CEREGMIA - Pôle Guadeloupe
Centre d'Etude et de Recherche en Economie, Gestion, Modélisation et Informatique Appliquée
www.ceregmia.eu

Université des Antilles et de la Guyane

THÈSE

pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
de l'Université des Antilles et de la Guyane
Mention : Mathématiques

Présentée et soutenue par
Carole Julie Louis-Rose

Sur la contrôlabilité à zéro de problèmes d'évolution de type parabolique

Thèse dirigée par
Gisèle Adelie Mophou Loudjom et Ousseynou Nakoulima
soutenue le 12 Juin 2013, à Pointe-à-Pitre

Jury :

Gisèle Adelie Mophou Loudjom, Professeur, Université des Antilles et de la Guyane (France), Directeur
Ousseynou Nakoulima, Professeur, Université des Antilles et de la Guyane (France), Directeur
Gaston Mandata N'Guerekata, Professeur, Morgan State University (États-Unis)
Jean-Pierre Puel, Professeur, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines (France)
Marius Tucsnak, Professeur, Institut Élie Cartan de Nancy (France)

Remerciements

Je remercie M. Ousseynou NAKOULIMA et Mme Gisèle MOPHOU, mes directeurs de thèse, d'avoir supervisé mon travail.
Je tiens également à remercier M. Enrique FERNÁNDEZ-CARA et M. Otared KAVIAN pour avoir accepté de faire le compte-rendu de mes travaux, ainsi que M. Gaston Mandata N'GUEREKATA, M. Jean-Pierre PUEL et M. Marius TUCSNAK pour leur présence dans le jury.
Je suis très reconnaissante envers M. Fred CELIMÈNE, le directeur du CEREGMIA, et les autres membres du laboratoire pour leur soutien.
Par dessus tout, je remercie ma mère, ma soeur et mes frères pour leur présence constante et leurs encouragements.

Résumé :

Cette thèse a pour objet l'étude de la contrôlabilité à zéro de systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques, que l'on rencontre en physique, chimie ou en biologie. En chimie ou en biologie, ces systèmes modélisent l'évolution au cours du temps d'une concentration chimique ou de la densité d'une population (de bactéries, de cellules).

Le but de la contrôlabilité à zéro est d'amener la solution du système à l'état nul à un temps donné T, en agissant sur le système à l'aide d'un contrôle. Nous recherchons donc un contrôle, de norme minimale, tel que la solution associée y vérifie $y(T) = 0$ dans le domaine Ω considéré. Les problèmes de contrôlabilité à zéro considérés dans cette thèse sont de trois types.
Dans un premier temps, nous nous intéressons à la contrôlabilité à zéro avec un nombre fini de contraintes sur la dérivée normale de l'état, pour l'équation de la chaleur semi-linéaire. Puis, nous analysons la contrôlabilité simultanée à zéro avec contrainte sur le contrôle, pour un système linéaire de deux équations paraboliques couplées. Notre dernière étude concerne la contrôlabilité à zéro d'un système non linéaire de deux équations paraboliques couplées.

Nous abordons ces problèmes de contrôlabilité principalement à l'aide d'inégalités de Carleman. En effet, l'étude des problèmes de contrôlabilité à zéro, et plus généralement de contrôlabilité exacte, peut se ramener à l'établissement d'inégalités d'observabilité pour le problème adjoint, conséquences d'inégalités de Carleman. Nous construisons le contrôle optimal en utilisant la méthode variationnelle et nous le caractérisons par un système d'optimalité.

Mots clés : Contrôlabilité à zéro, contrôlabilité simultanée, contraintes sur l'état, contraintes sur le contrôle, équation de la chaleur, système couplé, système en cascade, opérateur non local, inégalités de Carleman.

Abstract :

This thesis is devoted to the study of the null controllability of systems of parabolic partial differential equations, which we meet in physics, chemistry or in biology. In chemistry or in biology, these systems model the evolution in time of a chemical concentration or the density of a population (of bacteria, cells).

The aim of null controllability is to lead the solution of the system to zero in a given time T, by acting on the system with a control. Thus we are looking for a control, of minimal norm, such as the associated solution y satisfies $y(T) = 0$ in the domain Ω under concern. We consider three types of null controllability problems in this thesis.

At first, we are interested in the null controllability with a finite number of constraints on the normal derivative of the state, for the semi-linear heat equation. Then, we analyze the simultaneous null controllability with constraint on the control, for a linear system of two coupled parabolic equations. Our last study deals with the null controllability of a non linear system of two coupled parabolic equations.

We approach these controllability problems mainly by means of Carleman's inequalities. Indeed, the study of null controllability problems, and more generally exact controllability problems, is equivalent to obtain observability inequalities for the adjoint problem, consequences of Carleman's inequalities. We build the optimal control using the variationnal method and we characterize it by an optimality system.

Keywords : Null controllability, simultaneous controllability, constraints on the state, constraint on the control, heat equation, coupled system, cascade systems, non local operator, Carleman's inequalities.

Table des matières

Introduction

Présentation des travaux, motivations

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur des problèmes de contrôlabilité. J.-P. Puel précise dans [45] que “l'objectif de la contrôlabilité est d'atteindre sur un temps T donné une cible donnée (contrôlabilité exacte) ou de s'en approcher autant qu'on le désire (contrôlabilité approchée), en agissant à l'aide d'un contrôle”.

Soient $N_0 \geqslant 1$ un entier naturel et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{N_0}$, de frontière Γ. Soit T un réel strictement positif. Nous désignons par Q le cylindre $\Omega\times]0,T[$ et par Σ sa frontière latérale $\Gamma\times]0,T[$.
Une première partie de ce travail est consacrée à l'étude de la contrôlabilité des problèmes du type :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f \text{ dans } Q, \tag{1a}$$

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{1b}$$

$$y(x,0) = y^0(x) \text{ dans } \Omega, \tag{1c}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien par rapport à la variable d'espace $x = (x_1, \ldots, x_{N_0}) \in \mathbb{R}^{N_0}$ et t est la variable de temps. Le système (1a)-(1c) modélise l'évolution en temps de la densité y d'une certaine quantité telle que la chaleur dans un domaine Ω, la diffusion d'une concentration y dans le domaine Ω ou la répartition d'une population dans le domaine Ω. Dans le cas de la distribution de chaleur, y représente la température, f est la source de chaleur et y^0 la distribution de température initiale à $t = 0$. Sur le bord Γ de l'ouvert considéré, la température est maintenue à une valeur constante, c'est la condition homogène de Dirichlet. L'équation (1c) est la condition initiale, dite encore condition de Cauchy, et (1a) est l'équation de la chaleur. Le problème (1a)-(1c) est le problème de Cauchy-Dirichlet pour l'équation de la chaleur.
L'étude de la contrôlabilité du système (1a)-(1c) nécessite avant tout de s'assurer que la solution du système considéré existe bien. Pour cela, nous

décrivons un cadre adapté, en rappelant quelques définitions [7, 46], et nous donnons quelques notions de contrôlabilité.

L'ouvert Ω est muni de la mesure de Lebesgue dx.
Nous désignons par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables, définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui sont intégrables. Pour $1 \leqslant p < +\infty$, nous notons $L^p(\Omega)$ l'espace défini par

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

$L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}$ est un espace de Banach.
Lorsque $p = +\infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \sup_{\Omega} \text{ ess } |f(x)| < \infty\},$$

où $\sup_\Omega$ ess $|f(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+; |f(x)| \leqslant C$ p.p.[1] dans $\Omega\}$. Muni de la norme $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_\Omega$ ess $|f(x)|$, $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.
Nous désignons par $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et à support compact dans Ω, i.e. telles qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $u = 0$ en dehors de K. Le dual topologique de $\mathscr{D}(\Omega)$, noté $\mathscr{D}'(\Omega)$, est l'espace des distributions sur Ω. C'est par définition l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathscr{D}(\Omega)$.
Pour $m \in \mathbb{N}$, nous définissons l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant m\},$$

où $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{N_0}^{\alpha_{N_0}}} = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{N_0}} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{N_0}^{\alpha_{N_0}}}$. Par convention, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Pour un entier $m \geqslant 1$, l'espace $H_0^m(\Omega)$ est la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.
Muni de la norme $\|.\|_m$ induite par $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
Soient X un espace de Banach de norme $\|.\|_X$ et $T > 0$ un réel. Nous notons $C^m([0, T]; X)$ l'espace $\{u : [0, T] \to X; u$ de classe $C^m\}$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0 \leqslant l \leqslant m} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^l u}{\partial t^l}(t) \right\|_X.$$

1. presque partout i.e. partout sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Nous désignerons $C^0([0,T];X)$ par $C([0,T];X)$.
Puis pour $p \in \mathbb{R}; 1 \leqslant p < +\infty$, nous définissons

$$L^p(0,T;X) = \Big\{ u :]0,T[\to X \text{ fortement mesurable}^{2}; \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\},$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{u :]0,T[\to X; \sup_{t\in]0,T[} \text{ ess } \|u(t)\|_X < \infty\}.$$

$L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \sup\limits_{t\in]0,T[} \text{ ess } \|u(t)\|_X & \text{pour } p = +\infty. \end{cases}$$

Considérons ω un ouvert non vide inclus dans Ω, χ_ω la fonction caractéristique sur ω et notons G le cylindre $\omega \times]0,T[$. Le système suivant

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y & = & f + v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(x,0) & = & y^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{array} \tag{2}$$

est exactement contrôlable au temps T si pour tous $f \in L^2(Q)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $z^0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(G)$ tel que la solution y de (2) satisfasse la condition

$$y(T) = z^0 \text{ dans } \Omega.$$

Le système (2) est approximativement contrôlable au temps T si pour tous $f \in L^2(Q)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$, $y^1 \in L^2(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $v \in L^2(G)$ tel que la solution correspondante de (2) satisfasse la condition suivante

$$\|y(T) - y^1\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Le système (2) est contrôlable à zéro au temps T si pour tous $f \in L^2(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(G)$ tel que la solution y de (2) satisfasse la condition

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3}$$

Le système (2) est exactement contrôlable aux trajectoires au temps T, si pour toute trajectoire $\bar{y}$ (i.e. toute solution de (2) correspondant à $v \equiv 0$ et

2. i.e. les fonctions scalaires $t \mapsto \|u(t)\|_X$ sont mesurables pour la mesure dt.

$\bar{y}^0 \in L^2(\Omega)$) et si pour tous $f \in L^2(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(G)$ tel que la solution associée de (2) vérifie

$$y(T) = \bar{y}(T) \text{ dans } \Omega.$$

Nous rappelons le résultat d'existence suivant conçernant le problème linéaire (2). Pour tous $f \in L^2(Q)$, $v \in L^2(G)$ et pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique y vérifiant

$$y \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

La preuve de l'existence et de l'unicité est rappelée dans l'Annexe A ; nous renvoyons également à [13].
Ainsi pour (f, y^0, v) donné dans $L^2(Q) \times L^2(\Omega) \times L^2(G)$, $y(T)$ a du sens dans $L^2(\Omega)$. Maintenant nous sommes en mesure de formuler le problème de contrôlabilité exacte aux trajectoires associé au système (2). Le problème (2) étant linéaire, résoudre le problème de contrôlabilité exacte aux trajectoires revient à résoudre le problème de contrôlabilité à zéro. Nous remarquons que s'il existe une solution, alors il y en a une infinité. Par conséquent, il est naturel de rechercher le contrôle de norme minimale dans $L^2(G)$, et le problème peut finalement être formulé ainsi : étant donnés $f \in L^2(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, trouver $\hat{v} \in L^2(G)$ tel que

$$\|\hat{v}\|_{L^2(G)} = \inf\{\|v\|_{L^2(G)}, \text{ tels que la solution}$$
$$\text{associée de (2) vérifie (3)}\}.$$

Les problèmes de contrôlabilité pour des équations paraboliques ont été abordés par bon nombres d'auteurs. D. L. Russell est l'un des premiers à avoir proposé des résultats de contrôlabilité pour l'équation de la chaleur avec un contrôle frontière. Il a démontré dans [48] que la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes implique la contrôlabilité exacte pour l'équation de la chaleur. Plus récemment, C. Fabre et al. ont étudié le problème de contrôlabilité approchée pour l'équation de la chaleur semi-linéaire dans [14]. G. Lebeau et L. Robbiano ont prouvé dans [31] la contrôlabilité exacte pour l'équation de la chaleur, à l'aide d'inégalités de Carleman elliptiques. A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [20] ont obtenu des résultats similaires pour des opérateurs plus généraux et des équations semi-linéaires, en utilisant des inégalités de Carleman globales pour les équations d'évolution. E. Fernández-Cara et al. [15] se sont intéressés à la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur, avec des conditions aux limites de Fourier. Leur méthode repose sur une inégalité de Carleman valable pour l'équation de diffusion avec au bord, des conditions non homogènes de Neumann.

Certains auteurs se sont intéressés à d'autre types de problème de contrôlabili té à zéro, parmi lesquels O. Nakoulima dans [42]. Ce dernier a examiné le problème suivant : étant donnés $\mathcal{K}$ un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ de dimension finie dont l'orthogonal dans $L^2(G)$ est noté $\mathcal{K}^\perp$, $f \in L^2(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, trouver $v \in L^2(G)$ tel que

$$v \in \mathcal{K}^\perp \tag{4}$$

et si y est la solution associée de (2), alors y satisfait à (3) ; le contrôle v étant choisi de norme minimale dans $L^2(G)$, parmi tous les contrôles tels que (4),(2),(3) soit vrai. Si le contrôle recherché v existe, alors le problème (4),(2),(3) est appelé problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle. Par conséquent, les travaux cités précédemment correspondent au cas $\mathcal{K} = \{0\}$. Ce résultat de contrôlabilité avec contrainte sur le contrôle repose sur une inégalité du type

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}|\rho|^2 dxdt \leqslant C\Big(\int_Q \Big|\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta\rho\Big|^2 dxdt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dxdt\Big),$$

θ étant une fonction positive de classe C^2 sur Q et P désigne l'opérateur de projection orthogonale de $\mathcal{K}$ sur $L^2(G)$. Cette inégalité est une conséquence d'une inégalité d'observabilité, elle-même déduite d'une inégalité de Carleman globale, et est valable pour des fonctions ρ de classe C^∞ sur $\overline{Q}$ nulles sur la frontière Σ. L'auteur a également eu besoin de l'hypothèse suivante

$$\begin{gathered}\text{il n'existe pas d'élément non nul } \sigma \in \mathcal{K} \text{ tel que}\\ \sigma \in L^2(0,T,H^1(\omega)) \text{ avec } \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \Delta\sigma = 0 \text{ dans } G,\end{gathered} \tag{5}$$

hypothèse déjà utilisée par J.-L. Lions dans [34]. La question de contrôlabilité à zéro avec un nombre fini de contraintes sur l'état a été étudiée par la suite par G. Massengo Mophou et O. Nakoulima dans [40], pour l'équation de la chaleur semi-linéaire. Il s'agissait, pour l'état y du système étudié, en plus d'atteindre la trajectoire nulle en temps T, de satisfaire à la contrainte intégrale suivante

$$\int_Q y e_i dxdt = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant M,$$

où les e_i désignent M fonctions de $L^2(Q)$ supposées linéairement indépendantes dans G. En fait, les auteurs ont résolu ce problème en le ramenant à un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle, pour le système linéarisé. Dans ce cas, l'hypothèse (5) est automatiquement vérifiée.

Le premier problème ayant été traité dans cette thèse est celui de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur semi-linéaire, avec un nombre fini de contraintes sur la dérivée normale [35]. Nous supposons au préalable les M_0 fonctions e_j linéairement indépendantes sur une partie Σ_0 de la frontière Σ. Il s'agit alors de trouver un contrôle $v \in L^2(G)$ tel que si y résout le système semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) & = & v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

alors y vérifie à la fois

$$\langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, e_j \rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = 0; j = 1, \dots, M_0,$$

et

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où $\dfrac{\partial y}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de y par rapport à ν, le vecteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur, et $\langle ., . \rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)}$ est le crochet de dualité entre les espaces duaux $H^{-1}(\Sigma_0)$ et $H_0^1(\Sigma_0)$, un sous-espace de $L^2(\Sigma_0)$. A la différence des travaux précédemment cités, les contraintes intégrales portent sur la dérivée normale de l'état du système et les fonctions e_j ne sont plus définies sur le cylindre Q tout entier, mais seulement sur une partie de sa frontière Σ. Ainsi, la principale difficulté rencontrée lors de cette étude est la définition des traces des fonctions considérées. La méthode utilisée pour mener cette étude est similaire à celle proposée par les auteurs de [40], à savoir que la méthode variationnelle est employée pour prouver l'existence du contrôle optimal, qui est ensuite caractérisé par un système d'optimalité.

Une deuxième partie de cette thèse est dédiée à l'étude des problèmes de contrôlabilité à zéro pour des systèmes de deux équations couplées.
Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la contrôlabilité simultanée à zéro du système parabolique linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} - \Delta y_1 + a_1 y_2 & = h_1 + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} - \Delta y_2 + a_2 y_1 & = h_2 + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_1 = y_2 & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_1(0) = y_1^0, \; & y_2(0) = y_2^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

La contrôlabilité simultanée a été introduite par D. L. Russell, avec un système de deux équations des ondes contrôlé par la même fonction de contrôle sur la frontière (voir [49]), et par J.-L. Lions dans [33], avec en outre, un système de deux équations de plaques vibrantes du type $\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + \Delta^2 y_i = 0$. Elle consiste à contrôler plusieurs équations par l'action d'un seul contrôle commun. Dans le contexte des systèmes modélisant les vibrations de cordes et de poutres, S. A. Avdonin et W. Moran ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes à différents types de contrôlabilité simultanée, qu'ils ont définis dans [4]. Nous mentionnons M. Tucsnak et G. Weiss [51], qui ont prouvé la contrôlabilité simultanée exacte de deux systèmes, en admettant que l'un des deux est de dimension finie. La contrôlabilité simultanée à zéro pour des systèmes d'équations paraboliques a suscité l'intérêt de beaucoup d'auteurs, parmi lesquels nous pouvons citer F. Ammar Khodja et al. qui ont travaillé dans [27] sur la contrôlabilité à zéro d'un système couplé de deux équations paraboliques semi-linéaires ou encore M. González-Burgos et L. de Teresa qui eux ont abordé le problème pour un système de m ($m \geqslant 1$) équations paraboliques linéaires couplées (voir [21]).

Dans ce travail, nous examinons la contrôlabilité simultanée à zéro avec contrainte sur le contrôle pour le système (6) (voir [36]). Etant donnés $\mathcal{K}$ un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ de dimension finie, $a_i \in L^\infty(Q)$, $h_i \in L^2(Q)$ et $y_i^0 \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, le but est de trouver

$$k \in \mathcal{K}^\perp$$

tel que la solution (y_1, y_2) de (6) vérifie

$$y_1(T) = y_2(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

A noter que pour tout $a_i \in L^\infty(Q)$, $h_i \in L^2(Q)$ et $y_i^0 \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, le système (6) admet une solution unique (y_1, y_2) dans

$$\Big(C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))\Big)^2.$$

Nous pouvons trouver la preuve de l'existence dans l'Annexe B.
Le système (6) peut être transformé en un système en cascade, i.e. un système de deux équations avec un contrôle dans l'une des deux équations, et pour lequel beaucoup de résultats de contrôlabilité sans contrainte ont été obtenus (voir [28, 29, 2]). La contrôlabilité avec contrainte sur le contrôle semble une approche nouvelle pour les systèmes en cascade d'équations paraboliques. Nous y sommes parvenus grâce à une hypothèse similaire à l'hypothèse (5). Notre référence principal pour cette étude est l'article [27] de F. Ammar Khodja et al.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la contrôlabilité de systèmes paraboliques avec des non-linéarités non locales. Plus précisément, considérons l'équation non linéaire suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(t)u &= f & \text{dans } Q, \\ u(x,t) &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(x,0) &= u^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

où

$$A(t)u = \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(u(t),t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j};$$

les fonctions $B_{ij} : L^1(\Omega) \times [0,T] \to \mathbb{R}$ étant données pour tous $i, j \in \{1, \ldots, N_0\}$. On dit que (7) contient des non-linéarités non locales au vu de la structure des coefficients B_{ij}. L'étude de tels modèles est importante car ils peuvent servir à décrire la migration d'une population (de bactéries dans un récipient) ou encore la diffusion de la chaleur dans un conducteur. Dans le cas de migration de populations, nous pouvons avoir

$$B_{ij}(u(t),t) = a_{ij}\Big(\int_\Omega u(x,t)dx\Big)$$

où u représente la densité de population et $a_{ij} = a_{ij}(s)$ sont des fonctions réelles continues et positives, représentant la vitesse à laquelle le mouvement s'effectue. Les coefficients a_{ij} sont supposés dépendants de la population entière du domaine et non pas de la densité locale. Dans le contexte des systèmes de réaction-diffusion, B_{ij} peut s'écrire

$$B_{ij}(u(t),t) = a_{ij}(\langle l, u(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)})$$

où l est une forme linéaire sur $L^2(\Omega)$ et les a_{ij} sont des fonctions réelles continues et positives. En dynamique des populations, l peut dépendre de la population entière du domaine Ω ou si Ω' est un sous-domaine de Ω, l peut seulement prendre en compte la population de Ω' (voir [12]). L'existence de solution au système (7) est reprise dans l'Annexe C et s'inspire des travaux déjà réalisés sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes elliptiques et paraboliques non locaux (voir [8, 9, 11, 10]. E. Fernández-Cara et al. ont discuté de la contrôlabilité à zéro pour le système parabolique non local (7) dans leur article [18], et c'est ce récent travail qui constitue notre principal référence pour cette dernière étude.

Nous nous sommes penchés sur la contrôlabilité à zéro du système en cascade d'équations paraboliques non locales suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(t)u - au - bv &= f + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - A(t)v - cu - dv &= g & \text{dans } Q, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, \quad v(0) &= v^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

i.e. quels que soient $f, g \in L^2(Q)$, $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$ et $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, existe-t-il un contrôle $k \in L^2(G)$ tel que l'on ait simultanément

$$u(T) = v(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{9}$$

Pour résoudre ce problème, nous démontrons la contrôlabilité à zéro du système linéaire, associé au système étudié, puis nous parvenons au résultat grâce au Théorème de point fixe de Kakutani. Les difficultés rencontrées se situent au niveau de l'inégalité d'observabilité, qui doit être établie pour un opérateur du type $\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z(t),t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, avec $B_{ij}(z(t),t) \in L^\infty(0,T)$ et également au niveau de la preuve de l'existence d'un contrôle optimal avec une régularité suffisante pour pouvoir appliquer le Théorème de point fixe de Kakutani. Pour ce faire, nous faisons appel à une technique, introduite par O. Bodart et al. dans [5], qui utilise les propriétés de régularisation de l'équation de la chaleur.

Plan

Ce travail se divise en quatre chapitres consacrés à des problèmes de contrôlabilité à zéro respectivement pour l'équation de la chaleur semi-linéaire, pour un système couplé d'équations paraboliques linéaires et pour un système en cascade d'équations paraboliques non locales, ainsi qu'aux perspectives. Les plans de ces chapitres sont à peu près identiques. Au début de chaque chapitre, nous donnons les notations que nous utiliserons et nous formulons le problème analysé, après avoir renseigné son contexte. Dans un deuxième temps, nous démontrons une inégalité d'observabilité pour les fonctions appartenant à l'espace $\mathcal{V} = \{\rho \in C^\infty(\overline{Q}); \rho|_\Sigma = 0\}$, qui résulte d'une inégalité de Carleman globale, et qui est essentielle à l'étude des problèmes de contrôlabilité exacte (l'obtention d'une telle inégalité est une condition nécessaire et suffisante [17]). Ensuite, nous faisons la preuve de l' existence et de l'unicité du contrôle optimal, garantissant la contrôlabilité à zéro du système considéré.
Les annexes de ce document se composent des démonstrations de l'existence et de l'unicité de solutions pour l'équation de la chaleur et pour un système d'équation avec des nonlinéarités non locales, et de l'existence de la solution pour un système couplé de deux équations paraboliques du second ordre, mais aussi les détails des inégalités d'observabilité permettant d'obtenir des résultats de contrôlabilité à zéro pour des équations de la forme (6) et (8).

Chapitre 1

Un problème de contrôlabilité à zéro avec un nombre fini de contraintes sur la dérivée normale pour l'équation de la chaleur semi-linéaire

Dans cette partie, nous considérons l'équation de la chaleur semi-linéaire dans un domaine borné de $\mathbb{R}^{N_0}$. Nous prouvons la contrôlabilité à zéro du système avec un nombre fini de contraintes sur la dérivée normale. Pour ce faire, nous montrons l'équivalence avec un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle. Puis, nous utilisons une inégalité d'observabilité pour résoudre le problème associé au système linéaire. Enfin, nous obtenons le résultat principal grâce à un théorème de point fixe.

1.1 Notations et introduction

Soient ω un sous-ensemble non vide de Ω et Γ_0 une partie non vide de la frontière Γ de Ω. Pour un temps $T > 0$, nous désignons par Σ_0 la partie $\Gamma_0 \times]0, T[$ de la frontière latérale du cylindre Q et par G le morceau de cylindre $\omega \times]0, T[$.
Nous notons

$$H_0^1(\Sigma) = \{\psi | \psi \in H^1(\Sigma), \psi(x, 0) = 0, \psi(x, T) = 0 \text{ dans } \Gamma\}$$

et $H^{-1}(\Sigma)$ son dual.
Nous introduisons $\{e_1, \dots e_{M_0}\}$ une famille de M_0 vecteurs de $H_0^1(\Sigma)$, $M_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E} = \text{Vect}(\{e_1, \dots, e_{M_0}\})$ l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\{e_1, \dots e_{M_0}\}$.
Si X est un sous-espace fermé de $L^2(G)$, nous notons $X^\perp$ l'orthogonal de X dans $L^2(G)$.
Nous désignons par $H^{2,1}(Q)$ l'espace $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$, et par $W(0, T)$ l'espace $\left\{\rho \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\right\}$.

Considérons l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) & = & v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(G)$ représente la fonction contrôle. Supposons que la fonction f est globalement lipschitzienne, i.e. il existe $K > 0$ tel que

$$|f(x) - f(z)| \leqslant K|x - z|, \forall x, z \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

et que

$$f(0) = 0. \tag{1.3}$$

Notons y la solution $y(x, t, v)$ de (1.1).

Les problèmes de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle ont été étudiés par O. Nakoulima dans [42, 43], pour l'équation de la chaleur. En effet, il a résolu dans [43] le problème de controlabilité à zéro suivant : *Etant donnés $\mathcal{K}$ un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$ et $q^0 \in H_0^1(\Omega)$, trouver un contrôle $k \in \mathcal{K}^\perp$ tel que la solution de*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q + a_0 q & = & h + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ q & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T) & = & q^0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.4}$$

vérifie $q(0) = 0$ dans Ω.
La preuve utilise une inégalité de Carleman qui est adaptée à la contrainte. Les résultats obtenus par O. Nakoulima ont permis à G. M. Mophou et O. Nakoulima de démontrer l'existence de sentinelles à sensibilité donnée dans [39], et de résoudre un nouveau genre de problème de contrôlabilité (voir [40]) : *Etant donnés $e_i \in L^2(Q)$, $1 \leqslant i \leqslant M$, et $y^0 \in L^2(\Omega)$, trouver un contrôle $v \in L^2(Q)$ tel que la solution de (1.1) vérifie $y(T) = 0$ dans Ω et*

$$\int_Q y e_i dx dt = 0, 1 \leqslant i \leqslant M. \tag{1.5}$$

Nous en référons à [41] où un problème frontière de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état pour l'équation de la chaleur, est résolu. G. M. Mophou dans [38] a également établi la contrôlabilité à zéro avec un nombre fini de contraintes sur l'état, pour une équation d'évolution parabolique non linéaire impliquant des termes en gradient.

Nous nous focalisons sur un problème de contrôlabilité à zéro avec contrain tes sur la dérivée normale que nous décrivons ci-dessous.
Supposons que

$$\text{les vecteurs } (e_j)_{j=1,\dots,M_0} \text{ sont linéairement indépendants sur } \Sigma_0. \tag{1.6}$$

Alors le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur la dérivée normale pour le système (1.1) peut être formulé comme suit : *étant donnés une fonction f globalement lipschitzienne de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1.3), $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $e_j \in H_0^1(\Sigma)$ $j = 1, \dots, M_0$ vérifiant (1.6), trouver $v \in L^2(G)$ tel que si y est solution de (1.1), alors*

$$\langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, e_j \rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = 0; j = 1, \dots, M_0, \tag{1.7}$$

et

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{1.8}$$

où $\dfrac{\partial y}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de y par rapport à ν.
Le résultat principal de cette partie est le suivant

Théorème 1.1.1. *Soit f une fonction globalement lipschitzienne de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1.3). Alors quels que soient $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $e_j \in H_0^1(\Sigma)$ $j = 1, \ldots, M_0$ vérifiant (1.6), il existe un unique contrôle $\tilde{v}$ de norme minimale dans $L^2(G)$, tel que $(\tilde{v}, \tilde{y})$ soit solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur la dérivée normale (1.1), (1.7) et (1.8). De plus il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}, \|a_0\|_{L^\infty(Q)})$ telle que*

$$\|\tilde{v}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.9}$$

La preuve de ce théorème fera l'objet de la dernière section de cette partie.

1.2 Equivalence avec un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle pour le système linéarisé

Ecrivons le système (1.1) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \dfrac{f(y) - f(0)}{y} y & = & v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

En appliquant la formule de Taylor, pour y et $y_0 \in L^2(Q)$, il existe s strictement compris entre y_0 et $y_0 + y$, tel que

$$\begin{aligned} f(y_0 + y) - f(y_0) &= f'(s)y \\ &= a_0(y)y \end{aligned}$$

avec $a_0(y) = f'(s)$. Introduisons la notation suivante

$$a_0(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{f(s)}{s} & \text{si } s \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } s = 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse (1.2) sur f permet d'affirmer que a_0 est défini sur $L^2(Q)$ à valeurs dans un ensemble borné de $L^\infty(Q)$. En outre

$$\|a_0(y)\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K, \forall y \in L^2(Q), \tag{1.11}$$

Ainsi le système (1.1) peut se mettre sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + a_0(y)y & = v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) & = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le système linéarisé associé à (1.1), défini, étant donné $z \in L^2(Q)$, par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + a_0(z)y &= v\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= y^0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

Puisque $a_0(z) \in L^\infty(Q)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $v\chi_\omega \in L^2(Q)$, le système (1.13) admet une solution unique y dans $Ł^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$.
Notons que comme $y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T; H^1(\Omega))$, nous pouvons définir $\dfrac{\partial y}{\partial \nu}$ sur Γ et on a $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} \in H^{-1}(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$, qui est un sous ensemble de $H^{-1}(\Sigma)$.

Par conséquent notre but est : *pour tous $z \in L^2(Q)$, $a_0(z) \in L^\infty(Q)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $e_j \in H_0^1(\Sigma)$ $j = 1, \ldots, M_0$, de trouver un contrôle $v \in L^2(G)$ tel que la solution y de (1.13) vérifie (1.7) et (1.8).*
Dans la suite de cette section, nous montrons que le problème (1.13), (1.7), (1.8) est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.
Pour ce faire, nous introduisons une famille de problèmes adjoints associés à (1.7) et définis comme suit. Pour chaque e_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$, nous considérons le problème adjoint :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_j}{\partial t} - \Delta q_j + a_0(z)q_j &= 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ q_j &= e_j \quad \text{sur} \quad \Sigma_0, \\ q_j &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \setminus \Sigma_0, \\ q_j(T) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Lemme 1.2.1. *Sous l'hypothèse (1.6), les fonctions $q_j\chi_\omega$, $1 \leqslant j \leqslant M_0$, sont linéairement indépendantes quel que soit $z \in L^2(Q)$.*

Preuve. Soient $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant M_0$, tels que

$$\sum_{j=1}^{M_0} \gamma_j q_j = 0 \text{ dans } G. \tag{1.15}$$

Puisque q_j est solution de (1.14) pour chaque $j \in \{1, \ldots, M_0\}$, $\sum_{j=1}^{M_0} \gamma_j q_j = q$ vérifie en particulier

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q + a_0(z)q &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ q &= \sum_{j=1}^{M_0} \gamma_j e_j \quad \text{sur } \Sigma_0. \end{cases} \tag{1.16}$$

En combinant la première équation de (1.16) avec (1.15), nous en déduisons selon une propriété de continuation unique pour l'équation d'évolution, que $q = 0$ dans Q. Donc on a $q = 0$ sur Σ_0. En considérant maintenant la seconde équation de (1.16), l'hypothèse (1.6) implique que $\gamma_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, M_0\}$, ce qui achève la preuve du Lemme 1.2.1. ∎

Proposition 1.2.2. *Il existe une fonction réelle positive θ (donné par (1.27)) telle que quel que soit $z \in L^2(Q)$, il existe deux sous-espaces vectoriels de $L^2(G)$ de dimension finie $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_\theta = \dfrac{1}{\theta}\mathcal{U}$, et un élément $u_0(z) \in \mathcal{U}_\theta$ tels que le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur la dérivée normale (1.13), (1.7), (1.8) soit équivalent au problème suivant de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle : étant donnés $a_0(z) \in L^\infty(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, trouver*

$$u \in \mathcal{U}^\perp \tag{1.17}$$

tel que si y est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + a_0(z)y & = & (u_0 + u)\chi_\omega & \textit{dans } Q, \\ y & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ y(0) & = & y^0 & \textit{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.18}$$

alors

$$y(T) = 0 \ \textit{dans } \Omega. \tag{1.19}$$

Preuve. Supposons que le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur la dérivée normale (1.13), (1.7), (1.8) soit vrai. Comme $a_0(z) \in L^\infty(Q)$ et $e_j \in H_0^1(\Sigma)$, $j = 1, \ldots, M_0$, alors pour chaque j, le système (1.14) possède une solution unique q_j dans $H^{2,1}(Q)$. En multipliant (1.13) par la solution q_j de (1.14), puis en intégrant par parties dans Q, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_\Omega y(T)q_j(T)dx - \int_\Omega y(0)q_j(0)dx - \langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, q_j\rangle_{H^{-1}(\Sigma), H_0^1(\Sigma)} \\ &\quad + \int_\Sigma y\frac{\partial q_j}{\partial \nu}d\Gamma dt + \int_Q y(-\frac{\partial q_j}{\partial t} - \Delta q_j + a_0(z)q_j)dxdt = \int_Q v\chi_\omega q_j dxdt. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$-\int_\Omega y^0 q_j(0)dx - \langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, e_j\rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = \int_G v q_j dxdt.$$

D'après (1.7), on a

$$-\int_\Omega y^0 q_j(0)dx = \int_G v q_j dxdt. \tag{1.20}$$

Soient $\mathcal{U} = \text{Vect}(\{q_1\chi_\omega, \dots, q_{M_0}\chi_\omega\})$ et $\mathcal{U}_\theta = \dfrac{1}{\theta}\mathcal{U}$, où θ est une fonction positive telle que $\dfrac{1}{\theta} \leqslant C$ pour une constante positive C, et dont une définition précise sera donnée par (1.27). Alors il existe un unique $u_0 \in \mathcal{U}_\theta$ tel que pour chaque $j \in \{1, \dots, M_0\}$,

$$\int_G u_0 q_j dxdt = -\int_\Omega y^0 q_j(0) dx. \tag{1.21}$$

En effet, puisque $u_0 \in \mathcal{U}_\theta$, u_0 s'écrit $u_0 = \sum_{k=1}^{M_0} \alpha_k \frac{1}{\theta} q_k \chi_\omega$. Ainsi, résoudre (1.21) revient à trouver les α_k tels que

$$\sum_{k=1}^{M_0} \alpha_k \int_G \frac{1}{\theta} q_j q_k dxdt = -\int_\Omega y^0 q_j(0) dx,\ 1 \leqslant j \leqslant M_0.$$

Avec les notations suivantes

$$A = \Big(\int_G \frac{1}{\theta} q_j q_k dxdt\Big)_{\substack{1\leqslant j\leqslant M_0\\ 1\leqslant k\leqslant M_0}}, \quad Z = (\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant M_0} \text{ et } B = -\Big(\int_\Omega y^0 q_j(0) dx\Big)_{1\leqslant j\leqslant M_0},$$

l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$\sum_{k=1}^{M_0} a_{jk} z_k = b_j, 1 \leqslant j \leqslant M_0,$$

en d'autres termes,

$$AZ = B.$$

La matrice A étant symétrique définie positive, elle est inversible et nous sommes en mesure de déterminer les nombres réels α_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ et donc l'élément u_0.

En combinant (1.20) et (1.21), il vient

$$\int_G u_0 q_j dxdt = \int_G v q_j dxdt, \text{ pour chaque } j \in \{1, \dots, M_0\}.$$

Ainsi, $v - u_0 \in \mathcal{U}^\perp$ et il existe $u \in \mathcal{U}^\perp$ tel que $v = u_0 + u$. Maintenant en remplaçant v par $u_0 + u$ dans (1.13), nous en tirons (1.18).

Réciproquement, supposons que $z \in L^2(Q)$, $a_0(z) \in L^\infty(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$ sont donnés, et que la solution y de (1.18) est telle que $y(T) = 0$ dans Ω. Soient q_j, $j = 1, \dots, M_0$, les solutions de (1.14), $u \in \mathcal{U}^\perp$ et u_0 vérifiant (1.21). En multipliant (1.18) par q_j, puis en intégrant par parties dans Q, on a

$$-\int_\Omega y^0 q_j(0) dx - \langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, e_j \rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = \int_G u_0 q_j dxdt + \int_G u q_j dxdt.$$

Il découle de (1.21) que

$$-\langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, e_j \rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = \int_G u q_j dxdt,$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 1.2.2, puisque $u \in \mathcal{U}^\perp$. ∎

Remarque 1.2.3. *La fonction u_0 est telle que $\theta u_0 \in L^2(G)$.*
Dans la suite, nous noterons P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ sur $\mathcal{U}$.

1.3 Inégalité d'observabilité

Nous établissons dans cette section une inégalité d'observabilité, conséquence d'une inégalité de Carleman que l'on doit à A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [20].
Soit $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi(x) & > & 0 \quad \forall x \in \Omega, \\ \psi(x) & = & 0 \quad \forall x \in \Gamma, \\ |\nabla\psi(x)| & \neq & 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega - \omega}. \end{array}\right. \tag{1.22}$$

Une telle fonction existe bien d'après [20]. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, définissons

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{\lambda(m\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}+\psi(x))}}{t(T-t)}, \tag{1.23}$$

$$\eta(x,t) = \frac{e^{2\lambda m\|\psi\|_{L^\infty(\Omega}} - e^{\lambda(m\|\psi\|_{L^\infty(\Omega}+\psi(x))}}{t(T-t)}, \tag{1.24}$$

pour $(x,t) \in Q$ et $m > 1$.
Enfin, introduisons les notations suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} L\rho & = & \dfrac{\partial\rho}{\partial t} - \Delta\rho + a_0(z)\rho, \\ L^*\rho & = & -\dfrac{\partial\rho}{\partial t} - \Delta\rho + a_0(z)\rho, \end{array}\right. \tag{1.25}$$

où $a_0 \in L^\infty(Q)$.
L'inégalité de Carleman globale peut être formulée comme suit

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Carleman globale [20, 25, 17])**.** *Soient ψ, φ et η les fonctions définies respectivement par (1.22)-(1.24). Alors il existe $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega,\omega) > 1$, $s_0 = s_0(\Omega,\omega,T) > 1$ et $C = C(\Omega,\omega) > 0$ tels que, pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $s \geqslant s_0$ et quel que soit $\rho \in \mathcal{V}$, on ait*

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{e^{-2s\eta}}{s\varphi}\left(\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|^2 + |\Delta\rho|^2\right)dxdt + \int_Q s\lambda^2\varphi e^{-2s\eta}|\nabla\rho|^2 dxdt \\ &\quad + \int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\rho|^2 dxdt \\ &\leqslant C\left(\int_Q e^{-2s\eta}|L^*\rho|^2 dxdt + \int_G s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\eta}|\rho|^2 dxdt\right). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Puisque φ ne s'annule pas dans Q, nous pouvons poser

$$\theta = \varphi^{-\frac{3}{2}} e^{s\eta}. \tag{1.27}$$

Le corollaire suivant résulte de (1.26).

Corollaire 1.3.2 ([40] p. 546)**.** *Il existe une fonction réelle positive θ (donnée par (1.27)) et une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T)$ telles que pour tout $\rho \in \mathcal{V}$, on ait*

$$\int_\Omega |\rho(0)|^2 dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dxdt \leqslant C \left(\int_Q |L^*\rho|^2 dxdt + \int_G |\rho|^2 dxdt \right). \tag{1.28}$$

Maintenant, nous allons énoncer l'inégalité d'observabilité dont la preuve est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1.3.3. *Supposons (1.6). Soient $\mu \in L^\infty(Q)$ et ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$, la solution de*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \psi_j}{\partial t} - \Delta\psi_j + \mu\psi_j &= 0 \quad \textit{dans} \quad Q, \\ \psi_j &= e_j \quad \textit{sur} \quad \Sigma_0, \\ \psi_j &= 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma \setminus \Sigma_0, \\ \psi_j(T) &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.29}$$

Soit ρ une fonction appartenant à $\mathrm{Vect}(\{\psi_1\chi_\omega, \dots, \psi_{M_0}\chi_\omega\})$ *et vérifiant*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta\rho + \mu\rho &= 0 \quad \textit{dans } Q, \\ \rho &= 0 \quad \textit{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{1.30}$$

Alors la fonction ρ est identiquement nulle dans G.

Preuve. Soit ρ une fonction appartenant à $\mathrm{Vect}(\{\psi_1\chi_\omega, \dots, \psi_{M_0}\chi_\omega\})$ vérifiant (1.30). Alors il existe $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant M_0$, tels que $\rho = \displaystyle\sum_{j=1}^{M_0} \gamma_j \psi_j \chi_\omega$.

Posons $\sigma = \displaystyle\sum_{j=1}^{M_0} \gamma_j \psi_j$; il résulte de (1.29) que

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \Delta\sigma + \mu\sigma &= 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ \sigma &= \sum_{j=1}^{N_0} \gamma_j e_j \chi_{\Sigma_0} \quad \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases}$$

Et puisque

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial (\sigma - \rho)}{\partial t} - \Delta(\sigma - \rho) + \mu(\sigma - \rho) &= 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ \sigma - \rho &= 0 \quad \text{dans} \quad G, \end{cases}$$

nous en déduisons que $\sigma = \rho$ dans Q. En particulier $\sigma|_\Sigma = 0$, ce qui entraîne $\sum_{j=1}^{M_0} \gamma_j e_j \chi_{\Sigma_0} = 0$. Il découle de (1.6) que $\gamma_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, M_0\}$, d'où $\rho = 0$ dans G. ■

Lemme 1.3.4 ([40, 38])**.** *Soit $(H, (.,.)_H)$ un espace de Hilbert. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\{p_{n_1}, \ldots, p_{n_{M_0}}\}$ une famille de M_0 vecteurs linéairement indépendants de H et soit h_n une fonction dans l'espace vectoriel engendré par $\{p_{n_1}, \ldots, p_{n_{M_0}}\}$. Supposons qu'il existe une famille de vecteurs linéairement indépendants $\{p_1, \ldots, p_{M_0}\}$ de H, telle que*

$$p_{n_i} \to p_i \text{ fortement dans } H \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant M_0. \tag{1.31}$$

Supposons également qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|h_n\|_H \leqslant C, \tag{1.32}$$

où $\|h_n\|_H = (h_n, h_n)_H^{1/2}$. Alors nous pouvons extraire une sous-suite telle que

$$h_n \to h \in \mathrm{Vect}(\{p_1, \ldots, p_{M_0}\}) \text{ fortement dans } H.$$

Preuve. $\{p_{n_1}, \ldots, p_{n_{M_0}}\}$ étant une famille de M_0 vecteurs libres, nous pouvons utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée du sous-espace qu'elle engendre. Nous allons donc transformer $\{p_{n_1}, \ldots, p_{n_{M_0}}\}$ en une famille de vecteurs orthonormés $\{r_{n_1}, \ldots, r_{n_{M_0}}\}$, donnés par

$$r_{n_i} = \frac{w_{n_i}}{\|w_{n_i}\|_H}, \tag{1.33}$$

où

$$w_{n_1} = p_{n_1}, \tag{1.34}$$

$$w_{n_i} = p_{n_i} - \sum_{j=1}^{i-1} (p_{n_i}, r_{n_j})_H r_{n_j}, \; 2 \leqslant i \leqslant M_0. \tag{1.35}$$

On a pour $i \in \{1, \ldots, M_0\}$, $\|r_{n_i}\|_H = 1$ donc par extraction de sous-suite, il existe $r_i \in H$ tel que

$$r_{n_i} \rightharpoonup r_i \text{ faiblement dans } H, \; 1 \leqslant i \leqslant M_0. \tag{1.36}$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(i)$ suivante

$$\text{“}w_{n_i} \to p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (p_i, r_j)_H r_j = w_i \text{ fortement dans } H, \; 1 \leqslant i \leqslant M_0\text{”}. \tag{1.37}$$

Selon (1.31) et (1.34), il vient

$$w_{n_1} \to p_1 \text{ fortement dans } H,$$

et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $i \in \{2, \dots, M_0\}$ et $k \in \{1, \dots, i-1\}$; on a

$$w_{n_k} \to p_k - \sum_{j=1}^{k-1} (p_k, r_j)_H r_j = w_k \text{ fortement dans } H. \tag{1.38}$$

Pour $i \in \{2, \dots, M_0\}$ et $k \in \{1, \dots, i-1\}$, on a d'après (1.33),(1.38) et (1.36),

$$r_{n_k} \to \frac{w_k}{\|w_k\|_H} = r_k \text{ fortement dans } H.$$

Ainsi (1.35) et (1.31) impliquent que

$$w_{n_i} \to p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (p_i, r_k)_H r_k \text{ fortement dans } H.$$

D'où $\mathcal{P}(i)$ est vraie. Par conséquent la propriété (1.37) est vraie pour tout $i \in \{1, \dots, M_0\}$.
En passant à la limite $n \to +\infty$ dans (1.33), nous en tirons

$$r_i = \frac{w_i}{\|w_i\|_H},$$

où

$$\begin{aligned} w_1 &= p_1, \\ w_i &= p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (p_i, r_j)_H r_j, \ 2 \leqslant i \leqslant M_0. \end{aligned}$$

La famille $\{r_1, \dots, r_{M_0}\}$ forme donc une base orthonormée du sous-espace $\mathrm{Vect}(\{p_1, \dots, p_{M_0}\})$. Par ailleurs, comme $h_n \in \mathrm{Vect}(\{p_{n_1}, \dots, p_{n_{M_0}}\}) = \mathrm{Vect}(\{r_{n_1}, \dots, r_{n_{M_0}}\})$, il existe $\beta_{n_i} \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant M_0$, tels que $h_n = \sum_{i=1}^{M_0} \beta_{n_i} r_{n_i}$.
L'hypothèse (1.32) est équivalente à

$$\Big(\sum_{i=1}^{M_0} |\beta_{n_i}|^2 \Big)^{1/2} \leqslant C.$$

Nous pouvons extraire une sous-suite telle que

$$\beta_{n_i} \to \beta_i \text{ dans } \mathbb{R}, \ 1 \leqslant i \leqslant M_0.$$

Il s'ensuit que,

$$h_n \to \sum_{i=1}^{M_0} \beta_i r_i = h \text{ fortement dans } H, \ 1 \leqslant i \leqslant M_0.$$

Finalement $h \in \mathrm{Vect}(\{r_1, \dots, r_{M_0}\} = \mathrm{Vect}(\{p_1, \dots, p_{M_0}\})$. ■

Proposition 1.3.5 (Inégalité d'observabilité)**.** *Il existe une constante positive* $C = C(\Omega, \omega, K, T)$ *telle que pour tout* $z \in L^2(Q)$ *et tout* $\rho \in \mathcal{V}$,

$$\int_\Omega |\rho(0)|^2 dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}|\rho|^2 dxdt \leqslant C\left(\int_Q |L^*\rho|^2 dxdt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dxdt\right). \tag{1.39}$$

Preuve. Pour prouver (1.39), nous procédons par unicité-compacité. Supposons que l'inégalité n'est pas vérifiée, i.e. quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite (z_n) de $L^2(Q)$ et une suite (r_n) de $\mathcal{V}$ telles que

$$\int_\Omega |r_n(0)|^2 dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}|r_n|^2 dxdt > Cn\left(\int_Q |L_n^* r_n|^2 dxdt + \int_G |r_n - P_n r_n|^2 dxdt\right),$$

où $L_n^* r_n = -\dfrac{\partial r_n}{\partial t} - \Delta r_n + a_0(z_n) r_n$ et P_n représente l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ sur $\mathcal{U}(z_n) = \mathrm{Vect}(\{q_1(z_n)\chi_\omega, \ldots, q_{M_0}(z_n)\chi_\omega\})$.
Posons

$$\sigma_n = \frac{r_n}{\left(\int_\Omega |r_n(0)|^2 dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}|r_n|^2 dxdt\right)^{1/2}},$$

alors

$$\left(\int_\Omega |\sigma_n(0)|^2 dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}|\sigma_n|^2 dxdt\right)^{1/2} = 1.$$

On a donc

$$1 > Cn\left(\int_Q |L_n^*\sigma_n|^2 dxdt + \int_G |\sigma_n - P_n\sigma_n|^2 dxdt\right).$$

Par conséquent, si (1.39) n'est pas vraie, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite (z_n) de $L^2(Q)$ et une suite (σ_n) de $\mathcal{V}$ telle que

$$\int_\Omega |\sigma_n(0)|^2 dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}|\sigma_n|^2 dxdt = 1, \tag{1.40}$$

$$\int_Q |L_n^*\sigma_n|^2 dxdt < \frac{1}{n}, \tag{1.41}$$

$$\int_G |\sigma_n - P_n\sigma_n|^2 dxdt < \frac{1}{n}. \tag{1.42}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_G \frac{1}{\theta^2}|P_n\sigma_n|^2 dxdt \leqslant 2\Big(\int_G \frac{1}{\theta^2}|\sigma_n|^2 dxdt + \int_G \frac{1}{\theta^2}|\sigma_n - P_n\sigma_n|^2 dxdt\Big).$$

Le terme $\displaystyle\int_G \frac{1}{\theta^2}|\sigma_n|^2 dxdt$ est borné d'après (1.40). Comme $\dfrac{1}{\theta^2}$ est borné dans G, alors en tenant compte de (1.42), il existe une constante positive C telle que

$$\int_G \frac{1}{\theta^2}|P_n\sigma_n|^2 dxdt \leqslant C.$$

$P_n\sigma_n$ étant un élément de $\mathcal{U}(z_n)$ et $\mathcal{U}(z_n)$, un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ de dimension finie, on en déduit que

$$\int_G |P_n\sigma_n|^2 dxdt \leqslant C. \tag{1.43}$$

En effet, $u \mapsto \Big(\displaystyle\int_G \Big|\frac{1}{\theta}u\Big|^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $L^2(G)$ qui induit sur $\mathcal{U}$ une norme équivalente à toutes les normes sur $\mathcal{U}$ (car $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ de dimension finie). En particulier, elle est équivalente à la norme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \Big(\displaystyle\int_G |u|^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Or

$$\int_G |\sigma_n|^2 dxdt \leqslant 2\Big(\int_G |P_n\sigma_n|^2 dxdt + \int_G |\sigma_n - P_n\sigma_n|^2 dxdt\Big).$$

En utilisant (1.42) et (1.43), il vient

$$\int_G |\sigma_n|^2 dxdt \leqslant C. \tag{1.44}$$

Par conséquent, il existe une sous-suite de $(\sigma_n)_n$ (encore notée $(\sigma_n)_n$) et $\sigma \in L^2(G)$ tels que

$$\sigma_n \rightharpoonup \sigma \text{ faiblement dans } L^2(G). \tag{1.45}$$

Maintenant, au vu de (1.40) et de la définition de $\dfrac{1}{\theta}$, nous pouvons dire que $(\sigma_n)_n$ est bornée dans $L^2(]\mu, T-\mu[\times\Omega), \forall \mu > 0$. Après extraction de sous-suite, on a

$$\sigma_n \rightharpoonup \sigma \text{ faiblement dans } L^2(]\mu, T-\mu[\times\Omega), \forall \mu > 0.$$

Ainsi,

$$\sigma_n \to \sigma \text{ dans } \mathscr{D}'(Q). \tag{1.46}$$

Puisque $z_n \in L^2(Q)$, $q_j(z_n)$, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ est solution de (1.14) et que $e_j \in H_0^1(\Sigma)$, nous savons que $q_j(z_n) \in H^{2,1}(Q)$. En outre, il existe une constante positive C telle que

$$\|q_j(z_n)\|_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C\|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}. \tag{1.47}$$

Donc nous pouvons extraire une sous-suite et en déduire qu'il existe $\psi_j \in H^{2,1}(Q)$ tel que pour $j \in \{1,\dots,M_0\}$

$$q_j(z_n) \rightharpoonup \psi_j \text{ faiblement dans } H^{2,1}(Q).$$

Le Lemme de compacité d'Aubin-Lions implique que l'injection de $H^{2,1}(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compacte, de sorte que pour $1 \leqslant j \leqslant M_0$,

$$q_j(z_n) \to \psi_j \text{ fortement dans } L^2(Q). \tag{1.48}$$

D'autre part, en prenant en compte (1.11), il existe une constante positive $C = C(T,\Omega)$ telle que

$$\|a_0(z_n)\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|a_0(z_n)\|_{L^\infty(Q)} \leqslant C.$$

Par conséquent, il existe une sous-suite de $a_0(z_n)$ (encore notée $a_0(z_n)$) et $\mu \in L^2(Q)$ tels que

$$a_0(z_n) \rightharpoonup \mu \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{1.49}$$

D'où en considérant (1.47)-(1.49), ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \psi_j}{\partial t} - \Delta\psi_j + \mu\psi_j &=& 0 & \text{dans } Q,\\ \psi_j &=& e_j & \text{sur } \Sigma_0,\\ \psi_j &=& 0 & \text{sur } \Sigma\setminus\Sigma_0,\\ \psi_j(T) &=& 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{1.50}$$

Comme $P_n\sigma_n \in \mathcal{U}(z_n)$ et vérifie (1.43), nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.4 avec $H = L^2(G)$, $p_{n_i} = q_j(z_n)\chi_\omega$, $h_n = P_n\sigma_n$. Il existe g dans $\mathrm{Vect}(\{\psi_1\chi_\omega,\dots,\psi_{M_0}\chi_\omega\})$ tel que

$$P_n\sigma_n \to g \text{ fortement dans } L^2(G).$$

D'autre part, il résulte de (1.42) que

$$\sigma_n - P_n\sigma_n \to 0 \text{ fortement dans } L^2(G). \tag{1.51}$$

Nous pouvons en tirer que

$$\sigma_n \to g \text{ fortement dans } L^2(G).$$

D'où d'après (1.45), on a

$$\sigma_n \to \sigma = g \text{ fortement dans } L^2(G). \tag{1.52}$$

Nous concluons que $\sigma\chi_\omega \in \text{Vect}(\{\psi_1\chi_\omega, \dots, \psi_{M_0}\chi_\omega\})$.
Etant donné que $L_n^* = -\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta + a_0(z_n)I$ est faiblement continue dans $\mathscr{D}'(Q)$, alors selon (1.46) et (1.49),

$$L_n^*\sigma_n \to -\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \Delta\sigma + \mu\sigma \text{ dans } \mathscr{D}'(Q).$$

Mais (1.41) implique que

$$L_n^*\sigma_n \to 0 \text{ fortement dans } L^2(Q), \tag{1.53}$$

d'où $-\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} - \Delta\sigma + \mu\sigma = 0$ dans Q. Comme $\sigma_n \in \mathcal{V}$ vérifie (1.44) et (1.53), nous pouvons appliquer (1.26) à σ_n et en déduire que σ_n est bornée dans $L^2(]\mu, T-\mu[; H^2(\Omega)), \forall \mu > 0$. Ainsi quel que soit $\mu > 0$,

$$\sigma_n \rightharpoonup \sigma \text{ faiblement dans } L^2(]\mu, T-\mu[\times\Gamma).$$

Par conséquent,

$$\sigma_n \to \sigma \text{ dans } \mathscr{D}'(\Sigma).$$

Et puisque $\sigma_n|_\Sigma = 0$,

$$\sigma|_\Sigma = 0.$$

Donc σ vérifie $\sigma\chi_\omega \in \text{Vect}(\{\psi_1\chi_\omega, \dots, \psi_{M_0}\chi_\omega\})$ et

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} - \Delta\sigma + \mu\sigma &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \sigma &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 1.3.3, nous en déduisons que

$$\sigma = 0 \text{ dans } G,$$

et (1.52) peut s'écrire sous la forme

$$\sigma_n \to 0 \text{ fortement dans } L^2(G).$$

Comme $(\sigma_n)_n$ vérifie (1.28), alors

$$\int_\Omega |\sigma_n(0)|^2 dx + \int_Q \left|\frac{1}{\theta}\sigma_n\right|^2 dxdt \to 0,$$

ce qui est en contradiction avec (1.40). ■

Nous énonçons une proposition qui nous sera utile pour prouver l'estimation (1.9), et dont la démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.3.6. *Supposons (1.6) et considérons θ la fonction donnée par la Proposition 1.2.2. Soient q_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ et u_0 respectivement définis par le système (1.14) et la relation (1.21). Pour tout $z \in L^2(Q)$, posons*

$$A_\theta(z) = \int_G \frac{1}{\theta} q_i(z) q_j(z) dxdt, \; 1 \leqslant i, j \leqslant M_0.$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in L^2(Q)$,

$$(A_\theta(z)X(z), X(z))_{\mathbb{R}^{M_0}} \geqslant \delta \|X(z)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}}, \tag{1.54}$$

où $X(z) = (X_1(z), \ldots, X_{M_0}(z)) \in \mathbb{R}^{M_0}$ et

$$(A_\theta(z)X(z), X(z))_{\mathbb{R}^{M_0}} = \int_G \frac{1}{\theta} \Big(\sum_{i=1}^{M_0} X_i(z) q_i(z) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{M_0} X_j(z) q_j(z) \Big) dxdt.$$

Preuve. Pour montrer (1.54), nous procédons par contradiction. Si (1.54) n'est pas vraie, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(z_n)_n$ de $L^2(Q)$ et un vecteur $X(z_n) = (X_1(z_n), \ldots, X_{M_0}(z_n))$ of $\mathbb{R}^{M_0}$ tels que

$$(A_\theta(z_n)X(z_n), X(z_n))_{\mathbb{R}^{M_0}} \leqslant \frac{1}{n} \|X(z_n)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}}.$$

Posons $\tilde{X}(z_n) = \dfrac{X(z_n)}{\|X(z_n)\|_{\mathbb{R}^{M_0}}}$, alors

$$\|\tilde{X}(z_n)\|_{\mathbb{R}^{M_0}} = \Big(\sum_{j=1}^{M_0} |\tilde{X}_j(z_n)|^2 \Big)^{1/2} = 1, \tag{1.55}$$

$$(A_\theta(z_n)\tilde{X}(z_n), \tilde{X}(z_n))_{\mathbb{R}^{M_0}} \leqslant \frac{1}{n}. \tag{1.56}$$

Par conséquent, il existe des sous-suites $\tilde{X}_j(z_n)$, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ (encore notées $\tilde{X}_j(z_n)$) et $\tilde{X}_j \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leqslant j \leqslant M_0$,

$$\tilde{X}_j(z_n) \to \tilde{X}_j \text{ dans } \mathbb{R}. \tag{1.57}$$

De plus,

$$\|\tilde{X}\|_{\mathbb{R}^{M_0}} = \Big(\sum_{j=1}^{M_0} |\tilde{X}_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{1.58}$$

A présent soit $\tilde{\phi}_n = \sum_{j=1}^{M_0} \tilde{X}_j(z_n) q_j(z_n)$. Les inégalités successives suivantes résultent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\phi}_n| &= \Big|\sum_{j=1}^{M_0} \tilde{X}_j(z_n) q_j(z_n)\Big| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{M_0} |\tilde{X}_j(z_n)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{M_0} |q_j(z_n)|^2\Big)^{1/2}, \\
|\tilde{\phi}_n|^2 &\leqslant \|\tilde{X}_j(z_n)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}} \sum_{j=1}^{M_0} |q_j(z_n)|^2, \\
\int_Q |\tilde{\phi}_n|^2 dxdt &\leqslant \|\tilde{X}_j(z_n)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}} \int_Q \sum_{j=1}^{M_0} |q_j(z_n)|^2 dxdt, \\
\|\tilde{\phi}_n\|_{L^2(Q)} &\leqslant \|\tilde{X}_j(z_n)\|_{\mathbb{R}^{M_0}} \Big(\sum_{j=1}^{M_0} \|q_j(z_n)\|^2_{L^2(Q)}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'où d'après (1.47), (1.48), (1.55), (1.57) et le Lemme 1.3.4, il s'ensuit que

$$\tilde{\phi}_n \to \sum_{j=1}^{M_0} \tilde{X}_j \psi_j = \tilde{\phi} \text{ fortement dans } L^2(Q).$$

Or nous déduisons de (1.56) que

$$\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{\phi}_n|^2 dxdt = (A_\theta(z_n)\tilde{X}(z_n), \tilde{X}(z_n))_{\mathbb{R}^{M_0}} \leqslant \frac{1}{n},$$

donc $\displaystyle\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{\phi}|^2 dxdt = 0$ et $\tilde{\phi} = 0$ dans G.

Les ψ_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ étant les solutions de (1.50), $\tilde{\phi}$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - \Delta \tilde{\phi} + \mu \tilde{\phi} & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \tilde{\phi} & = & \sum_{j=1}^{M_0} \tilde{X}_j e_j & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right.$$

Ainsi $\tilde{\phi} = 0$ dans Q, ce qui implique que $\sum_{j=1}^{M_0} \tilde{X}_j e_j = 0$ sur Σ_0. Il découle de l'hypothèse (1.6) que $\tilde{X}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, M_0\}$, ce qui contredit (1.58). ∎

Proposition 1.3.7. *Soit θ la fonction donnée par la Proposition 1.2.2, et soient q_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ et u_0 respectivement définis par le système (1.14) et la relation (1.21). Alors il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}, \|a_0\|_{L^\infty(Q)})$ telle que quel que soit $z \in L^2(Q)$,*

$$\begin{aligned} \|u_0(z)\|_{L^2(G)} &\leqslant C \|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|\theta u_0(z)\|_{L^2(G)} &\leqslant C \|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Preuve. Selon l'inégalité (1.21), on a pour tout $z \in L^2(Q)$,

$$\int_G u_0(z)q_j(z)dxdt = -\int_\Omega y^0 q_j(z)(0)dx,\ 1 \leqslant j \leqslant M_0. \tag{1.60}$$

Puisque $u_0(z) \in \mathcal{U}_\theta(z)$, il existe $\alpha(z) = (\alpha_1(z), \ldots, \alpha_{M_0}(z)) \in \mathbb{R}^{M_0}$ tel que

$$u_0(z) = \sum_{i=1}^{M_0} \alpha_i(z) \frac{1}{\theta} q_i(z) \chi_\omega. \tag{1.61}$$

Donc (1.60) peut se mettre sous la forme

$$\int_G \sum_{i=1}^{M_0} \alpha_i(z) \frac{1}{\theta} q_i(z) q_j(z) dxdt = -\int_\Omega y^0 q_j(z)(0)dx,\ 1 \leqslant j \leqslant M_0.$$

Par conséquent,

$$\int_G \frac{1}{\theta}\Big(\sum_{i=1}^{M_0} \alpha_i(z) q_i(z)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j(z) q_j(z)\Big) dxdt = -\int_\Omega y^0 \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j(z) q_j(z)(0)dx. \tag{1.62}$$

Maintenant en appliquant le Lemme 1.3.6 au membre de gauche de (1.62), nous obtenons

$$\delta \|\alpha(z)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}} \leqslant -\int_\Omega y^0 \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j(z) q_j(z)(0)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le membre de droite de cette dernière inégalité, il vient

$$\delta \|\alpha(z)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}} \leqslant \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \sum_{j=1}^{M_0} |\alpha_j(z)| \|q_j(z)(0)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.63}$$

Puisque q_j est solution de (1.14) pour $1 \leqslant j \leqslant M_0$, on a en plus de (1.47), l'inégalité d'énergie suivante

$$\|q_j(z)(0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|e_j\|_{H^1_0(\Sigma)}.$$

En effet, en multipliant par q_j l'EDP dans (1.14), puis en intégrant par parties dans Ω, on a

$$-\int_\Omega \frac{\partial q_j}{\partial t} q_j dx - \int_\Omega q_j \Delta q_j dx + \int_\Omega a_0(z)|q_j|^2 dx = 0.$$

La formule de Green donne

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}(|q_j|^2)dx = \int_{\Gamma}\frac{\partial q_j}{\partial \nu}q_j d\Gamma - \int_{\Omega}|\nabla q_j|^2 dx - \int_{\Omega} a_0(z)|q_j|^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons donc

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}(|q_j|^2)dx \leqslant \left\|\frac{\partial q_j}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma)}\|q_j\|_{L^2(\Gamma)} + \|a_0(z)\|_{L^\infty(\Omega)}\|q_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant le Théorème 4.3.28 p. 100 [1], il vient

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}(|q_j|^2)dx \leqslant C\|q_j\|_{H^2(\Omega)}\|q_j\|_{L^2(\Gamma)} + \|a_0(z)\|_{L^\infty(\Omega)}\|q_j\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Puis nous intégrons entre 0 et T, et nous appliquons à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega}(-|q_j(T)|^2 + |q_j(0)|^2)dx \leqslant C\Big(&\|q_j\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\|q_j\|_{L^2(\Sigma)} \\ &+ \|a_0(z)\|_{L^\infty(Q)}\|q_j\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\Big),\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega}|q_j(0)|^2 dx \leqslant C\Big(&\|q_j\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\|e_j\|_{L^2(\Sigma_0)} \\ &+ \|a_0(z)\|_{L^\infty(Q)}\|q_j\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\Big).\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\|q_j(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\Big(\|e_j\|_{H^1_0(\Sigma)} + \|a_0(z)\|_{L^\infty(Q)}\|q_j\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\Big)\|q_j\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}.$$

D'où, nous trouvons d'après (1.63),

$$\|\alpha(z)\|^2_{\mathbb{R}^{M_0}} \leqslant \delta^{-1}C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\|\alpha(z)\|_{\mathbb{R}^{M_0}}\left(\sum_{j=1}^{M_0}\|e_j\|^2_{H^1_0(\Sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, il résulte de (1.61) que pour tout $z \in L^2(Q)$,

$$\|u_0(z)\|_{L^2(G)} \leqslant \left\|\frac{1}{\theta}\right\|_{L^\infty(G)}\|\alpha(z)\|_{\mathbb{R}^{M_0}}\left(\sum_{i=1}^{M_0}\|q_i(z)\|^2_{L^2(G)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\theta u_0(z)\|_{L^2(G)} \leqslant \|\alpha(z)\|_{\mathbb{R}^{M_0}}\left(\sum_{i=1}^{M_0}\|q_i(z)\|^2_{L^2(G)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement

$$\|u_0(z)\|_{L^2(G)} \leqslant \left\|\frac{1}{\theta}\right\|_{L^\infty(G)} \delta^{-1} C \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^{M_0} \|e_j\|^2_{H^1_0(\Sigma)},$$

$$\|\theta u_0(z)\|_{L^2(G)} \leqslant \delta^{-1} C \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^{M_0} \|e_j\|^2_{H^1_0(\Sigma)},$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 1.3.7. ■

1.4 Contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle

Nous débutons cette section par la preuve de l'existence de solution au problème (1.17)-(1.19).
Pour cela, nous définissons sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ la forme bilinéaire symétrique suivante

$$b(\rho, \sigma) = \int_Q L^* \rho L^* \sigma dxdt + \int_G (\rho - P\rho)(\sigma - P\sigma) dxdt. \tag{1.64}$$

D'après la Proposition 1.3.5, cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Soit $V = \overline{\mathcal{V}}$ le complété de l'espace préhilbertien $\mathcal{V}$ par rapport à la norme

$$b(\rho, \rho) = \left(\int_Q |L^* \rho|^2 dxdt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.65}$$

Le completé V de $\mathcal{V}$ est un espace de Hilbert.

Lemme 1.4.1. *Quel que soit $\rho \in V$, considérons*

$$\mathcal{L}(\rho) = \int_Q u_0 \chi_\omega \rho dxdt + \int_\Omega y^0 \rho(0) dx.$$

Alors quel que soit $z \in L^2(Q)$, il existe un unique $\rho_\theta = \rho_\theta(z) \in V$ tel que

$$b(\rho_\theta, \sigma) = \mathcal{L}(\sigma) \quad \forall \sigma \in V,$$

autrement dit,

$$\int_Q L^* \rho_\theta L^* \sigma dxdt + \int_G (\rho_\theta - P\rho_\theta)(\sigma - P\sigma) dxdt = \int_Q u_0 \chi_\omega \sigma dxdt + \int_\Omega y^0 \sigma(0) dx, \ \forall \sigma \in V. \tag{1.66}$$

Preuve. Pour tout $\sigma \in V$, il découle de (1.39) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\sigma)| &\leqslant \int_Q |u_0\chi_\omega\sigma|dxdt + \int_\Omega |y^0\sigma(0)|dx \\
&\leqslant \|\theta u_0\chi_\omega\|_{L^2(Q)}\Big\|\frac{1}{\theta}\sigma\Big\|_{L^2(Q)} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma(0)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C(\|\theta u_0\|_{L^2(G)} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)})\|\sigma\|_V,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que la forme linéaire $\mathcal{L}$ est continue sur V. Ainsi nous pouvons appliquer le Théorème de représentation de Riesz et en déduire que quel que soit $z \in L^2(Q)$, il existe un unique $\rho_\theta \in V$ tel que pour tout $\sigma \in V$, on ait

$$b(\rho_\theta, \sigma) = \mathcal{L}(\sigma),$$

et la preuve du Lemme 1.4.1 est complète. ■

Proposition 1.4.2. *Pour $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $z \in L^2(Q)$, soit ρ_θ l'unique solution de (1.66). Posons*

$$u_\theta = -(\rho_\theta - P\rho_\theta)\chi_\omega, \tag{1.67}$$

$$y_\theta = L^*\rho_\theta. \tag{1.68}$$

Alors (u_θ, y_θ) est solution du problème de contrôlabilité (1.17)-(1.19). De plus il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}, \|a_0\|_{L^\infty(Q)})$ telle que

$$\|\rho_\theta\|_V \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.69}$$

$$\|u_\theta\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.70}$$

$$\|y_\theta\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.71}$$

Preuve. D'une part, puisque $\rho_\theta \in V$, on a $u_\theta \in L^2(G)$ et $y_\theta \in L^2(Q)$. D'autre part, $P\rho_\theta$ étant un élément de $\mathcal{U}$, $u_\theta \in \mathcal{U}^\perp$. En remplaçant $-(\rho_\theta - P\rho_\theta)\chi_\omega$ et $L^*\rho_\theta$ respectivement par u_θ et y_θ dans (1.66), il vient

$$\int_Q y_\theta L^*\sigma dxdt - \int_G u_\theta(\sigma - P\sigma)dxdt = \int_Q u_0\chi_\omega\sigma dxdt + \int_\Omega y^0\sigma(0)dx, \tag{1.72}$$

pour tout $\sigma \in V$. En particulier pour $\phi \in \mathscr{D}(Q)$, nous obtenons

$$\langle y_\theta, L^*\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle u_\theta\chi_\omega, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \langle u_0\chi_\omega, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}. \tag{1.73}$$

D'où

$$Ly_\theta = (u_0 + u_\theta)\chi_\omega \text{ dans } Q. \tag{1.74}$$

Comme $y_\theta \in L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega))$, on a d'une part $\dfrac{\partial y_\theta}{\partial t} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, et selon (1.74),

$$\Delta y_\theta = \frac{\partial y_\theta}{\partial t} + a_0 y_\theta - (u_0 + u_\theta)\chi_\omega \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$$

car $a_0 y_\theta - (u_0 + u_\theta)\chi_\omega \in L^2(Q)$. Par suite, $y_\theta|_\Sigma$ et $\dfrac{\partial y_\theta}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ existent et appartiennent respectivement à $H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ et $H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$ (voir [32]). D'autre part, $\Delta y_\theta \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ et toujours selon (1.74),

$$\frac{\partial y_\theta}{\partial t} = \Delta y_\theta - a_0 y_\theta + (u_0 + u_\theta)\chi_\omega \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)).$$

Par conséquent, $t \mapsto y_\theta(x,t)$ est continue de $[0,T]$ dans $H^{-1}(\Omega)$, i.e $y_\theta(T)$ et $y_\theta(0)$ sont bien définis dans $H^{-1}(\Omega)$.
En multipliant (1.74) par $\phi \in C^\infty(\overline{Q})$ puis en intégrant par parties dans Q, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\langle y_\theta(T), \phi(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle y_\theta(0), \phi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&- \langle \frac{\partial y_\theta}{\partial \nu}, \phi\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} + \langle y_\theta, \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \\
&\qquad + \int_Q y_\theta L^* \phi \, dxdt = \int_Q u_0 \chi_\omega \phi \, dxdt + \int_G u_\theta \phi \, dxdt. \qquad (1.75)
\end{aligned}$$

En particulier pour ϕ tel que $\phi = 0$ sur Σ, on a conformément à (1.72),

$$\begin{aligned}
&\langle y_\theta(T), \phi(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle y_\theta(0), \phi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \langle y_\theta, \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} + \int_\Omega y^0 \phi(0) dx = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\langle y_\theta(T), \phi(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle y^0 - y_\theta(0), \phi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \langle y_\theta, \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0.
\end{aligned}$$

En choisissant successivement ϕ tel que $\phi(T) = \phi(0) = 0$ dans Ω, puis $\phi(0) = 0$ dans Ω, nous en déduisons que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y_\theta & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\theta(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ y_\theta(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Finalement (u_θ, y_θ) est solution de (1.17)-(1.19).

Nous donnons maintenant la démonstration des estimations (1.69)-(1.71). Prenons $\sigma = \rho_\theta$ dans (1.66), alors

$$\|y_\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|u_\theta\|^2_{L^2(G)} = \int_Q u_0 \chi_\omega \rho_\theta dxdt + \int_\Omega y^0 \rho_\theta(0) dx, \tag{1.76}$$

ce qui, au vu de la définition de la norme dans V donnée par (1.65), est équivalent à

$$\|\rho_\theta\|^2_V = \int_Q u_0 \chi_\omega \rho_\theta dxdt + \int_\Omega y^0 \rho_\theta(0) dx. \tag{1.77}$$

Par conséquent, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (1.39), que

$$\|\rho_\theta\|^2_V \leqslant C(\|\theta u_0 \chi_\omega\|_{L^2(Q)} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)})\|\rho_\theta\|_V. \tag{1.78}$$

En appliquant la Proposition 1.3.7, (1.78) peut être réduit à (1.69). Quant à (1.70) et (1.71), ce sont des conséquences de (1.76) et (1.77). ■

Proposition 1.4.3. *Quel que soit $z \in L^2(Q)$, il existe un unique contrôle $\hat{u} = \hat{u}(z)$ tel que*

$$\|\hat{u}\|_{L^2(G)} = \min\{\|u\|_{L^2(G)}, u \in \mathcal{F}\}$$

où $\mathcal{F} = \{u = u(z) \in L^2(G); (u, y)$ vérifie $(1.17) - (1.19)\}$. Par ailleurs, il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}, \|a_0\|_{L^\infty(Q)})$ telle que

$$\|\hat{u}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.79}$$

Preuve. La Proposition 1.4.2 garantit que l'ensemble $\mathcal{F}$ est non vide. Nous allons maintenant vérifier plusieurs propriétés.
$\mathcal{F}$ est convexe : Résulte du fait que l'application $u \mapsto y$, où y est la solution de 1.18 associée à u, est affine.

$\mathcal{F}$ est fermé dans $L^2(G)$: Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathcal{F}$. Supposons qu'elle converge vers u dans $L^2(G)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \|u_n - u\|_{L^2(G)} \leqslant \varepsilon.$$

Soit y_n la solution de (1.18) associée à u_n. La suite (u_n) étant bornée dans $L^2(G)$, on a que la suite (y_n) est bornée dans $W(0,T)$. Donc nous pouvons extraire une sous-suite telle que

$$y_n \rightharpoonup y \text{ faiblement dans } W(0,T).$$

Par le Lemme de compacité d'Aubin-Lions, l'injection de $W(0,T)$ dans $L^2(Q)$ est compacte. Par conséquent,

$$y_n \to y \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

nous concluons que $u \in \mathcal{F}$.

Considérons la forme bilinéaire symétrique définie sur $L^2(G) \times L^2(G)$ par $\pi(u,v) = \displaystyle\int_G uv dx dt$, et la forme linéaire l identiquement nulle.
Alors $\pi(.,.)$ est continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\pi(.,.)$ est coercive par définition.

D'où en appliquant le Théorème 1.1. p. 4 [32], nous pouvons dire qu'il existe un unique $\hat{u} \in \mathcal{F}$ solution de

$$J(\hat{u}) = \inf_{u \in \mathcal{F}} J(u)$$

où $J(v,v) = \pi(v,v) - 2l(v)$, autrement dit,

$$\|\hat{u}\|^2_{L^2(G)} = \inf_{u \in \mathcal{F}} \|\hat{u}\|^2_{L^2(G)}.$$

Par suite,

$$\|\hat{u}\|_{L^2(G)} \leqslant \|u_\theta\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

∎

Nous énonçons le résultat principal de cette section.

Théorème 1.4.4. *Supposons (1.6). Alors quel que soit $z \in L^2(Q)$, il existe un unique contrôle $\tilde{u} = \tilde{u}(z)$ de norme minimale dans $L^2(G)$ tel que $(\tilde{u}, \tilde{y})$ soit solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (1.17)-(1.19). De plus, le contrôle $\tilde{u}$ est donné par*

$$\tilde{u} = \tilde{\rho}\chi_\omega - P\tilde{\rho}, \tag{1.80}$$

où $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(z)$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} L^*\tilde{\rho} & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ \tilde{\rho} & = & 0 & \textit{sur } \Sigma. \end{array} \right. \tag{1.81}$$

Par ailleurs, il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H^1_0(\Sigma)}, \|a_0\|_{L^\infty(Q)})$ telle que

$$\|\tilde{\rho}\|_V \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.82}$$

$$\|\tilde{\rho}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.83}$$

Preuve. Nous divisons la preuve en quatre étapes.

Etape 1 : Soient $\varepsilon > 0$, $z \in L^2(Q)$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble donné par

$$\mathcal{A} = \{(u,y); u = u(z) \in \mathcal{U}^\perp, y = y(z) \in L^2(Q), Ly \in L^2(Q), y|_\Sigma = 0,$$
$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } y(0) = y^0 \text{ dans } \Omega\}.$$

$\mathcal{A}$ est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de $L^2(G) \times L^2(Q)$. Pour tout couple (u, y) de $\mathcal{A}$, définissons la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(u, y) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(G)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|Ly - (u_0 + u)\chi_\omega\|^2_{L^2(Q)}, \tag{1.84}$$

et considérons le problème de minimisation suivant

$$\inf\{J_\varepsilon(u, y)|(u, y) \in \mathcal{A}\}. \tag{1.85}$$

Nous montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (1.85) possède une solution qui est unique.

Etape 2 : Nous démarrons avec l'existence. Puisque $(u_\theta, y_\theta) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et comme de plus J_ε est minoré (par 0), nous en déduisons que $\inf\{J_\varepsilon(u, y); (u, y) \in \mathcal{A}\} = I_\varepsilon$ existe bien. Par définition de la borne inférieure,

$$\forall \delta > 0, \exists (u_\delta, y_\delta) \in \mathcal{A} \text{ tel que } I_\varepsilon \leqslant J_\varepsilon(u_\delta, y_\delta) < I_\varepsilon + \delta.$$

Prenons $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (u_n, y_n) = (u_n(z), y_n(z)) \in \mathcal{A} \text{ tel que } I_\varepsilon \leqslant J_\varepsilon(u_n, y_n) < I_\varepsilon + \frac{1}{n}. \tag{1.86}$$

Par conséquent, $(u_n, y_n) \in \mathcal{A}$ est une suite minimisante de J_ε, i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} J_\varepsilon(u_n, y_n) = I_\varepsilon.$$

Or on a

$$I_\varepsilon \leqslant J_\varepsilon(u_\theta, y_\theta) = \frac{1}{2}\|u_\theta\|^2_{L^2(G)}. \tag{1.87}$$

En prenant en compte (1.86), (1.87) et (1.70), il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$ telle que $J_\varepsilon(u_n, y_n) < C^2\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)}$. Nous tirons de (1.84) que

$$\|u_n\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.88}$$
$$\|Ly_n - (u_0 + u_n)\chi_\omega\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.89}$$

En combinant (1.88) et (1.89), nous obtenons d'après (1.59),

$$\|Ly_n\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.90}$$

Il s'ensuit de (1.88) et (1.90) qu'il existe une sous-suite de (u_n) (encore notée (u_n)), une sous-suite de (y_n) (encore notée (y_n)), $u_\varepsilon = u_\varepsilon(z) \in L^2(G)$ et $\xi_\varepsilon \in L^2(Q)$ tels que

$$u_n \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{1.91}$$
$$Ly_n \rightharpoonup \xi_\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{1.92}$$

et on a $u_\varepsilon \in \mathcal{U}^\perp$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$. Puisque $(u_n, y_n) \in \mathcal{A}$ alors $y_n \in W(0,T)$ et en raison de (1.90) et des propriétés de l'équation de la chaleur, nous pouvons écrire

$$\|y_n\|_{W(0,T)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.93}$$

Donc il existe une sous-suite de (y_n) (encore notée (y_n)) et $y_\varepsilon = y_\varepsilon(z) \in W(0,T)$ tels que

$$y_n \rightharpoonup y_\varepsilon \text{ faiblement dans } W(0,T). \tag{1.94}$$

Or pour tout $\phi \in \mathscr{D}(Q)$, on a

$$\langle Ly_n, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \langle y_n, L^*\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)},$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans cette dernière égalité et en utilisant (1.92) et (1.94), il vient

$$\begin{aligned}\langle \xi_\varepsilon, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} &= \langle y_\varepsilon, -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi + a_0(z)\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\ &= \langle \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + a_0(z)y_\varepsilon, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + a_0(z)y_\varepsilon = \xi_\varepsilon$ et (1.92) peut s'écrire sous la forme

$$Ly_n \rightharpoonup \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + a_0(z)y_\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{1.95}$$

Comme $\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + a_0(z)y_\varepsilon \in L^2(Q)$ et $y_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, nous pouvons définir comme en p. 22, $y_\varepsilon|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$, $\dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0,T,H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$, et $y_\varepsilon(0)$ et $y_\varepsilon(T)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.
Maintenant soit $\phi \in C^\infty(\overline{Q})$ tel que $\phi|_\Sigma = 0$. En appliquant la formule de Green, nous trouvons

$$\int_Q (Ly_n)\phi dxdt = -\int_\Omega y^0\phi(0)dx + \int_Q y_n(L^*\phi)dxdt.$$

Au vu de (1.95) et (1.94), nous pouvons passer à la limite $n \to +\infty$ dans la relation précédente

$$\begin{aligned}\int_Q \Big(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + a_0(z)y_\varepsilon\Big)\phi dxdt = &-\int_\Omega y^0\phi(0)dx + \int_Q y_\varepsilon\Big(-\frac{\partial\phi}{\partial t} - \Delta\phi\\ +a_0(z)\phi\Big)dxdt = &-\int_\Omega y^0\phi(0)dx - \langle y_\varepsilon(T),\phi(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\\ &+\langle y_\varepsilon(0),\phi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\\ &-\langle y_\varepsilon,\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-1/2}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{1/2}(\Gamma))}\\ &+\int_Q\Big(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon + a_0(z)y_\varepsilon\Big)\phi dxdt,\\ &\forall\phi\in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel que } \phi|_\Sigma = 0.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\langle y_\varepsilon(0) - y^0,\phi(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &- \langle y_\varepsilon(T)\phi(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\\ -\langle y_\varepsilon,\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-1/2}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{1/2}(\Gamma))} &= 0,\ \forall\phi\in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel}\\ &\text{que } \phi|_\Sigma = 0.\end{aligned}$$

En choisissant successivement ϕ tel que $\phi(0) = \phi(T) = 0$ dans Ω, puis $\phi(T) = 0$ dans Ω, on a que y_ε vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcll} y_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \Sigma,\\ y_\varepsilon(0) &=& y^0 & \text{dans } \Omega,\\ y_\varepsilon(T) &=& 0 & \text{dans } \Omega.\end{array}\right. \tag{1.96}$$

Par conséquent, $(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathcal{A}$. J_ε étant semi-continue inférieurement,

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J_\varepsilon(u_n, y_n) = I_\varepsilon.$$

Ainsi $J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = I_\varepsilon$. La fonctionnelle J_ε étant strictement convexe, $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est unique.

Etape 3 : Nous donnons le système d'optimalité qui caractérise la solution du problème de minimisation (1.85). Les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange sont données par

$$\frac{d}{d\mu}J_\varepsilon(u_\varepsilon + \mu u, y_\varepsilon)|_{\mu=0} = 0,\ \forall u\in\mathcal{U}^\perp,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon + \mu\phi)|_{\mu=0} = 0,\ \forall\phi\in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel que } \phi|_\Sigma = 0,\\ \phi(0) = \phi(T) = 0 \text{ dans } \Omega.\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$\begin{aligned}\frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon+\mu u)-J_\varepsilon(u_\varepsilon,y_\varepsilon)}{\mu} &= \int_G u_\varepsilon u dxdt+\frac{\mu}{2}\|u\|^2_{L^2(G)}\\ &-\frac{1}{\varepsilon}\int_Q\Big(Ly_\varepsilon-(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega\Big)u\chi_\omega dxdt\\ \text{et }\ \frac{J_\varepsilon(u_\varepsilon,y_\varepsilon+\mu\phi)-J_\varepsilon(u_\varepsilon,y_\varepsilon)}{\mu} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_Q\Big(Ly_\varepsilon-(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega\Big)L\phi dxdt\\ &+\frac{\mu}{2\varepsilon}\|L\phi\|^2_{L^2(Q)},\end{aligned}$$

nous obtenons en passant à la limite $\mu\to 0$,

$$\int_G u_\varepsilon u dxdt-\frac{1}{\varepsilon}\int_Q\Big(Ly_\varepsilon-(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega\Big)u\chi_\omega dxdt=0,\forall u\in\mathcal{U}^\perp, \tag{1.97}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_Q\Big(Ly_\varepsilon-(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega\Big)L\phi dxdt=0,\forall\phi\in C^\infty(\overline{Q}) \tag{1.98}$$

$$\text{tel que }\phi|_\Sigma=0,\phi(0)=\phi(T)=0\text{ dans }\Omega.$$

Posons $\rho_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\Big(Ly_\varepsilon-(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega\Big)$. Alors $\rho_\varepsilon=\rho_\varepsilon(z)\in L^2(Q)$ et

$$Ly_\varepsilon=(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega+\varepsilon\rho_\varepsilon\text{ dans }Q,$$

ce qui, en plus de (1.96), donne

$$\left\{\begin{array}{rcll} Ly_\varepsilon &=& (u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega+\varepsilon\rho_\varepsilon & \text{dans } Q,\\ y_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \Sigma,\\ y_\varepsilon(0) &=& y^0 & \text{dans } \Omega,\\ y_\varepsilon(T) &=& 0 & \text{dans } \Omega.\end{array}\right. \tag{1.99}$$

En remplaçant $\frac{1}{\varepsilon}\Big(Ly_\varepsilon-(u_0+u_\varepsilon)\chi_\omega\Big)$ par ρ_ε dans (1.97) et (1.98), il s'ensuit que

$$\int_G u_\varepsilon u dxdt-\int_Q\rho_\varepsilon u\chi_\omega dxdt=0,\ \forall u\in\mathcal{U}^\perp, \tag{1.100}$$

$$\int_Q\rho_\varepsilon L\phi dxdt=0,\ \forall\phi\in C^\infty(\overline{Q}) \tag{1.101}$$

$$\text{tel que }\phi|_\Sigma=0,\phi(0)=\phi(T)=0\text{ dans }\Omega.$$

La relation (1.100) est équivalente à $\int_G(u_\varepsilon-\rho_\varepsilon)udxdt=0,\ \forall u\in\mathcal{U}^\perp$, d'où $u_\varepsilon-\rho_\varepsilon\chi_\omega\in\mathcal{U}$. Nous en déduisons que $u_\varepsilon-\rho_\varepsilon\chi_\omega=P(u_\varepsilon-\rho_\varepsilon\chi_\omega)$ et comme

$u_\varepsilon \in \mathcal{U}^\perp$, nous pouvons écrire $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon$.
La relation (1.101) est vraie en particulier pour $\phi \in \mathscr{D}(Q)$,

$$\langle \rho_\varepsilon, L\phi \rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \langle L^*\rho_\varepsilon, \phi \rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = 0.$$

Par conséquent,

$$L^*\rho_\varepsilon = 0 \text{ dans } Q. \tag{1.102}$$

Puisque $L^*\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$ et $\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$, nous pouvons définir $\rho_\varepsilon|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0, T, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$, $\left.\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0, T, H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$, $\rho_\varepsilon(0)$ et $\rho_\varepsilon(T)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.
Nous multiplions (1.102) par $\phi \in C^\infty(\overline{Q})$, puis nous intégrons par parties dans Q :

$$\begin{aligned}
&- \langle \rho_\varepsilon(T), \phi(T) \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle \rho_\varepsilon(0), \phi(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&- \langle \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu}, \phi \rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} + \langle \rho_\varepsilon, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \\
&\qquad + \int_Q \rho_\varepsilon L\phi dx dt = 0.
\end{aligned} \tag{1.103}$$

En choisissant ϕ tel que $\phi|_\Sigma = 0, \phi(0) = \phi(T) = 0$ dans Ω, et en utilisant (1.101), la relation (1.103) se réduit à

$$\langle \rho_\varepsilon, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0, \text{ pour toute fonction } \phi \in C^\infty(\overline{Q})$$

telle que $\phi|_\Sigma = 0, \phi(0) = \phi(T) = 0$ dans Ω et nous concluons que $\rho_\varepsilon|_\Sigma = 0$.

En résumé, nous avons démontré que $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ résout le problème (1.85) ssi il existe une fonction ρ_ε telle que le triplet $(u_\varepsilon, y_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ vérifie le système d'optimalité suivant

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon \tag{1.104}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll}
Ly_\varepsilon &=& (u_0 + u_\varepsilon)\chi_\omega + \varepsilon\rho_\varepsilon & \text{dans } Q, \\
y_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \Sigma, \\
y_\varepsilon(0) &=& y^0 & \text{dans } \Omega, \\
y_\varepsilon(T) &=& 0 & \text{dans } \Omega,
\end{array}\right. \tag{1.105}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll}
L^*\rho_\varepsilon &=& 0 & \text{dans } Q, \\
\rho_\varepsilon|_\Sigma &=& 0. &
\end{array}\right. \tag{1.106}$$

Etape 4 : Nous établissons des estimations utiles et nous achevons la preuve du Théorème 1.4.4.
Nous tirons de (1.88), (1.89), (1.91) et (1.95) qu'il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.107}$$

$$\|Ly_\varepsilon - (u_0 + u_\varepsilon)\chi_\omega\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.108}$$

La relation (1.108) et le fait que y_ε soit solution de (1.105) implique que

$$\|y_\varepsilon\|_{W(0,T)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.109}$$

Au vu de (1.104) et (1.107), il vient

$$\|\rho_\varepsilon\chi_\omega - P\rho_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.110}$$

et puisque ρ_ε résout (1.106),

$$\|\rho_\varepsilon\|_V \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.111}$$

Maintenant en appliquant (1.39) à ρ_ε,

$$\left\|\frac{1}{\theta}\rho_\varepsilon\right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $\left\|\frac{1}{\theta}P\rho_\varepsilon\right\|_{L^2(G)} \leqslant \left\|\frac{1}{\theta}(\rho_\varepsilon\chi_\omega - P\rho_\varepsilon)\right\|_{L^2(G)} + \left\|\frac{1}{\theta}\rho_\varepsilon\chi_\omega\right\|_{L^2(G)}$ et $\frac{1}{\theta} \in L^\infty(G)$, alors

$$\left\|\frac{1}{\theta}P\rho_\varepsilon\right\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

$P\rho_\varepsilon$ étant un élément de $\mathcal{U}$ qui est un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$, de dimension finie, nous en déduisons que

$$\|P\rho_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.112}$$

Il découle à nouveau de (1.110) que,

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.113}$$

Par extraction de sous-suites, on a d'après (1.107), (1.109), (1.111)-(1.113),

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u} = \tilde{u}(z) \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{1.114}$$
$$y_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{y} = \tilde{y}(z) \text{ faiblement dans } W(0,T), \tag{1.115}$$
$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(z) \text{ faiblement dans } V, \tag{1.116}$$
$$P\rho_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\nu} = \tilde{\nu}(z) \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{1.117}$$
$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\rho} \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{1.118}$$

et donc $\tilde{u} \in \mathcal{U}^\perp$, $\tilde{\nu} \in \mathcal{U}$.
L'injection de $W(0,T)$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, $(\tilde{u}, \tilde{y})$ vérifie le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (1.17)-(1.19).
Nous savons, en nous basant sur la Proposition 1.4.3, qu'il existe un unique

contrôle $\hat{u}$ de norme minimale dans $L^2(G)$, tel que le problème (1.17)-(1.19) soit vrai. D'où
$$\frac{1}{2}\|\hat{u}\|^2_{L^2(G)} \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(G)}.$$
Soit $\hat{y}$ la solution de (1.18) correspondant à $\hat{u}$; il vient
$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} - \Delta\hat{y} + a_0(z)\hat{y} = (u_0 + \hat{u})\chi_\omega \text{ dans } Q.$$
$(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ étant l'élément réalisant le minimum de (1.85),
$$\frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(G)} \leqslant J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(\hat{u}, \hat{y}) = \frac{1}{2}\|\hat{u}\|^2_{L^2(G)}. \tag{1.119}$$
Or selon (1.114), nous pouvons également écrire
$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(G)} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(G)}, \tag{1.120}$$
et nous concluons que $\tilde{u} = \hat{u}$.
Maintenant en considérant (1.120), (1.119) et (1.79), il en découle l'estimation suivante
$$\|\tilde{u}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.121}$$
où $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$ est une constante positive.
D'autre part, ρ_ε vérifiant (1.106), il en résulte que,
$$\begin{cases} L^*\tilde{\rho} &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \tilde{\rho} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$
De plus, (1.110) entraîne
$$\rho_\varepsilon\chi_\omega - P\rho_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\varsigma} \text{ faiblement dans } L^2(G),$$
donc $\tilde{\varsigma} = \tilde{\varsigma}(z) \in \mathcal{U}^\perp$, et au vu de (1.117) et (1.118), $\tilde{\rho} = \tilde{\nu} + \tilde{\varsigma}$. Finalement $\tilde{\nu} = P\tilde{\rho}$ et
$$\rho_\varepsilon\chi_\omega - P\rho_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\rho} - P\tilde{\rho} \text{ faiblement dans } L^2(G).$$
(1.82) et (1.83) sont les conséquences de (1.111), (1.113), (1.116) et (1.118), ce qui établit le Théorème 1.4.4. ■

1.5 Preuve du résultat principal

Quel que soit $z \in L^2(Q)$, nous avons montré qu'il existe un contrôle $\tilde{u} = \tilde{u}(z)$ unique tel que $(\tilde{u}, \tilde{y}(\tilde{u}))$ vérifie (1.17)-(1.19). Donc par la Proposition 1.2.2, il existe un unique contrôle $\tilde{v} = \tilde{v}(z)$ vérifiant
$$\tilde{v} = (u_0 + \tilde{u})\chi_\omega, \tag{1.122}$$

solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur la dérivée normale (1.13), (1.7), (1.8). Il résulte de (1.122), (1.121) et (1.59), que

$$\|\tilde{v}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.123}$$

Ainsi, nous avons construit une application non linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{S}: & L^2(Q) & \to & L^2(Q) \\ & z & \mapsto & S(z) = \tilde{y}(\tilde{v}) \end{array}$$

où $\tilde{y}(\tilde{v})$ est la solution de (1.13) correspondant au contrôle $\tilde{v} = (u_0+\tilde{u})\chi_\omega$, avec $u_0 \in \mathcal{U}_\theta$ et $\tilde{u} \in \mathcal{U}^\perp$ est défini par (1.80) et (1.81). Le problème consiste alors à trouver un point fixe de $\mathcal{S}$. En effet, si $z \in L^2(Q)$ est tel que $\mathcal{S}(z) = \tilde{y}(\tilde{v}) = z$, la solution $\tilde{y}$ de (1.13) est en fait solution de (1.12). Alors, le contrôle $\tilde{v}$ est celui que nous cherchons, puisque par construction, $\tilde{y}(\tilde{v})$ vérifie (1.7) et (1.8). Pour conclure à l'existence d'un point fixe de $\mathcal{S}$, nous pouvons utiliser le Théorème de point fixe de Schauder. Il suffit donc de vérifier les trois propriétés suivantes

$$\mathcal{S} \text{ est continue,}$$

$$\mathcal{S} \text{ est compacte,}$$

$$\text{l'image de } \mathcal{S} \text{ est bornée, i.e. } \exists R > 0; \|\mathcal{S}(z)\|_{L^2(Q)} \leqslant R, \forall z \in L^2(Q).$$

1.5.1 Continuité de $\mathcal{S}$

La preuve sera divisée en cinq étapes.

Etape 1 : Soit $(z_n)_n$ une suite de $L^2(Q)$; supposons que z_n converge vers z fortement dans $L^2(Q)$. Donc il existe une sous-suite $(z_{n_k})_k$ telle que $z_{n_k}(x)$ converge vers $z(x)$ presque partout dans Q. La fonction f étant de classe C^1, la fonction a_0 est continue et telle que

$$a_0(z_{n_k}(x)) \to a_0(z(x)) \text{ presque partout dans } Q.$$

On a d'après (1.11), $|a_0(z_{n_k}(x))| \leqslant K$ et comme Q est borné, alors le Théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de dire que,

$$a_0(z_{n_k}) \to a_0(z) \text{ fortement dans } L^2(Q). \tag{1.124}$$

Etape 2 : Le contrôle $\tilde{v}_{n_k} = \tilde{v}(z_{n_k})$ est tel que la solution $\tilde{y}_{n_k} = \tilde{y}(\tilde{v}_{n_k})$ de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \tilde{y}_{n_k}}{\partial t} - \Delta\tilde{y}_{n_k} + a_0(z_{n_k})\tilde{y}_{n_k} & = & \tilde{v}_{n_k}\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \tilde{y}_{n_k} & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{y}_{n_k}(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.125}$$

vérifie

$$\langle \frac{\partial \tilde{y}_{n_k}}{\partial \nu}, e_j \rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = 0; j = 1, \ldots, M_0, \tag{1.126}$$

et

$$\tilde{y}_{n_k}(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{1.127}$$

En outre, $\tilde{v}_{n_k}$ est donné par

$$\tilde{v}_{n_k} = (u_0(z_{n_k}) + \tilde{u}_{n_k})\chi_\omega, \tag{1.128}$$

où, d'une part $u_0(z_{n_k}) \in \mathcal{U}_\theta(z_{n_k}) = \text{Vect}(\{\frac{1}{\theta} q_1(z_{n_k})\chi_\omega, \ldots, \frac{1}{\theta} q_{M_0}(z_{n_k})\chi_\omega\})$ vérifie selon (1.21),

$$\int_G u_0(z_{n_k}) q_j(z_{n_k}) dxdt = -\int_\Omega y^0 q_j(z_{n_k})(0) dx, \tag{1.129}$$

avec $q_j(z_{n_k})$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{rlll} -\dfrac{\partial q_j(z_{n_k})}{\partial t} - \Delta q_j(z_{n_k}) + a_0(z_{n_k}) q_j(z_{n_k}) & = 0 & \text{dans} & Q, \\ q_j(z_{n_k}) & = e_j & \text{sur} & \Sigma_0, \\ q_j(z_{n_k}) & = 0 & \text{sur} & \Sigma \setminus \Sigma_0, \\ q_j(z_{n_k})(T) & = 0 & \text{dans} & \Omega. \end{array} \right. \tag{1.130}$$

D'autre part, $\tilde{u}_{n_k} = \tilde{u}(z_{n_k})$ est donné par

$$\tilde{u}_{n_k} = \tilde{\rho}(z_{n_k})\chi_\omega - P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k}), \tag{1.131}$$

où $\tilde{\rho}(z_{n_k}) \in V$ résout

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \tilde{\rho}(z_{n_k})}{\partial t} - \Delta \tilde{\rho}(z_{n_k}) + a_0(z_{n_k})\tilde{\rho}(z_{n_k}) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \tilde{\rho}(z_{n_k}) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \end{array} \right. \tag{1.132}$$

et P_{n_k} est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ dans $\mathcal{U}(z_{n_k}) = \text{Vect}(\{q_1(z_{n_k})\chi_\omega, \ldots q_{M_0}(z_{n_k})\chi_\omega\})$. Nous déduisons de (1.82), (1.83), (1.59) et (1.121) l'existence d'une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$ telle que

$$\|\tilde{\rho}(z_{n_k})\|_V \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.133}$$
$$\|\tilde{\rho}(z_{n_k})\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.134}$$
$$\|u_0(z_{n_k})\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.135}$$
$$\|\theta u_0(z_{n_k})\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.136}$$
$$\|\tilde{u}_{n_k}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.137}$$
$$\|\tilde{v}_{n_k}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.138}$$

En extrayant des sous-suites, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(z_{n_k}) &\rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } V, && (1.139)\\
\tilde{\rho}(z_{n_k}) &\rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } L^2(G), && (1.140)\\
u_0(z_{n_k}) &\rightharpoonup x \text{ faiblement dans } L^2(G), && (1.141)\\
\theta u_0(z_{n_k}) &\rightharpoonup x_1 \text{ faiblement dans } L^2(G), && (1.142)\\
\tilde{u}_{n_k} &\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(G), && (1.143)
\end{aligned}$$

et donc $u \in \mathcal{U}^{\perp}$. D'où d'après (1.128), nous avons

$$\tilde{v}_{n_k} \rightharpoonup (x+u)\chi_\omega = v\chi_\omega \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{1.144}$$

Etape 3 : Puisque $\tilde{y}_{n_k}$ résout (1.125), nous obtenons selon (1.138),

$$\|\tilde{y}_{n_k}\|_{W(0,T)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.145}$$

où $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$. D'une part, cela entraîne que

$$\left\|\frac{\partial \tilde{y}_{n_k}}{\partial \nu}\right\|_{H^{-1}(\Sigma)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)},$$

et d'autre part, par le Lemme de compacité d'Aubin-Lions, il s'ensuit que

$$\tilde{y}_{n_k} \to y \text{ fortement dans } L^2(Q). \tag{1.146}$$

Ainsi, en utilisant (1.124), (1.144)-(1.146), nous pouvons passer à la limite $k \to +\infty$ dans les relations (1.125)-(1.127) pour aboutir à $(v, y = y(v))$ solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + a_0(z)y &=& v\chi_\omega & \text{dans } Q,\\
y &=& 0 & \text{sur } \Sigma,\\
y(0) &=& y^0 & \text{dans } \Omega,
\end{array}\right.$$

$$\langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, e_j\rangle_{H^{-1}(\Sigma_0), H_0^1(\Sigma_0)} = 0; j = 1, \ldots, M_0,$$

et

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Etape 4 : Comme $q_j(z_{n_k})$ est solution de (1.130) et que la relation (1.47) est vérifiée, alors

$$\|q_j(z_{n_k})\|_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C\|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}, \tag{1.147}$$

et une fois encore, par le Lemme de compacité d'Aubin-Lions, il s'ensuit que pour $j \in \{1, \ldots, M_0\}$,

$$q_j(z_{n_k}) \to \psi_j \text{ fortement dans } L^2(Q). \tag{1.148}$$

En outre, nous avons l'inégalité d'énergie suivante

$$\|q_j(z_{n_k})(0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)}. \tag{1.149}$$

En passant à la limite $k \to +\infty$ dans (1.130), nous obtenons conformément à (1.124), (1.147) et (1.148),

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \psi_j}{\partial t} - \Delta\psi_j + a_0(z)\psi_j &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \psi_j &= e_j \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \psi_j &= 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0, \\ \psi_j(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Ainsi pour chaque e_j, $1 \leqslant j \leqslant M_0$, ψ_j est solution de (1.14). Il découle de (1.149), que pour $j \in \{1, \ldots, M_0\}$

$$q_j(z_{n_k})(0) \rightharpoonup \psi_j(0) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{1.150}$$

L'unicité de la solution de (1.14) implique pour tout $j \in \{1, \ldots, M_0\}$,

$$\psi_j(z) = q_j(z). \tag{1.151}$$

Etape 5 : Comme $\theta u_0(z_{n_k}) \in \mathcal{U}(z_{n_k})$ et que les relations (1.136), (1.148), (1.151) et (1.142) sont vérifiées, nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.4 avec $H = L^2(G)$, $h_n = \theta u_0(z_{n_k})$, $p_{ni} = q_j(z_{n_k})$, $p_i = q_j$, et en déduire qu'il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant M_0$ tels que

$$\theta u_0(z_{n_k}) \to x_1 = \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j q_j \text{ fortement dans } L^2(G).$$

Alors, en utilisant (1.141) et le fait que $\dfrac{1}{\theta}$ est borné dans $L^\infty(G)$,

$$u_0(z_{n_k}) = \frac{1}{\theta}\theta u_0(z_{n_k}) \to \frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j q_j = w \text{ fortement dans } L^2(G). \tag{1.152}$$

Au vu de (1.148), (1.150)-(1.152), nous pouvons passer à la limite $k \to +\infty$ dans (1.129),

$$\int_G w q_j(z) dx dt = -\int_\Omega y^0 q_j(z)(0) dx, \ 1 \leqslant j \leqslant M_0.$$

La fonction $u_0 \in \mathcal{U}_\theta$ donnée par (1.21) étant unique, nous concluons que

$$u_0 = w. \tag{1.153}$$

Puisque $\tilde{u}_{n_k} \in \mathcal{U}(z_{n_k})^{\perp}$, nous pouvons écrire

$$\int_G \tilde{u}_{n_k} q_j(z_{n_k}) dxdt = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant M_0.$$

En passant à la limite $k \to +\infty$ dans cette dernière égalité, nous obtenons selon (1.143), (1.148) et (1.151),

$$\int_G u q_j(z) dxdt = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant M_0.$$

Par conséquent $u \in \mathcal{U}^{\perp}$.
Puisque $\tilde{\rho}(z_{n_k}) \in V$ vérifie (1.132) et (1.134), nous pouvons appliquer (1.26) à $\tilde{\rho}(z_{n_k})$ et en tirer que $\tilde{\rho}(z_{n_k})$ est borné dans $L^2(]\beta, T-\beta[; H^2(\Omega)), \forall \beta > 0$. Donc quel que soit $\beta > 0$,

$$\tilde{\rho}(z_{n_k}) \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } L^2(]\beta, T-\beta[\times\Omega),$$

$$\tilde{\rho}(z_{n_k}) \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } L^2(]\beta, T-\beta[\times\Gamma).$$

Il s'ensuit que,

$$\tilde{\rho}(z_{n_k}) \to \rho \text{ dans } \mathscr{D}'(Q),$$
$$\tilde{\rho}(z_{n_k}) \to \rho \text{ dans } \mathscr{D}'(\Sigma).$$

Ainsi,

$$-\frac{\partial \tilde{\rho}(z_{n_k})}{\partial t} - \Delta\tilde{\rho}(z_{n_k}) + a_0(z_{n_k})\tilde{\rho}(z_{n_k}) \to L^*\rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta\rho + a_0(z)\rho \text{ dans } \mathscr{D}'(Q).$$

D'où d'après (1.132), il vient

$$\begin{cases} L^*\rho &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

En tenant compte de (1.131) et (1.137), il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0} \|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$ telle que

$$\|\tilde{\rho}(z_{n_k})\chi_\omega - P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k})\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.154}$$

Maintenant en appliquant (1.39) à $\tilde{\rho}(z_{n_k})$, nous obtenons

$$\left\| \frac{1}{\theta}\tilde{\rho}(z_{n_k}) \right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.155}$$

En argumentant comme dans la preuve de la Proposition 1.3.5, il découle de (1.154) et (1.155),

$$\|P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k})\|_{L^2(G)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.156}$$

$P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k})$ étant un élément de $\mathcal{U}(z_{n_k})$ et les relations (1.148), (1.151), (1.156) étant vraies, nous pouvons appliquer le Lemme 1.3.4 avec $H = L^2(G)$, $h_n = P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k})$, $p_{ni} = q_j(z_{n_k})$, $p_i = q_j$. Nous concluons que,

$$P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k}) \to \tau \in \mathcal{U}(z) = \mathrm{Vect}(\{q_1(z)\chi_\omega, \ldots, q_{M_0}(z)\chi_\omega\}) \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (1.157)$$

Donc si l'on prend en compte (1.131), (1.140), (1.143) et (1.157),

$$\tilde{u}_{n_k} = \tilde{\rho}(z_{n_k})\chi_\omega - P_{n_k}\tilde{\rho}(z_{n_k}) \rightharpoonup \rho\chi_\omega - \tau = u \text{ faiblement dans } L^2(G). \quad (1.158)$$

Puisque $u \in \mathcal{U}^\perp$ et $\tau \in \mathcal{U}$, $Pu = 0$ et $P\tau = \tau$. Donc $P\rho - \tau = 0$, dòu $\tau = P\rho$ et $u = \rho\chi_\omega - P\rho$. Nous déduisons du Théorème 1.4.4 que $u = \tilde{u}$. D'après (1.144) et (1.153),

$$v = u_0 + u = \tilde{v}.$$

1.5.2 Compacité de $\mathcal{S}$

Les arguments ci-dessus montrent que lorsque z repose dans un sous-ensemble borné B de $L^2(Q)$, $\tilde{y}(\tilde{v}) = \mathcal{S}(z)$ repose dans un ensemble borné de $W(0,T)$. Le Lemme de compacité d'Aubin-Lions entraînent que $W(0,T)$ est un ensemble compact de $L^2(Q)$. Ainsi $\mathcal{S}(B)$ est relativement compact dans $L^2(Q)$, ce qui achève la preuve de la compacité de $\mathcal{S}$.

1.5.3 L'image de $\mathcal{S}$ est bornée

Soit $z \in L^2(Q)$. Comme $\tilde{y}(\tilde{v}) = \mathcal{S}(z)$ résout (1.13) avec $\tilde{v}$ vérifiant (1.9), alors il s'ensuit que

$$\|\tilde{y}(\tilde{v})\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}$$

avec $C = C(\Omega, \omega, K, T, \sum_{j=1}^{M_0}\|e_j\|_{H_0^1(\Sigma)})$. En outre, l'injection de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(Q)$ est continue, alors

$$\|\tilde{y}(\tilde{v})\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci termine la preuve du Théorème 1.1.1.

Chapitre 2

Un problème de contrôlabilité simultanée à zéro avec contrainte sur le contrôle pour un système d'équations paraboliques linéaires couplées

Dans cette partie, nous étudions la contrôlabilité simultanée à zéro avec contrainte sur le contrôle, pour un système linéaire d'équations de la chaleur couplées. Dans un premier temps, nous montrons que, par un changement de variable, le système peut se mettre sous la forme d'un système en cascade de deux équations de la chaleur, avec un contrôle agissant dans une équation. Puis, nous établissons une inégalité d'observabilité, et nous en tirons une inégalité adaptée à la contrainte, que nous utilisons pour prouver le résultat principal.

2.1 Notations et introduction

Supposons que la frontière Γ de l'ouvert Ω soit de classe C^2.
Soit $\omega \Subset \Omega$ un ouvert bien inclus dans Ω, i.e. $\omega \subset \overline{\omega} \subset \operatorname{int} \Omega$ et ω compact.
Soit $\mathcal{K}$ un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ de dimension finie ; nous désignerons par $\mathcal{K}^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathcal{K}$ dans $L^2(G)$ et P la projection orthogonale de $L^2(G)$ dans $\mathcal{K}$.
Nous noterons $\|.\|_{\infty}$ la norme infinie dans Q.
Considérons le système linéaire d'équations de la chaleur

$$\left\{\begin{array}{rll} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} - \Delta y_1 + a_1 y_2 & = h_1 + k\chi_{\omega} & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} - \Delta y_2 + a_2 y_1 & = h_2 + k\chi_{\omega} & \text{dans } Q, \\ y_1 = y_2 & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_1(0) = y_1^0, & y_2(0) = y_2^0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où $a_i \in L^{\infty}(Q)$ $i = 1, 2$, $h_i \in L^2(Q)$ $i = 1, 2$, $y_i^0 \in L^2(\Omega)$ $i = 1, 2$ et $k \in L^2(G)$ représente la fonction contrôle.
Le système (2.1) est un système d'équations paraboliques couplées avec le même contrôle k dans chacune des équations. Sous les hypothèses ci-dessus, le système (2.1) possède une unique solution (y_1, y_2) dans

$$\Big(C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))\Big)^2,$$

nous renvoyons à l'Annexe B pour plus de détails.
Le problème de contrôlabilité simultanée a été introduit par D.L. Russell dans [49] et J.-L. Lions dans [33]. G.O. Antunes et al. ont considéré une question similaire dans [3], pour un système avec des termes de résistance, contrôlé par un contrôle frontière. Nous pouvons également citer B.V. Kapitonov et G.P. Menzala qui ont étudié dans leur article [26], la contrôlabilité simultanée exacte pour le système d'équations de Maxwell et pour une équation des ondes vectorielle avec un terme de pression.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur un problème de contrôlabilité simultanée à zéro avec contrainte sur le contrôle, que nous décrivons maintenant : *étant donnés* $a_i \in L^\infty(Q)$ $i = 1, 2$, $h_i \in L^2(Q)$ $i = 1, 2$ *et* $y_i^0 \in L^2(\Omega)$ $i = 1, 2$, *trouver*

$$k \in \mathcal{K}^\perp \tag{2.2}$$

tel que la solution (y_1, y_2) *de (2.1) vérifie*

$$y_1(T) = y_2(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{2.3}$$

Il nous semble que le problème (2.2),(2.1),(2.3) n'a pas été traité. Nous montrons maintenant que ce problème peut être ramené à un problème en cascade. Plus précisément, en partant du système (2.1) et en posant

$$u = y_1 + y_2, \quad v = y_1 - y_2, \quad f = h_1 + h_2, \quad g = h_1 - h_2, \quad l = 2k,$$
$$e = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a_2 - a_1}{2}, u^0 = y_1^0 + y_2^0, \quad v^0 = y_1^0 - y_2^0,$$

nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + eu + \varepsilon v &= f + l\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v - \varepsilon u - ev &= g & \text{dans } Q, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, \quad v(0) &= v^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

En conséquence notre but est : *pour tous* $f, g \in L^2(Q)$, $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$ *et* $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, *de trouver un contrôle*

$$l \in \mathcal{K}^\perp \tag{2.5}$$

tel que la solution (u, v) *de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - au - bv &= f + l\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v - cu - dv &= g & \text{dans } Q, \\ u = v &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, \quad v(0) &= v^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

vérifie

$$u(T) = v(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{2.7}$$

La contrôlabilité à zéro des systèmes en cascade de deux équations paraboliques est maintenant bien connue. Nous pouvons nommer M. González-Burgos et R. Pérez-Garcia [22], F. Ammar Khodja et al. [29, 27],

S. Guerrero [24], pour un système contrôlé par un contrôle distribué, E. Fernández-Cara et al. [16], pour un contrôle exercé en un point de la frontière. Conçernant la contrôlabilité exacte, G. Wang et L. Zhang dans [52] ont analysé la contrôlabilité locale exacte d'un système de réaction-diffusion et L. Rosier et L. de Teresa [47], ont examiné la contrôlabilité exacte d'un système en cascade de deux équations conservatives.

Dans cette partie, nous présentons la contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle du système (2.6). Pour cela, nous énonçons l'hypothèse suivante

$$\text{toute fonction } \varphi \in \mathcal{K} \text{ telle que } (\varphi,\sigma) \text{ vérifie } -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi - a\varphi - c\sigma = 0 \tag{2.8}$$

$$\text{et } -\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \Delta\sigma - b\varphi - d\sigma = 0 \text{ dans } G, \text{ est identiquement nulle dans } G.$$

Le résultat principal de cette partie est le suivant :

Théorème 2.1.1. *Supposons que*

$$\textit{il existe une constante } c_0 > 0 \textit{ et un domaine } \omega_c \textit{ tels que}$$

$$\omega_c \Subset \omega \ \textit{ et } |c| \geqslant c_0 \ \textit{ dans } \omega_c \times]0, T_0[\ \textit{ pour } T_0 > 0.$$

Alors sous l'hypothèse (2.8), il existe une fonction réelle positive θ telle que pour tous $f, g \in L^2(Q)$ avec $\theta f, \theta g \in L^2(Q)$, il existe un unique contrôle $\tilde{l}$ de norme minimale dans $L^2(G)$ tel que $(\tilde{l}, (\tilde{u}, \tilde{v}))$ soit solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (2.5)-(2.7). En outre, le contrôle $\tilde{l}$ est donné par

$$\tilde{l} = \tilde{\eta}_1 \chi_\omega - P\tilde{\eta}_1, \tag{2.9}$$

où $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial t} - \Delta\tilde{\eta}_1 - a\tilde{\eta}_1 - c\tilde{\eta}_2 & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ -\frac{\partial \tilde{\eta}_2}{\partial t} - \Delta\tilde{\eta}_2 - b\tilde{\eta}_1 - d\tilde{\eta}_2 & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ \tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 & = & 0 & \textit{sur } \Sigma. \end{array} \right. \tag{2.10}$$

La suite est organisée comme suit. Dans la Section 2.2, nous établissons une inégalité d'observabilité cruciale que nous utilisons pour prouver une inégalité adaptée à la contrainte. Dans la Section 2.3, nous nous servons de cette dernière inégalité pour montrer l'existence d'une solution optimale au problème (2.5)-(2.7). La Section 2.4 est dévouée à la preuve du Théorème 2.1.1. Nous donnons les détails de la preuve de l'inégalité d'observabilité en annexe.

2.2 Inégalité d'observabilité

Nous prouvons dans cette section une inégalité d'observabilité dérivant d'une inégalité de Carleman globale. Puis nous l'utilisons afin d'obtenir une estimation de Carleman appropriée qui nous donnera la contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle du système (2.6).

En procédant comme dans [27], nous introduisons $\omega' \Subset \omega$ un sous-domaine bien inclus dans ω et $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$ une fonction telle que

$$\min\{|\nabla\beta(x)|, x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}\} > 0,$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} \leqslant 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Supposons de plus que β vérifie :

$$\min\{\beta(x), x \in \overline{\Omega}\} \geqslant \max\left\{\frac{3}{4}\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}, \ln(3)\right\}.$$

Puis, quels que soient $\lambda, \tau \in \mathbb{R}_+^*$, nous définissons :

$$\rho(x,t) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, \tag{2.11}$$

$$\alpha(x,t) = \tau\frac{e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, \tag{2.12}$$

pour $(x,t) \in Q$. Les résultats techniques ci-dessus sont dûs à A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [20].

Remarque 2.2.1. *Notons en particulier que $\rho > \frac{4}{T^2}$. En effet, soit $\psi(t) = \frac{1}{t(T-t)}$, $\forall t \in]0,T[$. On a $\psi'(t) = -\frac{T-2t}{t^2(T-t)^2}$, donc $\psi'(t) \leqslant 0$, $\forall t \in]0,\frac{T}{2}]$ et $\psi'(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [\frac{T}{2},T[$. On en déduit que ψ est décroissante sur $]0,\frac{T}{2}]$ et croissante sur $[\frac{T}{2},T[$. Ainsi, $\psi(t) \geqslant \psi(\frac{T}{2}) = \frac{4}{T^2}$, $\forall t \in]0,T[$ et $\rho(x,t) \geqslant \frac{4}{T^2}e^{\lambda\max\{(3/4)\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)},\ln(3)\}} > \frac{4}{T^2}$.*

Alors on a le résultat suivant (inégalité de Carleman) :

Théorème 2.2.2 ([19], Théorème 7.1 p. 288)**.** *Il existe $\lambda_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ et une constante positive C telle que, pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $\tau \geqslant \tau_0$ et $s \geqslant -3$, l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}&\int_Q \left(\frac{1}{\lambda}\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{\lambda}|\Delta z|^2 + \lambda\tau^2\rho^2|\nabla z|^2 + \lambda^4\tau^4\rho^4|z|^2\right)\rho^{2s-1}e^{-2\alpha}dxdt\\ &\leqslant C\left(\tau\int_Q\left|\frac{\partial z}{\partial t} \pm \Delta z\right|^2\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt + \lambda^4\tau^4\int_0^T\int_{\omega'}|z|^2\rho^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt\right),\end{aligned} \tag{2.13}$$

soit vraie pour toute fonction z vérifiant la condition homogène de Dirichlet et telle que le membre de droite de (2.13) soit fini.

Dans la suite, C désignera diverses constantes positives. Nous adoptons les notations suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & = & \mathcal{V}\times\mathcal{V}, \\ L_0\varphi & = & \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta\varphi, \\ L_0^*\varphi & = & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta\varphi, \\ M(\varphi,\sigma) & = & L_0^*\varphi-a\varphi-c\sigma, \\ N(\varphi,\sigma) & = & L_0^*\sigma-b\varphi-d\sigma. \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Toujours selon [27], pour λ et τ donnés comme dans le Théorème 2.2.2, nous considérons la fonctionnelle

$$I(s,z)=\int_Q\left(\frac{1}{\lambda}\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{\lambda}|\Delta z|^2+\lambda\tau^2\rho^2|\nabla z|^2+\lambda^4\tau^4\rho^4|z|^2\right)\rho^{2s-1}e^{-2\alpha}dxdt.$$

Par ailleurs, posons $\delta=\tau\rho$ et

$$\|a,b,c,d\|_\infty^2=\|a\|_\infty^2+\|b\|_\infty^2+\|c\|_\infty^2+\|d\|_\infty^2.$$

Lemme 2.2.3. *Soit C la constante donnée par le Théorème 2.2.2. Quels que soient $\lambda\geqslant\lambda_0$, $\tau\geqslant\tau_1=\frac{T^2}{4}(\frac{4C}{\lambda_0^4})^{1/3}\|a,b,c,d\|_\infty^{2/3}$ et $s\geqslant-3$, on a pour tout $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathcal{W}$:*

$$\begin{aligned}\lambda^4\int_Q(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)\delta^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt\leqslant C\Big(&\int_Q(|M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)\delta^{2s}e^{-2\alpha}dxdt\\&+\lambda^4\int_0^T\int_{\omega'}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)\delta^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt\Big).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. Soit $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathcal{W}$; en appliquant (2.13) à chaque φ_i, $i=1,2$, puis en ajoutant les résultats obtenus, nous déduisons la relation suivante

$$\begin{aligned}I(s,\varphi_1)+I(s,\varphi_2)\leqslant C\Big(&\tau\int_Q(|L_0^*\varphi_1|^2+|L_0^*\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt\\&+\lambda^4\tau^4\int_0^T\int_{\omega'}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)\rho^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt\Big).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Le premier terme dans le membre de droite de (2.16) est majoré par :

$$
\begin{aligned}
&\int_Q (|L_0^*\varphi_1|^2 + |L_0^*\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&\quad \leqslant \int_Q (|M(\varphi) + a\varphi_1 + c\varphi_2|^2 + |N(\varphi) + b\varphi_1 + d\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&\quad \leqslant 2\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |a\varphi_1 + c\varphi_2|^2 + |N(\varphi)|^2 + |b\varphi_1 + d\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&\quad \leqslant 2\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&\qquad + 4\int_Q (|a\varphi_1|^2 + |c\varphi_2|^2 + |b\varphi_1|^2 + |d\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&\quad \leqslant 2\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&\qquad + 4\|a,b,c,d\|_\infty^2 \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt.
\end{aligned}
$$

En reportant dans (2.16), il vient

$$
\begin{aligned}
I(s,\varphi_1) + I(s,\varphi_2) \leqslant C\Big(2\tau &\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&+ 4\|a,b,c,d\|_\infty^2 \tau \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt \\
&+ \lambda^4\tau^4 \int_0^T \int_{\omega'} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\rho^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt\Big). \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Nous voulons que le terme $4C\|a,b,c,d\|_\infty^2 \tau \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\rho^{2s}e^{-2\alpha}dxdt$ soit absorbé par le terme $\lambda^4\tau^4 \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\rho^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt$ dans le membre de gauche de (2.17), i.e. $4C\|a,b,c,d\|_\infty^2 < \lambda^4\tau^3\rho^3$. Puisque $\rho > \dfrac{4}{T^2}$ et $\lambda \geqslant \lambda_0$, il suffit que $4C\|a,b,c,d\|_\infty^2 \leqslant \lambda_0^4\tau^3\Big(\dfrac{4}{T^2}\Big)^3$, i.e $\tau \geqslant \tau_1 = \dfrac{T^2}{4}\Big(\dfrac{4C}{\lambda_0^4}\Big)^{1/3}\|a,b,c,d\|_\infty^{2/3}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\lambda^4\tau^{1-2s} \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\delta^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt \leqslant C\tau^{1-2s}\Big(&\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) \\
&\delta^{2s}e^{-2\alpha}dxdt + \lambda^4 \int_0^T \int_{\omega'} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\delta^{2s+3}e^{-2\alpha}dxdt\Big),
\end{aligned}
$$

et nous en tirons (2.15). ∎

Théorème 2.2.4. *Avec les hypothèses du Lemme 2.2.3, supposons de plus que $\tau_1 \geqslant 1$, et que*

il existe une constante $c_0 > 0$ et un domaine ω_c tels que

$$\omega_c \Subset \omega \text{ et } |c| \geqslant c_0 \text{ dans } \omega_c \times]0, T_0[\text{ pour } T_0 > 0. \tag{2.18}$$

Alors quel que soit $r \in [0, 2[$, il existe une constante $C = C(T, \|a, b, c, d\|_\infty, c_0, r)$ telle que pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\omega'} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) e^{-2\alpha} dx dt \leqslant C\Big(\int_G |\varphi_1|^2 e^{-r\alpha} dx dt \\ + \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) e^{-2\alpha} dx dt\Big)\end{aligned} \tag{2.19}$$

pour tout ouvert ω' tel que $\omega' \Subset \omega_c \Subset \omega$.

La preuve du Théorème 2.2.4 se trouve à l'Annexe D.

Corollaire 2.2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.4, pour tout $r \in [0, 2[$ il existe une constante $C = C(T, \|a, b, c, d\|_\infty, c_0, r)$ telle que quel que soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$:*

$$\begin{aligned}\int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) e^{-2\alpha} dx dt \leqslant C\Big(\int_G |\varphi_1|^2 e^{-r\alpha} dx dt \\ + \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) e^{-2\alpha} dx dt\Big).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Preuve. Prenons $s = -\dfrac{3}{2}$ dans (2.15), alors

$$\begin{aligned}\lambda^4 \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) e^{-2\alpha} dx dt \leqslant C\Big(\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) \delta^{-3} e^{-2\alpha} dx dt \\ + \lambda^4 \int_0^T \int_{\omega'} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) e^{-2\alpha} dx dt\Big).\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.2.4, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\lambda^4 \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) e^{-2\alpha} dx dt \leqslant C\Big(\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) \delta^{-3} e^{-2\alpha} dx dt \\ + \lambda^4 \int_G |\varphi_1|^2 e^{-r\alpha} dx dt + \lambda^4 \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) e^{-2\alpha} dx dt\Big).\end{aligned}$$

Or $\delta = \tau\rho > \tau_1 \dfrac{4}{T^2}$ ce qui entraîne que $\delta^3 > \tau_1^3 \Big(\dfrac{4}{T^2}\Big)^3 = \dfrac{4C}{\lambda_0^4} \|a, b, c, d\|_\infty^2$. Donc $\delta^{-3} < \dfrac{\lambda_0^4}{4C\|a, b, c, d\|_\infty^2}$ et nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\lambda^4 \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) e^{-2\alpha} dxdt \leqslant C\Big(&\lambda^4 \int_G |\varphi_1|^2 e^{-r\alpha} dxdt \\ &+ \lambda^4 \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) e^{-2\alpha} dxdt\Big),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du Corollaire 2.2.5. ■

Cela étant, posons maintenant

$$\frac{1}{\theta^2} = e^{-2\alpha},$$

où

$$\alpha(x,t) = \tau \frac{e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}. \tag{2.21}$$

Alors $\dfrac{1}{\theta}$ est borné dans Q car $\alpha(x,t) \geqslant \varepsilon_0$ pour un réel $\varepsilon_0 > 0$. En remplaçant $e^{-2\alpha}$ par $\dfrac{1}{\theta^2}$ dans (2.20), il vient

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{1}{\theta^2} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dxdt \leqslant C\Big(&\int_G \frac{e^{(2-r)\alpha}}{\theta^2} |\varphi_1|^2 dxdt \\ &+ \int_Q \frac{1}{\theta^2} (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) dxdt\Big).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Comme $\dfrac{1}{\theta^2}$ est borné dans G, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{1}{\theta^2} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dxdt \leqslant C\Big(&\int_G e^{(2-r)\alpha} |\varphi_1|^2 dxdt \\ &+ \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) dxdt\Big).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Considérons

$$\gamma^2 = e^{(2-r)\alpha}, \tag{2.24}$$

$r \in [0, 2[$ étant donné par le Théorème 2.2.4. Alors nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2.6. *Supposons (2.8). Alors sous les hypothèses du Corollaire 2.2.5, il existe une constante positive C telle que quel que soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$,*

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C\Big(\int_G \gamma^2|\varphi_1 - P\varphi_1|^2 dxdt + \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt\Big). \tag{2.25}$$

Preuve. Pour prouver (2.25), nous procédons par compacité-unicité (voir [41, 40]). Supposons que l'inégalité n'est pas vérifiée, i.e. quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(z_n) = ((z_{1_n}, z_{2_n}))$ de $\mathcal{W}$ telle que

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|z_{1_n}|^2 + |z_{2_n}|^2)dxdt > Cn\Big(\int_G \gamma^2|z_{1_n} - Pz_{1_n}|^2 dxdt + \int_Q (|M(z_n)|^2 + |N(z_n)|^2)dxdt\Big).$$

Posons pour $i = 1, 2$,

$$\phi_{i_n} = \frac{z_{i_n}}{\Big(\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|z_{1_n}|^2 + |z_{2_n}|^2)dxdt\Big)^{1/2}},$$

alors

$$\Big(\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\phi_{1_n}|^2 + |\phi_{2_n}|^2)dxdt\Big)^{1/2} = 1.$$

On a donc

$$1 > Cn\Big(\int_G \gamma^2|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt + \int_Q (|M(\phi_n)|^2 + |N(\phi_n)|^2)dxdt\Big).$$

Par conséquent si (2.25) n'est pas vrai, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\phi_n) = ((\phi_{1_n}, \phi_{2_n}))$ de $\mathcal{W}$ telle que

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\phi_{1_n}|^2 + |\phi_{2_n}|^2)dxdt = 1, \tag{2.26}$$

$$\int_G \gamma^2|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt < \frac{1}{n}, \tag{2.27}$$

$$\int_Q |M(\phi_n)|^2 dxdt < \frac{1}{n}, \int_Q |N(\phi_n)|^2 dxdt < \frac{1}{n}. \tag{2.28}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\int_G \frac{1}{\theta^2}|P\phi_{1_n}|^2 dxdt \leqslant 2\Big(\int_G \frac{1}{\theta^2}|\phi_{1_n}|^2 dxdt + \int_G \frac{1}{\theta^2}|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt\Big).$$

Le terme $\displaystyle\int_G \frac{1}{\theta^2}|\phi_{1_n}|^2 dxdt$ est borné selon (2.26) et

$$\int_G \frac{1}{\theta^2}|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt = \int_G \frac{1}{\theta^2}\frac{1}{\gamma^2}\gamma^2|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt.$$

Puisque $\dfrac{1}{\theta^2}$ et $\dfrac{1}{\gamma^2}$ sont bornés dans G, il découle de (2.27) qu'il existe une constante positive C telle que :

$$\int_G \frac{1}{\theta^2}|P\phi_{1_n}|^2 dxdt \leqslant C.$$

Comme de plus $P\phi_{1_n} \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L^2(G)$, nous en déduisons que

$$\int_G |P\phi_{1_n}|^2 dxdt \leqslant C. \tag{2.29}$$

Or

$$\int_G |\phi_{1_n}|^2 dxdt \leqslant 2\Big(\int_G |P\phi_{1_n}|^2 dxdt + \int_G |\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt\Big).$$

En écrivant $|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 = \dfrac{1}{\gamma^2}\gamma^2|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2$ et en utilisant (2.27) et (2.29), il vient

$$\int_G |\phi_{1_n}|^2 dxdt \leqslant C.$$

D'où il existe une sous-suite de $(\phi_{1_n})_n$ (encore notée $(\phi_{1_n})_n$) et $\phi_1 \in L^2(G)$ tels que

$$\phi_{1_n} \rightharpoonup \phi_1 \text{ faiblement dans } L^2(G). \tag{2.30}$$

D'autre part, on a d'après (2.27),

$$\gamma(\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}) \to 0 \text{ fortement dans } L^2(G),$$

et puisque $\displaystyle\int_G |\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt = \int_G \frac{1}{\gamma^2}\gamma^2|\phi_{1_n} - P\phi_{1_n}|^2 dxdt,$

$$\phi_{1_n} - P\phi_{1_n} \to 0 \text{ fortement dans } L^2(G). \tag{2.31}$$

Au vu de (2.30), nous pouvons conclure à l'existence d'une sous-suite de $(P\phi_{1_n})_n$ (encore notée $(P\phi_{1_n})_n$) et $\pi \in L^2(G)$ tels que

$$P\phi_{1_n} \rightharpoonup \pi \text{ faiblement dans } L^2(G).$$

L'opérateur de projection P étant compact de $L^2(G)$ dans $\mathcal{K}$,

$$P\phi_{1_n} \to \pi \text{ fortement dans } L^2(G),$$

et ainsi, d'après (2.31) et (2.30),

$$\phi_{1_n} \to \pi = \phi_1 \text{ fortement dans } L^2(G). \tag{2.32}$$

L'opérateur P étant également continu, on a

$$P\phi_{1_n} \to P\phi_1 \text{ fortement dans } L^2(G).$$

Finalement, $P\phi_1 = \phi_1$ et $\phi_1 \in \mathcal{K}$.

Maintenant, au vu de (2.26),

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}|\phi_{i_n}|^2 dxdt \leqslant 1, \ i = 1, 2.$$

En tenant compte de la définition de $\dfrac{1}{\theta}$, nous en tirons que la suite $(\phi_{i_n})_n, \ i = 1, 2$ est bornée dans $L^2(]\mu, T-\mu[\times\Omega), \forall\mu > 0$. Par extraction de sous-suite, nous pouvons écrire que

$$\phi_{i_n} \rightharpoonup \phi_i \text{ faiblement dans } L^2(]\mu, T-\mu[\times\Omega), \forall\mu > 0, \ i = 1, 2.$$

Ainsi,

$$\phi_{i_n} \to \phi_i \text{ dans } \mathscr{D}'(Q), \ i = 1, 2.$$

Comme M et N sont faiblement continus dans $\mathscr{D}'(Q)$, alors

$$M(\phi_{1_n}, \phi_{2_n}) \to M(\phi_1, \phi_2) \text{ dans } \mathscr{D}'(Q),$$

$$N(\phi_{1_n}, \phi_{2_n}) \to N(\phi_1, \phi_2) \text{ dans } \mathscr{D}'(Q).$$

Or (2.28) implique que

$$M(\phi_{1_n}, \phi_{2_n}) \to 0 \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

$$N(\phi_{1_n}, \phi_{2_n}) \to 0 \text{ fortement dans } L^2(Q).$$

Nous en déduisons que $M(\phi_1, \phi_2) = N(\phi_1, \phi_2) = 0$ dans Q. Donc en utilisant l'hypothèse (2.8), il s'ensuit que

$$\phi_1 = 0 \text{ dans } G,$$

et (2.32) peut s'écrire ainsi

$$\phi_{1_n} \to 0 \text{ fortement dans } L^2(G).$$

Etant donné que $(\phi_n)_n$ vérifie (2.23),

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\phi_{1_n}|^2 + |\phi_{2_n}|^2) dxdt \to 0,$$

ce qui est en contradiction avec (2.26). ∎

Lemme 2.2.7. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2.6, il existe une constante positive C telle que pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$,*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\varphi_1(0)|^2 + |\varphi_2(0)|^2)dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \\ \leqslant C\Big(\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt + \int_G \gamma^2|\varphi_1 - P\varphi_1|^2 dxdt\Big).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Preuve. Nous procédons comme dans [44]. Sur l'intervalle de temps $\Big[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\Big]$, il existe une constante positive C telle que

$$\frac{1}{\theta} \geqslant C.$$

En effet, sur l'intervalle de temps $\Big[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\Big]$

$$\alpha(x,t) = \tau \frac{e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)} \leqslant \tau \frac{e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{t(T-t)} < \tau e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}\frac{16}{T^2},$$

donc

$$\frac{1}{\theta} = e^{-\alpha} > e^{-\tau e^{(4/3)\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}\frac{16}{T^2}}.$$

D'où pour $i = 1, 2$,

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega \Big(\frac{1}{\theta}|\varphi_i|\Big)^2 dxdt \geqslant C \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\varphi_i|^2 dxdt.$$

D'après l'inégalité (2.25), on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C\Big(\int_G \gamma^2|\varphi_1 - P\varphi_1|^2 dxdt \\ + \int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt\Big).\end{aligned} \tag{2.34}$$

Soit η une fonction telle que

$$\eta \in C^\infty([0,T]), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \eta(t) = 1 \ \forall t \in \Big[0, \frac{T}{4}\Big], \quad \eta(t) = 0 \quad \forall t \in \Big[\frac{3T}{4}, T\Big].$$

Considérons $\varphi_i \in \mathcal{V},\ i = 1, 2$ et $p \in \mathbb{R}$. Ecrivons pour $i = 1, 2$,

$$\xi_i(x,t) = \eta(t)e^{-pt}\varphi_i(x,t),$$

alors

$$\xi_i|_\Sigma = 0, \quad \xi_i(x,0) = \varphi_i(x,0) \text{ et } \xi_i(x,T) = 0,\ i = 1,2. \tag{2.35}$$

Puisque

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t}(x,t) = (\eta'(t) - p\eta(t))e^{-pt}\varphi_i(x,t) + \eta(t)e^{-pt}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t),\ i = 1,2$$
$$\text{et} \qquad \Delta\xi_i(x,t) = \eta(t)e^{-pt}\Delta\varphi_i(x,t),\ i = 1,2,$$

on a

$$-\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \Delta\xi_1 - (a+p)\xi_1 - c\xi_2 = (-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \Delta\varphi_1 - a\varphi_1 - c\varphi_2)\eta e^{-pt}$$
$$-\eta'\varphi_1 e^{-pt},$$
$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \Delta\xi_2 - b\xi_1 - (d+p)\xi_2 = (-\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \Delta\varphi_2 - b\varphi_1 - d\varphi_2)\eta e^{-pt}$$
$$-\eta'\varphi_2 e^{-pt}.$$

En multipliant les deux relations précédentes par ξ_1 et ξ_2 respectivement, puis en intégrant par parties dans Q, nous trouvons :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\xi_1(0)|^2 dx + \int_Q |\nabla\xi_1|^2 dxdt - \int_Q (a+p)|\xi_1|^2 dxdt - \int_Q c\xi_1\xi_2 dxdt$$
$$= \int_Q M(\varphi)\eta\xi_1 e^{-pt} dxdt - \int_Q \eta'\varphi_1\xi_1 e^{-pt} dxdt,$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\xi_2(0)|^2 dx + \int_Q |\nabla\xi_2|^2 dxdt - \int_Q b\xi_1\xi_2 dxdt - \int_Q (d+p)|\xi_2|^2 dxdt$$
$$= \int_Q N(\varphi)\eta\xi_2 e^{-pt} dxdt - \int_Q \eta'\varphi_2\xi_2 e^{-pt} dxdt.$$

En faisant la somme des deux relations précédentes puis en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (|\xi_1(0)|^2 + |\xi_2(0)|^2) dx + \int_Q (|\nabla\xi_1|^2 + |\nabla\xi_2|^2) dxdt \\
&- \int_Q (a+p)|\xi_1|^2 dxdt - \int_Q (d+p)|\xi_2|^2 dxdt \\
&\leqslant \int_Q (|M(\varphi)\eta\xi_1| + |N(\varphi)\eta\xi_2|)e^{-pt} dxdt \\
&\quad + \int_Q (|\eta'\eta||\varphi_1|^2 + |\eta'\eta||\varphi_2|^2)e^{-2pt} dxdt \quad + \int_Q (c\xi_1\xi_2 + b\xi_1\xi_2) dxdt, \\
&\leqslant \int_Q \Big(\frac{\mu_1}{2}|M(\varphi)\eta|^2 e^{-2pt} + \frac{1}{2\mu_1}|\xi_1|^2 + \frac{\mu_2}{2}|N(\varphi)\eta|^2 e^{-2pt} + \frac{1}{2\mu_2}|\xi_2|^2\Big) dxdt \\
&\quad + \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)|\eta'\eta| e^{-2pt} dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \Big(\lambda_1|\xi_1|^2 + \frac{1}{\lambda_1}|c\xi_2|^2\Big) dxdt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_Q \Big(\lambda_2|b\xi_1|^2 + \frac{1}{\lambda_2}|\xi_2|^2\Big) dxdt.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré, il résulte des propriétés de η,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (|\xi_1(0)|^2 + |\xi_2(0)|^2)dx + \int_Q (|\nabla\xi_1|^2 + |\nabla\xi_2|^2)dxdt \\
&- \int_Q \Big[a + p + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2|b|^2)\Big]|\xi_1|^2 dxdt \\
&- \int_Q \Big[d + p + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{|c|^2}{\lambda_1}\Big)\Big]|\xi_2|^2 dxdt \\
&\quad \leqslant \frac{\mu_1}{2}\int_Q |M(\varphi)|^2 e^{-2pt} dxdt + \frac{\mu_2}{2}\int_Q |N(\varphi)|^2 e^{-2pt} dxdt \\
&\quad + \frac{K}{2\mu_1}\int_Q |\nabla\xi_1|^2 dxdt + \frac{K}{2\mu_2}\int_Q |\nabla\xi_2|^2 dxdt \\
&\quad + \int_Q (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)|\eta'|e^{-2pt} dxdt,
\end{aligned}$$

où K est la constante de Poincaré.
En choisissant p tel que :
$p < -\|a\|_\infty - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2\|b\|_\infty^2}{2}$ et $p < -\|d\|_\infty - \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{\|c\|_\infty^2}{\lambda_1}\Big)$
(par exemple $p = \min\Big\{ -\|a\|_\infty - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2\|b\|_\infty^2}{2}, -\|d\|_\infty - \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{\|c\|_\infty^2}{\lambda_1}\Big)\Big\} - 1$ convient) et en tenant compte à nouveau des propriétés de η, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega (|\xi_1(0)|^2 + |\xi_2(0)|^2)dx &+ \Big(1 - \frac{K}{2\mu_1}\Big)\int_Q |\nabla\xi_1|^2 dxdt \\
&+ \Big(1 - \frac{K}{2\mu_2}\Big)\int_Q |\nabla\xi_2|^2 dxdt \leqslant \frac{\mu_1}{2}\int_Q |M(\varphi)|^2 e^{-2pt} dxdt \\
&\qquad + \frac{\mu_2}{2}\int_Q |N(\varphi)|^2 e^{-2pt} dxdt + C\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt.
\end{aligned}$$

Au vu de (2.35) et (2.34) et en choisissant $\mu_1, \mu_2 > \dfrac{K}{2}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (|\varphi_1(0)|^2 + |\varphi_2(0)|^2)dxdt \leqslant C\Big(\int_G \gamma^2|\varphi_1 - P\varphi_1|^2 dxdt \\
&\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt\Big),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

ce qui, combiné avec (2.25), achève la preuve du Lemme 2.2.7. ■

2.3 Existence du contrôle optimal

Nous commençons par prouver l'existence d'une solution au problème (2.5)-(2.7). Considérons pour cela la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ par

$$\mathcal{B}(\varphi, \sigma) = \int_Q M(\varphi)M(\sigma)dxdt + \int_Q N(\varphi)N(\sigma)dxdt \quad (2.37)$$

$$+ \int_G \gamma^2(\varphi_1 - P\varphi_1)(\sigma_1 - P\sigma_1)dxdt, \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{W}.$$

Au vu du Lemme 2.2.7, cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur $\mathcal{W}$. Soit W le complété hilbertien de $\mathcal{W}$ par rapport à la norme

$$\mathcal{B}(\varphi, \varphi) = \int_Q |M(\varphi)|^2 dxdt + \int_Q |N(\varphi)|^2 dxdt + \int_G |\gamma(\varphi_1 - P\varphi_1)|^2 dxdt. \quad (2.38)$$

L'espace $W = \overline{\mathcal{W}}$ est un espace de Hilbert.

Lemme 2.3.1. *Reprenons la notation (2.24). Avec les hypothèses (2.8) et (2.18), supposons de plus que $f, g \in L^2(Q)$ sont tels que $\theta f, \theta g \in L^2(Q)$. Pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in W$, nous définissons la forme linéaire suivante*

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_Q f\varphi_1 dxdt + \int_Q g\varphi_2 dxdt + \int_\Omega u^0\varphi_1(0)dx + \int_\Omega v^0\varphi_2(0)dx.$$

Alors il existe $\varphi_\theta = (\varphi_{1_\theta}, \varphi_{2_\theta}) \in W$ tel que

$$\int_Q M(\varphi_\theta)M(\sigma)dxdt + \int_Q N(\varphi_\theta)N(\sigma)dxdt$$
$$+ \int_G \gamma^2(\varphi_{1_\theta} - P\varphi_{\theta 1})(\sigma_1 - P\sigma_1)dxdt = \int_Q (f\sigma_1 + g\sigma_2)dxdt$$
$$+ \int_\Omega (u^0\sigma_1(0) + v^0\sigma_2(0))dx, \ \forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W. \quad (2.39)$$

Preuve. Pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in W$, il résulte de l'inégalité (2.33) que :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\varphi)| &\leqslant \int_Q |f\varphi_1| dxdt + \int_Q |g\varphi_2| dxdt + \int_\Omega |u^0\varphi_1(0)| dx + \int_\Omega |v^0\varphi_2(0)| dx \\
&\leqslant \|\theta f\|_{L^2(Q)} \left\| \frac{1}{\theta}\varphi_1 \right\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} \left\| \frac{1}{\theta}\varphi_2 \right\|_{L^2(Q)} \\
&\quad + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_1(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_2(0)\|_{L^2(\Omega)} \\
|\mathcal{L}(\varphi)| &\leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi\|_W. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que la forme linéaire $\mathcal{L}$ est continue sur W. Par conséquent d'après le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $\varphi_\theta = (\varphi_{1_\theta}, \varphi_{2_\theta}) \in W$ tel que pour tout $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W$, on ait

$$\mathcal{B}(\varphi_\theta, \sigma) = \mathcal{L}(\sigma),$$

et la preuve du Lemme 2.3.1 est complète. ■

Proposition 2.3.2. *Reprenons les hypothèses du Lemme 2.3.1. Soit φ_θ l'unique solution de (2.39). Posons*

$$l_\theta = -\gamma(\varphi_{1_\theta}\chi_\omega - P\varphi_{1_\theta}), \tag{2.41}$$

$$u_\theta = M(\varphi_\theta), \tag{2.42}$$

$$v_\theta = N(\varphi_\theta). \tag{2.43}$$

Alors $(\gamma l_\theta, (u_\theta, v_\theta))$ est solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (2.5)-(2.7).
De plus, il existe une constante positive $C = C(T, \|a, b, c, d\|_\infty, c_0, r)$ telle que,

$$\|\varphi_\theta\|_W \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.44}$$

$$\|u_\theta\|_{L^2(Q)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.45}$$

$$\|v_\theta\|_{L^2(Q)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.46}$$

$$\|l_\theta\|_{L^2(G)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.47}$$

Preuve. D'une part, comme $\varphi_\theta \in W$, on a $l_\theta \in L^2(G)$ et u_θ et $v_\theta \in L^2(Q)$. D'autre part, $P\varphi_{1_\theta}$ étant un élément de $\mathcal{K}$, $l_\theta \in \mathcal{K}^\perp$ et il en est de même pour γl_θ. En remplaçant $\gamma(\varphi_{1_\theta}\chi_\omega - P\varphi_{\theta 1})$, $M(\varphi_\theta)$ et $N(\varphi_\theta)$ respectivement par $-l_\theta$, u_θ et v_θ dans (2.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_Q u_\theta(L_0^*\sigma_1 - a\sigma_1 - c\sigma_2)dxdt + \int_Q v_\theta(L_0^*\sigma_2 - b\sigma_1 - d\sigma_2)dxdt \\ - \int_G \gamma l_\theta(\sigma_1 - P\sigma_1)dxdt = \int_Q (f\sigma_1 + g\sigma_2)dxdt \\ + \int_\Omega (u^0\sigma_1(0) + v^0\sigma_2(0))dx,\ \forall\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}\int_Q u_\theta(L_0^*\sigma_1 - a\sigma_1)dxdt - \int_Q v_\theta b\sigma_1 dxdt - \int_G \gamma l_\theta\sigma_1 dxdt \\ = \int_Q f\sigma_1 dxdt + \int_\Omega u^0\sigma_1(0)dx,\ \forall(\sigma_1, 0) \in W,\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}-\int_Q u_\theta c\sigma_2 dxdt + \int_Q v_\theta(L_0^*\sigma_2 - d\sigma_2)dxdt = \int_Q g\sigma_2 dxdt, \\ + \int_\Omega v^0\sigma_2(0)dx,\ \forall(0, \sigma_2) \in W.\end{aligned} \tag{2.50}$$

En particulier pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{D}(Q)$,

$$\begin{aligned}
\langle L_0 u_\theta - a u_\theta, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle b v_\theta, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle \gamma l_\theta \chi_\omega, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\
= \langle f, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\
\langle -c u_\theta, \sigma_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} + \langle L_0 v_\theta - d v_\theta, \sigma_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \langle g, \sigma_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$L_0 u_\theta - a u_\theta - b v_\theta = f + \gamma l_\theta \chi_\omega \text{ dans } Q, \tag{2.51}$$

$$L_0 v_\theta - c u_\theta - d v_\theta = g \text{ dans } Q. \tag{2.52}$$

Comme $u_\theta, v_\theta \in L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega))$, nous avons d'une part $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial t}, \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, et d'après (2.51) et (2.52),

$$\begin{aligned}
\Delta u_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} - a u_\theta - b v_\theta - (f + \gamma l_\theta \chi_\omega) \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)), \\
\Delta v_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - c u_\theta - d v_\theta - g \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}$$

puisque $-a u_\theta - b v_\theta - (f + \gamma l_\theta \chi_\omega)$ et $-c u_\theta - d v_\theta - g \in L^2(Q)$. Par suite, $u_\theta|_\Sigma$ et $v_\theta|_\Sigma$ existent et appartiennent à $H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ et $\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ existent et appartiennent à $H^{-1}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma))$.
D'autre part, $\Delta u_\theta, \Delta v_\theta \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ et selon (2.51) et (2.52),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\theta}{\partial t} &= \Delta u_\theta + a u_\theta + b v_\theta + f + \gamma l_\theta \chi_\omega \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)), \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \Delta v_\theta + c u_\theta + d v_\theta + g \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $t \mapsto u_\theta(x,t)$ et $t \mapsto v_\theta(x,t)$ sont continues de $[0,T]$ dans $H^{-1}(\Omega)$, ce qui signifie que $u_\theta(T), v_\theta(T)$ et $u_\theta(0), v_\theta(0)$ sont bien définis sur $H^{-1}(\Omega)$.

En multipliant (2.51) et (2.52) respectivement par $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\overline{Q})$, puis en intégrant par parties dans Q, il vient

$$\begin{aligned}
&\langle u_\theta(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle u_\theta(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&- \langle \frac{\partial u_\theta}{\partial \nu}, \phi_1\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} + \langle u_\theta, \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \\
&+ \int_Q u_\theta L_0^* \phi_1 dxdt - \int_Q a u_\theta \phi_1 dxdt - \int_Q b v_\theta \phi_1 dxdt = \int_Q f \phi_1 dxdt + \int_G \gamma l_\theta \phi_1 dxdt,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v_\theta(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle v_\theta(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\\
&- \langle \frac{\partial v_\theta}{\partial \nu}, \phi_2\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} + \langle v_\theta, \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}\\
&\quad + \int_Q v_\theta L_0^* \phi_2 dxdt - \int_Q c u_\theta \phi_2 dxdt - \int_Q d v_\theta \phi_2 dxdt = \int_Q g\phi_2 dxdt. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

En particulier pour ϕ_i tel que $\phi_i|_\Sigma = 0$, $i = 1, 2$, on a d'après (2.49) et (2.50),

$$\begin{aligned}
&\langle u_\theta(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle u_\theta(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\\
&\quad + \langle u_\theta, \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} + \int_\Omega u^0 \phi_1(0) dx = 0, \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v_\theta(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle v_\theta(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\\
&\quad + \langle v_\theta, \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} + \int_\Omega v^0 \phi_2(0) dx = 0, \quad (2.56)
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\langle u_\theta(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (u^0 - u_\theta(0))\phi_1(0) dx\\
&\qquad + \langle u_\theta, \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0, \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v_\theta(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (v^0 - v_\theta(0))\phi_2(0) dx\\
&\qquad + \langle v_\theta, \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0. \quad (2.58)
\end{aligned}$$

En choisissant successivement ϕ_i tel que $\phi_i(T) = \phi_i(0) = 0$ dans Ω, puis $\phi_i(T) = 0$ dans Ω, pour $i = 1, 2$, nous concluons que

$$\left\{\begin{array}{lll}
u_\theta = v_\theta & = 0 & \text{sur } \Sigma,\\
u_\theta(0) = u^0, & v_\theta(0) = v^0 & \text{dans } \Omega,\\
u_\theta(T) = 0, & v_\theta(T) = 0 & \text{dans } \Omega.
\end{array}\right.$$

Nous en déduisons que $(\gamma l_\theta, (u_\theta, v_\theta))$ est solution de (2.5)-(2.7).

Maintenant prenons $\sigma = \varphi_\theta$ dans (2.39), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\|u_\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|v_\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|l_\theta\|^2_{L^2(G)} = \int_Q (f\varphi_{1_\theta} + g\varphi_{2_\theta}) dxdt\\
&\qquad + \int_\Omega (u^0 \varphi_{1_\theta}(0) + v^0 \varphi_{2_\theta}(0)) dx, \quad (2.59)
\end{aligned}$$

ce qui, au vu de la définition de la norme dans W donnée par (2.38), est équivalent à

$$\|\varphi_\theta\|_W^2 = \int_Q (f\varphi_{1_\theta} + g\varphi_{2_\theta})dxdt + \int_\Omega (u^0\varphi_{1_\theta}(0) + v^0\varphi_{2_\theta}(0))dx. \tag{2.60}$$

En procédant de même que pour (2.40), nous en déduisons que

$$\|\varphi_\theta\|_W^2 \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)})\|\varphi_\theta\|_W,$$

ce qui peut être réduit à (2.44).
(2.45)-(2.47) sont des conséquences de (2.59) et (2.44). ■

A présent, nous sommes en mesure de formuler le résultat principal de cette section.

Proposition 2.3.3. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.2, il existe un unique contrôle $\hat{l}$ tel que*

$$\|\hat{l}\|_{L^2(G)} = \min_{\bar{l}\in\mathcal{E}} \|\bar{l}\|_{L^2(G)} \tag{2.61}$$

où $\mathcal{E} = \{\bar{l} \in L^2(G); (\bar{l}, \bar{\varphi})$ vérifie $(2.5) - (2.7)\}$. En outre, il existe une constante positive C telle que

$$\|\hat{l}\|_{L^2(G)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.62}$$

Preuve. La Proposition 2.3.2 garantit que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide. Puisque $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(G)$, nous en déduisons l'existence et l'unicité du contrôle optimal $\hat{l}$. ■

2.4 Démonstration du Théorème 2.1.1

Cette section est consacreée à la preuve du Théorème 2.1.1. Nous la divisons en trois étapes.

Etape 1 : Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{(l,\varphi); l \in \mathcal{K}^\perp, \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in (L^2(Q))^2, L_0\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2,\\ L_0\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2 \in L^2(Q), \varphi_i|_\Sigma = 0, \varphi_i(T) = 0 \text{ dans } \Omega,\ i = 1,2,\\ \varphi_1(0) = u^0 \text{ et } \varphi_2(0) = v^0 \text{ dans } \Omega\}.\end{aligned}$$

Pour tout élément (l,φ) de $\mathcal{A}$, nous définissons la fonctionnelle

$$\begin{aligned}J_\varepsilon(l,\varphi) = \frac{1}{2}\|l\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|L_0\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2 - f - l\chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2\\ + \frac{1}{2\varepsilon}\|L_0\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2 - g\|_{L^2(Q)}^2,\end{aligned} \tag{2.63}$$

et nous considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\inf\{J_\varepsilon(l,\varphi)|(l,\varphi)\in\mathcal{A}\}. \tag{2.64}$$

Nous montrons que quel que soit $\varepsilon>0$, le problème (2.64) admet une solution unique.

En effet, puisque $(\gamma l_\theta,(u_\theta,v_\theta))\in\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\neq\emptyset$. En outre J_ε étant minorée (par 0), nous en déduisons que $\inf\{J_\varepsilon(l,\varphi);(l,\varphi)\in\mathcal{A}\}=I_\varepsilon$ existe. Soit $(l_n,\varphi_n)_n$ une suite minimisante de $\mathcal{A}$, alors $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqslant n_0$,

$$I_\varepsilon\leqslant J_\varepsilon(l_n,\varphi_n)<I_\varepsilon+\frac{1}{n}. \tag{2.65}$$

Or

$$I_\varepsilon\leqslant J_\varepsilon(\gamma l_\theta,(u_\theta,v_\theta))=\frac{1}{2}\|\gamma l_\theta\|^2_{L^2(G)},$$

donc d'après (2.65), il existe $C>0$ telle que $J_\varepsilon(l_n,\varphi_n)<C\|\gamma l_\theta\|^2_{L^2(G)}$. La définition (2.63) de J_ε implique que

$$\begin{aligned}
\|l_n\|_{L^2(G)} &\leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}, &(2.66)\\
\|L_0\varphi_{1_n}-a\varphi_{1_n}-b\varphi_{2_n}-f-l_n\chi_\omega\|_{L^2(Q)} &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}, &(2.67)\\
\|L_0\varphi_{2_n}-c\varphi_{1_n}-d\varphi_{2_n}-g\|_{L^2(Q)} &\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}. &(2.68)
\end{aligned}$$

En combinant (2.66) et (2.67), nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\|L_0\varphi_{1_n}-a\varphi_{1_n}-b\varphi_{2_n}\|_{L^2(Q)} &\leqslant \|f\|_{L^2(Q)}+C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}+C\sqrt{\varepsilon}\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}, &(2.69)\\
\|L_0\varphi_{2_n}-c\varphi_{1_n}-d\varphi_{2_n}\|_{L^2(Q)} &\leqslant \|g\|_{L^2(Q)}+C\sqrt{\varepsilon}\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)} &(2.70)
\end{aligned}$$

Il résulte de (2.66) qu'il existe une sous-suite de (l_n) (que l'on note (l_n)) et $l_\varepsilon\in L^2(G)$ tels que

$$l_n\rightharpoonup l_\varepsilon \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{2.71}$$

et de plus $l_\varepsilon\in\mathcal{K}^\perp$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$. Comme $(l_n,\varphi_n)\in\mathcal{A}$, on a $(\varphi_{i_n})\in C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, $i=1,2$ et selon (2.69), (2.70) et les propriétés de l'équation de la chaleur, nous pouvons écrire :

$$\|\varphi_{i_n}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}\leqslant C. \tag{2.72}$$

Donc en prenant en compte (2.69),(2.70) et (2.72), il existe des sous-suites de (φ_{i_n}) (encore notées (φ_{i_n})), $\varphi_{i_\varepsilon}\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, $i=1,2$, $\mu\in L^2(Q)$ et $\xi\in L^2(Q)$ tels que

$$\begin{aligned}
L_0\varphi_{1_n}-a\varphi_{1_n}-b\varphi_{2_n} &\rightharpoonup \mu \text{ faiblement dans } L^2(Q), &(2.73)\\
L_0\varphi_{2_n}-c\varphi_{1_n}-d\varphi_{2_n} &\rightharpoonup \xi \text{ faiblement dans } L^2(Q), &(2.74)\\
\varphi_{ni} &\rightharpoonup \varphi_{i_\varepsilon} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)). &(2.75)
\end{aligned}$$

Or pour tout $\phi \in \mathscr{D}(Q)$, on a

$$\begin{aligned}\langle L_0\varphi_{1_n} - a\varphi_{1_n} - b\varphi_{2_n}, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} &= \langle \varphi_{1_n}, L_0^*\phi - a\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\ &\quad -\langle \varphi_{2_n}, b\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\ \langle L_0\varphi_{2_n} - c\varphi_{1_n} - d\varphi_{2_n}, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} &= \langle \varphi_{2_n}, L_0^*\phi - d\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\ &\quad -\langle \varphi_{1_n}, c\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans cette dernière égalité, il vient

$$\begin{aligned}\langle \mu, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} &= \langle \varphi_{1_\varepsilon}, L_0^*\phi - a\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q)\mathscr{D}(Q)} - \langle \varphi_{2_\varepsilon}, b\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\ &= \langle L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon}, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\ \langle \xi, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} &= \langle \varphi_{2_\varepsilon}, L_0^*\phi - d\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle \varphi_{1_\varepsilon}, c\phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\ &= \langle L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon}, \phi\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mu = L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon}$ et $\xi = L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon}$ dans Q et (2.73) et (2.74) peuvent s'écrire sous la forme :

$$L_0\varphi_{1_n} - a\varphi_{1_n} - b\varphi_{2_n} \rightharpoonup L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{2.76}$$
$$L_0\varphi_{2_n} - c\varphi_{1_n} - d\varphi_{2_n} \rightharpoonup L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{2.77}$$

Maintenant soit $\phi \in C^\infty(\overline{Q})$ tel que $\phi|_\Sigma = 0$. En appliquant la formule de Green, nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_Q (L_0\varphi_{1_n} - a\varphi_{1_n} - b\varphi_{2_n})\phi dxdt &= -\int_\Omega u^0\phi(0)dx \\ + \int_Q \varphi_{1_n}(L_0^*\phi - a\phi)dxdt &- \int_Q \varphi_{2_n} b\phi dxdt, \\ \int_Q (L_0\varphi_{2_n} - c\varphi_{n1} - d\varphi_{2_n})\phi dxdt &= -\int_\Omega v^0\phi(0)dx \\ + \int_Q \varphi_{2_n}(L_0^*\phi - d\phi)dxdt &- \int_Q \varphi_{1_n} c\phi dxdt.\end{aligned}$$

Au vu de (2.75)-(2.77), nous pouvons passer à la limite $n \to +\infty$ dans les deux relations précédentes :

$$\begin{aligned}
&\int_Q (L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon})\phi dxdt \\
&\quad = -\int_\Omega u^0\phi(0)dx + \int_Q \varphi_{1_\varepsilon}(L_0^*\phi - a\phi)dxdt - \int_Q \varphi_{2_\varepsilon} b\phi dxdt \\
&\quad = -\int_\Omega u^0\phi(0)dx - \int_\Omega \varphi_{1_\varepsilon}(T)\phi(T)dx + \int_\Omega \varphi_{1_\varepsilon}(0)\phi(0)dx \\
&\qquad - \int_\Sigma \varphi_{1_\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Gamma dt + \int_Q (L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon})\phi dxdt, \\
&\int_Q (L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon})\phi dxdt \\
&\quad = -\int_\Omega v^0\phi(0)dx + \int_Q \varphi_{2_\varepsilon}(L_0^*\phi - d\phi)dxdt - \int_Q \varphi_{1_\varepsilon} c\phi dxdt \\
&\quad = -\int_\Omega v^0\phi(0)dx - \int_\Omega \varphi_{2_\varepsilon}(T)\phi(T)dx + \int_\Omega \varphi_{2_\varepsilon}(0)\phi(0)dx \\
&\qquad - \int_\Sigma \varphi_{2_\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Gamma dt + \int_Q (L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon})\phi dxdt.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\varphi_{1_\varepsilon}(0) - u^0)\phi(0)dx - \int_\Omega \varphi_{1_\varepsilon}(T)\phi(T)dx - \int_\Sigma \varphi_{1_\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Gamma dt = 0, \\
&\int_\Omega (\varphi_{2_\varepsilon}(0) - v^0)\phi(0)dx - \int_\Omega \varphi_{2_\varepsilon}(T)\phi(T)dx - \int_\Sigma \varphi_{2_\varepsilon}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}d\Gamma dt = 0, \\
&\qquad\qquad \forall\phi \in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel que } \phi|_\Sigma = 0.
\end{aligned}$$

En choisissant successivement ϕ tel que $\phi(0) = \phi(T) = 0$ dans Ω, puis $\phi(T) = 0$ dans Ω, on a que φ_{i_ε}, $i = 1, 2$ vérifie

$$\begin{cases}
\varphi_{1_\varepsilon} = \varphi_{2_\varepsilon} \quad = 0 & \text{sur } \Sigma, \\
\varphi_{1_\varepsilon}(0) = u^0, \quad \varphi_{2_\varepsilon}(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\
\varphi_{1_\varepsilon}(T) = \varphi_{2_\varepsilon}(T) \quad = 0 & \text{dans } \Omega.
\end{cases} \tag{2.78}$$

Par conséquent $(l_\varepsilon, (\varphi_{1_\varepsilon}, \varphi_{2_\varepsilon})) \in \mathcal{A}$. J_ε étant semi-continue inférieurement,

$$J_\varepsilon(l_\varepsilon, (\varphi_{1_\varepsilon}, \varphi_{2_\varepsilon})) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J_\varepsilon(l_n, \varphi_n) = I_\varepsilon.$$

Ainsi $J_\varepsilon(l_\varepsilon, (\varphi_{1_\varepsilon}, \varphi_{2_\varepsilon})) = I_\varepsilon$; l'unicité est une conséquence de la stricte convexité de J_ε et de la convexité de $\mathcal{A}$.

Etape 2 : Nous donnons le système d'optimalité qui caractérise la solution du problème de minimisation (2.64).

Posons $\varphi_\varepsilon = (\varphi_{1_\varepsilon}, \varphi_{2_\varepsilon})$. Les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange sont données par

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon(l_\varepsilon + \lambda l, \varphi_\varepsilon)|_{\lambda=0} = 0, \ \forall l \in \mathcal{K}^\perp, \tag{2.79}$$

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon(l_\varepsilon, \varphi_\varepsilon + \lambda\varphi)|_{\lambda=0} = 0, \ \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2 \tag{2.80}$$

tel que $\varphi_i|_\Sigma = 0$ et $\varphi_i(0) = \varphi_i(T) = 0$ dans $\Omega, i = 1, 2$.

Après calcul, nous obtenons,

$$\int_G l_\varepsilon l dxdt - \frac{1}{\varepsilon}\int_Q (L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - l_\varepsilon\chi_\omega) l\chi_\omega dxdt = 0, \quad \forall l \in \mathcal{K}^\perp, \tag{2.81}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_Q (L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - l_\varepsilon\chi_\omega)(L_0\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2)dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_Q (L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g)(L_0\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2)dxdt = 0, \tag{2.82}$$

$\forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2$ tel que $\varphi_i|_\Sigma = 0, \varphi_i(0) = \varphi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1, 2$. Posons

$$\eta_{1_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - l_\varepsilon\chi_\omega), \quad \eta_{2_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g).$$

Alors $\eta_{1_\varepsilon}, \eta_{2_\varepsilon} \in L^2(Q)$, et

$L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} = f + l_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\eta_{1_\varepsilon}$ et $L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} = g + \varepsilon\eta_{2_\varepsilon}$ dans Q,

ce qui, en plus de (2.78), donne

$$\left\{\begin{array}{rll} L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} & = f + l_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\eta_{1_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} & = g + \varepsilon\eta_{2_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ \varphi_{1_\varepsilon} = \varphi_{2_\varepsilon} & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(0) = u^0, & \varphi_{2_\varepsilon}(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(T) = \varphi_{2_\varepsilon}(T) & = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.83}$$

En remplaçant $\frac{1}{\varepsilon}(L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - l_\varepsilon\chi_\omega)$ et $\frac{1}{\varepsilon}(L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g)$ respectivement par η_{1_ε} et η_{2_ε} dans (2.81) et (2.82), il s'ensuit que

$$\int_G l_\varepsilon l dxdt - \int_Q \eta_{1_\varepsilon} l\chi_\omega dxdt = 0, \ \forall l \in \mathcal{K}^\perp, \tag{2.84}$$

$$\int_Q \eta_{1_\varepsilon}(L_0\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2)dxdt + \int_Q \eta_{2_\varepsilon}(L_0\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2)dxdt = 0, \tag{2.85}$$

$\forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2$ tel que $\varphi_i|_\Sigma = 0, \varphi_i(0) = \varphi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1, 2$.
La relation (2.84) est équivalente à $\int_G (l_\varepsilon - \eta_{1_\varepsilon}) l dxdt = 0$, $\forall l \in \mathcal{K}^\perp$, d'où $l_\varepsilon - \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega \in \mathcal{K}$. Nous en déduisons que $l_\varepsilon - \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega = P(l_\varepsilon - \eta_{1_\varepsilon})$, et comme $l_\varepsilon \in \mathcal{K}^\perp$, nous pouvons écrire $l_\varepsilon = \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega - P\eta_{1_\varepsilon}$.
Nous tirons de la relation (2.85) que

$$\begin{aligned}
\int_Q \eta_{1_\varepsilon}(L_0\varphi_1 - a\varphi_1)dxdt - \int_Q \eta_{2_\varepsilon} c\varphi_1 dxdt = 0,\ \forall(\varphi_1, 0) \in (L^2(Q))^2 \\
\text{tel que } \varphi_1|_\Sigma = 0 \text{ et } \varphi_1(0) = \varphi_1(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \\
-\int_Q \eta_{1_\varepsilon} b\varphi_2 dxdt + \int_Q \eta_{2_\varepsilon}(L_0\varphi_2 - d\varphi_2)dxdt = 0,\ \forall(0, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2 \\
\text{tel que } \varphi_2|_\Sigma = 0 \text{ et } \varphi_2(0) = \varphi_2(T) = 0 \text{ dans } \Omega.
\end{aligned}$$

Les relations précédentes sont vraies en particulier pour $(\varphi_1, 0) \in (\mathscr{D}(Q))^2$ et $(0, \varphi_2) \in (\mathscr{D}(Q))^2$,

$$\begin{aligned}
\langle L_0^*\eta_{1_\varepsilon} - a\eta_{1_\varepsilon} - c\eta_{2_\varepsilon}, \varphi_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = 0, \\
\langle L_0^*\eta_{2_\varepsilon} - b\eta_{1_\varepsilon} - d\eta_{2_\varepsilon}, \varphi_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, en posant $\eta_\varepsilon = (\eta_{1_\varepsilon}, \eta_{2_\varepsilon})$:

$$M(\eta_\varepsilon) = 0 \text{ dans } Q, \tag{2.86}$$
$$N(\eta_\varepsilon) = 0 \text{ dans } Q. \tag{2.87}$$

Puisque $M(\eta_\varepsilon)$ et $N(\eta_\varepsilon) \in L^2(Q)$ et que $\eta_\varepsilon \in (L^2(Q))^2$, nous pouvons définir comme en p. 56, $\eta_{i_\varepsilon}|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, $\dfrac{\partial\eta_{i_\varepsilon}}{\partial\nu}\Big|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma))$, $\eta_{i_\varepsilon}(0)$ et $\eta_{i_\varepsilon}(T)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, $i = 1, 2$.
Nous multiplions (2.86) et (2.87) respectivement par $\phi_1 \in C^\infty(\overline{Q})$ et $\phi_2 \in C^\infty(\overline{Q})$, puis nous intégrons par parties dans Q :

$$\begin{aligned}
-\langle \eta_{1_\varepsilon}(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle \eta_{1_\varepsilon}(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
-\langle \frac{\partial\eta_{1_\varepsilon}}{\partial\nu}, \phi_1\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))} \\
+\langle \eta_{1_\varepsilon}, \frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \\
+\int_Q \eta_{1_\varepsilon} L_0\phi_1 dxdt - \int_Q (a\eta_{1_\varepsilon} + c\eta_{2_\varepsilon})\phi_1 dxdt = 0,
\end{aligned}$$

$$-\langle \eta_{2_\varepsilon}(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle \eta_{2_\varepsilon}(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$
$$-\langle \frac{\partial \eta_{2_\varepsilon}}{\partial \nu}, \phi_2\rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))}$$
$$+\langle \eta_{2_\varepsilon}, \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}$$
$$+\int_Q \eta_{2_\varepsilon} L_0\phi_2 dxdt - \int_Q (b\eta_{1_\varepsilon} + d\eta_{2_\varepsilon})\phi_2 dxdt = 0.$$

En choisissant ϕ_i tel que $\phi_i|_\Sigma = 0$ et $\phi_i(0) = \phi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1, 2$, puis en additionnant les résultats, nous obtenons

$$\langle \eta_{1_\varepsilon}, \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}$$
$$+ \langle \eta_{2_\varepsilon}, \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}$$
$$+ \int_Q \eta_{1_\varepsilon}(L_0\phi_1 - a\phi_1 - b\phi_2)dxdt + \int_Q \eta_{2_\varepsilon}(L_0\phi_2 - c\phi_1 - d\phi_2)dxdt = 0.$$

Or (2.85) implique que :

$$\langle \eta_{1_\varepsilon}, \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}$$
$$+ \langle \eta_{2_\varepsilon}, \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu}\rangle_{H^{-1}(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),H_0^1(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0,$$

pour toute fonction ϕ_i telle que $\phi_i|_\Sigma = 0, \phi_i(0) = \phi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1, 2$,

et nous concluons que $\eta_{i_\varepsilon}|_\Sigma = 0$, $i = 1, 2$.

En résumé, nous avons démontré que $(l_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ résout le problème (2.64) ssi il existe une fonction $\eta_\varepsilon = (\eta_{1_\varepsilon}, \eta_{2_\varepsilon})$ telle que le triplet $(l_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$ vérifie le système d'optimalité suivant

$$l_\varepsilon = \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega - P\eta_{1_\varepsilon}, \tag{2.88}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} & = & f + l_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\eta_{1_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} & = & g + \varepsilon\eta_{2_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ \varphi_{1_\varepsilon} = \varphi_{2_\varepsilon} & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(0) = u^0, \varphi_{2_\varepsilon}(0) & = & v^0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(T) = \varphi_{2_\varepsilon}(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.89}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} M(\eta_\varepsilon) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ N(\eta_\varepsilon) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \eta_{1_\varepsilon} = \eta_{2_\varepsilon} & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{2.90}$$

Etape 3 : Nous établissons des estimations utiles et nous achevons la preuve du théorème.
Nous tirons de (2.66)-(2.68),(2.71),(2.76) et (2.77), les résultats suivants

$$\|l_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}, \tag{2.91}$$
$$\|L_0\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - (f + l_\varepsilon\chi_\omega)\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}, \tag{2.92}$$
$$\|L_0\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}. \tag{2.93}$$

Les relations (2.92) et (2.93), et le fait que φ_ε soit solution de (2.89) entraînent que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))^2} \leqslant C. \tag{2.94}$$

Au vu de (2.88) et (2.91), il vient

$$\|\eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega - P\eta_{1_\varepsilon}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}, \tag{2.95}$$

et puisque η_ε résout (2.90),

$$\|\eta_\varepsilon\|_W \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}. \tag{2.96}$$

Maintenant en appliquant (2.25) à η_ε,

$$\left\|\frac{1}{\theta}\eta_{1_\varepsilon}\right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}.$$

Comme $\left\|\frac{1}{\theta}P\eta_{1_\varepsilon}\right\|_{L^2(G)} \leqslant \left\|\frac{1}{\theta}(\eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega - P\eta_{1_\varepsilon})\right\|_{L^2(G)} + \left\|\frac{1}{\theta}\eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega\right\|_{L^2(G)}$ et $\frac{1}{\theta} \in L^\infty(Q)$, alors

$$\left\|\frac{1}{\theta}P\eta_{1_\varepsilon}\right\|_{L^2(G)} \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}.$$

$P\eta_{1_\varepsilon}$ étant un élément de $\mathcal{K}$ qui est un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$, de dimension finie, nous en déduisons que

$$\|P\eta_{1_\varepsilon}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}. \tag{2.97}$$

Il découle à nouveau de (2.95),

$$\|\eta_{1_\varepsilon}\|_{L^2(G)} \leqslant C\|\gamma l_\theta\|_{L^2(G)}. \tag{2.98}$$

Par extraction de sous-suites, on a selon (2.91), (2.94), (2.96)-(2.98),

$$l_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{l} \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{2.99}$$
$$\varphi_{i_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\varphi}_i \text{ faiblement dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)),\ i = 1,2, \tag{2.100}$$
$$\eta_{i_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\eta}_i \text{ faiblement dans } V,\ i = 1,2, \tag{2.101}$$
$$P\eta_{1_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{v} \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{2.102}$$
$$\eta_{1_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\eta}_1 \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{2.103}$$

et donc $\tilde{l} \in \mathcal{K}^{\perp}$ et $\tilde{v} \in \mathcal{K}$.
L'injection de $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, $(\tilde{l},(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2))$ vérifie le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (2.5)-(2.7). Nous savons, en nous basant sur la Proposition 2.3.3, qu'il existe un unique contrôle $\hat{l}$ de norme minimale dans $L^2(G)$, tel que le problème (2.5)-(2.7) soit vrai. D'où

$$\frac{1}{2}\|\hat{l}\|^2_{L^2(G)} \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{l}\|^2_{L^2(G)}.$$

Soit $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)$ la solution de (2.6) correspondant à $\hat{l}$; il vient

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_1}{\partial t} - \Delta\hat{\varphi}_1 - a\hat{\varphi}_1 - b\hat{\varphi}_2 = f + \hat{l}\chi_\omega \text{ dans } Q,$$
$$\frac{\partial\hat{\varphi}_2}{\partial t} - \Delta\hat{\varphi}_2 - c\hat{\varphi}_1 - d\hat{\varphi}_2 = g \text{ dans } Q.$$

$(l_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ étant l'élément réalisant le minimum de (2.64),

$$\frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2_{L^2(G)} \leqslant J_\varepsilon(l_\varepsilon,\varphi_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(\hat{l},\hat{\varphi}) = \frac{1}{2}\|\hat{l}\|^2_{L^2(G)}.$$

Or selon (2.99), nous pouvons également écrire :

$$\frac{1}{2}\|\tilde{l}\|^2_{L^2(G)} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2_{L^2(G)},$$

et nous concluons que $\tilde{l} = \hat{l}$.
D'autre part, η_ε vérifiant (2.90), il résulte de (2.101) que,

$$\left\{\begin{array}{rcll} M(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ N(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{2.104}$$

De plus, (2.95) implique que

$$\eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega - P\eta_{1_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\varsigma} \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{2.105}$$

donc $\tilde{\varsigma} \in \mathcal{K}^{\perp}$, et au vu de (2.102) et (2.103), $\tilde{\eta}_1 = \tilde{v} + \tilde{\varsigma}$. Finalement $\tilde{v} = P\tilde{\eta}_1$ et

$$\eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega - P\eta_{1_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\eta}_1 - P\tilde{\eta}_1 \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{2.106}$$

ce qui établit le Théorème 2.1.1.

Chapitre 3

Contrôlabilité à zéro d'un système en cascade de deux équations paraboliques non locales

Dans cette partie, nous étudions la contrôlabilité à zéro d'un système parabolique non local. Nous considérons un système en cascade de deux équations paraboliques couplées. Dans un premier temps, nous démontrons la contrôlabilité à zéro pour un système linéaire similaire, en utilisant une inégalité d'observabilité que nous établissons au préalable. Le résultat principal est alors basé sur un théorème de point fixe.

3.1 Notations et introduction

Introduisons les notations suivantes ([23, 37]). Notons $C^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur Ω, et $C^l(\overline{\Omega})$ ($l \in \mathbb{N}$) l'ensemble suivant :

$$C^l(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^{N_0}, |\alpha| \leqslant l, D^\alpha u \in C^0(\Omega)\}.$$

Pour $\kappa \in]0,1[$ et $u \in C^0(\overline{Q})$, nous définissons la quantité

$$[u]_{\kappa,\kappa/2} = \sup_{\substack{\overline{Q} \\ x \neq x'}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x - x'|^\kappa} + \sup_{\substack{\overline{Q} \\ t \neq t'}} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t - t'|^{\kappa/2}}.$$

Puis nous considérons l'espace

$$C^{\kappa,\kappa/2}(\overline{Q}) = \Big\{u \in C^0(\overline{Q}) : [u]_{\kappa,\kappa/2} < \infty\Big\},$$

qui est un espace de Banach avec la norme naturelle

$$|u|_{\kappa,\kappa/2;\overline{Q}} = \|u\|_{L^\infty(Q)} + [u]_{\kappa,\kappa/2},$$

ainsi que l'espace de Banach défini par

$$C^{1+\kappa,\frac{1+\kappa}{2}}(\overline{Q}) = \Big\{u \in C^0(\overline{Q}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{\kappa,\kappa/2}(\overline{Q}) \forall i, \\ \sup_{\substack{\overline{Q} \\ t \neq t'}} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t - t'|^{\frac{1+\kappa}{2}}} < \infty\Big\}$$

dont la norme sera notée $|.|_{1+\kappa,\frac{1+\kappa}{2};\overline{Q}}$.
Enfin soient les espaces

$$Z = \Big\{z \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) : \frac{\partial z}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\Big\},$$

$$W(0,T) = \Big\{\rho \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\Big\},$$

$$X = \Big\{(k,(u,v)) : k \in C^{\kappa,\kappa/2}(\overline{\omega} \times [0,T]), (u,v) \in \Big(C^{1+\kappa,\frac{1+\kappa}{2}}(\overline{Q})\Big)^2\Big\}.$$

Considérons le système suivant d'équations paraboliques non locales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(t)u - au - bv & = f + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - A(t)v - cu - dv & = g \quad \text{dans } Q, \\ u = v & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, & v(0) = v^0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f, g \in L^2(Q)$, $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$, $k \in L^2(G)$ représente la fonction contrôle et

$$A(t)w = \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(w(t), t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{3.2}$$

Les fonctions $B_{ij} : L^2(\Omega) \times [0, T] \to \mathbb{R}$ sont données pour tous $i, j \in \{1, \dots, N_0\}$. Nous retrouvons le même opérateur non local $A(t)$ dans [18] où les auteurs analysent la contrôlabilité à zéro d'une équation parabolique non linéaire. Un résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une telle équation est également rappelé dans cet article. Une démonstration détaillée de ce résultat est donnée dans [11]. M. Chipot et al. se sont penchés sur les questions d'existence, d'unicité et du comportement asymptotique des solutions de problèmes paraboliques de type non local, nous pouvons citer [9, 50, 12, 10]. Pour notre étude, nous utiliserons les hypothèses suivantes. Supposons que pour tous $i, j \in \{1, \dots, N_0\}$,

$$B_{ij} = B_{ji}, \tag{3.3}$$

$$-\infty < \mu_0 \leqslant B_{ij} \leqslant \mu_1 < +\infty. \tag{3.4}$$

En outre pour chaque $i, j \in \{1, \dots, N_0\}$, B_{ij} est une fonction continue et globalement lipschitzienne dans $L^2(\Omega) \times [0, T]$ i.e. il existe une constante $L > 0$ telle que quels que soient $(z, t), (y, s) \in L^2(\Omega) \times [0, T]$,

$$|B_{ij}(z, t) - B_{ij}(y, s)| \leqslant L(\|z - y\|_{L^2(\Omega)} + |t - s|). \tag{3.5}$$

Enfin, supposons qu'il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que quelque soit $z \in L^2(\Omega)$, p.p. en $t \in]0, T[$ et quelque soit $\phi \in \mathbb{R}^{N_0}$,

$$\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z, t)\phi_i \phi_j \geqslant \alpha_0 |\phi|^2. \tag{3.6}$$

Sous les hypothèses ci-dessus sur B_{ij} et en supposant que les quantités $\|a\|_{L^\infty(Q)}$ et $\|d\|_{L^\infty(Q)}$ sont suffisamment petites, pour $k \in L^2(G)$, il existe une unique solution (u, v) au système (3.1) dans

$$\left(L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))\right)^2.$$

Nous renvoyons à l'Annexe C où l'existence de solutions pour une équation parabolique non locale est démontrée.

Dans cette partie, nous étudions la contrôlabilité à zéro du système (3.1) i.e. quels que soient $f, g \in L^2(Q)$, $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$ et $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, nous cherchons un contrôle $k \in L^2(G)$ tel que la solution (u, v) de (3.1) vérifie

$$u(T) = v(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.7}$$

3.2 Système linéaire

Soit $T > 0$. Nous allons prouver la contrôlabilité à zéro du système linéaire associé à (3.1). Notons que pour tout z fixé dans Z, la fonction $t \mapsto B_{ij}(z(t), t)$ est presque partout différentiable et puisque

$$B'_{ij}(z(t), t) = \frac{\partial B_{ij}}{\partial z}(z(t), t)\frac{\partial z}{\partial t}(t) + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t}(z(t), t),$$

on a d'après l'hypothèse (3.5),

$$\|B'_{ij}(z(t), t)\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant L\Big(1 + \Big\|\frac{\partial z}{\partial t}\Big\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\Big),\ 1 \leqslant i, j \leqslant N_0.$$

Ainsi

$$\pi(z) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant N_0} \|B'_{ij}(z(t), t)\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant L\Big(1 + \Big\|\frac{\partial z}{\partial t}\Big\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\Big).$$

La contrôlabilité à zéro du système linéaire associé à (3.1) peut être formulée ainsi : *quels que soient $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, $B_{ij}(z_1(t), t), B_{ij}(z_2(t), t) \in L^\infty(0, T)$, $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$, $f, g \in L^2(Q)$ et $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, trouver un contrôle*

$$k \in L^2(G) \tag{3.8}$$

tel que la solution (u, v) du système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - B(t; z_1)u - au - bv &= f + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - B(t; z_2)v - cu - dv &= g \quad \text{dans } Q, \\ u = v &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, \quad v(0) &= v^0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

vérifie

$$u(T) = v(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{3.10}$$

où

$$B(t; y)w = \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(y(t), t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}.$$

3.3 Inégalité d'observabilité

Nous prouvons dans cette section une inégalité d'observabilité, conséquence d'une inégalité de Carleman. Nous commençons par rappeler une inégalité de Carleman globale, que vérifient les solutions du système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + B(t;z)w & = f \quad \text{dans } Q, \\ w & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ w(T) & = w_T \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Soit ω' un sous-domaine de ω vérifiant $\omega' \Subset \omega$.

Lemme 3.3.1. *Il existe une fonction $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant*

$$\begin{cases} \beta(x) > 0 & \forall x \in \Omega, \\ \beta = 0 & \forall x \in \Gamma, \\ |\nabla \beta(x)| > 0 & \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \omega'. \end{cases}$$

Nous devons ce résultat à Fursikov et Imanuvilov ([20]). Cela étant, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, définissons

$$\rho(x,t) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)},$$

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)},$$

pour $(x,t) \in Q$.

Remarque 3.3.2. *Notons en particulier que $\rho > \frac{4}{T^2}$.*

A présent, nous pouvons énoncer l'inégalité de Carleman globale.

Théorème 3.3.3 ([18], Théorème 2.1 p. 109)**.** *Il existe $\tau_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ et une constante positive C_0 tels que pour $\tau \geqslant \tau_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$, pour tout $f \in L^2(Q)$ et $w_T \in L^2(\Omega)$, la solution associée de (3.11) vérifie l'inégalité*

$$\int_Q e^{-2\lambda\alpha}\Big[(\lambda\rho)^{-1}\Big(\Big|\frac{\partial w}{\partial t}\Big|^2 + \sum_{i,j=1}^{N_0}\Big|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\Big|^2\Big) + \lambda\tau^2\rho|\nabla w|^2 + \tau^4(\lambda\rho)^3|w|^2\Big]dxdt$$
$$\leqslant C_0\left(\int_Q e^{-2\lambda\alpha}|f|^2 dxdt + \int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\lambda\alpha}\tau^4(\lambda\rho)^3|w|^2 dxdt\right). \tag{3.12}$$

De plus, C_0 et τ_0 dépendent uniquement de Ω, ω, μ_0, μ_1 et α_0, et λ_0 peut être choisi de la forme

$$\lambda_0 = \sigma_0(T+T^2) + \sigma_1\pi(z)T^2$$

où σ_0 et σ_1 dépendent uniquement de Ω, ω, μ_0, μ_1 et α_0.

Nous introduisons maintenant, pour tout $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, les notations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{V} & = & \{\varphi \in C^\infty(\overline{Q}); \varphi|_\Sigma = 0\}, \\ \mathcal{W} & = & \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \\ M(\varphi, \sigma) & = & -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi - a\varphi - c\sigma, \\ N(\varphi, \sigma) & = & -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - B(t; z_2)\sigma - b\varphi - d\sigma. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Etant donnés λ et τ par le Théorème 3.3.3, considérons comme dans [27], la fonctionnelle

$$I(w) = \int_Q e^{-2\lambda\alpha}\Big[(\lambda\rho)^{-1}\Big(\Big|\frac{\partial w}{\partial t}\Big|^2 + \sum_{i,j=1}^{N_0}\Big|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\Big|^2\Big) + \lambda\tau^2\rho|\nabla w|^2 + \tau^4(\lambda\rho)^3|w|^2\Big]dxdt.$$

D'autre part, posons

$$\|a, b, c, d\|_\infty^2 = \|a\|_\infty^2 + \|b\|_\infty^2 + \|c\|_\infty^2 + \|d\|_\infty^2,$$

où $\|.\|_\infty = \|.\|_{L^\infty(Q)}$.

Lemme 3.3.4. *Soit C_0 la constante donnée par le Théorème 3.3.3. Quels que soient $\lambda \geqslant \lambda_0$ et $\tau \geqslant \tau_1 = \left(\frac{T}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{4C_0}{\lambda_0^3}\right)^{1/4}\|a, b, c, d\|_\infty^{1/2}$, on a pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$*

$$I(\varphi_1) + I(\varphi_2) \leqslant C_0\Big(2\int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt + \tau^4\lambda^3\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\lambda\alpha}\rho^3(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt\Big). \tag{3.14}$$

Preuve. Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$. Nous appliquons (3.12) à chaque φ_i, $i = 1, 2$, puis nous faisons la somme des résultats, nous en déduisons la relation suivante :

$$I(\varphi_1) + I(\varphi_2) \leqslant C_0\Big[\int_Q e^{-2\lambda\alpha}\Big(\Big|\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + B(t; z_1)\varphi_1\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + B(t; z_2)\varphi_2\Big|^2\Big)dxdt + \int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\lambda\alpha}\tau^4(\lambda\rho)^3(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt\Big]. \tag{3.15}$$

Le premier terme du membre de droite de (3.15) est majoré par :

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{-2\lambda\alpha}\Big(\Big|\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + B(t;z_1)\varphi_1\Big|^2 + \Big|\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + B(t;z_2)\varphi_2\Big|^2\Big)dxdt \\
&\quad = \int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|M(\varphi) + a\varphi_1 + c\varphi_2|^2 + |N(\varphi) + b\varphi_1 + d\varphi_2|^2)dxdt \\
&\quad \leqslant 2\int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |a\varphi_1 + c\varphi_2|^2 + |N(\varphi)|^2 + |b\varphi_1 + d\varphi_2|^2)dxdt \\
&\quad \leqslant 2\int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt \\
&\qquad + 4\int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|a\varphi_1|^2 + |c\varphi_2|^2 + |b\varphi_1|^2 + |d\varphi_2|^2)dxdt \\
&\quad \leqslant 2\int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt \\
&\quad + 4\|a,b,c,d\|_\infty^2 \int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt.
\end{aligned}$$

Nous reportons dans (3.15), alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I(\varphi_1) + I(\varphi_2) \leqslant C_0\Big(2\int_Q & e^{-2\lambda\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt \\
&+ 4\|a,b,c,d\|_\infty^2 \int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \\
&\qquad + \int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\lambda\alpha}\tau^4(\lambda\rho)^3(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt\Big). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Nous voulons que le terme $4C_0\|a,b,c,d\|_\infty^2 \int_Q e^{-2\lambda\alpha}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt$ soit absorbé par le terme $\tau^4\lambda^3 \int_Q \rho^3 e^{-2\lambda\alpha}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt$ dans le membre de gauche de (3.16), i.e. $4C_0\|a,b,c,d\|_\infty^2 < \tau^4(\lambda\rho)^3$. Puisque $\rho > \frac{4}{T^2}$ et $\lambda \geqslant \lambda_0$, il suffit que $4C_0\|a,b,c,d\|_\infty^2 \leqslant \tau^4\lambda_0^3\Big(\frac{4}{T^2}\Big)^3$, i.e $\tau \geqslant \tau_1 = \Big(\frac{T}{2}\Big)^{3/2}\Big(\frac{4C_0}{\lambda_0^3}\Big)^{1/4}\|a,b,c,d\|_\infty^{1/2}$. Nous en déduisons (3.14). ∎

Nous transformons l'inégalité (3.14) en y insérant une fonction poids. Pour cela, supposons que $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, 1\}$ et posons

$$\vartheta = \frac{e^{(-1+\lambda)\alpha}}{\rho^{3/2}}.$$

On a donc $\dfrac{1}{\vartheta^2} = \rho^3 e^{2(1-\lambda)\alpha}$, et nous en déduisons que $\dfrac{1}{\vartheta}$ est une fonction positive et bornée dans Q. En remplaçant $\rho^3 e^{-2\lambda\alpha}$ par $\dfrac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}$ dans (3.14), il vient en particulier

$$\tau^4\lambda^3\int_Q \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C_0\Big(2\int_Q \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2\rho^3}(|M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)dxdt + \tau^4\lambda^3\int_0^T\int_{\omega'}\frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt\Big).$$

Puis en divisant par $\tau^4\lambda^3$, nous obtenons

$$\int_Q \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C_0\Big(2\int_Q \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2\rho^3\tau^4\lambda^3}(|M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)dxdt + \int_0^T\int_{\omega'}\frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt\Big).$$

En utilisant le fait que $\dfrac{1}{\vartheta}$ mais aussi $\dfrac{1}{\rho^3\tau^4\lambda^3}$ sont bornés dans Q, on a

$$\int_Q \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C\Big(\int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)dxdt + \int_0^T\int_{\omega'}e^{-2\alpha}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt\Big), \tag{3.17}$$

où $C = C(\Omega,\omega,\mu_0,\mu_1,\alpha_0,T,\tau_1)$.

Théorème 3.3.5. *Avec les hypothèses du Lemme 3.3.4, supposons de plus que*

il existe une constante $c_0 > 0$ et un domaine ω_c tels que

$$\omega_c \Subset \omega \text{ et } |c| \geqslant c_0 \text{ dans } \omega_c\times]0,T_0[\text{ pour } T_0 > 0. \tag{3.18}$$

Alors pour tout $r \in [0,2[$, il existe une constante $C = C(\mu_0,\mu_1,N_0,c_0,\alpha_0,\|a,b,c,d\|_\infty,\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)},T)$ telle que pour tout $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathcal{W}$

$$\int_0^T\int_{\omega'}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)e^{-2\alpha}dxdt \leqslant C\Big(\int_G |\varphi_1|^2e^{-r\alpha}dxdt + \int_Q(|M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)e^{-2\alpha}dxdt\Big) \tag{3.19}$$

pour tout ω' tel que $\omega' \Subset \omega_c \Subset \omega$.

Les détails de la preuve du Théorème 3.3.5 figurent dans l'Annexe E. Nous allons maintenant combiner les inégalités (3.17) et (3.19). Nous obtenons

$$\int_Q \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C\Big(\int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)dxdt + \int_G |\varphi_1|^2e^{-r\alpha}dxdt\Big), \tag{3.20}$$

avec $C = C(\Omega, \omega, \tau_1, \mu_0, \mu_1, N_0, c_0, \alpha_0, \|a, b, c, d\|_\infty, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}, T)$. Posons

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{e^{-2\alpha}}{\vartheta^2} = \rho^3 e^{-2\lambda\alpha}, \tag{3.21}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \leqslant C\Big(\int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt \\ + \int_G |\varphi_1|^2 e^{-r\alpha}dxdt\Big) \\ \leqslant C\Big(\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt + \int_G |\varphi_1|^2 dxdt\Big).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Théorème 3.3.6. *Reprenons la notation (3.21). Sous les hypothèses du Théorème 3.3.5, il existe une constante positive* $C = C(\Omega, \omega, \tau_1, \mu_0, \mu_1, N_0, c_0, \alpha_0, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \|a, b, c, d\|_\infty, T, K, \lambda_0)$ *telle que pour tout* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$, *on ait :*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\varphi_1(0)|^2 + |\varphi_2(0)|^2)dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \\ \leqslant C\Big(\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt + \int_G |\varphi_1|^2 dxdt\Big).\end{aligned} \tag{3.23}$$

Preuve. Nous procédons comme dans [43]. Sur l'intervalle de temps $\left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$, il existe une constante positive $C_1 = 16\lambda e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}$ telle que

$$\frac{1}{\theta^2} \geqslant \frac{4^3}{T^6} e^{-2C_1/T^2}.$$

En effet, sur l'intervalle $\left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$, on a

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)} \leqslant \frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{t(T-t)} \leqslant \frac{16 e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{T^2},$$

donc

$$\frac{1}{\theta^2} = \rho^3 e^{-2\lambda\alpha} \geqslant \frac{4^3}{T^6} e^{-32\lambda e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}/T^2}.$$

D'où

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \geqslant \frac{4^3}{T^6} e^{-2C_1/T^2} \int_{T/4}^{3T/4} \int_\Omega (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt. \tag{3.24}$$

Soit η une fonction telle que

$$\eta \in C^\infty([0,T]), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \eta(t) = 1\, \forall t \in \left[0, \frac{T}{4}\right], \quad \eta(t) = 0 \quad \forall t \in \left[\frac{3T}{4}, T\right].$$

Soit $\varphi_i \in \mathcal{V}$, $i = 1, 2$ et $p \in \mathbb{R}$. Ecrivons pour $i = 1, 2$,

$$\xi_i(t) = \eta(t) e^{pt} \varphi_i(x,t),$$

alors

$$\xi_i(T) = 0, \quad \xi_i(0) = \varphi_i(x,0) \text{ et } \xi_i|_\Sigma = 0,\ i = 1, 2. \tag{3.25}$$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - B(t; z_1)\xi_1 - a\xi_1 - c\xi_2 &= -\Big(\eta'(t)\varphi_1 + \eta(t)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + p\eta(t)\varphi_1\Big)e^{pt} \\ &\quad -\eta(t)e^{pt}B(t; z_1)\varphi_1 - a\eta(t)e^{pt}\varphi_1 - c\eta(t)e^{pt}\varphi_2 \\ &= \eta(t)e^{pt}M(\varphi) - \eta'(t)e^{pt}\varphi_1 - p\eta(t)e^{pt}\varphi_1, \end{aligned}$$

donc

$$-\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - B(t; z_1)\xi_1 - (a-p)\xi_1 - c\xi_2 = \eta(t)e^{pt}M(\varphi) - \eta'(t)e^{pt}\varphi_1$$

et de même

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - B(t; z_2)\xi_2 - b\xi_1 - (d-p)\xi_2 = \eta(t)e^{pt}N(\varphi) - \eta'(t)e^{pt}\varphi_2.$$

Nous multiplions les deux relations précédentes par ξ_1 et ξ_2 respectivement, puis nous intégrons dans Ω, nous trouvons

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_1|^2)dx - \int_\Omega \xi_1 B(t; z_1)\xi_1 dx - \int_\Omega (a-p)|\xi_1|^2 dx - \int_\Omega c\xi_1\xi_2 dx \\ &= \int_\Omega \eta(t)e^{pt}M(\varphi)\xi_1 dx - \int_\Omega \eta'(t)e^{pt}\varphi_1\xi_1 dx, \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_2|^2)dx - \int_\Omega \xi_2 B(t; z_2)\xi_2 dx - \int_\Omega b\xi_1\xi_2 dx - \int_\Omega (d-p)|\xi_2|^2 dx \\ &= \int_\Omega \eta(t)e^{pt}N(\varphi)\xi_2 dx - \int_\Omega \eta'(t)e^{pt}\varphi_2\xi_2 dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_\Omega \xi_1 B(t; z_1)\xi_1 dx &= \int_\Omega \xi_1 \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t), t)\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_i \partial x_j} dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Omega B_{ij}(z_1(t), t)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} dx \\ &\leqslant -\alpha_0 \int_\Omega |\nabla \xi_1|^2 dx, \end{aligned}$$

et de même

$$\int_\Omega \xi_2 B(t;z_2)\xi_2 dx \leqslant -\alpha_0 \int_\Omega |\nabla \xi_2|^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_1|^2)dx + \alpha_0\int_\Omega |\nabla\xi_1|^2 dx - \int_\Omega (a-p)|\xi_1|^2 dx - \int_\Omega c\xi_1\xi_2 dx \\
&\leqslant \int_\Omega \eta(t)e^{pt}M(\varphi)\xi_1 dx - \int_\Omega \eta'(t)\eta(t)e^{2pt}|\varphi_1|^2 dx \\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_2|^2)dx + \alpha_0\int_\Omega |\nabla\xi_2|^2 dx - \int_\Omega b\xi_1\xi_2 dx - \int_\Omega (d-p)|\xi_2|^2 dx \\
&\leqslant \int_\Omega \eta(t)e^{pt}N(\varphi)\xi_2 dx - \int_\Omega \eta'(t)\eta(t)e^{2pt}|\varphi_2|^2 dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il vient

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_1|^2)dx + \alpha_0\int_\Omega |\nabla\xi_1|^2 dx - \int_\Omega (a-p)|\xi_1|^2 dx \\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega (|\xi_1|^2 + |c\xi_2|^2)dx \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\nu_1|\eta(t)M(\varphi)|^2 e^{2pt} + \frac{1}{\nu_1}|\xi_1|^2\Big)dx \\
&-\int_\Omega \eta'(t)\eta(t)e^{2pt}|\varphi_1|^2 dx, \\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_2|^2)dx + \alpha_0\int_\Omega |\nabla\xi_2|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (|b\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)dx \\
&-\int_\Omega (d-p)|\xi_2|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\nu_2|\eta(t)N(\varphi)|^2 e^{2pt} + \frac{1}{\nu_2}|\xi_2|^2\Big)dx \\
&-\int_\Omega \eta'(t)\eta(t)e^{2pt}|\varphi_2|^2 dx.
\end{aligned}$$

En faisant la somme des deux relations précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_1|^2)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|\xi_2|^2)dx + \alpha_0\int_\Omega (|\nabla\xi_1|^2 + |\nabla\xi_2|^2)dx \\
&-\int_\Omega \Big(a-p+\frac{1}{2}(1+|b|^2)\Big)|\xi_1|^2 dx - \int_\Omega \Big(d-p+\frac{1}{2}(1+|c|^2)\Big)|\xi_2|^2 dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \nu_1|\eta(t)M(\varphi)|^2 e^{2pt}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nu_2|\eta(t)N(\varphi)|^2 e^{2pt}dx \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\nu_1}|\xi_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\nu_2}|\xi_2|^2 dx \\
&-\int_\Omega \eta'(t)\eta(t)e^{2pt}|\varphi_1|^2 dx - \int_\Omega \eta'(t)\eta(t)e^{2pt}|\varphi_2|^2 dx.
\end{aligned}$$

Choisissons p tel que :
$p \geqslant \max\Big\{\|a\|_{L^\infty(Q)} + \frac{1}{2}(1+\|b\|_{L^\infty(Q)}); \|d\|_{L^\infty(Q)} + \frac{1}{2}(1+\|c\|_{L^\infty(Q)})\Big\}$. Alors en

intégrant entre 0 et T et en appliquant l'inégalité de Poincaré, on a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega(|\xi_1(0)|^2+|\xi_2(0)|^2)dx+\int_Q\Big(\alpha_0-\frac{K}{2\nu_1}\Big)|\nabla\xi_1|^2dxdt$$
$$+\int_Q\Big(\alpha_0-\frac{K}{2\nu_2}\Big)|\nabla\xi_2|^2dxdt\leqslant\frac{\nu_1}{2}\int_Q|M(\varphi)|^2e^{2pt}dxdt$$
$$+\frac{\nu_2}{2}\int_Q|N(\varphi)|^2e^{2pt}dxdt+\int_Q|\eta'(t)|e^{2pt}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt,$$

où K est la constante de Poincaré.
D'où en choisissant $\nu_i\geqslant\dfrac{K}{2\alpha_0}$, $i=1,2$, il résulte de (3.25) et des propriétés de la fonction η,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega(|\varphi_1(0)|^2+|\varphi_2(0)|^2)dx\leqslant\frac{\nu_1}{2}\int_Q|M(\varphi)|^2e^{2pt}dxdt$$
$$+\frac{\nu_2}{2}\int_Q|N(\varphi)|^2e^{2pt}dxdt+\int_{T/4}^{3T/4}\int_\Omega|\eta'(t)|e^{2pt}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt.$$

Par conséquent d'après (3.24),

$$\frac{1}{2}\int_\Omega(|\varphi_1(0)|^2+|\varphi_2(0)|^2)dx\leqslant C\Big(\int_Q(M(\varphi)|^2+|N(\varphi)|^2)dxdt$$
$$+\frac{T^6}{4^3e^{-2C_1/T^2}}\int_Q\frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2)dxdt\Big),$$

où $C=C(K,\alpha_0)$. La relation (3.23) est une conséquence de (3.22). ■

3.4 Contrôlabilité à zéro du système linéaire

Nous commençons par prouver l'existence d'un contrôle optimal, solution du problème couplé de contrôlabilité à zéro (3.8)-(3.10). Pour cela, considérons la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathcal{W}\times\mathcal{W}$ par

$$\mathcal{B}(\varphi,\sigma)=\int_Q M(\varphi)M(\sigma)dxdt+\int_Q N(\varphi)N(\sigma)dxdt+\int_G\varphi_1\sigma_1dxdt,$$
$$\forall\varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathcal{W}.$$

La forme bilinéaire $\mathcal{B}(.,.)$ est symétrique positive et, au vu de l'inégalité (3.22), définie. Nous en déduisons que cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur $\mathcal{W}$. Soit $W=\overline{\mathcal{W}}$ le complété hilbertien de $\mathcal{W}$ par rapport à la norme

$$\|\varphi\|_W^2=\mathcal{B}(\varphi,\varphi)=\int_Q|M(\varphi)|^2dxdt+\int_Q|N(\varphi)|^2dxdt+\int_G|\varphi_1|^2dxdt. \quad (3.26)$$

Lemme 3.4.1. *Considérons (3.21). Avec l'hypothèse (3.18), supposons que $f, g \in L^2(Q)$ sont tels que $\theta f, \theta g \in L^2(Q)$. Pour tout $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W$, nous définissons la forme linéaire suivante*

$$\mathcal{L}(\sigma) = \int_Q f\sigma_1 dxdt + \int_Q g\sigma_2 dxdt + \int_\Omega u^0\sigma_1(0)dx + \int_\Omega v^0\sigma_2(0)dx.$$

Alors pour tout $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, il existe $\varphi_\theta = \varphi_\theta(z) = (\varphi_{1_\theta}(z), \varphi_{2_\theta}(z))$ $\in W$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_Q M(\varphi_\theta)M(\sigma)dxdt + \int_Q N(\varphi_\theta)N(\sigma)dxdt + \int_G \varphi_{1_\theta}\sigma_1 dxdt \\ &= \int_Q (f\sigma_1 + g\sigma_2)dxdt + \int_\Omega (u^0\sigma_1(0) + v^0\sigma_2(0))dx, \, \forall\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in w. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Preuve. Pour tout $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W$, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité (3.23), que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\sigma)| &\leqslant \|\theta f\|_{L^2(Q)} \left\|\frac{1}{\theta}\sigma_1\right\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} \left\|\frac{1}{\theta}\sigma_2\right\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + \|u^0\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma_1(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma_2(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)}\|\sigma\|_W + \|\theta g\|_{L^2(Q)}\|\sigma\|_W + \|u^0\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma\|_W \\ &\quad + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma\|_W) \\ |\mathcal{L}(\sigma)| &\leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)})\|\sigma\|_W. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nous en déduisons que la forme linéaire $\mathcal{L}$ est continue sur W. Par conséquent, d'après le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $\varphi_\theta = (\varphi_{1_\theta}, \varphi_{2_\theta}) \in W$ tel que pour tout $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W$, on ait

$$\mathcal{B}(\varphi_\theta, \sigma) = \mathcal{L}(\sigma),$$

ce qui achève la preuve du Lemme 3.4.1. ■

Proposition 3.4.2. *Pour tout $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, soit φ_θ l'unique solution de (3.27). Posons*

$$k_\theta = -\varphi_{1_\theta}\chi_\omega, \tag{3.29}$$

$$u_\theta = M(\varphi_\theta), \tag{3.30}$$

$$v_\theta = N(\varphi_\theta). \tag{3.31}$$

Alors sous les hypothèses du Lemme 3.4.1, $(k_\theta, (u_\theta, v_\theta))$ est solution du problème de contrôlabilité à zéro (3.8)-(3.10).

De plus, il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, \tau_1, \mu_0, \mu_1, N_0, c_0, \alpha_0, \|a, b, c, d\|_\infty, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}, T, K, \lambda_0)$ *telle que,*

$$\|\varphi_\theta\|_W \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}), \quad (3.32)$$

$$\|u_\theta\|_{L^2(Q)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}), \quad (3.33)$$

$$\|v_\theta\|_{L^2(Q)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}), \quad (3.34)$$

$$\|k_\theta\|_{L^2(G)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.35)$$

Preuve. Puisque $\varphi_\theta \in W$, on a $k_\theta \in L^2(G)$ et $u_\theta, v_\theta \in L^2(Q)$. En remplaçant $\varphi_{1_\theta}\chi_\omega$, $M(\varphi_\theta)$ et $N(\varphi_\theta)$ respectivement par $-k_\theta$, u_θ et v_θ dans (3.27), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_Q u_\theta(-\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - B(t; z_1)\sigma_1 - a\sigma_1 - c\sigma_2)dxdt \\ &\qquad + \int_Q v_\theta(-\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - B(t; z_2)\sigma_2 - b\sigma_1 - d\sigma_2)dxdt - \int_G k_\theta \sigma_1 dxdt \\ &= \int_Q (f\sigma_1 + g\sigma_2)dxdt + \int_\Omega (u^0\sigma_1(0) + v^0\sigma_2(0))dx,\ \forall \sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in W. \quad (3.36)\end{aligned}$$

Il vient,

$$\begin{aligned}&\int_Q u_\theta(-\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - B(t; z_1)\sigma_1 - a\sigma_1)dxdt - \int_Q v_\theta b\sigma_1 dxdt - \int_G k_\theta \sigma_1 dxdt \\ &\qquad = \int_Q f\sigma_1 dxdt + \int_\Omega u^0\sigma_1(0)dx,\ \forall (\sigma_1, 0) \in W, \quad (3.37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\int_Q u_\theta c\sigma_2 dxdt + \int_Q v_\theta(-\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - B(t; z_2)\sigma_2 - d\sigma_2)dxdt = \int_Q g\sigma_2 dxdt \\ &\qquad + \int_\Omega v^0\sigma_2(0)dx,\ \forall (0, \sigma_2) \in W. \quad (3.38)\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_Q u_\theta B(t; z_1)\sigma_1 dxdt &= \int_Q u_\theta \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t), t)\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_i \partial x_j} dxdt \\ &= \sum_{i,j=1}^{N_0} \left\langle u_\theta B_{ij}(z_1(t), t), \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{N_0} \left\langle B_{ij}(z_1(t), t)\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_i \partial x_j}, \sigma_1\right\rangle \\ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t), t)\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_1 dxdt\end{aligned}$$

$$\int_Q u_\theta B(t;z_1)\sigma_1 dxdt = \int_Q (B(t;z_1)u_\theta)\sigma_1 dxdt,$$

donc on a en particulier pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{D}(Q)$,

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial t} - B(t;z_1)u_\theta - au_\theta - bv_\theta, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle k_\theta \chi_\omega, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\ = \langle f, \sigma_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\ \langle \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - B(t;z_2)v_\theta - cu_\theta - dv_\theta, \sigma_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \langle g, \sigma_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - B(t;z_1)u_\theta - au_\theta - bv_\theta = f + k_\theta\chi_\omega \text{ dans } Q, \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - B(t;z_2)v_\theta - cu_\theta - dv_\theta = g \text{ dans } Q. \tag{3.40}$$

Comme $u_\theta, v_\theta \in L^2(Q) = L^2(0,T;L^2(\Omega))$, on a d'une part, $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial t}, \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, et d'après (3.39) et (3.40),

$$\begin{aligned}B(t;z_1)u_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} - au_\theta - bv_\theta - (f + k_\theta\chi_\omega) \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)), \\ B(t;z_2)v_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - cu_\theta - dv_\theta - g \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),\end{aligned}$$

puisque $-au_\theta - bv_\theta - (f + k_\theta\chi_\omega)$ et $-cu_\theta - dv_\theta - g \in L^2(Q)$. On a donc $u_\theta, v_\theta \in L^2(Q)$ et $\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial x_i \partial x_j} \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, avec $B_{ij}(z_1(t),t), B_{ij}(z_2(t),t) \in L^\infty(0,T)$. Par suite, $u_\theta|_\Sigma$ et $v_\theta|_\Sigma$ existent et appartiennent à $H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, $\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ et $\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ existent et appartiennent à $H^{-1}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma))$.

D'autre part, $\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial x_i \partial x_j}, \dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ et selon (3.39) et (3.40),

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\theta}{\partial t} &= B(t;z_1)u_\theta + au_\theta + bv_\theta + f + k_\theta\chi_\omega \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)), \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= B(t;z_2)v_\theta + cu_\theta + dv_\theta + g \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)).\end{aligned}$$

Par conséquent, $t \mapsto u_\theta(x,t)$ et $t \mapsto v_\theta(x,t)$ sont continues de $[0,T]$ dans $H^{-1}(\Omega)$, ce qui signifie que $u_\theta(T), v_\theta(T)$ et $u_\theta(0), v_\theta(0)$ sont bien définis dans $H^{-1}(\Omega)$.

En multipliant (3.39) et (3.40) respectivement par $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\overline{Q})$, puis en intégrant par parties dans Q, il vient

$$\begin{aligned}
&\langle u_\theta(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle u_\theta(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_Q u_\theta \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dxdt \\
&- \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Sigma B_{ij}(z_1(t),t) \frac{\partial u_\theta}{\partial x_j} \nu_i \phi_1 d\Gamma dt + \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Sigma B_{ij}(z_1(t),t) u_\theta \nu_j \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} d\Gamma dt \\
&- \int_Q u_\theta B(t;z_1)\phi_1 dxdt - \int_Q a u_\theta \phi_1 dxdt - \int_Q b v_\theta \phi_1 dxdt = \int_Q f \phi_1 dxdt \\
&\qquad + \int_G k_\theta \phi_1 dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v_\theta(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle v_\theta(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_Q v_\theta \frac{\partial \phi_2}{\partial t} dxdt \\
&- \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Sigma B_{ij}(z_2(t),t) \frac{\partial v_\theta}{\partial x_j} \nu_i \phi_2 d\Gamma dt + \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Sigma B_{ij}(z_2(t),t) v_\theta \nu_j \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} d\Gamma dt \\
&- \int_Q v_\theta B(t;z_2)\phi_2 dxdt - \int_Q c u_\theta \phi_2 dxdt - \int_Q d v_\theta \phi_2 dxdt = \int_Q g \phi_2 dxdt.
\end{aligned}$$

En particulier pour ϕ_i tel que $\phi_i|_\Sigma = 0$, $i = 1, 2$, on a d'après (3.37) et (3.38),

$$\begin{aligned}
&\langle u_\theta(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle u_\theta(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Sigma B_{ij}(z_1(t),t) u_\theta \nu_j \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} d\Gamma dt + \int_\Omega u^0 \phi_1(0) dx = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v_\theta(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \langle v_\theta(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_\Sigma B_{ij}(z_2(t),t) v_\theta \nu_j \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} d\Gamma dt + \int_\Omega v^0 \phi_2(0) dx = 0,
\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\langle u_\theta(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle u^0 - u_\theta(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \int_\Sigma u_\theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_{B_1}} d\Gamma dt = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle v_\theta(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle v^0 - v_\theta(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\
&\qquad + \int_\Sigma v_\theta \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu_{B_2}} d\Gamma dt = 0,
\end{aligned}$$

avec $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \nu_{B_1}} = \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\nu_j \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial \nu_{B_2}} = \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\nu_j \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_i}$.
L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial \nu_{B_l}}$ est appelé dérivée conormale associée à l'opérateur $B(t;z_l)$, $l = 1,2$ [46]. En choisissant successivement ϕ_i tel que $\phi_i(T) = \phi_i(0) = 0$ dans Ω, puis $\phi_i(T) = 0$ dans Ω, pour $i = 1,2$, nous concluons que

$$\begin{cases} u_\theta = v_\theta & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_\theta(0) = u^0, & v_\theta(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\theta(T) = v_\theta(T) & = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous en déduisons que $(k_\theta, (u_\theta, v_\theta))$ est solution de (3.8)-(3.10).

Maintenant prenons $\sigma = \varphi_\theta$ dans (3.27), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|u_\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|v_\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|k_\theta\|^2_{L^2(G)} = & \int_Q (f\varphi_{1_\theta} + g\varphi_{2_\theta})dxdt \\ & + \int_\Omega (u^0\varphi_{1_\theta}(0) + v^0\varphi_{2_\theta}(0))dx, \end{aligned} \tag{3.41}$$

ce qui, au vu de la définition de la norme dans W donnée par (3.26), est équivalent à

$$\|\varphi_\theta\|^2_W = \int_Q (f\varphi_{1_\theta} + g\varphi_{2_\theta})dxdt + \int_\Omega (u^0\varphi_{1_\theta}(0) + v^0\varphi_{2_\theta}(0))dx. \tag{3.42}$$

En procédant comme (3.28), nous en déduisons que

$$\|\varphi_\theta\|^2_W \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)})\|\varphi_\theta\|_W, \tag{3.43}$$

qui peut être réduit à (3.32).
(3.33)-(3.35) sont des conséquences de (3.41) et (3.32). ■

Proposition 3.4.3. *Soient les hypothèses de la Proposition 3.4.2. Pour tout $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, il existe un unique contrôle $\hat{k} = \hat{k}(z)$ tel que*

$$\|\hat{k}\|_{L^2(G)} = \min_{\bar{k}\in\mathcal{E}} \|\bar{k}\|_{L^2(G)} \tag{3.44}$$

où $\mathcal{E} = \{\bar{k} \in L^2(G); (\bar{k}, \bar{\varphi})$ vérifie (3.8) − (3.10)$\}$. De plus, il existe une constante positive $C = C(\Omega, \omega, \tau_1, \mu_0, \mu_1, N_0, c_0, \alpha_0, \|a,b,c,d\|_\infty, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}, T, K, \lambda_0)$ telle que

$$\|\hat{k}\|_{L^2(G)} \leqslant C(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.45}$$

Preuve. La Proposition 3.4.2 garantit que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide. $\mathcal{E}$ étant un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(G)$, nous en déduisons l'existence et l'unicité du contrôle optimal $\hat{k}$. ■

Théorème 3.4.4. *Soient les hypothèses de la Proposition 3.4.3. Alors pour tout $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, il existe un unique contrôle $\tilde{k}$ de norme minimale dans $L^2(G)$ tel que $(\tilde{k}, (\tilde{u}, \tilde{v}))$ soit solution du problème de contrôlabilité à zéro (3.8)-(3.10). De plus, le contrôle $\tilde{k}$ est donné par*

$$\tilde{k} = \tilde{\eta}_1 \chi_\omega, \tag{3.46}$$

où $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial t} - B(t; z_1)\tilde{\eta}_1 - a\tilde{\eta}_1 - c\tilde{\eta}_2 & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ -\frac{\partial \tilde{\eta}_2}{\partial t} - B(t; z_2)\tilde{\eta}_2 - b\tilde{\eta}_1 - d\tilde{\eta}_2 & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ \tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 & = & 0 & \textit{sur } \Sigma. \end{array} \right. \tag{3.47}$$

Preuve. Nous faisons la démonstration en trois étapes.

Etape 1 : Soient $\varepsilon > 0$ et $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \Big\{ &(k, \varphi); k = k(z) \in L^2(G), \varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \in (L^2(Q))^2, \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2 \in L^2(Q), \\ &\varphi_i|_\Sigma = 0, \varphi_i(T) = 0 \text{ dans } \Omega,\ i = 1, 2, \varphi_1(0) = u^0 \text{ et } \varphi_2(0) = v^0 \text{ dans } \Omega \Big\}. \end{aligned}$$

Pour tout élément (k, φ) de $\mathcal{A}$, nous définissons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(k, \varphi) = \frac{1}{2}\|k\|^2_{L^2(G)} &+ \frac{1}{2\varepsilon}\left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2 - f - k\chi_\omega \right\|^2_{L^2(Q)} \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon}\left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2 - g \right\|^2_{L^2(Q)}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

et nous considérons le problème de contrôle optimal suivant

$$\inf\{J_\varepsilon(k, \varphi) | (k, \varphi) \in \mathcal{A}\}. \tag{3.49}$$

En procédant comme en p. 59, nous montrons que quel que soit $\varepsilon > 0$, le problème (3.49) admet une solution unique $(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ où $\varphi_\varepsilon = (\varphi_{1_\varepsilon}, \varphi_{2_\varepsilon})$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rll} \varphi_{1_\varepsilon} = \varphi_{2_\varepsilon} & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(0) = u^0, & \varphi_{2_\varepsilon}(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(T) = \varphi_{2_\varepsilon}(T) & = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Etape 2 : Nous donnons le système d'optimalité qui caractérise la solution optimale du problème (3.49).

Les conditions d'Euler-Lagrange qui caractérisent $(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ sont données par

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, \varphi_\varepsilon)|_{\lambda=0} = 0,\ \forall k \in L^2(G),$$

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon + \lambda\varphi)|_{\lambda=0} = 0,\ \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2 \text{ tel que}$$

$$\varphi_i|_\Sigma = 0 \text{ et } \varphi_i(0) = \varphi_i(T) = 0 \text{ dans } \Omega, i = 1, 2.$$

Après calcul, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_G k_\varepsilon k dxdt \\ &-\frac{1}{\varepsilon}\int_Q \Big(\frac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - k_\varepsilon\chi_\omega\Big)k\chi_\omega dxdt = 0, \\ &\forall k \in L^2(G), \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon}\int_Q \Big(\frac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - k_\varepsilon\chi_\omega\Big) \\ &\times\Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2\Big)dxdt \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_Q \Big(\frac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g\Big) \\ &\times\Big(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2\Big)dxdt = 0 \\ &\forall \varphi \in (L^2(Q))^2 \text{ tel que } \varphi_i|_\Sigma = 0, \varphi_i(0) = \varphi_i(T) = 0 \text{ dans } \Omega, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Posons $\eta_{1_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - k_\varepsilon\chi_\omega\Big)$ et $\eta_{2_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g\Big)$. Alors $\eta_{1_\varepsilon}, \eta_{2_\varepsilon} \in L^2(Q)$, et

$$\frac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} = f + k_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\eta_{1_\varepsilon} \text{ dans } Q,$$

$$\frac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} = g + \varepsilon\eta_{2_\varepsilon} \text{ dans } Q,$$

ce qui, en plus de (3.50), donne

$$\left\{\begin{array}{rll} \dfrac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} & = f + k_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\eta_{1_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t; z_2)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} & = g + \varepsilon\eta_{2_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ \varphi_{1_\varepsilon} = \varphi_{2_\varepsilon} & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(0) = u^0, & \varphi_{2_\varepsilon}(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(T) = \varphi_{2_\varepsilon}(T) & = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.53}$$

En remplaçant $\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - f - k_\varepsilon\chi_\omega\Big)$ et $\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;z_2)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g\Big)$ respectivement par η_{1_ε} et η_{2_ε} dans (3.51) et (3.52), nous en déduisons que

$$\int_G k_\varepsilon k dxdt - \int_Q \eta_{1_\varepsilon} k\chi_\omega dxdt = 0,\ \forall k \in L^2(G), \tag{3.54}$$

$$\int_Q \eta_{1_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - B(t;z_1)\varphi_1 - a\varphi_1 - b\varphi_2\Big)dxdt \tag{3.55}$$
$$+\int_Q \eta_{2_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - B(t;z_2)\varphi_2 - c\varphi_1 - d\varphi_2\Big)dxdt = 0,$$

$\forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2$ tel que $\varphi_i|_\Sigma = 0, \varphi_i(0) = \varphi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1, 2$. La relation (3.54) est équivalente à $\int_G (k_\varepsilon - \eta_{1_\varepsilon})kdxdt = 0$, $\forall k \in L^2(G)$, d'où $k_\varepsilon - \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega = 0$. Donc $k_\varepsilon = \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega$.
De la relation (3.55) il s'ensuit que

$$\int_Q \eta_{1_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - B(t;z_1)\varphi_1 - a\varphi_1\Big)dxdt - \int_Q \eta_{2_\varepsilon} c\varphi_1 dxdt = 0,$$
$$\forall (\varphi_1, 0) \in (L^2(Q))^2 \text{ tel que } \varphi_1|_\Sigma = 0 \text{ et } \varphi_1(0) = \varphi_1(T) = 0 \text{ dans } \Omega,$$
$$-\int_Q \eta_{1_\varepsilon} b\varphi_2 dxdt + \int_Q \eta_{2_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - B(t;z_2)\varphi_2 - d\varphi_2\Big)dxdt = 0,$$
$$\forall (0, \varphi_2) \in (L^2(Q))^2 \text{ tel que } \varphi_2|_\Sigma = 0 \text{ et } \varphi_2(0) = \varphi_2(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

En particulier pour $(\varphi_1, 0) \in (\mathscr{D}(Q))^2$ et $(0, \varphi_2) \in (\mathscr{D}(Q))^2$, nous obtenons successivement

$$\langle -\frac{\partial \eta_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;z_1)\eta_{1_\varepsilon} - a\eta_{1_\varepsilon} - c\eta_{2_\varepsilon}, \varphi_1\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = 0 \text{ dans } Q,$$
$$\langle -\frac{\partial \eta_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;z_2)\eta_{2_\varepsilon} - b\eta_{1_\varepsilon} - d\eta_{2_\varepsilon}, \varphi_2\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = 0 \text{ dans } Q.$$

Par conséquent, en posant $\eta_\varepsilon = (\eta_{1_\varepsilon}, \eta_{2_\varepsilon})$,

$$M(\eta_\varepsilon) = 0 \text{ dans } Q, \tag{3.56}$$
$$N(\eta_\varepsilon) = 0 \text{ dans } Q. \tag{3.57}$$

En outre, comme $\eta_\varepsilon \in (L^2(Q))^2$, nous pouvons définir comme en p. 81, $\eta_{i_\varepsilon}|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, $\frac{\partial \eta_{i_\varepsilon}}{\partial \nu}\Big|_\Sigma$ dans $H^{-1}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma))$, $\eta_{i_\varepsilon}(0)$ et $\eta_{i_\varepsilon}(T)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, $i = 1, 2$.
En multipliant (3.56) et (3.57) respectivement par $\phi_1 \in C^\infty(\overline{Q})$ et $\phi_2 \in$

$C^\infty(\overline{Q})$, puis en intégrant par parties dans Q, on a

$$-\langle \eta_{1_\varepsilon}(T), \phi_1(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle \eta_{1_\varepsilon}(0), \phi_1(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$
$$-\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_\Sigma B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial \eta_{1_\varepsilon}}{\partial x_j}\nu_i\phi_1 d\Gamma dt + \sum_{i,j=1}^{N_0}\int_\Sigma B_{ij}(z_1(t),t)\eta_{1_\varepsilon}\nu_j\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}d\Gamma dt$$
$$+\int_Q \eta_{1_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - B(t;z_1)\phi_1\Big)dxdt - \int_Q (a\eta_{1_\varepsilon} + c\eta_{2_\varepsilon})\phi_1 dxdt = 0,$$

$$-\langle \eta_{2_\varepsilon}(T), \phi_2(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle \eta_{2_\varepsilon}(0), \phi_2(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$
$$-\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_\Sigma B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial \eta_{2_\varepsilon}}{\partial x_j}\nu_i\phi_2 d\Gamma dt + \sum_{i,j=1}^{N_0}\int_\Sigma B_{ij}(z_2(t),t)\eta_{2_\varepsilon}\nu_j\frac{\partial \phi_2}{\partial x_j}d\Gamma dt$$
$$+\int_Q \eta_{2_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - B(t;z_2)\phi_2\Big)dxdt - \int_Q (b\eta_{1_\varepsilon} + d\eta_{2_\varepsilon})\phi_2 dxdt = 0.$$

Nous choisissons ϕ_i tel que $\phi_i|_\Sigma = 0$ et $\phi_i(0) = \phi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1,2$, puis nous faisons la somme des résultats pour obtenir

$$\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_\Sigma B_{ij}(z_1(t),t)\eta_{1_\varepsilon}\nu_j\frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}d\Gamma dt + \sum_{i,j=1}^{N_0}\int_\Sigma B_{ij}(z_2(t),t)\eta_{2_\varepsilon}\nu_j\frac{\partial \phi_2}{\partial x_j}d\Gamma dt +$$
$$\int_Q \eta_{1_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - B(t;z_1)\phi_1 - a\phi_1 - b\phi_2\Big)dxdt$$
$$+\int_Q \eta_{2_\varepsilon}\Big(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - B(t;z_2)\phi_2 - c\phi_1 - d\phi_2\Big)dxdt = 0.$$

Mais (3.55) implique que

$$\int_\Sigma \eta_{1_\varepsilon}\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu_{B_1}}d\Gamma dt + \int_\Sigma \eta_{2_\varepsilon}\frac{\partial \phi_2}{\partial \nu_{B_2}}d\Gamma dt = 0,$$

pour toute fonction ϕ_i telle que $\phi_i|_\Sigma = 0, \phi_i(0) = \phi_i(T) = 0$ dans Ω, $i = 1,2$ et nous concluons que $\eta_{i_\varepsilon}|_\Sigma = 0$, $i = 1,2$.

En résumé, nous avons prouvé que $(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ est la solution optimale de (3.49) ssi il existe une fonction $\eta_\varepsilon = (\eta_{1_\varepsilon}, \eta_{2_\varepsilon})$ telle que le triplet $(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$ vérifie le système d'optimalité suivant

$$k_\varepsilon = \eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega, \tag{3.58}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;z_1)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} = f + k_\varepsilon\chi_\omega + \varepsilon\eta_{1_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;z_2)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} = g + \varepsilon\eta_{2_\varepsilon} & \text{dans } Q, \\ \varphi_{1_\varepsilon} = \varphi_{2_\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(0) = u^0, \quad \varphi_{2_\varepsilon}(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_{1_\varepsilon}(T) = \varphi_{2_\varepsilon}(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\begin{cases} M(\eta_\varepsilon) &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ N(\eta_\varepsilon) &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \eta_{1_\varepsilon} = \eta_{2_\varepsilon} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{3.60}$$

Etape 3 : Nous commençons par établir des estimations. De même que dans l'Etape 3 de la Section 2.4 du chapitre précédent, nous obtenons

$$\|k_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leqslant C\|k_\theta\|_{L^2(G)}, \tag{3.61}$$

$$\left\|\frac{\partial \varphi_{1_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;\delta)\varphi_{1_\varepsilon} - a\varphi_{1_\varepsilon} - b\varphi_{2_\varepsilon} - (f + k_\varepsilon \chi_\omega)\right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|k_\theta\|_{L^2(G)}, \tag{3.62}$$

$$\left\|\frac{\partial \varphi_{2_\varepsilon}}{\partial t} - B(t;\delta)\varphi_{2_\varepsilon} - c\varphi_{1_\varepsilon} - d\varphi_{2_\varepsilon} - g\right\|_{L^2(Q)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|k_\theta\|_{L^2(G)}. \tag{3.63}$$

Les relations (3.62) et (3.63) et le fait que φ_ε soit solution de (3.59) entraînent que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))^2} \leqslant C. \tag{3.64}$$

En combinant (3.58) et (3.61), il vient

$$\|\eta_{1_\varepsilon}\chi_\omega\|_{L^2(G)} \leqslant C\|k_\theta\|_{L^2(G)}, \tag{3.65}$$

et puisque η_ε vérifie (3.60),

$$\|\eta_\varepsilon\|_W \leqslant C\|k_\theta\|_{L^2(G)}. \tag{3.66}$$

Selon (3.61), (3.64)-(3.66), nous pouvons extraire des sous-suites telles que

$$k_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{k} \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{3.67}$$
$$\varphi_{i_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\varphi}_i \text{ faiblement dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)),\ i = 1,2, \tag{3.68}$$
$$\eta_{1_\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\eta}_1 \text{ faiblement dans } L^2(G), \tag{3.69}$$
$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) \text{ faiblement dans } W. \tag{3.70}$$

L'injection de $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, $(\tilde{k}, (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2))$ est solution du problème de contrôlabilité à zéro (3.8)-(3.10).
Par la Proposition 3.4.3, il existe un unique contrôle $\hat{k}$ de norme minimale dans $L^2(G)$, tel que le problème (3.8)-(3.10) soit vrai. Donc

$$\frac{1}{2}\|\hat{k}\|^2_{L^2(G)} \leqslant \frac{1}{2}\|\tilde{k}\|^2_{L^2(G)}.$$

Soit maintenant $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)$ la solution de (3.9) correspondant à $\hat{k}$; alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial t} - B(t;z_1)\hat{\varphi}_1 - a\hat{\varphi}_1 - b\hat{\varphi}_2 &= f + \hat{k}\chi_\omega \text{ dans } Q, \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial t} - B(t;z_2)\hat{\varphi}_2 - c\hat{\varphi}_1 - d\hat{\varphi}_2 &= g \text{ dans } Q. \end{aligned}$$

$(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ étant la solution optimale de (3.49), on a

$$\frac{1}{2}\|k_\varepsilon\|^2_{L^2(G)} \leqslant J_\varepsilon(k_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(\hat{k}, \hat{\varphi}) = \frac{1}{2}\|\hat{k}\|^2_{L^2(G)}.$$

Mais d'après (3.67), nous pouvons également écrire

$$\frac{1}{2}\|\tilde{k}\|^2_{L^2(G)} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\|k_\varepsilon\|^2_{L^2(G)},$$

et en déduire que

$$\tilde{k} = \hat{k}. \tag{3.71}$$

D'où $\hat{k} = \tilde{\eta}_{1_\varepsilon}\chi_\omega$.
D'autre part, puisque η_ε vérifie (3.60), on a d'après (3.70),

$$\left\{\begin{array}{rcll} M(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ N(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{3.72}$$

■

Lemme 3.4.5. *Soit $s \in [2, +\infty[$. Supposons que $f, g \in L^s(0, T; L^s(\Omega))$ sont tels que $\theta f, \theta g \in L^2(Q)$, $f, g \in C^{\kappa,\kappa/2}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ et $u^0, v^0 \in C^{2+\kappa}(\overline{\Omega})$ vérifient les relations de compatibilité naturelles*

$$u^0 = v^0 = 0 \textit{ sur } \Gamma,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t), t)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, 0) \textit{ et } -\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t), t)\frac{\partial^2 v^0}{\partial x_i \partial x_j} = g(x, 0) \textit{ sur } \Gamma.$$

Alors pour tout $z = (z_1, z_2) \in Z \times Z$, le contrôle $\tilde{k}$ peut être choisi tel que $(\tilde{k}, (\tilde{u}, \tilde{v})) \in W$ et

$$\|(\tilde{k}, (\tilde{u}, \tilde{v}))\|_X \leqslant C(\|z\|_{Z\times Z})(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.73}$$

Preuve. D'après (3.71) et (3.45), on a

$$\|\tilde{k}\|_{L^2(G)} \leqslant C(\|z\|_{Z\times Z})(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Maintenant, nous allons utiliser une technique introduite dans [5] (voir également [6]), permettant à partir de $(\tilde{k}, (\tilde{u}, \tilde{v}))$, de construire un contrôle tel que la solution de (3.9) correspondant, vérifie non seulement (3.10) mais soit aussi un élément avec la bonne régularité. Nous procédons en deux étapes. Soit ω' un ouvert non vide tel que $\omega' \Subset \omega_c$ (ω_c donné par le Théorème 3.3.5).

Nous commençons par prouver la contrôlabilité à zéro du système linéarisé suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - B(t;z_1)u - au - bv &= f + k_1\chi_{\omega'} \quad \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - B(t;z_2)v - cu - dv &= g + k_2\chi_{\omega'} \quad \text{dans } Q, \\ u = v &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, \ v(0) = v^0 & \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.74}$$

Nous montrons qu'il existe deux contrôles $\tilde{k}_1\chi_{\omega'}, \tilde{k}_2\chi_{\omega'} \in L^2(Q)$ avec supp $\tilde{k}_1$, supp $\tilde{k}_2 \subset \overline{\omega}' \times [0,T]$, tels que la solution correspondant vérifie (3.10). Ce résultat de contrôlabilité est une conséquence de l'inégalité d'observabilité suivante

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (|\varphi_1(0)|^2 + |\varphi_2(0)|^2)dx + \int_Q \frac{1}{\theta^2}(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \\ &\quad \leqslant C\Big(\int_Q (|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt + \int_G (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)dxdt \Big), \end{aligned}$$

qui est valable pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$.

Puis nous éliminons k_2 et nous construisons un contrôle $k \in L^s(Q)$ ($s \in [2,\infty[$ étant arbitraire) qui donne la contrôlabilité à zéro du système (3.9), avec la solution associée (u,v) ayant la régularité exigée. Pour cela, nous procédons comme suit.

Soit $(\bar{u},\bar{v})$ la solution du système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} - B(t;z_1)\bar{u} - a\bar{u} - b\bar{v} &= f \quad \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} - B(t;z_2)\bar{v} - c\bar{u} - d\bar{v} &= g \quad \text{dans } Q, \\ \bar{u} = \bar{v} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \bar{u}(0) = u^0, \ \bar{v}(0) = v^0 & \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.75}$$

Alors en tenant compte du fait que $u^0, v^0 \in C^{2+\kappa}(\overline{\Omega})$ vérifient les relations de compatibilité naturelles, $(\bar{u},\bar{v})$ est une fonction appartenant à $(C^{\kappa,\kappa/2}(\overline{Q}))^2$ ([7] p. 220-221). Soit $\eta = \eta(t) \in C^\infty([0,T])$ avec $\eta \equiv 1$ au voisinage de $t = 0$ et $\eta \equiv 0$ au voisinage de $t = T$. Nous introduisons les changements de variables suivants

$$u = \mathring{u} + \eta(t)\bar{u} \text{ et } v = \mathring{v} + \eta(t)\bar{v}.$$

Alors un contrôle k résout le problème (3.9), (3.10) ssi k résout

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial t} - B(t;z_1)\mathring{u} - a\mathring{u} - b\mathring{v} &= (1-\eta(t))f + k\chi_\omega - \eta'(t)\bar{u} \quad \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \mathring{v}}{\partial t} - B(t;z_2)\mathring{v} - c\mathring{u} - d\mathring{v} &= (1-\eta(t))g - \eta'(t)\bar{v} \quad \text{dans } Q, \\ \mathring{u} = \mathring{v} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \mathring{u}(0) = \mathring{v}(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.76}$$

$$\mathring{u}(T) = \mathring{v}(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3.77}$$

Ainsi, il suffit d'obtenir un contrôle avec la régularité exigée qui résout (3.76). Soit $(\tilde{U}, \tilde{V})$ la solution du système (3.74) associée aux contrôles $\tilde{k}_1$ et $\tilde{k}_2$ qui donnent la contrôlabilité à zéro de (3.74). Nous pouvons écrire

$$\tilde{U} = \hat{U} + \eta(t)\bar{u} \text{ et } \tilde{V} = \hat{V} + \eta(t)\bar{v}$$

avec $(\bar{u}, \bar{v})$ solution du système (3.75) et $(\hat{U}, \hat{V})$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{U}}{\partial t} - B(t;z_1)\hat{U} - a\hat{U} - b\hat{V} &= (1-\eta(t))f + \tilde{k}_1\chi_{\omega'} - \eta'(t)\bar{u} \quad \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \hat{V}}{\partial t} - B(t;z_2)\hat{V} - c\hat{U} - d\hat{V} &= (1-\eta(t))g + \tilde{k}_2\chi_{\omega'} - \eta'(t)\bar{v} \quad \text{dans } Q, \\ \hat{U} = \hat{V} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \hat{U}(0) = \hat{V}(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

qui vérifie également

$$\hat{U}(T) = \hat{V}(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Puisque $\hat{U}(0) = \hat{V}(0) = 0$ dans Ω et que les membres de droite des EDP dans le système précédent sont des éléments de $L^s(0,T;L^s(\Omega \setminus \overline{\omega}'))$, $s \in [2, +\infty[$ (à cause des termes $\tilde{k}_1\chi_{\omega'}$ et $\tilde{k}_2\chi_{\omega'}$), on a que pour tout ouvert ω'' tel que $\omega' \Subset \omega'' \Subset \omega$, $(\hat{U}, \hat{V})$ est une fonction régulière dans $]0,T[\times\Omega \setminus \overline{\omega}''$ ([6]).

Soit maintenant $\xi = \xi(x)$ tel que

$$\xi \in C^\infty(\Omega), \quad \text{supp } \xi \subset \omega'', \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \xi \equiv 1 \text{ dans } \omega',$$

avec $\omega' \Subset \omega'' \Subset \omega$. Posons

$$\begin{aligned} U^* &= (1-\xi)\hat{U} + \frac{1}{c}\Big(-\xi(1-\eta(t))g + \xi\eta'(t)\bar{v} + \hat{V}B(t;z_2)\xi \\ &\quad + 2\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_j}\Big) \\ V^* &= (1-\xi)\hat{V}. \end{aligned}$$

et

$$k\chi_\omega = -\xi(1-\eta(t))f + (1-\xi)\tilde{k}_1\chi_{\omega'} + \xi\eta'(t)\bar{u} + \Big(\frac{\partial}{\partial t} - B(t;z_1) - a\Big)\times$$
$$\Big[\frac{1}{c}\Big(-\xi(1-\eta(t))g + \xi\eta'(t)\bar{v} + \hat{V}B(t;z_2)\xi + 2\sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{V}}{\partial x_j}\Big)\Big].$$

En choisissant $s > N_0+2$, on a d'après [6] (voir aussi [30]) que

$$(U^*,V^*) \in \Big(C^{1+\kappa,\frac{1+\kappa}{2}}(\overline{\Omega\setminus\omega"}\times[0,T])\Big)^2.$$

Par ailleurs, $k \in \Big(C^{\kappa,\kappa/2}(\overline{\omega}\times[0,T])\Big)^2$. D'autre part, k et (U^*,V^*) résolvent (3.76), ainsi k et (u,v) résolvent le problème (3.9), (3.10). ∎

3.5 Contrôlabilité à zéro du système non local

Cette section est consacrée à la preuve du résultat principal de ce travail qui est une conséquence des résultats de la section précédente, ainsi que du Théorème de Kakutani.

Théorème 3.5.1. *Soient $A(t)(.)$ défini par (3.2) avec les fonctions B_{ij} vérifiant les hypothèses (3.3)-(3.6), et θ la fonction définie par (3.21). Supposons (3.18). Alors pour tous $f,g \in L^2(Q)$ avec $\theta f, \theta g \in L^2(Q)$ et $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$, le système non linéaire (3.1) est localement contrôlable à zéro à tout temps $T>0$.*

Preuve. Soient $R>0$ et B_R la boule fermée de Z de centre 0 et de rayon R. Nous rappelons que

$$Z = \Big\{ z \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) : \frac{\partial z}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\Big\}.$$

Pour tout $z=(z_1,z_2) \in Z\times Z$, considérons le problème de contrôlabilité à zéro associé au système linéaire (3.9). D'après le Théorème 3.4.4, il existe un unique contrôle $\tilde{k}$ de norme minimale dans $L^2(G)$ solution du problème de contrôlabilité à zéro associé au système linéaire (3.9). De plus, d'après le Lemme 3.4.5, le contrôle $\tilde{k}$ peut être choisi tel que $(\tilde{k},(\tilde{u},\tilde{v}))$ soit un élément de X vérifiant (3.73). Par conséquent,

$$\|(\tilde{k},(\tilde{u},\tilde{v}))\|_X \leqslant C(R)(\|\theta f\|_{L^2(Q)} + \|\theta g\|_{L^2(Q)} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.78)$$

Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} \Lambda: & Z\times Z & \to & Z\times Z \\ & z & \mapsto & \Lambda(z) = (\tilde{u},\tilde{v}). \end{array}$$

Pour tout $R > 0$, nous allons appliquer le Théorème de point fixe de Kakutani.
Premièrement, quel que soit $z \in B_R \times B_R$, l'application Λ est bien définie, c'est une conséquence du Théorème 3.4.4.
Ensuite pour tout $z \in B_R \times B_R$, on a que $(\tilde{k}, (\tilde{u}, \tilde{v}))$ vérifie l'estimation (3.78). Nous en déduisons que pour tout $z \in B_R \times B_R$, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ est borné dans $(C^{1+\kappa,(1+\kappa)/2}(\overline{Q}))^2$, $\kappa \in]0,1[$. D'où $\Lambda(z)$ est uniformément borné dans l'espace de Hölder $(C^{1+\kappa,(1+\kappa)/2}(\overline{Q}))^2$. L'injection de $C^{1+\kappa,(1+\kappa)/2}(\overline{Q})$ étant compacte dans Z, il existe un ensemble compact $K \subset Z \times Z$ tel que $\Lambda(z) \in K$, $\forall z \in B_R \times B_R$. De plus, si $\|\theta f\|_{L^2(Q)}$, $\|\theta g\|_{L^2(Q)}$, $\|u^0\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|v^0\|_{L^2(\Omega)}$ sont suffisamment petits, il existe $R > 0$ tel que $\Lambda(B_R \times B_R) \in B_R \times B_R$.
Enfin, nous montrons que le graphe de Λ est fermé. Soient $z_n = (z_{1_n}, z_{2_n}) \in Z \times Z$ et $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) = \Lambda(z_n)$. Supposons que $z_n \to z = (z_1, z_2)$ fortement dans $Z \times Z$ et que $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \to (\tilde{u}, \tilde{v})$ fortement dans $Z \times Z$. Nous devons montrer que $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda(z)$.

On a

$$\left\{\begin{array}{rll} \dfrac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} - B(t; z_{1_n})\tilde{u}_n - a\tilde{u}_n - b\tilde{v}_n & = f + k_n \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} - B(t; z_{2_n})\tilde{v}_n - c\tilde{u}_n - d\tilde{v}_n & = g & \text{dans } Q, \\ \tilde{u}_n = \tilde{v}_n & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{u}_n(0) = u^0, & \tilde{v}_n(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.79}$$

et par hypothèse il existe $L > 0$ tel que

$$|B_{ij}(z_{1_n}(t), t) - B_{ij}(z_1(t), t)| \leqslant L\|z_{1_n}(t) - z_1(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Après intégration entre 0 et T, il vient

$$\int_0^T |B_{ij}(z_{1_n}(t), t) - B_{ij}(z_1(t), t)|dt \leqslant L\|z_{1_n} - z_1\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant L\|z_{1_n} - z_1\|_Z.$$

Donc

$$\sup_{[0,T]} |B_{ij}(z_{1_n}(t), t) - B_{ij}(z_1(t), t)| \leqslant \frac{L}{T}\|z_{1_n} - z_1\|_Z \to 0,$$

d'où

$$B_{ij}(z_{1_n}(t), t) \to B_{ij}(z_1(t), t) \text{ dans } L^\infty(0, T).$$

De même, on a

$$B_{ij}(z_{2_n}(t), t) \to B_{ij}(z_2(t), t) \text{ dans } L^\infty(0, T).$$

Soit $\phi_i \in \mathscr{D}(Q)$, $i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} - B(t; z_{1_n})\tilde{u}_n - a\tilde{u}_n - b\tilde{v}_n, \phi_1 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \\
&\quad \left\langle \tilde{u}_n, -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - B(t; z_{1_n})\phi_1 - a\phi_1 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle \tilde{v}_n, b\phi_1 \rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\
&\left\langle \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} - B(t; z_{2_n})\tilde{v}_n - c\tilde{u}_n - d\tilde{v}_n, \phi_2 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} = \\
&\quad \left\langle \tilde{v}_n, -\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - B(t; z_{2_n})\phi_2 - d\phi_2 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle \tilde{u}_n, c\phi_2 \rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans les relations précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} - B(t; z_{1_n})\tilde{u}_n - a\tilde{u}_n - b\tilde{v}_n, \phi_1 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\
&\to \left\langle \tilde{u}, -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - B(t; z_1)\phi_1 - a\phi_1 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle \tilde{v}, b\phi_1 \rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\
&= \left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - B(t; z_1)\tilde{u} - a\tilde{u} - b\tilde{v}, \phi_1 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}, \\
&\left\langle \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} - B(t; z_{2_n})\tilde{v}_n - c\tilde{u}_n - d\tilde{v}_n, \phi_2 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\
&\to \left\langle \tilde{v}, -\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - B(t; z_2)\phi_2 - d\phi_2 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} - \langle \tilde{u}, c\phi_2 \rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)} \\
&= \left\langle \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - B(t; z_2)\tilde{v} - c\tilde{u} - d\tilde{v}, \phi_2 \right\rangle_{\mathscr{D}'(Q),\mathscr{D}(Q)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} - B(t; z_{1_n})\tilde{u}_n - a\tilde{u}_n - b\tilde{v}_n \to \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - B(t; z_1)\tilde{u} - a\tilde{u} - b\tilde{v} \text{ dans } \mathscr{D}'(Q), \\
&\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} - B(t; z_{2_n})\tilde{v}_n - c\tilde{u}_n - d\tilde{v}_n \to \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - B(t; z_2)\tilde{v} - c\tilde{u} - d\tilde{v} \text{ dans } \mathscr{D}'(Q).
\end{aligned}$$

Puis en passant à la limite $n \to +\infty$ dans (3.79) ainsi que dans les estimations vérifiées par $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$, nous obtenons que $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Lambda(z)$. ∎

Chapitre 4

Perspectives

Dans un premier temps, nous envisageons d'obtenir des résultats conçernant la contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle, associée au système en cascade (3.1) de deux équations paraboliques non locales. En effet, cela reviendrait à étudier la contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle, pour le système linéarisé, puis à combiner ces résultats avec un théorème de point fixe. Ce travail pour l'opérateur non local, serait un prolongement du Chapitre 2.

L'ensemble de ce travail ouvre de nouvelles perspectives de recherche.
La première est de trouver un contrôle $v \in L^2(G)$ tel que quels que soient $a_0 \in L^\infty(Q)$, $f \in L^2(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, la solution de

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + a_0 y = f + v\chi_\omega \text{ dans } Q, \tag{4.1a}$$

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{4.1b}$$

$$y(x,0) = y^0(x) \text{ dans } \Omega, \tag{4.1c}$$

vérifie

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.2}$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \tag{4.3}$$

où Σ_1 est une partie non vide de la frontière Σ du cylindre Q.
La deuxième perspective de recherche est l'étude de la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état pour le système en cascade (2.6) de deux équations de la chaleur couplées.
Enfin, la troisième perspective qu'il serait naturel d'exploiter ici est celle de la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état, associée au système (3.1) en cascade de deux équations paraboliques non locales.

Annexes

Annexe A

Existence et unicité de solution de l'équation de la chaleur

Nous faisons la démonstration de l'existence de solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y & = & f & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(x,0) & = & y^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{A.1}$$

en trois étapes.

Etape 1 : Formulation variationnelle

Nous considérons la fonction $y(x,t)$ comme une fonction du temps, à valeur dans un espace fonctionnel en x, et nous prenons comme fonctions tests des fonctions qui dépendent seulement de la variable x. Supposons que

$$\begin{array}{rrcl} y & : [0,T] & \rightarrow & H_0^1(\Omega) \\ & t & \mapsto & [y(t)](x) = y(x,t) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rrcl} f & : [0,T] & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ & t & \mapsto & [f(t)](x) = f(x,t). \end{array}$$

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; nous multiplions l'EDP dans (A.1) par φ et nous intégrons par parties dans Ω, nous trouvons

$$\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial t}\varphi dx + \int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \quad \forall t \in [0,T].$$

La formulation variationnelle s'écrit donc : trouver $y \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ tel que $y(0,.) = y^0$ et

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt}\int_\Omega y\varphi dx + \int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx. \tag{A.2}$$

La dérivée en temps dans (A.2) est à comprendre au sens des distributions.

Etape 2 : Résolution du problème sous forme variationnelle

Nous utilisons une méthode de Galerkin pour résoudre le problème. $H_0^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert séparable, soit $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. Soit $W_n = \text{Vect }(w_1, \ldots, w_n)$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{w_1, \ldots, w_n\}$; on a en particulier que Vect $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $\{x_i^0\}_{i=1}^{\infty}$ la suite de nombres tels que

$$x_i^0 = (y^0, w_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0 w_i \to y^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{A.3}$$

La relation (A.3) découle de la densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous cherchons une fonction $y_n : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ de la forme

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) w_i \tag{A.4}$$

où les coefficients $x_i(t)$ sont tels que

$$\begin{cases} x_i(0) = x_i^0, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{d}{dt}(y_n, w_i) + \displaystyle\int_\Omega \nabla y_n \nabla w_i dx \quad = \displaystyle\int_\Omega f w_i dx, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{A.5}$$

Ainsi nous cherchons une fonction y_n de la forme (A.4), qui est solution de la "projection" (A.5) du problème (A.2) sur W_n.

Nous multiplions chaque équation de (A.5) par $x_i(t)$, puis nous sommons sur les i allant de 1 à n. En utilisant (A.4), nous trouvons

$$\left(\frac{dy_n}{dt}, y_n\right) + \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx = \int_\Omega f y_n dx \text{ pour presque tout } t \in [0, T],$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx = \int_\Omega f y_n dx \text{ pour presque tout } t.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de la relation précédente, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla y_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|y_n\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour presque tout } t.$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}\|y_n\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla y_n\|_{L^2(\Omega)},$$

K étant la constante de Poincaré. Il vient pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}\|y_n\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}\Big(C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla y_n\|^2_{L^2(\Omega)}\Big),$$

ce qui implique que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{C}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{A.6}$$

En intégrant (A.6) entre 0 et T, on a en particulier

$$\|y_n\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leqslant C\|f\|_{L^2(Q)} \text{ pour presque tout } t \in [0,T]. \tag{A.7}$$

Puis en intégrant (A.6) entre 0 et t, on a pour presque tout t,

$$\|y_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|y_n\|^2_{H^1_0(\Omega)}dt \leqslant C\int_0^t \|f\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \|y_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier

$$\|y_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in[0,T]} \|y_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(Q)} + \|y_n(0)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{A.8}$$

D'après (A.3), $y_n(0) = \sum_{i=1}^n x_i^0 w_i$ est borné dans $L^2(\Omega)$, nous en déduisons que la suite (y_n) est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$.
Soit $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ avec $\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant 1$. Ecrivons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, où $\varphi_1 \in W_n$ et $(\varphi_2, w_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors $\|\varphi_1\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant 1$. Il résulte de l'EDP dans (A.5) que pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\Big(\frac{dy_n}{dt}, \varphi_1\Big) + \int_\Omega \nabla y_n \nabla\varphi_1 dx = \int_\Omega f\varphi_1 dx.$$

La relation (A.4) implique que

$$\Big\langle\frac{dy_n}{dt}, \varphi\Big\rangle = \Big(\frac{dy_n}{dt}, \varphi\Big) = \Big(\frac{dy_n}{dt}, \varphi_1\Big) = \int_\Omega f\varphi_1 dx - \int_\Omega \nabla y_n\nabla\varphi_1 dx.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité de Poincaré,

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle\frac{dy_n}{dt}, \varphi\Big\rangle\Big| &\leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla y_n\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant K\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_1\|_{H^1_0(\Omega)} + \|y_n\|_{H^1_0(\Omega)}\|\varphi_1\|_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leqslant (K\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|y_n\|_{H^1_0(\Omega)})\|\varphi_1\|_{H^1_0(\Omega)}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\left\|\frac{dy_n}{dt}\right\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(\Omega)\\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\leqslant 1}} \left|\left\langle \frac{dy_n}{dt},\varphi\right\rangle\right| \leqslant K\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|y_n\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où d'après (A.7),

$$\begin{aligned} \left\|\frac{dy_n}{dt}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \int_0^T \left\|\frac{dy_n}{dt}\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \\ &\leqslant 2\Big(C\|f\|^2_{L^2(Q))} + \|y_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\Big) \\ \left\|\frac{dy_n}{dt}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leqslant C\|f\|^2_{L^2(Q)}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Finalement, la suite $\left(\dfrac{dy_n}{dt}\right)$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
Les relations (A.7)-(A.9) permettent d'extraire des sous-suites des suites (y_n) et $\left(\dfrac{dy_n}{dt}\right)$ qui convergent faiblement respectivement vers des fonctions $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\alpha \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, i.e.

$$\begin{aligned} y_n &\rightharpoonup y \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad (A.10)\\ y_n &\rightharpoonup y \text{ faible * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ \frac{dy_n}{dt} &\rightharpoonup \alpha \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Soit $\phi \in \mathscr{D}(0,T)$, on a

$$\left\langle \frac{dy_n}{dt},\phi\right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)} = -\left\langle y_n,\frac{d\phi}{dt}\right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)}.$$

En passant à la limite $n\to+\infty$, nous obtenons

$$\langle \alpha,\phi\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)} = -\left\langle y,\frac{d\phi}{dt}\right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)} = \left\langle \frac{dy}{dt},\phi\right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)}.$$

Donc $\alpha = \dfrac{dy}{dt}$ dans $\mathscr{D}'(0,T)$ d'où

$$\frac{dy_n}{dt} \rightharpoonup \frac{dy}{dt} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{A.11}$$

Soit $W(0,T) = \left\{u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \middle| \dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\}$. L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et celle de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ étant respectivement compacte et continue, le lemme d'Aubin-Lions implique que l'injection de

$W(0,T)$ dans $L^2(Q)$ est compacte. La suite $(y_n)_n$ étant bornée dans $W(0,T)$, nous pouvons extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(Q)$. Soit $\phi \in \mathscr{D}(0,T)$. Nous multiplions l'EDP dans (A.5) par ϕ, puis nous intégrons entre 0 et T, il vient pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(y_n, w_i)\phi dt + \int_Q \nabla y_n \nabla w_i \phi dxdt = \int_Q f w_i \phi dxdt.$$

Par densité, nous pouvons écrire alors que pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(y_n, \varphi)\phi dt + \int_Q \nabla y_n \nabla \varphi \phi dxdt = \int_Q f \varphi \phi dxdt. \tag{A.12}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans cette relation et en utilisant (A.11) et (A.10), on obtient

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(y, \varphi)\phi dt + \int_Q \nabla y \nabla \varphi \phi dxdt = \int_Q f \varphi \phi dxdt.$$

D'où (A.2).
De plus, $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, c'est une conséquence de l'inclusion $W(0,T) \subset C([0,T]; L^2(\Omega))$.
Enfin, comme pour $\phi \in \mathscr{D}(0,T)$

$$(y_n(t), \phi) - (y_n(0), \phi) = \int_0^t \Big\langle \frac{\partial y_n}{\partial t}, \phi \Big\rangle ds \text{ pour presque tout } t,$$

nous en déduisons par passage à la limite, en utilisant (A.3),

$$(y(t), \phi) - (y^0, \phi) = \int_0^t \Big\langle \frac{\partial y}{\partial t}, \phi \Big\rangle ds \text{ pour presque tout } t,$$

et par conséquent,

$$(y(t), \phi) - (y^0, \phi) = (y(t), \phi) - (y(0), \varphi) \text{ pour presque tout } t.$$

D'où $y(0) = y^0$ dans Ω.

Etape 3 : Unicité

Le problème (A.1) étant linéaire, prouver l'unicité revient à montrer que si $y^0 = f = 0$, alors la solution de (A.2) est $y = 0$. Pour cela, nous réécrivons la formulation variationnelle sous la forme

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt}\int_\Omega y\varphi dx + \int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx = 0.$$

En fait, nous pouvons choisir $\varphi = y$ dans cette formule. Ainsi

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |y|^2 dx + \int_\Omega |\nabla y|^2 dx = 0,$$

ce qui permet de conclure que $y = 0$ puisque $y \in H_0^1(\Omega)$.

Annexe B

Existence de solution pour un système d'équations linéaires

Nous voulons démontrer l'existence de solution au problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + au + bv & = f & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + cu + dv & = g & \text{dans } Q, \\ u = v & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, & v(0) = v^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

où $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$, $f, g \in L^2(Q)$ et $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$. Nous procédons en quatre étapes.

Etape 1 : Méthode

Considérons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + au & = f - bv & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta \xi + d\xi & = g - cu & \text{dans } Q, \\ u = \xi & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u^0, & \xi(0) = v^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{B.2}$$

Fixons v dans $L^2(Q)$. Nous montrons tout d'abord que la première équation de (B.2) admet une unique solution u dans $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ et que pour u fixé dans $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, la deuxième équation de (B.2) possède également une unique solution ξ dans $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. Nous en déduisons que le système (B.2) a une unique solution (u, ξ). Ainsi nous définissons une application

$$\begin{array}{rrcl} S & : L^2(Q) & \rightarrow & L^2(Q) \\ & v & \mapsto & \xi \end{array}$$

où (u, ξ) est la solution de (B.2).
Nous prouvons que S est une contraction. Puis nous appliquons le Théorème de point fixe de Banach et nous déduisons l'existence d'un point fixe v ; le couple (u, v) correspondant n'est autre que la solution de (B.1). Nous démontrons l'existence en quatre étapes.
Etape 2 : Résolution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + au &= h \quad \text{dans } Q, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u(0) &= u^0 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{B.3}$$

où $h = f - bv$. Supposons que

$$\begin{aligned} u \ : [0,T] &\to H_0^1(\Omega) \\ t &\mapsto [u(t)](x) = u(x,t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \ : [0,T] &\to L^\infty(\Omega) \\ t &\mapsto [a(t)](x) = a(x,t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h \ : [0,T] &\to L^2(\Omega) \\ t &\mapsto [h(t)](x) = h(x,t). \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; nous multiplions l'EDP dans (B.3) par φ et nous intégrons par parties dans Ω, nous trouvons

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega a u \varphi dx = \int_\Omega h\varphi dx \quad \forall t \in [0,T]. \tag{B.4}$$

Nous allons résoudre (B.4) par la méthode de Galerkin.
Soit $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. Soit $W_n = \{w_1, \ldots, w_n\}$; on a en particulier que Vect $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $\{x_i^0\}_{i=1}^\infty$ la suite de nombres tels que

$$x_i^0 = (u^0, w_i),$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 w_i \to u^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{B.5}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on cherche une fonction $u_n : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ de la forme

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) w_i \tag{B.6}$$

où les coefficients $x_i(t)$ sont tels que

$$\left\{ \begin{aligned} & x_i(0) = x_i^0, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \\ & \frac{d}{dt}(u_n, w_i) + \int_\Omega \nabla u_n \nabla w_i dx + \int_\Omega a u_n w_i dx = \int_\Omega h w_i dx, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \right. \tag{B.7}$$

Nous multiplions chaque équation de (B.7) par $x_i(t)$, puis nous sommons sur les i allant de 1 à n. En utilisant (B.6), nous trouvons

$$\Big(\frac{du_n}{dt}, u_n\Big)+\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx+\int_Q a|u_n|^2 dx = \int_\Omega h u_n dx \text{ pour presque tout } t \in [0,T],$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega h u_n dx - \int_\Omega a|u_n|^2 dx \text{ pour presque tout } t.$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré au second membre de la relation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \|h\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant (K\|h\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} + K^2\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

pour presque tout t ; K étant la constante de Poincaré. Or d'après l'inégalité de Young,

$$K\|h\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}(K^2\|h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

il vient pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + (\frac{1}{2} - K^2\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{K^2}{2}\|h\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui implique que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + (\frac{1}{2} - K^2\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{K^2}{2}\|h\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{B.8}$$

En choisissant $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{2K^2}$ puis en intégrant (B.8) entre 0 et T, on a en particulier

$$\|u_n\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leqslant C\|h\|^2_{L^2(Q)} \text{ pour presque tout } t \in [0,T]. \tag{B.9}$$

Maintenant en intégrant (B.8) entre 0 et t, on a pour presque tout t,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\frac{1}{2} - K^2\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_0^t \|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt \leqslant \frac{K^2}{2}\int_0^t \|h\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ + \frac{1}{2}\|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En particulier

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|h\|_{L^2(Q)} + \|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{B.10}$$

D'après (B.5), $u_n(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 w_i$ est borné dans $L^2(\Omega)$, nous en déduisons que la suite (u_n) est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.
Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1$. Ecrivons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, où $\varphi_1 \in W_n$ et $(\varphi_2, w_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors $\|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1$. Il résulte de l'EDP dans (B.7) que pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\Big(\frac{du_n}{dt}, \varphi_1\Big) + \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx + \int_\Omega a u_n \varphi_1 dx = \int_\Omega h \varphi_1 dx.$$

La relation (B.6) implique que

$$\Big\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \Big\rangle = \Big(\frac{du_n}{dt}, \varphi\Big) = \Big(\frac{du_n}{dt}, \varphi_1\Big) = \int_\Omega h\varphi_1 dx - \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx - \int_\Omega a u_n \varphi_1 dx.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\Big|\Big\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \Big\rangle\Big| &\leqslant \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant K \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + K^2 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leqslant C(\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}) \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Big\|\frac{du_n}{dt}\Big\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1}} \Big|\Big\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \Big\rangle\Big| \leqslant C(\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}).$$

D'où d'après (B.9),

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{du_n}{dt}\Big\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \int_0^T \Big\|\frac{du_n}{dt}\Big\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \\
&\leqslant C\Big(\|h\|^2_{L^2(Q))} + \|u_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\Big) \\
\Big\|\frac{du_n}{dt}\Big\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leqslant C\|h\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Finalement, la suite $\Big(\frac{du_n}{dt}\Big)$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
Les relations (B.9)-(B.11) permettent d'extraire des sous-suites des suites (u_n) et $\Big(\frac{du_n}{dt}\Big)$ qui convergent faiblement respectivement vers des fonctions $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, i.e.

$$\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad \text{(B.12)} \\
u_n &\rightharpoonup u \text{ faible * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}$$

$$\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{B.13}$$

L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et celle de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ étant respectivement compacte et continue, le lemme d'Aubin-Lions implique que l'injection de $W(0,T)$ dans $L^2(Q)$ est compacte. La suite $(u_n)_n$ étant bornée dans $W(0,T)$, nous pouvons extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(Q)$. Soit $\phi \in \mathscr{D}(0,T)$. Nous multiplions l'EDP dans (B.7) par ϕ, puis nous intégrons entre 0 et T, il vient pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_n, w_i)\phi dt + \int_Q \nabla u_n \nabla w_i \phi dxdt + \int_Q a u_n w_i \phi dxdt = \int_Q h w_i \phi dxdt.$$

Par densité, on a pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_n, \varphi)\phi dt + \int_Q \nabla u_n \nabla \varphi \phi dxdt + \int_Q a u_n \varphi \phi dxdt = \int_Q h \varphi \phi dxdt. \tag{B.14}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans cette relation et en utilisant (B.13) et (B.12), nous obtenons

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u, \varphi)\phi dt + \int_Q \nabla u \nabla \varphi \phi dxdt + \int_Q a u \varphi \phi dxdt = \int_Q h \varphi \phi dxdt.$$

D'où (B.4). Nous montrons que $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ et $u(0) = u^0$ dans Ω.

Etape 3 : Résolution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta \xi + d\xi &= g - cu && \text{dans } Q, \\ \xi &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ \xi(0) &= v^0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Fixons u dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, alors $u \in L^2(Q)$. En supposant que $\|d\|_{L^\infty(\Omega)}$ est une quantité suffisamment petite, nous montrons comme précédemment que le système (B.15) possède une unique solution ξ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

Etape 4 : Application du Théorème de point fixe de Banach

Nous démontrons que S est une contraction. Soient $v_1, v_2 \in L^2(Q)$ et $\xi_1, \xi_2 \in L^2(Q)$ tels que $S(v_1) = \xi_1$ et $S(v_2) = \xi_2$. Alors (u_1, ξ_1) et (u_2, ξ_2) sont les solutions respectives des systèmes suivants

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 + a u_1 &= f - b v_1 && \text{dans } Q, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \Delta \xi_1 + d\xi_1 &= g - c u_1 && \text{dans } Q, \\ u_1 = \xi_1 &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ u_1(0) = u^0, \quad \xi_1(0) &= v^0 && \text{dans } \Omega, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 + a u_2 &= f - b v_2 & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial t} - \Delta \xi_2 + d\xi_2 &= g - c u_2 & \text{dans } Q, \\ u_2 = \xi_2 &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_2(0) = u^0, & \xi_2(0) = v^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En faisant la différence de ces deux systèmes, nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} - \Delta(u_1 - u_2) + a(u_1 - u_2) &= -b(v_1 - v_2) & \text{dans } Q, \\ \dfrac{\partial (\xi_1 - \xi_2)}{\partial t} - \Delta(\xi_1 - \xi_2) + d(\xi_1 - \xi_2) &= -c(u_1 - u_2) & \text{dans } Q, \\ u_1 - u_2 = \xi_1 - \xi_2 &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ (u_1 - u_2)(0) = 0, & (\xi_1 - \xi_2)(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous multiplions les EDP dans ce dernier système respectivement par $u_1 - u_2$ et $\xi_1 - \xi_2$, et nous intégrons dans Q, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}\|(u_1 - u_2)(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(Q)} + \int_Q a|u_1 - u_2|^2 dxdt$$
$$= -\int_Q b(v_1 - v_2)(u_1 - u_2) dxdt$$
$$\frac{1}{2}\|(\xi_1 - \xi_2)(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(Q)} + \int_Q d|\xi_1 - \xi_2|^2 dxdt$$
$$= -\int_Q c(u_1 - u_2)(\xi_1 - \xi_2) dxdt.$$

Il en résulte que

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(Q)} \leqslant -\int_Q b(v_1 - v_2)(u_1 - u_2) dxdt - \int_Q a|u_1 - u_2|^2 dxdt$$
$$\|\nabla(\xi_1 - \xi_2)\|^2_{L^2(Q)} \leqslant -\int_Q c(u_1 - u_2)(\xi_1 - \xi_2) dxdt - \int_Q d|\xi_1 - \xi_2|^2 dxdt.$$

Puis nous appliquons l'inégalité de Poincaré au membre de gauche et l'inégalité de Cauchy-Schwarz au membre de droite,

$$\frac{1}{K}\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(Q)} \leqslant \|b\|_{L^\infty(Q)}\|v_1 - v_2\|_{L^2(Q)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)} + \|a\|_{L^\infty(Q)}\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(Q)}$$
$$\frac{1}{K}\|\xi_1 - \xi_2\|^2_{L^2(Q)} \leqslant \|c\|_{L^\infty(Q)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^2(Q)} + \|d\|_{L^\infty(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|^2_{L^2(Q)}.$$

Donc

$$(\frac{1}{K} - \|a\|_{L^\infty(Q)})\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(Q)} \leqslant \|b\|_{L^\infty(Q)}\|v_1 - v_2\|_{L^2(Q)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)}$$
$$(\frac{1}{K} - \|d\|_{L^\infty(Q)})\|\xi_1 - \xi_2\|^2_{L^2(Q)} \leqslant \|c\|_{L^\infty(Q)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^2(Q)},$$

d'où

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)} \leqslant \frac{\|b\|_{L^\infty(Q)}}{1/K - \|a\|_{L^\infty(Q)}} \|v_1 - v_2\|_{L^2(Q)}$$
$$\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^2(Q)} \leqslant \frac{\|c\|_{L^\infty(Q)}}{1/K - \|d\|_{L^\infty(Q)}} \|u_1 - u_2\|_{L^2(Q)}.$$

Finalement,

$$\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^2(Q)} \leqslant \frac{\|c\|_{L^\infty(Q)}}{1/K - \|d\|_{L^\infty(Q)}} \frac{\|b\|_{L^\infty(Q)}}{1/K - \|a\|_{L^\infty(Q)}} \|v_1 - v_2\|_{L^2(Q)}.$$

Nous en déduisons que si $\|c\|_{L^\infty(Q)}\|b\|_{L^\infty(Q)} < (1/K - \|d\|_{L^\infty(Q)})(1/K - \|a\|_{L^\infty(Q)})$, alors S est une contraction de $L^2(Q)$ dans $L^2(Q)$.

Soit v le point fixe de S, alors (u, v) où u est solution de (B.3), n'est autre que la solution de (B.1).

Annexe C

Existence de solution au problème non local

Nous démontrons que le système ci-dessous possède une solution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a(l(u))\Delta u & = f & \text{dans } Q, \\ u(x,t) & = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(x,0) & = u^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{C.1}$$

où

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \text{ est une fonction continue,} \tag{C.2}$$

l est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$, $f = f(x,t)$ et u^0 étant donnés. Supposons qu'il existe des constantes $m, M > 0$ telles que

$$m \leqslant a(\xi) \leqslant M \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{C.3}$$

et que pour $g \in L^2(\Omega)$

$$l(u) = \int_\Omega g(x)u(x)dx. \tag{C.4}$$

Soit $u = u(x,t)$ une solution régulière du problème (C.1). Nous allons considérer u non pas comme une fonction de x et de t, mais plutôt comme une application $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ de t à valeurs dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$[u(t)](x) = u(x,t)(x \in \Omega, 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Revenant au problème (C.1), nous définissons de manière similaire $f : [0,T] \to L^2(\Omega)$ par

$$[f(t)](x) = f(x,t)(x \in \Omega, 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; nous multiplions l'EDP dans (C.1) par φ puis nous intégrons par parties dans Ω. Nous trouvons

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dx + a(l(u)) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx,$$

pour chaque $t \in [0,T]$.

Nous voulons résoudre la formulation faible du problème (C.1). Alors nous pouvons montrer le

Théorème C.0.2. *Soient $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Alors sous les hypothèses (C.2)-(C.4), il existe une solution u telle que*

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \tag{C.5a}$$

$$u(0) = u^0, \tag{C.5b}$$

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi) + a(l(u)) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \ \textit{dans}\ \mathscr{D}'(0,T), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{C.5c}$$

Preuve. La preuve sera divisée en trois étapes.
Etape 1 : Approximations de Galerkin
Soit $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. On a en particulier que l'espace vectoriel engendré par les $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $\{x_i^0\}_{i=1}^\infty$ la suite de nombres tels que

$$x_i^0 = (w_i, u^0),$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 w_i \to u^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{C.6}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous cherchons une fonction $u_n : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ de la forme

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) w_i \tag{C.7}$$

où les coefficients $x_i(t)$ sont tels que

$$\begin{cases} x_i(0) = x_i^0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \dfrac{d}{dt}(u_n, w_i) + a(l(u_n)) \displaystyle\int_\Omega \nabla u_n \nabla w_i dx \ = \langle f, w_i \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{C.8}$$

Ainsi nous cherchons une fonction u_n de la forme (C.7), qui est solution de la "projection" (C.8) du problème (C.1) sur le sous-espace de dimension finie engendré par les $\{w_i\}_{i=1}^n$.
Etape 2 : Inégalités d'énergie

Nous multiplions chaque équation de (C.8) par $x_i(t)$, puis nous sommons sur les i allant de 1 à n et nous trouvons

$$\left(\frac{du_n}{dt}, u_n\right) + a(l(u_n)) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \langle f, u_n \rangle \text{ pour presque tout } t \in [0, T],$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + a(l(u_n)) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \langle f, u_n \rangle \text{ pour presque tout } t.$$

En utilisant l'hypothèse (C.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + m \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leqslant \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \text{ pour presque tout } t.$$

En appliquant au second membre l'inégalité de Young

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2m}\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{m}{2}\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

il vient pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2m}\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{C.9}$$

D'où en intégrant entre 0 et t, on a pour presque tout t

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\int_0^t \|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt \leqslant \frac{1}{2m}\int_0^t \|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t \in [0,T]} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque d'après (C.6), $u_n(0)$ est borné dans $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, nous en déduisons qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C.$$

Nous tirons également de (C.9) que

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leqslant \frac{1}{m}\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}. \tag{C.10}$$

Soit $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ avec $\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant 1$. Ecrivons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, où $\varphi_1 \in \text{vect}\{w_i\}_{i=1}^n$ et $(\varphi_2, w_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $\|\varphi_1\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant 1$. Il résulte de l'EDP dans (C.8) que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\left(\frac{du_n}{dt}, \varphi_1\right) + a(l(u_n)) \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx = \langle f, \varphi_1 \rangle.$$

La relation (C.7) implique que

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \right\rangle = \left(\frac{du_n}{dt}, \varphi \right) = \left(\frac{du_n}{dt}, \varphi_1 \right) = \langle f, \varphi_1 \rangle - a(l(u_n)) \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \right\rangle &\leqslant \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} + |a(l(u_n))| \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leqslant \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + M \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1}} \left| \left\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \right\rangle \right| \leqslant \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + M \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \int_0^T \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \\ &\leqslant 2 \Big(\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + M^2 \|u_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \Big). \end{aligned}$$

Finalement, il existe une constante positive C telle que

$$\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C. \tag{C.11}$$

Etape 3 : Existence de solution faible
Par conséquent, d'après (C.10) et (C.11), il existe une sous-suite de $(u_n)_n$, encore notée $(u_n)_n$, des fonctions $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\alpha \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ telles que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{C.12}$$

$$\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \alpha \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(0,T)$, on a

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}, \varphi \right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)} = -\left\langle u_n, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)}.$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, nous obtenons

$$\langle \alpha, \varphi \rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)} = -\left\langle u, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)} = \left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle_{\mathscr{D}'(0,T),\mathscr{D}(0,T)}.$$

Donc $\alpha = \dfrac{du}{dt}$ dans $\mathscr{D}'(0,T)$ d'où

$$\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{C.13}$$

L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et celle de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ étant respectivement compacte et continue, le lemme d'Aubin-Lions implique que l'injection de $W(0,T)$ dans $L^2(Q)$ est compacte. Comme la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W(0,T)$, alors nous pouvons extraire une sous-suite convergente dans $L^2(Q)$, i.e.

$$u_n \to u \text{ fortement dans } L^2(Q).$$

Il en résulte que

$$l(u_n) \to l(u) \text{ fortement dans } L^2(0,T). \tag{C.14}$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(0,T)$. Nous multiplions l'EDP dans (C.8) par φ, puis nous intégrons entre 0 et T, il vient pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_n, w_i)\varphi dt + \int_0^T a(l(u_n)) \int_\Omega \nabla u_n \nabla w_i \varphi dx dt = \int_0^T \langle f, w_i \rangle \varphi dt.$$

Comme l'espace vectoriel engendré par les $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_n, v)\varphi dt + \int_0^T a(l(u_n)) \int_\Omega \nabla u_n \nabla v \varphi dx dt = \int_0^T \langle f, v \rangle \varphi dt. \tag{C.15}$$

D'après (C.14), il existe une sous-suite telle que

$$l(u_n) \to l(u) \text{ pour presque tout } t \in]0,T[.$$

Puisque la fonction a est continue,

$$a(l(u_n)) \to a(l(u)) \text{ pour presque tout } t \in]0,T[,$$

et que, par hypothèse

$$a(l(u_n)) \leqslant M,$$

nous pouvons appliquer le Théorème de convergence dominée de Lebesgue et en déduire que

$$a(l(u_n))\nabla v \to a(l(u))\nabla v \text{ fortement dans } L^2(Q). \tag{C.16}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans (C.15) et en utilisant (C.12), (C.13), (C.16), nous obtenons

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u, v)\varphi dt + \int_0^T a(l(u)) \int_\Omega \nabla u \nabla v \varphi dx dt = \int_0^T \langle f, v \rangle \varphi dt.$$

D'où (C.5c).
Nous montrons que $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ et que $u(0) = u^0$ dans Ω. Nous en déduisons (C.5b). ∎

Annexe D

Preuve de l'inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité simultanée

Retournons à la preuve de l'inégalité d'observabilité pour le problème de contrôlabilité simultanée avec contrainte sur le contrôle. L'idée est d'estimer $\int_0^T \int_{\omega'} |\varphi_2|^2 e^{-2\alpha} dxdt$ par $\int_G |\varphi_1|^2 e^{-r\alpha} dxdt$ pour $r \in [0, 2[$ et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{W}$. Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^{N_0})$ une fonction vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi(x) = 1, & \forall x \in \omega', \\ 0 < \xi(x) \leqslant 1, & \forall x \in \omega'', \\ \xi(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^{N_0} \setminus \omega'', \end{array} \right. \tag{D.1}$$

où $\omega' \Subset \omega'' \Subset \omega_c \Subset \omega \Subset \Omega$. Supposons par exemple que

$$c \geqslant c_0 > 0 \text{ dans } \omega_c \times]0, T[\tag{D.2}$$

et introduisons la fonction $\eta = \xi^6$. La preuve du Théorème est basée sur l'introduction d'une fonction Λ de t. Pour $\beta_0, \beta_1, p, m > 0$, nous définissons :

$$\Lambda(t) = \int_\Omega (e^{-p\alpha} \eta^{4/3} |\varphi_2|^2 - \beta_0 e^{-2\alpha} \eta \varphi_2 \varphi_1 + \beta_1 e^{-m\alpha} \eta^{2/3} |\varphi_1|^2) dx, \tag{D.3}$$

où

$$\alpha(x, t) = \tau \frac{e^{\frac{4}{3}\lambda \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda \beta(x)}}{t(T - t)},$$

Si, au lieu de (D.2), nous avions $-c \geqslant c_0 > 0$, alors l'expression de Λ doit être modifiée en choisissant $\beta_0 e^{-2\alpha} \eta \varphi_2 \varphi_1$ au lieu de $-\beta_0 e^{-2\alpha} \eta \varphi_2 \varphi_1$. Nous rappelons les notations suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_0\varphi & = & \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta\varphi, \\ L_0^*\varphi & = & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\Delta\varphi, \\ M(\varphi,\sigma) & = & L_0^*\varphi-a\varphi-c\sigma, \\ N(\varphi,\sigma) & = & L_0^*\sigma-b\varphi-d\sigma. \end{array}\right. \tag{D.4}$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(x,t)=\lim\limits_{t\to T}\alpha(x,t)=+\infty$,

$$\Lambda(0)=\Lambda(T)=0. \tag{D.5}$$

En dérivant Λ par rapport à t et en remplaçant $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}$ par leurs expressions données par (D.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Lambda'(t)&=\int_\Omega(-pe^{-p\alpha}\eta^{4/3}|\varphi_2|^2+2\beta_0e^{-2\alpha}\eta\varphi_2\varphi_1-\beta_1me^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\varphi_1|^2)\frac{\partial\alpha}{\partial t}dx\\ &-2\int_\Omega e^{-p\alpha}\eta^{4/3}\varphi_2(N(\varphi)+\Delta\varphi_2+b\varphi_1+d\varphi_2)dx\\ &+\beta_0\int_\Omega e^{-2\alpha}\eta[\varphi_2(M(\varphi)+\Delta\varphi_1+a\varphi_1+c\varphi_2)\\ &\quad+\varphi_1(N(\varphi)+\Delta\varphi_2+b\varphi_1+d\varphi_2)]dx\\ &-2\beta_1\int_\Omega e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1(M(\varphi)+\Delta\varphi_1+a\varphi_1+c\varphi_2)dx.\end{aligned}$$

En intégrant par parties sur $]0,T[$ et en utilisant (D.5), nous trouvons :

$$\begin{aligned}&\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta c|\varphi_2|^2dxdt\\ &=\int_Q\Big\{\Big(p\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2d\Big)e^{-p\alpha}\eta^{4/3}|\varphi_2|^2\\ &\quad+\Big[\beta_1\Big(m\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2a\Big)e^{-m\alpha}\eta^{2/3}-\beta_0e^{-2\alpha}\eta b\Big]|\varphi_1|^2\\ &\quad-\Big[\beta_0\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t}+a+d\Big)e^{-2\alpha}\eta-2\beta_1e^{-m\alpha}\eta^{2/3}c-2e^{-p\alpha}\eta^{4/3}b\Big]\varphi_1\varphi_2\Big\}dxdt\\ &\quad+2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{4/3}\varphi_2\Delta\varphi_2dxdt-\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta(\varphi_2\Delta\varphi_1+\varphi_1\Delta\varphi_2)dxdt\\ &\quad+2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1\Delta\varphi_1dxdt+2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{4/3}\varphi_2N(\varphi)dxdt\\ &\quad-\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_2M(\varphi)dxdt-\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_1N(\varphi)dxdt\\ &\quad+2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1M(\varphi)dxdt\\ &=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+J_7+J_8.\end{aligned} \tag{D.6}$$

Maintenant nous estimons chacun des huit termes $J_1, \ldots, J_8$. Soit $r \in [0, 2[$; supposons que

$$p > 2, \quad m > 1 + \frac{r}{2}, \quad r < 2, \quad \beta_0, \beta_1 \geqslant 1. \tag{D.7}$$

Estimation de J_1 :
Comme $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} \notin L^\infty(Q)$, nous écrivons

$$\begin{aligned}
&\beta_0\Big(2\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a + d\Big)e^{-2\alpha}\eta\varphi_1\varphi_2 = \beta_0\Big(2\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a + d\Big)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_1)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2)\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\Big[\beta_0^2\Big(2\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a + d\Big)^2 e^{-2\alpha}\eta|\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2\Big]\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\Big[\beta_0^2\Big(2\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a + d\Big)^2 e^{-(2-r)\alpha}\eta^{2/3}e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{2/3}c\varphi_1\varphi_2 = -2\beta_1(e^{-(m-1)\alpha}\eta^{1/6}c\varphi_1)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2)\\
&\quad\leqslant \beta_1^2 e^{-2(m-1)\alpha}\eta^{1/3}|c\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2\\
&\quad\leqslant \beta_1^2 e^{-[2(m-1)-r]\alpha}e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|c\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2e^{-p\alpha}\eta^{4/3}b\varphi_1\varphi_2 = -2(e^{-(p-1)\alpha}\eta^{5/6}b\varphi_1)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2)\\
&\quad\leqslant e^{-2(p-1)\alpha}\eta^{5/3}|b\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2\\
&\quad\leqslant e^{-[2(p-1)-r]\alpha}\eta^{4/3}e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|b\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2,
\end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned}
J_1 &\leqslant \Big(\frac{5}{2} + \Big\|\Big(p\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2d\Big)e^{-(p-2)\alpha}\eta^{\frac{1}{3}}\Big\|_\infty\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt\\
&+ \Big\{\frac{1}{2}\Big\|\beta_0\Big(2\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a + d\Big)e^{-(1-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{1}{3}}\Big\|_\infty^2 + \|\beta_1 e^{-(m-1-\frac{r}{2})\alpha}c\|_\infty^2 + \|e^{-(p-1-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}b\|_\infty^2\\
&+ \Big\|\beta_1\Big(m\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2a\Big)e^{-(m-r)\alpha}\eta^{\frac{1}{3}} - \beta_0 e^{-(2-r)\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}b\Big\|_\infty\Big\}\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En utilisant $\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1$, il vient

$$\begin{aligned}
J_1 \leqslant C(p, m, \|\eta\|_{L^\infty(\Omega)})&\Bigg(\Big(1 + \|d\|_\infty + \Big\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}e^{-(p-2)\alpha}\Big\|_\infty\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt\\
&+ \Big\{\beta_0^2\Big(1 + \|a+d\|_\infty^2 + \|b\|_\infty^2 + \Big\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}e^{-(1-\frac{r}{2})\alpha}\Big\|_\infty^2\Big)\\
&+ \beta_1^2\Big(1 + \|a\|_\infty^2 + \|c\|_\infty^2 + \Big\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}e^{-(m-r)\alpha}\Big\|_\infty^2\Big)\Big\}\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt\Bigg).
\end{aligned}$$

De l'inégalité

$$\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t} e^{-j\alpha}\right\|_\infty \leqslant C\frac{\tau^2}{T^4}, \forall j > 0 \tag{D.8}$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} J_1 \leqslant C(p, m, \|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}) \Big[\Big(1 + \|d\|_\infty + \frac{\tau^2}{T^4}\Big) \int_Q e^{-2\alpha} \eta |\varphi_2|^2 dxdt \\ + |\beta|^2 \Big(1 + \|a, b, c, d\|_\infty^2 + \frac{\tau^4}{T^8}\Big) \int_Q \eta^{\frac{1}{3}} e^{-r\alpha} |\varphi_1|^2 dxdt \Big], \end{aligned} \tag{D.9}$$

où $|\beta|^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2$.

Maintenant revenons à la preuve de l'estimation (D.8). Soit $j > 0$; puisque

$$\alpha(x,t) = \tau \frac{e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)},$$

on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t) e^{-j\alpha}(x,t) = -\tau \frac{(T-2t)\big(e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}\big)}{t^2(T-t)^2} e^{-j\tau \frac{e^{(4/3)\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t) e^{-j\alpha}(x,t)\right| &\leqslant \tau \frac{T\big(e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}\big)}{t^2(T-t)^2} e^{-j\tau \frac{e^{(4/3)\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}} \\ &\leqslant \tau T \mu(x) \psi(t), \end{aligned}$$

avec

$$\mu(x) = e^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)} \text{ et } \psi(t) = \frac{1}{t^2(T-t)^2} e^{-j\tau\frac{\mu(x)}{t(T-t)}}.$$

Etudions la fonction ψ sur l'intervalle de temps $]0, T[$. Posons $z = \dfrac{1}{t(T-t)}$, alors nous devons étudier la fonction ψ définie par $\psi(z) = z^2 e^{-j\tau\mu(x)z}$, sur l'intervalle de temps $[\frac{4}{T^2}, +\infty[$. On a

$$\psi'(z) = (2 - j\tau\mu(x)z) z e^{-j\tau\mu(x)z}. \tag{D.10}$$

En conséquence si $z \leqslant \frac{2}{j\tau\mu(x)}$, ψ est croissante et si $z \geqslant \frac{2}{j\tau\mu(x)}$, ψ est décroissante.

Si $\frac{2}{j\tau\mu(x)} \leqslant \frac{4}{T^2}$, ψ est décroissante sur $[\frac{4}{T^2}, +\infty[$ et il vient

$$\psi(z) \leqslant \psi(\frac{4}{T^2}) = \frac{16}{T^4} e^{-j\tau\mu(x)\frac{4}{T^2}}.$$

D'où,

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha}(x,t)\right| \leqslant \frac{16\tau T\mu(x)}{T^4}e^{-j\tau\mu(x)\frac{4}{T^2}} \leqslant \frac{16\tau Te^{\frac{4}{3}\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{T^4}.$$

D'après $\tau \geqslant \tau_1 = \frac{T^2}{4}(\frac{4C}{\lambda^4})^{1/3}\|a,b,c,d\|_\infty^{2/3}$, il s'ensuit que

$$T \leqslant \frac{2\tau}{\|a,b,c,d\|_\infty^{1/3}}\left(\frac{\lambda^4}{4C}\right)^{1/6} \tag{D.11}$$

car par hypothèse $\tau \geqslant 1$. Par conséquent,

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha}(x,t)\right| \leqslant \frac{32\tau^2 e^{(4/3)\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{\|a,b,c,d\|_\infty^{1/3}T^4}\left(\frac{\lambda^4}{4C}\right)^{1/6} = C_1\frac{\tau^2}{T^4}$$

avec $C_1 = \frac{32e^{(4/3)\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{\|a,b,c,d\|_\infty^{1/3}}(\frac{\lambda^4}{4C})^{1/6}$.

Si $\frac{2}{j\tau\mu(x)} > \frac{4}{T^2}$, ψ est croissante sur $[\frac{4}{T^2}, \frac{2}{j\tau\mu(x)}]$ et décroissante sur $[\frac{2}{j\tau\mu(x)}, +\infty[$. Nous en déduisons que

$$\psi(z) \leqslant \psi(\frac{2}{j\tau\mu(x)}) = \frac{4}{(j\tau\mu(x))^2}e^{-2}.$$

Ainsi,

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha}(x,t)\right| \leqslant \frac{4\tau T\mu(x)e^{-2}}{(j\tau\mu(x))^2} = \frac{4\tau Te^{-2}}{(j\tau)^2\mu(x)}.$$

Or $\tau^2 \geqslant \frac{T^4}{16}(\frac{4C}{\lambda^4})^{2/3}\|a,b,c,d\|_\infty^{4/3}$, ce qui implique que $\frac{1}{\tau^2} \leqslant \frac{16}{T^4}(\frac{\lambda^4}{4C})^{2/3}\|a,b,c,d\|_\infty^{-4/3}$, et $\mu(x) \geqslant e^{\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}(e^{4/3}-1)$ donc $\frac{1}{\mu(x)} \leqslant \frac{1}{e^{\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}(e^{4/3}-1)}$. Il en résulte que,

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha}(x,t)\right| \leqslant \frac{4\tau Te^{-2}}{j^2}\frac{16}{T^4}\left(\frac{\lambda^4}{4C}\right)^{2/3}\frac{\|a,b,c,d\|_\infty^{-4/3}}{e^{\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}(e^{4/3}-1)}.$$

En tenant compte de (D.11), nous en déduisons que

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha}(x,t)\right| \leqslant \frac{128\tau^2 e^{-(2+\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)})}}{j^2T^4}\left(\frac{\lambda^4}{4C}\right)^{5/6}\frac{\|a,b,c,d\|_\infty^{-5/3}}{e^{4/3}-1} = C_2\frac{\tau^2}{T^4}$$

avec $C_2 = \frac{128e^{-(2+\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)})}}{j^2}(\frac{\lambda^4}{4C})^{5/6}\frac{\|a,b,c,d\|_\infty^{-5/3}}{e^{4/3}-1}$.
(D.8) en découle avec $C = \min\{C_1, C_2\}$.

Estimation de J_2 :
En utilisant le fait que $\varphi_i|_\Sigma = 0$, $i = 1, 2$ et en appliquant la formule de Green, on a :

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\varphi_2\Delta\varphi_2 dxdt = -2\int_Q \nabla(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\varphi_2)\nabla\varphi_2 dxdt \\
&= -2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt - 2\int_Q \varphi_2\nabla\varphi_2\nabla(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt \\
&= -2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt - \int_Q \nabla(|\varphi_2|^2)\nabla(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt \\
&= -2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt + \int_Q |\varphi_2|^2\Delta(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt \\
&= -2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt + \int_Q (e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2)e^{2\alpha}\eta^{-1}\Delta(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\Delta(e^{-p\alpha}\eta^j) &= \text{div }[\nabla(e^{-p\alpha}\eta^j)] = \text{div }[-p(\nabla\alpha)e^{-p\alpha}\eta^j + j(\nabla\eta)e^{-p\alpha}\eta^{j-1}] \\
&= -p\text{ div }[(\nabla\alpha)e^{-p\alpha}]\eta^j - pj\nabla\alpha(\nabla\eta)e^{-p\alpha}\eta^{j-1} + j(\Delta\eta)e^{-p\alpha}\eta^{j-1} \\
&\quad + j\nabla\eta\nabla(e^{-p\alpha}\eta^{j-1}) \\
&= -p(\Delta\alpha)e^{-p\alpha}\eta^j + p^2|\nabla\alpha|^2e^{-p\alpha}\eta^j - pj\nabla\alpha(\nabla\eta)e^{-p\alpha}\eta^{j-1} \\
&\quad + j(\Delta\eta)e^{-p\alpha}\eta^{j-1} - pj\nabla\alpha(\nabla\eta)e^{-p\alpha}\eta^{j-1} + j(j-1)|\nabla\eta|^2e^{-p\alpha}\eta^{j-2} \\
&= e^{-p\alpha}[(p^2|\nabla\alpha|^2 - p\Delta\alpha)\eta^j + j(\Delta\eta - 2p\nabla\alpha\nabla\eta)\eta^{j-1} \qquad \text{(D.12)} \\
&\quad + j(j-1)|\nabla\eta|^2\eta^{j-2}]
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
e^{2\alpha}\eta^{-1}\Delta(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}) = e^{-(p-2)\alpha}\Big(&(p^2|\nabla\alpha|^2 - p\Delta\alpha)\eta^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}(\Delta\eta - 2p\nabla\alpha\nabla\eta)\eta^{-\frac{2}{3}} \\
&+ \frac{4}{9}|\nabla\eta|^2\eta^{-\frac{5}{3}}\Big).
\end{aligned}$$

Comme $\eta = \xi^6$, alors

$$\begin{aligned}
\nabla\eta &= 6(\nabla\xi)\xi^5 = 6(\nabla\xi)\eta^{5/6} \\
&= 6\xi(\nabla\xi)\xi^4 = 6\xi(\nabla\xi)\eta^{2/3}, \\
\Delta\eta &= 6[(\Delta\xi)\xi^5 + 5|\nabla\xi|^2\xi^4] = \xi^4[6\xi\Delta\xi + 30|\nabla\xi|^2] \\
&= \eta^{2/3}[6\xi\Delta\xi + 30|\nabla\xi|^2],
\end{aligned}$$

d'où,

$$
\begin{aligned}
|\nabla\eta|^2\eta^{-5/3} &= 36|\nabla\xi|^2 \in L^\infty(\Omega),\\
e^{-(p-2)\alpha}\nabla\alpha(\nabla\eta)\eta^{-2/3} &= -6\tau\lambda\xi\nabla\xi\nabla\beta\frac{e^{\lambda\beta}}{t(T-t)}e^{-(p-2)\alpha},\\
(\Delta\eta)\eta^{-2/3} &= 30|\nabla\xi|^2 + 6\xi\Delta\xi \in L^\infty(\Omega),\\
e^{-(p-2)\alpha}(\Delta\alpha)\eta^{1/3} &= -\tau\lambda(\Delta\beta+\lambda|\nabla\beta|^2)\xi^2\frac{e^{\lambda\beta}}{t(T-t)}e^{-(p-2)\alpha},\\
e^{-(p-2)\alpha}|\nabla\alpha|^2\eta^{1/3} &= \tau^2\lambda^2\xi^2|\nabla\beta|^2\frac{e^{2\lambda\beta}}{t^2(T-t)^2}e^{-(p-2)\alpha}.
\end{aligned}
$$

En utilisant $p > 2$ et en tenant compte de l'estimation (D.8), nous en déduisons que

$$\|e^{2\alpha}\eta^{-1}\Delta(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})\|_\infty \leqslant C\Big(1+\frac{\tau^2}{T^4}\Big).$$

Revenant à J_2, nous obtenons

$$J_2 \leqslant -2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2dxdt + C\Big(1+\frac{\tau^2}{T^4}\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt. \tag{D.13}$$

Estimation de J_3 :
Puisque

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varphi_1\varphi_2) &= \mathrm{div}\,[\nabla(\varphi_1\varphi_2)] = \mathrm{div}\,(\varphi_1\nabla\varphi_2+\varphi_2\nabla\varphi_1)\\
&= \nabla\varphi_1\nabla\varphi_2+\varphi_1\Delta\varphi_2+\nabla\varphi_2\nabla\varphi_1+\varphi_2\Delta\varphi_1\\
&= 2\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2+\varphi_1\Delta\varphi_2+\varphi_2\Delta\varphi_1,
\end{aligned}
$$

on a,

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta(\varphi_2\Delta\varphi_1+\varphi_1\Delta\varphi_2)dxdt\\
&= -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta[\Delta(\varphi_1\varphi_2-2\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2]dxdt\\
&= +\beta_0\int_Q \nabla(e^{-2\alpha}\eta)\nabla(\varphi_1\varphi_2)dxdt + 2\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2dxdt\\
&= -\beta_0\int_Q \Delta(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_1\varphi_2dxdt + 2\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2dxdt.
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
|\beta_0\Delta(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_1\varphi_2| &= |e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2||\beta_0\Delta(e^{-2\alpha}\eta)e^{\alpha}\eta^{-\frac{1}{2}}\varphi_1|\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big(e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2+\beta_0^2|\Delta(e^{-2\alpha}\eta)|^2e^{2\alpha}\eta^{-1}|\varphi_1|^2\Big),
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\Big|\beta_0\int_Q \Delta(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_1\varphi_2 dxdt\Big|\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt + \frac{\beta_0^2}{2}\int_Q |\Delta(e^{-2\alpha}\eta)|^2 e^{2\alpha}\eta^{-1}e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt + \frac{\beta_0^2}{2}\||\Delta(e^{-2\alpha}\eta)|^2 e^{(r+2)\alpha}\eta^{-\frac{4}{3}}\|_\infty \int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt\\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt + \frac{\beta_0^2}{2}\|\Delta(e^{-2\alpha}\eta)e^{(1+\frac{r}{2})\alpha}\eta^{-\frac{2}{3}}\|_\infty^2 \int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Au vu de (D.12), on a

$$\Delta(e^{-2\alpha}\eta) = e^{-2\alpha}[(4|\nabla\alpha|^2 - 2\Delta\alpha)\eta + \Delta\eta - 4\nabla\alpha\nabla\eta],$$

donc

$$e^{(1+\frac{r}{2})\alpha}\eta^{-\frac{2}{3}}\Delta(e^{-2\alpha}\eta) = e^{-(1-\frac{r}{2})\alpha}[(4|\nabla\alpha|^2 - 2\Delta\alpha)\eta^{\frac{1}{3}} + (\Delta\eta - 4\nabla\alpha\nabla\eta)\eta^{-\frac{2}{3}}].$$

Comme précédemment et en utilisant l'hypothèse $r < 2$, il s'ensuit que :

$$\|\Delta(e^{-2\alpha}\eta)e^{(1+\frac{r}{2})\alpha}\eta^{-\frac{2}{3}}\|_\infty^2 \leqslant C(1+\frac{\tau^2}{T^4})^2 \leqslant C(1+\frac{\tau^4}{T^8}),$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
J_3 &\leqslant C\Big(\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt + \beta_0^2(1+\frac{\tau^4}{T^8})\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt\Big)\\
&\quad + 2\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2 dxdt.
\end{aligned}\tag{D.14}$$

Estimation de J_4 :

$$\begin{aligned}
J_4 &= 2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}\varphi_1\Delta\varphi_1 dxdt = -2\beta_1\int_Q \nabla(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}\varphi_1)\nabla\varphi_1 dxdt\\
&= -2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2dxdt - 2\beta_1\int_Q \nabla(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})\varphi_1\nabla\varphi_1 dxdt\\
&= -2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2dxdt - \beta_1\int_Q \nabla(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})\nabla(|\varphi_1|^2)dxdt\\
&= -2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2dxdt + \beta_1\int_Q \Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})|\varphi_1|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Or

$$\Big|\beta_1 \int_Q \Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})|\varphi_1|^2 dxdt\Big| = \beta_1 \Big| \int_Q e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})\eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt\Big|$$
$$\leqslant \beta_1 \|e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})\|_\infty \int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt,$$

et d'après (D.12), on a

$$\Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}) = e^{-m\alpha}\Big((m^2|\nabla\alpha|^2 - m\Delta\alpha)\eta^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(\Delta\eta - 2m\nabla\alpha\nabla\eta)\eta^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}|\nabla\eta|^2\eta^{-\frac{4}{3}}\Big),$$

donc

$$e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}) = e^{-(m-r)\alpha}\Big((m^2|\nabla\alpha|^2 - m\Delta\alpha)\eta^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(\Delta\eta - 2m\nabla\alpha\nabla\eta)\eta^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}|\nabla\eta|^2\eta^{-\frac{5}{3}}\Big).$$

Comme précédemment et en utilisant l'hypothèse $r < m$, nous obtenons :

$$\|e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\Delta(e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}})\|_\infty \leqslant C\Big(1 + \frac{\tau^2}{T^4}\Big),$$

d'où

$$J_4 \leqslant -2\beta_1 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt + C\beta_1\Big(1+\frac{\tau^2}{T^4}\Big)\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt. \quad \text{(D.15)}$$

Estimation de J_5 :

$$J_5 = 2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\varphi_2 N(\varphi)dxdt = 2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2 e^{\alpha}\eta^{-\frac{1}{2}}N(\varphi)dxdt$$
$$= 2\int_Q e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2 e^{-(p-1)\alpha}\eta^{\frac{5}{6}}N(\varphi)dxdt$$
$$J_5 \leqslant \int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt + \int_Q e^{-2(p-1)\alpha}\eta^{\frac{5}{3}}|N(\varphi)|^2 dxdt. \quad \text{(D.16)}$$

Estimation de J_6 :

$$J_6 = -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_2 M(\varphi)dxdt = -\beta_0\int_Q e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2 e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}M(\varphi)dxdt$$
$$J_6 \leqslant \frac{\beta_0}{2}\Big(\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt + \int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt\Big). \quad \text{(D.17)}$$

Estimation de J_7 :

$$J_7 = -\beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_1 N(\varphi)dxdt = -\beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta\eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1\eta^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{r}{2}\alpha}N(\varphi)dxdt$$
$$= -\beta_0 \int_Q \eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1 e^{-(2-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{5}{6}}N(\varphi)dxdt$$
$$J_7 \leqslant \frac{\beta_0}{2}\Big(\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt + \int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{\frac{5}{3}}|N(\varphi)|^2dxdt\Big). \tag{D.18}$$

Estimation de J_8 :

$$J_8 = 2\beta_1 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}\varphi_1 M(\varphi)dxdt = 2\beta_1 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1\eta^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{r}{2}\alpha}M(\varphi)dxdt$$
$$= 2\beta_1 \int_Q \eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1 e^{-(m-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}M(\varphi)dxdt$$
$$J_8 \leqslant \beta_1\Big(\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt + \int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2dxdt\Big). \tag{D.19}$$

Alors il résulte de (D.2), des conditions (D.7), des estimations (D.9),(D.13)-(D.19) et de (D.6), que :

$$\begin{aligned}\beta_0 c_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt &\leqslant C\Big(1+\|d\|_\infty+\frac{\tau^2}{T^4}\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt \\ &+ C|\beta|^2\Big(1+\|a,b,c,d\|_\infty^2+\frac{\tau^4}{T^8}\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt \\ &- 2\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{4/3}|\nabla\varphi_2|^2dxdt + 2\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2dxdt \\ &- 2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2dxdt + \int_Q e^{-2(p-1)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2dxdt \\ &+ \frac{\beta_0}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2dxdt + \frac{\beta_0}{2}\int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2dxdt \\ &+ \beta_1\int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2dxdt.\end{aligned} \tag{D.20}$$

Nous désirons que le terme $C\Big(1+\|d\|_\infty+\dfrac{\tau^2}{T^4}\Big)\displaystyle\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt$ soit absorbé par le terme $\beta_0 c_0\displaystyle\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt$ dans le membre de gauche de (D.20), i.e. $\beta_0 c_0 > C\Big(1+\|d\|_\infty+\dfrac{\tau^2}{T^4}\Big)$. En fixant β_0 tel que $\beta_0 > \dfrac{C}{c_0}\Big(1+\|d\|_\infty+\dfrac{\tau^2}{T^4}\Big)$, nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant C\frac{|\beta|^2}{\beta_0}\Big(1+\|a,b,c,d\|_\infty^2+\frac{\tau^4}{T^8}\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt\\
&\quad -\frac{2}{\beta_0}\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{4/3}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt+2\int_Q e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2 dxdt\\
&\quad -2\frac{\beta_1}{\beta_0}\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt+\frac{1}{\beta_0}\int_Q e^{-2(p-1)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt\\
&\quad +\frac{\beta_1}{\beta_0}\int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Considérons le terme

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\beta_0}\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt+2\int_G e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2 dxdt&\\
-2\frac{\beta_1}{\beta_0}\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt& \quad\text{(D.21)}
\end{aligned}$$

dans le membre de droite de l'inégalité précédente. Supposons de plus que $p+m\leqslant 4$ et $\beta_0^2\leqslant 2\beta_1$, alors

$$(\beta_0 e^{-2\alpha}\eta)^2\leqslant 2\beta_1 e^{-4\alpha}\eta^2\leqslant 2\beta_1 e^{-(p+m)\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}\leqslant 2(e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})(\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}),$$

et

$$\begin{aligned}
|2\beta_0 e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2|^2 &\leqslant 2(2e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2)(2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2)\\
&\leqslant (2e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2)^2+(2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2)^2.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
|2\beta_0 e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2| &\leqslant \sqrt{(2e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2)^2+(2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2)^2}\\
&\leqslant 2e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2+2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
2\int_Q e^{-2\alpha}\eta\nabla\varphi_1\nabla\varphi_2 dxdt\leqslant \frac{2}{\beta_0}\int_Q e^{-p\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt&\\
+\frac{2\beta_1}{\beta_0}\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt,&
\end{aligned}$$

et la quantité (D.21) est négative. Par conséquent, au vu de $p > 2$ ($\Rightarrow 2(p-1) > 2$), $2 > r$ ($\Rightarrow 4 - r > 2$) et $m > 1 + \frac{r}{2}$ ($\Rightarrow 2m - r > 2$), il s'ensuit que :

$$\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant C\frac{|\beta|^2}{\beta_0}\Big(1 + \|a,b,c,d\|_\infty^2 + \frac{\tau^4}{T^8}\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt$$
$$+\Big(\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{2}\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt + \Big(\frac{1}{2}+\frac{\beta_1}{\beta_0}\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt.$$

On a avec les propriétés de η :

$$\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\alpha}|\varphi_2|^2 dxdt = \int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant \int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt,$$

et en utilisant les conditions suivantes,

$$\begin{gathered} p > 2, \quad m > 1 + \frac{r}{2}, \quad r < 2, \quad p + m \leqslant 4, \\ \beta_0, \beta_1 \geqslant 1, \quad \beta_0^2 \leqslant 2\beta_1, \quad \beta_0 > \frac{C}{c_0}\Big(1 + \|d\|_\infty + \frac{\tau^2}{T^4}\Big), \quad \tau \geqslant \tau_1, \end{gathered} \tag{D.22}$$

(par exemple $(p,m,r) = \Big(2+\frac{1}{16}, 2-\frac{1}{8}, \frac{3}{2}\Big)$ et $(\beta_0,\beta_1) = \Big(\max\Big\{1, \frac{C}{c_0}\Big(1 + \|d\|_\infty + \frac{\tau^2}{T^4}\Big)\Big\} + 1, \max\{1, \frac{1}{2}\beta_0^2\}\Big)$ vérifient les conditions (D.22)), nous obtenons finalement,

$$\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\alpha}|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant C\Big(\int_G e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt$$
$$+ \int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2) dxdt\Big),$$

où $C = C(T, \|a,b,c,d\|_\infty, c_0, r)$.

Annexe E

Preuve de l'inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité du système non local

Nous rappelons les notations suivantes

$$\begin{cases} M(\varphi,\sigma) &= -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - B(t;z_1)\varphi - a\varphi - c\sigma, \\ N(\varphi,\sigma) &= -\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} - B(t;z_2)\sigma - b\varphi - d\sigma. \end{cases} \tag{E.1}$$

Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^{N_0})$ une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} \xi(x) = 1, & \forall x \in \omega', \\ 0 < \xi(x) \leqslant 1, & \forall x \in \omega'', \\ \xi(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \omega'', \end{cases} \tag{E.2}$$

où $\omega' \Subset \omega'' \Subset \omega_c \Subset \omega \Subset \Omega$.
Supposons par exemple que

$$c \geqslant c_0 > 0 \text{ dans } \omega_c \times]0,T[\tag{E.3}$$

et introduisons la fonction $\eta = \xi^6$. Pour $\beta_0, \beta_1, n, m > 0$, nous définissons :

$$\Lambda(t) = \int_\Omega (e^{-n\alpha}\eta^{4/3}|\varphi_2|^2 - \beta_0 e^{-2\alpha}\eta\varphi_2\varphi_1 + \beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\varphi_1|^2)dx. \tag{E.4}$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0} \alpha(x,t) = \lim\limits_{t\to T} \alpha(x,t) = +\infty$, on a

$$\Lambda(0) = \Lambda(T) = 0. \tag{E.5}$$

En dérivant Λ par rapport au temps t et en remplaçant $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}$ par leurs expressions données par (E.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Lambda'(t) = & \int_\Omega (-ne^{-n\alpha}\eta^{4/3}|\varphi_2|^2 + 2\beta_0 e^{-2\alpha}\eta\varphi_2\varphi_1 - \beta_1 m e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\varphi_1|^2)\frac{\partial \alpha}{\partial t}dx \\
& - 2\int_\Omega e^{-n\alpha}\eta^{4/3}\varphi_2(N(\varphi) + B(t;z_2)\varphi_2 + b\varphi_1 + d\varphi_2)dx \\
& + \beta_0 \int_\Omega e^{-2\alpha}\eta[\varphi_2(M(\varphi) + B(t;z_1)\varphi_1 + a\varphi_1 + c\varphi_2) \\
& \quad + \varphi_1(N(\varphi) + B(t;z_2)\varphi_2 + b\varphi_1 + d\varphi_2)]dx \\
& - 2\beta_1 \int_\Omega e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1(M(\varphi) + B(t;z_1)\varphi_1 + a\varphi_1 + c\varphi_2)dx.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties sur $]0,T[$ et en utilisant (E.5), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta c|\varphi_2|^2 dxdt = & \int_Q \Big\{ \Big(n\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2d\Big)e^{-n\alpha}\eta^{4/3}|\varphi_2|^2 \\
& \quad + \Big[\beta_1\Big(m\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2a\Big)e^{-m\alpha}\eta^{2/3} - \beta_0 e^{-2\alpha}\eta b\Big]|\varphi_1|^2 \\
& - \Big[\beta_0\Big(2\frac{\partial \alpha}{\partial t} + a + d\Big)e^{-2\alpha}\eta - 2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{2/3}c - 2e^{-n\alpha}\eta^{4/3}b\Big]\varphi_1\varphi_2\Big\}dxdt \\
& + 2\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{4/3}\varphi_2 B(t;z_2)\varphi_2 dxdt \\
& - \beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta(\varphi_2 B(t;z_1)\varphi_1 + \varphi_1 B(t;z_2)\varphi_2)dxdt \\
& + 2\beta_1 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1 B(t;z_1)\varphi_1 dxdt + 2\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{4/3}\varphi_2 N(\varphi)dxdt \\
& - \beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_2 M(\varphi)dxdt - \beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_1 N(\varphi)dxdt \\
& + 2\beta_1 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1 M(\varphi)dxdt \\
& = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7 + J_8.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Maintenant nous estimons chacun des termes $J_1, \cdots, J_8$. Soit $r \in [0,2[$ et supposons que

$$n > 2, \quad m > 1 + \frac{r}{2}, \quad r < 2, \quad \beta_0, \beta_1 \geqslant 1. \tag{E.7}$$

Estimation de J_1 :

$$J_1 = \int_Q \Big\{ \Big(n\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2d\Big) e^{-n\alpha}\eta^{4/3}|\varphi_2|^2$$
$$+ \Big[\beta_1\Big(m\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2a\Big)e^{-m\alpha}\eta^{2/3} - \beta_0 e^{-2\alpha}\eta b\Big]|\varphi_1|^2$$
$$- \Big[\beta_0\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a + d\Big)e^{-2\alpha}\eta - 2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{2/3}c - 2e^{-n\alpha}\eta^{4/3}b\Big]\varphi_1\varphi_2\Big\}dxdt.$$

Comme

$$\begin{aligned}
&\beta_0\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a + d\Big)e^{-2\alpha}\eta\varphi_1\varphi_2 \\
&\quad = \beta_0\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a + d\Big)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_1)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2) \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\Big[\beta_0^2\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a + d\Big)^2 e^{-2\alpha}\eta|\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2)\Big] \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\Big[\beta_0^2\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a + d\Big)^2 e^{-(2-r)\alpha}\eta^{2/3}e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2\beta_1 e^{-m\alpha}\eta^{2/3}c\varphi_1\varphi_2 = -2\beta_1(e^{-(m-1)\alpha}\eta^{1/6}c\varphi_1)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2) \\
&\quad \leqslant \beta_1^2 e^{-2(m-1)\alpha}\eta^{1/3}|c\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 \\
&\quad \leqslant \beta_1^2 e^{-[2(m-1)-r]\alpha}e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|c\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2e^{-n\alpha}\eta^{4/3}b\varphi_1\varphi_2 = -2(e^{-(n-1)\alpha}\eta^{5/6}b\varphi_1)(e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2) \\
&\quad \leqslant e^{-2(n-1)\alpha}\eta^{5/3}|b\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 \\
&\quad \leqslant e^{-[2(n-1)-r]\alpha}\eta^{4/3}e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|b\varphi_1|^2 + e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
J_1 &\leqslant \Big(\frac{5}{2} + \Big\|\Big(n\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2d\Big)e^{-(n-2)\alpha}\eta^{\frac{1}{3}}\Big\|_\infty\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \\
&+ \Big\{\frac{1}{2}\Big\|\beta_0\Big(2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a + d\Big)e^{-(1-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{1}{3}}\Big\|_\infty^2 + \|\beta_1 e^{-(m-1-\frac{r}{2})\alpha}c\|_\infty^2 \\
&+ \Big\|\beta_1\Big(m\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2a\Big)e^{-(m-r)\alpha}\eta^{\frac{1}{3}} - \beta_0 e^{-(2-r)\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}b\Big\|_\infty \\
&+ \|e^{-(n-1-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}b\|_\infty^2\Big\}\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

En utilisant $\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1$, il s'ensuit que

$$J_1 \leqslant C\Bigg(\Big(1+\|d\|_\infty+\Big\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}e^{-(n-2)\alpha}\Big\|_\infty\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt \\ +\Big\{\beta_0^2\Big(1+\|a+d\|_\infty^2+\|b\|_\infty^2+\Big\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}e^{-(1-\frac{r}{2})\alpha}\Big\|_\infty^2\Big) \\ +\beta_1^2\Big(1+\|a\|_\infty^2+\|c\|_\infty^2+\Big\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}e^{-(m-r)\alpha}\Big\|_\infty^2\Big)\Big\}\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt\Bigg).$$

Soit $j>0$; puisque

$$\alpha(x,t)=\frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)},$$

on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha(x,t)}=-\frac{(T-2t)(e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)})}{t^2(T-t)^2}e^{-j\frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}}.$$

Donc,

$$\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha(x,t)}\Big| \leqslant \frac{T(e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)})}{t^2(T-t)^2}e^{-j\frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}} \\ \leqslant Th(x)\psi(t),$$

avec

$$h(x)=e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)} \text{ et } \psi(t)=\frac{1}{t^2(T-t)^2}e^{-j\frac{h(x)}{t(T-t)}}.$$

Etudions la fonction ψ sur l'intervalle de temps $]0,T[$. Posons $z=\frac{1}{t(T-t)}$, alors nous devons étudier la fonction ψ définie par $\psi(z)=z^2e^{-jh(x)z}$, sur l'intervalle de temps $[\frac{4}{T^2},+\infty[$. On a

$$\psi'(z)=(2-jh(x)z)ze^{-jh(x)z}. \tag{E.8}$$

Nous en déduisons que si $z\leqslant\frac{2}{jh(x)}$, ψ est croissante et si $z\geqslant\frac{2}{jh(x)}$, ψ est décroissante.

Si $\frac{2}{jh(x)}\leqslant\frac{4}{T^2}$, ψ est décroissante sur $[\frac{4}{T^2},+\infty[$ et on a

$$\psi(z)\leqslant\psi(\frac{4}{T^2})=\frac{16}{T^4}e^{-jh(x)\frac{4}{T^2}}.$$

Ainsi,

$$\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(x,t)e^{-j\alpha(x,t)}\Big|\leqslant\frac{16Th(x)}{T^4}e^{-jh(x)\frac{4}{T^2}}\leqslant\frac{16e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{T^3}e^{je^{\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}\frac{4}{T^2}}.$$

Si $\frac{2}{jh(x)} > \frac{4}{T^2}$, ψ est croissante sur $[\frac{4}{T^2}, \frac{2}{jh(x)}]$ et décroissante sur $[\frac{2}{jh(x)}, +\infty[$. Nous en déduisons que

$$\psi(z) \leqslant \psi(\frac{2}{jh(x)}) = \frac{4}{(jh(x))^2} e^{-2}.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t) e^{-j\alpha(x,t)} \right| \leqslant \frac{4Th(x)e^{-2}}{(jh(x))^2} = \frac{4Te^{-2}}{j^2 h(x)}.$$

Mais $h(x) \geqslant e^{\lambda \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}(e^{\lambda \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - 1)$. D'où,

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x,t) e^{-j\alpha}(x,t) \right| \leqslant \frac{4Te^{-2}}{j^2 e^{\lambda \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}(e^{\lambda \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}} - 1)}.$$

Par conséquent, il existe une constante positive $C = C(T, \lambda_0, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)})$ telle que

$$\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} e^{-j\alpha} \right\|_\infty \leqslant C, \forall j > 0. \tag{E.9}$$

On a alors

$$\begin{aligned} J_1 \leqslant C\Big[&(1 + \|d\|_\infty) \int_Q e^{-2\alpha} \eta |\varphi_2|^2 dxdt \\ &+ |\beta|^2 (1 + \|a, b, c, d\|_\infty^2) \int_Q \eta^{\frac{1}{3}} e^{-r\alpha} |\varphi_1|^2 dxdt \Big], \end{aligned} \tag{E.10}$$

où $C = C(T, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)})$ et $|\beta|^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2$.

Estimation de J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &= 2 \int_Q e^{-n\alpha} \eta^{4/3} \varphi_2 B(t; z_2) \varphi_2 dxdt \\ &= 2 \int_Q e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} \varphi_2 \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t), t) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i \partial x_j} dxdt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_2(t),t)e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\varphi_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_i\partial x_j}dxdt\\
&= -2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\varphi_2\Big)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}dxdt\\
&= -2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_2(t),t)\Big[e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})\Big]dxdt\\
&\leqslant -2\alpha_0\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2dxdt\\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial}{\partial x_j}(|\varphi_2|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt\\
&\leqslant -2\alpha_0\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2dxdt\\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_2(t),t)|\varphi_2|^2\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-n\alpha}\eta^l) = e^{-n\alpha}\Big\{\Big(n^2\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}-n\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\eta^l\\
&\quad + l\Big[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i\partial x_j}-n\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\Big)\Big]\eta^{l-1}+l(l-1)\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\eta^{l-2}\Big\} \qquad \text{(E.11)}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&e^{2\alpha}\eta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}) = e^{-(n-2)\alpha}\Big\{\Big(n^2\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}-n\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\eta^{\frac{1}{3}}\\
&\quad +\frac{4}{3}\Big[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i\partial x_j}-n\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\Big)\Big]\eta^{-\frac{2}{3}}+\frac{4}{9}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\eta^{-\frac{5}{3}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs puisque $\eta=\xi^6$, on a pour tout $i,j\in\{1,\dots,N_0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\eta}{\partial x_j} &= 6\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\xi^5 = 6\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\eta^{5/6}\\
&= 6\xi\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\xi^4 = 6\xi\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\eta^{2/3},\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i\partial x_j} &= 6\Big(\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}\xi^5+5\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\xi^4\Big) = \xi^4\Big(6\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}+30\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\Big)\\
&= \eta^{2/3}\Big(6\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}+30\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}\Big),
\end{aligned}$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\eta^{-5/3} = 36\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega),\\
&e^{-(n-2)\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\eta^{-2/3} = -6\lambda\xi\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_j}\frac{e^{\lambda\beta}}{t(T-t)}e^{-(n-2)\frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}}\\
&\quad \in L^\infty(Q),\\
&\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j}\eta^{-2/3} = 6\xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} + 30\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega),\\
&e^{-(n-2)\alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j}\eta^{1/3} = -\lambda\Big(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_j}\Big)\xi^2\frac{e^{\lambda\beta}}{t(T-t)}\times\\
&\quad e^{-(n-2)\frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}} \in L^\infty(Q),\\
&e^{-(n-2)\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}\eta^{1/3} = \lambda^2\frac{\partial \beta}{\partial x_i}\frac{\partial \beta}{\partial x_j}\xi^2\frac{e^{2\lambda\beta}}{t^2(T-t)^2}e^{-(n-2)\frac{e^{2\lambda\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}-e^{\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}}\\
&\quad \in L^\infty(Q).
\end{aligned}
$$

En utilisant $n > 2$, nous en déduisons que

$$
\Big\|e^{2\alpha}\eta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})\Big\|_\infty \leqslant C.
$$

Revenant à J_2, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
J_2 \leqslant{}& -2\alpha_0\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt\\
&+\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q |B_{ij}(z_2(t),t)|e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 e^{2\alpha}\eta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}})dxdt.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
J_2 \leqslant -2\alpha_0\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt + 2N_0\mu C\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt, \tag{E.12}
$$

où $\mu = \min\{|\mu_0|, |\mu_1|\}$.

Estimation de J_3 :

$$
J_3 = -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta(\varphi_2 B(t;z_1)\varphi_1 + \varphi_1 B(t;z_2)\varphi_2)dxdt
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\beta_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta\Big(\varphi_2 \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad + \varphi_1 \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_i \partial x_j}\Big)dxdt \\
&= \beta_0 \int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-2\alpha}\eta\varphi_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}dxdt \\
&\quad + \beta_0 \int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-2\alpha}\eta\varphi_1)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}dxdt \\
&= \beta_0 \int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\Big(e^{-2\alpha}\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_2\Big)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}dxdt \\
&\quad + \beta_0 \int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\Big(e^{-2\alpha}\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_1\Big)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}dxdt.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}dxdt \\
&\quad + \int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-2\alpha}\eta)\varphi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\Big)dxdt \\
&= -2\int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2 e^{-\alpha}\eta^{1/2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}dxdt \\
&\quad + 6\int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial\xi}{\partial x_i}e^{-\alpha}\eta^{1/2}\varphi_2 e^{-\alpha}\eta^{1/3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}dxdt \\
&\quad - 2\int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\eta^{1/6}\varphi_1 e^{-(2-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{5/6}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}dxdt \\
&\quad + 6\int_Q \sum_{i,j=1}^{N_0} B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial\xi}{\partial x_i}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\eta^{1/6}\varphi_1 e^{-(2-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{2/3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}dxdt \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{N_0}\Big[\int_Q \Big(e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 + \Big|B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2 e^{-2\alpha}\eta\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2\Big)dxdt \\
&\quad + 3\int_Q \Big(e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 + \Big|B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2 e^{-2\alpha}\eta^{2/3}\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2\Big)dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_Q\Big(e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2+\Big|B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2e^{-(4-r)\alpha}\eta^{5/3}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2\Big)dxdt\\
&+3\int_Q\Big(e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2+\Big|B_{ij}(z_2(t),t)\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2e^{-(4-r)\alpha}\eta^{4/3}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2\Big)\Big]dxdt\\
\leqslant{}& 8N_0\Big(\int_Q e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2dxdt+\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt\Big)\\
&+\mu^2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{2/3}\Big)e^{-2\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2dxdt\\
&+\mu^2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{5/3}+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{4/3}\Big)e^{-(4-r)\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2dxdt,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
J_3\leqslant{}& 2\beta_0\mu\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q e^{-2\alpha}\eta\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|dxdt\\
&+\beta_0\Big[8N_0\Big(\int_Q e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2+\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2\Big)dxdt\\
&+\mu^2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{2/3}\Big)e^{-2\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2dxdt\\
&+\mu^2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{5/3}+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{4/3}\Big)e^{-(4-r)\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2dxdt\Big].
\end{aligned}
\tag{E.13}
$$

Estimation de J_4 :

$$
\begin{aligned}
J_4&=2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1B(t;z_1)\varphi_1dxdt\\
&=2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1\sum_{i,j=1}^{N_0}B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i\partial x_j}dxdt\\
&=2\beta_1\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_1(t),t)e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i\partial x_j}dxdt\\
&=-2\beta_1\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\varphi_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}dxdt\\
&=-2\beta_1\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q B_{ij}(z_1(t),t)\Big(e^{-m\alpha}\eta^{2/3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3})\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big)dxdt.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
J_4 \leqslant & -2\beta_1\alpha_0 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt \\
& - \beta_1 \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_Q B_{ij}(z_1(t),t)\frac{\partial}{\partial x_j}(|\varphi_1|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3})dxdt \\
\leqslant & -2\beta_1\alpha_0 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt \\
& + \beta_1 \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_Q B_{ij}(z_1(t),t)|\varphi_1|^2\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3})dxdt.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
J_4 \leqslant & -2\beta_1\alpha_0 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt \\
& + \beta_1 \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_Q B_{ij}(z_1(t),t)e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3})e^{-r\alpha}\eta^{\frac{1}{3}}|\varphi_1|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

D'après (E.11), on a

$$\begin{aligned}
e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3}) = & \; e^{-(m-r)\alpha}\Big\{\Big(m^2\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j} - m\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\partial x_j}\Big)\eta^{\frac{1}{3}} \\
& + \frac{2}{3}\Big[\frac{\partial^2\eta}{\partial x_i\partial x_j} - m\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\Big)\Big]\eta^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\eta^{-\frac{5}{3}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Comme précédemment en utilisant $m > 1 + \dfrac{r}{2}$ et $r < 2$, nous obtenons :

$$\Big\|e^{r\alpha}\eta^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(e^{-m\alpha}\eta^{2/3})\Big\|_\infty \leqslant C,$$

nous en déduisons que,

$$\begin{aligned}
J_4 \leqslant & -2\beta_1\alpha_0 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt \\
& + \beta_1 C \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_Q B_{ij}(z_1(t),t)\eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt \\
J_4 \leqslant & \; \beta_1\Big[-2\alpha_0\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt + 2C\mu_1 N_0\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt\Big].
\end{aligned} \tag{E.14}$$

Estimation de J_5 :

$$J_5 = 2\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}\varphi_2 N(\varphi)dxdt = 2\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2 e^{\alpha}\eta^{-\frac{1}{2}}N(\varphi)dxdt$$
$$= 2\int_Q e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2 e^{-(n-1)\alpha}\eta^{\frac{5}{6}}N(\varphi)dxdt$$
$$J_5 \leqslant \int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt + \int_Q e^{-2(n-1)\alpha}\eta^{\frac{5}{3}}|N(\varphi)|^2dxdt. \tag{E.15}$$

Estimation de J_6 :

$$J_6 = -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_2 M(\varphi)dxdt = -\beta_0\int_Q e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}\varphi_2 e^{-\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}M(\varphi)dxdt$$
$$J_6 \leqslant \frac{\beta_0}{2}\Big(\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2dxdt + \int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2dxdt\Big). \tag{E.16}$$

Estimation de J_7 :

$$J_7 = -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\varphi_1 N(\varphi)dxdt$$
$$= -\beta_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta\eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1\eta^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{r}{2}\alpha}N(\varphi)dxdt$$
$$= -\beta_0\int_Q \eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1 e^{-(2-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{5}{6}}N(\varphi)dxdt$$
$$J_7 \leqslant \frac{\beta_0}{2}\Big(\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt + \int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{\frac{5}{3}}|N(\varphi)|^2dxdt\Big). \tag{E.17}$$

Estimation de J_8 :

$$J_8 = 2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}\varphi_1 M(\varphi)dxdt$$
$$= 2\beta_1\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1\eta^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{r}{2}\alpha}M(\varphi)dxdt$$
$$= 2\beta_1\int_Q \eta^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{r}{2}\alpha}\varphi_1 e^{-(m-\frac{r}{2})\alpha}\eta^{\frac{1}{2}}M(\varphi)dxdt$$
$$J_8 \leqslant \beta_1\Big(\int_Q \eta^{\frac{1}{3}}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2dxdt + \int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2dxdt\Big). \tag{E.18}$$

Alors, de (E.3), des conditions (E.7) et des estimations (E.10),(E.12)-(E.18), on a au vu de (E.6) :

$$
\begin{aligned}
\beta_0 c_0 \int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant C\Big[&\Big(1+\beta_0+\|d\|_\infty\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \\
&+|\beta|^2\Big(1+\|a,b,c,d\|_\infty^2\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt \\
&-2\alpha_0\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt + 2\beta_0\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q e^{-2\alpha}\eta\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big| dxdt \\
&+\beta_0\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{2/3}\Big)e^{-2\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt \\
&+\beta_0\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{5/3}+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{4/3}\Big)e^{-(4-r)\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt\Big] \\
&-2\beta_1\alpha_0\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt + \int_Q e^{-2(n-1)\alpha}\eta^{\frac{5}{3}}|N(\varphi)|^2 dxdt \\
&+\frac{\beta_0}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt + \frac{\beta_0}{2}\int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt \\
&+\beta_1\int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt\Big],
\end{aligned}
\tag{E.19}
$$

où $C = C(T,\lambda_0,\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)},\mu_0,\mu_1,N_0)$. Nous voulons que le terme $C\Big(1+\beta_0+\|d\|_\infty\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt$ soit absorbé par le terme $\beta_0 c_0\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt$ dans le membre de gauche de (E.19), i.e. $\beta_0 c_0 > C(1+\beta_0+\|d\|_\infty)$. En fixant β_0 tel que $\beta_0(c_0-C) > C(1+\|d\|_\infty)$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant C\Big[&\frac{|\beta|^2}{\beta_0}\Big(1+\|a,b,c,d\|_\infty^2\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt \\
&-2\frac{\alpha_0}{\beta_0}\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt + 2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q e^{-2\alpha}\eta\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big| dxdt \\
&+\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{2/3}\Big)e^{-2\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt \\
&+\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q\Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{5/3}+3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{4/3}\Big)e^{-(4-r)\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\frac{\beta_1}{\beta_0}\alpha_0 \int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt + \frac{1}{\beta_0}\int_Q e^{-2(n-1)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt \\
&+ \frac{\beta_1}{\beta_0}\int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt\Big].
\end{aligned}
$$

Supposons que $n+m \leqslant 4$, alors on a en particulier

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q \Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta + 3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{2/3}\Big)e^{-2\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt \\
&+ \sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q \Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{5/3} + 3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{4/3}\Big)e^{-(4-r)\alpha}\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q \Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{1/3}e^{-(2-m)\alpha}\eta^{2/3}e^{-m\alpha} \\
&\qquad + 3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{2/3}e^{-2\alpha}\Big)\Big|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt \\
&\qquad + \sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q \Big(\Big|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{1/3}e^{-(m-r)\alpha}\eta^{4/3}e^{-(4-m)\alpha} \\
&\qquad + 3\Big|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\Big|^2\eta^{4/3}e^{-(4-r)\alpha}\Big)\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\Big|^2 dxdt\Big] \\
&\leqslant 2C\Big(\int_Q \eta^{2/3}e^{-m\alpha}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt + \int_Q \eta^{4/3}e^{-n\alpha}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt\Big).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt &\leqslant C\Big[\frac{|\beta|^2}{\beta_0}\Big(1+\|a,b,c,d\|_\infty^2\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt \\
&+ 2\Big(1-\frac{\alpha_0}{\beta_0}\Big)\int_Q e^{-n\alpha}\eta^{\frac{4}{3}}|\nabla\varphi_2|^2 dxdt + 2\sum_{i,j=1}^{N_0}\int_Q e^{-2\alpha}\eta\Big|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\Big| dxdt \\
&+ 2\Big(1-\frac{\beta_1}{\beta_0}\alpha_0\Big)\int_Q e^{-m\alpha}\eta^{2/3}|\nabla\varphi_1|^2 dxdt + \frac{1}{\beta_0}\int_Q e^{-2(n-1)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{-(4-r)\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt \\
&+ \frac{\beta_1}{\beta_0}\int_Q e^{-(2m-r)\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt\Big].
\end{aligned}
$$

Posons

$$p = -(\beta_0 - \alpha_0) \text{ et } q = -(\beta_0 - \beta_1 \alpha_0),$$

et considérons le terme

$$-\frac{2p}{\beta_0} \int_Q e^{-n\alpha} \eta^{4/3} |\nabla \varphi_2|^2 dxdt + 2 \sum_{i,j=1}^{N_0} \int_Q e^{-2\alpha} \eta \Big| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \Big| dxdt \\ - \frac{2q}{\beta_0} \int_Q e^{-m\alpha} \eta^{2/3} |\nabla \varphi_1|^2 dxdt \quad \text{(E.20)}$$

dans le membre de droite de l'inégalité précédente. Supposons de plus que $\beta_0^2 N_0^2 \leqslant 2pq$, alors

$$(\beta_0 N_0 e^{-2\alpha} \eta)^2 \leqslant 2pq e^{-4\alpha} \eta^2 \leqslant 2pq e^{-(n+m)\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} \leqslant 2(p e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}})(q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}}),$$

donc

$$\begin{aligned}
&\Big(2\beta_0 N_0 e^{-2\alpha} \eta \sum_{i,j=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \Big| \Big)^2 \\
&\leqslant 2 \left(2p e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} \Big(\sum_{i=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \Big| \Big)^2 \right) \left(2q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}} \Big(\sum_{j=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \Big| \Big)^2 \right) \\
&\leqslant 2 \Big(2N_0 p e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} \sum_{i=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \Big|^2 \Big) \Big(2N_0 q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}} \sum_{j=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \\
&\leqslant (2N_0 p e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} |\nabla \varphi_2|^2)^2 + (2N_0 q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}} |\nabla \varphi_1|^2)^2.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
2\beta_0 e^{-2\alpha} \eta \sum_{i,j=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \Big| &\leqslant \sqrt{(2p e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} |\nabla \varphi_2|^2)^2 + (2q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}} |\nabla \varphi_1|^2)^2} \\
&\leqslant 2p e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} |\nabla \varphi_2|^2 + 2q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}} |\nabla \varphi_1|^2,
\end{aligned}$$

ainsi

$$2 \int_Q e^{-2\alpha} \eta \sum_{i,j=1}^{N_0} \Big| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \Big| dxdt \leqslant \frac{2p}{\beta_0} \int_Q e^{-n\alpha} \eta^{\frac{4}{3}} |\nabla \varphi_2|^2 dxdt \\ + \frac{2q}{\beta_0} \int_Q e^{-m\alpha} \eta^{\frac{2}{3}} |\nabla \varphi_1|^2 dxdt,$$

et la quantité (E.20) est négative. Par conséquent, au vu de $n > 2$ ($\Rightarrow 2(n-1) > 2$), $2 > r$ ($\Rightarrow 4 - r > 2$) et $m > 1 + \frac{r}{2}$ ($\Rightarrow 2m - r > 2$), il vient :

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant C\Big[\frac{|\beta|^2}{\beta_0}\Big(1 + \|a,b,c,d\|_\infty^2\Big)\int_Q \eta^{1/3}e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt \\ + \Big(\frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{2}\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta^{5/3}|N(\varphi)|^2 dxdt \\ + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\Big)\int_Q e^{-2\alpha}\eta|M(\varphi)|^2 dxdt\Big].\end{aligned}$$

On a avec les propriétés de η :

$$\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\alpha}|\varphi_2|^2 dxdt = \int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt \leqslant \int_Q e^{-2\alpha}\eta|\varphi_2|^2 dxdt,$$

et en utilisant les conditions suivantes,

$$\begin{aligned}& n > 2, \quad m > 1 + \frac{r}{2}, \quad r < 2, \quad n + m \leqslant 4, \\ & \beta_0, \beta_1 \geqslant 1, \quad \beta_0 > \alpha_0, \quad \beta_1 < \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \\ & p = -(\beta_0 - \alpha_0), \quad q = -(\beta_0 - \beta_1\alpha_0), \quad \beta_0^2 N_0^2 \leqslant 2pq, \\ & \beta_0(c_0 - C) > C(1 + \|d\|_\infty), \quad \tau \geqslant \tau_1,\end{aligned} \tag{E.21}$$

(par exemple $(n,m,r) = \Big(2+\frac{1}{16}, 2-\frac{1}{8}, \frac{3}{2}\Big)$ et $(\beta_0,\beta_1) = (1+\alpha_0(2+N_0^2), 2+N_0^2)$ vérifient les conditions (E.21)), nous arrivons finalement à,

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2\alpha}|\varphi_2|^2 dxdt \\ &\quad \leqslant C\Big(\int_Q e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2 dxdt + \int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt\Big), \\ &\quad = C\Big(\int_0^T\int_{\omega''} e^{-r\alpha}\eta^{1/3}|\varphi_1|^2 dxdt + \int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt\Big), \\ &\quad \leqslant C\Big(\int_G e^{-r\alpha}|\varphi_1|^2 dxdt + \int_Q e^{-2\alpha}(|M(\varphi)|^2 + |N(\varphi)|^2)dxdt\Big)\end{aligned}$$

avec $C = C(\mu_0, \mu_1, N_0, c_0, \alpha_0, \|a,b,c,d\|_\infty, \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}, T)$.

Bibliographie

[1] Grégoire Allaire. *Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2012.

[2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey. *Mathematical Control and Related Fields*, 1(3) :267–306, 2011.

[3] G.O. Antunes, F.A. Araruna, and L.A. Medeiros. Simultaneous controllability for a system with resistance term. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3(1) :31–40, 2002.

[4] S. A. Avdonin and W. Moran. Simultaneous control problems for systems of elastic strings and beams. *Systems & Control Letters*, 44 :147–155, 2001.

[5] O. Bodart, M. González-Burgos, and R. Pérez-García. Insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 335 :677–682, 2002.

[6] O. Bodart, M. González-Burgos, and R. Pérez-García. Existence of insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity. *Communications in Partial Differential Equations*, 29(7-8), 2004.

[7] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, Paris, 1993.

[8] M. Chipot and B. Lovat. Some remarks on non local elliptic and parabolic problems. *Nonlinear analysis, Theory, Methods & Applications*, 30(7) :4619–4627, 1997.

[9] M. Chipot and B. Lovat. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems. *Positivity*, 3 :65–81, 1999.

[10] M. Chipot and B. Lovat. Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 8 :35–51, 2001.

[11] Michel Chipot. *Elements of Nonlinear Analysis*. Birkhäuser Advanced Texts :Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[12] N.-H. Chang & M. Chipot. Nonlinear nonlocal evolution problems. *Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Revista*, 97(3) :423–445, 2003.

[13] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1998.

[14] C. Fabre, J.-P. Puel, and Enrique Zuazua. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 125 A :31–61, 1995.

[15] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, S. Guerrero, and J.-P. Puel. Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : the linear case. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 12 :442–465, 2006.

[16] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and L. De Teresa. Boundary controllability of parabolic coupled equations. *Journal of Functional Analysis*, 259 :1720–1758, 2010.

[17] E. Fernández-Cara and S. Guerrero. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. CONTROL OPTIM.*, 45(4) :1395–1446, 2006.

[18] E. Fernández-Cara, J. Limaco, and S. B. de Menezes. Null controllability for a parabolic equation with nonlocal linearities. *Systems & Control Letters*, 61 :107–111, 2012.

[19] A. V. Fursikov. *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*, volume 187. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[20] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of Evolution Equations*. Lecture Notes, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea, 1996.

[21] M. González-Burgos and L. de Teresa. Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force. *Port. Math.*, 67(1) :91–113, 2010.

[22] M. González-Burgos and R. Pérez-Garcia. Controllability of some coupled systems by one control force. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 340 :125–130, 2005.

[23] M. González-Burgos and R. Pérez-García. Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force. *Asymptotic Analysis*, 46 :123–162, 2006.

[24] S. Guerrero. Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force. *Siam J. Control Optim.*, 46(2) :379–394, 2007.

[25] O. Yu. Imanuvilov. Controllability of parabolic equations. *Sbornik : Mathematics*, 186(6) :879–800, 1995.

[26] B.V. Kapitonov and G.P. Menzala. Simultaneous exact controllability for Maxwell equations and for a second-order hyperbolic system. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2010(24) :1–13, 2010.

[27] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, and C. Dupaix. Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force. *J. Math. Anal. Appl.*, 320 :928–943, 2006.

[28] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and I. Kostin. Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force. *SIAM J. Control Optim.*, 42(5) :1661–1680, 2003.

[29] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and I. Kostin. Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force. *ESAIM : COCV*, 11 :426–448, 2005.

[30] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, volume 23.

[31] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Commun. in Partial Differential Equations*, 20(1& 2) :335–356, 1995.

[32] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[33] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués 1.* Masson, Paris, 1988.

[34] J.-L. Lions. *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes.* Masson, 1992.

[35] C. Louis-Rose. A null controllability problem with a finite number of constraints on the normal derivative for the semilinear heat equation. *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, (95) :1–34, 2012.

[36] C. Louis-Rose. Simultaneous null controllability with constraint on the control. *Applied Mathematics and Computation*, 219 :6372–6392, 2013.

[37] B. Lucquin. *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations.* ellipses, 2004.

[38] G. M. Mophou. Null controllability with constraints on the state for nonlinear heat equations. *Forum. Math.*, 23 :285–319, 2011.

[39] G. Massengo Mophou and O. Nakoulima. Sentinels with given sensitivity. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, 19 :21–40, 2008.

[40] G. Massengo Mophou and O. Nakoulima. Null controllability with constraints on the state for the semilinear heat equation. *J Optim Theory Appl*, 143 :539–565, 2009.

[41] G. Massengo Mophou and J.-P. Puel. Boundary sentinels with given sensitivity. *Rev. Mat. Complut.*, 22(1) :165–185, 2009.

[42] O. Nakoulima. Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 339 :405–410, 2004.

[43] O. Nakoulima. Optimal control for distributed systems subject to null-controllability. Application to discriminating sentinels. *ESAIM : COCV*, 13(4) :623–638, 2007.

[44] J.-P. Puel. *Applications of global Carleman inequalities to controllability and inverse problems*. Textos de Metodos Matematicos de l'Instituto de Matematica de l'UFRJ, 2008.

[45] Jean-Pierre Puel. *Aspects de la théorie du contrôle*, chapter Contrôle et Equations aux dérivées Partielles. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2008.

[46] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1998.

[47] L. Rosier and L. de Teresa. Exact controllability of a cascade system of conservative equations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 349 :291–296, 2011.

[48] D. L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 52(3) :189–211, 1973.

[49] D. L. Russell. The Dirichlet-Neumann boundary control problem associated with Maxwell's equations in a cylindrical region. *SIAM J. Control and Optimization*, 24(2) :199–229, 1986.

[50] M. Chipot & M. Siegwart. On the asymptotic behaviour of some nonlocal mixed boundary value problems. *Nonlinear analysis and applications*, 1 :431–449, 2003.

[51] M. Tucsnak and G. Weiss. Simultaneous exact controllability and some applications. *SIAM J. Control. Optim.*, 38(5) :1408–1427, 2000.

[52] G. Wang and L. Zhang. Exact local controllability of a one-control reaction-diffusion system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 131(3) :453–467, 2006.