N° D'ORDRE : 4622

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX

PAR SAID AMANA ABDILLAH

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES PURES

INTITULÉE

EXTENSIONS AU CADRE BANACHIQUE DE LA NOTION D'OPÉRATEUR DE HILBERT-SCHMIDT

SOUTENUE LE 26 NOVEMBRE 2012
DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

GILLES GODEFROY	DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS À L'IMJ	RAPPORTEUR
JEAN MARTIN PAOLI	MAÎTRE DE CONFÉRENCE À L'UNIVERSITÉ DE CORSE	RAPPORTEUR
HERVÉ QUEFFÉLEC	PROFESSEUR ÉMÉRITE À L'UNIVERSITÉ DE LILLE1	
ROBERT DEVILLE	PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ BORDEAUX1	
JEAN ESTERLE	PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1	DIRECTEUR DE THÈSE
BERNHARD HAAK	MAÎTRE DE CONFÉRENCE À L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1	DIRECTEUR DE THÈSE

Table des matières

Remerciements 4
Introduction 6

1 Les opérateurs p-sommants **9**
1.1 Espaces des suites p-sommables 9
1.2 Les opérateurs p-sommants 10
1.3 Caractérisation des Opérateurs 2-sommants 11
1.4 Les inégalités de Khintchine et Grothendieck 19
1.5 Application aux espaces $\mathscr{L}_p$ 25

2 Les Opérateurs de Hilbert-Schmidt **31**
2.1 Les Opérateurs Compacts 31
2.2 Caractérisation des Opérateurs de Hilbert-Schmidt 35

3 Les opérateurs γ-sommants **39**
3.1 Suites Gaussiennes 39
3.2 Opérateurs γ-sommants 43

4 Les opérateurs γ-radonifiants **47**
4.1 Théorème de Hoffmann-Jorgensen et Kwapien 47
4.2 Exemple d'un opérateur γ-sommant et non γ-radonifiant 50
4.3 Opérateurs dans les espaces L^p 53
4.3.1 Les opérateurs dans les espaces de Hilbert 53
4.3.2 Etude de convergence en moyenne de Cesàro 56

5 Les opérateurs p-nucléaires et faiblement $*p$-nucléaires **61**
5.1 Opérateurs p-nucléaires 61
5.2 Opérateurs faiblement $*p$-nucléaires 65
5.3 Caractérisation des opérateurs faiblement $*p$-nucléaires 66

6 Généralisation des opérateurs γ-radonifiants **69**
6.1 Les opérateurs γ-sommants sur un espace de Banach 69
6.2 Les opérateurs de Rademacher-bornés 73
6.3 Les opérateurs presque sommants 76

Remerciements

Je ne peux commencer et finir ce travail sans remercier au préalable le détenteur du savoir, en l'occurrence le tout puissant ALLAH.

C'est un moment très fort en émotion, fermer ce chapitre de ma vie en remerciant toutes les personnes qui ont eu le courage de m'accompagner durant toutes ses longues années de recherche.

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse le docteur Haak Bernhard, et à l' exprimer ma profonde gratitude pour son soutien constant durant ces années de recherche.

Je tiens à lui dire qu'il a réussi par ses conseils et ses encouragements à développer le plaisir de la recherche.

Sincèrement, je ne sais pas comment exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, le professeur Esterle Jean pour le soutien moral et pédagogique qu'il m'a apporté depuis mon arrivée à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB) jusqu'à ce jour.

Ses idées et sa facilité à poser des questions simples et intéressantes m'ont fortement guidé et m'ont fait aimer davantage ce métier difficile qu'est la recherche.

Je mesure la chance qui m'a été offerte de travailler avec ces deux éminents savants et de pouvoir bénéficier de leur savoir et aussi d'avoir appris avec eux des mathématiques belles et variées.

Je leur en suis encore infiniment reconnaissant pour leurs précieux conseils, leurs suggestions et aussi leurs encouragements.

J'adresse mes sincères remerciements au président de jury de cette soutenance.

Je tiens à vous remercier d'avoir accepté cette tâche et d'avoir apporté votre regard sur mon travail.

Je remercie très chaleureusement Mr Gilles Godefroy directeur de recherche CNRS à l'Institut de Mathématique de Jussieu et Mr Jean Martin Paoli maître de conférence habilité à diriger des travaux de recherches pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je leur suis très reconnaissant du temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de cette thèse et de leur présence de cette jury.

Je remercie infiniment l'ensemble des membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont offert ce jour.

Je remercie infiniment le président de l'Université des Comores pour leur soutien administratif, financier et aussi surtout pour l'honneur qu'il m'a offert ce jour.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'équipe d'analyse pour les moments précieux qu'on a passé ensemble.

J'avoue que cette dernière m'a donnée le goût de la recherche et j'espère continuer à travailler davantage avec elle après cette thèse de doctorat.

Je remercie tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB) de l'accueil qu'il m'a offert dépuis mon arrivée en France. Je ne pourrais jamais oublier les moments chaleureux que j'ai passé au sein de ce laboratoire.

Je remercie mes collégues de l'école doctorale et en particulier Lezowski Pierre et Lazzarini Giovanni pour notre amitié et leur esprit de travail d'équipe.

Je remercie mon ami et collègue Mohamed Rachadi Ibrahim pour son soutien inlassable et la confiance qu'il m'a toujours témoignée pédagogiquement. J'avoue très sincérement que je lui en suis reconnaissant.

Finalement, ce rêve n'aurait pas pu aussi se réaliser sans l'amour, la confiance, et le soutien des gens que je vais les remercier maintenant car, sans eux je ne serais pas où j'en suis aujourd'hui.

Je remercie mon oncle Mohamed Hassane Halidi (paix à son âme) qui a fait grandir mon imagination dès mon enfance en m'initiant sur les calculs et aussi de m'avoir appris à ne jamais baisser les bras.

Je remercie très vivement mon père (paix à son âme), qui m'a appris à rester toujours débout face aux difficultés, à aimer la recherche et la science.

Je remercie ma grande-mère (Moinaecha Tadjiri), qui m'a appris à être simple, que l'on peut être heureux juste en regardant ceux qu'on aime à nos côtés. Elle a embrassé mes échecs et mes réussites sans distinction.

Je remercie ma mère qui m'a toujours été présente à chaque instant dans ma vie même en étant père de famille.

Je remercie ma femme qui a vécu ses longues années des doutes et d'angoisses de la recherche scientifique. J'espère que ce n'était pas trop pésant sur elle.

Je remercie mes frères de m'avoir donné tellement de chaleur et de joie de vivre.

Je remercie mon beau frère, mes cousins et cousines qui au long de ces trois années de recherche ont toujours été là pour entretenir mon enthousiasme ou me remonter le moral quand il le fallait.

Je remercie aussi à mes oncles, mes amis, et mes collègues pour leur soutien moral et pédagogique.

Je remercie enfin l'Université des Comores(UDC)et ses partenaires(AUF et SCAC) pour leur soutien administratif et financier.

Je dédie ce travail à tous ceux que j'aime et je respecte et en particulier à mes filles. Je leur souhaite une longue vie de bonheur, de prospérité et de plein succés. Amine !

Introduction

La notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt joue un rôle fondamental en Analyse Fonctionnelle et Harmonique.
Rappelons que si H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert séparables, un opérateur T : $H_1 \to H_2$ est dit de Hilbert-Schmidt si et seulement si on a, pour au moins une base orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ de H_1 ; $\sum_{i\in I} \|T(e_i)\|^2_{H_2} < +\infty$ et dans ce cas, la condition ci-dessus est en fait vérifiée pour toute base orthonormale de H_1.

Un exemple standard est donné par les opérateurs $T_k : f \to T_k(f)$ sur $L^2(\Omega,\mathbb{C})$ définis par la formule $T_k(f)(x) = \int_\Omega f(y)\, k(x,y)\, dm(y)$, où m désigne la mesure de Lebesgue, $k : (x,y) = k(x,y)$ désignant un noyau de carré intégrable sur $\Omega \times \Omega$.
En effet, soit (e_n) une base orthonormale de H_1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_n \|T_k e_n\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_n \int_\Omega |T_k e_n|^2\, dt \\
&= \sum_n \int_\Omega \left|\int_\Omega k(t,s)\, e_n(s)\, ds\right|^2 dt \\
&= \int_\Omega \sum_n \left|\int_\Omega k(t,s)\, e_n(s)\, ds\right|^2 dt \\
&= \int_\Omega \sum_n \left|\left\langle k(t,.)\,,\overline{e_n}\right\rangle\right|^2 dt \\
&= \int_\Omega \|k(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&= \int_\Omega \int_\Omega |k(t,s)|^2\, ds dt \\
&= \|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}.
\end{aligned}$$

Notre travail est réparti en six chapitres.
Dans le chapitre 1, on présente la classe des opérateurs p-sommants introduite par A.Pietsch [34] en 1966 et étudiée ensuite par J. Lindenstrauss et A.Pelczynski en 1968[33] puis par B.Maurey en 1973[37].
Une grande attention est apportée en particulier aux opérateurs 2-sommants. On a détaillé les théorèmes de domination et de factorisation puis “la propriété d'idéal”.
On utilise les inégalités de Kahane-Kintchine [27] et les inégalités de Grothendieck [43] pour établir un lien entre opérateurs p-sommants et factorisation à travers les espaces $\mathcal{L}_p$.
Dans le chapitre 2, on a introduit la classe de Schatten von-Neumann $S_2(H_1,H_2)$ pour donner d'autres caractérisations des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Cette étude est basée sur le “théorème spectral”qui permet d'écrire tout opérateur compact $u : H_1 \to H_2$ sous la forme $u = \sum_n \tau_n \langle ., e_n\rangle f_n$ où (e_n) est un système orthonormal de H_1, (f_n) un système orthonormal de H_2 et τ_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Une propriété remarquable de la classe d'opérateurs de Hilbert-Schmidt est qu'elle coincide d'une part avec la classe des opérateurs 2-sommants de H_1 dans H_2 et d'autre part avec les classes de Schatten von-Neumann $S_2(H_1,H_2)$.

Dans le chapitre 3, on étudie les opérateurs γ-sommants d'un espace de Hilbert H vers un espace de Banach E.
La classe des opérateurs γ-sommants a été introduite par Linde et Pietsch[35] en 1974 et étudiée en détail par Diestel, Jarchow, Tonge [44].
Dans le chapitre 4, on s'interesse aux opérateurs γ-radonifiants initiés par Gross[7]en 1962 et qui ont été dévéloppés par Van Neerven et Weis[50] en 2005. Ces notions ont permis de dégager des notions analogues à celles d'opérateurs de Hilbert-Schmidt pour les opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert H dans un espace de Banach F.
Dans le chapitre 5, on s'interesse aux opérateurs p-nucléaires et faiblement $*$ p-nucléaires et on observe que la classe des opérateurs faiblement$*$ 1-nucléaire coincide avec la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Enfin au chapitre 6 on étudie des extensions naturelles des notions d'opérateurs γ-sommants et γ-radonifiants d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y.
Notons $\ell_2^{\text{faible}}(X)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X telles que

$$\sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x^*, x_n\rangle\right|^2 < +\infty.$$

On dira que $u : X \longrightarrow Y$ est γ-sommant si $\sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} \gamma_n u(x_n)\right\|^2 < +\infty$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(X)$, et on dira que u est γ-radonifiant si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u(x_n)$ converge dans $L^2(\Omega, X)$ où (γ_n) désigne une suite de variables gaussiennes indépendantes.
En utilisant la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ des fonctions de Rademacher sur $[0,1]$, qui prennent les valeurs 1 et -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, nous introduisons de même les opérateurs "Rademacher-bornés" et les opérateurs " presque-sommants".
On dit qu'un opérateur $u : X \to Y$ est Rademacher-borné si

$$\sup_{N\geq 1} \int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t) u(x_n)\right\|^2 dt < +\infty$$

pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{faible}(X)$, et on dit que u est presque sommant si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n(t) u(x_n)$ converge pour presque tout $t \in [0,1]$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{faible}(X)$, ce qui équivaut au fait que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n(t) u(x_n)$ converge dans $L^p([0,1], X)$ pour un réel $p \geq 1$, ou pour tout réel $p \geq 1$. Comme l'ont remarqué avant nous Blasco, Tarieladze et Vidal dans [1], les auteurs du livre "Absolutely Summing Operators" ont malheureusement confondu ces deux classes dans le théorème 12.12 [8],alors qu'elles ne coincident que si Y ne contient pas une copie de c_0 (voir[39]).
En utilisant des résultats de [8], on montre en fait que la classe des opérateurs γ-sommants coincide avec la classe des opérateurs Rademacher-bornés et que la classe des opérateurs γ-radonifiants coincide avec la classe des opérateurs presque-sommants.
L'adhérence dans la classe des opérateurs γ-sommants de l'ensemble des opérateurs de rang fini est composée d'opérateurs γ-radonifiants.
On voit donc que l'on dispose de plusieurs généralisations naturelles de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt aux espaces de Banach.

- Les classes $\Pi_p(X,Y)$ des opérateurs p-sommants de X dans Y $(1 \leq p < +\infty)$
- La classe $\Pi_{ps}(X,Y)$ des opérateurs presque sommants de X dans Y, qui coincide avec la classe $\gamma(X,Y)$ des opérateurs γ-radonifiants de X dans Y.
- La classe des opérateurs faible $*$ 1-nucléaires de X dans Y.

On sait que $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$ si $1 \leq p \leq q$, et on a $\cup_{p\geq 1}\Pi_p(X,Y) \subset \pi_{ps}(X,Y)$ (en d'autres termes, tout opérateur sommant est presque sommant).
Toutes ces classes coincident avec la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt si X et Y sont des espaces de Hilbert, ainsi que les classes des opérateurs $u : X \longrightarrow Y$ tels que $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$ appartiennent à une des classes ci-dessus par rapport à Y^* et X^*.
Soient maintenant X, Y, Z trois espaces de Banach, et soient $u : X \to Y$ et $v : Y \to Z$ deux opérateurs bornés.
Il serait intéressant d'étudier des conditions garantissant que le produit $v \circ u$ est nucléaire quand v et u appartiennent à des classes ci-dessus. Par exemple, il est classique $v \circ u$ est nucléaire si v et u sont 2-sommants.
D'autre part, on sait que tout opérateur p-sommant est faiblement compact et complètement continu, c'est à dire transforme une suite convergeant faiblement vers 0 en une suite convergeant en norme vers 0. On en déduit que si u est p-sommant et si v est q-sommant, alors $v \circ u$ est compact.
Si H est un Hilbert séparable, tout opérateur presque sommant est limite en norme d'opérateurs de rang fini, donc tout opérateur presque sommant est compact. Il serait intéressant d'étudier pour quelles classes d'espaces X et Y les opérateurs presque sommants de X dans Y sont compacts.

Chapitre 1

Les opérateurs p-sommants

Dans ce chapitre, on rappelle des résultats sur les opérateurs p-sommants et en particulier les opérateurs 2-sommants. On demontre les inégalités de Khintchine et Grothendieck que l'on applique aux opérateurs 2-sommants, voir[8]. Une présentation générale des"idéaux d'opérateurs" est donnée par Pietsch, Diestel et Jarchow [9].

1.1 Espaces des suites p-sommables

On notera X et Y deux espaces de Banach et H un espace de Hilbert. Le dual de X sera noté X^* et la boule unité de X sera notée B_X. Pour $p > 1$ on note q le conjugué de p, défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On pose $q = +\infty$ si $p = 1$.

1. On désignera par $\ell_p(X)$ l'espace des suites absolument p-sommables d'éléments de X dont la norme est :

$$\|(x_n)\|_{\ell_p(X)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad pour\ 1 \leq p < +\infty$$

2. et par $\ell_\infty(X)$ l'espace des suites bornées, normées par :

$$\|(x_n)\|_{\ell_\infty} = \sup_n \|x_n\|.$$

3. Lorsque $X = \mathbb{C}$ on note simplement ℓ_p, $p \in [1, +\infty]$. On note par :

4. $c_0(X)$ l'espace des suites (x_n) d'éléments de X convergeant vers 0.
5. $\ell_p^{\text{faible}}(X)$ l'espace des suites (x_n) d'éléments de X faiblement p-sommables, c'est à dire des suites (x_n) vérifiant $\sum_n |\langle x^*, x_n\rangle|^p < +\infty$ pour tout $x^* \in X^*$ muni de la norme :

$$\|(x_n)\|_{\ell_p^{\text{faible}}(X)} = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x^*, x_n\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad si\ 1 \leq p < +\infty.$$

On pourrait introduire $\ell_\infty^{\text{faible}}(X)$, l'espace des suites faiblement bornées, mais ceci ne presente pas d'intérêt car

$$\begin{aligned}\|(x_n)\|_{\ell_\infty^{\text{faible}}(X)} &= \sup_{\|x^*\|\le 1}(\sup_n |\langle x^*, x_n\rangle|)\\ &= \sup_n \sup_{\|x^*\|\le 1} |\langle x^*, x_n\rangle|\\ &= \|(x_n)\|_{\ell_\infty(X)}\end{aligned}$$

et en fait $\ell_\infty^{\text{faible}}(X) = \ell_\infty(X)$.
L'espace $\ell_p^{\text{faible}}(X)$ est un espace de Banach,[8], p33.

1.2 Les opérateurs p-sommants

Définition 1.2.1. *Soit X et Y deux espaces de Banach. On suppose que $1 \le p < +\infty$. Un opérateur $u : X \to Y$ est p-sommant si et seulement si il existe une constante $c \ge 0$ telle que pour $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$, on a :*

$$\sum_{i=1}^m \|ux_i\|^p \le c^p \sup_{\|x^*\|\le 1} \sum_{i=1}^m |\langle x^*, x_i\rangle|^p. \tag{1.1}$$

On voit donc que les opérateurs p-sommants transforment les suites faiblement p-sommantes en suites fortement p-sommantes. On notera $\pi_p(u)$ la plus petite constante c telle que (1.1) soit vérifiée. Il est clair que $\|u\| \le \pi_p(u)$. En effet pour m=1, on a :

$$\|ux\|^p \le \pi_p(u)^p \sup_{\|x^*\|\le 1} \left(|\langle x^*, x\rangle|^p\right) = \pi_p(u)^p \|x\|^p$$

i.e $\|ux\| \le \pi_p(u)\|x\|$. On note $\Pi_p(X,Y)$ l'espace des opérateurs p-sommants dans X vers Y et $\Pi_p(X,Y)$ muni de la norme π_p est un espace de Banach [8], p38 prop 2.6. On a alors la " propriété d'idéal" (ideal property) [8], p 37.
Si $u : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu, on définit $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$ par la formule $\langle u^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, u(x)\rangle$, et on a $\|u^*\| = \|u\|$.

Proposition 1.2.2. *Soient X, Y, Z, L des espaces de Banach . Soit $u : X \to Y$ un opérateur p-sommant ; $v \in \mathscr{L}(Z,X)$ un opérateur linéaire continu et $w \in \mathscr{L}(Y,L)$ un opérateur linéaire continu. Alors $w \circ u \circ v$ est p-sommant et $\pi_p(w \circ u \circ v) \le \|w\| \pi_p(u) \|v\|$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition des opérateurs p-sommants pour w. On a

$$\begin{aligned}\sum \|(u\circ v)(x_i)\|^p &\le \pi_p(u)^p sup_{\|x^*\|\le 1} \sum_i |\langle x^*, v(x_i)\rangle|^p\\ &= \pi_p(u)^p sup_{\|x^*\|\le 1} \sum_i |\langle v^*(x^*), x_i\rangle|^p\\ &\le \pi_p(u)^p sup_{\|x^*\|\le \|v\|} \sum_i |\langle x^*, x_i\rangle|^p\\ &= \|v\|^p \pi_p(u)^p sup_{\|x^*\|\le 1} \sum_i |\langle x^*, x_i\rangle|^p. \quad \square\end{aligned}$$

Théorème 1.2.3. *(théorème d'inclusion)*
Si $1 \leq p < q < \infty$, alors $\Pi_p(X,Y) \subseteq \Pi_q(X,Y)$.
De plus, on a : $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$ pour tout $u \in \Pi_p(X,Y)$.

Démonstration. Soit $x_1, \ldots, x_n \in X$ et posons $\lambda_k = \|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1}$.
Donc $\|u(\lambda_k x_k)\|^p = \|u(x_k)\|^q$. Par suite $\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n \|u(\lambda_k x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
Si u est p-sommant, alors $\left(\sum_{k=1}^n \|u(\lambda_k x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x^*, x_k\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
Donc $\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x^*, x_k\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Si de plus, $p < q$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder sur les indices $\alpha = \frac{q}{q-p}$ et $\beta = \frac{q}{p}$, On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{qp}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n \left|\langle x^*, x_k\rangle\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^n \left(\|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{qp}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{qp}} \left\|(x_k)_{1\leq k\leq n}\right\|_{\ell_q^{\text{faible}}} \\
&\leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left\|(x_k)_{1\leq k\leq n}\right\|_{\ell_q^{\text{faible}}}.
\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \left\|(x_k)_{1\leq k\leq n}\right\|_{\ell_q^{\text{faible}}}.$$

Donc, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u) \left\|(x_k)_{1\leq k\leq n}\right\|_{\ell_q^{\text{faible}}}.$$

C'est à dire $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$. □

1.3 Caractérisation des Opérateurs 2-sommants

Définition 1.3.1. *Soit X un espace de Banach. On dit qu'un sous-ensemble K de B_{X^*} est normant si $\|x\| = \sup_{x^* \in K} |\langle x^*, x\rangle|\ \forall\ x \in X$.*

On rappelle que la boule unité B_{X^*} de X^* est faible $*$ compacte, donc tout sous-ensemble faible $*$-fermé de B_{X^*} est faiblement $*$ compact.

Lemme 1.3.2. *Soit X un espace de Banach. On suppose que $1 \leq p < \infty$. On note par q le conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si K est un sous-ensemble normant de B_{X^*} et si $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p^{faible}(X)$, alors on a : $\|x_n\|_{\ell_p^{faible}} = \sup_{x^* \in K} \left(\sum_n |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_{\ell_p^{\text{faible}}} &= \sup_m \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{(a_n)\in B_{\ell_q^m}} \left|\left\langle x^*, \sum_{n\leq m} a_n x_n\right\rangle\right| \\
&= \sup_m \sup_{(a_n)\in B_{\ell_q^m}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|\left\langle x^*, \sum_{n\leq m} a_n x_n\right\rangle\right| \\
&= \sup_m \sup_{(a_n)\in B_{\ell_q^m}} \left\|\sum_{n\leq m} a_n x_n\right\| \\
&= \sup_m \sup_{(a_n)\in B_{\ell_q^m}} \sup_{x^*\in K} \left|\left\langle x^*, \sum_{n\leq m} a_n x_n\right\rangle\right| \\
&= \sup_m \sup_{x^*\in K} \sup_{(a_n)\in B_{\ell_q^m}} \left|\left\langle x^*, \sum_{n\leq m} a_n x_n\right\rangle\right| \\
&= \sup_{x^*\in K} \left(\sum_n \left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \square
\end{aligned}$$

La proposition suivante vient de [8], Exemple 2.9.*a*.

Proposition 1.3.3. *Soient K un compact, μ une mesure régulière borelienne, positive sur K et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $\varphi \in L_p(\mu)$, l'opérateur de multiplication $M_\varphi : C(K) \longrightarrow L_p(K,\mu) : f \longmapsto f\varphi$ est p-sommant avec $\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_{L_p(K,\mu)}$.*

Démonstration. A chaque $k \in K$ est associé la fonctionnelle $\delta_k \in C(K)^*$ qui vérifie $\langle \delta_k, f\rangle = f(k)$. L'ensemble $\{\delta_k : k \in K\}$ est normant dans $C(K)^*$, si f est continue sur K et $\|f\|_K = \max_{k\in K}|f(k)|$. Soit $(f_n) \subset C(K)$; on a par le lemme précédent

$$\begin{aligned}
\|(f_n)\|_{\ell_p^{\text{faible}}(C(K))} &= \sup_{k\in K}\left(\sum_n |\langle \delta_k, f_n\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{k\in K}\left(\sum_n |f_n(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n \|M_\varphi f_n\|^p_{L_p(K,\mu)}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_n \int_K |f_n\varphi|^p \, d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_K |\varphi(k)|^p \left(\sum_n |f_n(k)|^p\right) d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_K |\varphi(k)|^p \, d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{k\in K}\left(\sum_n |f_n(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\varphi\|_{L_p(K,\mu)} \|(f_n)\|_{\ell_p^{\text{faible}}(C(K))}.
\end{aligned}$$

M_φ est donc p-sommant et $\pi_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_{L_p(K,\mu)}$ d'une part, et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \pi_p(M_\varphi) &\geq \|M_\varphi\| \\ &\geq \|M_\varphi \mathbb{1}\|_{L_p(K,\mu)} \\ &= \|\varphi\|_{L_p(K,\mu)}. \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.4. *Soient K un compact, μ une mesure régulière positive sur K et soit $1 \leq p < \infty$. L'application canonique $j_p : C(K) \longrightarrow L_p(K,\mu)$ est p-sommante avec $\pi_p(j_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi = \mathbb{1}$ dans la proposition précédente. □

Lemme 1.3.5. *Soient $(\Omega, \sum, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $\varphi \in L_p(\Omega,\mu)$, l'opérateur de multiplication $M_\varphi : L_\infty(\Omega,\mu) \longrightarrow L_p(\Omega,\mu), f \longmapsto f\varphi$ est p-sommant avec $\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_{L_p(\Omega,\mu)}$.*

Démonstration. Le compact $L = \widehat{L^\infty(K,\mu)}$ est l'ensemble des homomorphismes $\chi : L_\infty(\Omega,\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est un sous-ensemble faiblement fermé de la boule unité du dual $L_\infty(\Omega,\mu)$. L'isomomorphisme isométrique entre $L_\infty(\Omega,\mu)$ et $C(L)$ est donnée par la transformation de Gelfand $f \longrightarrow \hat{f} : \chi \longrightarrow \chi(f)$. Il existe une mesure de probabilité ν sur L telle que $\int_\Omega f\,d\mu = \int_L \hat{f}\,d\nu \ \forall\ f \in\ L_\infty(\Omega,\mu)$ et on a :

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|\hat{f}\|_{L^p(L,\nu)} \ \ pour\ f \in L^\infty(\Omega,\mu).$$

$$\begin{tikzcd} L_\infty(\Omega,\mu) \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[d, "i_p"'] & C(L) \arrow[d, "j_p"] \\ L^p(\Omega,\mu) \arrow[r, "\mathcal{G}_p"'] & L_p(L,\nu) \end{tikzcd}$$

Comme $L^\infty(\Omega,\mu)$ est dense dans $L^p(\Omega,\mu)$ et $C(L)$ est dense dans $L^p(L,\nu)$ alors il existe un isomorphisme isométrique $\mathcal{G}_p : L^p(\Omega,\mu) \longrightarrow L^p(L,\nu)$ tel que $i_p = \mathcal{G}_p^{-1} \circ j_p \circ \mathcal{G}$ [2]. □

Corollaire 1.3.6. *Soit $(\Omega, \sum, \mu)$ un espace mesuré fini et $1 \leq p < \infty$. L'application $i_p : L_\infty(\Omega,\mu) \longrightarrow L_p(\Omega,\mu)$ est p-sommant avec $\pi_p(i_p) = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi = \mathbb{1}$ dans le lemme précédent. □

Lemme 1.3.7. *Soit $1 \leq p < \infty$. L'opérateur diagonal $D_\lambda : \ell_\infty \longrightarrow \ell_p : (a_n) \longmapsto (\lambda_n a_n)$, est p-sommant avec $\pi_p(D_\lambda) = \|\lambda\|_{L_p}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\ell_\infty = L_\infty(\mathbb{N},\mu)$ avec μ la mesure de comptage. Par suite, il suffit d'utiliser la même démarche que dans le corollaire précédent tout en tenant compte du fait que $\lambda \in \ell_p = L_p(\mu)$. □

Théorème 1.3.8. *(Théoréme de domination de Pietsch)*
Soit $u : X \to Y$ un opérateur et $K \subset B_{X^*}$ un ensemble normant faible $*$-fermé. Alors u est 2-sommant si et seulement si il existe une constante c et une mesure régulière de probabilité μ sur K telle que $\forall\ x \in X$,

$$\|ux\| \leq c\left(\int_K \left|\left\langle x^*, x\right\rangle\right|^2 d\mu\left(x^*\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Dans ce cas, la plus petite constante qui vérifie (1.2) est égale à $\pi_2(u)$.

Démonstration. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité μ sur K telle que (1.2) est satisfait. Pour chaque x_i avec $i = 1, 2, \ldots, m$, on a :

$$\sum_{i=1}^m \|ux_i\|^2 \leq c^2 \sum_{i=1}^m \int_K \left|\left\langle x^*, x_i\right\rangle\right|^2 d\mu\left(x^*\right) \leq c^2 \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^m \left|\left\langle x^*, x_i\right\rangle\right|^2\right)$$

u est donc 2-sommant et $\pi_2(u) \leq c$.
Montrons la réciproque :
Soit M une partie finie de X; on définit $g_M : K \to \mathbb{R}; x^* \longmapsto g_M(x^*)$ par

$$g_M\left(x^*\right) = \sum_{x\in M}\left(\|ux\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, x\right\rangle\right|^2\right).$$

Pour chaque partie finie M, $g_M \in C(K, \mathbb{R})$. Soit Q l'ensemble de tous les g_M quand M parcourt les parties finies de K; montrons que Q est convexe. Soient M et M' deux parties finies de X et $0 < \lambda < 1$; on a :

$$\begin{aligned}
\lambda g_M\left(x^*\right) + (1-\lambda)\, g_{M'}\left(x^*\right) &= \sum_{x\in M} \lambda\left(\|ux\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, x\right\rangle\right|^2\right) \\
&\quad + \sum_{x\in M'} (1-\lambda)\left(\|ux\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, x\right\rangle\right|^2\right) \\
&= \sum_{x\in M}\left(\left\|\lambda^{\frac{1}{2}} ux\right\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, \lambda^{\frac{1}{2}} x\right\rangle\right|^2\right) \\
&\quad + \sum_{x\in M'}\left(\left\|(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} ux\right\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} x\right\rangle\right|^2\right) \\
&= \sum_{y\in M''}\left(\left\|uy\right\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, y\right\rangle\right|^2\right)
\end{aligned}$$

avec $M'' = \left\{\lambda^{\frac{1}{2}} x : x \in M\right\} \cup \left\{(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} x : x \in M'\right\}$.
Si $y = \lambda^{\frac{1}{2}} x, avec x \in M$, ou si $y = (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} x$, avec $x \in M'$,on a $\left\|uy\right\|^2 - \pi_2(u)^2\left|\left\langle x^*, y\right\rangle\right|^2 \leq 0$ puisque u est 2-sommant. Donc $g_M(x^*) \leq 0$ pour tout $x^* \in K$ et $M \in Q$.
Soit $\Delta = \left\{f \in C(K, \mathbb{R}) : f(x^*) > 0\ \forall x^* \in K\right\}$. Le cône Δ est un ouvert convexe, disjoint de Q. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $L \in C(K, \mathbb{R})^*$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\ g \in Q,\ \forall\ f \in \Delta, \qquad \left\langle L, g\right\rangle \leq \delta < \left\langle L, f\right\rangle$$

et on peut supposer que $\|L\| = 1$.
On voit d'une part que $\delta \geq 0$ car $0 \in Q$ et d'autre part que $\delta \leq 0$ car les fonctions

constantes positives appartiennent à Δ. On obtient $\langle L, g\rangle \leq 0 < \langle L, f\rangle$ $\forall f \in \Delta$, $\forall g \in Q$. Il existe une mesure regulière positive μ sur K telle que $\langle L, f\rangle = \int_K f(x^*)d\mu(x^*)$ $\forall f \in C(K,\mathbb{R})$. Comme $1 = \|L\| = \int_K d\left|\mu\right|(x^*) = \int_K d\mu(x^*)$, μ est une mesure de probabilité et on a :

$$\int_K \left(\|ux\|^2 - \pi_2(u)^2 \left|\langle x^*, x\rangle\right|^2\right) d\mu\left(x^*\right) \leq 0$$

pour tout $x \in X$. Et cette derniére inégalité nous donne (1.2). □

Il est à noter que si $K \subset B_{X^*}$ est un sous-ensemble normant, alors l'application $i_X : X \longrightarrow \ell_\infty^K$, $i_X(x)(k) = \langle k, x\rangle$ est linéaire et isométrique. Si K est un sous ensemble normant et faible $*$-fermé, alors l'application i_X est définie sur X et à valeurs dans $C(K)$, et K est compact par le théorème de Banach-Alaoglu.

Définition 1.3.9. *On dit qu'un espace de Banach Z est injectif si pour tout espace de Banach W ; pour tout sous-espace de Banach W_0 de W et pour tout opérateur continu $T : W_0 \longrightarrow Z$, il existe une extension continue $\tilde{T} : W \longrightarrow Z$ de T, telle que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Lemme 1.3.10. *L'espace $\ell^\infty(K)$ est injectif, si K est un sous- ensemble normant faible $*$-fermé de B_{X^*}.*

Démonstration. On considère un opérateur $T : W_0 \longrightarrow \ell_\infty(K)$ et $\pi_k \circ T : W_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\pi_k \circ T(w) = \pi_k(T(w))$. On pose $\pi_k \circ T = u_k$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une extension $\tilde{u_k} : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de même norme que u_k. Donc $\tilde{T}(w) = (\tilde{u_k}(w))_{k\in K}$ est une extension de $T(w) = (u_k(w))_{k\in K}$. Montrons maintenant que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\left\{|T(w_0)|_{\ell_\infty}(K) : w_0 \in W \; et \, \|w_0\| \leq 1\right\} \\
&= \sup\{|u_k(w_0)|,\ k \in K,\ w \in W_0 \; et \; \|w_0\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|u_k\| : k \in K\}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{T}(w)\right\|_{\ell_\infty}(K) &= \sup_{k\in K} |\tilde{u_k}(w)| \\
&\leq \sup_{k\in K} \|\tilde{u_k}\| \, \|w\| \\
&= \sup_{k\in K} \|u_k\| \, \|w\| \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

Donc $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. De plus, on a toujours $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$ car $\tilde{T}$ est une extension de T. □

Proposition 1.3.11. *Soit Z un espace de Banach et W un espace contenant Z. Si Z est injectif, alors il existe une projection $P : W \longrightarrow Z$ de norme 1.*

Démonstration. Soit $Z \subset W$. Si Z est injectif, alors $T = id : Z \longrightarrow Z$ admet une extension $\tilde{T} : W \longrightarrow Z$ de norme 1. On a $(\tilde{T} \circ \tilde{T})(x) = \tilde{T}(\tilde{T}(x)) = T(\tilde{T}(x)) = \tilde{T}(x)$ car $T = id$. Donc $\tilde{T}$ est une projection. Réciproquement, considérons $i_Z : Z \longrightarrow \ell_\infty(B_{Z^*}) = W$.

Il existe une projection $P : \ell_\infty(B_{Z^*}) \longrightarrow Z$, de norme 1. Soit V un espace de Banach, V_0 un sous-espace de V. On a pour $T : V_0 \to Z$,on pose l'application $S = i_Z \circ T$.

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & Z \arrow[dl, "i_Z"] \\
& \ell_\infty(B_{Z^*}) &
\end{tikzcd}$$

Comme $\ell_\infty(B_{Z^*})$ est injectif, alors il existe une extension $\tilde{S} : V \longrightarrow \ell_\infty(B_{Z^*})$ de S telle que $\left\|\tilde{S}\right\| = \|S\|$. Mais $\|S\| = \|i_Z \circ T\| = \|T\|$ car i_Z est une isométrie.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "S"] & \ell_\infty(B_{Z^*}) \arrow[d, bend right, "P"'] \\
V_0 \arrow[u, "i_V"] \arrow[r, "T"'] & Z \arrow[u, bend right, "i_Z"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{T} = P \circ S$ est une extension de $T = P \circ S \circ i_W$, avec $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$. □

Théorème 1.3.12. *(Théorème de factorisation de Pietsch)*
Soit $u : X \to Y$ un opérateur et $K \subset B_{X^*}$ un sous-ensemble normant faible $*$-fermé. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *u est 2-sommant.*
2. *Il existe une mesure de probabilité μ sur K, un sous-espace vectoriel fermé X_2 de $L_2(\mu)$ et un opérateur $\hat{u} : X_2 \to Y$ tels que :*
   (a) *$j_2 \circ i_X(X) \subset X_2$ et*
   (b) *$\hat{u} \circ j_2 \circ i_X(x) = ux\ \forall\ x \in X$. Autrement dit le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
i_X(X) \arrow[r, "j_2^X"'] \arrow[d, phantom, "\bigcap" description] & X_2 \arrow[u, "\hat{u}"'] \arrow[d, phantom, "\bigcap" description] \\
C(K) \arrow[r, "j_2"'] & L_2(\mu)
\end{tikzcd}$$

3. *Il existe une mesure de probabilité μ sur K et $\tilde{u} : L_2(\mu) \to \ell_\infty^B$,où $B = B_{Y^*}(0,1)$, tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[r, "i_Y"] & \ell_\infty^B \\
C(K) \arrow[rr, "j_2"'] & & L_2(\mu) \arrow[u, "\tilde{u}"']
\end{tikzcd}$$

4. *Il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \sum, \mu)$ *et un opérateur* $\tilde{u} : L_2(\mu) \to \ell_\infty^B$ *et* v : $X \to L_\infty(\mu)$ *tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & Y \arrow[r, "i_Y"] & \ell_\infty^B \\ L_\infty \arrow[rr, "i_2"'] & & L_2(\mu) \arrow[u, "\tilde{u}"'] \end{tikzcd}$$

Donc $\|\tilde{u}\| = \|\hat{u}\| = \pi_2(u)$. *Dans* 4., *on a considéré que* $\|v\| = 1$ *et* $\|\tilde{u}\| = \pi_2(u)$.

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ 2. Si u est 2-sommant, alors d'après le théorème de domination de Pietsch, il existe une mesure de probabilité μ sur K telle que :

$$\|ux\| \leq \pi_2(u)\left(\int_K \left|\langle x^*, x\rangle\right|^2 d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{2}} \ \forall\ x \in X$$

Soit $S = Im\left(j_2 \circ i_X\right)$. L'application $\tilde{u} : (j_2 \circ i_X)(x) \longrightarrow u(x)$ est une application de S dans Y qui est bien définie :

$$\begin{aligned} \left\|(j_2 \circ i_X)(x)\right\|^2_{L_2(K,\mu)} &= \int_K |i_X(x)(k)|^2 \, d\mu(k) \\ &= \int_K |\langle k, x\rangle|^2 \, d\mu(k) \end{aligned}$$

car $[i_X(x)](x^*) = \langle x^*, x\rangle$ par définition. Autrement dit :
Si $(j_2 \circ i_X)(z) = 0$, alors $u(z) = 0$ d'après le théorème de domination de Pietsch. Ainsi :

$$\begin{aligned} (j_2 \circ i_X)(x) = (j_2 \circ i_X)(y) &\Leftrightarrow (j_2 \circ i_X)(x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow u(z) = 0,\ z = x - y \\ &\Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(y). \end{aligned}$$

L'application est donc bien définie.
De plus, cette application est continue et $\|\tilde{u}\| \leq \pi_2(u)$.
Soit X_2 la fermeture de S dans $L_2(\mu)$. Alors il existe une extension $\hat{u} : X_2 \longrightarrow Y$ telle que $\hat{u} \circ j_2^X \circ i_X = u$ et $\|\hat{u}\| \leq \pi_2(u)$.
Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned} \pi_2(u) &= \pi_2(\hat{u} \circ j_2^X \circ i_X) \\ &\leq \|\hat{u}\|\,\pi_2(j_2^X)\,\|i_X\| \\ &\leq \|\hat{u}\|\,\pi_2(j_2). \end{aligned}$$

Or $\pi_2(j_2) = \mu(K)^{\frac{1}{2}}$ par le corollaire 1.3.4 et $\mu(K) = 1$ car μ est une mesure de probabilité. Donc $\pi_2(u) \leq \|\hat{u}\|$.

2. $\Rightarrow$ 3. Par définition : $B = B_{Y^*}(0,1)$ et $\ell_\infty^B = \left\{f : B \to \mathbb{C} : \text{tel que } \sup_{b\in B}\left|f(b)\right| < \infty\right\}$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[rr, "\hat{u}"] \arrow[dr, "\tilde{u}"'] & & Y \arrow[dl, "i_Y"'] \\ & \ell_\infty^B & \end{tikzcd}$$

car $i_Y(y)$ est effectivement une fonction bornée sur la boule unité de Y^* : $\left|i_Y(y)(y^*)\right| = \left|\left\langle y, y^*\right\rangle\right| \leq \|y\|\,\|y^*\| \leq \|y\|$. Donc on a :

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "\hat{u}"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ L^2(K;\mu) \arrow[r, dotted] & \ell_B^\infty \end{tikzcd}$$

L'application $\tilde{u}$ existe par l'injectivité de ℓ_∞^B (ceci est le lemme 1.3.10) qui préserve la norme.

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\| &= \|i_Y \hat{u}\| \\ &= \|\hat{u}\| \\ &= \pi_2(u) \text{ d'après } 2. \end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 4.. Il est clair qu'on peut définir $j_2 : C(K) \overset{j_\infty}{\to} L_\infty(\mu) \overset{i_2}{\to} L_2(\mu)$. Donc en posant $v = j_\infty \circ i_X$ dans 3.), on obtient 4..
4. $\Rightarrow$ 1. On sait que l'opérateur $i_2 : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_2(\mu)$ est 2-sommant, $i_Y \circ u$ est donc 2-sommant par la propriété d'idéal ($prop$1.2.2). Par définition des opérateurs 2-sommants
$\sum_n \|(i_Y \circ u)(x_n)\|^2 \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sum_n |\langle (i_Y \circ u)(x_n), x^*\rangle|^2$. Mais i_Y est une isométrie. Donc $\sum_n \|u(x_n)\|^2 = \sum_n |\langle (i_Y \circ u)(x_n), x^*\rangle|^2 \lesssim \|(x_n)\|_{\ell_2^{\text{faible}}}(X)$. □

Corollaire 1.3.13. *$u : X \to Y$ est 2-sommant si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ sur un compact K et $\tilde{u} \in \mathscr{L}\left(L_2\left(\mu\right), Y\right)$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\ C(K) \arrow[r, "j_2"'] & L_2(\mu) \arrow[u, "\tilde{u}"'] \end{tikzcd}$$

et on a dans ce cas $\|\tilde{u}\| = \pi_2(u)$.

Démonstration. On suppose que u est 2-sommant. D'après le théorème de factorisation de Pietsch, il existe une mesure régulière de probabilité μ sur K, un sous-espace vectoriel fermé X_2 de $L_2(\mu)$ et un opérateur $\hat{u} : X_2 \to Y$ tels que $\hat{u} \circ j_2 \circ i_X(x) =$

$ux \ \forall\ x \in X$ et $\pi_2(u) = \|\hat{u}\|$. Soit P la projection orthogonale de $L_2(\mu)$ sur X_2. Donc $\tilde{u} = \hat{u}P$ satisfait $\tilde{u} \circ j_2 \circ i_X = u$. D'une part,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
i_X(X) \arrow[d] & X_2 \arrow[u, "\hat{u}"'] \\
C(K) \arrow[r, "j_2"'] & L_2(K;\mu) \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\| &= \|\hat{u}P\| \leq \|\hat{u}\|\,\|P\| \leq \|\hat{u}\| \\
&= \pi_2(u).
\end{aligned}$$

et d'autre part $\tilde{u}$ est une extension de $\hat{u}$, donc $\|\tilde{u}\| \geq \|\hat{u}\| = \pi_2(u)$. □

Corollaire 1.3.14. *Tout opérateur 2-sommant $u : X \to Y$ admet une factorisation de la forme $u : X \xrightarrow{v} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_2} L_2(\mu) \xrightarrow{\tilde{u}} Y$ où μ est une mesure de probabilité de Radon,et où v et $\tilde{u}$ sont des opérateurs linéaires continus tels que $\|v\| = 1$ et $\|\tilde{u}\| = \pi_2(u)$.*

Démonstration. Utiliser 4. dans le théorème de factorisation de Pietsch puis faire la même démonstration que pour le corollaire 1.3.13. □

Corollaire 1.3.15. *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach avec $X \subset Z$. Si $u : X \to Y$ est un opérateur 2-sommant, alors il existe une extension de u, notée $\tilde{u} : Z \to Y$ qui est aussi 2-sommant avec $\pi_2(\tilde{u}) = \pi_2(u)$.*

Démonstration. Soit $u : X \to Y$ un opérateur 2-sommant. L'opérateur u admet donc une factorisation de la forme $u : X \xrightarrow{v} L_\infty(K,\mu) \xrightarrow{i_2} L_2(K,\mu) \xrightarrow{w} Y$ avec μ une mesure de probabilité de Radon, $\|v\| = 1$ et $\|w\| = \pi_2(u)$. Comme $L_\infty(K,\mu)$ est injectif, alors v admet une extension $\tilde{v} \in \mathscr{L}(Z, L_\infty(\mu))$ avec $\|\tilde{v}\| = 1$. D'où on a $\tilde{u} : Z \xrightarrow{\tilde{v}} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_2} L_2(\mu) \xrightarrow{w} Y$ et par conséquent $\tilde{u}$ est 2-sommant. De plus, $\tilde{u} = w \circ i_2 \circ \tilde{v}$ et $\pi_2(\tilde{u}) \leq \|w\|\,\pi_2(i_2)\,\|\tilde{v}\| = \pi_2(u)$. Puisque $\tilde{u}$ est une extension de u, alors $\pi_2(\tilde{u}) \geq \pi_2(u)$. Donc $\pi_2(\tilde{u}) = \pi_2(u)$. □

1.4 Les inégalités de Khintchine et Grothendieck

Il est à noter que les fonctions de Rademacher jouent un rôle très important dans l'inégalité de Khintchine. On définit les fonctions de Rademacher $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, par $r_n(t) = \operatorname{sign}(\sin(2^n \pi t))$. La caractéristique la plus importante de ces fonctions est qu'elles ont des propriétés d'orthogonalités. On peut ajouter d'où elles viennent : Si $n < m$, r_n est constant sur les intervalles $I_j = \left[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}\right]$ et $\int_{I_j} r_n(t)dt =$

$0 \, \forall j$. Donc $\sum_j \int_{I_j} r_n(t) r_m(t) dt = 0$.
Si $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ et $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont positifs ou nuls, alors

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \ldots r_{n_k}^{p_k}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } tous\ les\ p_j\ sont\ pairs \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une conséquence immédiate est que les r_n forment une suite orthonormale dans $L_2[0,1]$ et on a : $\int_0^1 |\sum_n a_n r_n(t)|^2 \, dt = \sum_n |a_n|^2 \ \ \forall \ (a_n) \in \ell_2$.

Théorème 1.4.1. *(Inégalité de Khintchine)*
Pour $0 < p < +\infty$, il existe des constantes positives A_p et B_p telles que pour toute suite $(a_n) \in \ell_2$, on a :

$$A_p \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_n a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

r_n étant la suite de Rademacher définie ci-dessus.

Démonstration. On traite ici le cas où $p = 4$, qui est le cas que nous utiliserons plus loin.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| \sum_{n \leq m} a_n r_n(t) \right|^4 dt \\
= \ & \int_0^1 \left(\sum_{i \leq m} a_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j \leq m} a_j r_j(t) \right) \left(\sum_{k \leq m} a_k r_k(t) \right) \left(\sum_{l \leq m} a_l r_l(t) \right) dt \\
= \ & \sum_{i,j,k,l \leq m} a_i a_j a_k a_l \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) \, dt \\
= \ & 3 \sum_{i,j \leq m} a_i^2 a_j^2 - 2 \sum_{i \leq m} a_i^4 \\
\leq \ & 3 \sum_i a_i^2 \sum_j a_j^2 \\
= \ & 3 \left(\sum_n a_n^2 \right)^2. \qquad \text{Par suite, on a :}
\end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{n \leq m} a_n r_n \right\|_{L^2[0,1]} \leq \left\| \sum_{n \leq m} a_n r_n \right\|_{L^4[0,1]} \leq 3^{\frac{1}{4}} \left\| \sum_{n \leq m} a_n r_n \right\|_{L^2[0,1]}.$$

Donc on peut poser $B_4 = 3^{\frac{1}{4}}$ et $A_4 = 1$. □

Le cas général est traité dans les pages 11 – 12 de[8].

Théorème 1.4.2. *(Théorème de Grothendieck)*
Tout opérateur linéaire continu $u : \ell_1 \to \ell_2$ est absolument sommant.

Dans la suite, B_H désigne la boule unité d'un espace de Hilbert H.
La demonstration du théorème est basée sur le résultat suivant.

Théorème 1.4.3. *(Inégalité de Grothendieck)*
Soit H un espace de Hilbert réel de dimension n, $(a_{ij})_{i,j\leq 1}$ une matrice $n\times n$ et soient $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in B_H$. On a :

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij}\left\langle x_i,y_j\right\rangle\right| \leq K_G \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i|\leq 1; \left|t_j\right|\leq 1\right\} = K_G \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}\epsilon_i\epsilon'_j\right| : \epsilon_i,\epsilon'_j = \pm 1\right\}$$

où K_G est une constante universelle appelée constante de Grothendieck.

Démonstration. On pose : $A = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i|\leq 1; \left|t_j\right|\leq 1\right\}$ et
$B = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}\left\langle x_i,y_j\right\rangle\right| : x_i,y_j\in B_H\right\}$
On va d'abord construire un plongement de H dans $L_2([0,1])$. Soit $(e_n)_n$ une base orthonormale de H. Si $x\in H$, $x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n \in H$. On note $\zeta_n = \langle x,e_n\rangle$. On définit $X:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$ par $X(t)=\sum_n \zeta_n r_n(t)$ où les r_n sont des variables de Rademacher. Il est clair que $\|X\|_2^2 = \int_0^1 (X(t))^2\,dt = \sum_n \zeta_n^2 = \|x\|^2$. Donc $\forall\ x,y\in H$, avec $y=\sum_n \eta_n e_n$; on a : $\langle X,Y\rangle = \int_0^1 X(t)\,Y(t)\,dt = \sum_n \zeta_n\eta_n = \left\langle x,y\right\rangle$. L'application $\varphi : H\longrightarrow L_2([0,1])$ qui à x associe X est un plongement, c'est à dire une isométrie sur son image. On va travailler avec X au lieu de x et bénéficier de l'inégalité de Khintchine. Soit donc $x\in H$ et $M>0$. On définit X^L et X^U dans $L^2[0,1]$ par :

$$X^L(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } |X(t)|\leq M, \\ M\,\text{sign}(X(t)) & \text{si } |X(t)|>M. \end{cases}$$

et $X^U(t) := X(t)-X^L(t)$. Alors $X^L(t)$ est uniformément borné sur $[0,1]$. Si,pour un $t\in[0,1]$, $X^U(t)\neq 0$, alors $|X(t)|>M$ et $\left|X^U(t)\right| = |X(t)|-M$. Utilisons l'inégalité suivante : $s\leq m+\frac{s^2}{4m}\ \forall\ m,s>0$ qui découle de la formule $ab=\inf_{t>0}\left(\frac{a^p t^p}{p}+\frac{b^q t^{-q}}{q}\right)$ pour $a,b>0$. On pose $s=|X(t)|$ et $m=M$. L'inégalité devient : $\left|X^U(t)\right| \leq \frac{|X(t)|^2}{4M}$ si $X^U(t)\neq 0$,l'inégalité trivialement satisfaite si $X^U(t)=0$. Par suite

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|X^U(t)\right|^2 dt &\leq \frac{1}{16M^2}\int_0^1 |X(t)|^4\,dt \\ &\leq \frac{1}{16M^2}\|X\|_{L^4}^4 \\ &\leq \frac{3}{16M^2}\|X\|_{L^2} \qquad \text{d'après l'inégalité de Khintchine, th 1.4.1} \end{aligned}$$

Donc on a : $\left\|X^U\right\|_{L^2}\leq \frac{\sqrt{3}}{4M}$

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{i,j} a_{ij}\left\langle x_i,y_j\right\rangle_H\right| \\ = \quad &\left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij}X_i(t)\,Y_j(t)\,dt\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)\left(Y_j^U(t)+Y_j^L(t)\right)dt\right| \\
&\le \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)\,Y_j^U(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)\,Y_j^L(t)\,dt\right| \\
&\le \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)\,Y_j^U(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} \left(X_i^U(t)+X_i^L(t)\right)Y_j^L(t)\,dt\right| \\
&\le \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)\,Y_j^U(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^U(t)\,Y_j^L(t)\,dt\right| \\
&\quad + \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^L(t)\,Y_j^L(t)\,dt\right|.
\end{aligned}$$

On pose : $A' = \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^L(t)\,Y_j^L(t)\,dt\right|$, $B' = \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i(t)\,Y_j^U(t)\,dt\right|$ et $C = \left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} X_i^U(t)\,Y_j^L(t)\,dt\right|$. Donc

$$A' = M^2\left|\int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{X_i^L(t)}{M}\cdot\frac{Y_j^L(t)}{M}\,dt\right| = M^2 A.$$

$$\begin{aligned}
B' = \left|\sum_{i,j} a_{ij}\left\langle X_i, y_j\right\rangle_{L^2[0,1]}\right| &\le B\sup_i \|X_i\|_{L^2[0,1]}\sup_j \left\|Y_j^U\right\|_{L^2[0,1]} \\
&\le \frac{\sqrt{3}}{4M} B\,\|X_i\|\,\left\|Y_j\right\| \\
&\le \frac{\sqrt{3}}{4M} B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C = \left|\sum_{i,j} a_{ij}\left\langle X_i^U, y_j^L\right\rangle_{L^2[0,1]}\right| &\le B\sup_i \left\|X_i^U\right\|_{L^2[0,1]}\sup_j \left\|Y_j^L\right\|_{L^2[0,1]} \\
&\le \frac{\sqrt{3}}{4M} B.
\end{aligned}$$

Donc, on a : $B \le \frac{\sqrt{3}}{2M} B + M^2 A$. i.e $B \le \frac{2M^3}{2M-\sqrt{3}}$ pour $M > \frac{\sqrt{3}}{2}$. En prenant $M = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; on a : $B \le \frac{81}{16} A$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de noter que l'opérateur $a : \ell_\infty^n \longrightarrow \ell_1^n$ soit défini par la formule $a(e_j) = \left(a_{1j},\ldots,a_{nj}\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ pour $1 \le j \le n$. On a :

$$\|a\|_{\ell_\infty^n \longrightarrow \ell_1^n} = \sup_{\|x\|_{\ell_\infty^n}\le 1}\left|\left\langle x, a(y)\right\rangle\right| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j\right| : |s_i| \le 1, \left|t_j\right| \le 1\right\}.$$

Donc

$$\|a\|_{\ell_\infty^n \longrightarrow \ell_1^n} = \sup_{\epsilon\in\{-1,1\}^n}\left|\left\langle \epsilon, a(y)\right\rangle\right| = \sup_{\epsilon\in\{-1,1\}^n}\left|\left\langle a^*(\epsilon), y\right\rangle\right| = \sup\left\{\left|\left\langle a^*(\epsilon), \epsilon'\right\rangle\right| : \epsilon, \epsilon' \in \{-1,1\}^n\right\}$$

car $\{-1,1\}^n$ est un sous-ensemble normant de la boule unité de $\ell_\infty^n \simeq \left(\ell_1^n\right)^*$.
Finalement :

$$\|a\|_{\ell_\infty^n \longrightarrow \ell_1^n} = \sup\left\{\left|\left\langle \epsilon, a(\epsilon')\right\rangle\right| : \epsilon, \epsilon' \in \{-1,1\}^n\right\} = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}\epsilon_i\epsilon'_j\right| = \pm 1\right\}$$

□

Il est à noter que G.Pisier a montré que $K_G \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.[18]
Démonstration du théorème de Grothendieck.
On suppose que $\|u\| \leq 1$. Soit (x_n) une suite inconditionnellement sommable dans ℓ_1. Donc pour $\epsilon_n \in \{-1,1\}$, $\sum \epsilon_n x_n$ converge dans ℓ_1 et $\|\sum \epsilon_n x_n\| \leq \sup_{x^* \in B_{\ell_\infty}} \sum_n |\langle x^*, x|\rangle = \|v\|$. où v est un opérateur de $\ell_\infty = \ell_1^*$ dans ℓ_1, voir[8],page 9 théorème 1.9.
Montrons que $\sum_{i=1}^n \|ux_i\|_{\ell_2} < \infty$.
Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ fixés. On choisit $n \geq m$ et des vecteurs $y_1, \ldots, y_m \in \ell_1^n \subset \ell_1$ tels que $\left\|x_i - y_i\right\| \leq \frac{\delta}{2^i}\, \forall 1 \leq i \leq m$.
Si $n > m$, on pose $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$. On écrit $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ pour $1 \leq i \leq n$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de ℓ_1^n. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|uy_i\|_{\ell_2} &= \sum_{i=1}^n \left\|u\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right)\right\|_{\ell_2} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\|\sum_{j=1}^n a_{ij}u(e_j)\right\|_{\ell_2}.
\end{aligned}$$

Pour $i \leq n$, il existe $z_i \in B_{\ell_2^n}$ tel que $\left\|\sum_{j=1}^n a_{ij}u(e_j)\right\|_{\ell_2} = \left\langle z_i, \sum_{j=1}^n a_{ij}u(e_j)\right\rangle$. On obtient

$$\sum_{i=1}^n \|uy_i\|_{\ell_2} = \sum_{i=1}^n \left\langle z_i, \sum_{j=1}^n a_{ij}u(e_j)\right\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\left\langle z_i, u(e_j)\right\rangle.$$

D'autre part, on a, pour $\epsilon_i = \pm 1$,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i y_i\right\|_{\ell_1} &= \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right)\right\|_{\ell_1} \\
&= \left\|\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i a_{ij}\right)e_j\right\|_{\ell_1} \\
&= \sum_{j=1}^n\left|\sum_{i=1}^n \epsilon_i a_{ij}\right| \\
&= \max\left\{\left|\sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon'_j a_{ij}\right| : \epsilon'_j = \pm 1\right\}.
\end{aligned}$$

D'après la variante de l'inégalité de Grothendieck, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|u y_i\|_{\ell_2} &= \left|\sum_{i,j} a_{ij} \langle z_i, u(e_j)\rangle\right| \\
&\leq K_G \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \epsilon_j^{'} a_{ij}\right| : \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_j = \pm 1\right\} \\
&= K_G \max\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y_j\right\| : \epsilon_j = \pm 1\right\}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|u x_i\|_{\ell_2} &\leq \sum_{i=1}^{n} \|u y_i\|_{\ell_2} + \delta \\
&\leq K_G \max\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y_j\right\| : \epsilon_j = \pm 1\right\} + \delta.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y_j\right\|_{\ell_1} &\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|_{\ell_1} + \sum_{j=1}^{n} |\epsilon_j| \, \|x_j - y_j\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|_{\ell_1} + \delta.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|_{\ell_2} &\leq K_G \max\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|_{\ell_1} : \epsilon_j = \pm 1\right\} + (1 + K_G)\,\delta \\
&\leq K_G \|v\| + (1 + K_G)\,\delta \qquad \text{pour tout } \delta > 0.
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|_{\ell_2} \leq K_G \|v\| \leq +\infty$.

Corollaire 1.4.4. *Soient n et N deux entiers naturels, et $u : \ell_1^n \to \ell_2^N$ un opérateur. Alors, pour $x_1, \dots, x_m \in \ell_1^n$,*

$$\sum_{n=1}^{m} \|u x_i\|_{\ell_2^N} \leq K_G \|u\| \sup_{\epsilon_i = \pm 1} \left\|\sum_{n=1}^{m} \epsilon_i x_i\right\|_{\ell_1^n}.$$

Démonstration. Soit $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \in \ell_1^n$ et $z_i \in B_{\ell_2^N}$ tels que $\|u(x_i)\| = \langle z_i, u(x_i)\rangle$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\|ux_i\|_{\ell_2^N} &= \sum_{i=1}\left\|u\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j\right)\right\|_{\ell_2^N}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle z_i, u\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j\right)\right\rangle\\
&= \sum_{i,j}\|u\|\,a_{ij}\left\langle z_i, \frac{u(e_j)}{\|u\|}\right\rangle\\
&= \|u\|\sum_{i,j}a_{ij}\left\langle z_i, \frac{u(e_j)}{\|u\|}\right\rangle\\
&\le \|u\|\,K_G \sup\left\{\left|\sum_{i,j}a_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\right| : \epsilon_i,\epsilon_j=\pm1\right\} \text{ d'après l'inégalité de Grothendieck}\\
&\le K_G\,\|u\|\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\epsilon_j\right|\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\epsilon_i\right| : \epsilon_i=\pm1\right\}\\
&\le K_G\,\|u\|\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\epsilon_i\right|\\
&\le K_G\,\|u\|\sup_{\epsilon_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|_{\ell_1^N}. \quad\square
\end{aligned}$$

1.5 Application aux espaces $\mathscr{L}_p$

Définition 1.5.1. *On dit qu'un espace de Banach X est $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ avec $1 \le p \le \infty$ et $1 \le \lambda < +\infty$, si pour tout sous-espace vectoriel E de dimension finie de X, il existe un sous-espace vectoriel F de dimension finie de X contenant E et un isomorphisme $\phi : F \to \ell_p^{dim(F)}$ tel que $\|\phi\|\,\|\phi^{-1}\| \le \lambda$.*

Définition 1.5.2. *On dit que X est un espace $\mathscr{L}_p$ s'il est un espace $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ pour un $\lambda \ge 1$.*

Théorème 1.5.3. *Si X est un espace $\mathscr{L}_{1,\lambda}$ et Y un espace $\mathscr{L}_{2,\lambda'}$, alors tout opérateur $u : X \to Y$ est 1-sommant avec $\pi_1(u) \le K_G \cdot \lambda \cdot \lambda' \|u\|$.*

Démonstration. Soit $(x_1,\dots,x_m) \in X$. Si X est $\mathscr{L}_{1,\lambda}$, alors il existe un sous-espace vectoriel E de dimension finie qui contient $\{x_1,\dots,x_m\}$ et un isomorphisme $v : E \to \ell_1^n$, avec $\dim(E) = n$ et tel que $\|v\|\,\|v^{-1}\| < \lambda$. Si Y est $\mathscr{L}_{2,\lambda'}$, alors $u(E)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel F de dimension finie et tel qu' il existe un isomorphisme $w : F \to \ell_2^N$, avec $\dim(F) = N$ et tel que $\|w\|\,\|w^{-1}\| < \lambda'$. Soit $u_0 : E \to F$ la restriction de u à E et définissons l'opérateur $\rho : \ell_1^n \longrightarrow \ell_2^N$ par la formule $\rho = w \circ u_0 \circ v^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} \ell_1^n \arrow[r, "v^{-1}"] \arrow[d, "\rho"'] & E \arrow[d, "u_0"] \\ \ell_2^N & F \arrow[l, "w"] \end{tikzcd}$$

Puisque v, w sont des isomorphismes et puisque u_0 est borné, ρ l'est aussi. On écrit : $u_o = w^{-1} \circ \rho \circ v$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|_Y &= \sum_{i=1}^{m} \|u_0(x_i)\|_Y \\
&\leq \left\|w^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{m} \left\|\rho(v(x_i))\right\|_{\ell_2^N} \\
&\leq \left\|w^{-1}\right\| K_G \left\|\rho\right\| \sup_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i v(x_i) \right\|_{\ell_1^n} \\
&\leq \left\|w^{-1}\right\| K_G \|w\| \|u_0\| \left\|v^{-1}\right\| \|v\| \sup_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i x_i \right\|_X \\
&\leq \lambda \cdot \lambda' K_G \|u\| \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sup_{\epsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \left\langle x^*, x_i \right\rangle \right| \\
&\leq \lambda \cdot \lambda' K_G \|u\| \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{i=1}^{m} \left|\left\langle x^*, x_i \right\rangle\right| \\
&\leq \lambda \cdot \lambda' K_G \|u\| \left\|(x_i)_1^m\right\|_{\ell_1^{\text{faible}}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 1.5.4. *Soit (Ω, μ) un espace mesuré.*

1. *Les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ sont des espaces $\mathscr{L}_p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.*
2. *L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K est un espace $\mathscr{L}_\infty$.*

Démonstration. Voir [8],page 61. □

Théorème 1.5.5. *Soit K un compact et μ une mesure. Si $1 \leq p \leq 2$, alors l'opérateur $u : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ est 2-sommant avec $\pi_2(u) \leq K_G \cdot \|u\|$.*

Le théorème découle de la proposition et du lemme suivant :

Lemme 1.5.6. *Soit $1 \leq p \leq 2$ et n, N deux entiers naturels. Tout opérateur $u : \ell_\infty^n \to \ell_p^N$ satisfait $\pi_2(u) \leq K_G \|u\|$.*

Démonstration. On veut montrer que : $\forall\ x_1, \ldots, x_m \in \ell_\infty^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|u x_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_G \|u\| \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\left\langle x^*, x_k \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; x^* \in B_{\ell_1^n} \right\}. \tag{1.3}$$

Soient n_1 et n_2 deux entiers, avec $n_1 < n_2$.
On note $\Pi_{n_1,n_2} : (x_1,\ldots,x_{n_2}) \longrightarrow (x_1,\ldots,x_{n_1})$ la projection de $\mathbb{C}^{n_2}$ sur $\mathbb{C}^{n_1}$ et j_{n_1,n_2} : $(x_1,\ldots,x_{n_1}) \longrightarrow (x_1,\ldots,x_{n_1},0,\ldots,0)$ l'injection naturelle de $\mathbb{C}^{n_1}$ dans $\mathbb{C}^{n_2}$. On a :$\Pi_{n_1,n_2}\circ j_{n_1,n_2} = Id_{\mathbb{C}^{n_1}}$.
On peut supposer que $m \geq n$. En effet si $m < n$, il suffit de remplacer $(x_1,\ldots,x_m)$ par $j_{m,n}(x_1,\ldots,x_m)$.
Si $m > n$, on pose $\tilde{u} = u\circ\Pi_{m,n} : \ell_\infty^m \longrightarrow \ell_p^N$. On a :$u = \tilde{u}\circ j_{n,m}$ et il résulte du principe de l'idéal que $\pi_2(u) = \pi_2(\tilde{u})$. Donc on peut supposer que $m = n$.
Si $N < n$, posons $\tilde{u} = j_{N,n}\circ u :\longrightarrow \ell_p^n$. On a :$\Pi_{N,n}\circ\tilde{u} = u$ et il résulte du principe de l'idéal que $\pi_2(u) = \pi_2(\tilde{u})$.
Si $N > n$, posons $\tilde{u} = u\circ\Pi_{n,N} : \ell_\infty^N \longrightarrow \ell_p^N$. On a : $\tilde{u}\circ j_{n,N} = u$ et il résulte du principe de l'idéal que $\pi_2(u) = \pi_2(\tilde{u})$. Donc on peut supposer que $m = n = N$.(dans le cas où $n < N$, on se ramène au cas où $n = N$ et on peut de nouveau modifier m de façon à obtenir $m = n = N$). Puisqu'on veut établir la formule (1.3), on peut supposer $\left\|(x_k)_{k=1}^n\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}} = 1$ par linéarité.
Soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de ℓ_∞^n et $(u_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de u. On a : $u(e_j) = \sum_{i=1}^n u_{ij}e_i$.
Pour $1 < p < +\infty$, on définit q le conjugué de p par la formule $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Donc $\left(\ell_p^n\right)^* \cong \ell_q^n$. Soit $y = (y_i)_{i\leq n} \in B_{\ell_q^n}$ et $s = (s_i)_{i\leq n}$. Si $t = (t_j)_{j\leq n} \in B_{\ell_\infty^n}$ et $y_s = (y_1s_1,\ldots,y_ns_n) \in B_{\ell_q^n}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j} u_{ij}y_is_it_j\right| &= \left|\langle y_s, u(t)\rangle\right|_{\ell_q\times\ell_p}\\
&\leq \|u(t)\|_{\ell_p}\left\|y_s\right\|_{\ell_q^n}\\
&\leq \|u\|_{\ell_\infty^n\to\ell_p^n}\|t\|_{\ell_\infty^n}\left\|y_s\right\|_{\ell_q^n}\\
&\leq \|u\|_{\ell_\infty^n\to\ell_p^n}.
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Grothendieck sur la matrice $(u_{ij}y_i)$. Pour w_i, $z_j \in B_{\ell_2^n}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j} u_{ij}y_i\langle w_i, z_j\rangle\right| &\leq K_G\sup\left\{\left|\sum_{i,j} u_{ij}y_is_it_j\right|, \|s\|_{\ell_\infty^n}\leq 1, \|t\|_{\ell_\infty^n}\leq 1\right\} \quad (1.4)\\
&\leq K_G\|u\|. \quad (1.5)
\end{aligned}$$

On va choisir judicieusement les vecteurs de w_i et z_j. Soit $z_j = (x_{kj})_{k=1}^n$, où $x_k = \sum_{k=1}^n x_{kj}e_j$; z_j est formé des jème coordonnées des vecteurs x_k, $k = 1,\ldots,n$. Observons que $z_j \in B_{\ell_2^n}$ car

$$\left(\sum_{k=1}^n \left|x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n \left|\langle x_k, e_j\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|(x_k)_{k=1}^n\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}} = 1.$$

Soit $w_i \in B_{\ell_2^n}$ tel que $\langle\sum_{i=1}^n u_{ij}y_iz_j, w_i\rangle = \left\|\sum_{j=1}^n u_{ij}y_iz_j\right\|_{\ell_2}$. Par suite, on a d'après (1.4)

$$\sum_{i=1}^n\left\|\sum_{j=1}^n u_{ij}y_iz_j\right\|_{\ell_2} \leq K_G\|u\|,$$

c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}y_i x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_G\,\|u\|$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_G\,\|u\| \qquad \textit{pour tout } y \in B_{\ell_q^n}.$$

En prenant le sup sur $y \in B_{\ell_q^n}$, on obtient

$$\left\|\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{i=1,\ldots,n}\right\|_{\ell_p^n} \leq K_G\,\|u\|,$$

ou encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_G\,\|u\|.$$

Pour $x_1,\ldots,x_n \in \ell_\infty^n$, on a finalement

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|_{\ell_p^n}^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^p\right)_{k=1,\ldots,n}\right\|_{\ell_{\frac{2}{p}}^n}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\left(\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^p\right)_{k=1,\ldots,n}\right\|_{\ell_{\frac{2}{p}}^n}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K_G\,\|u\|. \quad \square
\end{aligned}$$

Théorème 1.5.7. *Soit* $1 \leq p \leq 2$. *Si* X *est un espace* $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$ *et* Y *est un espace* $\mathscr{L}_{p,\lambda'}$, *alors tout opérateur* $u : X \longrightarrow Y$ *est* 2*-sommant et* $\pi_2(u) \leq K_G \cdot \lambda \cdot \lambda'\,\|u\|$.

Démonstration. Soit $(x_1,\ldots,x_m) \subset X$. Si X est $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$, alors il existe un sous-espace vectoriel E de dimension finie qui contient $\{x_1,\ldots,x_m\}$ et un isomorphisme $v : E \rightarrow$

ℓ_∞^n, avec $\dim(E) = n$ et tel que $\|v\| \left\|v^{-1}\right\| < \lambda$. Si Y est $\mathscr{L}_{p,\lambda'}$, alors $u(E)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel F de dimension finie tel qu'il existe un isomorphisme $w : F \to \ell_p^N$, avec $\dim(F) = N$ et tel que $\|w\| \left\|w^{-1}\right\| < \lambda'$. Soit $u_0 : E \to F$ la restriction de u à E et définissons l'opérateur $\rho : \ell_\infty^n \longrightarrow \ell_p^N$ par la formule $\rho = w \circ u_0 \circ v^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\ell_\infty^n \arrow[r, "v^{-1}"] \arrow[d, "\rho"'] & E \arrow[d, "u_0"] \\
\ell_p^N & F \arrow[l, "w"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|_Y^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^m \|u_0(x_k)\|_Y^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\|w^{-1}\right\| \left(\sum_{k=1}^m \left\|\rho(v(x_k))\right\|_{\ell_p^N}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\|w^{-1}\right\| K_G \left\|\rho\right\| \left\|(v(x_k))_1^m\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}(\ell_\infty^n)} \\
&= \left\|w^{-1}\right\| K_G \left\|\rho\right\| \sup_{\|\phi^*\|_{\ell_1^n} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^m \left|\left\langle \phi^*, v(x_k)\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= K_G \left\|\rho\right\| \left\|w^{-1}\right\| \sup_{\|\phi^*\|_{\ell_1^n} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^m \left|\left\langle \phi^* \circ v, x_k\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_G \left\|\rho\right\| \left\|w^{-1}\right\| \sup_{\|\psi^*\|_{X^*} \leq \|v\|} \left(\sum_{k=1}^m \left|\left\langle \psi^*, x_k\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_G \left\|\rho\right\| \left\|w^{-1}\right\| \|v\| \sup_{\|\psi^*\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^m \left|\left\langle \psi^*, x_k\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\|w^{-1}\right\| \|w\| K_G \|v\| \left\|v^{-1}\right\| \|u\| \left\|(x_k)_1^m\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}} \\
&\leq \lambda\lambda' K_G \|u\| \left\|(x_k)_1^m\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Les Opérateurs de Hilbert-Schmidt

L'objectif de ce chapitre est de donner d'une part une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt et d'autre part une factorisation de ces opérateurs en utilisant l'inégalité de Grothendieck.

2.1 Les Opérateurs Compacts

On introduit maintenant la classe de Schatten von Neumann $S_p(H_1, H_2)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 2.1.1. *Un opérateur u appartient à $S_p(H_1, H_2)$ si et seulement si on a : $ux = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \langle x, e_n \rangle f_n$ où $\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^p < +\infty$, avec e_n un système orthonormal de H_1 et f_n un système orthonormal de H_2. L'espace $S_p(H_1, H_2)$ est muni de la norme*

$$\sigma_p(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $a_n(u) = \inf\{\| u - v \|,\ v \in \mathscr{L}(H_1, H_2)\ et\ dim(v) < n\}$

On rappelle qu'un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$ est compact si $u(B_X)$ est un sous-ensemble relativement compact de Y. On a le résultat classique suivant([8],th 4.6p81).

Théorème 2.1.2. (a) *Un opérateur $u : H_1 \to H_2$ est compact si et seulement si $\langle ue_n, f_n \rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour toute suite orthonormale (e_n) de H_1, et pour toute suite orthonormale (f_n) de H_2.*
(b) *Soit $1 \leq p < +\infty$. Un opérateur $u : H_1 \to H_2$ appartient à $S_p(H_1, H_2)$ si et seulement si $\sum_n |\langle ue_n, f_n \rangle|^p < +\infty$ pour toute suite orthonormale (e_n) de H_1, et pour toute suite orthonormale (f_n) de H_2.*

Démonstration. On peut supposer que $u \neq 0$.
(a) Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite orthonormale dans H_1. Si $\|u(e_n)\|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut trouver une fonction $\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $\epsilon > 0$ tels que $\left\|u\left(e_{\phi(n)}\right)\right\| > \epsilon \forall n$. Comme u est compact, on peut trouver $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $a \in H_2$ tels que $\left\|u\left(e_{(\psi\circ\phi)(n)}\right) - a\right\| \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $\|a\| > \epsilon$.
$\epsilon^2 \leq \langle a, a\rangle = \lim_{n\to+\infty}\left\langle e_{(\psi\circ\phi)(n)}, a\right\rangle$, ce qui contredit le fait que $e_n \to 0$ faiblement quand $n \to +\infty$. Donc $\|u(e_n)\| \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left\langle u(e_n), f_n\right\rangle = 0$ d'après Cauchy-Schwarz.
Réciproquement, on suppose que $\left\langle ue_n, f_n\right\rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour toute suite orthonormale (e_n) dans H_1 et pour toute suite orthonormale (f_n) dans H_2. Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < \|u\|$. On veut montrer qu'il existe un opérateur de rang fini $v : H_1 \to H_2$ tel que $\|u - v\| \leq \epsilon$. Il existe deux vecteurs unitaires $x \in H_1$ et $y \in H_2$ tels que $\left|\left\langle ux, y\right\rangle\right| > \epsilon$ car $\|u\| = \sup_{x\in B_H, y\in B_H}\left|\left\langle u(x), y\right\rangle\right|$.
Φ est la famille des sous-ensemble A de $H_1 \times H_2$ tels que :
(1) $\left|\left\langle u(x), y\right\rangle\right| \geq \epsilon \forall \left(x, y\right) \in A$.
(2) $\Pi_1(A)$ est une famille orthonormale de H_1 et $\Pi_2(A)$ est une famille orthonormale de H_2 où $\Pi_2 : \left(x, y\right) \to y$ sont les projections canoniques de $H_1 \times H_2$ sur H_1 et H_2.
Supposons que pour tout ensemble fini $A \in \Phi$, il existe $\left(x, y\right) \in H_1 \times H_2$ tel que $A \bigcup \left\{\left(x, y\right)\right\} \in \Phi$. On pourrait construire par récurrence une suite $\left(x_n, y_n\right)_{n\geq 1}$ d'éléments de $H_1 \times H_2$ tels que $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont des familles orthonormales de H_1 et H_2 vérifiant $\left|\left\langle u(x_n), y_n\right\rangle\right| > \epsilon$, ce qui est absurde. Donc il existe un ensemble fini $A \in \Phi$ qui est maximal dans Φ pour l'inclusion. On a :$A = \left\{\left(e_i, f_i\right)\right\}_{1\leq i\leq N}$. On définit des projections orthogonales $p = \sum_{i=1}^{N}\langle\bullet, e_i\rangle e_i \in \mathscr{L}(H_1)$ et $q = \sum_{i=1}^{N}\left\langle\bullet, f_i\right\rangle f_i \in \mathscr{L}(H_2)$. Alors $v = up + qu - qup$ est un opérateur de rang fini tel que $\|u - v\| \leq \epsilon$.
En effet, supposons que $\|u - v\| > \epsilon$. Donc il existe des vecteurs unitaires $x \in H_1$ et $y \in H_2$ tel que $\left|\left\langle(u - v)x, y\right\rangle\right| > \epsilon$. On pose $e_0 = x - px$ et $f_0 = y - qy$, donc $\langle e_0, e_i\rangle = 0 = \left\langle f_0, f_i\right\rangle$ pour $1 \leq i \leq N$. D'autre part, on a : $\|e_0\| \leq 1$ car p est une projection orthogonale de H_1. Donc $Id_{H_1} - p$ est aussi une projection orthogonale de H_1. Ce qui donne :$\left\|Id_{H_1} - p\right\| \leq 1$.
De même $\left\|f_0\right\| \leq 1$ car q est une projection orthogonale de H_2 et donc $Id_{H_2} - q$ l'est aussi et $\left\|Id_{H_2} - q\right\| \leq 1$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle ue_0, f_0\right\rangle\right| &= \left|\left\langle u\left(Id_{H_1} - p\right)x, \left(Id_{H_2} - q\right)y\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle\left(Id_{H_2} - q\right)u\left(Id_{H_2} - p\right)x, y\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle(u - v)x, y\right\rangle\right| \\
&> \epsilon \\
&\geq \epsilon\|e_0\|\left\|f_0\right\|.
\end{aligned}$$

Donc e_0 et f_0 sont des vecteurs non nuls et $\left(\left\langle \frac{ue_0}{\|e_0\|}, \frac{f_0}{\|f_0\|}\right\rangle\right) > \epsilon$ ce qui contredit le fait que la famille Δ est maximale.
(b) On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Soit $u : H_1 \to H_2$ un opérateur tel que pour toute suite orthonormale (e_n) dans H_1 et pour toute suite orthonormale $\left(f_n\right)$ dans H_2, on a : $\sum_n\left|\left\langle ue_n, f_n\right\rangle\right|^p < +\infty$. D'après (a), u est donc compact et il admet une re-

présentation orthonormale $u = \sum_n \tau_n \langle \bullet, x_n \rangle y_n$. On a $(\tau_n)_{n\geq 1} = (\langle u(x_n), y_n \rangle)_{n\geq 1} \in \ell_p$ et par conséquent $u \in S_p(H_1, H_2)$. Réciproquement, si $u \in S_p(H_1, H_2)$, soit $u = \sum_m \tau_m \langle \bullet, x_m \rangle y_m$ une représentation orthonormale avec $\tau_m \geq 0\ \forall\ m$; alors si (e_n) est une suite orthonormale de H_1, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_m \tau_m |\langle e_n, x_m \rangle|^2 &= \sum_m \tau_m |\langle e_n, x_m \rangle|^{\frac{2}{p}} |\langle e_n, x_m \rangle|^{\frac{2}{q}} \\
&\leq \left(\sum_m \tau_m^p |\langle e_n, x_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_m |\langle e_n, x_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_m \tau_m^p |\langle e_n, x_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{p}} \text{ d'après l'inégalité de Bessel.}
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on montre que si (f_n) est une suite orthonormale de H_2, on a $\sum_m \tau_m \left|\langle y_m, f_n \rangle\right|^2 \leq \left(\sum_m \tau_m^p \left|\langle y_m, f_n \rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{p}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\langle ue_n, f_n \rangle\right| &\leq \sum_m \tau_m^{\frac{1}{2}} |\langle e_n, x_m \rangle| \tau_m^{\frac{1}{2}} \left|\langle y_m, f_n \rangle\right| \\
&\leq \left(\sum_m \tau_m |\langle e_n, x_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_m \tau_m \left|\langle y_n, f_n \rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_n \left|\langle ue_n, f_n \rangle\right|^p &\leq \sum_n \left(\sum_m \tau_m^p |\langle e_n, x_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_m \tau_m^p \left|\langle y_m, f_n \rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{m,n} \tau_m^p |\langle e_n, x_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m,n} \tau_m^p \left|\langle y_m, f_n \rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_m \tau_m^p. \quad \square
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.3. *Soit $u \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ et g_i une base orthonormale de H_1.*
(a). Si $1 \leq p \leq 2$ et $\sum_{i\in I} \left\|ug_i\right\|^p < +\infty$, alors $u \in S_p(H_1, H_2)$ et

$$\sigma_p(u) \leq \left(\sum_{i\in I} \left\|ug_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b). Si $2 \leq p < +\infty$ et $u \in S_p(H_1, H_2)$, alors $\sum_{i\in I} \left\|ug_i\right\|^p < +\infty$ et

$$\left(\sum_{i\in I} \left\|ug_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_p(u).$$

Démonstration. Montrons (a).
On va montrer d'abord que u est compact. i.e $\forall\ \epsilon > 0$, il existe $v \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ de rang fini tel que $\|u - v\| \leq \epsilon$.

Soit J un ensemble fini, $J \subset I$ tel que $\left(\Sigma_{i\in I\setminus J} \left\| ug_i \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \epsilon$.
L'opérateur $v = \sum_{i\in J} \left\langle \bullet, g_i \right\rangle ug_i$ est de rang fini et il satisfait $\|u - v\| \le \epsilon$.
En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\|(u-v)\,x\| &= \left\| \sum_{i\in I\setminus J} \left\langle x, g_i \right\rangle ug_i \right\| \\
&\le \left(\sum_{i\in I\setminus J} \left|\left\langle x, g_i \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in I\setminus J} \left\| ug_i \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|x\| \left(\sum_{i\in I\setminus J} \left\| ug_i \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\le \epsilon \|x\|.
\end{aligned}$$

Donc $\|(u-v)\,x\| \le \|x\|\,\epsilon$. L'opérateur u est donc compact et il admet une représentation orthonormale de la forme $u = \sum \tau_n \langle ., e_n \rangle f_n$, la série étant convergente dans $\mathscr{L}(H_1, H_2)$ muni de sa norme usuelle, voir [8],page 80.
Pour $x \in H_1$, on a : $ux = \sum_n \tau_n \langle x, e_n \rangle f_n$ et $\|ux\|^2 = \sum_n \tau_n^2 |\langle x, e_n \rangle|^2$. Donc $\sum_n \tau_n^p = \sum_n \tau_n^p \sum_{i\in I} \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2$ car $\sum_{i\in I} \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2 = \|e_n\|^2 = 1$ d'après l'identité de Parseval.

$$\begin{aligned}
\sum_n \tau_n^p &= \sum_n \tau_n^p \sum_{i\in I} \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{i\in I} \left(\sum_n \tau_n^p \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^p \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^{2-p} \right).
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Hölder sur les indices $\alpha = \frac{2}{p}$ et $\beta = \frac{2}{2-p}$.

$$\sum_n \tau_n^p \le \sum_{i\in I} \left(\sum_n \tau_n^2 \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_n \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \le \sum_{i\in I} \left(\sum_n \tau_n^2 \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

car $\sum_n \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^2 \le \left\| g_i \right\|^2 = 1$ d'après l'identité de Bessel. Par suite, on a :

$$\sum_n \tau_n^p \le \sum_{i\in I} \left\| ug_i \right\|^p. \text{ D'où } \left(\sum_n \tau_n^p \right)^{\frac{p}{2}} \le \left(\sum_{i\in I} \left\| ug_i \right\|^p \right)^{\frac{p}{2}}.$$

i.e

$$\sigma_p(u) \le \left(\sum_{i\in I} \left\| ug_i \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \; donc\ u \in S_p(H_1, H_2).$$

Montrons (b).
Soit $u \in S_p(H_1, H_2)$ et $2 \le p < +\infty$; donc $u = \sum_n \tau_n \langle \bullet, e_n \rangle f_n$ avec (e_n) une suite orthonormale de H_1 et $\left(f_n\right)$ une suite orthonormale de H_2. On a

$$\left\| ug_i \right\|^2 = \sum_n \tau_n^2 \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^{\frac{4}{p}} \left|\left\langle g_i, e_n \right\rangle\right|^{\frac{2(p-2)}{p}}.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder sur les indices $\alpha = \frac{p}{2}$ et $\beta = \frac{p}{p-2}$.

$$\|ug_i\|^2 \leq \left(\sum_n \tau_n^p \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{2}{p}} \left(\sum_n \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{p-2}{p}} \leq \left(\sum_n \tau_n^p \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{2}{p}}$$

car $\sum_n \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2 \leq \|g_i\|^2 = 1$ d'après l'inégalité de Bessel. Donc, on a :

$$\|ug_i\|^p \leq \sum_n \tau_n^p \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2.$$

D'où :

$$\sum_{i\in I} \|ug_i\|^p \leq \sum_n \tau_n^p \sum_{i\in I} \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2 = \sum_n \tau_n^p$$

car $\sum_{i\in I} \left|\left\langle g_i, e_n\right\rangle\right|^2 = \|e_n\|^2 = 1$ d'après l'identité de Parseval. Par suite, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} \|ug_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_n \tau_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sigma_p(u)$$

g_i étant une base orthonormale de H_1. □

2.2 Caractérisation des Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Définition 2.2.1. *Un opérateur u appartient à $S_2(H_1, H_2)$ si et seulement si pour tout $x \in H_1$, on a : $ux = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \langle x, e_n\rangle f_n$ où $\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^2 < +\infty$, avec e_n un système orthonormal de H_1 et f_n un système orthonormal de H_2. Les opérateurs appartenant à $S_2(H_1, H_2)$ sont appelés opérateurs de Hilbert-Schmidt. La norme de ces opérateurs sera notée par $\sigma_2(u)$ et est donnée par la formule*

$$\sigma_2(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit immédiatement du théorème 2.1.3 le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2. *Soit (g_i) une base orthonormale de H_1 et soit $u \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Alors $u \in S_2(H_1, H_2)$ si et seulement si : $\sum_{i=1}^{n} \|ug_i\|^2 < +\infty$ et dans ce cas, on a $\sigma_2(u) = \left(\sum_{i\in I} \|ug_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.*

Théorème 2.2.3. *Un opérateur $u : H_1 \to H_2$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement si u est 2-sommant et dans ce cas $\sigma_2(u) = \pi_2(u)$.*

Démonstration. On suppose que u est 2-sommant. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de H_1. Alors pour J fini, $J \subset I$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i\in J} \|ue_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \pi_2(u) \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{i\in J} \left|\left\langle x^*, e_i\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_2(u) \left\|(e_i)_{i\in J}\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}} \\
&= \pi_2(u).
\end{aligned}$$

Donc u est de Hilbert-Schmidt et $\sigma_2(u) \leq \pi_2(u)$.
Réciproquement, on suppose que u est de Hilbert-Schmidt. Soit $(x_n) \in \ell_2^{\text{faible}}(H_1)$. On définit un opérateur $v : \ell_2 \to H_1$ tel que $v\left(\sum_n \alpha_n e_n\right) = \sum_n \alpha_n x_n$ pour $(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$ c'est à dire que $ve_n = x_n$ pour $n \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sup_{\|(\alpha_n)\|_{\ell_2}\leq 1} \sup_{\|x^*\|_{H_1}\leq 1} \left|\left\langle x^*, \sum_n \alpha_n x_n \right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|x^*\|_{H_1}\leq 1} \sup_{\|(\alpha_n)\|_{\ell_2}\leq 1} \left|\left\langle x^*, \sum_n \alpha_n x_n \right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|x^*\|_{H_1}\leq 1} \sup_{\|(\alpha_n)\|_{\ell_2}\leq 1} \left|\sum_n \alpha_n \left\langle x^*, x_n \right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|x^*\|_{H_1}\leq 1} \left(\sum_n \left|\left\langle x^*, x_n \right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(x_n)_{n\geq 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n \|ux_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_n \|u\circ v(e_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_n \|(u\circ v)e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sigma_2(uv) \leq \sigma_2(u)\|v\| \qquad \text{d'après la propriété d'idéal} \\
&= \sigma_2(u)\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}}.
\end{aligned}$$

Donc u est 2-sommant. □

Remarque 2.2.4. *Soit $\mathcal{M}(K) \simeq (C(K))^*$ l'ensemble des mesures de Radon sur K et soient $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{M}(K)$.*
On note $|\mu_i|$ la variation totale associée à μ_i.
Alors $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont absolument continues par rapport à la mesure $\mu = |\mu_1| + \cdots + |\mu_n|$, donc il existe $f_i \in L_1(K, \mu)$ telles que $d\mu_i = f_i d\mu$ pour $i \leq n$. Donc pour toute famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires, on a :

$$\left\|\alpha_1\mu_1 + \cdots + \alpha_n\mu_n\right\|_{\mathcal{M}(K)} = \left\|\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n\right\|_{L_1(K,\mu)}.$$

Comme $L_1(K, \mu)$ est un espace $\mathcal{L}_1$ isométriquement contenu dans $\mathcal{M}(K)$ ceci montre que $\mathcal{M}(K)$ est un espace $\mathcal{L}_1$.

Théorème 2.2.5. *On considère un opérateur $u : H_1 \longrightarrow H_2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) u est de Hilbert-Schmidt.
(ii) u est factorisable à travers un espace $\mathcal{L}_\infty$.
(iii) u est factorisable à travers un espace $\mathcal{L}_1$.

Démonstration. $(i) \Leftrightarrow (ii)$
Si u est de Hilbert-Schmidt, alors u est 2-sommant. Donc u est factorisable à travers

un espace $C(K)$, (K compact) d'après le théorème de factorisation de Pietsch et à travers $\mathscr{L}_\infty$ d'après la proposition 1.5.4. D'autre part, si u est factorisable à travers un espace $\mathscr{L}_\infty$, alors u est 2-sommant d'après le théorème de Grothendieck (th1.5.7) et le principe d'idéal. Par conséquent u est de Hilbert-Schmidt.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$
C'est le dual de la première équivalence. On sait que le dual de l'espace $C(K)$ est un espace $\mathscr{L}_1$. Si $u: H_1 \to H_2$ est de Hilbert-Schmidt, alors u^* admet une factorisation de la forme : $u^*: H_2 \to C(K) \to H_1$ et $u^{**} = u$ admet une factorisation $u^{**}: H_1 \to \mathscr{L}_1 \to H_2$. Réciproquement, si $u: H_1 \to H_2$ est factorisable à travers l'espace $\mathscr{L}_1$, alors le théorème de Grothendieck nous permet de dire que u est 2-sommant, donc Hilbert-Schmidt. □

Nous utiliserons le résultat suivant,[8],th 19.20, page 413.

Théorème 2.2.6. *Soit Z un espace de Banach de dimension infinie et soit $u: H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur compact. Il existe un sous- espace de Banach Z_0 de Z possédant une base Z_0 et deux opérateurs compacts $v: Z_0 \longrightarrow H_2$ et $w: H_1 \longrightarrow Z_0$ tels que $u = v \circ w$.*

Théorème 2.2.7. *Un opérateur $u: H_1 \longrightarrow H_2$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement si pour tout espace de Banach de dimension infinie Z, il existe des opérateurs $v \in \mathscr{L}(Z, H_2)$ et $w \in \mathscr{L}(H_1, Z)$ tels que $u = v \circ w$.*
Par ailleurs, nous pouvons choisir w compact et v compact et 2-sommant.

Démonstration. Si l'opérateur $u: H_1 \longrightarrow H_2$ est de Hilbert-Schmidt, alors on a :$u = \sum_n \tau_n g_n \otimes h_n$ avec (g_n) une base orthonormale de H_1, (h_n) une base orthonormale de H_2 et $\sum_n |\tau_n|^2 < +\infty$.
On va construire des suites (α_n) et (β_n) appartenant à c_0 et $(\sigma_n) \in \ell_2$ telles que $\alpha_n \sigma_n \beta_n = \tau_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.[1]
En effet, on peut trouver une suite strictement croissante $(N_p)_{p\geq 1}$ d'entiers avec $N_0 = 1$ telle que $\sum_{n \geq N_p} |\tau_n|^2 < 2^{-3p}$ pour $p \geq 1$. On pose $\alpha_n = \beta_n = 2^{-p}$, $\sigma_n = \frac{\tau_n}{\alpha_n \beta_n}$ pour $N_p \leq n \leq N_{p+1}, p \geq 0$. On a $\alpha_n \sigma_n \beta_n = \tau_n$ par construction. On a $(\alpha_n) \in c_o$, $(\beta_n) \in c_0$ et $\sum_{N_p \leq n \leq N_{p+1}} |\sigma_n|^2 < 2^{-p}$ pour $p \geq 1$. Donc $(\sigma_n) \in \ell_2$. On a $u = a \circ D_\sigma \circ b$ où $a = \sum_n \alpha_n e_n \otimes h_n : \ell_2 \longrightarrow H_2$ et $b = \sum_n \beta_n g_n \otimes e_n : H_1 \longrightarrow \ell_2$. Les opérateurs a et b sont des opérateurs compacts entre espaces de Hilbert et $D_\sigma : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. D'après le théorème précédent, b se factorise à travers un sous-espace de Banach Z_0 de Z c'est à dire : $b = b_1 \circ b_2$

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "b_2"'] & \ell_2 . \\ Z_0 \arrow[ur, "b_1"'] & \end{tikzcd}$$

Soient $D: \ell_\infty \longrightarrow \ell_2$ l'opérateur diagonal associé à σ et $i: \ell_2 \longrightarrow \ell_\infty$ l'opérateur identité. Donc $D_\sigma = D \circ i$. Puisque ℓ_∞ est injectif, alors $i \circ b_1$ admet une extension

1. L'existence des suites (σ_n), (α_n) *et* (β_n) se déduit du théorème de factorisation de Cohen [10],théorème 2.9.24 appliqué à ℓ_2 considéré comme c_0-modules puisque l'algèbre c_0 possède une unité approchée bornée.

$\tilde{b_1} : Z \longrightarrow \ell_\infty$. Donc l'opérateur $v = a \circ D \circ \tilde{b_1}$ est compact et 2-sommant. Puisque $b_2 \in \mathscr{L}(H_1, Z_0)$ et $Z_0 \subset Z$, alors on l'opérateur $w = j \circ b$ est un opérateur compact de H_1 dans Z où $j : Z_0 \longrightarrow Z$ désigne l'injection canonique. Donc on a : $u = v \circ w$.
Réciproquement supposons que u se factorise à travers l'espace ℓ^1. Il résulte du théorème 2.2.5 que u est de Hilbert-Schmidt. $\square$

Chapitre 3

Les opérateurs γ-sommants

3.1 Suites Gaussiennes

Dans tout ce chapitre E désigne un espace de Banach réel ou complexe, et les variables aléatoires considérées sont à valeurs dans E.

Proposition 3.1.1. *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si Y est symétrique, alors on a, pour $p \in [1, +\infty[$,*

$$\mathbb{E}\|X\|^p \leq \mathbb{E}\|X+Y\|^p.$$

Démonstration. Le fait que Y est symétrique signifie que Y et $-Y$ sont distribués identiquement. On obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\|X\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\|(X+Y)+(X-Y)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\|X+Y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\|X-Y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\mathbb{E}\|X+Y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.2. *(Principe de contraction de Kahane)*
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite des variables aléatoires symŕiques et indṕendantes à valeurs dans E.

1) Si E est réel, on a pour $(\alpha_k)_{k=1,\ldots,N} \in \mathbb{R}^N$ tels que $|\alpha_k| \leq 1$ et pour $1 \leq p < +\infty$:

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N} \alpha_k X_k\right\|^p \leq \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N} X_k\right\|^p.$$

2) Si E est complexe, on a pour $(\alpha_k)_{k=1,\ldots,N} \in \mathbb{C}^N$ tels que $|\alpha_k| \leq 1$ et pour $1 \leq p < +\infty$:

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N} \alpha_k X_k\right\|^p \leq 2^p \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N} X_k\right\|^p.$$

Démonstration. Si $\alpha_k = \pm 1$, c'est évident, puisque X_k et X_{-k} sont distribués identiquement. Si $\alpha_k \in \{0,1\}$, alors on peut écrire $\alpha_k = \frac{1}{2}(2\alpha_k - 1 + 1)$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k X_k\right\|^p\right)^{1/p} &= \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}(2\alpha_k - 1 + 1)X_k\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N}(2\alpha_k - 1)X_k\right\|^p\right)^{1/p} + \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\|X_k\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{N}X_k\right\|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_k \in [0,1]$ alors $\alpha_k = \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}2^{-j}$; avec $b_{jk} \in \{0,1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left\|\sum_k\sum_j b_{jk}X_k 2^{-j}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_j 2^{-j}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_k b_{jk}X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_k \in [-1,1]$ alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\sum_k \alpha_k X_k\right\|^p &= \mathbb{E}\left\|\sum_k sign(\alpha_k)|\alpha_k| X_k\right\|^p\\
&\leq \mathbb{E}\left\|\sum_k |\alpha_k| X\right\|^p\\
&\leq \mathbb{E}\left\|\sum_k X_k\right\|^p.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $|\alpha_k| \leq 1$ alors $\alpha_k = \lambda_k + i\mu_k$; donc

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left\|\sum_k \lambda_k X_k + i\sum_k \mu_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_k \lambda_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbb{E}\left\|\sum_k \mu_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbb{E}\left\|\sum_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2\left(\mathbb{E}\left\|\sum_k X_k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Propriété 3.1.3. *(Inégalités de Kahane-Kintchine)*
Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de Rademacher, soit $\left(\gamma_n\right)_{n\geq 1}$ une suite gaussienne, et soient $p, q \in [1, +\infty[$. Il existe deux constantes $C^r_{p,q}$ et $C^\gamma_{p,q}$ ne dépendant que de p et q telles que pour toute famille finie $x_1, \ldots, x_N$ d'éléments de E, on ait

(1)
$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,q}^{r}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(2)
$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,q}^{\gamma}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On va maintenant introduire les notions classiques de *type* et de *cotype* pour les espaces de Banach.

Définition 3.1.4. *Soit E un espace de Banach et soit* $(r_n)_{n\geq 1}$ *une suite de Rademacher.*

(1) *Soit* $p \in [1,2]$. *On dit que E est de type p s'il existe une constante* $C_p \geq 0$ *telle que pour toute famille finie* $x_1, \dots, x_N$ *d'éléments de E, on ait*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2) *Soit* $q \in [1,+\infty[$. *On dit que E est de cotype q s'il existe une constante* $D_q \geq 0$ *telle que pour toute famille finie* $x_1, \dots, x_N$ *d'éléments de E, on ait,*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq D_q\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$(2bis)$ *On dit que E est de cotype* ∞ *s'il existe une constante* $D_\infty \geq 0$ *telle que pour toute famille finie* $x_1, \dots, x_N$ *d'éléments de E, on ait,*

$$max_{1\leq n\leq N} \|x_n\| \leq D_\infty\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 3.1.5. (a) *Tout espace de Banach est de type* 1 *et de cotype* ∞.

(b) *Tout espace de Hilbert est de type* 2 *et de cotype* 2.

(c) *Soit* $p \in [1,2]$. *Si E est de type p, alors son dual* E^* *est de type q avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Démonstration. Montrons (a)
$*$ Montrons que E est de type 1, c'est à dire que $\|\sum_n r_n x_n\|_{L^2(\Omega,X)} \leq C\sum_n \|x_n\|$.
On a, d'après l'inégalité de Kahane-Kintchine,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_n r_n x_n\right\|_{L^2(\Omega,X)} &\leq C_{2,1}\mathbb{E}\left\|\sum_n r_n x_n\right\| \\ &\leq C_{2,1}\mathbb{E}\sum_n |r_n|\,\|x_n\| \\ &= C_{2,1}\sum_n \|x_n\|.\end{aligned}$$

$*$ Montrons maintenant que E est de cotype ∞, c'est à dire que $\sup_k \|x_k\| \leq \left(\mathbb{E}\|\sum_n r_n x_n\|\right)^{\frac{1}{2}}$.
Pour k fix, $\|x_k\| = \mathbb{E}\left\|\sum_{j=k}^{k} r_j x_j\right\| \leq \mathbb{E}\|\sum_n r_n x_n\|$. En effet
$\mathbb{E}\left\|\sum_{j=k}^{k} r_j x_j\right\| = \mathbb{E}\|r_k x_k\| = \mathbb{E}\|x_k\| = \|x_k\|$, et $\mathbb{E}\|r_k x_k\| \leq \mathbb{E}\|\sum_n r_n x_n\|$ d'après la proposition 3.1.1.
On conclut avec la première inégalité de Kahane-Kintchine.

Montrons (b). Pour $x_1, \ldots, x_N \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\sum_n r_n x_n\right\|_H^2 &= \mathbb{E}\left\langle \sum_n r_n x_n, \sum_j r_j x_j \right\rangle \\
&= \mathbb{E}\sum_{n,j} r_n \overline{r}_j \langle x_n, x_j \rangle \\
&= \sum_{n,j} \mathbb{E}\left(r_n r_j\right)\langle x_n, x_j \rangle \\
&= \sum_n \langle x_n, x_n \rangle \\
&= \sum_n \|x_n\|^2 .
\end{aligned}$$

On peut montrer réciproquement que tout espace de Banach qui est à la fois de type 2 et de cotype 2 est isomorphe à un espace de Hilbert.[8]corollaire 12.20.
Montrons (c) c'est à dire que si $\left(\mathbb{E}\|\sum_n r_n x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p \left(\sum_n \|x_n\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}}$ pour $x_1, \ldots, x_N \in E$, alors $\left(\sum_n \|x_n^*\|_{E^*}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_p \left(\mathbb{E}\|\sum_n r_n x_n^*\|_{E^*}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pour $x_1^*, \ldots, x_N^* \in E^*$.

On a, pour $\left(\sum_n \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle x_n^*, x_n \rangle &= \mathbb{E}\left\langle \sum_n r_n x_n^*, \sum_j r_j x_j \right\rangle \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_n r_n x_n^*\right\| . \left\|\sum_j r_j x_j\right\|\right) \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_n r_n x_n^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_j r_j x_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \textit{ d'après Cauchy-Schwarz} \\
&\leq C_p \left(\sum_j \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_n r_n x_n^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \; car\ E\ est\ de\ type\ p. \\
&\leq C_p \left(\mathbb{E}\left\|\sum_n r_n x_n^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Soit $B := \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \left(\sum_n |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\}$ la boule unité de ℓ_N^p. On a

$$\left(\sum_n \|x_n^*\|_{E^*}^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\lambda \in B} \sum_n \lambda_n \|x_n^*\|_{E^*} = \sup_{\lambda \in B, \|x_1\|_E \leq 1, \ldots, \|x_N\|_E \leq 1} \sum_n \lambda_n < x_n^*, x_n >$$

$$= \sup_{\left(\sum_n \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1} \sum_n < x_n^*, x_n >,$$

et finalement

$$\left(\sum_n \|x_n^*\|_{E^*}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_p \left(\mathbb{E}\left\|\sum_n r_n x_n^*\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

3.2 Opérateurs γ-sommants

Définition 3.2.1. *Un opérateur $S : H \to E$ est γ-sommant si pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a :*

$$\|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)} = \sup_h \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

le supremum étant calculé sur l'ensemble des systèmes orthonormaux finis $h = \{h_1, h_2, \ldots, h_N\}$.
L'ensemble des opérateurs γ-sommants $S : H \to E$ est noté $\gamma^\infty(H, E)$.

Posons $\gamma_p^\infty(H, E) := \{S \in \mathscr{L}(H, E) \mid \|S\|_{\gamma_p^\infty}(H, E) < +\infty\}$. Il résulte de la deuxième inégalité de Kahane-Kintchine que cette définition est indépendante de $p \in [1, +\infty[$. Par conséquent $\gamma^\infty(H, E) = \gamma_p^\infty(H, E)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, et la norme $\|.\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}$ est équivalente à la norme $\|.\|_{\gamma^\infty(H,E)} := \|.\|_{\gamma_2^\infty(H,E)}$ sur $\gamma^\infty(H, E)$.

Pour montrer que $S \circ T \in \gamma^\infty(H', E)$ pour $S \in \gamma^\infty(H, E)$, $T \in \mathscr{L}(H', H)$, on va utiliser le théorème suivant, (Voir [47], théorème 3.9).

Théorème 3.2.2. *(Domination de covariance)*
Soient $\left(\gamma_m\right)_{m\leq 1}$ et $\left(\gamma'_n\right)_{n\leq 1}$ des suites gaussiennes dans des espaces probalisés respectifs Ω et Ω'. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_M$ et $y_1, y_2, \ldots, y_N$ des éléments de E vérifiant, pour tout $x^* \in E^*$,

$$\sum_{m=1}^M \left\langle x_m, x^*\right\rangle^2 \leq \sum_{n=1}^N \left\langle y_n, x^*\right\rangle^2.$$

Alors on a, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{m=1}^M \gamma_m x_m\right\|^p \leq \mathbb{E}'\left\|\sum_{n=1}^N \gamma'_n y_n\right\|^p.$$

Démonstration. On note $F = vect\left\{x_1, x_2, \ldots, x_M, y_1, y_2, \ldots, y_N\right\} \subset E$ et on définit $Q \in \mathscr{L}(F^*, F)$ par :

$$Qz^* = \sum_{n=1}^N \left\langle y_n, z^*\right\rangle y_n - \sum_{m=1}^M \left\langle x_m, z^*\right\rangle x_m,\ z^* \in F^*.$$

Les conditions du théorème imposent que $\langle Qz^*, z^*\rangle \geq 0 \ \forall\ z^* \in F^*$. Il est clair que $\left\langle Qz_1^*, z_2^*\right\rangle = \left\langle Qz_2^*, z_1^*\right\rangle \ \forall\ z_1^*, z_2^* \in F^*$. Comme F est de dimension finie, alors on peut trouver une suite $\left(x_j\right)_{M+1\leq j\leq M+k}$ d'éléments de F telle que $Qz^* = \sum\limits_{j=M+1}^{M+k} \left\langle x_j, z^*\right\rangle x_j$ $\forall z^* \in F^*$. On obtient

$$\sum_{m=1}^{M} \left\langle x_m, z^*\right\rangle^2 + \sum_{m=M+1}^{M+k} \left\langle x_m, z^*\right\rangle^2 = \sum_{n=1}^{N} \left\langle y_n, z^*\right\rangle^2$$

On considère maintenant les transformées de Fourier des variables aléatoires $X = \sum\limits_{m=1}^{M+k} \gamma_m x_m$ et $Y = \sum\limits_{n=1}^{N} \gamma'_n y_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp\left(-i\left\langle X, x^*\right\rangle\right) &= \Pi_{m=1}^{M+k}\mathbb{E}\exp\left(-i\gamma_m\left\langle x_m, x^*\right\rangle\right) \textit{ car les variables sont indépendantes.}\\
&= \Pi_{m=1}^{M+k}\exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle x_m, x^*\right\rangle^2\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M+k}\left\langle x_m, x^*\right\rangle^2\right).
\end{aligned}$$

De la même manière, on a : $\mathbb{E}'\exp\left(-i\langle Y, x^*\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\langle y_n, x^*\right\rangle^2\right)$. D'après l'injectivité de la transformée de Fourier, ceci qui prouve que X et Y sont identiquement distribués. Donc $\mathbb{E}\left\|\sum_{m=1}^{M+k}\gamma_m x_m\right\|^p = \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma'_n y_n\right\|^p$. Comme $\sum\limits_{m=M+1}^{M+k}\gamma_m x_m$ est symétrique, il résulte de la proposition 3.1.1 que l'on a

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{m=1}^{M}\gamma_m x_m\right\|^p \leq \mathbb{E}\left\|\sum_{m=1}^{M+k}\gamma_m x_m\right\|^p = \mathbb{E}'\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma'_n y_n\right\|^p.$$

□

Proposition 3.2.3. *Soient E, E' deux espaces de Banach, soient H, H' deux espaces de Hilbert, et soit $S \in \gamma^\infty(H, E)$.*

Alors $R\circ S\circ T \in \gamma^\infty\left(H', E'\right) \forall R \in \mathscr{L}\left(E, E'\right), \forall T \in \mathscr{L}\left(H', H\right)$ et on a, pour $1 \leq p < +\infty$

$$\|R\circ S\circ T\|_{\gamma_p^\infty(H',E')} \leq \|R\|\,\|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}\,\|T\|.$$

Démonstration. On va d'abord montrer que $S\circ T \in \gamma^\infty\left(H', E\right)$ et que $\|S\circ T\|_{\gamma_p^\infty(H',E)} \leq \|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}\,\|T\|$.

Soit $\left\{h'_1, h'_2, \ldots, h'_k\right\}$ un système orthonormal fini de H'. On pose $\tilde{H}' = vect\left\{h'_1, h'_2, \ldots, h'_k\right\} \subset H'$ et $\tilde{H} = vect\left\{Th'_1, Th'_2, \ldots, Th'_k\right\} \subset H$, $\tilde{E} = vect\left\{(S\circ T)h'_1, (S\circ T)h'_2, \ldots, (S\circ T)h'_k\right\} \subset E$, et on note $\tilde{S} : \tilde{H} \to \tilde{E}$ et $\tilde{T} : \tilde{H}' \to \tilde{H}$ les restrictions de S et T à $\tilde{H}$ et $\tilde{H}'$. Soit

$\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ une base orthonormale de $\tilde{H}$. On a, pour $x^* \in E^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \left| \left\langle (\tilde{S}\circ\tilde{T})h'_j, x^* \right\rangle \right|^2 &= \sum_{j=1}^{k} \left| \left\langle h'_j, (\tilde{T^*}\circ\tilde{S^*})x^* \right\rangle \right|^2 \\
&= \left\| (\tilde{T^*}\circ\tilde{S^*})x^* \right\|_H^2 \textit{ d'après le théorème de Parseval} \\
&\leq \left\| \tilde{T^*} \right\|^2 \left\| \tilde{S^*} x^* \right\|_H^2 \\
&= \left\| \tilde{T} \right\|^2 \sum_{n=1}^{N} \left| \langle \tilde{S} h_n, x^* \rangle \right|^2 .
\end{aligned}$$

On déduit alors du théorème 3.2.2 que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^{k} \gamma_j (S\circ T) h'_j \right\|^p &\leq \|T\|^p \, \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^{N} \gamma_n S h_n \right\|^p \\
&\leq \|T\|^p \, \|S\|^p_{\gamma_p^\infty(H,E)},
\end{aligned}$$

ce qui montre que $S\circ T \in \gamma^\infty\left(H', E\right)$ et que $\|S\circ T\|_{\gamma_p^\infty(H',E)} \leq \|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)} \|T\|$.

D'autre part si $R \in \mathscr{L}(E, E')$, il est clair que l'on a, pour $p \in [1, +\infty[$

$$\|R\circ S\circ T\|_{\gamma_p^\infty(E',H')} \leq \|R\| \|S\circ T\|_{\gamma_p^\infty(E,H')},$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 3.2.4. *(Lemme de γ-Fatou)*
Soit $(S_n)_{n=1}^\infty$ une suite bornée dans $\gamma^\infty(H, E)$. Si $S \in \mathscr{L}(H, E)$ est un opérateur tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle S_n h, x^* \rangle = \langle Sh,\ x^* \rangle,\ \forall h \in H,\ \forall x^* \in E^*,$$

alors $S \in \gamma^\infty(H, E)$, et $\|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|S_n\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. Soit $h = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ un système orthonormal dans H. Soit $\left(x_n^*\right)_{n=1}^\infty$ une suite de vecteurs unitaires dans E^* qui est normalisante pour l'espace H_k engendré par $\{Sh_1, \dots, Sh_k\}$, c'est à dire que l'on a, pour $x \in H_k$,

$$\|x\| = \sup_{n\geq 1} \left\| < x, x_n^* > \right\| = lim_{n\to+\infty} sup_{1\leq m\leq n} \left\| < x, x_m^* > \right| .$$

D'après le lemme de Fatou, on a, pour $M \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq m\leq M} \left| \left\langle \sum_{j=1}^{k} \gamma_j S h_j, x_m^* \right\rangle \right|^p \right) &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \mathbb{E}\left(\sup_{1\leq m\leq M} \left| \left\langle \sum_{j=1}^{k} \gamma_j S_n h_j, x_m^* \right\rangle \right|^p \right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \|S_n\|^p_{\gamma_p^\infty(H,E)} .
\end{aligned}$$

On a alors, d'après le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^{k} \gamma_j S h j \right\|^p &= lim_{M\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{1\leq m\leq M} \left| \left\langle \sum_{j=1}^{k} \gamma_j S h_j, x_m^* \right\rangle \right|^p \right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \|S_n\|^p_{\gamma_p^\infty(H,E)} .
\end{aligned}$$

Donc $S \in \gamma^\infty(H, E)$, et $\|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|S_n\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}$ pour $1 \leq p < +\infty$. □

Proposition 3.2.5. *Soit H un espace de Hilbert séparable, soit $(h_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormale de H, et soit $S \in \mathscr{L}(H,E)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $S \in \gamma^\infty(H,E)$,

(ii) il existe $p \in [1,+\infty[$ tel que $\sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p < +\infty$,

(iii) pour tout $p \in [1,+\infty[$, on a $\sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p < +\infty$.

Dans ce cas, on a, pour $1 \leq p < +\infty$,

$$\|S\|^p_{\gamma_p^\infty(H,E)} = \sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p.$$

Démonstration. Il résulte de la 2ème inégalité de Kahane-Kintchine que (ii) et (iii) sont équivalents, et il est clair que $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons que (iii) est vérifié. Soit $\left\{h'_1, h'_2, \ldots, h'_k\right\}$ un système orthonormé dans H. Pour $K \geq 1$, on désigne P_K la projection orthogonale de H sur l'espace engendré par $\{h_1, h_2, \ldots, h_K\}$. Pour tout $x^* \in E^*$ et pour tout $K \geq 1$, on a :

$$\sum_{j=1}^k |\left\langle SP_K h'_j, x^*\right\rangle|^2 = \sum_{j=1}^k |\left\langle h'_j, P_K S^* x^*\right\rangle|^2 \leq \left\|P_K S^* x^*\right\|^2 = \sum_{n=1}^K \left|\left\langle h_n, P_K S^* x^*\right\rangle\right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^K \left|\left\langle h_n, S^* x^*\right\rangle\right|^2 = \sum_{n=1}^K \left|\left\langle S h_n, x^*\right\rangle\right|^2.$$

On déduit alors du lemme 3.2.2 que $\mathbb{E}\|\sum_{j=1}^k \gamma_j SP_K h' j\|^p \leq \sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p$ pour tout $p \in [1,+\infty[$. En particulier la suite $(SP_K)_{K\geq 1}$ est une suite bornée d'éléments de $\gamma^\infty(H,E)$. On a , pour $x \in H, x^* \in E^*$,

$$lim_{K\to+\infty}\left\langle SP_K x, x^*\right\rangle = lim_{K\to+\infty}\left\langle P_K x, S * x^*\right\rangle = \left\langle x, S^* x^*\right\rangle = \left\langle Sx, x^*\right\rangle.$$

Il résulte alors du lemme de γ-Fatou que $S \in \gamma^\infty(H,E)$. D'autre part le lemme de γ-Fatou donne aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^k \gamma_j S h'_j\right\|^p &\leq \liminf_{K\to\infty} \mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^k \gamma_j SP_K h'_j\right\|^p \\ &\leq \sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|S\|^p_{\gamma_p^\infty(H,E)} \leq \sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p$.

L'inégalité inverse est évidente. □

Chapitre 4

Les opérateurs γ-radonifiants

Dans ce chapitre, H désigne un espace de Hilbert, E un espace de Banach et on désigne par $h \otimes x \in \mathscr{L}(H,E)$ l'opérateur défini par $(h \otimes x)\, h' = \langle h, h' \rangle\, x$ avec $h, h' \in H$ et $x \in E$. Pour $x^* \in E^*$, l'opérateur $x^* : \gamma(H,E) \to H$ est défini par $x^*(h \otimes x) = \langle x, x^* \rangle\, h$.

Définition 4.0.6. *L'espace $\gamma(H,E)$ est défini comme la fermeture dans $\gamma^\infty(H,E)$ de l'ensemble des opérateurs de rang fini. Les éléments de $\gamma(H,E)$ sont appelés opérateurs γ-radonifiants.*

On pose $\|S\|_{\gamma_p(H,E)} := \|S\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}$ pour $S \in \gamma(H,E)$, de sorte que la norme $\|.\|_{\gamma_p(H,E)}$ est équivalente à la norme $\|.\|_{\gamma(H,E)} := \|.\|_{\gamma^2(H,E)}$, qui est donc définie par la formule

$$\|S\|_{\gamma(H,E)} = \sup_h \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

le supremum étant calculé sur l'ensemble des familles orthonormales finies $h = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ d'éléments de H.

Il est clair que $\gamma(H,E)$, muni de la norme $\|.\|_{\gamma(H,E)}$ (ou d'une des normes équivalentes $\|.\|_{\gamma_p(H,E)}$) est un espace de Banach.

Soient F et G deux espaces de Banach, et soit B_F la boule unité de F. Rappelons qu'on dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(F,G)$ est *compact* si $T(B_F)$ est relativement compact dans G. L'ensemble des opérateurs compacts est fermé dans $\mathscr{L}(F,G)$ muni de la norme d'opérateur définie par la formule $\|R\| := \sup_{\|x\| \le 1} \|Rx\|$.

Tout opérateur γ-radonifiant $R : H \to E$ est compact. En effet soit $(R_n)_{n \ge 1}$ une suite d'opérateurs de rang fini vérifiant $\lim_{n \to \infty} \|R_n - R\|_{\gamma(H,E)} = 0$. On a à fortiori $\lim_{n\to\infty} \|R_n - R\| = 0$, donc R est compact puisque tout opérateur de rang fini est compact.

4.1 Théorème de Hoffmann-Jorgensen et Kwapien

Nous énonçons maintenant le théorème suivant, qui est une reformulation de résultats de Hoffmann-Jorgensen et Kwapien sur la convergence presque sûre des sommes aléatoires dont les sommes partielles sont bornées presque sûrement.

Théorème 4.1.1. *(Hoffmann-Jorgensen et Kwapien)[19]*
Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Pour un espace de Banach E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\gamma^{\infty}(H,E) = \gamma(H,E)$,

(2) *E ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0.*

On va donner plus loin une démonstration du fait que (1) implique (2). On a la propriété simple suivante.

Proposition 4.1.2. *Soit $S \in \gamma(H,E)$, soit E' un espace de Banach, soit H' un espace de Hilbert, soit $R \in \mathscr{L}(E,E')$ et soit $T \in \mathscr{L}(H',H)$. Alors $R\circ S\circ T \in \gamma\left(H',E'\right)$ et on a*

$$\|R\circ S\circ T\|_{\gamma(H',E')} \le \|R\|\,\|S\|_{\gamma(H,E)}\,\|T\|.$$

Démonstration. Il résulte du théorème 3.2.2 que $R\circ S\circ T \in \gamma^{\infty}\left(H',E'\right)$. D'autre part soit $(S_n)_{n\ge 1}$ une suite d'opérateurs de rang fini qui converge vers S dans $\gamma(H,E)$. Alors $R\circ S_n\circ T$ est aussi de rang fini pour $n \ge 1$. Il résulte aussi du théorème 3.2.2 que l'on a

$$\begin{aligned} & lim_{n\to+\infty}\|R\circ S\circ T - R\circ S_n\circ T\|_{\gamma^{\infty}(H,E)} \\ \le\ & lim_{n\to+\infty}\|R\|\,\|S-S_n\|_{\gamma^{\infty}(H,E)}\,\|T\| = 0. \end{aligned}$$

Donc $S\circ R\circ T \in \gamma\left(H',E'\right)$, ce qui achève la démonstration puisque la norme $\|.\|_{\gamma(H,E)}$ est la restriction à $\gamma(H,E)$ de la norme $\|.\|_{\gamma^{\infty}(H,E)}$. □

Théorème 4.1.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $S \in \mathscr{L}(H,E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $S \in \gamma(H,E)$,

(2) *la série $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n S h_n$ converge dans $L^p(\Omega,E)$ pour toute base orthonormée $(h_n)_{n\ge1}$ de H et pour tout $p \in [1,+\infty[$,*

(3) *il existe une base orthonormée $(h_n)_{n\ge1}$ de H et $p \in [1,+\infty[$ tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n S h_n$ converge dans $L^p(\Omega,E)$.*

Pour toute base orthonormale $(h_n)_{n\ge1}$ de H et pour tout $p \in [1,+\infty[$, on a alors

$$\|S\|^p_{\gamma_p(H,E)} = \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n S h_n\right\|^p.$$

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Fixons $R \in \gamma(H,E)$ et $1 \le p < +\infty$ et soient $(h_n)_{n\ge1}$ une base orthonormée de H et P_n la projection orthogonale de H sur l'espace vectoriel engendré par $\{h_1,\dots,h_n\}$.

Soit $U \in \mathscr{L}(H,E)$ un opérateur de rang fini. Il existe $x_1,\dots,x_M \in E$ et $u_1,\dots,u_M \in H$ tels que $U = \sum_{m=1}^M u_m \otimes x_m$. On a, pour toute famille orthonormale $h' = (h'_1,\dots,h'_k)$ d'éléments de H,

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^k \gamma_j (U - UP_n)h'_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^M \gamma_j \left\langle u_m, h'_j - P_n h'_j\right\rangle x_m\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{m=1}^M \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^k \gamma_j \left\langle u_m, h'_j - P_n h'_j\right\rangle x_m\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{m=1}^M \|x_m\| \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^k \gamma_j \left\langle u_m - P_n u_m, h'_j\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{m=1}^M \|x_m\| \left(\mathbb{E}\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \gamma_i \overline{\gamma}_j \langle u_m - P_n u_m, h'_i\rangle \overline{\left\langle u_m - P_n u_m, h'_j\right\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^M \|x_m\| \left(\sum_{j=1}^k \left|\left\langle u_m - P_n u_m, h'_j\right\rangle\right|\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{m=1}^M \|x_m\| \|u_m - P_n u_m\|.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|U - UP_n\|_{\gamma(H,E)} = 0$. On a alors, pour tout opérateur de rang fini U,

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to+\infty} \|S - SP_n\|_{\gamma(H,E)} \\ \leq\ &\|S-U\|_{\gamma(H,E)} + \limsup_{n\to+\infty} \|U - UP_n\|_{\gamma(H,E)} + \|U - S\|_{\gamma(H,E)} \limsup_{n\to+\infty} \|P_n\| \\ =\ &2\|S-U\|_{\gamma(H,E)}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|S - SP_n\|_{\gamma(H,E)} = 0$, puisque les opérateurs de rang fini sont denses dans $\gamma(H,E)$.

On a, pour $n > m \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$,

$$\|\sum_{j=m+1}^n \gamma_j S h_j\|^p \leq \|SP_n - SP_m\|^p_{\gamma_p^\infty(H,E)}.$$

Comme la norme $\|.\|_{\gamma_p^\infty(H,E)}$ est équivalente à la norme $\|.\|_{\gamma(H,E)}$, il résulte alors du critère de Cauchy que la série $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n R h_n$ converge dans $L^p(\Omega, E)$.

Il résulte de la proposition 3.1.1 que la suite $\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^m \gamma_n S h_n\right\|^p\right)_{m\geq 1}$ est croissante. On déduit alors de la proposition 3.2.5 que l'on a

$$\|S\|^p_{\gamma_p(H,E)} = \sup_{N\geq 1} \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n S h_n\right\|^p = \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^\infty \gamma_n S h_n\right\|^p.$$

On a vu que $(1) \Rightarrow (2)$, et il est évident que $(2) \Rightarrow (3)$.

Supposons maintenant que (3) est vérifié pour un réel $p \geq 1$ et une base orthonormale $(h_n)_{n\geq 1}$ de H. En appliquant les résultats précédents à l'opérateur de rang fini $SP_n - SP_m$, pour $n \geq m \geq 1$, on obtient

$$\|SP_n - SP_m\|^p_{\gamma_p(H,E)} \quad = \mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{+\infty} SP_n h_j - SP_m h_j\right\|^p \quad = \mathbb{E}\left\|\sum_{j=m+1}^n \gamma_j S h_j\right\|^p.$$

On en déduit que la suite $(SP_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\gamma(H,E)$. Soit $\tilde{S}$ sa limite. On a à fortiori $\lim_{n\to+\infty}\|SP_n - \tilde{S}\| = 0$ et pour $u \in H$

$$\tilde{S}u = lim_{n\to+\infty} SP_n u = Su.$$

Donc $S = \tilde{S} \in \gamma(H,E)$, et (3) $\Rightarrow$ (1). □

4.2 Exemple d'un opérateur γ-sommant et non γ-radonifiant

On va maintenant donner un exemple qui montre que si $\gamma(H,E) = \gamma^{\infty}(H,E)$, alors E ne contient pas de copie de c_0 (c'est l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du théorème de Hoffmann-Jorgensen et Kwapien).

Exemple 4.2.1. *L'opérateur de multiplication $T : \ell_2 \to c_0$ défini par :*

$$T\left((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{\log(n+1)}}\right)_{n\geq 1}$$

est γ-sommant mais n'est pas γ-radonifiant.

En effet soit γ une variable aléatoire gaussienne standard. On a :

$$\begin{aligned}
G(r) &= \mathbb{P}\left\{|\gamma|^2 \leq r\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{r}}^{\sqrt{r}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{r}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - \int_{\sqrt{r}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right\} \\
&= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{r}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{\infty} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{y}} dy \\
&= 1 - \frac{2e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{2\pi r}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{\infty} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{y\sqrt{y}} dy
\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$G(r) \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{r}}.$$

En intégrant encore par parties, on obtient :

$$G(r) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{r}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{r}{2}}}{r\sqrt{r}} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{\infty} \frac{e-\frac{y}{2}}{y^2\sqrt{y}} dy$$

$$\leq 1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{r}}.$$

Ceci donne, pour $r \geq 2$,

$$G(r) \leq 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{r}}.$$

Soit (u_n) une base unitaire de ℓ_2. On doit montrer que :

$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n T u_n\right\|_{c_0}^2 = \sup_{N\geq 1}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq\ n\leq N}\frac{\left|\gamma_n\right|^2}{\log(n+1)}\right) < \infty$$

On pose : $\beta_n = \frac{|\gamma_n|^2}{\log(n+1)}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leq n\leq N}\beta_n > t\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\max_{1\leq n\leq N}\beta_n \leq t\right)\\
&= 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N}\left\{\beta_n \leq t\right\}\right)\\
&= 1-\Pi_{n=1}^{N}\mathbb{P}\left\{\beta_n \leq t\right\}
\end{aligned}$$

$\beta_n \leq t \Leftrightarrow \frac{|\gamma_n|^2}{\log(n+1)} \leq t \Leftrightarrow \left|\gamma_n\right|^2 \leq t\log(n+1)$. D'autre part si $\epsilon_i \in [0,1]$ pour $1 \leq i \leq n$, on a $(1-\epsilon_1)\dots(1-\epsilon_n) \geq 1-(\epsilon_1+\dots\epsilon_n)$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leq n\leq N}\beta_n > t\right) &\leq 1-\Pi_{n=1}^{N}\left(1-\frac{2}{\sqrt{2\pi\,(n+1)^t\,t\log(n+1)}}\right)\\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^t}}\,\frac{1}{\sqrt{t\log(n+1)}}
\end{aligned}$$

$\forall\ t \geq 4$, $(n+1)^t = (n+1)^{t-4}\,(n+1)^4 \geq 2^{t-4}\,(n+1)^4$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leq n\leq N}\beta_n > t\right) &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Pi_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4\,2^{t-4}}}\,\frac{1}{\sqrt{t\log(n+1)}}\\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}}\,\frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}}\\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}}\,\frac{1}{\sqrt{\log 2}}\\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi\log 2}}\,\frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2}\\
&\leq \frac{2\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)}{\sqrt{2\pi\log 2}}\,\frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}}.
\end{aligned}$$

Posons $\zeta = max_{1\leq n\leq N} \frac{|\gamma_n|^2}{log(n+1)}$. Pour $p \in [1,+\infty[$, on a

$$\mathbb{E}\zeta^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}\{\zeta > \lambda\}\, d\lambda.$$

En particulier

$$\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq n\leq N} \frac{|\gamma_n|^2}{\log(n+1)}\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\{\zeta > t\}\, dt.$$

D'autre part $\int_0^\infty \mathbb{P}\{\zeta > t\}\, dt = \int_0^4 \mathbb{P}\{\zeta > t\}\, dt + \int_4^\infty \mathbb{P}\{\zeta > t\}\, dt$.

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \mathbb{P}\{\zeta > t\}\, dt &\leq \int_0^4 \frac{2\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)}{\sqrt{2\pi\log 2}} \frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}} dt \\
&= \frac{2\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)}{\sqrt{2\pi\log 2}} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}} dt \\
&\leq \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
&= 4.
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq n\leq N} \frac{|\gamma_n|^2}{\log(n+1)}\right) \leq 4 + \frac{2\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)}{\sqrt{2\pi\log 2}} \int_4^\infty \frac{1}{\sqrt{2^{t-4}t}} dt < \infty,$$

et l'opérateur T est donc γ-sommant.

Montrons maintenant que T n'est pas γ-radonifiant. Raisonnons par l'absurde.

Si T était γ-radonifiant, alors $X = \sum_{n\geq 1}\gamma_n T u_n$, qui converge dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, convergerait dans $L^2(\Omega, c_0)$, et la probabilité pour que la somme de cette série appartienne à c_0 serait égale à 1. Posons $E_N = \bigcap_{j\geq N}\left\{(x_j)_{j\geq 1}\ tels\ que\ |x_j| \leq 1\ \forall\ j\geq N\right\}$. On a $c_0 = \bigcup_{N\geq 1} E_N$, donc

$$\mathbb{P}(X\in c_0) \quad\leq\quad \sum_{N\geq 1}\mathbb{P}(X\in E_N) = \sum_{N\geq 1}\Pi_{n\geq N}\mathbb{P}\left\{|\gamma_n|^2 \leq \log(n+1)\right\}.$$

Pour $n\geq 7$, on a : $\log(n+1)\geq 2$, ce qui donne, puisque $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\log(n+1)}} = +\infty$, pour $N\geq 7$.

$$\begin{aligned}
\Pi_{n\geq N}\mathbb{P}\left\{|\gamma_n|^2 \leq \log(n+1)\right\} &\leq \Pi_{n\geq N}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{(n+1)\log(n+1)}}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc en fait $\Pi_{n\geq N}\mathbb{P}\left\{|\gamma_n|^2 \leq \log(n+1)\right\} = 0$ pour tout $N\geq 1$, on a $P(X\in c_0) = 0$ et cette contradiction montre que T n'est pas γ-radonifiant.

4.3 Opérateurs dans les espaces L^p

4.3.1 Les opérateurs dans les espaces de Hilbert

Rappelons que si E est un espace de Hilbert, $\mathscr{L}_2(H,E)$ désigne l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H dans E, qui est l'ensemble des opérateurs bornés $R : H \to E$ vérifiant

$$\|R\|^2_{\mathscr{L}_2(H,E)} = \sup_h \sum_n \|Rh_n\|^2 < +\infty,$$

le supremum étant calculé sur l'ensemble des familles orthonormales finies $h = (h_1, \ldots, h_N)$ d'éléments de H.

Théorème 4.3.1. *Si E est un espace de Hilbert, alors $\gamma(H,E) = \mathscr{L}_2(H,E)$, et $\|R\|_{\mathscr{L}_2(H,E)} = \|R\|_{\gamma(H,E)}$ pour tout $R \in \gamma(H,E)$.*

Démonstration. Soit $h = (h_1, \ldots, h_N)$ une famille orthonormale finie d'éléments de H. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n Rh_n\right\|^2 &= \mathbb{E}\left\langle \sum_{n=1}^N \gamma_n Rh_n, \sum_{m=1}^N \gamma_m Rh_m \right\rangle \\
&= \mathbb{E}\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \gamma_n \overline{\gamma_m} \langle Rh_n, Rh_m\rangle \\
&= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(\gamma_n \overline{\gamma_m}) \langle Rh_n, Rh_m\rangle \\
&= \sum_{n=1} \|Rh_n\|^2.
\end{aligned}$$

Donc $\gamma(H,E) = \gamma^\infty(H,E) = \mathscr{L}_2(H,E)$, et $\|R\|_{\gamma(H,E)} = \|R\|_{\gamma^\infty(H,E)} = \|R\|_{\mathscr{L}_2(H,E)}$ pour tout $R \in \gamma(H,E)$. □

On étudie maintenant le cas où E est un espace L^p.

Théorème 4.3.2. *Soit $(A, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, soit H un espace de Hilbert et soit $p \in [1, +\infty[$. Pour un opérateur $R \in \mathscr{L}(H, L^p(A))$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $R \in \gamma(H, L^p(A))$.

(2) *Pour toute base orthonormée $(h_n)_{n\geq 1}$ de H, la fonction $\left(\sum_{n=1}^\infty |Rh_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ appartient à $L^p(A)$.*

(3) *Il existe une base orthonormée $(h_n)_{n\geq 1}$ de H telle que la fonction $\left(\sum_{n=1}^\infty |Rh_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ appartienne à $L^p(A)$.*

Dans ce cas, on a, pour toute base orthonormée $(h_n)_{n\geq 1}$ de H,

$$\|R\|_{\gamma(H,L^p(A))} \cong \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |Rh_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p .$$

Démonstration. Utilisons l'identité $\sum_{n=M}^{N} |c_n|^2 = \mathbb{E}\left|\sum_{n=M}^{N} c_n\gamma_n\right|^2$ avec $c_n = f_n(\zeta), \zeta \in A$. En appliquant l'inégalité de Kahane-Kintchine sur les scalaires, puis dans $L^p(A)$, ainsi que le théorème de Fubini, on obtient, pour $M \leq N$ et $f_M, \ldots, f_N \in L^p(A)$,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{n=M}^{N} |f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p &= \left\| \left(\mathbb{E} \left| \sum_{n=M}^{N} \gamma_n f_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\cong \left\| \left(\mathbb{E} \left| \sum_{n=M}^{N} \gamma_n f_n \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_p \\
&= \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=M}^{N} \gamma_n f_n \right\|_{L^p(A)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\cong \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=M}^{N} \gamma_n f_n \right\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Les équivalences (1) $\Longleftrightarrow$ (2), (1) $\Longleftrightarrow$ (3) et l'estimation finale s'en déduisent en prenant $f_n = Rh_n$ où $(h_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormée de H. □

Nous donnons maintenant un exemple simple d'opérateur γ-radonifiant. Ce résultat fonctionne aussi pour des fonctions $\phi : [a,b] \to \gamma(H,E)$, avec des hypothèses analogues. L'opérateur T_ϕ appartient alors à $\gamma(L^2([a,b];H),E)$, où $L^2([a,b],H)$ désigne l'espace des fonctions mesurable $f : [a,b] \to H$ vérifiant $\int_a^b \|f(t)\|^2 dt < +\infty$. [47], page 56.

Proposition 4.3.3. *Soit $[a,b]$ un intervalle et $\varphi :]a,b[\to E$ continûment différentiable avec*

$$\int_a^b (t-a)^{\frac{1}{2}} \left\|\varphi'(t)\right\|_E dt < \infty$$

Si on définit $T_\varphi : L^2([a,b]) \to E$ par $T_\varphi f = \int_a^b \varphi(t) f(t)\, dt$, alors $T_\varphi \in \gamma\left(L^2([a,b]), E\right)$ et on a

$$\left\| T_\varphi \right\|_{\gamma(L^2([a,b]),E)} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left\|\varphi(b)\right\|_E + \int_a^b (t-a)^{\frac{1}{2}} \left\|\varphi'(t)\right\|_E dt.$$

Démonstration. Notons que ϕ s'étend par continuité sur $]a,b]$. On considère une base orthonormale $(h_n)_{n\geq 1}$ de $L^2([a,b])$. On a, pour $t \in]a,b]$,

$$\phi(t) = \phi(b) - \int_a^b \chi_{[t,b]}(s)\, \phi'(s)\, ds,$$

$$\int_a^b h_n(t)\, \phi(t)\, dt = \int_a^b h_n(t)\phi(b)\, dt - \int_a^b \int_a^b \chi_{[t,b]}(s)\, h_n(t)\, \phi'(s)\, ds dt.$$

On obtient

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\int_a^b h_n(t)\phi(t)\,dt\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\int_a^b h_n(t)\phi(b)\,dt\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\int_a^b\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)\,h_n(t)\phi'(s)\,ds\,dt\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_a^b|h_n(t)|^2\,dt=1$, on a alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\int_a^b h_n(t)\,dt\right)\phi(b)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\|\phi(b)\|\left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n\int_a^b h_n(t)dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|\phi(b)\|\left(\mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_m\overline{\gamma_n}\int_a^b h_m(t)dt\int_a^b\overline{h_n(t)}dt\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|\phi(b)\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_a^b|h_n(t)|\,dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\phi(b)\|\sqrt{b-a}.$$

On a d'autre part

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\int_a^b\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)\,h_n(t)\phi'(s)\,ds\,dt\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n\int_a^b\left[\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)\right]\phi'(s)ds\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\mathbb{E}\left(\int_a^b\left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_n\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right)\right)\phi'(s)\right\|ds\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\mathbb{E}\left(\int_a^b\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right)\right|\|\phi'(s)\|ds\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\|\int_a^b\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right)\right|\|\phi'(s)\|ds\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq\int_a^b\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi'(s)\|ds$$

$$=\int_a^b\|\phi'(s)\|\left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}ds.$$

Comme la famille $(\gamma_n)_{n\geq1}$ est une famille orthonormale de $L^2(\Omega)$, on obtient, en utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right)\right|^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_a^b\chi_{[t,b]}(s)h_n(t)dt\right|^2$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_a^s h_n(t)dt\right|^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_a^b\chi_{[a,s]}(t)h_n(t)dt\right|^2=\|\chi_{[a,s]}\|^2_{L^2([a,b])}=s-a.$$

On obtient finalement

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\int_a^b h_n(t)\phi(t)\,dt\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq|\phi(b)|\sqrt{b-a}+\int_a^b\sqrt{s-a}\|\phi'(s)\|ds.$$

Donc $T_\phi\in\gamma(L^2([a,b]),E)$, et on a

$$\|T_\varphi\|_{\gamma(L^2([a,b]),E)}\leq(b-a)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_E+\int_a^b(t-a)^{\frac{1}{2}}\left\|\varphi'(t)\right\|_E dt.$$

□

Exemple 4.3.4. *Posons, pour $f\in L^2([0,1])$,*

$$T(f)=\left(\int_0^1 f(t)\frac{e^{-nt}}{n}dt\right)_{n\geq1}.$$

Alors $T\in\gamma(L^2([0,1]),\ell^1)$.

Ici $E=\ell^1$, $a=0$, $b=1$, $\varphi(t)=\left(\frac{e^{-nt}}{n}\right)_{n\geq1}$. On a

$$\varphi'(t)=(-e^{-nt})_{n\geq1},\ \left\|\varphi'(t)\right\|_{\ell_1}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}=\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Donc on a

$$\int_0^1\sqrt{t}\|\phi'(t)\|_{\ell^1}dt=\int_0^1\frac{\sqrt{t}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt<\infty,$$

et T_ϕ appartient bien à $\gamma(L^2([0,1]),\ell^1)$. Notons que $\phi(1)=(\frac{e^{-n}}{n})_{n\geq1}\in\ell^1$, mais que $\varphi(0)=\frac{1}{n}\notin\ell^1$.

4.3.2 Etude de convergence en moyenne de Cesàro

Soit la suite $X_n=\sum_{k=1}^n\gamma_k Th_k$ et $S_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N X_n$. On se propose d'étudier la convergence en moyenne de Cesàro de la suite (X_N) lorsque elle est bornée dans

$L^2(\Omega, E)$.

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k T h_k \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N}\gamma_k T h_k \\ &= \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left(1-\frac{k-1}{N}\right)T h_k \end{aligned}$$

On se place dans le cas où $E = c_0$, et on considère l'opérateur $T : \ell^2 \to c_0$ défini par la formule

$$T\left((\alpha_n)_{n\geq 1}\right) = \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{log(n+1)}}\right)_{n\geq 1}.$$

Cet opérateur est γ-sommant mais n'est pas γ-radonifiant, donc la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est bornée, mais non convergente dans $L^2(\Omega, c_0)$.

On a donc $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\|X_n\|_E^2 < +\infty$. Posons $e_k := (\delta_{k,n})_{n\geq 1}$, où δ désigne le symbole de Kronecker. Pour $M < N$, on a :

$$S_N - S_M = \sum_{k=1}^{M}\gamma_k\left(\frac{k-1}{M}-\frac{k-1}{N}\right)Te_k + \sum_{k=M+1}^{N}\gamma_k\left(1-\frac{k-1}{N}\right)Te_k$$

$$= \left(0, \gamma_2\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{\sqrt{\log 3}}, \dots, \gamma_M\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{N}\right)\frac{M-1}{\sqrt{\log(M+1)}}, \gamma_{M+1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{1}{\sqrt{\log(M+1)}},\right.$$

$$\left.\dots, \gamma_{N-1}\left(1-\frac{N-2}{N}\right)\frac{1}{\sqrt{\log N}}, \gamma_N\left(1-\frac{N-1}{N}\right)\frac{1}{\sqrt{log(N+1)}}, 0, 0, \dots\right),$$

$$\begin{aligned} \|S_M - S_N\|_E &= \max\left(\max_{1\leq j\leq M}\left(\left|\gamma_j\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{N}\right)\frac{j-1}{\sqrt{\log(1+j)}}\right|\right),\right. \\ &\qquad \left.\max_{M+1\leq j\leq N}\left(\left|\gamma_j\left(1-\frac{j}{N}\right)\frac{1}{\sqrt{\log(1+j)}}\right|\right)\right) \\ &\geq \max_{1\leq j\leq M}\left(|\gamma_j|\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{N}\right)\frac{j-1}{\sqrt{\log(1+j)}}\right). \end{aligned}$$

On considère maintenant le cas où $N = 2M$, avec M pair. On a

$$\begin{aligned}
\|S_M - S_N\| &\geq \max_{\frac{M}{2}\leq j\leq M}\left(\left|\gamma_j\right| \frac{j-1}{2M}\frac{1}{\sqrt{\log\left(1+j\right)}}\right)\\
&\geq \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2M}\right)\max_{\frac{M}{2}\leq j\leq M}\left(\left|\gamma_j\right| \frac{1}{\sqrt{\log\left(1+j\right)}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|S_M - S_{2M}\| &\geq \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2M}\right)\mathbb{E}\left(\max_{\frac{M}{2}\leq j\leq M}\left|\gamma_j\right| \frac{1}{\sqrt{\log\left(M+1\right)}}\right)\\
&\geq \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2M}\right)\frac{1}{\sqrt{\log\left(1+M\right)}}\mathbb{E}\left(\max_{\frac{M}{2}\leq j\leq M}\left|\gamma_j\right|\right)\\
&\geq \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2M}\right)\frac{\sqrt{logM-log2}}{\sqrt{log\left(M+1\right)}}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité suivante : $\mathbb{E}\left(\max_{1\leq n\leq N}\left|\gamma_n\right|\right) \geq \frac{1}{2} log\left(N\right)$,[46],exemple 3.8.

Donc $\lim\inf_{L\to+\infty}\mathbb{E}\|S_{2L}-S_{4L}\| \geq \frac{1}{4}$, et la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas au sens de Cesàro.

Etudions aussi la convergence de la suite $Z_N = \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left(1-\frac{1}{k}\right)Th_k$.

On considère la suite (Y_n) définie par $Y_N = \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\frac{1}{k}Th_k$. On a

$$\begin{aligned}
\|Y_M - Y_N\| &= \left\|\sum_{k=N+1}^{M}\gamma_k\frac{1}{k}Th_k\right\|\\
&\leq \frac{1}{N+1}\left\|\sum_{k=N+1}^{M}\gamma_k Th_k\right\|\\
&\leq \frac{C}{N+1}\to 0 \qquad quand\ n\to\infty
\end{aligned}$$

La suite (Y_N) converge dans $L^2\left(\Omega, E\right)$. Ainsi, si Z_N convergeait, alors $Y_N+Z_N = \sum_{k=1}^{N}\gamma_k Th_k$ convergeait aussi, ce qui n'est pas le cas.

Proposition 4.3.5. *Soit un opérateur $T : \ell^2 \to \ell^p$ défini par la formule*

$$T\left((\alpha_n)_{n\geq 1}\right) = (a_n\alpha_n)_{n\geq 1}.$$

Alors $T\in\gamma(\ell^2,\ell^p)$ si et seulement si $(a_n)_{n\geq 1}\in\ell^p$.

Démonstration. On a, pour $N\geq 1$,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n Te_n\right\|_p^p = \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n a_n e_n\right\|_p^p = \mathbb{E}\left\|(\gamma_1 a_1,\gamma_2 a_2,\ldots,\gamma_N a_N)\right\|_p^p$$

$$= \mathbb{E}\sum_{n=1}^{N} \left|\gamma_n a_n\right|^p = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left|\gamma_n a_n\right|^p = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left|\gamma_n\right|^p |a_n|^p$$

$$m_p^p \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\right)^p,$$

où

$$m_p^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mathbb{E}\left|\gamma_n\right|^p \tag{4.1}$$

est le moment d'ordre p. Il résulte alors de la proposition 3.2.5 que $T \in \gamma_p^\infty(\ell^2, \ell^p) = \gamma^\infty(\ell^2, \ell^p) = \gamma(\ell^2, \ell^p)$ si et seulement si $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$. □

On note $\gamma(E)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E telles que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \gamma_n x_n$ converge dans $L^2(\Omega, E)$. Nous concluons ce chapitre par le résultat suivant.

Théorème 4.3.6. *Soit $T \in \mathscr{L}(H,E)$. Alors $T \in \gamma(H,E)$ si et seulement si $(T(x_n))_{n\geq 1} \in \gamma(E)$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{faible}(H)$.*

Démonstration. Notons que si $(h_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale, alors $\sum |\langle x, h_n\rangle| = \|x\| < +\infty$ pour tout $x \in H$, donc $(h_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(H)$. Donc si $(T(x_n))_{n\geq 1} \in \gamma(E)$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(H)$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \gamma_n h_n$ converge dans $L^2(\Omega, E)$ pour toute base orthomormée $(h_n)_{n\geq 1}$ de H, et $T \in \gamma(H,E)$.
Réciproquement supposons que $T \in \gamma(H,E)$, soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(H)$, et soit (h_n) une base orthonormale de H. On pose

$$u\left(\sum_{n=1}^{p} \lambda_n h_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n.$$

On a, si $x = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n h_n$, $y \in H$,

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y\rangle &= \left\langle u\left(\sum_{n=1}^{p} \lambda_n h_n\right), y\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{p} \lambda_n u(h_n), y\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n, y\right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \langle x_n, y\rangle \\
&\leq \left(\sum_{=1}^{p} |\lambda_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n} \left|\langle x_n, y\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|x\| \, \|(x_n)\|_{\ell_2^{\text{faible}}(H)} \, \|y\|
\end{aligned}$$

Donc $\|u(x)\| \leq \|x\| \, \|(x_n)\|_{\ell_2^{\text{faible}}(H)}$, et u s'étend par continuité à H. Comme $u(h_n) = x_n$, et comme $T \circ u \in \gamma(H,E)$, on voit que $(T(x_n))_{n\geq 1} \in \gamma(E)$. □

Chapitre 5

Les opérateurs p-nucléaires et faiblement $*p$-nucléaires

On va introduire dans ce chapitre les notions d'opérateurs p-nucléaires et faiblement$*p$-nucléaires et on va montrer que la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt coincide avec la classe des opérateurs faiblement $*1$-nucléaires.
Dans toute la suite, $p \in [1, +\infty[$, et q désigne le conjugué de p défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5.1 Opérateurs p-nucléaires

Définition 5.1.1. *Soient E et F deux espaces normés. Une application linéaire continue $T : E \to F$ est dite nucléaire s'il existe des suites $(x_n^*) \subset E^*$ et $(y_n) \subset F$ tel que : $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n$ avec $\sum_n \|x_n^*\| \|y_n\| < \infty$.*
L'espace vectoriel formé par ces opérateurs est noté $\mathcal{N}_1(E,F)$.
Pour $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$, on pose : $\|T\|_1 = \inf \sum_n \|x_n^*\| \|y_n\|$, l'inf étant pris sur toutes les représentations de T de la forme : $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n$.

Proposition 5.1.2. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est nucléaire si et seulement si il admet une factorisation*

$$E \xrightarrow{u} \ell_\infty \xrightarrow[\lambda]{M} \ell_1 \xrightarrow{v} F$$

avec u et v linéaires continus, M_λ désignent la multiplication par une suite $(\lambda_n)_n \in \ell_1$.

Démonstration. Notons que toute application linéaire continue $u : E \longrightarrow \ell_\infty$ est de la forme $u(x) = \left(\langle x_n^*, x\rangle\right)_{n\geq 1}$ où (x_n^*) est une suite bornée d'éléments de E^*.
D'autre part si $e_n = \left(\delta_{n,m}\right)_{m\geq 1}$ toute application linéaire continue $v : \ell_1 \longrightarrow F$ est de la forme $v\left((\beta_n)_{n\geq 1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$ où $(y_n) = (v(e_n))$ est une suite bornée d'éléments de F.
Dire que T est nucléaire signifie que $T = \sum_n \lambda_n x_n^* \otimes y_n$ avec $\sup \|x_n^*\| < +\infty$, $\sup \|y_n\| <$

$+\infty$, et $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$. Ceci signifie donc T admet une factorisation :

$$x \xrightarrow{u} \left(\langle x_n^*, x\rangle\right)_n \xrightarrow[\lambda]{M} \left(\lambda_n \langle x_n^*, x\rangle\right)_n \xrightarrow{v} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x_n^*, x\rangle y_n.$$

□

Définition 5.1.3. *Soit X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $u : X \longrightarrow Y$ est p-nucléaire $(1 \leq p < +\infty)$ s'il existe des opérateurs $a \in \mathscr{L}(\ell_p, Y)$, $b \in \mathscr{L}(X, \ell_\infty)$ et une suite $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$ tels que $u = a \circ M_\lambda \circ b$ où M_λ désigne l'opérateur de multiplication par λ.*
On note $\mathscr{N}_p(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs nucléaires de X dans Y et on pose
$\nu_p(u) = \inf \|a\| \, \|\lambda\|_{\ell_p} \|b\|$,
l'inf étant pris sur toutes les factorisations du type ci-dessus.

On voit donc que la classe des opérateurs 1-nucléaires coincide avec la classe des opérateurs nucléaires.

Proposition 5.1.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $u : X \longrightarrow Y$ une application linéaire continue. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) *u est p- nucléaire.*
(ii) *u admet une factorisation $u : X \xrightarrow{b} c_0 \xrightarrow{M_\tau} \ell_p \xrightarrow{a} Y$ où a et b sont des opérateurs compacts et où M_τ est l'opérateur de multiplication associé à $\tau \in \ell_p$.*
(iii) *Même condition que (ii), avec a et b des opérateurs bornés.*
(iv) *Il existe des suites $(\lambda_n) \in \ell_p$, $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ et $(y_n) \subset \ell_q^{faible}(Y)$ telles que $u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^* \otimes y_n$, la série étant convergente dans $\mathscr{L}(X,Y)$.*
(v) *Il existe des suites $(x_n^*) \subset \ell_p(X^*)$ et $(y_n) \subset \ell_q^{faible}(Y)$ telles que $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n$, la série étant convergente dans $\mathscr{L}(X,Y)$.*
De plus si u est p-nucléaire, on a : $\nu_p(u) = \inf \|a\| \, \|\lambda\|_{\ell_p} \|b\| = \inf \left\|(x_n^*)\right\|_{\ell_p} \left\|y_n\right\|_{\ell_q^{faible}}$, les inf étant calculés sur toutes les décompositions de u donnée par les conditions (ii) et (v).

Démonstration. De même que plus haut, on vérifie que pour toute suite $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ il existe $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in c_0$ et $\sigma = (\sigma_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ telles que $\lambda = \alpha \circ \sigma$ et on peut vérifier que pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir α et σ de façon que $\alpha_n \geq 0$ et $\|\alpha\|_{c_0} \|\lambda\|_{\ell_p} \leq (1+\epsilon)\|\lambda\|_{\ell_p}$ aussi (ceci résulte du théorème de factorisation de Cohen, voir [10], th 2.9.24, page 312).
Comme $\left(\alpha_n^{\frac{1}{2}}\right)_{n\geq 1} \in c_0$, cette suite peut être utilisée pour construire deux opérateurs diagonaux $b_0 : \ell_\infty \longrightarrow c_o$ et $a_0 : \ell_p \longrightarrow \ell_p$. A partir de la décomposition $u = a \circ M_\lambda \circ b$ avec $a \in \mathscr{L}(\ell_p, Y)$, $b = \mathscr{L}(X, \ell_\infty)$ on obtient la factorisation $u = (a \circ a_0) \circ (M_\lambda \circ (b_0 \circ b)$ qui est du type (ii). De plus, on a :$\nu_p(u) = \inf \|a\| \, \|\lambda\| \, \|b\|$ où l'inf est calculé sur toutes les décompositions données en (ii).
Le reste de la proposition provient du fait que l'application $u \longrightarrow (ue_n)_{n\geq 1}$ définit un isomorphisme isométrique de $\mathscr{L}(\ell_p, Y)$ sur $\ell_p^{\text{faible}}(Y)$ pour $1 < p < +\infty$, tandis que pour $p = 1$ cette application définit un isomorphisme isométrique de $\mathscr{L}(c_0, Y)$ sur $\ell_1^{\text{faible}}(Y)$. □

Signalons sans démonstration le résultat suivant, voir[8]th 5.29,page 117.

Théorème 5.1.5. *Soient X, Y, Z des espaces de Banach, soit $v \in \mathscr{L}(X,Y)$ et $u \in \mathscr{L}(Y,Z)$. On suppose que $1 \leq p,q,r < +\infty$ et que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si u est p-nucléaire et v est q- sommant, ou si u est p-sommant et v est q-nucléaire, alors $u \circ v$ est r-nucléaire.*

Théorème 5.1.6. *Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $u \in \mathscr{L}(X,Y)$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) *Il existe un espace de Banach Z et deux opérateurs 2-sommants $a : Z \longrightarrow Y$ et $b : X \longrightarrow Z$ tels que $u = a \circ b$.*
(2) *Il existe un espace de Hilbert H, un opérateur borné $v : H \to Y$ et un opérateur nucléaire $w : X \to H$ tels que $u = v \circ w$.*
En particulier la composée de deux opérateurs 2-sommants est nucléaire.

Démonstration. On suppose que (1) est vérifié. D'après un corollaire du théorème de factorisation de Pietsch, u admet une factorisation de la forme $u : X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{j} L_2(\mu) \xrightarrow{a} L_\infty(\lambda) \xrightarrow{i} L_2(\lambda) \xrightarrow{v} Y$.
L'opérateur $i \circ a$ est un opérateur de Hilbert-schmidt, donc 2-sommant et $j \circ b$ est 2-sommant. D'après le théorème précédent, $i \circ a \circ j \circ b$ est nucléaire. Donc (2) est vérifié.
On suppose que (2) est vérifié. On a une factorisation de la forme $u : X \xrightarrow{w} H \xrightarrow{v} Y$ où H est un espace de Hilbert et w nucléaire. On a : $w : X \xrightarrow{b} \ell_\infty \xrightarrow{\Delta} \ell_1 \xrightarrow{a} H$ avec Δ un opérateur de multiplication associé à un élément de ℓ_1 et a, b bornés. Alors Δ et $\Delta \circ b$ sont nucléaires, donc 1-sommants et a est 1-sommant d'après le théorème de Grothendieck. Donc d'après le théorème d'inclusion $(th1.2.3)$, $\Delta \circ b$ et $v \circ a$ sont 2-sommants, ce qui montre que (1) est vérifié avec $Z = \ell_1$. □

On a le résultat classique suivant, voir par exemple[40].

Propriété 5.1.7. *Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $v \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.*
(1) *v est nucléaire.*
(2) *Il existe un espace de Hilbert H_3 et deux opérateurs de Hilbert-Schmidt $v_1 : H_1 \longrightarrow H_3$ et $v_2 : H_3 \longrightarrow H_2$ tels que $v = v_2 \circ v_1$.*
(3) *Il existe deux opérateurs de Hilbert-Schmidt $v_1 : H_1 \longrightarrow H_1$ et $v_2 : H_1 \longrightarrow H_2$ tels que $v = v_2 \circ v_1$.*
Dans ce cas, il existe une suite orthonormale (e_n) d'éléments de H_1, une suite orthonormale (f_n) d'éléments de H_2 et $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$ telles que $v = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes f_n$.

Démonstration. Supposons que (2) est vérifié.
Soient $v_1 : H_1 \longrightarrow H_3$ et $v_2 : H_3 \longrightarrow H_2$ deux opérateurs de Hilbert-Schmidt. Posons $v = v_2 \circ v_1$. On écrit la décomposition polaire $v = qW$, avec $w = \sqrt{v^* v} : H_1 \longrightarrow H_2$ et $q : \overline{W(H_1)} \longrightarrow H_2$ isométrique. Soient $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormale de H_1 formée par des vecteurs propres de W et soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres de W. On

pose : $h_n = qe_n$

$$\begin{aligned} |\lambda_n| &= \lambda_n \\ &= \langle We_n, e_n \rangle \\ &= \left\langle qWe_n, qe_n \right\rangle \\ &= \langle (v_2 \circ v_1)\, e_n, h_n \rangle \\ &= \left\langle v_1 e_n, v_2^* h_n \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\| v_1 e_n \|^2 + \left\| v_2^* h_n \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

Comme v_1 et v_2 sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, alors : $\sum \| v_1 e_n \|^2 < +\infty$ et $\sum \left\| v_2^* h_n \right\|^2 < +\infty$ et par conséquent $\sum |\lambda_n| < +\infty$. Donc v est nucléaire.
Supposons que (1) est vérifié.
Soit $v : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur nucléaire. On écrit de nouveau la décomposition polaire $v = qW$. On a $v = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$ avec $\sum \| x_n \|_{H_1} \left\| y_n \right\|_{H_2} < +\infty$.
Soit $P : H_2 \longrightarrow \overline{v(H_1)}$ la projection orthogonale. On a :$v = Pv = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes P y_n$ donc on peut supposer que $y_n \in \overline{v(H_1)} = q\left(\overline{W(H_1)}\right)$. On pose $z_n = q^{-1} y_n$ et on a $W = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes z_n$, et W est compact et positif.
Soit $(e_k)_{k\geq 1}$ une base orthonormale de H_1 formée de vecteurs propres de W, soit $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ la suite des valeurs propres de W et soit P_N la projection orthogonale de H_1 sur le sous-espace vectoriel F_N engendré par $e_1, \ldots, e_N$. On peut considérer

$$P_N v P_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \otimes e_k = \sum_{n=1}^{N} P_N x_n \otimes P_N z_n$$

comme un endomorphisme de F_N.
Comme

$$Tr\,(P_N x_n \otimes P_N z_n) = \langle P_N x_n, P_N z_n \rangle$$

on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k &= Tr\,(P_N v P_N) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \langle P_N x_n, P_N z_n \rangle \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \left\| y_n \right\|. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$. On pose $W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} e_n \otimes e_n$. Alors W_1 et qW_1 sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt et $v = qW = (qW_1)W_1$. On obtient la décomposition cherchée en posant $f_n = qe_n$. □

On peut se demander si la composée d'un opérateur γ-radonifiant et d'un opérateur de Hilbert-Schmidt est nécessairement nucléaire.
La remarque suivante pourrait mener à un contre-exemple.

Soient $T:\ell_2 \longrightarrow \ell_p$, $e_n \longmapsto a_n e_n$ avec $p>2$ et $S:\ell_2 \longrightarrow \ell_2$, $e_n \longmapsto b_n e_n$. Alors T est γ-radonifiant si $(a_n)\in \ell_p$ et S est de Hilbert-Schmidt si $(b_n)\in\ell_2$. Donc la composée $u=T\circ S:\ell_2 \longrightarrow \ell_p$, $e_n \longmapsto a_n b_n e_n$ est diagonale et l'application $((a_n)_{n\geq 1},(b_n)_{n\geq 1}) \longrightarrow (a_n b_n)_{n\geq 1}$ est une application de $\ell_p \times \ell_2$ sur $\ell_{\frac{2p}{p+2}}$ qui contient strictement ℓ_1.
Donc $u=T\circ S:\ell_2 \longrightarrow \ell_p$ peut être de la forme $e_n \longrightarrow c_n e_n$ avec $(c_n)_{n\geq 1}\notin \ell_1$.
Nous n'avons pas pu montrer qu'un tel opérateur n'est pas nucléaire.

5.2 Opérateurs faiblement $*p$-nucléaires

Soit X un espace de Banach. Rappelons que :

$$(x_n)_{n\geq 1}\in \ell_p^{\text{faible}}(X) \ quand \ \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x^*, x_n\rangle\right|^p < +\infty$$

et que

$$\left(x_n^*\right)_{n\geq 1}\in \ell_p^{\text{faible}*}(X^*) \ quand \ \sup_{x\in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x_n^*, x\rangle\right|^p < +\infty.$$

Si $\left(x_n^*\right)\in \ell_p(X^*)$, et si $\left(y_n\right)\in\ell_q(Y)$, on a pour $x\in X$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\langle x_n^*, x\rangle\, y_n\right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle x_n^*, x\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|y_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc la formule $u=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*\otimes y_n$ définit un opérateur borné et on a

$$\begin{aligned}
\|ux\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\langle x_n^*, x\rangle\, y_n\right\| \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle x_n^*, x\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|y_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x\|^p\left|\left\langle x_n^*, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|y_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|x\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle x_n^*, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|y_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|x\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|y_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left\|(x_n^*)_{n\geq 1}\right\|_{\ell_p^{\text{faible}*}(H)}.
\end{aligned}$$

Ceci suggère la définition suivante.

Définition 5.2.1. *Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $u\in\mathscr{L}(X,Y)$.*
(i) On dit que u est faiblement p-nucléaire si $u=\sum_n x_n^*\otimes y_n$ avec $(x_n^*)\in\ell_p^{faible}(X^*)$ et $(y_n)\in\ell_q(Y)$.
(ii) On dit que u est faiblement $*p$-nucléaire si $u=\sum_n x_n^*\otimes y_n$ avec $(x_n^*)\in\ell_p^{faible*}(X^*)$ et $(y_n)\in\ell_q(Y)$.

On remarquera que tout opérateur faiblement p-nucléaire est également faiblement $*p$ nucléaire.
Remarquons que $\ell_\infty(X^*) = \ell_\infty^{\text{faible}*}(X^*)$.
On a vu au paragraphe 1.1 du chapitre 1 que $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^{\text{faible}}(X)$.
Dans le cas d'un espace dual, on a $\ell_\infty(X^*) = \ell_\infty^{\text{faible}}(X^*) = \ell_\infty^{\text{faible}*}(X^*)$.
En effet $\ell_\infty^{\text{faible}}(X^*) \subset \ell_\infty^{\text{faible}*}(X^*)$. D'autre part, si

$$(x_n^*) \in \ell_\infty^{\text{faible}*(X^*)}, \quad \sup_{x \in X tq \|x\| \leq 1} (\sup_n |\langle x_n^*, x\rangle|) < +\infty.$$

Donc

$$\sup_n \|x_n\| = \sup_{x \in B_X} \sup_n |\langle x_n^*, x\rangle| < +\infty$$

et

$$\ell_\infty(X^*) = \ell_\infty^{\text{faible}*}(X^*) = \ell_\infty^{\text{faible}}(X^*).$$

Proposition 5.2.2. *Soit H un espace de Hilbert. Alors $\ell_1(H) \subsetneq \ell_1^{faible}(H)$.*

Démonstration. Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormale de H et posons $f_n = \frac{e_n}{n}$.
$\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_H = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$. Donc $f_n \notin \ell_1(H)$.
Pour $g \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty |\langle g, f_n\rangle| &= \sum_{n=1}^\infty \left|\left\langle g, \frac{e_n}{n}\right\rangle\right| \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{|\langle g, e_n\rangle|}{n} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^\infty |\langle g, e_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|g\| \frac{\pi}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Donc $f_n \in \ell_1^{\text{faible}}(H)$. □

Exemple 5.2.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_1^{faible}(H)$. L'opérateur $v : H \to \ell_1$, défini par $v(h) = (\langle h, x_n\rangle)_{n\geq 1}$ est faiblement $*1$-nucléaire.*
En effet, posons $\langle x_n^*, x\rangle = \langle x, x_n\rangle$. Alors $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_1^{faible*}(H)$. Soit (e_n) la base naturelle de ℓ_1. On a : $v(h) = \sum_{n=1}^\infty e_n \langle h, x_n\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n^* \otimes e_n$ avec $(e_n) \in \ell_\infty(\ell_1)$, $(x_n^*) \in \ell_1^{faible}(H)$.

Il est à remarquer que $\ell_1^{\text{faible}*}(H) = \ell_1^{\text{faible}}(H)$. Donc tout opérateur faiblement $*$ nucléaire de H dans un espace Y est faiblement nucléaire. Ce résultat est valable si on remplace H par un espace de Banach reflexif.

5.3 Caractérisation des opérateurs faiblement $*p$-nucléaires

Proposition 5.3.1. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Alors T est faiblement $*1$-nucléaire si et seulement si T est de Hilbert-Schmidt.*

Démonstration. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt. On a $T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n^*\otimes e_n$, avec (e_n^*) et (e_n) des bases orthonormales de H et $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty$. On pose $x_n^*=\lambda_n e_n^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle x_n^*,x\right\rangle\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle \lambda_n e_n^*,x\right\rangle\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\left|\left\langle e_n^*,x\right\rangle\right| \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle e_n^*,x\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|x\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc $T=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*\otimes e_n$ avec $(e_n)\in\ell_\infty(H)$ et $(x_n^*)\in\ell_1^{\text{faible}*}(H)$ i.e T est faiblement$*1$-nucléaire.
Réciproquement, montrons que si T est un opérateur faiblement $*1$-nucléaire, alors T est de Hilbert-Schmidt. Soit $T=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*\otimes y_n$ avec $x_n^*\in\ell_1^{\text{faible}*}(H)$ et $y_n\in\ell_\infty(H)$.On a $Th=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle x_n^*,h\right\rangle y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,x_n\rangle\, y_n$.
On considère les opérateurs $S:H\to\ell_1$, $h\longmapsto\langle h,x_n\rangle$ et $U:\ell_1\to H$, $(\alpha_n)\longmapsto\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n y_n$. Donc $T=U\circ S$. On voit bien que T se factorise à travers l'espace ℓ_1 et d'après le théorème 2.2.5, T est de Hilbert-Schmidt. □

Chapitre 6

Généralisation des opérateurs γ-radonifiants

6.1 Les opérateurs γ-sommants sur un espace de Banach

On a la proposition suivante, suggérée par le théorème 4.3.6.

Proposition 6.1.1. *Soit H un espace de Hilbert, soit E un espace de Banach, et soit $S \in \gamma^{\infty}(H,E)$. Alors, on a pour $x_1,\ldots,x_N \in H$*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n S x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|S\|_{\gamma^{\infty}(H,E)} \sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Soient $x_1,\ldots,x_N \in H$ et soit $(e_1,\ldots,e_N)$ une famille orthonormale d'éléments de H. On pose $u(x) = \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle x_n$ pour $x \in H$.

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \sup_{\|x^*\|\le 1}\left|\left\langle x^*, \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle x_n\right\rangle\right|^2 \\ &= \sup_{\|x^*\|\le 1}\left|\sum_{n=1}^{N}\left\langle x^*, x_n\right\rangle\langle x, e_n\rangle\right|^2 \\ &\le \sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N}|\langle x, e_n\rangle|^2\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\|u(x)\| \le \sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|$$

et

$$\|u\| \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n S x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n (S\circ u)\, e_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|S\circ u\|_{\gamma^\infty(H,E)} \\ &\leq \|S\|_{\gamma^\infty(H,E)}\|u\| \\ &\leq \|S\|_{\gamma^\infty(H,E)}\sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

On notera que $\|S\|_{\gamma^\infty(H,E)}$ est la plus petite constante $c \geq 0$ tel que

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n S x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour toute famille finie $(x_1,\dots,x_N)$ d'éléments de E, comme on le voit en se restreignant aux familles orthonormales.
Ceci suggère la définition suivante.

Définition 6.1.2. *Soit X, Y deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $u : X \longrightarrow Y$ est γ-sommant si et seulement si il existe une constante $c \geq 0$ vérifiant, pour toute famille finie $(x_1,\dots,x_N)$ d'éléments de X*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n u x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.1}$$

On note $\gamma^\infty(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs γ-sommants de X dans Y et pour tout $u \in \gamma^\infty(X,Y)$, on note $\|u\|_{\gamma^\infty(X,Y)}$ la plus petite constante c vérifiant (6.1)
On a la “ propriété d'idéal” suivante.

Proposition 6.1.3. *Soient X, Y, X_1, Y_1 des espaces de Banach. Si $v \in \mathscr{L}(X_1, X)$, $w \in \mathscr{L}(Y, Y_1)$ et $u \in \gamma^\infty(X,Y)$ alors $w\circ u\circ v \in \gamma^\infty(X_1, Y_1)$ et*

$$\|w\circ u\circ v\|_{\gamma^\infty(X,Y)} \leq \|v\|\,\|u\|_{\gamma^\infty(X,Y)}\,\|w\|.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_n \gamma_n (w\circ u\circ v)(x_n)\right\|^2 &\leq \|w\|^2\,\mathbb{E}\left\|\sum_n \gamma_n u(v(x_n))\right\|^2 \\ &\leq \|w\|^2\,\|u\|^2_{\gamma^\infty(X,Y)}\sup_{\|x^*\|\leq 1}\sum_n\left|\left\langle x^*, v(x_n)\right\rangle\right|^2 \\ &\leq \|w\|^2\,\|u\|^2_{\gamma^\infty(X,Y)}\sup_{\|x^*\|\leq 1}\sum_n\left|\left\langle v^*(x^*), x_n\right\rangle\right|^2 \\ &\leq \|w\|^2\,\|u\|^2_{\gamma^\infty(X,Y)}\,\|v\|^2\sup_{\|x^*\|\leq 1}\sum_n\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\end{aligned}$$

Donc $w\circ u\circ v\in\gamma^{\infty}(X,Y)$ et $\|w\circ u\circ v\|_{\gamma^{\infty}(X,Y)}\leq\|v\|\,\|u\|_{\gamma^{\infty}(X,Y)}\,\|w\|$. $\square$

Proposition 6.1.4. *Soient K un compact, μ une mesure régulière borélienne, positive sur K et $1\leq p<\infty$. Pour tout $\varphi\in L_p(\mu)$, l'opérateur de multiplication $M_\varphi : C(K)\longrightarrow L_p(K,\mu) : f\longmapsto f\varphi$ est γ-sommant avec $\|\varphi\|_{L_p(K,\mu)}\leq\|M_\varphi\|_{\gamma^{\infty}(C(K),L_p(K,\mu))}\leq C^{\gamma}_{2,p}C^{\gamma}_{p,2}\|\varphi\|_{L_p(K,\mu)}$*

Démonstration. A chaque $k\in K$ est associé la mesure de Dirac $\delta_k\in C(K)^*$ qui vérifie $\langle\delta_k,f\rangle=f(k)$. L'ensemble $\{\delta_k : k\in K\}$ est un sous-ensemble normant dans la boule unité de $C(K)^*$, si f est continue sur K et $\|f\|_K=\max_{k\in K}|f(k)|$. Soit $(f_n)_{1\leq n\leq N}\subset C(K)$. D'après le lemme 1.3.2, on a :

$$\begin{aligned}
\|(f_n)\|_{\ell_2^{\text{faible}}(C(K))} &= \sup_{f^*\in C(K)^*}\left(\sum_n|\langle f^*,f_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sup_k\left(\sum_n|\langle\delta_k,f_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sup_k\left(\sum_n|f_n(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left\|\left(\sum_n|f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{C(K)}
\end{aligned}$$

Par suite, on a d'après la propriété 3.1.3

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left\|\sum_n\gamma_nM_\varphi f_n\right\|^2_{L_p(K,\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq C^{\gamma}_{2,p}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_n\gamma_nM_\varphi f_n\right\|^p_{L_p(K,\mu)}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C^{\gamma}_{2,p}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_n\gamma_n\varphi\cdot f_n\right\|^p_{L_p(K,\mu)}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C^{\gamma}_{2,p}\left(\mathbb{E}\int_K\left|\sum_n\gamma_nf_n(k)\varphi(k)\right|^p d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C^{\gamma}_{2,p}\left(\mathbb{E}\int_K|\varphi(k)|^p\left|\sum_n\gamma_nf_n(k)\right|^p d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C^{\gamma}_{2,p}\left(\int_K|\varphi(k)|^p\,\mathbb{E}\left|\sum_n\gamma_nf_n(k)\right|^p d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad d'après\ Fubini\\
&= C^{\gamma}_{2,p}\left(\int_K|\varphi(k)|^p\left[\left(\mathbb{E}\left|\sum_n\gamma_nf_n(k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left|\sum_n \gamma_n f_n(k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C^{\gamma}_{p,2}\left(\mathbb{E}\left|\sum_n \gamma_n f_n(k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C^{\gamma}_{p,2}\left(\sum_n \mathbb{E}\left|\gamma_n\right|^2\left|f_n(k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C^{\gamma}_{p,2}\left(\sum_n \left|f_n(k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\left[\left(\mathbb{E}\left|\sum_n \gamma_n f_n(k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \leq \left(C^{\gamma}_{p,2}\right)^p\left[\left(\sum_n \left|f_n(k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^p.$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_n \gamma_n M_\varphi f_n\right\|^2_{L_p(K,\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq C^{\gamma}_{2,p}C^{\gamma}_{p,2}\left(\int_K \left|\varphi(k)\right|^p\left(\sum_n \left|f_n(k)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C^{\gamma}_{2,p}C^{\gamma}_{p,2}\sup_{k\in K}\left(\sum_n \left|f_n(k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_K \left|\varphi(k)\right|^p d\mu(k)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C^{\gamma}_{2,p}C^{\gamma}_{p,2}\left\|\varphi\right\|_{L_p(K,\mu)}\cdot\left\|(f_n)\right\|_{\ell_2^{\text{faible}}(C(K))}\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\left\|\varphi\right\|_{L_p(K,\mu)} \leq \left\|M_\varphi\right\|_{\gamma^\infty(C(K),L_p(K,\mu))}$. Donc M_φ est γ-sommant et

$$\left\|\varphi\right\|_{L_p(K,\mu)} = \left\|M_\varphi\cdot 1\right\|_{L_p(K,\mu)} \leq \left\|M_\varphi\right\|_{\gamma^\infty(C(K),L_p(K,\mu))} \leq C^{\gamma}_{2,p}C^{\gamma}_{p,2}\left\|\varphi\right\|_{L_p(K,\mu)}$$

□

Il est à remarquer que $C^{\gamma}_{p,q} = 1$ si $p \leq q$ par l'inégalité de Hölder.

Corollaire 6.1.5. *Soient K un compact, μ une mesure régulière positive sur K et $1 \leq p < \infty$. L'application canonique $j_p : C(K) \longrightarrow L_p(K,\mu)$ est γ-sommante avec*

$$\left\|j_p\right\|_{\gamma^\infty(C(K),L_p(K,\mu))} \leq \mu(K)^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration. Il suffit de considérer que $\varphi = \mathbb{1}$ dans la proposition précédente. □

Lemme 6.1.6. *Soient $(\Omega,\sum,\mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $\varphi \in L_p(K,\mu)$, l'opérateur de multiplication $M_\varphi : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(K,\mu) : f \longmapsto f\varphi$ est γ-sommant avec*

$$\left\|M_\varphi\right\|_{\gamma^\infty(L_\infty(\mu),L_p(K,\mu))} \leq C^{\gamma}_{2,p}C^{\gamma}_{p,2}\left\|\varphi\right\|_{L_p(K,\mu)}$$

Démonstration. On a vu que $L_\infty(\mu)$ peut être considéré comme un espace de type $C(K)$. Donc la démonstration est analogue à celle de la proposition précédente. □

Corollaire 6.1.7. *Soit* $(\Omega, \sum, \mu)$ *un espace mesuré fini et* $1 \leq p < \infty$. *L'application* i_p : $L_\infty(\mu) \longrightarrow L_p(K,\mu)$ *est* γ*-sommante avec* $\left\| i_p \right\|_{\gamma^\infty(L_\infty(\mu), L_p(K,\mu))} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi = \mathbb{1}$ dans le théorème précédent. □

Lemme 6.1.8. *Soit* $1 \leq p < \infty$. *L'opérateur diagonal* $D_\lambda : \ell_\infty \longrightarrow \ell_p : (a_n) \longmapsto (\lambda_n a_n)$, *est* γ*-sommant avec* $\|D_\lambda\|_{\gamma^\infty(\ell_\infty, \ell_p)} \leq \|\lambda\|_{\ell_p}$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\ell_\infty = L_\infty(\mathbb{N}, \mu)$ avec μ la mesure de comptage. Par suite, il suffit d'utiliser la même démarche que le corollaire précédent tout en tenant compte que λ est dans $\ell_p = L_p(\mu)$. □

Théorème 6.1.9. *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. Alors* $\Pi_2(X,Y) \subset \gamma^\infty(X,Y)$.

Démonstration. Ceci résulte du théorème de factorisation de Pietsch(th1.3.12) et du principe d'idéal. □

Remarque 6.1.10. *Le théorème de factorisation de Pietsch reste valable pour les opérateurs* p*-sommants en remplaçant* $L_2(\mu)$ *par* $L_p(\mu)$. *On en déduit que* $\Pi_p(X,Y) \subset \gamma^\infty(X,Y)$ *pour* $1 \leq p < +\infty$.

6.2 Les opérateurs de Rademacher-bornés

On désigne de nouveau par $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite de Rademacher.

Soient X, Y deux espaces de Banach. On déduit immédiatement des inégalités de Kahane-Khintchine que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $p \geq 1$ et $c_p > 0$ tel que pour toute famille finie $\{x_1, \ldots, x_N\}$ d'éléments de X, on ait

$$\left[\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^N r_n(t) x_n \right\|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_p \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left[\sum_{n=1}^N |< x^*, x_n >|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(ii) Pour tout $p \geq 1$ il existe $c_p > 0$ tel que pour toute famille finie $\{x_1, \ldots, x_N\}$ d'éléments de X, on ait

$$\left[\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^N r_n(t) x_n \right\|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_p \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left[\sum_{n=1}^N |< x^*, x_n >|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ceci suggère la définition suivante.

Définition 6.2.1. *Soient* X, Y *deux espaces de Banach, et soit* $u : X \to Y$ *un opérateur linéaire. On dit que* u *est Rademacher-borné s'il existe* $c \geq 0$ *tel que l'on ait, pour toute famille finie* $\{x_1, \ldots, x_N\}$ *d'éléments de* X,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^N r_n(t) u(x_n) \right\|^2 dt \leq c^2 \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{n=1}^N |< x^*, x_n >|^2.$$

L'ensemble des opérateurs Rademacher-bornés de X dans Y est noté $rb(X,Y)$, et pour $u \in rb(X,Y)$ on note $\|u\|_{rb(X,Y)}$ le plus petit réel $c>0$ vérifiant l'inégalité ci-dessus pour toute famille finie $\{x_1,\dots,x_N\}$ d'éléments de X.

Il résulte immédiatement de la définition ci-dessus appliquée aux singletons que $rb(X,Y) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ et que $\|u\| \le \|u\|_{rb(X,Y)}$ pour tout $u \in rb(X,Y)$.

On va voir que la classe des opérateurs Rademacher-bornés coincide avec la classe des opérateurs γ-sommants. Ceci résulte de deux inégalités bien connues, voir ([19], prop 12.11 et lemme 12.14).

Proposition 6.2.2. *Soit $\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n$ une somme aléatoire dans un espace de Banach X avec $(\Omega,\sum,P)$ son espace de probabilité. Alors*
(i) Pour tout $\epsilon_1,\dots,\epsilon_N=\pm1$, $\left\|\sum_{n=1}^N \epsilon_n\gamma_n(\bullet)x_n\right\|$ et $\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n(\bullet)x_n\right\|$ ont la même distribution.
(ii) $\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n(\bullet)x_n\right\|$ et $\left\|\sum_{n=1}^N r_n(\bullet)\left|\gamma_n(\bullet)\right| x_n\right\|$ ont la même distribution.
En particulier, pour $0<p<+\infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n\right\|^p &= \int_0^1 \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)\gamma_n x_n\right\|^p dt\\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)\left|\gamma_n\right| x_n\right\|^p dt\end{aligned}$$

Lemme 6.2.3. *Soit $(x_1,\dots,x_N)$ une suite finie d'éléments d'un espace de Banach et soit $m_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ le moment d'ordre 1 défini par la formule (4.1). Alors on a*

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac12} \le \frac{1}{m_1}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n\right\|^2\right)^{\frac12}.$$

Démonstration. D'après la proposition 6.2.2, $\left\|\sum_{n=1}^N r_n(\bullet)\left|\gamma_n(\bullet)\right| x_n\right\|$ et $\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n(\bullet)x_n\right\|$ ont la même distribution. Donc

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac12} &= \frac{1}{m_1}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)\left(\mathbb{E}\left|\gamma_n\right| x_n\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac12}\\ &= \frac{1}{m_1}\left(\int_0^1 \left\|\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^N r_n(t)\left|\gamma_n\right| x_n\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac12}\\ &\le \frac{1}{m_1}\left(\int_0^1 \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)\left|\gamma_n\right| x_n\right\|\right)^2 dt\right)^{\frac12}\\ &\le \frac{1}{m_1}\left(\int_0^1 \mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)\left|\gamma_n\right| x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac12}\\ &= \frac{1}{m_1}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^N \gamma_n x_n\right\|^2\right)^{\frac12} \quad \square\end{aligned}$$

Lemme 6.2.4. *Soit X un espace de Banach. Soit $u : \ell_2^N \longrightarrow X$ un opérateur et soit $(e_1,\dots,e_N)$ la base canonique de ℓ_2^N. On a :*

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n u(e_n)\right\|^2 = \int_{O(n)}\int_0^1\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\,(u\circ v)\,(e_n)\right\|^2 dt\,d\nu_n(v)$$

où $O(n)$ désigne le groupe orthogonal d'ordre n et où ν_n désigne la mesure de Haar sur $O(n)$.

On a alors le résultat suivant.

Théorème 6.2.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach. On a $rb(X,Y) = \gamma^\infty(X,Y)$, et , pour $u \in \gamma^\infty(X,Y)$,*

$$m_1\|u\|_{rb(X,Y)} \le \|u\|_{\gamma^\infty(X,Y)} \le \|u\|_{rb(X,Y)}.$$

Démonstration. Il résulte du lemme 6.2.3 que $\gamma^\infty(X,Y) \subset rb(X,Y)$ et que

$$m_1\,\|u\|_{rb(X,Y)} \le \|u\|_{\gamma^\infty(X,Y)} \qquad \text{pour } u \in \gamma^\infty(X,Y).$$

Réciproquement, soit $u \in rb(X,Y)$ et soient $(x_1,\dots,x_N) \in X$. On définit $w : \ell_2^N \longrightarrow X$ par la formule $w(e_n) = x_n$ pour $1 \le n \le N$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\gamma_n u(x_n)\right\|^2 &= \int_{O(n)}\int_0^1\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\,(u\circ w\circ v)\,(e_n)\right\|^2 dt\,d\nu_n(v)\\
&\le \sup_{v\in O(n)}\|u\circ w\circ v\|^2_{rb(\ell_2^N,Y)}\\
&\le \|u\|^2_{rb(X,Y)}\sup_{v\in O(n)}\|v\|^2_{\mathscr{L}(\ell_2^N)}\,\|w\|^2_{\mathscr{L}(\ell_2^N,X)}
\end{aligned}$$

On a $\|v\|_{\mathscr{L}(\ell_2^N)} = 1\ \forall\ v \in O(n)$ et

$$\begin{aligned}
\|w\|_{\mathscr{L}(\ell_2^N,X)} &= \sup_{(\alpha_n)_1^n\in\ell_2^N}\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n x_n\right\|\\
&= \sup_{\|(\alpha_n)_1^N\|\le 1}\ \sup_{\|x^*\|\le 1}\left|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|\\
&\le \sup_{\|(\alpha_n)_1^N\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2\right)^{\frac12}\sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac12}\\
&= \sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*, x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac12}
\end{aligned}$$

Donc $u \in \gamma^\infty(X,Y)$ et $\|u\|_{\gamma^\infty(X,Y)} \le \|u\|_{rb(X,Y)}$. □

6.3 Les opérateurs presque sommants

Comme l'ont remarqué avant nous Blasco,Tarieladze et Vidal dans [1], le théorème 6.2.5 est énoncé de manière erronée au théorème 12.12 de l'ouvrage de Diestel, Jarchow et Tonge[8] à cause d'une confusion entre la classe des opérateurs presque sommants et la classe des opérateurs Rademacher-bornés. Pour éclaircir cette question nous aurons notamment besoin du résultat suivant.

Théorème 6.3.1. *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de X. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n x_n$ converge presque sûrement.

(ii) Il existe $p \geq 1$ tel que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n x_n$ converge dans $L^p([0,1],X)$.

(iii) La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n x_n$ converge dans $L^p([0,1],X)$ pour tout $p \geq 1$.

Les suites $(x_n)n \geq 1$ d'éléments de X vérifiant ces trois conditions sont appelées suites presque inconditionnellement sommables, et l'espace de ces suites est noté $R(X)$.([8], th 12.3, p 232).

On équipe $R(X)$ de la norme

$$\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R(X)} = \left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} r_n(t)x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si X est un espace de Banach on notera $c_{00}(X)$ l'ensemble des suites d'éléments de X nulles à partir d'un certain rang.

Proposition 6.3.2. *Soit X un espace de Banach. On note $R_b(X)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X vérifiant la condition*

$$\sup_{N\geq 1}\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)x_n\right\|^2 dt < +\infty,$$

et on pose, pour $(x_n)_{n\geq 1} \in R_b(X)$,

$$\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R_b(X)} = \sup_{N\geq 1}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors $(R_b(X), \|.\|_{R_b(X)})$ est un espace de Banach, $R(X)$ coincide avec l'adhérence dans $R_b(X)$ de $c_{00}(X)$, et $\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R(X)} = \|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R_b(X)}$ pour $(x_n)_{n\geq 1} \in R(X)$.

Démonstration. Il résulte du principe de contraction de Kahane (théorème 3.1.2) que l'on a, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X, pour toute partie finie A de $\mathbb{N}^*$ et pour toute partie finie B de $\mathbb{N}^*$ contenant A,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{n\in A} r_n(t)x_n\right\|^2 dt \leq \int_0^1 \left\|\sum_{n\in B} r_n(t)x_n\right\|^2 dt.$$

On obtient, pour $(x_n)_{n\geq 1} \in R_b(X)$,

$$\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R_b(X)} = \lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sup_{1\leq p<q<+\infty}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=p}^{q} r_n(t)x_n\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

et $\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R(X)} = \|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R_b(X)}$ pour $(x_n)_{n\geq 1} \in R(X)$.

De plus si $(x_n)_{n\geq 1} \in R_b(X)$, on a, pour $k \geq 1$,

$$\|x_k\| \leq \|(x_n)_{n\geq 1}\|_{R_b(X)}.$$

Soit $(x^{(m)})_{m\geq 1} = \left((x_n^{(m)})_{n\geq 1}\right)_{m\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $(R_b(X), \|.\|_{R_b(X)})$.

Alors $(x_n^{(m)})_{m\geq 1}$ est une suite de Cauchy d'éléments de X pour $n \geq 1$. Posons $x_n = \lim_{m\to\infty} x_n^{(m)}$, et $x = (x_n)_{n\geq 1}$.

Fixons $\epsilon > 0$, et soit $m_0 \geq 1$ tel que $\|x^{(m)} - x^{(m')}\|_{R_b(X)} < \epsilon$ pour $m' \geq m \geq m_0$. On a, pour $N \geq 1$, $m \geq m_0$,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)x_n - r_n(t)x_n^{(m)}\right\|^2 dt = \lim_{m'\to\infty}\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)x_n^{(m')} - r_n(t)x_n^{(m)}\right\|^2 dt \leq \epsilon^2.$$

Donc $x \in R_b(X), \|x - x_m\| \leq \epsilon$ pour $m \geq m_0$, ce qui prouve que $(R_b(X), \|.\|_{R_b(X)})$ est un espace de Banach.

Montrons maintenant que $R(X)$ coincide avec l'adhérence de $c_{00}(X)$ dans $R_b(X)$.
Pour $x = (x_n) \in R(X)$, $N \geq 1$, posons

$$P_N(x) = (x_n^{(N)})_{n\geq 1} \qquad \text{avec} \quad (x_n^{(N)})_{n\geq 1}\begin{cases} x_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

Alors $\|P_N(x)\|_{R_b(X)} \leq \|x\|_{R_b(X)} \quad \forall x \in R_b(X)$. Comme $R(X)$ est l'ensemble des éléments x de $R_b(X)$ tels que la suite $(P_N(x))_{N\geq 1}$ converge dans $(R_b(X), \|.\|_{R_b(X)})$, un argument élémentaire bien connu montre que $R(X)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $R_b(X)$. D'autre part $c_{00}(X) \subset R(X)$. Comme $\lim_{N\to\infty} \|x - P_N(x)\|_{R_b(X)} = 0$ pour $x \in R(X)$, on voit que $R(X)$ coincide avec l'adhérence de $c_{00}(X)$ dans $R_b(X)$ pour la norme $\|.\|_{R_b(X)}$. □

On introduit les définitions suivantes, où $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite de variables gaussiennes indépendantes sur un espace Ω.

Définition 6.3.3. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire.*

(1) On dit que u est presque sommant si $(u(x_n))_{n\geq 1} \in R(X)$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{faible}(X)$.

(2) On dit que u est γ-radonifiant si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n u(x_n)$ converge dans $L^2(\Omega, X)$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{faible}(X)$.

L'ensemble des opérateurs presque sommants de X dans Y est noté $\Pi_{ps}(X,Y)$, et l'ensemble des opérateurs γ-radonifiants de X dans Y est noté $\gamma(X,Y)$.

Pour $u \in \Pi_{ps}(X,Y)$, on note $\pi_{ps}(u)$ la plus petite constante $c \geq 0$ vérifiant, pour toute famille finie $\{x_1,\dots,x_N\}$ d'éléments de X,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)u(x_n)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{n=1}^N |<x^*,x_n>|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même on pose $\|u\|_{\gamma(X,Y)} = \|u\|_{\gamma^\infty(X,Y)}$ pour $u \in \gamma(X,Y)$. On a le résultat suivant.

Théorème 6.3.4. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Alors $\Pi_{ps}(X,Y)$ est un sous-espace fermé de $rb(X,Y)$ contenant les opérateurs de rang fini, $\gamma(X,Y) = \Pi_{ps}(X,Y)$ et on a, pour $u \in \Pi_{ps}(X,Y)$*

$$m_1\pi_{ps}(u) \leq \|u\|_{\gamma(X,Y)} \leq \pi_{ps}(u).$$

De plus si Y ne contient pas une copie de c_0, on a :

$$rb(X,Y) = \Pi_{ps}(X,Y) = \gamma^\infty(X,Y) = \gamma(X,Y).$$

Démonstration. Pour $u \in rb(X,Y)$ et $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(X)$, on pose $\tilde{u}((x_m)_{m\geq 1}) = (u(x_m))_{m\geq 1} \in R_b(Y)$. On va vérifier que $\|u\|_{rb(X,Y)} = \|\tilde{u}\|_{\mathscr{L}\left(\ell_2^{\text{faible}}(X),R_b(Y)\right)}$.
Soit $\{x_1,\dots,x_N\}$ une famille finie d'éléments de X. On pose $\|\tilde{u}\| = \|\tilde{u}\|_{\mathscr{L}\left(\ell_2^{\text{faible}}(X),R_b(Y)\right)}$ et $x_n = 0$ pour $n > N$. Alors $(x_n)_{n\geq 1} \in c_{00}(X) \subset R_b(X)$ et on a d'après le principe de contraction de Kahane

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)u(x_n)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &= \sup_{P\geq 1}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^P r_n(t)u(x_n)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|(u(x_n))_{n\geq 1}\|_{R_b(Y)}\\ &\leq \|\tilde{u}\|\,\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}(X)}\\ &= \|\tilde{u}\| \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{n=1}^N \left|\left\langle x^*,x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc $\|u\|_{rb(X,Y)} \leq \|\tilde{u}\|$.
Réciproquement, soit $\epsilon > 0$ et soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(X)$ tel que $\|(x_n)_{n\geq 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}(X)} = 1$ et $\|(u(x_n))_{n\geq 1}\|_{R_b(Y)} \geq \|\tilde{u}\| - \frac{\epsilon}{2}$. Donc

$$\sup_{N\geq 1}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)u(x_n)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq \|\tilde{u}\| - \frac{\epsilon}{2}$$

et il existe $N \geq 1$ tel que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^N r_n(t)u(x_n)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq \|\tilde{u}\| - \epsilon$$

avec

$$\sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*,x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|(x_n)_{n\ge 1}\|_{\ell_2^{\text{faible}}(X)} = 1.$$

Donc

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)u(x_n)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge (\|\tilde{u}\|-\epsilon)\sup_{\|x^*\|\le 1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\left\langle x^*,x_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $\|u\|_{rb(X,Y)} \ge \|\tilde{u}\|-\epsilon$. On a bien $\|u\|_{rb(X,Y)} \ge \|\tilde{u}\|$. Comme $R(Y)$ est un sous-espace fermé de $R_b(Y)$, l'ensemble

$$W = \left\{v \in \mathscr{L}\left(\ell_2^{\text{faible}}(X), R_b(Y)\right) : v\left(\ell_2^{\text{faible}}(X)\right) \subset R(Y)\right\}$$

est un fermé de $\mathscr{L}\left(\ell_2^{\text{faible}}(X), Y\right)$. Comme l'application $u \mapsto \tilde{u}$ est isométrique, ceci montre que $\Pi_{ps}(X,Y)$ est un fermé de $rb(X,Y)$.
Soit $x^* \in X^*$ et soit $(x_n)_{n\ge 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(X)$. On a $(x^*(x_n))_{n\ge 1} \in \ell^2$. Comme $(r_n)_{n\ge 1}$ est une famille orthonormale de $L^2[0,1]$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n x^*(x_n)$ converge dans $L^2[0,1]$.
Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur de rang fini. Donc on peut écrire $u = \sum_{m=1}^{M}\alpha_m^* \otimes \beta_m$. Si $(x_n)_{n\ge 1} \in \ell_2^{\text{faible}}(X)$, on a $\tilde{u}(x_n) = \left(\sum_{m=1}^{M}\alpha_m^*(x_n)\beta_m\right)_{n\ge 1}$. Comme les séries $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\alpha_m^*(x_n)\right)_{n\ge 1}$ convergent dans $L^2[0,1]$ pour $m = 1,\cdots M$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\tilde{u}(x_n)$ converge dans $L^2[0,1]$. Ainsi $rb(X,Y)$ contient les opérateurs de rang fini.
Par le lemme 6.2.4, $\gamma(X,Y) = \Pi_{ps}(X,Y)$.
Si Y ne contient pas une copie de c_0, le fait que $R(Y) = R_b(Y)$ résulte d'un théorème de Kwapien ([8]p255) on a alors $\Pi_{ps}(X,Y) = R_b(Y)$ et le théorème 12.12 de [8] est vrai dans ce contexte(mais faux en général). □

Le corollaire suivant donne une démonstration complète de la proposition 12.5 de [8]. La démonstration donnée dans[8] est entachée d'une confusion entre opérateurs Rademacher-bornés et opérateurs presque sommants.

Corollaire 6.3.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach et $p \ge 1$. Alors tout opérateur p-sommant $u : X \longrightarrow Y$ est presque sommant.*

Démonstration. Comme $\Pi_1(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y)$ pour tout $p \ge 1$, on peut supposer que $p > 1$. D'après le théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs p-sommants (voir[8],corollaire 2.14), on a : $u = v \circ j_p \circ w$ avec K compact et $w : X \longrightarrow C(K)$ et $v : L^p(K,\mu) \longrightarrow Y$ linéaire continu, où j_p désigne l'injection canonique de $C(K)$ dans $L^p(K,\mu)$ pour une mesure de Radon positive μ sur K. On sait que $j_p \in \gamma^\infty\left(C(K), L^p(K,\mu)\right) = rb\left(C(K), L^p(K,\mu)\right)$. Comme $L^p(K,\mu)$ est un espace de Banach reflexif, il ne contient pas une copie de c_0. Donc $j_p \in \gamma\left(C(K), L^p(K,\mu)\right) = \Pi_{ps}\left(C(K), L^p(K,\mu)\right)$ et il résulte du principe d'idéal que u est presque sommant. □

On voit donc que l'on dispose de plusieurs généralisations naturelles de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt aux espaces de Banach.

- Les classes $\Pi_p(X,Y)$ des opérateurs p-sommants de X dans Y $(1 \le p < +\infty)$
- La classe $\Pi_{ps}(X,Y)$ des opérateurs presque sommants de X dans Y, qui coincide avec la classe $\gamma(X,Y)$ des opérateurs γ-radonifiants de X dans Y.

– La classe des opérateurs faible $*$ 1-nucléaires de X dans Y.

On sait que $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$ si $1 \leq p \leq q$, et on a $\cup_{p\geq 1}\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_{ps}(X,Y)$ (en d'autres termes, tout opérateur sommant est presque sommant). Toutes ces classes coincident avec la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt si X et Y sont des espaces de Hilbert ; ainsi que les classes des opérateurs $u : X \longrightarrow Y$ telles que $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$ appartiennent à une des classes ci-dessus par rapport à Y^* et X^*.

Questions ouvertes

1. Il serait intéressant d'étudier des conditions garantissant que le produit $v \circ u$ est nucléaire quand v et u appartiennent à des classes ci-dessus. Par exemple, il est classique $v \circ u$ est nucléaire si v et u sont 2-sommants (voir th 5.16).
2. On sait que tout opérateur p-sommant est faiblement compact et complètement continu, c'est à dire transforme une suite convergeant faiblement vers 0 en une suite convergeant en norme vers 0. On en déduit que si u est p-sommant et si v est q-sommant, alors $v \circ u$ est compact. Si H est un Hilbert séparable, tout opérateur presque sommant est limite en norme d'opérateurs de rang fini, donc tout opérateur presque sommant est compact. Il serait très intéressant d'étudier pour quelles classes d'espaces X et Y les opérateurs presque sommants de X dans Y sont compacts.

Bibliographie

[1] Blasco, O. ; Tarieladze, V. ; and Vidal, R. *K-convexity and duality for almost summing operators*. Georgian Mathematical Journal Volume 7(2000), Number 2, 245-268.

[2] Bonsall, F.F and Ducan, J. Complete normed algebras-Springer Verlag, 1973.

[3] Cohen, J. S. *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates*. Math. Ann. 201 (1973), 177-200.

[4] Diestel,J., Jarchow,H., Tonge.A. Fundamentals of p-summing operators.

[5] Diestel, J. *An elementary characterization of absolutely summing operators*.Math. Ann. 196 (1972), 101105.

[6] Diestel, J.(1-KNTS2). Sequences and series in Banach spaces.Graduate Texts in Mathematics,92.Springer-Verlag, New York, 1984.

[7] Cross.L *Measurable functions on Hilbrt spaces*. Trans.Amer.Math.Soc. 105(1962), 372-390

[8] Diestel, J. ; Jarchow, H. ; Tonge, A. Absolutely summing operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[9] Diestel,J. ; Jarchow,H ; Pietsch,A.*Operator ideals*. Handbook of the geometry of Banach spaces,vol.I, 437-496, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[10] Garth Dales,H. Banach Algebras and Automatic Continuity.

[11] Garling, D. J. H. Absolutely p-summing operators in Hilbert space.Studia Math. 38 1970 319331.

[12] Grothendieck, A. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. (French) [Summary of the metric theory of topological tensor products]*. Reprint of Bol. Soc. Mat. So Paulo 8 (1953), 1–79.

[13] Grothendieck, A. *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*. (French) Ann. Inst. Fourier Grenoble 4 (1952), 73112 (1954).

[14] Grothendieck, A. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers. (French) [Some classes of sequences in Banach spaces, and the Dvoretsky-Rogers theorem]With a foreword by Paulo Cordaro*. Reprint of the 1953 original.Resenhas 3 (1998), no. 4, 447477.

[15] Grothendieck, A. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K).* (French) Canadian J. Math. 5, (1953). 129173.

[16] Grothendieck, A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. (French) [topological tensor products and nuclear spaces]* Séminaire Bourbaki, Vol. 2, Exp. No. 69, 193200, Soc. Math. France, Paris, 1995, 46M05 (46A11).

[17] Grothendieck, A. *Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques.* (French) Segundo symposium sobre algunos problemas matemticos que se estn estudiando en Latino Amrica, Julio, 1954, pp. 173177. Centro de Cooperacin Cientfica de la UNESCO para Amrica Latina, Montevideo, Uruguay, 1954.

[18] Gilles, P. *Grothendieck's theorem, past and present*Bull of the AMS, 49, 2(2012),237-329.

[19] Hoffmann-J. *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Math. 52(1974), 159 – 186.

[20] Jarchow, H. *On Hilbert-Schmidt spaces.* Proceedings of the 10th Winter School on Abstract Analysis (Srn, 1982).46B20 (47B10)

[21] Jarchow, H. *Absolutely summing composition operators.* Functional analysis (Essen, 1991), 193202, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 150, Dekker, New York, 1994.

[22] Jarchow, H. *Factoring absolutely summing operators through Hilbert-Schmidt operators.* Glasgow Math. J. 31 (1989), no. 2, 131135.

[23] Kwapien', S. *On operators factorizable through Lp space.* Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux (Univ. de Bordeaux, 1971), pp. 215225. Bull. Soc. Math. France, Mem. No. 3132, Soc. Math. France, Paris, 1972.47B10 (46E30).

[24] Kahane,J-P. "Some Random Series of Functions", second ed.,Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.5, Cambridge University Press,Cambridge, 1985. bibitemLap1 Lapresté, J.-T. *Opérateurs sommants et factorisations à travers les espaces Lp.* (French) Studia Math. 57 (1976).

[25] Lapresté, J.-T. *Opérateurs se factorisant par un espace Lp* d'après S. Kwapien'. (French) Sminaire Maurey–Schwartz anne 1972-1973 : *Espaces Lp et applications radonifiantes*, Exp. No. 16, 17 pp. Centre de Math., cole Polytech., Paris, 1973.

[26] Lapresté, J-T. *Sur une généralisation de la notion d'opérateurs nucléaires et sommants dans les espaces de Banach.* (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B 275 (1972), A45A48.

[27] Latala, R. ; and Oleszkiewicz,K. *On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality*,Studia Math.109(1994), n.1, 101-104.

[28] Lindenstrauss, J. *Extension of compact operators.* Mem. Amer. Math. Soc. No. 48 1964 112 pp.

[29] Lindenstrauss, J. *Some results on the extension of operators.* Bull. Amer. Math. Soc. 69 1963 582586. (Reviewer : A. E. Taylor),47.10 (46.10).

[30] Lindenstrauss, J. *On the extension property for compact operators.* Bull. Amer. Math. Soc. 68 1962 484487. (Reviewer : A. E. Taylor),47.45.

[31] Lindenstrauss, J. ; Rosenthal, H. P. *The Lp spaces.* Israel J. Math.7 1969 325349. (Reviewer : A. Pelczyn'ski), 46.10.

[32] Lindenstrauss, J. ; Wulbert, D., E. *On the classification of the Banach spaces whose duals are L1 spaces.* J. Functional Analysis 4 1969 332349.

[33] Lindenstrauss, J. ; Pelczynski, A. Absolutely summing operators in Lp-spaces and their applications.Studia Math. 29 1968 275326.

[34] Pietsch, A.*Absolut p-Summiernde Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. 28 1966/1967 333-353.

[35] Linde, W. and Pietsch, A. *Mappings of Gaussian measures of cylindrical sets in Banach Spaces*, Teor.Verojatnost.i Primenen.19(1974), 472-487, English translation in Theory Probab.Appl.19(1974), 445-460.

[36] Makarov, B. M. (RS-STPT) *p-absolutely summing operators and some of their applications.* (Russian) Algebra i Analiz 3 (1991), no. 2, 1–76 ; translation in St. Petersburg Math. J. 3 (1992), no. 2, 22729847B10 (42C15 46B20).

[37] Maurey, B. *Sur certaines propriétés des opérateurs sommants.* (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B 277 (1973). bibitemPisier2 Maurey, B. and G. Pisier. *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. 58, No. 1, 4590 (1976).

[38] Nguyen, D. T. ; Tarieladze, V. I., and Vidal, R. *On summing and related operators acting from a Hilbert space.*Bull. Polish Acad. Sci. 46(1998),N°.4,365-375.

[39] Nguyen, D. T. ; and Vidal, R. *Convergence of the Rademacher series in a Banach space.* Vietnam J. Math. 26(1998), 71-85.

[40] Paul, K. *Classes d'opérateurs à puissances nucléaires.*Seminaire Paul Krée, tome 2 (1975 – 1976),exp.n°4, *P.* 1 – 12

[41] Pietsch, A. and Wenzel, J. Orthonormal systems and Banach space geometry.Cambridge University Press, cambridge, 1998.

[42] Pisier, G. *Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert.* (French)Ann. Sci. cole Norm. sup. (4) 13 (1980),no.1, 2343.

[43] Rietz, R. E. *A proof of the Grothendieck inequality.*Israel J. Math. 19 (1974), 271276.46B99.

[44] Tonge, A. Errata : *"Sur les algèbres de Banach et les opérateurs p-sommants"* (Séminaire Maurey-Schwartz 1975–1976 : *Espaces Lp, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*, Exp. No. 13, Centre Math., cole Polytech., Palaiseau, 1976). (French) Sminaire Maurey-Schwartz (1975–1976) :*Espaces Lp, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*, Annexe No. 4, 1 p. Centre Math., cole Polytech., Palaisseau, 1976.

[45] Tzafriri, L. *On the type and cotype of Banach spaces.*Israel J. Math. 32 (1979), no. 1, 3238.

[46] Van Neerven, J. Stochastic Evolution Equations.ISEM Lecture Notes 2007/08. April,18,2008.

[47] Van Neerven, J. γ-Radoniyfing Operators -A SURVEY.

[48] Van Neerven, J. ; Veraar, M. C. ; Weis, L. *Stochastic evolution equations in UMD Banach spaces.* J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 4, 940993.

[49] van Neerven, J. ; Veraar, M.C and Weis, L. *Stochastic integration in UMD Banach spaces*, Ann. Probab. 35, No. 4, 14381478 (2007).

[50] van Neerven, J. and Weis, L. *Stochastic integration of functions with values in a Banach space*, Studia Math. 166, No. 2, 131170 (2005).

[51] Van Neerven, J. and Weis, L. *Weak limits and integrals of Gaussian covariances in Banach spaces*, Probab. Math. Statist. 25, 3352 (2005).

[52] Wong, T. K. *On a class of absolutely p-summing operators.* Studia Math. 39 (1971), 181189.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'extension au cadre Banachique de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt.
Dans un premier temps, on étudie d'une part les opérateurs p-sommants dans un espace de Banach X vers un autre espace de Banach Y et d'autre part, les opérateurs γ-radonifiants dans un espace de Hilbert vers un autre espace de Banach.
Dans un second temps, on s'interesse aux opérateurs γ-sommants dans des espaces de Banach, qui coincident avec les opérateurs de Rademacher-bornés, ce qui nous amène aux opérateurs presque sommants.
Enfin, on en déduit plusieurs généralisations naturelles de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt aux espaces de Banach.
- Les classes des opérateurs p-sommants de X dans Y.
- La classe des opérateurs presque sommants de X dans Y qui coincide avec la classe des opérateurs γ-radonifiants de X dans Y.
- La classe des opérateurs faible$*$ 1-nucléaires de X dans Y.

Mots clés : Espaces de Banach, opérateurs de Hilbert-Schmidt, opérateurs presque sommants.

Abstract

This thesis is devoted to extending the notion of Banach Hilbert-Schmidt operator to the framework of Banach spaces.
In a first step, we study p-summing operators from a Banach space X into a Banach space Y and γ-radoniyfing operators from a Hilbert space into a Banach space.
In a second step, we discuss γ-summing operators between Banach spaces, which coincide with Rademacher-bounded operators, which leads to the notion of almost summing operators.
Finally, we present serval natural generalizations of the notion of Hilbert-Schmidt operator to Banach spaces.
- Classes of p-summing operators from X into Y.
- The class of almost summing operators from X into Y, which coincides with the class of γ-radoniyfing operators from X into Y.
- The class of weak$*$ 1-nuclear operators from X into Y.

Keywords : Banach spaces, Hilbert-Schmidt operators, almost summing operators