AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

lgipm

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

en

Automatique, Traitement du signal et des images, Génie informatique

École doctorale IAEM Lorraine
UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique - Metz

Présentée par

Houssam CHOUIKHI

Optimisation des stratégies de maintenance verte pour les systèmes de production de biens et de services

Soutenue le 13 Décembre 2012, devant la commission d'examen:

Rapporteurs

M. Abdelhakim ARTIBA	Professeur, Université de Valenciennes
M. Ali GHARBI	Professeur, Université du Québec

Examinateurs

M. Bruno CASTANIER	Maître assistant, École des Mines de Nantes
Mme. Zineb SIMEU-ABAZI	Maître de conférences, Université Joseph Fourier

Directeur de thèse

M. Nidhal REZG	Professeur, Université de Lorraine

Co-directeur de thèse

M. Abdelhakim KHATAB	Maître de conférences, École Nationale d'Ingénieurs de Metz

Table des matières

Liste des figures **v**

Liste des tableaux **vii**

Introduction générale **1**

1 Cadre de l'étude : État de l'art et problématique de la thèse **5**

1.1 Introduction 6

1.2 Dégradation des systèmes de production 8

1.2.1 Systèmes de production 9

1.2.2 Défaillance des systèmes de production 9

1.2.3 Modèles de dégradation 10

1.3 Stratégies de maintenance 12

1.3.1 Évolution de la maintenance 12

1.3.2 Types de maintenance 14

1.3.3 Optimisation des stratégies de maintenance 15

1.4 Stratégies d'inspection 17

1.5 Stratégies d'inspection et de maintenance 18

1.5.1 Critère de coût 18

1.5.2 Critère de disponibilité 19

1.6 Problématique de la thèse 20

1.7 Conclusion 21

2 Optimisation du coût de maintenance d'un système de production à dégradation continue soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle 23
2.1 Introduction . . . 24
2.2 Description du problème : notations et hypothèses . . . 25
2.2.1 Notations . . . 25
2.2.2 Hypothèses . . . 27
2.3 Modèle mathématique . . . 27
2.4 Méthode d'optimisation . . . 32
2.5 Procédure numérique . . . 33
2.6 Exemples numériques . . . 36
2.6.1 Stratégie d'inspection périodique . . . 36
2.6.1.1 Expérience 1 : impact de C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ . . . 37
2.6.1.2 Expérience 2 : impact de H sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ . . . 40
2.6.2 Stratégie d'inspection séquentielle . . . 42
2.6.2.1 Expérience 1 : impact de C_d sur $J(\Theta^*)$ et δ . . . 43
2.6.2.2 Expérience 2 : impact de H sur $J(\Theta^*)$ et δ . . . 45
2.7 Conclusion . . . 47

3 Optimisation de la disponibilité stationnaire d'un système de production à dégradation continue soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle 49
3.1 Introduction . . . 50
3.2 Description du problème : notations et hypothèses . . . 51
3.2.1 Notations . . . 51
3.2.2 Hypothèses . . . 52
3.3 Modèles mathématiques . . . 52
3.3.1 Premier modèle : Disponibilité stationnaire du système A_{s1} . . . 53
3.3.2 Deuxième modèle : Disponibilité stationnaire du système A_{s2} . . . 56
3.4 Procédure numérique . . . 59
3.5 Exemple numérique . . . 60
3.5.1 Expérience 1 : impact de la durée T_c sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$ . . . 61
3.5.2 Expérience 2 : impact de la durée T_p sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$ . . . 62
3.5.3 Expérience 3 : impact de la durée T_i sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$ . . . 63
3.5.4 Expérience 4 : impact de la durée H sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$ . . . 64
3.6 Conclusion . . . 65

4 Optimisation sous contrainte du coût de maintenance et de la disponibilité d'un système de production à dégradation continue soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle **67**

4.1 Introduction . . . 68
4.2 Description du problème : notations et hypothèses . . . 69
4.2.1 Notations . . . 69
4.2.2 Hypothèses . . . 70
4.3 Modèles mathématiques . . . 71
4.3.1 Modèle de coût . . . 71
4.3.2 Modèle de disponibilité . . . 76
4.4 Exemple numérique . . . 77
4.4.1 Influence de C_d sur les critères d'optimisation . . . 80
4.4.2 Influence de C_s sur les critères d'optimisation . . . 84
4.5 Conclusion . . . 87

Conclusion générale et perspectives **89**

Références bibliographiques **93**

Annexes **99**

1 Principe de la méthode de Nelder-Mead . . . 99
2 Organigramme de la procédure numérique développée . . . 102

Liste des figures

2.1 Planification de la maintenance préventive 26
2.2 Organigramme de la procédure numérique développée (cas de minimisation du coût total moyen par unité de temps J) 35
2.3 Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique 39
2.4 Influence du coût de pénalité C_d sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique 39
2.5 Influence de la durée H sur $J(\Delta\theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique 41
2.6 Influence de la durée H sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique 41
2.7 Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle 44
2.8 Influence du coût de pénalité C_d sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle 44
2.9 Influence de la durée H sur $J(\Theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle 46
2.10 Influence de la durée H sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle 46

3.1 Le temps de bon fonctionnement du système dans le cas où le cycle se termine par une maintenance corrective 54
3.2 Le temps de bon fonctionnement du système dans le cas où le cycle se termine par une maintenance préventive 54

3.3 Le temps de dégradation excessive dans le cas où le cycle se termine par une maintenance corrective 57
3.4 Le temps de dégradation excessive dans le cas où le cycle se termine par une maintenance préventive 58

4.1 Le cas où le système tombe en panne avant la date d'inspection θ_k 73
4.2 Le cas où le système tombe en panne avant la date prévue de la maintenance préventive $\theta_k + H$ 74
4.3 Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Theta^*)$ dans le cas où $C_s = 375$ 83
4.4 Influence du coût de pénalité C_d sur $A_s(\Theta^*)$ dans le cas où $C_s = 375$ 83
4.5 Influence du coût de pénalité C_d sur $\delta(\Theta^*)$ dans le cas où $C_s = 375$ 83
4.6 Influence du coût de pénurie C_s sur $J(\Theta^*)$ dans le cas où $C_d = 20$ 86
4.7 Influence du coût de pénurie C_s sur $A_s(\Theta^*)$ dans le cas où $C_d = 20$ 86
4.8 Influence du coût de pénurie C_s sur $\delta(\Theta^*)$ dans le cas où $C_d = 20$ 86

A.1 Simplexe bidimensionnel 101
A.2 Organigramme de la procédure numérique développée (cas de maximisation de la disponibilité stationnaire A_{s1} ou A_{s2}) 102

Liste des tableaux

2.1 Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique. 38
2.2 Influence de la durée H sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique. 40
2.3 Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle. 43
2.4 Influence de la durée H sur $J(\Theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle. 45

3.1 Impact de la durée T_c sur $A_{s1}(\Theta^*)$ 61
3.2 Impact de la durée T_c sur $A_{s2}(\Theta^*)$ 62
3.3 Impact de la durée T_p sur $A_{s1}(\Theta^*)$ 62
3.4 Impact de la durée T_p sur $A_{s2}(\Theta^*)$ 63
3.5 Impact de la durée T_i sur $A_{s1}(\Theta^*)$ 63
3.6 Impact de la durée T_i sur $A_{s2}(\Theta^*)$ 64
3.7 Impact de la durée H sur $A_{s1}(\Theta^*)$. 65
3.8 Impact de la durée H sur $A_{s2}(\Theta^*)$. 65

4.1 Résultats d'optimisation dans le cas où $C_d = 20$ et $C_s = 375$. 79
4.2 Résultats d'optimisation dans le cas où $C_d = 0, 10, 20$, et 30 et $C_s = 375$. . . . 81
4.3 Résultats d'optimisation dans le cas où $C_s = 0, 125, 250$, et 375 et $C_d = 20$. . . 84

Introduction générale

L'objectif principal de toute entreprise consiste à maximiser les profits et minimiser les pertes. Ainsi, les stratégies de maintenance adoptées s'orientent vers la réduction des coûts des actions de maintenance et/ou l'amélioration de la disponibilité du système de production à maintenir. D'autre part, les actions de maintenance peuvent contribuer à l'amélioration de la qualité de l'environnement. Ce dernier peut être en effet dégradé suite à la défaillance, voire même à l'exploitation, du système de production. Dès lors, les entreprises doivent répondre aux exigences des normes nationales et internationales pour la protection de l'environnement. Pour cela, il est nécessaire d'adopter de nouvelles stratégies de maintenance, développées dans le but non seulement de maximiser les profits mais aussi dans une logique de contribuer à une stratégie de bien durable et ainsi réduire la dégradation du système et son impact sur l'environnement.

Peu de travaux dans la littérature traitant des modèles mathématiques de stratégies d'inspection et de maintenance intègrent l'impact de la dégradation des systèmes sur l'environnement. Nos investigations consistent alors à développer des modèles mathématiques de stratégies de maintenance conditionnelle qui tiennent compte de l'impact de la dégradation du système sur la qualité de l'environnement. Dans les travaux de cette thèse, la dégradation du système de production étudié est continue croissante et supposée avoir un impact sur l'environnement. Les stratégies de maintenance considérées consistent à maintenir le système à un état de bon fonctionnement tout en limitant la dégradation de l'environnement. Pour contrôler la dégradation du système, des opérations d'inspection sont réalisées. Le dépassement d'un niveau de dégradation spécifié provoque une action de maintenance préventive, alors qu'une action de maintenance corrective est exécutée immédiatement à la détection de la panne du système. La planification d'inspection est l'objectif de ces travaux de thèse. Cette planification permettrait

d'anticiper le niveau excessif de dégradation du système. Les dates optimales d'inspection sont obtenues soit par minimisation du coût total moyen par unité de temps, soit par maximisation de la disponibilité stationnaire du système. Des problèmes d'optimisation sous contrainte sont aussi abordés où l'objectif est de minimiser le coût total moyen par unité de temps en respectant un niveau requis de disponibilité stationnaire, ou encore de maximiser la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Des procédures numériques basées sur la méthode de Nelder-Mead sont proposées afin de garantir une résolution efficace.

Cette thèse se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction générale sur l'impact des systèmes de production sur l'environnement. Une étude bibliographique est effectuée afin de situer les travaux de cette thèse par rapport à la littérature. Lors de cette étude bibliographique, nous avons rencontré de nombreux modèles illustrant la diversité des hypothèses qui peuvent être posées sur le système, sur son mode de dégradation, sur les exigences et les objectifs de la stratégie de maintenance à mettre en place, etc. L'objectif est de montrer l'intérêt de la démarche de modélisation pour l'optimisation de la maintenance. Par la suite, le chapitre expose la problématique ainsi que les objectifs de nos travaux de thèse.

Le deuxième chapitre présente une stratégie de maintenance conditionnelle pour un système de production afin de réduire l'impact causé par sa dégradation sur l'environnement. Le niveau de dégradation du système est contrôlé par inspection alors que la panne du système est supposée être auto-déclarée. Deux types d'action de maintenance sont considérés : corrective et préventive. Selon le résultat d'inspection, une action de maintenance préventive peut être planifiée, alors qu'une action de maintenance corrective est exécutée immédiatement en cas de panne du système. Chaque action de maintenance préventive est planifiée seulement si le niveau de dégradation est supérieur à un seuil fixé. Les durées de ces actions d'inspection et de maintenance sont, dans ce chapitre, supposées être négligeables. L'objectif consiste à déterminer les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps. Ce coût est engendré par les coûts des actions de maintenance et d'inspection ainsi que le coût de pénalité dû à la dégradation de l'environnement. Un modèle mathématique de coût est proposé et les dates d'inspection sont calculées pour deux types de stratégie d'inspection : périodique et séquentielle. En se basant sur l'algorithme de Nelder-Mead, une procédure numérique est développée pour calculer les dates optimales d'inspection. Des exemples numériques sont donnés afin d'illustrer la stratégie de maintenance proposée. Des études de sensibilité sont réalisées.

Les résultats obtenus permettent de montrer l'intérêt de prendre en compte le coût de pénalité dû à la dégradation de l'environnement dans la modélisation du problème.

Le troisième chapitre décrit une stratégie de maintenance conditionnelle dont l'objectif est de maximiser la disponibilité stationnaire d'un système de production. Le cadre de l'étude de ce chapitre est similaire à celui du deuxième chapitre. Cependant, les temps correspondants aux divers arrêts d'inspection et de maintenance ne sont plus négligeables. Deux modèles de disponibilité sont alors proposés. Le premier modèle considère la disponibilité stationnaire du système tandis que le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système supposé être indisponible après le dépassement du seuil de dégradation. L'objectif consiste aussi à déterminer les dates optimales d'inspection pour chaque critère de performance. Pour calculer les solutions optimales, une procédure numérique est développée en se basant sur l'algorithme de Nelder-Mead introduit dans le deuxième chapitre. Des exemples numériques sont enfin fournis comme illustration des modèles de disponibilité proposés. Une étude de sensibilité est réalisée. Les résultats obtenus permettent de montrer l'impact de la variation des durées des actions de maintenance et d'inspection sur la dégradation du système d'une part, et que le deuxième modèle de disponibilité stationnaire permet de réduire davantage la dégradation du système d'autre part.

Le quatrième chapitre propose une stratégie de maintenance conditionnelle dont l'objectif, dans un premier temps, est de trouver les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps en respectant un niveau requis de disponibilité stationnaire. Dans un second temps, l'objectif sera de trouver les dates d'inspection qui maximisent la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Le cadre de l'étude de ce chapitre est similaire à celui des deux chapitres précédents. Cependant, la panne du système n'est plus auto-déclarée. En d'autres termes, la panne du système n'est connue que suite à une opération d'inspection. Le niveau de dégradation du système ainsi que son état de panne sont alors contrôlés par des inspections séquentielles. En se basant sur les résultats d'inspection, une maintenance préventive est planifiée à la détection du dépassement d'un seuil de dégradation spécifié, alors qu'une maintenance corrective est exécutée immédiatement à la détection de la panne. Un modèle de coût et un modèle de disponibilité sont étudiés. Ces deux modèles sont une généralisation de ceux présentés dans les deux chapitres précédents. Un exemple numérique est proposé afin d'illustrer les modèles mathématiques développés.

Enfin, une conclusion générale et des perspectives sont abordées à la fin de la présente thèse.

Les travaux présentés dans cette thèse ont fait l'objet de publications dans 2 revues [16, 20] et 4 conférences internationales avec actes [15, 17–19].

Chapitre 1

Cadre de l'étude : État de l'art et problématique de la thèse

Résumé

Dans ce chapitre, une introduction générale sur l'impact des systèmes de production sur l'environnement est présentée. Une étude bibliographique est effectuée afin de situer les travaux de cette thèse par rapport à la littérature. Lors de cette étude bibliographique, nous avons rencontré de nombreux modèles illustrant la diversité des hypothèses qui peuvent être posées sur le système, sur son mode de dégradation, sur les exigences et les objectifs de la stratégie de maintenance à mettre en place, etc. L'objectif est de montrer l'intérêt de la démarche de modélisation pour l'optimisation de la maintenance. Par la suite, le chapitre expose la problématique ainsi que les objectifs de nos travaux de thèse.

1.1 Introduction

Au fil du temps, tout système de production se dégrade par l'âge et par l'usage. Et si aucune action de maintenance n'est exécutée, le processus de dégradation du système mène à une défaillance de celui-ci. Cette défaillance interrompt le processus normal de production. Cela entraîne une perte de production et une diminution des profits. D'autre part, la maintenance régulière peut éliminer les temps d'arrêt causés par la défaillance du système. Cependant, le coût correspondant de maintenance augmente et les profits diminuent. Par conséquent, il est clair qu'une stratégie de maintenance appropriée est nécessaire pour que le système de production puisse fonctionner de la manière la plus rentable.

La concurrence industrielle incite les entreprises à chercher la qualité et la réduction des coûts, tout en fournissant les clients dans les délais demandés. Depuis un certain temps, la maintenance est devenue l'une des fonctions stratégiques de l'entreprise, puisqu'elle représente le moyen privilégié pour maintenir un niveau de disponibilité acceptable. La dégradation de l'environnement, causée par les systèmes de production de biens et de services, engendre des pénalités que les entreprises cherchent à éviter. L'entreprise doit mener une stratégie de maintenance efficace pour ses systèmes de production afin d'améliorer leurs disponibilités et réduire les dépenses liées à la maintenance et aux pénalités réglementaires. Un management judicieux de la maintenance est un moyen important pour réduire les coûts et accroître la compétitivité des entreprises.

Les systèmes de production de biens et de services représentent la grande partie du capital de la plupart des industries. Ces systèmes sont soumis à une dégradation aléatoire liée à l'âge et à l'usage de tels systèmes. Cette dégradation influence non seulement la qualité du produit mais aussi celle de l'environnement. En fait, la dégradation des systèmes industriels peut avoir de multiples impacts sur l'environnement. Actuellement, les entreprises doivent répondre aux exigences des normes pour la protection de l'environnement. Par exemple, de nombreux gaz émis dans l'atmosphère contribuent à l'effet de serre qui réchauffe la surface de la Terre. Les fluides frigorigènes utilisés dans les climatiseurs et dans de nombreux procédés industriels, tels que les centrales nucléaires et les plates-formes pétrochimiques, sont considérés comme gaz à effet de serre. L'augmentation de la concentration atmosphérique de ces gaz est probablement la cause la plus importante du réchauffement climatique actuel.

Le rejet des eaux industrielles dans les rivières affecte aussi la qualité de l'environnement.

Aujourd'hui, la pollution de la Moselle, par exemple, provient essentiellement de l'activité sidérurgique implantée en aval de la Vallée de la Fensch [35]. L'assainissement de ces eaux industrielles est incomplet et les rejets qui affectent la Fensch de façon chronique concourent fortement à la dégradation du milieu récepteur. Malgré le fonctionnement des stations d'épurations, la pollution industrielle reste importante aussi bien au niveau physico-chimique qu'au niveau biologique. Afin de réduire les émissions des polluants, de nombreuses taxes ont été introduites dans les dernières décennies. En France par exemple, la taxe générale sur les activités polluantes (TGAP) est appliquée aux installations classées pour la protection de l'environnement (ICPE) pour limiter ou éliminer les polluants. Aux États-Unis (US), les activités de prévention de la pollution ont augmenté énormément au cours des vingt dernières années. Le programme de prévention de la pollution (P2) est supposé être l'un des principaux moyens de réduction de la pollution [9]. Le programme P2 consiste à réduire la pollution avant qu'elle ne soit générée [30].

Pour satisfaire les exigences relatives aux normes législatives, les entreprises doivent développer et mettre en œuvre des méthodes et des stratégies innovatrices permettant de maximiser leurs profits d'une part, et d'exploiter rationnellement les ressources matérielles disponibles d'autre part. Cette exploitation doit être réalisée en tenant compte des impacts de la dégradation des systèmes industriels sur l'environnement. Ces impacts sont plus importants dans le cas des systèmes de transport (avionique, maritime, etc.) et des centrales nucléaires, pour n'en citer que quelques-uns. En effet, l'exploitation anormale de ces systèmes conduit à leur dégradation qui a malheureusement une incidence non négligeable sur l'environnement. Par exemple, dans une centrale nucléaire, les fuites importantes de réfrigérant sont induites par la dégradation de l'étanchéité de l'arbre mécanique du compresseur frigorifique. La fuite du gaz à effet de serre devient excessive lorsque sa valeur mesurée par inspection dépasse un seuil spécifié par les normes en vigueur. La fuite excessive de ce gaz peut considérablement influer sur l'environnement. Dans les industries du plastique, les matières premières utilisées sont sous formes de pastilles, poudre ou feuilles constitués par le polymère principal avec plusieurs additifs (par exemple, plastifiants, stabilisants, antioxydants, pigments). Les procédés de fabrication dépendent à la fois des caractéristiques du polymère et celles des transformations. Durant la transformation du plastique, des produits toxiques peuvent pénétrer dans l'environnement de travail dû au chauffage du plastique. Une analyse complète de l'environnement, visant la recherche des polluants qui peuvent être dégagés, est habituellement réalisée dans l'analyse du risque environnemental.

Afin d'assurer une exploitation rationnelle et une performance nominale des systèmes in-

dustriels d'une part, et pour maintenir une qualité élevée du produit et pour répondre aux exigences des normes de protection de l'environnement d'autre part, des activités d'inspection et de maintenance sont généralement réalisées pour anticiper une panne du système. Une telle panne peut être due à un niveau excessif de dégradation du système de production. En réduisant cette dégradation, celle de l'environnement se trouve par conséquent réduite. En effet, l'inspection permet de contrôler le processus de dégradation du système de production et de recueillir les données essentielles d'étude de fiabilité. En analysant ces données, des informations sur le niveau de dégradation du système peuvent être obtenues. Après chaque inspection, deux décisions doivent être prises : la première décision est de déterminer le type de maintenance à effectuer. Le système doit être alors remplacé, restauré, ou encore laissé tel qu'il est. La deuxième décision concerne la date de la prochaine inspection. L'importance croissante de la maintenance a conduit à un intérêt toujours plus grand dans le développement et dans la mise en œuvre de modèles de maintenance pour les systèmes de production. Les modèles existants dans la littérature reposent sur des hypothèses concernant par exemple, le processus de dégradation du système, la stratégie d'inspection et/ou de maintenance, l'objectif des modèles d'inspection et/ou de maintenance, le critère d'optimisation, etc.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : quelques définitions concernant les systèmes de production ainsi qu'une présentation des modèles de dégradation des systèmes sont données à la section suivante. Quelques stratégies de maintenance sont présentées à la Section 1.3, où les types de maintenance sont donnés. La Section 1.4 est dédiée à la présentation de quelques stratégies d'inspection. Quelques stratégies d'inspection et de maintenance sont présentées à la Section 1.5, et classées selon le critère d'optimisation, critère de coût et critère de disponibilité. Dans la Section 1.6, la problématique ainsi que les objectifs de nos travaux de thèse sont exposés. La conclusion est exposée à la Section 1.7.

1.2 Dégradation des systèmes de production

Cette section est consacrée à la définition de la dégradation des systèmes de production ainsi qu'à la présentation des modèles de dégradation. Outre la définition de la dégradation, quelques définitions concernant le système de production et ses caractéristiques sont données. Ces différentes définitions se basent sur la littérature dans le domaine de maintenance ainsi que la norme française NF EN 13306 du Juin 2001 [2].

1.2.1 Systèmes de production

Selon le dictionnaire « Le lexique finance du site Trader-Finance » [65], un système de production est défini comme suit :
« Un système de production regroupe l'ensemble des éléments matériels et immatériels qui sont nécessaires à la production de biens ou de services par une entreprise. Un système de production d'une entreprise est un processus d'addition de valeur à des biens ou à des services qui répondent à des objectifs de quantité, de prix, de qualité et de délai ». L'ensemble des sous-systèmes (« éléments matériels et immatériels ») est en interaction afin d'assurer le bon déroulement du processus de transformation de la matière d'œuvre d'entrée en matière d'oeuvre de sortie. D'ailleurs, si l'état d'un sous-système se modifie suite à une défaillance, l'état du système est lui-même modifié.

1.2.2 Défaillance des systèmes de production

Selon la norme NF EN 13306 [2], la défaillance est définie comme la « cessation de l'aptitude d'un bien à accomplir une fonction requise. Après une défaillance, le bien est en panne, totale ou partielle. Une défaillance est un événement à distinguer d'une panne qui est un état ». On dira qu'un système de production est en état de défaillance lorsqu'il n'est plus en mesure de remplir la mission pour laquelle il a été conçu. Cette défaillance peut être due à sa conception, sa fabrication, son installation, voire même sa maintenance. Tout système de production est sujet au vieillissement et à l'usure [67]. Ces phénomènes physiques provoquent la défaillance qui a un impact important sur le coût d'exploitation du système ou sur la sécurité. D'autres phénomènes physiques comme l'érosion [68] et la corrosion [55] provoquent la défaillance des systèmes de production. Après l'apparition de telles défaillances, le système de production est déclaré en état de panne. En effet, la panne du système, selon la norme NF EN 13306 [2], est définie comme l'« état d'un bien inapte à accomplir une fonction requise, excluant l'inaptitude due à la maintenance préventive ou à d'autres actions programmées ou à un manque de ressources extérieures. »

Dans la littérature, plusieurs auteurs ont présenté de nombreuses classifications des défaillances. Par exemple, Rausand et Hoyland [54] ont classifié les défaillances selon la cause (défaillance primaire, secondaire, ou due à une mauvaise commande), selon le temps (défaillance graduelle (progressive) ou soudaine), selon la détectabilité (défaillance apparente ou cachée), et selon le degré (défaillance partielle ou complète). La défaillance primaire est due à un défaut de conception du système de production. La défaillance secondaire est due à un défaut de fa-

brication. Deloux [23] a classifié les défaillances selon la cause d'une part, et selon l'impact sur les performances du système d'autre part.

1. La classification des défaillances par cause distingue les défaillances aléatoires des défaillances systématiques.
   - Les défaillances aléatoires sont des défaillances physiques pour lesquelles les performances du système diminuent. Elles peuvent être liées à la dégradation du système (vieillissement du système) ou à des stress excessifs du système (sollicitations extérieures du système ou erreurs humaines durant la maintenance).
   - Les défaillances systématiques peuvent être liées à la conception du système de production, à sa fabrication, ou aux interactions avec le milieu extérieur. Ces défaillances induisent la diminution des performances du système alors que ce dernier n'est physiquement pas dégradé. Les défaillances systématiques peuvent être éliminées uniquement par une modification de la conception, du processus de fabrication, ou des procédures d'opération.
2. La classification des défaillances en fonction de leurs impacts sur les performances du système distingue les défaillances intermittentes des défaillances étendues.
   - Les défaillances intermittentes résultent d'une perte de certaines fonctions du système pour une courte durée. Le système retrouve ses performances d'opération juste après la défaillance.
   - Les défaillances étendues résultent d'une perte de certaines fonctions du système. Cette perte perdure dans le temps jusqu'à ce que le système soit restauré (remplacé ou réparé). La défaillance étendue peut être complète (perte totale de la fonction principale) ou partielle (perte de certaines fonctions). La défaillance étendue peut être soudaine (non prédite par test) ou graduelle (prédite par test ou inspection). Une défaillance graduelle implique une perte progressive des performances du système. Cette défaillance est connue dans la littérature par dégradation. Selon la norme NF EN 13306 [2], la dégradation est l'« évolution irréversible d'une ou plusieurs caractéristiques d'un bien liée au temps, à la durée d'utilisation ou à une cause externe ».

1.2.3 Modèles de dégradation

Les modèles stochastiques de dégradation sont des modèles mathématiques qui décrivent la dégradation du système au cours du temps. La modélisation de la dégradation a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature. Cette dégradation induit souvent la diminution de la performance du système de production. Dans la plupart des travaux, la défaillance du système

se produit lorsque le niveau de dégradation atteint un certain seuil. Les modèles de dégradation permettent de modéliser l'état dans lequel peut se retrouver un système de production. Cet état n'est pas réduit aux états de marche et de panne. On distingue en général des états de dégradation intermédiaires qui permettent de transiter successivement entre l'état neuf ou le moins dégradé et l'état de panne. Ces modèles permettent alors de trouver les lois de dégradation qui vont donner les dates de réalisation de ces différents états intermédiaires ainsi que le temps passé dans chaque état.

Dans la littérature, deux mécanismes primaires sont nécessaires pour la modélisation du processus de dégradation au cours du temps. Le premier mécanisme consiste à utiliser une distribution existante des durées de vie du système, alors que le deuxième mécanisme consiste à contrôler le phénomène physique (corrosion, érosion, etc.) qui provoque la défaillance. Booher [8] distingue trois modèles de dégradation : (1) modèle de choc, (2) modèle d'usure, et (3) modèle hybride qui combine les deux premiers (choc et usure). Les modèles de chocs, initiés par Esary *et al.* [25], sont efficaces dans la modélisation d'une dégradation résultante de sollicitations différentes appliquées sur le système d'une manière discrète dans le temps. Cependant, les modèles d'usures peuvent être exploités pour modéliser la dégradation du système d'une manière continue dans le temps. Les modèles hybrides considèrent l'effet combiné d'usures et de chocs sur les durées de vie du système. Ces modèles composés permettent de modéliser la dégradation pour une variété de systèmes.

Les modèles de dégradation peuvent être aussi classés, selon Deloux [23], en deux catégories : (1) modèles à dégradation discrète et (2) modèles à dégradation continue. Les modèles à dégradation discrète permettent de modéliser des dégradations de type chocs. Dans ce cas, l'état de dégradation du système passe d'un état à un autre par un incrément de type saut. Les incréments s'ajoutent jusqu'à la défaillance totale du système. Les processus markoviens [24, 38] ou semi-markoviens [26, 33] peuvent être utilisés pour modéliser à la fois l'instant du choc et l'état dans lequel se retrouve le système. Les modèles à dégradation continue supposent la connaissance des lois des incréments de dégradation entre deux instants consécutifs. Ces modèles permettent de prédire le niveau de dégradation du système à tout instant [37, 51]. Ces outils mathématiques sont largement abordés dans de nombreux livres tels que [27], [28], [34], [36], [44], et [56].

1.3 Stratégies de maintenance

Selon la norme NF EN 13306 [2], la maintenance est l'« ensemble de toutes les actions techniques, administratives et de management durant le cycle de vie d'un bien, destinées à le maintenir ou à le rétablir dans un état dans lequel il peut accomplir la fonction requise ». En d'autres termes, la maintenance apporte une contribution essentielle à la sûreté de fonctionnement d'un système de production de biens et de services. Afin d'assurer le bon fonctionnement de ses systèmes de production, toute organisation de maintenance peut définir sa stratégie de maintenance selon trois critères principaux : (1) assurer la disponibilité de l'ensemble des systèmes de production pour les fonctions requises, au coût optimum, (2) tenir compte des exigences de sécurité relatives aux systèmes à la fois pour le personnel de maintenance et le personnel d'exploitation en tenant compte des conséquences sur l'environnement, et (3) améliorer la durabilité du système et/ou la qualité du produit ou du service fourni, au coût optimum. À l'image de son évolution et de la variété de ses applications, la maintenance est constituée d'activités variées qui vont du simple nettoyage des composants jusqu'à des activités complexes comme leurs modifications et remplacements [1].

1.3.1 Évolution de la maintenance

Avant la révolution industrielle, la maintenance consistait en des activités des artisans (menuisier, forgeron, soudeur, maçons, etc.) dans la réparation des bâtiments, des machines primitives, et des moyens de transport de l'époque. Comme il n'y avait pas la notion de pièces de rechange, toute pièce défaillante était soit réparée, soit remplacée par une nouvelle pièce fabriquée. Par ailleurs, la réparation était à l'ordre du jour et les structures de base étaient elles mêmes soit réparables, soit d'une grande durabilité, ou les deux à la fois. En l'absence de méthodes pour le calcul de la fatigue et autres concepts liés à la dégradation, la conception et la réparation étaient fortement intégrées. En effet, pour remplacer une pièce défaillante jugée partiellement efficace par le propriétaire, ce dernier exigeait une autre pièce plus fiable. Toutes ces pratiques étaient liées à l'évolution lente et au faible coût de ces services de l'époque. Ces pratiques ont progressivement évolué à partir de la révolution industrielle [62]. Le concept, lent à l'époque, de pièces de rechange, s'est progressivement accéléré. Cette accélération est fortement accentuée par la complexité croissante des systèmes de production. Le travail de l'agent de maintenance s'est alors progressivement dirigé vers de plus larges aptitudes au diagnostic. Un autre facteur important de ce changement était le contrôle de qualité des produits et/ou des services. Récemment, l'automatisation dans les systèmes manufacturiers a rendu le rempla-

cement des pièces ou des unités entières plus rapide et plus facile que les réparations dans la plupart des cas [1]. Les approches pour la gestion de maintenance ont considérablement évolué au cours du vingtième siècle.

Jusqu'en 1940, seule la maintenance corrective était pratiquée et dont le coût était supposé comme un coût inévitable. La maintenance corrective est la « maintenance exécutée après détection d'une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise » [2]. À l'époque, les agents de maintenance n'avaient comme objectif que la remise en état des systèmes de production en cas de panne. La maintenance n'était pas envisagée à la conception, et ses impacts sur les performances des systèmes n'étaient pas connus. La maintenance préventive est apparue dans l'industrie militaire pendant la deuxième guerre mondiale. La maintenance préventive est la « maintenance exécutée à des intervalles prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinée à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien » [2]. Une large pratique de la maintenance préventive était connue par les Allemands qui ont fortement poussé à l'exigence de plus en plus de fiabilité. Ils ont accordé une importance stratégique à la maintenance [1]. La maintenance périodique était initialement destinée à améliorer la sûreté plutôt qu'à accroître la disponibilité ou à réduire les coûts.

Depuis 1950, les modèles des stratégies de maintenance sont apparus de façon croissante. Cette évolution peut être observée à travers de nombreux travaux publiés sur la maintenance et qui sont regroupés et analysés dans plusieurs travaux de synthèse et états de l'art tels que [12], [22], [59], [61], [62]. Ces différents travaux présentent des modèles de différentes stratégies de maintenance ainsi que la sélection optimale des paramètres de ces stratégies. Depuis 1970, l'impact réel des actions de maintenance sur la performance des systèmes de production était abordé. Des approches intégrées de la maintenance ont évolué aussi bien dans le domaine publique que privé. Il apparut de plus en plus que la maintenance ne devrait pas qu'être vue dans un contexte opérationnelle en considérant les défaillances des équipements et leurs conséquences. Elle devait tenir compte aussi bien des retombées économiques que des normes nationales et internationales de plus en plus exigeantes. Ainsi, l'évolution de la maintenance et des outils pour son management ont donné à la maintenance diverses pratiques au sein de l'entreprise [1]. Avec l'évolution importante de la technologie lors des dernières décennies, la télémaintenance a pris une place particulière dans les industries manufacturières [41]. Ce concept permet de faire le contrôle et le suivi de l'évolution de l'état des systèmes de production.

1.3.2 Types de maintenance

Les stratégies de maintenance peuvent être classées en deux catégories : la maintenance corrective et la maintenance préventive. On rappelle que la maintenance corrective est effectuée en cas de défaillance du système alors que la maintenance préventive est réalisée lorsque le système est encore en fonctionnement.

1. La maintenance corrective peut être palliative (réparation provisoire) ou curative (réparation complète). La maintenance corrective est utilisée lorsque l'indisponibilité du système n'a pas de conséquences majeures sur le processus de fabrication ou quand les règles de sécurité ne sont pas exigeantes.

2. La maintenance préventive a pour objectif de réduire la probabilité de défaillance. Une synthèse des stratégies de maintenance préventive est donnée par Rausand et Hoyland [54]. La maintenance préventive peut être systématique, conditionnelle, ou prévisionnelle.
   - On parle de maintenance systématique lorsque la maintenance préventive est réalisée à des intervalles prédéterminés. Dans ce cas, l'action de maintenance est effectuée conformément à un calendrier déterminé à priori (échéancier), sans contrôle préalable de l'état du système.
   - On parle de maintenance conditionnelle lorsque l'action de maintenance préventive est subordonnée au contrôle d'évolution de paramètres significatifs de la dégradation. Les paramètres significatifs de la dégradation peuvent être des mesures de caractéristiques physiques du système (épaisseur d'un matériau, degré d'érosion, température, pression, etc.). La planification d'une maintenance conditionnelle repose sur la détermination de seuils critiques (seuils de décision) pour ces paramètres de dégradation.
   - La maintenance prévisionnelle est une maintenance conditionnelle exécutée en suivant les prévisions extrapolées de l'analyse et de l'évaluation de paramètres significatifs de la dégradation du système. Ces prévisions peuvent concerner, par exemple, la durée de vie résiduelle du système de production.

Les actions de maintenance ont un impact sur le taux de défaillance du système. Selon cet impact, les stratégies de maintenance peuvent être classées en trois catégories : (1) la maintenance parfaite, (2) la maintenance minimale, et (3) la maintenance imparfaite qui est apparue pour modéliser un état intermédiaire [60].

1. La maintenance parfaite peut être considérée comme un remplacement ou une réparation permettant de remettre le système dans un état aussi bon que neuf « as good as new ».

Formellement, après une action de maintenance parfaite, la distribution des durées de vie et la fonction du taux de défaillance sont les mêmes que celles d'un système neuf.

2. La maintenance minimale a pour but de remettre le système dans un état opérationnel aussi mauvais que vieux « as bad as old », et plus précisément à l'état dans lequel il était juste avant la défaillance.
3. La maintenance imparfaite est une maintenance intermédiaire, entre la maintenance parfaite et la maintenance minimale.

Afin de réduire les coûts des actions de maintenance et de maximiser la durée de bon fonctionnement du système de production, de nombreux travaux traitent de l'optimisation des stratégies de maintenance. L'objectif des stratégies de maintenance est souvent de prévoir les dates ainsi que la nature des interventions (réparation complète, réparation minimale, inspection, etc.) en minimisant un critère de coût fixé à priori (coût d'intervention, coût dû à une panne générale, coût de surveillance, etc.). Pour répondre à ce genre de problème, il est souvent nécessaire de s'appuyer sur une modélisation mathématique capable de capturer la complexité des problèmes abordés. Cette complexité est engendrée dans la plupart des cas par la diversité des scénarios d'évolution du système de production. La modélisation mathématique permet alors de quantifier les coûts et les gains engendrés par diverses actions de maintenance, alors que l'optimisation de tels modèles permet de déterminer la stratégie de maintenance la plus rentable. L'optimisation des stratégies de maintenance à partir des modèles stochastiques a été largement développée depuis 1950.

1.3.3 Optimisation des stratégies de maintenance

Dans un grand nombre de domaines (aéronautique, nucléaire, etc.), il est nécessaire de prouver en amont la performance de la stratégie de maintenance choisie. Ces preuves nécessitent de disposer d'un modèle de maintenance permettant d'estimer l'impact d'une décision de maintenance sur l'exploitation future du système. Le développement des modèles de maintenance a fait l'objet de nombreux travaux et a donné lieu à la publication d'articles de synthèse largement référencés [22, 59, 69]. Par exemple, Wang [69] a examiné les principales stratégies de maintenance existantes pour des systèmes à un ou plusieurs composants. Depuis 1950, beaucoup de travaux de recherche ont porté sur la modélisation de la maintenance dans le but de minimiser les coûts de maintenance et maximiser la durée de bon fonctionnement des systèmes de production [69]. La plupart des travaux en modélisation et en optimisation de la maintenance font l'hypothèse que l'état du système est connu en permanence. On peut distinguer deux classes de modèles

de maintenance : (1) modèles de maintenance pour des systèmes dont les durées de vie sont connues, et (2) modèles de maintenance pour des systèmes dont la dégradation est connue. Les modèles de maintenance pour des systèmes dont les durées de vie sont connues reposent sur la connaissance du temps de bon fonctionnement du système pour la détermination des dates de remplacement. On différencie deux familles de stratégies de maintenance basées sur la connaissance du temps de bon fonctionnement du système : les stratégies de maintenance type âge, et les stratégies de maintenance type bloc. Ces stratégies se distinguent par la prise en compte de l'historique de défaillances du système dans la détermination des dates de maintenance. La stratégie de maintenance type âge, introduite initialement par Barlow et Proschan [6], suggère de remplacer le système à la panne ou après T temps de bon fonctionnement. La stratégie de maintenance type bloc, introduite initialement par Nakagawa [48] , suggère de remplacer le système après une période prédéterminée de temps (T, $2T$, ...) indépendamment de l'âge et de l'état du système. Les modèles de maintenance pour des systèmes à dégradation connue reposent sur la connaissance du niveau de dégradation du système pour prendre des décisions de maintenance. Quelques travaux seront cités par la suite.

À partir des modèles théoriques de maintenance, les stratégies optimales de maintenance peuvent être obtenues à l'aide des outils de programmation (algorithmes d'optimisation). L'optimisation d'une stratégie de maintenance consiste à trouver les dates optimales d'interventions pour exécuter la maintenance (préventive ou corrective) tout en respectant les objectifs fixés. Ces dates sont déterminées de manière à optimiser un critère de décision donné. Ce critère de décision peut être aussi bien le coût que la disponibilité du système ou encore sa fiabilité ou d'autre indice tel que la sécurité. Ces critères sont liés à la durée d'exploitation du système qui peut être considérée sur un horizon de temps fini ou infini. Dans la littérature, une majorité de travaux menés concerne des horizons de temps infini. De nombreux modèles de stratégies de maintenance ont été adaptés dans le cas où l'horizon de temps est considéré fini [47].

La majorité des travaux publiés sont dédiés à l'optimisation de la maintenance préventive systématique. Cependant, une attention particulière a été accordée à l'optimisation de la maintenance préventive conditionnelle lors des dernières décennies. On rappelle que la maintenance conditionnelle nécessite une connaissance de l'état de dégradation du système. Cet état de dégradation peut être obtenu par inspection.

1.4 Stratégies d'inspection

Selon la norme NF EN 13306 [2], une inspection est un « contrôle de conformité réalisé en mesurant, observant, testant ou calibrant les caractéristiques significatives d'un bien. En général, l'inspection peut être réalisée avant, pendant ou après d'autres activités de maintenance ». En d'autres termes, les inspections sont nécessaires pour contrôler la dégradation du système de production et/ou son état de fonctionnement. Dans la littérature, on distingue deux familles de stratégies d'inspection : (1) les stratégies d'inspection périodique, et (2) les stratégies d'inspection séquentielle. Dans le cas des stratégies d'inspection périodique, la durée entre deux inspections consécutives est constante. Les inspections périodiques sont adaptées particulièrement aux systèmes complexes (les avions, les navires, etc.) qui ne peuvent être inspectés à n'importe quel moment. Dans le cas des stratégies d'inspection séquentielle, la durée entre deux inspections consécutives est variable (cette durée est souvent décroissante). Les inspections séquentielles sont adaptées aux systèmes moins complexes qui peuvent être inspectés plus facilement et permettent une grande liberté pour la planification des inspections.

Depuis 1960, les problèmes d'inspection ont reçu une grande attention et plusieurs modèles ont été développés. Parmi les premiers travaux, on peut citer ceux de Barlow *et al.* [5] qui ont introduit une stratégie d'inspection dont l'objectif est de minimiser le coût total moyen engendré par les coûts des activités d'inspection ainsi que le coût de pénalité dû à l'inactivité du système. Dans [5], un algorithme basé sur une relation de récurrence est proposé pour calculer les dates optimales d'inspection. Plusieurs extensions du modèle de Barlow *et al.* [5] ont été proposées dans la littérature. Dans Munford et Shahani [45], une stratégie d'inspection presque optimale a été suggérée et une solution proche de celle de Barlow *et al.* [5] est proposée. La stratégie développée dans Munford et Shahani [45] a été exploitée par Munford et Shahani [46] pour résoudre le même problème dans le cas où la durée de vie du système est distribuée selon une loi de Weibull. Dans [46], des méthodes numériques et empiriques sont utilisées pour résoudre le problème étudié initialement par Munford et Shahani [45]. Sur la base des travaux de Munford et Shahani [45, 46], Tadikamalla [63] a proposé des méthodes pour calculer les dates optimales d'inspection pour un système de production dont la durée de vie suit une loi gamma.

Dans les dernières décennies, différents travaux de synthèse et états de l'art ont fait le point sur les stratégies d'inspection et de maintenance existantes dans la littérature. Par exemple, Chelbi et Aït-Kadi [12] ont présenté une vue d'ensemble sur nombreuses contributions portant sur le développement des stratégies d'inspection et de maintenance pour les systèmes à dégra-

dation aléatoire. L'objectif de ces stratégies consiste souvent à trouver les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps ou celles qui maximisent la disponibilité stationnaire du système. Toutefois, le seuil de maintenance préventive pourrait être considéré comme une variable de décision supplémentaire. Afin de traiter le développement des problèmes d'inspection et de maintenance, la section suivante donne quelques exemples de stratégies d'inspection et de maintenance.

1.5 Stratégies d'inspection et de maintenance

Dans cette section, les modèles d'inspection et de maintenance pour les systèmes de production sont classés selon le critère d'optimisation, qui peut être un critère de coût ou un critère de disponibilité.

1.5.1 Critère de coût

Les problèmes de maintenance conditionnelle ont reçu une grande attention et plusieurs modèles ont été développés dans la littérature. Par exemple, Turco et Parolini [66] ont proposé une stratégie de maintenance conditionnelle pour un système soumis à une défaillance aléatoire. Dans [66], deux stratégies d'inspection, séquentielle et périodique, sont étudiées et pour chacune d'elles les dates optimales d'inspection sont évaluées. Dans [66], la stratégie d'inspection séquentielle est similaire à celle de Munford et Shahani [45]. Le modèle de maintenance proposé par Turco et Parolini [66] a été ensuite exploité dans la littérature. Pellegrin [52] propose une extension du modèle de Turco et Parolini [66] en considérant les durées des actions d'inspection et de maintenance non négligeables. Dans [52], deux modèles de maintenance sont considérés, un modèle de coût et un modèle de disponibilité du système. Dans [52], une méthode graphique est proposée pour calculer les dates optimales d'inspection. Chelbi et Aït-Kadi [11] ont exploité le modèle de maintenance proposé dans [66] pour traiter le cas de panne non auto-déclarée, c.-à-d. que la panne est détectée uniquement par inspection. Dans [11], un coût de pénalité est intégré dans la modélisation mathématique du coût. Ce coût de pénalité est dû à l'inactivité du système entre l'occurrence et la détection de la panne. Une stratégie d'inspection séquentielle a été adoptée dans [11]. D'autres auteurs ont pris en compte le coût induit par l'inactivité du système dans la modélisation des coûts de maintenance, comme par exemple Bérenguer *et al.* [7], Grall *et al.* [29], Yang *et al.* [72], et Huynh *et al.* [32]. Bérenguer *et al.* [7] ont proposé une modélisation analytique d'une stratégie de maintenance conditionnelle pour un système à dégradation stochastique continue. Dans [7], le seuil de maintenance préventive ainsi que

la date d'inspection sont considérés comme des variables de décision. Basé sur un processus de décision semi-markovien, les variables de décision sont calculées afin de minimiser le coût moyen par unité de temps induit par les actions d'inspection et de maintenance ainsi que le coût d'inactivité du système.

Grall *et al.* [29] ont développé un modèle mathématique de coût pour un système soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle. Dans [29], les dates optimales d'inspection ainsi que le seuil optimal de maintenance sont calculés pour le système étudié. Yang *et al.* [72] ont développé un modèle de coût où les coûts de production sont pris en considération en plus des coûts de maintenance. Dans [72], le coût induit par la maintenance corrective est considéré comme un coût de pénalité. Basé sur un algorithme génétique, une procédure d'optimisation est proposée par Yang *et al.* [72] pour calculer les dates optimales de maintenance. Huynh *et al.* [32] ont adopté une stratégie de maintenance conditionnelle couplée à une stratégie d'inspection périodique. Des modèles mathématiques de coût sont alors proposés où la période d'inter-inspection ainsi que le seuil de maintenance préventive sont calculés. Badía *et al.* [4] ont considéré un système dont l'état est supposé être connu avec une incertitude. L'objectif dans [4] est de minimiser le coût total moyen par unité de temps induit par les coûts des actions d'inspection et de maintenance. Tian *et al.* [64] ont développé un modèle de programmation pour traiter un problème d'optimisation multi-objectif d'une stratégie de maintenance conditionnelle. Dans [64], deux objectifs d'optimisation sont considérés, le coût de maintenance et la fiabilité du système. Ces deux fonctions objectives sont formulées en se basant sur un modèle de risques proportionnels (Proportional hazard model (PHM)). Orth *et al.* [50] ont également considéré le PHM comme une technique de prise de décision. Dans [50], différentes techniques de prise de décision sont discutées dans le cas d'une stratégie de maintenance conditionnelle.

1.5.2 Critère de disponibilité

Dans la littérature, plusieurs travaux sont dédiés aux stratégies d'inspection/maintenance ayant comme objectif de maximiser la disponibilité du système. Chelbi *et al.* [13] ont étendu les travaux de Badía *et al.* [4]. Dans [13], des solutions numériques ont été présentées dans le cas d'une panne qui suit une loi normale ou de Weibull. Sarkar et Sarkar [58] ont étudié la disponibilité d'un système inspecté périodiquement et soumis à une réparation parfaite dont le temps est non négligeable. Dans [58], la période optimale d'inter-inspection a été évaluée pour maximiser la disponibilité stationnaire du système dans le cas où la durée de vie du système suit une loi gamma ou exponentielle.

Basé sur les modèles de Sarkar et Sarkar [58], Cui et Xie [21] ont étudié la disponibilité d'un système sujet à des inspections périodiques. Les résultats obtenus dans [21] sont comparés à ceux obtenus dans [58]. Liao *et al.* [43] ont proposé une stratégie de maintenance conditionnelle pour un système à dégradation continue contrôlé en temps réel. Cette stratégie de maintenance consiste à maximiser la disponibilité d'un système soumis à des actions de maintenance imparfaite. Liao *et al.* [43] ont proposé un algorithme afin de déterminer le seuil optimal de maintenance préventive pour un système à dégradation modélisée par un processus gamma. Aït-Kadi et Chelbi [3] ont étudié une stratégie d'inspection pour un système, soumis à des chocs, dont les pannes sont non auto-déclarées. Dans [3], une procédure de calcul basée sur une interpolation cubique spline a été mise en œuvre afin de déterminer la période optimale d'inter-inspection.

1.6 Problématique de la thèse

Les systèmes de production de biens et de services sont souvent soumis à une dégradation aléatoire liée à l'âge et à l'usage de tels systèmes. Cette dégradation influence non seulement la qualité du produit mais aussi celle de l'environnement. Afin de réduire la dégradation de l'environnement, de nombreuses taxes ont été introduites par la législation. Pour satisfaire les exigences relatives aux normes législatives, les entreprises doivent développer et mettre en œuvre des méthodes et des stratégies innovatrices permettant de maximiser leurs profits d'une part, et d'exploiter rationnellement les ressources matérielles disponibles d'autre part. Cette exploitation doit être réalisée en tenant compte des impacts de la dégradation des systèmes de production sur l'environnement. Peu de travaux dans la littérature traitant des stratégies d'inspection et de maintenance intègrent l'impact de la dégradation des systèmes sur l'environnement. Nos investigations consistent alors à développer des modèles mathématiques de stratégies de maintenance conditionnelle qui permettent de tenir compte explicitement mais aussi d'analyser l'impact de la dégradation du système sur la qualité de l'environnement.

Dans ce travail, des stratégies de maintenance conditionnelle sont proposées pour un système de production de biens et de de services. Ce système de production est sujet à une dégradation continue croissante. Nous supposons que l'environnement se détériore avec la dégradation du système. Cette dégradation est jugée excessive, et par conséquent induit un coût de pénalité, quand elle dépasse un seuil spécifié. Les stratégies de maintenance proposées consistent à

contrôler la dégradation du système de manière à réduire la dégradation de l'environnement. Pour contrôler cette dégradation, des inspections sont effectuées. Une maintenance préventive est exécutée si une opération d'inspection révèle que le niveau de dégradation du système a dépassé un seuil spécifié. Une maintenance corrective, quant à elle, est exécutée à la détection de la panne. L'objectif est de déterminer les dates optimales d'inspection sur un horizon infini et qui optimisent un critère de performance. Dans nos travaux, le critère d'optimisation est soit le coût total moyen par unité de temps, soit la disponibilité stationnaire du système. Le coût total moyen est engendré par les coûts des actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) ainsi que les coûts de pénalités dus au niveau excessif de dégradation de l'environnement d'une part, et à l'inactivité du système d'autre part. La disponibilité stationnaire du système est exprimée en fonction des durées moyennes des actions d'inspection et de maintenance, de la durée moyenne d'inactivité du système, et de la durée moyenne de bon fonctionnement du système. Dans la présente thèse, l'optimisation sous contrainte est aussi abordée où l'objectif est soit de minimiser le coût total moyen par unité de temps sous une contrainte de disponibilité, soit de maximiser la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. La méthode de Nelder-Mead est choisie dans ce travail, comme une technique de résolution, pour résoudre les problèmes développés. Des exemples numériques sont alors donnés afin d'illustrer les modèles mathématiques proposés.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons souligné la nécessité de bien organiser les actions d'inspection et/ou de maintenance dans le temps pour répondre à des exigences d'utilisation prédéfinies d'un système de production de biens et de services. Nous avons vu qu'il est nécessaire d'élaborer des modèles d'inspection et/ou de maintenance qui prennent en considération les caractéristiques des systèmes de production. Dans ce chapitre, quelques travaux existants dans la littérature ont été présentés. Ces travaux ont pour objectif de montrer l'intérêt de la démarche de modélisation pour l'optimisation de la maintenance. Les chapitres suivants présenteront les résultats obtenus dans nos travaux de thèse.

Chapitre 2

Optimisation du coût de maintenance d'un système de production à dégradation continue soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle

Résumé

Dans ce chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle est proposée pour un système de production afin de réduire l'impact causé par sa dégradation continue sur l'environnement. Deux types d'action de maintenance sont considérés : corrective et préventive. L'action de maintenance préventive est effectuée en se basant sur le contrôle du niveau de dégradation du système, tandis que l'action de maintenance corrective est exécutée en cas de panne du système. Cette panne est supposée être auto-déclarée, c.-à-d. que la panne est détectée à l'occurrence. Chaque action de maintenance préventive est planifiée seulement si le résultat d'inspection du niveau de dégradation du système est supérieur à un seuil fixé. Les durées de ces actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) sont supposées être négligeables. L'objectif consiste à déterminer les dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps. Ce coût est engendré par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ainsi que le coût de pénalité dû à la dégradation de l'environnement. Un modèle mathématique du problème est proposé et les dates d'inspection sont calculées pour deux types de stratégie d'inspection, périodique et séquentielle. En se basant sur l'algorithme de Nelder-Mead, une procédure numérique est développée pour calculer les dates optimales d'inspection. Des exemples numériques sont donnés afin d'illustrer l'approche proposée.

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une étude bibliographique a été effectuée afin de situer les travaux de cette thèse par rapport à la littérature. Lors de cette étude bibliographique, nous avons rencontré de nombreux modèles illustrant la diversité des hypothèses qui peuvent être posées sur le système, sur son mode de dégradation, sur les exigences et les objectifs de la stratégie de maintenance à mettre en place, etc. L'objectif du chapitre 1 était de montrer l'intérêt de la démarche de modélisation pour l'optimisation de la maintenance. Cette optimisation consiste à trouver les dates optimales d'interventions pour exécuter l'inspection et/ou la maintenance. On remarque que le critère de performance le plus fréquemment rencontré dans la littérature est le coût total moyen par unité de temps, alors que le deuxième critère de performance est la disponibilité stationnaire du système. Dans le présent chapitre, on s'intéresse à la minimisation du coût total moyen par unité de temps, alors que le chapitre suivant considère la maximisation de la disponibilité stationnaire du système.

Dans ce chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle est proposée afin de prendre en compte l'impact de la dégradation du système sur l'environnement. Cette stratégie de maintenance consiste à réduire la dégradation afin de préserver l'environnement, à travers les actions de maintenance préventive. Le système considéré est soumis à une dégradation continue croissante. Les pannes du système sont supposées être auto-déclarées (c.-à-d. que la panne est détectée à l'occurrence), tandis que le niveau de dégradation du système n'est connu que par inspection. En se basant sur le contrôle du niveau de dégradation, une action de maintenance préventive peut être planifiée, alors qu'une action de maintenance corrective est exécutée immédiatement en cas de panne du système. L'action de maintenance préventive est planifiée lorsque le niveau de dégradation du système franchit un seuil fixé. Les durées de ces actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) sont supposées être négligeables. L'objectif consiste à déterminer les dates optimales d'inspection afin de minimiser le coût total moyen par unité de temps. Un tel coût est induit par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection, ainsi que le coût de pénalité dû à l'impact de la dégradation du système sur l'environnement. Pour résoudre le problème d'optimisation, une procédure numérique basée sur la méthode de Nelder-Mead est proposée. La méthode de Nelder-Mead est une méthode de recherche directe exploitée dans la littérature pour résoudre les problèmes d'optimisation non linéaire. Par exemple, Li et Pham [42] et Roux *et al.* [57] ont proposé une méthode de résolution basée sur l'algorithme de Nelder-Mead pour optimiser leurs stratégies de maintenance étudiées. Dans [42], les séquences d'inspection et les seuils de maintenance préventive sont déterminés

afin de réduire au maximum le coût total moyen par unité de temps, tandis que la période de maintenance préventive est évaluée dans [57] afin de minimiser l'indisponibilité du système.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : les notations et les hypothèses de travail sont données à la section suivante. Le modèle mathématique est donné à la Section 2.3, où quelques propositions sont établies. La Section 2.4 est dédiée à la description de la méthode de Nelder-Mead utilisée dans cette thèse comme technique de résolution. La procédure numérique développée est présentée à la Section 2.5. Dans la Section 2.6, deux exemples numériques sont présentés pour illustrer la modélisation mathématique proposée. Deux types de stratégie d'inspection, périodique et séquentielle, sont étudiés et comparés. La conclusion et les perspectives sont exposées à la Section 2.7.

2.2 Description du problème : notations et hypothèses

Dans ce chapitre, le système de production considéré est soumis à une dégradation continue croissante et supposé être dans l'un des deux états possibles, un état de bon fonctionnement ou un état de panne. En raison de sa dégradation, le système peut avoir un impact sur l'environnement, c.-à-d. que la dégradation du système provoque celle de l'environnement. Cet impact devient plus important quand le niveau de dégradation du système franchit une valeur donnée du seuil d'alarme. Les actions de maintenance préventive sont alors planifiées dès lors que le niveau de dégradation dépasse la valeur spécifiée. Ce niveau peut être mesuré par inspection. Un exemple de dégradation du système en fonction du temps est représenté dans la Figure 2.1. Cette figure montre également la répartition des dates d'inspection. Dans la suite de nos travaux, nous parlerons d'un cycle de fonctionnement que nous définissons comme l'intervalle de temps séparant deux actions consécutives de maintenance : préventive ou corrective.

2.2.1 Notations

Les notations suivantes sont adoptées lors de la modélisation de la stratégie d'inspection/maintenance proposée.

C_c coût moyen de maintenance corrective.

C_d coût moyen par unité de temps de dégradation excessive de l'environnement, c.-à-d. coût de pénalité réglementaire.

C_i coût moyen d'une inspection.

C_p coût moyen de maintenance préventive.

H délai pour effectuer la maintenance préventive, à partir de la date d'inspection à laquelle le dépassement du seuil d'alarme est détecté.

T temps aléatoire écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation du système.

τ réalisation de T sur l'axe du temps, à partir du début du cycle.

f densité de probabilité de T.

X temps aléatoire écoulé à partir de l'instant τ jusqu'à la panne (durée de vie du système après le dépassement du seuil).

x réalisation de X, à partir de l'instant τ (voir la Figure 2.1).

$g,\ G$ densité de probabilité et fonction de répartition de X, respectivement.

N nombre aléatoire d'inspections au cours d'un cycle.

Θ vecteur des dates d'inspection θ_i, $(i = 1, 2, 3, \dots)$.

T_d temps aléatoire de dégradation excessive de l'environnement.

T_c temps aléatoire du cycle (mesuré entre deux actions consécutives de maintenance : préventive ou corrective).

P_c probabilité que le cycle se termine par une action de maintenance corrective.

P_p probabilité que le cycle se termine par une action de maintenance préventive.

C_t coût total induit par les opérations de maintenance et d'inspection et par la dégradation de l'environnement pendant un cycle.

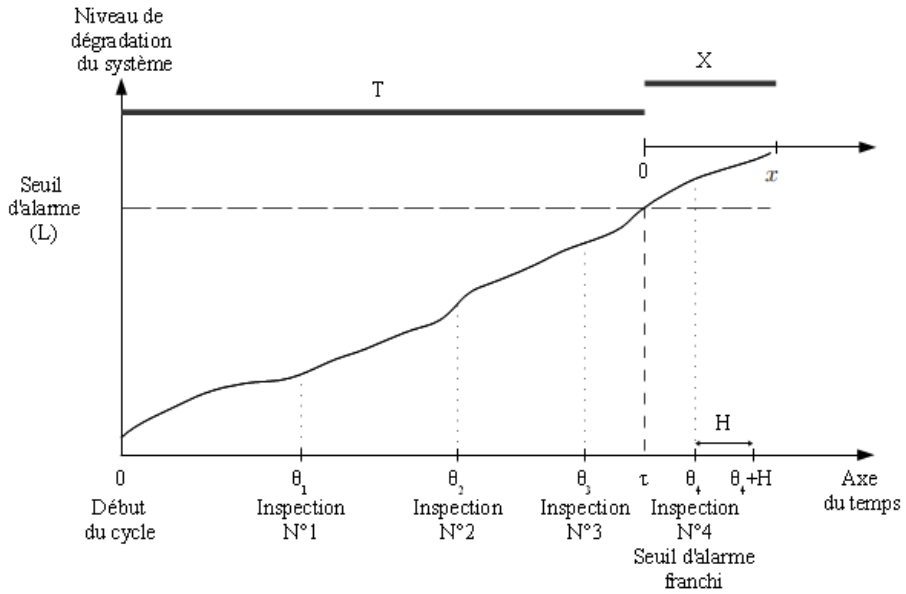

Figure 2.1 – Planification de la maintenance préventive

2.2.2 Hypothèses

Les hypothèses de base sont les suivantes :

1. La dégradation du système induit celle de l'environnement.
2. Après chaque inspection, deux types d'action sont possibles : ne rien faire ou effectuer une action de maintenance préventive.
3. La maintenance préventive est planifiée après un délai H si l'inspection révèle que le niveau de dégradation a franchi le seuil d'alarme (voir la Figure 2.1). Toute opération d'inspection dans cet intervalle est annulée, par exemple, dans l'intervalle $[\theta_4, \theta_4 + H]$, les inspections sont annulées comme montré dans l'exemple de la Figure 2.1.
4. Le système peut tomber en panne uniquement lorsque son niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme. Une telle panne est supposée être détectée automatiquement (cas de panne auto-déclarée).
5. Une maintenance corrective est effectuée immédiatement après la panne du système.
6. Les deux actions de maintenance, corrective et préventive, sont supposées être parfaites.
7. Le système devient comme neuf après une action de maintenance : corrective ou préventive.
8. Les actions d'inspection sont supposées être parfaites, c.-à-d. que l'inspection révèle, sans erreur, le niveau réel de dégradation du système.
9. Les durées des actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) sont négligeables.
10. Les coûts C_c, C_d, C_i, et C_p, avec le délai H ainsi que les densités f et g sont supposés être connus.

2.3 Modèle mathématique

La stratégie de maintenance conditionnelle décrite précédemment consiste à réduire la dégradation excessive de l'environnement à travers des actions de maintenance préventive. Cette dernière est planifiée lorsque le niveau de dégradation du système mesuré lors de l'inspection dépasse le seuil d'alarme. Dans cette section, on s'intéresse à la modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps. Un tel coût peut être exprimé comme le rapport entre le coût total moyen $E(C_t)$ et le temps moyen du cycle $E(T_c)$:

$$J = \frac{E(C_t)}{E(T_c)}. \tag{2.1}$$

Afin de déterminer le vecteur optimal des dates d'inspection, le coût total moyen par unité de temps est considéré comme une fonction objective :

$$\min_{\Theta} \; J(\Theta) \tag{2.2}$$

La formule suivante donne le coût total moyen $E(C_t)$:

$$E(C_t) = C_c \; P_c + C_p \; P_p + C_i \; E(N) + C_d \; E(T_d), \tag{2.3}$$

où $E(N)$ est le nombre moyen d'inspections au cours d'un cycle, tandis que $E(T_d)$ est le temps moyen de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle.

À la fin d'un cycle, une maintenance préventive ou une maintenance corrective est effectuée. Dans le cas d'une maintenance corrective, le coût moyen induit est $C_c \; P_c$, alors que $C_p \; P_p$ représente le coût moyen induit dans le cas d'une maintenance préventive. Pendant un cycle, le système est soumis à un nombre aléatoire N d'inspections dont le coût moyen induit est donné par $C_i \; E(N)$. Le dernier terme de l'équation (2.3) correspond au coût moyen induit comme une pénalité dû à la dégradation excessive de l'environnement.

Pour calculer la formule explicite du coût $E(C_t)$, quelques propositions sont données. La première proposition donne la probabilité P_c qu'un cycle se termine par une action de maintenance corrective. Le résultat obtenu permet, par conséquent, d'obtenir directement la probabilité P_p qui correspond au cas où le cycle se termine par une action de maintenance préventive.

Proposition 2.1 *La probabilité P_c de finir le cycle par une maintenance corrective est :*

$$P_c = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} G(\theta_i + H - \tau) \; f(\tau) d\tau. \tag{2.4}$$

Preuve. Supposons que $\theta_{i-1} < T \leq \theta_i$. La probabilité P_c que le cycle se termine par une action de maintenance corrective est alors :

$$P_c = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\left\{T + X \leq \theta_i + H\right\},$$

$$\text{où } Pr\left\{T + X \leq \theta_i + H\right\} = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} Pr\left\{X \leq \theta_i + H - \tau \,|_{\tau < T \leq \tau + d\tau}\right\} \; Pr\left\{\tau < T \leq \tau + d\tau\right\}.$$

Or, la variable aléatoire X est supposée être la durée de vie résiduelle du système après avoir

dépassé le seuil d'alarme d'une part, alors :

$$Pr\left\{X \leq \theta_i + H - \tau \,|_{\tau<T\leq\tau+d\tau}\right\} = \int_0^{\theta_i+H-\tau} g(x)dx$$

$$= G(\theta_i + H - \tau).$$

D'autre part, la variable aléatoire T représente le temps écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation du système. La probabilité que ce dépassement ait lieu entre τ et $\tau + d\tau$ est :

$$Pr\left\{\tau < T \leq \tau + d\tau\right\} \approx f(\tau)d\tau.$$

Ceci termine la preuve. ■

D'après le résultat de la proposition ci-dessus, il s'ensuit que la probabilité P_p qu'un cycle se termine par une action de maintenance préventive est donnée par :

$$P_p = 1 - P_c. \tag{2.5}$$

Proposition 2.2 *Le nombre moyen $E(N)$ d'inspections au cours d'un cycle est donné par :*

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\int_0^{\theta_{i+1}} G(\theta_{i+1} - \tau)\ f(\tau)d\tau - \int_0^{\theta_i} G(\theta_i - \tau)\ f(\tau)d\tau \right). \tag{2.6}$$

Preuve. On rappelle que les inspections sont effectuées jusqu'à ce que le niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme L. Il s'ensuit que le nombre N des inspections au cours d'un cycle est une variable aléatoire géométrique dont l'espérance mathématique est :

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ Pr\left\{N = i\right\},$$

où $Pr\left\{N = i\right\}$ est la probabilité d'effectuer exactement i actions d'inspection au cours d'un cycle. Pour calculer cette probabilité, on pourra noter :

$$Pr\left\{N < i + 1\right\} = Pr\left\{N < i\right\} + Pr\left\{N = i\right\},$$

ce qui implique que :

$$Pr\{N = i\} = Pr\{N < i+1\} - Pr\{N < i\}.$$

L'événement $''N < i''$ est équivalent au fait que le cycle se termine par une maintenance corrective ; c.-à-d. que le système tombe en panne avant la $i^{ème}$ date d'inspection θ_i. Sous l'hypothèse que le système peut tomber en panne seulement après avoir dépassé le seuil de dégradation, l'événement $''N < i''$ est équivalent à $''T + X < \theta_i''$. Par conséquent, pour tout i, nous avons :

$$Pr\{N < i\} = Pr\{T + X \leq \theta_i\}.$$

Puisque la variable aléatoire X est supposée être la durée de vie résiduelle du système après avoir dépassé le seuil d'alarme, il en découle que :

$$Pr\{T + X \leq \theta_i\} = \int_0^{\theta_i} G(\theta_i - \tau)\ f(\tau)d\tau.$$

Par conséquent, nous avons :

$$Pr\{N = i\} = \int_0^{\theta_{i+1}} G(\theta_{i+1} - \tau)\ f(\tau)d\tau - \int_0^{\theta_i} G(\theta_i - \tau)\ f(\tau)d\tau.$$

Ceci termine la preuve. ■

La proposition suivante donne le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement. On rappelle que ce temps est mesuré à partir de l'instant τ jusqu'à l'arrêt du système pour exécuter une action de maintenance : préventive ou corrective.

Proposition 2.3 *Le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle est donné par :*

$$E(T_d) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right)\ f(\tau)d\tau. \tag{2.7}$$

Preuve. Supposons que le niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme L à $T = \tau$, et $\theta_{i-1} < T \leq \theta_i$. Il s'ensuit que la durée T_d de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle peut être écrite ainsi :

$$T_d = \begin{cases} X & si \;\; T + X \leq \theta_i + H \\ \\ \theta_i + H - T & sinon \end{cases}$$

En d'autres termes,

$$T_d = min(X, \theta_i + H - T). \tag{2.8}$$

Le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle peut être écrit ainsi :

$$\begin{aligned} E(T_d) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} E\left(T_d \,|_{\tau < T \leq \tau + d\tau}\right) \; f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} E\left(min(X, \theta_i + H - \tau) \,|_{\tau < T \leq \tau + d\tau}\right) \; f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)] \, dx \right) \; f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Le numérateur de la fonction objective, donnée par l'équation (2.1), peut être facilement déduit des équations (2.3)-(2.7). La proposition suivante donne, quant à elle, le temps moyen du cycle $E(T_c)$.

Proposition 2.4 *Le temps moyen du cycle $E(T_c)$ est :*

$$E(T_c) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\tau + \int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)] \, dx \right) \; f(\tau) d\tau. \tag{2.9}$$

Preuve. Le temps moyen du cycle représenté par la variable aléatoire T_c peut être écrit ainsi :

$T_c = T + T_d.$

Il s'ensuit que le temps moyen du cycle $E(T_c)$ est :

$E(T_c) = E(T) + E(T_d).$

En exploitant le résultat de la Proposition 2.3, le temps moyen du cycle $E(T_c)$ peut être écrit ainsi :

$$\begin{aligned} E(T_c) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \tau \ f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)] \, dx \right) \ f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\tau + \int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)] \, dx \right) \ f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Cette section a été consacrée à la modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps. Ce coût est engendré par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ainsi que le coût de pénalité dû à la dégradation de l'environnement. La fonction objective de l'équation (2.2) est donc :

$$J(\Theta) = \frac{\left(\begin{array}{l} (C_c - C_p) \ \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} G(\theta_i + H - \tau) \ f(\tau) d\tau + C_p \\ + C_i \ \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\int_0^{\theta_{i+1}} G(\theta_{i+1} - \tau) \ f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_i} G(\theta_i - \tau) \ f(\tau) d\tau \right) \\ + C_d \ \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)] \, dx \right) \ f(\tau) d\tau \end{array} \right)}{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\tau + \int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)] \, dx \right) \ f(\tau) d\tau} \tag{2.10}$$

Afin d'optimiser la stratégie de maintenance proposée, la méthode de Nelder-Mead est adoptée. La section suivante est dédiée à la méthode d'optimisation.

2.4 Méthode d'optimisation

La méthode du simplexe de descente pour les problèmes multidimensionnels est due à Nelder et Mead [49]. La méthode de Nelder-Mead, comme l'algorithme génétique, l'évolution différentielle, ainsi que le recuit simulé, est considérée comme une méthode de recherche directe qui ne nécessite pas un calcul de dérivées de fonctions, c.-à-d. que ces méthodes ne nécessitent que des évaluations de la fonction objective. Ces méthodes ont tendance à converger lentement, mais peuvent être robustes pour des problèmes de discontinuités ou lorsque les valeurs d'une fonction objective sont bruyantes. Cependant, la méthode du simplexe de Nelder-Mead, qui ne doit pas être confondue avec la méthode du simplexe bien connue pour la programmation

linéaire, est une méthode de recherche locale qui a été largement utilisée seule ou conjointement avec d'autres algorithmes pour la résolution de problèmes d'optimisation. La combinaison de la méthode de Nelder-Mead avec d'autres méthodes tels que le recuit simulé (SA) ([10], [39], [31], et [71]), l'algorithme génétique (GA) [14], l'évolution différentielle (DE) [70], permet d'obtenir des algorithmes hybrides avec de bonnes performances.

La méthode de Nelder-Mead a été largement exploitée dans la littérature pour résoudre des problèmes d'optimisation non linéaire. Cette méthode est bien connue par sa robustesse, sa facilité de mise en œuvre, et par sa faible utilisation de la mémoire. Il est également démontré que cette méthode nécessite un temps de calcul raisonnable. En effet, comme l'ont souligné Price *et al.* [53], la méthode de Nelder-Mead est encore choisie, comme une technique de résolution, par de nombreux praticiens dans différents domaines (en statistique, en ingénierie, en sciences physiques et médicales, etc.) car elle est facile à coder et à utiliser. Plus particulièrement, la méthode de Nelder-Mead a été exploitée pour résoudre des problèmes d'optimisation dans le domaine de maintenance. Li et Pham [42], par exemple, ont proposé un algorithme basé sur la méthode de Nelder-Mead pour résoudre un problème d'optimisation non linéaire tout en traitant l'inspection et la maintenance des systèmes soumis à des sources multiples de dégradation. Les séquences d'inspection et les seuils de maintenance préventive sont calculés dans [42] pour trouver la stratégie optimale qui minimise le coût total moyen par unité de temps. Plus récemment, la méthode de Nelder-Mead a été utilisée par Roux *et al.* [57] pour résoudre un problème d'optimisation intégrée de maintenance et de production.

Les problèmes d'optimisation traités dans cette thèse sont des problèmes non linéaires multidimensionnels dont les solutions analytiques sont difficiles à obtenir, voire impossible. Pour résoudre ces problèmes, des algorithmes sont développés sur la base de la méthode de Nelder-Mead. Le principe de cette méthode est décrit en annexe 1.

2.5 Procédure numérique

Le problème d'optimisation (équation (2.2)) est résolu en utilisant une procédure numérique basée sur la méthode de Nelder-Mead. La Figure 2.2 montre l'organigramme correspondant à la procédure numérique développée pour trouver les dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps.

Selon la Figure 2.2, la première étape est une étape d'initialisation où les données d'entrée sont fournies. La deuxième étape consiste à initialiser la dimension n du vecteur solution ($n = 1$). La troisième étape consiste à calculer le vecteur optimal des dates d'inspection $\Theta^* = (\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*)$ en utilisant l'algorithme de Nelder-Mead. On rappelle que le nombre d'inspections à effectuer est une variable aléatoire notée N, dont la réalisation est représentée par n qui est la dimension du vecteur solution Θ^*. La quatrième étape consiste à incrémenter la dimension n ($n = n + 1$). Cette étape d'incrémentation est précédée par un test sur le nombre maximal d'itérations, c.-à-d. qu'on incrémente n si le nombre maximal d'itérations n'est pas atteint. Les itérations sont alors arrêtées quand leur nombre maximal est atteint. Dans ce cas, la dernière étape consiste à sélectionner la solution optimale dans l'ensemble des solutions optimales trouvées pour chaque valeur de n.

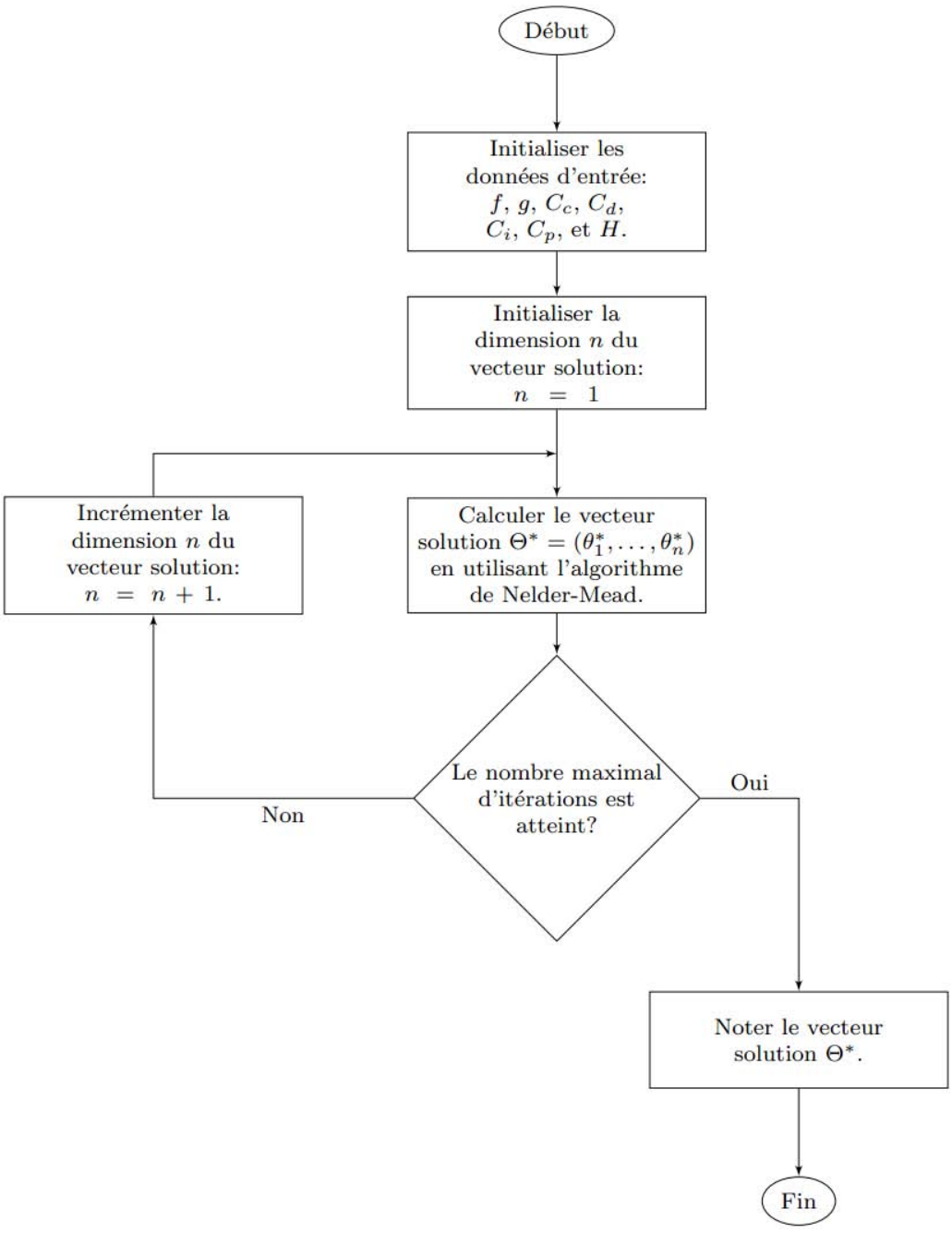

Figure 2.2 – Organigramme de la procédure numérique développée (cas de minimisation du coût total moyen par unité de temps J)

2.6 Exemples numériques

Dans cette section, deux exemples numériques sont donnés pour illustrer le modèle de coût proposé. Deux types de stratégie d'inspection, périodique et séquentielle, sont étudiés. La procédure numérique exposée à la Section 2.5 est exploitée pour évaluer les dates optimales d'inspection. Les données d'entrée de cette procédure incluent les densités de probabilités f et g, les coûts C_c, C_d, C_i, et C_p, et la durée H. Le temps est exprimé en unité de temps, tandis que le coût est exprimé en unité monétaire. Dans cette étude expérimentale, on désigne par δ le rapport entre la durée moyenne $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement et le temps moyen $E(T_c)$ du cycle tel que :

$$\delta = \frac{E(T_d)}{E(T_c)}, \tag{2.11}$$

ou encore

$$\delta(\Theta) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau}{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \left(\tau + \int_0^{\theta_i + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau}. \tag{2.12}$$

Dans un premier temps, la stratégie d'inspection périodique est exposée et sera suivie par la stratégie d'inspection séquentielle.

2.6.1 Stratégie d'inspection périodique

Dans le cas de la stratégie d'inspection périodique, il est supposé que les actions d'inspection sont effectuées périodiquement. En d'autres termes, les dates θ_i d'inspection sont telles que :

$$\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1} = Cte, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Par conséquent, le problème initial multidimensionnel devient un problème à une seule variable de décision $\Delta\theta$.

Les densités de probabilités f et g correspondent, respectivement, aux variables aléatoires T et X. On suppose que chacune des deux variables suit une loi normale. La densité de probabilité f du temps aléatoire T écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation est donnée par :

$$f(\tau) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - \mu_f}{\sigma_f}\right)^2}, \tag{2.14}$$

où $\mu_f = 1100$ et $\sigma_f = 150$.

La densité de probabilité g du temps aléatoire X écoulé à partir de l'instant τ (instant où le seuil de dégradation est atteint) jusqu'à l'occurrence de la panne est donnée par :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma_g\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_g}{\sigma_g}\right)^2}, \tag{2.15}$$

où $\mu_g = 130$ et $\sigma_g = 40$.

Les coûts moyens des actions de maintenance corrective et préventive ainsi que le coût moyen d'inspection sont respectivement fixés : $C_c = 16108$, $C_p = 988$, et $C_i = 150$. Le coût C_d de pénalité induit par la dégradation de l'environnement ainsi que la durée H seront considérés comme des paramètres de sensibilité. Ces deux paramètres prendront alors différentes valeurs dans les deux expériences menées dans ce qui suit.

2.6.1.1 Expérience 1 : impact de C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ

Dans cet exemple, nous étudierons le cas où la durée H est égale à 0. Cela revient à dire que les actions de maintenance préventive sont immédiatement exécutées. Le coût par unité de temps C_d de dégradation excessive de l'environnement est variable. Pour différentes valeurs de C_d, le Tableau 2.1 donne la période optimale d'inter-inspection $\Delta\theta^*$. Pour les valeurs de $\Delta\theta^*$, le Tableau 2.1 donne également le nombre moyen d'inspections $E(N)$ au cours d'un cycle, le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement, le coût total moyen $E(C_t)$, le temps moyen du cycle $E(T_c)$, la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$, et le ratio δ.

D'après le Tableau 2.1, le cas particulier où le coût C_d est fixé à la valeur nulle, correspond au cas où le coût de pénalité dû à la dégradation excessive de l'environnement n'est pas pris en compte. Dans ce cas, le coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$ induit par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection est égal à 3.03 et le taux de dégradation excessive est de 3.86%. Ce taux de dégradation est maximal dans ce cas puisque le coût de pénalité C_d n'est pas pris en compte dans le calcul du coût total moyen par unité de temps. En augmentant le coût de pénalité C_d, la période optimale d'inter-inspection $\Delta\theta^*$ diminue et le nombre moyen $E(N)$ d'inspections augmente. Cela s'explique par le fait que des inspections supplémentaires sont nécessaires afin de réduire davantage la dégradation de l'envi-

Tableau 2.1 – Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique.

C_d	$\Delta\theta^*$	$E(N)$	$E(T_d)$	$E(C_t)$	$E(T_c)$	$J(\Delta\theta^*)$	δ [%]
0	89	11.58	40.82	3211.84	1058.83	3.03	3.86
10	83	12.18	37.94	3578.61	1048.41	3.41	3.62
20	76	12.18	33.35	3757.67	996.67	3.77	3.35
30	71	12.42	30.56	3985.63	971.52	4.10	3.15
40	66	12.23	27.25	4077.66	924.41	4.41	2.95
50	62	12.21	24.90	4197.09	893.33	4.70	2.79

ronnement. D'ailleurs, le temps moyen de dégradation excessive $E(T_d)$ diminue en augmentant le coût de pénalité C_d. Cette augmentation est à l'origine de l'augmentation du coût total moyen $E(C_t)$ ainsi que de la diminution du temps moyen du cycle $E(T_c)$ puisque l'objectif est de minimiser le coût total moyen par unité de temps.

La Figure 2.3 représente la variation de la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$ par rapport au coût C_d, tandis que la Figure 2.4 représente la variation du ratio δ par rapport à C_d. La Figure 2.3 montre que la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$ augmente en élevant le coût de pénalité C_d. Toutefois, le ratio δ diminue en augmentant le coût C_d comme montré dans la Figure 2.4, c.-à-d. que la dégradation du système et par conséquent celle de l'environnement se trouvent réduites. Ces deux figures montrent bien l'influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ malgré la diminution du taux de dégradation δ.

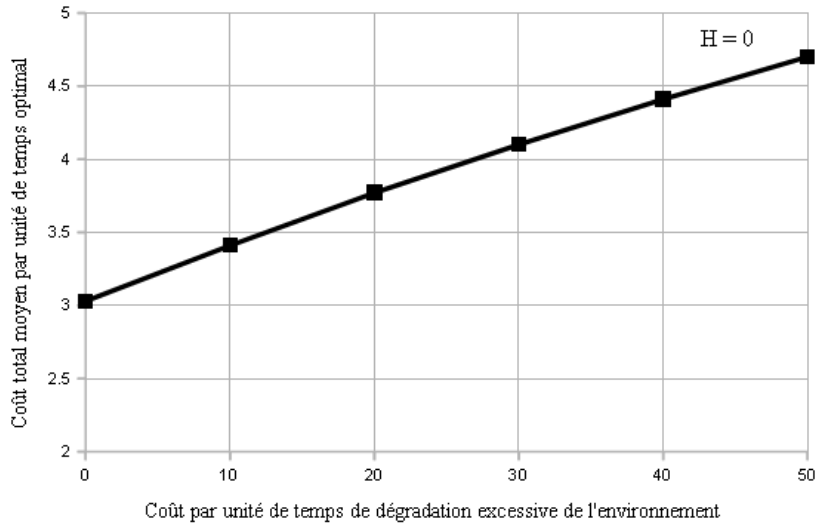

Figure 2.3 – Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique

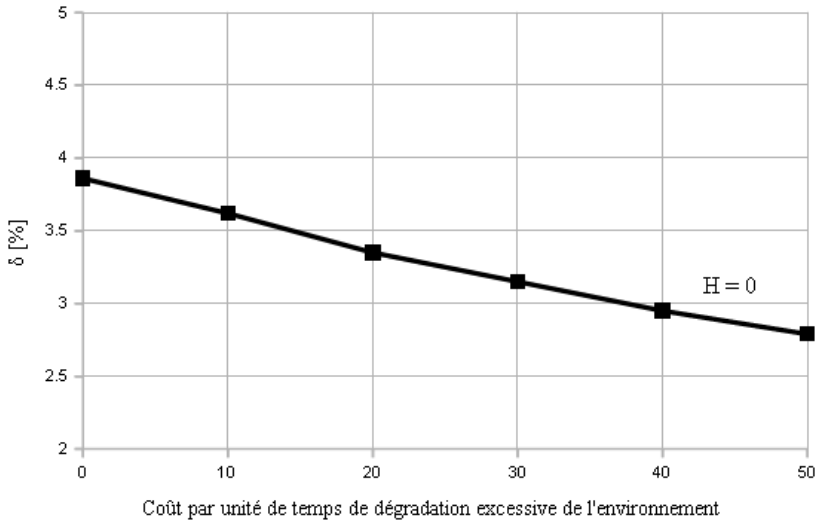

Figure 2.4 – Influence du coût de pénalité C_d sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique

2.6.1.2 Expérience 2 : impact de H sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ

Dans le cadre de cette expérience et dans le but d'étudier l'impact de la durée H sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ, le coût de pénalité C_d est fixé à 20 unités monétaires. Pour différentes valeurs du paramètre H, le Tableau 2.2 donne la période optimale d'inter-inspection $\Delta\theta^*$. Pour chaque valeur optimale $\Delta\theta^*$, le Tableau 2.2 donne également le nombre moyen d'inspections $E(N)$, le temps moyen de dégradation excessive $E(T_d)$, le coût total moyen $E(C_t)$, le temps moyen du cycle $E(T_c)$, le coût total moyen par unité de temps optimal $J(\Delta\theta^*)$, et le ratio δ.

Tableau 2.2 – Influence de la durée H sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique.

H	$\Delta\theta^*$	$E(N)$	$E(T_d)$	$E(C_t)$	$E(T_c)$	$J(\Delta\theta^*)$	δ [%]
0	76	12.18	33.35	3757.67	996.67	3.77	3.35
10	71	12.42	39.19	4013.83	980.15	4.10	4.00
20	66	12.23	43.80	4200.27	940.95	4.46	4.65
30	59	12.64	47.74	4467.34	914.03	4.89	5.22
40	53	12.63	50.87	4694.33	872.02	5.38	5.83
50	48	12.42	53.61	4944.79	827.95	5.97	6.47

Le cas particulier où la durée H est fixée à la valeur nulle correspond au cas où les actions de maintenance préventive ne sont pas retardées. Dans ce cas et d'après le Tableau 2.2, la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$ est égale à 3.77 et le taux de dégradation excessive est de 3.35%. Ce taux de dégradation est minimal dans ce cas puisque les actions de maintenance préventive ne sont pas retardées. En augmentant le délai H pour effectuer une maintenance préventive, la période optimale d'inter-inspection $\Delta\theta^*$ diminue et le nombre moyen $E(N)$ d'inspections augmente. Cela s'explique par le fait que des inspections supplémentaires sont nécessaires afin de réduire davantage l'impact de la dégradation du système sur l'environnement. Cependant, le temps moyen de dégradation excessive $E(T_d)$ augmente en allongeant la durée H. Cette augmentation est à l'origine de la hausse du coût total moyen $E(C_t)$ ainsi que la diminution du temps moyen du cycle $E(T_c)$ puisque l'objectif est de minimiser le coût total moyen par unité de temps.

La Figure 2.5 représente la variation de la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$ par rapport à la durée H, tandis que la Figure 2.6 représente la variation du taux de dégradation δ par rapport à la durée H. Ces figures montrent que la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Delta\theta^*)$ ainsi que le ratio δ augmentent en étendant

la durée H. On constate que le taux de dégradation excessive δ augmente en allongeant la durée H contrairement au cas de l'augmentation du coût de pénalité C_d comme montré dans la section précédente 2.6.1.1. De ce fait, la maintenance préventive devrait être exécutée le plus tôt possible, c.-à-d. que le délai H doit être minimal.

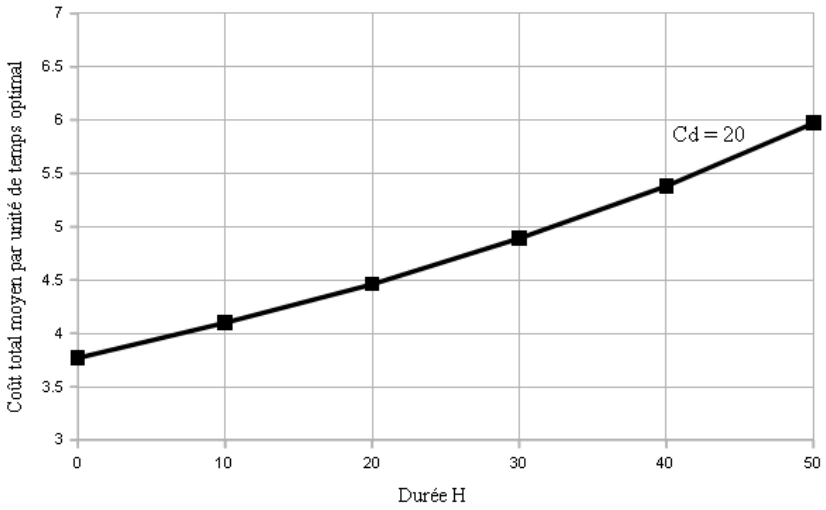

Figure 2.5 – Influence de la durée H sur $J(\Delta\theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique

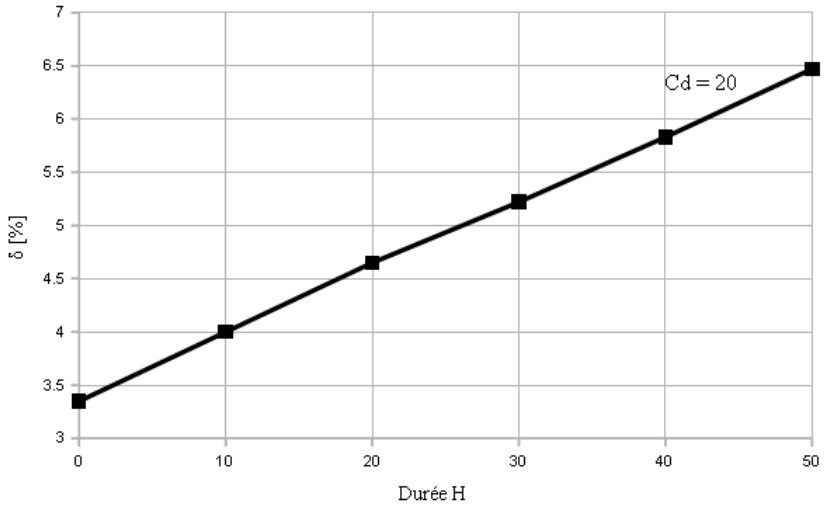

Figure 2.6 – Influence de la durée H sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique

2.6.2 Stratégie d'inspection séquentielle

Dans la sous-section précédente, la stratégie d'inspection périodique a été adoptée pour résoudre le problème décrit à la Section 2.3. Dans la présente sous-section, une stratégie d'inspection séquentielle a été adoptée afin de résoudre le même problème sans aucune contrainte sur les dates d'inspection ; c.-à-d. que les durées entre les inspections successives sont indépendantes. Dans ce cas, le problème à résoudre n'est plus un problème à une seule variable de décision comme le problème vu à la sous-section 2.6.1. On est dans le cas d'un problème non linéaire multidimensionnel. La procédure numérique exposée à la Section 2.5 a été exploitée pour résoudre ce problème. On rappelle que l'objectif est de trouver les dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$ donné par l'équation (2.10).

Les densités de probabilités f et g correspondent, respectivement, aux variables aléatoires T et X. On suppose que chacune des deux variables suit une loi de Weibull dont le paramètre d'échelle est exprimé en unité de temps tandis que le paramètre de forme n'a pas d'unité. La densité de probabilité f du temps aléatoire T écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation est donnée par :

$$f(\tau) = \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)\left(\frac{\tau}{\alpha_f}\right)^{\beta_f - 1} e^{-\left(\frac{\tau}{\alpha_f}\right)^{\beta_f}}, \tag{2.16}$$

où le paramètre d'échelle est $\alpha_f = 1164.1$ et le paramètre de forme est $\beta_f = 8.7$.

La densité de probabilité g du temps aléatoire X écoulé à partir de l'instant τ jusqu'à l'occurrence de la panne est donnée par :

$$g(x) = \left(\frac{\beta_g}{\alpha_g}\right)\left(\frac{x}{\alpha_g}\right)^{\beta_g - 1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_g}\right)^{\beta_g}}, \tag{2.17}$$

où le paramètre d'échelle est $\alpha_g = 144.2$ et le paramètre de forme est $\beta_g = 3.6$.

Les coûts moyens des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection sont donnés par $C_c = 6180$, $C_p = 4170$, et $C_i = 492$. Le coût de dégradation excessive de l'environnement C_d ainsi que la durée H seront considérés comme des paramètres de sensibilité. En variant ces deux paramètres, deux expériences sont menées dans ce qui suit.

2.2.6.1 Expérience 1 : impact de C_d sur $J(\Theta^*)$ et δ

Cette expérience traite le cas où la durée H est fixée à 0, c.-à-d. que les actions de maintenance préventive ne sont pas retardées. Le coût par unité de temps C_d de dégradation excessive de l'environnement est variable. Pour différentes valeurs de C_d, le Tableau 2.3 donne le vecteur optimal Θ^* des dates d'inspection. Pour chaque valeur du vecteur optimal Θ^*, le Tableau 2.3 donne également la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ et le ratio δ.

Tableau 2.3 – Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle.

C_d	Θ^*	$J(\Theta^*)$	δ [%]
0	1182.7, 1325.4, 1471.4	4.62	7.51
10	1119.0, 1244.9, 1355.4, 1475.3, 1623.0	5.31	6.43
20	1078.5, 1193.5, 1292.2, 1391.5, 1518.8	5.92	5.72
30	1073.8, 1199.5, 1288.2, 1379.2, 1417.6, 1474.5	6.53	5.63
40	1050.2, 1171.3, 1259.7, 1356.3, 1412.7, 1473.8	7.03	5.33
50	1030.3, 1128.2, 1206.4, 1282.4, 1384.2, 1492.9	7.44	4.77

Le cas particulier où le coût de pénalité C_d est fixé à la valeur nulle correspond au cas où ce coût n'est pas pris en compte dans le calcul de la fonction objective $J(\Theta)$. Dans ce cas et d'après le Tableau 2.3, la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$, induit par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection, est égale à 4.62 et le taux de dégradation excessive δ est 7.51%. Ce taux de dégradation est maximale dans ce cas, comme montré dans la sous-section 2.6.1.1, puisque le coût de pénalité C_d n'est pas pris en compte dans le calcul de $J(\Theta)$. D'après le Tableau 2.3, l'augmentation du coût de pénalité C_d induit l'augmentation du nombre d'inspections à effectuer au cours d'un cycle. Ces inspections supplémentaires sont nécessaires pour détecter, le plus tôt possible, le dépassement du seuil de dégradation afin de réduire le coût qui en résulte, c.-à-d. que la diminution du temps moyen de dégradation excessive permet de réduire le coût moyen induit $C_d\ E(T_d)$.

La variation de la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ par rapport au coût de pénalité C_d est représentée dans la Figure 2.7, tandis que la Figure 2.8 montre la variation du taux de dégradation δ par rapport à C_d. La Figure 2.7 montre que la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ augmente suite à l'élévation du coût

de pénalité C_d. Toutefois, le ratio δ diminue en augmentant le coût C_d comme montré dans la Figure 2.8, c.-à-d. que la dégradation excessive de l'environnement est réduite. Ces résultats sont semblables à ceux de la sous-section 2.6.1.1 où on a traité l'influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Delta\theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique.

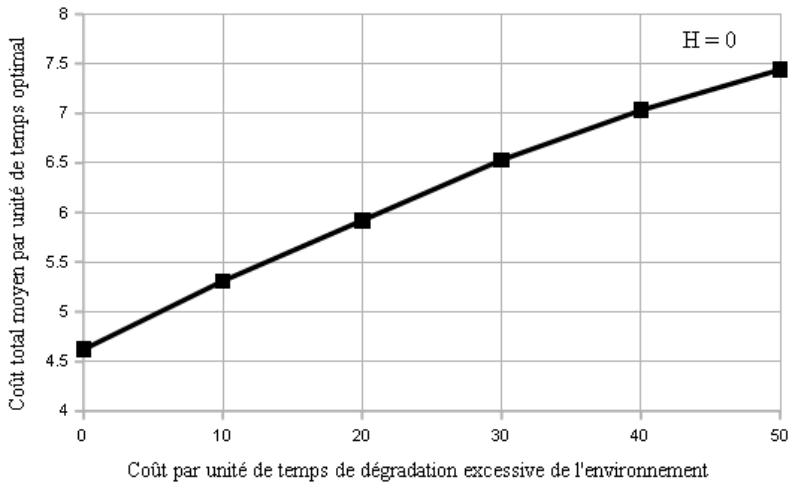

Figure 2.7 – Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle

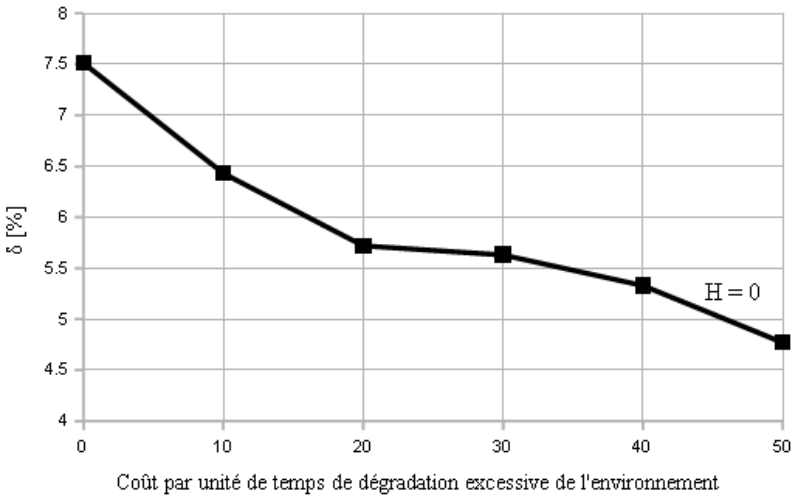

Figure 2.8 – Influence du coût de pénalité C_d sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle

2.6.2.2 Expérience 2 : impact de H sur $J(\Theta^*)$ et δ

Dans la présente expérience, le coût C_d est fixé à 30 unités monétaires, tandis que plusieurs valeurs sont affectées à la durée H qui représente le délai pour effectuer la maintenance préventive. Le Tableau 2.4 donne le vecteur optimal Θ^* des dates d'inspection. Pour chaque vecteur Θ^*, le Tableau 2.4 donne également le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ ainsi que le ratio δ correspondants. D'après ce tableau, le cas particulier où la durée H est fixée à la valeur nulle correspond au cas où le ratio δ est minimal. Dans ce cas, la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ est égale à 6.53 et le taux de dégradation excessive δ est 5.63%.

Tableau 2.4 – Influence de la durée H sur $J(\Theta^*)$ et δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle.

H	Θ^*	$J(\Theta^*)$	δ [%]
0	1073.8, 1199.5, 1288.2, 1379.2, 1417.6, 1474.5	6.53	5.63
10	1056.4, 1159.7, 1246.9, 1331.0, 1423.6, 1548.4	6.67	5.82
20	1073.8, 1199.5, 1288.2, 1379.2, 1417.6, 1474.5	6.95	6.85
30	1073.8, 1199.5, 1288.2, 1379.2, 1417.6, 1474.5	7.17	7.40
40	1132.2, 1240.5, 1327.3, 1392.9, 1483.8	7.36	8.17
50	1109.5, 1201.8, 1284.4, 1370.3, 1487.0	7.52	8.33

La valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ en fonction de la durée H est représentée dans la Figure 2.9, tandis qu'à la Figure 2.10 est représenté le taux de dégradation δ par rapport à H. À partir de ces figures, on peut constater que la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$ et le ratio δ augmentent avec la durée H, c.-à-d. que la dégradation excessive de l'environnement est accrue. Cette augmentation est une conséquence du retard dû à la planification de maintenance préventive.

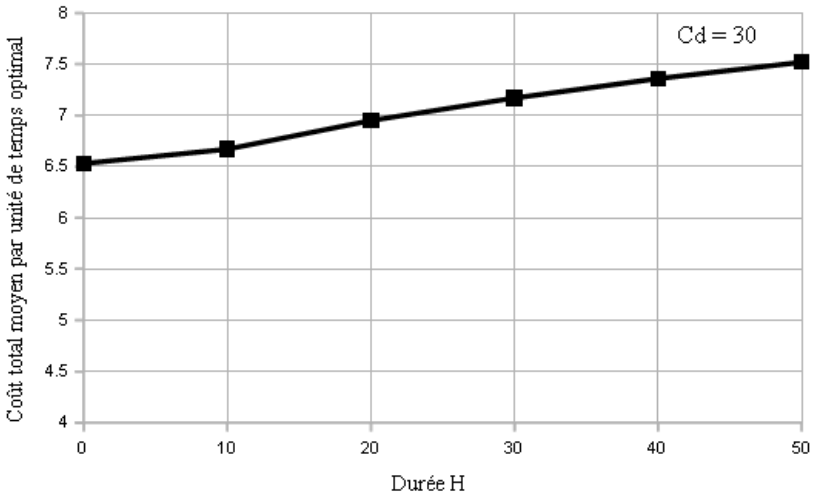

Figure 2.9 – Influence de la durée H sur $J(\Theta^*)$ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle

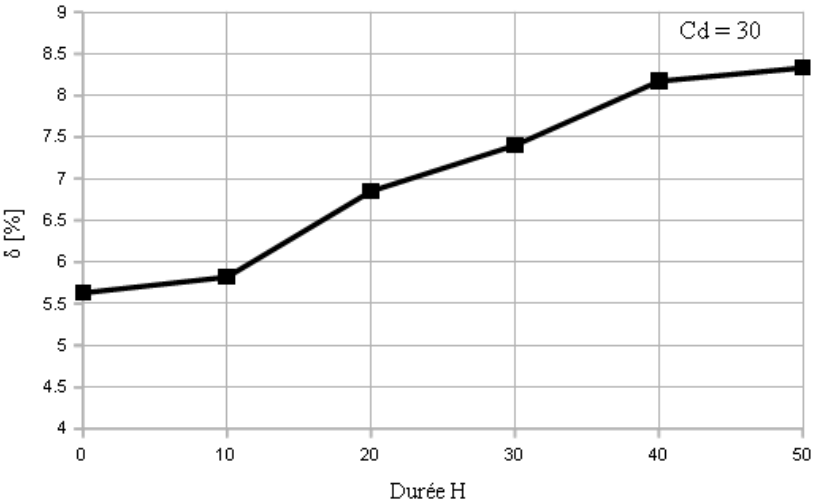

Figure 2.10 – Influence de la durée H sur δ dans le cas d'une stratégie d'inspection séquentielle

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle a été proposée pour les systèmes de production. Cette stratégie prend en compte la dégradation de l'environnement induite par la dégradation du système de production. La panne de ce système est supposée être autodéclarée (c.-à-d. détectée à l'occurrence), alors que sa dégradation est contrôlée par inspection. Afin de maintenir ce système de production, les actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive), dont les durées sont supposées être négligeables, sont effectuées. L'action de maintenance préventive est effectuée en se basant sur le contrôle du niveau de dégradation du système, tandis que l'action de maintenance corrective est exécutée directement en cas de panne du système. Une modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps a été proposée. Ce coût est engendré par les coûts des actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) ainsi que le coût de pénalité dû au niveau excessif de dégradation de l'environnement. Une procédure numérique, basée sur l'algorithme de Nelder-Mead, a été proposée pour calculer les dates optimales d'inspection. Les dates d'inspection sont calculées pour deux types de stratégie d'inspection, périodique et séquentielle. D'après les résultats obtenus dans le cas, par exemple, où l'on considère les données d'entrée de l'expérience 2 (sous-section 2.6.2.2) et où $C_d = 30$ et $H = 10$, le vecteur optimal des dates d'inspection $\Theta^* = (1056.4, 1159.7, 1246.9, 1331.0, 1423.6, 1548.4)$ engendre un coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*) = 6.67$ ainsi qu'un taux de dégradation $\delta = 5.82\%$. Pour les mêmes données et dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique, les résultats obtenus montre que la période optimale d'inter-inspection est $\Delta\theta^* = 595$ pour un coût total moyen par unité de temps et un taux de dégradation évalués respectivement à $J(\Delta\theta^*) = 7.94$ et $\delta = 8.95\%$. Ces résultats montrent que la stratégie d'inspection séquentielle permet d'avoir un coût $J(\Theta^*)$ inférieur à celui obtenu dans le cas d'une stratégie d'inspection périodique. Un tel constat suggère l'utilisation d'une stratégie d'inspection séquentielle. Les chapitres suivants ne considèrent que cette stratégie.

Nous avons montré que l'intégration du coût de pénalité, due au niveau excessif de dégradation, dans la modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps a permis la réduction du taux de dégradation excessive. Ce taux de dégradation diminue en augmentant la valeur du coût de pénalité. Dans le présent chapitre, une comparaison empirique des deux stratégies d'inspection, périodique et séquentielle, a été proposée. Les résultats montrent que l'approche séquentielle fournit un meilleur coût total moyen par unité de temps, mais elle permet également de garantir un faible taux de dégradation de l'environnement. Elle sera retenue, par conséquent, comme approche d'inspection dans la suite de nos travaux de thèse.

Dans ce chapitre, les durées des actions d'inspection et de maintenance, corrective et préventive, sont supposées être négligeables. Ces durées ne seront plus négligeables dans le chapitre suivant, où la disponibilité stationnaire du système sera considérée comme une fonction objective. Une deuxième disponibilité stationnaire, comme critère de performance, est également étudiée. Ce deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système supposé être indisponible après le dépassement du seuil de dégradation.

Chapitre 3

Optimisation de la disponibilité stationnaire d'un système de production à dégradation continue soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle

Résumé

Dans ce chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle est proposée dont l'objectif est de maximiser la disponibilité stationnaire d'un système de production. Le cadre de l'étude est similaire à celui du chapitre précédent. Cependant, les temps correspondants aux divers arrêts d'inspection et de maintenance ne sont plus négligeables. L'objectif consiste à déterminer les dates optimales d'inspection qui permettent de maximiser la disponibilité stationnaire du système. Deux modèles mathématiques d'optimisation sont alors proposés. Pour calculer les solutions optimales, une procédure numérique est développée en se basant sur l'algorithme de Nelder-Mead introduit dans le chapitre précédent. Des exemples numériques sont enfin fournis comme illustration des modèles de maintenance proposés.

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés au critère de performance le plus fréquemment rencontré dans la littérature qui est le coût total moyen par unité de temps. Dans le présent chapitre, on s'intéresse au deuxième critère de performance rencontré dans la littérature qui est la disponibilité stationnaire du système. Le contexte de la présente étude est le même que celui du chapitre précédent. Cependant, les durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ne sont plus négligeables. Dans ce chapitre, la disponibilité stationnaire du système sera étudiée, et une deuxième disponibilité, comme autre indice de performance, sera également abordée.

Dans le présent chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle est proposée pour tenir compte de l'impact de la dégradation du système sur l'environnement. Cette stratégie de maintenance a pour but de réduire la dégradation de l'environnement. Le système considéré est soumis à une dégradation continue croissante, et dont les pannes sont supposées être autodéclarées (c.-à-d. que les pannes sont détectées à l'occurrence). Cependant, le niveau de dégradation du système n'est connu que par inspections séquentielles. Afin de maintenir ce système de production, une action de maintenance préventive est planifiée à chaque fois que le niveau de dégradation du système franchit un seuil fixé. Une maintenance corrective, en revanche, est réalisée immédiatement en cas de panne du système. L'objectif consiste à déterminer les dates optimales d'inspection afin de maximiser la disponibilité stationnaire du système. Deux modèles mathématiques d'optimisation sont étudiés. Le premier modèle considère la disponibilité stationnaire du système tandis que le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système supposé être indisponible après le dépassement du seuil de dégradation. Afin de déterminer les dates optimales d'inspection, un algorithme basé sur la méthode de Nelder-Mead est développé.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : les notations et les hypothèses sont donnés à la section suivante. Les formulations mathématiques des disponibilités étudiées sont données à la Section 3.3, où quelques propositions sont données. Dans la Section 3.5, des expériences numériques sont établies pour illustrer les modèles mathématiques étudiés, et les résultats obtenus sont analysés. La conclusion et les perspectives sont abordées à la Section 3.6.

3.2 Description du problème : notations et hypothèses

Dans ce chapitre, le système de production étudié est semblable à celui du chapitre précédent. Bien que les durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ne sont plus négligeables. Ce système de production est soumis à une dégradation continue croissante et est supposé être dans l'un des deux états possibles, soit un état de bon fonctionnement ou soit un état de panne. En raison de sa dégradation, le système en fonctionnement peut avoir un impact sur l'environnement, c.-à-d. que la dégradation du système induit celle de l'environnement. Cet impact devient plus important après le dépassement d'un seuil d'alarme donné. Des opérations d'inspection séquentielle sont alors réalisées pour mesurer le niveau de dégradation du système. La maintenance préventive est planifiée suite à la détection du franchissement du seuil d'alarme, alors que la maintenance corrective est effectuée immédiatement à la panne du système auto-déclarée.

3.2.1 Notations

Les notations suivantes sont utilisées dans ce chapitre.

T_c	durée moyenne de maintenance corrective.
T_i	durée moyenne d'inspection.
T_p	durée moyenne de maintenance préventive.
H	délai pour effectuer la maintenance préventive, à partir de la date d'inspection à laquelle le dépassement du seuil d'alarme est détecté.
T	temps aléatoire écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation du système.
τ	réalisation de T sur l'axe du temps, à partir du début du cycle.
f	densité de probabilité de T.
X	temps aléatoire écoulé à partir de l'instant τ jusqu'à la panne (durée de vie du système après le dépassement du seuil).
x	réalisation de X, à partir de l'instant τ.
$g,\ G$	densité de probabilité et fonction de répartition de X, respectivement.
N	nombre aléatoire d'inspections au cours d'un cycle.
Θ	vecteur des dates d'inspection θ_j, $(j = 1, 2, 3, \dots)$.
T_d	temps aléatoire de dégradation excessive de l'environnement.
T_t	temps aléatoire du cycle (un cycle se termine soit par une maintenance corrective, soit par une maintenance préventive).

P_c probabilité que le cycle se termine par une maintenance corrective.
P_p probabilité que le cycle se termine par une maintenance préventive.
U_c temps aléatoire de bon fonctionnement du système au cours d'un cycle.
D_c temps aléatoire d'arrêt du système au cours d'un cycle.
A_{s1} disponibilité stationnaire du système.
A_{s2} disponibilité stationnaire du système supposé être indisponible après le dépassement du seuil d'alarme.

3.2.2 Hypothèses

Les hypothèses de base sont les suivantes :

1. La dégradation du système induit celle de l'environnement.
2. Après chaque inspection, deux types d'action sont possibles : ne rien faire ou effectuer une action de maintenance préventive.
3. La maintenance préventive est planifiée après un délai H à partir de l'instant d'inspection où le niveau de dégradation franchit le seuil d'alarme. Toute éventuelle inspection sera annulée durant cette période.
4. Le système peut tomber en panne uniquement lorsque son niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme. Une telle panne est supposée être connue à l'occurrence (cas de panne auto-déclarée).
5. En cas de panne du système, une maintenance corrective est effectuée immédiatement.
6. Les deux actions de maintenance, corrective et préventive, sont supposées être parfaites.
7. Le système devient comme neuf après une action de maintenance, qu'elle soit préventive ou corrective.
8. Les actions d'inspection sont supposées être parfaites, c.-à-d. que l'inspection révèle le niveau réel de dégradation du système sans erreur.
9. Les durées T_c, T_p, T_i, et H ainsi que les densités f et g sont supposées être connues.

3.3 Modèles mathématiques

La stratégie de maintenance conditionnelle décrite précédemment consiste à réduire la dégradation excessive de l'environnement à travers des actions de maintenance préventive. Toute maintenance préventive est planifiée quand le niveau de dégradation du système mesuré lors de

l'inspection dépasse le seuil d'alarme. L'objectif est de déterminer les dates optimales d'inspection qui maximisent la disponibilité stationnaire du système. Dans cette section, deux modèles de disponibilité stationnaire du système sont étudiés. Dans un premier temps, la disponibilité stationnaire A_{s1} du système de production est formulée. Dans un deuxième temps, le système est supposé être indisponible après le dépassement du seuil de dégradation. Dans ce cas, la disponibilité stationnaire A_{s2} est formulée.

3.3.1 Premier modèle : Disponibilité stationnaire du système A_{s1}

Le premier modèle considère la disponibilité stationnaire du système A_{s1} donnée par le rapport entre le temps moyen de bon fonctionnement du système $E(U_c)$ et le temps moyen du cycle $E(T_t)$:

$$A_{s1} = \frac{E(U_c)}{E(T_t)}, \tag{3.1}$$

où

$$E(T_t) = E(U_c) + E(D_c). \tag{3.2}$$

Afin de déterminer le vecteur optimal des dates d'inspection, la disponibilité stationnaire du système A_{s1} est considérée comme fonction objective :

$$\max_{\Theta} \; A_{s1}(\Theta) \tag{3.3}$$

Au cours d'un cycle, le système peut être en état de bon fonctionnement ou en état d'arrêt. Deux scénarios d'arrêt sont possibles : (1) un arrêt non planifié pour effectuer l'action de maintenance corrective (voir la Figure 3.1) et (2) un arrêt planifié pour effectuer l'action de maintenance préventive (voir la Figure 3.2). La Figure 3.1 et la Figure 3.2 montrent également le temps de bon fonctionnement du système U_c au cours d'un cycle dans les deux cas d'arrêts possibles.
Pour formuler la disponibilité stationnaire A_{s1}, quelques propositions sont données. La première proposition donne la formule du temps moyen de bon fonctionnement du système $E(U_c)$ au cours d'un cycle.

Proposition 3.1 *Le temps moyen de bon fonctionnement du système $E(U_c)$ est donné par :*

$$E(U_c) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau. \tag{3.4}$$

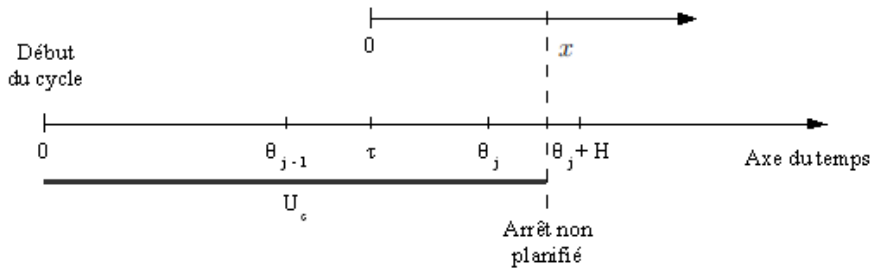

Figure 3.1 – Le temps de bon fonctionnement du système dans le cas où le cycle se termine par une maintenance corrective

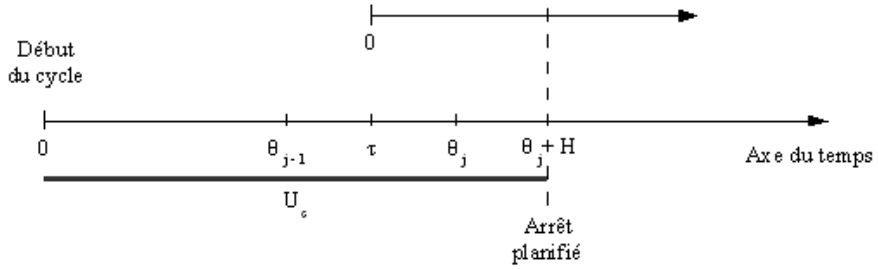

Figure 3.2 – Le temps de bon fonctionnement du système dans le cas où le cycle se termine par une maintenance préventive

Preuve. Supposons que le niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme L à $T = \tau$, et $\theta_{j-1} < T \leq \theta_j$. Il s'ensuit que le temps de bon fonctionnement du système U_c au cours d'un cycle peut être écrit :

$$U_c = \begin{cases} T + X & si \;\; T + X \leq \theta_j + H \\ \\ \theta_j + H & sinon \end{cases}$$

En d'autres termes,

$$U_c = min(T + X, \theta_j + H). \tag{3.5}$$

Le temps moyen de bon fonctionnement $E(U_c)$ du système au cours d'un cycle peut être alors obtenu par :

$$
\begin{aligned}
E(U_c) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} E\left(U_c \,|_{\tau<T\leq\tau+d\tau}\right)\ f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} E\left(min(T+X, \theta_j+H)\,|_{\tau<T\leq\tau+d\tau}\right)\ f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j+H-\tau} [1-G(x)]\,dx\right)\ f(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Ceci termine la preuve. ■

On rappelle que le cycle de fonctionnement du système se termine par une action de maintenance : corrective ou préventive. À la fin du cycle, la maintenance corrective, dont la durée moyenne est T_c, peut être exécutée avec une probabilité P_c, alors que la maintenance préventive, dont la durée moyenne est T_p, peut être exécutée avec une probabilité P_p. Au cours du cycle, le système est soumis à des inspections dont le temps moyen est T_i. Le temps moyen $E(D_c)$ d'arrêt du système au cours d'un cycle est évalué à :

$$E(D_c) = T_c\ P_c + T_p\ P_p + T_i\ E(N), \tag{3.6}$$

où $E(N)$ est le nombre moyen d'inspections au cours d'un cycle.

Pour calculer la formule explicite du temps moyen d'arrêt $E(D_c)$, quelques propositions du chapitre précédent sont utilisées. La Proposition 2.1 donne la probabilité P_c que le cycle se termine par une action de maintenance corrective :

$$P_c = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} G(\theta_j + H - \tau) f(\tau) d\tau. \tag{3.7}$$

Il s'ensuit que la probabilité P_p que le cycle se termine par une action de maintenance préventive est :

$$P_p = 1 - P_c. \tag{3.8}$$

La Proposition 2.2 donne le nombre moyen $E(N)$ d'inspections au cours d'un cycle :

$$E(N) = \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\int_0^{\theta_{j+1}} G(\theta_{j+1} - \tau) f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_j} G(\theta_j - \tau) f(\tau) d\tau \right). \tag{3.9}$$

Cette sous-section a été consacrée à la modélisation mathématique de la disponibilité stationnaire A_{s1} donnée par l'équation (3.1). Cette disponibilité dépend des durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ainsi que du temps moyen de bon fonctionnement du système. Cette disponibilité est donnée par :

$$A_{s1}(\Theta) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau}{\left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau \\ \displaystyle +(T_c - T_p) \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} G(\theta_j + H - \tau) \; f(\tau) d\tau + T_p \\ \displaystyle +T_i \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\int_0^{\theta_{j+1}} G(\theta_{j+1} - \tau) \; f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_j} G(\theta_j - \tau) \; f(\tau) d\tau \right) \end{array} \right)} \tag{3.10}$$

On rappelle que la dégradation du système est supposée avoir un impact sur l'environnement. Cet impact devient plus important quand le niveau de dégradation franchit le seuil d'alarme donné. Afin de réduire davantage la dégradation du système, une deuxième disponibilité stationnaire est étudiée dans la sous-section suivante. Le système sera supposé être indisponible après le dépassement du seuil d'alarme.

3.3.2 Deuxième modèle : Disponibilité stationnaire du système A_{s2}

Le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire quand le système est supposé être indisponible au cours du temps T_d de dégradation excessive, c.-à-d. que le système est supposé être indisponible après le dépassement du seuil de dégradation. Dans ce cas, la disponibilité stationnaire du système A_{s2} est donnée ainsi :

$$A_{s2} = \frac{E(U_c) - E(T_d)}{E(T_t)}, \tag{3.11}$$

où $E(T_d)$ est le temps moyen de dégradation excessive au cours d'un cycle. Le numérateur de l'équation (3.11) représente le temps moyen de bon fonctionnement du système avec un minimum de dégradation. Le temps moyen de bon fonctionnement $E(U_c)$ ainsi que le temps moyen du cycle $E(T_t)$ ont été déjà formulés à la sous-section précédente. On remarque que la

disponibilité stationnaire A_{s2} dépend de A_{s1} :

$$A_{s2} = A_{s1} - \frac{E(T_d)}{E(T_t)} \tag{3.12}$$

La maximisation de A_{s2} permet à la fois de maximiser A_{s1} et de minimiser le ratio $\frac{E(T_d)}{E(T_t)}$, c.-à-d. que la dégradation du système est réduite.

Afin de déterminer les dates optimales d'inspection pour le système étudié, la disponibilité stationnaire A_{s2} est considérée comme fonction objective :

$$\max_{\Theta} \; A_{s2}(\Theta). \tag{3.13}$$

Pour formuler la disponibilité stationnaire A_{s2}, le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive au cours d'un cycle est formulé dans la présente sous-section. Ce temps est mesuré à partir de l'instant τ jusqu'à l'arrêt du système. Cet arrêt peut être non planifié, comme montré dans la Figure 3.3, ou planifié comme montré dans la Figure 3.4. La Figure 3.3 et la Figure 3.4 montrent également le temps T écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation ainsi que le temps de dégradation excessive T_d dans les deux cas d'arrêts possibles.

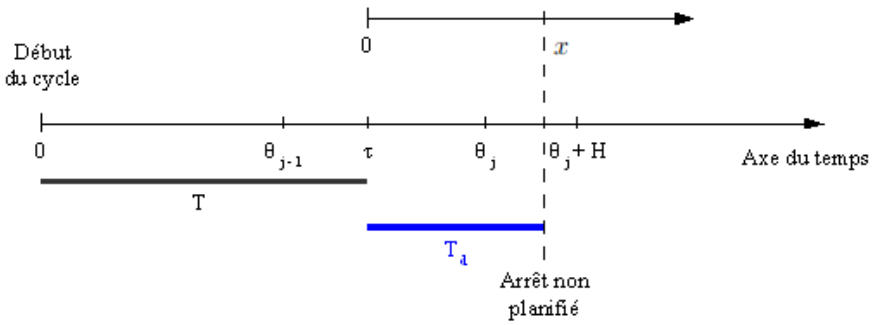

Figure 3.3 – Le temps de dégradation excessive dans le cas où le cycle se termine par une maintenance corrective

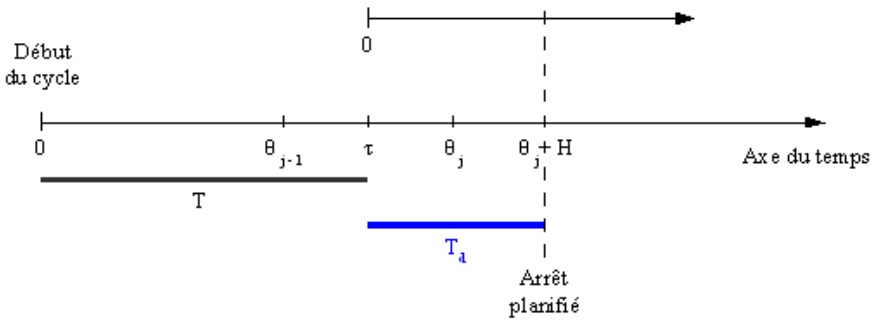

Figure 3.4 – Le temps de dégradation excessive dans le cas où le cycle se termine par une maintenance préventive

La proposition suivante donne la formule du temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle. On rappelle que ce temps est calculé à partir de l'instant τ jusqu'à l'arrêt du système pour exécuter une action de maintenance : préventive ou corrective.

Proposition 3.2 *Le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive au cours d'un cycle est donné par :*

$$E(T_d) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau. \tag{3.14}$$

Preuve. La durée de dégradation excessive de l'environnement représentée par la variable aléatoire T_d est donnée par :

$$T_d = U_c - T.$$

Il en résulte que le temps moyen de dégradation excessive de l'environnement $E(T_d)$ au cours d'un cycle est :

$$E(T_d) = E(U_c) - E(T).$$

En utilisant le résultat de la Proposition 3.1, le temps moyen de dégradation excessive de l'environnement $E(T_d)$ au cours d'un cycle peut être écrit ainsi :

$$\begin{aligned} E(T_d) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \tau\, f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Cette sous-section a été consacrée à la modélisation mathématique de la disponibilité stationnaire A_{s2}. Cette disponibilité dépend des durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection, du temps moyen de bon fonctionnement, et du temps moyen de dégradation excessive du système. Cette disponibilité est donnée par :

$$A_{s2}(\Theta) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \tau \; f(\tau) d\tau}{\left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau \\ \displaystyle +(T_c - T_p) \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} G(\theta_j + H - \tau) \; f(\tau) d\tau + T_p \\ \displaystyle +T_i \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\int_0^{\theta_{j+1}} G(\theta_{j+1} - \tau) \; f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_j} G(\theta_j - \tau) \; f(\tau) d\tau \right) \end{array} \right)} \tag{3.15}$$

L'objectif de cette section (Section 3.3) est la modélisation de deux disponibilités stationnaires (A_{s1} et A_{s2}). Afin d'optimiser les deux stratégies de maintenance proposées, la méthode de Nelder-Mead est adoptée. La section suivante est dédiée à la procédure numérique développée.

3.4 Procédure numérique

Les deux problèmes d'optimisation, donnés par les équations (3.3) et (3.13), sont résolus en utilisant une procédure numérique basée sur la méthode de Nelder-Mead. Le principe de cette méthode est donné en annexe 1. La Figure A.2, donnée en annexe 2, montre la procédure numérique utilisée pour trouver les dates optimales d'inspection.

Selon la Figure A.2, la première étape est une étape d'initialisation où les données d'entrée sont fournies. La deuxième étape consiste à initialiser la dimension n du vecteur solution ($n = 1$). La troisième étape consiste à calculer le vecteur optimal des dates d'inspection $\Theta^* = (\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*)$ en utilisant l'algorithme de Nelder-Mead. On rappelle que le nombre d'inspections à effectuer est une variable aléatoire notée N, dont la réalisation est représentée par n qui est la dimension du vecteur solution Θ^*. La quatrième étape consiste à incrémenter la dimension n ($n = n + 1$). Cette étape d'incrémentation est précédée par un test sur le nombre maximal d'itérations, c.-

à-d. qu'on incrémente n si le nombre maximal d'itérations n'est pas atteint. Les itérations sont alors arrêtées quand leur nombre maximal est atteint. Dans ce cas, la dernière étape consiste à sélectionner la solution optimale dans l'ensemble des solutions optimales trouvées pour chaque valeur de n.

3.5 Exemple numérique

Dans cette section, un exemple numérique est donné pour illustrer les deux modèles donnés par les équations (3.10) et (3.15). L'objectif est de déterminer les dates optimales d'inspection qui maximisent la disponibilité stationnaire du système donnée par l'une des deux équations. La procédure numérique exposée à la Section 3.4 est exploitée pour évaluer les dates optimales d'inspection. Les données d'entrée de la procédure numérique comportent les densités de probabilités f et g, les durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection (T_c, T_p, et T_i), et le délai H. Le temps est exprimé en unité de temps. Les densités de probabilités f et g correspondent, respectivement, aux variables aléatoires T et X. On suppose que chacune des deux variables suit une loi de Weibull dont le paramètre d'échelle est exprimé en unité de temps tandis que le paramètre de forme n'a pas d'unité.

– La densité de probabilité f du temps aléatoire T écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation est donnée par :

$$f(\tau) = \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)\left(\frac{\tau}{\alpha_f}\right)^{\beta_f - 1} e^{-\left(\frac{\tau}{\alpha_f}\right)^{\beta_f}}, \tag{3.16}$$

où le paramètre d'échelle est $\alpha_f = 1164.1$ et le paramètre de forme est $\beta_f = 8.7$.

– La densité de probabilité g du temps aléatoire X écoulé à partir de l'instant τ jusqu'à l'occurrence de la panne est donnée par :

$$g(x) = \left(\frac{\beta_g}{\alpha_g}\right)\left(\frac{x}{\alpha_g}\right)^{\beta_g - 1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_g}\right)^{\beta_g}}, \tag{3.17}$$

où le paramètre d'échelle est $\alpha_g = 144.2$ et le paramètre de forme est $\beta_g = 3.6$.

La durée H ainsi que les durées des actions de maintenance et d'inspection (T_c, T_p, et T_i) seront considérées comme des paramètres de sensibilité ; ces paramètres seront variables dans les expériences suivantes. Par la suite, on désigne par δ le rapport entre le temps moyen $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement et le temps moyen $E(U_c)$ de bon fonctionnement

du système au cours d'un cycle tel que :

$$\delta = \frac{E(T_d)}{E(U_c)}, \tag{3.18}$$

ou encore

$$\delta(\Theta) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau}{\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\tau + \int_0^{\theta_j + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau}. \tag{3.19}$$

Afin d'analyser la sensibilité des critères de performance proposés (A_{s1} et A_{s2}) relativement aux quatre paramètres (T_c, T_p, T_i, et H), quatre expériences seront réalisées où un seul paramètre parmi les quatre sera modifié.

3.5.1 Expérience 1 : impact de la durée T_c sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$

Dans cette expérience, on étudie le cas où la durée moyenne de maintenance corrective T_c est variable. Les durées moyennes des actions de maintenance préventive et d'inspection sont respectivement fixées à $T_p = 12$ et $T_i = 2$. La durée H est fixée à 0, c.-à-d. que les actions de maintenance préventive ne sont pas retardées. Pour les différentes valeurs de T_c, les Tableaux 3.1 et 3.2 donnent le vecteur optimal Θ^* des dates d'inspection pour chaque modèle (c.-à-d. que le Tableau 3.1 montre les résultats obtenus par la maximisation de A_{s1}, tandis que le Tableau 3.2 représente les résultats obtenus par la maximisation de A_{s2}). Pour chaque vecteur Θ^*, le Tableau 3.1 donne également la dimension du vecteur Θ^* notée n, la disponibilité stationnaire optimale du système $A_{s1}(\Theta^*)$, et le ratio δ. Le Tableau 3.2 donne aussi n, la disponibilité stationnaire optimale du système $A_{s2}(\Theta^*)$, et le ratio δ.

T_c	Θ^*	n	$A_{s1}(\Theta^*)$	δ [%]
24	1135.9, 1272.7, 1410.2	3	0.9844	6.92
48	1017.0, 1171.3, 1259.7, 1356.3, 1412.7, 1706.3	6	0.9803	5.52
72	1017.0, 1171.3, 1259.7, 1356.3, 1412.7, 1706.3	6	0.9767	5.52

Tableau 3.1 – Impact de la durée T_c sur $A_{s1}(\Theta^*)$

Ces tableaux montrent que les valeurs optimales des disponibilités stationnaires ($A_{s1}(\Theta^*)$ et

$A_{s2}(\Theta^*)$) diminuent suite à l'augmentation de la durée de maintenance corrective, tandis que la dimension n du vecteur solution augmente. L'augmentation de la durée de maintenance corrective induit la diminution du ratio δ, c.-à-d. que la dégradation excessive de l'environnement est réduite. Pour le cas où $T_c = 24$, le vecteur des dates d'inspection $\Theta^* = (1135.9, 1272.7, 1410.2)$ dans le Tableau 3.1 représente le vecteur optimal qui maximise la disponibilité stationnaire A_{s1}, tandis que le vecteur $\Theta^* = (1062.6, 1158.2, 1259.3)$ dans le Tableau 3.2 représente le vecteur optimal des dates d'inspection qui maximise la disponibilité stationnaire A_{s2}. On constate que la valeur de δ a été réduite de 6.92% à 5.57% suite au changement du critère d'optimisation de la maximisation de A_{s1} à la maximisation de A_{s2}.

T_c	Θ^*	n	$A_{s2}(\Theta^*)$	δ [%]
24	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9271	5.57
48	1017.0, 1171.3, 1259.7, 1356.3, 1412.7, 1706.3	6	0.9262	5.52
72	1017.0, 1171.3, 1259.7, 1356.3, 1412.7, 1706.3	6	0.9228	5.52

Tableau 3.2 – Impact de la durée T_c sur $A_{s2}(\Theta^*)$

3.5.2 Expérience 2 : impact de la durée T_p sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$

Dans cette expérience, on considère le cas où la durée moyenne de maintenance préventive T_p est variable. Pour cela, nous avons fixé la durée moyenne de maintenance corrective T_c à 24 et la durée moyenne d'inspection T_i à 2. Les actions de maintenance préventive ne sont pas retardées. Pour différentes valeurs de T_p, le Tableau 3.3 donne le vecteur optimal Θ^* des dates d'inspection et sa dimension n, la disponibilité stationnaire optimale $A_{s1}(\Theta^*)$, et le taux de dégradation δ, alors que le Tableau 3.4 donne Θ^*, n, $A_{s2}(\Theta^*)$, et δ.

T_p	Θ^*	n	$A_{s1}(\Theta^*)$	δ [%]
6	1073.8, 1199.5, 1288.2, 1379.2, 1417.6, 1714.8	6	0.9882	5.66
12	1135.9, 1272.7, 1410.2	3	0.9844	6.92
18	1270.3, 1443.4	2	0.9815	8.77

Tableau 3.3 – Impact de la durée T_p sur $A_{s1}(\Theta^*)$

Ces tableaux montrent que la valeur du ratio δ (resp. $A_{s1}(\Theta^*)$, $A_{s2}(\Theta^*)$, et n) croit (resp. diminuent) suite à l'augmentation de la durée de maintenance préventive. Cela signifie que la durée de maintenance préventive a un impact négatif sur le taux de dégradation excessive (c.-à-d. que le ratio δ croit par l'augmentation de T_p). Toutefois, la maximisation de A_{s2} réduit le ratio δ (δ augmente de 5.66 % à 8.77 % et de 5.52% à 5.57% par l'augmentation de T_p respectivement dans les Tableaux 3.3 et 3.4). Nous pouvons également noter que l'augmentation de T_p ou la diminution de T_c induit la diminution du nombre d'inspections effectuées.

T_p	Θ^*	n	$A_{s2}(\Theta^*)$	δ [%]
6	1017.0, 1171.3, 1259.7, 1356.3, 1412.7, 1706.3	6	0.9336	5.52
12	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9271	5.57
18	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9224	5.57

Tableau 3.4 – Impact de la durée T_p sur $A_{s2}(\Theta^*)$

3.5.3 Expérience 3 : impact de la durée T_i sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$

Le cas où la durée moyenne d'inspection T_i est variable est étudié dans cette expérience. Nous avons fixé la durée moyenne de maintenance corrective T_c à 24. Les actions de maintenance préventive dont la durée moyenne T_p est fixée à 12 ne sont pas retardées (on se place dans le cas où $H = 0$). Pour les différentes valeurs de T_i, les Tableaux 3.5 et 3.6 donnent le vecteur optimal Θ^* des dates d'inspection pour chaque modèle. Pour chaque vecteur Θ^*, le Tableau 3.5 donne aussi la dimension n du vecteur Θ^*, la disponibilité stationnaire optimale $A_{s1}(\Theta^*)$, et le taux de dégradation δ. Le Tableau 3.6 donne aussi n, $A_{s2}(\Theta^*)$, et δ.

T_i	Θ^*	n	$A_{s1}(\Theta^*)$	δ [%]
2	1135.9, 1272.7, 1410.2	3	0.9844	6.92
4	1169.3, 1286.9, 1550.9	3	0.9822	7.37
6	1339.5, 1449.6, 1837.2	3	0.9815	9.44

Tableau 3.5 – Impact de la durée T_i sur $A_{s1}(\Theta^*)$

En variant la valeur de la durée d'inspection T_i, les Tableaux 3.5 et 3.6 regroupent les résultats obtenus respectivement pour la maximisation des disponibilités stationnaires A_{s1} et A_{s2}.

On remarque que l'augmentation de la durée d'inspection T_i induit la diminution des disponibilités optimales $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$. Cependant, cette augmentation entraine aussi celle du ratio δ. Ceci peut être expliqué par le fait que l'augmentation des durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection induit la diminution de la disponibilité du système. Pour les différentes valeurs de la durée d'inspection T_i, la dimension n du vecteur solution ne varie pas. Dans cette configuration, le paramètre le plus sensible est le ratio δ. D'après le Tableau 3.5, on remarque que le ratio δ s'élève de 6.92% à 9.44% suite à l'augmentation de la durée d'inspection T_i de 2 à 6. Cela signifie que la durée d'inspection T_i a un impact important sur le taux δ plus que celui induit par les durées des actions de maintenance (corrective et préventive).

T_i	Θ^*	n	$A_{s2}(\Theta^*)$	δ [%]
2	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9271	5.57
4	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9233	5.57
6	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9196	5.57

Tableau 3.6 – Impact de la durée T_i sur $A_{s2}(\Theta^*)$

3.5.4 Expérience 4 : impact de la durée H sur $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$

Cette expérience étudie l'impact de la durée H sur les disponibilités stationnaires A_{s1} et A_{s2}. Les durées moyennes des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection sont fixées respectivement à $T_c = 24$, $T_p = 12$, et $T_i = 2$. Pour cette expérience, les résultats obtenus sont présentés dans les Tableaux 3.7 et 3.8. Pour les différentes valeurs de H, les Tableaux 3.7 et 3.8 donnent le vecteur optimal Θ^* des dates d'inspection pour chaque modèle. Pour chaque vecteur Θ^*, le Tableau 3.7 donne aussi la dimension n du vecteur Θ^*, la disponibilité stationnaire optimale $A_{s1}(\Theta^*)$, et le taux de dégradation δ. Le Tableau 3.8 donne aussi n, $A_{s2}(\Theta^*)$ et δ.

Les résultats des Tableaux 3.7 et 3.8 montrent que l'élargissement de la durée H induit l'augmentation du ratio δ ainsi que la diminution des disponibilités stationnaires $A_{s1}(\Theta^*)$ et $A_{s2}(\Theta^*)$. Malgré l'augmentation de la durée H, la dimension n du vecteur solution est invariante, comme dans l'expérience précédente. L'augmentation importante de δ (de 6.92% à 7.49% dans le Tableau 3.7 et de 5.57% à 6.35% selon le Tableau 3.8) peut être expliquée par le fait que le retard des actions de maintenance préventive a une influence négative sur la dégradation du système.

H	Θ^*	n	$A_{s1}(\Theta^*)$	δ [%]
0	1135.9, 1272.7, 1410.2	3	0.9844	6.92
6	1138.8, 1272.3, 1407.5	3	0.9843	7.21
12	1142.0, 1272.2, 1405.3	3	0.9840	7.49

Tableau 3.7 – Impact de la durée H sur $A_{s1}(\Theta^*)$.

H	Θ^*	n	$A_{s2}(\Theta^*)$	δ [%]
0	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9271	5.57
6	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9231	5.97
12	1062.6, 1158.2, 1259.3	3	0.9192	6.35

Tableau 3.8 – Impact de la durée H sur $A_{s2}(\Theta^*)$.

Les résultats numériques des quatre expériences ci-dessus montrent l'impact de la variation des durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection sur la dégradation du système. Ces résultats montrent aussi que le deuxième modèle de disponibilité stationnaire permet de réduire davantage la dégradation du système.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle a été proposée afin de maximiser la disponibilité stationnaire d'un système sujet à des pannes aléatoires et dont la dégradation induit celle de l'environnement. Cette dégradation est contrôlée par des inspections séquentielles. L'action de maintenance préventive est planifiée à chaque fois que le niveau de dégradation dépasse un seuil d'alarme spécifié, alors que la maintenance corrective est exécutée immédiatement à la panne du système. Deux modèles mathématiques d'optimisation ont été proposés pour la disponibilité stationnaire du système. À la différence du premier modèle, la disponibilité stationnaire donnée par le deuxième modèle considère que le système est indisponible lorsque son niveau de dégradation dépasse le seuil autorisé. En se basant sur l'algorithme de Nelder-Mead, une procédure a été proposée pour calculer les dates optimales d'inspection. Ensuite, quatre expériences numériques ont été proposées aux travers desquelles une étude de sensibilité a été menée. Cette étude concernait l'impact des durées des actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) sur la disponibilité stationnaire du système. Les résultats obtenus ont montré, plus particulièrement, que c'est le second modèle de disponibilité qui permet de réduire l'impact de la dégradation du système sur l'environnement.

Jusqu'à présent, la panne du système étudié est supposée être connue sans inspection. Dans le chapitre suivant, cette hypothèse sera relaxée en supposant que la panne du système n'est pas auto-déclarée, mais n'est révélée que suite à une action d'inspection. L'objectif des activités d'inspection sera alors de suivre à la fois, la dégradation du système ainsi que son état de bon fonctionnement. Les dates optimales d'inspection seront alors déterminées pour minimiser le coût total moyen par unité de temps tout en garantissant un niveau requis de disponibilité stationnaire ou encore, pour maximiser la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget.

Chapitre 4

Optimisation sous contrainte du coût de maintenance et de la disponibilité d'un système de production à dégradation continue soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle

Résumé

Dans ce chapitre une stratégie de maintenance conditionnelle est proposée pour un système de production afin de réduire son impact sur l'environnement. Cette stratégie de maintenance consiste à maintenir le système en contrôlant son niveau de dégradation. Un tel niveau est contrôlé par des inspections séquentielles. Ces inspections sont aussi nécessaires pour détecter la panne du système qui n'est plus auto-déclarée dans ce chapitre. La maintenance préventive est planifiée à la détection du dépassement d'un seuil de dégradation spécifié. Cependant, à la détection de la panne, une maintenance corrective est exécutée immédiatement. Les durées de ces actions d'inspection et de maintenance sont prises en compte. Un modèle de coût et un modèle de disponibilité sont étudiés. Ces deux modèles sont une généralisation de ceux présentés dans les deux chapitres précédents. Dans le présent chapitre, et dans un premier temps, l'objectif est de trouver les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps en respectant un niveau requis de disponibilité stationnaire. Dans un second temps, l'objectif sera de trouver les dates d'inspection qui maximisent la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Pour résoudre les problèmes d'optimisation, les deux procédures numériques présentées dans les deux chapitres précédents sont utilisées.

4.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous nous sommes intéressés aux deux critères de performances les plus rencontrés dans la littérature qui sont le coût total moyen par unité de temps et la disponibilité stationnaire du système. Dans le présent chapitre, le cadre de l'étude est le même que celui des deux chapitres précédents. La seule différence est que la panne du système ne sera plus auto-déclarée, c.-à-d. que la panne n'est détectée qu'après une opération d'inspection. Les pannes non auto-déclarées ont été considérées dans la littérature comme une cause d'inactivité du système. Cette inactivité engendre dans la plupart des cas un coût de pénalité (coût de pénurie) qui sera considéré dans notre étape de modélisation.

Dans ce chapitre, la stratégie de maintenance conditionnelle développée dans les chapitres 2 et 3 est étudiée dans le cas où les pannes du système ne sont détectées que suite à une opération d'inspection. Rappelons que cette stratégie de maintenance a pour but de réduire la dégradation de l'environnement. Le système considéré est soumis à une dégradation continue croissante contrôlée par des inspections séquentielles. En se basant sur l'information issue d'inspection, une action de maintenance préventive peut être planifiée, alors qu'une action de maintenance corrective est exécutée immédiatement à la détection de la panne du système. L'action de maintenance préventive est planifiée lorsque le niveau de dégradation du système franchit un seuil fixé. Les durées de ces actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) sont non négligeables. Dans un premier temps, l'objectif est de trouver les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps en respectant un niveau requis de disponibilité stationnaire. Dans un second temps, l'objectif sera de trouver les dates d'inspection qui maximisent la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget.

Dans ce chapitre, deux modèles mathématiques sont étudiés. Le premier modèle considère le coût total moyen par unité de temps tandis que le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système. Ces deux modèles sont une généralisation de ceux présentés dans les deux chapitres précédents. Le coût total moyen est engendré par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ainsi que les coûts de pénalités dus au niveau excessif de dégradation de l'environnement d'une part, et à l'inactivité du système d'autre part. La disponibilité stationnaire du système est exprimée en fonction des durées moyennes des actions de maintenance et d'inspection, de la durée moyenne d'inactivité du système, et de la durée moyenne de bon fonctionnement du système. Afin de déterminer les dates optimales

d'inspection, les deux procédures numériques présentées dans les deux chapitres précédents sont exploitées.

Le reste du présent chapitre est organisé comme suit : les notations et les hypothèses sont données à la section suivante. Les formulations mathématiques du coût et de la disponibilité étudiées sont données dans la Section 4.3, où quelques propositions sont données. Dans la Section 4.4, des expériences numériques sont réalisées pour illustrer les modèles proposés, et les résultats obtenus sont analysés. La conclusion et les perspectives sont abordées à la Section 4.5.

4.2 Description du problème : notations et hypothèses

Dans ce chapitre, le système de production étudié est semblable à celui du chapitre précédent à la seule différence que la panne du système n'est plus auto-déclarée. Le système considéré est soumis à une dégradation continue croissante et est supposé être dans l'un des deux états suivants : un état de bon fonctionnement ou un état de panne. Vu sa dégradation, le système en fonctionnement peut avoir un impact sur l'environnement, c.-à-d. que la dégradation du système induit celle de l'environnement. Cet impact devient plus important après le dépassement d'un seuil d'alarme donné. Le niveau de dégradation du système est contrôlé par des inspections séquentielles. En se basant sur les mesures issues d'inspection, la maintenance préventive est planifiée suite à la détection du franchissement du seuil d'alarme, alors que la maintenance corrective est effectuée immédiatement à la détection de la panne du système.

4.2.1 Notations

Les notations suivantes sont utilisées dans ce chapitre.

C_c coût moyen de maintenance corrective.

C_d coût moyen par unité de temps de dégradation excessive de l'environnement, c.-à-d. coût de pénalité réglementaire.

C_i coût moyen d'inspection.

C_p coût moyen de maintenance préventive.

C_s coût moyen par unité de temps d'inactivité du système, c.-à-d. coût de pénurie dû à l'inactivité du système entre la panne et sa détection.

T_c durée moyenne de maintenance corrective.

T_i durée moyenne d'inspection.

T_p durée moyenne de maintenance préventive.

H délai pour effectuer la maintenance préventive, à partir de la date d'inspection à laquelle le dépassement du seuil d'alarme est détecté.

T temps aléatoire écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation du système.

τ réalisation de T sur l'axe du temps, à partir du début du cycle.

f densité de probabilité de T.

X temps aléatoire écoulé à partir de l'instant τ jusqu'à la panne (durée de vie du système après le dépassement du seuil).

x réalisation de X, à partir de l'instant τ.

$g,\ G$ densité de probabilité et fonction de répartition de X, respectivement.

N nombre aléatoire d'inspections au cours d'un cycle.

Θ vecteur des dates d'inspection θ_k, $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

T_d temps aléatoire de dégradation excessive de l'environnement.

T_s temps aléatoire d'inactivité du système entre la panne et sa détection.

T_t temps aléatoire du cycle (un cycle se termine soit par une maintenance corrective, soit par une maintenance préventive).

P_c probabilité que le cycle se termine par une maintenance corrective.

P_p probabilité que le cycle se termine par une maintenance préventive.

U_c temps aléatoire de bon fonctionnement du système au cours d'un cycle.

D_c temps aléatoire d'arrêt du système au cours d'un cycle.

A_s disponibilité stationnaire du système.

C_t coût total induit par les opérations de maintenance et d'inspection et par la dégradation de l'environnement ainsi que l'inactivité du système pendant un cycle.

4.2.2 Hypothèses

Les hypothèses de base sont les suivantes :

1. La dégradation du système induit celle de l'environnement.
2. Après chaque inspection, deux types d'action sont possibles : ne rien faire ou effectuer une action de maintenance (préventive ou corrective).
3. La maintenance préventive est planifiée après un délai H à partir de l'instant d'inspection où le niveau de dégradation franchit le seuil d'alarme. Toute éventuelle inspection sera annulée dans cette période.

4. Le système peut tomber en panne uniquement lorsque son niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme. Une telle panne est également supposée être connue par inspection (cas de panne non auto-déclarée).
5. La maintenance corrective est effectuée immédiatement à la panne du système.
6. Les deux actions de maintenance, corrective et préventive, sont supposées être parfaites. Après de telles actions, le système de production devient comme neuf (« as good as new »).
7. Les actions d'inspection sont supposées être parfaites, c.-à-d. que l'inspection révèle le niveau réel de dégradation ainsi que la panne du système sans erreur.
8. Les coûts C_c, C_d, C_i, C_p, et C_s sont supposés être connus.
9. Les durées T_c, T_p, T_i, et H ainsi que les densités f et g sont supposées être connues.

4.3 Modèles mathématiques

La stratégie de maintenance conditionnelle étudiée dans ce chapitre consiste à réduire la dégradation de l'environnement à travers des actions de maintenance préventive. Sur la base des mesures d'inspection, l'action de maintenance préventive est planifiée à la détection du dépassement du seuil d'alarme, alors que l'action de maintenance corrective est effectuée immédiatement après la détection de la panne du système non auto-déclarée. Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps tout en garantissant un niveau requis de disponibilité stationnaire. Ensuite, l'objectif sera de déterminer les dates d'inspection qui maximisent la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Dans cette section, deux modèles mathématiques seront alors développés : un modèle de coût ainsi qu'un modèle de disponibilité.

4.3.1 Modèle de coût

Le modèle de coût considère le coût total moyen par unité de temps. Par analogie aux travaux des chapitres précédents, un tel coût peut être exprimé comme le rapport entre le coût total moyen $E(C_t)$ et le temps moyen d'un cycle $E(T_t)$:

$$J = \frac{E(C_t)}{E(T_t)}. \tag{4.1}$$

La formule suivante donne le coût total moyen $E(C_t)$:

$$E(C_t) = C_c\ P_c + C_p\ P_p + C_i\ E(N) + C_d\ E(T_d) + C_s\ E(T_s), \tag{4.2}$$

où $E(N)$ est le nombre moyen d'inspections, $E(T_d)$ est le temps moyen de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle, et $E(T_s)$ est le temps moyen d'inactivité du système de production au cours d'un cycle.

À la fin d'un cycle, une maintenance préventive ou une maintenance corrective est effectuée. La maintenance préventive, dont le coût moyen est C_p, peut être exécutée avec une probabilité P_p, alors que la maintenance corrective, dont le coût moyen est C_c, peut être exécutée avec une probabilité P_c. Pendant le cycle, le système est soumis à des inspections dont le coût moyen induit est $C_i\ E(N)$. Le quatrième terme de l'équation (4.2) correspond au coût moyen induit par la dégradation excessive de l'environnement, tandis que le dernier terme correspond au coût moyen induit par l'inactivité du système de production entre l'instant d'occurrence de la panne et l'instant de sa détection.

Pour calculer la formule explicite du coût total moyen $E(C_t)$, quelques propositions des deux chapitres précédents sont utilisées. La Proposition 2.1 donne la probabilité P_c que le cycle se termine par une action de maintenance corrective :

$$P_c = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} G(\theta_k + H - \tau)\ f(\tau) d\tau. \tag{4.3}$$

Il s'ensuit que la probabilité P_p qu'un cycle se termine par une action de maintenance préventive est donnée par :

$$P_p = 1 - P_c. \tag{4.4}$$

La Proposition 2.2 donne le nombre moyen $E(N)$ d'inspections au cours d'un cycle :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\int_0^{\theta_{k+1}} G(\theta_{k+1} - \tau)\ f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_k} G(\theta_k - \tau)\ f(\tau) d\tau \right). \tag{4.5}$$

La Proposition 3.2 donne le temps moyen de dégradation excessive de l'environnement $E(T_d)$ au cours d'un cycle :

$$E(T_d) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right)\ f(\tau) d\tau. \tag{4.6}$$

La proposition suivante donne le temps moyen d'inactivité du système $E(T_s)$. On rappelle que ce temps est mesuré à partir de la panne du système jusqu'à sa détection par inspection.

Proposition 4.1 *Le temps moyen d'inactivité du système $E(T_s)$ au cours d'un cycle est donné*

par :

$$E(T_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k + H - \tau} [\theta_k + H - (\tau + x)]\, g(x) dx - H\ G(\theta_k - \tau) \right)\ f(\tau) d\tau. \qquad (4.7)$$

Preuve. Supposons que le niveau de dégradation dépasse le seuil d'alarme L à $T = \tau$, $\theta_{k-1} < T \leq \theta_k$, et le système tombe en panne à $X = x$ à partir de τ. Deux scénarios d'inactivité du système sont possibles : (1) le système tombe en panne avant la date d'inspection θ_k comme montré dans la Figure 4.1, et (2) le système tombe en panne avant la date prévue pour la maintenance préventive $\theta_k + H$ comme montré dans la Figure 4.2.

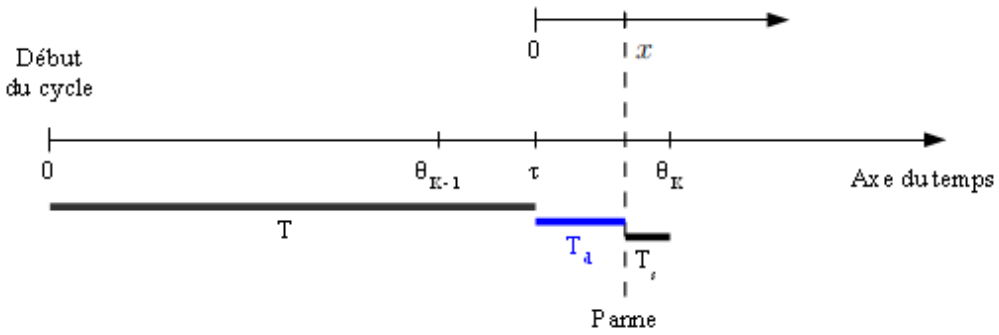

Figure 4.1 – Le cas où le système tombe en panne avant la date d'inspection θ_k

Il en résulte que le temps d'inactivité du système T_s au cours d'un cycle peut être écrit :

$$T_s = \begin{cases} \theta_k - (T + X) & si \quad X \leq \theta_k - \tau \\ \theta_k + H - (T + X) & si \quad \theta_k - \tau < X \leq \theta_k + H - \tau \end{cases}$$

En d'autres termes, $T_s = min(\theta_k - (T + X),\ \theta_k + H - (T + X))$.

Le temps moyen d'inactivité du système $E(T_s)$ au cours d'un cycle peut être écrit ainsi :

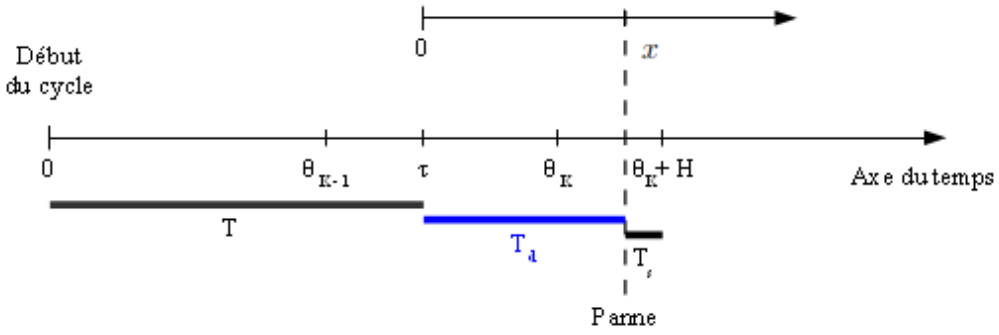

Figure 4.2 – Le cas où le système tombe en panne avant la date prévue de la maintenance préventive $\theta_k + H$

$$
\begin{aligned}
E(\ T_s) \quad &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} E\left(T_s \,|_{\tau<T\leq\tau+d\tau}\right)\ f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} E\left(min(\theta_k-(T+X),\ \theta_k+H-(T+X)\right)|_{\tau<T\leq\tau+d\tau})\ f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k-\tau} [\theta_k-(\tau+x)]\, g(x)dx + \int_{\theta_k-\tau}^{\theta_k+H-\tau} [\theta_k+H-(\tau+x)]\, g(x)dx \right)\ f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k-\tau} [\theta_k+H-(\tau+x)]\, g(x)dx - H\ G(\theta_k-\tau) \right. \\
&\qquad \left. + \int_{\theta_k-\tau}^{\theta_k+H-\tau} [\theta_k+H-(\tau+x)]\, g(x)dx \right)\ f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k+H-\tau} [\theta_k+H-(\tau+x)]\, g(x)dx - H\ G(\theta_k-\tau) \right)\ f(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Ceci termine la preuve. ■

Le numérateur du coût total moyen par unité de temps, donné par l'équation (4.1), peut être facilement déduit des équations (4.2)-(4.7). Le temps moyen du cycle $E(T_t)$ est donné par la somme du temps moyen de bon fonctionnement $E(U_c)$ avec le temps moyen d'arrêt $E(D_c)$:

$$E(T_t) = E(U_c) + E(D_c), \tag{4.8}$$

La Proposition 3.1 permet d'avoir l'expression formelle du temps moyen de bon fonctionnement du système $E(U_c)$ au cours d'un cycle :

$$E(U_c) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\tau + \int_0^{\theta_k + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau. \tag{4.9}$$

Une action de maintenance, préventive ou corrective, est effectuée à la fin d'un cycle de fonctionnement du système. La maintenance préventive, dont la durée moyenne est T_p, peut être exécutée avec une probabilité P_p, alors que la maintenance corrective peut être exécutée avec une probabilité P_c. Au cours d'un cycle, le système est soumis à des inspections dont le temps moyen induit est $T_i \; E(N)$. Comme la panne du système n'est détectée que par inspection, le temps d'inactivité du système entre l'instant d'occurrence de la panne et l'instant de sa détection est considéré comme un temps d'arrêt dont l'espérance est $E(T_s)$. La formule suivante donne alors l'expression du temps moyen d'arrêt du système au cours d'un cycle :

$$E(D_c) = T_c \; P_c + T_p \; P_p + T_i \; E(N) + E(T_s). \tag{4.10}$$

Les résultats ci-dessus permettent d'obtenir le modèle mathématique du coût total moyen par unité de temps qui s'écrit :

$$J(\Theta) = \frac{\left(\begin{array}{l} (C_c - C_p) \; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} G(\theta_k + H - \tau) \; f(\tau) d\tau + C_p \\ + C_i \; \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\int_0^{\theta_{k+1}} G(\theta_{k+1} - \tau) \; f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_k} G(\theta_k - \tau) \; f(\tau) d\tau \right) \\ + C_d \; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau \\ + C_s \; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k + H - \tau} [\theta_k + H - (\tau + x)]\, g(x) dx - H \; G(\theta_k - \tau) \right) \; f(\tau) d\tau \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\tau + \int_0^{\theta_k + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) \; f(\tau) d\tau \\ + (T_c - T_p) \; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} G(\theta_k + H - \tau) \; f(\tau) d\tau + T_p \\ + T_i \; \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\int_0^{\theta_{k+1}} G(\theta_{k+1} - \tau) \; f(\tau) d\tau - \int_0^{\theta_k} G(\theta_k - \tau) \; f(\tau) d\tau \right) \\ + \; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k + H - \tau} [\theta_k + H - (\tau + x)]\, g(x) dx - H \; G(\theta_k - \tau) \right) \; f(\tau) d\tau \end{array} \right)} \tag{4.11}$$

Remarque 4.1
Le modèle de coût développé dans le chapitre 2 peut être déduit de celui développé dans le présent chapitre (équation (4.11)) en annulant le coût de pénurie C_s, les durées des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection T_c, T_p, et T_i, ainsi que le temps moyen $E(T_s)$ d'inactivité du système.

Remarque 4.2
Le système de production, décrit à la Section 4.2 du présent chapitre, est caractérisé par une panne non auto-déclarée. Le modèle de coût développé pour ce système de production peut être modifié afin de trouver le modèle de coût pour le système de production, dont la panne est auto-déclarée, étudié dans le chapitre précédent. Dans ce cas, le modèle de coût est déduit de l'équation (4.11) en annulant le coût de pénurie C_s ainsi que le temps moyen d'inactivité du système qui est le dernier terme du dénominateur.

4.3.2 Modèle de disponibilité

Le modèle de disponibilité considère la disponibilité stationnaire du système A_s donnée par le rapport entre le temps moyen de bon fonctionnement du système $E(U_c)$ et le temps moyen du cycle $E(T_t)$:

$$A_s = \frac{E(U_c)}{E(T_t)}. \tag{4.12}$$

Le temps moyen de bon fonctionnement du système $E(U_c)$ est donné par l'équation (4.9), tandis que le temps moyen du cycle $E(T_t)$ est donné par l'équation (4.8). La disponibilité stationnaire du système est alors donnée ainsi :

$$A_s(\Theta) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\left(\tau+\int_0^{\theta_k+H-\tau}[1-G(x)]\,dx\right)\,f(\tau)d\tau}{\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\left(\tau+\int_0^{\theta_k+H-\tau}[1-G(x)]\,dx\right)\,f(\tau)d\tau\\ +(T_c-T_p)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}G(\theta_k+H-\tau)\,f(\tau)d\tau+T_p\\ +T_i\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\int_0^{\theta_{k+1}}G(\theta_{k+1}-\tau)\,f(\tau)d\tau-\int_0^{\theta_k}G(\theta_k-\tau)\,f(\tau)d\tau\right)\\ +\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\left(\int_0^{\theta_k+H-\tau}[\theta_k+H-(\tau+x)]\,g(x)dx-H\,G(\theta_k-\tau)\right)\,f(\tau)d\tau\end{array}\right)} \tag{4.13}$$

Remarque 4.3
Le modèle de disponibilité développé dans le chapitre 3 peut être déduit de celui développé dans le présent chapitre (équation (4.13)) en annulant le temps moyen d'inactivité du système qui est le dernier terme du dénominateur.

Cette section (Section 4.3) a été consacrée à la modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps (équation (4.11)) et de la disponibilité stationnaire du système (équation (4.13)). Dans la section suivante, un exemple numérique est donné pour illustrer les deux modèles proposés. Quatre expériences sont alors réalisées, où les dates optimales d'inspection sont calculées en exploitant les procédures numériques développées dans les deux chapitres précédents.

4.4 Exemple numérique

Dans le cadre de cet exemple numérique, les coûts moyens ainsi que les durées moyennes des actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive) sont choisis tels que : $C_i = 210$, $C_c = 5500$, $C_p = 3000$, $T_i = 2$, $T_c = 24$, et $T_p = 12$. Comme déjà adopté dans les deux chapitres précédents, le temps est exprimé en unité de temps, alors que le coût est exprimé en unité monétaire. Dans cet exemple numérique, le délai pour effectuer une maintenance préventive est fixé à $H = 10$. Les densités de probabilités f et g correspondent, respectivement, aux variables aléatoires T et X. On suppose que chacune des deux variables suit une loi normale. La densité de probabilité f du temps aléatoire T écoulé jusqu'au dépassement du seuil de dégradation est donnée par :

$$f(\tau) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu_f}{\sigma_f}\right)^2}, \tag{4.14}$$

où $\mu_f = 850$ et $\sigma_f = 100$.

La densité de probabilité g du temps aléatoire X écoulé à partir de l'instant τ jusqu'à l'occurrence de la panne est donnée par :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_g}{\sigma_g}\right)^2}, \tag{4.15}$$

où $\mu_g = 200$ et $\sigma_g = 35$.

On désigne par δ le rapport entre la durée moyenne $E(T_d)$ de dégradation excessive de l'environnement et le temps moyen $E(U_c)$ de bon fonctionnement du système tel que :

$$\delta = \frac{E(T_d)}{E(U_c)}, \tag{4.16}$$

ou encore

$$\delta(\Theta) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\int_0^{\theta_k + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau}{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \left(\tau + \int_0^{\theta_k + H - \tau} [1 - G(x)]\, dx \right) f(\tau) d\tau}. \tag{4.17}$$

Par la suite, quatre expériences sont effectuées telles que :

Expérience 1 : Minimiser le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$ donné par l'équation (4.11).

Expérience 2 : Maximiser la disponibilité stationnaire du système $A_s(\Theta)$ donnée par l'équation (4.13).

Expérience 3 : Minimiser le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$ sous une contrainte de disponibilité.

Expérience 4 : Maximiser la disponibilité stationnaire $A_s(\Theta)$ sous une contrainte de budget.

Le Tableau 4.1 présente les résultats obtenus pour les quatre expériences. Ces résultats sont obtenus pour le cas particulier où le coût C_d de dégradation de l'environnement est fixé à 20 alors que le coût C_s de pénalité dû à l'inactivité du système est fixé à 375. Pour chaque expérience, le Tableau 4.1 donne le vecteur optimal des dates d'inspection Θ^*, le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$, la disponibilité stationnaire du système $A_s(\Theta^*)$, et le taux de dégradation excessive de l'environnement au cours d'un cycle $\delta(\Theta^*)$. Rappelons que ce taux est donné par le rapport entre la durée moyenne de dégradation excessive de l'environnement et le temps moyen de bon fonctionnement du système.

Dans le cadre de l'expérience 1 (voir le Tableau 4.1), la valeur minimale du coût total moyen par unité de temps est égale à 5.37 et la dimension du vecteur optimal Θ^* =(751.3, 846.7, 926.6,

1015.5, 1132.9, 1281.4, 1452.6) est égale à 7. Dans ce cas, la disponibilité stationnaire du système est égale à 97.89% et le taux de dégradation excessive est évalué à 6.38%. Dans le cadre de l'expérience 2, la valeur maximale de la disponibilité stationnaire du système est égale à 98.22% et la dimension du vecteur optimal Θ^* =(805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9) est égale à 5. Dans ce cas, le coût total moyen par unité de temps est égal à 5.85 et le taux de dégradation engendré est de 9.87%.

Expérience	Θ^*	$J(\Theta^*)$	$A_s(\Theta^*)$ [%]	$\delta(\Theta^*)$ [%]
1	751.3, 846.7, 926.6, 1015.5, 1132.9, 1281.4, 1452.6	5.37	97.89	6.38
2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	5.85	98.22	9.87
3	759.2, 865.6, 959.4, 1070.9, 1212.5, 1377.7	5.38	98.00	7.04
4	784.6, 927.3, 1069.3, 1227.7, 1405.4	5.60	98.19	8.97

Tableau 4.1 – Résultats d'optimisation dans le cas où $C_d = 20$ et $C_s = 375$.

D'après les résultats des deux expériences 1 et 2, la minimisation du coût total moyen par unité de temps nécessite plus d'inspections que la maximisation de la disponibilité stationnaire du système. Ce résultat peut être expliqué par le fait que pour maximiser la disponibilité, il faut réduire les arrêts et donc le nombre d'opérations d'inspection. En revanche, lorsque l'objectif est de minimiser le coût total moyen par unité de temps, le nombre d'inspections est plus important, ce qui induit une diminution de la disponibilité mais garantit un meilleur contrôle de la dégradation du système, et par conséquent, un faible impact sur l'environnement. Dans le cas de l'expérience 1, la valeur du taux de dégradation δ est inférieure à celle obtenue dans le cas de l'expérience 2. Ce résultat montre que l'amélioration de la disponibilité du système induit un impact plus important sur l'environnement. Les deux objectifs, coût et disponibilité, sont antagonistes, d'où l'intérêt de trouver un compromis entre la maximisation de la disponibilité stationnaire du système et la minimisation du coût total moyen par unité de temps. Tel est l'objet des expériences 3 et 4.

Avant d'aborder les résultats des deux dernières expériences, revenons sur les résultats obtenus pour les expériences 1 et 2. D'après le Tableau 4.1, le coût total moyen par unité de temps optimal obtenu dans le cas de la première expérience est $J^{(1)}(\Theta^*) = 5.37$. La stratégie de maintenance qui en résulte permet d'obtenir une disponibilité $A_s^{(1)}(\Theta^*) = 97.89\%$. En revanche, les résultats de la deuxième expérience montre que la disponibilité stationnaire maximale est $A_s^{(2)}(\Theta^*) = 98.22\%$. La stratégie de maintenance qui en résulte induit, quant à elle, un coût

total moyen par unité de temps $J^{(2)}(\Theta^*) = 5.85$. Par conséquent, et pour tout vecteur Θ des dates inspection, il est évident que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$J^{(1)}(\Theta^*) \leq J(\Theta) \leq J^{(2)}(\Theta^*), \tag{4.18}$$

et

$$A_s^{(1)}(\Theta^*) \leq A_s(\Theta) \leq A_s^{(2)}(\Theta^*). \tag{4.19}$$

De ce fait, et dans le cadre des expériences 3 et 4, les contraintes en termes de disponibilité stationnaire et de budget sont respectivement fixées à 98% et 5.60. Selon le Tableau 4.1, en minimisant le coût total moyen par unité de temps sous la contrainte de disponibilité, ce coût augmente de 5.37 à 5.38. Cette augmentation est imposée par la contrainte de disponibilité qui consiste à augmenter la disponibilité stationnaire du système de 97.89% à 98%. De même, en maximisant la disponibilité stationnaire du système sous la contrainte de budget, cette disponibilité diminue de 98.22% à 98.19%. Cette diminution est une conséquence de la contrainte de budget qui consiste à réduire le coût total moyen par unité de temps de 5.85 à 5.60.

Afin d'analyser l'influence des coûts de pénalités (C_d et C_s) sur les critères d'optimisation (coût et disponibilité), une étude de sensibilité est menée dans ce qui suit. Les mêmes expériences $(1-4)$ sont effectuées pour différentes valeurs attribuées aux deux paramètres C_d et C_s. Dans un premier temps, nous étudierons l'impact du coût C_d. Ensuite, nous aborderons l'étude de l'impact du coût C_s.

4.4.1 Influence de C_d sur les critères d'optimisation

Pour établir l'influence du coût de pénalité C_d sur les critères d'optimisation, les expériences $(1-4)$ sont menées pour $C_d = 0$, 10, 20, et 30. Les résultats obtenus sont donnés par le Tableau 4.2. D'après ce tableau, et dans le cas où l'on considère l'expérience 1 pour le coût $C_d = 0$, le coût total moyen par unité de temps optimal est égal à 3.82 et le vecteur optimal des dates d'inspection est Θ^* =(761.7, 912.2, 1057.1, 1209.2, 1376.1). La disponibilité stationnaire induite est égale à 98.18% et le taux de dégradation est égal à 9.10%. Dans le cadre de l'expérience 2, la valeur maximale de la disponibilité stationnaire du système est égale à 98.22% et le vecteur optimal des dates d'inspection est Θ^* =(805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9). Le coût total moyen par unité de temps induit est égal à 3.91 et le taux de dégradation est évalué à 9.87%.

C_d	Expérience	Θ^*	$J(\Theta^*)$	$A_s(\Theta^*)$ [%]	$\delta(\Theta^*)$ [%]
0	1	761.7, 912.2, 1057.1, 1209.2, 1376.1	3.82	98.18	9.10
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	3.91	98.22	9.87
	3	774.9, 928.5, 1077.8, 1236.5, 1411.3	3.83	98.20	9.32
	4	791.8, 949.6, 1105.1, 1272.6, 1457.6	3.86	98.21	9.62
10	1	756.9, 883.5, 1001.5, 1135.8, 1290.3, 1464.3	4.67	98.10	7.97
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	4.88	98.22	9.87
	3	774.9, 917.3, 1056.6, 1210.0, 1381.8	4.70	98.18	8.86
	4	771.2, 910.7, 1046.5, 1196.8, 1365.5, 1553.0	4.69	98.17	8.71
20	1	751.3, 846.7, 926.6, 1015.5, 1132.9, 1281.4, 1452.6	5.37	97.89	6.38
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	5.85	98.22	9.87
	3	759.2, 865.6, 959.4, 1070.9, 1212.5, 1377.7	5.38	98.00	7.04
	4	784.6, 927.3, 1069.3, 1227.7, 1405.4	5.60	98.19	8.97
30	1	743.3, 821.9, 885.4, 949.4, 1024.0, 1124.7, 1264.6, 1431.5	5.94	97.68	5.45
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	6.82	98.22	9.87
	3	765.2, 868.6, 961.2, 1072.4, 1216.1, 1384.5	6.07	98.00	7.01
	4	783.4, 918.8, 1053.6, 1207.8, 1382.8	6.40	98.17	8.66

Tableau 4.2 – Résultats d'optimisation dans le cas où $C_d = 0, 10, 20$, et 30 et $C_s = 375$.

Toujours dans le cas où $C_d = 0$, les résultats des expériences 3 et 4 sont obtenus, respectivement, pour une contrainte de disponibilité (98.20%) et une contrainte de budget (3.86). D'après ces résultats, en minimisant le coût total moyen par unité de temps sous une contrainte de disponibilité, ce coût augmente de 3.82 à 3.83. Cette augmentation est imposée par la contrainte de disponibilité qui consiste à augmenter la disponibilité stationnaire du système de 98.18% à 98.20%. De même, en maximisant la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget, cette disponibilité diminue de 98.22% à 98.21%. Cette diminution est due quant à elle à la contrainte de budget qui consiste à réduire le coût total moyen par unité de temps de 3.91 à 3.86.

Dans le cadre de l'expérience 1, et en variant le coût de pénalité C_d de 0 à 30, les Figures 4.3, 4.4, et 4.5 montrent respectivement l'influence du coût C_d sur le coût total moyen par unité de temps optimal $J(\Theta^*)$, la disponibilité stationnaire du système $A_s(\Theta^*)$, et le taux de

dégradation $\delta(\Theta^*)$. On rappelle que l'expérience 1 consiste à minimiser le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$. La Figure 4.3 montre que l'augmentation du coût de pénalité C_d engendre l'augmentation de la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$. En variant le coût C_d de 0 à 30, la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps augmente de 3.82 à 5.94. La Figure 4.4 montre la disponibilité stationnaire du système $A_s(\Theta^*)$ versus le coût C_d. Cette disponibilité est évaluée aux dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$. L'augmentation du coût C_d induit la diminution de la disponibilité stationnaire du système de 98.18% à 97.68% comme montré dans la Figure 4.4. Cette diminution, qui est de 0.5%, est négligeable par rapport à l'augmentation du coût total moyen par unité de temps, qui est de 55.5% (voir la Figure 4.3). Le taux de dégradation $\delta(\Theta^*)$ versus le coût de pénalité C_d est donné par la Figure 4.5. Ce taux est évalué aux dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$. La variation du coût C_d de 0 à 30 induit la diminution du ratio $\delta(\Theta^*)$ de 9.10% à 5.45%, c.-à-d. que l'impact du système de production sur l'environnement diminue. Cela montre l'importance de la variation du coût C_d sur la dégradation du système.

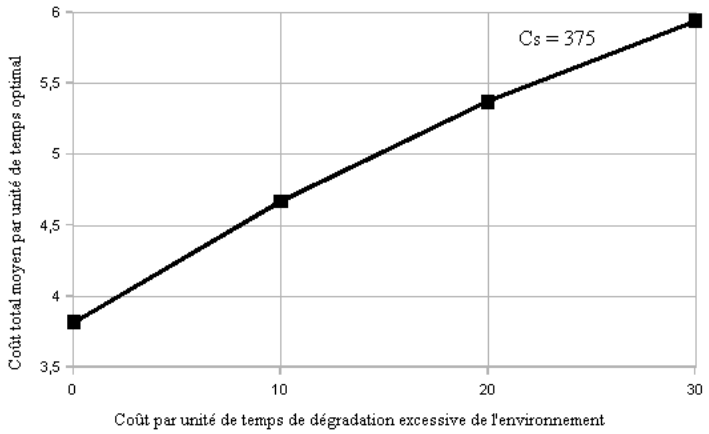

Figure 4.3 – Influence du coût de pénalité C_d sur $J(\Theta^*)$ dans le cas où $C_s = 375$

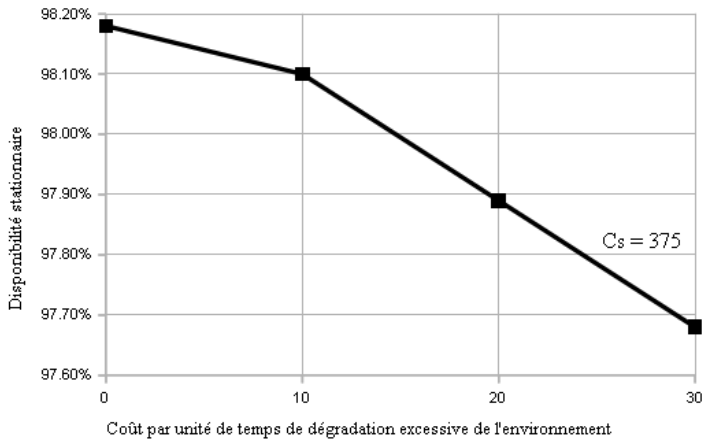

Figure 4.4 – Influence du coût de pénalité C_d sur $A_s(\Theta^*)$ dans le cas où $C_s = 375$

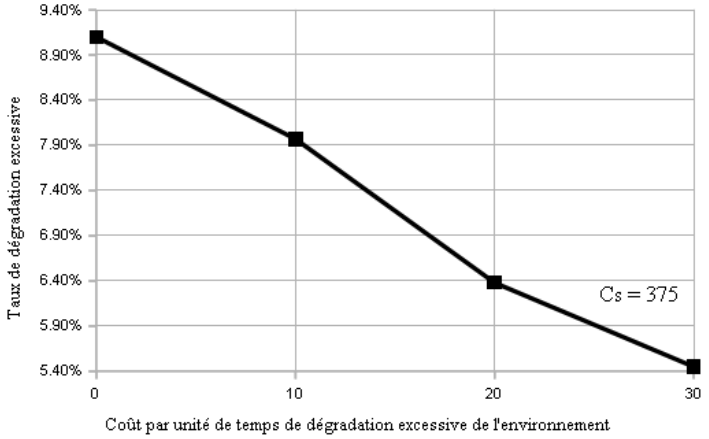

Figure 4.5 – Influence du coût de pénalité C_d sur $\delta(\Theta^*)$ dans le cas où $C_s = 375$

4.4.2 Influence de C_s sur les critères d'optimisation

Pour établir l'influence du coût de pénurie C_s sur les critères d'optimisation, les expériences $(1-4)$ sont menées en considérant plusieurs valeurs du coût d'inactivité : $C_s = 0$, 125, 250, et 375. Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 4.3.

C_s	Expérience	Θ^*	$J(\Theta^*)$	$A_s(\Theta^*)$ [%]	$\delta(\Theta^*)$ [%]
0	1	785.0, 871.3, 952.0, 1048.1, 1182.4, 1355.4, 1467.0	5.31	97.95	6.63
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	5.60	98.22	9.87
	3	797.6, 906.5, 1017.2, 1158.6, 1331.1, 1529.3	5.36	98.10	7.80
	4	803.1, 936.9, 1076.0, 1238.9, 1424.1	5.45	98.18	8.83
125	1	769.2, 859.4, 939.5, 1031.8, 1157.5, 1317.6, 1502.7	5.34	97.92	6.49
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	5.68	98.22	9.87
	3	783.7, 897.9, 1009.6, 1147.9, 1313.5, 1501.7	5.39	98.10	7.79
	4	793.0, 929.7, 1068.4, 1227.8, 1408.7	5.50	98.18	8.82
250	1	759.0, 852.0, 931.9, 1022.2, 1143.0, 1296.2, 1472.9	5.35	97.91	6.42
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	5.76	98.22	9.87
	3	774.8, 892.9, 1006.0, 1142.7, 1304.5, 1485.3	5.42	98.10	7.82
	4	783.0, 915.7, 1047.8, 1200.1, 1373.7	5.50	98.16	8.55
375	1	751.3, 846.7, 926.6, 1015.5, 1132.9, 1281.4, 1452.6	5.37	97.89	6.38
	2	805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9	5.85	98.22	9.87
	3	759.2, 865.6, 959.4, 1070.9, 1212.5, 1377.7	5.38	98.00	7.04
	4	784.6, 927.3, 1069.3, 1227.7, 1405.4	5.60	98.19	8.97

Tableau 4.3 – Résultats d'optimisation dans le cas où $C_s = 0, 125, 250$, et 375 et $C_d = 20$.

D'après le Tableau 4.3, et dans le cas où l'on considère l'expérience 1 pour le coût $C_s = 0$, le coût total moyen par unité de temps optimal est égal à 5.31 et le vecteur optimal des dates d'inspection est Θ^* =(785.0, 871.3, 952.0, 1048.1, 1182.4, 1355.4, 1467.0). La disponibilité stationnaire induite est égale à 97.95% et le taux de dégradation est égal à 6.63%. Dans le cadre de l'expérience 2, la valeur maximale de la disponibilité stationnaire du système est égale à 98.22% et le vecteur optimal des dates d'inspection est Θ^* =(805.5, 966.9, 1127.8, 1302.7, 1495.9). Le coût total moyen par unité de temps induit est égal à 5.60 et le taux de dégradation est égal à

9.87%.

Dans le cas où $C_s = 0$, les résultats des expériences 3 et 4 sont obtenus, respectivement, pour une contrainte de disponibilité (98.10%) et une contrainte de budget (5.45). D'après ces résultats, en minimisant le coût total moyen par unité de temps sous la contrainte de disponibilité, ce coût augmente de 5.31 à 5.36. Cette augmentation est due à la contrainte de disponibilité qui consiste à augmenter la disponibilité stationnaire du système de 97.95% à 98.10%. De même, en maximisant la disponibilité stationnaire du système sous la contrainte de budget, cette disponibilité diminue de 98.22% à 98.18%. Cette diminution est imposée par la contrainte de budget qui consiste à réduire le coût total moyen par unité de temps de 5.60 à 5.45.

Dans le cadre de l'expérience 1, et en variant le coût de pénurie C_s de 0 à 375, les Figures 4.6, 4.7, et 4.8 montrent respectivement l'influence du coût C_s sur le coût total moyen par unité de temps optimal $J(\Theta^*)$, la disponibilité stationnaire du système $A_s(\Theta^*)$, et le taux de dégradation $\delta(\Theta^*)$. La Figure 4.6 montre que l'augmentation du coût de pénurie C_s engendre l'augmentation de la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps $J(\Theta^*)$. En variant le coût C_s de 0 à 375 la valeur optimale du coût total moyen par unité de temps augmente de 5.31 à 5.37. Ce résultat montre que le coût de pénalité C_d a plus d'impact que le coût de pénurie C_s sur la variation du coût total moyen par unité de temps optimal $J(\Theta^*)$ (voir la Figure 4.3). La Figure 4.7 montre la disponibilité stationnaire du système $A_s(\Theta^*)$ versus le coût de pénurie C_s. Cette disponibilité est évaluée aux dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$. L'augmentation du coût C_s induit la diminution de la disponibilité stationnaire du système comme montré dans la Figure 4.7. La Figure 4.8 montre le taux de dégradation $\delta(\Theta^*)$ versus le coût de pénurie C_s. Ce taux est évalué aux dates optimales d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps $J(\Theta)$. La variation du coût C_s de 0 à 375 induit la diminution du ratio $\delta(\Theta^*)$ de 6.63% à 6.38% comme montré dans la Figure 4.8. Cette diminution signifie que l'impact du système de production sur l'environnement baisse. Cependant, cette diminution n'est pas importante comme dans le cas de la variation du coût de pénalité C_d (voir la Figure 4.5).

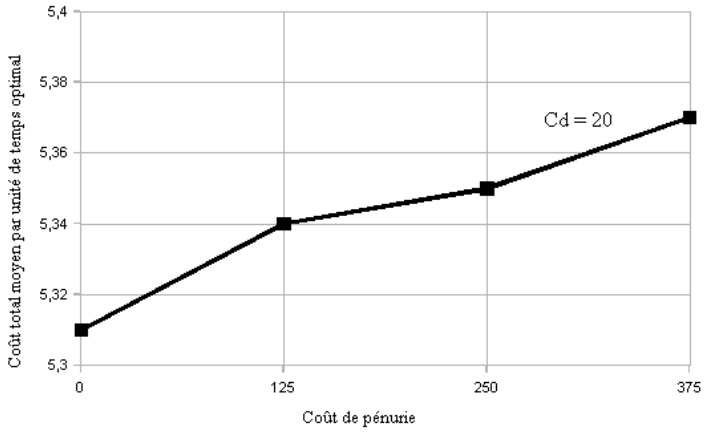

Figure 4.6 – Influence du coût de pénurie C_s sur $J(\Theta^*)$ dans le cas où $C_d = 20$

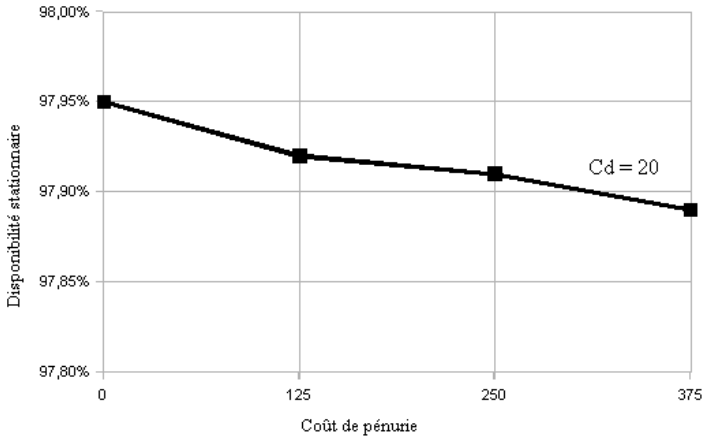

Figure 4.7 – Influence du coût de pénurie C_s sur $A_s(\Theta^*)$ dans le cas où $C_d = 20$

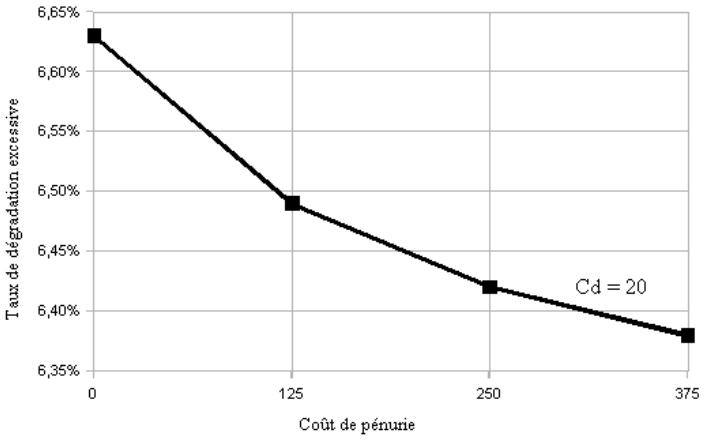

Figure 4.8 – Influence du coût de pénurie C_s sur $\delta(\Theta^*)$ dans le cas où $C_d = 20$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une stratégie de maintenance conditionnelle a été proposée pour un système de production. Ce système de production est sujet à une dégradation qui influence l'environnement. La stratégie de maintenance proposée suppose que la dégradation du système provoque celle de l'environnement. Cette dégradation est jugée excessive, et par conséquent induit un coût de pénalité, quand elle dépasse un seuil spécifié. Cette stratégie consiste à suivre la dégradation du système de manière à réduire celle de l'environnement. Afin de contrôler cette dégradation, des inspections sont effectuées. La maintenance préventive est planifiée après la détection du dépassement du seuil, alors que la maintenance corrective est exécutée immédiatement à la détection de la panne du système. L'objectif principal est de déterminer les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps en respectant un niveau requis de disponibilité stationnaire, ou qui maximisent la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Deux modèles mathématiques sont alors développés. Le premier modèle considère le coût total moyen par unité de temps qui est engendré par les coûts des actions de maintenance (corrective et préventive) et d'inspection ainsi que les coûts de pénalités dus au niveau excessif de dégradation de l'environnement d'une part, et à l'inactivité du système d'autre part. Le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système qui est formulée à partir des durées moyennes des actions de maintenance et d'inspection, de la durée moyenne d'inactivité du système, et de la durée moyenne de bon fonctionnement du système. Les problèmes d'optimisation ont été résolus en utilisant les procédures numériques développées dans les deux chapitres précédents. Quelques expériences ont été réalisées afin d'analyser l'impact des coûts de pénalités (C_d et C_s) sur le comportement des grandeurs optimisées ($J(\Theta)$ et $A_s(\Theta)$).

Conclusion générale et perspectives

Dans les travaux de cette thèse, nous nous sommes intéressés au développement de modèles mathématiques et à l'optimisation des stratégies de maintenance conditionnelle. Celles-ci sont proposées pour un système de production de biens et de services sujet à une dégradation aléatoire. Les modèles de maintenance proposés supposent que la dégradation du système provoque celle de l'environnement. Les stratégies de maintenance proposées consistent alors à limiter la dégradation du système afin de réduire l'impact de celle-ci sur l'environnement. Pour contrôler cette dégradation, des inspections sont planifiées. Une maintenance préventive est planifiée si le niveau de dégradation du système atteint un seuil spécifié. Une maintenance corrective, quant à elle, est exécutée suite à une panne fortuite. Les dates optimales d'inspection sont calculées pour minimiser le coût total moyen par unité de temps ou encore maximiser la disponibilité stationnaire du système. Le problème d'optimisation sous contrainte a aussi été étudié et où l'objectif est de minimiser le coût total moyen par unité de temps sous une contrainte de disponibilité ou de maximiser la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Pour résoudre les problèmes d'optimisation, des procédures numériques basées sur la méthode de Nelder-Mead sont développées. Des exemples numériques sont alors donnés afin d'illustrer les modèles mathématiques proposés.

Le premier résultat de nos travaux a fait l'objet du chapitre 2. Dans ce chapitre, la panne du système de production étudié est supposée être détectée à l'occurrence (panne auto-déclarée), alors que sa dégradation est contrôlée par inspection. Afin de maintenir ce système de production, les actions d'inspection et de maintenance (corrective et préventive), dont les durées sont supposées être négligeables, sont effectuées. Une modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps a été proposée. Ce coût est composé des coûts des actions d'inspection et de maintenance ainsi que du coût de pénalité dû à la dégradation de l'environnement. Les dates d'inspection sont alors calculées pour deux types de stratégies d'inspection, périodique et

séquentielle. Ces dates d'inspection minimisent le coût total moyen par unité de temps. Nous avons montré que l'intégration du coût de pénalité dû au niveau excessif de dégradation dans la modélisation mathématique du coût total moyen par unité de temps a permis la réduction du taux de dégradation excessive. Ce taux de dégradation diminue en augmentant la valeur du coût de pénalité. La comparaison entre les résultats obtenus pour les deux stratégies d'inspection étudiées, périodique et séquentielle, démontre la meilleure performance de la seconde stratégie d'inspection.

Le troisième chapitre a été consacré à la modélisation mathématique et à l'optimisation de la disponibilité stationnaire d'un système de production. La panne du système est également auto-déclarée et sa dégradation est contrôlée par inspections séquentielles. Dans ce chapitre, et contrairement au chapitre 2, les durées des actions d'inspection et de maintenance sont non négligeables. Deux modèles mathématiques de disponibilité stationnaire sont alors proposés. Les deux modèles sont identiques à l'exception que le deuxième suppose que le système est indisponible après le dépassement du seuil de dégradation. D'après les résultats numériques, nous avons montré que le second modèle permet de réduire l'impact de la dégradation du système sur l'environnement. Les résultats numériques des expériences effectuées montrent aussi l'impact des durées des actions d'inspection et de maintenance sur les performances du système.

Le quatrième chapitre concerne la modélisation mathématique d'une stratégie de maintenance conditionnelle dans le cas où la panne du système n'est détectée que suite à une opération d'inspection. La stratégie de maintenance proposée suppose également que l'environnement est abimé avec la dégradation du système. Cette stratégie consiste à suivre la dégradation du système de manière à réduire celle de l'environnement. Afin de contrôler cette dégradation, des inspections sont effectuées. Cette dégradation est jugée excessive, et par conséquent induit un coût de pénalité, quand elle dépasse un seuil spécifié. La maintenance préventive est planifiée après la détection du dépassement du seuil, alors que la maintenance corrective est exécutée immédiatement à la détection de la panne du système. L'objectif est de déterminer les dates d'inspection qui minimisent le coût total moyen par unité de temps en respectant un niveau requis de disponibilité stationnaire, ou qui maximisent la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Deux modèles mathématiques sont alors développés. Le premier modèle considère le coût total moyen par unité de temps qui est engendré par les coûts des actions de maintenance et d'inspection ainsi que les coûts de pénalités dus au niveau excessif de dégradation de l'environnement, d'une part, et à l'inactivité du système, d'autre part. Le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système qui est exprimée en fonction

des durées moyennes des actions de maintenance et d'inspection, de la durée moyenne d'inactivité du système, et de la durée moyenne de bon fonctionnement du système. Un exemple numérique est proposé afin d'illustrer les modèles mathématiques développés.

Quelques perspectives d'extensions possibles aux travaux de cette thèse sont données dans ce qui suit :

1. Comme première perspective, nous jugeons intéressant d'étudier l'applicabilité des différentes stratégies d'inspection et de maintenance à des systèmes pris dans un contexte réel. Dans ce cas, l'étude et l'analyse de données issus de l'historique de l'exploitation du système de production est une étape essentielle pour l'estimation des différentes données d'entrée de notre problème.

2. Dans les travaux de cette thèse, il est supposé que la panne du système de production ne peut avoir lieu qu'après le dépassement du seuil de dégradation. Cette hypothèse ne peut être vérifiée que pour une classe particulière de système. Il conviendrait donc d'étendre les résultats obtenus dans le cas où une telle hypothèse est relaxée.

3. Dans le présent travail de thèse, le seuil de dégradation, à partir duquel une maintenance préventive est planifiée, est supposé fixe. Comme autre perspective de recherche, il serait intéressant de relaxer cette hypothèse et de proposer une extension à la stratégie de maintenance qui aurait comme variables de décision non seulement les dates d'inspection mais également le seuil adéquat de dégradation qui offre une meilleure performance du système.

4. Toutes les extensions citées ci-dessus peuvent être investies également dans le cas où le système est composé de plusieurs éléments interconnectés selon un diagramme bloc de fiabilité. Dans ce cas de figure, d'autres types de maintenance peuvent être considérés tel que la maintenance opportuniste pour une économie d'échelle.

Références bibliographiques

[1] Adzakpa, K.P. (2004). *Maintenance des systèmes distribués : méthodes d'aide à la décision temps-réel*. Ph.D. thesis, Université de Technologie de Troyers. 12, 13

[2] AFNOR NF EN 13306 (2001). Terminologie de la maintenance. 8, 9, 10, 12, 13, 17

[3] Aït-Kadi, D. and Chelbi, A. (2010). Inspection strategy for availability improvement. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 21(2), 231–235. 20

[4] Badía, F.G., Berrade, M.D., and Campos, C.A. (2002). Optimal inspection and preventive maintenance of units with revealed and unrevealed failures. *Reliability Engineering & System Safety*, 78(2), 157–163. 19

[5] Barlow, R.E., Hunter, L.C., and Proschan, F. (1963). Optimum checking procedures. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(4), 1078–1095. 17

[6] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1965). *Mathematical theory of reliability*. John Wiley & Sons. 16

[7] Bérenguer, C., Chu, C., and Grall, A. (1997). Inspection and maintenance planning : an application of semi-Markov decision processes. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 8(5), 467–476. 18

[8] Booher, T.B. (2006). *Optimal periodic inspection of a stochastically degrading system*. Ph.D. thesis, Air Force Institute of Technology. 11

[9] Bui, L.T. and Kapon, S. (2012). The impact of voluntary programs on polluting behavior : Evidence from pollution prevention programs and toxic releases. *Journal of Environmental Economics and Management*, 64(1), 31–44. 7

[10] Cardoso, M.F., Salcedo, R., and Feyo de Azevedo, S. (1996). The simplex-simulated annealing approach to continuous non-linear optimization. *Computers & Chemical Engineering*, 20(9), 1065–1080. 33

[11] Chelbi, A. and Aït-Kadi, D. (1999). An optimal inspection strategy for randomly failing equipment. *Reliability Engineering & System Safety*, 63(2), 127–131. 18

[12] Chelbi, A. and Aït-Kadi, D. (2009). Inspection strategies for randomly failing systems. In *Handbook of Maintenance Management and Engineering*, 303–335. Springer, London. 13, 17

[13] Chelbi, A., Aït-Kadi, D., and Aloui, H. (2008). Optimal inspection and preventive maintenance policy for systems with self-announcing and non-self-announcing failures. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 14(1), 34–45. 19

[14] Chelouah, R. and Siarry, P. (2003). Genetic and Nelder-Mead algorithms hybridized for a more accurate global optimization of continuous multiminima functions. *European Journal of Operational Research*, 148(2), 335–348. 33

[15] Chouikhi, H., Dellagi, S., and Rezg, N. (2010). Développment et optimisation d'une politique de maintenance sous contraintes environnementales. In *Proceedings of the 8th ENIM IFAC International Conference of Modeling and Simulation - MOSIM'10*, 1382–1388. Hammamet - Tunisia. 4

[16] Chouikhi, H., Dellagi, S., and Rezg, N. (2012). Development and optimization of maintenance policy under environment constraints. *International Journal of Production Research*, 50(13), 3612–3620. 4

[17] Chouikhi, H., Khatab, A., and Rezg, N. (2011). A maintenance policy for a production system under environment constraints. In *Proceedings of International Conference on Industrial Engineering and Systems Management - IESM'11*, 1060–1069. Metz - France. 4

[18] Chouikhi, H., Khatab, A., and Rezg, N. (2012). Condition-based maintenance for availability optimization of production system under environment constraints. In *9th International Conference of Modeling, Optimization and Simulation - MOSIM'12*. Bordeaux - France. 4

[19] Chouikhi, H., Khatab, A., and Rezg, N. (2012). A condition-based maintenance policy for a production system under excessive environment degradation. In *14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing - INCOM'12*. Bucharest - Romania. 4

[20] Chouikhi, H., Khatab, A., and Rezg, N. (2012). A condition-based maintenance policy for a production system under excessive environmental degradation. *Journal of Intelligent Manufacturing*. doi :10.1007/s10845-012-0715-9. 4

[21] Cui, L. and Xie, M. (2005). Availability of a periodically inspected system with random repair or replacement times. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 131(1), 89–100. 20

[22] Dekker, R. (1996). Applications of maintenance optimization models : a review and analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 51(3), 229–240. 13, 15

[23] Deloux, E. (2008). *Politiques de maintenance conditionnelle pour un système à dégradation continue soumis à un environnement stressant*. Ph.D. thesis, Université de Nantes. 10, 11

[24] Ebrahimi, N. (1999). Stochastic properties of a cumulative damage threshold crossing model. *Journal of Applied Probability*, 36(3), 720–732. 11

[25] Esary, J.D. (1973). Shock models and wear processes. *The Annals of Probability*, 1(4), 627–649. 11

[26] Feldman, R.M. (1976). Optimal replacement with semi-markov shock models. *Journal of Applied Probability*, 13(1), 108–117. 11

[27] Feller, W. (1968). *An introduction to probability : theory and its applications*, volume 1. Wiley, 3 edition. 11

[28] Feller, W. (1971). *An introduction to probability : theory and its applications*, volume 2. Wiley, 2 edition. 11

[29] Grall, A., Dieulle, L., Bérenguer, C., and Roussignol, M. (2002). Continuous-time predictive-maintenance scheduling for a deteriorating system. *IEEE Transactions on Reliability*, 51(2), 141–150. 18, 19

[30] Harrington, D.R. (2012). Two-stage adoption of different types of pollution prevention (P2) activities. *Resource and Energy Economics*, 34(3), 349–373. 7

[31] Hedar, A. and Fukushima, M. (2002). Hybrid simulated annealing and direct search method for nonlinear unconstrained global optimization. *Optimization Methods and Software*, 17(5), 891–912. 33

[32] Huynh, K., Barros, A., Bérenguer, C., and Castro, I. (2011). A periodic inspection and replacement policy for systems subject to competing failure modes due to degradation and traumatic events. *Reliability Engineering & System Safety*, 96(4), 497–508. 18, 19

[33] Igaki, N., Sumita, U., and Kowada, M. (1995). Analysis of markov renewal shock models. *Journal of Applied Probability*, 32(3), 821–831. 11

[34] Jardine, A.K.S. and Tsang, A.H.C. (2005). *Maintenance, replacement, and reliability : theory and application*. Crc Press. 11

[35] Jeanneau, L. (2007). *Approche moléculaire quantitative appliquée à l'étude du transfert de micropolluants organiques à la confluence entre la Fensch de la Moselle (France)*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine. 7

[36] Karlin, S. and Taylor, H.M. (1981). *A second course in stochastic processes*. Academic press, 1 edition. 11

[37] Kharoufeh, J.P. (2003). Explicit results for wear processes in a markovian environment. *Oper. Res. Lett.*, 31(3), 237–244. 11

[38] Kiessler, P.C. (2002). Availability of periodically inspected systems subject to markovian degradation. *Journal of Applied Probability*, 39(4), 700–711. 11

[39] Kvasnička, V. and Pospíchal, J. (1997). A hybrid of simplex method and simulated annealing. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 39(2), 161–173. 33

[40] Lagarias, J.C., Reeds, J.A., Wright, M.H., and Wright, P.E. (1998). Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1), 112–147. 100

[41] Laugier, A., Allahwerdi, N., Baudin, J., Gaffney, P., Grimson, W., Groth, T., and Schilders, L. (1996). Remote instrument telemaintenance. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 50(2), 187–194. 13

[42] Li, W. and Pham, H. (2005). An inspection-maintenance model for systems with multiple competing processes. *IEEE Transactions on Reliability*, 54(2), 318– 327. 24, 33

[43] Liao, H., Elsayed, E.A., and Chan, L.Y. (2006). Maintenance of continuously monitored degrading systems. *European Journal of Operational Research*, 175(2), 821–835. 20

[44] Medhi, J. (1984). *Stochastic processes*. New age, India, 2 edition. 11

[45] Munford, A.G. and Shahani, A.K. (1972). A nearly optimal inspection policy. *Operational Research Quarterly*, 23(3), 373–379. 17, 18

[46] Munford, A.G. and Shahani, A.K. (1973). An inspection policy for the weibull case. *Operational Research Quarterly*, 24(3), 453–458. 17

[47] Nakagawa, T. (2005). *Maintenance theory of reliability*. Springer, London. 16

[48] Nakagawa, T. (1979). Optimum policies when preventive maintenance is imperfect. *IEEE Transactions on Reliability*, R-28(4), 331 –332. 16

[49] Nelder, J.A. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4), 308 –313. 32, 100

[50] Orth, P., Yacout, S., and Adjengue, L. (2012). Accuracy and robustness of decision making techniques in condition based maintenance. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 23(2), 255–264. 19

[51] Park, K. (1988). Optimal continuous-wear limit replacement under periodic inspections. *IEEE Transactions on Reliability*, 37(1), 97 –102. 11

[52] Pellegrin, C. (1992). Choice of a periodic on-condition maintenance policy. *International Journal of Production Research*, 30(5), 1153–1173. 18

[53] Price, C., Coope, I., and Byatt, D. (2002). A convergent variant of the nelder-mead algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(1), 5–19. 33

[54] Rausand, M. and Hoyland, A. (2004). *System Reliability Theory : Models, Statistical Methods, and Applications*. Wiley, 2 edition. 9, 14

[55] Ropital, F. (2009). *Corrosion et dégradation des matériaux métalliques : compréhension des phénomènes et applications dans l'industrie pétrolière et des procédés*. IFP Publications. 9

[56] Ross, S.M. (2007). *Introduction to probability models*. Elsevier, India, 9 edition. 11

[57] Roux, O., Duvivier, D., Quesnel, G., and Ramat, E. (2010). Optimization of preventive maintenance through a combined maintenance-production simulation model. *International Journal of Production Economics*. doi :10.1016/j.ijpe.2010.11.004. 24, 25, 33

[58] Sarkar, J. and Sarkar, S. (2000). Availability of a periodically inspected system under perfect repair. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 91(1), 77–90. 19, 20

[59] Scarf, P.A. (1997). On the application of mathematical models in maintenance. *European Journal of Operational Research*, 99(3), 493–506. 13, 15

[60] Schutz, J. (2009). *Contribution à l'optimisation des plans d'exploitation et de maintenance, selon une approche basée sur le pronostic : application au domaine naval*. Ph.D. thesis, Université Paul Verlaine - Metz. 14

[61] Sharma, A., Yadava, G., and Deshmukh, S. (2011). A literature review and future perspectives on maintenance optimization. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 17(1), 5–25. 13

[62] Sherwin, D. (2000). A review of overall models for maintenance management. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 6(3), 138–164. 12, 13

[63] Tadikamalla, P.R. (1979). An inspection policy for the gamma failure distributions. *The Journal of the Operational Research Society*, 30(1), 77–80. 17

[64] Tian, Z., Lin, D., and Wu, B. (2012). Condition based maintenance optimization considering multiple objectives. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 23(2), 333–340. 19

[65] Trader-Finance (2012). http ://www.trader-finance.fr/lexique-finance.html. 9

[66] Turco, F. and Parolini, P. (1984). A nearly optimal inspection policy for productive equipment. *International Journal of Production Research*, 22(3), 515–528. 18

[67] Valdez-Flores, C. and Feldman, R.M. (1989). A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems. *Naval Research Logistics (NRL)*, 36(4), 419–446. 9

[68] Van Noortwijk, J. (2009). A survey of the application of gamma processes in maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(1), 2–21. 9

[69] Wang, H. (2002). A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, 139(3), 469–489. 15

[70] Wang, L., Xu, Y., and Li, L. (2011). Parameter identification of chaotic systems by hybrid nelder-mead simplex search and differential evolution algorithm. *Expert Systems with Applications*, 38(4), 3238 – 3245. 33

[71] Yaghini, M., Momeni, M., and Sarmadi, M. (2012). A simplex-based simulated annealing algorithm for node-arc capacitated multicommodity network design. *Applied Soft Computing*, 12(9), 2997–3003. 33

[72] Yang, Z., Djurdjanovic, D., and Ni, J. (2008). Maintenance scheduling in manufacturing systems based on predicted machine degradation. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 19(1), 87–98. 18, 19

Annexes

1 Principe de la méthode de Nelder-Mead

La méthode de Nelder-Mead consiste premièrement à initialiser un simplexe de $n+1$ sommets, où n est la dimension du vecteur solution. Le simplexe initial doit être non dégénéré, c.-à-d. que les sommets générés (Θ_1, Θ_2, Θ_3, ..., Θ_{n+1}) ne doivent pas se trouver dans le même hyperplan. L'objectif est de modifier, étape par étape, le simplexe initial de sorte que les simplexes résultants convergent vers le minimum lorsqu'il s'agit, bien entendu, d'un problème de minimisation. La fonction objective est alors évaluée à chaque sommet et les $n+1$ images sont ordonnées comme suit :

$$J(\Theta_l) < \cdots < J(\Theta_{nh}) < J(\Theta_h), \tag{1}$$

où $J(\Theta_l)$ est la meilleure évaluation de la fonction objective $J(\Theta)$, alors que $J(\Theta_h)$ représente la mauvaise évaluation de $J(\Theta)$.

Le barycentre des n meilleurs sommets $(\Theta_l, \ldots, \Theta_{nh})$ est calculé selon l'équation :

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Theta_k. \tag{2}$$

Il est ensuite utilisé pour générer un nouveau sommet du simplexe en effectuant des opérations de réflexion, d'expansion, ou de contraction sur le mauvais sommet. Le sommet réfléchi Θ_R, le sommet étendu Θ_E, ainsi que le sommet contracté Θ_C sont respectivement évalués selon les équations suivantes :

$$\Theta_R = \bar{\Theta} + (\bar{\Theta} - \Theta_h), \tag{3}$$

$$\Theta_E = \bar{\Theta} + 2(\bar{\Theta} - \Theta_h). \tag{4}$$

$$\Theta_C = \bar{\Theta} \pm \frac{1}{2}(\bar{\Theta} - \Theta_h). \tag{5}$$

Si le nouveau sommet calculé par réflexion, expansion, ou contraction, est meilleur que le mauvais sommet (c.-à-d. que l'évaluation de la fonction objective à ce nouveau sommet est meilleure que celle du mauvais), il remplace le mauvais sommet Θ_h. Cette opération de remplacement permet de former un nouveau simplexe.

Si tous les sommets obtenus par l'application des opérations de réflexion, d'expansion, et de contraction ne sont pas mieux que le mauvais sommet, une opération de rétrécissement est réalisée pour générer un nouveau simplexe (Θ_l, Y_2, ..., Y_{n+1}). Les n sommets générés par rétrécissement peuvent être écrits ainsi :

$$Y_j = \frac{\Theta_l + \Theta_j}{2}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{6}$$

La Figure A.1 montre un exemple de simplexe bidimensionnel qui est un triangle dont les sommets sont Θ_1= (θ_{11}, θ_{12}), Θ_2= (θ_{21}, θ_{22}), et Θ_3= (θ_{31}, θ_{32}). L'évaluation de la fonction objective à chaque sommet nous a permis d'identifier les deux meilleurs sommets ($\Theta_l = \Theta_2$) et ($\Theta_{nh} = \Theta_3$) ainsi que le mauvais sommet ($\Theta_h = \Theta_1$). Le barycentre des deux meilleurs sommets est alors calculé. Les différentes opérations (réflexion, expansion, et contraction) sont montrées dans la Figure A.1. La contraction peut être interne ($-$) ou externe ($+$) comme montrée dans l'exemple de la Figure A.1 où le nouveau simplexe généré par rétrécissement est représenté par un triangle gris.

Le critère d'arrêt de l'algorithme de Nelder-Mead est donné par l'inégalité suivante :

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \left(J(\Theta_k) - J(\bar{\Theta})\right)^2}{n+1}} < \varepsilon, \tag{7}$$

où ε est un nombre positif. Pour plus de détails sur l'algorithme de Nelder-Mead, le lecteur peut se référer aux travaux de Nelder et Mead [49] et Lagarias *et al.* [40]. En se basant sur l'algorithme de Nelder-Mead, une procédure numérique est développée pour résoudre notre problème d'optimisation de l'équation (2.2). La section suivante est consacrée à la présentation de cette procédure numérique.

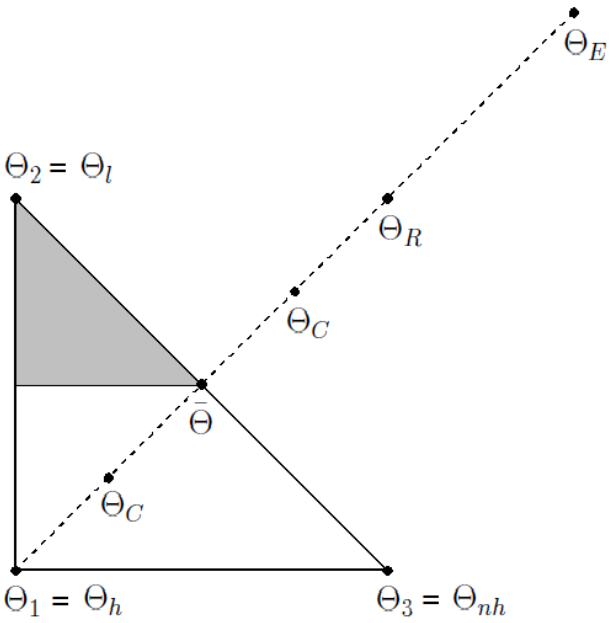

Figure A.1 – Simplexe bidimensionnel

2 Organigramme de la procédure numérique développée

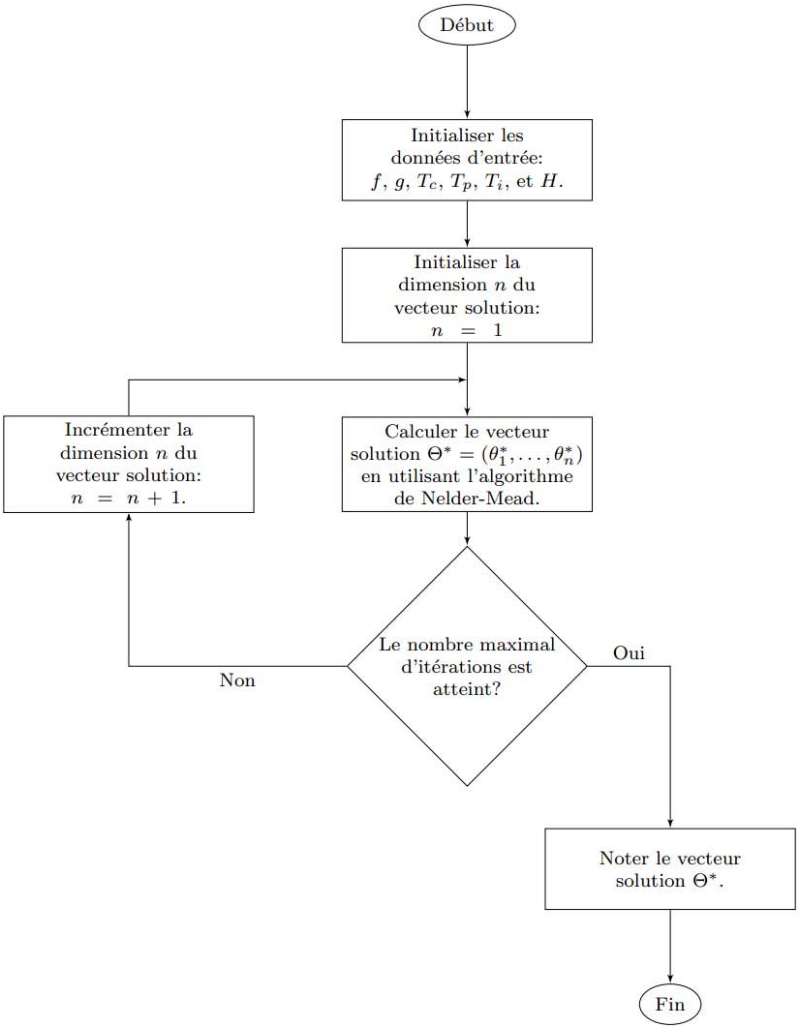

Figure A.2 – Organigramme de la procédure numérique développée (cas de maximisation de la disponibilité stationnaire A_{s1} ou A_{s2})

Résumé

Dans cette thèse, des stratégies de maintenance conditionnelle sont proposées pour les systèmes de production de biens et de services. Ces stratégies sont développées en tenant compte de la dégradation de l'environnement causée par la détérioration du système de production. Le système de production est sujet à une dégradation aléatoire qui affecte la qualité de l'environnement. Les modèles de maintenance proposés consistent à réduire la dégradation de l'environnement en contrôlant la détérioration du système. Pour contrôler la détérioration du système, des inspections sont effectuées à des dates précises. L'objectif est de déterminer les dates optimales d'inspection qui optimisent un critère de performance donné. Deux modèles mathématiques d'optimisation sont alors proposés dans cette thèse. Le premier modèle considère le coût total moyen par unité de temps, tandis que le deuxième modèle considère la disponibilité stationnaire du système. L'optimisation sous contrainte a été aussi étudiée où l'objectif est de minimiser le coût total moyen par unité de temps sous une contrainte de disponibilité stationnaire ou alors de maximiser la disponibilité stationnaire du système sous une contrainte de budget. Basé sur la méthode de Nelder-Mead, des algorithmes sont développés pour calculer les dates optimales d'inspection pour chaque critère d'optimisation. Des exemples numériques sont présentés pour montrer l'applicabilité des stratégies de maintenance conditionnelle proposées.

Mots clés : Système de production de biens et de services, Maintenance, Inspection, Dégradation de l'environnement, Optimisation, Méthode de Nelder-Mead

Abstract

In this thesis, condition-based maintenance strategies are proposed for production systems of goods and services. These strategies are developed while taking into account the environmental degradation caused by the deterioration of the production system. The system is subjected to random deterioration which impacts the environmental quality. The proposed maintenance models aim to assess the system deterioration in such a way to reduce the environmental degradation. To control this deterioration, inspections are performed on specific dates. The objective is to determine optimal inspection dates which optimize a given performance criterion. Two mathematical optimization models are then proposed in this thesis. The first model considers the average total cost per time unit, while the second model considers the stationary availability of the system. The constrained optimization has also been discussed in this work where the objective is to minimize the average total cost per time unit under an availability constraint or to maximize the stationary availability of the system under a budget constraint. On the basis of Nelder-Mead method, inspection dates as optimal solutions are computed for each optimization criterion. Numerical examples are provided to show the applicability of the proposed condition-based maintenance strategies.

Keywords : Production system of goods and services, Maintenance, Inspection, Environmental degradation, Optimization, Nelder-Mead method