (II-10)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \quad (II-11)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \quad (II-12)$$

L'expression de  $\rho$  fait donc apparaître que si nous posons :

$$\ln r_z : (x, y) \rightarrow \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \right) \quad (II-13)$$

et :

$$ir_z : (x, y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (II-14)$$

alors :

$$\psi_1(x, y, z) = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) \ln r_z(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (II-15)$$

et :

$$\psi(x, y, z) = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) ir_z(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (II-16)$$

Donc si le produit de convolution est noté :

$$\star : (f, g) \rightarrow h \quad (II-17)$$

tel que :

$$h : (x, y) \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(\xi, \eta) g(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (II-18)$$

alors  $\psi_1$  et  $\psi$  sont des produits de convolution du champ de pression par respectivement  $\ln r_z$  et  $ir_z$  :

$$\psi_1(x, y, z) = p \star \ln r_z(x, y) \quad (II-19)$$

$$\psi(x, y, z) = p \star ir_z(x, y) \quad (II-20)$$

Dans la résolution du problème inverse, le champ de pression  $p$  est inconnu. Mais si  $\psi$  (ou  $\psi_1$ ) est connu, alors une déconvolution permettrait d'évaluer le champ de pression  $p$  sur  $(S)$ .

La suite de mon travail à consister à utiliser cette propriété pour à la fois simuler le champ de pression imposé par un indenteur et calculer les champs élastiques (II.3) et mesurer ce champ de pression (chapitre 4).

## II.3 Passage dans l'espace de Fourier

### II.3.1 Expressions fréquentielles des potentiels et grandeurs élastiques

Les équations (II-19) et (II-20) montrent que les expressions des potentiels de Boussinesq et Cerruti s'expriment comme des produits de convolution du champ de pression  $p$  et des fonctions  $\ln r_z$  et  $ir_z$ . Il en va de même pour les champs élastiques car si un opérateur de dérivée  $D$  est appliqué à un produit de convolution  $f \star g$  :

$$D(f \star g)(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} D(f(\xi, \eta)g(x - \xi, y - \eta))d\xi d\eta$$

$$D(f \star g)(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\xi, \eta)Dg(x - \xi, y - \eta)d\xi d\eta$$

$$D(f \star g) = f \star Dg \quad (II-21)$$

Chaque grandeur élastique s'exprime alors comme un produit de convolution :

$$u_x = p \star -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \ln r_z}{\partial x} + z \frac{\partial ir_z}{\partial x} \right\} \quad (II-22)$$

$$u_y = p \star -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \ln r_z}{\partial y} + z \frac{\partial ir_z}{\partial y} \right\} \quad (II-23)$$

$$u_z = p \star \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1 - \nu)ir_z - z \frac{\partial ir_z}{\partial z} \right\} \quad (II-24)$$

$$\sigma_x = p \star \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial ir_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 ir_z}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \ln r_z}{\partial x^2} \right\} \quad (II-25)$$

$$\sigma_y = p \star \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial ir_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 ir_z}{\partial y^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \ln r_z}{\partial y^2} \right\} \quad (II-26)$$

$$\sigma_z = p \star \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial ir_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 ir_z}{\partial z^2} \right\} \quad (II-27)$$

$$\tau_{xy} = p \star -\frac{1}{2\pi} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \ln r_z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 ir_z}{\partial x \partial y} \right\} \quad (II-28)$$

$$\tau_{yz} = p \star -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 ir_z}{\partial y \partial z} \quad (II-29)$$

$$\tau_{zx} = p \star -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 i r_z}{\partial x \partial z} \quad (\text{II-30})$$

Ces grandeurs s'expriment simplement dans l'espace de Fourier car un produit de convolution dans l'espace direct est un produit classique dans l'espace de Fourier :

Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $h = f \star g$ .

La transformée de Fourier de  $f$  est notée  $\tilde{f}$ . Elle est définie par :

$$\tilde{f}: (\omega, \theta) \rightarrow \tilde{f}(\omega, \theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i2\pi(x\omega+y\theta)} dx dy \quad (\text{II-31})$$

La transformée inverse est :

$$f(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\omega, \theta) e^{i2\pi(x\omega+y\theta)} d\omega d\theta \quad (\text{II-32})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega, \theta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) e^{-i2\pi(x\omega+y\theta)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} f(\xi, \eta) g(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right) e^{-i2\pi(x\omega+y\theta)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} g(x - \xi, y - \eta) e^{-i2\pi(x\omega+y\theta)} dx dy \right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} g(x', y') e^{-i2\pi((x'+\xi)\omega+(y'+\eta)\theta)} dx' dy' \right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} g(x', y') e^{-i2\pi(x'\omega+y'\theta)} dx' dy' \right) f(\xi, \eta) e^{-i2\pi(\xi\omega+\eta\theta)} d\xi d\eta \\ &= \left( \iint_{\mathbb{R}^2} f(\xi, \eta) e^{-i2\pi(\xi\omega+\eta\theta)} d\xi d\eta \right) \left( \iint_{\mathbb{R}^2} g(x', y') e^{-i2\pi(x'\omega+y'\theta)} dx' dy' \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{h}(\omega, \theta) = \tilde{f}(\omega, \theta) \times \tilde{g}(\omega, \theta) \quad (\text{II-33})$$

Donc, appliquée au potentiel de Boussinesq  $\psi$ , cette propriété implique pour  $\psi$  :

$$\tilde{\psi} = \tilde{p} \times \tilde{i r_z} \quad (\text{II-34})$$

Pour les autres grandeurs, les fonctions à convoluer avec  $p$  pour les obtenir sont fonction de :

- $i r_z$  ou de ses dérivées,
- $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  ou de ses dérivées,
- $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$  ou de ses dérivées.

Or l'expression de la transformée de Fourier d'une dérivée est simple car :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\omega, \theta) e^{i2\pi(x\omega + y\theta)} d\omega d\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{f}(\omega, \theta) e^{i2\pi(x\omega + y\theta)}) d\omega d\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iint_{\mathbb{R}^2} i2\pi\omega \tilde{f}(\omega, \theta) e^{i2\pi(x\omega + y\theta)} d\omega d\theta$$

Donc :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = i2\pi\omega \tilde{f} \quad (II-35)$$

De même pour une dérivé par rapport à  $y$  :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = i2\pi\theta \tilde{f} \quad (II-36)$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à exprimer les transformées de Fourier de  $ir_z$ ,  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$ .

Pour ces deux dernières, les formules (II-35) et (II-36) ne peuvent être appliquées à la transformée de  $\ln r_z$  et car  $\ln r_z$  n'est pas transformable sur  $\mathbb{R}^2$ .

Pour le calcul de  $\tilde{r}_z$ , on commence par faire le changement de variable suivant :

$$x = r \cos(\alpha)$$

$$y = r \sin(\alpha)$$

$$dxdy = r dr d\alpha$$

Donc :

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \iint \frac{e^{-i2\pi(\theta x + \omega y)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi r(\theta \cos(\alpha) + \omega \sin(\alpha))}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha$$

Soit  $\lambda = \sqrt{\theta^2 + \omega^2}$  et  $\varphi$  tel que  $\theta = \lambda \cos(\varphi)$  et  $\omega = \lambda \sin(\varphi)$ , alors :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_z(\theta, \omega) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi\lambda r(\cos(\varphi)\cos(\alpha) + \sin(\varphi)\sin(\alpha))}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi\lambda r \cos(\alpha - \varphi)}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi\lambda r \cos(\alpha)}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha$$

Or, la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 est :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\theta)} d\theta$$

Donc :

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \int_0^{\infty} \frac{2\pi r J_0(2\pi\lambda r)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr$$

Avec le changement de variables  $R = 2\pi\lambda r$  :

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi\lambda z)^2}} J_0(R) dr$$

Or :

$$\int_0^{\infty} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a}} J_0(R) dr = e^{-\sqrt{a}}$$

Donc :

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \quad (II-37)$$

Pour la transformée de Fourier de  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln r_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int ir_z dz \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} ir_z dz \\ &= \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \iint \tilde{r}_z e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \right) dz \\ &= \iint \left( \int \tilde{r}_z dz \right) \frac{\partial}{\partial x} e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \\ &= \iint \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \frac{1}{-2\pi\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} i2\pi\theta e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \\ &= \iint -\frac{i\theta}{\theta^2 + \omega^2} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial x} = -\frac{i\theta}{\theta^2 + \omega^2} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}$$

Ou :

$$\frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial x} = -\frac{i\theta}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \widetilde{r}_z \quad (\text{II-38})$$

De la même manière pour  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$  :

$$\frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial y} = -\frac{i\omega}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \widetilde{r}_z \quad (\text{II-39})$$

Au final, les transformées de Fourier des grandeurs élastiques (II-22) à (II-30) peuvent toutes se mettre sous la forme  $F(\omega, \theta, z) \times \tilde{p} \times \tilde{r}_z$  ou  $F(\omega, \theta, z) \times \tilde{\psi}$  avec  $F$  une fonction qui dépend de la grandeur considérée (Annexe A). Par exemple :

$$\tilde{u}_z = \frac{1 - \nu + \pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}{2\pi G} \tilde{p} \times \tilde{r}_z \quad (\text{II-40})$$

L'avantage des expressions analytiques des grandeurs élastiques dans le domaine de Fourier va être le calcul de celles-ci. En effet, une fois  $p$  et sa transformée dans l'espace de Fourier connues, la multiplication à  $\tilde{r}_z$  et à chaque fonction  $F$  va suffire pour obtenir les transformées des champs élastiques. Des transformées de Fourier inverses donneront les champs élastiques dans l'espace direct, aucune dérivée ne sera à calculer.

Désormais, la seule difficulté va être de trouver le champ de pression appliqué par un indenteur. Pour cela, l'équation (II-24) ou (II-40) dans l'espace de Fourier est intéressante surtout quand elle est appliquée en  $z = 0$ . En effet, elle indique que le déplacement vertical de la surface est :

$$u_z(x, y, z = 0) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \psi = \frac{1 - \nu}{2\pi G} p \star ir_0 \quad (\text{II-41})$$

Et dans l'espace de Fourier :

$$\tilde{u}_z = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \tilde{\psi} = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \tilde{p} \times \tilde{r}_0 \quad (\text{II-42})$$

Donc, en déconvoluant l'expression (II-41), par le champ de déplacement vertical  $u_z$  en  $z = 0$ , nous pouvons trouver le champ de pression  $p$  car d'après (II-37) et (II-42) :

$$\tilde{p} = \frac{2\pi G}{1 - \nu} \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \tilde{u}_z \quad (\text{II-43})$$

La méthode de calcul sera alors la suivante :



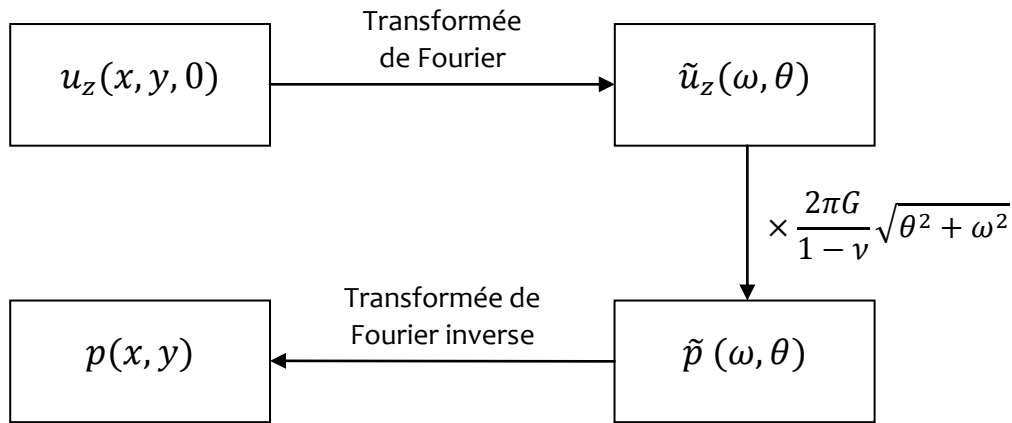


Fig. II-3 : Calcul de  $p$  à l'aide du champ de déplacement vertical de la surface.

Cette méthode nous donnant  $p$  a aussi l'avantage de calculer au préalable  $\tilde{\psi}$  car les transformées de champs élastiques sont toutes sous la forme de produits de  $\tilde{\psi}$  et de fonctions de  $\omega$ ,  $\theta$  et  $z$ . Le calcul des champs élastiques va alors encore être simplifié.

Pour appliquer la déconvolution permettant d'obtenir le champ de pression  $p$ , il nous faut donc connaître le champ de déplacement vertical  $u_z$  du massif semi-infini en  $z = 0$ . La première idée fut de constater que le champ de déplacement  $u_z(x, y, 0)$  est connu à la surface ( $S$ ) puisqu'il est imposé par l'indenteur.

Dans le paragraphe suivant la méthode de la Fig. II-3 sera appliquée, en supposant que l'intérieur de ( $S$ ) est imposé par l'indenteur et nul en dehors. Cette idée, qui peut paraître totalement erronée au départ, va quand même nous permettre de trouver une première approximation du champ de pression  $p$ .

## II.3.2 Mises en œuvre et difficultés

### II.3.2.a Définition du champ de déplacement initial

Afin de calculer le champ de pression imposé par un indenteur de forme connue  $u_z^I(x, y)$  en déconvoluant l'expression (II-41), le champ de déplacement vertical à la surface  $u_z(x, y, 0)$  (Fig. II-4) est défini :

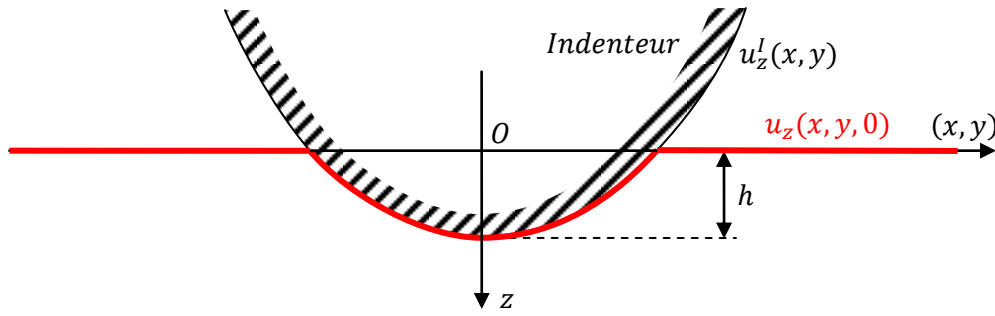


Fig. II-4 : Déplacement vertical  $u_z(x, y, 0)$  initial.

pour tout point  $(x, y)$  du plan :

$$\begin{cases} u_z(x, y, 0) = u_z^l(x, y) & \text{si } u_z^l(x, y) > 0 \\ u_z(x, y, 0) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### II.3.2.b Discrétisation du plan

La surface doit alors être discrétisée. Or lorsque une transformée de Fourier d'une zone d'intérêt discrétisée en  $N$  points doit être réalisée, il est nécessaire d'étendre la zone d'application de l'algorithme de FFT. En effet, si la zone d'intérêt dans l'espace direct – de largeur  $\Delta x$  – est discrétisé sur  $N$  points, il paraît logique que la zone d'intérêt dans l'espace de Fourier – de largeur  $\Delta \omega$  – soit au moins discrétisé avec le même nombre de points. Donc, si  $x_e$  et  $\omega_e$  sont respectivement la longueur d'échantillonnage et la « fréquence » d'échantillonnage :

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_e} \geq \frac{\Delta x}{x_e} \quad (\text{II-44})$$

Or la fréquence d'échantillonnage correspond à l'inverse de la longueur de la zone d'application de l'algorithme de FFT :

$$\omega_e = \frac{1}{N_{FFT} x_e}$$

Donc :

$$x_e \Delta \omega N_{FFT} \geq N$$

Or, d'après le principe d'incertitude :

$$\Delta x \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

$$N x_e \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

$$x_e \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi N}$$

En considérant que :

$$x_e \Delta \omega \approx \frac{1}{N}$$

la FFT aura la précision suffisante pour être assimilé à une transformée de Fourier.

On obtient alors le critère :

$$N_{FFT} > N^2$$

Ainsi, les zones d'intérêt dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier auront des échantillonnages équivalents. De plus, ce critère permet de vérifier le critère de Shannon pour éviter tout phénomène de repli de spectre inhérent à l'algorithme de FFT.

Ainsi, la zone d'intérêt est discrétisée sur chaque axe  $Ox$  et  $Oy$  sur un nombre  $N - 1$  impair de points – le zéro et autant de points de chaque côté – tel que  $N$  soit une puissance de 2 car l'algorithme de FFT est plus efficace pour un nombre de points en puissance de 2. Le nombre de points sur chaque axe pour le domaine de FFT devrait être  $N_{FFT} = N^2$ . Donc si la zone d'intérêt est discrétisée sur  $N \times N$  points ( $N$  pour chaque axe), le domaine de FFT aura donc  $N^4$  points. Ces  $N^4$  points auront 2 valeurs : une dans le domaine direct – réel – et une dans le domaine de Fourier – complexe. Ainsi un point du plan nécessitera 3 valeurs `double` (8 octets). Il faut alors être vigilant sur le choix de  $N$  car un choix trop grand impliquera un dépassement de mémoire vive lors de l'application de l'algorithme. Le choix de  $N$  doit être tel que  $24 N^4 < RAM$ .

Le tableau Tab. II-1 montre qu'il va être très couteux en mémoire de tenir le critère défini précédemment. Le nombre de points sur chaque axe a donc été réduit et va correspondre à  $N_{FFT} = N^2/8$ .

| $N$ | $N_{FFT}$ | RAM nécessaire |
|-----|-----------|----------------|
| 64  | 4096      | 384 Mo         |
| 128 | 16384     | 6 Go           |
| 256 | 65536     | 96 Go          |
| 512 | 262144    | 1536 Go        |

Tab. II-1 : Comparaison de la mémoire nécessaire pour l'algorithme FFT appliqué au contact

| $N$ | $N_{FFT}$ | RAM nécessaire |
|-----|-----------|----------------|
| 64  | 512       | 48 Mo          |
| 128 | 2048      | 768 Mo         |
| 256 | 8192      | 12 Go          |
| 512 | 32768     | 192 Go         |

Tab. II-2 : Mémoire nécessaire avec un domaine de FFT réduit.

Avec cette réduction du domaine de FFT, la discrétisation de la zone d'intérêt peut alors être envisagée avec un nombre correct de points pour un calcul avec un ordinateur de bureau.

En terme de temps de calcul, sur un ordinateur de bureau équipé d'un processeur Intel core i7 4 cœurs cadencé à 1.73 GHz disposant de 6 Go de RAM, celui-ci a été évalué pour  $N_{FFT} = 512, 1024$  et 2048 dans le Tab. II-3.

| $N_{FFT}$ | Temps de déconvolution |
|-----------|------------------------|
| 512       | 0.4 s                  |
| 1024      | 1.5 s                  |
| 2048      | 6.4 s                  |

Tab. II-3 : Temps de calcul pour la déconvolution pour différentes valeur de  $N_{FFT}$ .

### II.3.2.c Mise en œuvre de la déconvolution

La première application de cet algorithme va considérer la situation suivante où le déplacement vertical initial est appliqué pour une bille de rayon  $R = 10 \text{ mm}$  s'enfonçant de  $h = 10 \mu\text{m}$  dans un massif semi-infini de module d'Young  $E = 2900 \text{ MPa}$  (module d'Young du polyméthacrylate de méthyle – PMMA – matériau qui sera utilisé lors de l'expérimentation) et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.4$ . Le nombre de points pour la zone d'intérêt pour un axe choisi est  $N = 128$ . La courbe de pression le long de l'axe  $Ox$  (le problème choisi est axisymétrique) est présentée sur la Fig. II-5. L'indenteur passe à  $z = 0$  pour  $x = \sqrt{2Rh} = 0.447 \text{ mm}$ . Le graphique montre qu'à cette valeur le champ de pression est minimal mais à une valeur négative ! Ce qui n'est évidemment pas le résultat attendu.

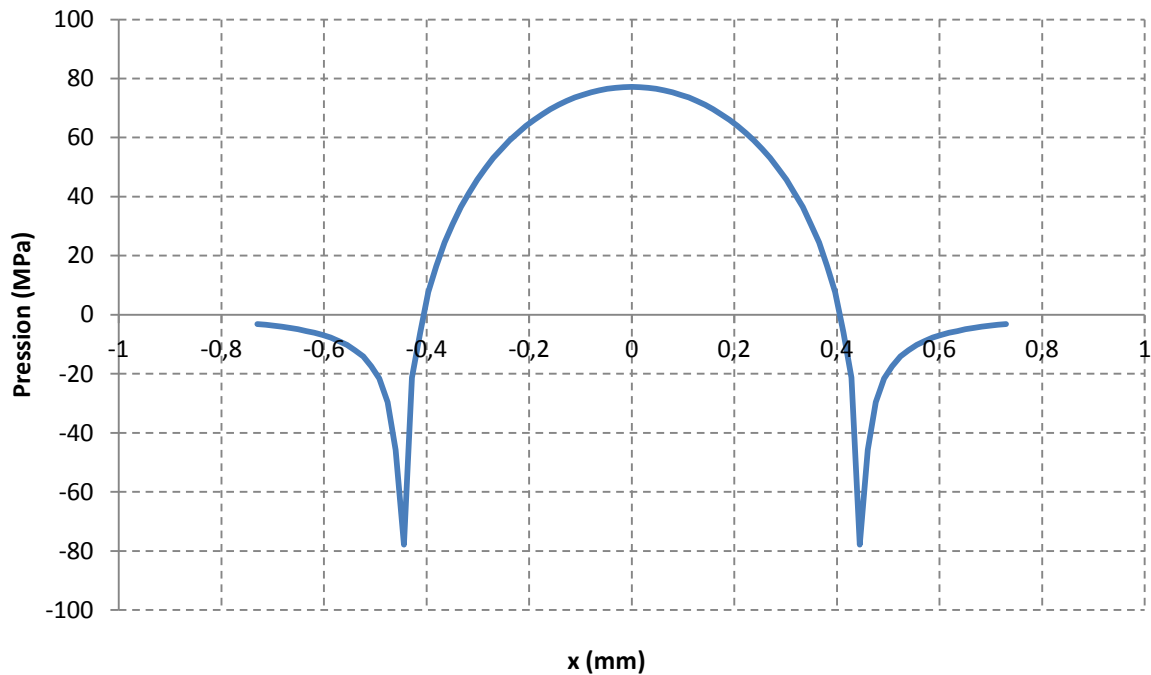


Fig. II-5 : Courbe de pression le long de l'axe  $Ox$ .

En effet, comme le champ de déplacement réel ne correspond pas à celui imposé, pour les abscisses où le contact ne se fait plus dans le cas réel, pour amener le plan à « coller » à l'altitude  $z = 0$ , l'indenteur doit tirer le plan vers le haut, ce qui explique les valeurs négatives de pression trouvées jusqu'à l'abscisse où l'indenteur coupe le plan  $z = 0$ . L'idée pour trouver un champ de pression correct va alors être de considérer que la partie positive du champ de pression n'est pas bonne mais est une première approximation du champ de pression. Il va alors servir à calculer une nouvelle déformée qui va permettre de trouver une meilleure approximation du champ de pression. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

### II.3.3 Bouclage par contour actif

#### II.3.3.a Algorithme DECR

Afin de trouver un champ de pression correct par une méthode numérique, la méthode de déconvolution présentée au paragraphe précédent montre que les valeurs de pression trouvées sont négatives sur une partie de la zone initiale de contact. L'idée de l'algorithme employé pour trouver un champ de pression correspondant au cas réel va être la suivante (Fig. II-6) :

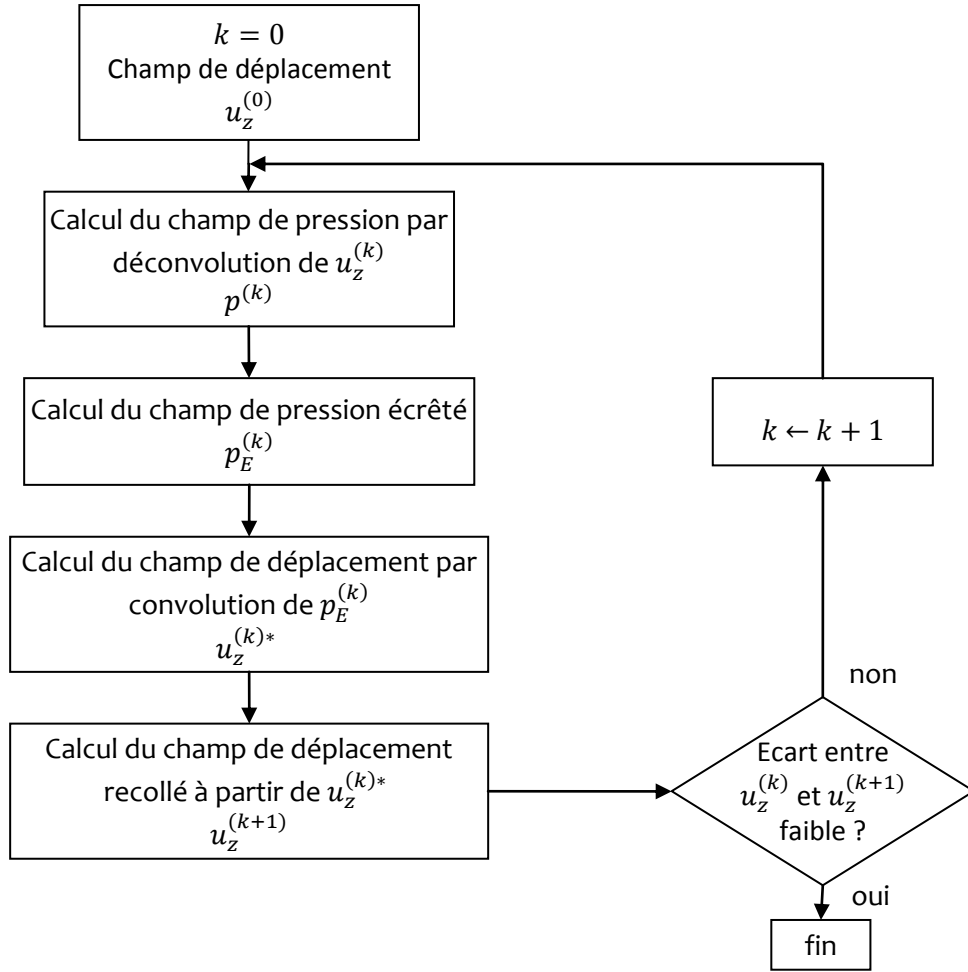


Fig. II-6 : Algorithme DECR – déconvolution, écrêtage, convolution, recollage.

- Un champ de déplacement initial  $u_z^{(k)}$  sur la surface  $(S)^{(k)}$  est implémenté,
- Le champ de pression correspondant  $p^{(k)}$  est calculé par la déconvolution (Fig. II-3),
- Le champ de pression écrêté  $p_E^{(k)}$  est construit tel que :

$$\begin{cases} p_E^{(k)}(M) = p^{(k)}(M) & \text{si } M \in (S)^{(k+1)} = \{M \text{ tel que } M \in (S)^{(k)} \text{ et } p^{(k)}(M) > 0\} \\ p_E^{(k)}(M) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Le champ de déplacement  $u_z^{(k)*}$  est calculé par convolution (II-41) avec  $p_E^{(k)}$ .
- Le champ de déplacement initial suivant  $u_z^{(k+1)}$  est implémenté par recollage de  $u_z^{(k)*}$  et  $u_z^I$  (Fig. II-7) :

$$\frac{u_z^{(k+1)}(M) - u_z^{(k+1)}(M_\infty)}{u_z^{(k+1)}(C) - u_z^{(k+1)}(M_\infty)} = \frac{u_z^{(k)*}(M) - u_z^{(k)*}(M_\infty)}{u_z^{(k)*}(C) - u_z^{(k)*}(M_\infty)} \quad (\text{II-45})$$

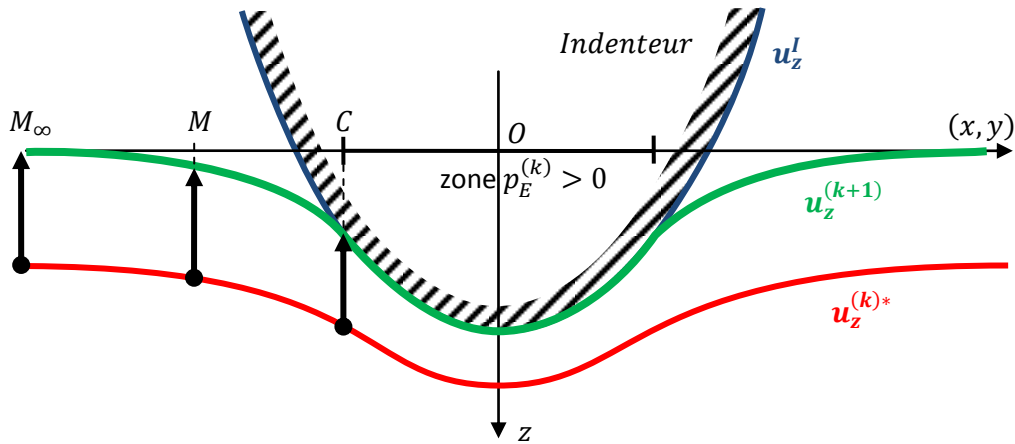


Fig. II-7 : Schéma de principe du recollage de  $u_z^{(k)*}$  et  $u_z^I$ .

### II.3.3.b Recherche de la courbe de pression nulle

Dans l'algorithme DECR, présenté dans le paragraphe précédent, un point  $C$  doit être trouvé correspondant à un point où le champ de pression devient nul (point limite de la surface de contact). En deux dimensions (comme sur la Fig. II-7), choisir le point  $C$  semble évident. Ça l'est beaucoup moins en trois dimensions. En effet, nous pouvons choisir :

- le point  $C$  sur la grille
- le point  $C$  le plus proche sur une courbe telle que la pression est nulle.
- le point  $C$  sur une courbe telle que la pression est nulle qui couperait le segment  $[OM]$ .
- ou tout autre choix !

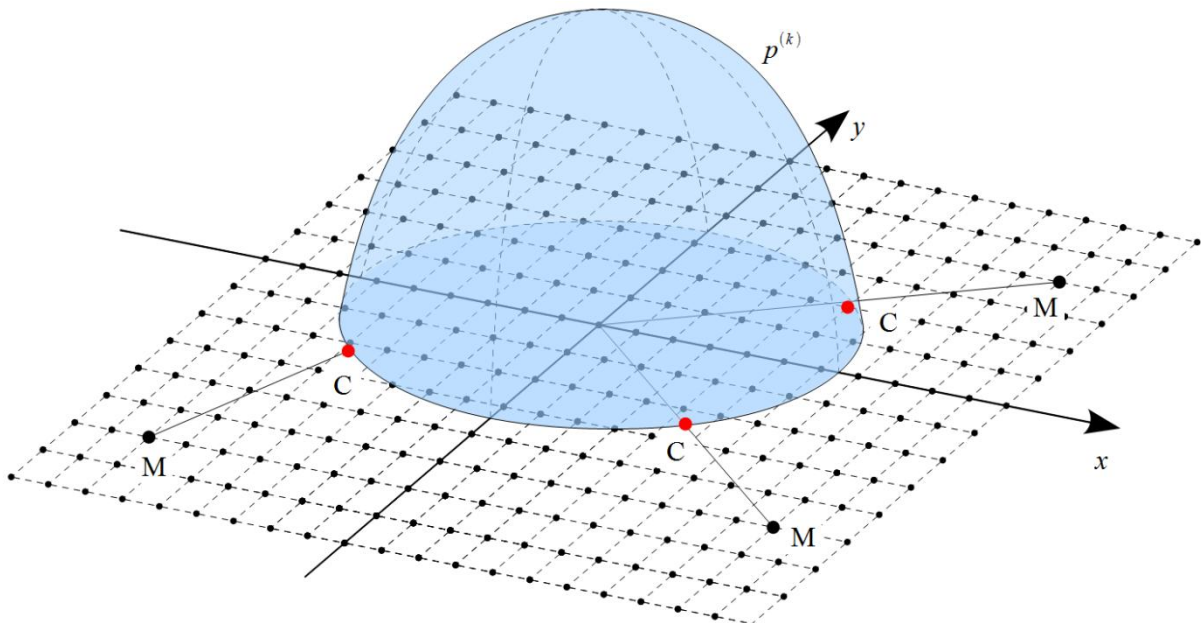


Fig. II-8 : Quelques choix des points  $C$  possibles.

Afin d'éviter des discontinuités dues au passage brutal d'un point  $C$  à un autre, conduisant au calcul de transformées de Fourier erronées (la FFT est très sensible aux discontinuités), et dans un souci de conserver une certaine symétrie lors du choix du point  $C$ , l'option retenue pour ce choix a été de prendre un point  $C$  sur la courbe de pression nulle et sur le segment  $[OM]$ . Une méthode a donc dû être implémentée pour trouver la courbe de pression nulle. Celle-ci a été inspirée par la technique de traitement d'image appelée méthode du contour actif (ou « Snake »).

Dans ce type de méthode, le but est de trouver une courbe qui va évoluer d'une position initiale à une position finale s'appuyant sur un contour vérifiant des critères mathématiques. Le principe du passage d'une courbe à la suivante va être :

- pour chaque point, de calculer une « énergie » à chacun des points autour du point initial et de sélectionner comme point suivant le point minimisant – ou maximisant – l'énergie.
- Donner des critères d'écart entre les points :
  - si la distance  $Dist(i, i + 1)$  entre deux points successifs est inférieure à  $D_{min}$ , un point est supprimé.
  - si la distance  $Dist(i, i + 1)$  entre deux points successifs est supérieure à  $D_{max}$ , un point est ajouté.
- Améliorer l'évolution de la courbe, celle-ci peut être réévaluée toutes les  $N_{adapt}$  itérations en la remplaçant par une spline cubique et en plaçant des points régulièrement distants de  $D_{moy}$ .



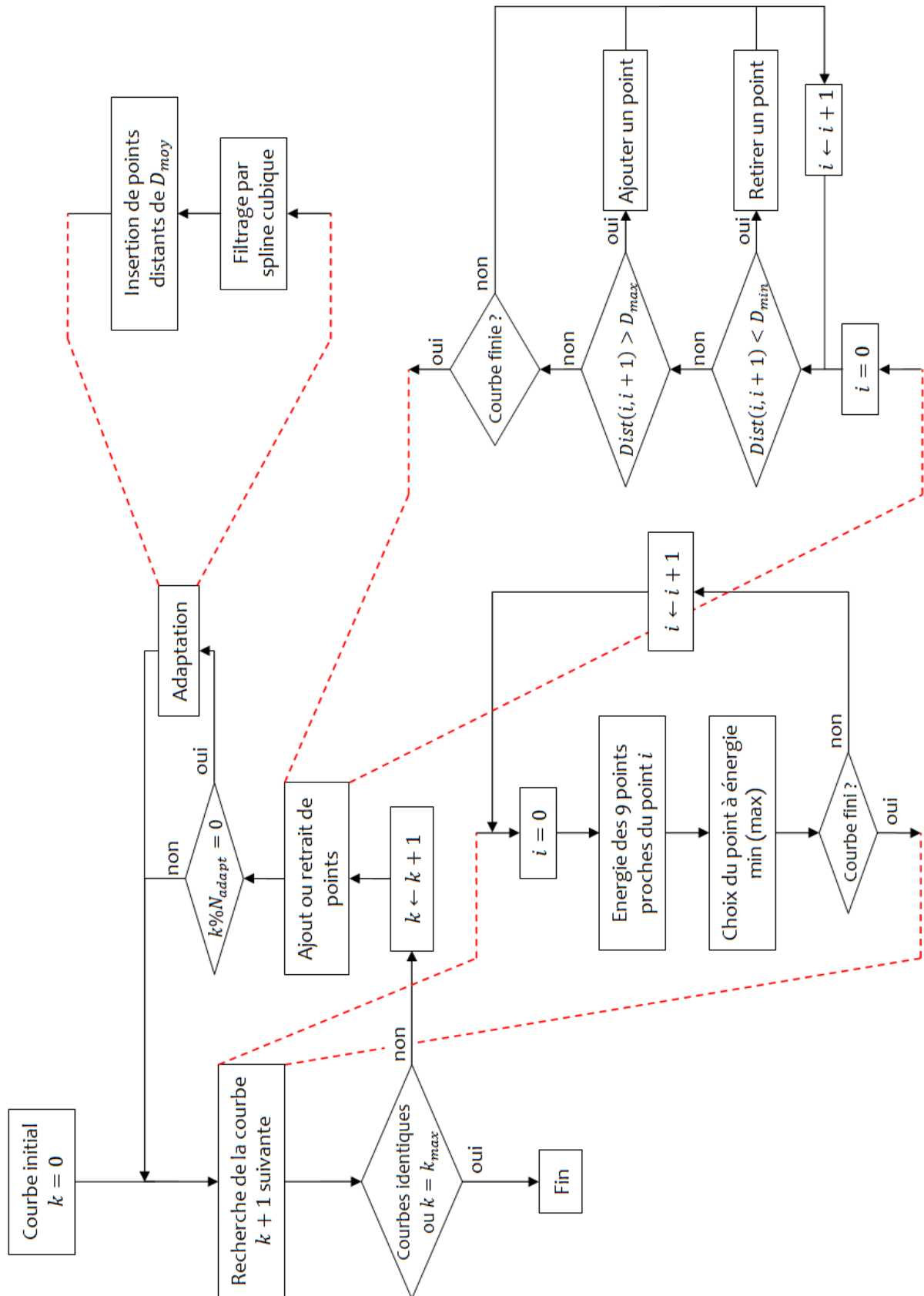


Fig. II-9 : Organigramme de l'algorithme de contour actif.

Afin d'obtenir une courbe ne s'appuyant pas sur les points du maillage initial celui-ci à été affiné. Chaque maille a été affinée vingt fois.

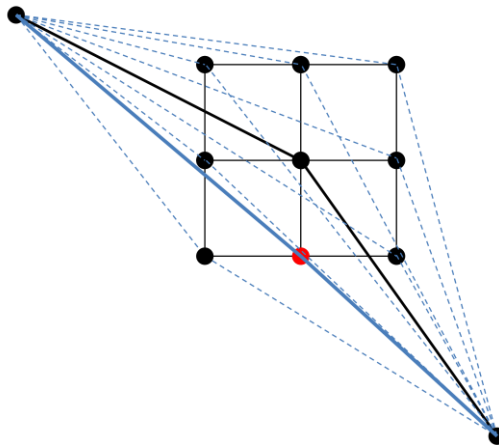
Pour le calcul des énergies, plusieurs critères ont été retenus. Elles sont classées en deux catégories :

- Les énergies internes, qui sont intrinsèques à la courbe,
- Les énergies externes qui dépendent de la surface sur laquelle va s'appuyer la courbe.

Parmi les énergies internes deux critères ont été retenus :

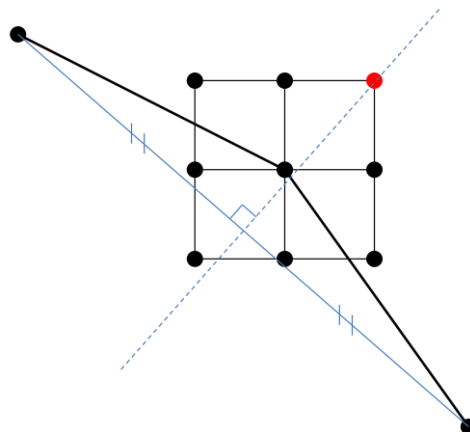
- La courbure (rigidité) :

Le point avec l'énergie minimale de courbure sera celui qui fait évoluer sa partie de courbe telle qu'elle aura la courbure minimale.



- L'écart entre les points (uniformité) :

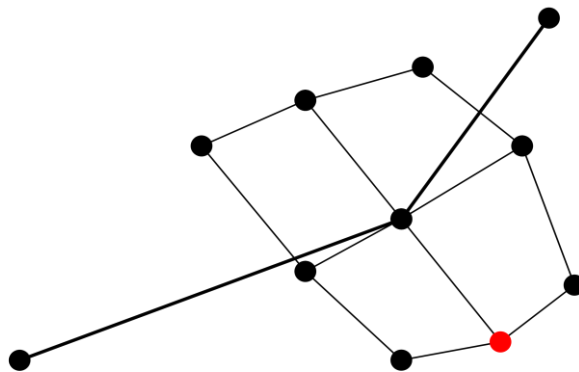
Le point avec l'énergie minimale d'uniformité sera celui qui minimise l'écart entre la distance entre le point et le point suivant et la distance entre le point et le point précédent.



Pour choisir les critères d'énergies externes, il faut avoir en tête la surface sur laquelle va évoluer la courbe. Dans notre cas, le choix de la courbe de départ s'est porté vers un cercle centré sur  $O$  qui serait totalement inclus dans la zone de pression positive. Ensuite, les points de la courbe devront « glisser » vers les basses pressions (sans devenir négatives) et se rapprocher de la zone de pression nulle. Ces choix font ressortir deux critères :

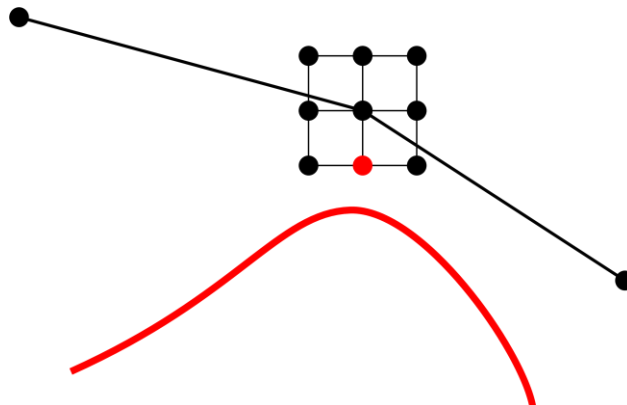
- Le gradient :

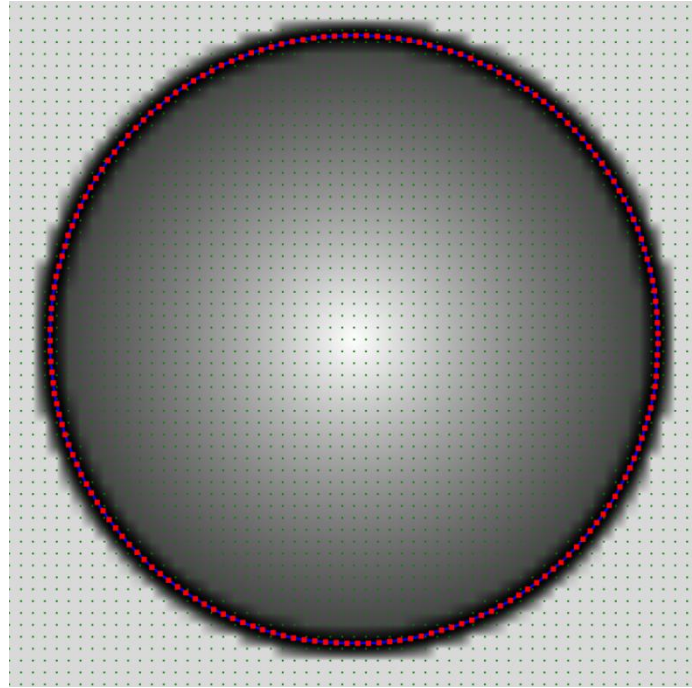
Le point avec l'énergie minimal de gradient sera celui qui diminue le plus la pression associée à ce point.



- La distance aux forts gradients :

Dans ce cas, il faut reconsidérer la surface sur laquelle s'appuie la courbe pour que de forts gradients apparaissent là où la pression s'annule. Les points vont alors « glisser » non pas sur la surface de pression mais sur la surface du carré de la pression. Le point choisi sera alors celui qui se trouve le plus proche de variations importantes du carré de la pression.





**Fig. II-10 : Convergence d'une courbe par la méthode du contour actif.**

Cet algorithme est appliqué à la situation de punch présenté au paragraphe II.3.2. La Fig. II-10 montre la convergence du contour actif. Les points verts représentent le maillage initial du plan, l'image en niveaux de gris représente la surface du carré de la pression, les points rouges sont les points de la courbe trouvée.

Ces points permettent alors de trouver, pour chaque point  $M$  du plan, le segment de la courbe qui va couper le segment  $[OM]$  et donc de trouver le point  $C$  comme intersection de ces deux droites. Ensuite, la formule (II-45) doit être utilisée pour trouver la valeur du nouveau champ de déplacement au point  $M$ ,  $u_z^{(k+1)}(M)$ . Il faut évaluer :

- $u_z^{(k)*}(M)$ , c'est le champ de déplacement en  $M$  après la convolution avec le champ de pression écrêté  $p_E^{(k)}$ .
- $u_z^{(k)*}(C)$ , le point  $C$  n'est pas sur le maillage. Il est évalué par interpolation des champs  $u_z^{(k)*}$  qui forment la maille contenant  $C$ .
- $u_z^{(k+1)}(C)$ , il est évalué par interpolation des champs  $u_z^l$  qui forment la maille contenant  $C$  puisque après recollage ce point  $C$  doit coller à l'indenteur.
- $u_z^{(k)*}(M_\infty)$ , c'est le champ de déplacement du point le plus éloigné de  $O$  après la convolution avec le champ de pression écrêté  $p_E^{(k)}$ .
- $u_z^{(k+1)}(M_\infty)$ , nous considérons que ce point est suffisamment éloigné de  $O$  pour que la distance entre  $M_\infty$  et un point de la surface  $(S)^{(k)}$  soit équivalent à la distance  $R = OM_\infty$  :

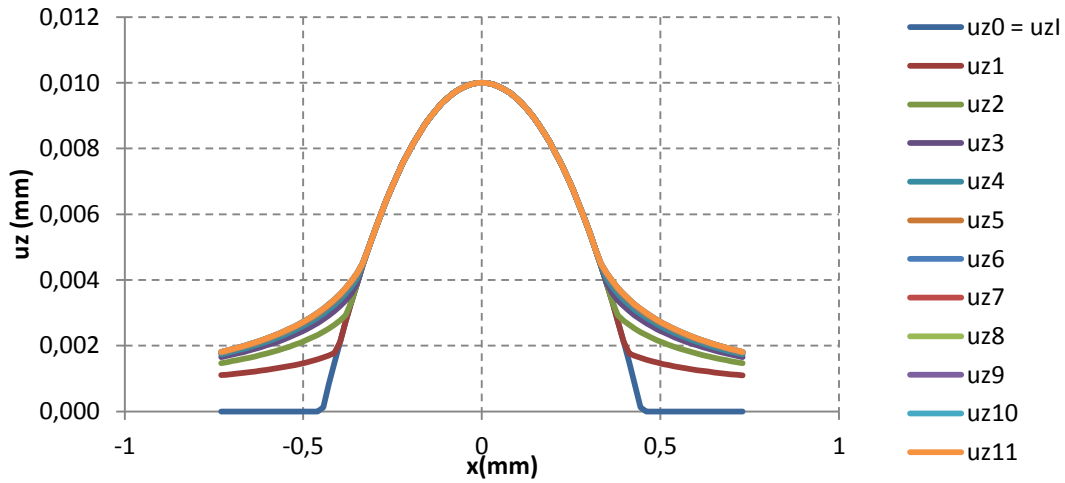


Fig. II-11 : Évolution du champ de déplacement de la surface de contact au cours de l’algorithme.

$$\begin{aligned}
 u_z^{(k+1)}(M_\infty) &= \frac{1-\nu}{2\pi G} \psi(M_\infty) \\
 &= \frac{1}{R} \iint_{(S)^{(k)}} p(\xi, \eta) d\xi d\eta
 \end{aligned}
 \tag{II-46}$$

### II.3.3.c Itération de l’algorithme DECR

La

Fig. II-11 montre l’évolution du champ de déplacement à chaque itération lorsque l’algorithme DECR est appliqué à la situation du paragraphe II.3.2.c. Les itérations ont été arrêtées lorsque l’écart moyen entre deux surfaces successives était inférieur 0.005%. La Fig. II-12 montre l’évolution du champ de pression. Le champ de pression tend vers une courbe qui est nulle en dehors de la surface de contact. Afin de mieux évaluer la justesse de la simulation, elle va être comparée aux résultats de la théorie de Hertz et à la méthode des éléments finis pour des situations géométriques plus complexes.

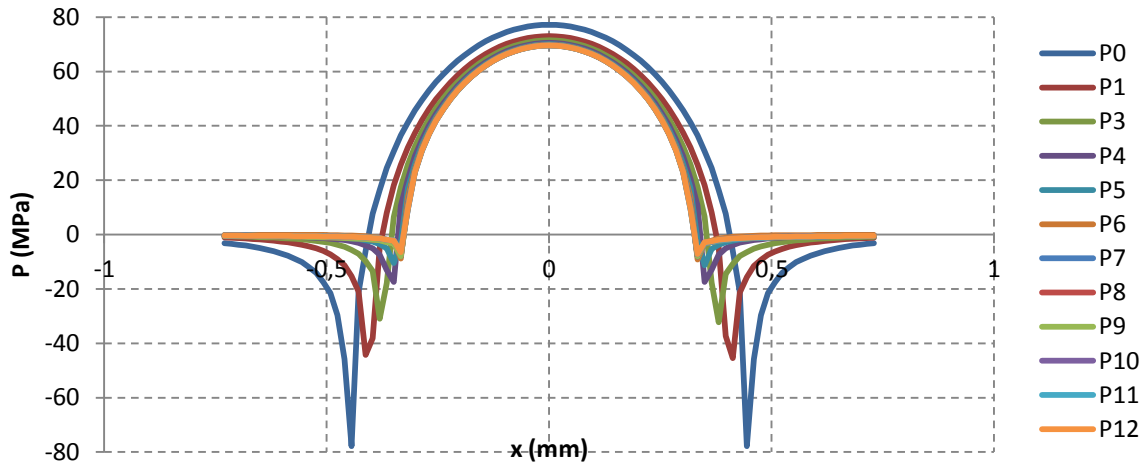


Fig. II-12 : Évolution du champ de pression au cours de l'algorithme.

## II.4 Etudes de cas

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'efficacité de la méthode implémentée. Les deux premiers cas étudiés seront des situations de Hertz – bille et ellipsoïde. Les résultats seront comparés à la méthode de Hertz. Les cas suivants concerneront des géométries plus complexes qui sont rencontrées notamment dans l'industrie des roulements. Les résultats seront comparés à la méthode des éléments finis.

### II.4.1 Cas de Hertz

#### II.4.1.a Champ de pression au contact entre une bille et un plan

La situation étudiée est toujours la même. Cette fois le résultat de la simulation est comparé aux valeurs que l'on trouve à l'aide de la théorie de Hertz.

La théorie de Hertz montre que le champ de pression qu'impose une bille de rayon  $R$  sur un massif semi-infini lorsque qu'elle subit un effort  $F$  est :

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{II-47})$$

Avec :

$$a = \left( \frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (\text{II-48})$$

$$p_0 = \left( \frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (\text{II-49})$$

Et que :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \left( \frac{9F^2}{16RE^*2} \right)^{1/3} \quad (\text{II-50})$$

Donc dans le cas d'une bille de rayon  $R = 10 \text{ mm}$  qui s'enfonce de  $\delta = 10 \mu\text{m}$  :

- $F = 14.65 \text{ N}$
- $a = 0.316 \text{ mm}$
- $p_0 = 69.50 \text{ MPa}$

Cela permet de comparer le champ de pression trouvé par DECR et le champ de pression de Hertz (Fig. II-13).

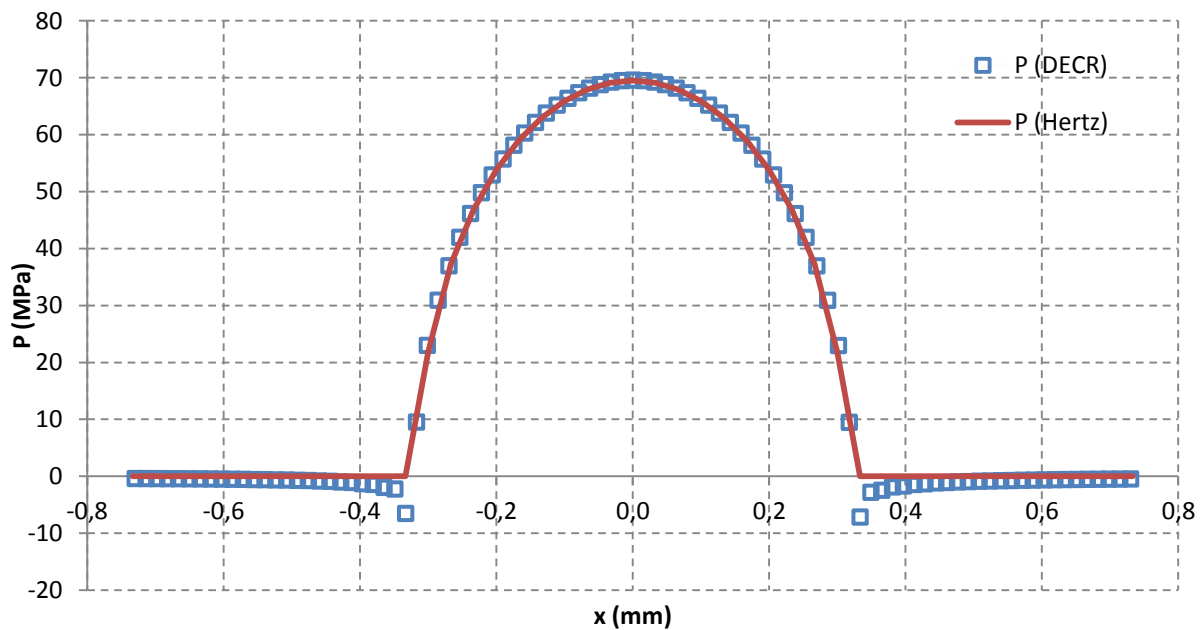


Fig. II-13 : Comparaison entre le champ de pression de Hertz et celui trouvé par DECR.

L'expression du déplacement de la surface peut aussi être déduite de la théorie de Hertz :

- Pour un point de la surface de contact ( $r < a$ ), la déformée est celle de l'indenteur.
- En dehors, avec  $\rho = x/a$  :

$$u_z(r) = \frac{1 - \nu^2}{E} a p_0 \left( \text{Atan} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \right) - \frac{\rho^2}{2} \left[ \text{Atan} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \right) - \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho^2} \right] \right) \quad (\text{II-51})$$

La comparaison entre DECR et cette formulation est mise en évidence sur la Fig. II-14.

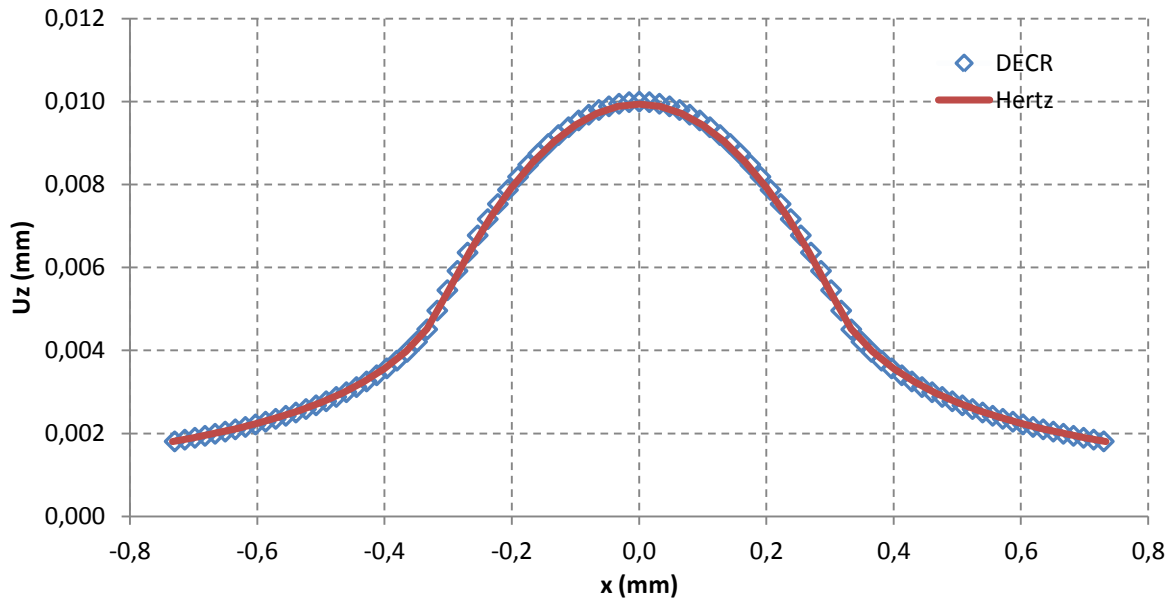


Fig. II-14 : Comparaison entre le champ de déplacement trouvé par la théorie de Hertz et celui trouvé par DECR.

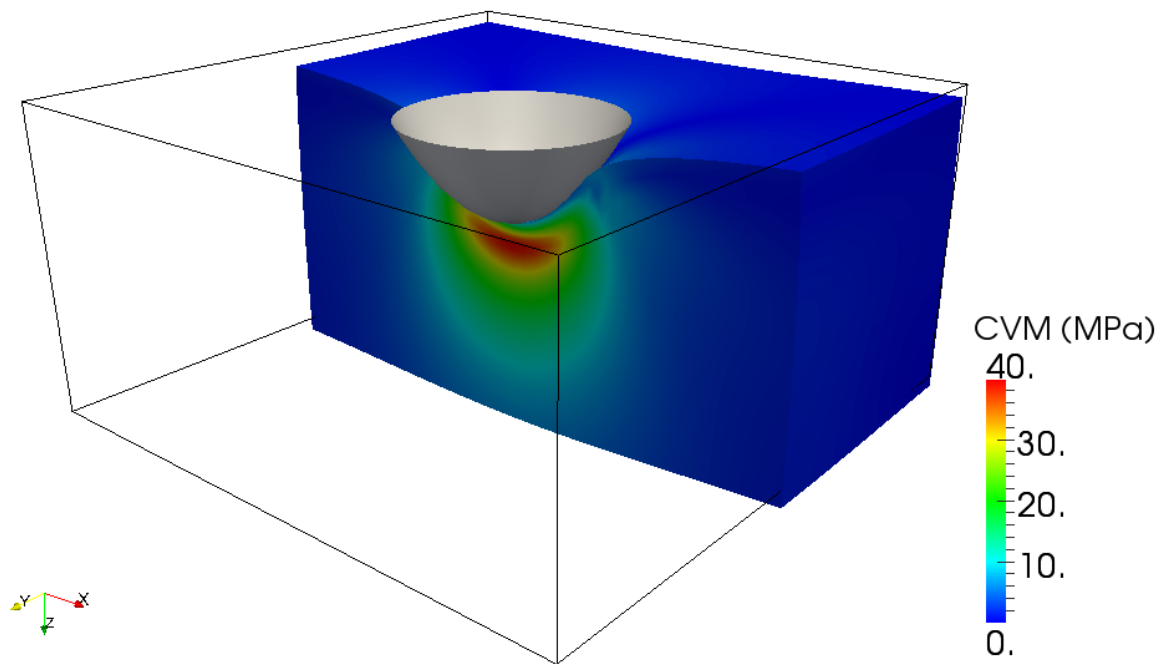


Fig. II-15 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini.

La Fig. II-15 montre la distribution des contraintes équivalentes au niveau du contact ( $2\text{mm} \times 2\text{mm}$ ) à l'intérieur du solide semi-infini sur une profondeur de  $1\text{mm}$ . L'effet d'anamorphose est ici de 40. Le maximum de contrainte de Von Mises se trouve bien légèrement en dessous de la surface.



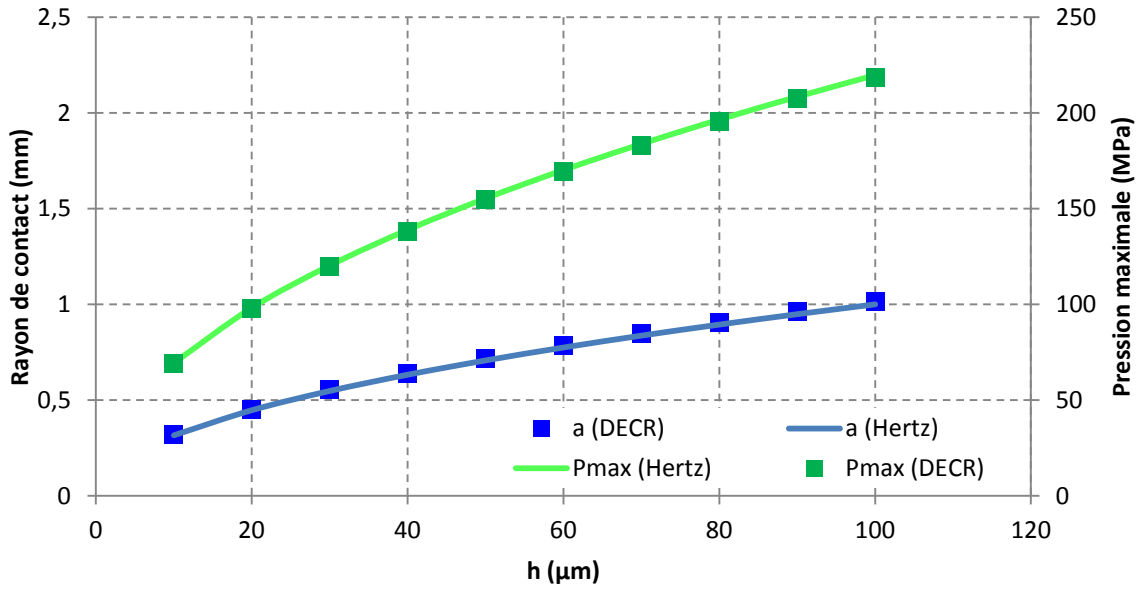


Fig. II-16 : Évolution du rayon du contact et de la pression maximale en fonction de l'enfoncement appliqué à la théorie de Hertz et à l'algorithme DECR.

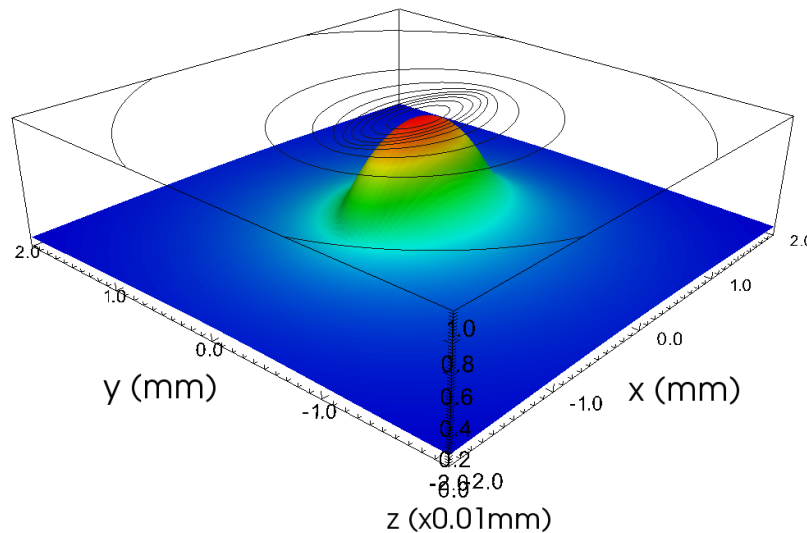


Fig. II-17 : champ de déplacement imposé par un ellipsoïde d'après la théorie de Hertz.

La comparaison entre les paramètres du contact – rayon de contact – et de la pression – pression maximale pour différentes valeurs d'enfoncement  $h$  permet aussi d'évaluer la précision de la simulation (Fig. II-16).

#### II.4.1.b Champ de pression au contact entre un ellipsoïde et un plan

Pour les mêmes conditions d'enfoncement, l'algorithme est mis en œuvre pour un ellipsoïde qui aurait un rayon de courbure sur l'axe  $x$  de  $R_x = 50 \text{ mm}$  et sur l'axe  $y$  de  $R_y = 10 \text{ mm}$ .

Le champ de déplacement que prévoit la théorie de Hertz est représenté sur la Fig. II-17.

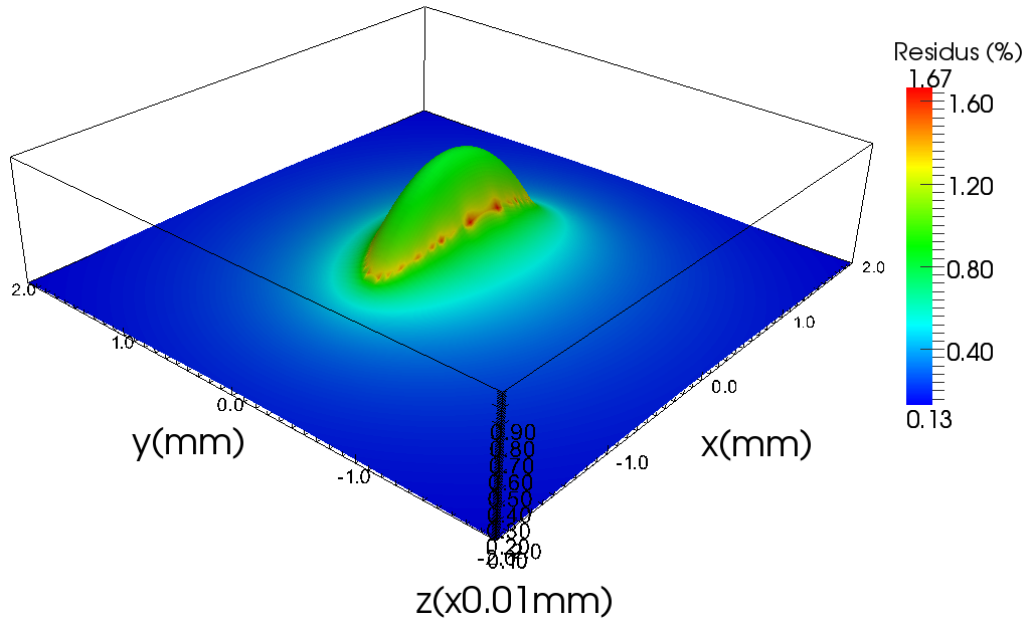


Fig. II-18 : Champ de déplacement calculé par DECR et la différence avec la théorie de Hertz en échelle de couleurs.

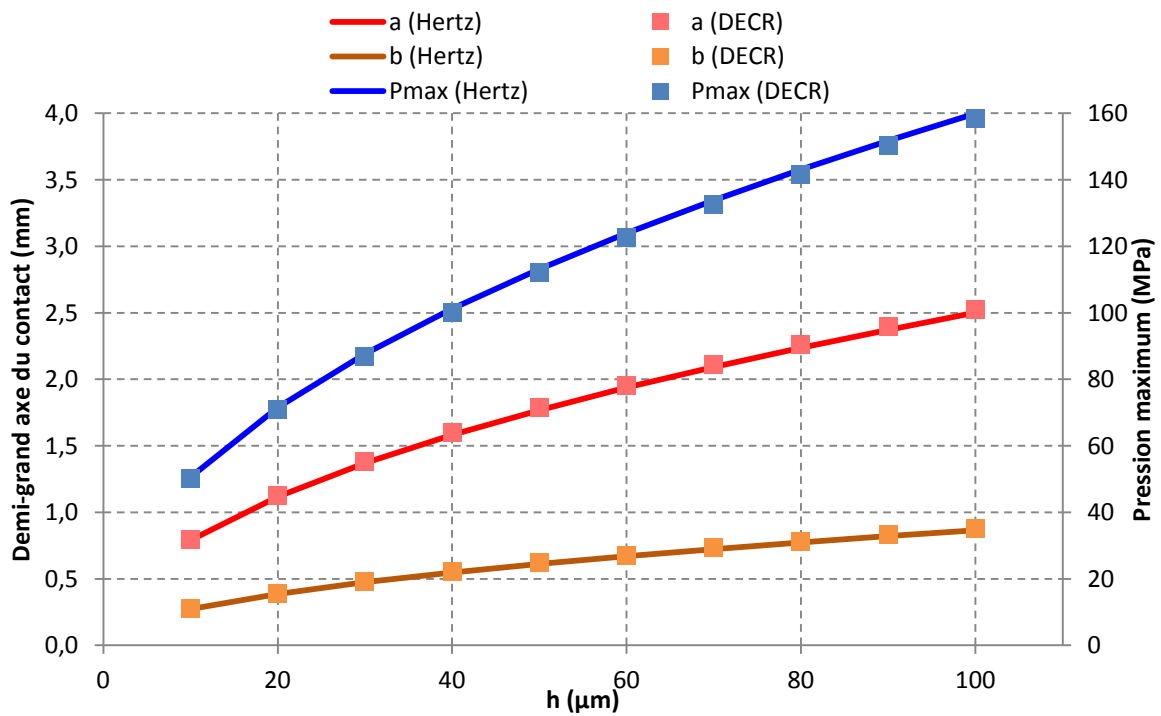


Fig. II-19 : Comparaison des demi grands-axes et de la pression maximale en fonction de l'enfoncement pour la théorie de Hertz et pour l'algorithme DECR

La Fig. II-18 montre le champ de déplacement calculé par DECR et les couleurs représentent l'écart avec le champ de déplacement évalué par la théorie de Hertz. L'évolution des demi-grands axes de contact et de la pression maximale est conforme à la théorie de Hertz (Fig. II-19).

## II.4.2 Cas de géométries complexes

Hormis les situations telles que celles d'indenteurs paraboloides traités par la théorie de Hertz, le calcul des champs élastiques ne peut pas se faire analytiquement. Afin d'évaluer la justesse de l'algorithme DECR, différentes géométries vont être testées. Les résultats seront comparés à des simulations obtenues par la méthode des éléments finis. Si les géométries choisies peuvent sembler artificielles, elles ont le mérite de tester la validité de l'algorithme pour des types de géométrie différentes : problèmes axisymétriques ou non, continuité ou discontinuité de la tangence de la surface.

### II.4.2.a Champs élastiques imposés par un poinçon à correction tangente.

Dans cet exemple, le cas d'un problème axisymétrique est abordé avec une surface présentant une continuité de la tangence de la surface. Un poinçon à correction tangente a alors été imaginé comme un solide de révolution qui va être délimité par une zone plate de rayon  $R_{zp}$  et corrigé par un paraboloides de rayon de courbure  $R_C$  tangent au disque. Si  $M(r, z)$  est un point de la surface de cet indenteur :

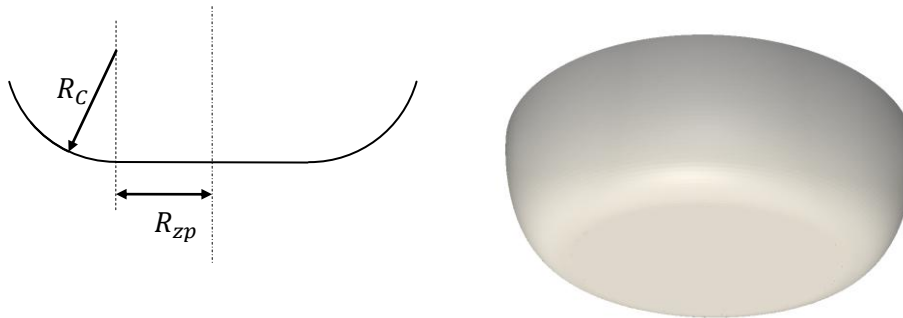


Fig. II-20 : Géométrie du poinçon à correction tangente

$$\begin{cases} z = 0 & r \leq R_{zp} \\ z = \frac{(r - R_{zp})^2}{2R_C} & r > R_{zp} \end{cases} \quad (II-52)$$

Pour tester l'algorithme avec cet indenteur, le poinçon à correction tangente considéré a les caractéristiques géométriques suivantes :

- $R_{zp} = 3 \text{ mm}$
- $R_C = 400 \text{ mm}$

Un grand rayon de courbure a été choisi pour corriger le poinçon afin que l'étendue de la zone corrigée en contact avec le massif semi-infini ne soit pas négligeable devant la dimension de la zone plate et donc que l'effet de correction soit significatif. Dans La situation testée, le poinçon

impose un enfoncement de cette géométrie de  $h = 10 \mu m$  dans du PMMA. Afin de valider l'algorithme DECR, une simulation par éléments finis de cette situation a été effectuée à l'aide du logiciel SAMCEF. Les courbes suivantes présenteront les résultats des deux méthodes de calcul.

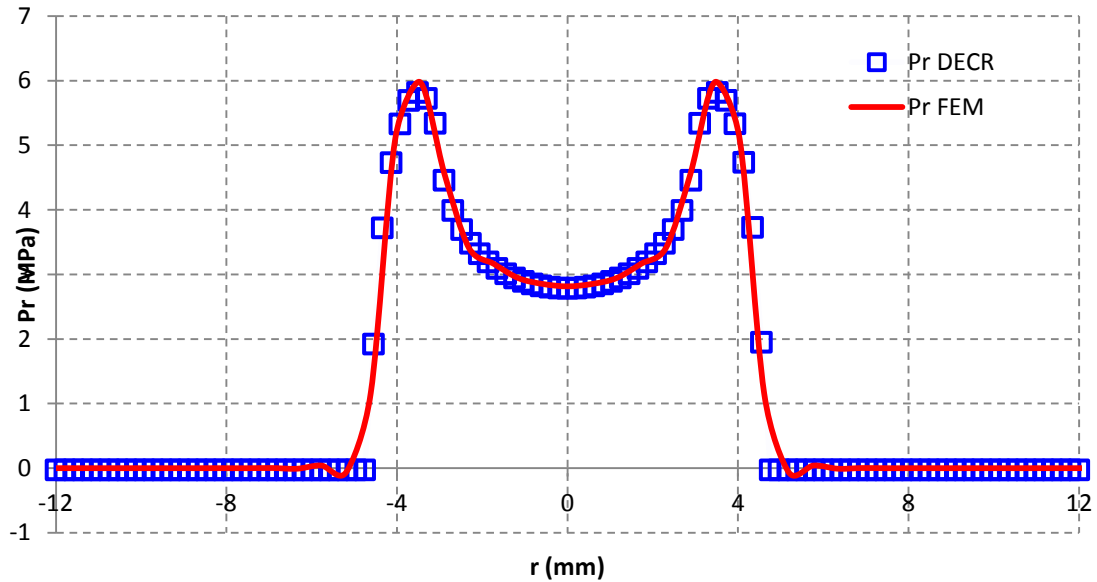


Fig. II-21 : Champ de pression obtenu pour un poinçon à correction tangente.

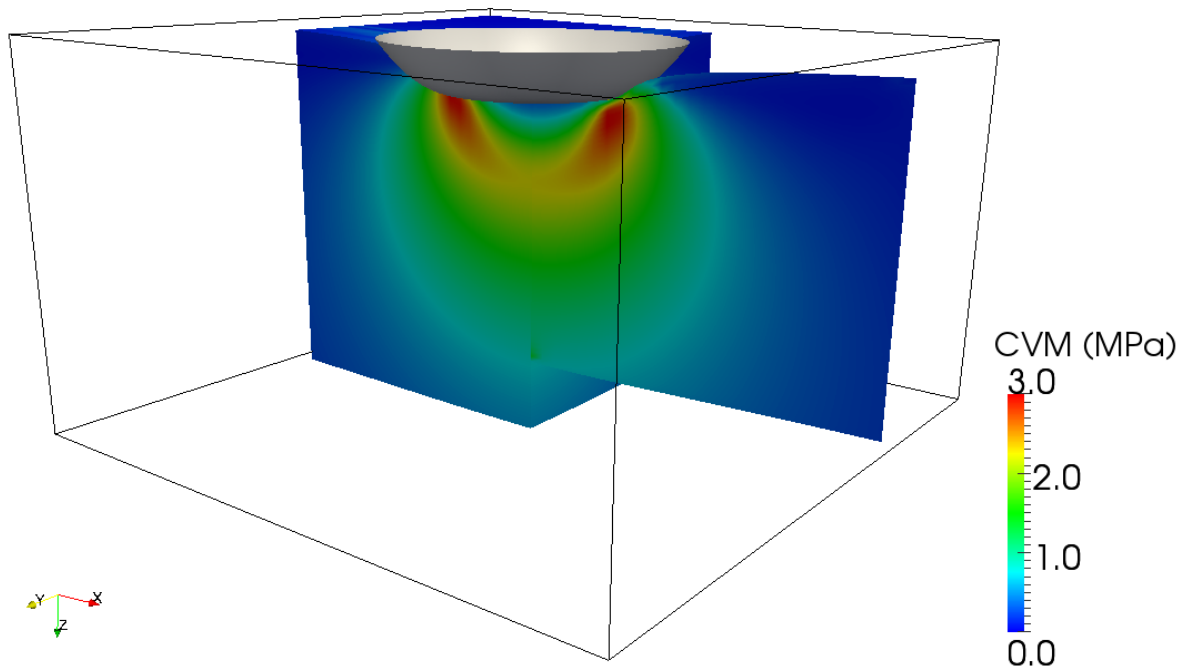


Fig. II-22 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini.

La Fig. II-21 montre le champ de pression entre les deux solides le long de l'axe  $Ox$ .

La Fig. II-22 représente la contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini dans un cube de  $26 \text{ mm} \times 26 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$ . Les valeurs à gauche de l'axe de contact sont celles calculées par

l'algorithme DECR, à droite le résultat de la simulation à l'aide des éléments finis. Un facteur d'anamorphose de 300 a été appliqué afin de mieux visualiser la déformation de la surface.

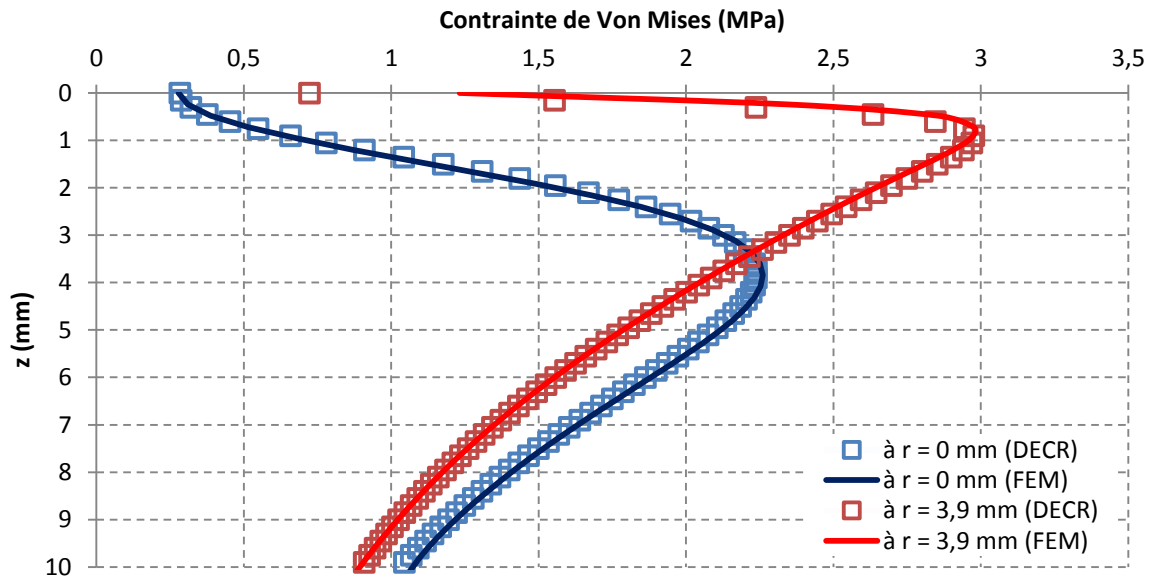


Fig. II-23 : Comparaison des calculs pour l'évolution suivant  $Oz$  de la contrainte de von Mises

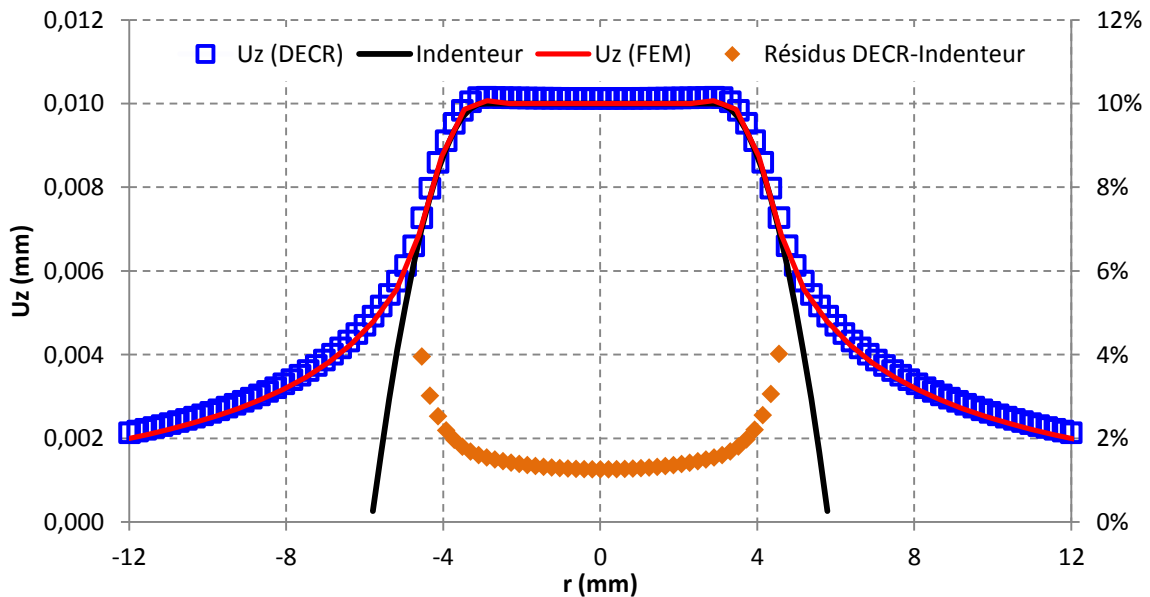


Fig. II-24 : Déformée de la surface au niveau du contact.

Pour mieux comparer les résultats obtenus par les deux méthodes de calcul, la Fig. II-23 montre l'évolution de la contrainte de Von Mises le long de deux verticales différentes.

La figure suivante (Fig. II-24) représente la déformée de la surface au niveau de la zone de contact. En moyenne, l'écart entre la surface déformée et l'indenteur est de 1.7%, là où le contact existe.

La Fig. II-25 représente l'évolution du rayon de la zone de contact lorsque l'enfoncement de l'indenteur évolue.

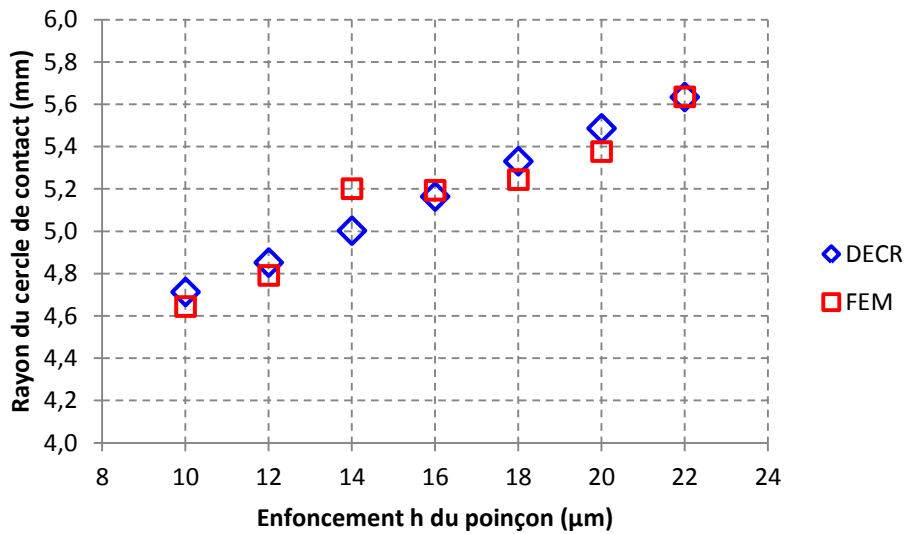


Fig. II-25 : Evolution du rayon de contact en fonction de l'enfoncement.

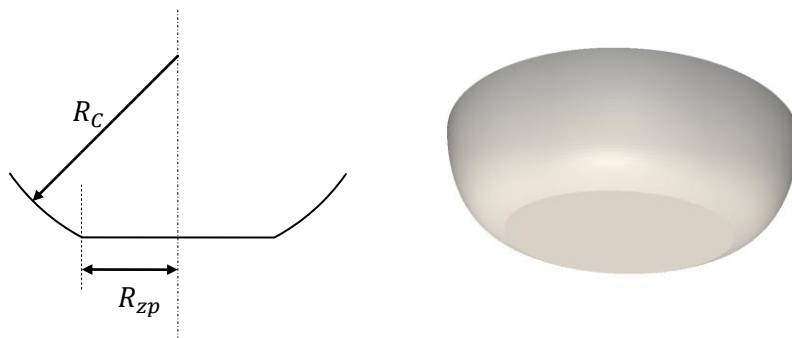


Fig. II-26 : Géométrie du poinçon à correction non tangente.

II.4.2.b Champ de pression imposé par un poinçon à correction non tangente.

Maintenant, la géométrie considérée reste un problème axisymétrique mais cette fois la surface présente une discontinuité de la dérivée de la surface. Un poinçon à correction non tangente a été imaginé comme un solide de révolution qui va être délimité par une zone plate de rayon  $R_{zp}$  et corrigé par un parabolôïde de rayon de courbure  $R_C$  sans être tangent au disque. Si  $M(r, z)$  est un point de la surface de cet indenteur :

$$\begin{cases} z = 0 & r \leq R_{zp} \\ z = \frac{r^2 - R_{zp}^2}{2R_C} & r > R_{zp} \end{cases} \quad (II-53)$$

Pour tester l'algorithme avec cet indenteur, le poinçon à correction non-tangente considéré a les caractéristiques géométriques suivantes :

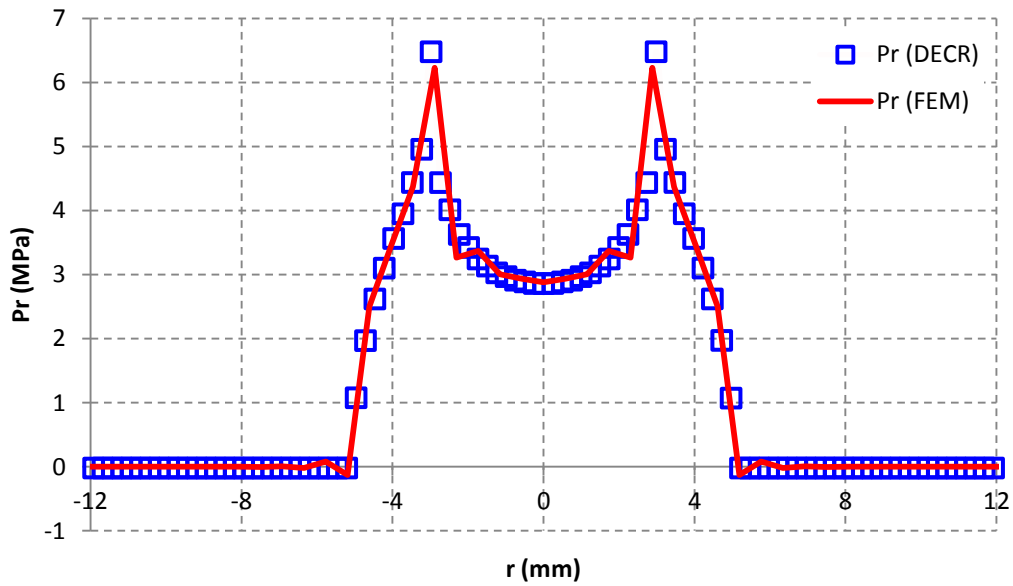


Fig. II-27 : Champ de pression obtenu pour un poinçon à correction tangente.

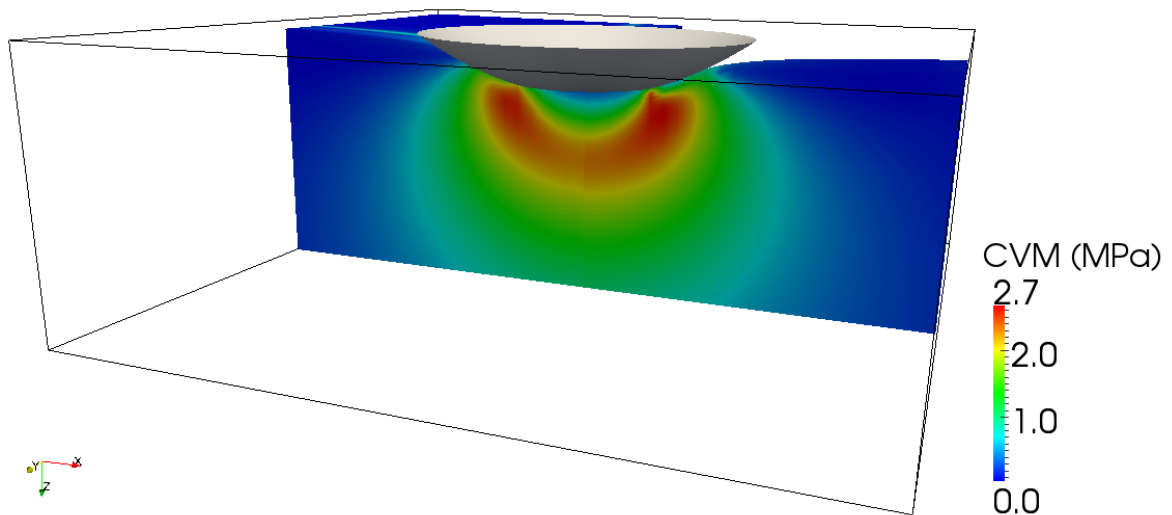


Fig. II-28 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini.

- $R_{zp} = 3 \text{ mm}$
- $R_C = 2000 \text{ mm}$

Dans La situation testée, le poinçon impose un enfoncement de cette géométrie de  $h = 10 \mu\text{m}$  dans du PMMA. La Fig. II-27 montre le champ de pression entre le deux solides le long de l'axe  $Ox$  pour une simulation avec l'algorithme DECR et celui trouvé avec la méthode des éléments finis.

La Fig. II-28 représente la contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini dans un cube de  $30\text{ mm} \times 30\text{ mm} \times 11\text{ mm}$ .

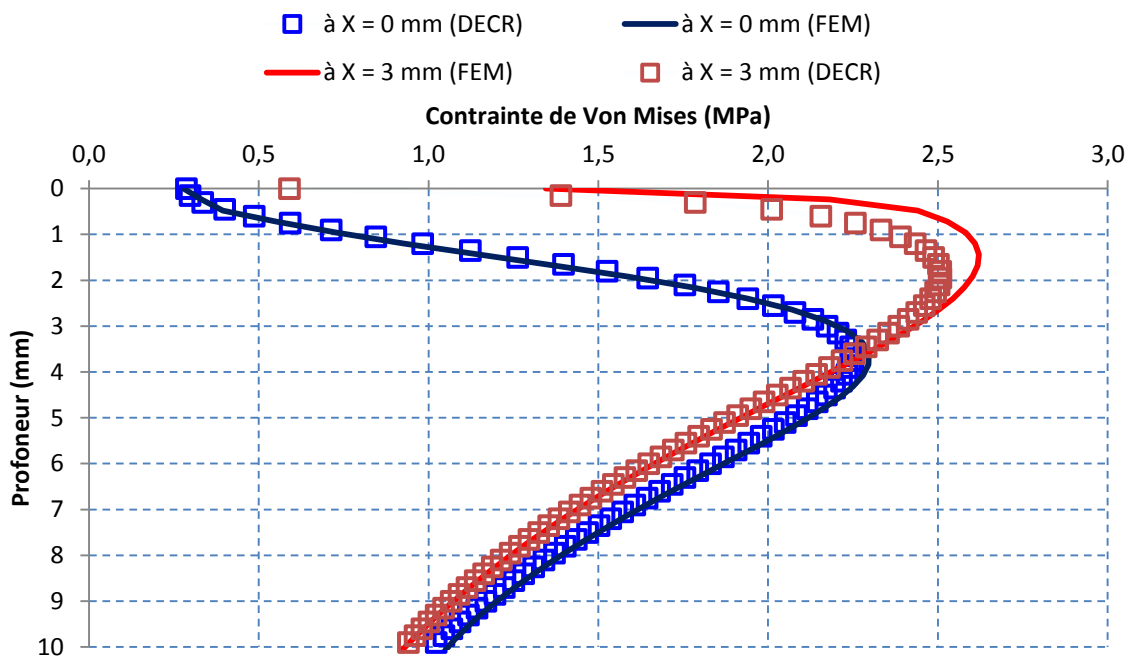


Fig. II-29 : Comparaison des calculs pour l'évolution suivant  $Oz$  de la contrainte de von Mises.

Les valeurs à gauche de l'axe du contact sont celles données par l'algorithme DECR, à droite les résultats de la simulation à l'aide des éléments finis. Un facteur d'anamorphose de 300 a été appliqué afin de mieux visualiser la déformation de la surface.

Comme dans le cas précédent, la comparaison de l'évolution de la contrainte de Von Mises en profondeur pour deux verticales différentes permet d'évaluer la justesse de l'algorithme DECR.

La figure suivante (Fig. II-30) représente la déformée de la surface au niveau de la zone de contact. En moyenne, l'écart entre la surface déformée et l'indenteur là où le contact existe est de 0.9%. La Fig. II-31 représente l'évolution du rayon de la zone de contact lorsque l'enfoncement de l'indenteur évolue.



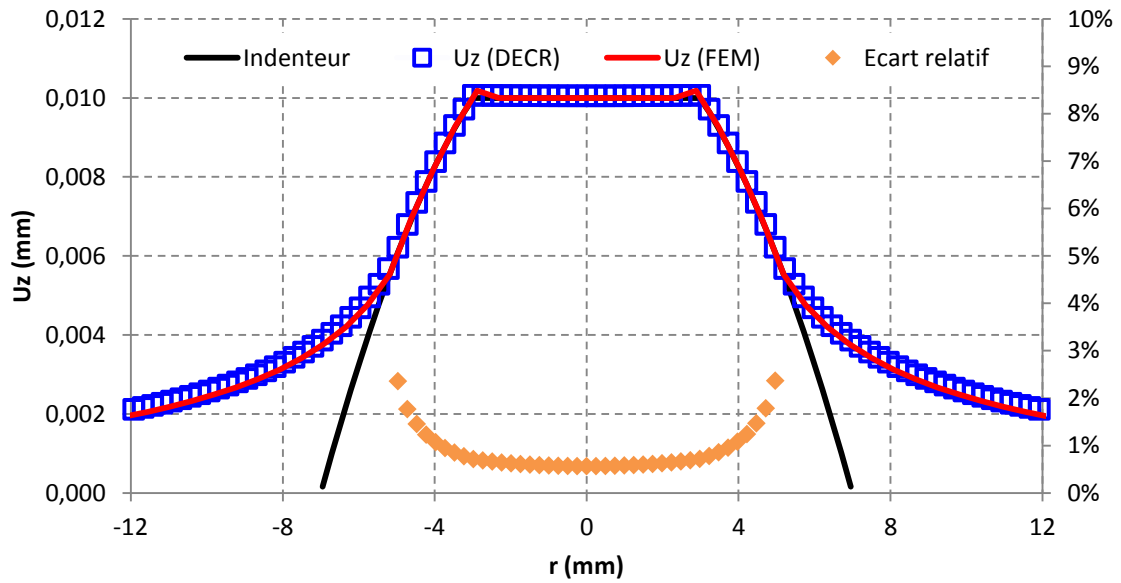


Fig. II-30 : Déformée de la surface au niveau du contact.

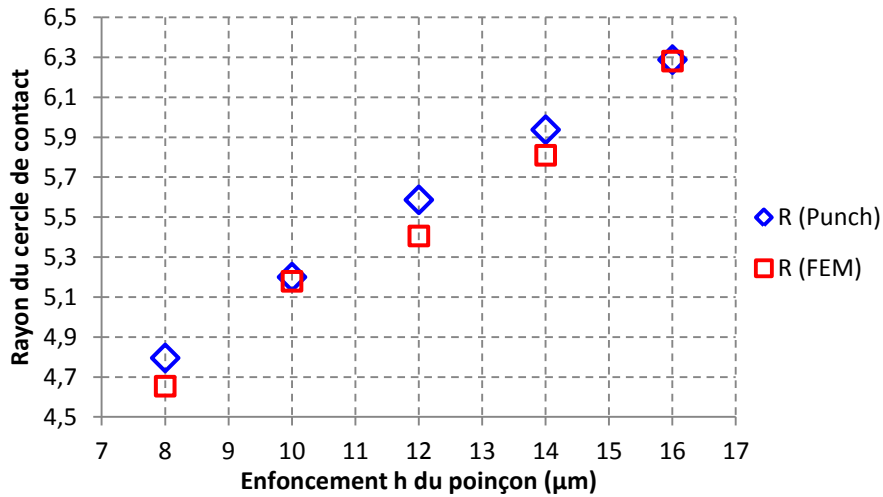


Fig. II-31 : Evolution du rayon de contact en fonction de l'enfoncement.

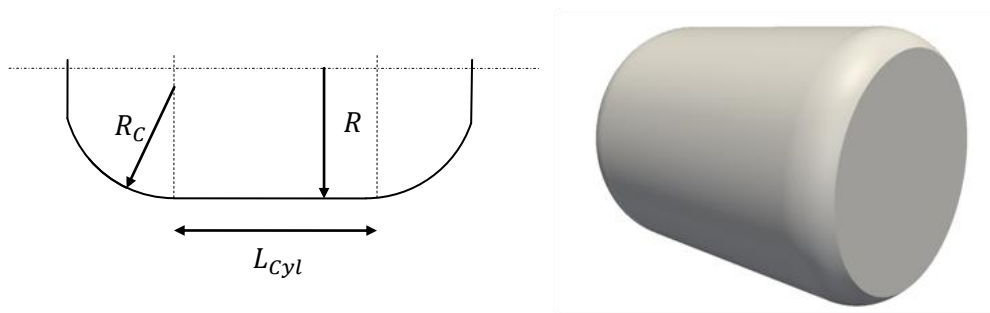


Fig. II-32 : Géométrie du rouleau à correction tangente.

#### II.4.2.c Champ de pression imposé par un rouleau à correction tangente

L'algorithme est maintenant testé pour une géométrie moins artificielle qui diffère du rouleau à correction tangente par l'absence de symétrie autour de l'axe  $Oz$ . Pour éviter l'usure due aux

surpressions, les roulementiers utilisent des rouleaux corrigés (Fig. II-32). Lorsque cette correction est dite tangente, le profil de ce rouleau de rayon  $R$  est une droite de longueur  $L_{cyl}$  qui se prolonge en un cercle de rayon  $R_C$ .

Pour tester l'algorithme avec cet indenteur, le rouleau à correction tangente considéré a les caractéristiques géométriques suivantes :

- $R = 10 \text{ mm}$
- $L_{cyl} = 14 \text{ mm}$
- $R_C = 400 \text{ mm}$

Dans la configuration testée, le rouleau impose un enfoncement de  $h = 10 \text{ }\mu\text{m}$  dans du PMMA. La Fig. II-33 montre le champ de pression entre les deux solides le long de l'axe  $Ox$ . Et la Fig. II-34 propose une représentation 3D de ce champ.

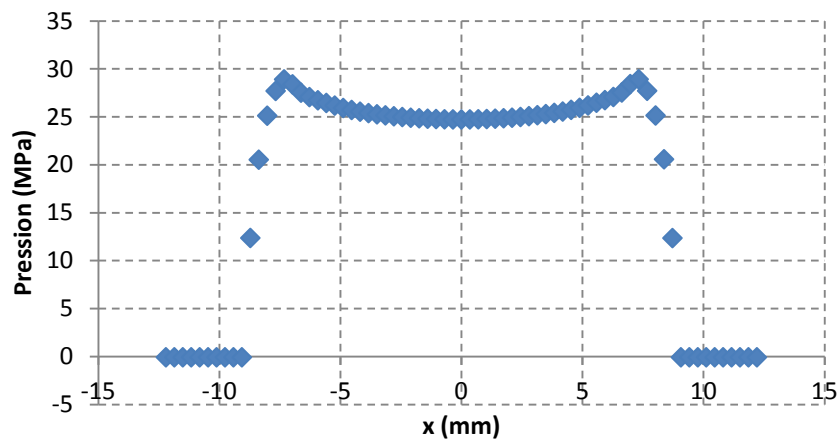


Fig. II-33 : Champ de pression obtenu pour un rouleau à correction tangente suivant l'axe  $Ox$ .

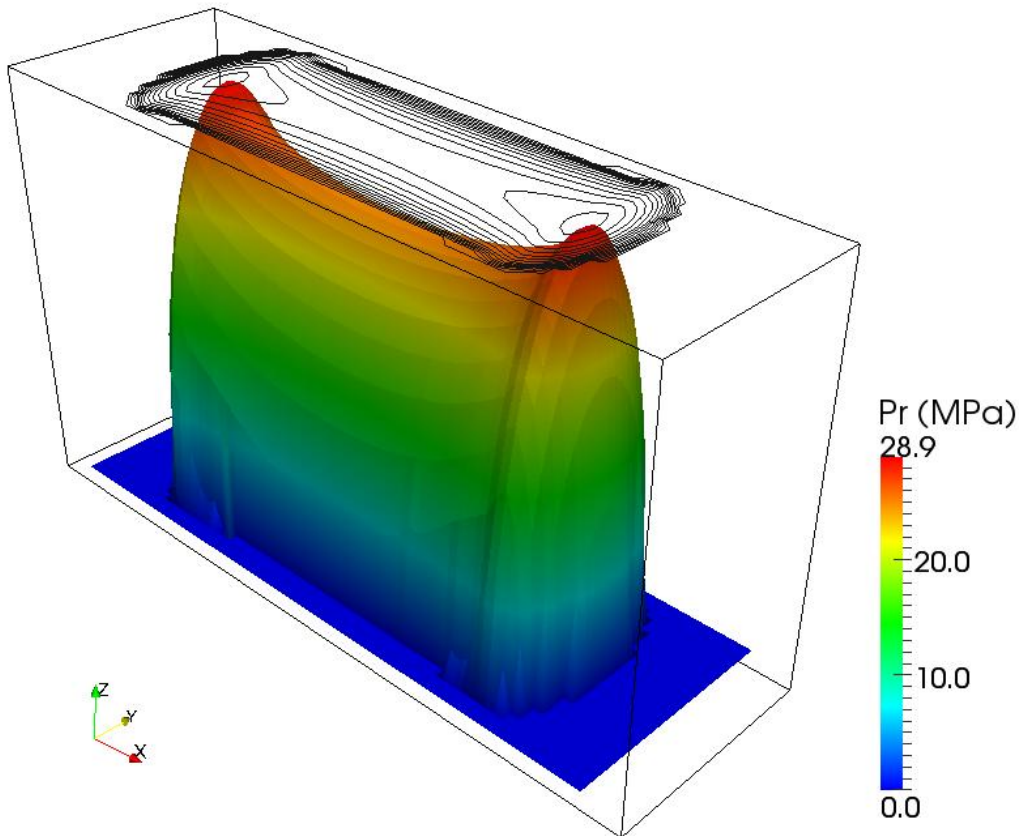


Fig. II-34 : Vue 3D du champ de pression imposé par un rouleau de roulement à correction tangente.

La Fig. II-35 représente la contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini dans un cube de  $44 \text{ mm} \times 2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ . Les valeurs à gauche sont celles calculées par l'algorithme DECR, à droite les résultats de la simulation à l'aide des éléments finis. Un facteur d'anamorphose de 50 a été appliqué afin de mieux visualiser la déformation de la surface.

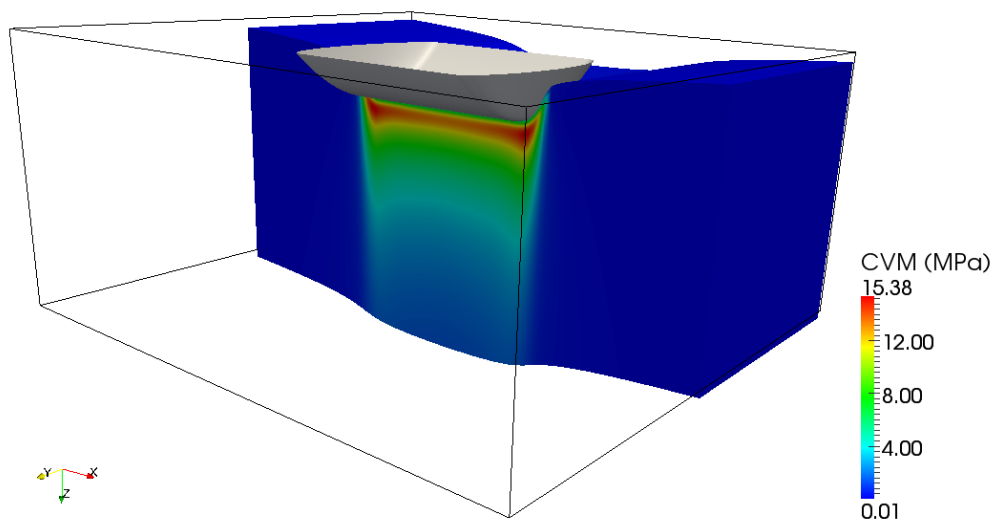


Fig. II-35 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini.

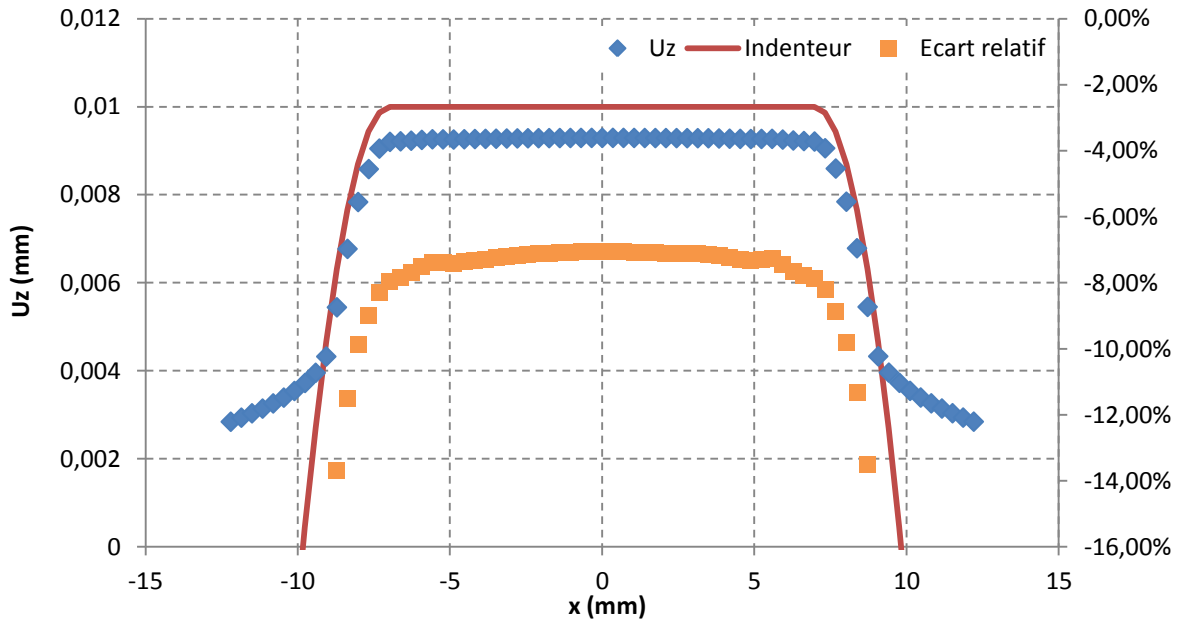


Fig. II-36 : Déformée de la surface suivant le plan de symétrie au niveau du contact.

La figure suivante (Fig. II-36) représente la déformée de la surface au niveau de la zone de contact, là où le contact existe. En moyenne, l'écart entre la surface déformée et l'indenteur est de 8.9%. On commence à voir ici les limites de la programmation de cet algorithme. Il est possible que la méthode numérique utilisée conduise à un champ de pression d'une précision et donc que les calculs par transformée de Fourier propagent les erreurs.

Il est possible aussi que la déformation qu'induit le rouleau ne soit pas vraiment négligeable aux bords de la zone discrétisée. Par conséquent un phénomène de repli interviendrait dans la FFT et perturberait grandement les calculs

## II.5 Perspectives

### II.5.1 Géométrie à pression souhaitée

L'objectif de ce paragraphe est de voir comment utiliser la méthode de calcul précédente pour prévoir la forme d'un indenteur afin qu'il induise le champ de pression voulue. Par exemple, un des problèmes que rencontrent les roulementiers est la présence de pics de surpressions au contact entre les roulements et les bagues. Or, si un champ de pression bien défini sur une surface ( $S$ ) est souhaité et si les frottements sont négligés, l'équation (II-41) permet d'obtenir la déformation qu'un tel champ de pression induirait. Par conséquent, la géométrie de l'indenteur au contact peut être calculée. Avant de s'intéresser à ce cas de recherche de géométrie "roulante", le cas plus théorique de poinçon idéal est abordé.

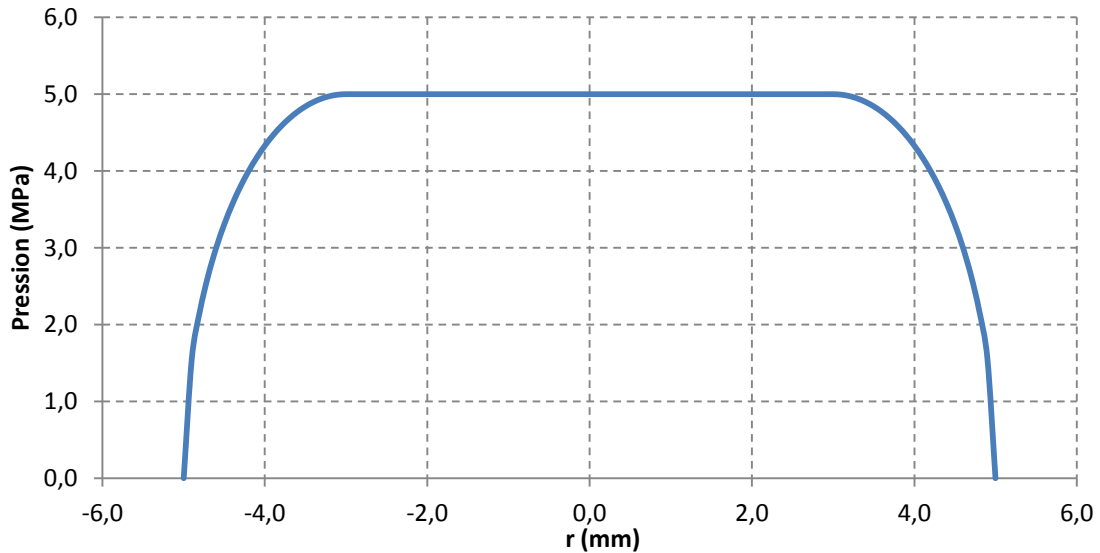


Fig. II-37 : Champ de pression souhaité pour le poinçon "idéal".

### II.5.1.a Géométrie d'un poinçon idéal

En prenant les dimensions caractéristiques du contact et des valeurs comparables de pression pour le cas du poinçon à correction tangente présenté au II.4.2.a, supposons que l'on souhaite avoir un champ de pression constant à  $p_{max} = 5 \text{ MPa}$  sur un cercle de rayon  $R_{zp} = 3 \text{ mm}$  et qui décroîtrait en ellipsoïde au bord sur  $R_B = 2 \text{ mm}$  (Fig. II-37) :

$$p : (x, y) \rightarrow \begin{cases} p_{max} & \text{si } r = \sqrt{x^2 + y^2} < R_{zp} \\ p_{max} \sqrt{1 - \frac{(r - R_{zp})^2}{R_B^2}} & \text{si } R_{zp} < r < R_{zp} + R_B \end{cases} \quad (\text{II-54})$$

L'utilisation de l'équation (II-41) permet d'obtenir la déformée qu'un tel champ de pression induirait et par conséquent la géométrie de l'indenteur qui en serait responsable – en tout cas dans la zone de contact (Fig. II-38).

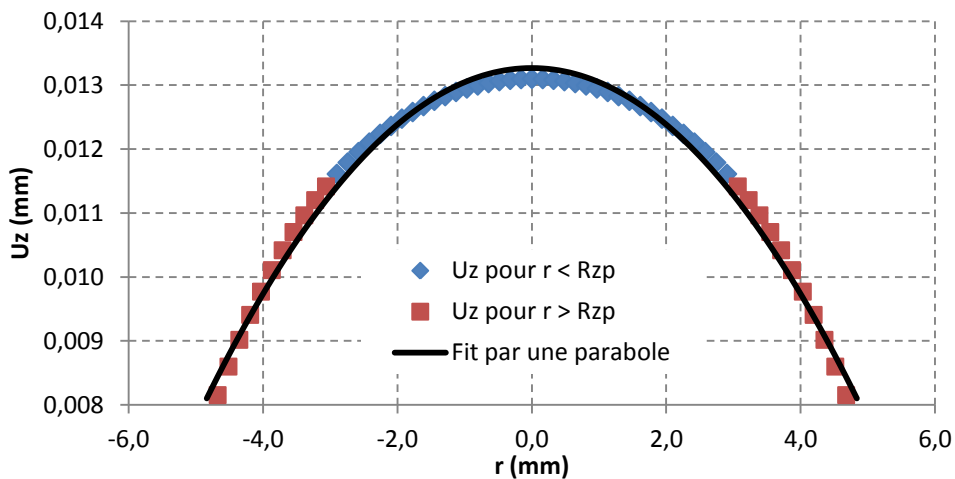


Fig. II-38 : Déformée d'un poinçon "idéal".

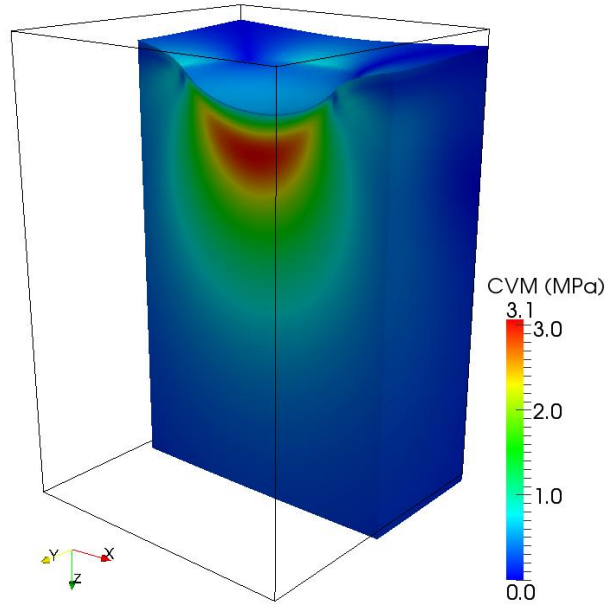


Fig. II-39 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi infini.

La Fig. II-39 montre les contraintes de Von Mises induites par ce champ de pression dans un cube de  $16 \text{ mm} \times 16 \text{ mm} \times 24 \text{ mm}$  sous l'indenteur (une anamorphose de 300 a été appliquée).

La géométrie obtenue n'est donc plus une parabole – sinon le champ de pression serait elliptique. La suite de l'étude pourrait alors examiner les courbures pour  $r < R_{zp}$  et  $r > R_{zp}$  et le comportement de cette géométrie en fonction de l'enfoncement.

#### II.5.1.b Géométrie d'un rouleau idéal

Dans cette section, le cas d'un problème avec une contrainte "géométrie roulante" est abordé. Les dimensions caractéristiques du contact pour le rouleau à correction tangente présenté au II.4.2.c et les valeurs du champ de pression induit trouvées fournissent les dimensions caractéristiques de la zone de contact qu'aurait un rouleau "idéal" et le champ de pression maximal :

sur  $L_{cyl} = 14 \text{ mm}$ , le champ de pression serait elliptique entre  $-L_y$  et  $L_y = 0.15 \text{ mm}$  suivant l'axe  $Oy$  et invariant suivant l'axe  $Ox$  à une pression  $P_{max}$ . Puis sur les bords sur  $L_x = 2 \text{ mm}$  la pression décroîtrait elliptiquement :

$$\begin{aligned}
 p : (x, y) \rightarrow p_{max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{L_y^2}} & \quad \text{si } |x| < \frac{L_{cyl}}{2} \\
 p_{max} \sqrt{1 - \frac{y^2}{L_y^2} - \frac{\left(|x| - \frac{L_{cyl}}{2}\right)^2}{L_x^2}} & \quad \text{si } \frac{\left(|x| - \frac{L_{cyl}}{2}\right)^2}{L_x^2} + \frac{y^2}{L_y^2} < 1
 \end{aligned} \tag{II-55}$$

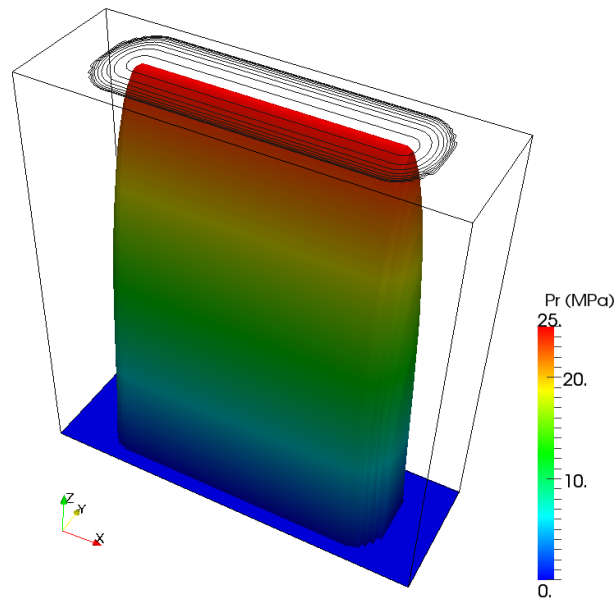


Fig. II-40 : champ de pression qu'imposerait un rouleau "idéal".

De la même manière qu'au 0 la déformée est calculable. La Fig. II-41 représente cette déformée avec un facteur d'échelle de 20 sur l'axe  $Oy$  et de 500 sur l'axe  $Oz$ .

La Fig. II-42 montre les contraintes de Von Mises induites par ce champ de pression dans un cube de  $29\text{ mm} \times 0.48\text{ mm} \times 0.72\text{ mm}$  sous l'indenteur (une anamorphose de 20 a été appliquée).

La Fig. II-43 montre la déformation suivant l'axe  $Ox$ . La géométrie ne correspond plus à une forme simple. Suivant l'axe  $Oy$  par contre la déformation semble parabolique (Fig. II-44), ce qui semble important puisque dans cette direction le rouleau doit avoir une géométrie de révolution.

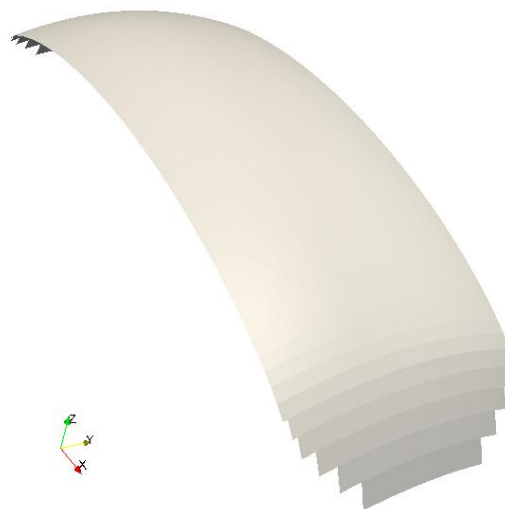


Fig. II-41 : Géométrie du rouleau "idéal" en contact avec le massif semi-infini.

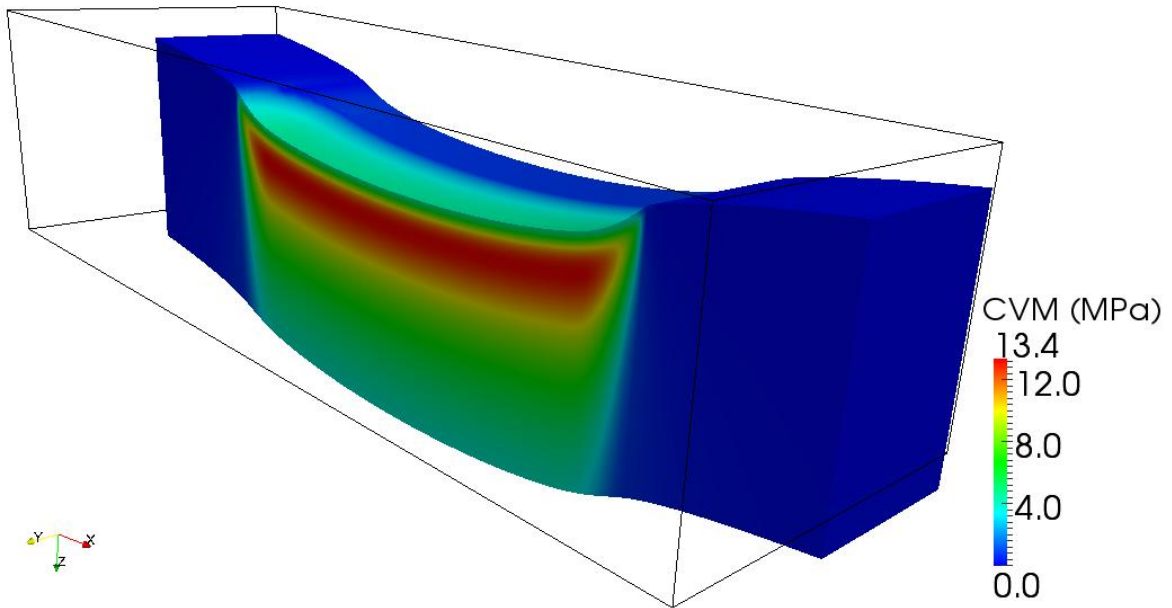


Fig. II-42 : Contrainte de Von Mises à l'intérieur du massif semi-infini.

Cependant cela n'est pas suffisant pour évaluer si le type de profil de la Fig. II-43 peut être utilisé pour une géométrie de révolution. Pour cela, chaque profil de plan de coupe perpendiculaire à  $Ox$  doit être étudié : les centres de courbure de chaque profil doivent être à la même altitude.

Ce n'est pas vraiment le résultat que montre la Fig. II-45. Sur les bords du rouleau les centres de courbure des profils ne semblent pas s'aligner avec ceux des profils pour  $x$  au centre du rouleau. La suite de l'étude pourrait vérifier, en construisant une géométrie à l'aide du profil Fig. II-43 et en utilisant l'algorithme DECR, si cette géométrie a quand même un intérêt et apporte des solutions pour réduire les pics de surpression pour ce type de problème.

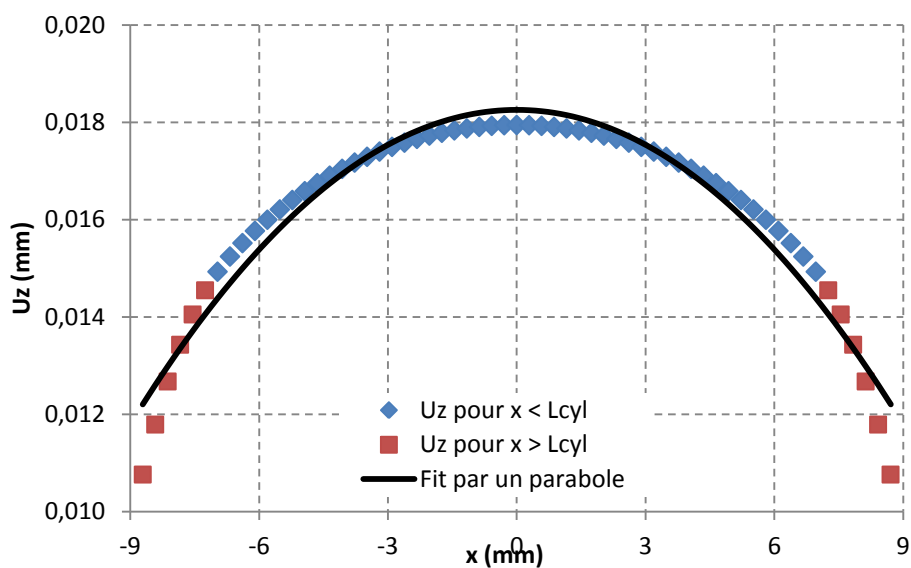


Fig. II-43 : Profil de la déformée du rouleau "idéal" suivant l'axe  $Ox$ .



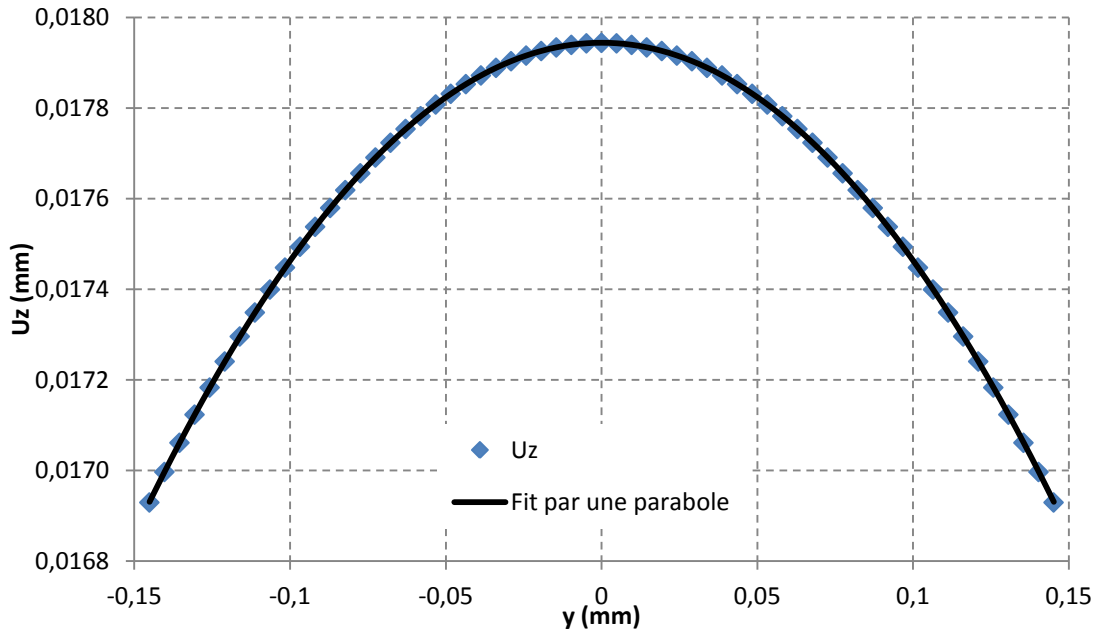


Fig. II-44 : Profil de la déformée du rouleau "idéal" suivant l'axe  $Oy$ .

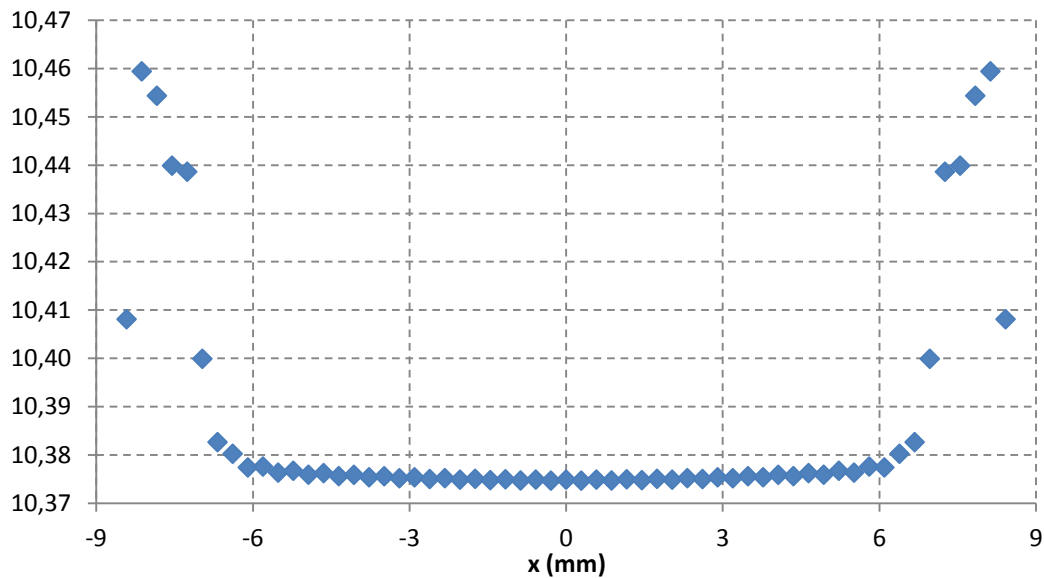


Fig. II-45 : Altitudes des centre de courbure des profils suivant  $Oy$  (en mm).

## II.5.2 Passage dans l'espace de Fourier dans le cas général

Si le cas considéré est tel que l'effort n'est plus considéré comme purement normal mais possède des composantes tangentielles, une méthode similaire peut-elle être envisagée ? La première étape serait de s'assurer que le passage dans le domaine de Fourier permet le traitement des grandeurs élastiques.

Or d'après Love et la propriété d'application d'un opérateur dérivé à un produit de convolution, toutes les grandeurs élastiques peuvent s'exprimer comme des produits de convolutions des

efforts de pression et de tractions par des dérivées partielles d'au moins du second ordre de la fonction  $\Omega : (x, y, z) \rightarrow z \ln(\rho + z) - \rho$

Donc, le passage dans le domaine de Fourier de ces grandeurs se fera en calculant les transformées de Fourier des dérivées du seconde ordre de  $\Omega$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \int \ln r_z dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \int \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \ln r_z}{\partial x_i} dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \int \frac{\partial}{\partial x_j} \iint \frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial x_i} e^{i2\pi(x\theta+y\omega)} d\theta d\omega dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \iint \left( \int \frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial x_i} dz \right) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{i2\pi(x\theta+y\omega)} d\theta d\omega$$

Or :

$\frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial x_i}$  peut se mettre sous la forme  $f(\theta, \omega) \times \widetilde{r_z}$  d'après (II-37), (II-38) et (II-39). Et :

$$\int \widetilde{r_z} dz = -\frac{1}{2\pi(\theta^2 + \omega^2)} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}$$

$$\int \widetilde{r_z} dz = -\frac{1}{2\pi \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \widetilde{r_z}$$

Donc  $\int \frac{\partial \widetilde{\ln r_z}}{\partial x_i} dz$  peut se mettre sous la forme  $g(\theta, \omega) \times \widetilde{r_z}$

Et :

$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{i2\pi(x\theta+y\omega)}$  se met sous la forme  $h(\theta, \omega) \times e^{i2\pi(x\theta+y\omega)}$

Donc, au final :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \iint g(\theta, \omega) \times h(\theta, \omega) \times \widetilde{r_z} \times e^{i2\pi(x\theta+y\omega)} d\theta d\omega$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = g(\theta, \omega) \times h(\theta, \omega) \times \widetilde{r_z}$$

Pour les grandeurs du tenseur des contraintes, un troisième ordre de dérivée intervient. Le traitement de cette dérivée dans le domaine de Fourier se traduira par une multiplication par  $i2\pi\omega$  ou  $i2\pi\theta$  pour les dérivés en  $x$  ou  $y$ . Pour les dérivés en  $z$  elle se feront normalement,  $z$  n'étant pas une variable dans la transposition dans l'espace de Fourier.

Dans ces conditions, en supposant connue une loi comportement pour le contact entre l'indenteur et le massif semi-infini, il devrait être possible de faire le lien entre le champ de déplacement de la surface et le champ de pression/traction à la surface de contact et ensuite de réaliser un algorithme équivalent à celui présenté au paragraphe II.3.2.

### II.5.3 Calcul amélioré du champ de pression final

L'algorithme DECR a permis de trouver le champ de pression lorsqu'un indenteur s'enfonce. Cependant le calcul de la pression par l'utilisation de transformée de Fourier est limité en précision par le caractère rectangulaire obligatoire du maillage. Mais la méthode fournit aussi la limite de la zone de contact, il est alors possible d'utiliser un maillage mieux adapté au champ de pression attendu.

Si la limite de la zone de contact ( $S$ ) est supposée connue et est maillée en  $N$  triangle  $T_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). On suppose que le champ de pression  $p$  peut être approximé par un champ de pression  $p^*$  où pour tout point  $M(\xi, \eta)$  il existe un triangle  $T_i$  contenant  $M$  et dans ce triangle,  $p^*(\xi, \eta) = p_i^*(\xi, \eta) = p_i^0 + a_i\xi + b_i\eta$  décrit au mieux le champ de pression  $p$ . En dehors de ce triangle  $p_i^*(\xi, \eta) = 0$  (Fig. II-46)

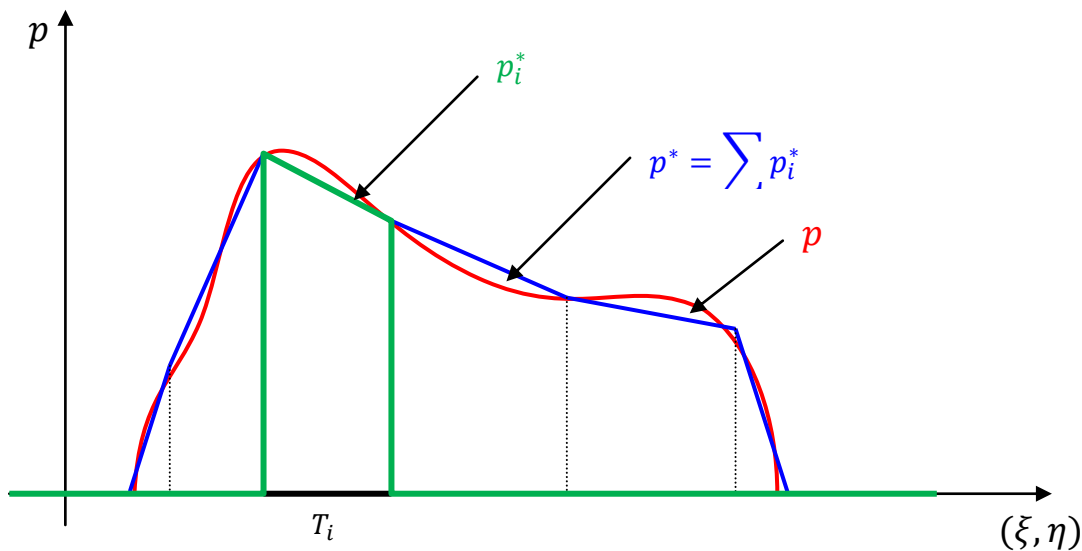


Fig. II-46 : approximation linéarisée du champ de pression.

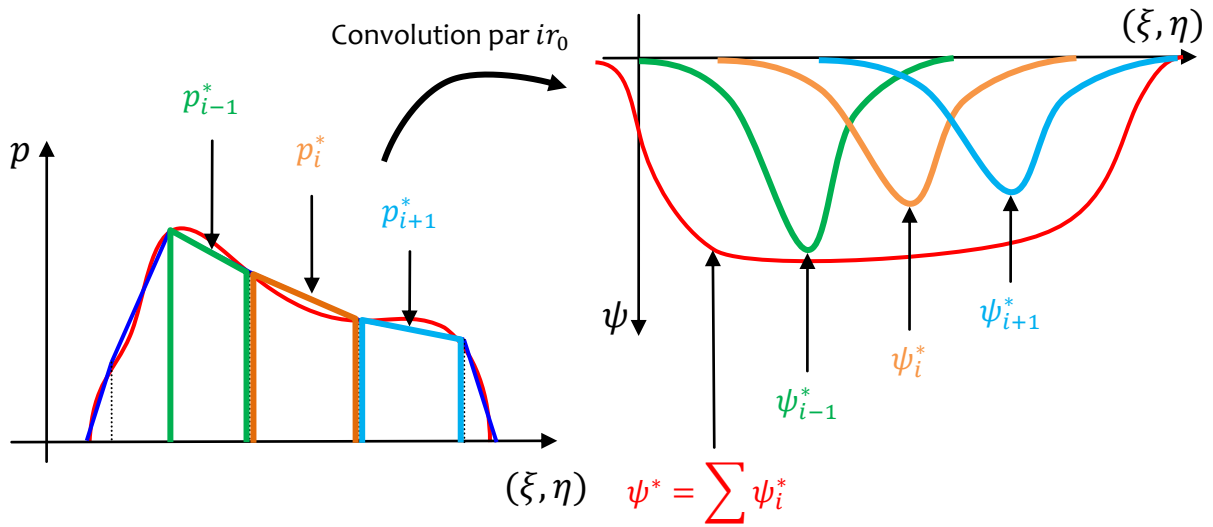


Fig. II-47 : Transformation des pressions élémentaires en potentiels élémentaires.

$$p^* = \sum_{i=1}^N p_i^*$$

Chaque champ de pression élémentaire  $p_i^*$  crée un potentiel élémentaire  $\psi_i^* = ir \star p_i^*$ .

Ainsi le potentiel total est la somme des potentiels élémentaires (Fig. II-47) :

$$\psi^*(x, y, 0) = ir_0 \star p^* = \sum_{i=1}^N ir_0 \star p_i^*$$

Donc en posant :

$$\mathbb{I}_i: (\xi, \eta) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in T_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X_i: (\xi, \eta) \rightarrow \begin{cases} \xi & \text{si } \xi \in T_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y_i: (\xi, \eta) \rightarrow \begin{cases} \eta & \text{si } \eta \in T_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors :

$$\psi^* = \sum_{i=1}^N p_0^* \cdot ir_0 \star \mathbb{I}_i + a_i \cdot ir_0 \star X_i + b_i \cdot ir_0 \star Y_i$$

Donc  $\psi^*$  est une combinaison linéaire de  $3N$  fonctions  $\psi_j^*$  connues (I-64) et peut alors s'écrire :

$$\psi^* = \sum_{j=1}^{3N} A_j \psi_j^*$$

Si nous connaissons la valeur de  $\psi^*$  en  $M$  points  $M_k$  (et nous en connaissons autant que voulu puisque la géométrie de la surface de contact est supposée connue) alors :

$$\psi^*(M_k) = \sum_{j=1}^{3N} A_j \psi_j^*(M_k)$$

ou :

$$\Psi = \mathbb{F}A$$

où :

- $\Psi$  est le vecteur colonne des valeurs de  $\psi^*$  à chaque point  $M_k$
- $A$  est le vecteur colonne des coefficients de la combinaison linéaire
- $\mathbb{F}$  est la matrice  $M$  lignes  $\times$   $3N$  colonnes des valeurs  $\psi_j^*(M_k)$

Nous pouvons alors déterminer l'ensemble des coefficients  $A$  décrivant le champ de pression par la résolution suivante qui correspond à une optimisation au sens des moindres carrés :

$${}^t_{\mathbb{F}}\Psi = {}^t_{\mathbb{F}}\mathbb{F}A$$

$$A = ({}^t_{\mathbb{F}}\mathbb{F})^{-1} {}^t_{\mathbb{F}}\Psi$$

Ainsi, cette méthode permet d'obtenir un champ de pression plus précis via un maillage plus judicieux que le maillage rectangulaire imposé par le traitement par FFT.

## II.6 Conclusion

L'analyse des équations de Boussinesq et Cerruti a mis en évidence, comme pour tout problème linéaire d'ailleurs, le lien entre deux grandeurs – le potentiel de Boussinesq  $\psi$  et le champ de pression  $p$  – par un produit de convolution –  $\psi = p \star ir_z$ . Le problème traité cherchant à évaluer le champ de pression à partir de la déformée imposée par un indenteur rigide quelconque a donc été ramené à un problème de déconvolution. La résolution par le passage dans l'espace de Fourier a été la solution envisagée. Elle a mis en évidence que la méconnaissance de  $\psi$  à la surface en dehors de la zone de contact ne permettait pas d'obtenir le véritable champ de pression.

L'algorithme mis en œuvre a permis par itérations successives de connaître la zone de contact et la déformée de la surface et ainsi, d'obtenir le champ de pression avec plus de précision. Afin d'évaluer tous les champs élastiques à l'intérieur du massif semi-infini, le passage dans l'espace de Fourier a permis de mettre en évidence que les transformées de Fourier de toutes les grandeurs élastiques étaient formellement exprimables en fonction de la transformée de Fourier de  $\psi$ . Cela a permis d'évaluer les contraintes à l'intérieur du solide. Pour quelques géométries, avec des propriétés distinctes, les résultats trouvés ont été comparés soit à une méthode analytique (Hertz) soit à la méthode des éléments finis. Ces simulations ont permis de valider la méthode dans certains cas et de mettre en évidence ses limites dans d'autres configurations. Le plus souvent, celles-ci ne trouvent pas leur origine dans le principe de l'algorithme mais dans le traitement informatique de celui-ci. Enfin, des pistes ont été présentées afin d'optimiser les géométries de pièces industrielles, d'appliquer la méthode à une situation de contact plus général ou de s'affranchir du maillage régulier imposé par la FFT pour le calcul du champ de pression.

Le défi suivant a été d'imaginer une méthode de mesure permettant de valider les résultats de l'algorithme. La solution trouvée est présentée dans le chapitre suivant.

# Chapitre III. Mesures de champs de déplacements

---

La méthode choisie pour valider les simulations par l'algorithme DECR s'appuie sur l'une des équations utilisée pour la résolution du problème de contact. C'est le lien entre le déplacement vertical de la surface de contact et le champ de pression qui a semblé intéressant :

$$u_z(x, y, z = 0) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \psi = \frac{1 - \nu}{2\pi G} p \star ir_0 \quad (\text{III-1})$$

En effet, cette équation indique que, en négligeant les déplacements horizontaux, une déconvolution de la mesure du déplacement vertical par la fonction  $ir_0$  donne le champ de pression à la surface. Une méthode de mesure du déplacement vertical induit par le contact d'un indenteur a été mise en œuvre grâce à l'imagerie confocale chromatique.

## III.1 Mesure du déplacement vertical par transparence

Pour pouvoir mesurer le déplacement vertical induit par le contact d'un indenteur, l'idée qui a été retenue est de mesurer ce déplacement par imagerie confocale chromatique en venant sonder par transparence la surface qui subit la déformation.

### III.1.1 Schéma de principe du montage expérimental

La sonde optique de la station de micromesure STIL utilisée pour mesurer le déplacement vertical vient réaliser les mesures par-dessus. Il a donc fallu imaginer un dispositif expérimental pour appliquer un effort avec un indenteur sur une plaque transparente. Il comporte un dispositif de

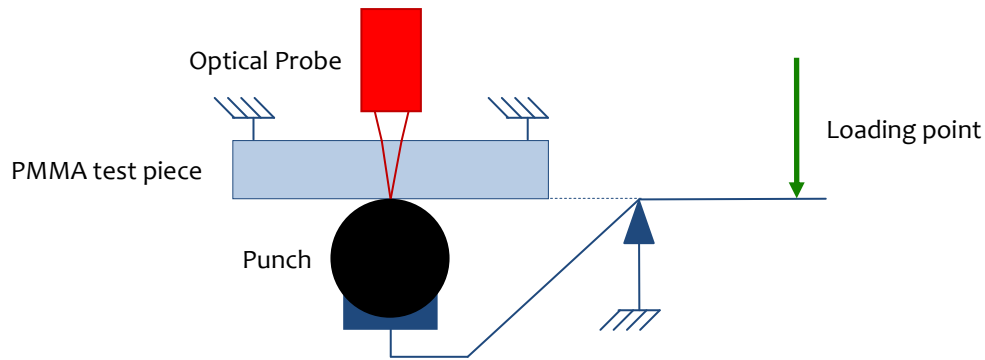


Fig. III-1 : Schéma de principe du montage expérimental.

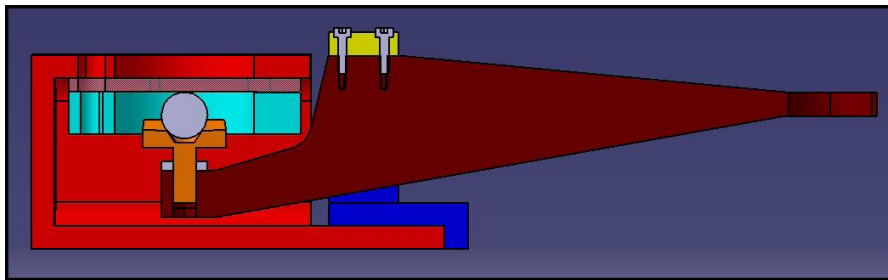


Fig. III-2 : Coupe du dispositif expérimental.

maintient de la plaque transparente et un bras de levier qui d'un coté porte l'indenteur et de l'autre dispose d'une surface permettant de poser des masses et ainsi de charger à volonté le dispositif. Le schéma de principe du dispositif est présenté Fig. III-1.

### III.1.2 Réalisation technique du montage

La conception du montage a été confiée à Simon Gaignaire lors de son stage de fin d'IUT GMP. La Fig. III-2 montre une coupe de la solution technique choisie.

La réalisation de ce dispositif a été confiée à la plateforme INOVSYS. La Fig. III-3 présente une photo du dispositif hors mesure. Le montage installé pour une série de mesures est représenté Fig. III-4.

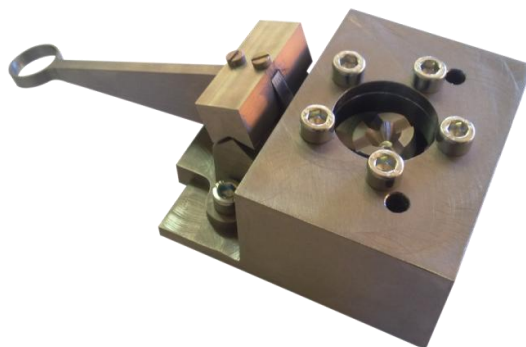


Fig. III-3 : Photo du dispositif expérimental hors mesure.



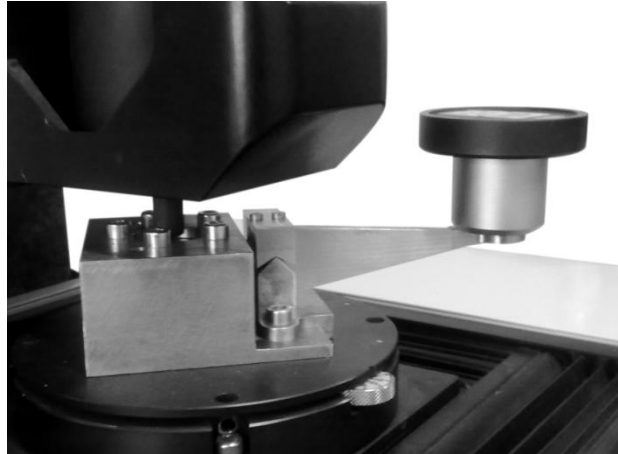


Fig. III-4 : Photo du dispositif expérimental pendant la mesure.

## III.2 Imagerie confocale chromatique

### III.2.1 Principe de l'imagerie confocale chromatique

L'imagerie confocale chromatique est une méthode de mesure de l'état de surface de pièces mécaniques qui utilise les aberrations chromatiques d'une lentille. Les rayons lumineux qui sont déviés sur la partie extérieure d'une lentille ne le sont pas de la même manière suivant leur longueur d'onde. Ainsi la distance focale de la lentille dépend de la longueur d'onde (Fig. III-5).

Ce phénomène permet de mesurer l'état de surface d'une pièce mécanique grâce au dispositif présenté Fig. III-6 : une lumière blanche est envoyée dans la lentille ; les différentes longueurs sont réfléchies et passent dans la lentille en sens inverse ; un trou filtre les longueurs d'onde pour laisser passer majoritairement celle dont l'image de la source blanche est sur la surface à mesurer. Un spectromètre analyse alors la longueur d'onde qui est donc fonction de l'altitude de la surface.

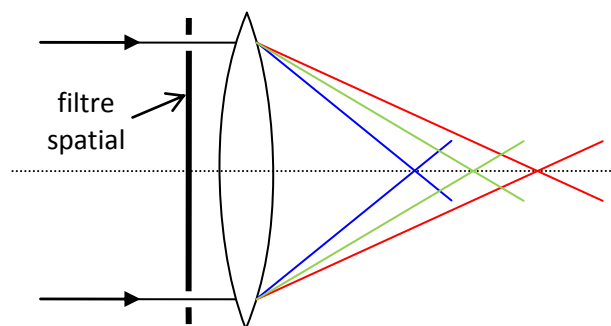


Fig. III-5 : aberration chromatique d'une lentille convergente.

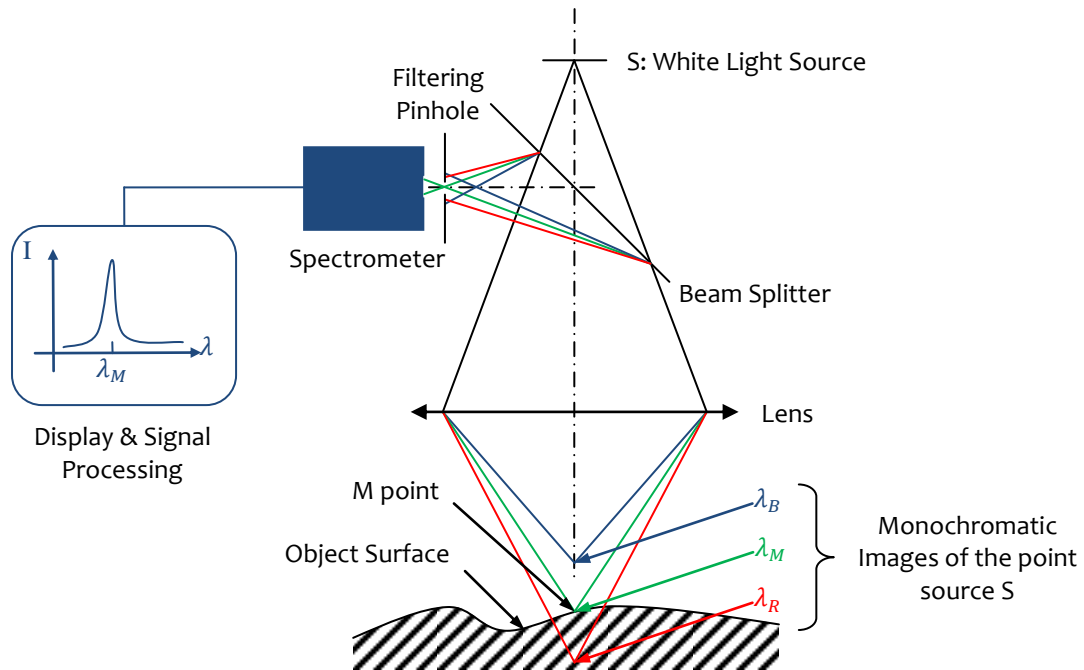


Fig. III-6 : Principe de l'imagerie confocale chromatique.

### III.2.2 Station de Micromesure STIL

La station Micromesure est une station modulaire dédiée à la microtopographie 3D haute résolution ainsi qu'à l'analyse de formes et de textures. Elle permet de mesurer des profils ou des surfaces d'objets, ainsi que des épaisseurs de matériaux transparents.



Fig. III-7 : Station de micromesure STIL.

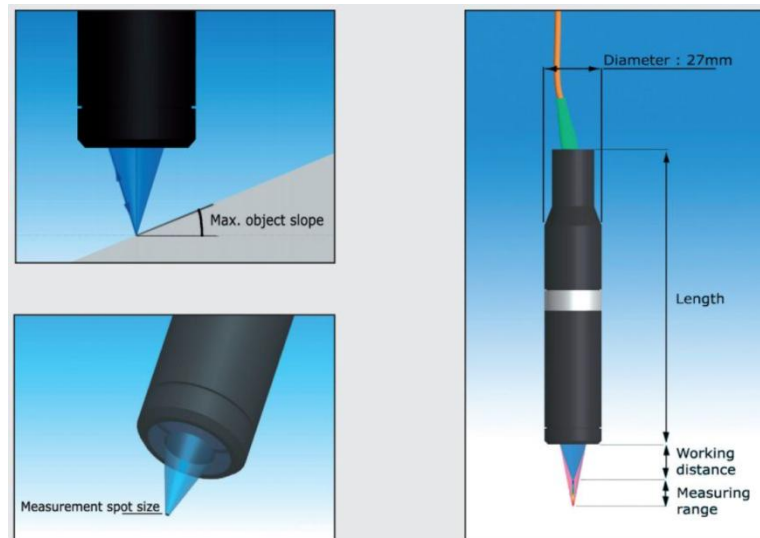


Fig. III-8 : Définitions des principales caractéristiques techniques des sondes optiques.

Les différentes sondes optiques pouvant être utilisées ont toutes des caractéristiques spécifiques (Fig. III-8 et Fig. III-9) qu'il a fallu étudier attentivement pour réaliser des mesures suffisamment précises pour l'expérimentation conduite.

C'est la sonde optique OP300VM qui a été retenue pour plusieurs raisons :

- sa distance de travail n'était pas trop petite pour permettre d'utiliser une plaque transparente suffisamment épaisse et ainsi pouvoir considérer que la déformation n'allait que peu influencer la déformation de la face libre de la plaque.

|  |       | Classical Series |           |         |         |             |             |             |     |
|--|-------|------------------|-----------|---------|---------|-------------|-------------|-------------|-----|
| Model                                    |       | OP020            | OP300VM   | OP6000  | OP8000  | OP10000     | OP20000/90° | OP24000     |     |
| Nominal measuring range <sup>(1)</sup>   | [μm]  | 20               | 300       | 6 000   | 8000    | 10 000      | 20 000      | 24 000      |     |
| Working distance                         | [mm]  | 0.37             | 5         | 27.3    | 40.6    | 66.9        | 63          | 223         |     |
| Axial resolution <sup>(2)</sup>          | [μm]  | 0.002            | 0.010     | 0.200   | 0.250   | 0.300       | 0.600       | 1.500       |     |
| Axial accuracy <sup>(2)</sup>            | [μm]  | 0.010            | 0.090     | 0.600   | 0.800   | 0.900       | 2.000       | 3.000       |     |
| Max object slope <sup>(3)</sup>          | [deg] | +/- 48°          | +/- 25°   | +/- 22° | +/- 16° | +/- 12°     | +/- 20°     | +/- 5°      |     |
| Reference plate <sup>(4)</sup>           | -     | no               | no        | no      | yes     | yes         | yes         | yes         |     |
| Reference number 90° pen                 | -     | n.a              | OP300/90° | n.a     | n.a     | OP10000/90° | available   | OP24000/90° |     |
| Magnifier model                          |       |                  |           |         |         |             |             |             |     |
| Spot size diameter                       | [μm]  | 3                | 8         | 12.5    | 34      | 51          | 30          | 45          | 100 |
| Lateral resolution                       | [μm]  | 1.5              | 4         | 6.25    | 17      | 25.5        | 15          | 22.5        | 50  |
| Min. measurable thickness <sup>(5)</sup> | [μm]  | 12               | 25        | 200     | 250     | 425         | 750         | 1570        |     |
| Length <sup>(6)</sup>                    | [mm]  | 190.8            | 127       | 205.5   | 150     | 189         | 189         | 172.5       |     |
| Weight <sup>(6)</sup>                    | [g]   | 380              | 25        | 727     | 400     | 640         | 2700        | 360         |     |
| Mechanical diameter                      | [mm]  | 29.5             | 15        | 60      | 40      | 50          | 95          | 59          |     |

Fig. III-9 : Caractéristiques techniques des différentes sondes optiques disponibles.

- la résolution axiale était suffisamment petite pour avoir une précision de l'ordre de 1 % pour des mesures de déplacement de l'ordre de 10  $\mu m$ .
- la taille du faisceau n'était pas trop grande par rapport à la résolution latérale souhaitée de l'ordre de 10  $\mu m$ .

### III.3 Mesure par transparence

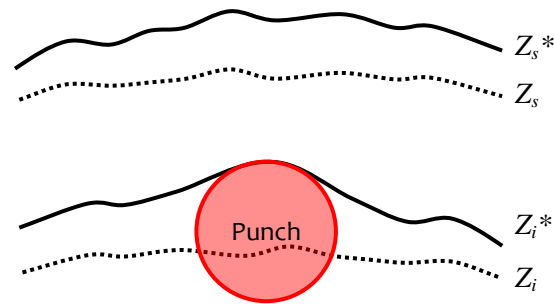
La mesure se faisant par transparence, l'échantillon à déformer a été choisi en polyméthacrylate de méthyle (PMMA) ou plexiglass®. Outre la transparence, ce matériau a la propriété de posséder un module d'Young de 2900 *MPa*. Donc avec un indenteur en acier, qui a un module d'Young bien plus grand (21000 *MPa*), la déformation pourra être considérée comme induite par un indenteur infiniment rigide et la situation de la théorie des potentiels de Boussinesq pourra directement être appliquée. Cependant, la mesure doit prendre en compte plusieurs phénomènes pour compenser des biais inhérents à la méthode employée.

#### III.3.1 Mesure de déplacement

Le dispositif d'imagerie confocale chromatique réalise des mesures d'altitudes par rapport à une référence qui correspond à la distance au niveau du foyer image de la couleur de plus grande longueur d'onde. Par conséquent, la mesure de la surface déformée directe ne donnerait par le déplacement vertical de la surface mais une altitude par rapport à une référence qui est inconnue. Ainsi, pour caractériser la déformation de la surface il sera nécessaire de mesurer les altitudes ( $Z$ ) de la surface au repos puis les hauteurs ( $Z^*$ ) sous charge et d'en faire la différence pour en déduire le déplacement réel ( $Z^* - Z$ ).

#### III.3.2 Flexion de l'échantillon

L'optique choisie dans le dispositif d'imagerie confocale chromatique a une distance de travail de 5 *mm*. Par conséquent, il n'aurait pas été possible de faire l'expérience avec une plaque d'une épaisseur supérieure à cette valeur. De plus, afin de ne pas risquer d'entrer en collision avec la plaque, l'épaisseur choisie pour cette dernière a été de 3 *mm*. De ce fait, sous l'influence du chargement de l'indenteur, non seulement la surface en contact se déforme, mais en plus la plaque fléchit (Fig. III-10). Cependant, cette flexion affecte toute la plaque. Donc la surface en contact se déforme sous l'action combinée de l'indentation et la flexion, alors que la surface libre ne subit que la flexion. Ainsi, en mesurant la déformation due à la flexion à la surface libre  $Z_S^* - Z_S$ , nous obtenons la déformation due au contact en soustrayant avec le déplacement à la surface en contact  $Z_i^* - Z_i$ .



- $Z_s$  représente l'altitude de la surface supérieure sans charge
- $Z_s^*$  représente l'altitude de la surface supérieure sous charge
- $Z_i$  représente l'altitude de la surface inférieure sans charge
- $Z_i^*$  représente l'altitude de la surface supérieure sans charge

**Fig. III-10 : Cumul de la déformation et de la flexion.**

Ainsi la mesure de la déformation due au chargement par l'indenteur nécessitera quatre caractérisations de topographies de surface. Il va falloir tenir compte aussi du fait que la surface libre est mesurée directement alors que la surface en contact avec l'indenteur est mesurée par transparence.

### III.3.3 Influence de l'indice de réfraction sur l'altitude mesurée par transparence.

Comme la mesure de la surface en contact avec l'indenteur se fait par transparence, l'altitude mesurée par l'appareil n'est pas l'altitude réelle à cause du phénomène de réfraction de la lumière (Fig. III-11). En effet, le point focal se situe à une distance supérieure à l'altitude apparente indiquée par l'interféromètre. La valeur que donne celui-ci sera  $Z_R - Z_B$  alors qu'elle est de  $Z_R^* - Z_B^*$ . Il est alors nécessaire de compenser ce biais par un facteur  $R > 0$  :

$$Z_R^* - Z_B^* = R (Z_R - Z_B) \quad (\text{III-2})$$

Pour cela, un escalier avec des marches de  $20 \mu m$  en PMMA a été fabriqué. Ces marches ont été caractérisées à la fois par une mesure directe et par une mesure en transparence (Fig. III-12). Les résultats de cette mesure sont représentés Fig. III-13.

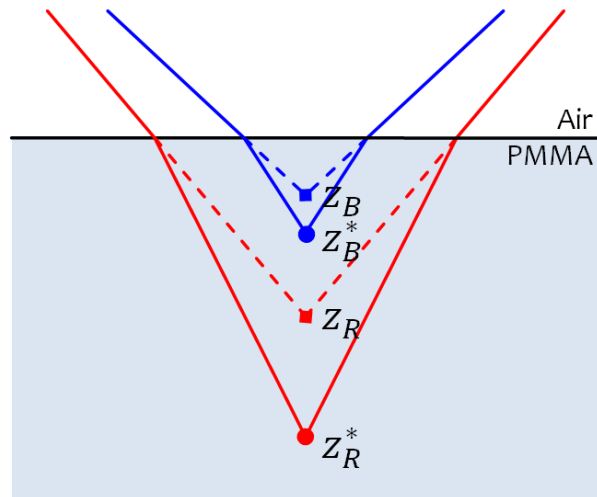


Fig. III-11 : biais sur l'altitude mesurée par transparence.

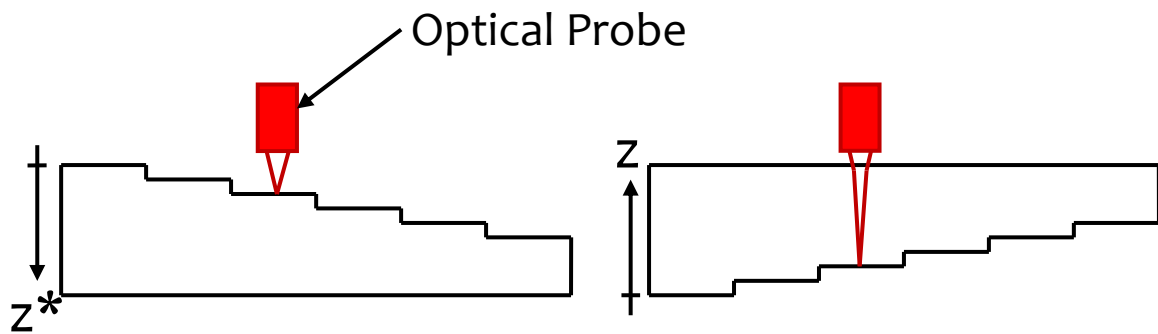


Fig. III-12 : Mesure de l'escalier pour la calibration de la mesure par transparence.

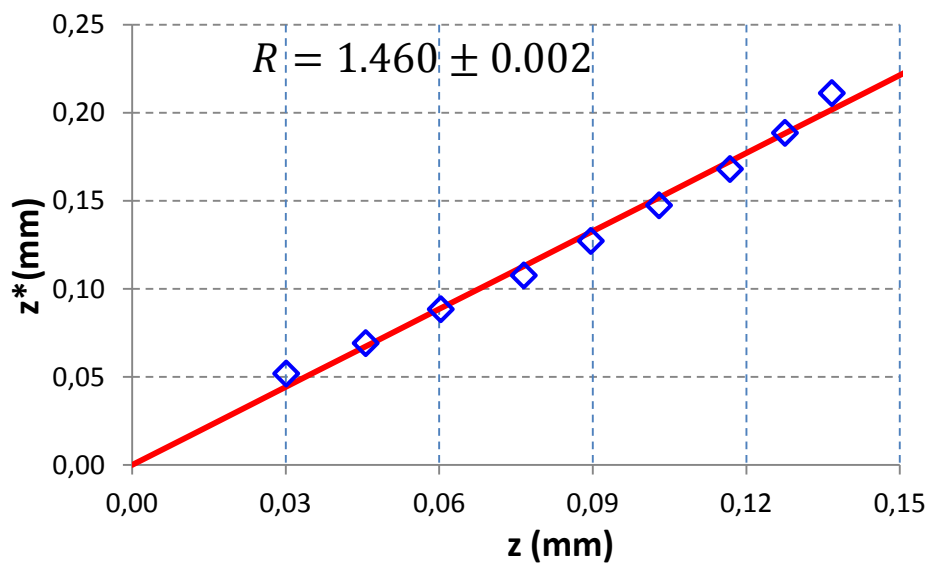


Fig. III-13 : Mesures de l'altitude des marches directement et par transparence

Ainsi, pour obtenir les mesures de la déformation induite par l'indenteur, les cartographies d'altitudes de quatre surfaces doivent être caractérisées :

- les altitudes  $Z_s$  de la surface supérieure sans charge
- les altitudes  $Z_s^*$  de la surface supérieure sous charge
- les altitudes  $Z_i$  de la surface inférieure sans charge
- les altitudes  $Z_i^*$  de la surface supérieure sans charge

Avec ces notations, la flexion  $U_z^f$  de la face supérieure et la déformation  $U_z^d$  induite par l'indenteur s'écrivent :

$$U_z^f = Z_s^* - Z_s \quad (\text{III-3})$$

$$U_z^d = R (Z_i^* - Z_i) - U_z^f \quad (\text{III-4})$$

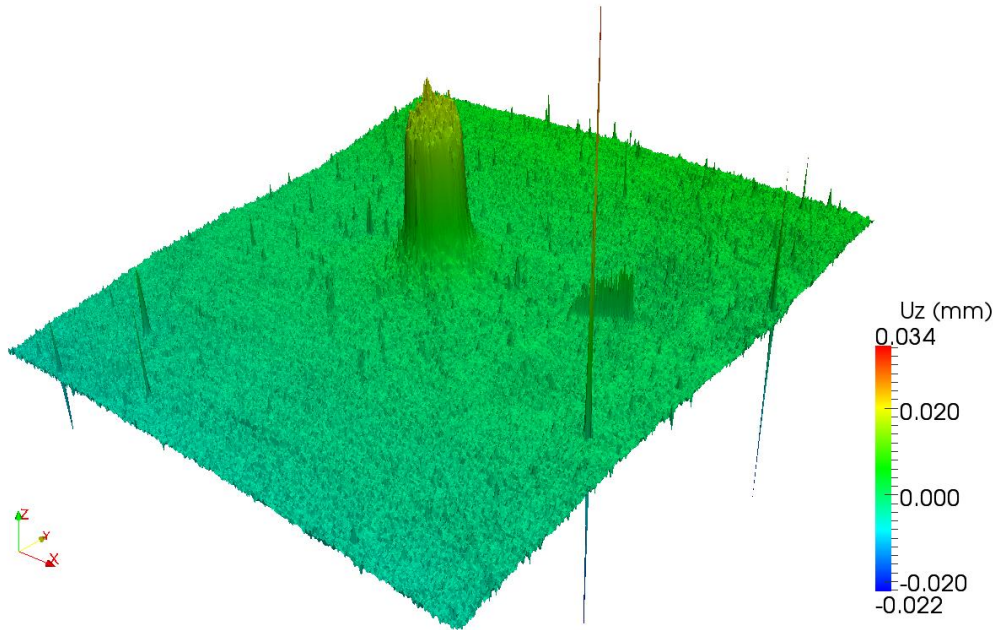
avec  $R = 1.460 \pm 0.002$ .

### III.3.4 Traitement de surface

Le dispositif d'imagerie confocale chromatique permet de mesurer la surface libre, sans difficulté particulière, car la réflexion du plexiglass® est suffisante pour en cartographier la déformation. Cependant, la face en contact avec l'indenteur ne reflète pas suffisamment la lumière pour permettre une mesure par le dispositif. Cette surface a donc du être traitée par dépôt physique en phase vapeur (PVD) réfléchissant. Celui-ci permet alors de réfléchir suffisamment la lumière envoyée par le dispositif d'imagerie confocale chromatique. Afin que cette épaisseur ne perturbe pas la répartition du champ de pression et du coup le champ de déplacement induit par l'indentation, cette épaisseur doit être choisie la plus fine possible tout en gardant suffisamment d'opacité pour assurer la réflectivité du dépôt.

## III.4 Traitement des données

Mis à part les traitements à effectuer pour obtenir la déformation due à l'effort imposé par l'indenteur vus au III.3, les problèmes liés à la mesure par imagerie confocale chromatique et à l'état de surface de la plaque doivent être pris en compte. En effet, les défauts d'orientation du dispositif expérimental sur la machine et le bruit des mesures doivent être minimisés pour obtenir des surfaces qui pourront être traitées par la suite. Afin d'éviter de cumuler les corrections, la surface représentant la déformation induite par l'indenteur et celle représentant la flexion de la face libre ont directement été calculées avec les quatre surfaces mesurées brutes. Pour illustrer les problèmes à corriger, la Fig. III-14 montre la surface représentant la déformation obtenue pour une bille de 4 mm de rayon exerçant un effort d'environ 20 N.



**Fig. III-14 : Mesures brutes de la face inférieure sous charge.**

Elle fait apparaître l'effet de l'indenteur qui est bien visible au centre. Le poinçon laisse une empreinte bien identifiable. Seulement plusieurs défauts apparaissent. Tout d'abord, la présence de pics importants sur cette surface. Ensuite, un défaut d'orientation apparaît. Il devra être corrigé. Enfin, un bruit important apparaît sur cette surface, il est inhérent à la mesure par imagerie confocale chromatique. Ces défauts de mesures sont traités par le logiciel fourni avec l'instrument de mesure Mountains Map.

### III.4.1 Correction des pics

La présence de nombreux "pics" sur la cartographie de la surface en contact avec le poinçon a pour origine des erreurs de mesures de la machine. En effet, pour la caractérisation de la face inférieure, le signal est faible et parfois la mesure n'est pas validée par l'instrument. Ceci se traduit par une valeur nulle dans le fichier des points de mesures. Par conséquent, quelques points doivent être considérés comme faux.

Pour corriger cela, un seuil des valeurs a été introduit pour que ces pics n'apparaissent plus. Ainsi les points mis à l'écart étaient ceux ne vérifiant pas le critère

$$U_{z \min}^d < U_z^d < U_{z \max}^d \quad (\text{III-5})$$

Le logiciel MountainsMap permet de supprimer une partie de ces pics (Fig. III-15 : Seuillage avec le logiciel Mountains Map.Fig. III-15).



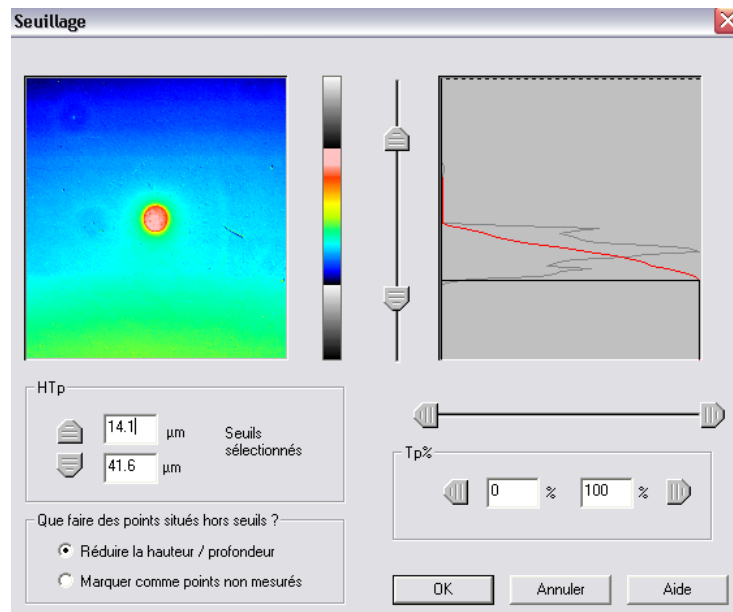


Fig. III-15 : Seuillage avec le logiciel Mountains Map.

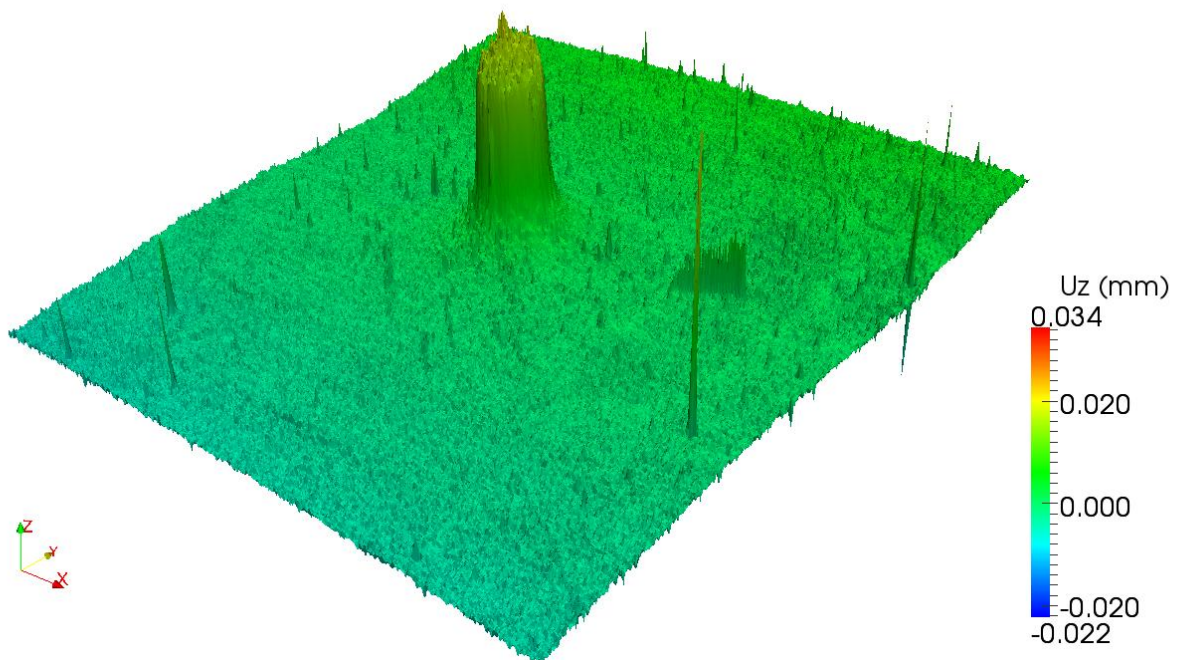
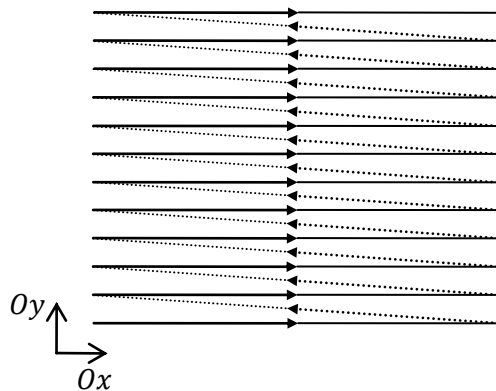


Fig. III-16 : Effet du seuillage sur la surface brute.

L'effet du seuillage sur la surface brute est représentée Fig. III-16. Les pics orientés vers le bas ont bien été supprimés. Pour ceux vers le haut, seuls ceux qui dépassaient nettement la valeur du déplacement au centre ont été pris en compte. De plus la valeur qui leur est attribuée est celle du seuil. Par conséquent certains pics sont toujours présents.

### III.4.2 Défaut d'orientation

En observant la surface de déformation, on constate un défaut d'orientation. Le plan moyen de cette surface semble monter le long de l'axe  $Oy$ . Ce défaut aurait pu venir d'un défaut d'orientation du montage expérimental sur l'appareil de mesure mais, dans ce cas, son orientation aurait été aléatoire. Ici, c'est plutôt un effet de la température qui pourrait expliquer ce défaut. En effet, la mesure des quatre surfaces nécessaires au calcul de la surface de déformation s'est faite sur une journée, chaque surface étant mesurée pendant deux heures en balayant suivant l'axe  $Ox$  et en passant à l'ordonnée suivante (Fig. III-17).



**Fig. III-17 : Ordre des mesures des points de chaque surface.**

Ainsi, l'augmentation de la température sur la journée a provoqué une dilatation du montage expérimental et faussé les mesures sur la durée. Pour corriger ce défaut d'orientation, la surface seuillée est redressée en soustrayant les altitudes du plan moyen calculé par les moindres carrés à partir des points suffisamment éloignés de la zone de contact avec le poinçon pour ne pas inclure la déformée induite par l'indentation (Fig. III-18).

Cette opération permet d'obtenir une cartographie de la surface indentée où le défaut d'orientation n'apparaît plus (Fig. III-19).

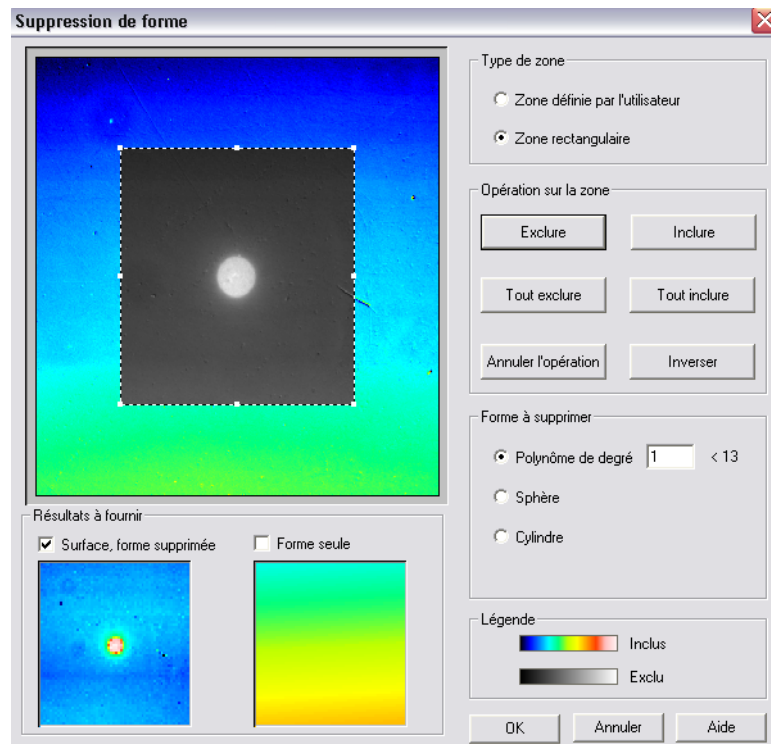


Fig. III-18 : Redressement du plan moyen de la surface de déformation.

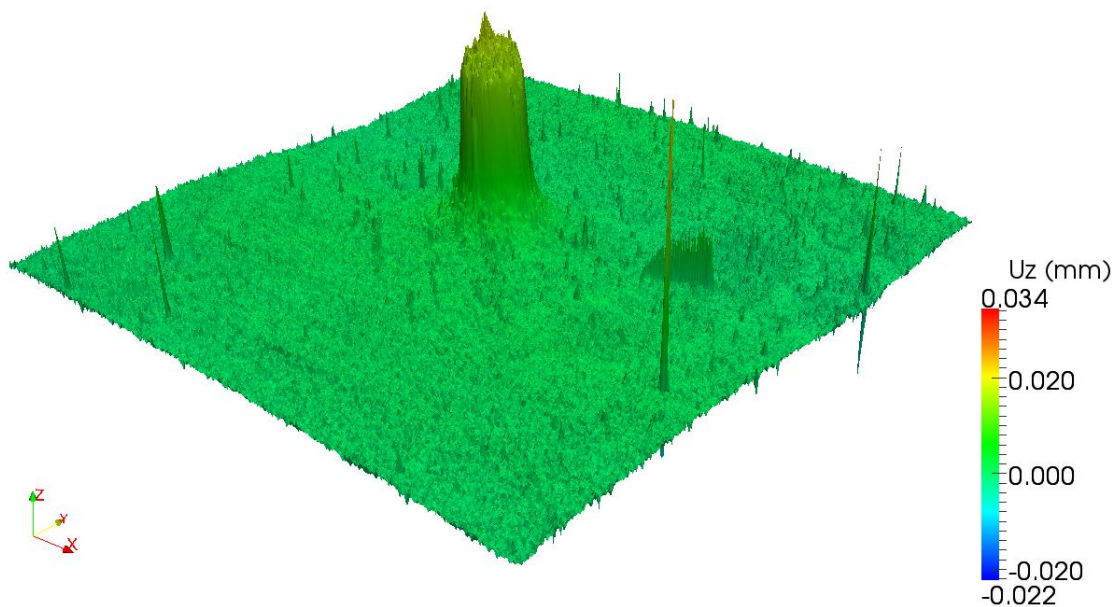


Fig. III-19 : Surface de déformation redressée.

### III.4.3 Filtrage spatial

Enfin, pour supprimer le bruit de mesure dû principalement à l'état de surface de la plaque de PMMA, la surface est filtrée spatialement par un filtre gaussien. La taille de ce filtre a été choisie de façon à supprimer le bruit de la mesure tout en conservant l'allure générale de la déformation.

La Fig. III-20 montre l'effet de quelques valeurs de la taille du filtre pour un profil de la surface donnée.

Une valeur de 0.10 mm a été choisie pour lisser au mieux la courbe en conservant les effets de l'enfoncement de l'indenteur (Fig. III-21).

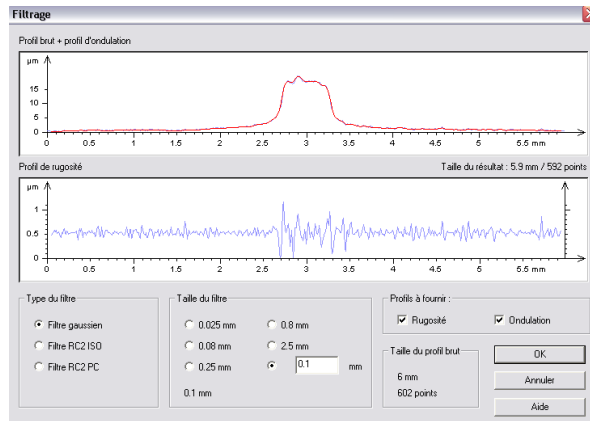


Fig. III-20 : Effet de quelques valeurs de la taille du filtre sur un profil de la surface.

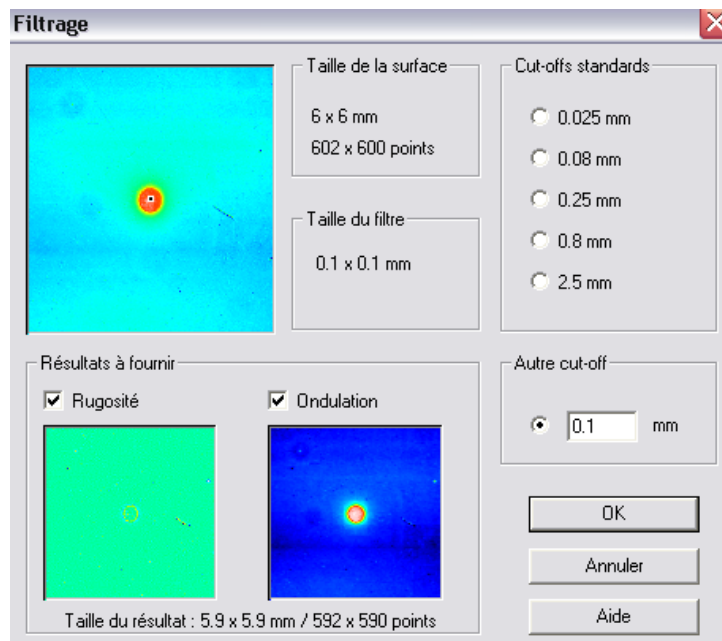


Fig. III-21 : Filtrage de la surface par un filtre gaussien.

La surface obtenue est alors suffisamment régulière pour être soumise à une déconvolution par passage dans l'espace de Fourier (Fig. III-22 et Fig. III-23). La Fig. III-24 : Cartographie de la surface libre, après filtrage. Fig. III-24 montre les mesures prises pour la surface libre après des traitements de données équivalents aux précédents.

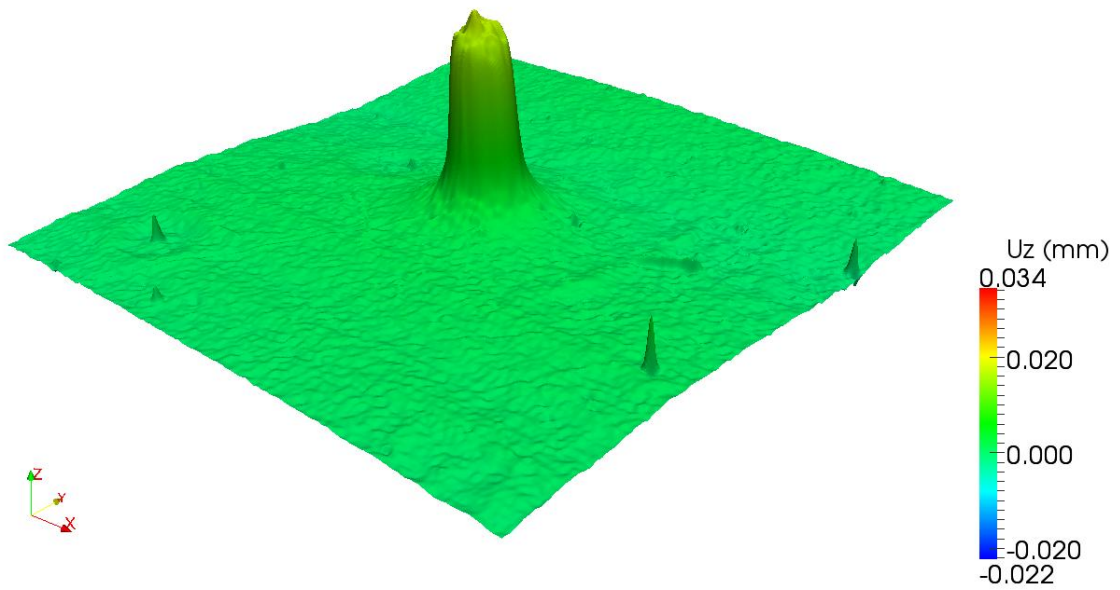


Fig. III-22 : Cartographie de la surface en contact avec l'indenteur, après filtrage

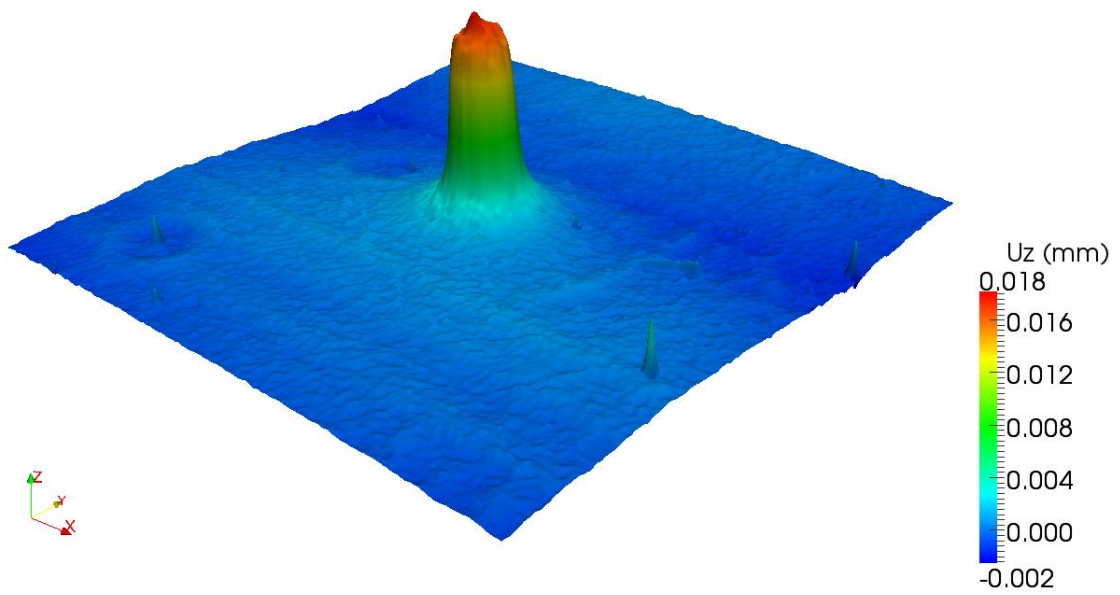


Fig. III-23 : Cartographie de la surface en contact avec l'indenteur, après filtrage  
(échelle de couleur calibrée).

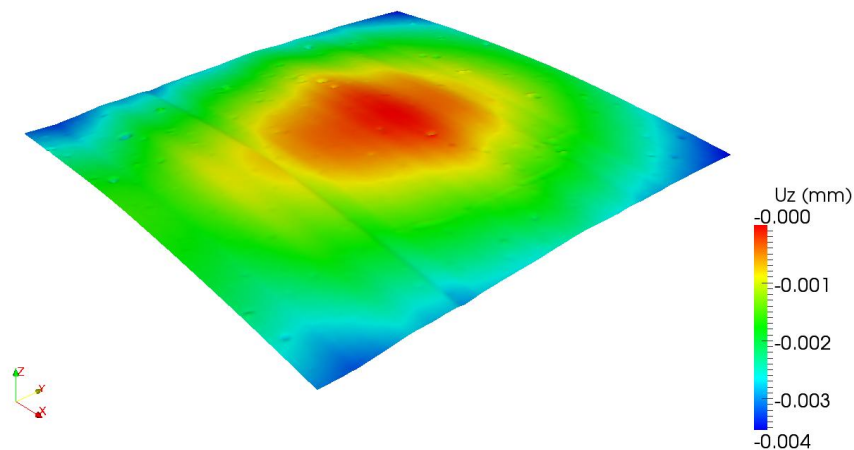


Fig. III-24 : Cartographie de la surface libre, après filtrage.

## III.5 Résultats et comparaison au modèle théorique

### III.5.1 Déformation mesurée et attendue

Les résultats de la mesure de la surface de déformation peuvent d'ores et déjà être comparés – en tout cas pour la partie centrale – à la forme de l'indenteur lui-même. La comparaison est faite grâce à la Fig. III-25 où la forme de la bille enfoncé de  $18.8 \mu m$  apparaît (enfoncement attendu pour un effort de  $20 N$  sur une bille de  $4 mm$ ). Nous constatons que la partie supérieure du champ de déplacement de la surface de contact ne coïncide pas avec la forme de la bille, mais présente un aplatissement.

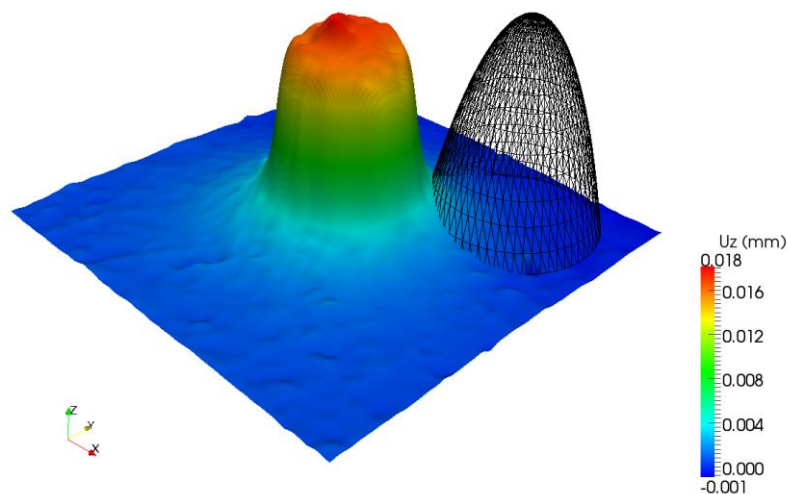


Fig. III-25 : Comparaison de l'enfoncement de la surface de contact et de la forme de la bille.

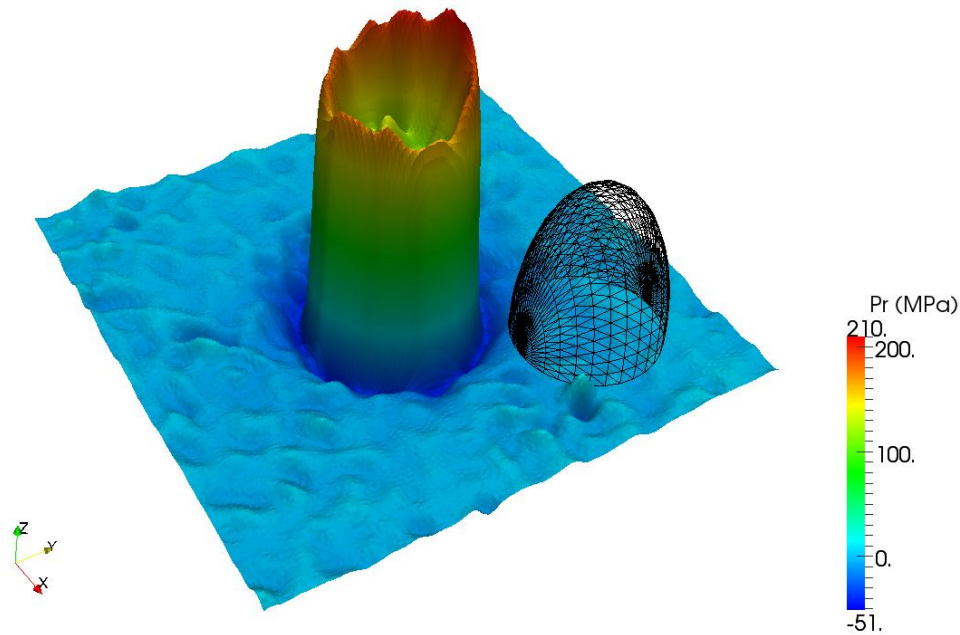


Fig. III-26 : Champ de pression obtenu par déconvolution du champ de déplacement mesuré.

### III.5.2 Pression mesurée et attendue

Maintenant, si le champ de déformation mesuré est utilisé pour calculer le champ de pression par déconvolution, le champ de pression obtenu est celui de la Fig. III-26. Comparé à celui attendu pour le cas d'enfoncement précédent, le résultat n'est pas celui attendu.

### III.5.3 Causes probables d'erreur

Plusieurs hypothèses peuvent alors être évoquées pour expliquer ces différences. Tout d'abord, il est important d'avoir en tête qu'il y a une épaisseur de métal entre la bille et le disque en PMMA afin d'assurer la réflectivité de la surface rendant la mesure possible. Il est fort probable que cette épaisseur ait une influence sur le comportement mécanique de la pièce au niveau du contact. Une autre source d'erreur pourrait être un effet de miroir convexe au niveau du contact qui pourrait perturber la mesure de la surface.

Prochainement, des essais avec plusieurs épaisseurs de traitement de surface seront engagés afin de valider cette hypothèse.

### III.5.4 Validation de la Méthode

Une façon de valider la méthode a quand même pu être mise en place. En effet, si au contact la surface mesurée ne correspond pas à ce qu'on attendait, en dehors du contact, la déformation de la surface a pu être utilisée pour valider la méthode de mesure (Fig. III-27).

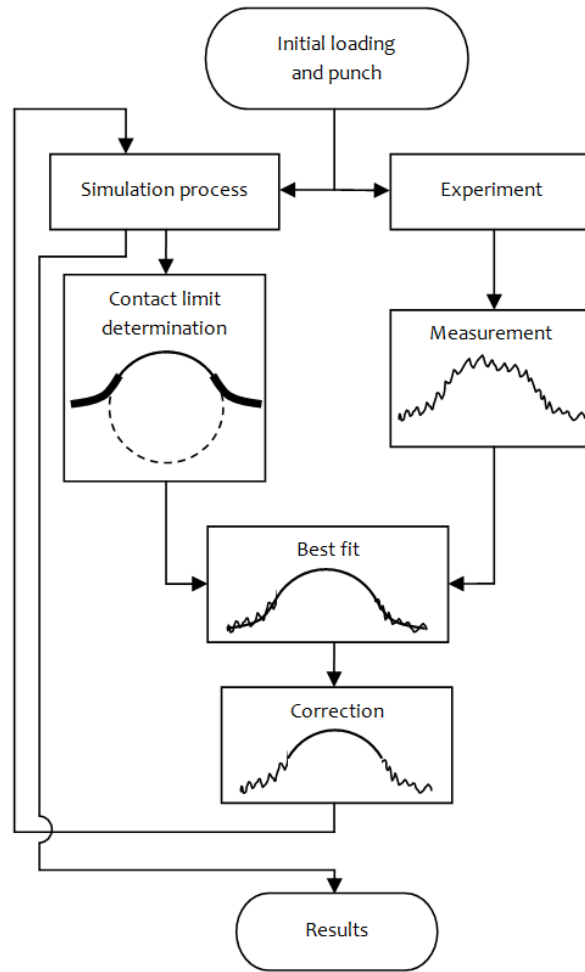


Fig. III-27 : Principe de l'algorithme fittant sur la déformé hors-contact.

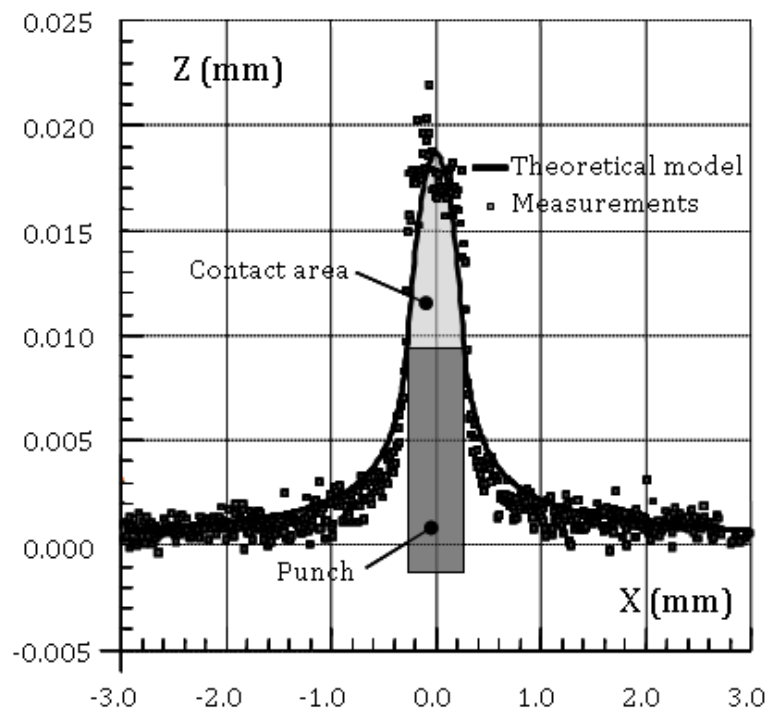


Fig. III-28 : Optimisation du modèle de Hertz sur les mesures.



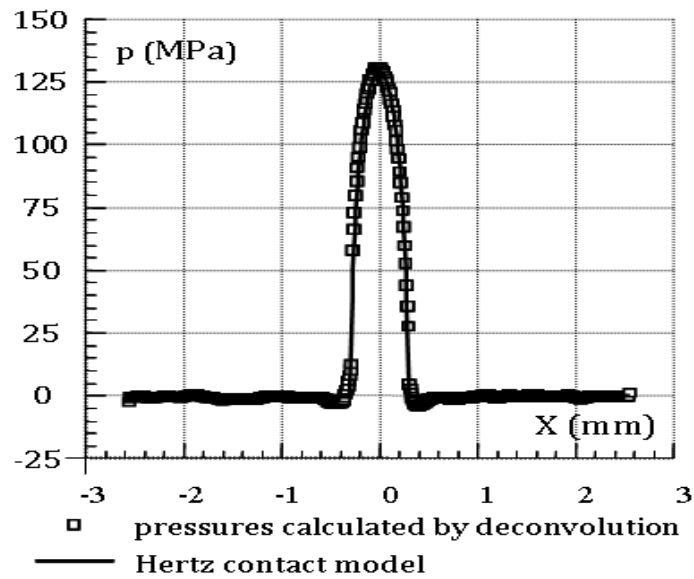


Fig. III-29 : Champs de pression de Hertz et calculé par déconvolution.

Le principe est de corriger les défauts de la partie en contact par l'altitude de l'indenteur réel supposé connu. Cela nécessite de connaître avec précision la zone limite de contact. Pour cela, une optimisation par une méthode des moindres carrés non linéaire a été utilisée sur la déformation mesurée hors contact pour un modèle de Hertz généralisé (Fig. III-28). Cela a donné des résultats très satisfaisants, en accord avec le modèle de Hertz pour le champ de pression (Fig. III-29) comme pour le champ de déformation (Fig. III-30).

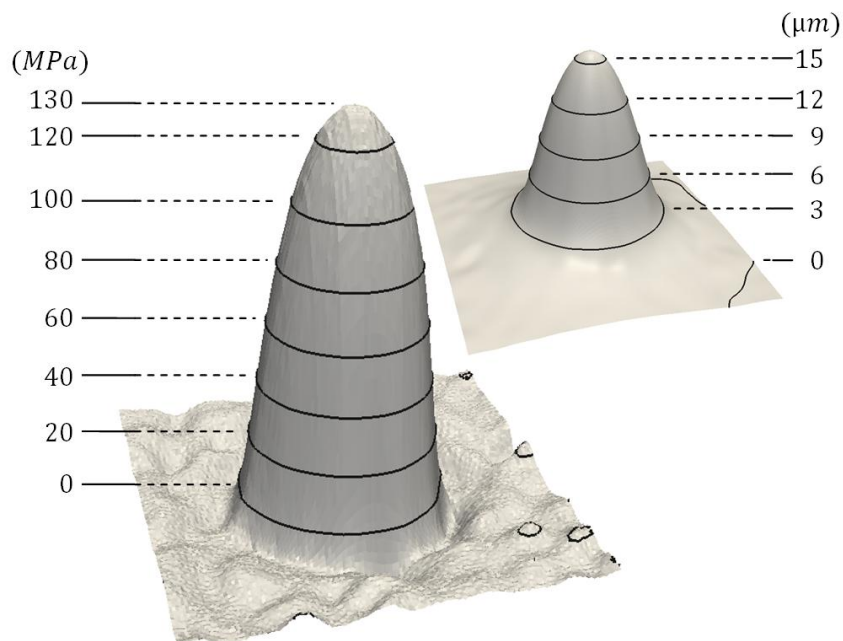


Fig. III-30 : Champs de pression et de déplacement après optimisation.

## III.6 Perspectives

En plus des expérimentations qui permettront de mettre en évidence ou non l'influence de l'épaisseur du traitement de surface réfléchissant, de nombreux autres essais sont en cours de préparation afin de valider notre méthode originale de mesure, certes indirecte, du champ de pression et de contrainte. Elles traiteront de géométries plus complexes comme celles étudiées dans le Chapitre II.

# Conclusion

---

Au cours des trois années écoulées à aborder le problème de la caractérisation des champs de déplacements et de contraintes lors d'un contact localisé entre deux solides élastiques, la diversité des méthodes d'exploration du sujet est apparue telle qu'elle a rapidement mis en évidence la complexité de la question posée tant du point de vue expérimental que du point de vue théorique. En effet, du point de vue expérimental, comment aller "observer" un contact localisé entre deux solides sans perturber l'équilibre qui s'y déroule ? C'est dans cette optique qu'un grand nombre de pistes utilisant les ondes ont été abordées au cours des dernières décennies mettant en exergue des difficultés d'accès à la zone concernée comme pour la diffusion des rayons X ou de neutrons ou des difficultés de mise en œuvre d'algorithmes de calcul comme pour la tomographie photoélastique. Du point de vue théorique, encore une fois la diversité des approches est assez révélatrice de la difficulté du problème. Le cadre théorique est somme toute très bien posé mais son application à la prédiction des champs de déplacements et de contraintes révèlent de nombreuses difficultés lorsqu'il s'agit de traiter des situations de contact pour des géométries données. En effet, que ce soit pour les méthodes d'éléments finis, d'éléments frontières ou l'approche de Boussinesq et Cerruti, celles-ci sont faciles à mettre en œuvre lorsque la zone de contact est connue. Or, rares sont les cas où, à un effort donné et à des géométries données, cette zone de contact est connue. C'est à ces différents problèmes que ces travaux de recherches ont tenté modestement de contribuer.

L'approche théorique qui a été choisie, celle des potentiels de Boussinesq et Cerruti, a permis rapidement de mettre en œuvre par le biais de la convolution une méthode de calcul rapide du problème inverse dans le cas où la zone de contact est connue. A partir de là, le principe d'un algorithme supposé convergent a pu voir le jour. Sa mise en œuvre a permis, par comparaison avec des situations simples de contact type Hertz ou plus complexes via des logiciels d'éléments finis, de mettre en évidence la pertinence de l'algorithme proposé.

Du point de vue expérimental, la mesure de la déformation de la surface est vite apparue comme la clef du problème car elle s'identifie au potentiel de Boussinesq. La recherche du champ de pression de contact, source de toutes les déformations et contraintes, a été simplifiée par la

résolution du problème inverse abordé dans la partie théorique. Restait alors à trouver un moyen de mesure précis de cette surface de déformation. A ce stade, la microscopie par imagerie confocale chromatique, plus généralement utilisée pour caractériser les topographies de surface, a permis de mettre en évidence la faisabilité de mesure de déformations faibles. Une série de mesures à pu être effectuée au sein du laboratoire. Elle a révélé quelques difficultés techniques dont certaines ont pu être dépassées. Pour d'autres, l'étude de l'impact sur la mesure reste à évaluer.

Finalement, ce travail de thèse à permis de compléter une des approches théoriques utilisée pour traiter les situations de contact localisé. Il a aussi ajouté une méthode de mesure à la déjà très longue liste de celles abordées par le passé.

# Références bibliographiques

---

- [ATK98] P.J. ATKINSON, W.N. NEWBERRY, T.S. ATKINSON and R.C. HAUT, “A method to increase the sensitive range of pressure sensitive film”, *Journal of Biomechanics* Vol. 31, n° 9, pp 855–859, 1998
- [BON99] M. BONNET, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, Wiley, 1999.
- [BON06] M. BONNET et A. FRANGI, *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Palaiseau : Édition de l'École Polytechnique, 2006.
- [BOU85] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1885.
- [BRA12] W.L. BRAGG, “The diffraction of short electromagnetic waves by a crystal”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 17, pp. 43–57, 1912
- [CER80] J. CERNOSEK, “Three-dimensional Photoelasticity by Stress Freezing”, *Experimental Mechanics*, Vol. 20, n° 12, pp. 417-426, 1980.
- [CHA86] A. CHAUDHARY AND K.J. BATHEA, “solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional problems with friction”, *Computers and Structures*, Vol. 37, pp. 319-331, 1986.
- [CLA01] A. V. CLARK, C. S. HEHMAN and T. N. NGUYEN, “Ultrasonic Measurement of Stress Using a Rotating EMAT”, *Advanced Materials, Manufacturing, and Testing Information Analysis Center*, 2001.
- [DOR96] H.R. DORFI, H.R. BUSBY and M. JANSSEN, “Acoustoelasticity : Ultrasonic Stress Field Reconstruction”, *Experimental Mechanics*, Vol. 36, n°4, pp. 325-332, 1996.
- [DUP97] J.C. DUPRÉ and A. LAGARDE, “Photoelastic Analysis of a Three-dimensional Specimen by Optical Slicing and Digital Image Processing”, *Experimental Mechanics*, Vol. 37, n°4, pp. 393-397, 1997.
- [HAL85] J.O. HALLQUIST, G.L. GOUDREAU AND D.J. BENSON, “Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 51 pp. 107-137, 1985.
- [HSU74] N. H. HSU, “Acoustical birefringence and the use of ultrasonic waves for experimental stress analysis”, *Experimental Mechanics*, Vol. 14, n° 5, pp. 169-176, 1974.

- [GOR02] I.G. Goryacheva, H. Murthy and T.N. Farris, "Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges", *International Journal of Fatigue*, Vol. 24, n°11, pp. 1191-1201, 2002
- [KAR08] A. KARABUTOV et al., "Laser ultrasonic diagnostics of residual stress", *Ultrasonics*, Vol. 48, n° 6-7, pp. 631-635, 2008.
- [LIA01] J.-J. LIAU, C.-C. HU, C.-K. CHENG, C.-H. HUANG and W.-H. LOC, "The influence of inserting a Fuji pressure sensitive film between the tibiofemoral joint of knee prosthesis on actual contact characteristics", *Clinical Biomechanics*, Vol. 16, n° 2, pp. 160-166, 2001.
- [JOH85] K.L. JOHNSON, *Contact Mechanics*, Cape Town : Cambridge University Press, 1985.
- [MAE81] G. MAEDER, J.L. LEBRUN and J.M. SPRAUEL, "Present possibilities for the X-ray diffraction method of stress measurement" , *NDT International*, Vol. 14, n°5, pp. 235-247, 1981.
- [MUS53] N.I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Groningen : P. Noordhoff, 1953
- [PAO84] Y.H. PAO, W. SACHSE and H. FUKUOKA, *Physical Acoustics*, Vol. 17, Academic Press, New York, pp. 61-120, 1984
- [PAU01] M. PAU, F. AYMERICH and F. GINESU "Measurements of nominal contact area in metallic interfaces: a comparison between an ultrasonic method and a pressure-sensitive film", *Wear*, 2001.
- [PAU 06] M. PAU, B. LEBAN and A. BALDI, "Experimental analysis of contact for the indentation of a flat rounded punch" *International Journal of Solids and Structures*, n° 43, 2006.
- [SAL92] J. SALENCON, *Mécanique des milieux continus*, Presses de l'Ecole Polytechnique, France, 1992.
- [SCH99] D. SCHUPP, "Optical Tensor Field Tomography for the Determination of 3D Stress in Photoelastic Materials", in *1st World Congress on Industrial Process Tomography*, 1999.
- [SOH39] H. SÖHNGEN, *Math. Zeitschr.* 45, pp. 245-64, 1939.
- [SPR08] J.M. SPRAUEL, "Monte Carlo Simulation to Macro Stress evaluation and Micro Strain Analysis by Neutron and Synchrotron Radiation Diffraction", *Materials Science Forum* Vols. 571-572, pp 157-162, 2008
- [WAN96] D.Q. WANG, L. EDWARDS, I.B. HARRIS AND P.J. WITHERS, *ECRS4*, p. 69, 1996.
- [WEB96] P.J. WEBSTER, G. MILLS, X.D. WANG, W.P. KANG AND T.M. HOLDEN, *Journal of Neutron*

- Research, Vol. 3, p. 90, (1996).
- [WIJ02] M.L.L. WIJERATHNE, K. OGUNI and M. HORI, "Tensor field tomography based on 3D photoelasticity", *Mechanics of Materials*, Vol. 34, 2002.
- [WIJ08] M.L.L. WIJERATHNE, K. OGUNI and M. HORI, "Stress field tomography based on 3D photoelasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, n° 3 , pp. 1065-1085, 2008
- [WRI90] P. WRIGGERS, T. VU VAN AND E. STEIN, "Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction", *Computers and Structures*, Vol. 37, pp. 319-331, 1990.

# Annexe A. Expression des grandeurs élastiques dans l'espace de Fourier

---

Les expressions des grandeurs élastiques dans l'espace de Fourier se déduisent de leurs expressions (II-22) à (II-30) en utilisant les relations (II-35) et (II-36) sur les dérivées dans l'espace de Fourier et les expressions (II-37), (II-38) et (II-39) de  $ir_z$ ,  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$ , nous obtenons pour chacune des grandeurs élastiques :

$$\widetilde{u}_x = \left\{ \frac{1-2\nu}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} - 2\pi z \right\} \frac{i\theta}{4\pi G} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-1})$$

$$\widetilde{u}_y = \left\{ \frac{1-2\nu}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} - 2\pi z \right\} \frac{i\omega}{4\pi G} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-2})$$

$$\widetilde{u}_z = \frac{(1-\nu) + \pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}{2\pi G} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-3})$$

$$\widetilde{\sigma}_x = \left\{ \left( 2\pi z - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \right) \theta^2 - 2\nu \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \right\} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-4})$$

$$\widetilde{\sigma}_y = \left\{ \left( 2\pi z - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \right) \omega^2 - 2\nu \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \right\} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-5})$$

$$\widetilde{\sigma}_z = - \left\{ 2\pi z (\theta^2 + \omega^2) + \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \right\} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-6})$$

$$\widetilde{\tau}_{xy} = \left\{ 4\pi - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \right\} \theta \omega \widetilde{\psi} \quad (\text{A-7})$$

$$\widetilde{\tau}_{yz} = i2\pi z \omega \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-8})$$

$$\widetilde{\tau}_{zx} = i2\pi z \theta \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \widetilde{\psi} \quad (\text{A-9})$$



# Annexe B. Articles publiés et en cours de publication

---

## B.1. CIRP Annals Manufacturing Technology : Optical measurement for the estimation of contact pressure and stress

Julien Solle <sup>1</sup>, Jean-Marc Linares (2)<sup>1</sup>, Jean-Michel Sprauel <sup>1</sup>, Emmanuel Mermoz (3)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Aix Marseille Université, ISM UMR 7287, IUT Avenue Gaston Berger, F13625 Aix-en-Provence Cedex 1

<sup>2</sup> Eurocopter, Aéroport International Marseille Provence F13725 Marignane Cedex France.

---

### **Abstract :**

This paper presents experiments based on optical measurements which allowed characterising the elastic strains and stresses induced by a real contact between two parts. For that purpose, a disc of Polymethyl Methacrylate (PMMA) was indented by a rigid steel punch. Using the transparency of the material, the displacement field of the contact surface was measured, across the thickness of the sample, using a chromatic confocal sensor. Boussinesq's potential theory was then applied to this data in order to evaluate the true pressure of the contact. It allowed also estimating the strains and stresses at any point of the indented sample.

**Keywords :** Optical, Measurement, Stress

---

### 1. Introduction

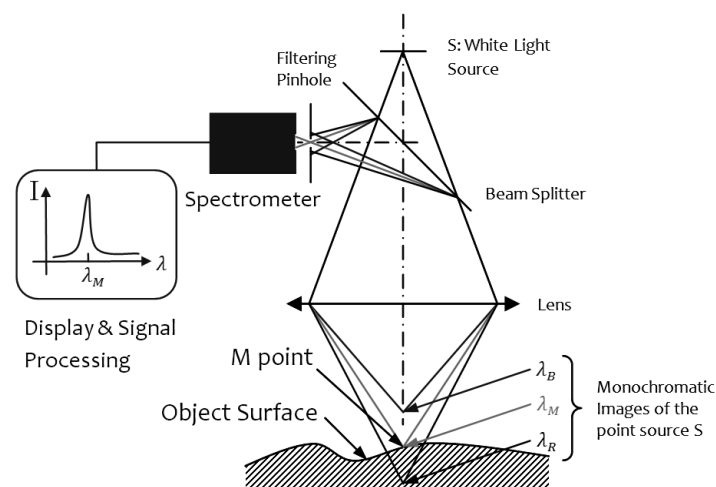
In many mechanical or biomechanical systems, the contact between parts (balls, rollers, races and cages of bearings, gear teeth, knee prostheses elements ...) is often localised at very small areas. Wear prediction is then essential to define the lifetime of the mechanism. For that purpose it is necessary to evaluate the stresses applied to the different parts under contact. These stresses can be deduced from the pressure field imposed at the surface of the part [1]. It is thus of great interest to get a reliable experimental characterization of such pressure. Yet, most methods developed for that purpose use sensors [2] or pressure sensitive films [3] which are inserted

between the elements under contact. Such techniques, however, modify the transmission of the loads in the mechanical system and therefore lead to inaccurate results.

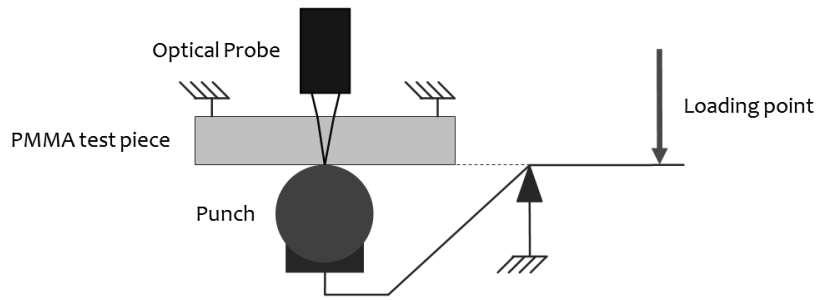
Now, Boussinesq's theory of potentials [1] shows that the contact pressures and the in-depth stresses of the part are directly related to the displacement field of the strained surface. Based on this property, the approach proposed in our paper will therefore implement chromatic confocal imaging to characterise these surface displacements and consequently evaluate the pressures and stresses of the parts. To validate the method, the simple elastic contact between a plane and a spherical ball will be considered here, as a first study, because it allows direct comparison of the results to classical Hertz theory.

## 2. Principle of measurements and experimental setup

As already pointed out, the experimental method proposed in our paper is based on the measurement of the displacement field of the loaded surface. The tested sample consists in a flat disc of 3 mm thickness and 30 mm diameter Polymethyl Methacrylate (PMMA). Since this material is transparent, it permits using optical means [4] to cross the part and consequently inspect the strained area, from the surface opposite the contact. A chromatic confocal probe [5] has therefore been employed to characterise the displacement field of the loaded region. In such sensor, a white light source is imaged on a series of monochromatic focus points, by an objective lens with extended axial chromatism, thus spectrally coding the altitude of the measurement space (Fig. 1). When the sample is placed under the probe, only a small band of wavelengths is then reflected to a beam splitter and finally analysed by a spectrometer which precisely defines the height of the studied surface. The measurement uncertainty of the system used in our experiments is about 20 nm.



**Figure 1.** Principle of chromatic confocal measurements



**Figure 2.** Principle of measurements

The PMMA sample was indented by a spherical steel punch of 5 mm in diameter, applying a pure normal load of 20 N, transmitted by a lever arm. The displacement field of the contact surface was then measured through the thickness of the transparent disc (Figure 2).

Since the elastic modulus of steel is of two orders of magnitude larger than that of the sample, the punch can be considered as perfectly rigid. The specific device which was designed and manufactured for the loading of the tested sample was fixed directly on our chromatic confocal coordinate measuring machine.

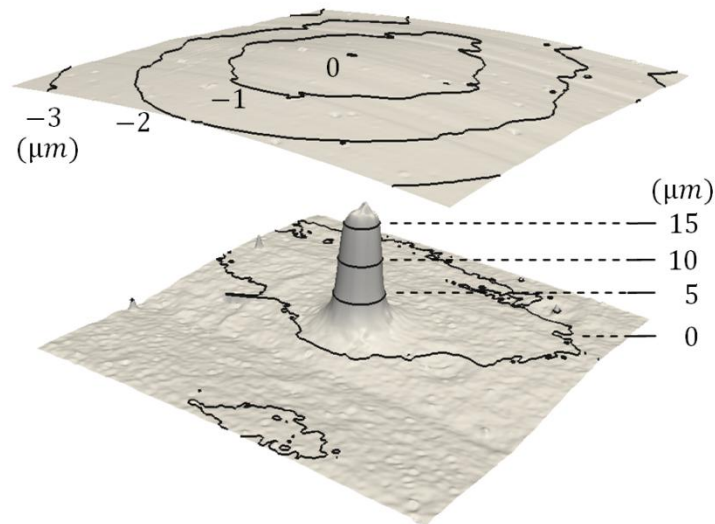
Our first tests revealed that the light returned to the probe was too weak to obtain reliable measurements. The contact surface of the sample was therefore coated by a Physical Vapour Deposition (PVD) of 600 nm thickness (200 nm of titanium and 400 nm of aluminium), in order to increase the reflected intensity received by the optical sensor.

### 3. Experimental results

#### 3.1. Measured Data

Due to the small thickness of the sample, it was necessary, not only to characterize the displacement field of the bottom face of the specimen, in contact with the punch, but also to define the deformations induced by bending. The free top surface of the specimen was therefore also analysed. Moreover, since the geometry of the tested part is not perfect, the two faces of the sample were scanned in both the loaded and unloaded conditions, in order to correct all the form defects. For each test, four digital surface altitude maps of 600 x 600 points were thus acquired by the optical CMM, using a step of 0.01 mm in both longitudinal and transverse directions.

Figure 3 presents the data obtained for the measurements carried out on the bottom plane, in contact with the punch. Two maps are plotted, one for the loaded condition and the other after unloading. It clearly shows the deformations induced by elastic indentation.

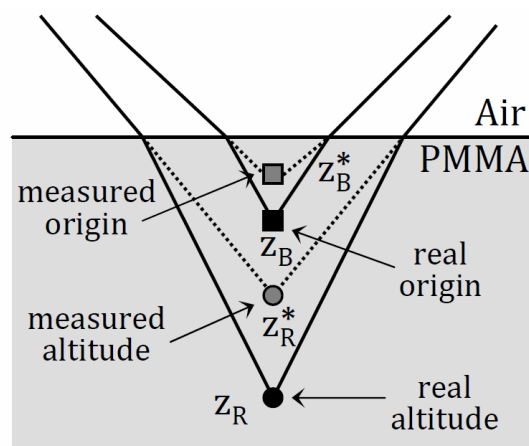


**Figure 3.** Surface maps acquired on the bottom face, in contact with the punch (unloaded condition on top, loaded condition on bottom)

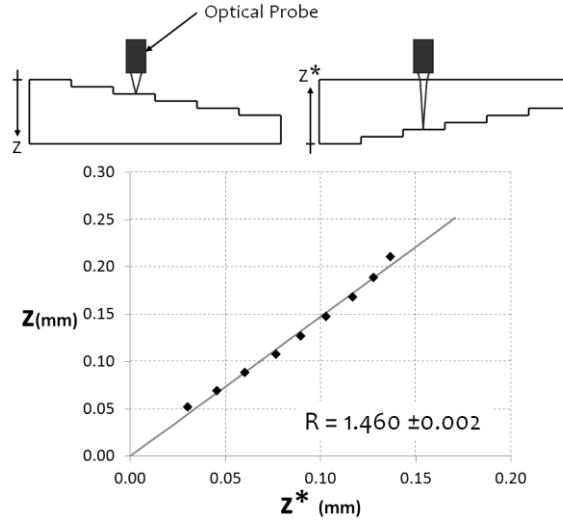
### 3.2. Refraction correction Calibration

As already pointed out, the bottom face on which the load is applied was analysed from the surface opposite the contact, thus crossing the whole thickness of the transparent sample. The light of the optical sensor is however refracted at the interface between air and PMMA. This shifts the focus points of the different wavelengths and consequently alters the altitude coding of the optical probe, thus affecting the result of each measurement (Figure 4).

In fact, if  $z_B^*$  defines the reference origin, as detected by the optical sensor, and  $z_R^*$  the actual measured altitude, then the true corresponding focus points from which the light is reflected, are moved to the real heights  $z_B$  and  $z_R$ . All the acquired data had therefore to be corrected, using an adjustment factor  $R > 1$  (equation 1):



**Figure 4.** Refraction of the beam of the optical probe



**Figure 5.** Calibration of the refraction correction coefficient

$$z_R - z_B = R \cdot (z_R^* - z_B^*) \quad (1)$$

In order to calibrate this correction factor  $R$ , a series of successive steps of about 0.020 mm height were machined in a PMMA plate of the same thickness as the studied sample.

These steps were then measured in two ways: first, directly in the air and second, through the PMMA (Figure 5). The calibration curve shows that the true altitude  $z$  of each acquisition can be assumed to be proportional to the value  $z^*$  measured by the optical probe. The refraction correction factor  $R$  was evaluated to 1.460 which is very close to the refractive index of the material (1.490).

### 3.3. Displacement field of the contact surface

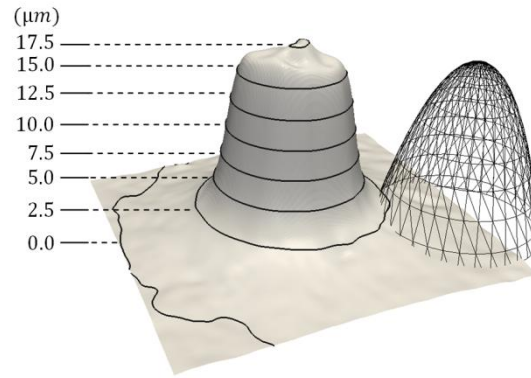
As already pointed out, four identical maps were acquired to identify the displacement field of the indented surface. The altitudes measured on the top face of the sample allowed thus first to characterize the deformations caused by the bending of the tested disc (equation 2):

$$u_z^B = z_L^i - z_U^i \quad (2)$$

Where  $u_z^B$  is the displacement induced by bending,  $z_L^i$ ,  $z_U^i$  are the altitudes measured on the top face, respectively for the loaded and unloaded conditions.

The displacements  $u_z$  induced by pure elastic contact loading are finally deduced from the data acquired on the bottom face of the sample (equation 3):

$$u_z = R \cdot (z_L^b - z_U^b) - u_z^B \quad (3)$$



**Figure 6.** As measured displacement field of the contact surface (the shape of the spherical punch is also plotted at the right).

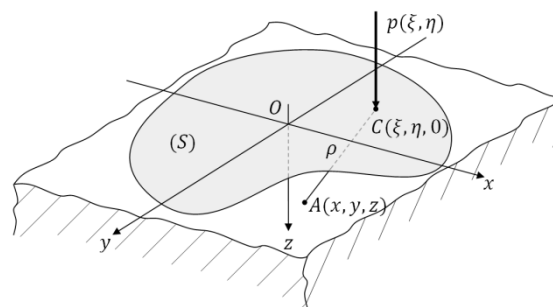
Where  $z_L^b$ ,  $z_U^b$  are the altitudes measured on the indented bottom face, respectively for the loaded and unloaded conditions.

This procedure permitted thus to account for both the form defects of the analysed surfaces and for the refraction of the light at the interface between air and PMMA.

Figure 6 shows an example of displacement field obtained for one of our tests. The overall shape of the deformed surface well corresponds to what is expected for the type of Hertz contact tested here. However, the upper part of the displacement field is slightly flattened, whereas it should fit the form of the punch. This difference is probably linked to optical aberrations in the measurements.

#### 3.4. Data analysis using Boussinesq's potential theory

At present, since the displacement field of the indented surface is well characterised, Boussinesq's theory of potentials [1] will now enable computing the pressures applied to the contact area and consequently evaluating the strains and stresses at any point within the material. To this end, the sample dimensions are considered as large in comparison to the size of the contact area (about 0.3 mm radius).



**Figure 7.** Half space of the contact

The indented surface can thus be regarded as a plane infinite half space. The material is also supposed to have a pure elastic behaviour defined by its shear modulus  $G$  and its Poisson coefficient  $\nu$ . The loading, in addition, is assumed to be frictionless. The local force acting at any surface point  $C(\xi, \eta, 0)$  of the contact area ( $S$ ) is then just a pure normal pressure  $p(\xi, \eta)$  (Figure 7). In Boussinesq's theory, completely detailed in chapter 3 of Johnson's book [1], two harmonic potentials,  $\psi_1$  and its derivative  $\psi$ , are considered to solve the contact problem (equations 4 and 5):

$$\psi_1(x, y, z) = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (4)$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \iint_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (5)$$

With  $(x, y, z)$  the coordinates of a given point  $A(x, y, z)$  in the body and  $(\xi, \eta, 0)$  the coordinates of all the surface points  $C(\xi, \eta, 0)$  of the contact area

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$$

For any point  $A(x, y, z)$  within the body, the displacement  $u_z(x, y, z)$ , in the direction normal to the surface, is then directly derived from the second potential  $\psi$  (equation 6):

$$u_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi G} \left[ 2(1 - \nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \quad (6)$$

In particular, following relationship is thus obtained for the surface of the solid (equation 7):

$$u_z(x, y, z = 0) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \psi(x, y, z = 0) \quad (7)$$

$$\Rightarrow u_z(x, y, z = 0) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \iint_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta$$

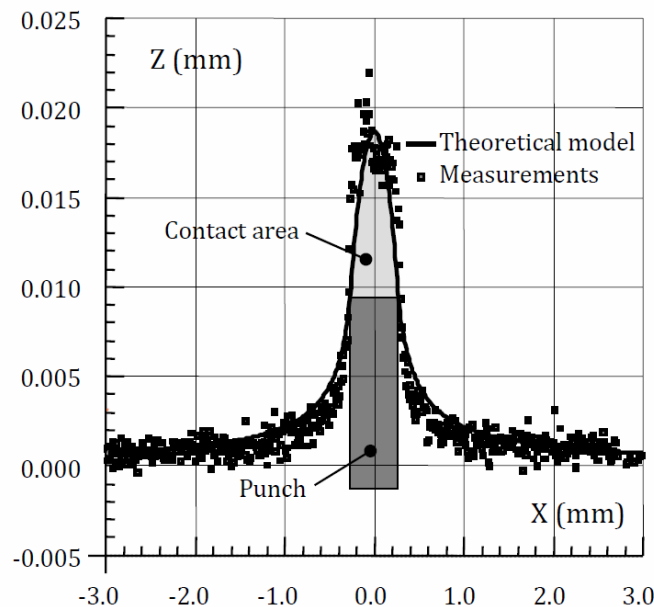
This expression shows that the normal displacements  $u_z(x, y, z = 0)$  correspond to the convolution of the pressure field  $p(\xi, \eta)$  and the function  $i_r$  defined by next equation:

$$i_r : (x, y) \rightarrow \frac{1 - \nu}{2\pi G} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (8)$$

The distribution of pressures in the contact area can thus be easily derived from measured surface displacements, just using a deconvolution technique. Numerical fast Fourier transforms can be used for that purpose. Similar procedures permit also, thereafter, evaluating the strains and stresses at any point within the body.

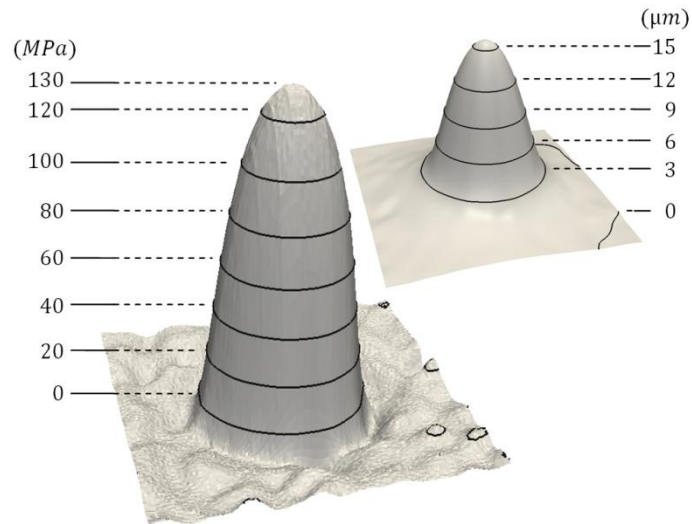
These methods were applied to our experimental data. The displacements of the points in contact with the punch had however to be corrected before deconvolution. In fact, as already pointed out, this region is deformed to fit the shape of the indenter. Significant deviations were however observed in our experiments, probably linked to optical aberrations. To correct these inaccuracies, the displacement of each point within the contact area was therefore replaced by the altitude of the matching point of the punch. This required defining precisely the position and boundaries of the contact area. For that purpose, the measured displacements were best fitted by the predictions of a theoretical generalised contact model, using a non linear least squares optimisation method. Only the points located outside the defined contact area were however taken into account in this procedure. The result of such fitting is presented in Figure 8.

The distribution of pressures in the contact area was finally derived from the corrected displacements, using the deconvolution method presented before. The results obtained for one of our tests are shown in Figure 9. The shape of the calculated pressure field is in good agreement with the prediction of Hertz model.



**Figure 8.** Fitting of the measured displacement field

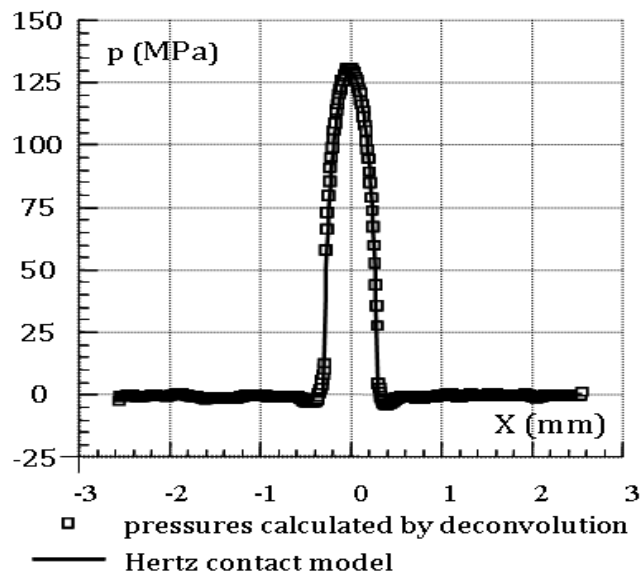




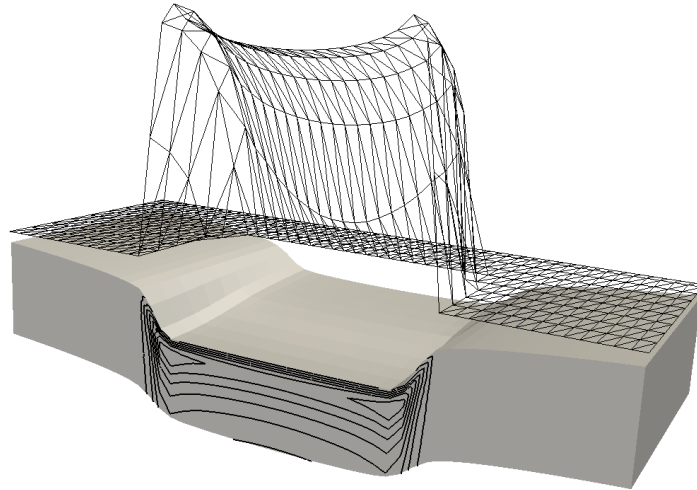
**Figure 9.** Contact pressure calculated by deconvolution (the map plotted at top right corresponds to the corrected displacements)

### 3.5. Comparison to theoretical model

In order to validate our approach, the pressure distributions derived from the experiments were compared to theoretical results calculated by a generalised Hertz contact model [6]. The two profiles (Figure 10) are in very good agreement.



**Figure 10.** Comparison of the results to Hertz contact model (The uncertainties of the experimental values are evaluated to about  $\pm 5$  MPa).



**Figure 11.** Simulated contact pressure, displacement field and in-depth equivalent stress of a bearing race under contact with a roller

### 3.6. Prospect

Our results demonstrate that chromatic confocal imaging can be used to characterise displacement fields and pressures induced by indentation of transparent parts. However, only the simple contact between a plane and a spherical punch was considered here, as a first study. The same procedure will now be applied to more complex geometries.

As an example of what is then expected, Figure 11 shows data calculated to simulate measurements carried out to characterise the contact between a bearing race and a roller. The meshed profile, plotted on the top, illustrates the pressures applied to the contact area of the bearing race. Overpressures at the boundary of the contact, are thus clearly highlighted. The upper surface of the plotted sample shows, on the other hand, the displacement field of the loaded region. Finally, the contours drawn on the front section represent the in-depth equivalent stresses calculated using Von Mises criterion.

## 4. Conclusion

In our study, chromatic confocal optical measurements were used successfully to characterise the surface displacement field of transparent discs of Polymethyl Methacrylate, indented by a spherical punch. Fourier analysis methods, based on the equations of Boussinesq's theory of potentials, permitted then evaluating the distribution of pressures applied to the contact area and estimating the strains and stresses at any point within the material. Our experimental results were in very good agreement with the theoretical data calculated by classical Hertz contact model.

## 5. References

- [1] Johnson, K. (1985). *Contact Mechanics*. Cape Town: Cambridge University Press.
- [2] Gao, R.X., Sah, S., Mahayotsanun, N., 2010, On-line measurement of contact pressure distribution at tool-workpiece interfaces in manufacturing operations, *CIRP Annals*, 59:399-402.
- [3] Massimiliano, P., Francesco, A., Francesco, G., 2001, Measurements of nominal contact area in metallic interfaces: a comparison between an ultrasonic method and a pressure-sensitive film, *Wear*, 249, 5-6:533-535.
- [4] Hocken, R.J., Chakraborty, N., Brown, C., 2005, *Optical Metrology of Surfaces*, *CIRP Annals*, 54:169-183.
- [5] Cohen-Sabban, J., 2008, Merging phase shifting interferometry with confocal chromatic microscopy, *Key Engineering Materials*, 381-382:287-290.
- [6] D.A.Hills, D.A., NoWell, D. Sackfield, A., 1993, *Mechanics of Elastic Contacts* Butterworth-Heinemann Ltd (Oxford).

## B.2. Pressure, stress and strain field computing for localized contact using Fast Fourier Transform (FFT)

Julien Solle<sup>(1)</sup> Jean-Michel Sprauel<sup>(1)</sup>, Emmanuel Mermoz<sup>(2)</sup>, Magali Mailhé<sup>(2)</sup>

*<sup>(1)</sup> Aix-Marseille Université, CNRS, ISM UMR 7287, 13288, Marseille cedex 09, France*

*<sup>(2)</sup> Eurocopter, Aéroport International Marseille Provence, F13725 Marignane Cedex, France*

---

### Abstract

In this paper, the contact pressure, displacement field, strain and stress distributions induced by localized elastic contacts between parts are computed using Boussinesq's theory of potentials. For that purpose it is first demonstrated that each of these elastic fields can be written as convolution products of the surface pressure distribution, thus permitting using Fast Fourier analysis to solve the contact problem. However, on the contrary to classical approaches, where the shape of the contact pressure is assumed to be well known, here, the only inputs are the geometry, elastic constants and penetration of the punch. The boundary of the contact is thus completely undefined. An iterative algorithm, based on an active contour model, as employed in image processing, has therefore been developed to define the contact area. This permitted computing the displacement, strain and stress at any point inside the elastic body. The method has first been applied to simple contacts. The results were then compared to classical Hertz solution. The algorithm was also applied to the contact of a flat rounded punch. In that case, the results were compared to Finite Elements calculations.

### Keywords

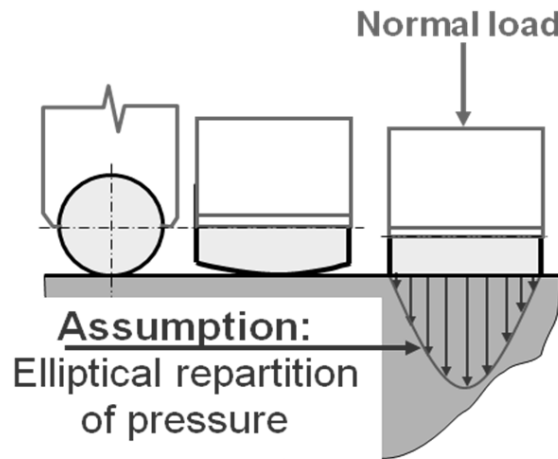
Contact mechanics, elastic contact, modeling, FFT.

### Highlights

- A Fourier approach, based on Boussinesq's theory of potentials, is used to solve elastic contact problems.
  - Contact area, displacement, pressure, strain and stress distributions due to the indentation by any punch geometry are computed.
  - The results are compared to Hertz theory and Finite Elements calculations.
-

## 1. Introduction

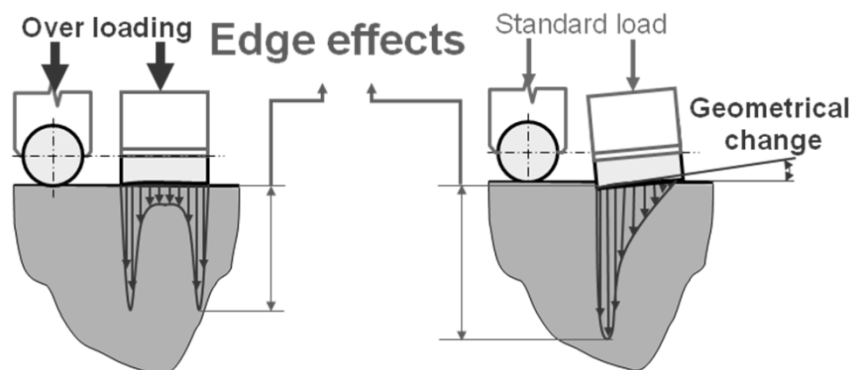
In numerous mechanical systems (ball bearings, roller bearings, gears, knee prostheses, etc.) the contact between parts is localized. In order to anticipate the wear of the mechanical parts in contact, Hertz theory is often used [1][2][3]. The equivalent curvature of parts, the contact surface, and pressure and stress fields are thus evaluated (Fig. 1).



**Fig. 1 : classical contact situation treatment.**

In reality geometries other than parabolic type geometries induce overpressure phenomena, notably at edges (Fig. 2). This excess pressure can lead to excessive wear of mechanical parts which may be prematurely rendered unusable.

Various methods exist as an alternative the Hertz theory, such as the finite element method [4][5][6]. However, the localized character of the problem requires extremely fine volumes of meshing and delicate treatment of the conditions of contact. These constraints can lead to simulations requiring high calculation times.



**Fig. 2 : real contact situation.**

The method presented in this paper is based, in the same manner as the generalized Hertz theory, on the Boussinesq –Cerruti theory of potentials. However, in the developed method, it is not the pressure field which is presumed to be known, but the geometry of the parts under contact. Firstly a reminder of the theoretical framework of Boussinesq’s potentials theory will be given. This approach was used by Goryacheva [7] in the case of a rounded rigid punch, invariant in one direction, and indented with partial slip. He resolved the problem using integral equations and highlighted the existence of excess pressures close to the changes in curvature of the punch. This theory will herein be used in three dimensions. As a first approach, only the case of a purely normal surface contact load will be considered. The punch will also be considered as perfectly rigid. This problem will be solved through a Fourier deconvolution method. Such approach has already been discussed by several other teams [8][9]. However they only deal with the case of contact between a ball and a half space and have solutions which are limited by the domains of computing. The resolution of the contact problem by using the Fourier space will herein be improved and validated using three comparisons with other methods. The first two examples deal with the contact between a ball and an ellipsoid on a half space. The results will be compared to the generalized Hertz theory. The final case deals with a more complex geometry and will be compared to a model using the finite elements method.

## 2. Theoretical framework

Towards the end of the 19th Century, BOUSSINESQ [10] and CERRUTI [11] applied the theory of potentials to studying the effects of loading an elastic half-space on a surface ( $S$ ). In *Contact Mechanics* [12], JOHNSON highlights the expression of potentials  $\psi$  and  $\psi_1$  which were introduced to calculate displacement, deformation and stress fields in the case of a purely normal load (Fig. 3). For any point  $A$  of the elastic half-space with coordinates  $(x, y, z)$ , potentials  $\psi$  and  $\psi_1$  are expressed as a function of pressures  $p(\xi, \eta)$  which apply to each point  $C$  of the surface ( $S$ ) of coordinates  $(\xi, \eta)$  and the distance  $\rho$  separating  $A$  and  $C$  :

$$\psi_1(x, y, z) = \int_{(S)} p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) d\xi d\eta \quad (1)$$

$$\psi(x, y, z) = \int_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (2)$$

LOVE [13] showed that all elastic fields can be expressed with these potentials, and in the case of this study their expressions are as follows:

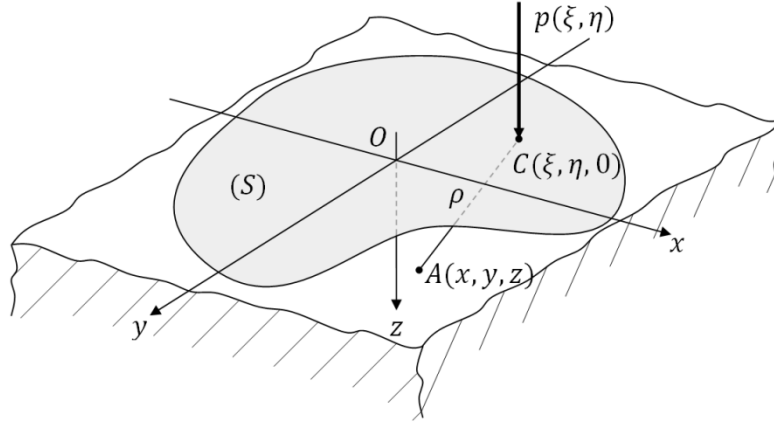


Fig. 3 : Notes taken for the study.

$$u_x = -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \quad (3)$$

$$u_y = -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \quad (4)$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1-\nu)\psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (5)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right\} \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right\} \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\} \quad (9)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \quad (10)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \quad (11)$$

with  $G$  being the shear modulus of the indented half space.

Let us now define the following functions:

$$\ln r_z : (x, y) \rightarrow \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \right) \quad (12)$$

$$\text{ir}_z : (x, y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (13)$$

From a mathematical point of view, since  $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ , potentials  $\psi_1$  and  $\psi$  are then both expressed as convolution products, marked with a  $\star$  in this paper :

$$\psi_1 = p \star \text{lnr}_z \quad (14)$$

$$\psi = p \star \text{ir}_z \quad (15)$$

These expressions show that knowledge of the pressure field enables the calculation of potentials via a single convolution. It should be noted that such calculations are extremely simplified when using the Fourier space. Hereafter in this paper, the Fourier transform of function  $f$  is marked  $\tilde{f}$  and the associated spectral coordinates at  $x$  and  $y$  in the Fourier space are marked  $\omega$  and  $\theta$ :

$$\tilde{f} : (\omega, \theta) \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i2\pi(x\omega + y\theta)} dx dy \quad (16)$$

Fourier Transforms of a convolution product is the product of Fourier transforms of the functions:

$$\widetilde{f \star g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g} \quad (17)$$

In this study it is the inverse problem which is addressed. Deconvolution will therefore be implemented in order to calculate the pressure field. For that purpose the expressions of Fourier transforms of the elastic fields will now be detailed.

### 3. Using the Fourier space

#### 3.1. Expression of elastic fields in the Fourier space

Expressions (14) and (15) presented potentials  $\psi_1$  and  $\psi$  as results of the pressure field's convolutions respectively using functions  $\text{lnr}_z$  and  $\text{ir}_z$ . The same can be said for the elastic fields because if  $D$  is a differentiation operator:

$$D(f \star g) = f \star Dg \quad (18)$$

Thus, all elastic fields are expressed as a result of the pressure field's  $p$  convolution:

$$u_x = p \star -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \text{lnr}_z}{\partial x} + z \frac{\partial \text{ir}_z}{\partial x} \right\} \quad (19)$$



$$u_y = p \star -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \ln r_z}{\partial y} + z \frac{\partial \text{ir}_z}{\partial y} \right\} \quad (20)$$

$$u_z = p \star \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1-\nu) \text{ir}_z - z \frac{\partial \text{ir}_z}{\partial z} \right\} \quad (21)$$

$$\sigma_x = p \star \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial \text{ir}_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \text{ir}_z}{\partial x^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \ln r_z}{\partial x^2} \right\} \quad (22)$$

$$\sigma_y = p \star \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial \text{ir}_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \text{ir}_z}{\partial y^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 \ln r_z}{\partial y^2} \right\} \quad (23)$$

$$\sigma_z = p \star \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \text{ir}_z}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \text{ir}_z}{\partial z^2} \right\} \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = p \star -\frac{1}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial^2 \ln r_z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \text{ir}_z}{\partial x \partial y} \right\} \quad (25)$$

$$\tau_{yz} = p \star -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \text{ir}_z}{\partial y \partial z} \quad (26)$$

$$\tau_{zx} = p \star -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \text{ir}_z}{\partial x \partial z} \quad (27)$$

The right-hand parts of these convolution results are functions of:

- $\text{ir}_z$  or its derivatives,
- $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  or its derivatives,
- $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$  or its derivatives.

Effectively, when using the Fourier space, Fourier transforms of derivatives with respect to  $x$  or  $y$  are simple:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = i2\pi\omega \tilde{f} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = i2\pi\theta \tilde{f} \quad (29)$$

Those with respect to  $z$  are also simple: in the Fourier space,  $z$  is not a variable but rather a parameter. Therefore Fourier transforms of  $ir_z$ ,  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  and  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$  can be expressed analytically (Appendix):

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \quad (30)$$

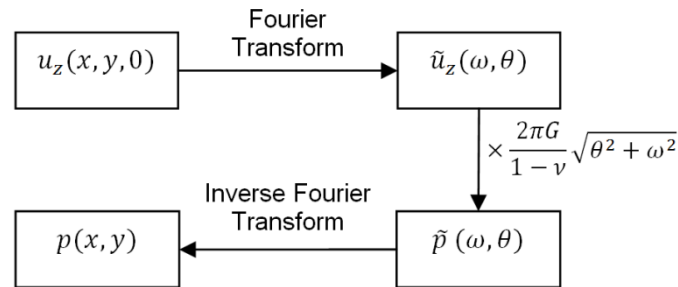
$$\frac{\partial \ln r_z}{\partial x} = -\frac{i\theta}{\theta^2 + \omega^2} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} = -\frac{i\theta}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \tilde{r}_z \quad (31)$$

$$\frac{\partial \ln r_z}{\partial y} = -\frac{i\omega}{\theta^2 + \omega^2} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} = -\frac{i\omega}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \tilde{r}_z \quad (32)$$

Finally, in the Fourier space, all elastic fields take the form  $F(\omega, \theta, z) \times \tilde{p} \times \tilde{r}_z$  or  $F(\omega, \theta, z) \times \tilde{\psi}$  where  $F$  is a function which depends on the considered field. For example, the expression of the Fourier transform of  $u_z$  is:

$$\tilde{u}_z = \frac{1 - \nu + \pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}{2\pi G} \tilde{p} \times \tilde{r}_z = \frac{1 - \nu + \pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}{2\pi G} \tilde{\psi} \quad (33)$$

Therefore, knowing  $\tilde{\psi}$  enables calculation of the Fourier transforms of the elastic fields and, using inverse Fourier transform, calculation of the elastic fields themselves.



**Fig. 4 : Calculation of  $p$  using deconvolution in Fourier space.**

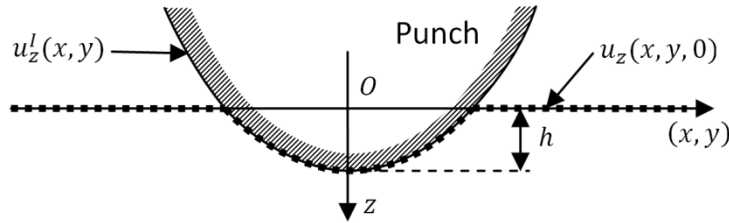
Analysis of expressions (30) and (33) shows that at the surface of the half-space,  $\tilde{u}_z(\omega, \theta, 0)$  is proportional to  $\tilde{\psi}$  which is itself the product of  $\tilde{p}$  and  $\tilde{r}_z$ . Therefore, if the deformation of surface  $u_z(x, y, 0)$  is known, the elastic fields and the pressure field can be calculated using deconvolution in the Fourier space (Fig. 4).

Here, the difficulty is therefore in calculating the normal displacement of the half space surface. Inside the contact area this displacement fits however the shape of the perfectly rigid punch. For

that reason, even if this is a very rough approximation, the deformation of the surface will firstly be estimated (Fig. 5) equal to:

- the geometry of the punch  $u_z^l(x, y)$  under the  $Oxy$  plane inside the contact area ( $S$ ),
- zero outside.

This is the first step towards calculating the real surface displacements as precisely as possible.



**Fig. 5 : initial surface displacements  $u_z(x, y, 0)$ .**

### 3.2. Numerical implementation of the deconvolution

In order to implement deconvolution so as to calculate the pressure field, the Fourier transforms must be calculated. These calculations were carried out using an FFT algorithm. In order to obtain results as close as possible to the true Fourier transforms, plan  $(x, y)$  must be carefully discretized so as to limit errors due to aliasing. Indeed, if the zone of interest to be dealt with (contact area for example) is discretized in  $N$  points on each axis, it is preferable that the zone of interest in the Fourier space be discretized with at least the same number of points. Thus for each axis:

- the FFT domain is discretized on  $N_{FFT}$  points
- $\Delta x$  is the width of interest in the direct space
- $x_e$  is the sampling length ( $\Delta x = Nx_e$ )
- $\Delta \omega$  is the width of interest in the Fourier space.
- $\omega_e$  is the sampling length

therefore the value of the sampling frequency is:

$$\omega_e = \frac{1}{N_{FFT}x_e} \quad (34)$$

Thus:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_e} = x_e \Delta \omega N_{FFT} \geq N \quad (35)$$

Yet, according to the uncertainty principle which is inherent to Fourier transforms:

$$\Delta x \Delta \omega \gtrsim \frac{1}{4\pi} \quad (36)$$

$$x_e \Delta \omega \gtrsim \frac{1}{4\pi} \frac{1}{N} \quad (37)$$

Therefore, taking  $x_e \Delta \omega$  approximately equal to  $1/N$ , the FFT will be sufficiently precise to represent a Fourier transform. (35) thus gives us the following criterion:

$$N_{FFT} \gtrsim N^2 \quad (38)$$

Accordingly, the zones of interest in the direct space and the Fourier space are discretized over an equivalent number of points and in this manner it is ensured that the Shannon criterion is respected in order to prevent aliasing. For one axis, the zone of interest is discretized with an odd number  $N - 1$  of points (so as to have a central point) with  $N$  as a power of 2, ensuring a more efficient FFT algorithm. In this manner, if criterion (38) is to be respected, the FFT domain must be discretized over  $N^2 \times N^2 = N^4$  points. It is therefore important to pay attention to the values of  $N$  so as not to overload the memory of the computer doing the calculation. If real numbers are coded on 8 bytes, 3 will be required per point, one in the direct space and two in the complex Fourier space. Accordingly  $N$  will be chosen so that:

$$24N^4 < \text{size of available computer RAM} \quad (39)$$

| $N$ | $N_{FFT}$ | needed RAM |
|-----|-----------|------------|
| 64  | 4096      | 384 Mo     |
| 128 | 16384     | 6 Go       |
| 256 | 65536     | 96 Go      |
| 512 | 262144    | 1536 Go    |

**Tab. 4 : Comparison of the memory required for the FFT algorithm.**

| $N$ | $N_{FFT}$ | needed RAM |
|-----|-----------|------------|
| 64  | 512       | 48 Mo      |
| 128 | 2048      | 768 Mo     |
| 256 | 8192      | 12 Go      |
| 512 | 32768     | 192 Go     |

**Tab. 5 : Memory required with a reduced FFT domain.**

Tab. 4 shows that maintaining the previously mentioned criterion is costly in terms of memory. The number of points on each axis has therefore been reduced and will correspond to  $N_{FFT} = N^2/8$ . The possible values of  $N$  will require a memory size much more in tune with current workstations (Tab. 5).

### 3.3. Results of the deconvolution

The first application of this algorithm is about a half space indented with a ball of radius  $h = 10 \mu m$ . An initial normal displacement of  $h = 10 \mu m$  is applied at the contact. Young's modulus of the elastic medium is fixed to  $E = 2900 N/mm^2$  and Poisson coefficient is set to  $\nu = 0.4$ . This corresponds to the characteristics of polymethyl methacrylate (PMMA). The number of points selected for the zone of interest of each axis is  $N = 128$ . The pressure distribution in direction of axis  $Ox$  (the chosen problem is axisymmetric) is presented in Fig. 6. The normal displacement becomes  $u_z = 0$  where  $x = \sqrt{2Rh} = 0.447 mm$ . The graph highlights that at this value, the pressure field is minimal but at a negative value ! This is obviously not the expected result.

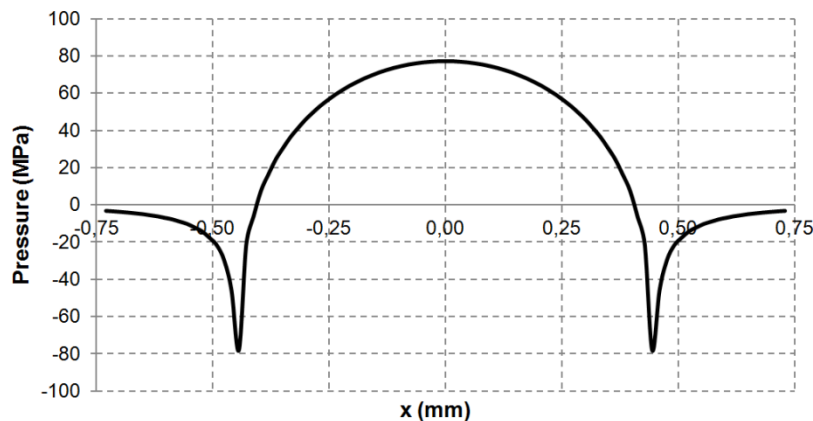


Fig. 6 : Pressure along axis  $Ox$ .

Indeed, the real displacement field does not correspond to the imposed one. To make the plane align with the altitude  $z = 0$ , the punch must pull it upwards, which explains the negative values of the resulting pressure fields. In order to find a correct pressure field, the idea will therefore be to consider that the positive part of the calculated profile is not adequate but is an early approximation of the real distribution. It will thus serve to calculate a new displacement field which will enable an improved approximation of the contact pressures. This is the aim of the DECR (Deconvolution – Clipping – Readjustment) algorithm described hereafter.

## 4. DECR algorithm

### 4.1. Presentation of the method

The deconvolution method presented in the preceding paragraph shows that the resulting pressure values are negative over a part of the initial contact zone. In order to result in a correct pressure field, the idea behind the iterative algorithm employed to calculate the real pressure field is as follows (Fig. 8):

- The displacement field  $u_z^{(k)}$  on the surface  $(S)^{(k)}$  is implemented,
- The corresponding pressure field  $p^{(k)}$  is calculated using deconvolution (Fig. 4),
- A clipped pressure field  $p_c^{(k)}$  at point  $M$  is constructed as follows:

$$\begin{cases} p_c^{(k)}(M) = p^{(k)}(M) & \text{if } M \in (S)^{(k+1)} = \left\{ \begin{array}{l} M \text{ as } M \in (S)^{(k)} \\ \text{and } p^{(k)}(M) > 0 \end{array} \right\} \\ p_c^{(k)}(M) = 0 & \text{else} \end{cases}$$

- The related displacement field  $u_z^{(k)*}$  at point  $M$  is calculated by convolution:

$$u_z^{(k)*} = p_c^{(k)} \star \text{ir}_{z=0} \quad (40)$$

- The displacement field  $u_z^{(k+1)}$  at point  $M$  to be used for the next iteration is implemented by readjusting  $u_z^{(k)*}$  to the punch profile  $u_z^I$  (Fig. 7). This procedure accounts for the displacements at the contact/no-contact boundary point  $C$ , and at the point  $M_\infty$ , the furthest away from the center of contact  $O$ :

$$\frac{u_z^{(k+1)}(M) - u_z^{(k+1)}(M_\infty)}{u_z^{(k+1)}(C) - u_z^{(k+1)}(M_\infty)} = \frac{u_z^{(k)*}(M) - u_z^{(k)*}(M_\infty)}{u_z^{(k)*}(C) - u_z^{(k)*}(M_\infty)} \quad (41)$$

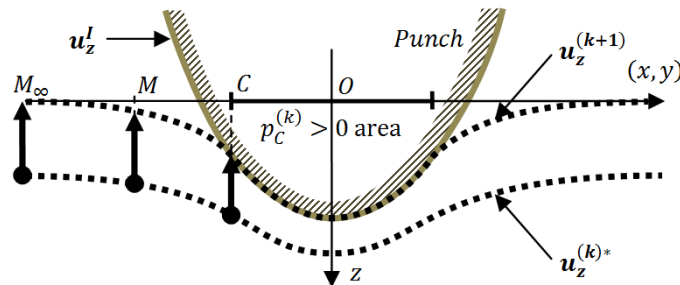
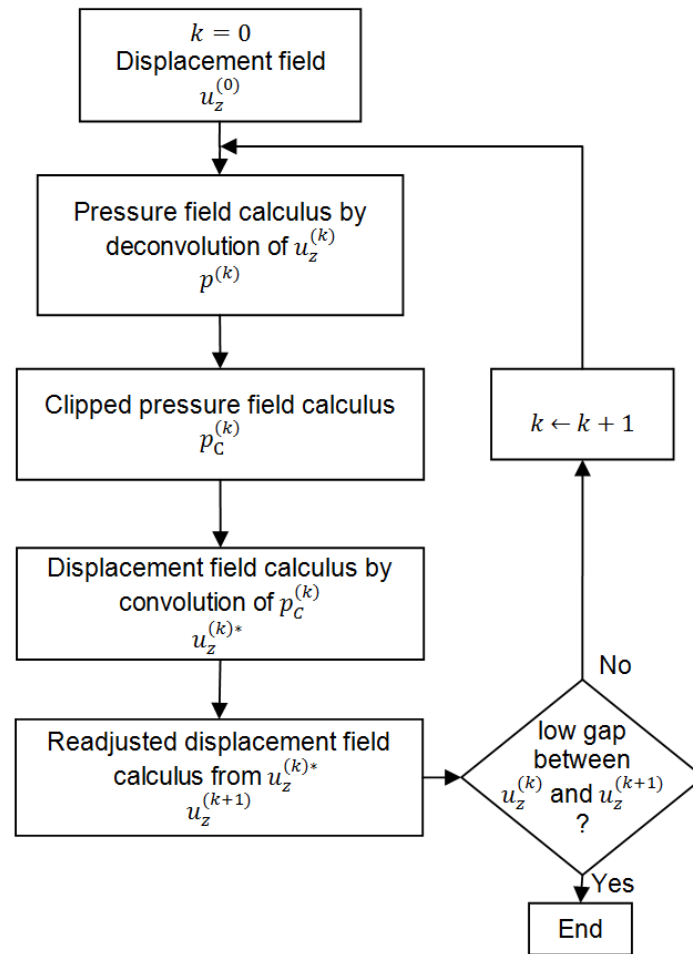


Fig. 7 : Diagram of the readjustment of  $u_z^{(k)*}$  to  $u_z^I$ .



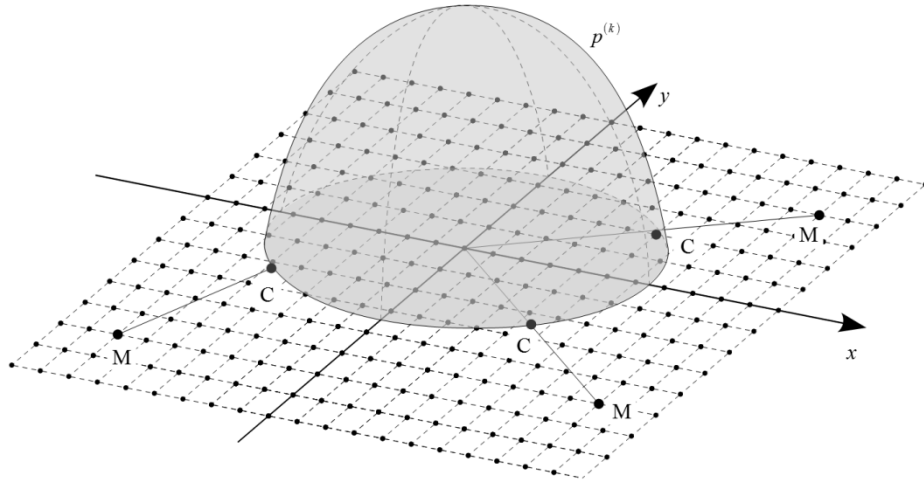
**Fig. 8 : DECR Algorithm.**

#### 4.2. Search of contact surface boundary using active contour modeling

As explained before, point  $C$  corresponding to the position at which the pressure field becomes null (contact surface boundary) is required for the calculation of the new normal displacement of each point. In two dimensions (as in Fig. 7), choosing this point  $C$  seems obvious. It is however much less evident in three dimensions (Fig. 9). Indeed,  $C$  can be:

- a node on the grid,
- the closest point on a null pressure curve,
- the point on a null pressure curve, intersecting segment  $[OM]$ ,
- or any other choice!

Points  $C$  were not selected as grid nodes because the discontinuities caused by the abrupt switch from one node to another result in inaccurate oscillating Fourier transforms. In fact, FFT is very sensitive to any discontinuity. In an effort to keep the global symmetry of the problem, it was decided to define  $C$  as the point on a null pressure curve, intersecting segment  $[OM]$ .



**Fig. 9 : Some of the possible choices of point C.**

Therefore, a method inspired by the active contour methods applied in image processing [14] has been implemented to find the null pressure curve. This algorithm is applied to the punch situation presented in 3.3. For each point  $M$  of the plane, the resulting curve thus enables the definition of the curve's section which will cut segment  $[OM]$ , and therefore find point  $C$  as the intersection of these two lines. Following this, formula (41) must be used to find the value of the displacement field at point  $M$ ,  $u_z^{(k+1)}(M)$ . The following should be evaluated:

- $u_z^{(k)*}(M)$ , is the displacement field in  $M$  after convolution with clipped pressure field  $p_C^{(k)}$ .
- $u_z^{(k)*}(C)$ , point  $C$  is not on the mesh. It is evaluated via interpolation of the  $u_z^{(k)*}$  fields which form the cell containing  $C$ .
- $u_z^{(k+1)}(C)$ , is evaluated via interpolation of the  $u_z^I$  fields which form the mesh containing  $C$  because after readjustment, this point  $C$  should fit the punch geometry.
- $u_z^{(k)*}(M_\infty)$  is the displacement field of the point furthest away from center  $O$  after convolution with clipped pressure field  $p_C^{(k)}$ .
- $u_z^{(k+1)}(M_\infty)$  : this point is considered as being far enough from  $O$  that the distance between  $M_\infty$  and a surface point  $(S)^{(k)}$  are equivalent to distance  $R = OM_\infty$ :

$$u_z^{(k+1)}(M_\infty) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \psi(M_\infty) = \frac{1}{R} \iint_{(S)^{(k)}} p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (42)$$



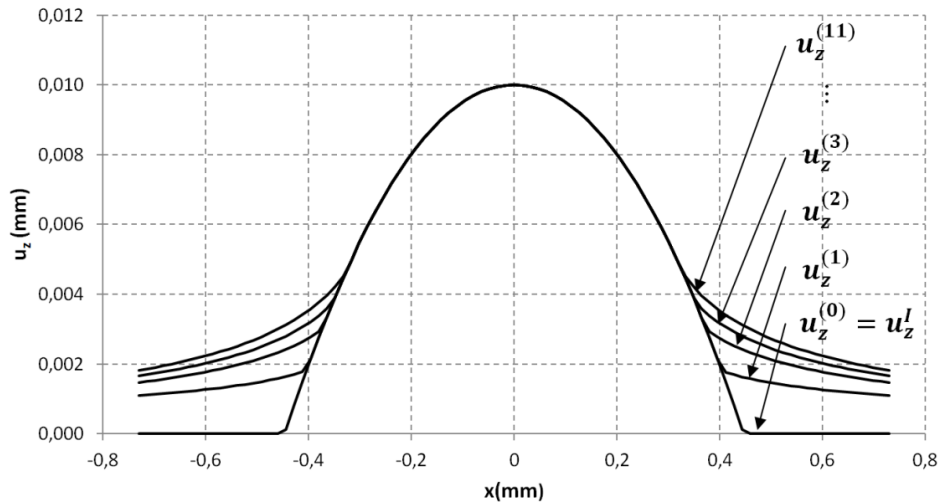


Fig. 10 : Evolution of the contact surface displacement field throughout the algorithm.

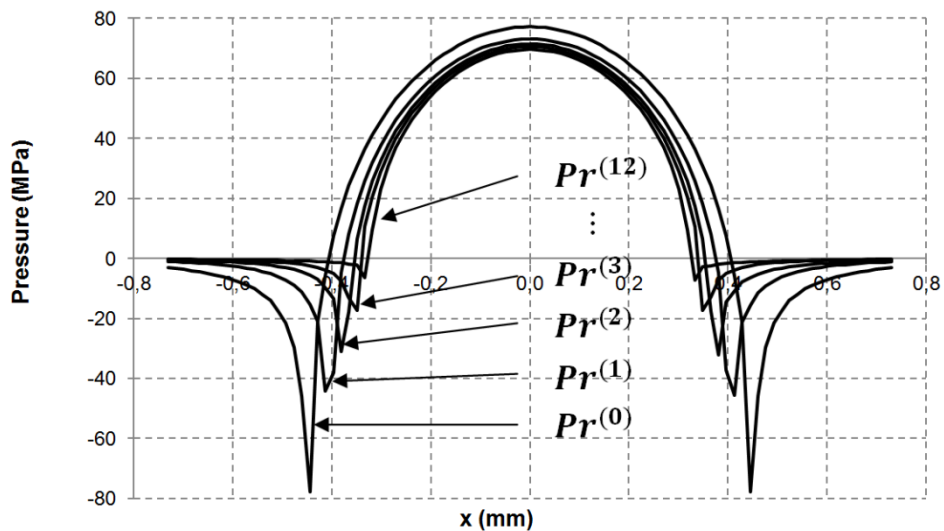


Fig. 11 : Evolution of the pressure field throughout the algorithm.

**Erreur ! Source du renvoi introuvable.** shows the evolution of the displacement field for the first five and the last iteration. The DECR algorithm was applied to the contact problem described in paragraph 3.3. The iterations were stopped when the difference between two successive iteration was less than 0.005%. Fig. 11 shows the evolution of the pressure field. This pressure fields tends towards a null curve outside the contact surface. In order to better evaluate the accuracy of the simulation, it will be compared to the results of Hertz theory in the case of punches with simple geometry and finite elements calculations for more complex situations.

## 5. Validation of the method

In this paragraph, the results of the algorithm will be analyzed. The effects of using a ball and an ellipsoid to indent a plane will be compared to the results of the generalized Hertz theory. Finally,

the case of a more complex geometry will be studied and compared to finite elements calculations.

### 5.1. Half space indented by a ball

In order to evaluate the accuracy of the algorithm, the situation studied is the same as the one studied previously. The precision of the results is compared to Hertz theory. In the proposed situation, this shows that a ball with a radius  $R$  pushed into an elastic half-space with force  $F$  imposes a pressure field

$$p = p_0 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (43)$$

with  $a$  being the radius of the contact zone and  $r$  the radius of the considered point.

$$a = \left( \frac{3FR}{4E} \right)^{1/3} \quad (44)$$

The maximum pressure is:

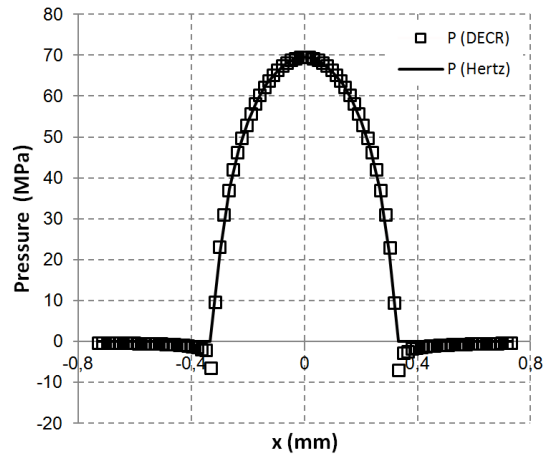
$$p_0 = \left( \frac{6FE}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (45)$$

The applied surface deflection  $h$  is:

$$h = \left( \frac{9F^2}{16RE} \right)^{1/3} \quad (46)$$

In the case of a rigid ball of radius  $R = 10 \text{ mm}$  imposing a surface deflection of  $h = 10 \text{ }\mu\text{m}$

- $F = 14.65 \text{ N}$
- $a = 0.316 \text{ mm}$
- $p_0 = 69.50 \text{ MPa}$



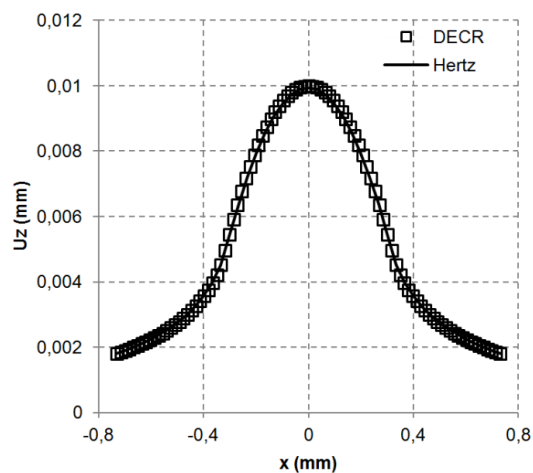
**Fig. 12 : Comparison between the Hertz pressure field and the one found using the DECR algorithm.**

This enabled the pressure field found using the algorithm and the one found using the Hertz theory to be compared (Fig. 12). In the contact zone, the root mean square (RMS) of the difference between the two calculations is  $0.4 \text{ MPa}$ .

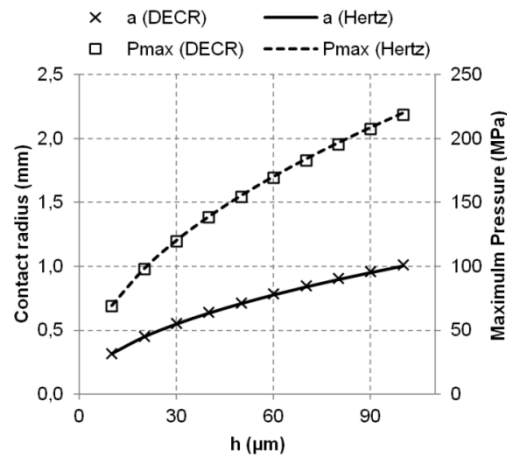
The expression of the surface displacements can also be deduced from Hertz theory:

- For a given point on the contact surface ( $r < a$ ), the surface deflection fits the geometry of the punch.
- Beyond this, where  $\beta = r/a$ :

$$u_z(r) = \frac{1 - \nu^2}{E} ap_0 \left( \text{Atan} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) - \frac{\beta^2}{2} \left[ \text{Atan} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) - \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta^2} \right] \right) \quad (47)$$



**Fig. 13 : Comparison between the displacement fields found using Hertz theory and the one found using DECR.**

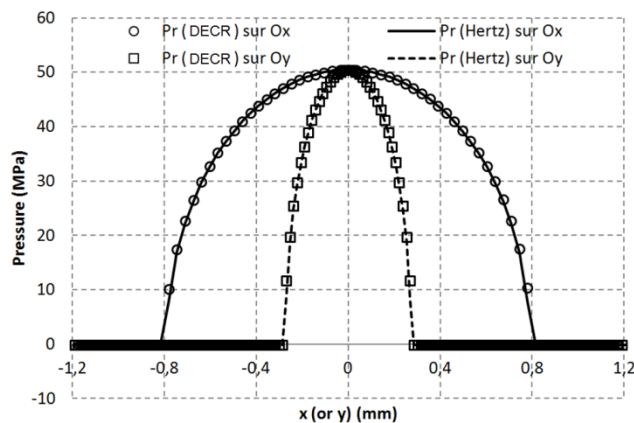


**Fig. 14 : Contact radius and maximum Pressure according to the vertical displacement applied to the Hertz theory and the DECR algorithm.**

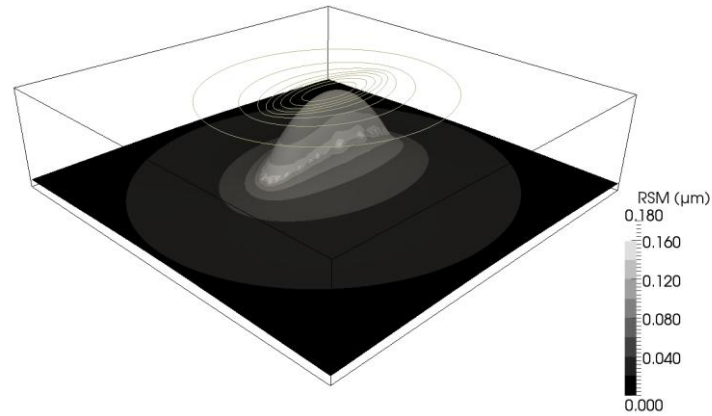
The comparison between DECR method and this formula is highlighted in Fig. 13. The normal displacements found using the DECR algorithm well fit those of Hertz theory. The RMS of the difference is  $0.042 \mu m$ . The evolution of contact radius  $a$  and maximum pressure  $p_0$  versus the applied surface deflection  $h$  can also be compared (Fig. 14). The relative RMS of the differences has a value of 1.4 % for the contact radius and 0.5 % for the maximum pressure.

### 5.2. Half space indented by a paraboloidal punch

To test the algorithm in a case where the punch is no longer axisymmetrical, it was applied to the contact of a paraboloid with a curvature radius  $R_x = 50 \text{ mm}$  according to axis  $Ox$  and  $R_y = 10 \text{ mm}$  according to axis  $Oy$ . The results obtained by the DECR algorithm are compared to the values derived from the generalized Hertz model. Fig. 15 represents the pressure fields along axes  $Ox$  and  $Oy$ . Over the contact zone, the RMS of the difference between the two approaches has a value of  $0.56 \text{ MPa}$ .

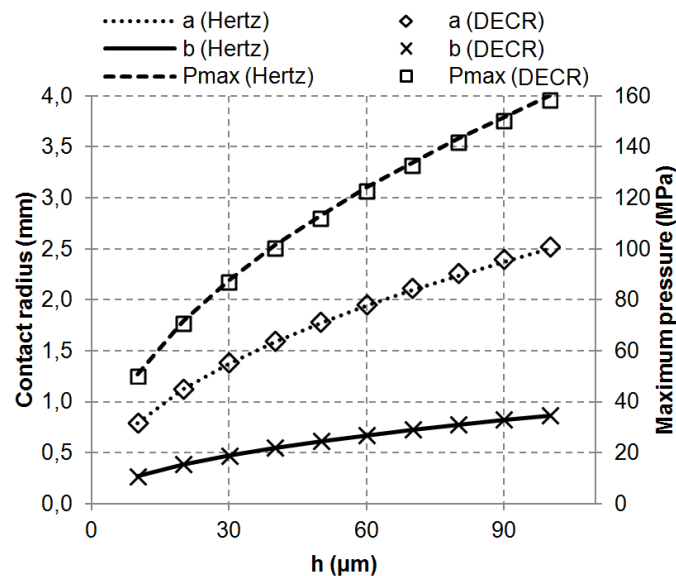


**Fig. 15 : Pressure along axes  $Ox$  and  $Oy$  in the case of an ellipsoidal punch.**



**Fig. 16:** Deformation of the surface indented by an ellipsoidal punch and the difference with Hertz theory.

The normal displacements for a given surface of  $4\text{ mm} \times 4\text{ mm}$  around the contact zone are shown in Fig. 16. On this plot, the contour lines are placed every  $1\text{ }\mu\text{m}$ , with the highest surface deflection at  $10\text{ }\mu\text{m}$ . The color scale represents the difference between the normal displacements calculated using the DECR algorithm and the values calculated using Hertz theory. This difference never exceeds  $0.2\text{ }\mu\text{m}$ . Finally, Fig. 17 represents the evolution of the dimensions of the elliptical contact area (semi major axis  $a$  in direction  $Ox$  and semi minor axis  $b$  in direction  $Oy$ ) and the maximum pressure. The relative RMS of the differences between DECR calculations and Hertz theory has a value of  $1.0\%$  for  $a$  and of  $1.5\%$  for  $b$ , while for the maximum pressure it has a value of  $0.9\%$ . Once again, the adequacy of the DECR algorithm and Hertz theory is made evident.



**Fig. 17 :** Evolution of the contact parameters and the maximum pressure versus the applied surface deflection.

### 5.3. Half space indented by a flat rounded punch

Finally, so as not to be limited to a comparison with Hertz theory, a punch with complex geometry was considered. It consists of a geometry of revolution of axis  $Oz$ . It has a flat zone at its base of radius  $R_{zp}$ , which is extended by a tangent parabolic correction of curvature radius  $R_c$  (Fig. 18). This type of geometry was already used by Pau et al. [15] for pressure field measurements using an ultrasonic method.

Because no analytic solution exists for this type of geometry, the results of the DECR algorithm were compared to simulations by the finite elements method (FEM). The chosen geometry and loading parameters were:

- Applied surface deflection  $h = 10 \mu m$
- flat zone radius  $R_{zp} = 3 mm$
- parabolic correction curvature radius  $R_c = 400 mm$ .

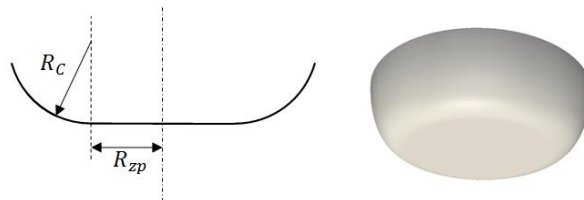


Fig. 18 : flat rounded punch geometry.

Fig. 19 **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** represents the pressure field along a radial axis. The RMS of the difference between the pressures calculated through DECR algorithm and the finite elements method is about  $0.12 MPa$ . The normal displacements calculated using the two methods is shown in Fig. 20. The RMS of the differences has a value of  $0.13 \mu m$ . Inside the contact area, the relative RMS between the displacements calculated using the DECR algorithm and the actual geometry of the punch is to the order of 1.7 %.

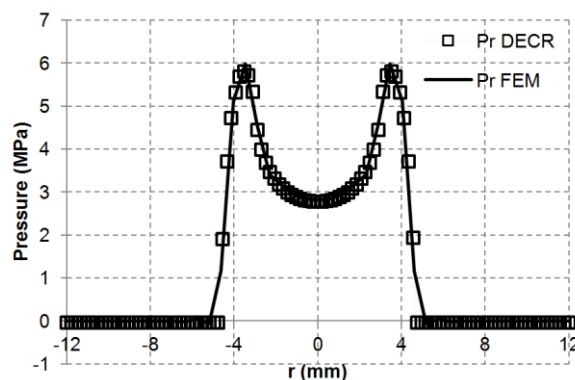


Fig. 19 : Pressure field for a punch with tangent correction.

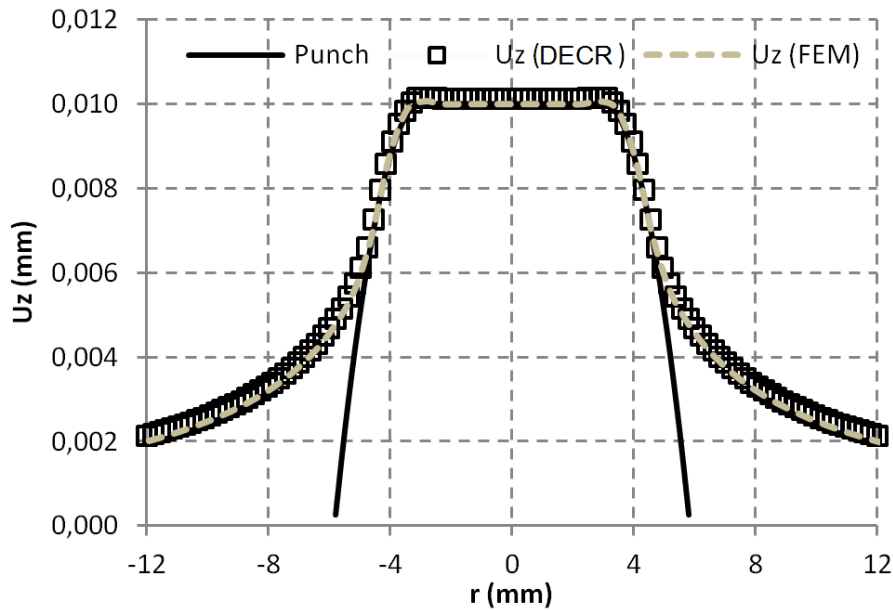


Fig. 20 : vertical displacement of the contact surface.

Fig. 21 shows the evolution of the contact radius calculated using the two methods when the applied surface deflection is increased. It shows increased consistency via the DECR algorithm than when the finite elements method is implemented.

In order to broaden the comparison, Von Mises equivalent stress values within the half-space were compared along two given in depth normal lines : one at radius  $r = 0 \text{ mm}$  and one at  $r = 3.9 \text{ mm}$ , where the maximum sub layer Von Mises stress is found (Fig. 22). For  $r = 0 \text{ mm}$  the RMS of the difference between DECR and FEM estimates has a value of  $0.021 \text{ MPa}$  and for  $r = 3.9 \text{ mm}$ , it has a value of  $0.026 \text{ MPa}$ . Once again, the values highlight the adequacy of the two calculation methods.

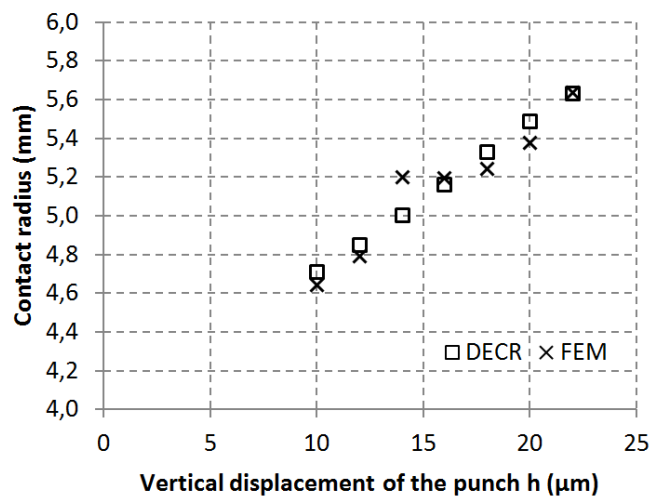


Fig. 21 : Evolution of the contact radius for different applied surface deflections.

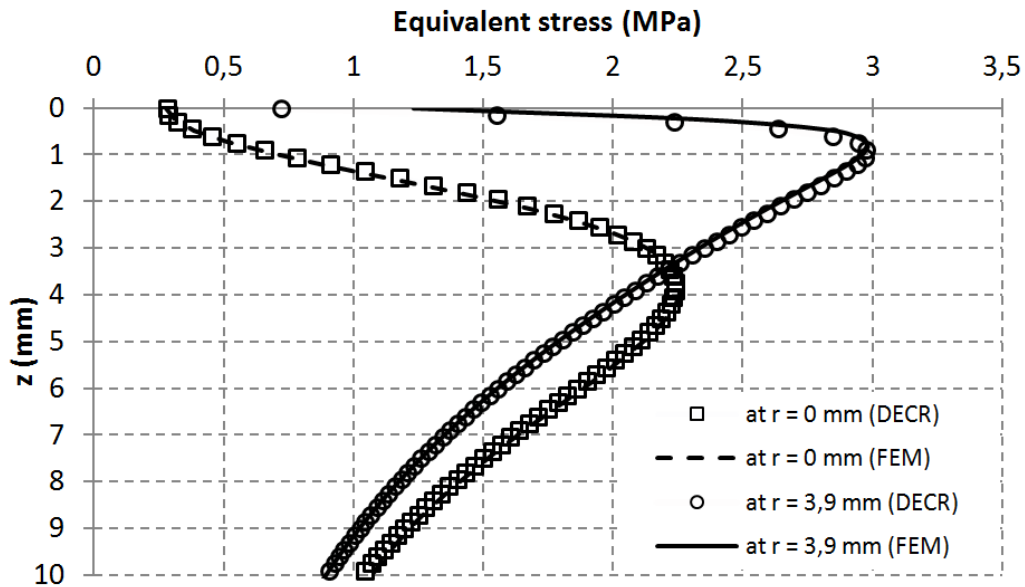


Fig. 22 : In depth Von Mises stress distributions.

## 6. Conclusion

Calculation of elastic fields induced by a localized contact between two mechanical parts is often performed with simplified geometries permitting to apply Hertz theory. Unfortunately, the real geometry of the parts often induces excess pressures which can accelerate the wear and lead to premature damage and fracture. The method developed in this paper enabled the localization and intensity of these overpressures to be evaluated. It uses Boussinesq's theory of potentials to resolve the contact problem for any type of geometry. To this aim, the use of Fast Fourier Transforms enabled implementing an iterative algorithm which allowed the contact pressure field between two mechanical parts to be known. It calculates a first estimation of the pressure field on an approximate contact surface. The imperfections in this pressure field serves to determine a new, more precise contact surface boundary using a procedure based on an active contour model ("snake") as employed in image processing. A more precise pressure field can thus be calculated. The procedure is repeated until converging toward the proper solution. This algorithm was first applied to the contact of a ball or a paraboloidal punch indenting a half space. The results could thus be compared with generalized Hertz model. The calculated pressure and displacement fields were found in good adequacy with the theory. The algorithm was also tested with a flat rounded punch and compared with the results of a simulation using the finite elements method. In similar discretization conditions, this gives results which are, at the least, at the same precision. These comparisons allowed thus the developed algorithm to be validated. The Fourier approach of contact problems can also be used to evaluate contact pressure fields just by characterizing the



displacement field of the surface. Such procedure was already implemented successfully in a previous study using confocal microscopy [16].

## Appendix Analytical Expressions of the Fourier transforms of $\mathbf{i}r_z$ , $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$ and $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$ .

To calculate the Fourier transform of  $\mathbf{i}r_z$ , the following variable change is first implemented :

$$x = r \cos(\alpha)$$

$$y = r \sin(\alpha)$$

$$dxdy = r dr d\alpha$$

Thus:

$$\begin{aligned} \tilde{i}r_z(\theta, \omega) &= \iint \frac{e^{-i2\pi(\theta x + \omega y)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi r(\theta \cos(\alpha) + \omega \sin(\alpha))}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha \end{aligned}$$

Where  $\lambda = \sqrt{\theta^2 + \omega^2}$  and  $\varphi$  so that  $\theta = \lambda \cos(\varphi)$  and  $\omega = \lambda \sin(\varphi)$ , therefore:

$$\begin{aligned} \tilde{i}r_z(\theta, \omega) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi\lambda r(\cos(\varphi)\cos(\alpha) + \sin(\varphi)\sin(\alpha))}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi\lambda r \cos(\alpha - \varphi)}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i2\pi\lambda r \cos(\alpha)}}{\sqrt{r^2 + z^2}} r dr d\alpha \end{aligned}$$

The Bessel function of the first kind of order 0 is:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos(\theta)} d\theta$$

Thus

$$\tilde{i}r_z(\theta, \omega) = \int_0^\infty \frac{2\pi r J_0(2\pi\lambda r)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr$$

With the changing of variables  $R = 2\pi\lambda r$  :

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (2\pi\lambda z)^2}} J_0(R) dr$$

Therefore :

$$\int_0^{\infty} \frac{R}{\sqrt{R^2 + a}} J_0(R) dr = e^{-\sqrt{a}}$$

Thus :

$$\tilde{r}_z(\theta, \omega) = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}$$

For the Fourier transform of  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial x}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln r_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int ir_z dz \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x} ir_z dz \\ &= \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \iint \tilde{r}_z e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \right) dz \\ &= \iint \left( \int \tilde{r}_z dz \right) \frac{\partial}{\partial x} e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \\ &= \iint \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \frac{1}{-2\pi\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} i2\pi\theta e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \\ &= \iint -\frac{i\theta}{\theta^2 + \omega^2} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{i2\pi(x\theta + y\omega)} d\theta d\omega \end{aligned}$$

Thus :

$$\frac{\partial \widetilde{\ln r}_z}{\partial x} = -\frac{i\theta}{\theta^2 + \omega^2} e^{-2\pi z \sqrt{\theta^2 + \omega^2}}$$

Or:

$$\frac{\partial \widetilde{\ln r}_z}{\partial x} = -\frac{i\theta}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \tilde{r}_z$$

In the same manner, for  $\frac{\partial \ln r_z}{\partial y}$  :

$$\frac{\partial \widetilde{\ln r}_z}{\partial y} = -\frac{i\omega}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \tilde{r}_z$$

## References

- [1] I. GONZALEZ-PEREZ, J.L. ISERTE, A. FUENTES, Implementation of Hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, Iss. 6, 2011.
- [2] O.I. ZHUPANSKA, Contact problem for elastic spheres: Applicability of the Hertz theory to non-small contact areas, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, Iss. 7, pp. 576-588, July 2011.
- [3] A. PÉREZ-GONZÁLEZ et al., A modified elastic foundation contact model for application in 3D models of the prosthetic knee, *Medical Engineering & Physics*, V. 30, Iss. 3, pp. 387-398, 2008.
- [4] L. KANIA, Modelling of rollers in calculation of slewing bearing with the use of finite elements, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 41, Iss. 11, pp. 1359-1376, 2006,
- [5] E. LANIADO-JÁCOME, J. MENESES-ALONSO, V. DIAZ-LÓPEZ, A study of sliding between rollers and races in a roller bearing with a numerical model for mechanical event simulations, *Tribology International*, Vol. 43, Iss. 11, pp. 2175-2182, 2010.
- [6] Y. WEI, Y. QIN, R. BALENDRA, Q. JIANG, FE analysis of a novel roller form: a deep end-cavity roller for roller-type bearings, *Journal of Materials Processing Technology*, V. 145, Iss. 2, pp. 233-241, 2004.
- [7] I.G. GORYACHEVA, H. MURTHY and T.N. FARRIS, Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges, *International Journal of Fatigue*, Vol. 24, Iss. 11, pp. 1191-1201, 2002.
- [8] S. LIU, D. HUA, W.W. CHEN, Q. J. Wang, Tribological modeling: Application of fast Fourier transform, *Tribology International*, Vol. 40, Iss. 8, pp. 1284-1293, 2007.
- [9] J. Andersson, A. Almqvist, R. Larsson, Numerical simulation of a wear experiment, *Wear*, Vol. 271, Iss. 11-12, pp. 2947-2952, 2011.
- [10] J. BOUSSINESQ, *Application des Potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1885.
- [11] V. CERRUTI, *Mem. fis. mat*, Roma, Acc, 1882.
- [12] K.L. JOHNSON, *Contact Mechanics*, Cape Town : Cambridge University Press, 1985.
- [13] A.E.H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Edn, Cambridge : University Press, 1952.
- [14] M. KASS, A. WITKIN, D. TERZOPOULOS, Snakes: active contour models, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 1 Iss. 4, pp. 321-331, 1988.

- [15] M. PAU, B. LEBAN and A. BALDI, Experimental analysis of contact for the indentation of a flat rounded punch, *International Journal of Solids and Structures*, n° 43, 2006.
- [16] SOLLE J, et al. Optical measurement for the estimation of contact pressure and stress. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* (2012).

Thèse présentée à Aix Marseille Université par

**Julien SOLLE**

pour obtenir le grade de

**Docteur d'Aix Marseille Université en mécanique du solide**

Titre

---

**Contribution à la caractérisation expérimentale et à la modélisation des champs de pression, de déformations et de contraintes induits par un contact élastique entre composants mécaniques.**

---

### Résumé

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire de thèse est d'évaluer par des mesures les champs de pression, de déformation et de contraintes induits par un contact élastique localisé entre deux pièces mécaniques. Après avoir exploré les différentes méthodes existantes, un constat a été fait : la grande majorité des techniques de mesure passent par l'évaluation de grandeurs physiques seulement indirectement liées aux grandeurs recherchées. En cherchant une approche plus directe, l'idée de caractériser la déformation de la surface de contact entre deux pièces a permis de trouver un moyen de mesure : la microscopie confocale chromatique. Ainsi, en mesurant, cette surface, par transparence, et en utilisant la théorie des potentiels de Boussinesq et Cerrutti, il a été possible d'une part de calculer le champ de pression au contact entre les pièces mais aussi d'évaluer les autres champs élastiques associés. Cette approche a aussi permis de mettre au point une méthode de simulation de contact localisé originale et performante s'appliquant à toute géométrie de contact.

### Abstract

The aim of this thesis is to evaluate pressure, strain and stress fields induced by a localized contact between mechanical parts. As the different methods have been explored, it appeared that all existent methods just measure physical quantities only indirectly related to the data of interest. By searching a more direct method, the idea of characterizing the deformation of the surface of contact between parts allowed to find a way of measurement: chromatic confocal microscopy. Thus, measuring this surface by transparency and using Boussinesq and Cerrutti potential theory allows first to calculate the pressure field at the contact between the parts but also to evaluate the other associated elastic fields. This approach also helped to develop an original and highly simulation method of localized contact applying to any contact geometry.

### Mots-clefs

Pression ; déformations ; contraintes ; élastique ; contact.