

AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX MARSEILLE**

Spécialité : Mécanique et Physique des Fluides

École Doctorale : Sciences pour l'Ingénieur : Physique, Mécanique, Micro et Nanoélectronique.

présentée par

**Pierre-Yves PASSAGIA**

**Instabilités d'écoulements décollés  
et leur contrôle**

soutenue le 9 Juillet 2012 devant le jury composé de

Olivier	CADOT	<i>rapporteur</i>
François	CHARRU	
Emmanuel	CREUSÉ	<i>rapporteur</i>
Uwe	EHRENSTEIN	<i>directeur de thèse</i>
Thomas	LEWEKE	<i>co-directeur de thèse</i>
Jean-Christophe	ROBINET	



*« Le mieux est l'ennemi du bien,  
»*

*Voltaire, La Bégueule, 1779*

---



## Remerciements

*Mes remerciement vont tout d'abord à Uwe Ehrenstein pour le temps et l'attention que tu as consacré à mes travaux ainsi que ton ouverture d'esprit, tes conseils et ta confiance. Je garderai en mémoire les citations et autres références à la culture française que tu auras été le premier à me faire apprécier.*

*Je voudrais ensuite remercier Thomas Leweke pour m'avoir initié aux techniques expérimentales et encadré pendant trois ans. Je retiendrai les moments passés à regarder du colorant en mouvement, ponctués de grands silences, jusqu'à ce qu'une exclamation vienne dénouer le mystère.*

*Je remercie les rapporteurs : Emmanuel Creusé et Olivier Cadot pour l'intérêt et les remarques apportés à ce travail, ainsi que Jean-Christophe Robinet pour avoir fait parti du jury et François Charru pour avoir accepté de le présider.*

*Merci à Eric Portal, Mathieu Roy, Raymond Vaudo, Jacky Minelli et Hubert Ekongolo N'Kake pour avoir réalisé le banc expérimental ainsi que pour toutes les solutions techniques qu'ils m'ont apportées durant mes travaux. Merci aux personnels techniques et administratifs du laboratoire pour leur bonne humeur à chaque demande que le leur aie adressé. Notamment Lucienne, "madame voyages", pour son aide pendant et après chaque mission.*

*Je souhaite particulièrement remercier mes parents pour avoir toujours été présent quand il le fallait ainsi que pour leur soutiens moral et financier pendant ces quatre années.*

*Merci aux doctorants : Wietze, Romain, Julien, Guillaume, Henri, David, Alban, Bastien, Marie-Laure, Mohamed, Oriane, Edouard, Sylvian, Adrien, Florine... particulièrement Hadrien Bolnot pour m'avoir supporté deux semaines durant pour faire rouler une bille... ainsi que tous les autres étudiants que je n'ai pas cité, pour les moments partagés au sein (et en dehors) du laboratoire.*

*Enfin, merci à Gaëlle Armani pour son soutien pendant la phase de rédaction ainsi que de m'avoir permis de me réaliser au travers d'une autre activité que mon travail. Merci à Mercedes Johnson et Josh Bowlin pour leur accueil et leur dévotion de l'autre côté du monde, Yoann Arthaud pour m'avoir suivi depuis toutes ces années, Sarah Pernet pour les leçons de Tango et Paulina Novotna pour m'avoir soutenu et motivé au début de cette thèse.*

*Bonne lecture*

---



---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction générale . . . . .	11
1.2	Configuration étudiée . . . . .	20
1.3	Résultats numériques antérieurs . . . . .	21
1.3.1	Battement basse fréquence . . . . .	22
1.3.2	Instabilité transverse . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Étude expérimentale</b>	<b>29</b>
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	29
2.2	Étude expérimentale . . . . .	37
2.2.1	Techniques de mesures . . . . .	37
2.2.2	Écoulement stationnaire . . . . .	37
2.2.3	Instabilité tridimensionnelle . . . . .	40
2.2.4	Mesures dans le plan transverse et modes POD . . . . .	41
2.2.5	Battement basse fréquence . . . . .	44
2.2.6	Dynamique basse fréquence . . . . .	45
2.2.7	Décomposition en modes dynamiques . . . . .	48
2.3	Discussion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Contrôle en boucle fermée : Modes globaux et réduction de modèle</b>	<b>53</b>
3.1	Calcul de l'état de base et des modes globaux . . . . .	53
3.2	Méthodologie de contrôle rétroactif . . . . .	57
3.3	Projection sur les modes . . . . .	58
3.3.1	Méthode de projection . . . . .	59
3.3.1.1	Spectre global . . . . .	59
3.3.1.2	Projection bi-orthogonale . . . . .	59
3.3.1.3	Projection orthogonale, méthode de Gram-Schmidt. . . . .	61
3.3.1.4	Méthode des moindres carrés . . . . .	61

---

---

3.4	Analyse d'erreur, algorithme et sélection des modes . . . . .	62
3.4.1	Algorithme de projection . . . . .	63
3.4.2	Sélection des modes . . . . .	63
3.5	Gains de contrôle et d'estimation . . . . .	64
3.6	Contrôle de la dynamique . . . . .	66
3.6.1	Résultats à $Re = 590$ . . . . .	66
3.6.2	Résultats à $Re = 690$ . . . . .	68
3.7	Discussion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Contrôle par optimisation Lagrangienne</b>	<b>71</b>
4.1	Méthodes numériques en vue de l'optimisation sous contrainte . . . . .	71
4.1.1	Discrétisations . . . . .	72
4.1.2	Conditions aux limites pour le système de Navier-Stokes . . . . .	73
4.1.3	Méthode de la matrice d'influence . . . . .	73
4.1.4	Calcul de l'écoulement de base . . . . .	74
4.2	Système adjoint et optimalité . . . . .	76
4.2.1	Équations adjointes . . . . .	76
4.2.2	Conditions aux limites pour le système direct-adjoint . . . . .	77
4.2.3	Gradient de plus grande pente . . . . .	78
4.3	Méthode du gradient et recherche du pas optimal . . . . .	80
4.4	Perturbations optimales . . . . .	83
4.4.1	Étude de la dynamique linéaire . . . . .	83
4.4.2	Effet des non linéarités . . . . .	84
4.5	Contrôle optimal . . . . .	86
4.5.1	Contrôle de la dynamique convectivement instable : croissance transitoire . . . . .	86
4.5.2	Contrôle de l'écoulement instable . . . . .	88
4.5.2.1	Contrôle de la dynamique linéaire . . . . .	88
4.5.2.2	Contrôle de la dynamique non linéaire . . . . .	90
4.6	Discussion . . . . .	93
	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Annexe au chapitre 2</b>	<b>101</b>
A.1	Notions de couche limite laminaire . . . . .	101
A.2	Décomposition orthogonale en modes propres . . . . .	103

---

---

A.3	Décomposition en modes dynamiques . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Annexe au chapitre 3</b>	<b>107</b>
B.1	Méthode d'Arnoldi pour le calcul des valeurs propres . . . . .	107
B.2	Algorithme ' <i>shift and invert</i> ' . . . . .	109
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

---



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Introduction générale

Le décollement revêt une importance fondamentale en aérodynamique et en hydrodynamique, car il s'agit d'un phénomène presque inévitable dès lors qu'un obstacle est disposé dans un écoulement. Ce n'est que pour de très faibles nombres de Reynolds (rapport entre forces inertielles et forces visqueuses) qu'un écoulement proche-paroi suit naturellement les contours de l'objet immergé. Lorsque la géométrie présente un élargissement, le fluide décélère et la pression augmente, ce qui conduit à un gradient de pression adverse qui s'oppose à l'écoulement dans la couche limite. Si ce gradient de pression est suffisamment fort, il peut renverser l'écoulement et provoquer le décollement de la couche limite. Les zones de recirculation ainsi créées se déstabilisent rapidement, donnant lieu à un lâcher de tourbillons illustré par exemple par H. Werlé dans l'ouvrage de Van Dyke (1982, 24-27). Un exemple d'écoulement décollé au dessus d'une voiture est présenté dans la figure 1.1(a). La fumée permet ici de visualiser l'apparition d'une fine zone de décollement du fluide sur le toit du véhicule qui s'étend bien après la lunette arrière. Ce même type de phénomène peut se produire lors des phases de décollage et d'atterrissage d'un avion. L'écoulement décollé conduit à une diminution de la portance et une augmentation de la traînée. Pour des ailes à très forts angles d'incidence, ce phénomène peut conduire à une brusque chute de la portance, connu sous le nom de décrochage aérodynamique (voir figure 1.1(b)). Le décollement peut aussi être observé sur plaque plane dans des configurations d'écoulements compressible, par exemple dans le cas d'une interaction choc-couche limite. L'onde de choc interagit avec la zone de recirculation et produit des oscillations à basse fréquence qui sont source de fatigue pour les structures mécaniques, et dont l'origine n'est encore que

---

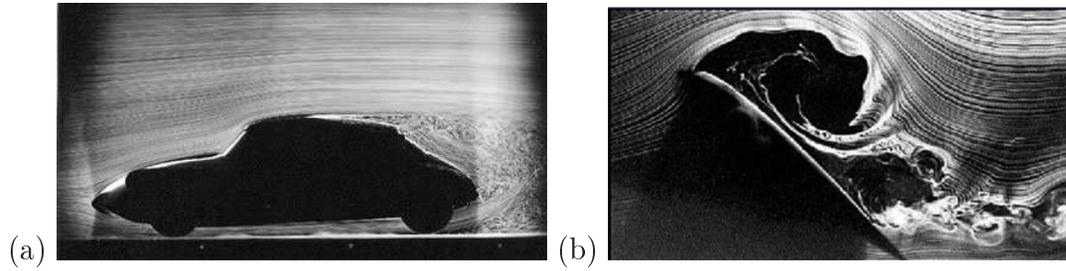


FIGURE 1.1 – Écoulement d’air autour d’une voiture (a) et d’une aile d’avion à forte incidence (b) mis en évidence par injection de fumée (Werlé, 1974).

partiellement comprise.

La maîtrise et le contrôle de ces instabilités nécessitent une phase d’analyse et de compréhension du phénomène physique associé. La recherche de la suppression de ces phénomènes oscillatoires, essentiellement étudiés sur des configurations modèles, présente des applications multiples et des enjeux industriels importants (Gad-El-Hak & Bushnell, 1991).

## Phénoménologie

Les écoulements laminaires décollés sont soumis à plusieurs types d’instabilités. Dans un premier temps, il convient de définir certaines notions. L’étude de stabilité d’un écoulement cherche à déterminer sa réponse à des perturbations. Dans cette étude, on considère trois cas de figure : soit toutes les perturbations décroissent en amplitude et la dynamique est dite stable. Soit l’écoulement amplifie les perturbations en les advectant ensuite vers la sortie, on parle alors d’une dynamique convectivement instable. Soit la perturbation s’établit dans un régime auto-entretenu qui s’amplifie au cours du temps, on parle alors d’une dynamique globalement instable (Charru, 2007). Les bulles de recirculation sont connues pour être convectivement et globalement instables et la figure 1.2(b), illustre la géométrie du décollement. L’écoulement de couche limite incident est convectivement instable et les perturbations de faibles amplitudes, localisées près de la paroi, donnent naissance à des ondes bidimensionnelles dites de Tollmien-Schlichting (Schlichting, 1968). Le profil de couche limite se déforme sous l’effet du gradient de pression et marque le début d’un écoulement retour. Ce point dénote le début de la zone de recirculation où les profils de vitesse marquent un point d’inflexion. Ce point d’inflexion est siège

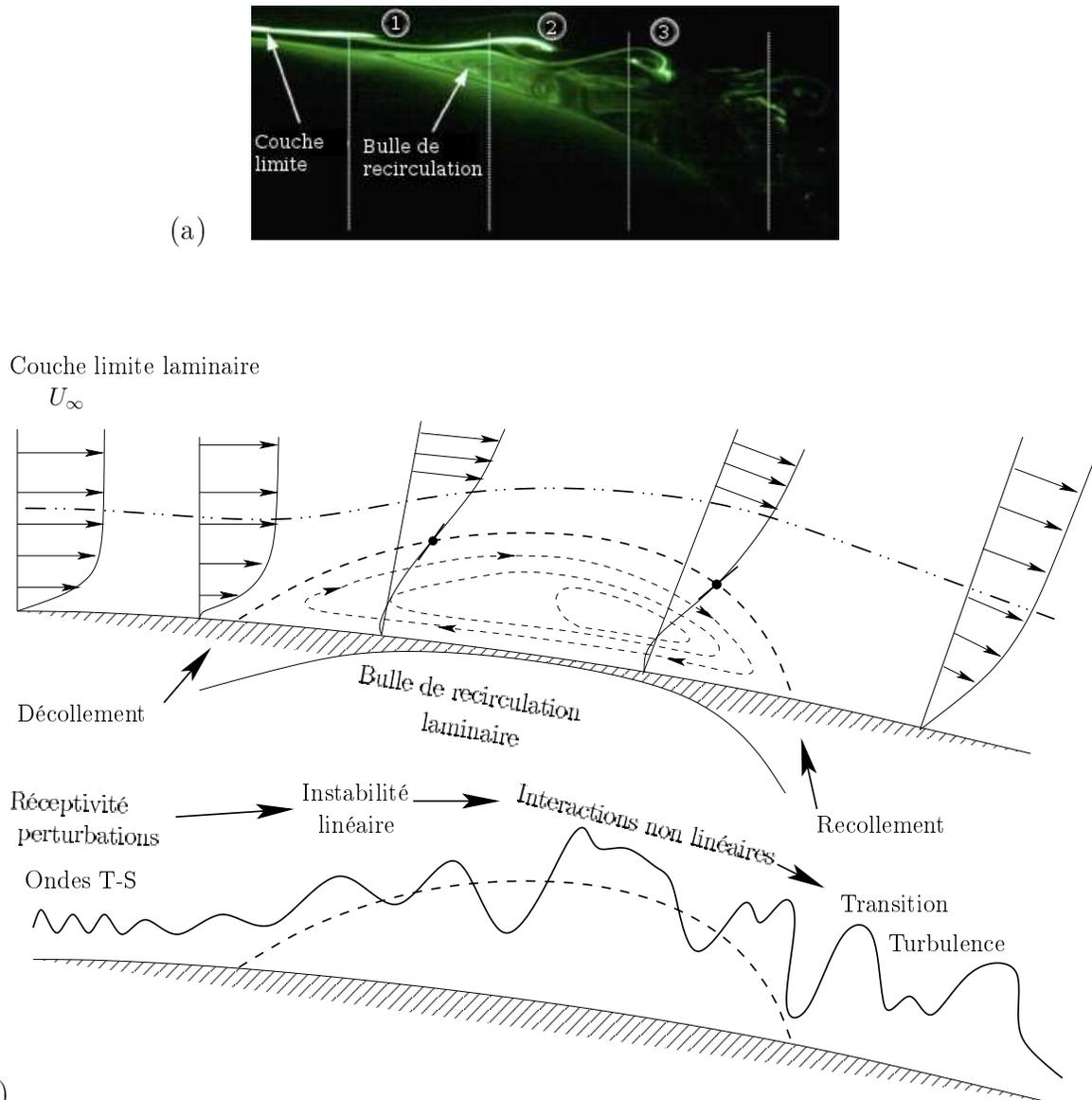


FIGURE 1.2 – Visualisation d'un écoulement décollé (a) montrant : (1) le décollement, (2) la transition et (3) la turbulence (Beheshti *et al.*, 2008). Schéma d'une couche limite décollée (b) d'après Hoefener & Nitsche (2007).

d'une autre instabilité convective, dite de Kelvin-Helmholtz, qui amplifie les perturbations (Schmid & Henningson, 2001) issues de la couche limite et peut conduire rapidement à la transition vers la turbulence. En plus de ces instabilités convectives, l'écoulement décollé est soumis à deux instabilités globales. À l'intérieur de la zone de recirculation, l'écoulement décrit des lignes de courant fermées qui peuvent être siège d'instabilités elliptiques (Bayly, 1981) ou centrifuges (Drazin & Reid, 1981). Si le critère de circulation de Rayleigh est vérifié sur l'intégralité d'une ligne de courant,

un gradient de pression normal aux lignes de courant apparaît et donne lieu à un écoulement tridimensionnel stationnaire, observé par exemple dans l'expérience de Häggmark *et al.* (2000) ou de Beaudoin *et al.* (2004). Or, ce mécanisme non oscillatoire ne permet pas d'expliquer les oscillations basse fréquence mentionnées par Dovgal *et al.* (1994). L'analyse de stabilité locale d'un archétype de cet écoulement de recirculation a été entreprise par exemple par Hammond & Redekopp (1998) et Marquillie & Ehrenstein (2003), mais ces analyses n'ont pas permis de mettre en évidence une zone d'instabilité absolue au sein de la bulle de recirculation. Étant donné le caractère fortement non parallèle de la géométrie de l'écoulement, l'étude de stabilité locale basée sur une hypothèse d'écoulement faiblement non parallèle semble tomber en défaut et des méthodes globales doivent être mises en œuvre afin d'examiner la stabilité de cet écoulement.

## Archétypes d'écoulements décollés

Le décollement induit par la géométrie de l'écoulement, illustré dans la figure 1.3(a) a été principalement étudié dans le cas d'une marche descendante d'un point de vue expérimental (Sinha *et al.*, 1981; Armaly *et al.*, 1983; Beaudoin *et al.*, 2004) mais aussi d'un point de vue numérique (Barkley *et al.*, 2002; Kaiktsis *et al.*, 1996; Barkley *et al.*, 2002; Marquet *et al.*, 2008; Lanzerstorfer & Kuhlmann, 2012). Les études numériques ont montré que la dynamique bidimensionnelle n'était que convectivement instable, et qu'une instabilité tridimensionnelle (de type centrifuge) était responsable de la première transition observée dans l'expérience. Or, aucune étude sur cette configuration n'a permis d'observer le battement basse fréquence de la zone de recirculation observé dans les écoulements de couches limites décollées (Dovgal *et al.*, 1994). Afin d'observer ce type d'instabilité, deux dispositifs peuvent être envisagés. La première solution consiste à imposer un gradient de pression. Cela revient à créer une dépression (une aspiration), au dessus d'une plaque plane. Dans cette configuration, l'écoulement le long de la plaque se trouve aspiré dans la direction normale à la paroi, formant une zone de recirculation. Ainsi l'expérience de Von Doenhoff (1938) a permis la première caractérisation de la structure d'une bulle de recirculation (illustrée dans la figure 1.2(a)-(b)). Ces travaux ont ensuite été étendus par Gaster (1966) qui a utilisé un haut parleur afin d'évaluer la réceptivité de cet écoulement à un forçage. Ce n'est que bien plus tard que les premières mesures de Cherry *et al.* (1984), puis de Häggmark *et al.* (2000), ont permis de mettre en

---

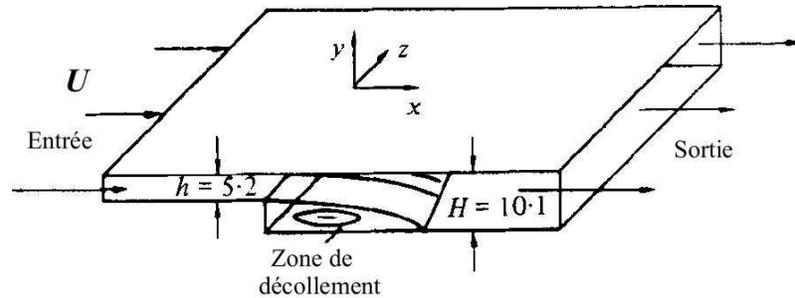


FIGURE 1.3 – Schéma de l'écoulement décollé au-dessus d'une marche descendante d'après Armaly *et al.* (1983).

évidence un mouvement d'oscillations globales basse fréquence de la zone de recirculation, sans toutefois apporter des éléments de réponse sur l'origine du phénomène. Une autre possibilité pour créer ce même type de décollement consiste à modifier localement la géométrie de la plaque, par l'ajout d'une bosse ou d'une cavité. Dans le cas de la bosse, l'écoulement est dans un premier temps accéléré sur la partie montante. Une fois au sommet, l'écoulement décélère et décolle de la paroi pour recoller plus en aval sur la plaque plane, créant ainsi une zone de recirculation (voir figure 1.4). Cette géométrie a été étudiée numériquement par Marquillie & Ehrenstein (2003) qui rapportent aussi l'existence d'une instabilité basse fréquence. L'étude de stabilité globale de cette géométrie (Ehrenstein & Gallaire, 2008) a permis de montrer que l'écoulement bidimensionnel présentait une dynamique de perturbation linéaire basse fréquence globalement instable. La stabilité tridimensionnelle a aussi été étudiée (Gallaire *et al.*, 2007), mais bien que l'instabilité centrifuge soit aussi présente, les taux de croissance sont tellement faibles qu'ils ne semblent pas en mesure d'affecter la dynamique basse fréquence. C'est n'est que plus récemment que les études équivalentes de Cherubini *et al.* (2010*b,c*) ont permis de confirmer ces mêmes scénarios, dans le cas où le décollement est provoqué par un gradient de pression sur plaque plane.

Les études sur le décollement dans le régime compressible (Crouch *et al.*, 2009; Piponniau *et al.*, 2009) ont permis de montrer que le battement basse fréquence était inhérent aux écoulement de couche limite décollées. Dans le régime incompressible, les études expérimentales n'ont pas abordé le sujet de la dynamique basse fréquence et le premier volet de la thèse est consacré à cette étude.

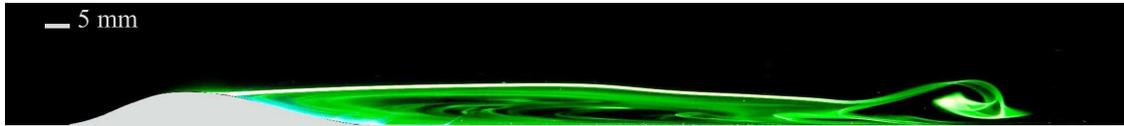


FIGURE 1.4 – Visualisation d’une bulle de recirculation allongée en amont de la bosse (issue de l’étude expérimentale du chapitre 2).

## Contrôle rétroactif d’instabilités

L’optimisation et le contrôle de cet écoulement constituent le deuxième volet de la thèse où des solutions pour atténuer, voir supprimer ces instabilités sont proposées. Le contrôle de la transition en mécanique des fluides est l’un des axes majeurs de recherche, étant donné qu’aucune des solutions proposées n’a encore permis de relaminariser un écoulement turbulent dans une expérience. Cependant certains concepts issus de l’optimisation sous contrainte (Gunzburger, 2003) semblent indiquer que le contrôle d’une telle dynamique est possible (Bewley, 2001). La réalisation de ces concepts permettrait des avancées majeures, avec des applications industrielles multiples.

La stratégie de contrôle la plus efficace consiste en un asservissement en boucle fermée (Bewley, 2001) entre un actionneur et une mesure. Cet asservissement de la dynamique instable est abordé ici suivant deux approches complémentaires. La réduction de modèle permettra de juger des possibilités d’un contrôle optimal rétroactif basé sur la dynamique linéaire. Le contrôle est ensuite abordé suivant une procédure d’optimisation sous contraintes qui permet de tenir compte de la dynamique non linéaire pour le calcul des lois de contrôle.

## Contrôle rétroactif par réduction de modèle

Depuis ces dix dernières années, la théorie du contrôle a été appliquée à la mécanique des fluides grâce notamment aux récentes avancées technologiques des actionneurs, des capteurs ainsi que des ressources informatiques (Bewley, 2001). Le contrôle optimal des systèmes linéaires a été introduit par Bewley & Liu (1998), dans le contexte des instabilités en mécanique des fluides. Ces concepts ont été appliqués avec succès par Högberg & Henningson (2002) sur un écoulement transitoire de couche limite sur plaque plane, et sur un écoulement turbulent pleinement développé par Kim (2003). Le contrôle optimal basé sur une connaissance complète

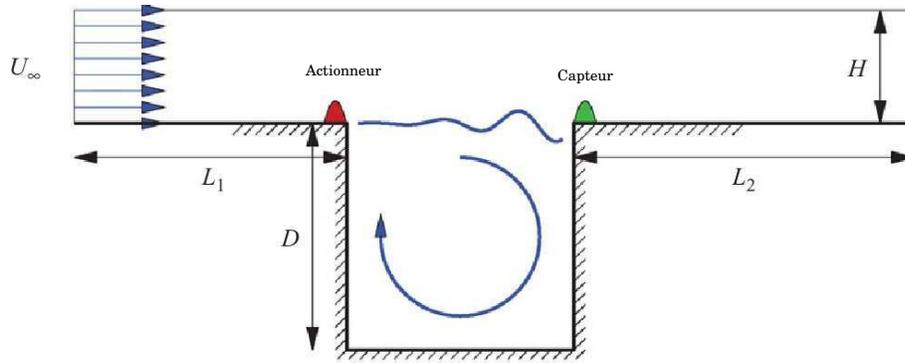


FIGURE 1.5 – Schéma du dispositif de contrôle rétroactif utilisé par Barbagallo *et al.* (2009) dans le cas d'une couche limite décollée au-dessus d'une cavité rectangulaire.

de l'écoulement implique la résolution de systèmes dynamiques de grandes dimensions. Dans le cas d'écoulements présentant une direction d'écoulement privilégiée (jets, sillages, couche cisailées...), la décomposition en modes de Fourier dans les directions homogènes de l'écoulement permet de construire des gains de contrôle et d'estimation pour chaque nombre d'onde. Or, dans un écoulement en géométrie complexe, la seule information disponible provient généralement de la mesure issue d'un ou plusieurs capteurs (Hœpffner *et al.*, 2005).

Il est donc nécessaire de construire un modèle capable de contenir l'essentiel de la dynamique de l'écoulement. Cette méthode consiste à approximer la dynamique de l'écoulement à partir d'un modèle de très faible dimension, comparé à la discrétisation spatiale utilisée pour la simulation. Ces modèles réduits permettent de résoudre conjointement le problème du contrôle et le problème d'estimation, donnant lieu à des compensateurs optimaux (Lewis & Syrmos, 1995). Or, une telle réduction de modèle n'est recevable que si le modèle réduit permet de reproduire précisément la dynamique. L'approche naturelle en vue d'une telle réduction de modèle consiste à caractériser les structures les plus énergétiques dans un écoulement. La décomposition orthogonale en modes propres (Proper Orthogonal Decomposition-POD) permet de calculer ces structures (voir annexe A.2) et des modèles réduits calculés dans cette base ont permis de contrôler un écoulement instable autour d'un cylindre (Bergmann *et al.*, 2005). Une base optimale en vue d'une telle réduction de modèle peut être construite en ne retenant que l'essentiel de la dynamique qui caractérise la relation entrée-sortie du système (balanced truncations). Une considération importante dans la réduction de modèle est la capacité à classifier les degrés de liberté par rapport à leur contrôlabilité (entrée ou actionneur) et leur observabilité (sortie

ou capteur)(Antoulas, 2006). Une manière optimale de réduire le nombre de degrés de liberté dans un système consiste à supprimer ceux qui nécessitent une énergie importante pour être contrôlé et ceux qui sont difficilement observables. Le calcul des Grammiens, qui correspond à la réponse impulsionnelle du système, permet de construire une hiérarchie optimale entre contrôlabilité et observabilité (balancing). Cette hiérarchie permet de minimiser l'erreur sur la fonction de transfert du système, garantissant la stabilité du modèle réduit. Les degrés de liberté qui représentent le moins la relation entrée-sortie sont supprimés, donnant lieu à des modèles réduits optimaux. Une méthode pour calculer ces modèles réduits dans le cas d'un système fluide est donnée dans Rowley (2005).

Dans le cas d'un écoulement globalement instable, les modes globaux, vecteurs propres des équations linéarisées de Navier-Stokes, forment une base de projection intéressante, étant donné leur capacité à décrire la physique mise en jeu (Theofilis, 2011). Ces modes ne dépendent que de la seule dynamique d'instabilité et permettent de construire un modèle réduit *a priori* sans avoir à tenir compte des actionneurs et des capteurs utilisés. L'utilisation des modes globaux en vue d'une réduction de modèle a été tentée avec succès dans le cas d'un écoulement de couche limite au dessus d'une cavité arrondie par Åkervik *et al.* (2007), et un contrôleur linéaire construit en utilisant les seuls modes globaux instables, a permis de supprimer l'instabilité globale. Parallèlement à ce travail, l'expérience de Cabell *et al.* (2006) a permis de montrer qu'un contrôleur linéaire était capable d'atténuer la dynamique instable, provoquée par un écoulement décollé compressible au dessus d'une cavité rectangulaire.

Or la robustesse de la projection à partir des modes à récemment été remise en question par Barbagallo *et al.* (2009), dans le cas d'un écoulement fortement instable au dessus d'une cavité rectangulaire (voir figure 1.5). Ce qui nous amènera à nous interroger dans ce travail sur la pertinence d'utiliser les modes globaux en vue du contrôle en boucle fermée.

## Contrôle par optimisation Lagrangienne

Une alternative au contrôle rétroactif d'écoulements consiste à optimiser des lois de contrôle sur un temps d'observation fini. Le but de cette optimisation est de minimiser une grandeur physique associée à l'écoulement (énergie cinétique, frottement pariétal, vorticité...) en utilisant une action localisée (soufflage/ aspiration/ défor-

---

---

mation de la paroi, forces de volume). Il s'agit donc de déterminer les lois de contrôle, solutions du problème adjoint des équations de Navier-Stokes, qui minimisent une fonction objectif. Cette méthodologie a été implémentée par Joslin *et al.* (1995) afin de calculer les lois de contrôle, à partir d'une mesure du frottement pariétal dans le cas d'une couche limite laminaire convectivement instable. Les résultats les plus marquants restent probablement ceux de Bewley, Moin & Temam (2001) où l'écoulement dans un canal turbulent a été relaminarisé, en utilisant des actionneurs de type soufflage-aspiration sur les parois. Cette même technique a été utilisée par Hof *et al.* (2010) dans le cas d'une conduite cylindrique convectivement instable. Dans ce même travail, le contrôle a été couplé avec succès avec l'expérience.

Cependant, cette procédure nécessite des moyens informatiques importants, étant donné que le calcul des lois de contrôle demande de stocker l'historique complet de l'écoulement à optimiser. Une alternative consiste à calculer les lois de contrôle sur des intervalles de temps très courts<sup>1</sup>. Cette technique permet de s'affranchir du problème de stockage mais on parle alors d'un contrôle sous-optimal de la dynamique. Cette méthode a notamment été utilisée par Kang & Choi (2002) afin de raccourcir la bulle de recirculation dans un écoulement turbulent au dessus d'une marche descendante, ou par Creusé (2001) pour une même application dans le cas d'un écoulement compressible décollé au dessus d'un dièdre.

En dépit de leur récent développement, les stratégies de contrôle optimales décrites précédemment restent délicates à mettre en œuvre et souffrent notamment d'un manque de robustesse.

## Perturbations optimales

Si pour certaines applications on cherche à stabiliser l'écoulement (par exemple réduction de la traînée), on peut aussi chercher à produire l'effet inverse (par exemple amélioration du mélange, transfert thermique, combustion...). La condition initiale dans un écoulement qui produit la croissance transitoire la plus forte, appelée aussi perturbation optimale, nous renseigne sur les zones les plus sensibles à un forçage. L'étude de ces perturbations optimales a connu un intérêt croissant au sein de la communauté de la mécanique des fluides ces dernière années. (voir figure 1.6 a pour le développement d'une perturbation optimale non linéaire et l'observation expérimentale associée dans la figure 1.6b). Ces études ont permis de mettre en

---

1. typiquement donné par le pas de temps utilisé par la discrétisation temporelle

---

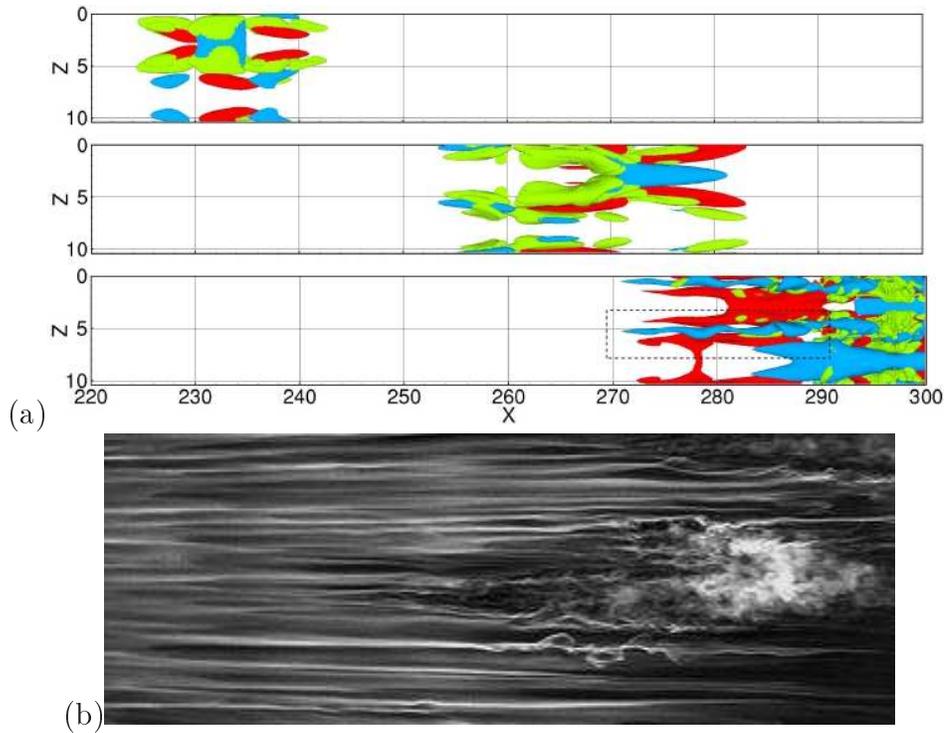


FIGURE 1.6 – Clichés instantanés des structures cohérentes (critère  $Q$  - vert) et de la vitesse longitudinale (rouge/positif - bleu/négatif) de l'évolution de la perturbation optimale non linéaire optimisée à  $T = 75$  et  $E_0 = 0.01$  pour les temps  $t = 0, 65, 125$  (a) de Cherubini *et al.* (2010a). Visualisation par fumées d'un spot turbulent (b) observé dans une couche limite laminaire (Fransson *et al.*, 2005)

évidence de nouveaux scénarios de transition vers la turbulence qui pourraient nous renseigner sur de nouvelles stratégies de contrôle.

## 1.2 Configuration étudiée

Afin d'étudier les effets du décollement sur les ailes d'avions à fort angle d'incidence, proche des conditions de décrochage aérodynamique, un profil de type bosse a été optimisé en vue du décollement (Bernard *et al.*, 2003). Ce profil a ensuite été utilisé pour étudier le décollement de couches limites turbulentes dans la soufflerie du Laboratoire de Mécanique de Lille. L'étude expérimentale de la dynamique est abordée au second chapitre où un banc d'essai expérimental a été conçu afin de reproduire la configuration de type bosse en régime d'écoulement laminaire. Un exemple de visualisation de la bulle de recirculation est donné dans la figure 1.4.

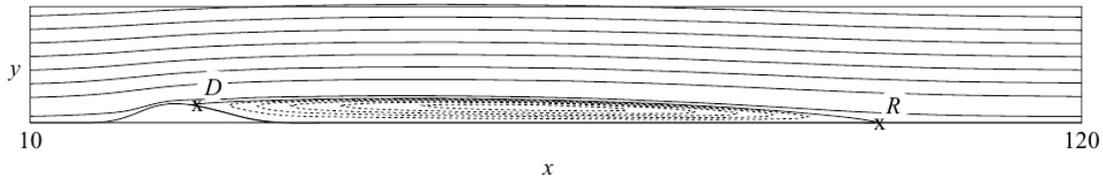


FIGURE 1.7 – Lignes de courant d’un écoulement stationnaire décollé derrière la bosse pour  $Re = 400$  et  $h = 2$ . Le point  $D$  dénote le point de décollement de la couche limite alors que le point  $R$  est associé au point de rattachement (Gallaire *et al.*, 2007).

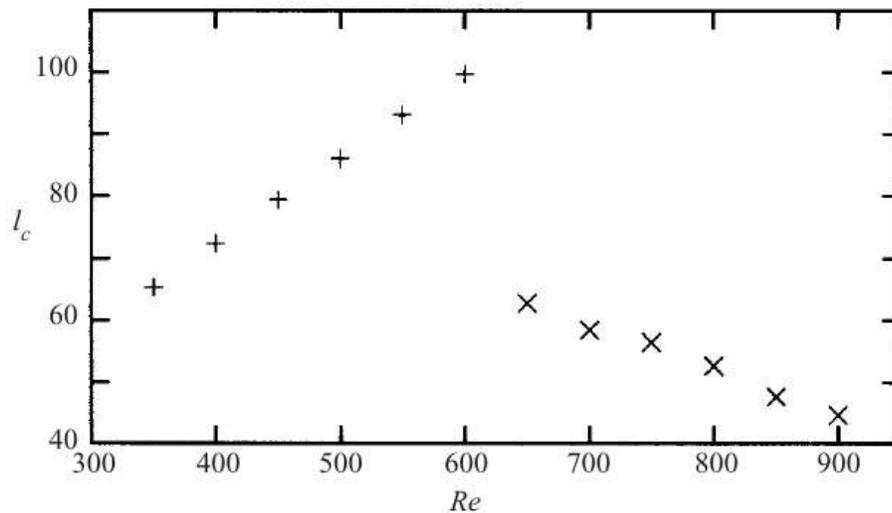


FIGURE 1.8 – Longueur de la bulle de recirculation  $l_c$  and fonction du nombre de Reynolds pour  $h = 2$  (Marquillie & Ehrenstein, 2003).

### 1.3 Résultats numériques antérieurs

C’est dans le cadre de la thèse de Marquillie (2003) que le profil de bosse a été utilisé pour la première fois pour générer un écoulement décollé laminaire et un exemple d’écoulement stationnaire est présenté dans la figure 1.7. Dans cette configuration de type couche limite, l’épaisseur de déplacement du profil de Blasius imposé à l’entrée du domaine, a servie de longueur caractéristique pour adimensionner le problème. La couche limite est dans un premier temps accélérée au-dessus de la bosse, puis elle décolle de la paroi pour revenir progressivement à son contact. En aval de la bosse, l’écoulement recircule, décrivant ainsi des lignes de courant fermées, (voir figure 1.7). La distance entre le point de décollement  $D$  et le point de rattachement  $R$  de la couche limite (voir figure 1.7) représente la longueur de la bulle de

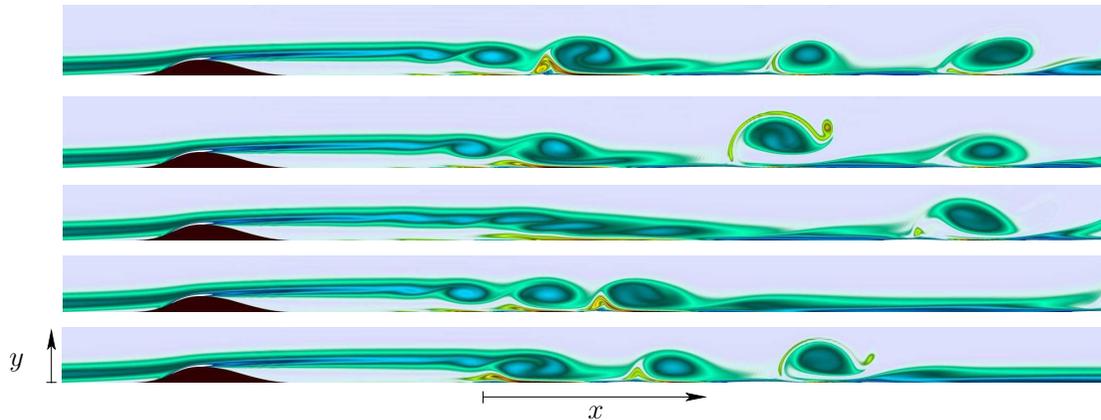


FIGURE 1.9 – Séquence du lâcher tourbillonnaire produit par l’instabilité basse fréquence calculé par DNS. Les clichés sont espacés par 40 unités de temps (voir chapitre 4 pour la méthode de calcul).

recirculation. Marquillie & Ehrenstein (2003) ont montré que cette longueur croît linéairement avec le nombre de Reynolds. Au-delà d’un nombre de Reynolds critique, l’écoulement devient instationnaire, et les mesures dans ce régime correspondent à la longueur moyenne de la bulle de recirculation (voir figure 1.8).

### 1.3.1 Battement basse fréquence

Au delà d’un nombre de Reynolds proche de 600 et une hauteur de bosse de  $h = 2$ , la bulle de recirculation est soumise à des oscillations associées à deux gammes de fréquences : une basse fréquence que l’on peut mesurer le long de la couche de cisaillement et plusieurs hautes fréquences localisées aux abords de la zone de recollement moyen de la couche limite. Afin d’apporter des éléments de réponse quant à l’origine de ce phénomène, Marquillie & Ehrenstein (2003) ont ensuite effectués une étude de stabilité locale sur une série de profils de vitesse longitudinale, extraits de la simulation numérique. Cette analyse a permis de mettre en évidence le caractère convectivement instable de la bulle de recirculation, mais aucune instabilité absolue n’a été observée, laissant la question du mécanisme de génération de cette instabilité ouverte. Afin de s’affranchir de l’hypothèse d’un écoulement faiblement parallèle, un code de résolution matriciel des équations de Navier-Stokes a été développé dans Ehrenstein & Gallaire (2005). Une discrétisation de type Chebyshev-Chebyshev, qui assure le meilleur rapport entre précision et nombre de degrés de liberté (Peyret, 2002), a donc été utilisée afin de pouvoir traiter ce problème sans avoir recours à

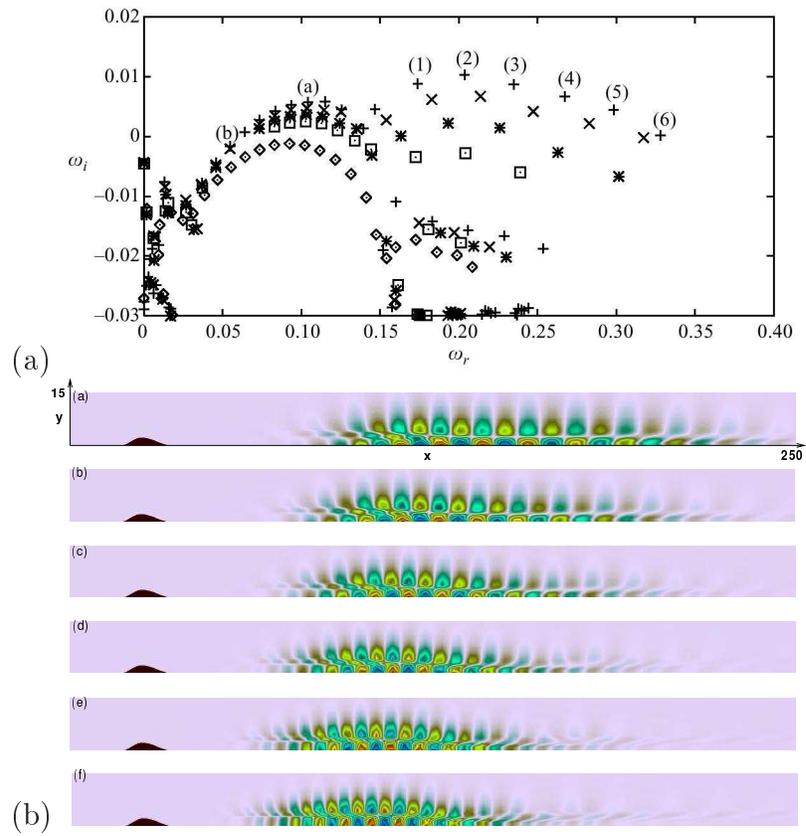


FIGURE 1.10 – Spectre des valeurs propres à  $Re = 590$  pour différentes hauteurs de bosse  $h = 1.8(o)$ ,  $h = 1.85(\square)$ ,  $h = 1.9(*)$ ,  $h = 1.195(\times)$ ,  $h = 2(+)$  (a) à (f). Les modes annotés de (1) à (6) correspondent aux modes (a),(f) où la vitesse longitudinale est représentée (b) (Ehrenstein & Gallaire, 2008).

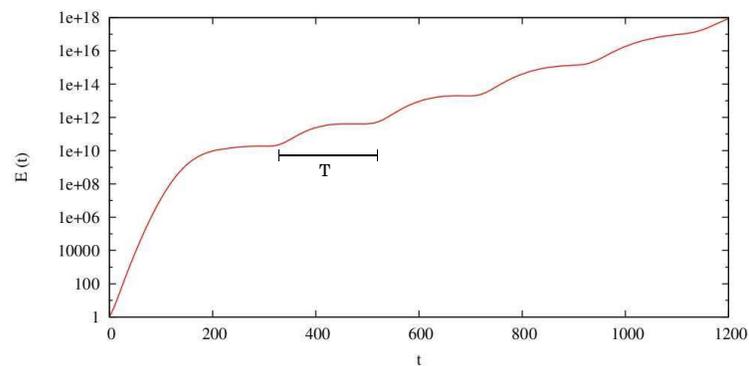


FIGURE 1.11 – Evolution temporelle de l'énergie de la perturbation intégrée sur tout le domaine avec une condition initiale localisée en amont de la bosse et avec  $T \approx 200$  la période de la basse fréquence (Ehrenstein & Gallaire, 2008).

des moyens de calculs parallèles. La procédure consiste en premier lieu à calculer un écoulement de base, solution des équations de Navier-Stokes stationnaires. L'étude de stabilité globale de cet écoulement revient ensuite à résoudre un problème aux valeurs propres généralisé. Les solutions de ce problème dans le cas d'un écoulement bidimensionnel s'écrivent

$$\mathbf{q}(x, y) = \hat{\mathbf{q}}(x, y)e^{-i\omega t} \quad (1.1)$$

avec  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  est la valeur propre complexe de la forme  $\omega_r + i\omega_i$  et  $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})^T$  le vecteur propre associé. Un exemple de spectre global est donné dans la figure 1.10(a) et la structure des modes globaux instables est présentée dans la figure 1.10(b). Le spectre global dans la figure 1.10(a) a été calculé pour  $Re = 590$  et différentes hauteurs  $h$ . La dynamique linéaire est globalement instable si la partie imaginaire  $\omega_i$  d'au moins une valeur propre devient positive. Ce spectre contient une branche de modes instables équi-espacés en fréquence et localisés autour du point de rattachement de l'écoulement. La dynamique linéaire d'une perturbation localisée en amont de la bosse produit une forte croissance transitoire suivi d'un battement basse fréquence (voir figure 1.11). Il apparaît que cette basse fréquence peut être décrite par la superposition des modes temporels instables présentés dans la figure 1.10(a), et la période du battement basse fréquence  $T$  correspond à l'écart en fréquence  $\Delta\omega_r$  entre deux modes instables tel que  $T = 2\pi/(\Delta\omega_r)$ .

### 1.3.2 Instabilité transverse

La fin de la thèse de Marquillie (2003) est consacrée à l'étude de l'écoulement tri-dimensionnel produit en amont de cette géométrie bi-dimensionnelle. À partir d'un nombre de Reynolds proche de 300, un écoulement secondaire tri-dimensionnel stationnaire modifie la structure de la bulle de recirculation près du point de décollement et de rattachement de la couche limite. La structure de la perturbation est périodique dans la direction  $z$  et peut être décomposée en une somme de modes de Fourier (voir figure 1.13) tel que

$$[\mathbf{u}(x, y, z, t), p(x, y, z, t)] = [\hat{\mathbf{u}}(x, y), \hat{\mathbf{p}}(x, y)]e^{\sigma t + i\beta z} \quad (1.2)$$

où le nombre d'onde  $\beta = 2\pi/\lambda$ , avec  $\lambda$  la longueur d'onde du mode dans la direction transverse. La structure des modes étant stationnaire, la partie imaginaire  $\sigma_i$  des valeurs propres est nulle. Une étude de stabilité globale de l'écoulement bi-dimensionnel stationnaire dans Gallaire *et al.* (2007) a permis de calculer le taux

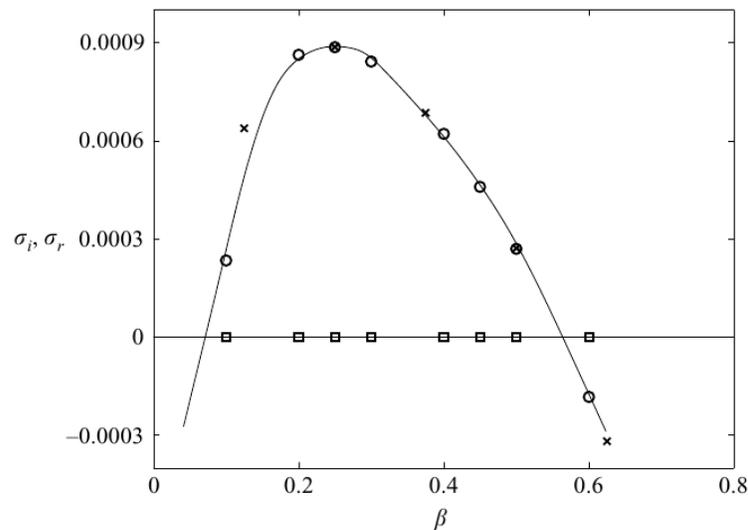


FIGURE 1.12 – Taux de croissance ( $\circ$ ) et fréquences ( $\square$ ) des mode les plus instables (issus de l’analyse de stabilité linéaire) en fonction du nombre d’onde transverse  $\beta$  et taux de croissance extraits de la DNS ( $\times$ ) (Gallaire *et al.*, 2007).

de croissance de cette instabilité associé à chaque nombre d’onde dans la direction transverse. Le mode le plus instable a été calculé pour un nombre d’onde  $\beta = 0.25$  (voir figure 1.12). Par ailleurs, les taux de croissance  $\sigma_r$  sont très faibles ( $O(10^{-4})$ ), et bien que cette instabilité apparaisse pour des nombres de Reynolds plus faibles que le battement basse fréquence, elle ne semble pas en mesure d’affecter la dynamique de battement lorsque les deux phénomènes coexistent.

L’étude expérimentale de cette configuration de couche limite décollée constitue donc le second chapitre de cette thèse. Le troisième chapitre aborde le contrôle en boucle fermée de la dynamique instable. Des contrôleurs linéaires de faible dimension et capables de contrôler la dynamique d’instabilité linéaire sont construits dans la base des modes globaux. Deux nouvelles méthodes de projection permettant de s’affranchir du calcul des modes globaux adjoints sont décrites. Les compensateurs ainsi obtenus sont plus robustes et permettent de contrôler la dynamique, même fortement instable. Le contrôle de la dynamique non linéaire est finalement abordée au chapitre quatre suivant la méthode d’optimisation sous contrainte. Un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes est développé afin d’implémenter les conditions aux limites spécifiques à ce type de problème. Des lois de contrôle sont ensuite calculées afin de minimiser la croissance transitoire ainsi que l’écoulement

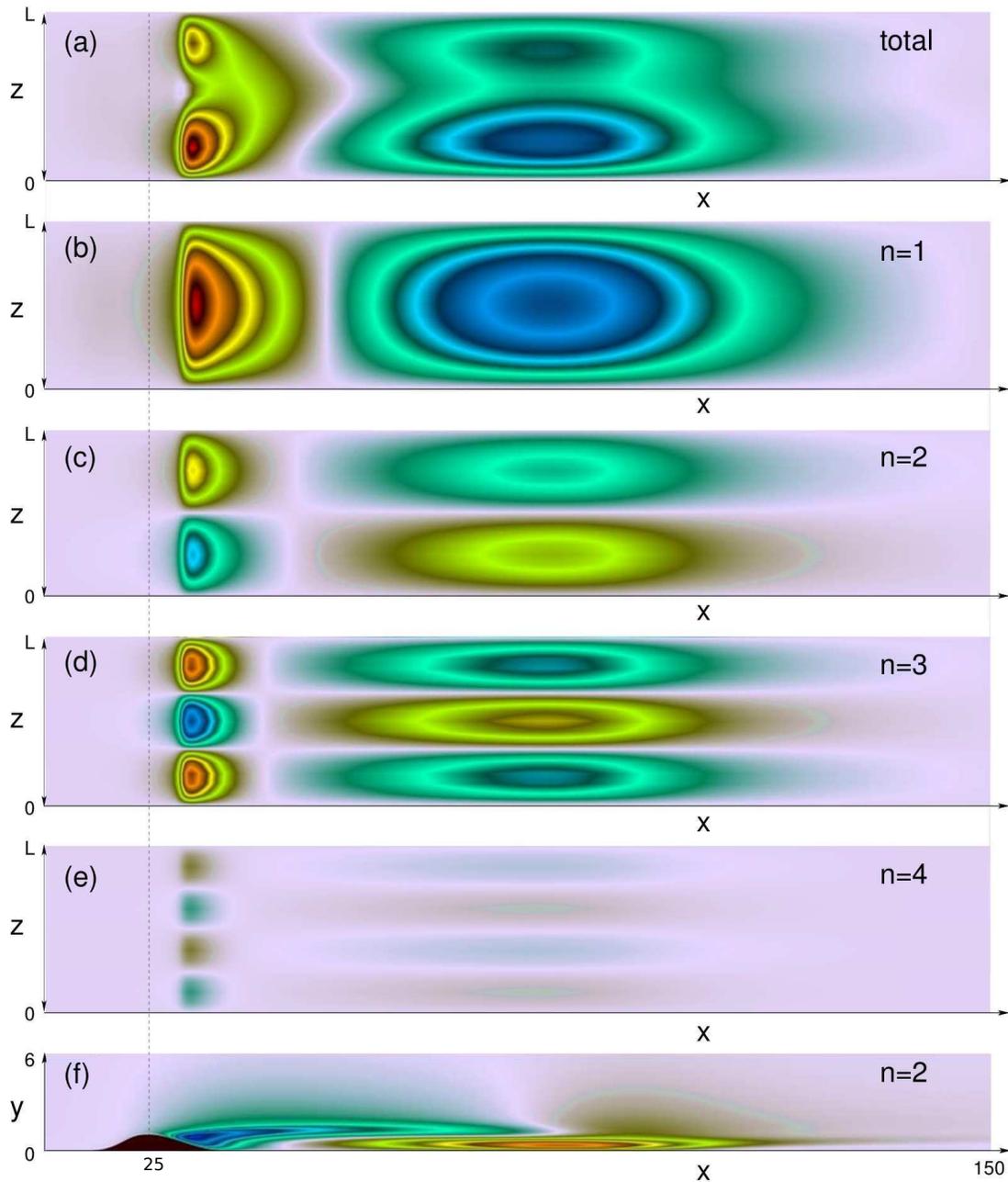


FIGURE 1.13 – Composante de la vitesse transverse  $W(x, y, z)$  de l'écoulement et ses harmoniques à un instant  $t$  au début de l'instabilité à  $Re = 400$ ,  $L_z = \pi/0.125$  : (a) coupe  $(x - z)$  à  $y=2$ ; (b - e) coupe  $(x - z)$  à  $y=2$  des harmoniques  $W_n(x, y = 2)\sin(\beta_n z)$  (La même palette a été utilisée pour la comparaison); (f) composante  $W_2(x, y)$  du mode  $n = 2$  dans le plan  $(x, y)$  à  $z = L_z/4$  (Gallaire *et al.*, 2007).

instable pleinement développé. Le dernier chapitre comprend un bilan des travaux réalisés avec des perspectives concernant l'étude et le contrôle de ce type d'écoulement.

---



## Chapitre 2

# Étude expérimentale

Les résultats issus des simulations numériques (voir chapitre 1.3) ont permis de mettre en évidence plusieurs régimes d'instabilité. Or, aucune expérience dans le régime laminaire n'a encore été menée sur cette configuration. C'est donc à partir de la configuration étudiée dans Marquillie (2003) qu'un banc d'essai expérimental a été conçu afin d'apporter la preuve de l'existence de ces phénomènes. Ce chapitre permet de donner une conclusion expérimentale à l'étude de l'instabilité basse fréquence dans cette configuration d'écoulement de couche limite décollée incompressible.

### 2.1 Dispositif expérimental

L'étude expérimentale a été menée dans le canal hydrodynamique de l'IRPHÉ. En plus des deux directions d'observation usuelles (de côté et par dessous), une fenêtre placée à l'arrière du canal permet d'observer les écoulements dans le plan  $(y - z)$ . Une plaque plane en Plexiglas avec un bord d'attaque biseauté (l'angle d'ouverture étant de  $18^\circ$ ) a été immergée dans la veine d'essai. Les dimensions de la plaque plane sont 1,3 m de longueur, 0,375 m de largeur, 2 cm d'épaisseur et elle est maintenue dans la veine d'essai grâce à 6 pieds profilés, encastrés dans la partie inférieure de la plaque. La section du canal étant légèrement divergente<sup>1</sup>, il reste des interstices entre la plaque et les parois du canal. Elles ont été fermées à l'aide de feuilles plastiques transparentes, qui obstruent les espaces entre la plaque et le canal.

Ce seul dispositif ne permet pas de générer une couche limite laminaire. Étant donné

---

1. La veine diverge d'un degré entre l'entrée et la sortie du canal afin de compenser la croissance en aval de la couche limite sur les parois latérales.

---

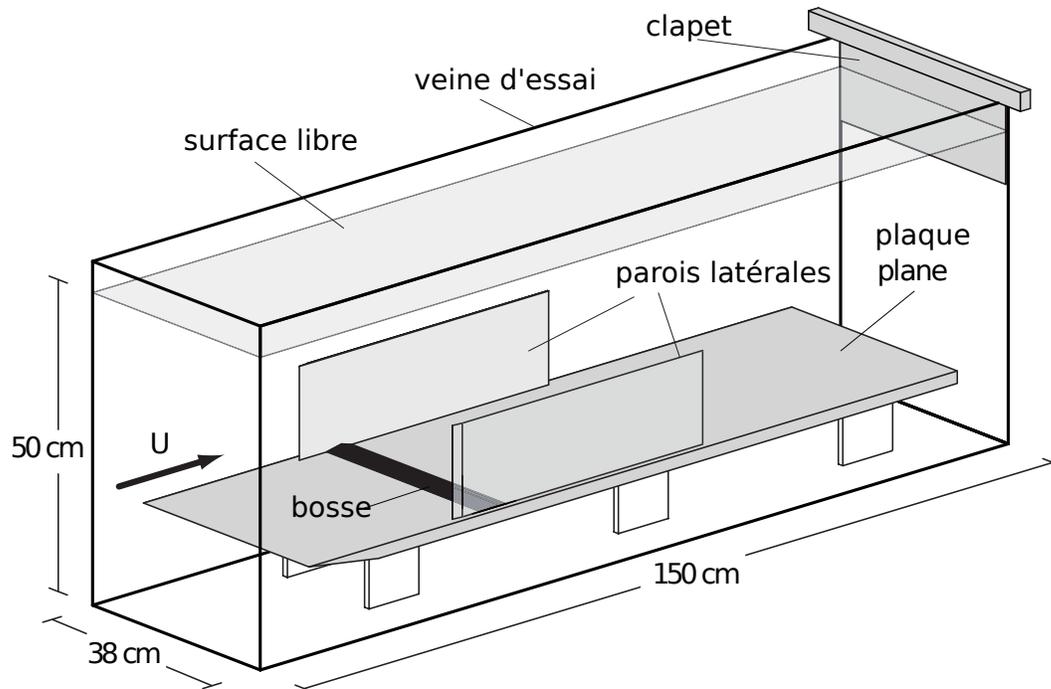


FIGURE 2.1 – Schéma du montage expérimental

que la plaque plane est posée sur des pieds<sup>2</sup>, le fluide a tendance à passer au dessus du biseau, décoller du bord d'attaque et générer une bulle de recirculation instable. Ce phénomène peut être contrôlé en ajoutant un clapet en sortie de la veine d'essai. Ce dernier permet d'équilibrer les débits des écoulements qui passent respectivement au dessus et en dessous de la plaque (figure 2.1). Ce dispositif ajoute donc un gradient de pression dont l'influence sur les caractéristiques de la couche limite est déterminée par la suite.

## Notions de couche limite laminaire

Premièrement on définit le système de coordonnées tel que la direction privilégiée de l'écoulement soit la direction longitudinale  $x$ , la direction normale à la paroi est la direction  $y$  et la direction transverse est la coordonnée  $z$ . Les détails sur la couche limite sont donnés dans l'annexe A.1. Les résultats de la théorie correspondante théorie permettent de définir une échelle de longueur ainsi que les paramètres sans dimension qui régissent l'écoulement. Le profil de vitesse de couche limite se calcule

---

2. qui obstruent le passage du fluide

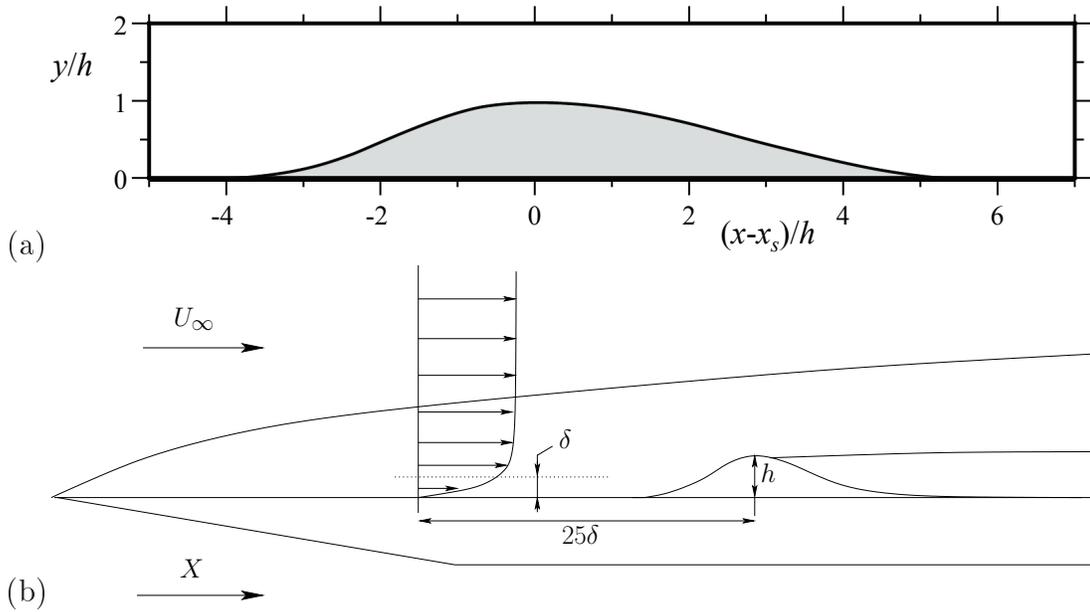


FIGURE 2.2 – Graphe de la géométrie de la bosse étudiée (a). Les longueurs ont été adimensionnées par la hauteur de la bosse  $h$  (Bernard *et al.*, 2003). Configuration de l'écoulement de couche limite sur plaque plane (b) en présence de la bosse.

par intégration numérique de l'équation de Blasius (A.6). L'évolution de l'épaisseur de déplacement du profil le long de la paroi (suivant la direction longitudinale  $x$ ) est donné par

$$\delta(x) = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (2.1)$$

où  $\nu$  est la viscosité du fluide et  $U_\infty$  la valeur de la vitesse du fluide loin de la paroi. Le nombre de Reynolds, basé sur cette longueur, permet de quantifier le rapport entre les forces inertielles (déstabilisantes) et les forces visqueuses (stabilisantes)

$$Re = \frac{U_\infty \delta}{\nu}. \quad (2.2)$$

Cet écoulement constitue la première étape de validation d'un écoulement sur plaque plane, que ce soit d'un point de vue expérimental ou dans une simulation numérique.

## Géométrie et définition du problème

Il est nécessaire d'ajouter un dispositif si l'on veut décoller une couche limite sur une plaque plane. Le dispositif le plus couramment étudié consiste à produire un gradient de pression adverse, par exemple en créant une dépression (par aspiration du fluide) au dessus de la plaque. La deuxième méthode consiste à modifier la géométrie

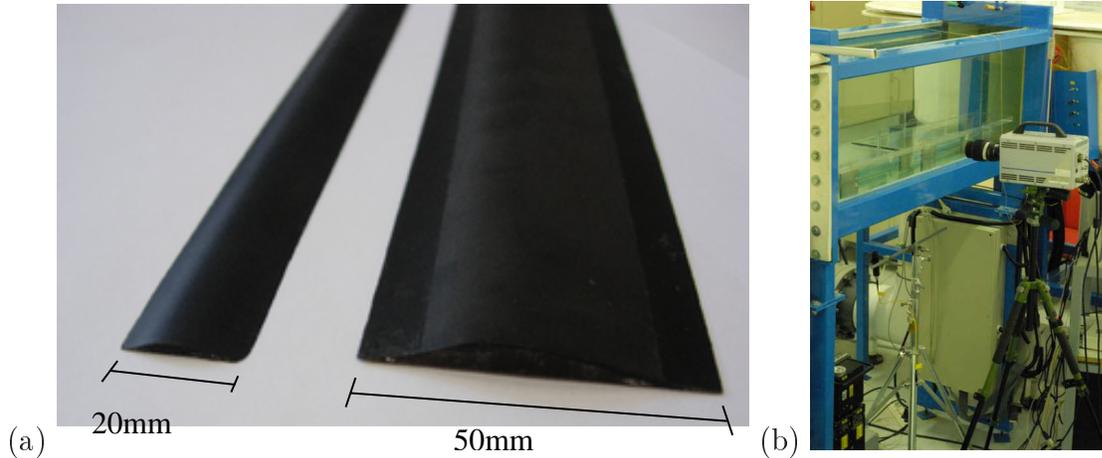


FIGURE 2.3 – Modèles de bosses utilisées dans l’expérience de hauteur 2.2 mm et 5.5 mm (a), montage expérimental de mesure par PIV (b).

de la paroi où se développe la couche limite en créant un d’élargissement de la géométrie.

Au cours de sa thèse, Marquillie (2003) a étudié les phénomènes d’instabilité produit à l’arrière d’une bosse par voies numériques et ses résultats ainsi que la méthode de résolution des équations de Navier-Stokes sont à l’origine de ce travail. Le système de coordonnées a aussi été défini de manière similaire et le profil de couche limite a été mesuré à  $x_s = 25\delta$  en amont du sommet de la bosse (voir figure 2.2a-b). L’épaisseur de ce profil permet de calculer le nombre de Reynolds (2.2) ainsi que la hauteur adimensionnée de la bosse  $h/\delta$ .

Lorsque l’on fait varier la vitesse du canal  $U_\infty$ , les paramètres  $h/\delta$  et  $Re$  varient simultanément. Afin de pouvoir étudier ces deux paramètres de manière indépendante, la bosse peut être positionnée à différents endroits sur la plaque. En pratique, la bosse a été positionnée à une distance entre 15 et 65 cm du bord d’attaque (voir figure 2.4b) et la vitesse a été variée entre  $U_\infty = 6$  cm/s et  $U_\infty = 24$  cm/s, ce qui donne lieu à la gamme de paramètres  $100 < Re < 700$  et  $1.6 < h/\delta < 2.1$ .

Afin d’explorer ces paramètres, deux bosses de hauteurs différentes ont été fabriquées. Le profil a été usiné dans la masse en aluminium 2017A sur une largeur de 347 mm pour des hauteurs de 5.5 mm et 2.2 mm, voir figure 2.3(a). Le dispositif étant immergé dans de l’eau chlorée, il a été protégé grâce à un apprêt et peint en noir mat afin de minimiser les réflexions du laser. La présente étude porte sur un écoulement bidimensionnel, or les effets de bord dans une expérience sont inévitables. Afin de les minimiser, un deuxième jeu de parois biseautées transparentes a

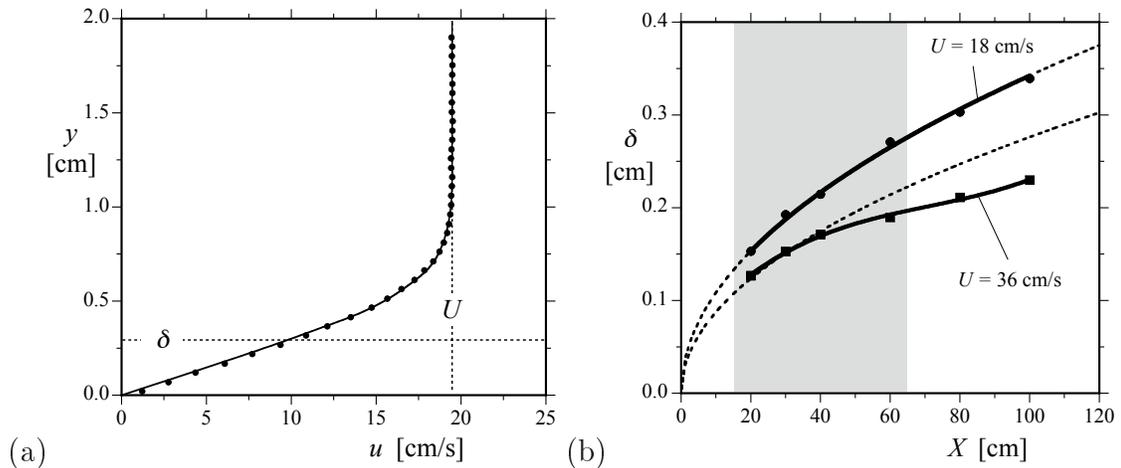


FIGURE 2.4 – Comparaison entre le profil de Blasius et la mesure expérimentale de la vitesse longitudinale mesurée proche de la paroi (a). Évolution de l'épaisseur de déplacement  $\delta$  pour deux valeurs de la vitesse  $U$  (b). Les lignes pointillées représentent la courbe correspondante (voir texte) de l'évolution théorique d'une couche limite de Blasius. La zone grise représente la zone de l'étude de la bosse.  $X$  est la position longitudinale mesurée à partir du bord d'attaque de la plaque plane.

été encastré dans la plaque. Ces parois ont une longueur de 0.5 m, hautes de 0.12 m et une épaisseur de 2 mm. Les parois peuvent être positionnées entre 0.2 et 0.8 m par rapport au début du biseau de la plaque grâce à des rainures profondes de 8 mm usinées dans le plaque, l'ensemble du montage est schématisé dans la figure 2.1. Ces nouvelles parois permettent de minimiser l'épaisseur de la couche limite sur les bords et ainsi limiter l'effet du confinement sur la zone de recirculation. La figure 2.7(b) illustre l'effet des parois sur l'écoulement grâce à une visualisation à la fluorescéine, et le meilleur compromis pour le positionnement du début des parois par rapport au sommet de la bosse a été trouvé par tâtonnement pour une distance de 14 hauteurs de bosse.

## Résultats expérimentaux sur la couche limite

Le profil de vitesse a été mesuré grâce à un système de vélocimétrie par images de particules et le canal a étéensemencé avec des particules d'un diamètre compris entre 10 et 30 microns. La source de lumière a été introduite sous la plaque. Le laser pulsé a été réglé sur une fréquence de 2 Hz et le pas de temps entre 2 impulsions à 1 ms. L'épaisseur de la couche limite étant relativement fine (5 à 10 mm), l'objectif de la caméra a dû être adapté afin d'observer une fenêtre de 60 à 80 mm dans la

direction longitudinale de l'écoulement et à une distance de l'objectif de 170 mm. Pour cela, un objectif équipé d'une focale de 105 mm a été monté sur la caméra. Les résultats PIV ont été comparés à la théorie de Blasius à l'aide d'une procédure d'optimisation. Dans cette procédure on cherche à minimiser la différence entre la solution théorique de Blasius et le profil mesuré. Un exemple est donné dans la figure 2.4(a). L'épaisseur de la couche limite pour deux vitesses d'écoulement est comparée à la théorie de Blasius dans la figure 2.4(b). L'épaisseur de la couche limite est donnée par  $\delta(x) = \theta \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$  avec  $\theta = 1.7208$  d'après la théorie de Blasius, dans la figure 2.4(b), des valeurs de  $\theta = 1.453$  et  $\theta = 1.657$  pour  $U_\infty = 18$  cm/s et  $U_\infty = 36$  cm/s sont présentées pour comparaison.

L'épaisseur de la couche limite ainsi que les profils de vitesse longitudinaux et normaux, ont été à nouveaux mesurés sur 80 cm de plaque et à partir de 20 cm du bord d'attaque. Afin de pouvoir prédire l'épaisseur de la couche limite et ainsi pouvoir estimer le nombre de Reynolds ainsi que la hauteur adimensionnée de la bosse avant l'introduction de la bosse, l'équation (2.3) basée sur la théorie de Blasius est proposé. Étant donné que la couche limite n'augmente pas aussi vite que la loi théorique en racine carré (issue de la théorie de Blasius), la loi de puissance a été modifiée au moyen d'une dépendance avec la vitesse de l'écoulement à l'infini. Pour tenir compte de l'effet du clapet, l'équation contraint le profil vers la fin de la plaque via une fonction exponentielle. L'évolution de l'épaisseur de déplacement de la couche limite est donnée par la relation suivante

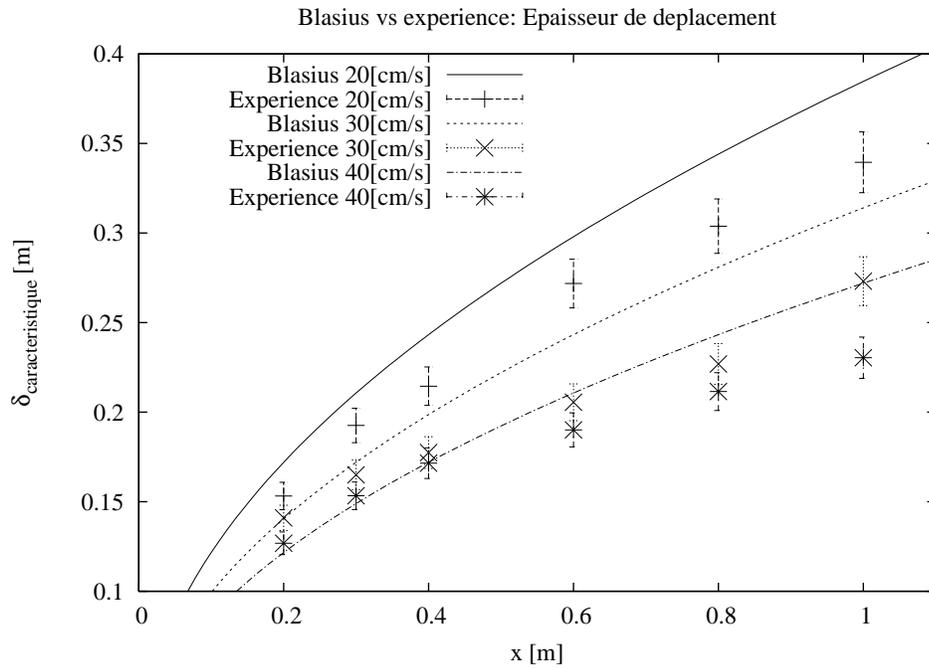
$$\delta(x) = 1.72 \left( \frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{\frac{1}{2-0.15 \times U_\infty}} \left( 2 - \exp\left(-\frac{U_\infty x}{6}\right) \right). \quad (2.3)$$

L'intégralité des résultats est reportée dans le tableau 2.4. On y retrouve le résultat des mesures pour l'épaisseur de déplacement ainsi que la vitesse à l'infini. La valeur  $X_0$  est l'origine théorique de la couche limite suivant le modèle de Blasius avec

$$X_0 = \frac{\delta_{PIV} U_{\infty PIV}}{\nu}$$

La dernière partie du tableau concerne les valeurs théoriques pour l'épaisseur de déplacement ainsi que les résultats du modèle (2.3). L'erreur relative entre le modèle proposé ci-dessus et l'expérience est de 7% au maximum dans le cas d'un écoulement à 40 cm/s. Ce modèle est valide pour des vitesses comprises entre 0 et 50 cm/s. Pour des vitesses plus importantes, il sera nécessaire de refaire des mesures afin de vérifier sa validité.

(a)



(b)

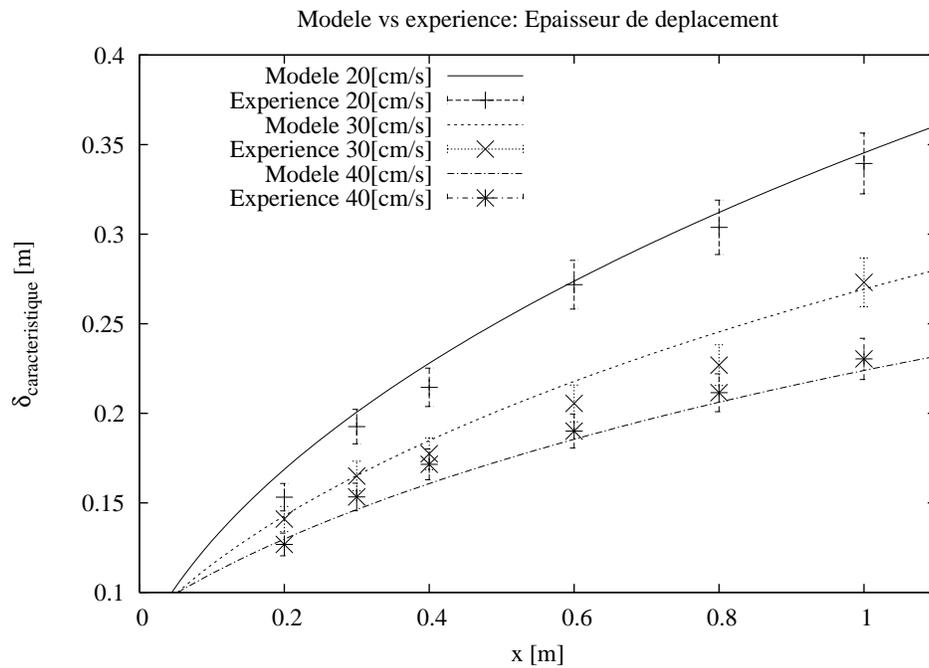


FIGURE 2.5 – Comparaison entre la théorie de Blasius et l'expérience (a) ainsi que le modèle (b).

$U_\infty$ [cm/s]	$X$ [m]	Epais. dép. [cm]	Epais. charac. [cm]	$X_0$ [m]	$X - X_0$ [m]	Modèle [cm]	Blasius [cm]	Erreur [cm]
19.5577	0.2	0.1532	0.4403	0.1546	0.0454	0.1584	0.1739	-0.0052
19.4501	0.3	0.1926	0.5508	0.2432	0.0568	0.1949	0.2136	-0.0023
19.9900	0.4	0.2145	0.6119	0.3096	0.0904	0.2215	0.2433	-0.0070
20.1042	0.6	0.2718	0.7750	0.5006	0.0994	0.2703	0.2971	0.0015
19.8922	0.8	0.3038	0.8659	0.6171	0.1829	0.3139	0.3449	-0.0101
20.3954	1.0	0.3395	0.9676	0.7900	0.2100	0.3453	0.3809	-0.0058
29.2276	0.2	0.1410	0.4063	0.1957	0.0043	0.1231	0.1423	0.0179
29.1343	0.3	0.1650	0.4734	0.2676	0.0324	0.1514	0.1745	0.0136
29.9244	0.4	0.1774	0.5071	0.3174	0.0826	0.1719	0.1989	0.0055
30.0088	0.6	0.2055	0.5865	0.4269	0.1731	0.2102	0.2432	-0.0047
29.6895	0.8	0.2269	0.6473	0.5133	0.2867	0.2441	0.2823	-0.0172
30.3306	1.0	0.2731	0.7785	0.7598	0.2402	0.2686	0.3123	0.0045
38.0691	0.2	0.1268	0.3672	0.2060	-0.0060	0.1027	0.1247	0.0241
38.1813	0.3	0.1533	0.4404	0.3024	-0.0024	0.1259	0.1525	0.0274
39.2496	0.4	0.1715	0.4907	0.3888	0.0112	0.1427	0.1736	0.0288
39.0762	0.6	0.1901	0.5432	0.4755	0.1245	0.1754	0.2131	0.0147
38.7151	0.8	0.2115	0.6037	0.5815	0.2185	0.2035	0.2472	0.0080
39.5093	1.0	0.2304	0.6572	0.7044	0.2956	0.2237	0.2736	0.0067

FIGURE 2.6 – Résultats PIV de la couche limite et comparaison avec le modèle

---

## 2.2 Étude expérimentale

Pour chacune des expériences présentées par la suite, les caractéristiques de la couche limite ont été remesurées et recalculées pour chaque expérience. L'ajout de la bosse modifiant légèrement l'épaisseur de déplacement du profil de Blasius et la vitesse en amont. Au total 75 points de mesure ont été évalués pour les paramètres de cette étude, à savoir la hauteur de bosse  $h/\delta$  et le nombre de Reynolds  $Re$ .

### 2.2.1 Techniques de mesures

Les outils de diagnostic utilisés sont la visualisation au colorant et la vélocimétrie par images de particules (PIV). Le colorant est illuminé par un laser argon d'une puissance de 8 Watts. Les visualisations ont été réalisées grâce à de la fluorescéine ou de la rhodamine B. Chacun de ces produits est excité par une longueur d'onde précise (bleue et verte respectivement) qui correspond à la couleur du laser. La vélocimétrie par images de particules a été réalisée grâce à une caméra Redlake® comportant 11 millions de pixels avec une fréquence d'échantillonnage de 10 Hz en crête. Afin de pouvoir capturer les phénomènes physiques les plus rapides, une caméra rapide Photron® a permis de faire des mesures PIV résolues en temps. Les clichés issus de la PIV ont été traités avec le programme libre DPIVSoft développé à l'IR-PHÉ (Meunier & Leweke, 2003).

### 2.2.2 Écoulement stationnaire

Pour de très faibles nombres de Reynolds, l'écoulement produit en aval de la bosse est stationnaire. Cet écoulement est caractérisé par une bulle de recirculation allongée dont la géométrie est indépendante de la direction transverse  $z$  (suffisamment loin des bords). Un exemple d'une visualisation par fluorescéine de la bulle de recirculation est donné dans la figure 2.7. Afin de mesurer la longueur de la bulle de recirculation, une matrice de points de rhodamine mélangée à du retardateur a été placée sur la plaque plane. Après 20 minutes de séchage, le montage est plongé dans le canal pour l'étude. Une visualisation de l'écoulement ainsi produite est présentée dans la figure 2.8. Le point de séparation est donné par la limite en amont des lignes de colorant remontant l'écoulement. Le point de recollement est estimé à partir de l'endroit où les lignes produites par les points de rhodamine s'inversent (voir figure 2.8). Cette inversion marque l'emplacement où la dérivée normale de la vitesse

---

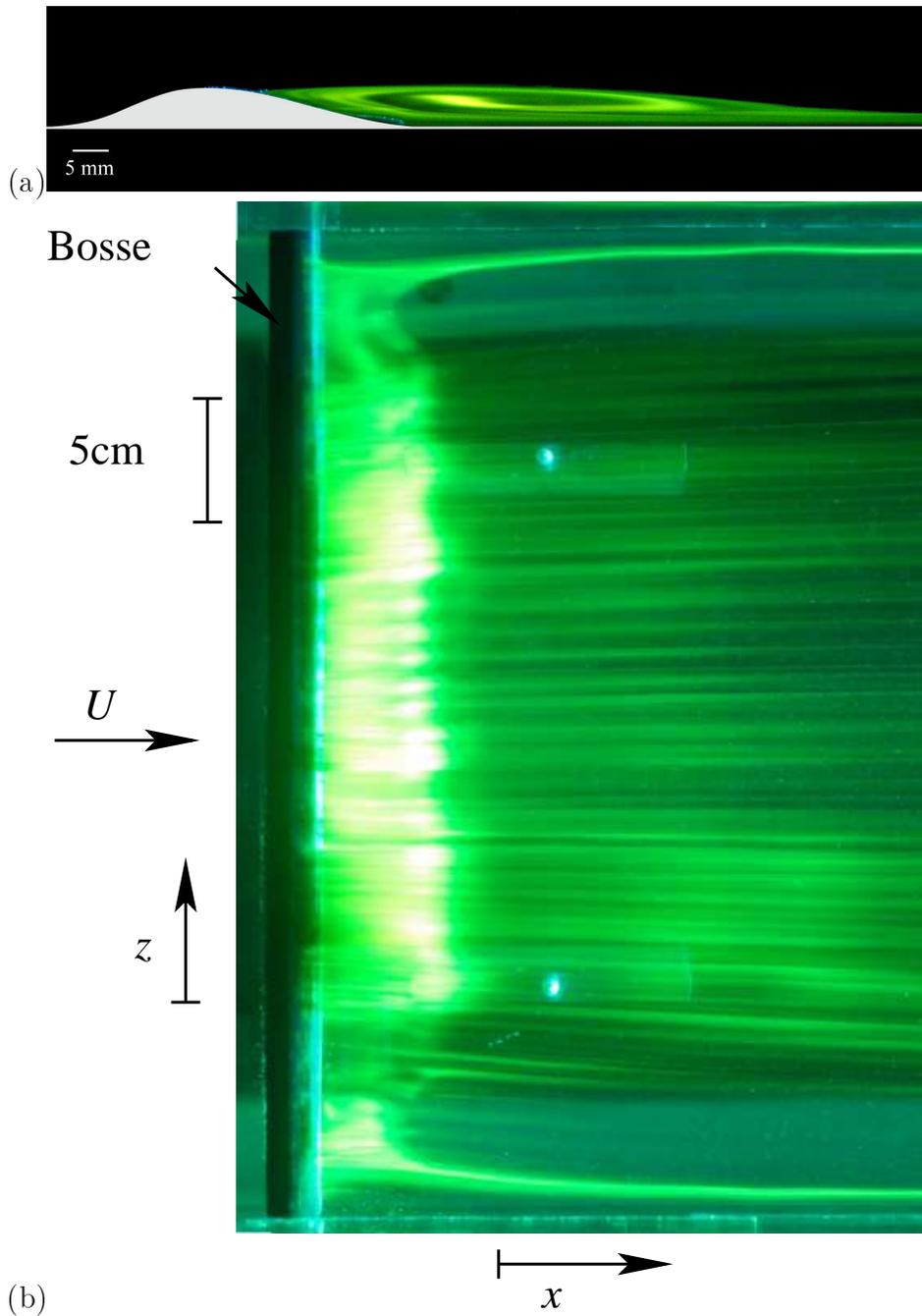


FIGURE 2.7 – Visualisation au colorant d’une bulle de recirculation stable à  $Re = 174$  et  $h/\delta = 1.9$  en vue de côté (a) et vue de dessus (b).

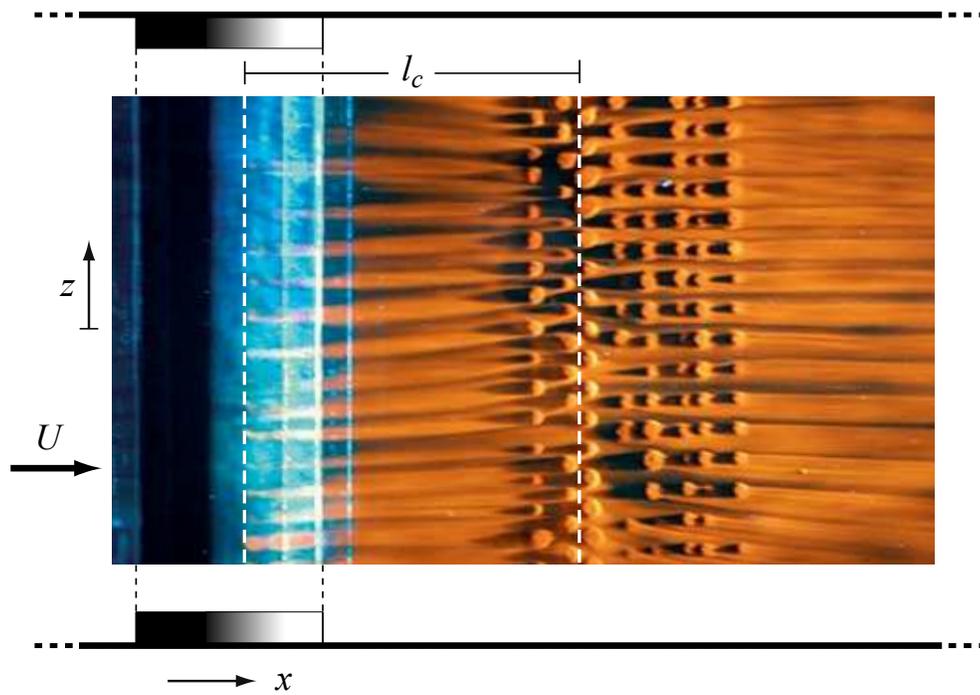


FIGURE 2.8 – Visualisation au colorant des lignes de courant proche-paroi, derrière la bosse à  $Re = 244$  et  $h/\delta = 1.7$ . Les lignes en pointillées représentent la ligne de séparation et la ligne rattachement de la couche limite.

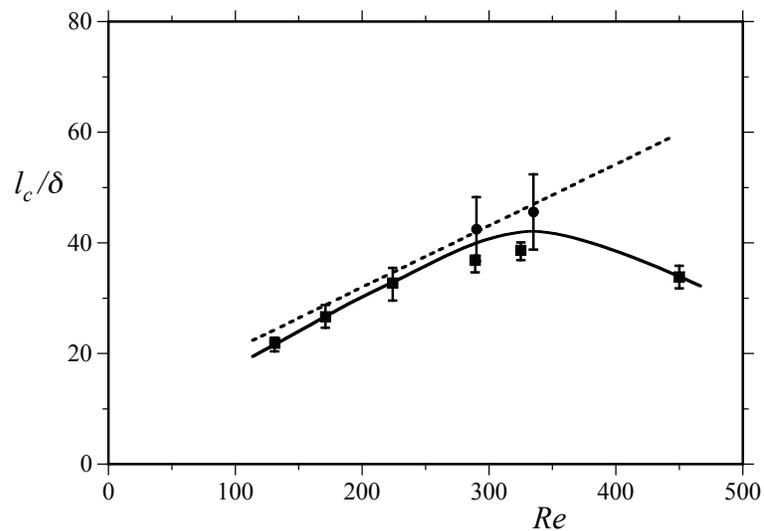


FIGURE 2.9 – Longueur de la zone de recirculation en fonction de  $Re$ , à  $h/\delta = 1.7$ . Les symboles représentent les mesures expérimentales (■ :  $h = 5.5$  mm, ● :  $h = 2.2$  mm), la ligne pointillée représente le résultats issus de la simulation numérique bi-dimensionnelle.

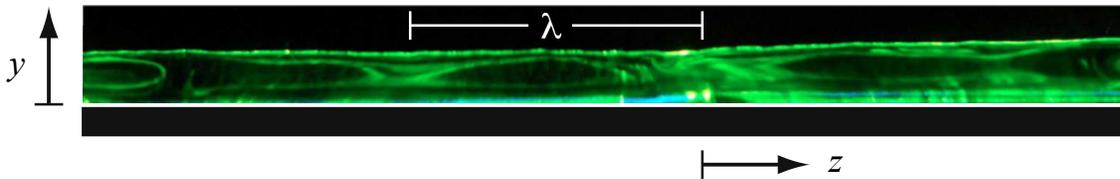


FIGURE 2.10 – Visualisation au colorant de l'écoulement secondaire à l'intérieur de la zone de recirculation à  $Re = 373$  et  $h/\delta = 1.7$ . Un plan lumineux a été placé à une longueur  $15\delta$  après le sommet de la bosse. La coordonnée verticale  $y$  a été étirée par un facteur 2 afin de visualiser plus précisément les structures de l'écoulement.

longitudinale  $\partial u/\partial y$  change de signe. Cette opération a été répétée pour plusieurs gammes de paramètres et l'évolution de la longueur de la bulle de recirculation est présentée figure 2.9. Pour des nombres de Reynolds inférieur à 300 et  $h/\delta = 1.7$ , la bulle de recirculation croît linéairement avec le nombre de Reynolds avec un très bon accord avec la prédiction numérique, recalculée pour  $h/\delta = 1.7$  avec le code de simulation numérique de Marquillie & Ehrenstein (2002). Un comportement similaire a été observé dans l'expérience de Sinha *et al.* (1981) dans le cas d'un écoulement décollé au-dessus d'une marche descendante. Au-delà d'un nombre de Reynolds de 300, la longueur de la bulle de recirculation diminue, marquant un changement de régime qui n'est pas pris en compte dans la simulation numérique bidimensionnelle.

### 2.2.3 Instabilité tridimensionnelle

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 300, l'écoulement devient tridimensionnel et la ligne de rattachement de l'écoulement se déforme au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Une vue en coupe dans le plan ( $y - z$ ) de la zone de recirculation (voir figure 2.10) montre les modulations du colorant avec une longueur d'onde caractéristique  $\lambda/\delta = 19 \pm 3$ . Ces modulations ont une structure spatiale stationnaire qui semble être initiée dans l'expérience au niveau du point de recollement. La simulation numérique de cet écoulement (Gallaire *et al.*, 2007) pour  $Re = 400$  et  $h/\delta = 2$  a montré que l'écoulement était instable. Les taux de croissance associés aux modes instables sont très faibles et leurs fréquences sont nulles, ce qui correspond à la structure spatiale stationnaire observée dans l'expérience. La longueur d'onde caractéristique  $\lambda/\delta = 23$  provenant de la simulation numérique est en bon accord avec la présente observation expérimentale, bien que les paramètres entre l'expérience et le calcul numérique soient légèrement différents. Pour des nom-

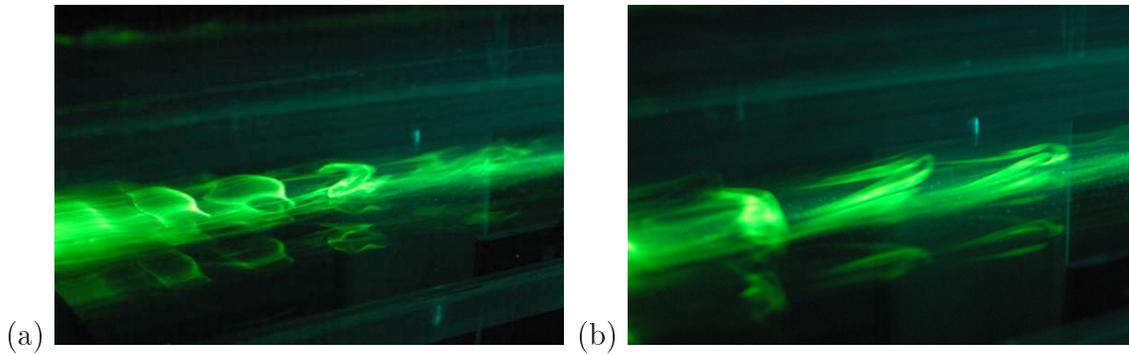


FIGURE 2.11 – Structures de l’écoulement générées le long du point de rattachement de la couche limite (a) et vortex en fer à cheval visualisés plus bas dans l’écoulement (b) pour  $Re = 392$  et  $h/\delta = 1.8$ .

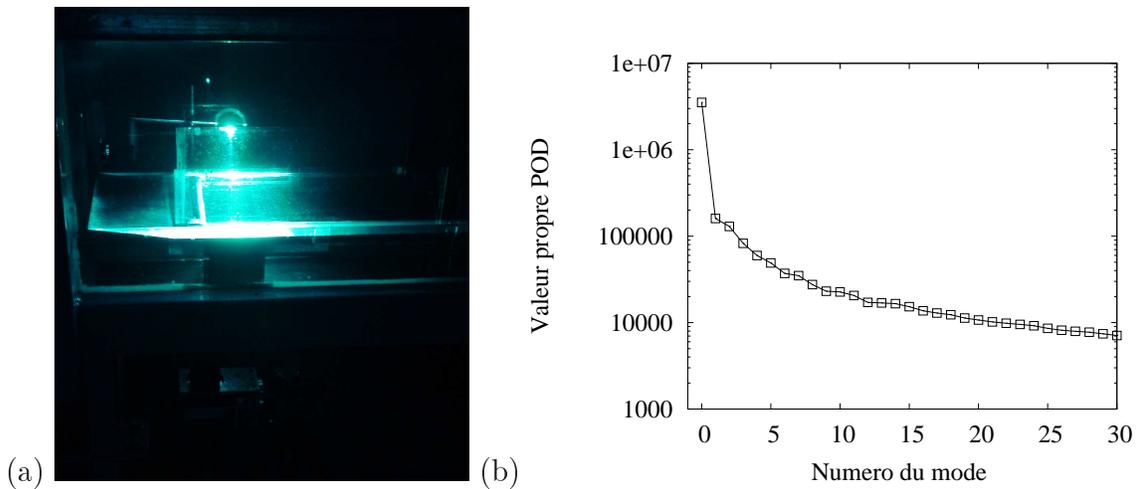


FIGURE 2.12 – Montage expérimental pour la mesure du mode transverse (a) et spectre des 30 premières valeurs propres POD (b), calculées pour 400 champs à  $Re = 360$  et  $h/\delta = 1.7$ .

bres de Reynolds proche de 400, l’écoulement devient instationnaire après presque une minutes d’attente et l’écoulement en aval du point de recollement est caractérisé par un lâcher régulier de vortex en fer à cheval présentés dans la figures 2.11.

## 2.2.4 Mesures dans le plan transverse et modes POD

Motivé par les observations faites à partir de la visualisation par colorant, l’instabilité tridimensionnelle a été quantifiée par des mesures PIV. Le but étant cette fois de reconstruire la distribution spatiale du mode observé dans les simulations numériques. Les simulations numériques ainsi que l’analyse de stabilité ont permis de montrer que la structure spatiale de ce mode stationnaire présente de fortes

d'amplitudes proches du point de décollement et autour du point de rattachement de la couche limite. C'est donc à l'abord de ces deux zones que les mesures par PIV ont été tentées. Bien que la bosse ait été peinte en noir, les réflexions du laser sur cette dernière ne permettent pas de visualiser l'écoulement proche du point de décollement. La transparence de la plaque ainsi que la fenêtre placée en dessous du canal (voir figure 2.3b) ont permis d'observer l'écoulement dans le plan  $(x - z)$ , à une hauteur  $y/\delta = 0.25$ , proche du point de rattachement de l'écoulement. Le mode transverse étant stationnaire avec une distribution sinusoïdale dans la direction  $z$ , la décomposition orthogonale aux valeurs propres semble être la meilleure alternative afin d'extraire sa structure spatiale. Une série de 400 champs de vitesse transverse, résolus en temps à une fréquence de  $10\text{ Hz}$  a été utilisée pour  $Re = 360$  et  $h/\delta = 1.7$ . Les détails de la méthode POD (Proper Orthogonal Decomposition) (Sirovich, 1987) sont donnés en annexe A.2 et cette même méthode a été utilisée dans un écoulement cisailé tournant par Roy *et al.* (2003). Le spectre des valeurs propres POD est présenté Figure 2.12(b), alors que la structure spatiale du mode le plus énergétique est donnée figure 2.13. Une alternance de régions correspondante aux vitesses positives et négatives de la vitesse transverse permettent de confirmer les visualisations avec une longueur caractéristique qui est cette fois comparée aux résultats obtenus numériquement. La figure 2.14(b) montre l'évolution du taux croissance de l'instabilité, prédite numériquement, en fonction de la longueur d'onde ainsi que la valeur observée dans l'expérience. Les taux de croissance sont extrêmement faibles, ce qui correspond au temps d'attente de l'ordre de la minute, nécessaire à l'apparition du phénomène. Ce comportement a aussi été observé dans l'expérience de Beaudoin *et al.* (2004) dans le cas d'un écoulement décollé au-dessus d'une marche descendante.

Une expérience analogue a été menée en mélangeant fortement l'écoulement pendant une courte durée au début de l'acquisition des champs de vitesse, afin de pouvoir observer la croissance transitoire du mode instable. Le produit scalaire entre le mode POD dominant et le champs de vitesse est présenté dans la figure 2.14(a) et on peut observer une croissance de ce mode pendant les 30 premières secondes de l'expérience. Bien qu'il soit difficile de conclure sur une croissance exponentielle, le taux de croissance associé est comparé à la prédiction théorique dans la figure 2.14(b) et semble correspondre à la prédiction théorique. Ce régime de modulation transverse persiste jusqu'à des nombre de Reynolds compris entre 500 et 600 suivant la valeur de  $h/\delta$  (voir figure 2.20). Au delà de cette limite, les oscillations basses fréquences

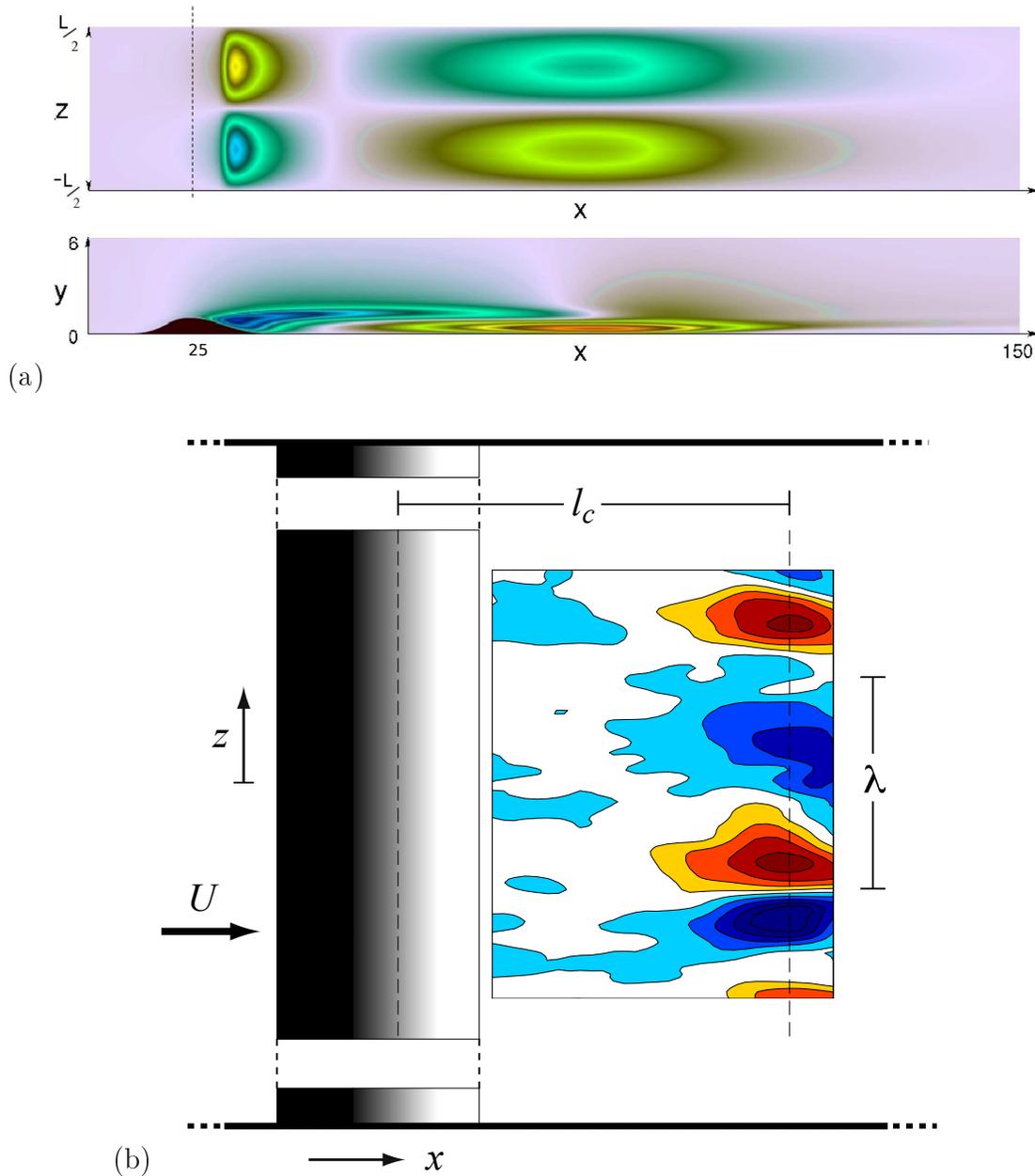


FIGURE 2.13 – Distribution spatiale de la vitesse transverse  $u_z$  (a) du mode transverse à  $Re = 400$  et  $h/\delta = 2$  (Gallaire *et al.*, 2007). Les contours (rouge-bleu) désignent les zones de vitesses (positives-négatives). Premier mode POD de la vitesse transverse  $u_z$  (b) dans la région proche paroi ( $y < 0.125$ ) dans la zone de recirculation, associée au mouvement stationnaire de l'instabilité tri-dimensionnelle à  $Re = 343$  et  $h/\delta = 1.7$ .

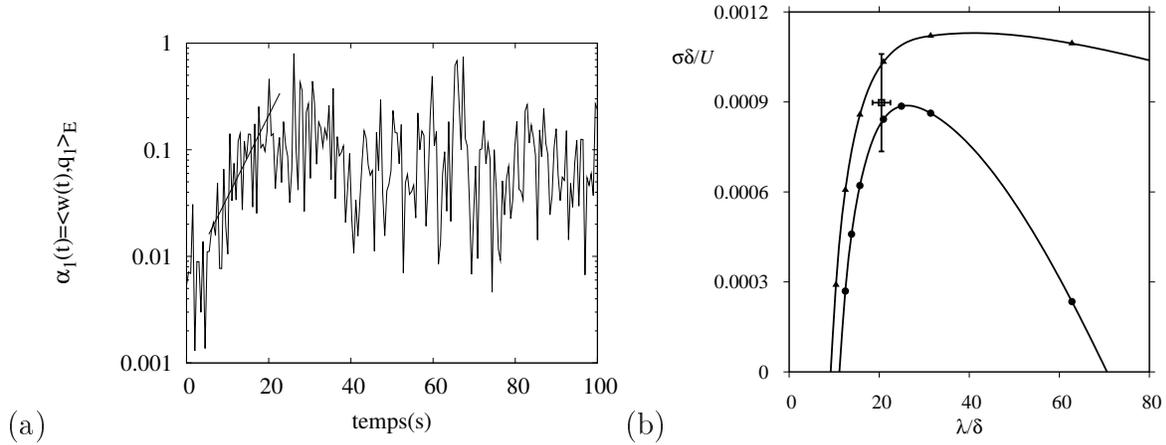


FIGURE 2.14 – Évolution temporelle du mode 3D (a) calculée en effectuant le produit scalaire entre le mode dominant et le champs PIV mesuré. Taux de croissance  $\sigma$  de l’instabilité tridimensionnelle en fonction de la longueur d’onde transverse (b). La ligne continue indique le résultat (à  $Re=400$  : ●,  $Re=600$  : ▲ et  $h/\delta = 2$ ) obtenu à partir de l’analyse de stabilité dans Gallaire *et al.* (2007). La mesure expérimentale a été extraite de l’analyse en modes POD (à  $Re = 360$  et  $h/\delta = 1.7$  ■).

dominent la dynamique d’instabilité.

### 2.2.5 Battement basse fréquence

Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, un mouvement global oscillatoire apparaît au sein de la bulle de recirculation. Ce comportement est illustré figure 2.15 qui montre une séquence de clichés de l’écoulement instationnaire. Afin de quantifier l’amplitude et la fréquence de ces oscillations, le colorant a été injecté dans la bulle de recirculation. La couche de cisaillement est mise en évidence par l’accumulation de colorant dans les régions de fort cisaillement après le point de décollement. Une analyse des images vidéo prise à une fréquence de 25 Hz pour un temps total d’environ une minute à une position fixe de  $x/\delta = 35$  a permis d’extraire une mesure des oscillations de la couche de cisaillement. Le spectre adimensionné pour différents nombres de Reynolds est présenté dans la figure 2.16(a). À partir de  $Re \gtrsim 550$ , un pic apparaît dans le spectre à une fréquence  $f\delta/U = 0.007 \pm 0.001$  dont l’amplitude croît avec le nombre de Reynolds. La valeur moyenne quadratique du déplacement  $\Delta$  en fonction du nombre de Reynolds est présentée dans la figure 2.16(b). Les carrés représentent la valeur mesurée et ils semblent s’aligner pour  $Re \gtrsim 600$ . La droite correspondante a été extrapolée jusqu’à l’abscisse afin de déterminer un nombre de Reynolds critique  $Re_c \approx 590$ . Bien que l’instabilité semble apparaître

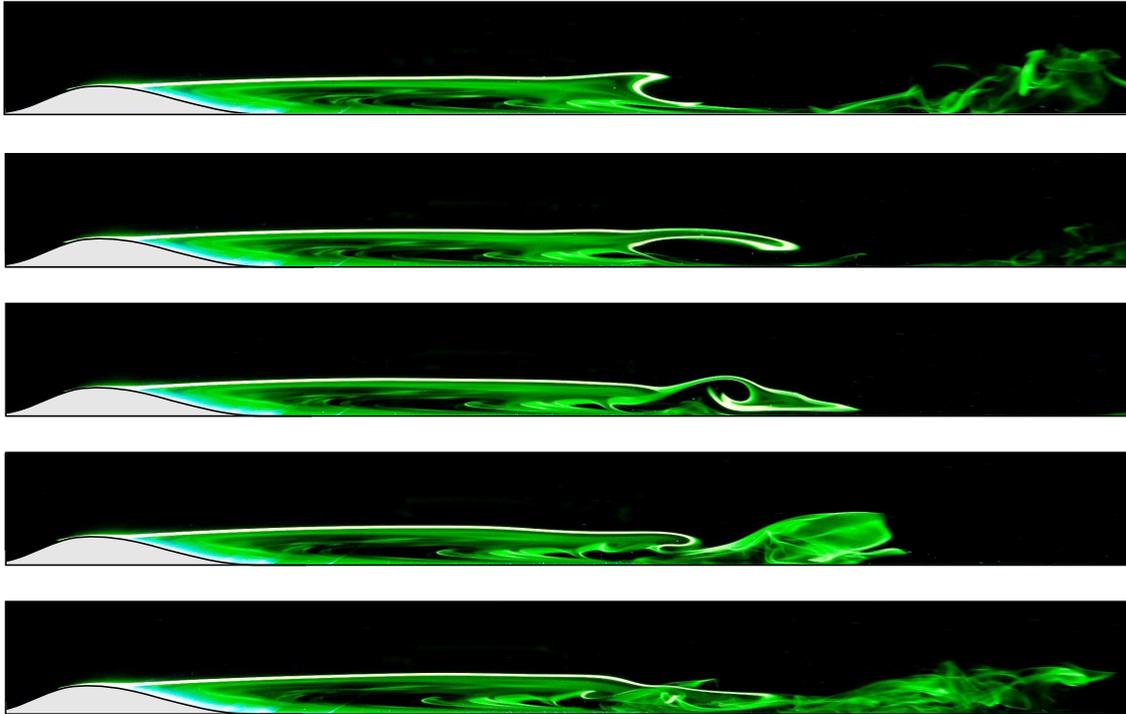


FIGURE 2.15 – Visualisation d’une séquence de l’écoulement (pris par intervalles de 0.25 s) de la zone de recirculation à  $Re = 550$  et  $h/\delta = 1.9$ .

pour des nombres de Reynolds proche de 550, une bifurcation super-critique semble clairement marquée pour  $Re > Re_c$ . Ce résultat correspond de manière surprenante au calcul numérique de Marquillie & Ehrenstein (2003) où le nombre de Reynolds critique a été déterminé pour une valeur de 610. La fréquence  $f\delta/U = 0.0075$  extraite de la simulation numérique pour une hauteur de bosse  $h/\delta = 2$  et  $Re = 650$  est quasi identique bien que la hauteur de bosse  $1.84 < h/\delta < 1.91$  soit légèrement différente dans l’expérience. La simulation numérique a permis de montrer qu’en aval dans l’écoulement, cette basse fréquence coexiste avec une famille de hautes fréquences associée à l’instabilité de Kelvin-Helmholtz. La visualisation au colorant ne permet pas de mesurer ces fréquences de manière quantitative étant donné que le colorant commence à se diffuser aux abords de cette zone.

### 2.2.6 Dynamique basse fréquence

Bien que la dynamique basse fréquence ait été quantifiée grâce aux techniques de visualisation par colorant, la question portant sur l’origine du phénomène reste posée, les oscillations basse fréquence près du point de décollement n’étant qu’une

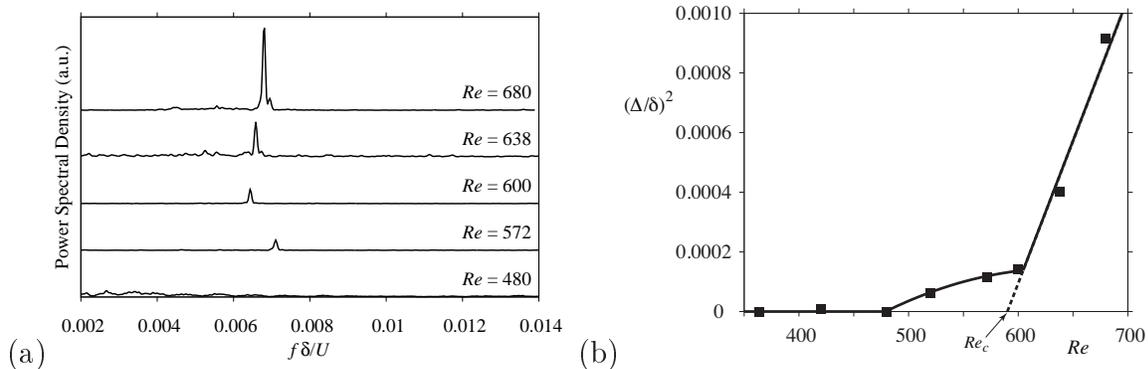


FIGURE 2.16 – Densité spectrale de puissance des oscillations de la couche de cisaillement (a) à  $x/\delta = 35$ ,  $h/\delta = [1.84, 1.91]$  et plusieurs nombres de Reynolds, (b) diagramme de bifurcation de la puissance associée au déplacement de la couche de cisaillement  $\Delta/\delta$  mesuré dans la figure (a)

conséquence de la dynamique d'instabilité mise en évidence par l'analyse de stabilité globale de Ehrenstein & Gallaire (2008). La mesure haute fréquence permet de quantifier les oscillations de la couche de cisaillement où le colorant diffuse. Une étude par PIV résolue en temps a donc été menée afin de résoudre toutes les fréquences mises en jeu dans la zone de rattachement moyen. Le laser continu (voir figure 2.17a) a été utilisé afin d'illuminer la bulle de recirculation, une caméra rapide Photron® a permis l'enregistrement pendant 31.4 secondes de la dynamique instable à une fréquence de 500 Hz. Les conditions de l'expérience ont été choisies afin d'être suffisamment proche du seuil d'instabilité et ainsi conserver une dynamique aussi proche de la prédiction linéaire que possible. Les conditions de l'expérience ont été mesurées pour  $Re = 572$  et  $h/\delta = 1.9$ . La vitesse moyenne de l'écoulement est présentée figure 2.17(b). Les signaux associés à la vitesse normale à la paroi, aux emplacements  $x/\delta = 60$  et  $x/\delta = 80$  à une hauteur  $y/\delta = 1.5$  ont été analysés et leurs spectres<sup>3</sup> sont donnés figures 2.18(a)-(b). Le pic basse fréquence reste clairement visible ainsi qu'une seconde famille de hautes fréquences pour le cas à  $x/\delta = 60$ , qui sont dans la même gamme de fréquences que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz observée dans les simulations numériques de Marquillie & Ehrenstein (2003). Plus loin dans l'écoulement, à  $x/\delta = 80$ , seule la basse fréquence est responsable de la dynamique de lâcher tourbillonnaire après le point de rattachement.

L'étude expérimentale ayant permis d'identifier les mêmes phénomènes que l'étude numérique, plusieurs techniques de traitement d'image ont été mise en œuvre afin

---

3. Résultat d'une simple transformée de Fourier

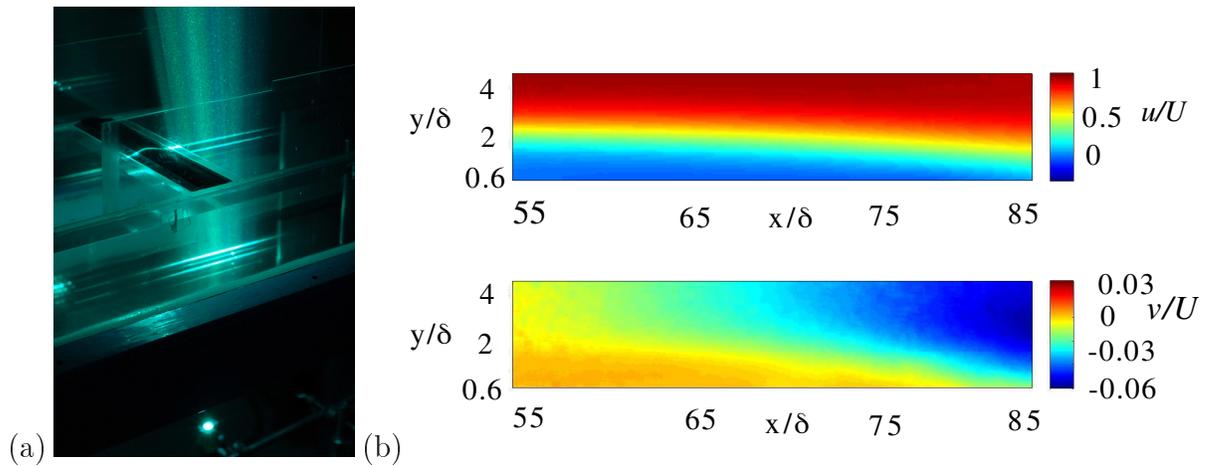


FIGURE 2.17 – Montage expérimental utilisé pour la PIV résolue en temps (a), écoulement moyen ( $u$  et  $v$ ) mesuré à  $Re = 572$  et  $h/\delta=1.9$  (b)

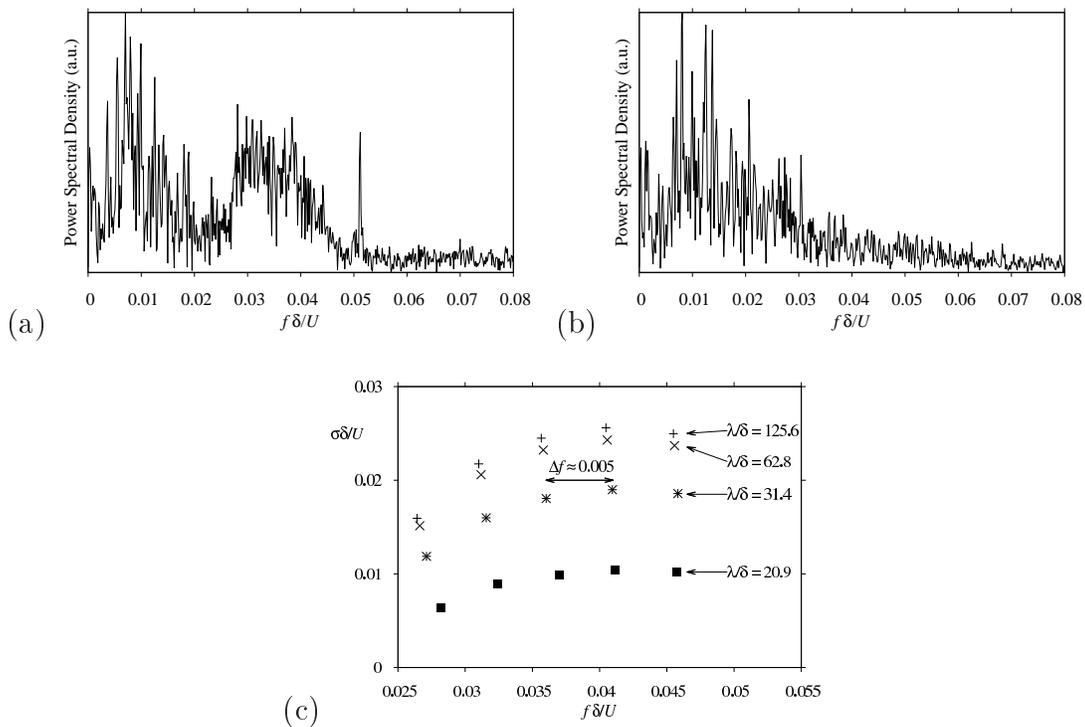


FIGURE 2.18 – Densité spectrale de puissance des oscillations de la couche de cisaillement en utilisant les mesures PIV à  $x/\delta = 60$  (a) et  $x/\delta = 80$  (b) à  $Re = 572$ ,  $y/\delta = 1.3$  et  $h/\delta = 1.9$ . Spectre global des valeurs propres des modes associés au flapping (c) calculé à  $Re = 600$  et  $h/\delta = 2$  pour différentes longueurs d'ondes transverses  $\lambda/\delta$ .

de retrouver la dynamique modale identifiée dans l'étude de stabilité de Ehrenstein & Gallaire (2008). La stabilité globale de Ehrenstein & Gallaire (2008) a montré que l'interaction non normale de deux modes instables était à l'origine du flapping. Une nouvelle série de calculs à  $Re = 600$  et  $h/\delta = 2$  a été menée afin de déterminer l'évolution de cette instabilité pour différentes longueurs d'ondes dans la direction transverse. Les résultats présentés dans la figure 2.18(c) montrent que ces modes oscillatoires dominant pour des grandes longueurs d'ondes avec des fréquences qui sont dans la gamme des fréquences de Kelvin-Helmholtz montrées dans la figure 2.18(a). Comme expliqué par Ehrenstein & Gallaire (2008), l'écart en fréquence  $\Delta f$  est associé à la basse fréquence. Le mode tridimensionnel est aussi présent à  $Re = 600$  (voir figure 2.14b) mais avec un taux d'amplification beaucoup plus faible, son maximum étant  $\sigma\delta/U = 1.110^{-3}$  pour  $\lambda/\delta = 40$ . Les longueurs d'ondes des modes oscillatoires instables ont été comparés à la largeur du canal. Dans le cas de la plus grande bosse (5.5 mm), cette largeur correspond à  $z/\delta \approx 150$ . Tous les modes calculés dans la figure 2.18(c) ont des longueurs d'ondes inférieurs à la largeur du canal, ce qui permet d'affirmer que l'influence du confinement sur la dynamique est très limitée.

### 2.2.7 Décomposition en modes dynamiques

L'analyse en modes POD n'est pas appropriée pour mettre en évidence le phénomène recherché, ce problème viens du fait que cette analyse permet de mettre en évidence la région de corrélation (par le produit scalaire basé sur l'énergie  $\langle . \rangle_E$ ) la plus forte<sup>4</sup>, mais ne permet pas de séparer les fréquences observées. C'est récemment que l'analyse en modes dynamique DMD (Dynamic Modes Decomposition) (Schmid, 2010; Rowley *et al.*, 2009; Basley *et al.*, 2011). et a été appliquée à la mécanique des fluides. Cette méthode, actuellement en plein essor, permet d'effectuer une décomposition spectrale de la dynamique issue de simulations numériques ou d'une expérience. La méthode consiste à résoudre un problème aux valeurs propres en utilisant des clichés instantanés d'une grandeur physique (par exemple la vitesse  $\mathbf{u}$ , voir annexe A.2 pour les détails de la méthode). Une série de 4000 champs de vitesse ( $u, v$ ) issus de la PIV ont été utilisés afin de reconstruire le spectre associé. Le code de simulation utilisé dans Marquillie & Ehrenstein (2003) pour une gamme de paramètres  $h/\delta = 2$  et  $Re = 650$  a permis de générer une nouvelle série de champs de vitesse. La procédure de décomposition en modes dynamique a ensuite été mise

---

4. soit la région de région de lâcher tourbillonnaire

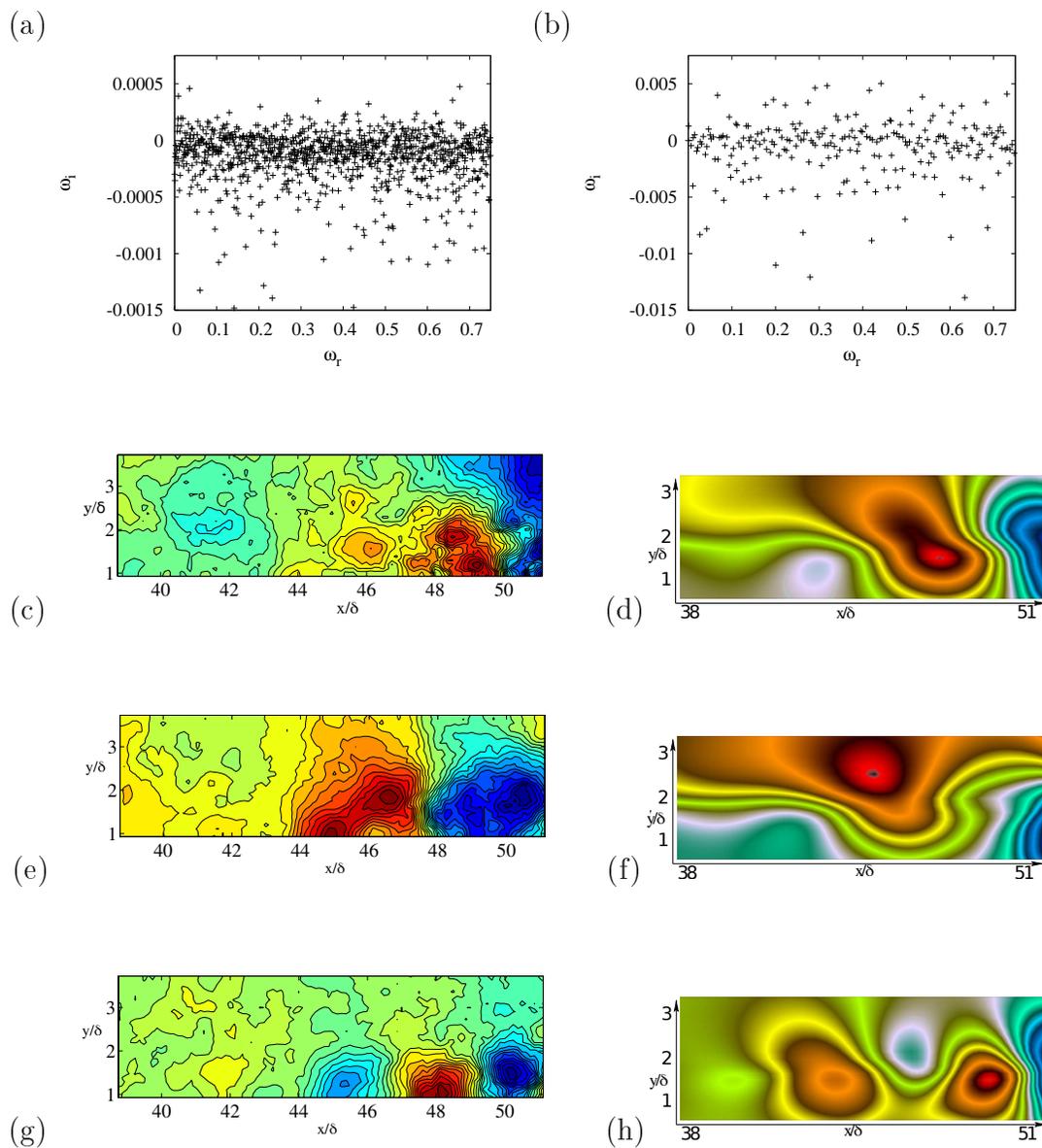


FIGURE 2.19 – Comparaison de l'étude en modes dynamiques pour l'expérience (gauche) à  $Re = 550$ ,  $h/\delta = 1.9$  et le calcul numérique à  $Re = 650$  et  $h/\delta = 2$  (droite). Spectre des valeurs propres  $\omega$  de l'opérateur de Koopman de l'expérience (a)-(b), mode le plus instable de la branche centrale à  $\omega_r \approx 0.3$  (c)-(d), second mode le plus instable de cette branche à  $\omega_r \approx 0.4$  (e)-(f), mode instable haute fréquence  $\omega_r \approx 0.75$  (g)-(h).

en œuvre pour comparer les résultats entre l'expérience et simulation numérique. L'analyse a été pratiquée sur une partie de l'écoulement comprise entre  $40 < x/\delta < 55$  et  $0.25 < y/\delta < 4$  dans l'expérience et  $25 < x/\delta < 85$  et  $0.1 < y/\delta < 4$  dans le calcul numérique.

La structure des modes les plus instables sont présentées figure 2.19(c) et figure 2.19(d) où la vitesse normale a été représentée. Ces modes sont localisés autour du point de rattachement, au niveau de la couche de cisaillement avec des zones alternées de vitesses négatives et positives, en accord qualitatif avec l'analyse de stabilité linéaire. La figure 2.19(b) montre le spectre associé au calcul numérique et la figure 2.19(a) celui de l'expérience. Si la partie imaginaire de la valeur propre est positive, celle-ci correspond à une amplification exponentielle en temps du mode associé. Les plus amplifiés font partie d'une famille de modes instables localisés autour du point de rattachement de la couche limite qui n'est pas sans rappeler les résultats obtenus par l'analyse de stabilité de Ehrenstein & Gallaire (2008). La fréquence associée à la partie réelle de la valeur propre  $\omega_r$  correspond à la même gamme de fréquences que celles obtenues par l'analyse de stabilité linéaire. Bien qu'une correspondance entre l'algorithme d'Arnoldi et l'analyse DMD aie été considérée (Rowley *et al.*, 2009; Chen *et al.*, 2012), la comparaison des taux de croissance est plus délicate étant donné que la croissance des modes est affectée par les effets non linéaires dans la simulation ainsi que par les effets tri-dimensionnels dans l'expérience. Bien que ces résultats soient encourageants, la méthode reste relativement délicate à mettre en œuvre étant donné que la projection repose sur la qualité du dernier cliché utilisé pour la projection (voir annexe A.2).

## 2.3 Discussion

Les différents régimes d'instabilité présentés au cours de cette étude sont récapitulés dans la figure 2.20. On observe que la transition du régime stable à l'instabilité tridimensionnelle apparaît pour un nombre de Reynolds quasi-constant de 300 pour  $1.6 < h/\delta < 2.1$ . La transition d'un écoulement dominé par l'instabilité tridimensionnelle au battement basse fréquence est moins marquée et dépend des deux paramètres. La valeur de la basse fréquence associée aux oscillations globales est presque constante dans l'intervalle étudié et reste indépendante de l'emplacement de la mesure dans le plan transverse  $z$ , suffisamment loin des bords. La mesure de la longueur de recirculation, issue de la visualisation, a permis de retrou-

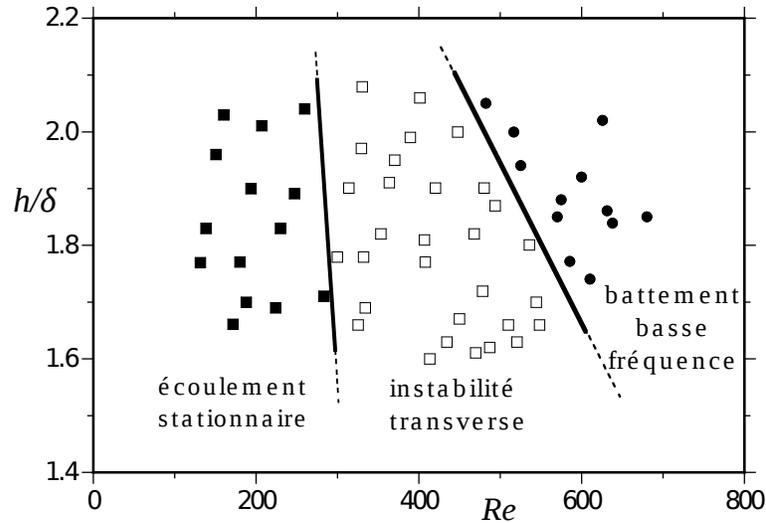


FIGURE 2.20 – Diagramme de stabilité de l'écoulement expérimental de couche limite décollée en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la hauteur de la bosse  $h/\delta$ .

ver la croissance linéaire, mise à jour par voie numérique, de la bulle de recirculation avec le nombre de Reynolds à  $h/\delta$  constant (Marquillie & Ehrenstein, 2003). Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 300, la première instabilité observée correspond à une instabilité tridimensionnelle. La structure modale stationnaire localisée au sein de la bulle de recirculation possède une longueur d'onde dans la direction transverse  $z$  en bon accord avec les prédictions numériques et théoriques (Gallaire *et al.*, 2007). Pour des nombres de Reynolds plus importants, la fréquence associée aux oscillations globales de la bulle de recirculation est en excellent accord avec la basse fréquence prédite dans la simulation numérique bidimensionnelle (Marquillie & Ehrenstein, 2003). Bien que les plus hautes fréquences associées à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, localisées dans la région de rattachement moyenne de l'écoulement, ont aussi été identifiées, la dynamique de lâcher tourbillonnaire reste dominée par l'instabilité basse fréquence.

Une analyse modale (Décomposition en modes dynamiques) des mesures PIV instantanées ainsi que des données issues de la simulation numérique a été comparée aux résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire (Ehrenstein & Gallaire, 2008). Les modes les plus instables issus de l'expérience et de la simulation numérique ont des valeurs propres dans la même gamme de fréquence que celles issues de l'analyse de stabilité linéaire. De plus, ces valeurs sont équidistantes en fréquence, ce qui semble confirmer le scénario d'une interaction modale, responsable des oscillations

basse fréquence (Ehrenstein & Gallaire, 2008). Par ailleurs ces résultats restent à confirmer étant donné que l'analyse en modes dynamique, est fortement dépendante de la qualité des mesures (Chen *et al.*, 2012).

---

## Chapitre 3

# Contrôle en boucle fermée : Modes globaux et réduction de modèle

Dans cette partie, on s'intéresse au contrôle de la dynamique présentée dans le chapitre 2. La méthode la plus efficace pour contrôler ce type de système consiste à procéder à un asservissement en boucle fermée (Bewley, 2001). Les modes globaux apparaissent donc comme une base de projection naturelle pour construire un contrôleur linéaire de dimension réduite. Sans oublier le caractère entrée-sortie du système, cette réduction de modèle "a priori" semble tout à fait indiquée en vue de la construction d'un compensateur optimal, au moins au voisinage du seuil d'instabilité (Åkervik *et al.*, 2007). Une telle réduction de modèle peut être directement couplée au calcul DNS et/ou à un banc expérimental instrumenté pour le contrôle, et le nombre de degrés de liberté du modèle réduit doit être aussi faible que possible, si l'on souhaite procéder à un contrôle en temps réel de la dynamique.

### 3.1 Calcul de l'état de base et des modes globaux

La géométrie ainsi que les lignes de courant de l'état stationnaire sont représentées sur la figure 3.1. Ces solutions ont été obtenues pour un nombre de Reynolds de 590 et 690 et une bosse de hauteur  $h = 2^1$ . Ces solutions ont été calculées en discrétisant les équations de Navier-Stokes par une méthode de type collocation Chebyshev dans les deux directions de l'espace, et avec le domaine de calcul  $0 \leq x \leq 300$ ,  $\eta(x) \leq y \leq H$ , avec  $\eta(x)$  la limite inférieure. Le profil de Blasius  $(U(y), 0)$  a été imposé à l'entrée du domaine de calcul  $x = 0$ , la hauteur  $H = 30$  du domaine a été choisie suffisamment grande pour que l'écoulement y soit uniforme.

---

1. Les longueurs ont été adimensionnées par l'épaisseur de déplacement du profil de couche limite  $\delta$  et les vitesses par  $U_\infty$

---

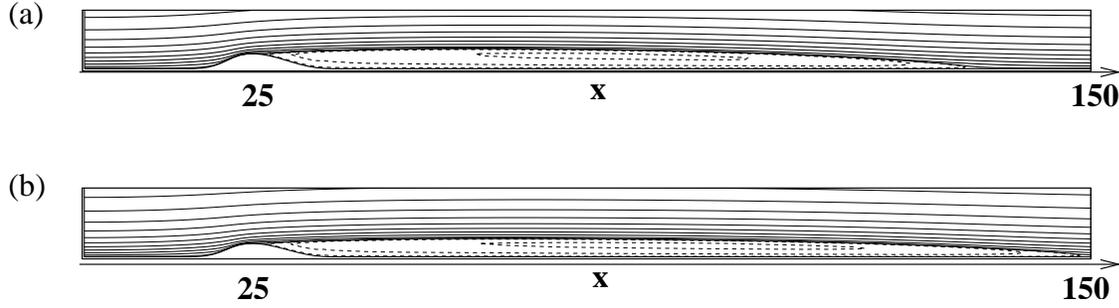


FIGURE 3.1 – Lignes de courant de l'écoulement de base pour une hauteur de la bosse  $h = 2$ ,  $Re = 590$  et  $Re = 690$ .

Une condition de type Dirichlet  $\mathbf{u} = (1, 0)$  a donc été imposée sur la limite supérieur  $y = H$ , une condition d'adhérence  $\mathbf{u} = (0, 0)$  à la paroi  $y = \eta(x)$ , alors qu'à la sortie  $x = L$ , une condition de Neumann homogène pour la vitesse a été implémentée. La méthode de type quasi-Newton "Broyden rank one update" est utilisée afin de déterminer l'écoulement de base (Stoer & Bulirsch, 1992), même instable, solution des équations de Navier-Stokes stationnaires. Le champ de vitesse  $\mathbf{u}_s$  et la pression d'équilibre  $p_s$  sont donc solution de

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, p, Re) = [-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}; \nabla \cdot \mathbf{u}] = 0 \quad (3.1)$$

qui constitue l'état de base pour l'étude de stabilité linéaire. Le choix de la hauteur  $H$  et de la longueur  $L$  revêtent une importance cruciale pour le calcul de la stabilité globale de cet écoulement. Bien que la convergence du spectre global puisse difficilement être obtenue (voir Trefethen & Embree (2005) pour une plus ample discussion sur les opérateurs non normaux). La dynamique d'instabilité linéaire dépend principalement de l'interaction non normale entre modes, et non de la localisation individuelle des valeurs propres dans le spectre. Les valeurs de référence  $L = 300$ , et  $H = 30$  avec  $N_x = 250$  et  $N_y = 40$  points de collocation ont été choisies par rapport au cas de référence de Ehrenstein & Gallaire (2008). Par la suite on dénote  $\mathbf{A}(\mathbf{u}_s, Re) = D_{\mathbf{u}_s, p} \mathbf{f}(\mathbf{u}_s, Re)$  la matrice jacobienne calculée pour l'état d'équilibre  $(\mathbf{u}_s, p_s)$ . La dynamique de perturbation linéaire est donc solution du système algèbro-différentiel

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{A}(\mathbf{u}_s, Re) \mathbf{q} \quad \mathbf{E} \mathbf{q} = (u, v, 0), \quad (3.2)$$

avec  $\mathbf{q} = (u, v, p)$  la perturbation. Cette perturbation satisfait la condition d'adhérence à la paroi et prise nulle à l'entrée  $x = 0$  ainsi qu'à la limite supérieur  $y = H$ , et une condition de Neumann a été implémentée à la sortie. La pression est calculée

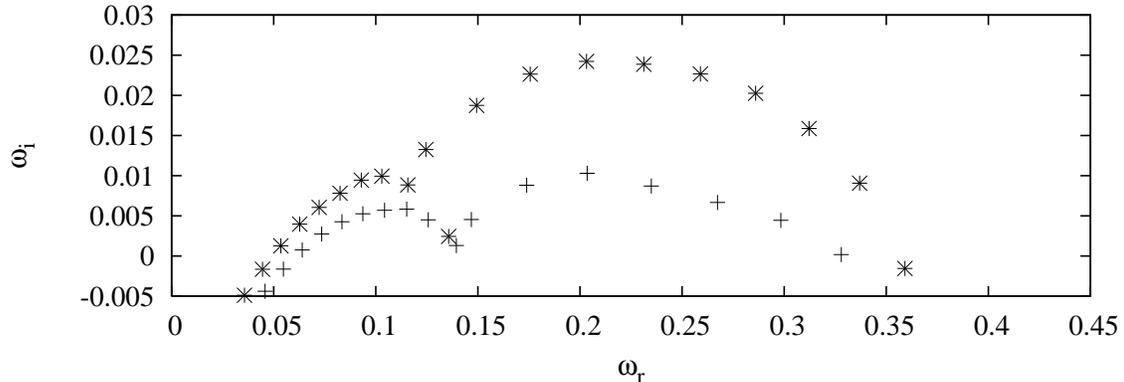


FIGURE 3.2 – Partie instable du spectre global pour une hauteur de la bosse  $h = 2$  ;  $+$  :  $Re = 590$ ,  $*$  :  $Re = 690$ .

de manière implicite grâce à la condition d'incompressibilité imposée à l'intérieur ainsi que sur les bords du domaine. Les modes erronés inhérents aux discrétisations Chebyshev ont été éliminés suivant la procédure de Peyret (2002, 262). La matrice  $\mathbf{A}$  étant inversible et  $\mathbf{E}$  étant la projection du vecteur solution  $\mathbf{q}$  sur le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , le système (3.2) peut être intégré en temps en utilisant une formulation de type Euler retardée du second ordre (particulièrement appropriée pour l'intégration de systèmes algébro-différentiels (Kunkel & Mehrmann, 2006)). La stabilité de l'écoulement de base  $(\mathbf{u}_s, p_s)$  est calculée en considérant les modes temporels bidimensionnels

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \hat{\mathbf{q}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}), \quad (3.3)$$

les modes  $\hat{u}(x, y), \hat{p}(x, y)$  dépendant à la fois de la coordonnée longitudinale  $x$  et la coordonnée normale à la paroi  $y$ . D'après la relation (3.2), ces modes sont solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$-i\omega E\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{A}(\mathbf{u}_s, Re)\hat{\mathbf{q}}, \quad E\hat{\mathbf{q}} = [\hat{\mathbf{u}}, 0], \quad (3.4)$$

avec la matrice jacobienne  $\mathbf{A}(\mathbf{u}, Re) = D_{\mathbf{u}, p}f(\mathbf{u}, Re)$ . Les solutions  $\hat{\mathbf{q}}$  sont calculées avec l'algorithme d'Arnoldi (Nayar & Ortega, 1993) (voir annexe B.2), suivant la même méthode que celle employée dans Ehrenstein & Gallaire (2008). La partie instable du spectre est présentée dans la figure 3.2 pour  $Re = 590$  et  $Re = 690$  et  $h = 2$  et montre l'amplification des taux de croissance  $\omega_i > 0$  avec le nombre de Reynolds. À ces modes directs est associée la famille de modes adjoints, solutions du problème aux valeurs propres

$$i\omega E\hat{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{A}^+(\mathbf{u}_s, Re)\hat{\mathbf{q}}^+, \quad (3.5)$$

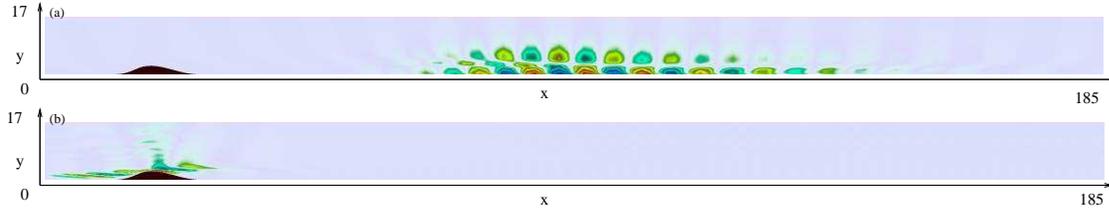


FIGURE 3.3 – Représentation spatiale de la vitesse du mode direct (a) et adjoint (b) le plus instable.

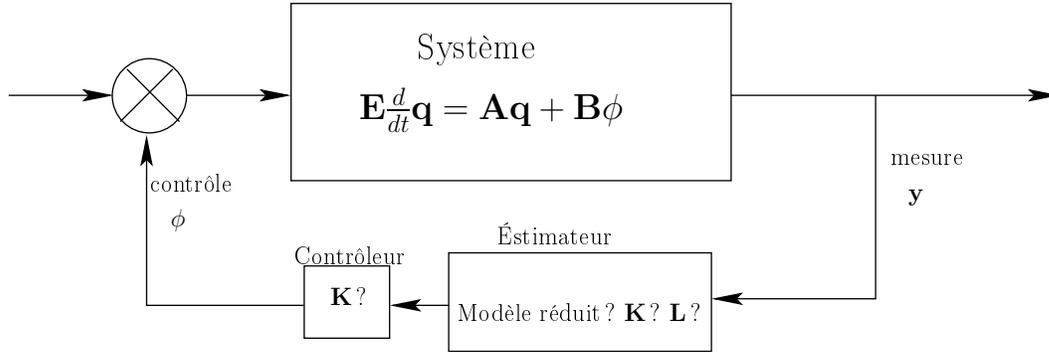


FIGURE 3.4 – Schéma fonctionnel de la stratégie de contrôle pour la réduction de modèle.

avec  $\mathbf{A}^+(\mathbf{u}_s, Re)$  la matrice adjointe de  $\mathbf{A}(\mathbf{u}_s, Re)$ , qui est dans cette formulation discrète simplement la matrice transposée de  $\mathbf{A}$ . Le mode adjoint associé à la valeur propre la plus instable est représenté sur la figure 3.3(b) qui montre que sa structure est localisée au voisinage de la bosse.

### Asservissement de la dynamique instable

L'asservissement en boucle fermée consiste à rendre le système descripteur stable : il s'agit donc de construire un gain de contrôle capable de stabiliser le système (3.2). Pour ce faire, on introduit la loi de contrôle  $\phi$  et un actionneur  $\mathbf{B}$  dans (3.2) qui s'écrit

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \phi \quad \text{et} \quad \phi = \mathbf{K} \mathbf{q}$$

où  $\mathbf{K}$  stabilise le système  $(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})$ , c'est à dire que toutes les valeurs propres de matrice  $(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})$  ont des parties réelles  $\omega_i < 0$ . Or, il est nécessaire de procéder à une réduction de modèle pour deux raisons : le gain de contrôle  $\mathbf{K}$  est solution des équations algébriques de Riccati qui deviennent difficiles à calculer pour des systèmes de dimension supérieure à  $O(10^3)$ . De plus, la réduction de modèle est la

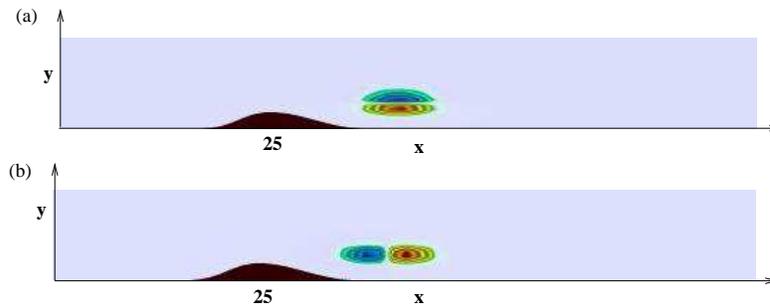


FIGURE 3.5 – Représentation spatiale de l'actionneur réel, (a) composante de la vitesse longitudinale, (b) composante de la vitesse normale

seule alternative dès lors que l'on cherche à contrôler un phénomène en temps réel.

## 3.2 Méthodologie de contrôle rétroactif

La structure des modes adjoints étant optimale pour exciter les modes directs (Chomaz, 2005), il convient de placer l'actionneur près de la partie descendante de la bosse, dans la région où l'amplitude des modes adjoints instables est maximale (voir figure 3.3b). Un actionneur volumique à divergence nulle  $\mathbf{B}$

$$B_x = -(y - y_0) \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right), \quad (3.6)$$

$$B_y = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}(x - x_0) \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right). \quad (3.7)$$

est localisé en  $x_0 = 40$ ,  $y_0 = 3$  et ses deux composantes sont représentées sur la figure 3.5. Des capteurs sont placés sur la paroi et mesurent le frottement pariétal

$$y_i = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} \partial u / \partial y(x, 0) dx. \quad (3.8)$$

avec  $\Delta x = 20$  et  $x_1 = 60$ ,  $x_2 = 100$ ,  $x_3 = 140$ ,  $x_4 = 180$ ,  $x_5 = 220$ ,  $x_6 = 260$  et l'opérateur  $\mathbf{C}$  désigne cette mesure. En l'absence d'une mesure complète de la dynamique de perturbation  $\mathbf{q}$ , on introduit son estimation  $\mathbf{q}_e$ . En plus d'être régie par la même dynamique, elle est aussi forcée par un terme de restitution issu de la mesure :  $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_e)$  qui minimise l'erreur entre la dynamique complète et son estimation. Cet état estimé permet ensuite de calculer la rétroaction sur l'écoulement via le contrôleur. En ajoutant l'actionneur  $\mathbf{B}$  au système (3.2) ainsi que la mesure

$\mathbf{C}$ , le système couplé s'écrit

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \phi, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{q}_e = \mathbf{A} \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_e \phi + \mathbf{L}(\mathbf{y}_e - \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}_e = \mathbf{C} \mathbf{q}_e, \quad \phi = \mathbf{K} \mathbf{q}_e. \quad (3.10)$$

Reste à déterminer les opérateurs  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  qui sont appelés respectivement gain de contrôle et gain d'estimation (voir Kim & Bewley (2007) et références associées). Le système dynamique (3.10), appelé compensateur permet de calculer la loi de contrôle  $\phi$  à partir de la mesure  $\mathbf{y}$ . Il ne reste plus qu'à construire un modèle pour  $\mathbf{B}_e$ , capable de contrôler la dynamique tout en restant de dimension aussi faible que possible, afin de pouvoir calculer les gains  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$ .

### 3.3 Projection sur les modes

La dynamique d'instabilité de cette couche limite décollée a été étudiée dans Ehrenstein & Gallaire (2008) où il a été montré qu'il est possible de représenter des perturbations optimales dans la base des modes temporels. Cette analyse consiste à trouver la condition initiale  $\mathbf{u}_0$  qui donne le maximum de croissance d'énergie pour des temps successifs Schmid & Henningson (2001). Pour le cas présent il s'avère que quelques centaines de modes donnent des résultats convergés quant à la croissance transitoire de l'énergie (Ehrenstein & Gallaire, 2008). Pour des temps plus grands l'interaction non normale entre les modes instables permet de retrouver la fréquence de battement de la bulle de recirculation observée dans Marquillie & Ehrenstein (2003). Il est alors naturel de vouloir utiliser les modes temporels pour la réduction de modèle qui est un préalable si l'on cherche à mettre en place un contrôle rétroactif. La dynamique réduite est donc construite dans la base des modes globaux, solution du problème aux valeurs propres généralisé (3.4). Les vecteurs propres étant des paires complexes conjuguées alors que les opérateurs sont réels, le modèle pour l'actionneur s'écrit

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{E} \sum_{i=1}^m (\beta_j \hat{\mathbf{q}}_j + \bar{\beta}_j \tilde{\mathbf{q}}_j) \quad (3.11)$$

(les variables avec les barres dénotent la valeur complexe conjuguée) avec  $\tilde{\mathbf{q}}_j$  solution de (3.4). Aussi écrit sous la forme compacte

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{E} \mathbf{V} \hat{\mathbf{B}}, \quad (3.12)$$


---

avec le vecteur  $\widehat{\mathbf{B}} = (2\beta_{1r}, -2\beta_{1i}, \dots, 2\beta_{mr}, -2\beta_{mi})^T$  (avec  $\beta_j = \beta_{jr} + i\beta_{ji}$ ) ainsi que la matrice réelle contenant les vecteurs propres

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{q}}_{1r} & \widehat{\mathbf{q}}_{1i} & \cdots & \widehat{\mathbf{q}}_{mr} & \widehat{\mathbf{q}}_{mi} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

contenant les  $n = 2m$  colonnes correspondant à la partie réelle  $\widehat{\mathbf{q}}_{1r}$  et à la partie imaginaire  $\widehat{\mathbf{q}}_{1i}$  des vecteurs propres (pour toutes les valeurs propres satisfaisant la condition  $\omega_r \neq 0$ ). L'état estimé dans la base des modes

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{V}\widehat{\mathbf{x}}_e \quad (3.14)$$

et le compensateur (3.10) s'écrivent de manière équivalente pour donner lieu au système de dimension  $n$

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{x}}_e = \Lambda\widehat{\mathbf{x}}_e + \widehat{\mathbf{B}}\phi + \widehat{\mathbf{L}}(\mathbf{y}_e - \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}_e = \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{x}}_e, \quad \phi = \widehat{\mathbf{K}}\widehat{\mathbf{x}}_e, \quad (3.15)$$

où  $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{V}$ .

### 3.3.1 Méthode de projection

#### 3.3.1.1 Spectre global

Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres associés au spectre global de l'état de base à  $Re = 590$  sont présentés dans la figure 3.6. Étant donné la dimension du système algébro-différentiel (3.2,  $O(10^4)$ ), 5 à 6 projections sur des sous espaces de Krylov de dimension 1600 à différentes positions dans le spectre ont été nécessaires afin de reconstruire le résultat de la figure 3.6. Cette figure contient 1000 valeurs propres qui sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire

#### 3.3.1.2 Projection bi-orthogonale

La procédure conventionnelle de projection consiste à utiliser la relation de bi-orthogonalité

$$\langle \widehat{\mathbf{q}}_k^+, \mathbf{E}\widehat{\mathbf{q}}_j \rangle = \delta_{kj}. \quad (3.16)$$

Dans cette formulation réelle, la matrice  $\Lambda$  dans (3.15) n'est plus diagonale mais possède une structure diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \omega_{ji} & -\omega_{jr} \\ \omega_{jr} & \omega_{ji} \end{pmatrix}$$

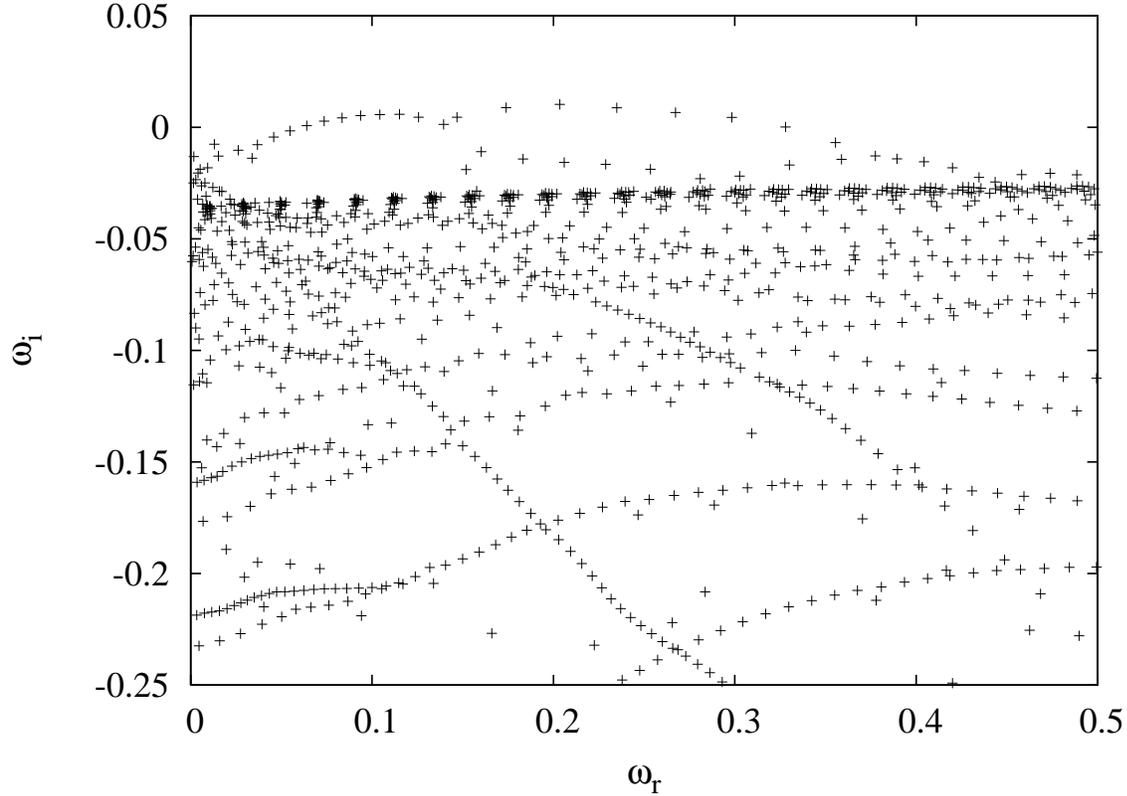


FIGURE 3.6 – Spectre dans la partie  $\omega_r > 0$  avec  $m = 1000$  valeurs propres ( $Re = 590$ ).

avec  $\omega_j$  les valeurs propres, solutions de (3.4). Dans cette formulation, les coefficients  $\beta_j$  sont solution du produit scalaire entre modes adjoints et l'actionneur réel tel que

$$\beta_j = \langle \hat{\mathbf{q}}_j^+, \mathbf{EB} \rangle, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.17)$$

Or dans cette approche, aucune importance n'a été accordée à la relation entre l'entrée et la sortie du système et cette projection n'assure aucune convergence d'une quelconque norme associée au système réduit (Barbagallo *et al.*, 2011). Le résultat de la projection bi-orthogonale est présenté dans la figure 3.7(a). Au vu de la structure spatiale résultant de cette projection, la décision a été prise de minimiser la différence entre l'actionneur réel  $\mathbf{B}$  et son modèle  $\mathbf{B}_e$ . Pour ce faire, deux projections de type orthogonal sont mises en œuvre. Ces méthodes sont particulièrement attractives car elle permettent de s'affranchir du calcul des modes adjoints.

### 3.3.1.3 Projection orthogonale, méthode de Gram-Schmidt.

Afin de mettre en œuvre une projection orthogonale, les modes globaux sont orthogonalisés suivant une procédure de Gram-Schmidt associée au produit scalaire énergétique, tel que  $\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_l^H \tilde{\mathbf{u}}_m dx dy = \delta_{lm}$  ce qui devient pour le système discrétisé

$$\langle \tilde{\mathbf{q}}_l, WE\tilde{\mathbf{q}}_m \rangle = \delta_{lm}, \quad (3.18)$$

avec  $\tilde{\mathbf{q}}$  les modes orthogonalisés, et  $W$  une matrice diagonale contenant les poids d'intégration (calculés par la méthode des trapèzes) associés à la discrétisation. La relation entre  $\hat{\mathbf{q}}$  et  $\tilde{\mathbf{q}}$  est de la forme

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o \mathbf{R}$$

avec  $\mathbf{V}_o$  la matrice contenant les vecteurs orthogonaux et  $\mathbf{R}$  une matrice triangulaire supérieure (voir annexe B.2). En décomposant sur les modes temporels, le système (3.2) peut à nouveau être réduit à un système dynamique, équivalent à (3.15). Dans cette projection, la matrice

$$\Lambda = \mathbf{V}_o^T \mathbf{A}(\mathbf{u}_s, Re) \mathbf{V}_o$$

est pleine et non normale, et la mesure est donnée par  $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{V}_o$ . L'actionneur modèle est maintenant calculé dans cette nouvelle base suivant la même logique que dans l'équation (3.17). Le calcul des coefficients  $\beta_j$  suivant cette projection s'écrit

$$\beta_j = \langle \tilde{\mathbf{q}}_j, \mathbf{E} \mathbf{B} \rangle,$$

et la structure dans l'espace physique de l'actionneur modèle utilisant ces coefficients est représentée sur la figure 3.7(b). Cet actionneur est centré au même endroit que l'actionneur réel et leur structures sont similaires.

### 3.3.1.4 Méthode des moindres carrés

Une autre manière de construire un modèle d'actionneur par projection orthogonale consiste à résoudre un problème d'optimisation. Il s'agit de calculer la combinaison linéaire des coefficients  $\beta_j$  qui minimise l'erreur entre l'actionneur et son modèle.

$$\|\mathbf{V} \hat{\mathbf{B}} - (\mathbf{B} - \mathbf{B}_e)\|^2 = \min_{\hat{\mathbf{y}}} \|\mathbf{V} \hat{\mathbf{y}} - (\mathbf{B} - \mathbf{B}_e)\|^2. \quad (3.19)$$

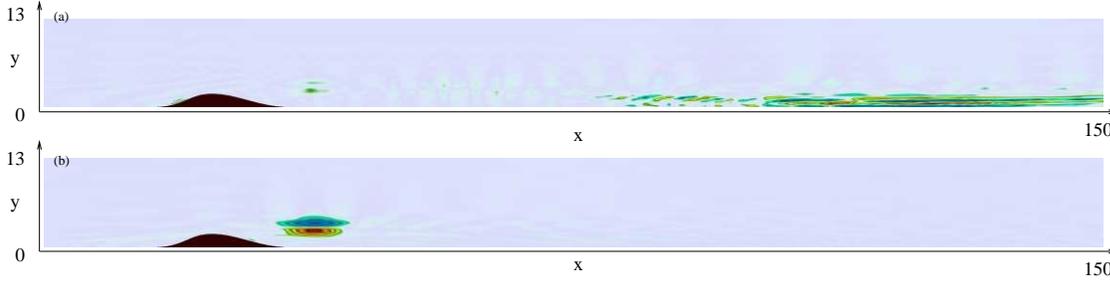


FIGURE 3.7 – Composante longitudinale de la vitesse de l'actionneur projeté  $B_e$  pour la base modale présentée à  $Re = 590$  ; par projection bi-orthogonale,  $m = 1000$  (a) et par projection orthogonale,  $m = 985$  (b).

(avec la norme basée sur le produit scalaire énergétique où  $\|\mathbf{g}\|^2 = \mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{g}$  est la version discrète du produit scalaire  $\int (g_x^2 + g_y^2) dx dy$  pour toute fonction volumique  $g = (g_x, g_y)$ .) Il convient donc de résoudre le système normal

$$\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V} \hat{\mathbf{B}}_e = \mathbf{V}^T \mathbf{W} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_e). \quad (3.20)$$

ce qui permet de calculer les coefficients  $\hat{\mathbf{B}}$  issus de cette procédure d'optimisation. Le compensateur qui en résulte est équivalent au système dynamique (3.15).

### 3.4 Analyse d'erreur, algorithmes et sélection des modes

Une analyse de l'erreur entre la dynamique de perturbation linéaire et le compensateur s'écrit

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_e) \phi + \mathbf{L} \bar{\mathbf{y}}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{q}}. \quad (3.21)$$

avec  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_e$  l'erreur commise lors de l'estimation ainsi que  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_e$ , l'erreur entre l'actionneur et son modèle. À partir de l'équation (3.21), on peut déduire que l'actionneur modèle ne doit pas avoir de contribution sur les modes instables ainsi qu'une contribution minimale sur la partie stable du spectre  $\mathbf{V}$ . L'espace des modes considéré est donc divisé en deux parties :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_u + \mathbf{V}_s,$$

la partie instable du spectre dénotée par l'indice  $u$ , et la partie stable dénotée par l'indice  $s$ . Bien que pour les modes instables la seule projection viable soit la projection bi-orthogonale, d'autres méthodes peuvent être mises en œuvre sur la partie

stable (voir Barbagallo *et al.* (2009) pour une projection basée sur la relation entrée-sortie du système).

### 3.4.1 Algorithme de projection

L'actionneur  $\mathbf{B}_e$  est tout d'abord construit par projection bi-orthogonale de l'actionneur  $\mathbf{B}$  sur la partie instable des modes tel que  $\beta_j = \langle \hat{\mathbf{q}}_j^+, \mathbf{E}\mathbf{B} \rangle$ ,  $j = 1, \dots, m_u$ , ce qui donne lieu à

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{E}\mathbf{V}_u\hat{\mathbf{B}}_u. \quad (3.22)$$

avec  $m_u = 15$  pour l'écoulement à  $Re = 590$  et  $m_u = 17$  pour  $Re = 690$ . L'actionneur modèle  $\mathbf{B}_e$  est ensuite décomposé entre la partie stable et la partie instable

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_s. \quad (3.23)$$

La projection sur la partie stable  $\mathbf{B}_s = \mathbf{V}_s\hat{\mathbf{B}}_s$  est solution de la projection par moindres carrés

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{W} \mathbf{V}_s \hat{\mathbf{B}}_s = \mathbf{V}_s^T \mathbf{W} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_u)$$

Avec la décomposition (3.23), l'erreur due à la projection (3.21) est orthogonale à l'ensemble des modes globaux stables utilisés pour la projection et n'a aucune contribution sur la dynamique instable. L'actionneur modèle  $\mathbf{B}_e$  est donc construit dans un sous-espace afin de correspondre de manière optimale avec l'actionneur réel  $\mathbf{B}$ .

### 3.4.2 Sélection des modes

Dans le but de construire une boucle de régulation en temps réel, la dimension du contrôleur doit être aussi faible que possible. Étant donné que la base des modes globaux n'est pas optimale en vue du contrôle, un critère de sélection prenant en compte le caractère entrée-sortie du système doit être utilisé afin de déterminer la quantité d'information contenue dans chaque mode (Bagheri *et al.*, 2009; Barbagallo *et al.*, 2009). L'approche consiste à quantifier la mesure  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q}$  pour un forçage harmonique  $\phi = e^{i\omega t}$  du système

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}_j e^{i\omega t}. \quad (3.24)$$

Par conséquent

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} (i\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_j e^{i\omega t}, \quad (3.25)$$

avec  $\mathbf{B}_j$  la composante de l'actionneur projeté par rapport au vecteur propre  $\mathbf{q}_j$ . Le développement dans la base des modes globaux (sans oublier le conjugué complexe) est (3.11) et pour  $\mathbf{B}_j = \beta_j \mathbf{E} \hat{\mathbf{q}}_j$ , on obtient

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}_j \left( \frac{1}{i\omega - \lambda_j} \right) \beta_j e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

avec  $\lambda_j = -i\omega_j$  la valeur propre associée au vecteur propre  $\hat{\mathbf{q}}_j$ . La mesure  $\mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}_j$  associée à ce mode est donc un vecteur  $\mathbf{C}_j$  avec 6 composantes complexes qui indique l'observabilité du mode alors que la mesure de la contrôlabilité est donnée par  $\beta_j$ . À partir de l'équation (3.26), on peut donc écrire l'inégalité suivante

$$|\mathbf{y}| \leq \frac{|\mathbf{C}_j| |\beta_j|}{|\mathcal{R}e(\lambda_j)|} = \Gamma_j \quad (3.27)$$

où les  $\Gamma_j$  fournissent une hiérarchie des modes basée sur leur contrôlabilité et leur observabilité ( $|\mathbf{C}_j|$  est ici la somme des 6 composantes). Dans le cas présent,  $|\mathcal{R}e(\lambda_j)| = |\mathcal{I}m(\omega_j)|$  et augmente avec le taux d'amortissement du mode stable considéré. La valeur de  $\Gamma_j$  a été calculée pour l'actionneur projeté dans la figure 3.7(b) et les modes ont été sélectionnés de manière décroissante. Les 200 premiers modes sélectionnés par ce critère sont présentés dans la figure 3.8(a) et les 50 premiers modes dans la figure 3.8(b). Cette procédure de sélection du sous-espace stable doit être recalculée selon la méthode de projection orthogonale utilisée (moindres carrés ou orthogonalisation de Gram-Schmidt), la méthode étant peu sensible à l'incrément  $\Delta m$  utilisé durant la procédure de réduction du sous-espace de projection. Bien que d'une manière générale, la valeur de  $\Gamma_j$  diminue avec le taux d'amortissement du mode ( $\mathcal{I}m(\omega_j)$ ), il semble que certains modes avec une taux d'amortissement important semblent jouer un rôle pour la projection avec  $m = 200$  (voir figure 3.8a). Ce critère a aussi été utilisé dans le cas de la projection bi-orthogonale et des résultats similaires ont été obtenus.

### 3.5 Gains de contrôle et d'estimation

Les estimateurs de dimension réduite

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}} \phi, \quad \phi = \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.28)$$

sont ensuite utilisés afin de calculer le gain de contrôle qui stabilise le système linéaire (3.28). Le gain de contrôle optimal  $\hat{\mathbf{K}}$ , minimise la fonctionnelle

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^T \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V} \hat{\mathbf{x}} dt + \frac{l_c^2}{2} \int_0^T \phi^2 dt. \quad (3.29)$$


---

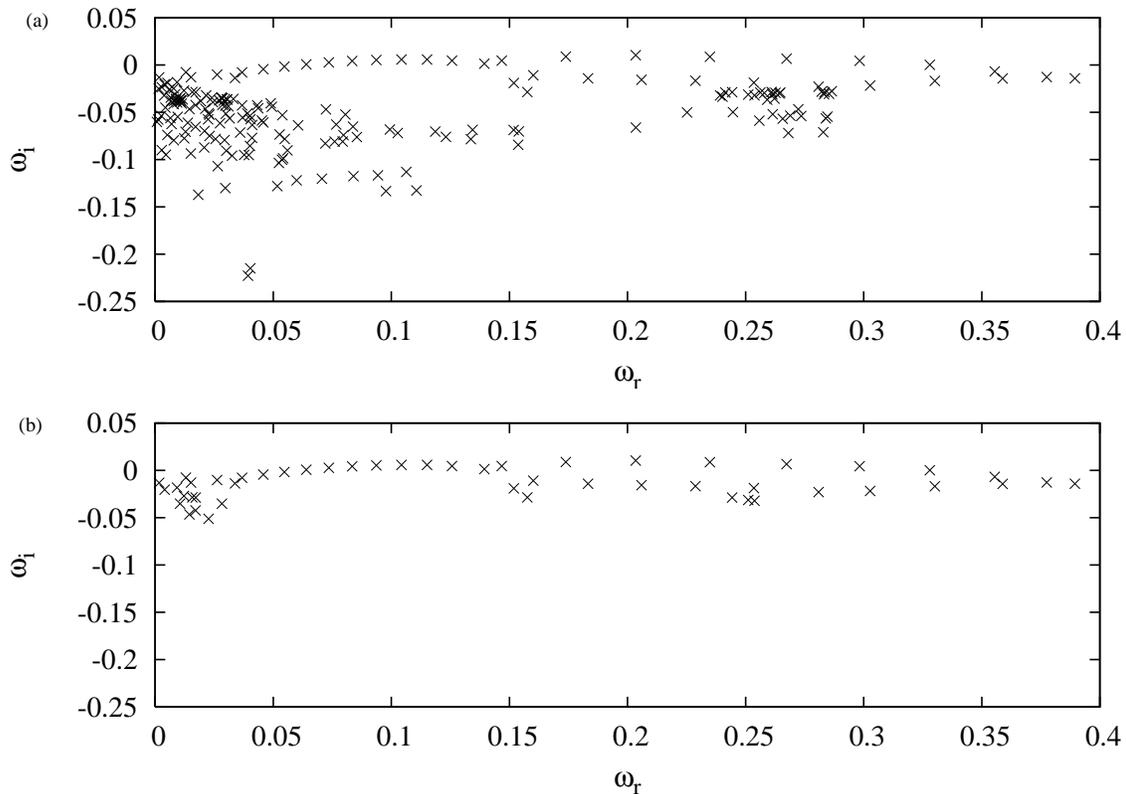


FIGURE 3.8 – Valeurs propres sélectionnées  $\Gamma_j$  décroissantes (écoulement à  $Re = 590$ ); (a) 200 valeurs propres; (b) 50 valeurs propres.

avec  $l_c$  le paramètre de coût qui permet de borner le contrôle par rapport à l'énergie et ce paramètre a été fixé à  $l_c^2 = 10^8$ . Pour des temps d'optimisation  $T \rightarrow \infty$ , le gain de contrôle  $\widehat{\mathbf{K}}$  est donné par  $\widehat{\mathbf{K}} = -l_c^{-2} \widehat{\mathbf{B}} \mathbf{X}_c$ , la matrice  $\mathbf{X}_c$  étant solution de l'équation algébrique de Riccati.

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_c \mathbf{\Lambda}^T - l_c^{-2} \mathbf{X}_c \widehat{\mathbf{B}}_e^T \widehat{\mathbf{B}}_e \mathbf{X}_c + \mathbf{Q} = 0.$$

avec  $\mathbf{Q}$  la matrice correspondant aux produit scalaire énergétique des modes utilisés lors de la construction de l'estimateur. Les détails de la méthode sont disponibles dans Kim & Bewley (2007). Elle a été utilisée par Barbagallo *et al.* (2008), Bagheri *et al.* (2009), Åkervik *et al.* (2007), parmi d'autres.

Le gain d'estimation minimise l'erreur sur la mesure  $\tilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}_e$ , solution de

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{y}}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.30)$$

Kim & Bewley (2007, 399) ont montré qu'il existait une analogie entre le système (3.30) et le système (3.28) et le gain d'estimation  $\widehat{\mathbf{L}}$  s'écrit  $\widehat{\mathbf{L}} = -l_e^{-2} \mathbf{X}_e \widehat{\mathbf{C}}^T$  avec  $\mathbf{X}_e$

solution de l'équation de Riccati

$$\Lambda \mathbf{X}_e + \mathbf{X}_e \Lambda^T - l_e^{-2} \mathbf{X}_e \widehat{\mathbf{C}}^T \widehat{\mathbf{C}} \mathbf{X}_e + \mathbf{Q} = 0. \quad (3.31)$$

Le paramètre  $l_e^{-2}$  peut être interprété comme la variance du bruit issu de la mesure, alors que la matrice  $\mathbf{Q}$  dans l'équation (3.31) correspond à la matrice de covariance d'un bruit blanc provenant de la dynamique (voir Hœpffner *et al.* (2005)). Aucune perturbation ou bruit de mesure n'a été modélisée par la suite et il convient donc de choisir  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  (Kim & Bewley, 2007),  $l_e^2 = 10^8$  a été utilisé afin de borner l'information issue de la mesure.

### 3.6 Contrôle de la dynamique

Le compensateur (3.15) est finalement couplé à la dynamique de perturbation linéaire (3.9) donnant lieu au système

$$\mathbf{E} \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \phi, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{\mathbf{x}}_e = \left( \Lambda + \widehat{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{K}} + \widehat{\mathbf{L}} \widehat{\mathbf{C}} \right) \widehat{\mathbf{x}}_e - \widehat{\mathbf{L}} \mathbf{y}, \quad (3.33)$$

$$\phi = \widehat{\mathbf{K}} \widehat{\mathbf{x}}_e. \quad (3.34)$$

Un schéma de discrétisation temporelle implicite de type Euler retardé d'ordre 2 a été utilisé pour l'intégration en temps du système couplé (3.34), et le vecteur  $\mathbf{q}^{n+1}$  au temps  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$  est solution de

$$\left( \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right) \mathbf{q}^{n+1} = \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{E} (4\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1}) + \mathbf{B} \phi^{n+1}. \quad (3.35)$$

Même pour des matrices de grande dimension et de surcroît pleines (dû à la discrétisation de type Chebyshev), l'inversion explicite grâce à une méthode *LU* du membre à gauche permet une intégration en temps efficace du système ci-dessus. Un fois que la solution au temps  $t_{n+1}$  a été déterminée, une estimation (au second ordre en temps) du frottement pariétal  $\mathbf{y}^{n+2} \approx 2\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n$  est utilisée dans (3.33) (utilisant la même discrétisation temporelle que l'équation (3.35)), et permet ainsi de calculer la valeur du contrôle au pas de temps suivant.

#### 3.6.1 Résultats à $Re = 590$

Tout d'abord, l'écoulement faiblement instable à  $Re = 590$  a été couplé au compensateur de dimension réelle  $n = 2m$  issue de la projection bi-orthogonale

---

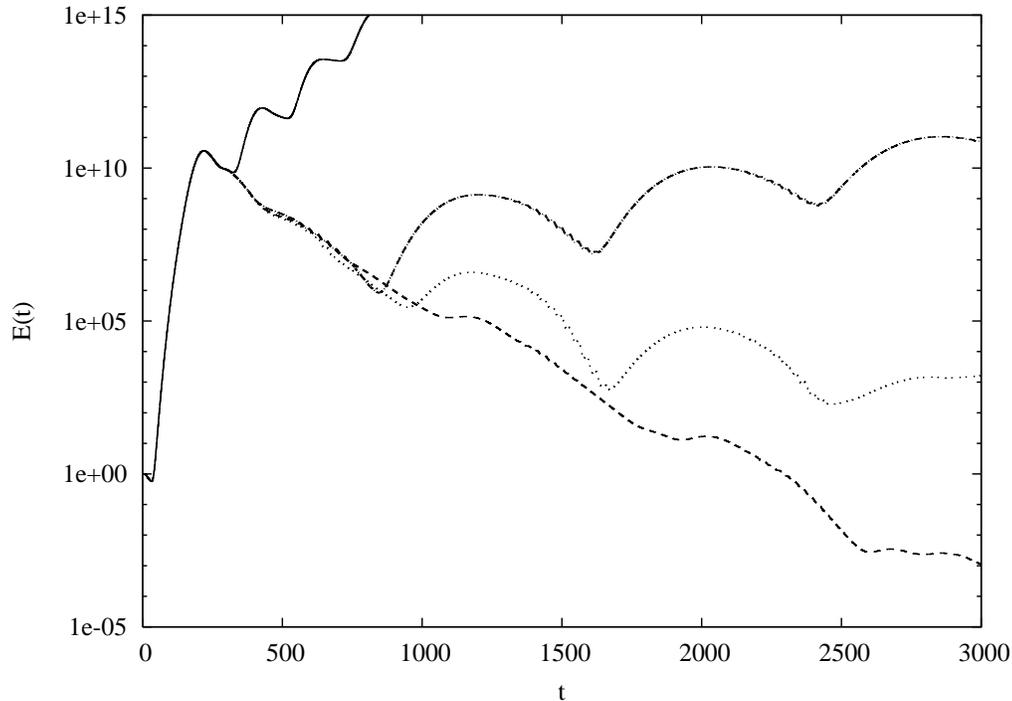


FIGURE 3.9 – Énergie de la perturbation (normalisée par  $E(0)$ ) en fonction du temps ( $Re = 590$ ) : — cas sans contrôle ; - - - estimateur de dimension  $n = 400$  (double-projection) ;  $\cdots$  estimateur de dimension  $n = 100$  (double-projection) ; -  $\cdot$  -  $\cdot$  : estimateur de dimension  $n = 100$  (projection bi-orthogonale).

ainsi que de la projection combinée avec les moindres carrés. La condition initiale utilisée dans le cas présent est identique à l'actionneur mais elle a été placée en amont de la bosse au temps  $t = 0$ . La ligne continue dans la figure 3.9, montre l'évolution de l'énergie au cours du temps pour la dynamique sans contrôle où l'on retrouve les éléments présentés dans le chapitre 2. Des compensateurs de dimension  $n = 400$  et  $n = 100$  ont été utilisés (ce qui représente  $m = 200$  et  $m = 50$  modes complexes). Les résultats avec contrôle sont représentés par les lignes en pointillés et tirets et permettent de supprimer toute dynamique de l'écoulement. Le contrôle n'affecte aucunement la dynamique liée à la croissance transitoire jusqu'à  $t = 200$  (les capteurs n'ayant pu mesurer la perturbation localisée encore en amont de  $x = 60$ ). Le compensateur obtenu par projection bi-orthogonale avec  $n = 100$ , dénoté par la ligne en tirets-pointillés, n'est pas capable de contrôler la dynamique après  $t \approx 700$  alors que la projection combinée permet de supprimer la dynamique pour  $T \rightarrow \infty$ . Cette nouvelle méthode de projection est donc plus performante que la projection bi-orthogonale. L'écoulement non contrôlé est présenté dans la figure 3.10 où l'on peut

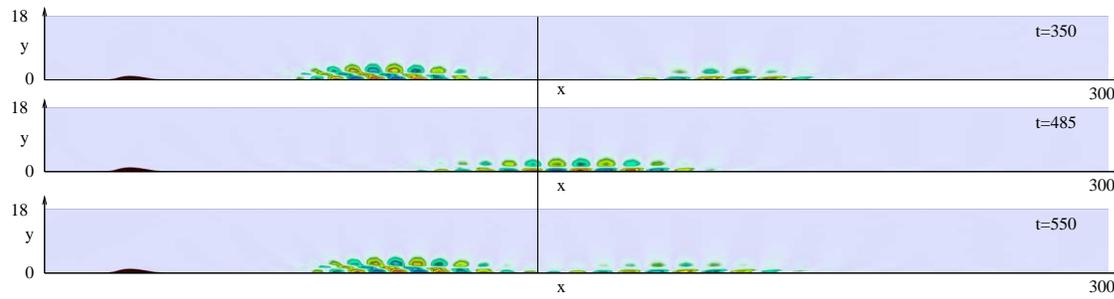


FIGURE 3.10 – Composante longitudinale de la vitesse de la perturbation non contrôlé à  $t = 350, 485, 550$ . La ligne verticale montre le point de rattachement de l'écoulement de base.

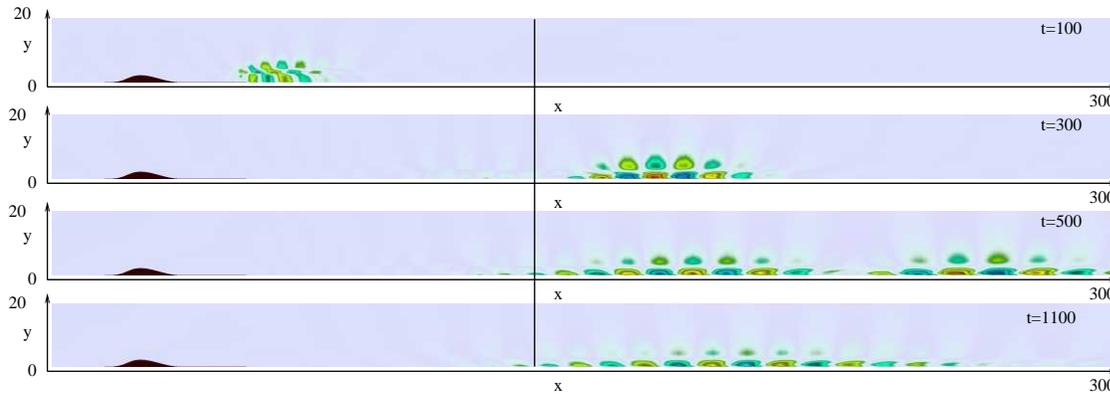


FIGURE 3.11 – Composante longitudinale de la vitesse de la perturbation avec contrôle à  $t = 100, 300, 500, 1100$ .

voir la perturbation se régénérer. Le contrôle permet de supprimer ce mécanisme et la perturbation se retrouve advectée vers la sortie du domaine pour finalement disparaître vers  $t \approx 3000$  voir figure 3.11.

### 3.6.2 Résultats à $Re = 690$

Le contrôle de la dynamique à  $Re = 690$  semble plus difficile étant donné les forts taux d'amplification des modes instables (voir figure 3.2). La condition initiale ainsi que l'actionneur restent les mêmes que pour le cas étudié à  $Re = 590$ . Des estimateurs de dimension réduite sont couplés à la dynamique instable qui est représentée par la ligne continue dans la figure 3.12. Dans le cas présent, la croissance transitoire à  $t \approx 200$  et la dynamique de battement basse fréquence montrent un taux de croissance similaire. Les compensateurs basés sur une dimension  $n = 400$  sont capables de contrôler cette dynamique fortement instable mais la décroissance de

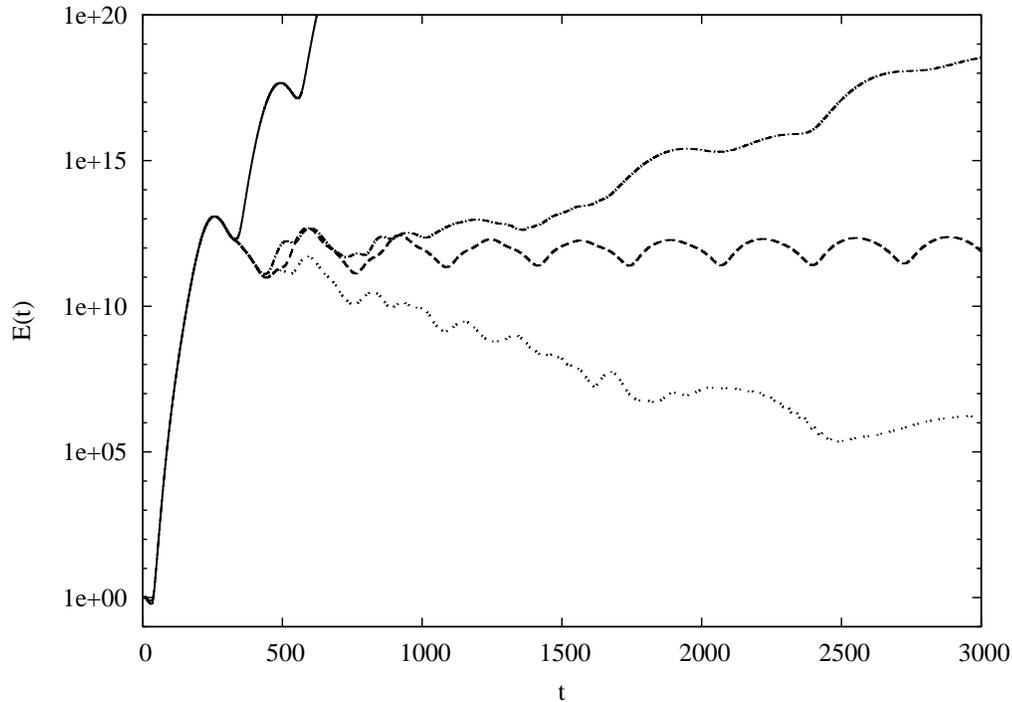


FIGURE 3.12 – Énergie de la perturbation (normalisée par  $E(0)$ ) en fonction du temps ( $Re = 690$ ) : — dynamique sans contrôle;  $\cdots$  estimateur de dimension  $n = 400$  (double-projection); - - - estimateur de dimension  $n = 300$  (double-projection); - · - · : estimateur de dimension  $n = 400$  (projection bi-orthogonale).

l'énergie (représentée par la ligne en pointillés) est faible comparée au cas présenté à  $Re = 590$ . Un contrôleur de dimension  $n = 300$  ( $m = 150$ ) est tout juste capable de maintenir le système à un niveau d'énergie stable. Il semble donc que la dimension nécessaire à la construction d'un compensateur construit dans la base des modes globaux augmente avec le nombre de Reynolds. Cette même question a aussi été récemment abordée par Alizard & Robinet (2011) dans le cas d'une perturbation optimale. Par ailleurs, un estimateur de dimension  $n = 400$  construit par projection bi-orthogonale, représenté par la ligne en tirets-pointillés dans la figure 3.12 ne permet pas de stabiliser cette dynamique.

### 3.7 Discussion

L'analyse de stabilité globale d'un écoulement non-parallèle permet de calculer les modes spatio-temporels et de reconstruire la dynamique instable associée. Ces modes apparaissent naturellement lors de la construction d'un système réduit et permettent de construire des compensateurs de faible dimension dans le cas où la

dynamique est peu instable (Åkervik *et al.*, 2007). Une nouvelle projection combinant la projection bi-orthogonale sur la partie instable des modes temporels et une projection orthogonale basée sur les modes stables avec un critère de sélection permet de construire des compensateurs de dimension relativement faible  $n = 100$ . Cette nouvelle projection permet de s'affranchir du calcul des modes adjoints stables et nécessite moins de modes que la projection basée seulement sur la relation de bi-orthogonalité. La pertinence de la projection bi-orthogonale a été récemment remise en question par Barbagallo *et al.* (2009) dans le cas d'un écoulement fortement instable au dessus d'une cavité. Cette étude montre que la dimension nécessaire à la construction d'un compensateur construit dans la base des modes temporels augmente avec le taux de croissance de l'instabilité.

Ces compensateurs de dimension réduite ont été couplés avec la dynamique non linéaire mais sans réel succès. Tant que l'amplitude de la perturbation reste faible, la dynamique linéaire n'est pas affectée par les interactions non linéaires et le contrôleur stabilise la dynamique. Dès lors que l'amplitude initiale de la perturbation est suffisamment importante, le compensateur, même construit en utilisant plusieurs centaines de modes globaux, ne permet pas de stabiliser la dynamique non linéaire. Des tentatives de contrôle en pénalisant au maximum les gains de contrôle et d'estimation ont mené aux mêmes conclusions. Dans la suite, ce travail est donc consacré au contrôle de la dynamique non linéaire pleinement développée où seule une approche Lagrangienne semble en mesure de fournir des informations pertinentes.

---

## Chapitre 4

# Contrôle par optimisation Lagrangienne

Cette dernière partie s'intéresse au contrôle de la dynamique non linéaire pleinement développée. Des lois de contrôle sont calculées sur des intervalles de temps du même ordre de grandeur que la dynamique basse-fréquence en utilisant une méthode d'optimisation Lagrangienne. Les possibilités d'un contrôle total de la dynamique instable sont évaluées en utilisant des actionneurs de type soufflage-aspiration positionnés sur la paroi. Une méthode numérique de résolution des équations de Navier-Stokes et du système adjoint associé, basée sur les travaux de Wiplier & Ehrenstein (2000) et Marquillie & Ehrenstein (2003), a été développée dans un domaine fini. La méthode de la matrice d'influence a été utilisée afin d'assurer la condition d'incompressibilité et implémenter les conditions aux limites spécifiques à ce type de problème.

### 4.1 Méthodes numériques en vue de l'optimisation sous contrainte

Le système de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P - (1/Re) \Delta \mathbf{U} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  est le champ de vitesse et  $P(\mathbf{x}, t)$  est la pression. Le domaine de calcul  $\Omega$  a une longueur  $L = 250$  et une hauteur finie  $H = 100$ . La bosse est incluse dans le domaine par le changement de variable

$$\bar{y} = y - \eta(x) \quad (4.2)$$

---

qui transforme le domaine de calcul en domaine cartésien. Les opérateurs s'écrivent

$$\nabla = \bar{\nabla} + \mathbf{G}_\eta, \quad \Delta = \bar{\Delta} + L_\eta \quad (4.3)$$

avec

$$\mathbf{G}_\eta = \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \quad (4.4)$$

et

$$L_\eta = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Discrétisations

En suivant l'approche de Wiplier & Ehrenstein (2000), la direction longitudinale  $x$  utilise une discrétisation de type différences finies centrées d'ordre 4 pour le Laplacien et 8 pour le gradient. La coordonnée normale à la paroi  $y$  est discrétisée avec une approche de type collocation-Chebyshev. La transformation

$$y = \frac{Hs(1 + \zeta)}{2s + H(1 - \zeta)} \quad (4.6)$$

permet de passer d'un domaine fini  $\zeta \in [-1, 1]$  (point de Gauss-Lobatto) au domaine fini  $y \in [0, H]$  où  $H$  représente la distance à la paroi et où  $s$  contrôle l'étirement du maillage avec une valeur de 20. La discrétisation temporelle utilise un schéma de type Euler retardé du second ordre, la partie cartésienne des termes de diffusion est prise de manière implicite. Les termes d'advection, ainsi que les termes géométriques (contenant  $\eta$  et ses dérivées) sont extrapolés par un schéma explicite de type Adams-Bashforth du second ordre. le système à intégrer en temps s'écrit

$$\Delta P^{n+1} = J(\mathbf{U})^{n,n-1} \quad (4.7)$$

$$(\bar{\Delta} - 3\tau)\mathbf{U}^{n+1} = Re\nabla P^{n+1} + F^{n,n-1}, \quad \tau = \frac{Re}{2\Delta t} \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^{n+1} = 0, \quad (4.9)$$

avec

$$F^{n,n-1} = -4\tau\mathbf{U}^n + \tau\mathbf{U}^{n-1} - [L_\eta\mathbf{U}]^{n,n-1} + Re[(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}]^{n,n-1} \quad (4.10)$$

et

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4.11)$$

où l'exposant  $n, n - 1$  correspond au schéma d'Adams-Bashforth avec  $[\cdot]^{n,n-1} = 2[\cdot]^n - [\cdot]^{n-1}$ . Les détails sur le changement de coordonnées ainsi que la méthode de diagonalisation des opérateurs de dérivées secondes sont identiques à ceux de Marquillie (2003) et sont décrits dans sa thèse.

### 4.1.2 Conditions aux limites pour le système de Navier-Stokes

Sur les limites du domaine  $\partial\Omega$ , le profil de Blasius est utilisé comme condition d'entrée à  $x = 0$ , une condition d'adhérence  $\mathbf{U}(x, 0) = (0, 0)$  à la paroi a été imposée et une condition d'écoulement uniforme  $\mathbf{U}(x, H) = (1, 0)$ , loin de la paroi où les gradients s'annulent a été implémentée. La condition à la sortie  $\partial\Omega_s$  est de type *contrainte nulle*, tel que

$$\frac{1}{Re}(\nabla\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}|_{x=L} = P\mathbf{n}|_{x=L} \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la limite  $\partial\Omega_s$ . Cette condition permet de minimiser la distorsion des tourbillons à leur sortie du domaine. Cette condition est différente de celle utilisée par Marquillie & Ehrenstein (2003) pour le même problème, mais la condition d'advection utilisée à la sortie par ces derniers n'est pas compatible avec le problème d'optimisation.

### 4.1.3 Méthode de la matrice d'influence

La condition à la sortie (4.12) impose un couplage entre le gradient de vitesse et la pression. Or, dans le système de Navier-Stokes, la valeur de la pression est définie à une constante près. La méthode de projection utilisée par Marquillie & Ehrenstein (2003) devient instable si cette condition est utilisée. La méthode de la matrice d'influence implémentée par Wiplier & Ehrenstein (2000) consiste à trouver une condition de Dirichlet pour la pression qui assure la condition d'incompressibilité (Ehrentein & Peyret, 1989). La méthode s'articule de la manière suivante. Avant de commencer l'intégration en temps du système (4.7-4.8), le système

$$\Delta\hat{P}_k = 0, \quad \hat{P}_k|_{\partial\Omega_j} = \delta_{k,j}$$

doit être résolu, où  $\delta_{k,j}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{kj} = 1$  pour  $k = j$  et  $\delta_{kj} = 0$  pour  $k \neq j$ ). Les solutions élémentaires  $\hat{P}_k$  sont calculées pour  $1 \leq k \leq K$ , avec  $K$  le nombre de points de discrétisation sur la limite  $\partial\Omega$ , qui sont dans le cas présent au nombre de  $2 \times (N_x - 1) + 2 \times (N_y - 1)$ , avec  $N$  le nombre de points de discrétisation associés à une direction. Le champs de vitesse  $\hat{\mathbf{U}}_k$  est solution du système

$$(\bar{\Delta} - 3\tau)\hat{\mathbf{U}}_k = Re\nabla\hat{P}_k, \quad (\nabla\hat{\mathbf{U}}_k) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_s} = Re\hat{P}_k\mathbf{n}|_{\partial\Omega_s}, \quad \hat{\mathbf{U}}_k|_{\partial\Omega - \partial\Omega_s} = 0. \quad (4.13)$$

La matrice d'influence  $\mathbf{M}$  ne nécessite qu'une seule évaluation et les solutions élémentaires  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}_k|_{\partial\Omega}$  sont stockées sous la forme de vecteurs colonnes tel que

$$\mathbf{M} = [\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}_1|_{\partial\Omega}, \nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}_2|_{\partial\Omega}, \dots, \nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}_K|_{\partial\Omega}]. \quad (4.14)$$

La matrice d'influence n'est calculée qu'une seule fois et est stockée avant de commencer l'intégration du système discret de Navier-Stokes.

Pendant la marche en temps, à chaque pas de temps, le système (4.7)-(4.8) est résolu en utilisant une condition pour la pression  $P^0|_{\partial\Omega} = 0$ . La solution  $\mathbf{U}^0$  n'étant pas à divergence nulle, la valeur de  $\nabla \cdot \mathbf{U}^0|_{\partial\Omega}$  est calculée et le vecteur  $\gamma$ , solution du système linéaire

$$\mathbf{M}\gamma = -\nabla \cdot \mathbf{U}|_{\partial\Omega}^0, \quad (4.15)$$

contient la valeur de la pression  $P^{n+1}|_{\partial\Omega}$  qui satisfait la condition d'incompressibilité (4.9) et permet de calculer la solution du système (4.7)-(4.8) au temps  $n + 1$ .

L'algorithme de résolution est donné dans l'encadré qui suit :

$$\begin{aligned} \Delta P^0 &= J(\mathbf{U})^{n,n-1}, \quad P^0|_{\partial\Omega} = 0 \\ (\bar{\Delta} - 3\tau)\mathbf{U}^0 &= Re\nabla P^0 + F^{n,n-1}, \quad \mathbf{U}^0|_{\partial\Omega - \partial\Omega_s} = c.l., \quad \frac{\partial \mathbf{U}^0}{\partial x}|_{\partial\Omega_s} = P^0 \\ \mathbf{M}\gamma &= -\nabla \cdot \mathbf{U}|_{\partial\Omega}^0 \\ \Delta P^{n+1} &= J(\mathbf{U})^{n,n-1}, \quad P^{n+1}|_{\partial\Omega} = \gamma \\ (\bar{\Delta} - 3\tau)\mathbf{U}^{n+1} &= Re\nabla P^{n+1} + F^{n,n-1}, \quad \mathbf{U}^{n+1}|_{\partial\Omega - \partial\Omega_s} = c.l., \quad \frac{\partial \mathbf{U}^{n+1}}{\partial x}|_{\partial\Omega_s} = P^{n+1}|_{\partial\Omega_s} \end{aligned}$$

Dans cette formulation, les termes métriques (4.4)-(4.5) sont calculés de manière explicite en utilisant une approximation de type Adams-Bashforth du second ordre et seule la partie Cartésienne de l'opérateur des dérivées secondes (noté  $\bar{\Delta}$ ) est inversé. La direction  $y$  est diagonalisée et la structure penta-diagonale permet de résoudre de manière implicite les problèmes de Helmholtz (4.7) et (4.8). Afin d'assurer la stabilité numérique de l'algorithme, l'équation de Poisson pour la pression (4.7) a été résolue de manière implicite avec une procédure analogue à celle utilisée dans Marquillie & Ehrenstein (2003).

#### 4.1.4 Calcul de l'écoulement de base

Le champ de base, solution des équations de Navier-Stokes stationnaires (3.1) a été calculé grâce à une méthode de filtrage<sup>1</sup> (Åkervik *et al.*, 2006) et un exemple

---

1. *selective frequency damping*

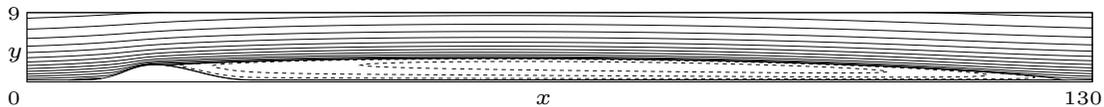


FIGURE 4.1 – Exemple d’un écoulement de base calculé par filtrage pour  $Re = 650$  et  $h = 2$ .

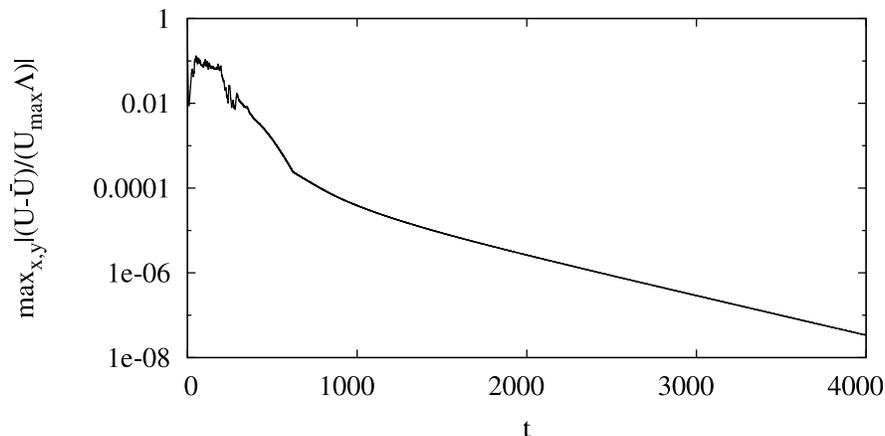


FIGURE 4.2 – Convergence du maximum de différence entre l’état filtré  $\bar{\mathbf{U}}$  et non filtré  $\mathbf{U}$  qui correspond à la convergence vers un écoulement stationnaire à  $Re = 650$  et  $h = 2$  en fonction du temps de la simulation  $t$ .

d’écoulement stationnaire est présenté dans la figure 4.1. Cette méthode est particulièrement avantageuse par rapport aux méthodes de type Newton pour le calcul de l’état de base, car elle s’affranchit de la construction des matrices qui dépendent de la discrétisation. La méthode consiste à intégrer en temps le système couplé

$$\begin{cases} \mathbf{E} \partial_t \mathbf{Q} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, Re) - \xi(\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}) \\ \partial_t \bar{\mathbf{Q}} = \frac{(\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}})}{\Lambda} \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{Q}$  contient la vitesse  $\mathbf{U}$  et la pression  $\mathbf{P}$  de l’écoulement de base. Dans cette formulation,  $\frac{1}{\Lambda}$  peut-être comparé à une fréquence de coupure et  $\xi$  à un coefficient d’amortissement. Dans le cas présent, la valeur de  $\frac{1}{\Lambda}$  est la plus basse fréquence associée aux modes globaux instables et  $\xi$  correspond au taux de croissance du mode global le plus instable (voir figure 3.2), issus de l’analyse de stabilité de Ehrenstein & Gallaire (2008). Les valeurs utilisées dans ces travaux sont  $\Lambda = 6.37$  et  $\xi = 0.03$  et la convergence entre l’état filtré  $\bar{\mathbf{U}}$  et l’état non filtré  $\mathbf{U}$  à  $Re = 650$  et  $h = 2$  est atteinte après 4000 unités de temps (voir figure 4.2).

## 4.2 Système adjoint et optimalité

### 4.2.1 Équations adjointes

L'écoulement est maintenant décomposé en un écoulement de base et une perturbation. Le système de Navier-Stokes devient

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - (1/Re) \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.17)$$

où  $\mathbf{U}$  est maintenant la vitesse de l'écoulement de base,  $\mathbf{u}$  et  $p$  sont respectivement la vitesse et la pression de la perturbation. On définit une fonction objectif  $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \phi)$  et les contraintes  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \dots)$  telles que

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{q}, Re) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \phi) = 0 \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{f}$  représente le système de Navier-Stokes (4.17), et où  $\mathbf{g}$  définit une relation entre le domaine fluide  $\mathbf{u}$  et la variable de contrôle  $\phi$  (loi de contrôle ou condition initiale dans le cas présent). Avec l'introduction des multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{q}^+ = (\mathbf{u}^+, p^+)$  et  $\phi^+$ , le problème d'optimisation à résoudre consiste à trouver  $\mathbf{q}, \mathbf{q}^+, \phi, \phi^+$  afin que le Lagrangien  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^+) = \mathcal{J} - \langle \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{q}, Re), \mathbf{q}^+ \rangle \quad (4.19)$$

soit rendu stationnaire. Le produit scalaire  $\langle \cdot \rangle$  est défini par l'intégrale double  $\int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega} \cdot \, d\mathbf{x} dt$ , où la fenêtre d'optimisation est prise dans l'intervalle  $[T_0, T_1]$ . Le système adjoint de Navier-Stokes est obtenu en prenant la dérivée de Fréchet du second terme du Lagrangien (4.19) et en effectuant les opérations d'intégration par parties,

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{q}, Re), \mathbf{q}^+ \rangle \cdot \hat{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{f}^+(\mathbf{U}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^+, Re), \hat{\mathbf{q}} \rangle + B.T., \quad (4.20)$$

avec le système adjoint (les détails du calcul sont donnés dans Bewley *et al.* (2001))

$$\mathbf{f}^+(\mathbf{U}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^+, Re) = \left[ -\partial_t \mathbf{u}^+ - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}^+ + (\nabla \mathbf{U})^T \mathbf{u}^+ - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^+ + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^+ + \nabla p^+ - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^+; -\nabla \cdot \mathbf{u}^+ \right]. \quad (4.21)$$

Les termes *B.T.* dans (4.20) sont donnés par l'intégrale

$$\begin{aligned} B.T. = \int_{T_0}^{T_1} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{Re} \mathbf{u}^+ (\nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} \right. \\ \left. + (p^+ \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^+ (\hat{p} \cdot \mathbf{n}) \right] ds dt + \int_{\Omega} [\mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}]_{T_0}^{T_1} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.22)$$

qui doivent être annulés sur les bords du domaine  $\partial\Omega$  afin d'assurer la compatibilité entre le système de Navier-Stokes et son adjoint.

#### 4.2.2 Conditions aux limites pour le système direct-adjoint

Direct	Adjoint
A l'entrée : aucune perturbation n'est introduite, la condition à imposer sur cette limite est de type Dirichlet nulle.	Il semble naturel d'utiliser une condition de type Dirichlet nulle ; Or cette condition n'est valable que lorsque la solution adjointe reste localisée loin de cette limite. Une autre alternative valable consiste à imposer une condition de type Robin $-\frac{1}{Re}(\nabla\mathbf{u}^+)\mathbf{n} _{\partial\Omega_e} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}^+ _{\partial\Omega_e} + p^+\mathbf{n} _{\partial\Omega_e} = 0$ . Cette condition reste valide tant que la perturbation et ses gradients s'annulent proche de l'entrée.
A la paroi : une condition d'adhérence est implémentée.	une condition d'adhérence similaire au système direct est implémentée.
A l'infini : une condition de type Dirichlet nulle est compatible étant donné que la perturbation s'annule loin de la paroi.	Une condition de type Dirichlet nulle est compatible étant donné que la solution adjointe s'annule loin de la paroi.
A la sortie : les conditions de type contrainte nulle $\frac{1}{Re}\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = \mathbf{0}$ sont imposées à la sortie du domaine $\partial\Omega_s$ .	La condition à la sortie pour le système adjoint $-\frac{1}{Re}(\nabla\mathbf{u}^+)\mathbf{n} _{\partial\Omega_s} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}^+ _{\partial\Omega_s} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}^+ _{\partial\Omega_s} + p^+\mathbf{n} _{\partial\Omega_s} = 0$ , permet d'annuler l'intégrale (4.22). Cette condition est implémentée avec la matrice d'influence, et les termes $-(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}^+ _{\partial\Omega_s}$ sont extrapolés en utilisant la méthode d'Adams-Bashforth

Tableau 4.1 - Conditions aux limites compatibles entre le système direct et son adjoint.

Le choix des conditions aux limites est essentiel et les couples compatibles entre le système direct et son adjoint doivent permettre d'annuler l'intégrale (4.22). Les conditions possibles entre le système de Navier-Stokes et son adjoint pour chaque partie du domaine sont résumées dans le tableau 4.1.

### 4.2.3 Gradient de plus grande pente

#### Perturbation optimale

Dans le cas de la perturbation optimale, la fonction objectif

$$\mathcal{J}_0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}(T_1) \cdot \mathbf{u}(T_1) \, d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

est une mesure de l'énergie cinétique de la perturbation  $\mathbf{u}$  au temps  $T_1$  et l'inconnue est maintenant la condition initiale  $\mathbf{u}_0$ , qui est soumise aux contraintes

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{q}, Re) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}(T_0) - \mathbf{u}_0 = 0, \quad h(\mathbf{u}_0, \epsilon) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \, d\mathbf{x} - \epsilon = 0 \quad (4.24)$$

où  $\epsilon$  est l'amplitude de la condition initiale  $\mathbf{u}_0$ . Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{J}_0(\mathbf{u}) - \langle \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{q}, Re), \mathbf{q}^+ \rangle - \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_0^+ \rangle - h(\mathbf{u}_0, \epsilon)\epsilon^+. \quad (4.25)$$

En annulant les dérivées de Fréchet par rapport aux variables d'état  $\mathbf{q}$  et en prenant en compte le système adjoint, résolu avec les conditions aux limites compatibles avec le problème direct (voir tableau 4.1), on obtient

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(T_1) \cdot \hat{\mathbf{u}}(T_1) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}(T_0) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} [\mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}]_{T_0}^{T_1} \, d\mathbf{x} = 0 \quad (4.26)$$

où le dernier terme à gauche correspond à l'expression dans (4.22) qui n'est pas annulée par les conditions aux limites. Ceci permet d'écrire les conditions

$$\mathbf{u}^+(T_1) = \mathbf{u}(T_1), \quad \mathbf{u}_0^+ = \mathbf{u}^+(T_0), \quad (4.27)$$

et par conséquent dans cette procédure d'optimisation, le système adjoint  $\mathbf{f}^+ = 0$  est intégré en temps à reculons de  $T_1$  à  $T_0$  avec la condition initiale  $\mathbf{u}^+(T_1) = \mathbf{u}(T_1)$ . La dérivée de Fréchet par rapport à la condition initiale s'écrit

$$\mathcal{D}_{\mathbf{u}_0} \mathcal{L} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{u}_0^+ \, d\mathbf{x} - 2\epsilon^+ \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \, d\mathbf{x}. \quad (4.28)$$

Étant donné que  $\mathbf{u}_0^+ = \mathbf{u}^+(T_0)$ , l'expression pour le gradient de la fonction objectif devient

$$\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathcal{J}_0(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}^+(T_0) - 2\epsilon^+ \mathbf{u}_0, \quad \text{avec} \quad \epsilon^+ = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \mathbf{u}^+(T_0) \cdot \mathbf{u}^+(T_0) \, d\mathbf{x}}{4\epsilon}} \quad (4.29)$$

où l'expression pour  $\epsilon^+$  se calcule en prenant  $\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathcal{J}_0 = 0$ , l'amplitude de la condition initiale étant  $\int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \, d\mathbf{x} = \epsilon$ .

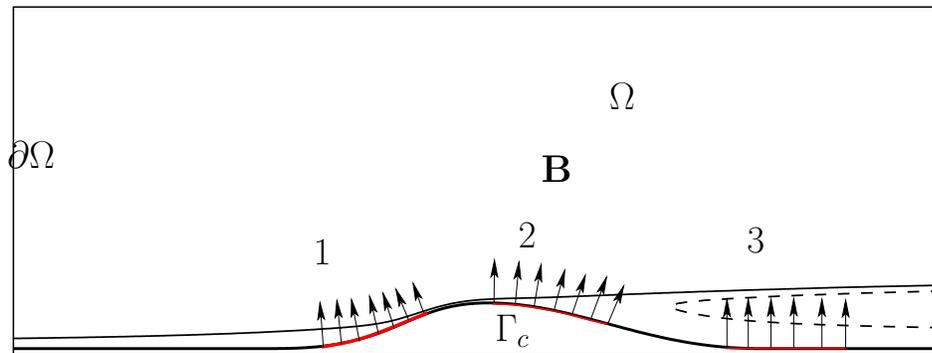


FIGURE 4.3 – Schéma du dispositif de contrôle.

### Contrôle optimal

Dans le cas du contrôle, le but est de minimiser l'énergie cinétique à l'intérieur du domaine de calcul et la fonction de coût devient

$$\mathcal{J}_{1,int}(\phi, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dx \, dt + \gamma \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}\phi \cdot \mathbf{B}\phi \, ds \, dt \quad (4.30)$$

lorsque la formulation intégrale est considérée ou

$$\mathcal{J}_{1,term}(\phi, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_o} \mathbf{u}(T_1) \cdot \mathbf{u}(T_1) \, dx \, dt + \gamma \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}\phi \cdot \mathbf{B}\phi \, ds \, dt \quad (4.31)$$

dans une formulation à temps terminal  $T_1$ . En plus de minimiser l'énergie, les fonctions (4.30), (4.31) pénalisent aussi le contrôle par l'intermédiaire du coefficient  $\gamma$ . Le contrôle est donné par le signal  $\phi(t)$  et est distribué sur  $\Gamma_c$  le long de la paroi  $\eta(x)$  sur trois portions : un premier en amont de la bosse, un second au sommet et un troisième juste après la bosse (voir figure 4.3). La distribution spatiale du contrôle  $\mathbf{B}$  correspond au vecteur normal à la paroi  $\mathbf{n}$ . La condition sur la limite  $\Gamma_c$  pour le champ de vitesse associée à la loi de contrôle  $\phi$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbf{u}|_{\Gamma_c} - \mathbf{B}\phi = 0 \quad (4.32)$$

est ajoutée au Lagrangien tel que  $\int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{B}\phi^+ \, ds \, dt$ , avec  $\phi^+$  le multiplicateur de Lagrange associé au signal de contrôle  $\phi$ . La dérivée de Fréchet par rapport à  $\mathbf{q}$  en considérant la fonctionnelle (4.30) devient d'après l'intégrale (4.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{q}}\mathcal{L} \cdot \hat{\mathbf{q}} &= \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dx \, dt - \langle \mathbf{f}^+(\mathbf{U}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^+, Re), \hat{\mathbf{q}} \rangle \\ &\quad - B.T. - \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{B}\phi^+ \, ds \, dt, \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec  $B.T.$  les termes au bord (4.22). Dans ce cas, on ajoute un terme source au système adjoint (4.21), ce qui revient à intégrer le système de  $T_1$  à  $T_0$

$$\mathbf{f}^+(\mathbf{U}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^+, Re) = [\mathbf{u}; 0], \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^+(T_1) = 0. \quad (4.34)$$

En plus des conditions aux limites décrites dans le tableau 4.1, la condition  $\mathbf{u}^+|_{\Gamma_c} = 0$  est implémentée. Il reste des termes à annuler dans (4.22) et en tenant compte de (4.33), la dérivée de Fréchet s'annule en prenant

$$\mathbf{B}\phi^+ = -\frac{1}{Re}\nabla\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} + p^+ \mathbf{n} \quad (4.35)$$

sur  $\Gamma_c$ . La dérivée de Fréchet du Lagrangien par rapport à  $\phi$  s'écrit

$$\mathcal{D}_\phi \mathcal{L} \cdot \hat{\phi} = \gamma \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}\phi \cdot \mathbf{B}\hat{\phi} \, ds \, dt + \int_{T_0}^{T_1} \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}\hat{\phi} \cdot \mathbf{B}\phi^+ \, ds \, dt. \quad (4.36)$$

En tenant compte de (4.35) on obtient le gradient de plus grande pente

$$\nabla_\phi \mathcal{J}_1(\phi) = \gamma \phi \int_{\Gamma_c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \, ds + \int_{\Gamma_c} \left(-\frac{1}{Re}\nabla\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} + p^+ \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{B} \, ds, \quad (4.37)$$

pour les fonctions objectifs (4.30) et (4.31). La différence entre la formulation à temps intégral et l'optimisation à  $T_1$  provient des termes source (4.34) qui s'annulent et le système adjoint est intégré en temps en utilisant une condition initiale à  $T_1$  telle que

$$\mathbf{f}^+(\mathbf{U}, \mathbf{q}, \mathbf{q}^+, Re) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^+(T_1) = \mathbf{u}(T_1). \quad (4.38)$$

### 4.3 Méthode du gradient et recherche du pas optimal

La solution optimale est calculée quand le gradient s'annule, la méthode du gradient

$$\phi_{k+1} = \phi_k - \alpha_{k+1} \nabla_\phi \mathcal{J}_1(\phi_k, \mathbf{u}_k^+), \quad \alpha_{k+1} > 0, \quad (4.39)$$

est utilisée afin de converger vers la solution optimale. La principale difficulté est de choisir le pas  $\alpha_k$  et ce paramètre est calculé précisément tel que

$$\Psi(\alpha_{k+1}) = \min_{\alpha > 0} \Psi(\alpha) \quad \text{avec} \quad \Psi(\alpha) = \mathcal{J}_1(\phi_k - \alpha \nabla_\phi \mathcal{J}_1(\phi_k, \mathbf{u}_k^+)). \quad (4.40)$$

Une méthode d'interpolation est mise en œuvre en utilisant trois valeurs initiales  $\alpha_{k,i}, i = 1, 2, 3$  tel que  $\Psi(\alpha_{k,1}) \geq \Psi(\alpha_{k,2}) \leq \Psi(\alpha_{k,3})$  et le minimum du polynôme

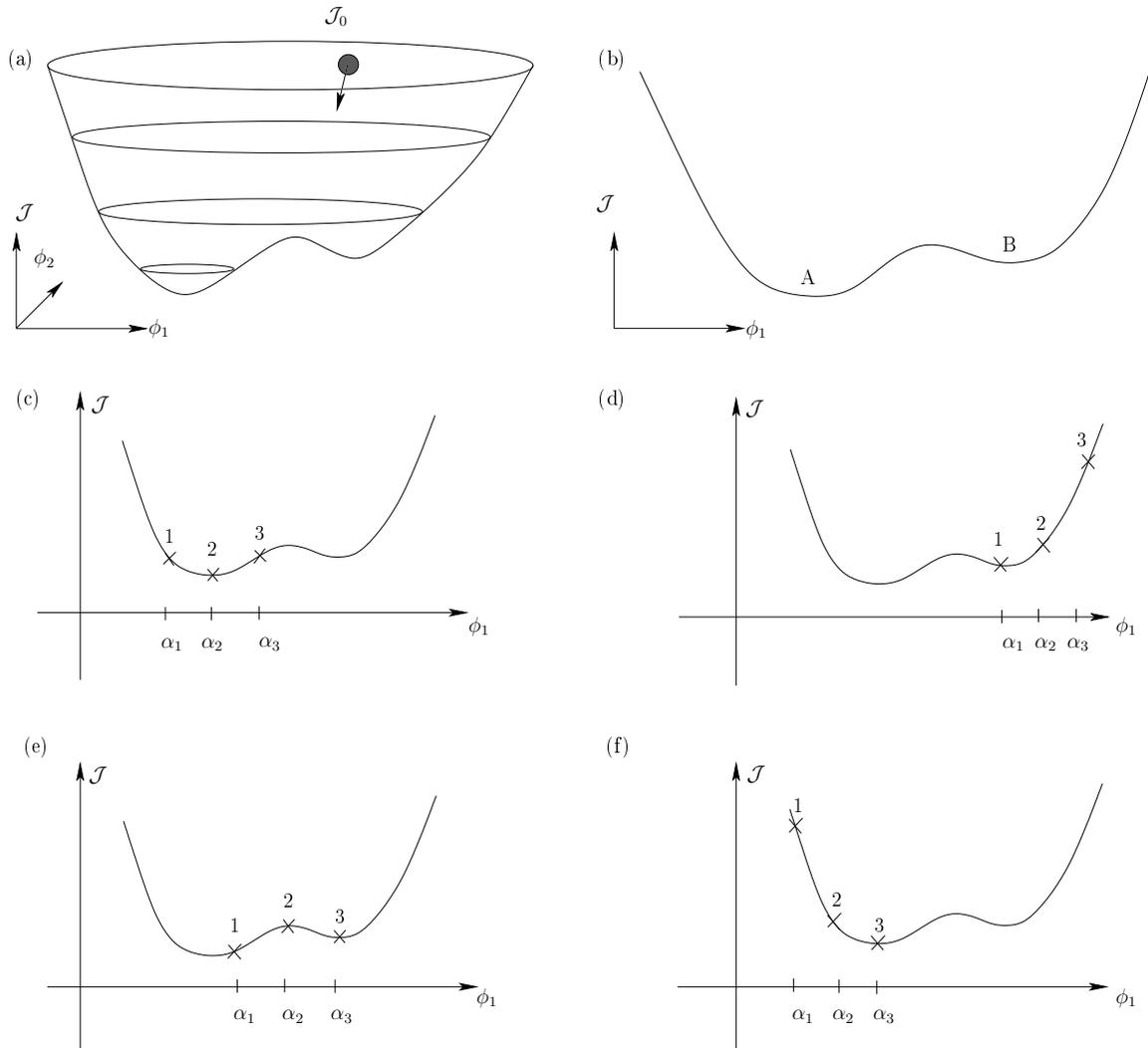


FIGURE 4.4 – Illustration de la méthode de recherche de ligne : Fonctionnelle  $\mathcal{J}$  (a) suivant deux directions de recherche du gradient  $\phi_{1,2}$  ; ligne de recherche donnée par le gradient de plus grande pente (b) comportant un minimum global A et un minimum local B ; différents cas d'optimisation suivant 3 valeurs de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  définissant un minimum (c), le cas où le minimum est dépassé (d), cas où un minimum local est localisé mais un autre minimum plus bas existe (e), cas où le pas  $\alpha$  doit être pris plus grand pour converger (f).

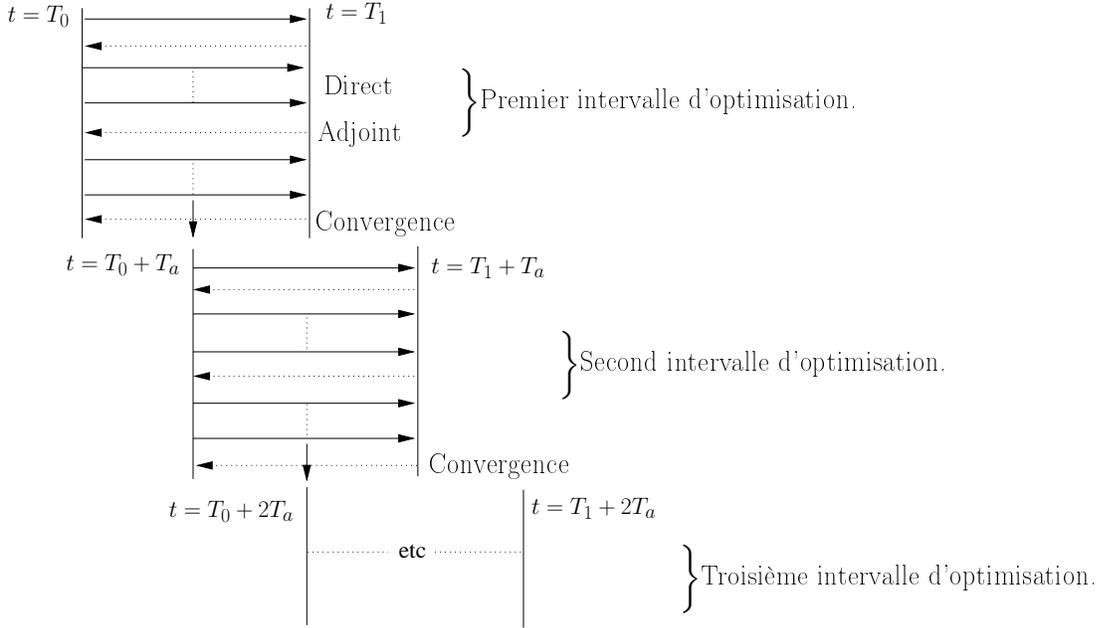


FIGURE 4.5 – Schéma de l'algorithme d'optimisation à horizons récessifs.

quadratique d'interpolation permet d'estimer le pas  $\alpha_{k+1}$  (illustré dans le schéma de principe 4.4). Si nécessaire, cette procédure doit être répétée jusqu'à ce que  $\alpha_{k+1}$  vérifie  $\mathcal{J}_1(\phi_k - \alpha_{k+1} \nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi_k, \mathbf{u}_k^+)) < \mathcal{J}_1(\phi_k)$ , et  $\mathbf{u}_{k+1}^+$  est calculé avec la valeur du gradient  $\nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}^+)$  pour l'itération suivante. La direction de descente,  $\nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi^{k+1}, \mathbf{u}^{+,k+1}) + \beta \nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi^k, \mathbf{u}^{+,k})$  plutôt que la valeur du gradient seule à  $k+1$  a été calculée avec la méthode de Polak & Ribiere (1969)

$$\beta = \frac{\nabla_{\phi} \mathcal{J}(\phi^{k+1}, \mathbf{u}^{+,k+1})^T (\nabla_{\phi} \mathcal{J}(\phi^{k+1}, \mathbf{u}^{+,k+1}) - \nabla_{\phi} \mathcal{J}(\phi^k, \mathbf{u}^{+,k}))}{\nabla_{\phi} \mathcal{J}(\phi^k, \mathbf{u}^{+,k})^T \nabla_{\phi} \mathcal{J}(\phi^k, \mathbf{u}^{+,k})} \quad (4.41)$$

avec  $\beta = \max[0, \beta]$ , et la valeur de  $\beta$  est remise à zéro après 3 itérations comme préconisé par Bewley *et al.* (2001).

En choisissant un premier temps d'optimisation  $[T_0, T_1]$ , le contrôle optimal est calculé et le processus d'optimisation est recommencé pour un second temps d'optimisation décalé de  $T_a$ . Cette procédure est connue sous le nom d'algorithme d'optimisation à horizons récessifs, (voir figure 4.5). Le critère de convergence

$$\frac{\|\nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi^{k+1}, \mathbf{u}^{+,k+1}) - \nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi^k, \mathbf{u}^{+,k})\|_{\infty}}{\|\nabla_{\phi} \mathcal{J}_1(\phi^{k+1}, \mathbf{u}^{+,k+1})\|_{\infty}} \leq 10^{-1} \quad (4.42)$$

est utilisé dans cet algorithme, en prenant le maximum normalisé du résidu du gradient dans l'intervalle  $T_0 < t < T_1$  et suivant les trois actionneurs. Il est important de noter que, dans le cas de la perturbation optimale où l'énergie (4.23) à  $T_1$  doit être

---

maximisée, une direction positive du gradient doit être choisie telle que  $\alpha_{k+1} < 0$  dans (4.39).

## 4.4 Perturbations optimales

Dans cette partie on s'intéresse à la croissance transitoire des perturbations dans la couche de cisaillement qui s'étend du point de décollement jusqu'au point de rattachement de la couche limite. Cette région est particulièrement sensible au bruit et caractérise la dynamique à temps courts pour des perturbations localisées en amont du dispositif de décollement. L'analyse en perturbations optimales permet de trouver la structure de la condition initiale qui maximise l'énergie de la perturbation à un temps  $T_1$  donné.

### 4.4.1 Étude de la dynamique linéaire

On commence cette analyse par l'étude de la croissance des perturbations de faibles amplitudes. Étant donné le caractère quasi-linéaire de la dynamique (amplitudes et gradients de la perturbations par rapport à l'écoulement de base sont négligeables), la méthode du gradient peut être simplifiée en utilisant un algorithme du point fixe. La condition initiale  $\mathbf{u}_0$  pour l'intégration suivante de  $T_0$  à  $T_1$  est simplement donnée par  $\mathbf{u}^+(T_0)/(2\epsilon^+)$ , en tenant compte de la solution du système adjoint et de (4.29). Il s'agit d'un cas de validation de l'algorithme d'optimisation et ce dernier converge en 3 à 4 itérations pour tous les temps d'optimisation considérés. Le calcul est tout d'abord initialisé avec une condition initiale aléatoire distribuée près de la paroi. Après une dizaine d'itérations pour un temps d'optimisation court ( $T_1 = 20$ ), les perturbations optimales sont calculées successivement jusqu'à  $T_1 = 200$  (voir figure 4.6b). Les temps courts d'optimisation donnent lieu à des perturbations localisées au point de décollement de la couche limite. Sa structure est composée d'un paquet d'ondes incliné sur la paroi dont la longueur d'onde évolue peu au cours du processus d'optimisation. Pour des temps d'optimisation plus longs, la structure de la perturbation dépasse le sommet de la bosse et se positionne à l'entrée du domaine, sa structure est inclinée dans la couche limite, afin de tirer partie du gain d'énergie produit par le mécanisme d'Orr (Schmid & Henningson, 2001) (voir figure 4.6(a)-(b)). Cette étude montre que pour espérer contrôler la dynamique linéaire, il faut considérer des temps d'optimisation de l'ordre de 200 unités de temps au minimum.

---

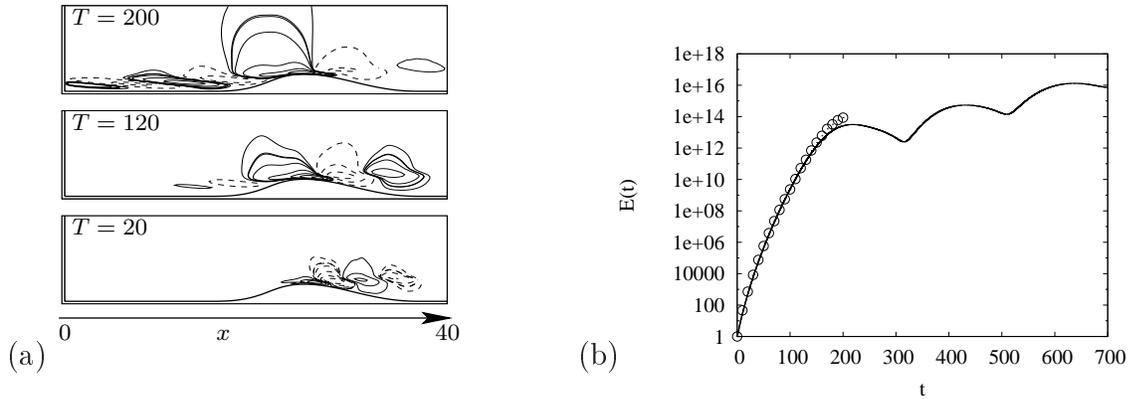


FIGURE 4.6 – Composante longitudinale de la perturbation optimale (a) pour différents temps d’optimisation, croissance transitoire (b) pour un calcul optimisé à  $T_1 = 120$  (—) et enveloppe optimale  $\circ$  calculée à  $T_1 \in [0, 200]$ .

#### 4.4.2 Effet des non linéarités

L’étude est ensuite poursuivie dans le régime non linéaire où l’amplitude de la perturbation fait apparaître de nouveaux phénomènes (vortex, modifications de l’état moyen). Dans cette partie, la méthode de recherche de ligne avec  $\alpha = 0.3$  est utilisée afin de converger vers l’optimum. Les premiers effets non linéaires apparaissent pour une amplitude initiale  $\epsilon = 10^{-6}$ . En utilisant la perturbation optimale linéaire, les perturbations optimales non linéaires sont calculées pour un temps d’optimisation  $T_1 = 50$  en augmentant  $\epsilon$  de  $10^{-6}$  à  $10^{-4}$ . La structure de la perturbation optimale, initialement localisée près du point de décollement s’étend dans la couche limite en amont et dans la couche de cisaillement au fur et à mesure que l’amplitude initiale de la perturbation  $\epsilon$  augmente. Des temps d’optimisation  $T_1 = 100$  et  $T_1 = 150$  ont été étudiés et on remarque que la structure de la perturbation s’étend dans le domaine. Pour  $T_1 = 150$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ , la structure de la perturbation a envahi le domaine de calcul sur une longueur presque aussi grande que la longueur de la bulle de recirculation (voir figure 4.7a). Cette gamme de paramètres permet aussi d’approcher le régime de saturation de cet écoulement où l’influence de l’amplitude initiale de la perturbation sur la croissance transitoire est présentée dans la figure 4.7(b). Lors de cette procédure d’optimisation, le pas  $\alpha$  utilisé pour converger vers la solution optimale diminue avec l’amplitude initiale et le temps d’optimisation. Pour des cas relativement proches du régime linéaire ( $T_1 = 50$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ ),  $\alpha = 0.1$  est suffisant pour assurer la convergence de l’algorithme, alors que pour la dernière simulation, où la bulle de recirculation a été raccourcie de moitié, (par exemple  $T_1 = 150$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ ), la valeur de  $\alpha = 0.05$  a permis d’assurer la convergence

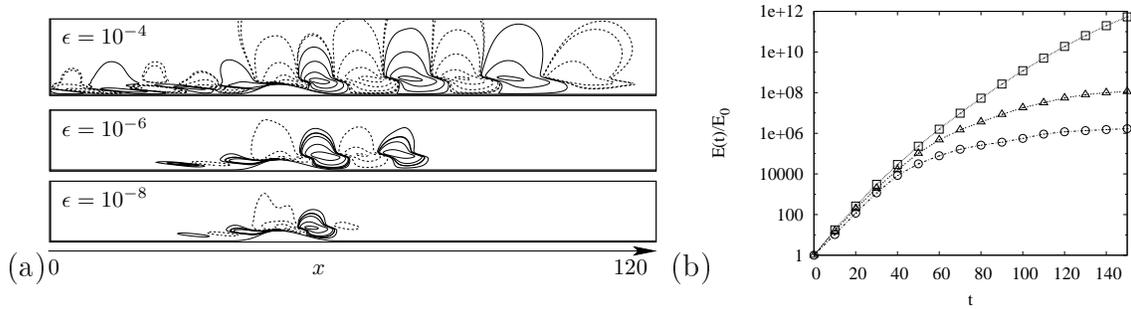


FIGURE 4.7 – Composante longitudinale de la perturbation optimale à  $\epsilon = 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-4}$ , et  $Re = 650$  (a), croissance transitoire associée  $\epsilon = 10^{-8}$  ( $-\square-$ ),  $\epsilon = 10^{-6}$  ( $-\triangle-$ ) et  $\epsilon = 10^{-4}$  ( $-\circ-$ ) normalisé par l'amplitude initiale (b).

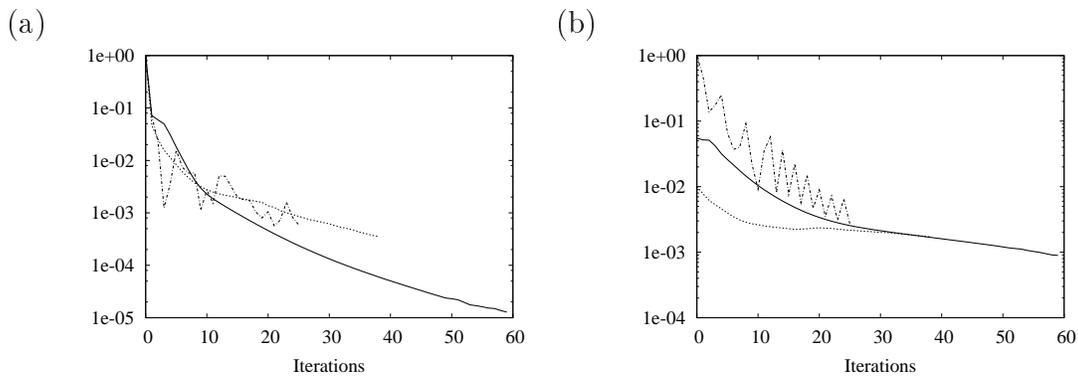


FIGURE 4.8 – Convergence entre deux itérées de la fonction objectif  $\mathcal{J}$  (a) et de la norme  $L_2$  du gradient  $\nabla_{\mathbf{u}_0}\mathcal{J}$  (b), à  $\epsilon = 10^4$  pour  $T = 50$  ( $—$ ),  $T = 100$  ( $\dots$ ) et,  $T = 150$  ( $-\cdot-\cdot-$ ).

de l'algorithme (voir figure 4.8). Le maillage dans la direction longitudinale a été réduit de  $\Delta x = 0.2$  dans le cas de la perturbation optimale dans le régime linéaire à  $\Delta x = 0.1$  pour les plus grandes amplitudes et jusqu'à 200 points de collocation dans la direction  $y$  ont été utilisés. Pour l'intégration en temps de la dynamique non linéaire, un pas de temps réduit de  $5 \cdot 10^{-3}$  a été nécessaire.

Cette étude a permis d'explorer la croissance des perturbations optimales dans le régime linéaire jusqu'au régime non linéaire saturé. La structure de la perturbation optimale, initialement localisée près du point de décollement de la couche limite s'étend en amont et en aval de la bosse. Le temps d'optimisation qui permet d'agir sur la dynamique change peu dans le cas non linéaire et les gains d'énergie produite par les structures des perturbations optimales non linéaire comparées aux structures linéaire pour une même amplitude initiale  $\epsilon$  restent limités (moins de 40%). Cette étude est en accord qualitatif avec les calculs de perturbations optimales dans le

cas d'une couche limite de Blasius sur une plaque plane (Cherubini *et al.*, 2010a). Leur étude a notamment permis de montrer que la taille des perturbations optimales dépend du temps d'optimisation et de l'amplitude initiale avec un comportement similaire à celui étudié dans ces travaux (la dynamique tridimensionnelle étant toutefois beaucoup plus riche que la dynamique bidimensionnelle).

## 4.5 Contrôle optimal

On s'intéresse par la suite au contrôle de la dynamique instable en considérant plusieurs applications. Le contrôle est constitué d'actionneurs de type soufflage-aspiration localisés sur la paroi afin de garder un aspect réaliste. Dans le cas d'une dynamique linéairement stable, les perturbations produites en amont de la bulle de recirculation sont amplifiées à cause de la croissance transitoire. A l'approche du nombre de Reynolds critique, l'instabilité basse fréquence, même stable, peut aussi être excitée par une source de bruit extérieur.

### 4.5.1 Contrôle de la dynamique convectivement instable : croissance transitoire

Un écoulement de base a été calculé pour  $Re = 500$  et  $h = 2$ . La condition initiale de ce calcul a été générée par l'impulsion d'un actionneur placé au sommet de la bosse avec une amplitude de  $\phi(T_0) = 10^{-4}$ . Cette perturbation produit une croissance transitoire et permet d'amorcer l'instabilité basse fréquence. La stratégie de contrôle est basée sur une série d'actionneurs placés en aval de la bosse par intervalles réguliers. Le premier actionneur a une longueur de 5 et est localisé à une distance de 50 par rapport au sommet de la bosse. Les huit actionneurs suivants sont identiques et sont équidistants d'une distance de 5, la zone de forçage à la paroi s'étend donc de  $x_1 = 50$  à  $x_2 = 140$  et la fonctionnelle considérée est (4.30). La croissance de la perturbation est présentée dans la figure 4.10 (a) pour un temps  $T_1 = 250$ . À partir de  $T = 150$ , les effets non linéaires sont clairement visibles avec un plateau de l'énergie de la perturbation à  $E \approx 45$  et l'écoulement est caractérisé par une bulle de recirculation raccourcie ainsi que plusieurs structures tourbillonnaires localisées après le point de rattachement de la couche limite (voir figure 4.11 a). Notons que pour les temps grands, l'énergie finit par décroître pour ce cas asymptotiquement stable. Le contrôle est calculé sur le temps d'optimisation  $T_1 - T_0 = 250$  avec un coût de contrôle  $\gamma = 1$ . Au cours de la procédure d'optimisation, on prend une valeur  $\alpha$

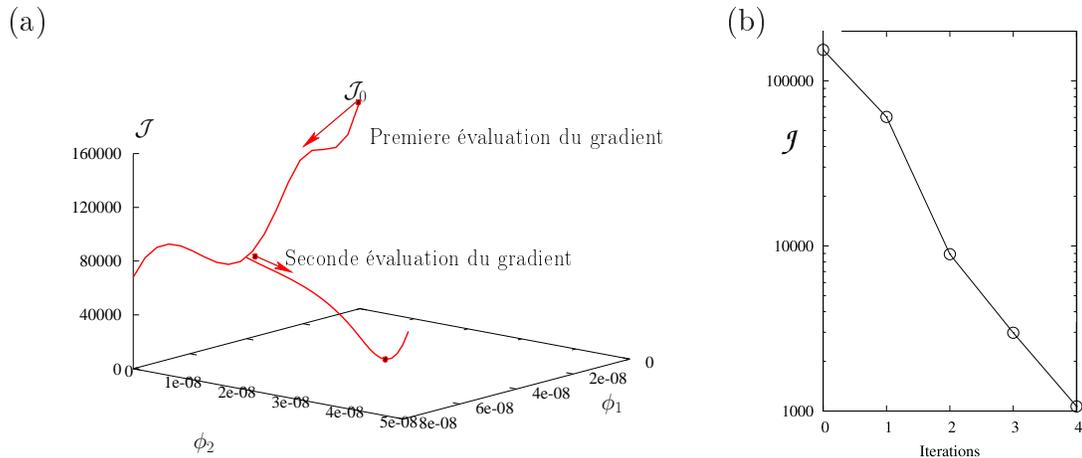


FIGURE 4.9 – Schéma idéalisé de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  ainsi que la méthode de recherche de ligne mise en œuvre (a), lors des deux premières évaluations du gradient  $\phi_{1,2}$ . Valeur de la fonction objectif  $\mathcal{J}$  en fonction des itérations (b)

faible telle que  $\alpha = 10^{-8}$ . Cette amplitude correspond à une amplitude maximale du signal de contrôle de  $\phi(1) \approx 10^{-5}$ . La méthode de recherche de ligne permet ensuite de scruter la fonction objectif qui est représentée dans la figure 4.9(a) pour les deux premières évaluations du gradient. Cette procédure a été répétée jusqu'à convergence de la fonction objectif. Grâce à la méthode de recherche de ligne, la fonction objectif décroît de manière exponentielle avec les itérations (voir figure 4.9b) et l'algorithme converge en seulement 5 évaluations du gradient. Il est important de noter que lorsque l'on intègre en temps le système adjoint, le signal de contrôle  $\phi(t)$  reste négligeable tant que le maximum du champ de vitesse adjoint n'a pas atteint l'emplacement des actionneurs. Par conséquent, la loi de contrôle, montrée dans la figure 4.10 (b), reste quasi nulle sur un intervalle de temps d'environ 150. Cet intervalle correspond au temps d'advection du maximum du champ adjoint entre sa position initiale à  $T_1$  et le temps pour atteindre les actionneurs.

Le signal  $\phi$  associé au premier et au dernier actionneur est présenté dans la figure 4.10(b). Les signaux de contrôle sont quasiment identiques, leur amplitude ne décroît que faiblement avec la distance au sommet de la bosse. La période de ces oscillations est de 25 avec un taux de décroissance exponentiel de 0.02 (voir figure 4.10 b). Une transformée de Laplace de ce signal permettrait d'extraire une fonction de transfert entre l'impulsion générée au sommet de la bosse et le contrôle en aval.

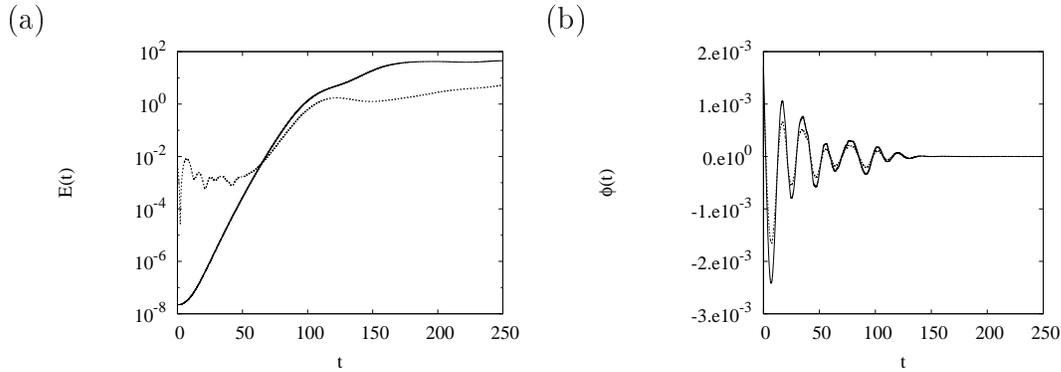


FIGURE 4.10 – Énergie de la perturbation (a) sans contrôle (—) et avec contrôle (....), signal  $\phi$  du premier actionneur (—) et du dernier ( $9^{em}$ ) actionneur (....) (b).

Le résultat du contrôle permet de stabiliser les effets de la croissance transitoire. La perturbation est stabilisée à une énergie  $E(T_1) = 5.2$ , ce qui permet de conserver une longue bulle de recirculation ainsi qu’une dynamique de perturbation dans le régime linéaire (voir figure 4.11).

## 4.5.2 Contrôle de l’écoulement instable

Le contrôle de la dynamique transitoire ayant permis de valider l’algorithme, il s’agit maintenant d’évaluer les possibilités de contrôler la dynamique instable auto-entretenu. L’étude commence par le contrôle de la dynamique linéaire faiblement instable, puis l’algorithme est confronté à la dynamique non-linéaire pour des régimes faiblement et fortement instables.

### 4.5.2.1 Contrôle de la dynamique linéaire

Le contrôle de la dynamique à temps long n’étant pas envisageable, le contrôle est à nouveau calculé sur des temps d’optimisation courts, puis l’algorithme d’optimisation à horizons récessifs, illustré dans la figure 4.5, est utilisé afin d’assurer la suite du calcul des lois de contrôle. Le contrôle est tout d’abord calculé pour une première fenêtre d’optimisation  $[T_1, T_2]$  jusqu’à convergence. Le contrôle est ensuite recalculé suivant la fenêtre  $[T_a + T_1, T_a + T_2]$  où  $T_a$  est le temps d’avance (pris tel que  $T_a = (T_2 - T_1)/2$ ). Le premier cas étudié est celui de la dynamique faiblement instable à  $Re = 605$ . Dans cette configuration, le meilleur compromis entre temps de calcul et convergence de l’algorithme a été trouvé pour  $\Delta T = 500$  et un coût de contrôle  $\gamma = 1$ . Le domaine de calcul a aussi été modifié, la condition à l’entrée

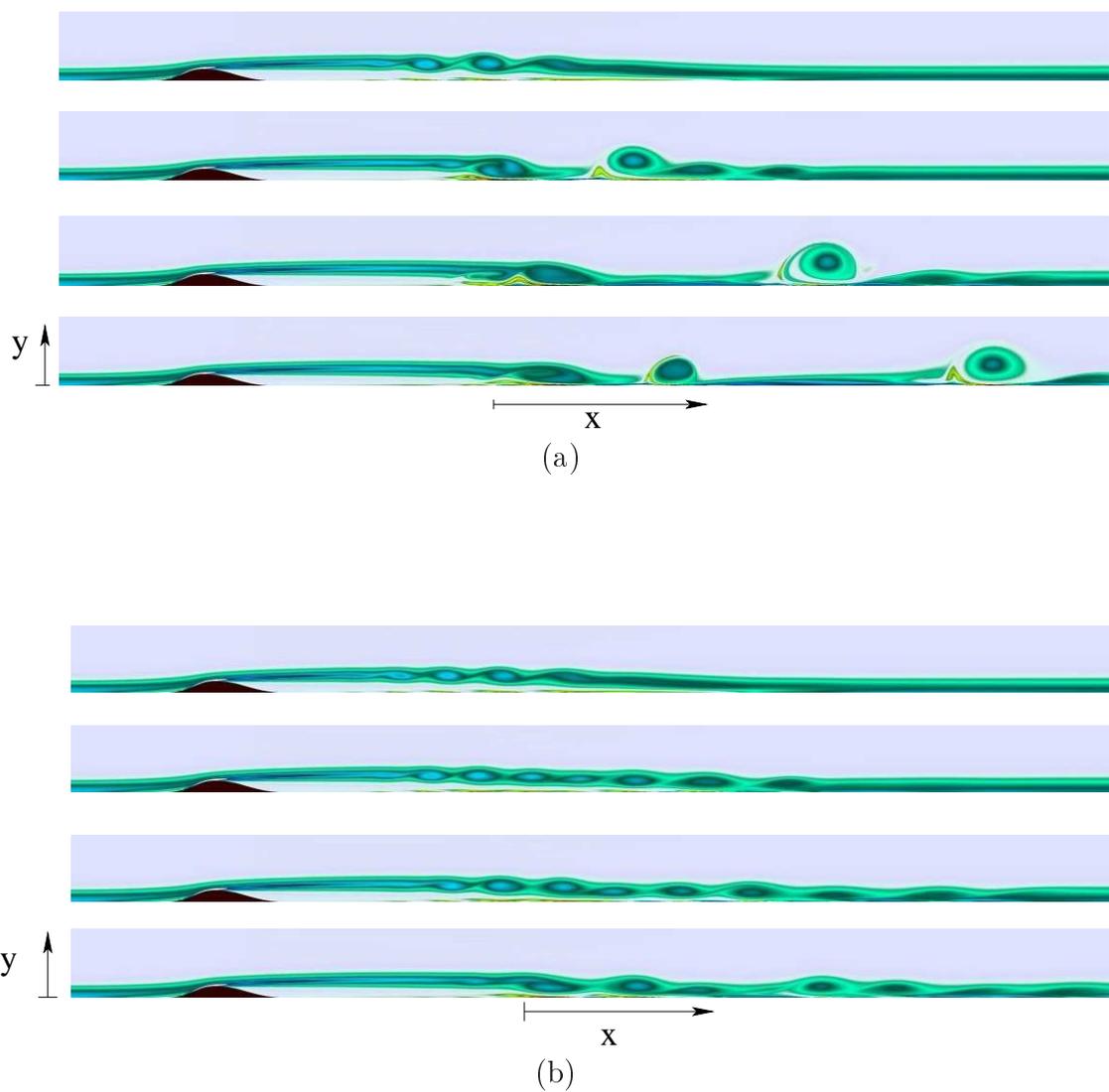


FIGURE 4.11 – Séquence de la vorticité de l'écoulement de type croissance transitoire sans contrôle (a) et avec contrôle (b) pour les temps  $T = 100, 150, 200, 250$ .

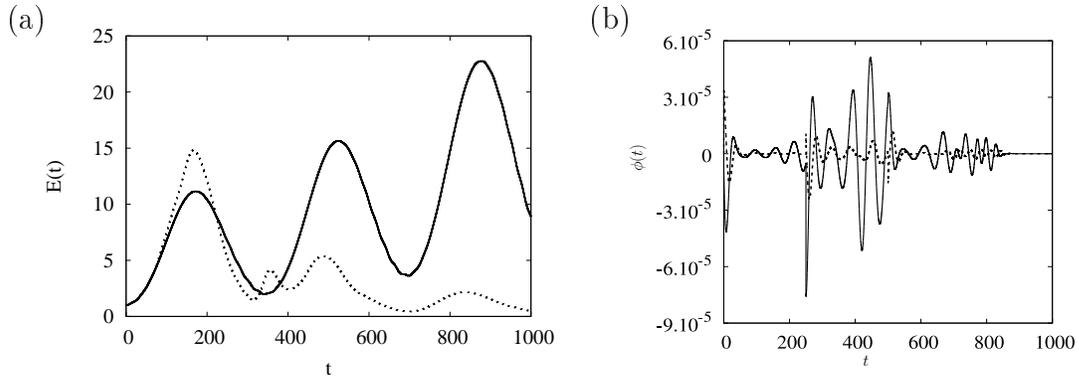


FIGURE 4.12 – Énergie de la perturbation (a) sans contrôle (—), avec contrôle (.....) normalisé par l’amplitude initiale (a), lois de contrôle associées pour l’actionneur 1 (—) et actionneur 2 (— — —)(b).

dans ces calculs étant de type Dirichlet nulle, la solution adjointe doit rester confinée dans le domaine de calcul. Pour ce faire, l’entrée du domaine de calcul a été placée à une distance de 125 du sommet de la bosse (alors que cette même distance a été prise à 25 dans Marquillie & Ehrenstein (2003)). Pour cette gamme de paramètres, le contrôle est capable de diminuer l’énergie de la perturbation d’un facteur 10 sur un temps d’optimisation de 1000 unités de temps (voir figure 4.12a).

L’actionneur 2 (placé au sommet de la bosse, au niveau du point de décollement) est le plus sollicité avec une amplitude 3 fois plus importante que les deux autres (voir figure 4.12b). La dynamique contrôlée est toujours marquée par l’instabilité basse-fréquence, alors que le contrôle calculé par réduction de modèle à  $Re = 590$  dans le sous-chapitre 3.6, permet de supprimer complètement cette dynamique.

#### 4.5.2.2 Contrôle de la dynamique non linéaire

On s’intéresse ensuite au contrôle de la dynamique développée en utilisant comme condition initiale, un état saturé, illustré dans la figure 4.15(a). Dans cette configuration faiblement instable, un pas de discrétisation  $\Delta x = 0.15$  et 140 points de collocation dans la direction normale à la paroi ont été suffisants pour résoudre les systèmes direct et adjoint. Le contrôle a donc été calculé pour cette nouvelle condition initiale avec la fonction objectif (4.31). Bien que le contrôle soit rapidement capable de diminuer l’énergie de la perturbation, cette dernière retourne vers son état saturé pour  $T \approx 750$ . Dans les faits, le contrôle est trop soutenu sur la fenêtre d’optimisation ( $T_1 - T_0 = 500$ ) et rend le système incontrôlable pour le temps d’op-

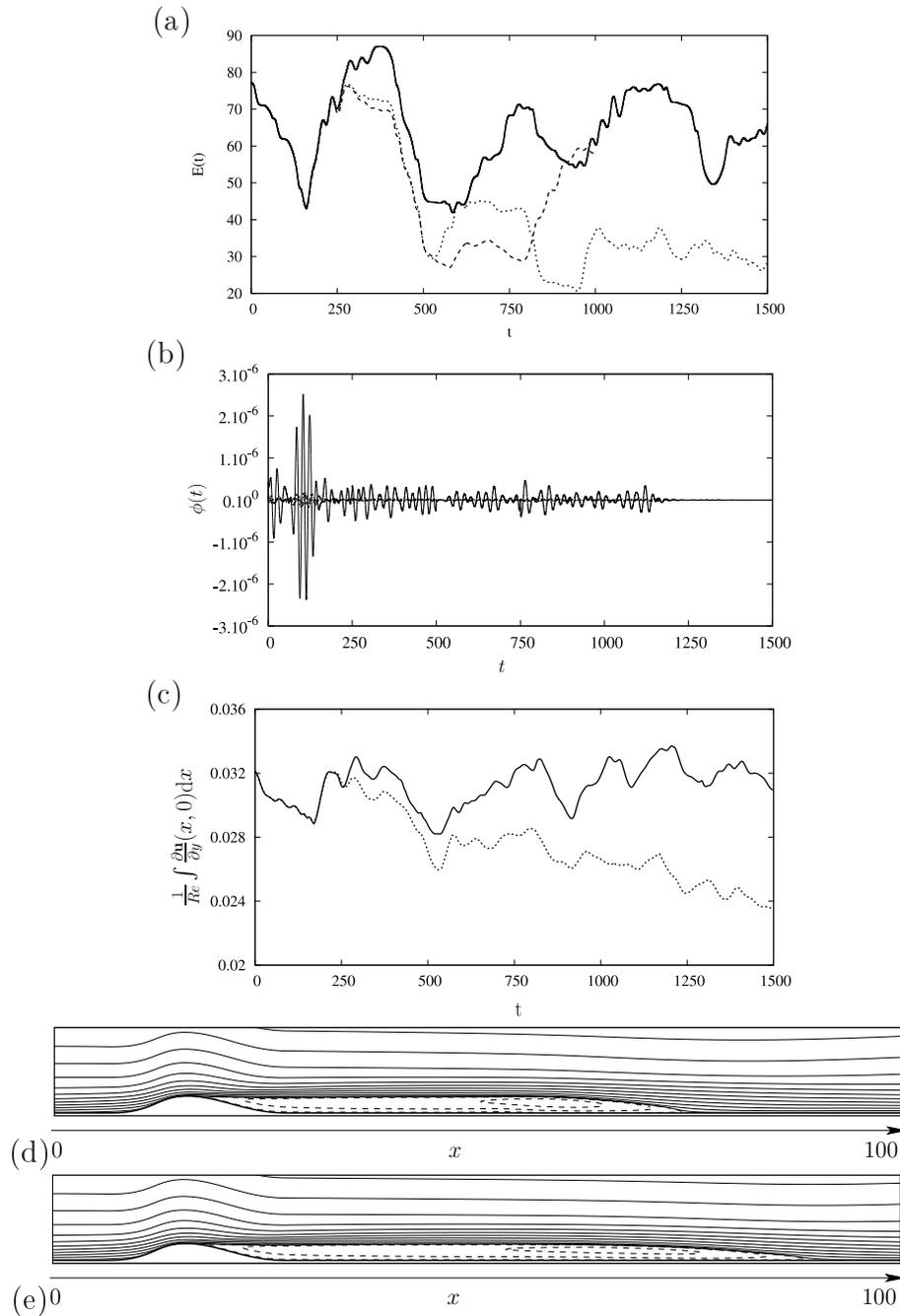


FIGURE 4.13 – Contrôle à  $Re=650$ , énergie de la perturbation (a) de la dynamique sans contrôle (—), avec contrôle (— — —) en utilisant (4.31), avec contrôle (.....) en utilisant (4.31) et en pénalisant la solution. Loi de contrôle (b) pour le second actionneur. Évolution temporelle (c) du frottement pariétal  $\frac{1}{Re} \int \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) dx$  de la dynamique non contrôlée (—) et pour la meilleure stratégie de contrôle (.....). Lignes de courant de l'écoulement moyen calculé pour  $Re = 605$  dans l'intervalle de temps  $[500, 1500]$  pour la dynamique sans contrôle (d) et avec contrôle (e).

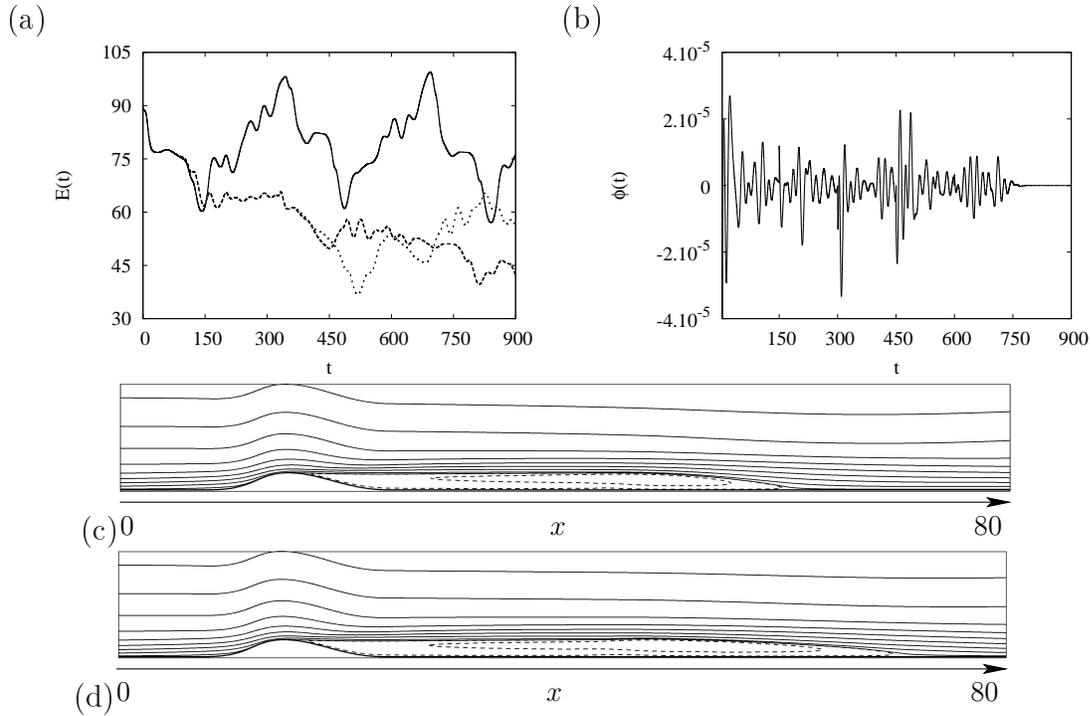


FIGURE 4.14 – Contrôle à  $Re=650$ , énergie de la perturbation pour la dynamique sans contrôle (—), avec contrôle (...) en utilisant (4.31), avec contrôle (— — —) en utilisant (4.31) avec la pénalisation (a). Lois de contrôle pour l'actionneur 2 (—) (b) en pénalisant la loi de contrôle. Lignes de courant de l'écoulement moyen calculé pour  $Re = 650$  dans l'intervalle de temps  $[300, 900]$  pour la dynamique sans contrôle (c) et avec contrôle (d).

timisation suivant. Une solution de pénalisation du contrôle a donc été considérée. Cette pénalisation peut être faite en modifiant la valeur du paramètre  $\gamma$  dans (4.31) après le calcul de la première loi de contrôle. Ici, une procédure empirique a été considérée et le processus d'optimisation a été arrêté dès lors que l'amplitude maximum de la loi de contrôle dépasse l'amplitude maximum du signal calculé sur l'intervalle de temps précédent (voir figure 4.13c). Le contrôle a été recalculé jusqu'à  $T = 1500$  et l'énergie de perturbation a été maintenue à une valeur de 30 pour 1000 unités de temps (ce qui représente trois périodes de l'instabilité basse fréquence). L'énergie de la perturbation dans la figure 4.13 (a) ainsi que la mesure du frottement pariétal  $1/Re \int \partial u / \partial y(x, 0) dx$  dans la figure 4.13 (c) montrent que le contrôle est effectivement capable d'atténuer l'instabilité ainsi que de rallonger la bulle de recirculation. Les lignes de courant de l'écoulement moyenné sur l'intervalle  $[500, 1500]$ , sont présentées dans la figure 4.13 (d) sans contrôle et 4.13 (e) avec contrôle. La

longueur de la bulle de recirculation est allongée de 30% par rapport à l'état non contrôlé. La loi de contrôle  $\phi$  de l'actionneur 2 dans la figure 4.13 (b) montre une plus large gamme de fréquences dans le cas du contrôle non linéaire que dans le cas linéaire.

Un second cas de contrôle a été considéré pour un écoulement plus fortement instable à  $Re = 650$  avec un temps d'optimisation  $T_1 = 350$ , une pénalisation du contrôle  $\gamma = 1$  et la fonctionnelle (4.31). Dans ce dernier calcul, le temps d'optimisation a été pris plus court étant donné que la discrétisation nécessaire pour la résolution des problèmes direct et adjoint augmente. Dans le cas présent, un pas de discrétisation  $\Delta x = 0.1$  et 180 points de collocation dans la direction normale à la paroi ont été utilisés. Ce contrôle de la dynamique non linéaire a été tenté bien que l'algorithme ne soit pas en mesure de contrôler la dynamique de perturbation linéaire. Le contrôle a tout d'abord été calculé sans pénalisation, et comme dans le cas à  $Re = 605$ , l'énergie de la perturbation ne décroît que jusqu'à  $T \approx 400$ . Peu après, l'énergie augmente et le contrôle est inefficace à supprimer l'instabilité basse fréquence (voir figure 4.14a). Le contrôle a été recalculé suivant la méthode de pénalisation et l'énergie est à nouveau stabilisée vers la valeur de l'écoulement moyen qui, dans le cas présent est de 43. La loi de contrôle associée à l'actionneur 2 est présentée dans la figure 4.14 (b) avec une amplitude dix fois supérieure au cas pour  $Re = 605$ , ainsi qu'un plus grand nombre de fréquences associées. Les lignes de courant de l'écoulement moyen ont été calculées dans l'intervalle  $[300, 900]$  et montrent une tendance identique au cas à  $Re = 605$  avec une bulle de recirculation allongée de 30% entre le cas sans contrôle et avec contrôle (voir figures 4.14c et 4.14d). Une séquence de la vorticité de la dynamique contrôlée est présentée dans la figure 4.15(b) dans l'intervalle de temps  $600 \leq t \leq 760$ . La dynamique de lâcher tourbillonnaire est clairement atténuée, comparée à la dynamique non contrôlée, présentée dans la figure 4.15(a) pour le même régime d'écoulement.

## 4.6 Discussion

Un algorithme d'optimisation sous contraintes en vue du contrôle de l'écoulement décollé instable au dessus de la bosse a été développé. Une attention particulière a été apportée aux conditions aux limites (entrée et sortie) qui sont un aspect primordial dans ce type de formulation. Le couplage entre la pression et le gradient de vitesse sur ces limites a été implémenté grâce à la technique de la matrice d'influence. Cette

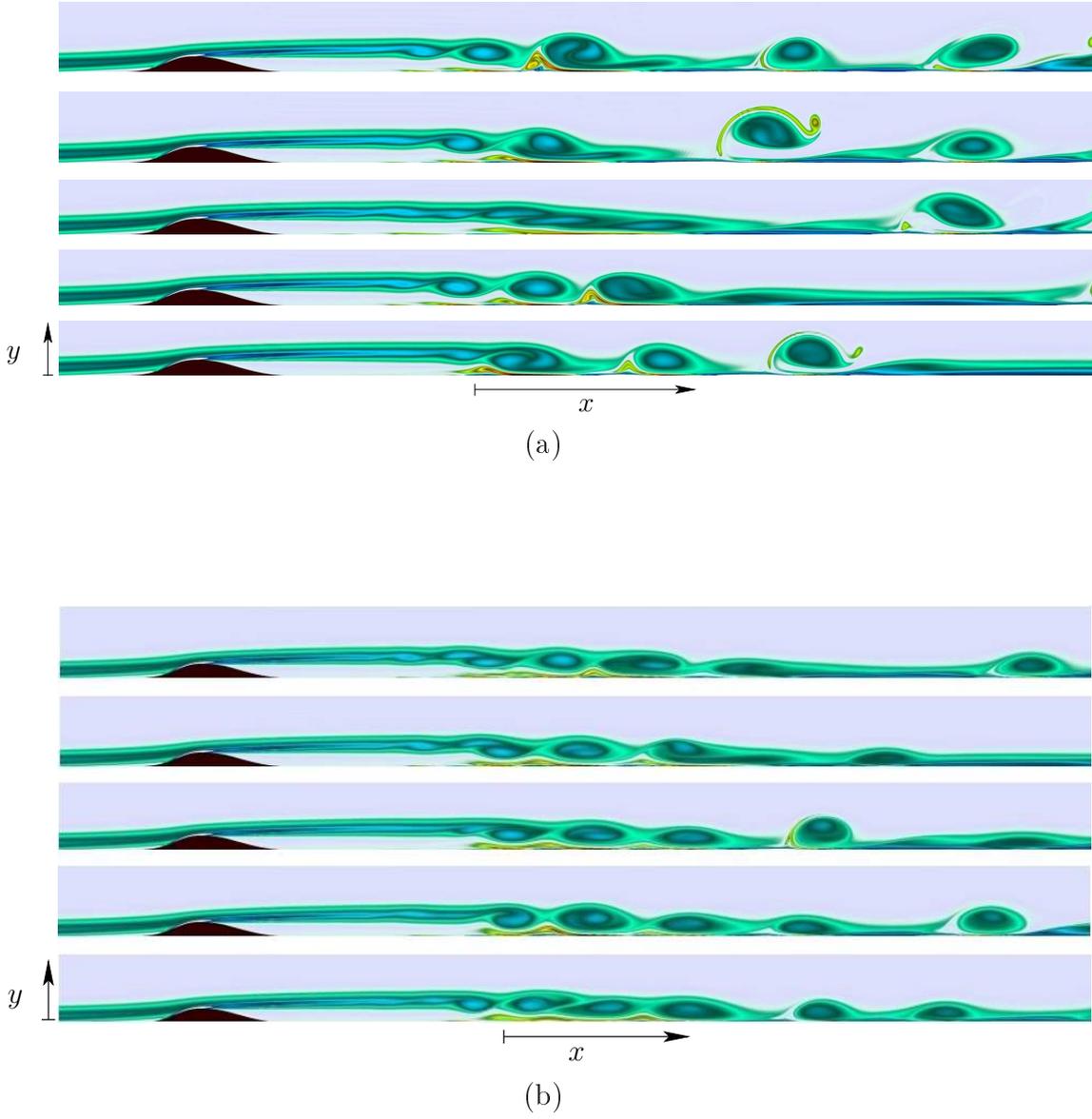


FIGURE 4.15 – Séquence de la vorticité de la dynamique sans contrôle (a) et avec contrôle (b) espacé de 40 unités de temps dans l'intervalle  $[600, 760]$  à  $Re = 650$ .

méthode permet d'imposer les conditions aux limites tout en s'abstenant d'utiliser des domaines dit "éponges" pour le calcul des problèmes direct et adjoint.

Le calcul des perturbations optimales a permis de montrer que le concept d'une perturbation localisée, responsable de la croissance optimale dans le cas linéaire, n'était plus valide dès lors que les non linéarités étaient présentes. La structure de la perturbation optimale s'étend, bien que dominante au sommet de la bosse, s'étire dans les zones de fort cisaillement afin de tirer parti de tous les mécanismes de croissance transitoire.

Le contrôle de cette croissance transitoire a été rendu possible grâce l'ajout d'actionneurs de type soufflage-aspiration, implémentés grâce à la méthode de la matrice d'influence et disposés le long de la bulle de recirculation. Les lois de contrôle ainsi déterminées sont presque identiques.

Le contrôle dans le régime linéaire a permis de montrer que quelques actionneurs localisés au sommet de la bosse étaient suffisants pour stabiliser la dynamique instable. Cette même méthode ne s'applique pas dans le cas du contrôle de l'écoulement saturé et le contrôle calculé suivant cette méthode est inefficace. Une solution possible consiste à pénaliser la loi de contrôle par rapport au temps d'optimisation précédent. Cette méthode permet de stabiliser l'énergie de la perturbation proche de celle de l'écoulement moyen et des résultats similaires ont été obtenus dans le cas d'une dynamique plus instable. Il semble donc qu'un contrôle total de la dynamique n'est pas envisageable en utilisant seulement quelques degrés de libertés, comme présenté dans ce chapitre. Des actionneurs volumiques pourraient être ajoutés dans la couche de cisaillement afin de contrôler cette dynamique pleinement développée. Les procédures d'optimisation Lagrangienne sont des outils mathématiques fiables mais qui deviennent par ailleurs très coûteux en temps de calcul dès lors qu'ils sont utilisés dans des cas d'écoulements complexes. Bien qu'elles semblent en mesure d'apporter des informations sur l'emplacement des actionneurs, ainsi que sur les lois de contrôle, il semble que l'optimisation sous contraintes sans réduction de modèle *a priori* soit difficilement utilisable pour le contrôle rétroactif d'écoulements réels.

---



# Bilan et perspectives

## Bilan

Les phénomènes d'instabilité d'un écoulement de couche limite décollée au dessus d'une bosse ont été étudiés expérimentalement. Un banc d'essai a été élaboré afin de reproduire la configuration de l'étude numérique de Marquillie & Ehrenstein (2003). Les résultats de ces expériences sont en excellent accord avec les prédictions issues des simulations numériques. La croissance linéaire de la bulle de recirculation avec le nombre de Reynolds pour des régimes d'écoulements stationnaires, rejoint les résultats issus du code de simulation utilisé par Marquillie & Ehrenstein (2003) pour la même configuration. La première instabilité observée est une instabilité tridimensionnelle dont la longueur d'onde correspond à la prédiction de Gallaire *et al.* (2007). Le taux de croissance a été estimé à partir de l'étude en modes POD, et les résultats sont en bon accord avec les simulations. En augmentant le nombre de Reynolds, des oscillations haute fréquence associées à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz apparaissent dans la zone de recollement moyen de la couche limite. Cette dynamique d'amplificateur est ensuite dominée par un mouvement global basse-fréquence de la bulle de recirculation. Une analyse de ces oscillations a permis de déterminer un nombre de Reynolds critique de 590 qui concorde avec l'analyse de stabilité linéaire de Ehrenstein & Gallaire (2008).

Les études précédentes de cette dynamique ont conclu à un mécanisme oscillatoire basse fréquence de la bulle de recirculation (Dovgal *et al.*, 1994; Cherry *et al.*, 1984). Ce phénomène est plus connu sous le nom de "buffeting" dans les écoulement décollés transsoniques et a aussi été documenté dans le cas de l'interaction choc-couche limite (Crouch *et al.*, 2009; Piponnier *et al.*, 2009). Les expériences présentées ici, permettent de valider les études numériques antérieures et montrent que les oscillations basse fréquence sont inhérentes aux bulles de recirculation allongées.

Étant donné que les outils numériques permettent de décrire précisément l'in-

---

stabilité basse fréquence étudiée dans l'expérience, la deuxième partie de la thèse est consacrée au contrôle optimal de cette dynamique par le biais de la simulation. Pour ce faire, on considère tout d'abord un asservissement en boucle fermée. Les modes globaux, solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées, permettent de reproduire la dynamique et sont donc utilisés comme base de projection en vue du contrôle. Cette réduction de modèle *a priori* permet de construire des compensateurs optimaux à partir d'un nombre restreint de degrés de liberté. L'étude d'Åkervik *et al.* (2007) a montré qu'il était possible d'utiliser cette méthode afin de contrôler un écoulement faiblement instable au dessus d'une cavité arrondie. Or, la robustesse des modèles réduits construits dans la base des modes globaux a été récemment remise en question par Barbagallo *et al.* (2009) dans le cas d'une couche limite décollée au dessus d'une cavité rectangulaire.

Une nouvelle méthode de projection basée sur les modes globaux a donc été proposée afin d'optimiser les performances de ces contrôleurs. Cette projection orthogonale consiste à minimiser la norme basée sur l'erreur entre l'actionneur réel et son modèle et a été couplée à notre écoulement pour différents régimes. Cette nouvelle méthode permet d'améliorer de manière significative les performances des contrôleurs tout en s'affranchissant du calcul des modes adjoints stables. Par ailleurs, cette étude montre aussi que la dimension nécessaire à la construction d'un contrôleur fiable augmente avec le taux de croissance de l'instabilité.

Les compensateurs de dimension réduite ont été couplés à la simulation numérique directe, mais il semble difficile de contrôler la dynamique non linéaire dès lors que l'amplitude de la perturbation implique un fort couplage des termes non linéaires.

Afin d'apporter des éléments de réponse sur le contrôle de la dynamique non linéaire, une procédure d'optimisation sous contraintes a été mise en œuvre. Un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes, basé sur la méthode de la matrice d'influence a permis de coupler la pression avec le gradient du champ de vitesse à la sortie, tout en assurant la condition d'incompressibilité à l'intérieur du domaine. Cette méthode a aussi permis d'implémenter des actionneurs de type soufflage-aspiration réalistes (à divergence non nulle) en vue du contrôle. Une étude de la croissance transitoire dans le régime non linéaire a notamment montré que la structure de la perturbation optimale, localisée en amont dans le cas linéaire, s'étend en amont et en aval de l'écoulement quand les non linéarités augmentent. Ces résultats font apparaître plusieurs ressemblances avec les perturbations optimales non linéaires calculées dans un écoulement de couche limite sur plaque plane (Cherubini

---

*et al.*, 2011).

Des actionneurs de type soufflage-aspiration sont donc introduits dans les régions de l'écoulement mises en évidence par la perturbation optimale et le contrôle de la dynamique pleinement développée a été étudié dans différents régimes. Alors que la dynamique de perturbation linéaire peut être facilement contrôlée, il semble beaucoup plus difficile de résoudre le problème non linéaire associé. La procédure d'optimisation permet de diminuer de manière significative l'énergie de la perturbation en atténuant le phénomène de lâcher tourbillonnaire mais un contrôle permettant de supprimer l'intégralité de la perturbation n'a pas pu être mis en œuvre. Dans le cas où des instabilités convectives et absolues coexistent avec une large gamme de fréquences instables, il semble difficile de stabiliser un écoulement avec aussi peu de degrés de liberté pour le contrôle.

Les procédures d'optimisation Lagrangienne sont un outil mathématique fiable mais qui reste difficile à mettre en œuvre dans le cas d'écoulements complexes. Bien qu'elles semblent en mesure d'apporter des informations sur l'emplacement des actionneurs ainsi que sur les lois de contrôle, il semble que le contrôle sans réduction de modèle *a priori* soit difficilement envisageable dans le cas d'écoulements réels.

## Perspectives

Bien que des solutions de contrôle soient présentées, leur couplage avec l'expérience semblent encore hasardeux. En effet, la réduction de modèle est limitée à des applications où l'écoulement est faiblement instable et où seule la dynamique de résonateur est présente. Les méthodes d'optimisation sous contraintes permettent de prendre en compte les termes non linéaires dans le calcul des lois de contrôle mais il est difficile de faire converger cet algorithme qui nécessite en plus une grande capacité de stockage mémoire.

Néanmoins, les fonctions objectifs étudiées dans cette thèse visent à supprimer l'intégralité de la dynamique de perturbation, alors que pour des applications aéronautiques, le simple fait d'atténuer la dynamique basse fréquence représente un intérêt. Une fonction objectif pourrait être construite afin de minimiser les oscillations basse fréquence dans la couche de cisaillement sans tenir compte de la longueur de la bulle de recirculation où du lâcher tourbillonnaire.

Les résultats expérimentaux offrent une alternative aux modèles compressibles pour l'étude et la conception de solutions de contrôle d'écoulements décollés. Ces résultats

---

viennent soutenir les travaux numériques antérieurs sur cette même configuration mais il reste encore à étudier les effets de la compressibilité. Les outils de simulation pour la stabilité globale pourraient être modifiés afin de comprendre l'effet du nombre de Mach sur la bulle de recirculation et l'instabilité basse fréquence. Une telle étude permettrait de confirmer le caractère générique de cette instabilité.

---

# Annexe A

## Annexe au chapitre 2

### A.1 Notions de couche limite laminaire

#### Couche limite de Blasius

On définit le système de coordonnées tel que la direction privilégiée de l'écoulement soit la direction longitudinale  $x$ , la direction normale à la paroi est la direction  $y$  et la direction transverse est la coordonnée  $z$ . Pour un écoulement de couche limite de plaque plane, le gradient du champ de vitesse normal à la paroi est dominant et une estimation des ordres de grandeur a permis à Prandtl (1927) de proposer un système d'équations simplifié, qui pour un écoulement incompressible bidimensionnel (indépendant de  $z$ ) s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.3})$$

où  $U$  et  $V$  sont les composantes longitudinales et normales de la vitesse de l'écoulement, et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Blasius (1950) a montré que pour un écoulement de couche limite formé le long d'une plaque plane, avec les conditions aux limites  $U(x, 0) = V(x, 0) = 0$  et  $U(x, \infty) = U_\infty$ , les équations de couche limite pouvaient être résolues en utilisant une fonction de courant définie par un paramètre de similitude  $\eta$  :

$$\Psi = (\nu U_\infty x)^{1/2} f(\eta), \quad (\text{A.4})$$

où  $\eta = y(\frac{U}{\nu})^{1/2}$ . Les vitesses correspondantes sont définies par :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{A.5})$$

En substituant les vitesses dans les équations de couche limite, on arrive à l'équation suivante pour la fonction de similitude :

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) = 0 \quad (\text{A.6})$$

dont la solution se calcule par intégration numérique avec les conditions aux limites  $f = f' = 0$  pour  $\eta = 0$  et  $f' \rightarrow 1$  pour  $\eta \rightarrow \infty$  (Schlichting, 1968). Finalement, l'évolution de l'épaisseur de déplacement  $\delta$  du profil le long de la paroi (suivant la direction longitudinale  $x$ ) est donnée par

$$\delta(x) = 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (\text{A.7})$$

qui servira de longueur caractéristique dans cette étude. Le nombre de Reynolds, basé sur cette longueur, permet de quantifier le rapport entre les forces inertielles (déstabilisantes) et les forces visqueuses (stabilisantes)

$$Re = \frac{U_\infty \delta}{\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Cet écoulement constitue la première étape de validation d'un écoulement sur plaque plane, que ce soit d'un point de vue expérimental ou dans une simulation numérique.

## A.2 Décomposition orthogonale en modes propres

Dans un contexte expérimental, il est nécessaire d'avoir un algorithme robuste permettant la détermination des structures cohérentes au sein d'un écoulement. La méthode de décomposition orthogonale en modes propres (Proper-Orthogonal Decomposition - POD) permet de hiérarchiser ces structures en fonction de leur énergie suivant un temps d'observation fini. Les champs de vecteurs  $q(x_i, t_j)$  aux points de discrétisation  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  et aux instants  $t_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  représentent ces observations. La matrice  $\mathbf{X}$  est construite telle que

$$\mathbf{X}_{ij} = q(x_i, t_j) \sqrt{\delta t} \quad (\text{A.9})$$

où  $\delta t$  correspond au pas de temps entre deux observations. Le produit de la matrice  $\mathbf{X}$  avec la matrice adjointe  $\mathbf{X}^*$  est une approximation de l'intégrale en temps de la matrice d'auto-corrélation, à savoir

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^* \approx \int_0^T q(x_i, t) q(x_j, t) dt. \quad (\text{A.10})$$

On cherche les vecteurs et valeurs propres de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^* \mathbf{v}_k = \sigma_k^2 \mathbf{v}_k$$

tels que  $\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_k = 1$ ; les  $\mathbf{v}_k$  formant une base orthonormale et qui est une base optimale de projection pour  $\mathbf{q}(t)$ , en effet on peut montrer (Sirovich, 1987) que

$$\sigma_1^2 = \max_{\mathbf{v}} \frac{\int_0^T (\mathbf{q}^*(t) \mathbf{v})^2 dt}{\|\mathbf{v}\|_2^2} \quad (\text{A.11})$$

$$= \int_0^T (\mathbf{q}^*(t) \mathbf{v}_1)^2 dt \quad (\text{A.12})$$

$$\text{etc...} \quad (\text{A.13})$$

Or, il est impossible de calculer les vecteurs propres de  $\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ , ( $n = O(10^5)$ ). Le nombre d'instantanés  $m$  est en général bien plus faible que la discrétisation spatiale ( $n \gg m$ ) et la matrice  $\mathbf{X}^*\mathbf{X}$  de dimension  $m \times m$ , de vecteurs propres  $\mathbf{a}_k$  avec  $\mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k = 1$  et valeurs propres  $\sigma_k^2$ , peut être calculée de manière explicite.

Les vecteurs propres  $\mathbf{v}_k$  de  $\mathbf{X}$  sont donnés par

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{X} \mathbf{a}_k. \quad (\text{A.14})$$

Les observations sont donc une combinaison linéaire des vecteurs propres  $\mathbf{v}_k$  telles que

$$\mathbf{q}(t) = \sum c_k(t) \mathbf{v}_k. \quad (\text{A.15})$$

Dans cette projection, les coefficients  $\mathbf{c}_k$  sont donnés par

$$c_k(t_j) = \mathbf{q}^*(t_j) \mathbf{v}_k, \quad (\text{A.16})$$

et donc

$$(c_k(t_1), \dots, c_k(t_m))^T = \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \mathbf{X}^* \mathbf{v}_k \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{1}{\sigma_k} \frac{1}{\sqrt{\delta t}} \mathbf{X}^* \mathbf{X} \mathbf{a}_k \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{\sigma_k \mathbf{a}_k}{\sqrt{\delta t}} \quad (\text{A.19})$$

ce qui permet de montrer que la valeur propre

$$\sigma_k^2 = \sum_{j=1}^m \delta t c_k^2(t_j) \approx \int_0^T c_k^2(t) dt \quad (\text{A.20})$$

représente la mesure de l'énergie sur l'intervalle  $[0, T]$  associée au vecteur propre  $\mathbf{v}_k$ , aussi appelé mode POD.

### A.3 Décomposition en modes dynamiques

On présente ici l'algorithme de décomposition en modes dynamiques, qui est une variante de la méthode d'Arnoldi, mais qui peut aussi être utilisée dans le cas de systèmes non linéaires. Cet algorithme permet d'identifier les valeurs propres complexe,  $\lambda_{j=1}^m$  ainsi que les vecteurs propres associés  $\mathbf{v}_{j=1}^m$  tels que

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \mathbf{v}_j \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \mathbf{v}_j + \mathbf{r} \quad (\text{A.22})$$

à condition que les valeurs propres  $\lambda_j$  soient distinctes. Cette procédure permet donc d'approximer les trajectoires non linéaires par des approximations linéaires. Cette projection produit un résidu  $\mathbf{r}$  qui est orthogonal au sous-ensemble des  $m$  vecteurs  $\mathbf{u}$ , utilisés ainsi qu'aux vecteurs propres  $\mathbf{v}$ . Le calcul des modes s'articule de la manière suivante. Les matrices  $\mathbf{K} = [\mathbf{u}_0 \cdots \mathbf{u}_{m-1}]$ , qui contient les valeurs propres, et  $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{m-1}]^T$ , qui contient les coefficients, permettent de construire la meilleure approximation (au sens des moindres carrés) du dernier vecteur  $\mathbf{u}_m$  en utilisant les vecteurs précédents. Ce qui correspond à

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{K}\mathbf{c} + \mathbf{r}, \quad (\text{A.23})$$

où  $\mathbf{r}$  est orthogonal à l'ensemble des vecteurs  $(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{m-1})$ . Si les vecteurs  $\mathbf{u}_i$  sont linéairement indépendants, le vecteur  $\mathbf{c}$  peut être construit en utilisant une pseudo-inverse explicite

$$\mathbf{c} = (\mathbf{K}^*\mathbf{K})\mathbf{K}^*\mathbf{u}_m. \quad (\text{A.24})$$

On construit ensuite la matrice compagnon  $\mathbf{C}$  telle que

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{pmatrix}$$

. Une diagonalisation possible de cette matrice est

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T} \quad (\text{A.25})$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice de Vandermonde définie par  $T_{i,j} = \lambda_i^{j-1}$ ,  $\Lambda$  est une matrice diagonale avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , sur la diagonale et où les  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$  sont distinctes. Finalement, les vecteurs propres sont donnés par  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ , où

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}. \tag{A.26}$$

Les valeurs propres sont recalculées dans le plan complexe par la transformation  $\log(\lambda_i/\Delta t)$  avec  $\Delta t$  le temps entre deux champs successifs.

---

## Annexe B

### Annexe au chapitre 3

#### B.1 Méthode d'Arnoldi pour le calcul des valeurs propres

Dans cette partie on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé

$$i\omega \mathbf{E}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} \quad (\text{B.1})$$

avec  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  la valeur propre et  $\hat{\mathbf{q}}$  le vecteur propre associé. La méthode des puissances itérées est la méthode la plus intuitive afin de calculer la valeur propre dominante d'un opérateur  $\mathbf{A}$  de dimension  $m \times n$ . Cette méthode consiste à calculer  $\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{A}^2\mathbf{E}\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{A}^3\mathbf{E}\mathbf{v}$ ,  $\dots$ , normalisant le vecteur  $\mathbf{v}$  entre chaque itération. Cette méthode converge vers le vecteur propre de  $\mathbf{A}$  associé à la valeur propre de plus grande partie réelle  $\omega_i$ . Il apparaît qu'une grande quantité d'information est perdue étant donné que seul le calcul de  $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{q}$  est conservé. La méthode de Krylov consiste à stocker cette séquence tel que

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} b & \mathbf{A}\mathbf{v} & \mathbf{A}^2\mathbf{v} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Les colonnes de cette matrice ne sont pas orthogonales, mais il est possible d'extraire une base orthogonale grâce à la méthode de Gram-Schmidt. Ces vecteurs sont une base du sous-espace de Krylov  $\mathbf{K}_n$  et représentent une bonne approximation des  $n$  vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres  $\omega_i$  pour les mêmes raisons que  $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}$  est proche du vecteur propre associé à la valeur propre de plus grande partie réelle  $\omega_i$ .

Pour établir les relations algébriques reliant  $\mathbf{A}$  à cet espace de Krylov on procède comme suit, ce qui est précisément l'algorithme d'Arnoldi. Au lieu de considérer

---

les vecteurs  $\mathbf{v}$  tels quels, on les orthogonalise au fur et à mesure. Prenons donc un vecteur arbitraire  $\mathbf{v}_1$  tel que  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ . On détermine  $\mathbf{w}_2$  tel que

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{AEv}_1 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{AEv}_1 \rangle \mathbf{v}_1 \quad (\text{B.3})$$

et ce vecteur est orthogonal (pour le produit scalaire euclidien noté  $\langle ; \rangle$ ) à  $\mathbf{v}_1$ . On le divise par sa norme pour obtenir

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|} \mathbf{w}_2 \quad (\text{B.4})$$

de norme 1. On itère cette procédure d'orthogonalisation de la façon suivante. On note  $h_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{Cv}_j \rangle$   $i = 1, \dots, j$  et on met en œuvre l'algorithme

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{AEv}_1 - \sum_{i=1}^j h_{i,j} \mathbf{v}_i \quad (\text{B.5})$$

$$h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}_j\| \text{et } \mathbf{v}_{j+1} = \frac{1}{h_{j+1,j}} \mathbf{w}_{j+1} \quad (\text{B.6})$$

$j$  allant de 1 à  $n$ , avec  $n$  la dimension de l'espace de Krylov que l'on considère. On peut se convaincre que si l'on note  $\mathbf{V}$  la matrice  $m \times n$  dont les vecteurs colonnes sont précisément les vecteurs  $\mathbf{v}_j$  générés de la sorte, et si on définit  $\mathbf{H}$  comme étant la matrice de Hessenberg supérieure

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & h_{2,n} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & \cdots & h_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

de coefficients  $h_{i,j}$  donnés ci dessus, alors

$$\mathbf{AEV} = \mathbf{EVH} + \mathbf{v}_n + \mathbf{r}_n^T \quad (\text{B.8})$$

avec le vecteur ligne  $\mathbf{r}^T = (0, \dots, 0, h_{n+1,n})$ . On détermine ensuite les vecteurs propres  $\hat{\mathbf{q}}_j$  de valeurs propres  $\omega_j$  pour la matrice  $\mathbf{H}$ , de dimension  $K \times K$  bien plus petite en général que le système initial, avec  $\mathbf{Hq}_j = i\omega_j \mathbf{q}_j$

## B.2 Algorithme '*shift and invert*'

Il s'agit de calculer non plus les valeurs propres de plus grandes parties imaginaires  $\omega_i$  au voisinage de l'axe réel mais de chercher les valeurs propres au voisinage d'un point  $\omega_0$  *décalé* dans le plan complexe. Il convient donc d'appliquer la méthode d'Arnoldi pour le problème aux valeurs propres généralisé

$$i\mu\mathbf{E}\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}\omega_0)^{-1}\hat{\mathbf{q}} \quad (\text{B.9})$$

avec  $\mu = \frac{1}{\mu - \mu_0}$  et les valeurs propres  $\mu$  de plus grand module correspondant à des valeurs  $\omega$  de  $\mathbf{A}$ , proche de  $\omega_0$ . Il suffit donc de déterminer la séquence

$$\mathbf{v}_{j+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}\omega_0)^{-1}\mathbf{E}\mathbf{v}_{j+1} \quad (\text{B.10})$$

en opérant au préalable une décomposition  $LU$  de la matrice  $(\mathbf{A} - \mathbf{E}\omega_0)$ . On aura alors en effet

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\mu} + \omega_0\right)\mathbf{E}\mathbf{v} \quad (\text{B.11})$$

et par conséquent

$$\omega = \frac{1}{\mu} + \omega_0. \quad (\text{B.12})$$

Rappelons que si  $\mathbf{A}$  est inversible, alors  $(\mathbf{A} - \mathbf{E}\omega_0)$  l'est aussi. Il reste à déterminer la bonne dimension de  $n$ , dans le cas présent. Des sous-espaces de Krylov de dimension 1000 ont été utilisés avec 5 *shifts* afin de calculer 2000 valeurs propres distinctes, pour des valeurs propres avec des parties réelles positives.



## Bibliographie

- ÅKERVIK, E., BRANDT, L., HENNINGSON, D., HØPPFNER, J., MARXEN, O. & SCHLATTER, P. 2006 Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping. *Phys. Fluids* **18**, 068102.
- ÅKERVIK, E., HØPPFNER, J., EHRENSTEIN, U. & HENNINGSON, D.S. 2007 Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes. *J. Fluid Mech.* **579**, 305–314.
- ALIZARD, F. & ROBINET, J.C. 2011 Modelling of optimal perturbations in flat plate boundary layer using global modes : benefits and limits. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **25**, 147–165.
- ANTOULAS, A. 2006 *Approximation of Large Dynamical Systems*. SIAM.
- ARMALY, B.F., DURST, F. & PEREIRA, J.C.F. 1983 Experimental and theoretical investigation of backward facing step flow. *J. Fluid Mech.* **127**, 473–496.
- BAGHERI, S., BRANDT, L. & HENNINGSON, D. S. 2009 Input-output analysis, model reduction and control of the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.* **620**, 263–298.
- BARBAGALLO, A., SIPP, D., JACQUIN, L. & SCHMID, P.J. 2008 Control of an incompressible cavity flow using a reduced model based on global modes. *AIAA Paper* pp. 2008–3904.
- BARBAGALLO, A., SIPP, D. & SCHMID, P.J. 2009 Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *J. Fluid Mech.* **641**, 1–50.
- BARBAGALLO, A., SIPP, D. & SCHMID, P.J. 2011 Input-output measures for model reduction and closed loop control : application to global modes. *J. Fluid Mech.* **685**, 23–53.
-

- 
- BARKLEY, D., GOMES, M. & HENDERSON, D. 2002 Three-dimensional instability in flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* **473**, 167–189.
- BASLEY, J., PASTUR, L. R., LUSSEYRAN, F., FAURE, T. M. & DELPRAT, N. 2011 Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV. *Exp. Fluids* **50**, 905–918.
- BAYLY, B. 1981 Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160–2163.
- BEAUDOIN, J.-F., CADOT, O., AIDER, J.-L. & WESFREID, J. 2004 Three dimensional stationary flow over a backward facing step. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **23**, 147–155.
- BEHESHTI, B.H., WITTMER, F. & ABHARI, R.S. 2008 Flow visualization study of an airship model using a water towing tank. *Aero. Science Tech.* **13**, 450–458.
- BERGMANN, M., CORDIER, L. & J.P., BRANCHER 2005 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Phys. of Fluids* **17**, 097101.
- BERNARD, A., FOUCAUT, J. M., DUPONT, P. & STANISLAS, M. 2003 Decelerating boundary-layer : a new scaling and mixing length model. *AIAA J.* **41**, 248–255.
- BEWLEY, T.R. 2001 Flow control : New challenges for a new renaissance. *Prog. Aerosp. Sci.* **37**, 21–58.
- BEWLEY, T.R., MOIN, P. & TEMAM, R. 2001 Dns-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark of feedback algorithms. *J. Fluid Mech.* **447**, 179–225.
- BEWLEY, T. R. & LIU, S. 1998 Optimal and robust control and estimation of linear paths to transition. *J. Fluid Mech.* **365**, 305–349.
- BLASIUS, H. 1950 The boundary layers in fluids with with little friction. *NACA TM* p. 1256.
- CABELL, R. H., KEGERISE, M. A., COX, D. E. & GIBBS, G. P. 2006 Experimental feedback control of flow-induced cavity tones. *AIAA J.* **44**, 1807–1815.
- CHARRU, F. 2007 *Instabilités Hydrodynamiques*. EDP Sciences.
-

- 
- CHEN, K. K., H., TU J. & ROWLEY, C.R. 2012 Variants of dynamic mode decomposition : connections between Koopman and Fourier analyses. *Phys. Nonlin. Sci.* —, submitted.
- CHERRY, N.J., HILLER, R. & LATOUR, M.P. 1984 Unsteady measurements in a separating and reattaching flow. *J. Fluid Mech.* **144**, 13–46.
- CHERUBINI, S., DE PALMA, P., ROBINET, J-CH. & BOTTARO, A. 2010*a* Rapid path to transition via nonlinear localized optimal perturbation in a boundary-layer flow. *Phys. Rev. E* **571**, 066302.
- CHERUBINI, S., DE PALMA, P., ROBINET, J-CH. & BOTTARO, A. 2011 The minimal seed of turbulent transition in the boundary-layer. *J. Fluid Mech* **689**, 221–253.
- CHERUBINI, S., ROBINET, J.-C. & DE PALMA, P. 2010*b* The effects of non-normality and nonlinearity of the Navier-Stokes operator on the dynamics of a large laminar separation bubble. *Phys. Fluids* **22** (1), 014102.
- CHERUBINI, S., ROBINET, J.-C., DE PALMA, P. & ALIZARD, F. 2010*c* The onset of three-dimensional centrifugal global modes and their nonlinear development in a recirculating flow over a flat surface. *Phys. Fluids* **22**, 114102.
- CHOMAZ, J.M. 2005 Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 357–392.
- CREUSÉ, E. 2001 Comparison of active control techniques over a dihedral plane. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **6**, 446–466.
- CROUCH, J.D., GARBARUK, A., MAGIDOV, D. & TRAVIN, A. 2009 Origin of transonic buffet in aerofoils. *J. Fluid Mech.* **628**, 357–369.
- DOVGAL, A.V., KOZLOV, V.V. & MICHALKE, M. M. 1994 Laminar boundary layer separation : instability and associated phenomena. *Prog. Aeros. Sci.* **30**, 61–94.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
-

- EHRENSTEIN, U. & GALLAIRE, F. 2005 On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.* **536**, 209–218.
- EHRENSTEIN, U. & GALLAIRE, F. 2008 Two-dimensional global low-frequency oscillations in a separating boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.* **614**, 315–327.
- EHRENSTEIN, U. & PEYRET, R. 1989 A Chebyshev collocation method method for the Navier-Stokes equations with application to double diffusive convection. *Int. J. Num. Meth. Fluids* **9**, 427–452.
- FRANSSON, J. H. M., MATSUBARA, M. & ALFREDSSON, P. H. 2005 Transition induced by free stream turbulence. *J. Fluid Mech.* **527**, 1–25.
- GAD-EL-HAK, M. & BUSHNELL, D. M. 1991 Separation control : Review. *J. Fluid Eng.* **6**, 5–30.
- GALLAIRE, F., MARQUILLIE, M. & EHRENSTEIN, U. 2007 Three-dimensional transverse instabilities in detached boundary-layers. *J. Fluid Mech.* **571**, 221–233.
- GASTER, M. 1966 The structure and behaviour of separation bubbles. *AGARD CP-4* pp. 813–854.
- GUNZBURGER, M. 2003 *Perspectives in Flow Control and Optimization*. SIAM.
- HÄGGMARK, C. P., BAKCHINOV, A.A. & ALFREDSSON, P.H. 2000 Experiments on a two-dimensional laminar separation bubble. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **358**, 3193–3205.
- HAMMOND, D.A. & REDEKOPP, L.G. 1998 Local and global instability properties of separation bubbles. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **17**, 145–164.
- HOEFENER, L. & NITSCHKE, W. 2007 Experimental investigations of controlled transition of a laminar separation bubble in an axisymmetric diffuser. *Exp. Fluids* **44**, 89–103.
- HÖPPFNER, J., CHEVALIER, M., BEWLEY, T.R. & HENNINGSON, D.S. 2005 State estimation in wall-bounded flow systems : Part I. laminar flows. *J. Fluid Mech.* **543**, 263–294.
-

- 
- HOF, B., LOZAR, A., AVILA, M., TU, X. & SCHNEIDER, M. 2010 Eliminating turbulence in spatially intermittent flows. *Science* **327**, 1491.
- HÖGBERG, M. & HENNINGSON, D.S. 2002 Linear optimal control applied to instabilities in spatially developing boundary layers. *J. Fluid Mech.* **470**, 151–179.
- JOSLIN, R.D., GUNZBURGER, M. D., NICOLAIDES, R. A., ERLEBACHER, G. & HUSSAINI, M. Y. 1995 A self-contained, automated methodology for optimal flow control validated for transition delay. *ICASE* **95**, 64.
- KAIKTSIS, L., KARNIADAKIS, G.E. & ORSZAG, S. A. 1996 Unsteadiness and convective instabilities in two-dimensional flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* **321**, 157–187.
- KANG, S. & CHOI, H. 2002 Suboptimal feedback control of turbulent flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* **463**, 201–227.
- KIM, J. 2003 Control of turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **15**, 1093–1105.
- KIM, J. & BEWLEY, R. 2007 A linear systems approach to flow control. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39**, 383–417.
- KUNKEL, P. & MEHRMANN, V. 2006 *Differential-Algebraic Equations*. EMS Textbooks in Mathematics.
- LANZERSTORFER, D. & KUHLMANN, H. 2012 Global stability of the two-dimensional flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* **693**, 1–27.
- LEWIS, F.L. & SYRMOS, V.L. 1995 *Optimal Control*. John Wiley & Sons.
- MARQUET, O., SIPP, D., CHOMAZ, J.-M. & JACQUIN, L. 2008 Amplifier and resonator dynamics of a low Reynolds-number recirculation bubble in a global framework. *J. Fluid Mech.*, **605**, 429–443.
- MARQUILLIE, M. 2003 Simulation numérique et étude de la stabilité d'un écoulement de couche limite décollé. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- MARQUILLIE, M. & EHRENSTEIN, U. 2002 Numerical simulation of separating boundary-layer flow. *Computers Fluids* **31**, 683–693.
-

- MARQUILLIE, M. & EHRENSTEIN, U. 2003 On the onset of nonlinear oscillations in a separating boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.* **490**, 169–188.
- MEUNIER, P. & LEWEKE, T. 2003 Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Exp. in Fluids* **35**, 408–421.
- NAYAR, O. & ORTEGA, U. 1993 Computation of selected eigenvalues of generalized eigenvalue problems. *J. Comput. Phys.* **108**, 8–14.
- PEYRET, R. 2002 *Spectral Methods for Incompressible Flows*. Springer.
- PIPONNIAU, S., DUSSAUGE, J.P., DEBIEVE, J. & DUPONT, P. 2009 A simple model for low-frequency unsteadiness in shock induced separation. *J. Fluid. Mech.* **629**, 87–108.
- POLAK, E. & RIBIERE, G. 1969 Note sur la convergence de directions conjuguées. *Rev. française Automat. Informat. Rech. Opér.* pp. 35–43.
- ROWLEY, C.R., MEZIĆ, I., BAGHERI, S., SCHLATTER, P. & HENNINGSON, D.S. 2009 Spectral analysis of nonlinear flows. *J. Fluid Mech.* **641**, 115–127.
- ROWLEY, C. R. 2005 Model reduction for fluids using balanced proper orthogonal decomposition. *Int. J. Bifurc. Chaos* **15**, 997–1013.
- ROY, C., LEWEKE, T., THOMPSON, M.C. & HOURIGAN, K. 2003 Experiments on the elliptic instability in vortex pairs with axial core flow. *J. Fluid Mech.* **677**, 383–416.
- SCHLICHTING, H. 1968 *Boundary-Layer Theory*. Springer.
- SCHMID, P.J. 2010 Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *J. Fluid Mech.* **656**, 5–28.
- SCHMID, P.J. & HENNINGSON, D.S. 2001 *Stability and transition in shear flows*. Springer.
- SINHA, S.N., GUPTA, A. K. & OBERAI, M.M. 1981 Laminar separating flow over backsteps and cavities part 1 : Backsteps. *AIAA J.* **19**, 1527–1530.
- SIROVICH, L. 1987 Turbulence and the dynamics of coherent structures. *J. Appl. Math.* **45**, 561–590.
-

- STOER, J. & BULIRSCH, R. 1992 *Introduction to Numerical Analysis*. Springer.
- THEOFILIS, V. 2011 Global linear stability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **52**, 319–352.
- TREFETHEN, N. & EMBREE, M. 2005 *Spectra and Pseudospectra : The Behaviour of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton University Press.
- VAN DYKE, M. 1982 *An Album of Fluid Motion*. The Parabolic Press.
- VON DOENHOFF, A. 1938 A preliminary investigation of boundary-layer transition along a flat plate with adverse pressure gradient. *NACA T.N.* **639**.
- WIPLIER, O. & EHRENSTEIN, U. 2000 Numerical simulation of linear and nonlinear disturbance evolution in a boundary layer with compliant walls. *J. Fluids Struct.* **14**, 157–182.
-





## Instabilités d'écoulements décollés et leur contrôle

La dynamique d'instabilité d'un écoulement laminaire décollé est étudiée expérimentalement et son contrôle par le biais de la simulation numérique. La configuration étudiée est une couche limite laminaire décollée au dessus d'une géométrie de type bosse.

Pour une certaine gamme de paramètres, l'écoulement de recirculation en aval de la bosse est caractérisé par un battement basse fréquence. L'étude expérimentale de cette dynamique a permis de retrouver les différents régimes d'instabilité mis a jour par voie numérique. Ces résultats prouvent notamment que les instabilités basse fréquence, dont l'existence a été surtout mise en évidence dans des configurations d'écoulements compressibles, sont un phénomène générique pour des bulles de recirculations allongées. Le contrôle du battement basse fréquence est ensuite étudié par voie numérique suivant deux approches complémentaires. Un asservissement en boucle fermée de la dynamique de perturbation linéaire est tout d'abord proposé. Les modes d'instabilité linéaires sont utilisés afin de construire des modèles réduits de la dynamique de perturbation. Cette réduction de modèle donne lieu à des estimateurs de faible dimension capables d'estimer la dynamique et de la contrôler. Ainsi la dynamique d'instabilité linéaire peut être supprimée en couplant le système de Navier-Stokes linéarisé avec le contrôleur.

Le contrôle de la dynamique non linéaire est ensuite étudié en utilisant une méthode d'optimisation Lagrangienne. Cette méthode permet de calculer les lois de contrôle à partir de la dynamique non linéaire des équations de Navier-Stokes. Bien que l'instabilité basse fréquence soit clairement atténuée, il semble difficile de stabiliser l'écoulement vers son état stationnaire, en utilisant quelques actionneurs de type soufflage/aspiration, localisés sur la paroi.

**Mots-clefs** : Couche limite, décollement, contrôle, réduction de modèle, optimisation Lagrangienne.

## Instabilities and control of a separated boundary-layer flow

The dynamics and control of a separated boundary-layer flow have been investigated. Separation is triggered by a bump mounted on a flat plate and the transition dynamics has been investigated experimentally.

For a certain parameter range, the recirculation region is subject to self-sustained low-frequency oscillations, and results from the numerical simulation for the same geometry are recovered. These results show that low frequency oscillations, observed mainly in compressible flow regimes, are inherent to elongated recirculation bubbles.

The control of this low-frequency instability has been investigated using modern control theory based on two complementary approaches. Feedback control of the linear perturbation dynamics is first considered. Global instability modes are used to build reduced-order estimators. This model reduction gives rise to low-dimensional compensators capable of controlling the unstable dynamics. Once coupled to the unstable linearised Navier-Stokes system, the compensator is seen to successfully control the unstable dynamics.

The control of the nonlinear dynamics is then investigated using adjoint-based optimisation procedures. This method is used to compute control laws based on a complete knowledge of the nonlinear dynamics. Although the low-frequency instability is clearly attenuated, it seems difficult to control the flow towards its steady state, using only a few blowing/suction actuators localized on the wall.

**Keywords** : Boundary-layer flow, separation, control, model reduction, Lagrangian optimisation.