

Université d'Aix-Marseille

U.F.R. Sciences

Thèse

Présentée en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université d'Aix-Marseille

Transport des Atomes et des Molécules dans les Plasmas fluctuants de Bord des Machines de Fusion

par

Abdessamad Mekkaoui

Soutenance prévue le 07 mars 2012

Roland Stamm (PIIM, Marseille)
Yannick Marandet (CNRS/PIIM, Marseille)
Detlev Reiter (Forschungszentrum Juelich IEK-4, Allemagne)
James Dufty (Université de Floride)
Daniel Vanderhaegen (CEA/DAM Bruyères-le-Châtel)
Sadruddin Benkadda (CNRS/PIIM, Marseille)

Directeur de thèse
CoDirecteur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

Notations

FDP	fonction de densité de probabilité.
V.A.	variable aléatoire.
l.p.m.	libre parcours moyen.
SOL	Scrape-off Layer.
CX	processus d'échange de charge.
Cte	une constante.
MC	Monte Carlo.
Var	variance .
Cov	fonction de variance-covariance .
$\langle\langle x_1 x_2 \dots x_p \rangle\rangle$	cumulant d'ordre p .
d.p.	définie-positive .
ν_{cx}	fréquence d'échange de charge.
ν_{io}	fréquence d'ionisation par impact électronique.
Γ	fonction gamma complète.
\mathcal{E}	opérateur espérance mathématique.
n_e	densité plasma.
$\langle x^p \rangle$	moment d'ordre p de x exactement équivalent à $\mathcal{E}(x^p)$.
\mathcal{M}^T	matrice transposée de \mathcal{M} .
v	vitesse de la particule neutre.
\mathcal{N}	densité des particules neutres.
λ_{mfp}	libre parcours moyen des neutres.
\mathcal{J}	partie imaginaire.
σ_x	écart-type de la variable x .
$\mathbb{1}$	matrice identité.
$\mathcal{N}_{\mu,\sigma}$	distribution normale d'espérance μ et d'écart type σ .
$\mathcal{B}(p, q)$	distribution Beta de paramètres p et q .
$G(\alpha, \beta)$	distribution Gamma de paramètre d'échelle α et de facteur de forme β .
χ^2	distribution Chi-deux.
R	taux de fluctuations (amplitude des fluctuations), défini par $\sigma_x / \mathcal{E} x$.

Table des matières

Introduction	1
1 Rôle et description des particules neutres dans les machines de fusion par confinement magnétique	3
1.1 Principes de la fusion par confinement magnétique	4
1.2 Recyclage et interactions plasma-paroi	5
1.3 Description des processus atomiques en jeu	6
1.3.1 Ionisation	6
1.3.2 Processus d'échange de charge (CX)	8
1.3.3 Processus de dissociation moléculaire	9
1.4 Différents niveaux de description pour les neutres	10
1.4.1 Approche fluide et modèle de diffusion	10
1.4.2 Approche cinétique : équation de transport linéaire	10
1.4.2.1 Formulations intégro-différentielle	10
1.4.2.2 Solution de <i>Smirnov</i>	13
1.4.2.3 Remarques sur le problème dépendant du temps, approximation adiabatique	18
1.5 Méthode de Monte Carlo pour les neutres, code EIRENE	18
1.6 Résumé et conclusion	20
2 Description statistique des fluctuations turbulentes dans les plasmas de bord de tokamak	21
2.1 Propriétés statistiques des fluctuations dans les plasmas de bord	22
2.1.1 Profils de densité moyenne et du taux de fluctuation	22
2.1.2 Résultats expérimentaux pour les Fonctions de Densité de Probabilités	22
2.1.3 Résultats expérimentaux/numériques pour les corrélations spatiotemporelles	24
2.2 Résultats généraux sur les fonctions de variance-covariance	25
2.2.1 Caractère défini-positif de la fonction de variance-covariance	26
2.2.2 Critère pratique permettant de vérifier le caractère défini-positif d'une fonction homogène	26
2.2.3 Exemples de fonctions définies-positives stationnaires et homogènes	27
2.2.4 La longueur de corrélation	28
2.2.5 Fonctions de variance-covariance non-homogènes	29
2.3 Distributions multivariées	30
2.3.1 Distribution de <i>Gauss</i> multivariée	31
2.3.2 Matrices de <i>Toeplitz</i> et théorème de <i>Szegö</i>	31
2.3.3 Distributions <i>Gamma</i> multivariées	33
2.3.3.1 Distribution de <i>Krishnamoorthy & Parthasarathy</i> (K-P)	33
2.3.3.2 Remarques	35
2.3.3.3 Extension au cas $\beta \in \mathbb{R}^+$	35
2.3.3.4 Distribution K-P généralisée permettant un taux de fluctuation non-homogène	36

2.3.3.5	Distribution de <i>Mathai & Moschopoulos</i> (M-M)	37
2.3.4	Distribution Log-normale multivariables	38
2.4	Echantillonnage de V.A.s corrélées	40
2.4.1	La Décomposition de <i>Cholesky</i>	41
2.4.2	Schémas autorégressifs	45
2.4.3	Développement de <i>Karhunen-Loève</i> (K-L)	46
2.5	Synthèse et conclusion	47
3	Effets des fluctuations turbulentes sur les profils de densité et les sources de particules moyennes	49
3.1	Modèles de recyclage à la paroi	49
3.1.1	Recyclage lent ($\tau_{\text{rec}} \gg \tau_{\text{turb}}$)	50
3.1.2	Recyclage rapide ($\tau_{\text{rec}} \ll \tau_{\text{turb}}$)	50
3.2	Résultats analytiques pour la distribution K-P	51
3.2.1	Calcul des valeurs moyennes des grandeurs associées aux neutres par le code EIRENE	51
3.2.2	Expression de $\langle N^p \rangle$ dans le cas du recyclage lent	51
3.2.2.1	Longueur de corrélation infinie	57
3.2.2.2	Longueur de corrélation nulle	59
3.2.3	Calcul de $\langle N \rangle$ dans le cas du recyclage rapide ($\tau_{\text{rec}} \ll \tau_{\text{turb}}$)	60
3.2.4	Source d'ionisation moyenne $\langle S \rangle$ dans le cas du recyclage lent	63
3.2.5	Calculs avec échange de charge	64
3.3	Extension aux cas où le taux de fluctuations est fonction de l'espace	66
3.3.1	Calculs avec la distribution K-P non-homogène	66
3.3.2	Calculs avec la distribution de <i>Mathai & Moschopoulos</i>	70
3.4	Cas des autres distributions	72
3.4.1	Les effets du choix de la FDP	72
3.4.2	Les effets des oscillations de la fonction de corrélation	73
3.5	Au delà de l'approximation adiabatique : effets dépendants du temps	75
3.6	Synthèse et conclusion	77
4	Modèles de transport à gros grains	81
4.1	Equation de transport effectif dans le cas du recyclage lent	82
4.2	Equation de transport effectif dans le cas du recyclage rapide	83
4.3	Développement en cumulants de $\langle N \rangle$	85
4.4	Equation de transport à gros grains dans le cas où le taux de fluctuations varie dans l'espace	90
4.5	Equation de transport à gros grains dans le cadre des autres distributions	92
4.6	Distribution de l'épaisseur optique	92
4.6.1	Approximation de la distribution de l'épaisseur optique pour la distribution K-P	92
4.6.2	Distribution de l'épaisseur optique pour la distribution Gamma M-M	94
4.7	Synthèse et conclusion	95
	Conclusion	102
	Appendices	103

A Compléments sur l'approche basée sur le développement en cumulants	105
A.1 Intégrale multiple du cumulant à n points	105
A.2 Expression des cumulants	106
A.3 Comportement asymptotique de la densité de neutres pour une statistique arbitraire	107
B Approximation par les deux premiers moments	109
B.1 Applications	110

Introduction

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation de la zone périphérique des plasmas de fusion par confinement magnétique, appelée plasma de bord. Cette modélisation est particulièrement difficile, à la fois pour des raisons géométriques et physiques, les processus d'interaction plasma-paroi et de physique atomiques étant des acteurs majeurs dans cette région. De plus cette région est fortement turbulente, avec des fluctuations de densité de type intermittent dont l'amplitude est comparable à la densité moyenne. La description de cette région fait donc intervenir une large gamme d'échelles spatiales et temporelles, qui ne peuvent pas être traitées de façon simultanée à l'heure actuelle en dépit des progrès importants de la puissance de calcul disponible. Il est donc essentiel de pouvoir développer des modèles à gros grains ('coarse grained') décrivant la dynamique du plasma aux échelles correspondant aux profils des paramètres moyens dans les machines de fusion. Les équations fluides décrivant l'évolution des valeurs moyennes de la densité du plasma, de la vitesse et des températures ioniques et électroniques dans le plasma de bord comportent ainsi un terme de transport turbulent, qui résulte du processus de lissage des échelles turbulentes. La forme de ce flux turbulent résulte à l'heure actuelle dans le meilleur des cas d'une analyse des propriétés de la turbulence, mais prend souvent la forme d'un terme de diffusion que l'on ajoute aux contributions collisionnelles. Les particules neutres (atomes, molécules), qui résultent essentiellement des processus d'interactions plasma-paroi, jouent un rôle essentiel dans cette région du plasma, en échangeant matière, quantité de mouvement et énergie avec les espèces chargées. Les neutres requièrent une description cinétique, en raison de leur libre parcours moyen qui peut être plus grand que les longueurs de gradient typiques des paramètres plasma. La méthode de Monte Carlo est la technique de choix pour traiter le transport des neutres, car elle permet de prendre en compte à la fois la complexité géométrique inhérente à la paroi des machines de fusion, et l'ensemble des processus de physique atomique pertinents dans le plasma de bord. Cependant, à l'heure actuelle l'effet de la turbulence sur le transport des neutres n'est pas pris en compte, en ce sens que les neutres évoluent dans le plasma "moyen" comme signalé pour la première fois par *Prinja* [1]. Le but de cette thèse est de développer un modèle permettant de décrire l'effet des fluctuations plasma sur le transport des neutres, et pouvant être implémenté dans les codes de modélisation de bord (comme B2-EIRENE) avec un coût raisonnable en temps de calcul.

L'ionisation dans la SOL peut modifier considérablement les écoulements moyens, avec des conséquences sur la migration des impuretés. Une pénétration accrue de neutres dans la chambre principale aurait pour effet d'augmenter l'érosion des parois à cause de l'augmentation du flux de neutres résultant des réactions d'échange de charge.

Nous adopterons une description statistique des fluctuations turbulentes, car nous sommes intéressés par des calculs de valeurs moyennes de quantités impliquant la fonction de distribution de neutres. Du point de vue technique, le problème qui nous intéresse rentre donc dans le cadre du transport linéaire dans les milieux stochastiques, qui a de nombreuses applications : transport des neutrons dans les fluides en ébullition [2], transport du rayonnement dans les atmosphères nuageuses, le milieu interstellaire [3], les tissus biologiques [4] ou les plasmas de fusion par confinement inertiel [5]. Le cas d'un mélange stochastique de deux milieux non-miscibles a fait l'objet de nombreuses études [6, 3, 2, 7, 8, 9]. Le transport dans des milieux dont les propriétés peuvent

varier de façon continue a également été considéré, essentiellement à l'aide d'une statistique de Gauss [10, 11, 12], et récemment dans le cas d'une statistique Log-normale [13].

Le chapitre 1 présente les aspects principaux des modèles utilisés pour décrire le transport des neutres dans les plasmas de fusion par confinement magnétique. Dans le chapitre 2, les mérites et les limitations de plusieurs distributions multivariées pouvant décrire les propriétés statistiques des fluctuations de densité sont examinés. Une attention particulière est portée aux restrictions qui doivent être imposées sur le choix des paramètres ajustables pour que les modèles statistiques proposés soient bien posés (réalisables) du point de vue mathématique. Les profils de la densité de neutres et de la sources d'ionisation moyens sont calculés analytiquement [14, 15, 16, 17] dans le chapitre 3, en utilisant les modèles introduits dans le chapitre 2. La sensibilité des résultats aux choix du modèle est discutée. Finalement, le chapitre 4 est consacré à l'étude des modèles de transport à gros grains (transport effectif), qui permettent d'écrire une équation de transport pour la valeur moyenne de la fonction de distribution des neutres. Les fonctions de densité de probabilité de type Gamma multivariées s'avèrent particulièrement intéressantes dans ce cadre, car elles permettent d'obtenir des modèles de transport à gros grains exacts.

Chapitre 1

Rôle et description des particules neutres dans les machines de fusion par confinement magnétique

Dans ce premier chapitre, après avoir brièvement présenté les grands principes de la fusion par confinement magnétique, nous discuterons les aspects essentiels de la physique des particules neutres (atomes, molécules) dans les plasmas de fusion. Nous commencerons par décrire le mécanisme de recyclage des ions à la paroi, qui constitue la source principale de neutres dans les machines de fusion. Ensuite, nous décrirons les processus de physique atomique et moléculaire à l'oeuvre dans les régions périphériques du plasma, puis nous discuterons du niveau de description le plus approprié à l'étude du transport des atomes et des molécules dans les plasmas de fusion. Nous montrerons qu'une description cinétique s'impose en raison des échelles spatiales en jeu. Pour conclure, nous présenterons l'équation de *Boltzmann* linéaire utilisée en pratique, ainsi qu'une solution analytique dans un cas simplifié, qui nous sera utile dans les chapitres suivants.

1.1 Principes de la fusion par confinement magnétique

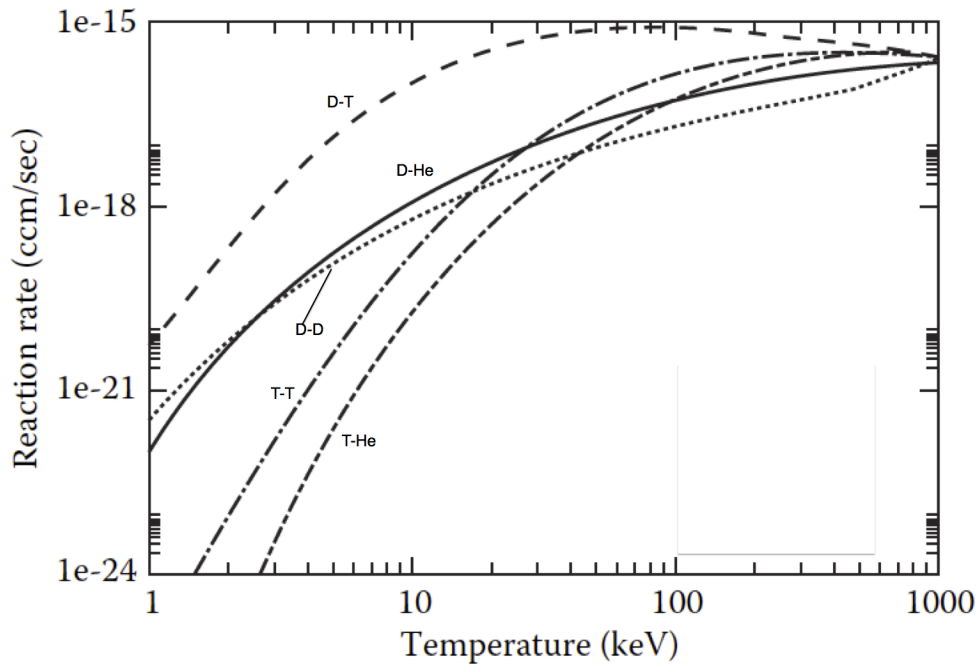
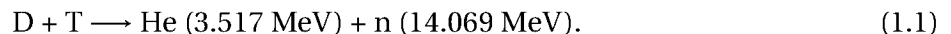


FIGURE 1.1 – Taux de réaction pour différentes réactions de fusion thermonucléaire, [18, Fig. 1.3].

Plus de 80 réactions de fusion thermonucléaire sont connues, mais celle qui possède la section efficace la plus élevée à basses énergies est la réaction deutérium-tritium (D-T) (voir Fig. 1.1),



Suivant la théorie de la relativité restreinte, l'énergie de masse libérée par cette réaction est donnée par $\Delta m = m_{D^+} + m_{T^+} - m_{He} - m_n = 3.1 \times 10^{-29} \text{ kg}$. Des énergies en principe très élevées (0.4 MeV) sont requises pour permettre aux particules de vaincre la force répulsive de *Coulomb* afin de fusionner. Fort heureusement, grâce à l'effet tunnel, une probabilité de fusion compatible avec le fonctionnement d'un réacteur est obtenue à une dizaine de keV. Pour réaliser les réactions de fusion en laboratoire, il faut donc parvenir à créer et à confiner un plasma à une température de l'ordre d'une dizaine de keV pendant un temps suffisamment long. Deux voies sont explorées pour concevoir un réacteur de fusion thermonucléaire. La première, appelée fusion inertielle, consiste à confiner un plasma très dense (de l'ordre de mille fois la densité du D-T solide) créée par laser pendant un temps très court. La seconde, qui nous intéresse ici, consiste à confiner un plasma peu dense (10^{20} m^{-3}) pendant un temps plus long ($\tau_E \sim 1\text{s}$), à l'aide de champs magnétiques. Dans ce dernier cas, appelé fusion magnétique, on tire parti du fait qu'un champ magnétique confine les particules chargées par l'intermédiaire du mouvement cyclotronique. La nécessité d'utiliser des lignes de champ magnétique fermées s'est imposée pour éliminer les pertes par transport parallèle de la matière observées dans les machines linéaires. Cependant, à cause des dérives induites par la courbure des lignes de champs, un champ magnétique toroïdal ne permet pas à lui seul d'assurer le confinement. Il est nécessaire d'introduire une transformée rotationnelle, c'est à dire une torsion dans les lignes des champs, qui leur donne un caractère hélicoïdal. Les deux principales configurations basées sur ce principe sont le stellarator et le tokamak. Dans le premier cas, la forme des bobines est calculée pour produire le champ magnétique total nécessaire au confinement. Ceci conduit à des configurations non-axisymétriques qui peuvent être très complexes en

fonction du degré d'optimisation de la géométrie. Dans la configuration tokamak, le champ toroïdal est produit par des bobines, mais la torsion des lignes de champs est introduite par le champ magnétique poloïdal, généré par un courant intense (de l'ordre de plusieurs MA) circulant dans la direction toroïdale. La configuration tokamak est retenue pour la machine internationale ITER, et un stellarator de nouvelle génération est en cours de construction en Allemagne (W7-X).

1.2 Recyclage et interactions plasma-paroi

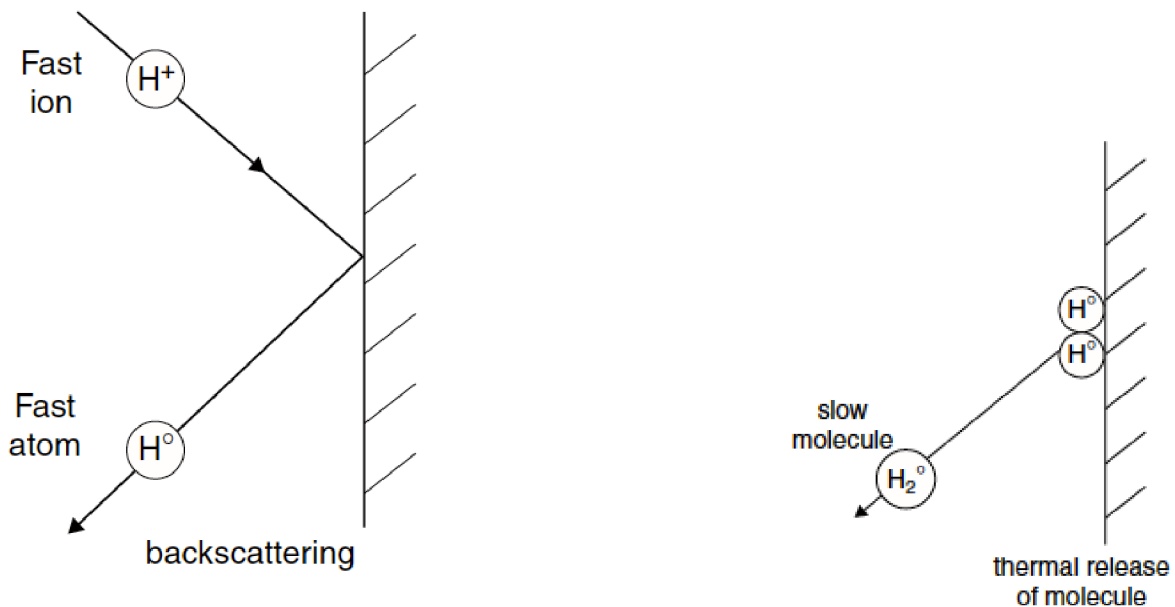
Les particules neutres (atomes et molécules) sont couplées au plasma par différents processus de physique atomique et moléculaire. En effet, les neutres échangent particules, énergie et quantité de mouvement avec les ions et les électrons du plasma via les processus d'ionisation, d'échange de charge et autres collisions élastiques et inélastiques. Par exemple, l'équation de continuité de la densité électronique peut s'écrire

$$\partial_t n_e + \nabla n_e \mathbf{v} = S, \quad (1.2)$$

où \mathbf{v} est la vitesse fluide et S représente la source des particules chargées liée au processus d'ionisation des neutres par impact électronique, donnée par

$$S = \mathcal{N} n_e \langle \sigma_{io} v_e \rangle, \quad (1.3)$$

où \mathcal{N} est la densité de neutres, σ_{io} la section efficace d'ionisation par impact électronique, et où les crochets désignent une moyenne sur la distribution de vitesse électronique¹.



(a) processus de rétro-diffusion, l'ion heurte la paroi et retourne instantanément dans le plasma sous forme de neutre.

(b) l'ion est piégé dans la paroi, il recycle sous forme de molécule.

FIGURE 1.2 – Processus de recyclage des ions à la paroi.

La paroi du tokamak joue également un rôle important dans le couplage plasma-neutres via des processus d'interaction plasma-paroi complexes. Les ions perdus par le plasma et qui viennent

1. On a supposé ici que la vitesse relative entre les électrons et les neutres pouvait être assimilée à la vitesse des électrons, i.e. $|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e| \approx |\mathbf{v}_e|$.

frapper la paroi se neutralisent, et retournent pour la plupart dans le plasma sous forme d'atomes ou de molécules. Ces particules neutres sont alors ionisées et les ions du plasma sont ainsi "recyclés". Cette source de "recyclage" est la principale source de particule dans le plasma. Les espèces neutres résultent d'un certain nombre de mécanismes élémentaires se produisant à la paroi. Le plus simple correspond à la rétro-diffusion ('backscattering', voir Fig. 1.2(a)), qui est un processus purement cinétique, au sens où il n'implique que des échanges de quantité de mouvement et d'énergie entre l'ion incident et les atomes du réseau formant la paroi. Les ions qui ne sont pas rétro-diffusés s'implantent dans la paroi ou en surface, et pour des températures de paroi usuelles ($T < 1000$ °C), recyclent essentiellement sous forme de molécules (voir Fig. 1.2(b)), avec une énergie égale à la température moyenne de la paroi (de l'ordre de quelques dizaines de meV). On verra dans la suite que le type de recyclage à la paroi est déterminant dans la spécification des conditions aux limites pour l'équation de transport des neutres.

1.3 Description des processus atomiques en jeu

Dans cette section nous exposons les principaux processus qui se produisent dans la zone la plus externe du plasma, où les deux extrémités des lignes de champs magnétiques sont connectées à la paroi. Cette région est appelée la zone à l'ombre du limiteur (ou SOL pour Scrape-off Layer, acronyme que nous utiliserons dans la suite). Les taux de réactions présentés dans cette section sont issus de la base de données de physique atomique du code EIRENE [19], qui sera décrit à la fin du chapitre.

1.3.1 Ionisation

Un atome neutre A° dans un plasma subit des collisions avec des ions et des électrons. Si l'énergie de collision est égale ou supérieure au seuil d'ionisation de l'atome neutre, l'atome peut perdre un électron. L'ionisation par les protons ne devient significative qu'à partir de températures de l'ordre de 1 KeV (Fig. 1.3, courbe noire). Dans la suite, nous ne considérerons donc que l'ionisation par impact électronique. Le taux d'ionisation s'écrit

$$\nu_{io} = n_e(\mathbf{r}) \int d\mathbf{v}' F_e(\mathbf{v}', \mathbf{r}) \sigma_{io}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \quad (1.4)$$

où σ_{io} est la section efficace d'ionisation par impact électronique, et F_e la fonction de distribution des vitesses des électrons. Si la vitesse de la particule neutre \mathbf{v} est telle que $|\mathbf{v}| \ll |\mathbf{v}'|$, on peut considérer que $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \simeq |\mathbf{v}'|$ et l'intégrale devient indépendante de \mathbf{v} (les électrons sont généralement beaucoup plus rapides que les neutres, à cause de leur faible masse). On a donc

$$\nu_{io}(n_e, T_e) = n_e \langle \sigma_{io} v' \rangle (T_e) \quad (1.5)$$

où $\langle \sigma_{io} v' \rangle (T_e)$ est le coefficient du taux d'ionisation ("rate coefficient").

Les taux d'ionisation pour les autres espèces atomiques, tracés sur la Fig. 1.4, varient de manière importante entre les différentes espèces, avec presque deux ordres de grandeur entre l'hélium et le fer par exemple. Ces différences peuvent être comprises en prenant en compte les valeurs des potentiels d'ionisation pour ces différents éléments ([20, p. 305]). Typiquement, plus le potentiel d'ionisation est bas, plus le taux d'ionisation est élevé pour des températures inférieures à une dizaine d'électron-Volts¹. Ces variations ont des conséquences importantes sur les distances de pénétration de ces différents atomes dans le plasma.

1. Les potentiels de première ionisation pour les éléments représentés sur la Fig. 1.4 sont respectivement donnés par $E_I(\text{Fe}) = 7.9$ eV, $E_I(\text{Be}) = 9.3$ eV, $E_I(\text{C}) = 11.2$ eV, $E_I(\text{N}) = 14.5$ eV, $E_I(\text{Ar}) = 15.7$ eV, $E_I(\text{Ne}) = 21.2$ eV et $E_I(\text{He}) = 24.6$ eV (données du NIST).

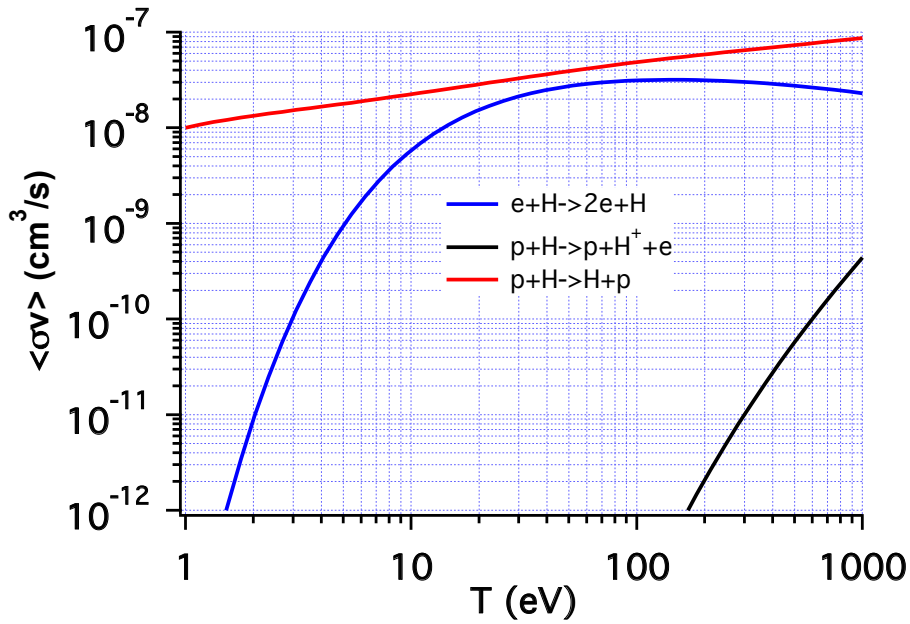


FIGURE 1.3 – Coefficient des taux de réaction $\langle \sigma v \rangle$ (cm^3/s) pour l'atome d'hydrogène (H), en fonction de la température (eV) en échelle logarithmique. Les réactions d'ionisation par impact de proton sont clairement négligeables dans les conditions typiques de la SOL. Par contre, l'échange de charge (courbe rouge) est toujours plus probable que l'ionisation (courbe bleue) pour ces conditions.

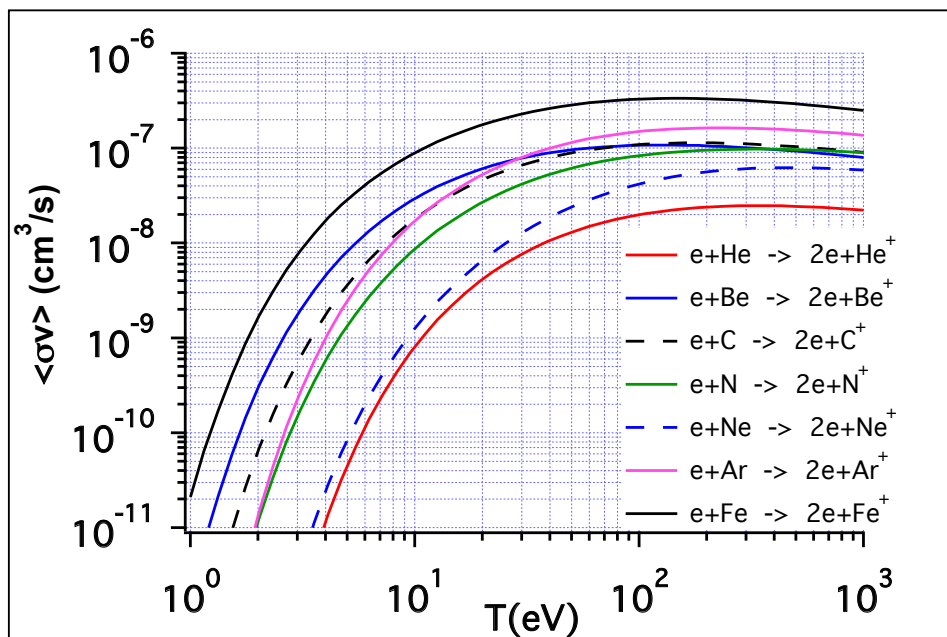


FIGURE 1.4 – Coefficient des taux d'ionisation par impact électronique pour différents atomes en fonction de la température (eV) en échelle logarithmique. Les différences observées peuvent se comprendre à l'aide des valeurs des potentiels d'ionisation pour chacun de ses éléments, qui dépend fortement de la structure électronique. En particulier, les gaz rares ont les potentiels d'ionisation les plus élevés.

1.3.2 Processus d'échange de charge (CX)

Dans un plasma, une particule neutre A° peut échanger un ou plusieurs électrons avec un ion X^{n+} , avec le bilan suivant



Ce processus est appelé échange de charge (ou transfert de charge). L'échange de charge impliquant exactement le même système initial et final (c'est à dire les mêmes espèces dans les mêmes niveaux d'énergie) est appelé échange de charge symétriquement résonnant [21]. L'exemple le plus simple d'un tel processus est

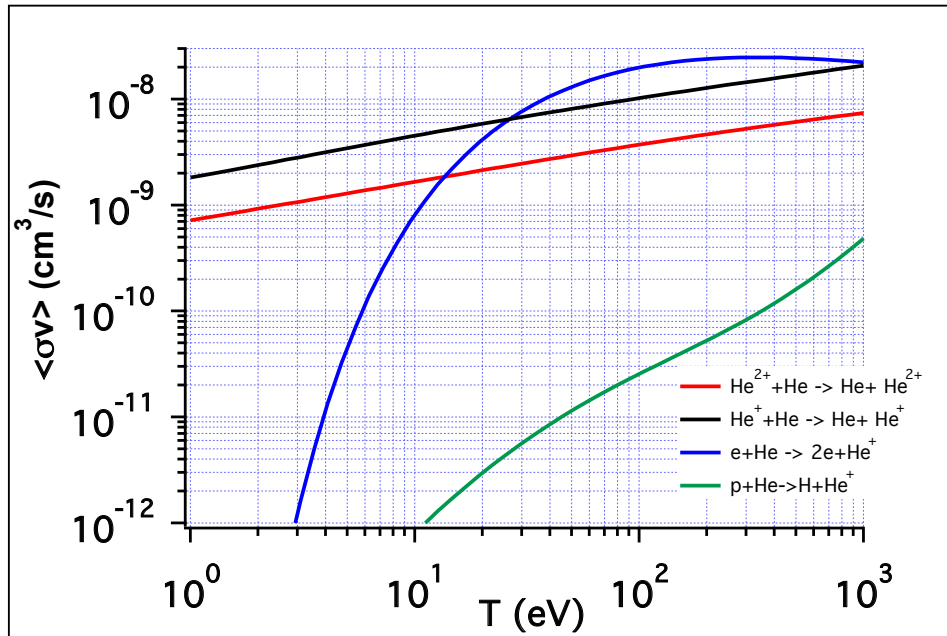


FIGURE 1.5 – Coefficient des taux d'ionisation et d'échange de charge pour l'hélium en fonction de la température (eV) en échelle logarithmique.

Le taux d'échange de charge résonnant pour l'hydrogène et ses isotopes est comparable au taux d'ionisation par impact électronique (Fig. 1.3), et doit donc être pris en compte dans les plasmas de fusion. Ce taux est défini par

$$v_{cx}(\mathbf{v}, n_i, T_i) = n_i(\mathbf{r}) \int d\mathbf{v}' F_i(\mathbf{v}', \mathbf{r}) \sigma_{cx}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|, \quad (1.8)$$

où n_i est la densité d'ions, T_i la température ionique et F_i la fonction de distribution des vitesses des ions. Notons que v_{cx} peut dépendre de manière notable de \mathbf{v} , car les vitesses des ions et des neutres peuvent être comparables. Du point de vue dynamique, le processus d'échange de charge conduit à la relaxation de la distribution de vitesse des atomes formés par dissociation moléculaire ou rétro-diffusion à la paroi vers la distribution des ions. Pour les autres espèces, les taux d'échange de charge résonnant sont significatifs (Fig. 1.5) mais il est important de préciser que les espèces autres que l'hydrogène sont présentes en faible quantité (on parle "d'impuretés"), et subissent donc principalement le processus d'ionisation par impact électronique, car la densité ionique n_i correspondante intervenant dans Eq. (1.8) est faible. En outre, les réactions d'échange de charge non-résonnantes sont complètement négligeables [22] (par exemple l'échange de charge $N + H^+ \rightarrow$

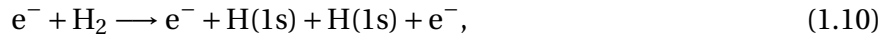
$N^+ + H$, n'est pas résonnant). Parmi les réactions d'échange de charge résonnant et intéressantes pour la physique des machines de fusion, nous pouvons citer $H(1s) + C^{6+} \rightarrow H^+ + C^{5+}(n=4)$, qui est à la base des techniques de mesures de spectroscopie active par échange de charge, permettant la détermination locale¹ de la vitesse fluide, de la température et de la concentration en carbone dans les machines actuelles.

1.3.3 Processus de dissociation moléculaire

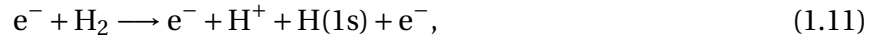
Pour la molécule d'hydrogène (Fig. 1.6), le processus d'ionisation directe, correspondant à



où l'ion moléculaire résultant est vibrationnellement excité, est caractérisé par un taux d'ionisation ν_1 comparable à celui de l'hydrogène atomique pour des températures entre 10 à 500 eV. Il existe de plus différents mécanismes de dissociation moléculaire par impact électronique, qui doivent être pris en compte car leurs taux de réaction sont du même ordre que pour l'ionisation. Le modèle de physique atomique utilisé par défaut dans EIRENE retient les deux processus suivants,



où les atomes d'hydrogène formés sont dans l'état fondamental, et



dont les taux de réaction respectifs ν_2 et ν_3 (normalisés à n_e) sont tracés sur la Fig. 1.6. On peut donc ainsi définir un taux d'ionisation effectif par $\nu_{\text{eff}} = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Dans la suite, ce taux sera utilisé lorsque nous nous intéresserons aux transport des molécules.

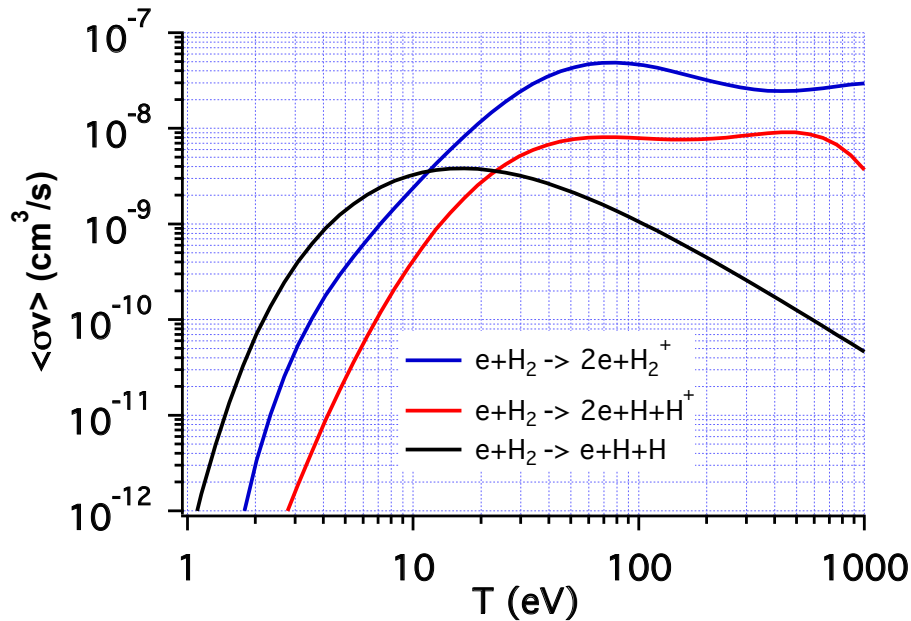


FIGURE 1.6 – Coefficient des taux de réactions $\langle \sigma v \rangle$ (cm³/s) pour la molécule d'hydrogène (H₂), en fonction de la température (eV) en échelle logarithmique, pour les processus définis par les équations Eq. (1.9) (courbe bleue), Eq. (1.10) (courbe noire) et Eq. (1.11) (courbe rouge).

1. La zone d'émission est déterminée par l'intersection entre un faisceau de neutres énergétiques et la ligne de visée. Le fait que l'ion C⁵⁺ soit formé dans un état excité garantit que l'émission reste localisée dans un petit volume.

1.4 Différents niveaux de description pour les neutres

Dans ce paragraphe, nous présentons les différentes approches qui peuvent être utilisées pour décrire les neutres dans les plasmas de fusion par confinement magnétique.

1.4.1 Approche fluide et modèle de diffusion

Les particules neutres et les molécules présentes dans le plasma de bord peuvent en principe être décrites par une approche fluide au même titre que les ions et les électrons. Ainsi, l'équation de conservation de la densité d'atomes \mathcal{N} peut s'écrire¹ [23, p. 460]

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \nabla(\mathcal{N}\mathbf{v}_0) = -n_e \mathcal{N} \langle \sigma_{io} v \rangle, \quad (1.12)$$

où $\langle \sigma_{io} v \rangle$ est le coefficient du taux d'ionisation par impact électronique, défini dans le paragraphe précédent. Cette équation fait intervenir la vitesse fluide des neutres \mathbf{v}_0 , qu'il faut déterminer. Pour cela, on peut écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui va faire apparaître un terme lié à l'énergie des neutres. Pour obtenir un système d'équations fermé, il faut donc introduire une relation de fermeture permettant par exemple d'exprimer les flux de chaleur en fonction des moments d'ordre inférieurs si l'on choisit de résoudre les équations pour la densité, la quantité de mouvement et l'énergie. La fermeture la plus simple consiste à ne conserver que l'équation pour la densité, en approximant le flux de neutres par un terme de diffusion donné par la loi de *Fick* [24, 25, 26, 27]. On obtient ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D(x) \frac{\partial \mathcal{N}(x)}{\partial x} \right] = -v_{io} \mathcal{N}(x). \quad (1.13)$$

Ce type d'approximation est justifié en particulier lorsque le taux d'échange de charge est suffisamment grand pour que le libre parcours moyen soit petit devant les longueurs de gradients (autrement dit, l'échelle caractéristique des inhomogénéités du plasma). Ceci conduit à une situation où les neutres sont localement en équilibre avec les ions. Le coefficient de diffusion est alors donné par $D(x) = v_{th}^2(x) / (v_{io} + v_{cx})$, où $v_{th}(x)$ la vitesse thermique locale.

Cependant, dans la plus grande partie du plasma le libre parcours moyen des neutres est plus grand que les longueurs de gradients, une situation pour laquelle il n'existe pas de relation de fermeture fiable. Bien que des corrections puissent être apportées aux équations fluides pour éviter l'apparition de comportement non physiques, en particulier en présence de forts gradients (limiteur de flux), une description cinétique est alors plus appropriée. Celle-ci est utilisée pour tout le plasma, car la localisation de la frontière entre les régions où l'approche fluide est utilisable et les régions purement cinétiques n'est pas connue avec précision.

1.4.2 Approche cinétique : équation de transport linéaire

1.4.2.1 Formulations intégro-différentielle

L'équation de transport pour une particule neutre s'écrit [28, 29, 30],

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}}, \quad (1.14)$$

où f est la densité de probabilité de trouver la particule neutre au point $\mathbf{r}(x, y, z)$ à l'instant t avec la vitesse v dans la direction du vecteur unitaire $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v}/v$. Le sens physique de l'équation (1.14)

1. On considère ici un régime ionisant, où la recombinaison est négligeable.

est simple, elle traduit la conservation du nombre de particules dans l'espace des phases à six dimensions (x, y, z, v_x, v_y, v_z) . Etant de charge électrique nulle, les particules neutres ne subissent pas les forces des champs électromagnétiques et le troisième terme du membre de gauche dans l'Eq. (1.14) s'annule. Le terme à droite de l'égalité rend compte des processus de collision que subit le neutre dans le plasma, dont les espèces partenaires sont essentiellement des ions et des électrons. La faible densité de neutres par rapport aux densités des particules chargées¹, fait que le temps séparant deux collisions entre deux particules neutres est largement supérieur à la durée de vie du neutre dans le plasma. Le terme de collision s'écrit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} = - \int d\mathbf{v}' \left[f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \sigma_{io} (|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| + f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \sigma_{cx} (|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \right] + Q. \quad (1.15)$$

où f_e et f_i sont respectivement les fonctions de distributions électronique et ionique, généralement supposées Maxwelliennes, σ_{io} et σ_{cx} sont les sections efficaces d'échange de charge et d'ionisation, considérées comme isotropes, et ne dépendent donc que du module de la différence des vecteurs vitesses. Le terme Q , dont l'expression sera précisée dans la suite, est la source de neutres résultant des réactions d'échange de charge. On parle alors d'équation de *Boltzmann* linéaire, car le terme de collision ne contient que des produits du type $f f_i$ et $f f_e$ (et non $f f$). L'équation (1.15) n'est justifiée que dans l'approximation des collisions binaires et dans le cadre de l'hypothèse du chaos moléculaire, qui suppose que les vitesses des particules impliquées dans une collision sont indépendantes [31, 32]. Ainsi le nombre de paires de particules dans l'élément de volume $d\mathbf{r}$ autour de \mathbf{r} avec les vitesses respectives \mathbf{v} et \mathbf{v}' est $\left[f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \right] \left[f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{r} d\mathbf{v}' \right]$. La justification de l'hypothèse du chaos moléculaire est détaillée par *Prigogine* [33, p. 90].

La première contribution dans le membre de droite de l'équation (1.15) est liée à l'ionisation par impact électronique, et la seconde comptabilise les neutres de vitesse \mathbf{v} qui disparaissent par échange de charge, avec un taux ν_{cx} donné par l'Eq. (1.8). Enfin, Q rend compte des neutres qui naissent par échange de charge au point \mathbf{r} avec la vitesse $\mathbf{v}\Omega$, et s'écrit

$$Q = +n_e(\mathbf{r}) F_i(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v}' f(\mathbf{v}', \mathbf{r}) \sigma_{cx} (|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|, \quad (1.16)$$

où l'on a considéré un plasma d'hydrogène pur ($n_e = n_i$). Ainsi, l'équation cinétique pour la fonction de distribution des neutres s'écrit, en régime ionisant,

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, v, \Omega, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, v, \Omega, t) + (\nu_{io} + \nu_{cx}) f(\mathbf{r}, v, \Omega, t) = Q(\mathbf{r}, v, \Omega, t). \quad (1.17)$$

où il est important de noter que Q est une fonctionnelle linéaire de f . Cette équation peut être mise sous forme intégrale, par exemple en introduisant le changement de variable $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - s\Omega$ (voir Fig. 1.7), qui conduit à

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right] f(\mathbf{r} - s\Omega, v, t - s/v, \Omega) = -v \frac{df}{ds}(\mathbf{r} - s\Omega, v, t - s/v, \Omega). \quad (1.18)$$

En utilisant le résultat précédent, Eq. (1.17) devient

$$-v \frac{df}{ds}(\mathbf{r} - s\Omega, v, t - s/v, \Omega) + [\mathbf{v} f](\mathbf{r} - s\Omega, v, t - s/v, \Omega) = Q(\mathbf{r} - s\Omega, v, t - s/v, \Omega), \quad (1.19)$$

1. Ceci peut ne pas être le cas dans le divertor, partie de la machine dans laquelle on cherche à localiser les interactions plasma-paroi et où le recyclage est le plus intense.

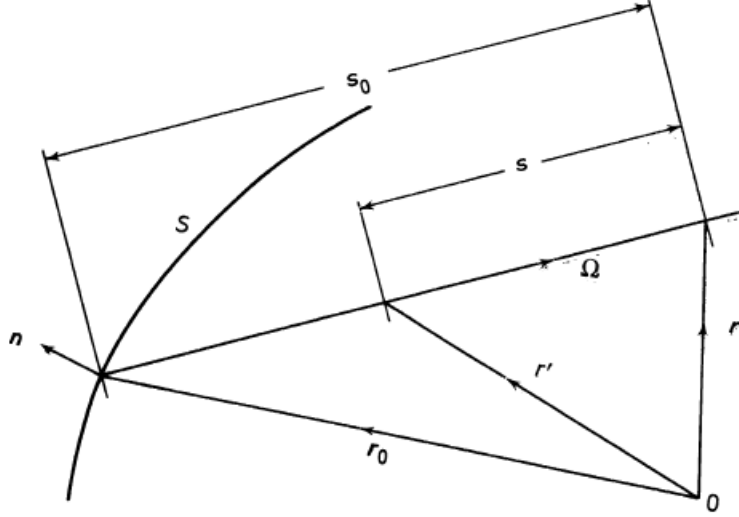


FIGURE 1.7 – Schéma de la trajectoire du neutre [28, Fig. 2.3], le plasma est contenu dans le demi-plan entre la surface S et l'infini.

où s est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire du neutre¹, et $v = v_{io} + v_{cx}$. En intégrant sur s , on obtient la forme intégrale de l'équation de Boltzmann²

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) = & f(\mathbf{r} - s_0 \boldsymbol{\Omega}, t - s_0/v) \exp \left[-1/v \int_0^{s_0} ds v(\mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}, t - s/v) \right] \\
 & + f(\mathbf{r} - vt \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}, 0) \exp \left[- \int_0^t d\tau v(\mathbf{r} - v\tau \boldsymbol{\Omega}, t - \tau) \right] \\
 & + \frac{1}{v} \int_0^{\min(s_0, vt)} ds' Q(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}, t - s'/v) \exp \left[-1/v \int_0^{s'} ds'' v(\mathbf{r} - s'' \boldsymbol{\Omega}, t - s''/v) ds'' \right]. \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

L'équation (1.20) n'est pas une solution car Q est une fonctionnelle de f , i.e. $Q = Q[f]$. Il est cependant possible d'écrire une relation de fermeture pour Q en multipliant Eq. (1.20) par $f_i \sigma_{cx} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$, puis en intégrant sur \mathbf{v}' pour obtenir

$$\begin{aligned}
 Q(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}) = & f(\mathbf{r} - s_0 \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) f_i(v, \mathbf{r}) \int d\mathbf{v}' \sigma_{cx} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}| \exp \left[1/v' \int_{s_0}^0 ds' v(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}) ds' \right] \\
 & + f_i(v, \mathbf{r}) \int d\mathbf{v}' \frac{\sigma_{cx} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|}{v'} \int_0^{\min(s_0, vt)} ds' Q(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}) \exp \left[1/v' \int_{s'}^0 ds'' v(\mathbf{r} - s'' \boldsymbol{\Omega}) ds'' \right], \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

où l'on a considéré une condition initiale nulle ($f(t=0) = 0$). Les équations (1.20) et (1.21) forment un système d'équations couplées qui peut être résolu numériquement de manière itérative e.g. [34, 35, 36]. Cependant, la tendance actuelle dans les plasmas de fusion, au vu de la complexité à la fois des processus atomiques en jeu et de la géométrie, est de recourir à une méthode de Monte Carlo. La forme intégrale donnée par Eq. (1.20) se prête en effet parfaitement à une interprétation en termes de processus stochastiques. Une analyse élémentaire de cette équation montre que les neutres de vitesse v dans la direction $\boldsymbol{\Omega}$ en \mathbf{r} à l'instant t proviennent de trois contributions,

1. Contrairement aux particules chargées, la trajectoire du neutre entre deux collisions successives est droite.

2. Celle-ci peut également être obtenue en utilisant la transformée de Laplace [28, p. 18]. La méthode présentée ici correspond à la méthode des caractéristiques.

1. les neutres qui à l'instant $t - s_0/v$ étaient en $\mathbf{r} - s_0\mathbf{\Omega}$ (à la surface) et atteignent le point \mathbf{r} sans subir de collisions.
2. les neutres qui à l'instant $t = 0$ étaient en $\mathbf{r} - vt\mathbf{\Omega}$ et ne subissent pas de collisions sur une distance vt .
3. les neutres issus du processus d'échange de charge en $\mathbf{r} - s'\mathbf{\Omega}$ à l'instant $t - s'/v$ avec $0 \leq s' \leq \min(s_0, vt)$, et parcourant la distance s' dans la direction $\mathbf{\Omega}$ sans subir de collisions.

Les termes exponentiels peuvent être interprétés comme les probabilités de ne pas subir de collision sur une distance s_0 (ou s'), ou pendant un temps t (pour le terme correspondant à la condition initiale). L'intégrale dans l'argument de l'exponentielle est appelée l'épaisseur optique (par analogie avec la quantité jouant le même rôle dans l'étude du transport du rayonnement).

1.4.2.2 Solution de Smirnov

Dans la grande majorité des cas d'intérêt pratiques, l'équation de transport linéaire ne peut être résolue analytiquement. Pour affiner la compréhension physique du problème, il est cependant très utile de disposer de solutions analytiques dans des cas simplifiés. Dans ce paragraphe, nous présentons la solution de *Smirnov*, qui donne la densité de particules neutres à l'état stationnaire en retenant les processus d'ionisation par impact électronique et d'échange de charge dans une géométrie unidimensionnelle. Les hypothèses nécessaires à l'obtention de cette solution sont les suivantes :

1. Les atomes issus du recyclage sont mono-énergétique à la vitesse v , et leur flux total est donné par Γ_0 (en incluant la contribution liée à la réflexion à la paroi).
2. un plasma isotherme, aussi bien pour les électrons que pour les ions.
3. une distribution en vitesses des ions donnée par la combinaison linéaire de deux distributions de *Dirac*,

$$F_i(v) = \frac{1}{2} \left[\delta(v - v_i) + \delta(v + v_i) \right]. \quad (1.22)$$

Sous ces hypothèses, la densité de neutres est solution de l'équation intégrale suivante (voir *Rehker & Wobig* [37]),

$$\mathcal{N}(z) = \frac{\Lambda}{2} \int_0^\infty dz' e^{-|z'-z|} \mathcal{N}(z') + \frac{\Gamma_0}{v} e^{-z/u_0}, \quad (1.23)$$

où $u_0 = v/v_i$, et où z est l'épaisseur optique définie par

$$z = \int_0^x \frac{v(s)}{v_i} ds. \quad (1.24)$$

La quantité Λ mesure l'importance relative des taux de réactions d'ionisation et d'échange de charge, et est définie par

$$\Lambda = v_{cx}/(v_{cx} + v_{io}). \quad (1.25)$$

L'équation (1.23) porte le nom d'équation de *Wiener-Hopf* avec un noyau exponentiel¹. Le second terme du membre de droite de l'Eq. (1.23) évoque un produit de convolution, ce qui suggère de résoudre l'équation dans l'espace de *Fourier*. Cependant, \mathcal{N} n'est définie que sur le demi-axe positif, ce qui rend l'utilisation des techniques usuelles de la transformée de *Fourier* délicate. Il

1. Cette équation apparaît naturellement dans le calcul de minimisation de l'erreur dans la théorie de la prédiction de V.A.s [38]. Le noyau exponentiel est aussi appelé noyau de *Lalesco* [39].

est donc intéressant de présenter la méthode de *Wiener-Hopf* [40, 41, 42], utilisée par *Smirnov*¹ pour parvenir à la solution de l'Eq. (1.23)². Le noyau $\exp(-|z|)$ est défini sur \mathbb{R} et permet d'étendre l'équation (1.23) sur le demi-axe négatif en définissant la fonction g , nulle pour $z > 0$, et telle que,

$$g(z) = \frac{\Lambda}{2} \int_0^{\infty} dz' e^{-|z-z'|} \mathcal{N}(z'), \quad z < 0. \quad (1.26)$$

On réécrit Eq. (1.23) comme suit

$$\frac{\Lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{-|z-z'|} \mathcal{N}_+(z') = \mathcal{N}_+(z) + g_-(z) - \frac{\Gamma_0}{\nu} F_+(z), \quad (1.27)$$

où les indices '+' et '-' désignent le domaine sur lequel les fonctions sont non nulles, et $F_+(z) = e^{-z/u_0}$. On applique maintenant la transformée de *Fourier*³ à l'équation précédente, ce qui conduit à

$$\frac{\Lambda}{2} \hat{\mathcal{N}}_+(\omega) \hat{K}(\omega) = \hat{\mathcal{N}}_+(\omega) + \hat{g}_-(\omega) - \frac{\Gamma_0}{\nu} \hat{F}_+(\omega), \quad (1.28)$$

où

$$\hat{F}_+(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{i\omega z} e^{-z/u_0} dz = \frac{i}{\omega + i/u_0}, \quad (1.29)$$

$$\hat{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega z} e^{-|z|} dz = \frac{2}{\omega^2 + 1}, \quad (1.30)$$

et

$$\hat{\mathcal{N}}_+(\omega) = \int_0^{+\infty} \mathcal{N}(z) e^{i\omega z} dz. \quad (1.31)$$

Notons que \hat{F}_+ est analytique dans le demi-plan $\mathcal{J}(\omega) > -1/u_0$. La méthode de *Wiener-Hopf* consiste premièrement en la factorisation suivante

$$1 - \frac{\Lambda}{2} \hat{K}(\omega) = \frac{\hat{K}^+(\omega)}{\hat{K}^-(\omega)}, \quad (1.32)$$

où

$$\hat{K}^+(\omega) = \frac{\omega + i\sqrt{1-\Lambda}}{\omega + i} \quad \text{et} \quad \hat{K}^-(\omega) = \frac{\omega - i}{\omega - i\sqrt{1-\Lambda}}. \quad (1.33)$$

La fonction \hat{K}^+ (respectivement \hat{K}^-) est analytique dans le demi-plan $\mathcal{J}(\omega) > -1$ (respectivement $\mathcal{J}(\omega) < \sqrt{1-\Lambda}$)⁴. La transformée de *Fourier* de l'Eq. (1.27) peut donc se réécrire

$$\hat{\mathcal{N}}_+(\omega) \hat{K}^+(\omega) = \frac{\Gamma_0}{\nu} \hat{F}_+(\omega) \hat{K}^-(\omega) - \hat{g}_-(\omega) \hat{K}^-(\omega). \quad (1.34)$$

La seconde étape consiste à décomposer le produit $\hat{F}_+ \hat{K}^-$ en une somme

$$\hat{F}_+(\omega) \hat{K}^-(\omega) = \hat{W}^+(\omega) + \hat{W}^-(\omega), \quad (1.35)$$

1. Les détails du calcul de *Smirnov* ne sont disponibles qu'en langue allemande dans [43].

2. Il existe d'autres méthodes similaires, dites de *Carleman* ou *Krein* pour résoudre ce type équation [44].

3. On utilise la convention suivante :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega z} f(z) dz.$$

4. Les exposants '+' et '-' ne signifient donc pas que les fonctions \hat{K}^+ et \hat{K}^- sont nulles pour $z > 0$ et $z < 0$, mais indiquent dans quels demi-plans ces fonctions sont analytiques.

où

$$\hat{W}^-(\omega) = \frac{a}{\omega - i\sqrt{1-\Lambda}}, \quad (1.36)$$

est une fonction analytique dans le demi-plan $\mathcal{J}(\omega) < \sqrt{1-\Lambda}$, et où

$$W^+(\omega) = \frac{b}{\omega + i/u_0}, \quad (1.37)$$

est analytique dans le demi-plan $\mathcal{J}(\omega) > -1/u_0$. a et b sont deux constantes données par

$$a = -iu_0 \frac{1 - \sqrt{1-\Lambda}}{1 + u_0\sqrt{1-\Lambda}} \quad \text{et} \quad b = i \frac{1 + u_0}{1 + u_0\sqrt{1-\Lambda}}. \quad (1.38)$$

On a alors

$$\hat{N}_+(\omega)\hat{K}^+(\omega) - \frac{\Gamma_0}{\nu}\hat{W}^+(\omega) = \frac{\Gamma_0}{\nu}\hat{W}^-(\omega) - \hat{g}_-(\omega)\hat{K}^-(\omega). \quad (1.39)$$

La limite du terme de droite dans Eq. (1.39) est 0 pour $\mathcal{J}(\omega) \rightarrow \infty$, alors que le terme de gauche tend vers 0 lorsque $\mathcal{J}(\omega) \rightarrow -\infty$. Le théorème de *Liouville* [40] impose alors que ces deux termes soient identiques à zéro, d'où $\hat{N}_+ = \frac{\Gamma_0}{\nu}\hat{W}^+/\hat{K}^+$. Par transformée de *Fourier* inverse, on a finalement

$$\mathcal{N}(z) = \frac{\Gamma_0}{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{N}_+(\omega) e^{-iz\omega} \quad (1.40)$$

$$= -\frac{\Gamma_0}{\nu} \frac{i}{2\pi} \frac{(1+u_0)}{(1+u_0\sqrt{1-\Lambda})} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{(\omega+i)}{(\omega+i/u_0)(\omega+i\sqrt{1-\Lambda})} e^{-iz\omega}. \quad (1.41)$$

On calcule cette intégrale en utilisant le théorème des résidus, soit pour $\sqrt{1-\Lambda} \neq 1/u_0$,

$$\mathcal{N}(z) = A_1 \exp(-z/u_0) + A_2 \exp(-\sqrt{1-\Lambda}z), \quad (1.42)$$

où

$$A_1 = \frac{\Gamma_0}{\nu} \frac{1-u_0^2}{1-u_0^2(1-\Lambda)}, \quad (1.43)$$

et

$$A_2 = \frac{\Gamma_0}{\nu} \frac{u_0}{2\sqrt{1-\Lambda}} \left[\frac{\Lambda}{1-u_0\sqrt{1-\Lambda}} - \frac{(1-\sqrt{1-\Lambda})^2}{1+u_0\sqrt{1-\Lambda}} \right]. \quad (1.44)$$

Dans le cas où $\sqrt{1-\Lambda} = 1/u_0$ (pôle double), on obtient de même

$$\mathcal{N}(z) = \frac{\Gamma_0}{\nu} \frac{1+u_0}{2} \left(1 - \frac{1-u_0}{u_0} z \right) \exp(-z/u_0). \quad (1.45)$$

L'interprétation physique de la solution de *Smirnov* est plus subtile qu'elle ne peut le sembler à première vue, car les coefficients A_1 et A_2 peuvent être négatifs. De manière générale, on ne peut donc pas interpréter la solution en termes de deux populations de neutres avec des vitesses différentes, l'une correspondant aux neutres n'ayant pas subi d'échange de charge ("première génération") et l'autre aux neutres ayant subi un échange de charge. Le signe des coefficients A_1 et A_2 dans le plan (u_0, Λ) est donné dans les Figs. 1.8(a) et 1.8(b). Le changement de signe de A_2 se

produit le long de la courbe $u_0 = 1/\sqrt{1-\Lambda}$. Pour $u_0 < 1$, A_1 et A_2 sont positifs, alors que $A_1 A_2 < 0$ pour $u_0 > 1$.

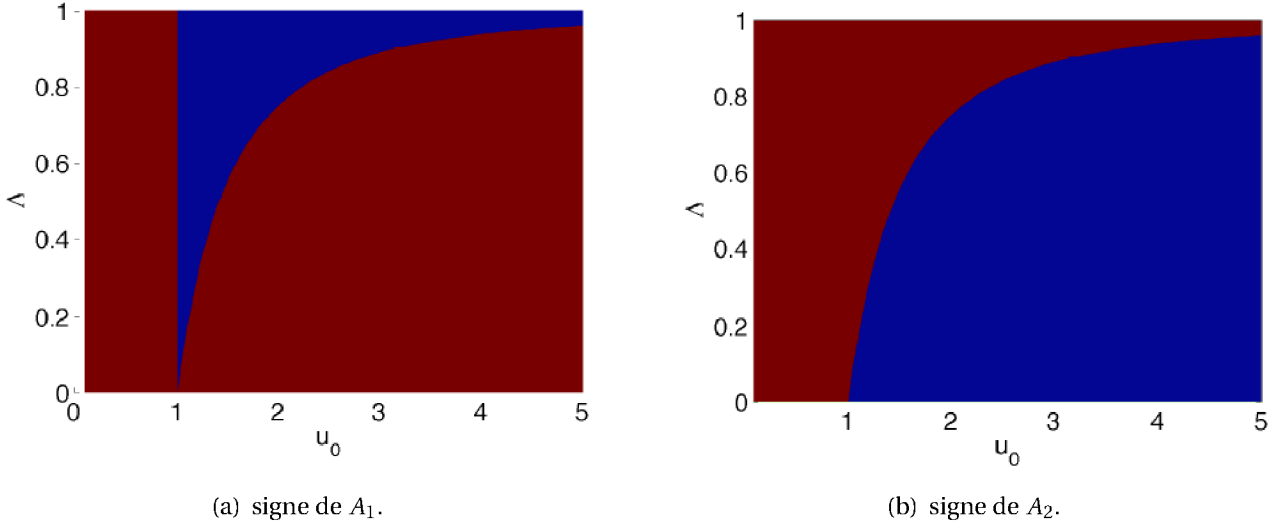


FIGURE 1.8 – Signes des coefficients A_1 et A_2 , le rouge correspond au signe positif et le bleu au signe négatif.

Les cas limites correspondants à $\Lambda \rightarrow 0$ (cas sans échange de charge), et $\Lambda \rightarrow 1$ (cas sans ionisation) sont intéressants à étudier. Le premier cas correspond à $A_1 = \Gamma_0/\nu$ et $A_2 = 0$. Si la densité plasma est constante, la densité des neutres décroît alors exponentiellement avec sur une échelle caractéristique égale au libre parcours moyen d’ionisation $\lambda_{\text{mfp}} = \nu/\nu_{i0}$ (i.e. $\mathcal{N}(x) \propto \exp(-x/\lambda_{\text{mfp}})$). Dans le cas opposé où l’échange de charge domine, la décroissance du second terme dans Eq. (1.42) est aussi exponentielle, mais avec une échelle caractéristique $\lambda = \nu_i/\sqrt{\nu_{i0}\nu_{cx}}$, et la densité de neutres suit une équation de diffusion dont le coefficient de diffusion est $D = \nu_i^2/\nu_{cx}$, en accord avec l’image d’une marche aléatoire. Ceci justifie dans un cas simple le modèle de diffusion pour les neutres introduit dans le paragraphe 1.4.1.

Le cas $u_0 = 1$, pour lequel le module de la vitesse des neutres ($|\nu|$) issus du recyclage est égal au module de la vitesse des ions $|\nu_i|$, est également intéressant car il correspond à $A_1 = 0$. Le profil de densité des neutres peut alors être écrit en fonction du taux d’ionisation et d’une vitesse effective $\nu_{\text{eff}} = \nu\sqrt{1-\Lambda}$ inférieure à ν , sous la forme

$$\mathcal{N}(x) = A_2 \exp\left(-\frac{1}{\nu_{\text{eff}}} \int_0^x ds \nu_{i0}(s)\right). \quad (1.46)$$

Tout se passe donc dans ce cas comme si les neutres étaient émis à la vitesse ν_{eff} en l’absence d’échange de charge. Le fait que $\nu_{\text{eff}} < \nu$ traduit le fait que la vitesse d’un neutre après échange de charge est $\pm \nu_i$.

En pratique, dans les plasmas de fusion par confinement magnétique, on a $0.5 < \Lambda < 0.9$ pour les isotopes de l’hydrogène dans le régime ionisant, d’après la Fig. 1.3. En ce qui concerne le paramètre u_0 , on se trouve souvent dans l’une des deux situations décrites dans la suite. La première correspond à un flux de neutres peu énergétiques, car provenant de réactions de dissociation moléculaires (voir Fig. 1.2(b)) pour lequel $u_0 \ll 1$. Dans ce cas, tracé sur la Fig. 1.9 pour différentes valeurs de Λ , on observe tout d’abord une décroissance rapide du profil de la densité de neutres, suivie par une décroissance lente due aux grand libre parcours moyen acquis par les neutres suite aux échanges de charge avec les ions. La deuxième situation correspond à un flux de neutres énergétiques issu de la rétro-diffusion sur la paroi après accélération dans la gaine (voir Fig. 1.2(a)),

correspondant à $u_0 > 1$ (Fig. 1.10). Dans ce cas, le profil de densité de neutres peut devenir non-monotone. Dans les deux cas, loin de la paroi, le libre parcours moyen effectif d'ionisation est donné par $\lambda_{\text{eff}} = v_{\text{eff}}/v_{i0}$.

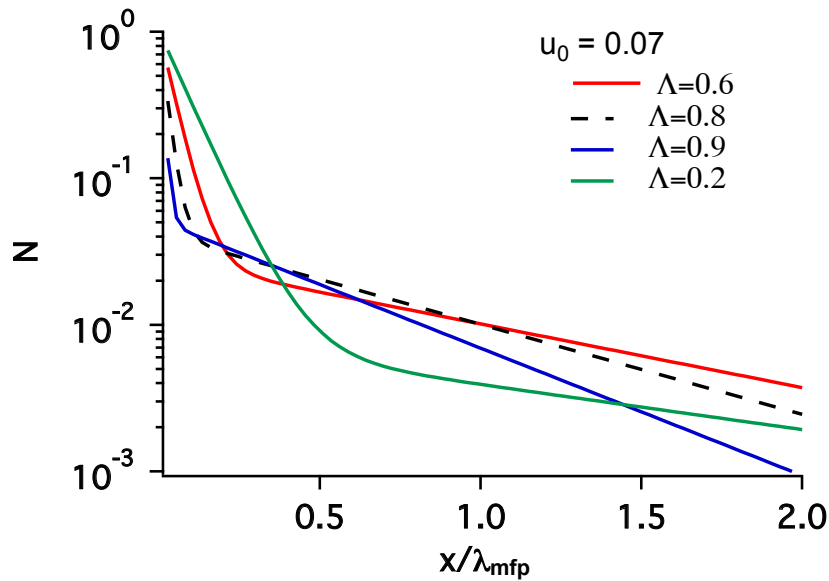


FIGURE 1.9 – Profil de la densité des neutres en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen initial, i.e. $\lambda_{\text{mfp}} = v/v_{i0}$, pour $u_0 = 0.07$ et $\Lambda = 0.2, 0.6, 0.8$ et 0.9 . On distingue deux régimes, l'un représente une forte décroissance de la population des neutres et un deuxième régime où la décroissance est plus douce suite aux processus d'échange de charge suivi d'une augmentation du l.p.m.

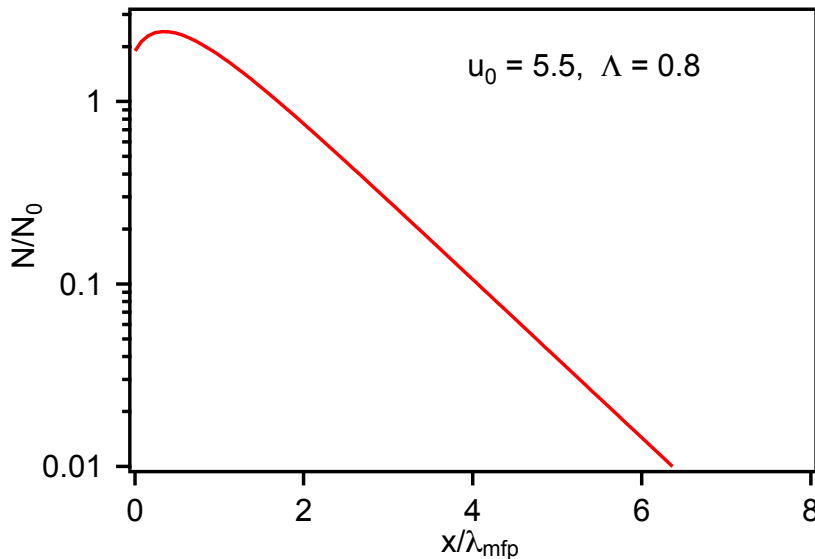


FIGURE 1.10 – Profil de la densité des neutres en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen initial, i.e. $\lambda_{\text{mfp}} = v/v_{i0}$, pour $u_0 = 5.5$ et $\Lambda = 0.8$. On distingue deux régimes, l'un représente une forte concentration de neutres près de la paroi causée par un grand l.p.m. et une partie des neutres qui retournent près de la paroi par échange de charge. Le deuxième régime traduit simplement la forte décroissance des neutres due au petit l.p.m. acquis suite aux échanges de charges avec les ions.

1.4.2.3 Remarques sur le problème dépendant du temps, approximation adiabatique

Pour discuter le problème dépendant du temps, il est utile de distinguer deux situations : la première dans laquelle les paramètres plasma sont constants au cours du temps, et la seconde dans laquelle les paramètres plasma dépendent du temps. Dans le premier cas, les taux ν_{io} et ν_{cx} sont indépendants du temps, et le profil de la densité de neutres atteint son régime stationnaire après quelques $\tau_{\text{relax}} = (\nu_{io} + \nu_{cx})^{-1}$. Autrement dit, la contribution de la condition initiale (second terme du membre de droite dans l'Eq. (1.20) devient négligeable en comparaison des contributions des sources surfaciques ou volumiques. Pour $t \gg \tau_{\text{relax}}$, on peut donc se contenter de traiter le problème stationnaire, dont la solution formelle¹ est

$$f(\mathbf{r}, \nu, \Omega) = f(\mathbf{r} - s_0 \Omega) \exp \left[-1/\nu \int_0^{s_0} ds \nu(\mathbf{r} - s \Omega) \right] + \frac{1}{\nu} \int_0^{s_0} ds' Q(\mathbf{r} - s' \Omega) \exp \left[-1/\nu \int_0^{s'} ds'' \nu(\mathbf{r} - s'' \Omega) \right]. \quad (1.47)$$

Dans le cas où les paramètres plasma, et donc les taux, sont des fonctions du temps, la dépendance temporelle subsiste clairement dans l'équation intégrale Eq. (1.20) même après relaxation de la condition initiale. Cependant, si l'évolution temporelle des taux est suffisamment lente pour que ces derniers varient peu à l'échelle du temps de vie d'un neutre, donné typiquement par ν_{io}^{-1} , il est possible d'utiliser une approximation de type adiabatique. Cette dernière consiste à négliger le terme de retard ($-s/\nu$) dans la dépendance temporelle des taux dans les termes d'épaisseur optique, ainsi que dans l'expression de Q , ce qui conduit à une solution du type

$$f_{\text{adia}}(\mathbf{r}, \nu \Omega, t) = f(\mathbf{r} - s_0 \Omega, t) \exp \left[-1/\nu \int_0^{s_0} ds \nu(\mathbf{r} - s \Omega, t) \right] + \frac{1}{\nu} \int_0^{\min(s_0, \nu t)} ds' Q(\mathbf{r} - s' \Omega, t) \exp \left[-1/\nu \int_0^{s'} ds'' \nu(\mathbf{r} - s'' \Omega, t) \right]. \quad (1.48)$$

Pour obtenir cette équation, nous avons de plus supposé que les échelles de temps de variation du flux à la paroi (lié à $f(\mathbf{r} - s_0 \Omega, t)$) étaient similaires à celles de ν . En pratique, la condition de validité de l'approximation adiabatique peut s'écrire

$$\frac{\nu}{|\partial_t \nu|} \ll \nu^{-1}. \quad (1.49)$$

Ceci revient à dire que le plasma n'a pas le temps d'évoluer pendant la durée de vie d'un neutre. Cette approximation nous sera d'une grande utilité dans la suite, bien qu'elle puisse être relaxée sans grande difficulté dans les développements que nous présenterons.

1.5 Méthode de Monte Carlo pour les neutres, code EIRENE

Ce paragraphe donne les grandes lignes du principe de fonctionnement des codes Monte Carlo (MC) tels que EIRENE [19]. L'approche de type MC est à l'heure actuelle la plus développée dans les plasmas de fusion, car elle se prête facilement à toutes les géométries des parois des tokamaks et permet de tenir compte d'un nombre arbitraire de processus atomiques. La méthode de Monte Carlo permet de plus de résoudre un problème cinétique à 6 dimensions (voir 7 dimensions, dans les cas dépendants du temps) sans calculer la fonction de distribution des neutres. En d'autres termes, on calcule directement les quantités d'intérêt (densité, source d'ionisation, ...) en tenant

1. Rappelons que Q est une fonctionnelle de f .

compte de tous les effets cinétiques. Cependant, un calcul Monte Carlo ne fournit qu'une estimation statistique de la quantité que l'on cherche à calculer. Autrement dit, le résultat est affecté d'un bruit statistique proportionnel à l'inverse de la racine carrée du coût en puissance de calcul. Ceci pose des problèmes spécifiques lorsque l'on utilise un code MC couplé de manière itérative à un code fluide, comme c'est le cas de la suite B2-EIRENE (ou SOLPS, pour Scrape-Off Layer Plasma Simulator). Dans tous les cas, les paramètres plasma sont donnés dans un ensemble de cellules correspondant à une discrétisation spatiale du domaine étudié.

L'essence de la méthode Monte Carlo est de considérer la quantité à calculer comme la valeur moyenne d'un processus stochastique, et ensuite d'échantillonner des réalisations de ce processus stochastique numériquement afin de calculer la valeur moyenne désirée. La description du transport des neutres en terme d'équation intégrale a, comme nous l'avons déjà signalé, une interprétation probabiliste. Celle-ci permet de construire naturellement un processus stochastique dit "analogue", i.e. dont les réalisations ont une correspondance claire avec la physique décrite¹. Un exemple concret est fourni sur la Fig. 1.11, où les trajectoires simulées correspondent aux trajectoires physiques, du moins dans le cadre du modèle considéré. La quantité dont la valeur moyenne est égale à la grandeur physique calculée est appelée l' "estimateur".

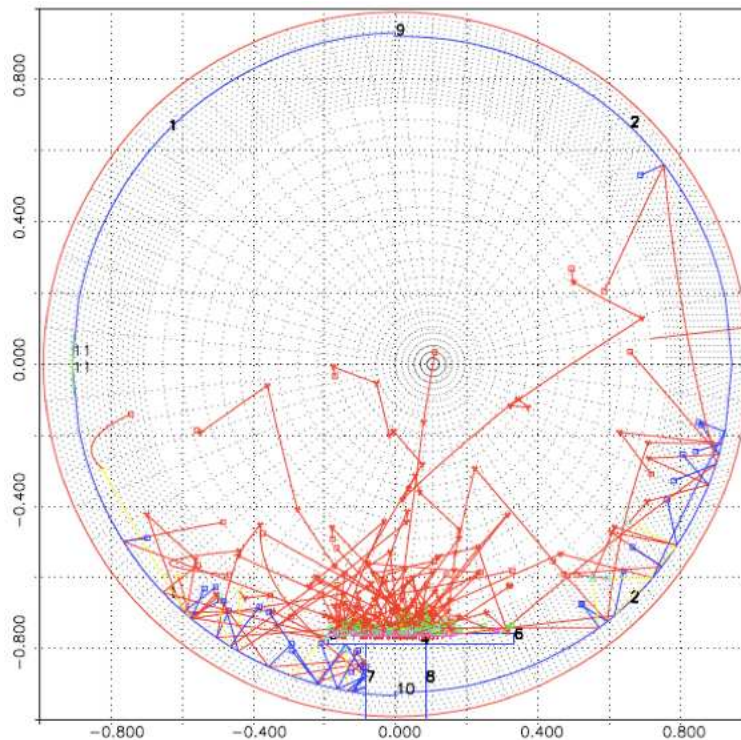


FIGURE 1.11 – Quelques histoires correspondant aux trajectoires des particules neutres simulées par EIRENE dans une géométrie simplifiée de type Tore Supra. La source principale de neutres se situe au niveau du Limiteur Toroïdal Pompé, en bas de la machine.

Il existe différents types d'estimateurs, qui sont plus ou moins adaptés à une situation donnée. EIRENE utilise un estimateur dit de "longueur de parcours" ("tracklength estimator"), qui mesure la distance parcourue par la particule dans une cellule spatiale donnée. Dans la suite, nous allons schématiser brièvement le fonctionnement d'un code comme EIRENE. Pour un neutre issu d'une source de recyclage, on commence par échantillonner un point de départ en utilisant la distribu-

1. Dans certains cas, il peut être intéressant d'utiliser des modèles "non-analogues" pour gagner en performance. Par exemple, on peut utiliser la technique dite de la "roulette russe", qui consiste arrêter avec une certaine probabilité la trajectoire d'une particule piégée dans une zone peu intéressante du domaine de simulation.

tion cumulative de flux plasma sur les différents éléments de la paroi. Ensuite, on échantillonne la vitesse de cette particule (module et direction), en fonction des paramètres plasma locaux et du modèle d'interaction plasma-paroi utilisé. Le libre parcours l avant la première collision (à ne pas confondre avec le libre parcours moyen) est échantillonné par inversion de l'équation suivante (voir *Chapman & Cowling* [45, p. 93] pour la dérivation de cette loi),

$$u = \exp\left(-\int_0^l \frac{1}{v} \sum_{k=1}^p \nu_k(s) ds\right), \quad (1.50)$$

où les ν_k sont les taux des p processus atomiques ou moléculaires subis par l'espèce considérée. Cette façon de calculer le libre parcours est bien évidemment en accord avec la forme intégrale de l'équation de transport. En pratique, l'intégrale de l'épaisseur optique est actualisée chaque fois que la trajectoire pénètre dans une nouvelle cellule spatiale. Dans chaque cellule, les estimateurs correspondant à chaque quantité à calculer sont mis à jour. Pour la densité de neutres dans la cellule, on stocke la distance parcourue dans la cellule, pour la source d'ionisation la distance parcourue multipliée par le taux d'ionisation, etc. Lorsque la particule considérée atteint le libre parcours l , une collision se produit. La nature de la collision, parmi les p types possibles pour l'espèce considérée, est déterminée en considérant les probabilités respectives de ces processus, définies par

$$p_k = \frac{\nu_k}{\sum_{m=1}^p \nu_m}. \quad (1.51)$$

On génère alors un nombre aléatoire u uniformément distribué entre 0 et 1, et si

$$\sum_{l=1}^{k-1} p_l < u < \sum_{l=1}^k p_l, \quad (1.52)$$

alors le neutre subit le processus numéro k . On continue ainsi jusqu'à ionisation ou adsorption à la paroi de la particule, puis on recommence jusqu'à ce que le bruit statistique ait atteint un niveau acceptable pour l'application considérée.

1.6 Résumé et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de façon succincte les bases de la physique des particules neutres (atomes, molécules) dans les plasma de machines de fusion par confinement magnétique. Les neutres proviennent principalement du processus de recyclage, par lequel les ions venant heurter la paroi peuvent retourner dans le plasma sous la forme d'atome ou comme constituant d'une molécule. Ces atomes et molécules sont couplés au plasma, c'est à dire échangent des particules, de la quantité de mouvement et de l'énergie avec les espèces chargées, par l'intermédiaire d'un ensemble de processus de physique atomique. En particulier, le processus d'échange de charge joue un rôle important pour les isotopes de l'hydrogène. Comme les libres parcours moyens des neutres peuvent être bien plus grands que les longueurs de gradients, il est nécessaire d'utiliser une approche cinétique. Nous avons présenté et discuté la solution analytique de l'équation de *Boltzmann* linéaire décrivant le transport des atomes obtenue par *Smirnov* dans le cadre d'un modèle simplifié. Cependant, en pratique, la modélisation du transport des neutres s'appuie sur des codes Monte Carlo comme EIRENE, qui permettent de prendre en compte la complexité de la physique atomique en jeu, dans des géométries réalistes.

Chapitre 2

Description statistique des fluctuations turbulentes dans les plasmas de bord de tokamak

Dans ce chapitre, nous allons présenter un certain nombre d'outils permettant de décrire les propriétés statistiques des fluctuations turbulentes observées dans la région périphérique des plasmas de fusion par confinement magnétique, et en particulier dans la zone à l'ombre du limiteur (la SOL). La compréhension de la physique contrôlant cette turbulence fait l'objet d'études détaillées [46, 47, 48], car le transport dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ magnétique est dominé par les fluctuations turbulentes. C'est donc la turbulence qui gouverne la longueur de décroissance des flux de particules et d'énergie dans la SOL, et par conséquent la densité de flux sur les composants face au plasma les plus exposés (limiteur ou plaques de neutralisation du divertor). La compréhension des mécanismes physiques impliqués dans la turbulence de bord est donc essentielle pour pouvoir prédire de façon précise les largeurs de la SOL dans une machine comme ITER.

Le transport turbulent se manifeste dans les équations à gros grains obtenues en calculant la moyenne des équations fluides décrivant la turbulence sur un temps long devant les échelles temporelles typiques des fluctuations. Pour l'équation de continuité, on obtient ainsi

$$\partial_t \langle n_e \rangle + \nabla \langle n_e \rangle \langle v_e \rangle + \nabla \langle \tilde{n}_e \tilde{v}_e \rangle = \langle S \rangle, \quad (2.1)$$

où les crochets désignent la moyenne temporelle, i.e. $\langle \dots \rangle \equiv 1/T \int_0^T$, et le terme croisé $\langle \tilde{n}_e \tilde{v}_e \rangle$ représente le flux turbulent dû aux fluctuations des paramètres plasma. Dans les simulations numériques actuelles comme B2-EIRENE, la source de particules chargées est estimée pour les paramètres plasma moyens, i.e. $\langle S \rangle = S(\langle n_e \rangle, \langle T_e \rangle)$. Notre but dans cette thèse est de traiter de façon plus pertinente la moyenne des termes sources dans ces équations. Comme nous nous intéressons à une moyenne sur un temps long par rapport aux temps caractéristiques de la turbulence, il est naturel d'adopter une description statistique pour les fluctuations. Nous commencerons donc par présenter des résultats expérimentaux et/ou numériques sur la turbulence de la SOL, qui nous conduiront à utiliser, comme ingrédient de départ pour nos modèles stochastiques, la fonction de distribution de probabilité (FDP) des fluctuations ainsi que leur fonction de variance-covariance. Nous présenterons ensuite des résultats généraux sur les fonctions de variance-covariance, résultats qui s'avèrent essentiels en pratique pour s'assurer que les modèles stochastiques que l'on va construire sont bien posés ("réalisables"). Nous introduirons alors des distributions multivariées qui permettent de reproduire un certain nombre de propriétés statistiques connues des fluctuations turbulentes dans la SOL. Enfin, nous discuterons des techniques permettant d'échantillonner numériquement ces distributions, en vue d'une application à des calculs Monte Carlo avec le code EIRENE.

2.1 Propriétés statistiques des fluctuations dans les plasmas de bord

2.1.1 Profils de densité moyenne et du taux de fluctuation

Les profils de densité plasma dans la SOL résultent de la compétition entre le transport parallèle le long des lignes de champs, et le transport perpendiculaire, essentiellement d'origine turbulente. Que ce dernier soit de nature diffusive ou balistique, on peut montrer dans le cadre d'hypothèses très simples que la densité décroît exponentiellement suivant la direction radiale,

$$\langle n_e \rangle (x) = n_0 \exp(-x/l_n), \quad (2.2)$$

où n_0 est la densité au niveau de la dernière surface magnétique fermée. En réalité, les mesures dans différents tokamaks (DIII-D, TFTR, RFX, RFP) et stellarator (ATF), en mode-L ('low confinement') ainsi qu'en mode-H ('high confinement') montrent clairement que le profil de la densité moyenne dans la SOL est bien reproduit par la somme de deux exponentielles décroissantes, avec une décroissance bien plus lente dans la SOL lointaine qu'à proximité de la séparatrice [48]. Le taux de fluctuation $R = \sigma_{n_e}(x) / \langle n_e \rangle (x)$ quant à lui augmente clairement lorsque l'on s'éloigne de la séparatrice. L'amplitude des fluctuations varie typiquement de $R_1 \sim 20\%$ à $R_2 \sim 100\%$ [48], et peut à nouveau être représenté par la somme de deux fonctions exponentielles,

$$R(x) = \frac{\sigma_{n_e}}{\langle n_e \rangle (x)} = R_1 \exp(-x/\lambda_1) + R_2 \exp(-x/\lambda_2). \quad (2.3)$$

Il faut également noter que le taux de fluctuation n'est pas homogène poloïdalement [49]. Dans la suite, nous retiendrons principalement le fait que le profil radial de densité moyen décroît de la séparatrice vers le mur alors que le taux de fluctuation augmente.

2.1.2 Résultats expérimentaux pour les Fonctions de Densité de Probabilités

Des mesures de la densité électronique dans la SOL du tokamak TCV, à l'aide de sondes, ont dans un premier temps montré que la FDP des fluctuations, construite à partir des séries temporelles mesurées en un point, est bien décrite par une distribution Gamma dans l'ensemble de la SOL [50] (voir Fig. 2.1(a)). La distribution Log-normale ne reproduit quant-à elle les propriétés des fluctuations que dans la SOL lointaine de TCV. La FDP Gamma est donnée par

$$P(n_e) = \frac{n_e^{\beta-1} e^{-n_e/\alpha}}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)}. \quad (2.4)$$

Expérimentalement, le facteur de forme $\beta = A^2$ est donné par $A \approx 1.7$ dans la SOL lointaine.

De plus, des mesures similaires dans la machine TORPEX pour un ensemble de décharges ayant des conditions expérimentales différentes, montrent une dépendance quadratique entre le moment d'ordre quatre et le paramètre de dissymétrie ($K = aS^2 + b$, voir Fig. 2.1(b)), donnés par

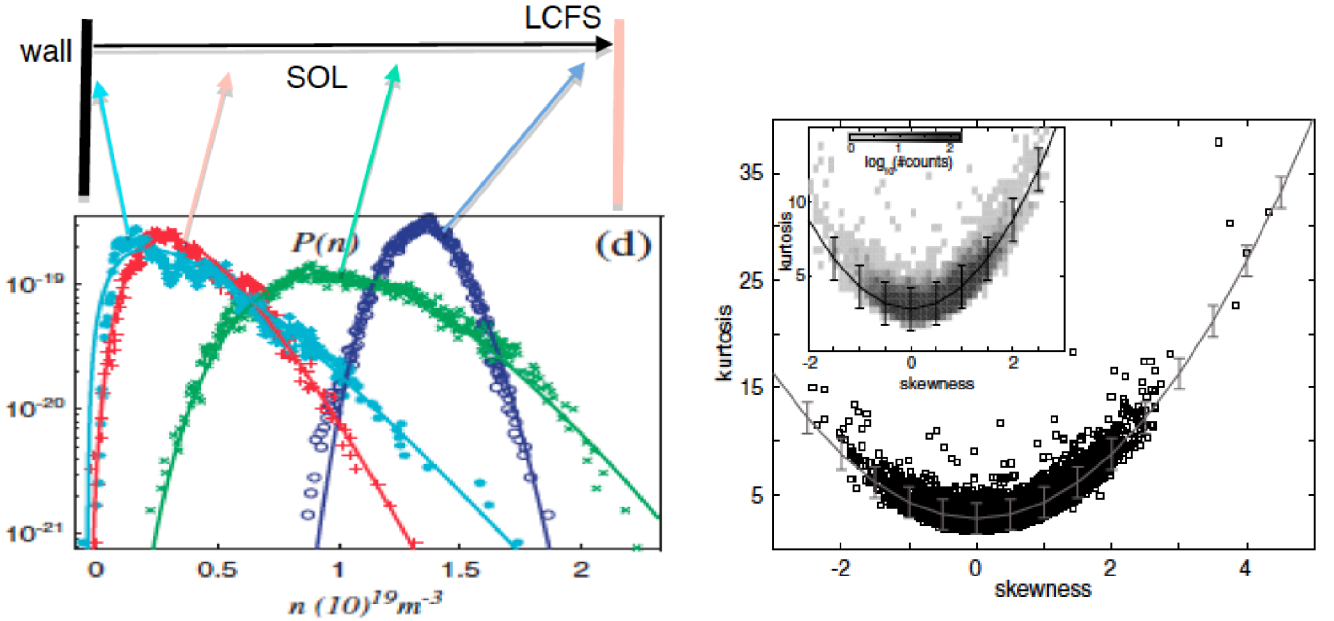
$$S = \frac{\langle \tilde{n}_e^3 \rangle}{\sigma_{n_e}^3}, \quad (2.5)$$

$$K = \frac{\langle \tilde{n}_e^4 \rangle}{\sigma_{n_e}^4} - 3 \quad (2.6)$$

et où $\tilde{n}_e = n_e - \langle n_e \rangle$. Cette dépendance quadratique est compatible avec les propriétés de la distribution Gamma¹. Cependant, il existe des situations dans lesquelles le paramètre de dissymétrie S est négatif, ce qui ne peut pas être le cas avec la distribution Gamma. Ces travaux ont conduit à la conclusion que les fluctuations de n_e et de T_e sont bien représentées par des FDPs Beta [52, 53]. La distribution Beta est donnée par la FDP suivante,

$$W(Y) = \frac{(Y - Y_i)^{\alpha-1} (Y_s - Y)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta) (Y_s - Y_i)^{\alpha+\beta-1}}, \quad Y_i < Y < Y_s \quad \text{et} \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.7)$$

que l'on note $\mathcal{B}(\alpha, \beta, Y_i, Y_s)$. B est la fonction Beta définie à partir de la fonction Gamma par $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$, les constantes Y_i et Y_s sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la variable physique Y ². Le choix de ces bornes est dans une certaine mesure arbitraire, et ce choix n'influence pas les résultats physiques s'il est fait de manière correcte. Cependant, dans les cas où le coefficient de dissymétrie S est négatif, les paramètres de la distribution Beta obtenus dans [52, 53] montrent que celle-ci se réduit à $P(n_e) \equiv G(2\langle n_e \rangle - n_e)$. Ceci nous conduit à considérer que la FDP des fluctuations reste pour l'essentiel bien décrite par une FDP Gamma.



(a) ajustement des histogrammes de n_e par des distributions Gamma [50]. (b) ajustement du nuage de points de la dépendance de K en S par une équation parabolique, i.e. $K = aS^2 + b$ [53].

FIGURE 2.1 – Propriétés statistiques des fluctuations de n_e dans le plasma de bord des tokamaks TCV et TORPEX.

D'un point de vue pragmatique, les résultats détaillés ci-dessus sont suffisants pour spécifier la FDP des fluctuations si l'on se contente d'ajuster les propriétés d'un modèle stochastique per-

1. Notons que ce critère est vérifié par une large famille de distributions et ne permet donc pas de conclure à ce sujet. Un théorème donné par Lukacs [51] permet en principe d'identifier des V.A.s Gamma. Ce théorème stipule en effet que si X et Y sont deux V.A.s indépendantes et identiquement distribuées, alors $U = X + Y$ et $W = X/Y$ sont indépendants si et seulement si X et Y sont distribuées selon des lois Gamma avec le même paramètre d'échelle (le paramètre α dans Eq. (2.4)). La difficulté ici est de vérifier concrètement l'indépendance de U et W , et de quantifier les déviations attendues par le fait que les mesures à deux temps différents au même point ne seront jamais parfaitement indépendantes.

2. Soit la transformation $X = (Y - Y_i) / (Y_s - Y_i)$. On vérifie alors que X est distribuée suivant la distribution Beta réduite, i.e. $X \equiv \mathcal{B}(\alpha, \beta, 0, 1) = \mathcal{B}(\alpha, \beta)$.

mettant de reproduire certaines propriétés statistiques des fluctuations. Par contre, la question de savoir pourquoi les propriétés statistiques sont bien reproduites par une statistique de type Gamma n'est vraiment pas tranchée, même si certains modèles de type SOC ("self Organized Criticality") montrent un comportement de type Gamma [54]). L'hypothèse selon laquelle certains paramètres plasma (n_e , potentiel électrique, ect) sont donnés par une forme quadratique de variables Gaussiennes [55]¹, i.e.

$$Z(t) = \psi(t) + \gamma\psi^2(t), \quad (2.8)$$

où ψ est une variable normale et γ le paramètre de non-normalité, peut également permettre de justifier le caractère Gamma des fluctuations. En effet, la distribution Gamma peut être vue comme une généralisation de la distribution Chi-2 (χ^2), qui peut être définie comme la somme de carrés de variables normales. Notons que la transformation $Z(t) = \gamma(\psi + 1/2\gamma)^2 - 1/4\gamma$, permet de voir que la variable Z est distribuée suivant une loi χ^2 non-centrée, avec un déplacement $1/4\gamma$.

En conclusion, dans la suite nous considérerons que la FDP des fluctuations est Gamma. Nous discuterons néanmoins tout de même brièvement le cas de la distributions Log-normale, dans la mesure où cette dernière permet d'évaluer l'importance du choix de la FDP, et de s'affranchir de certaines limitations inhérentes aux statistiques Gamma multivariées. Les résultats obtenus aux chapitres 3 et 4 montreront clairement que les distributions Gamma sont bien mieux adaptées que la FDP Log-normale pour la dérivation de modèles de transport à gros grains.

2.1.3 Résultats expérimentaux/numériques pour les corrélations spatiotemporelles

La façon la plus élémentaire de caractériser les corrélations spatiales ou temporelles consiste à donner la valeur du temps (ou de la longueur) de corrélation, qui représentent la durée (distance) typique sur laquelle les fluctuations sont corrélées (nous donnerons une définition précise dans la suite). Pour les turbulences de bord dans les tokamaks, $\tau_{cor} = 1 - 100 \mu s$ et $\ell = 0.1 - 10$ cm dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ (voir Fig.2.2).

Les coefficients de corrélation de n_e en temps ou en espace ont été mesurés par diverses techniques [56, 50], et obtenus par des simulations numériques [57]. Il est important de noter que la situation est différente pour les corrélations temporelles et spatiales, car les fluctuations peuvent généralement être considérées comme stationnaires mais pas homogènes. Les données sont bien ajustées par les fonctions du tableau 2.1,

$\rho_1(t) = \exp(- t/\tau) \cos(t/\tau)$ [50]	$\rho_2(x) = \exp(- x /l_r)$ [57]
$\rho_3(y) = \exp(- y/l_\theta) \cos(\omega y)$ [57]	$\rho_4(x, t) = \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{L^2}\right) \exp(-t^2/\tau^2)$ [56]

TABLE 2.1 – Fonctions de corrélations issues des mesures expérimentales ou numériques. Dans ce cas précis x et y représentent respectivement les directions radiale et poloïdale.

La fonction ρ_1 mesure les corrélations temporelles de n_e dans la machine TCV, le temps de corrélation typique est $\tau = 50 \mu s$. La fonction ρ_2 (ρ_3) représente les corrélations spatiales de n_e dans la direction radiale (poloïdale) avec $l_r = 2l_\theta = 20r_s$, où r_s est le rayon de Larmor ionique calculé avec la température électronique ($r_s = 0.34$ mm dans la référence [57]). La fonction ρ_4 représente la fonction de corrélation spatiotemporelle dans la machine TEXTOR avec $\tau = 10 \mu s$ et $L = 12$ mm.

1. Ceci serait la conséquence du théorème de la limite centrale et la non-linéarité des équations plasmas.

Ces ordres de grandeurs nous guiderons dans la suite, et apparaîtrons comme des paramètres de contrôle importants pour le transport des particules neutres dans les plasmas turbulents.

Lorsque l'on cherche à construire un modèle stochastique pour représenter les fluctuations turbulentes, le choix de la fonction de variance-covariance peut s'avérer être un problème très délicat, en ce sens qu'il est nécessaire que la fonction de variance-covariance vérifie certaines propriétés assurant la "réalisabilité" du modèle (en d'autres termes, la cohérence mathématique). Nous allons préciser ces points d'ordre mathématique dans les paragraphes suivants.

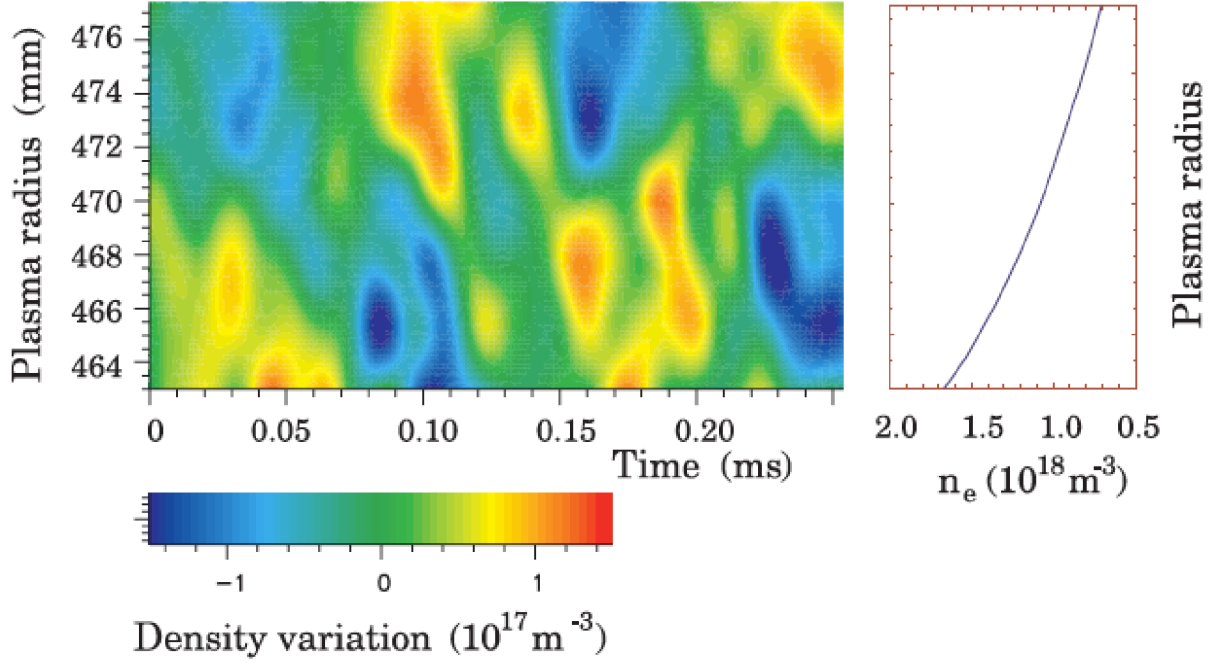


FIGURE 2.2 – Fluctuations de densité ($n_e(x, t) - \langle n_e(x) \rangle$) tracées en fonction de la direction radiale en ordonnée et du temps en abscisse, mesurées dans le tokamak TEXTOR par spectroscopie d'un double faisceau de lithium [56]. Les structures observées ont typiquement une taille de 5 mm dans la direction radiale, et une durée de vie de l'ordre de 10 μ s. Le profil radial de densité moyenne correspondant est tracé sur la figure de droite (les ordonnées correspondent à la position radiale sur la figure de gauche, axe vertical).

2.2 Résultats généraux sur les fonctions de variance-covariance

On commence par s'intéresser aux processus stationnaires ou homogènes. On distingue les processus stationnaires et homogènes au sens strict et au sens large. L'homogénéité/stationnarité au sens strict stipule que la distribution à n -points du processus stochastique \mathcal{B} est invariante par translation spatiotemporelle,

$$P[\mathcal{B}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, t + s), \dots, \mathcal{B}(\mathbf{r}_n + \mathbf{a}, t + s)] = P[\mathcal{B}(\mathbf{r}_1, t), \dots, \mathcal{B}(\mathbf{r}_n, t)]. \quad (2.9)$$

L'homogénéité/stationnarité au sens large requiert cette propriété sur les deux premiers moments uniquement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \text{Cte}, \\ \mathcal{C}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, |t - t'|) = \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \mathcal{B}(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}', t') \rangle. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = \text{Cte}, \\ \mathcal{C}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, |t - t'|) = \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \mathcal{B}(\mathbf{r}', t') \rangle - \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \mathcal{B}(\mathbf{r}', t') \rangle. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Les résultats présentés dans la suite sont valides lorsque cette dernière propriété, moins forte, est satisfaite.

2.2.1 Caractère défini-positif de la fonction de variance-covariance

La fonction de variance-covariance (\mathcal{C}) mesure l'amplitude des corrélations spatiotemporelles entre deux V.A.s. Cependant, toute fonction réelle n'est pas une fonction de variance-covariance acceptable. La première condition évidente étant que cette fonction doit être symétrique, i.e. $\mathcal{C}(t, t') = \mathcal{C}(t', t)$. Une autre condition, moins triviale mais extrêmement importante en pratique, est que la fonction de variance-covariance doit être définie-positve (dans la suite on parlera alors de fonctions permises), c'est à dire

$$\sum_{i,j=1}^n c_i c_j \mathcal{C}(t_i, t_j) \geq 0, \quad \forall c_i \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \quad (2.12)$$

Bien que cette inégalité soit contre-intuitive, sa démonstration n'est pas difficile (voir *Yaglom* [58, p. 46] ou *Priestley* [59, p. 109]). Il suffit d'introduire la variable aléatoire $W = \sum_{k=1}^n c_k X(t_k)$, et d'en calculer la variance qui est nécessairement positive pour tout $c_k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Var}(W) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k c_l \mathcal{C}(t_k, t_l) \geq 0. \quad (2.13)$$

En d'autres termes, choisir une fonction de variance-covariance non définie-positve conduit à une FDP de W qui prend des valeurs négatives¹. On montre aussi que la classe des fonctions de variance-covariance coïncide avec la classe des fonctions caractéristiques des fonctions de densité de probabilité (e.g., *Cramér* [60]). Cette propriété découle de la représentation spectrale des fonctions de variance-covariance (théorème de *Khinchin*), qui stipule simplement que la transformée de *Fourier* d'une fonction de variance-covariance (qui est le spectre en puissance) est nécessairement positive. Par conséquent, la transformée de *Fourier* de n'importe quelle FDP, et plus généralement la transformée de *Fourier* des fonctions positives et intégrables, constituent des fonctions de variance-covariance. Dans le paragraphe suivant, nous introduisons un critère pratique permettant de vérifier le caractère défini-positif (d.p. dans la suite) d'une fonction donnée.

2.2.2 Critère pratique permettant de vérifier le caractère défini-positif d'une fonction homogène

Dans le paragraphe précédent on a vu qu'une fonction est d.p. si sa transformée de *Fourier* est positive. Cependant lorsque la transformée de *Fourier* n'est pas connue analytiquement, on dispose d'un autre critère permettant de vérifier si une fonction donnée est définie-positve. Ce critère suffisant (mais pas nécessaire) est très simple, et ne s'applique qu'aux fonctions homogènes/stationnaires. Une fonction donnée est d.p. si :

1. sa dérivée première est négative ou nulle à l'origine,

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{C}(s) \right|_0 \leq 0, \quad (2.14)$$

2. sa dérivée seconde est partout positive,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{C}(s) \geq 0, \quad (2.15)$$

1. En effet, $\text{Var}(W) = \int dWP(W) (W - \langle W \rangle)^2$.

3. et si

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{C}(s) = 0, \quad (2.16)$$

ce dernier point assurant un affaiblissement des corrélations à l'infini. Les trois conditions précédentes doivent être vérifiées simultanément (voir *Christakos* pour la démonstration [61]). Ces critères sont valables pour des fonctions unidimensionnelles. Cependant, on trouve des conditions similaires pour les dimensions 2 et 3 dans la même référence [61].

Dans nos applications suivantes on est parfois amené à utiliser des matrices de variance-covariance plutôt que des fonctions de variance-covariance. Ces matrices sont construites à partir de la fonction de variance-covariance en posant $\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}(s_i, s_j)$ et la propriété d.p. de la fonction garantie que la matrice est aussi définie-positve. Il existe un critère simple d'utilisation qui permet de déterminer si une matrice \mathcal{C} de taille $n \times n$ est définie-positve, le critère de *Sylvester*. Ce critère requiert que tous les mineurs principaux de la matrice considérée doivent être positifs. En d'autres termes, tous les déterminants des matrices $\{\mathcal{C}_{ij}\}$ avec $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p$ pour $p = 1, \dots, n$ doivent être positifs. Ce critère est utilisé par la plupart des routines standard permettant d'effectuer une factorisation de *Cholesky* (voir paragraphe 2.4.1). Il permet de vérifier que la matrice de variance-covariance est bien définie-positve pour une taille et des paramètres donnés, mais ne permet pas de conclure de manière aussi générale que le critère de *Christakos* pour une fonction donnée.

2.2.3 Exemples de fonctions définies-positives stationnaires et homogènes

$\mathcal{C}_5(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma^2}{(a^2 t^2 + 1)^{d/2}} \exp\left(-\frac{b^2 \ \mathbf{r}\ ^2}{a^2 t^2 + 1}\right)$ [62]	$\mathcal{C}_6(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma^2}{(at + 1)^{d/2}} \exp\left(-\frac{b^2 \ \mathbf{r}\ ^2}{at + 1}\right)$ [62]
$\mathcal{C}_7(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma^2 (a^2 t^2 + 1)}{\left[(a^2 t^2 + 1)^2 + b^2 \ \mathbf{r}\ ^2\right]^{(d+1)/2}}$ [62]	$\mathcal{C}_8(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma^2 (at + 1)}{\left[(at + 1)^2 + b^2 \ \mathbf{r}\ ^2\right]^{(d+1)/2}}$ [62]
$\mathcal{C}_9(x, t) = \sigma^2 \exp\left(-\sqrt{a^2 x^2 + b^2 t^2}\right)$ [63]	$\mathcal{C}_{10}(\mathbf{r}, t) = \sigma^2 \exp(-a \ \mathbf{r} \pm \mathbf{v}t\)$ [63]
$\mathcal{C}_{11}(\mathbf{r}, t) = \sigma^2 \exp\left[-a^2 (\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t)^2\right]$ [63]	$\mathcal{C}_{12}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma^2}{\left[1 + c^2 (\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t)^2\right]^{v/2}} \exp\left[-a \ \mathbf{r} \pm \mathbf{v}t\ \right]$ [63]

TABLE 2.2 – Fonctions de variance-covariance spatiotemporelles, non-séparables, homogènes, stationnaires et isotropes.

Dans la suite nous nous intéresserons à des processus stochastiques spatiotemporels, pour lesquels nous aurons besoin de nous donner une fonction de variance-covariance. La façon la plus simple de construire une fonction de variance-covariance spatiotemporelle est de poser $\mathcal{C}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C}_1(\mathbf{r})\mathcal{C}_2(t)$, où \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont des fonctions permises (le produit de fonctions d.p.s est aussi d.p. [64]). La covariance \mathcal{C} ainsi construite est dite à variables séparables, car les dépendances en espace et en temps se factorisent. Ceci implique que les corrélations temporelles sont les mêmes en tout point de l'espace, et vice-versa. Si une telle description n'est pas suffisante pour modéliser un processus physique, il faut construire une fonction de variance-covariance à variables non séparables. L'intérêt pour ses fonctions de corrélations, dont le caractère d.p. peut être délicat à vérifier, est assez récent [65,62,66,67,68], et émane de disciplines variées comme la géologie [61], la météorologie [69], la climatologie [70], l'hydrologie [61], l'écologie [71] et l'agriculture [72]. Le tableau 2.2

présente à titre d'exemple quelques fonctions de variance-covariance non-séparables, mais spatialement isotropes. Ces fonctions sont valides en dimension spatiale $d = 1, 2$ ou 3 représentées par le vecteur $\mathbf{r}(x, y, z)$, et t désigne le temps. On désigne par $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la norme euclidienne¹. Deux fonctions de variance-covariance spatialement anisotropes sont données dans le tableau 2.3. Afin d'introduire la dépendance temporelle dans la fonction de variance-covariance anisotrope, on peut par exemple remplacer la coordonnée $r_3 = z$ par la variable temporelle t dans \mathcal{C}_{13} .

$\mathcal{C}_{13}(\mathbf{r}) = \frac{d\sigma^2}{\sum_{i=1}^d (1 + b_i^2 r_i^2)^{\kappa_i/2}} \exp\left(-\sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2 r_i^2}\right)$	$\mathcal{C}_{14}(x, y) = \sigma^2 \exp\left(- a_x x ^{2/n} - a_y y ^{2/n}\right)$
--	---

TABLE 2.3 – Fonctions de variance-covariance anisotropes [73]. Noter que $n \geq 1$ et que l'exposant κ_i , $i = 1, 2, 3$ est aussi anisotrope.

2.2.4 La longueur de corrélation

La longueur de corrélation est une grandeur associée à la fonction de corrélation ($\rho = \mathcal{C}/\sigma^2$), et est très importante dans le formalisme des processus stochastiques. Elle nous permet d'estimer la portée en terme de temps ou de distance des corrélations entre deux V.A.s. Cette longueur caractéristique peut avoir différentes définitions suivant les auteurs. Par exemple *Pope* [74, p. 69], la définit comme la longueur intégrale de la fonction de corrélation, i.e.

$$\ell = \int_0^{\infty} \rho(s) ds. \quad (2.17)$$

Dans ce travail, nous optons pour la définition de *Stratonovich* [75, p. 22],

$$\ell = \int_0^{+\infty} |\rho(s)| ds, \quad (2.18)$$

qui fait intervenir la valeur absolue de la fonction de corrélation. Utiliser cette définition revient à considérer que c'est l'amplitude des corrélations et non pas leur signe qui importe en termes de dépendance statistique. Cependant, la longueur de corrélation ainsi définie perd de son intérêt si les intégrales intervenant dans les équations précédentes divergent. En effet, une fonction de corrélation périodique du type $\cos(\omega s)$ est permise [58], mais son intégrale ne converge pas. De même, la fonction $(1 + s/L)^{-1}$ est permise [76], mais son intégrale est également divergente. Ces deux cas décrivent des corrélations à longue portée. Dans la suite, nous considérerons aussi le cas où la fonction de corrélation est constante et égale à 1, ce qui correspond à une situation où les réalisations d'un processus $\mathcal{B}(t)$ sont telles que $\mathcal{B}(t) = \text{Cte}$. Pour distinguer ces différents cas, on introduit la notion de portée pratique ℓ_p , qui désigne la longueur ou le temps nécessaire pour que la corrélation entre deux V.A.s à des positions ou instants différents s'affaiblisse. Le niveau d'affaiblissement requis est fixé suivant le besoin du problème qu'on regarde. Par exemple en géostatistique cette longueur est définie comme la distance (ou le temps) requis pour que la fonction de corrélation perde 95% de sa valeur maximum ($\rho(0) = 1$) [77, p. 91], [78]. Par exemple, la portée pratique de la fonction de corrélation exponentielle ($\rho(s) = \exp(-s/\ell)$) est égale à $\ell_p^{95} = \ell \ln(20)$ alors que sa longueur intégrale est ℓ . La portée pratique existe aussi pour les fonctions de corrélations dont la décroissance est trop lente pour que la longueur intégrale soit finie². Dans l'étude des

1. A noter que les résultats valables pour cette norme ne le sont pas forcément pour d'autres normes, e.g. [61, p. 64].

2. e.g. $\rho(s) = 1/(1 + s/L)$,

$$\int_0^{+\infty} \rho(s) ds = \infty,$$

ρ est bien définie positive [76] et sa portée pratique est $19L$.

cumulants, Fox [79] la définit comme la longueur nécessaire pour que la fonction de corrélation perde $m \geq 1$ ordre de grandeur de son maximum, i.e. $\rho(\ell_p^m) = 10^{-m}$ ¹.

2.2.5 Fonctions de variance-covariance non-homogènes

Dans le cas d'une statistique non-homogène (ou non-stationnaire), il est important de distinguer la fonction de variance-covariance de la fonction de corrélation ρ ,

$$\rho(x, x') = \frac{\text{Cov}(x, x')}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(x')}} \quad \text{avec} \quad \rho(x, x) = 1, \quad (2.19)$$

car il existe des distributions dont le comportement de la fonction de corrélation est très différent de celui de la fonction de variance-covariance. La distribution Gamma multivariable de *Cheriyani & Ramabhadran* en est un exemple parfait [80]. Cette distribution, pour laquelle la variance est une fonction de x , est caractérisée par une équi-covariance, i.e. $\text{Cov}(x, x') = \text{Cte}$, et une corrélation de type multiplicative et non-homogène, $\rho(x, x') = \rho(x)\rho(x') > 0$ (ici $\rho(x) = 1/\sqrt{\text{Var}(x)}$). De façon plus générale, on peut considérer des processus pour lesquels la fonction de corrélation est homogène, i.e.

$$\rho(\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(s)) = \rho(|x - s|), \quad (2.20)$$

alors que la covariance ne l'est pas :

$$\text{Cov}(\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(s)) = \sqrt{\mathcal{V}(x)\mathcal{V}(s)}\rho(|x - s|). \quad (2.21)$$

Au sens des statistiques, le processus en question n'est pas homogène car les propriétés de la variance-covariance l'emportent sur celles de la corrélation. De plus, le caractère d.p. de ρ ne garantit pas en général la propriété d.p. de la fonction de variance-covariance dans le cas inhomogène/non-stationnaire, ou en d'autres termes n'implique pas la réalisabilité du processus.

Les fonctions de variance-covariance non-homogènes et/ou non-stationnaires sont plus difficiles à construire que leurs contreparties homogènes/stationnaires. Il existe cependant tout de même des techniques permettant d'en obtenir, par exemple à partir des variogrammes [81], des travaux de *Christakos* [61, 63] ou encore en utilisant des noyaux définis positifs [64]. Voici à titre d'exemple deux de ces fonctions,

$\mathcal{C}_{15}(x, y) = \frac{\sigma^2}{1 + a\sqrt{x+y}}$	$\mathcal{C}_{16} = \sigma^2 \left[\exp(-a\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ - b t - t') - \exp(-a\ \mathbf{r} + \mathbf{r}'\ - b t + t') \right]$
---	--

TABLE 2.4 – Fonctions de variance-covariance non-homogènes/non-stationnaires.

Il est également possible de construire des processus inhomogènes/non-stationnaires de telle sorte que leur variance-covariance et leur corrélation, supposée homogène/stationnaire, aient la même forme. Il suffit pour cela que leur variance soit constante. Si $\mu(\mathbf{r}, t)$ et $R(\mathbf{r}, t)$ désignent respectivement la valeur moyenne et le taux de fluctuation (i.e. $\text{Var}(\mathcal{B}) = (\mu R)^2$), on pose donc

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \sigma R^{-1}(\mathbf{r}, t), \quad (2.22)$$

1. Par contre, dans le cas d'une fonction de corrélation purement oscillante, la notion de portée pratique n'a pas de sens.

où σ est une constante. On obtient alors

$$\text{Cov} [\mathcal{B}(\mathbf{r}, t), \mathcal{B}(\mathbf{r}', t')] = \sigma^2 \rho (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, |t - t'|). \quad (2.23)$$

Cette manière de construire la fonction de variance-covariance est pratique à deux titres :

1. on écarte les problèmes liés à la propriété d.p. en manipulant des fonctions de corrélations (ρ) homogènes et stationnaires qui bénéficient de la propriété d.p., et dont le choix est multiple.
2. même si la variance-covariance obtenue est homogène/stationnaire, le champ moyen et l'amplitude des fluctuations sont non-homogènes/non-stationnaires.

A titre d'exemple, considérons un champ stochastique \mathcal{B} dont le premier moment est donné par

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{w}t\|}{\Delta}\right). \quad (2.24)$$

Pour se placer dans le cas décrit précédemment, il suffit d'imposer que R soit exponentiellement croissant avec la même longueur caractéristique Δ que μ , c'est à dire

$$R(\mathbf{r}, t) = R_0 \exp\left(+\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{w}t\|}{\Delta}\right). \quad (2.25)$$

2.3 Distributions multivariées

Les distributions multivariées représentent toute une spécialité des mathématiques [82, 83, 84, 85, 86]. Le problème apparaît naturellement dès que l'on a à traiter un vecteur de n variables aléatoires $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ non indépendantes. La distribution multivariée de \mathbf{X} peut être définie à partir de probabilités conditionnelles, en écrivant

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{D}_1(x_1) \mathcal{D}_2(x_2|x_1) \mathcal{D}_3(x_3|x_1, x_2) \dots \quad (2.26)$$

Dans le cas où les V.A.s sont indépendantes, la distribution à n V.A.s est le produit de n FDPs à une variable

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{D}(x_1) \mathcal{D}(x_2) \dots \mathcal{D}(x_n). \quad (2.27)$$

Le passage de Eq. (2.26) à Eq. (2.27) se fait à l'aide de la définition de l'indépendance statistique $\mathcal{D}(x|y) = \mathcal{D}(x)$ (e.g., Doob [87, p. 103]).

Notons que deux V.A.s indépendantes sont nécessairement non-corrélées (leur coefficient de corrélation ρ est nul), mais que deux V.A.s non-corrélées ne sont pas forcément indépendantes (à l'exception de quelques exemples comme les V.A.s normales [88, 89]). Le contre exemple suivant est bien connu : soit $y = x^2$, il est évident que y et x ne sont pas indépendants, cependant leur covariance

$$\text{Cov}(x, y) = \langle x^3 \rangle - \langle x^2 \rangle \langle x \rangle \quad (2.28)$$

s'annule lorsque x est une V.A. normale centrée ($\langle x^{2p+1} \rangle = 0$, $p \geq 0$).

2.3.1 Distribution de Gauss multivariable

La distribution de Gauss est largement utilisée pour modéliser les processus stochastiques en physique grâce au théorème de la limite centrale [87], qui stipule que la distribution de la somme d'un grand nombre de V.A.s indépendantes et identiquement distribuées tend vers une distribution de Gauss. Soit $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur à n variables aléatoires Gaussiennes d'espérance

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \quad (2.29)$$

et de matrice variance-covariance \mathcal{C} ,

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \mathcal{C}_{ij}. \quad (2.30)$$

La densité de probabilité jointe des n variables est définie par [90],

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{\det \mathcal{C}^{-1}}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \mathcal{C}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top\right), \quad (2.31)$$

où le produit dans l'exponentielle est un produit matriciel. Notons que $\det \mathcal{C}$ est bien strictement positif en vertu du caractère d.p. de \mathcal{C} . Les moments de cette distribution ont des caractéristiques particulières. Ceux d'ordre impairs sont nuls, et les moments d'ordre pairs s'expriment en fonction du moment d'ordre deux. Par conséquent, la distinction entre processus stationnaire au sens strict et au sens large (voir introduction de la section 2.2) n'a pas lieu d'être pour la Gaussienne, les deux définitions étant équivalentes dans ce cas.

Notons que la normalisation à l'unité de l'Eq. (2.31) est réalisée en utilisant la relation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \mathcal{C}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top\right) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det \mathcal{C}^{-1}}}, \quad (2.32)$$

qui nous sera utile dans la suite. Lorsque $\boldsymbol{\mu} = 0$ et $\mathcal{C}(s) \propto \exp(-s/\ell)$, \mathbf{X} est dit processus de *Ornstein-Uhlenbeck* et a été largement étudié dans le cadre du mouvement brownien, e.g. *Doob* [91]. On peut également noter que la fonction de corrélation d'un processus de *Markov* Gaussien est forcément exponentielle en vertu du théorème de *Doob* [91, 92].

Dans la suite de notre travail, des déterminants du même type que celui apparaissant dans Eq. (2.32) vont jouer un rôle important. Nous présentons par conséquent dans la section suivante quelques propriétés importantes de ces déterminants.

2.3.2 Matrices de Toeplitz et théorème de Szegö

Dans le cas où le processus stochastique \mathbf{X} défini dans le paragraphe précédent est homogène (ou stationnaire s'il s'agit d'un processus temporel), la matrice \mathcal{C} est une matrice de *Toeplitz* [93, 94]. En effet, nous avons dans ce cas $\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}(|i - j|)$. Dans les chapitres suivants, nous aurons également à calculer des déterminants de matrice de *Toeplitz*. Nous allons donc donner un certain nombre de résultats sur ces matrices qui nous seront utiles dans la suite. On considère une matrice Σ_n de taille $n \times n$, et d'éléments de matrice $\Sigma_{ij} = t_{|i-j|}$, i.e.

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-3} \\ t_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & & \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \dots & \dots & t_0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Grenander & Szegő [95] ont calculé $D_n = \det \Sigma_n$ de façon exacte lorsque $t_{|i-j|} = \rho^{|i-j|} - \alpha \delta_{ij}$, et donnent le résultat en termes de fonctions trigonométriques,

$$D_n = \frac{(-\alpha\rho)^n}{1-\rho^2} \mathcal{R}(n, \theta), \quad (2.34)$$

où

$$\mathcal{R}(n, \theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} \left[\sin((n+1)\theta) - 2\rho \sin(n\theta) + \rho^2 \sin((n-1)\theta) \right] \quad (2.35)$$

et

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{(1+\rho^2) - (1-\rho^2)/\alpha}{2\rho} \right], \quad \theta \in \mathbb{C}. \quad (2.36)$$

Ce résultat sera utilisé dans les chapitres 3 et 4, et correspondra dans notre cas à des fluctuations exponentiellement corrélées¹. Il existe dans la littérature des expressions approchées de ce déterminant (e.g. [98]), et des résultats généraux exprimés à l'aide de coefficients de corrélation conditionnels r_j entre X_i et X_{i+j} sachant la séquence $X_{i+1}, \dots, X_{i+j-1}$, lorsque Σ_n est une matrice de corrélation. Daniels [99] donne l'expression suivante de D_n ,

$$D_n = \det(\Sigma_n) = (1-r_1^2)^n (1-r_2^2)^{n-1} \dots (1-r_n^2). \quad (2.37)$$

Ce résultat a l'avantage de s'appliquer à tout type de fonction de corrélation (ρ). Les coefficients de corrélation conditionnels peuvent être exprimés en fonction des coefficients de corrélations, c'est à dire des éléments de matrice de Σ_n (e.g. [86]). Il est intéressant de noter que seul le carré des r_i intervient, et que le signe des coefficients de corrélation conditionnels n'a pas d'effet sur la valeur du déterminant.

Nous allons rencontrer dans la suite du travail des matrices de *Toeplitz* de grande taille ($n \gg 1$), et la question du comportement asymptotique de D_n lorsque $n \rightarrow \infty$ se posera naturellement. Ce comportement est régi par le théorème de Szegő. Il existe une forme faible et une forme forte du théorème de Szegő. Le théorème fort porte sur le déterminant lui même, et stipule que [100]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(\Sigma_n)}{\exp(n\mathcal{C}_0)} = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |\mathcal{C}_k|^2 \right), \quad (2.38)$$

où

$$\mathcal{C}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ik\theta} \ln \varphi(\theta), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.39)$$

et

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[. \quad (2.40)$$

Asymptotiquement, pour $n \gg 1$, nous avons [100, 101]

$$\det(\Sigma_n) \simeq \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |\mathcal{C}_k|^2 + n\mathcal{C}_0 + o(1) \right). \quad (2.41)$$

L'autre est dit théorème faible [95, 100], et porte sur le rapport de deux déterminants

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det(\Sigma_{n-1})}{\det(\Sigma_n)} = \exp(-\mathcal{C}_0). \quad (2.42)$$

Ce dernier théorème sera particulièrement utile dans la suite.

1. Les valeurs propres λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de Σ_n sont calculées dans les références [96] et [97].

2.3.3 Distributions Gamma multivariables

2.3.3.1 Distribution de *Krishnamoorthy & Parthasarathy* (K-P)

Présentons maintenant la distribution Gamma multivariables de *Krishnamoorthy & Parthasarathy*. Soit un ensemble de M vecteurs à n variables Gaussiennes et \mathcal{C} la matrice de variance-covariance associée,

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), \quad \mathbf{X}_2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots, \quad \mathbf{X}_M = (x_{1M}, x_{2M}, \dots, x_{nM}). \quad (2.43)$$

Ces vecteurs sont supposés indépendants deux à deux,

$$\langle x_{ij} x_{kl} \rangle = \mathcal{C}_{ik} \delta_{jl}, \quad (2.44)$$

avec $\langle x_{ik} \rangle = 0$. On définit le vecteur aléatoire $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)$ par

$$z_i = \sum_{k=1}^M x_{ik}^2. \quad (2.45)$$

Par définition, \mathbf{Z} est distribué selon la distribution Gamma multivariables¹ au sens de *Krishnamoorthy & Parthasarathy* [103, 104]. La fonction de densité de probabilité associée à z_i (distribution marginale) est une distribution Gamma univariable,

$$P(z_i) = \frac{z_i^{\beta-1} e^{-z_i/\alpha_i}}{\alpha_i^\beta \Gamma(\beta)}, \quad (2.46)$$

de facteur d'échelle $\alpha_i = 2\mathcal{C}_{ii}$ et de facteur de forme $\beta = M/2$ (on notera $z_i \equiv G(\alpha_i, \beta)$). Le moment d'ordre un est calculé à partir de l'équation (2.45),

$$\mathcal{E}(z_i) = \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^M x_{ik}^2\right) = \sum_{k=1}^M \mathcal{E}(x_{ik}^2) = M\mathcal{C}_{ii} = \alpha_i \beta \quad (2.47)$$

Calculons la matrice variance-covariance \mathcal{G} de la FDP Gamma en fonction de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{G}_{ij} = \langle z_i z_j \rangle - \langle z_i \rangle \langle z_j \rangle \quad (2.48)$$

$$= \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^M x_{ik}^2 \sum_{l=1}^M x_{jl}^2\right) - \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^M x_{ik}^2\right) \mathcal{E}\left(\sum_{l=1}^M x_{jl}^2\right) \quad (2.49)$$

$$= \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^M x_{ik}^2 x_{jk}^2\right) - \sum_{k=1}^M \mathcal{E}(x_{ik}^2) \mathcal{E}(x_{jk}^2), \quad (2.50)$$

où on a tenu compte du fait que les vecteurs \mathbf{X}_i sont indépendants deux à deux. Les moments Gaussiens pairs s'expriment en fonction des moments d'ordre deux²,

$$\langle x_i^2 x_j^2 \rangle - \langle x_i^2 \rangle \langle x_j^2 \rangle = 2\mathcal{C}_{ij}^2, \quad (2.51)$$

d'où le résultat

$$\mathcal{G}_{ij} = 2M\mathcal{C}_{ij}^2. \quad (2.52)$$

1. Formellement cette distribution est la version multivariables de la distribution χ^2 , mais comme *Kotz* [102, p. 457] et bien d'autres auteurs, on l'appellera distribution Gamma multivariables.

2. Plus généralement,

$$\text{Cov}(x_i^{2p}, x_j^{2p}) \propto \mathcal{C}_{ij}^{2p}$$

et les moments d'ordre impair sont nuls.

Une preuve de Eq. (2.52) est aussi donnée par Adler [105, p. 169]. Suivant Eq. (2.52), et comme l'a remarqué Cramér [106, p. 317] auparavant, la corrélation entre deux V.A.s distribuées suivant une FDP Gamma K-P ne peut pas être négative. A noter qu'il suffit que la matrice \mathcal{C} du processus normal soit d.p. pour que \mathcal{G} le soit aussi (si ϕ est d.p. alors $a\phi^b$, avec $a, b > 0$ est aussi d.p. [64]). L'amplitude des fluctuations de la variable z_i est donnée en tout point par,

$$R = \frac{\sqrt{\mathcal{G}_{ii}}}{\langle z_i \rangle} = \sqrt{\frac{2}{M}}. \quad (2.53)$$

On remarque d'après Eq. (2.53) que le taux de fluctuation est homogène (ne dépend pas de l'indice i) même si le vecteur \mathbf{Z} est non-homogène, i.e. $\alpha = \alpha_i$.

La fonction caractéristique de la distribution Gamma multivariées est donnée par [107],

$$\mathcal{Z}(\mathbf{a}) = \mathcal{E} \exp\left(i \sum_{i=1}^n z_i a_i\right) = \det(\mathbb{1} - i2\mathcal{C}A)^{-\beta} \quad (2.54)$$

où $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, A est la matrice diagonale de taille $n \times n$ (d'éléments $a_{ii} = a_i$), et $\beta = M/2 = 1/R^2$. L'équation (2.54) est aussi la fonction caractéristique de la distribution des éléments diagonaux de la matrice de Wishart [107].

Nous procédons à fournir une preuve de l'équation (2.46) à partir de Eq. (2.54). On utilise l'argument selon lequel cette distribution marginale est identique à la FDP des V.A.s z_i avec une longueur de corrélation nulle, dont on obtient la fonction caractéristique en posant $\mathcal{C} = \sigma^2 \mathbb{1}$ dans Eq. (2.54),

$$\mathcal{Z}(\mathbf{a}) = \det(\mathbb{1} - 2i\sigma^2 A)^{-\beta} = \prod_{k=1}^n (1 - 2i\sigma^2 a_k)^{-\beta}, \quad (2.55)$$

utilisons la transformée de Fourier qui connecte la FDP à la fonction caractéristique,

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} da_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} da_n \mathcal{Z}(\mathbf{a}) \quad (2.56)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} da_k (1 - 2ia_k\sigma^2)^{-\beta} e^{-iz_k a_k}. \quad (2.57)$$

La factorisation dans l'équation précédente est la conséquence de $\mathcal{C} \propto \mathbb{1}$ et traduit simplement que les V.A.s z_i sont indépendantes deux à deux, i.e. $P(z_1, z_2, \dots, z_n) = P(z_1)P(z_2) \dots P(z_n)$. Il suffit alors de calculer un seul terme du produit dans Eq. (2.57), on commence par effectuer le changement de variable suivant : $\mathcal{Z} = z(1 - i\alpha a)$, $\alpha = 2\sigma^2$,

$$\frac{1}{\alpha(2\pi)^{1/n}} z^{\beta-1} e^{-z/\alpha} i \int d\mathcal{Z} \mathcal{Z}^{-\beta} e^{\mathcal{Z}/\alpha} = \frac{1}{\alpha(2\pi)^{1/n}} z^{\beta-1} e^{-z/\alpha} g(\alpha, \beta), \quad (2.58)$$

où

$$g(\alpha, \beta) = i \int d\mathcal{Z} \mathcal{Z}^{-\beta} e^{\mathcal{Z}/\alpha}. \quad (2.59)$$

Au lieu de calculer l'intégrale dans le plan complexe, on peut se contenter de déterminer g par la condition de normalisation $\int_0^{+\infty} dz P(z) = 1$ ¹. On obtient

$$g(\alpha, \beta) = \frac{(2\pi)^{1/n}}{\alpha^{\beta-1} \Gamma(\beta)} \quad (2.60)$$

et ainsi on retrouve bien Eq. (2.46).

1. Cette façon de procéder est inspirée du travail de Kollo [83, p. 245].

2.3.3.2 Remarques

L'équation (2.52) peut être lue dans les deux sens suivants :

1. on fixe la fonction de corrélation du processus normal (\mathcal{C}) et on en déduit celle du processus Gamma (\mathcal{G}).
2. pour les applications qui nous intéressent, le processus normal n'est qu'une étape intermédiaire pour construire le processus Gamma qui modélise les grandeurs physiques. On impose donc la fonction de corrélation de ce dernier et on en déduit celle des variables normales par la relation $\mathcal{C}_{ij} \propto \pm \sqrt{\mathcal{G}_{ij}/2M}$.

A condition d'opter pour $\mathcal{C}_{ij} = +\sqrt{\mathcal{G}_{ij}/2M}$, dans les deux cas de figures, la propriété d.p. ne pose aucun problème, car selon *Berg et al.* [64, p. 77], si ϕ est d.p. alors ϕ^a l'est aussi pour $a > 0$ ¹.

2.3.3.3 Extension au cas $\beta \in \mathbb{R}^+$

La limitation principale de la distribution Gamma K-P telle que nous l'avons défini précédemment est que l'amplitude des fluctuations ne peut pas être fixée à n'importe quelle valeur dans \mathbb{R}^+ . Nous sommes limités aux valeurs présentées dans le tableau suivant,

M	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$R = \sqrt{2/M}(\%)$	141	100	81.65	70.71	63.25	57.74	53.45	50	...

TABLE 2.5 – Quelques valeurs des amplitudes de fluctuation permises par la distribution χ^2 .

La distribution Gamma K-P peut être étendue au cas où le degré de liberté est un réel positif ($M, \beta \in \mathbb{R}^+$), à condition que la fonction caractéristique $|\mathbb{1} - 2i\mathcal{C}A|^{-1}$ soit infiniment divisible [84]. On rappelle qu'une fonction caractéristique $\phi(\mathbf{a})$ est infiniment divisible si elle peut s'écrire comme

$$\phi(\mathbf{a}) = [\phi_n(\mathbf{a})]^n, \quad (2.61)$$

où ϕ_n est aussi une fonction caractéristique² pour tout entier positif n (voir *Lukacs* [108, p. 79]). En particulier *Griffiths* [109] montre que la fonction caractéristique de la distribution Gamma K-P, donnée par Eq. (2.54), est infiniment divisible si la fonction de corrélation $\rho = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est Markovienne dans le sens où

$$\rho_{ij} = \rho_{ik}\rho_{kj}, \quad i \leq k \leq j. \quad (2.62)$$

La fonction de corrélation exponentielle vérifie cette dernière propriété, et donc dans ce cas la fonction caractéristique donnée par Eq. (2.54) peut être utilisée pour $\beta \in \mathbb{R}^+$, à condition que les fluctuations soient exponentiellement corrélées. Notons également qu'en étendant les valeurs de β à \mathbb{R}^+ , la procédure d'échantillonnage devient plus complexe que dans le cas de la distribution χ^2 .

1. Comme remarqué par *Krishnaiah & Rao* [107], la même distribution Gamma au sens de *Krishnamoorthy & Parthasarathy* pourrait être définie à partir de 2^q distributions normales, ayant toutes la même espérance mathématique et 2^q matrices de variance-covariance différentes. Compte tenu de la symétrie des matrices de variance-covariance et $\mathcal{C}_{ij} \propto \pm \sqrt{\mathcal{G}_{ij}}$ alors $q = n(n+1)/2$. Cependant il n'est pas garanti que chacune des q matrices soit définie-positive. Par exemples pour \mathcal{G} définie par $\mathcal{G}_{ij} \propto \exp(-|i-j|)$ alors \mathcal{C} définie par $(-1)^{ij} \sqrt{\mathcal{G}_{ij}}$ ou $(-1)^{\text{int}(i,j)} \sqrt{\mathcal{G}_{ij}}$ n'est pas définie-positive.

2. Une fonction caractéristique doit être définie-positive, car sa transformée de *Fourier* est une FDP, qui doit être à valeurs positives.

2.3.3.4 Distribution K-P généralisée permettant un taux de fluctuation non-homogène

Dans cette section, nous introduisons une généralisation de la distribution K-P permettant de spécifier un taux de fluctuation différent pour les différentes variables. La distribution K-P originale permet en effet d'avoir des valeurs différentes pour les valeurs moyennes et les variances, mais le rapport de ces deux quantités, qui donne le taux de fluctuation est égal à $R = \sqrt{2/M}$ pour toutes les variables. Or les résultats expérimentaux rappelés dans l'introduction de ce chapitre montrent clairement que le taux de fluctuation dépend des coordonnées radiales et poloïdales dans la machine. Pour obtenir un taux de fluctuation dépendant de la position radiale, il faudrait que le degré de liberté M de la distribution χ^2 en dépende aussi. On associe donc à chaque variable z_i un degré de liberté M_i ,

$$z_i = \sum_{k=1}^{M_i} x_{ik}^2. \quad (2.63)$$

Sans perte de généralité, on considère un taux de fluctuation monotone, e.g., $M_1 < M_2 < \dots < M_n$, alors les vecteurs Gaussiens \mathbf{X}_{M_p} avec $p = 1, \dots, n$, se présentent sous la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= x_{11}, & x_{21}, & \dots & \dots & \dots, & x_{n1} \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{X}_q &= x_{2q}, & \dots & x_{pq}, & \dots, & x_{nq}, & q = M_1 + 1 \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{X}_r &= x_{pr}, & \dots, & x_{nr}, & r = M_1 + p - 1 \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{X}_s &= x_{ns}, & s = M_n. \end{aligned} \quad (2.64)$$

La distribution ainsi définie est tout à fait originale en ce sens qu'elle n'est pas présente dans la littérature. Nous obtenons bien, en utilisant les propriétés des variables Gaussiennes x_{ij} ,

$$R_i = \frac{\sigma_{z_i}}{\langle z_i \rangle} = \sqrt{\frac{2}{M_i}}, \quad (2.65)$$

où $\sigma_{z_i} = \sqrt{\mathcal{G}_{ii}}$ est l'écart-type de la variable z_i .

Calculons à nouveau les éléments de la matrice \mathcal{G} ,

$$\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{E} \left(\sum_{k=1}^{M_i} x_{ik}^2 \sum_{l=1}^{M_j} x_{jl}^2 \right) - \mathcal{E} \left(\sum_{k=1}^{M_i} x_{ik}^2 \right) \mathcal{E} \left(\sum_{l=1}^{M_j} x_{jl}^2 \right) \quad (2.66)$$

$$= \mathcal{E} \left(\sum_{k=1}^{\min(M_i, M_j)} x_{ik}^2 x_{jk}^2 \right) - \sum_{k=1}^{\min(M_i, M_j)} \mathcal{E} \left(x_{ik}^2 \right) \mathcal{E} \left(x_{jk}^2 \right) \quad (2.67)$$

$$= 2 \min(M_i, M_j) \mathcal{C}_{ij}^2, \quad (2.68)$$

où $\min(M_i, M_j)$ signifie le minimum de M_i et M_j . Pour assurer la réalisabilité statistique de cette distribution, il faut qu'à la fois \mathcal{G} et \mathcal{C} soient d.p.s. Cette condition est délicate à réaliser en pratique

pour des profils de taux de fluctuation (i.e. de $M(x)$) arbitraires. Dans le cas où $M(x) \propto x$, le terme $\min(M_i, M_j)$ se réduit à la fonction de corrélation du processus de Wiener [58, 110],

$$W(s, t) = \min(s, t) = \frac{1}{2} (|s| + |t| - |s - t|) \quad s, t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.69)$$

dont le caractère d.p. a été démontré par Schoenberg [111, 112]. En utilisant ce résultat et la propriété selon laquelle le produit de deux fonctions d.p. est aussi une fonction d.p. (voir Berg *et al.* [64]), alors le choix de $M(x) \propto x$ nous assure la propriété d.p. de la fonction \mathcal{G} . Ce point sera utilisé dans les applications présentées dans la section 3.3.1. Ce problème est un problème générique de toutes les distributions construites à partir de Gaussiennes multivariées, et sera rediscuté dans la suite.

Comme pour le cas de la distribution K-P avec un taux de fluctuation constant, il est possible de montrer que la fonction caractéristique de la distribution K-P généralisée est infiniment divisible pour une fonction de corrélation exponentielle, ce qui garantit que l'on peut étendre la distribution à des valeurs de M réelles positives. Ce résultat sera utilisé dans le chapitre suivant.

2.3.3.5 Distribution de Mathai & Moschopoulos (M-M)

Une autre distribution peut nous être utile dans ce travail pour modéliser des champs non-homogènes. Celle-ci est proposée par Mathai & Moschopoulos, et ses principales caractéristiques sont [113] :

1. la construction du vecteur $\mathbf{Z} (z_1, \dots, z_n)$ Gamma multivariable se fait à partir de $n + 1$ V.A.s Gamma indépendantes entre elles, i.e. $x_i \equiv G(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 0, \dots, n$. On pose

$$z_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} x_0 + x_i, \quad i \geq 1. \quad (2.70)$$

La propriété de reproductivité de la distribution Gamma univariable [114] assure que $z_i \equiv G(\alpha_i, \beta_i + \beta_0)$.

2. la fonction caractéristique est donnée par

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} \left(e^{i\mathbf{a}\mathbf{Z}} \right) = \left(1 - i\mathbf{a}\mathbf{a}^\top \right)^{-\beta_0} \prod_{k=1}^n \left(1 - i\alpha_k a_k \right)^{-\beta_k}, \quad (2.71)$$

où $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On en déduit l'espérance, la variance et la covariance du champ \mathbf{Z} de l'Eq. (2.71),

- 3.

$$\mathcal{E}(z_i) = (\beta_0 + \beta_i) \alpha_i. \quad (2.72)$$

- 4.

$$\text{Var}(z_i) = (\beta_0 + \beta_i) \alpha_i^2. \quad (2.73)$$

- 5.

$$\text{Cov}(z_i, z_j) = \beta_0 \alpha_i \alpha_j, \quad i \neq j. \quad (2.74)$$

L'amplitude des fluctuations de la variable z_i est donnée par $R(z_i) = 1/\sqrt{\beta_0 + \beta_i}$. L'avantage de cette distribution par rapport à la distribution K-P est que l'échantillonnage ne nécessite pas de manipulation de matrice de variance-covariance, il se fait simplement en utilisant la forme linéaire donnée par Eq. (2.70) (Cette remarque est importante en pratique, voir section 2.4.1).

L'extension formelle de Eq. (2.71) à un champ continu est immédiate. En effet, il suffit de poser $a_i = \epsilon c_i$ et d'utiliser la limite suivante,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 - x\epsilon)^{1/\epsilon} = e^{-x}. \quad (2.75)$$

Cette extension sera très utile dans les chapitres 3 et 4. Après avoir substitué l'indice k par la variable continue s , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{E} \left(\exp \left(\int_{\Theta} ds a(s) z(s) \right) \right) \\ &= \left(1 - \int_{\Theta} ds a(s) \alpha(s) \right)^{-\beta_0} \exp \left(\int_{\Theta} ds \beta(s) a(s) \alpha(s) \right), \end{aligned} \quad (2.76)$$

où le support Θ est le demi-axe réel positif. On remplace aussi k par la variable continue s dans chacune des équations (2.70), (2.72), (2.73) et (2.74). Les fonctions $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ sont choisies afin de reproduire de façon réaliste les profils de la valeur moyenne et de la variance. Cependant, le choix de la fonction $\alpha(s)$ est contraint par le fait que $\text{Cov}(z(s), z(t))$ doit être une fonction d.p.¹.

A titre d'exemple, on commence par fixer l'amplitude des fluctuations $R(s)$ et le champ moyen $\mu(s)$, ce qui conduit à

$$\text{Cov}(z(s), z(t)) = F(s, t) = \beta_0 R^2(s) R^2(t) \mu(s) \mu(t), \quad s \neq t. \quad (2.77)$$

Il est évident que F n'est pas homogène car elle ne peut dépendre uniquement de la distance $|s - t|$. Dans le cadre des applications de ce travail, R et μ sont des fonctions monotones respectivement décroissante et croissante de la paroi en direction du plasma de coeur. Le choix réaliste des profils exponentiels (Eq. (2.2) pour n_e et Eq. (2.3) pour R avec $\lambda_1 \rightarrow 0$ et $\lambda_2 = l_R$ pour simplifier) assure bien la propriété d.p.². On obtient alors une fonction de covariance de la forme $\exp[-(s+t)/L]$ ³. De manière plus précise, nous avons

$$F(s, t) = \beta_0 \mu_0^2 R_0^4 \exp\left(-\frac{s+t}{L}\right), \quad L = \left(\frac{2}{l_R} - \frac{1}{l_n}\right)^{-1}, \quad s \neq t, \quad (2.78)$$

avec $l_R \leq 2l_n$ afin d'assurer l'affaiblissement des corrélations spatiales lorsque $|s - t| \gg L$. Cela signifie que le taux de fluctuation décroît au moins deux fois plus vite que la croissance du champ moyen. Une analyse simple de l'Eq. (2.78) montre que la décorrélation est d'autant plus forte que s et/ou t croît. Pour voir cela il suffit de considérer deux points centrés autour de t ,

$$F(t, t - \tau) \geq F(t, t + \tau). \quad (2.79)$$

2.3.4 Distribution Log-normale multivariées

Soit $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur où les variables aléatoires x_i sont distribuées suivant une loi de Gauss de moyenne $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ et de matrice de variance-covariance \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{E}(x_i x_j) - \mu_i \mu_j. \quad (2.80)$$

1. Notons que la covariance définie par l'équation (2.74) appartient à la famille des covariances multiplicatives, e.g. *Baba* [115].

2. Ce point n'est pas garanti pour des profils arbitraires. Par exemple, un profil quadratique pour le champ moyen ($\propto s^2$) et en $1/\sqrt{s}$ pour R , ne sont pas permis car selon Eq. (2.77), on obtient $F \propto st$, F n'est pas définie-positive [64, p. 79], et ne peut donc pas être une fonction de covariance.

3. Celle-ci à la forme d'un noyau de *Hankel*, i.e. $\mathcal{H}(s, t) = \varphi(s+t)$, défini-positif, (voir *Berg et al.* [64, p. 69, p. 122]).

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tel que

$$y_i = e^{x_i}. \quad (2.81)$$

La variable aléatoire y_i est distribuée suivant une loi Log-normale,

$$P(y_i) = \frac{1}{y_i \sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{(\ln(y_i) - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right], \quad \sigma_i = \sqrt{\mathcal{C}_{ii}}, \quad (2.82)$$

dont l'espérance est donnée par

$$\langle y_i \rangle = \langle e^{x_i} \rangle = \exp\left(\langle\langle e^{x_i} - 1 \rangle\rangle\right), \quad (2.83)$$

où les crochets doubles désignent les cumulants [116]. En développant e^{x_i} en série de Taylor, et compte tenu du fait que les cumulants d'ordres supérieurs à deux de la distribution de Gauss sont nuls [83], il vient

$$\langle y_i \rangle = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{ii}\right). \quad (2.84)$$

La matrice de variance-covariance L est quant à elle donnée par [84],

$$L_{ij} = \left[\exp(\mathcal{C}_{ij}) - 1\right] \exp\left(\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{ii} + \mathcal{C}_{jj})\right). \quad (2.85)$$

Inversement, on peut écrire la variance-covariance du champ Gaussien (\mathcal{C}) en fonction de celle du champ Log-normal (L),

$$\mathcal{C}_{ij} = \ln\left[\frac{L_{ij}}{\exp\left(\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{ii} + \mathcal{C}_{jj})\right)} + 1\right], \quad (2.86)$$

soit,

$$\mathcal{C}_{ij} = \ln\left[R_i R_j \rho_{ij} + 1\right], \quad R_i = \sqrt{L_{ii}} / \langle y_i \rangle, \quad (2.87)$$

où R_i représente le taux de fluctuation de la V.A. y_i . ρ est la fonction de corrélation définie par

$$\rho_{ij} = L_{ij} / \sqrt{L_{ii} L_{jj}}, \quad \rho_{ii} = 1. \quad (2.88)$$

En utilisant la condition suffisante de la section 2.2.2, on montre que si ρ est exponentielle alors à la fois \mathcal{C} et L sont des fonctions d.p.s. Cependant, il n'existe pas à notre connaissance de résultat général permettant de montrer que \mathcal{C} est définie-positive pour un choix arbitraire de L . On retrouve ainsi une problématique analogue à celle rencontrée dans la section 2.3.3.4. Par exemple, dans le cas homogène où $R_i = R$ et $\langle y_i \rangle = \langle y \rangle$, si l'on impose la fonction de corrélation suivante pour les variables Log-normales,

$$\rho(s) = \exp(-|s|/\lambda) \cos(\omega s), \quad (2.89)$$

qui est d.p. pour $\omega, \lambda > 0$, la covariance de la distribution normale sous-jacente est donnée par

$$\mathcal{C}(s) = \ln\left[R^2 \exp(-|s|/\lambda) \cos(\omega s) + 1\right]. \quad (2.90)$$

Il est facile, en utilisant le critère de *Sylvester*, de vérifier que cette fonction n'est en général pas d.p.. Il est possible de contourner cette difficulté de la manière suivante. Si $R < 1$, on développe Eq. (2.87) au premier ordre pour obtenir

$$\mathcal{C}_{ij} \approx R^2 \rho_{ij}. \quad (2.91)$$

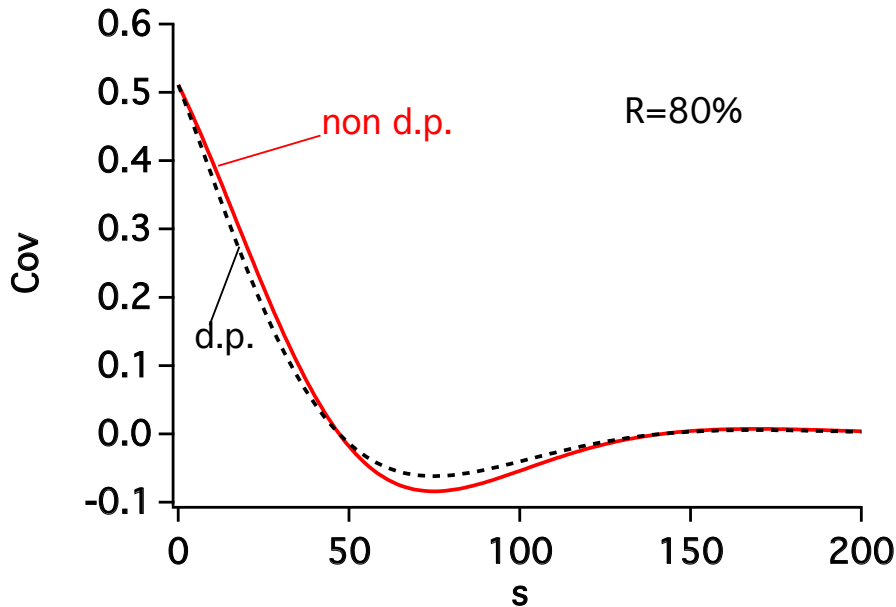


FIGURE 2.3 – Fonction non définie-positive (courbe rouge) donnée par Eq. (2.90), et son approximation d.p. (courbe noire).

Cette relation montre que dans la limite des faibles taux de fluctuations ($R \leq 100\%$), la fonction de corrélation Gaussienne est très proche de la fonction de corrélation Log-normale. On procède donc en choisissant une fonction ρ d.p. pour modéliser le processus physique étudié, puis on approxime la fonction de corrélation Gaussienne à l'aide de la relation précédente. En pratique, les résultats sont très bons même pour des taux de fluctuation de 80% ($R = 0.8$), à condition de remplacer R^2 par $\ln(1 + R^2)$ dans Eq. (2.91)¹, comme le montre la Fig. 2.3. La fonction de covariance Gaussienne exacte (courbe rouge) et approchée (courbe noire) sont très proches, bien que la première ne soit pas d.p..

2.4 Echantillonnage de V.A.s corrélées

Dans cette partie, nous nous intéressons à la génération de variables aléatoires à partir d'une FDP multivariées P . De manière plus générale, le problème consiste à générer des nombres aléatoires non-indépendants. Il existe plusieurs techniques pour ce faire, dont l'idée de base est simple. Il s'agit de commencer par générer des nombres aléatoires indépendants (x_1, \dots, x_n) distribués selon la marginale à un point de P , et de construire de nouveaux nombres aléatoires (y_1, \dots, y_n) , par exemple en formant des combinaisons linéaires des x_i , i.e.

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j. \quad (2.92)$$

1. Ce dernier point permet d'imposer la valeur en zéro de la fonction de corrélation, i.e. la variance.

Un choix judicieux des coefficients a_{ij} permet d'obtenir la matrice de variance-covariance désirée. Les coefficients a_{ij} peuvent être obtenus par la factorisation de *Cholesky* de la matrice de corrélation, méthode développée dans le paragraphe suivant. Cependant, cette méthode n'est utilisable pour générer des nombres aléatoires distribués selon une FDP multivariées donnée que dans des cas particuliers, e.g. pour une distribution Gaussienne multivariées. En effet, il est facile de voir que la distribution de y_i , qui est une somme de variables aléatoires ayant la même distribution, n'est pas forcément connue. La propriété de stabilité de la Gaussienne assure que la méthode est utilisable. Pour de grandes matrices de corrélation, la factorisation de *Cholesky* est couteuse en temps de calcul et surtout en mémoire, nous présenterons alors des techniques d'échantillonnages très légères basées sur les processus autorégressifs. Finalement, nous présentons brièvement la méthode basée sur le développement de *Karhunen-Loève*, qui nous sera utile dans le chapitre 4.

2.4.1 La Décomposition de *Cholesky*

Toute matrice symétrique et définie-positif/semi-positif peut s'écrire sous la forme [117, p. 496],

$$\mathcal{C} = LL^\top, \quad (2.93)$$

où L est unique et représente la matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous positifs. La décomposition de *Cholesky* d'une matrice $m \times m$ nécessite $m^3/3$ opérations ('flops') [118, p. 176]. La décomposition d'une telle matrice peut nécessiter des temps de calcul considérables pour m grand, mais surtout requiert une capacité de mémoire importante. En effet, prenons l'exemple d'un domaine 2D discrétisé en 300×300 cellules, la matrice de corrélation est alors de taille 90000×90000 , et a 4×10^9 éléments indépendants. Une telle matrice requiert 30 Gb de stockage en simple précision ¹. L'intérêt de la décomposition de *Cholesky* est qu'elle permet de générer des nombres aléatoires corrélés en passant par un simple échantillonnage de nombres indépendants. Voici à titre d'exemple l'utilisation de la décomposition de *Cholesky* pour un vecteur Gaussien \mathbf{X} d'espérance $\boldsymbol{\mu}$. On écrit alors

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})U^{-1}L^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top, \quad (2.94)$$

où $U = L^\top$. En posant

$$\mathbf{u} = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})U^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^\top = L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top, \quad (2.95)$$

le problème se ramène à l'échantillonnage d'une distribution univariée normale d'espérance 0 et de variance 1 ². En effet, la variance-covariance du nouveau vecteur \mathbf{u} est la matrice identité,

1. Ceci conduit à un temps de calcul de l'ordre de 100 s sur une station de travail de 80 GFlops dont nous disposons à l'heure actuelle. Cependant cette puissance de calcul ne peut être réellement exploitée qu'en utilisant des bibliothèques mathématiques optimisées pour l'architecture de calcul utilisée. Pour ce travail, nous avons utilisé la bibliothèque Math Kernel Library (MKL) [119].

2. Les nombres aléatoires Gaussiens indépendants peuvent par exemple être échantillonnés en utilisant la méthode de *Box-Muller*. En effet si les variables w_1 et w_2 suivent une loi uniforme de support $[0, 1]$, alors

$$u = \mu + \sigma \sqrt{-2 \ln(w_1)} \cos(2\pi w_2)$$

est distribué suivant $\mathcal{N}_{\mu, \sigma}$. Il est aussi possible d'obtenir un couple (u_1, u_2) de V.A.s Gaussiennes indépendantes en utilisant le même couple (w_1, w_2) où u_1 est donné par l'équation précédente et u_2 est obtenu en remplaçant la fonction cos par sin dans cette même équation. Notons que cette méthode est également implémentée dans la bibliothèque MKL.

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^\top\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n u_i \mathbb{1} u_j\right) \quad (2.96)$$

$$=\prod_{i=1}^n \exp\left(-u_i^2/2\right). \quad (2.97)$$

On remonte ensuite au vecteur \mathbf{X} par inversion de Eq. (2.95),

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}U + \boldsymbol{\mu}. \quad (2.98)$$

Cette méthode basée sur la décomposition de *Cholesky* fonctionne bien pour la distribution Gaussienne car cette dernière est stable [114]. En effet, la propriété de stabilité, qui stipule qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est distribuée suivant la même FDP que les élément de la somme (seul un facteur d'échelle intervient), garantit que la marginale de $X_i = \sum_j U_{ij}u_j + \mu_i$ est bien Gaussienne. Il est donc possible d'utiliser la méthode basée sur la décomposition de *Cholesky* pour toutes les distributions multivariées construites à partir de la Gaussienne multivariées, et donc en particulier pour les distributions Log-normales et Gamma K-P.

Afin d'illustrer l'échantillonnage en utilisant la décomposition de *Cholesky* pour la distribution Gamma K-P, on considère l'évolution d'un champ plasma (domaine 2D, $N \times N$), sur T pas de temps t_1, t_2, \dots, t_T . La matrice de variance-covariance correspondante est de taille $TN^2 \times TN^2$. On commence par générer M séries de TN^2 nombres aléatoires Gaussiens indépendants, notés $\mathcal{B}_j = (\mathcal{B}_{1j}, \mathcal{B}_{2j}, \dots, \mathcal{B}_{N^2j}, \dots, \mathcal{B}_{TN^2j})$, $j = 1, \dots, M$. Afin de construire les T champs plasmas bi-dimensionnels $X(x_n, y_m, t_l)$ ($t_l = 1, \dots, T$),

$$X(x_n, y_m, t_l) = \sum_{j=1}^M \mathcal{B}_{kj}^2, \quad (2.99)$$

il est nécessaire de relier l'indice k au triplet d'indices (n, m, l) . Un calcul algébrique simple permet d'obtenir

$$l = \text{int}\left(\frac{k}{N^2}\right) + 1, \quad (2.100)$$

$$n = \text{int}\left(\frac{k}{N}\right) - (l-1)N, \quad (2.101)$$

$$m = k - y(t)N - (l-1)N^2, \quad (2.102)$$

où "int" désigne la partie entière. Les figures 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7 montrent des cartes 2D du champs \mathcal{B} pour différentes fonctions de variance-covariance.

La figure 2.4(a) montre une carte de \mathcal{B} pour une fonction de corrélation exponentielle à faible longueur de corrélation ($\ell = 5$ en unité arbitraire), ce qui se traduit par des structures très localisées dont la taille typique est de l'ordre de ℓ . Inversement les structures dans Fig. 2.4(b) sont de taille importante en accord avec la grande longueur de corrélation ($\ell = 100$). La figure 2.5(a) montre les effets de l'anisotropie introduite par des longueurs de corrélation différentes pour chaque direction, cela se traduit par un allongement des structures dans la direction horizontale ($l_x > l_y$). La figure 2.5(b) montre les effets de la non-homogénéité de la fonction de corrélation, dans ce cas il n'apparaît pas de structures régulières.

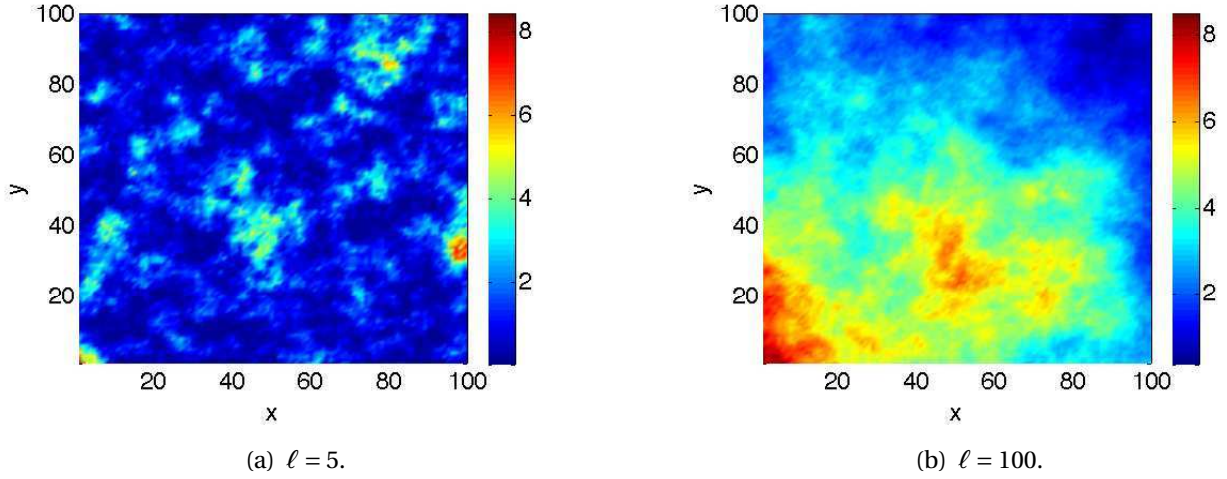


FIGURE 2.4 – Cartes du champ \mathcal{B} distribué suivant la distribution Gamma multivariée K-P avec $\langle \mathcal{B} \rangle = 1$ et $R = 80\%$. Les fluctuations sont exponentiellement corrélées ($\rho = \exp(-\|\mathbf{r}\|/\ell)$).

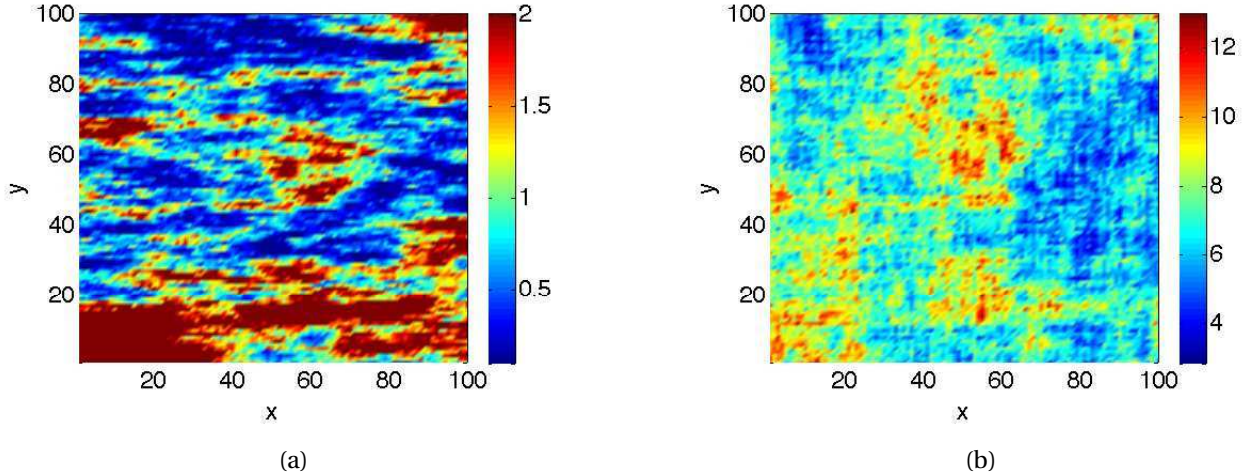


FIGURE 2.5 – Deux champs distribués suivant la FDP Gamma multivariée K-P. (a) champ généré avec la fonction de corrélation anisotrope $\exp(-\sqrt{x^2/\ell_x^2 + y^2/\ell_y^2})$ avec $\ell_x = 20, \ell_y = 5$, (b) champ non-homogène généré avec la fonction \mathcal{C}_{15} et $a = 1/50$.

La figure 2.6(a) montre la carte de \mathcal{B} à l’instant $t = 0$ et la figure 2.6(b) montre son évolution en $t = 5$. La dépendance temporelle a pour effet de dissiper les structures formées initialement. La figure 2.7(a) montre les effets simultanés de l’anisotropie et la non-homogénéité de la fonction de corrélation, les structures sont allongées dans la direction horizontale et sont de plus en plus intenses en direction des x croissants (dû au champ moyen non-homogène et croissant). La figure 2.7(b) montre l’amplitude des fluctuations du champ \mathcal{B} qui est clairement décroissante dans la direction de x croissant.

Cette technique d’échantillonnage ne peut pas être appliquée à la distribution K-P étendue aux valeurs non entières de M (voir paragraphe 2.3.3.3), car dans ce cas on ne peut plus écrire la V.A. Gamma comme une somme de carrés de nombres Gaussiens. Un besoin d’échantillonner des V.A.s Gamma caractérisées par leur matrice de variance-covariance apparut au début des années 60, et continue d’être d’actualité. Un exemple concerne l’étude de l’atténuation des signaux électromagnétiques dont la V.A. w suit la distribution de Nakagami donnée par $\mathfrak{K}(w) = P(w^2)$ [120],

où P est la distribution Gamma définie par Eq. (2.46). *Ronning* [121] propose une méthode astucieuse pour générer des V.A.s Gamma corrélées en utilisant des V.A.s Gamma indépendantes. La méthode est basée sur des matrices d'incidence ('incidence matrix'), i.e. des matrices dont les éléments sont 0 ou 1. Cependant sa mise en oeuvre, et en particulier la détermination de la matrice d'incidence à partir de la matrice de variance-covariance est non triviale. *Gaver & Lewis* [122] développent une méthode basée sur la représentation autorégressive du premier ordre, dont la seule limitation étant que la fonction de corrélation ne peut être qu'exponentielle (voir section 2.4.2). Ce type de techniques est discuté dans le paragraphe suivant.

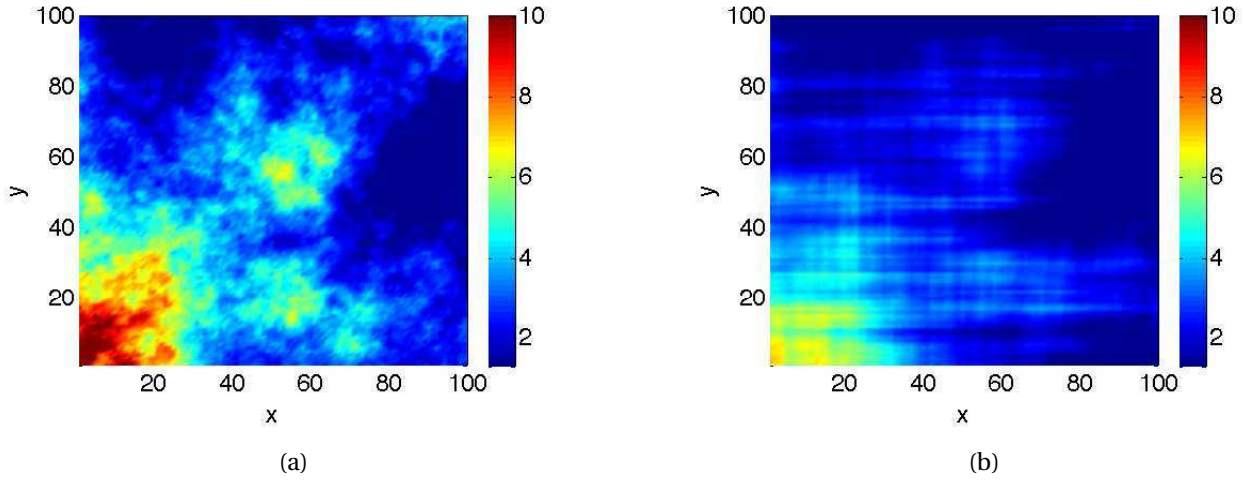


FIGURE 2.6 – Deux réalisations du champ \mathcal{B} distribués suivant la FDP K-P, échantillonnés avec \mathcal{C}_{10} (pour $\mathbf{r} + \mathbf{v}t$), $a = 1/30$, $v_x = 5$ et $v_y = 1$. (a) $t = 0$ et (b) $t = 5$.

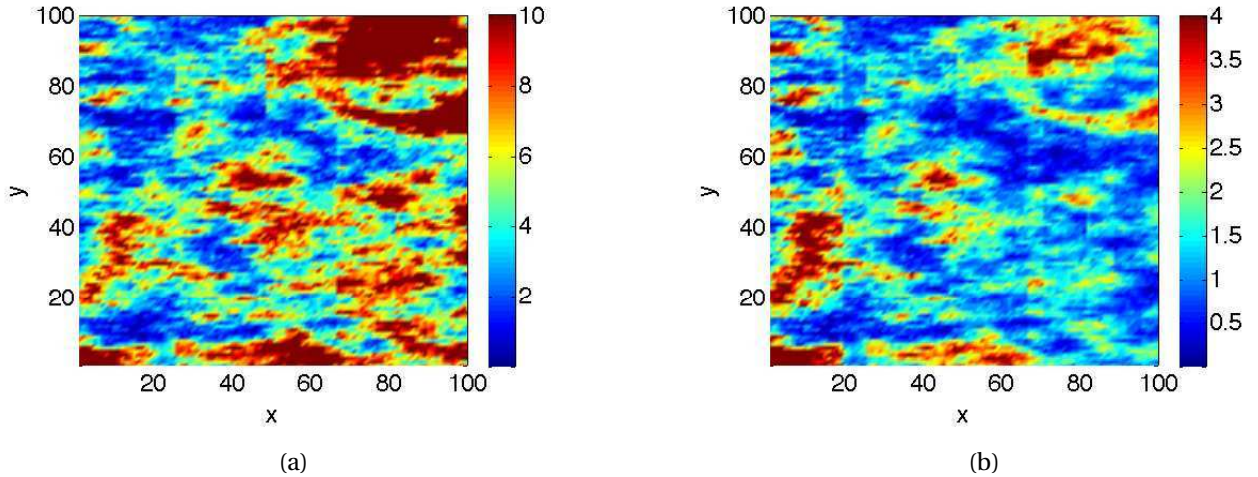


FIGURE 2.7 – Une réalisation du champ \mathcal{B} et ses fluctuations en utilisant la distribution Gamma K-P non-homogène introduite dans la section 2.3.3.4 avec la fonction de corrélation $\exp(-\sqrt{x^2/\ell_x^2 + y^2/\ell_y^2})$, $\ell_x = 15$ et $\ell_y = 5$. (a) une réalisation du champ $\mathcal{B}(x, y)$ non-homogène et anisotrope, (b) $\mathcal{B}(x, y)/\langle \mathcal{B}(x, y) \rangle$.

2.4.2 Schémas autorégressifs

Les schémas autorégressifs consistent à écrire une V.A. à l'instant t (ou à la position s), comme une combinaison linéaire des valeurs à des instants antérieurs (ou à des positions précédentes) de cette même variable,

$$X_t = a_{t-1}X_{t-1} + a_{t-2}X_{t-2} + \dots + a_1X_1 + b_t, \quad (2.103)$$

où tous les coefficients vérifient $a < 1$. Le cas le plus simple correspond à la situation où X_t s'écrit en fonction de X_{t-1} uniquement (on écrit $X_{t+1} = X(t + \delta t)$),

$$X(t + \delta t) = a(t)X(t) + b(t + \delta t). \quad (2.104)$$

Le processus ainsi obtenu est appelé "processus autorégressif du premier ordre". Il est important de remarquer que la V.A. b est évaluée en $t + \delta t$, et est donc indépendante de $X(t)$ dans Eq. (2.104).

La propriété essentielle de ces processus est que les V.A.s sont exponentiellement corrélées,

$$\rho(t, t') = e^{-|t-t'|/\tau}, \quad \text{avec } \tau = -\delta t / \ln \langle a \rangle, \quad (2.105)$$

voir Priestley [59, p. 120] ou Yaglom [58, p. 78] pour la démonstration de ce résultat. La stationnarité du processus est un problème délicat, en d'autres termes quelles sont les conditions sur les processus $a(t)$ et $b(t)$ telles que la V.A. X soit à tout instant distribuée suivant exactement la même FDP. Ce problème a des solutions analytiques pour les processus Gamma [122] et Beta [123].

Dans la suite, nous allons considérer l'exemple du processus Gamma¹ autorégressif du premier ordre, défini par $X(t + \delta t) = aX(t) + b(t + \delta t)$, où a est une constante telle que $a < 1$. Comme mentionné précédemment, la fonction de corrélation de ce processus est exponentielle, avec un temps de corrélation $\tau = -\delta t / \ln(a)$. La fonction caractéristique de la V.A. b s'écrit en fonction de celle de la V.A. X comme suit,

$$\phi_b(s) = \frac{\phi_X(s)}{\phi_X(as)}. \quad (2.106)$$

Lorsque X est une V.A. distribuée suivant $G(\alpha, \beta)$ alors Eq. (2.106) admet la solution suivante [122],

$$\phi_b(s) = \left(\frac{1 + a\alpha s}{1 + \alpha s} \right)^\beta = \left(a + (1-a) \frac{1}{1 + \alpha s} \right)^\beta. \quad (2.107)$$

Considérons les deux cas particuliers $\beta = 2$ ($R = 70\%$) et $\beta = 3$ ($R = 57\%$), pour lesquels l'Eq. (2.107) donne

$$\beta = 2, \quad \phi_b(s) = a^2 + 2a(1-a) \frac{1}{\alpha s + 1} + (1-a)^2 \left(\frac{1}{\alpha s + 1} \right)^2, \quad (2.108)$$

et

$$\beta = 3, \quad \phi_b(s) = a^3 + 2a^2(1-a) \frac{1}{\alpha s + 1} + 2a(1-a)^2 \left(\frac{1}{\alpha s + 1} \right)^2 + (1-a)^3(1-a)^2 \left(\frac{1}{\alpha s + 1} \right)^3. \quad (2.109)$$

Par conséquent, pour $\beta = 2$ la V.A. b est distribuée suivant une combinaison² d'une FDP exponentielle de paramètre α , une FDP Gamma de paramètre (α, β) et d'une FDP de Dirac centrée en 0, affectées respectivement des poids $2a(1-a)$, $(1-a)^2$ et a^2 . L'échantillonnage se fait donc en deux étapes, on génère une V.A. u suivant une distribution uniforme. Pour l'illustration on considère $2/3 < a < 1$ et donc $a^2 = p_1 > 2a(1-a) = p_2 > (1-a)^2$. Si $u < p_1$ alors $b = 0$, si $p_1 < u < p_1 + p_2$

1. Le cas du processus Beta a également été traité dans la littérature [123].

2. "mixed distribution".

alors b est échantillonnée suivant une FDP exponentielle de paramètre α , enfin si $p_1 + p_2 < u < 1$, alors b est distribuée suivant $G(\alpha, \beta)$. La figure 2.8 montre deux histoires du champ X distribué suivant une distribution Gamma pour deux temps de corrélation en unité arbitraire, $\tau = 4$ (courbe bleue), et $\tau = 40$ (courbe rouge). L'évolution du champ X est clairement plus lisse pour $\tau = 40$ que pour $\tau = 4$, ce qui traduit des corrélations temporelles plus fortes. La succession de décroissances exponentielles résulte d'intervalles de temps sur lesquels $b = 0$, et où l'évolution du champ X suit simplement la loi $X(t + \delta t) = aX(t)$. Aux instants pour lesquels $u > p_1$, on ajoute un nombre b échantillonné selon une loi exponentielle ou Gamma, ce qui se traduit par un saut. Lorsque le temps de corrélation augmente, i.e. lorsque a se rapproche de 1, p_1 augmente et la longueur des intervalles où l'on observe une décroissance exponentielle augmente.

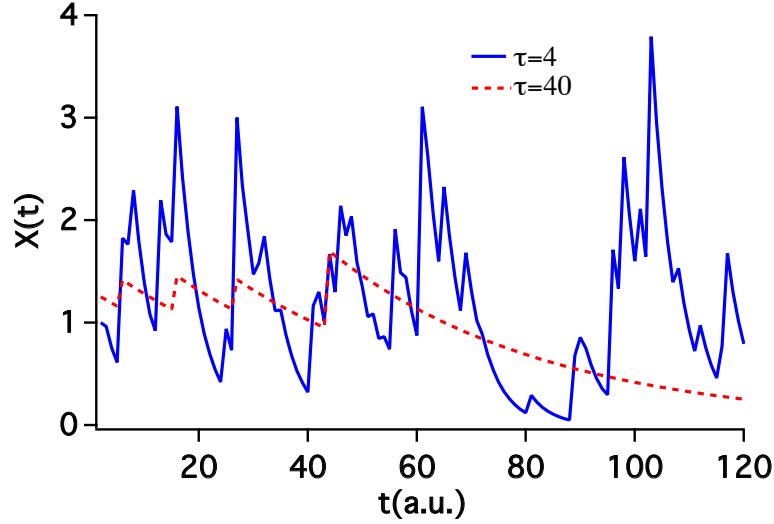


FIGURE 2.8 – Deux histoires du champ $X(t)$, distribué suivant une FDP Gamma pour les temps de corrélation 4 (courbe bleue) et 40 (courbe rouge). La valeur moyenne est $\mu = 1$, $R = 70\%$ et $\delta t = 1$.

2.4.3 Développement de Karhunen-Loève (K-L)

La représentation dite de K-L consiste [88] à développer le processus $X(t)$ sur la base $f_k(t)$ des fonctions propres de l'opérateur (\mathcal{C})

$$\int_a^b \mathcal{C}(t, t') f_k(t) dt = \lambda_k f_k(t'), \quad (2.110)$$

où $\mathcal{C}(t, t') = \langle X(t)X(t') \rangle - \langle X(t) \rangle \langle X(t') \rangle$ est la fonction de variance-covariance du processus. Les fonctions propres f_k forment un ensemble orthonormé complet de fonctions sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f_k(t) f_l(t) dt = \delta_{kl}. \quad (2.111)$$

On a donc

$$X(t) = \langle X \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \sqrt{\lambda_k} f_k(t), \quad (2.112)$$

où $\langle \zeta \rangle = 0$ et $\langle \zeta_k \zeta_l \rangle = \delta_{kl}$. Les variables ζ sont reliées au processus stochastique $X(t)$ par

$$\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b X(t) f_k(t) dt \quad (2.113)$$

et les corrélations en temps sont introduites par la dépendance temporelle des fonctions propres $f_k(t)$ de la fonction de variance-covariance. Le développement de K-L est optimal dans le sens où l'erreur quadratique moyenne qui résulte d'une troncature du développement à un ordre donné est minimale [88]. Autrement dit, tout autre développement sur une base différente conduit à une erreur plus grande. Si $X(t)$ est un processus Gaussien, alors les variables ζ_k sont Gaussiennes et indépendantes, ce qui facilite grandement le processus d'échantillonnage. La première difficulté du développement K-L réside dans le calcul des valeurs propres et des fonctions propres associées pour une fonction de corrélation donnée. Ce calcul peut cependant être fait analytiquement dans le cas d'une fonction de covariance exponentielle [88]. La seconde difficulté est la détermination de l'indice de troncature de la somme infinie dans l'Eq. (2.112). Dans le cas d'une covariance exponentielle, cet indice est d'autant plus élevé que la longueur de corrélation est petite car dans ce cas les valeurs propres sont du même ordre, alors que quelques valeurs propres dominent les autres valeurs propres pour une grande longueur de corrélation [13].

En conclusion, la représentation de K-L offre des possibilités intéressantes pour implémenter des fluctuations stochastiques dans un code de transport, en particulier pour les distributions dérivées de la Gaussienne. Cette approche a été utilisée récemment dans le cas d'une distribution Log-normale [13]. En ce qui nous concerne, nous utiliserons le développement de K-L lorsque nous chercherons à dériver un modèle de transport à gros grains (transport effectif) pour les particules neutres, dans le chapitre 4 (voir Annexe A.1).

2.5 Synthèse et conclusion

La distribution multivariées K-P est la candidate favorite pour la modélisation des fluctuations et leur corrélations. Cette distribution bénéficie de propriétés très pratiques, autant sur le plan analytique, car elle dispose d'une fonction caractéristique¹, que sur le plan de l'échantillonnage en utilisant la décomposition de *Cholesky* ou le schéma autorégressif du premier ordre. Cependant la distribution K-P souffre d'un défaut essentiel qui consiste à ce que la fonction de corrélation est à valeurs positives ($\rho \geq 0$). La distribution Log-normale nous permet de considérer des fonctions de corrélation à valeurs négatives, cependant la fonction caractéristique de cette FDP reste un sujet délicat. La décomposition de *Cholesky* a l'énorme avantage de se prêter à l'échantillonnage des fluctuations spatiotemporelles suivant les distributions K-P et Log-normale dans toutes les dimensions (1D, 2D et 3D), ce qui est très utile pour l'implémentation des fluctuations spatiotemporelles dans les codes de transport Monte Carlo. Cet avantage fait défaut aux schémas autorégressifs qui fonctionnent bien en 1D mais qui deviennent extrêmement compliqués lorsqu'on passe en 2D. L'exemple commun à cette extension en 2D est le modèle des plus proches voisins, qui consiste à écrire la V.A. dans le plan (x, y) en fonction de ses quatre voisins adjacents et dont la fonction de corrélation est une fonction de *Bessel* [124].

1. La fonction caractéristique est une grandeur très importante car elle nous permettra de calculer analytiquement la moyenne statistique de l'épaisseur optique.

Chapitre 3

Effets des fluctuations turbulentes sur les profils de densité et les sources de particules moyennes

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les distributions multivariées introduites dans le chapitre précédent pour étudier les effets des fluctuations de la densité plasma (n_e) sur le transport des particules neutres. L'essentiel de notre effort portera sur un modèle de transport très simple en géométrie unidimensionnelle, pour lequel des résultats analytiques pour la densité moyenne et la source d'ionisation peuvent être obtenus. La solution de *Smirnov* obtenue dans le chapitre 1 nous permettra de discuter des effets de la diffusion dans l'espace des vitesses (qui résulte ici essentiellement des réactions d'échange de charge). Ces résultats, qui permettent de mettre en évidence les paramètres de contrôle du problème, sont comparés à des simulations numériques réalisées par le code Monte Carlo EIRENE. Nous retrouverons un certain nombre de comportements mis en évidence dans la littérature sur le transport linéaire dans les milieux stochastiques, lorsque les fluctuations sont Gaussiennes ou dans le cas d'un mélange diphasique (mélange statistique à deux niveaux).

Nous commencerons par préciser le modèle de recyclage à la paroi, dont les échelles de temps peuvent varier de façon importante en fonction des mécanismes élémentaires mis en jeu. Puis nous calculerons et discuterons les profils de la densité et de la source d'ionisation moyenne résultant des fluctuations décrites par une distribution Gamma K-P. Nous présenterons également des résultats obtenus avec les distributions Gamma K-P généralisée et la distribution Gamma M-M, qui permettent de décrire des situations où le taux de fluctuations n'est pas constant dans l'espace, avec des limitations différentes. Pour conclure, nous discuterons la sensibilité des résultats obtenus au choix du modèle.

3.1 Modèles de recyclage à la paroi

Notre point de départ est la solution de *Smirnov* donnée par Eq. (1.42), dans laquelle nous ne considérons pas dans un premier temps le processus d'échange de charge (ce qui est tout à fait valable pour le transport des molécules ou des atomes d'impuretés). Dans le cas d'atomes ou de molécules mono-énergétiques à la vitesse v ("one speed approximation"), la densité de neutres est simplement donnée par

$$\mathcal{N}(x, t) = \frac{\Gamma_0(t)}{v} \exp\left(-1/v \int_0^x v(s, t) ds\right), \quad (3.1)$$

où $\Gamma_0(t)$ est la densité de flux de neutres à la paroi (située en $x = 0$) à l'instant t , et v le taux d'ionisation par impact électronique. Nous nous sommes placés ici dans le cadre de l'approximation

adiabatique discutée dans le paragraphe 1.4.2.3. On considère que v est simplement proportionnel à la densité, i.e. on néglige les contributions des niveaux excités de l'atome à l'ionisation. Cette approximation est raisonnable pour des conditions typiques de plasma de bord dans la chambre principale¹, et va nous permettre de mener à bien les calculs analytiques. En effet, dans ce cas les FDPs de n_e et de v sont identiques à un facteur près, à savoir $P(n_e) = \langle \sigma_{ie} v_e \rangle P(v)$. Dans la suite on ne fera donc pas de différence entre les propriétés statistiques de n_e et v . Il nous reste maintenant à spécifier les propriétés du flux de neutres Γ_0 , qui sont liées au processus de recyclage. Les ions du plasma qui heurtent la paroi peuvent subir différents processus élémentaires décrits dans le chapitre 1. Ce qui nous intéresse maintenant est de préciser le lien entre le flux plasma instantané $\Gamma_p(t)$, qui varie sur une échelle de temps typique de la turbulence τ_{turb} , et le flux de neutres résultant. Nous allons considérer deux cas limites en fonction du temps caractéristique du phénomène de recyclage considéré τ_{rec} , qui mesure le temps de réponse du mur au flux plasma incident. En supposant une relation de linéarité entre le flux plasma incident et le flux de neutres recyclés, on peut écrire une relation du type

$$\Gamma_0(t) = \int_{-\infty}^t dt' h(t-t') \Gamma_p(t'), \quad (3.2)$$

où $h(t-t')$ est un noyau décrivant la réponse temporelle du mur, prenant des valeurs appréciables sur une durée de l'ordre de τ_{rec} .

3.1.1 Recyclage lent ($\tau_{\text{rec}} \gg \tau_{\text{turb}}$)

Dans le cas où $\tau_{\text{rec}} \gg \tau_{\text{turb}}$, $h(t-t')$ varie très lentement devant $\Gamma_p(t)$ et l'Eq. (3.2) peut s'interpréter comme une moyenne temporelle sur une durée longue devant τ_{turb} , d'où

$$\Gamma_0(t) \simeq \langle \Gamma_p \rangle. \quad (3.3)$$

Dans le cas du recyclage lent nous avons donc une condition aux limites déterministe (non-stochastique). Ce cas est pertinent pour décrire la désorption de molécules ou d'atomes.

3.1.2 Recyclage rapide ($\tau_{\text{rec}} \ll \tau_{\text{turb}}$)

Dans le cas inverse où $\tau_{\text{rec}} \ll \tau_{\text{turb}}$, le noyau $h(t-t')$ peut être approximé par $\delta(t-t')$ et le flux de neutres suit instantanément les variations du flux plasma,

$$\Gamma_0(t) \simeq \Gamma_p(t). \quad (3.4)$$

Le recyclage rapide correspond donc à une condition aux limites stochastique, couplée aux propriétés statistiques du plasma. Pour obtenir un modèle permettant de faire le calcul, nous allons de plus supposer que le flux plasma peut être décrit par $\Gamma_p = v_{\text{eff}} n_e(x, t)$, où v_{eff} est une vitesse effective non fluctuante. Autrement dit, nous attribuons les fluctuations de flux au champ de densité, et non au champ de vitesse. Cette approximation nous permettra de comprendre les effets physiques résultant du recyclage rapide, et nous donnera une borne supérieure pour les effets résultant du comportement temporel de la source. Nous posons donc

$$\Gamma_0(t) = v_{\text{eff}} n_e(x=0, t) = v_{\text{eff}} v(x=0) / \langle \sigma_{io} v_e \rangle. \quad (3.5)$$

Cette description est réaliste pour les ions rétro-diffusés en tant qu'atomes, étant donné les échelles de distance et les vitesses en jeu (les échelles de temps caractéristiques sont de l'ordre de quelques 10^{-12} s.).

1. Selon le modèle collisionnel-radiatif de Sawada & Fujimoto [125], il s'agit d'une bonne approximation pour $n_e < 10^{13} \text{ cm}^{-3}$.

3.2 Résultats analytiques pour la distribution K-P

3.2.1 Calcul des valeurs moyennes des grandeurs associées aux neutres par le code EIRENE

Dans la suite, nous allons comparer nos résultats analytiques à des calculs réalisés par le code de transport de neutres EIRENE, qui est basé sur une méthode de type Monte Carlo. Nous avons implémenté un générateur de cartes de n_e stochastiques, dont la statistique est donnée par la distribution Gamma K-P. Pour cela, nous avons utilisé la factorisation de *Cholesky* de la matrice de corrélation discutée dans le chapitre précédent. Le calcul de la moyenne sur les fluctuations de la densité plasma se fait alors en échantillonnant un grand nombre de cartes de densité (typiquement jusqu'à 10^4), et en résolvant l'équation de *Boltzmann* pour chacune de ces cartes. Dans le cas d'un problème de transport unidimensionnel et monocinétique EIRENE fournit la solution exacte de l'équation de *Boltzmann* en ne lançant qu'une seule particule, grâce à un estimateur particulier ("conditional expectation estimator").

3.2.2 Expression de $\langle \mathcal{N}^p \rangle$ dans le cas du recyclage lent

On rappelle que dans le cadre de la distribution de *Krishnamoorthy & Parthasarathy* le taux de fluctuation R est homogène, i.e. ne dépend pas de la position spatiale. Par contre, la valeur moyenne de la densité peut dépendre de l'espace. Afin d'utiliser les résultats de l'intégrale Gaussienne généralisée présentés dans la section 2.3.1, on discrétise l'intégrale dans l'exponentielle de Eq. (3.1),

$$\exp\left(-1/\nu \int_0^x v(s) ds\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=1}^k v_i\right). \quad (3.6)$$

En pratique, le choix du pas de discrétisation $\epsilon = x/k$, doit se faire de manière à rendre compte des structures turbulentes de taille typique, cette dernière étant de l'ordre de la longueur de corrélation ℓ . Il suffit donc de prendre,

$$\epsilon \ll \ell \quad \text{avec} \quad x = k\epsilon. \quad (3.7)$$

Les coefficients v_i dans Eq. (3.6) sont des V.A.s distribuées suivant la FDP K-P. Dans la figure 3.1, des réalisations du champ v sont présentées pour différentes valeurs de la longueur de corrélation avec $k = 60$ et $\epsilon = 1$. On remarque que les profils des histoires du champ sont de plus en plus lisses lorsque la longueur de corrélation augmente, ce qui traduit le degré de dépendance statistique. En utilisant Eq. (2.45), on réécrit Eq. (3.6) en fonction des variables Gaussiennes g_{ij} ,

$$\exp\left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=1}^k v_i\right) = \exp\left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^M g_{ij}^2\right), \quad (3.8)$$

et la densité moyenne est obtenue en calculant l'intégrale multiple de Eq. (3.8) sur M distributions normales à k -variables, données par Eq. (2.31), ce qui conduit à

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dg_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dg_k \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \left((\mathcal{C}_k^{-1})_{ij} + 2\frac{x}{k\nu} \delta_{ij} \right) g_i g_j \right) \right]^M. \quad (3.9)$$

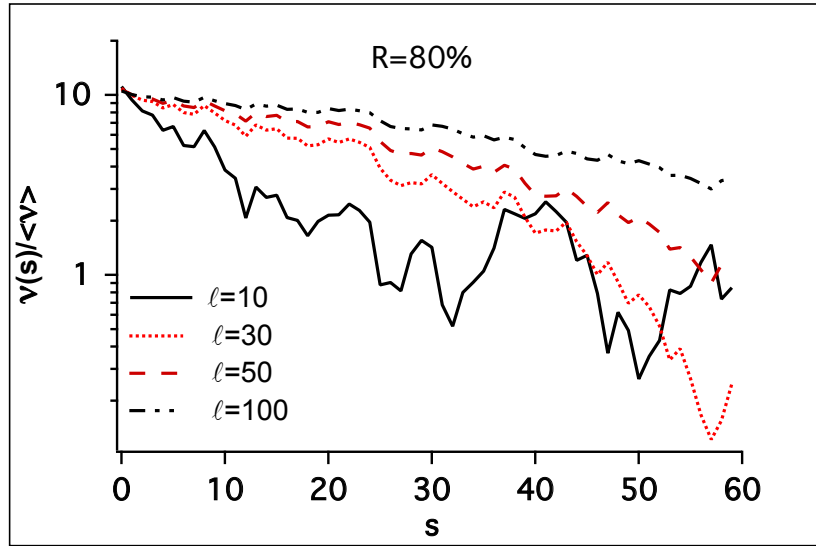


FIGURE 3.1 – Réalisations du champ de la fréquence d'ionisation par impact électronique $v(s)$ pour différentes valeurs de la longueur de corrélation ℓ . La première V.A. générée est la même pour toutes les longueurs de corrélation car on a utilisé la même graine ('seed') pour le générateur de nombres pseudo-aléatoires à chaque réalisation.

En utilisant la condition de normalisation donnée par Eq. (2.32) il vient,

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_0}{\nu} \left[\frac{\det(\mathcal{C}_k^{-1})}{\det\left(\mathcal{C}_k^{-1} + 2\frac{x}{k\nu}\right)} \right]^{\frac{M}{2}}. \quad (3.10)$$

En utilisant la propriété des déterminants $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, on a finalement

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \det\left(\mathbb{1} + \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}}\rho_k\right)^{-1/R^2}, \quad (3.11)$$

où l'on rappelle que $R = \sqrt{2/M}$ est l'amplitude des fluctuations et $\rho_k = \mathcal{C}_k/\mathcal{C}_0$ est la matrice de corrélation $k \times k$ de la distribution normale, donnée par

$$\rho_k = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2k} \\ \vdots & & & \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \dots & \rho_{kk} \end{pmatrix},$$

et λ_{mfp} le libre parcours moyen calculé pour la densité plasma moyenne, i.e., $\lambda_{\text{mfp}} = \nu/\langle v_{i0} \rangle$. Le résultat de Eq. (3.11) peut être obtenu directement en utilisant la fonction caractéristique de la distribution K-P de la section 2.3.3.1. Cette méthode sera utilisée dans la suite, car elle permet d'obtenir aisément les différents moments de \mathcal{N} , et facilite également le traitement d'une condition à la paroi stochastique (recyclage rapide) ainsi que le calcul de la source d'ionisation. L'analyse des résultats précédents montre que pour un l.p.m. donné (λ_{mfp}), les paramètres qui affectent le profil de la densité de neutres moyenne sont :

1. l'amplitude des fluctuations R .

2. la longueur de corrélation ℓ si elle est finie, sinon la portée pratique de la fonction de corrélation.
3. le choix de la fonction de corrélation des fluctuations et par conséquent ρ .

Afin d'illustrer les effets de ces paramètres on trace les profils de $\langle \mathcal{N} \rangle$ données par l'équation (3.11) en fonction du paramètre $a = \ell / \lambda_{\text{mfp}}$. La vitesse v est liée directement à l'énergie cinétique des neutres par la relation $E = mv^2/2$, où m est la masse de la particule neutre. Le paramètre a^{-1} estime typiquement le nombre de structures turbulentes de taille $\sim \ell$ explorées par la particule neutre durant son temps de vie moyen ($t = \lambda_{\text{mfp}}/v$). Il est lié au nombre de *Kubo*, défini par [126],

$$\mathcal{K} = \langle \langle v^2 \rangle \rangle^{1/2} \tau_{\text{corr}}, \quad (3.12)$$

où $\tau_{\text{corr}} = \ell/v$ est le temps nécessaire pour parcourir une longueur de corrélation à la vitesse v , par la relation $\mathcal{K} = aR$.

La Fig. 3.2, pour laquelle $a = \infty$, montre clairement que l'effet des fluctuations n'est important que lorsque R est grand, typiquement $R > 50\%$. La prise en compte des fluctuations dans le cas du recyclage lent conduit à un profil de densité décroissant beaucoup plus lentement que dans le cas où $R = 0\%$. L'origine physique de ce comportement peut être lié au fait que le flux de neutres entrant dans le plasma prend la même valeur quelque soit la densité plasma près du mur (recyclage lent). En particulier, dans les réalisations où la densité est faible la pénétration des neutres est alors très importante. Intuitivement, ce phénomène devrait être d'autant plus marqué que la longueur de corrélation est importante, car dans ce cas une densité faible proche de la paroi signifie une densité faible dans la plus grande partie du plasma explorée par les neutres. Notons que les résultats obtenus avec l'Eq. (3.11) sont en parfait accord avec les simulations réalisées avec le code EIRENE.

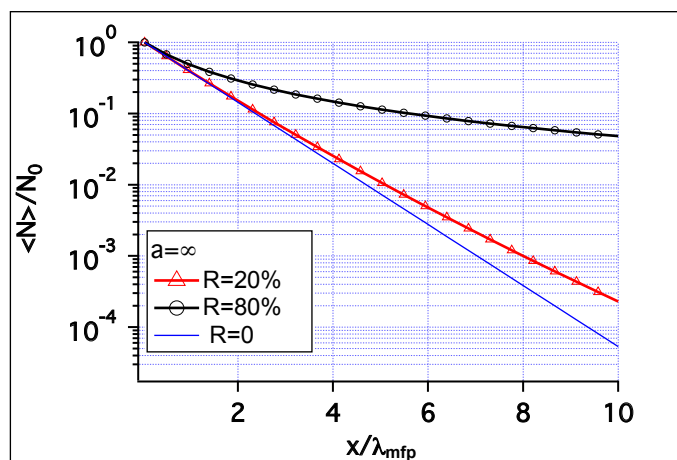


FIGURE 3.2 – Moyenne de la densité de neutres en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen, pour différentes valeurs de R et $a = \infty$ ($\rho(s) = 1$). Ces profils sont comparés au cas sans fluctuations (courbe bleue) correspondant à $a = R = 0$. Les courbes en trait plein correspondent à la solution analytique donnée par Eq. (3.11) et les symboles aux calculs réalisés avec EIRENE, montrant une superposition parfaite.

C'est effectivement ce que l'on observe sur la Fig. 3.3, pour $R = 80\%$. Il apparaît clairement que le profil de densité décroît de plus en plus lentement lorsque a augmente. En particulier, pour $a = 0$ le profil moyen se confond avec le profil calculé sans prendre en compte les fluctuations, un point qui sera également discuté en détails dans la suite. A une distance de $10\lambda_{\text{mfp}}$ de la paroi, le rapport entre les densités obtenues pour $a = \infty$ et $a = 0$ est de l'ordre de 10^3 . Typiquement, avec $\ell = 1$ cm, pour les atomes de deutérium dans un plasma de fusion ($n_e = 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_e = 20$

eV) on obtient $a_D \simeq 2 \times 10^{-2}$ pour $E_0 = 100$ eV, $a_D \simeq 1$ pour $E_0 = 0.03$ eV (cette dernière valeur pour l'énergie correspond à des atomes désorbés de la paroi). Pour une molécule désorbée de la paroi avec une énergie $E_0 = 0.03$ eV, on obtient de même $a_{D_2} \simeq 2$. On s'attend donc à des effets significatifs des fluctuations sur les profils de densité moyens à condition que le taux de fluctuation soit important, comme le montre la Fig. 3.4 pour $a = 1$. Le profil de densité calculé pour $R = 20\%$ est en effet pratiquement identique au profil calculé sans fluctuations.

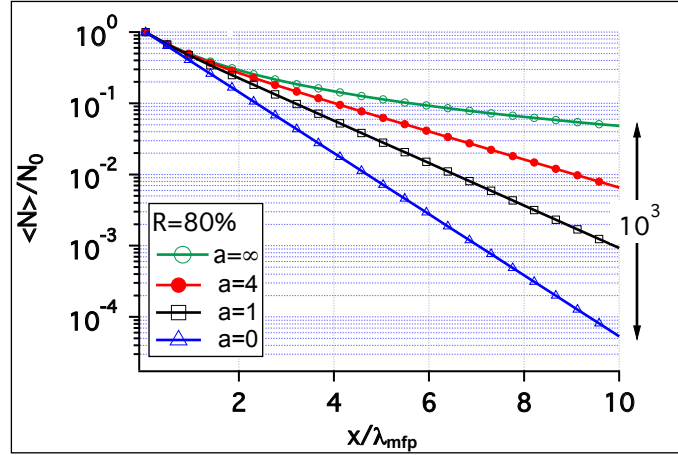


FIGURE 3.3 – Moyennes de la densité de neutres en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen, pour différentes valeurs de a , une fonction de corrélation exponentielle et $R = 80\%$. Ces profils sont comparés au cas sans fluctuations (courbes bleues) correspondant à $a = R = 0$. Les courbes en trait plein correspondent à la solution analytique donnée par Eq. (3.11) et les symboles aux calculs réalisés avec EIRENE, montrant une superposition parfaite.

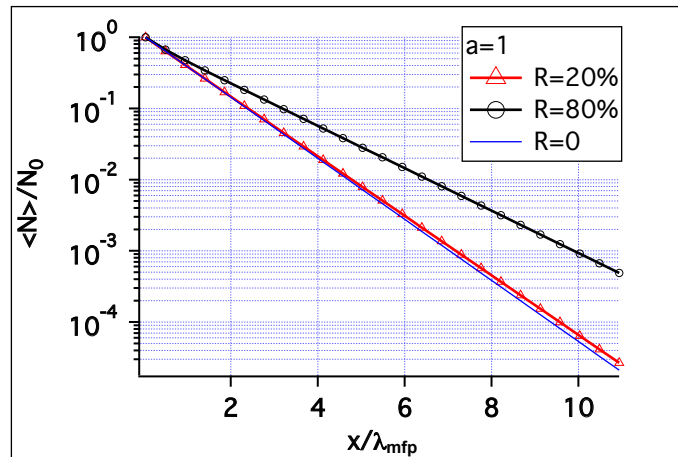


FIGURE 3.4 – Moyenne de la densité des neutres en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen, pour $a = 1$, une fonction de corrélation exponentielle et différentes valeurs de R . Ces profils sont comparés au cas sans fluctuations (courbe bleue) correspondant à $a = R = 0$. Les courbes en trait plein correspondent à la solution analytique donnée par Eq. (3.11) et les symboles aux calculs réalisés avec EIRENE, montrant une superposition parfaite.

Jusqu'à présent, nous n'avons discuté que la valeur moyenne $\langle N \rangle$ du profil de densité. Les moments d'ordres supérieurs sont obtenus de façon immédiate, en notant que

$$\left(\exp \left(-1/\nu \int_0^x v(s) ds \right) \right)^p = \exp \left(-p/\nu \int_0^x v(s) ds \right), \quad (3.13)$$

ce qui conduit à

$$\langle \mathcal{N}^p(x) \rangle = \left(\frac{\Gamma_0}{\nu} \right)^p \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + p \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}} \rho_k \right)^{-1/R^2} = \left(\frac{\Gamma_0}{\nu} \right)^{p-1} \langle \mathcal{N}(px) \rangle \quad (3.14)$$

On remarque que la dépendance spatiale du moment d'ordre p est similaire à celle du moment d'ordre 1, mais contractée par un facteur p . La déviation standard de la densité de neutres s'exprime par

$$\sigma_{\mathcal{N}} = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\det \left(\mathbb{1} + 2 \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}} \rho_k \right)^{-1/R^2} - \det \left(\mathbb{1} + \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}} \rho_k \right)^{-2/R^2} \right]^{1/2}. \quad (3.15)$$

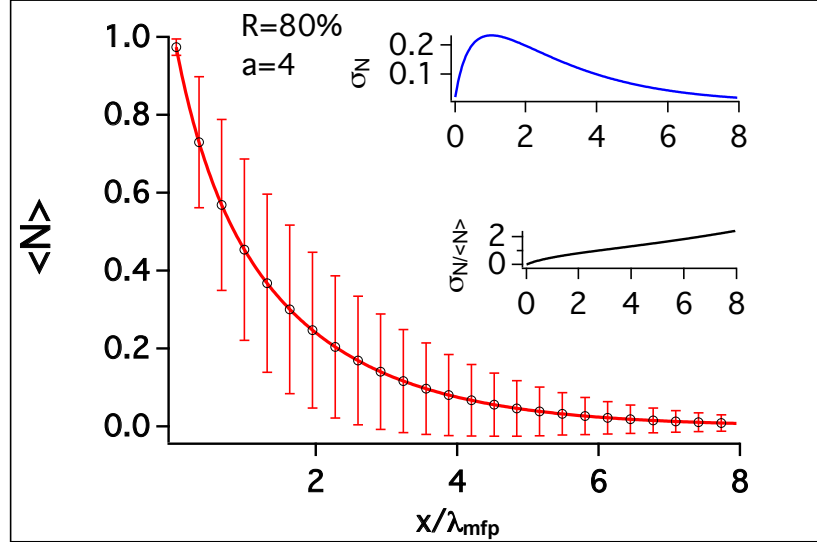


FIGURE 3.5 – Le profil moyen de la densité de neutres en fonction de x/λ_{mfp} (courbe rouge) avec les barres d'erreurs ($\mathcal{N} \pm \sigma_{\mathcal{N}}$). Déviation standard (courbe bleue) et taux de fluctuation (courbe noire) de la densité de neutres.

Cette déviation standard peut être interprétée comme une mesure empirique de la "variance par histoire", car elle représente la dispersion typique des profils de densité autour du profil moyen, pour différentes réalisations. Le premier intérêt de cette quantité est de donner une indication sur le niveau de fluctuation de la densité de neutres, en vue de futurs couplages entre un code de turbulence et un code de neutres. Le second intérêt de cette quantité est qu'elle permet d'estimer le bruit statistique résultant du calcul du profil moyen sur un nombre fini de réalisations dans les applications basées sur l'échantillonnage de la distribution Gamma K-P. La procédure est identique à celle utilisée pour estimer le niveau de bruit statistique sur les résultats de codes Monte Carlo. $\sigma_{\mathcal{N}}$ peut être vue comme la variance par histoire, la variance correspondant à $N \gg 1$ histoires est donnée par

$$\sigma \simeq \frac{\sigma_{\mathcal{N}}}{\sqrt{N}}, \quad (3.16)$$

en vertu du théorème de la limite centrale¹. La déviation standard $\sigma_{\mathcal{N}}$ est représentée sur la Fig. 3.5, sous forme de barres d'erreur autour du profil moyen. Elle est nulle au niveau de la paroi, à cause de la condition aux limites non-stochastique. Le taux de fluctuation de la densité de neutres augmente avec x/λ_{mfp} , et atteint près de 200% pour $x/\lambda_{\text{mfp}} = 8$. Cette augmentation traduit le fait que plus on s'éloigne de la paroi, plus la valeur de la densité est contrôlée par des réalisations rares où la densité plasma est très faible.

Notons pour finir que la distribution Gamma multivariable K-P nous permet non seulement d'obtenir tout les moments de la densité de neutres, mais aussi sa fonction de variance-covariance,

$$\text{Cov}[\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(x')] = \langle \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(x') \rangle - \langle \mathcal{N}(x) \rangle \langle \mathcal{N}(x') \rangle. \quad (3.17)$$

Soit $x > x'$, on obtient alors

$$\langle \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(x') \rangle = \left(\frac{\Gamma_0}{\nu}\right)^2 \lim_{k, k' \rightarrow \infty} \left\langle \exp\left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^M g_{ij}^2\right) \exp\left(-\frac{x'}{k'\nu} \sum_{p=1}^{k'} \sum_{q=1}^M g_{pq}^2\right) \right\rangle. \quad (3.18)$$

Il suffit alors de remarquer que pour $k > k'$,

$$\sum_{i=1}^{k'} g_{ij}^2 = \sum_{i=1}^k c_{k'} g_{ij}^2, \quad c_{k'} = \delta_{i \leq k'}, \quad (3.19)$$

et on obtient finalement,

$$\langle \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(x') \rangle = \left(\frac{\Gamma_0}{\nu}\right)^2 \lim_{k, k' \rightarrow \infty} \det \left[\mathbb{1} + 2/\nu \left(\frac{x}{k} + \frac{x'}{k'} H \right) \mathcal{C}_k \right]^{-1/R^2}, \quad (3.20)$$

où H est la matrice diagonale $k \times k$, d'éléments 1 pour $i, j \leq k'$ et 0 ailleurs. Finalement,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathcal{N}(x_k), \mathcal{N}(x_{k'})] &= \left(\frac{\Gamma_0}{\nu}\right)^2 \lim_{k, k' \rightarrow \infty} \det \left[\mathbb{1} + 2/\nu \left(\frac{x}{k} + \frac{x'}{k'} H \right) \mathcal{C}_k \right]^{-1/R^2} \\ &\quad - \left(\frac{\Gamma_0}{\nu}\right)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + 2 \frac{x}{\nu k} \mathcal{C}_k \right)^{-1/R^2} \lim_{k' \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + 2 \frac{x'}{\nu k'} \mathcal{C}_{k'} \right)^{-1/R^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

On remarque que lorsque $x = x'$ ($k = k'$), alors $H = \mathbb{1}$ et l'Eq. (3.21) est identique au carré du terme de droite de l'équation (3.15), qui représente la variance de \mathcal{N} . Le fait que le champ moyen $\langle \mathcal{N} \rangle$ dépend de la position x du neutre implique que \mathcal{N} est un processus stochastique non-homogène, il est bien clair que la fonction définie par l'Eq. (3.21) ne dépend pas uniquement de $|x - x'|$.

Dans la suite, nous discutons les cas limites de l'Eq. (3.11) lorsque $a \rightarrow 0$ et $a \rightarrow +\infty$. Nous montrerons également que de manière générale,

$$\langle \mathcal{N}_0(x) \rangle \leq \langle \mathcal{N}_a(x) \rangle \leq \langle \mathcal{N}_\infty(x) \rangle. \quad (3.22)$$

1. Il faut cependant prendre garde à ce que l'estimation de la variance est moins bonne que celle de la valeur moyenne, car les événements rares et intenses vont jouer un rôle plus important pour le moment d'ordre 2 que pour le moment d'ordre 1.

3.2.2.1 Longueur de corrélation infinie

Ce cas revient à considérer un plasma où la densité est la même en tout point ($v(x) = \text{Cte}$), pour chaque réalisation stochastique. Les éléments de \mathcal{C} sont tous égaux à \mathcal{C}_0 et Eq. (3.11) devient

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \det(A)^{-1/R^2}, \quad (3.23)$$

où $A = \mathbb{1} + 2x/k\nu\mathcal{C}_0B$ est la matrice $k \times k$, avec $B_{ij} = 1$. La matrice B est de rang 1¹, et a pour valeurs propres k et 0, cette dernière étant dégénérée $k - 1$ fois. On obtient donc

$$\det(A) = 1 + 2x\mathcal{C}_0/\nu, \quad (3.24)$$

d'où

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \left(1 + R^2 x/\lambda_{\text{mfp}}\right)^{-1/R^2}. \quad (3.25)$$

Cette solution peut être retrouvée en considérant simplement l'intégrale de l'épaisseur optique,

$$\exp\left(-\int_0^x v(s)/\nu ds\right) = \exp(-vx/\nu), \quad (3.26)$$

sur une distribution Gamma univariable définie par Eq. (2.46). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}(x) \rangle &= \frac{\Gamma_0}{\nu} \int_0^{+\infty} d\nu P(\nu) \exp(-vx/\nu) \\ &= \frac{\Gamma_0}{\nu} (1 + \alpha x/\nu)^{-\beta}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $\alpha = R^2 \langle \nu \rangle$ et $\beta = M/2 = 1/R^2$.

Montrons maintenant que Eq. (3.27) est le maximum de $\langle \mathcal{N}_a \rangle$ pour toute valeur de a , en tout point x . Autrement dit, nous cherchons à justifier que le cas $a = \infty$ conduit à une pénétration maximale des neutres, comme observé précédemment.

Nous commençons par une approche intuitive, avant de donner une preuve plus formelle. Pour cela, on considère une réalisation du champ ν sur une trajectoire du neutre de longueur x_k , et soit $\ell = a\lambda_{\text{mfp}}$ la longueur de décroissance typique des corrélations (la longueur intégrale, sinon la portée pratique introduite dans la section 2.2.4, si la longueur intégrale est infinie²),

$$\mathbf{v} = \underbrace{\nu(x_1), \nu(x_2), \dots, \nu(x_p)}_{x_p - x_1 = \ell}, \underbrace{\nu(x_{p+1}), \dots, \nu(x_q), \dots, \nu(x_k)}_{x_q - x_p = \ell}. \quad (3.28)$$

On divise maintenant le segment de trajectoire de longueur x_k en L segments de longueur ℓ , avec $L \in \mathbb{N}^{*+}$ ³. Selon la propriété d'essaim introduite par Fox ('cluster property' [79, 127]), sur une échelle ℓ les V.A.s $\nu(x_i)$ sont assez corrélées pour considérer que $\nu(x_1) \simeq \nu(x_2) \simeq \dots \simeq \nu(x_1 + \ell)$, $\nu(x_{p+1}) \simeq \dots \simeq \nu(x_{p+1} + \ell)$ et ainsi de suite.

1. Toutes les lignes de B sont égales, autrement dit il n'y a qu'une ligne linéairement indépendante des autres.

2. Notons que les fonctions de corrélation oscillantes n'ont pas à être considérées ici, car la fonction de corrélation de V.A. K-P est forcément positive.

3. Ceci revient à choisir x comme un multiple de ℓ , ce qui n'est pas une limitation importante vu le caractère intuitif du raisonnement.

Nous obtenons alors L groupes de V.A.s quasi-indépendants deux à deux (cette approximation est illustrée sur la Fig. 3.6). On écrit donc

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left(- \int_0^{x_k} v(s) ds \right) \right\rangle &= \left\langle \exp \left[- \ell \sum_{i=1}^L v(x_1 + (i-1)\ell) \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \exp(-\ell v) \right\rangle^L \\ &= (1 + 2\alpha\ell)^{-L\beta}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

On pose maintenant $x_1 = 0$, et on remplace ℓ par x_k/L dans Eq. (3.29) pour obtenir

$$\left(1 + 2\alpha \frac{x_k}{L} \right)^L = \sum_{i=1}^L C_i^L \left(2\alpha \frac{x_k}{L} \right)^i \quad (3.30)$$

$$= (1 + 2\alpha x_k) + g(x_k), \quad (3.31)$$

où $g(x_k) \geq 0$. Nous avons donc toujours

$$\left(1 + 2\alpha \frac{x_k}{L} \right)^{-L\beta} = \left[(1 + 2\alpha x_k) + g(x_k) \right]^{-\beta} \leq (1 + 2\alpha x_k)^{-\beta}, \quad (3.32)$$

d'où le résultat recherché. A noter qu'on obtient l'égalité dans Eq. (3.32) pour $L = 1$, ce qui correspond bien à $\ell = \infty$ puisque nous avons considéré que v est constant sur un intervalle de longueur ℓ .

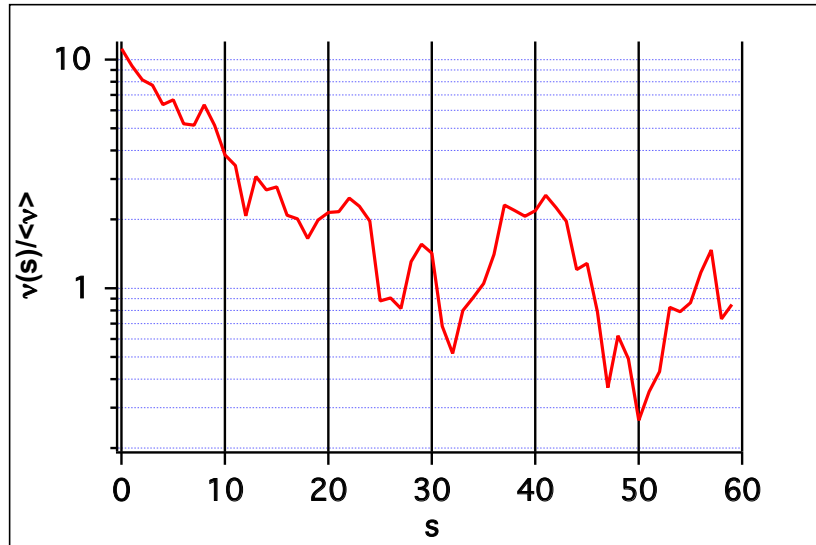


FIGURE 3.6 – Une histoire de v avec $\rho(s) = \exp(-s/\ell)$, avec $\ell = 10$, $R = 80\%$ et $L = 6$. L'approximation utilisée dans le texte consiste à considérer que v est constant sur des paliers de longueur 10.

Ce résultat peut également être obtenu d'une manière plus formelle. Le résultat de *Daniels* présenté dans la section 2.3.2 permet d'obtenir le comportement du déterminant de la matrice $\rho = A/(1+\alpha\epsilon/v)$, d'éléments diagonaux égaux à 1 et $\rho_{ij} = \mathcal{C}_{ij}/(1+\alpha\epsilon/v)$ ailleurs¹. Ce résultat est donné par Eq. (2.37) et montre que le déterminant de ρ est une fonction décroissante des coefficients de corrélation r_i conditionnels entre v_s et v_{s+i} sachant la séquence $v_{s+1}, \dots, v_{s+i-1}$. Pour montrer que

1. Notons qu'un certain nombre de résultats connus sur la majoration et la minoration des déterminants, e.g., [94, 128, 129, 130], sont ici inopérants.

les coefficients de corrélation conditionnels se comportent de la même façon que les coefficients de corrélations classiques ($\rho_i = \rho_{s\ s+i}$), on se base sur le résultat de Joe [131], qui stipule que $\partial_{\rho_i} r_i \geq 0$, pour montrer que $\partial_{\ell} \rho_i \geq 0 \Rightarrow \partial_{\rho_i} \ell \geq 0 \Rightarrow \partial_{\ell} r_i \geq 0$. Il s'ensuit alors que $\det(\rho)$ est une fonction décroissante de ℓ et $\langle \mathcal{N} \rangle \propto \det(\rho)^{-\beta}$ est fonction croissante de ℓ ,

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \langle \mathcal{N}(x) \rangle \leq \langle \mathcal{N}(x) \rangle \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \langle \mathcal{N}(x) \rangle. \quad (3.33)$$

3.2.2.2 Longueur de corrélation nulle

Dans ce cas la matrice \mathcal{C} est diagonale, i.e. $\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_0 \delta_{ij}$ et $\det \left(\mathbf{1} + 2 \frac{x}{kv} \mathcal{C}_k \right) = \left(1 + 2x\mathcal{C}_0/kv \right)^k$, d'où

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + 2 \frac{x\mathcal{C}_0}{kv} \right)^{-k/R^2} = \frac{\Gamma_0}{\nu} \exp \left(-x/\lambda_{\text{mfp}} \right), \quad (3.34)$$

avec $\lambda_{\text{mfp}} = \nu R^2 / \mathcal{C}_0 = \nu / \langle \nu \rangle$, car $\langle \nu \rangle = M\mathcal{C}_0 = 2\mathcal{C}_0/R^2$. Ce résultat peut être vu comme une conséquence du théorème ergodique (nous sommes ici dans un cas stationnaire), que l'on peut écrire sous la forme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \nu_{\omega}(s) ds = \langle \nu \rangle, \quad \forall \omega \quad (3.35)$$

où ω désigne la réalisation stochastique. Le terme de gauche de l'équation précédente n'est rien d'autre que la moyenne spatiale de ν sur un segment de longueur x . Cette égalité est applicable en pratique lorsque $x \gg \ell$, où ℓ est la longueur intégrale. Notons que le théorème ergodique reste valable pour une fonction de corrélation à longueur intégrale infinie, à condition que $\rho(\infty) = 0$, cf. Parzen [132, p. 74], Adler [105, p. 145] ou Cressie [133]. Pour x fini avec $x \gg \ell$, le théorème de la limite centrale montre que $x^{-1/2} \left(\int_0^x \nu(s) ds - \langle \nu \rangle x \right)$ est une variable aléatoire Gaussienne. La différence entre la valeur moyenne spatiale et la moyenne d'ensemble est donc typiquement de l'ordre de $x^{-1/2}$ pour x grand. Il est donc tentant de justifier le résultat d'Eq. (3.34) en écrivant

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \left\langle \exp - \frac{1}{\nu} \int_0^x \nu(s) ds \right\rangle \simeq \exp \left(- \frac{1}{\nu} \langle \nu \rangle x \right) \quad (3.36)$$

pour $x \gg \ell$. Cependant, ce raisonnement n'est valable que lorsque $\ell = 0$. Nous verrons en effet plus loin que Eq. (3.36) n'est pas correcte pour ℓ fini. En effet, dans ce cas des fluctuations d'ordre unité pour la différence entre $x^{-1} \int_0^x \nu(s) ds$ et $\langle \nu \rangle$ se produisent avec une faible probabilité, décroissant exponentiellement avec x . Ces fluctuations sont liées aux réalisations pour lesquelles $\nu(s)$ varie peu sur le segment de longueur x , et jouent un rôle important dans le calcul de moyennes du type $\left\langle \exp - \frac{1}{\nu} \int_0^x \nu(s) ds \right\rangle$ et le calcul de la moyenne doit alors s'appuyer sur le formalisme des grandes déviations [134].

Finalement, il est intéressant de montrer d'une façon indépendante du paragraphe précédent que l'équation (3.34) représente pour tout x la borne inférieure de la densité moyenne lorsque a varie. Ce résultat peut être obtenu en remarquant que la fonction exponentielle est convexe¹ et satisfait l'inégalité de Jensen,

$$\langle \varphi(x) \rangle \geq \varphi(\langle x \rangle), \quad (3.37)$$

1. La courbe représentative de la fonction prise entre les points P et P' est en dessous de la droite passant par les points P et P'.

voir l'article historique [135] relatif à cette inégalité ou une version plus moderne de celle-ci dans l'ouvrage de *Gradshteyn & Ryzhik* [136, p. 1066].

Le cas $a \rightarrow 0$ considéré ici, et qui conduit à l'équation (3.34), correspond dans la littérature à la limite de "mélange à l'échelle atomique" ("atomic mix limit" introduite en particulier par *Pomraining* [2]). En effet, dans le cas d'un mélange stochastique de deux milieux de propriétés différentes, le cas où la longueur de corrélation dans le milieu tend vers 0 correspond à un cas où les deux milieux sont miscibles. Les propriétés locales du matériau sont alors obtenues en calculant la moyenne sur les propriétés individuelles des deux milieux.

Il est essentiel de remarquer que si v est linéaire en n_e , comme nous le supposons ici, le cas $a \rightarrow 0$ est équivalent au cas où $R = 0\%$ (densité plasma non fluctuante, et telle que $v = \langle v \rangle$). Autrement dit, les fluctuations n'ont pas d'effet pour $a \rightarrow 0$ comme cela apparaît sur la Fig. 3.3. Ceci n'est plus vrai si v n'est plus linéaire en la quantité fluctuante, ce qui se produit par exemple si l'on prend les fluctuations de température en compte. Dans ce cas, on a $\langle v(n_e, T_e) \rangle \neq v(\langle n_e \rangle, \langle T_e \rangle)$.

3.2.3 Calcul de $\langle \mathcal{N} \rangle$ dans le cas du recyclage rapide ($\tau_{\text{rec}} \ll \tau_{\text{turb}}$)

Dans le cas du modèle de recyclage rapide, le flux de neutres entrant dans le plasma est supposé proportionnel à la densité du plasma, et l'expression de la densité moyenne devient

$$\langle \mathcal{N}_{\text{rap}}(x) \rangle = \frac{\langle \Gamma_0 \rangle}{v \langle v_1 \rangle} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle v_1 \exp \left(-\frac{x}{kv} \sum_{i=1}^k v_i \right) \right\rangle. \quad (3.38)$$

Le calcul de cette moyenne s'appuie sur la fonction caractéristique de la distribution K-P à k -variables (voir Eq. (2.54)),

$$\mathcal{Z}(\mathbf{u}) = \left\langle \exp \left(i \sum_{j=1}^k v_j u_j \right) \right\rangle = \det(\mathbb{1} - 2i\mathcal{C}U)^{-M/2}, \quad (3.39)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ et U est la matrice diagonale d'éléments u_i . Alors,

$$\left\langle v_1 \exp \left(-\frac{x}{kv} \sum_{j=1}^k v_j \right) \right\rangle = -i \left. \frac{\partial \mathcal{Z}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \right|_{u_i = ix/vk}. \quad (3.40)$$

Afin de calculer la dérivée intervenant dans la relation précédente, posons $A = \mathbb{1} + 2\mathcal{C}U$. En utilisant la règle de dérivation des déterminants (e.g., [137, p. 169]), nous obtenons

$$d(\det(A)) = \det(A) \text{Tr}(A^{-1}dA), \quad (3.41)$$

où la trace est donnée par

$$\text{Tr}(A^{-1}dA) = 2 \left(\sum_{l=1}^k A_{kl}^{-1} \mathcal{C}_{lk} \right) du_k. \quad (3.42)$$

On obtient finalement

$$\langle \mathcal{N}_{\text{rap}}(x) \rangle = \frac{v}{R^2 x \langle v_1 \rangle} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \left(A_k^{-1} \right)_{11} \right) \langle \mathcal{N}(x) \rangle. \quad (3.43)$$

Ce résultat vaut aussi bien pour des fluctuations dont la valeur moyenne est homogène ($\langle v_1 \rangle = \langle v \rangle$) que non-homogène. Pour comparer les profils de densité moyenne résultant des modèles de recyclages lents et rapides, il convient d'étudier le comportement du préfacteur,

$$\omega_1 = \frac{v}{R^2 x \langle v \rangle} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \left(A_k^{-1} \right)_{11} \right), \quad (3.44)$$

en fonction des paramètres R et a .

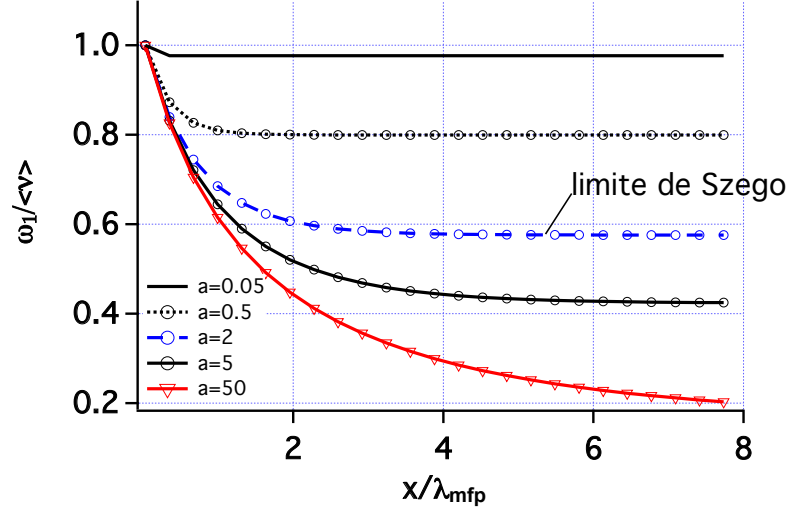


FIGURE 3.7 – Profils de ω_1 normalisé au taux moyen $\langle v \rangle$ en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen du neutre pour différentes valeurs de a et $R = 80\%$.

Ce préfacteur est tracé sur la Fig. 3.7 pour $R = 80\%$, et différentes valeurs de a , la fonction de corrélation étant exponentielle, dans un cas où les fluctuations sont homogènes (la densité moyenne est constante dans l'espace). On remarque que $\omega_1 = 1$ en $x = 0$, et ce pour toutes les valeurs de a . En effet pour $k = 1$,

$$\omega_1 = M \mathcal{C}_0 / \langle v \rangle = 1. \quad (3.45)$$

Le facteur ω_1 décroît sur un intervalle $\Delta x / \lambda_{\text{mfp}}$ de l'ordre de a , puis tend vers une valeur limite ω_∞ valant environ 80%, 60% et 40% de sa valeur maximale en $x = 0$, pour $a=0.5$, 2 et 5 respectivement. Ces valeurs asymptotiques peuvent être calculées de la manière suivante. On peut écrire les éléments de matrice de l'inverse de A comme (e.g., [83, p. 8])

$$\left(A_k^{-1} \right)_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\mathfrak{C}_{ji}}{|A_k|}, \quad (3.46)$$

où \mathfrak{C}_{ji} est le cofacteur obtenu en retirant la $j^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne de $|A_k|$. Le facteur \mathfrak{C}_{kk} est donc égal à $|A_k|$ auquel on a retiré la $k^{\text{ème}}$ colonne et la $k^{\text{ème}}$ ligne, i.e. $\mathfrak{C}_{kk} = |A_{k-1}|$. Comme nous avons supposé les fluctuations de la densité plasma homogènes, A est une matrice de *Toeplitz* et $\mathfrak{C}_{kk} = \mathfrak{C}_{11}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(A_k^{-1} \right)_{11} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_{k-1}|}{|A_k|}. \quad (3.47)$$

Nous pouvons donc utiliser le théorème (faible) de Szegő présenté dans la section 2.3.2 pour calculer cette limite. On pose $\epsilon = x/k$, et les éléments de la $m^{\text{ème}}$ diagonale sont donnés par $t_m = \delta_{0m} + 2\epsilon/v \mathcal{C}_0 e^{-m\epsilon/2\ell}$, la fonction de corrélation étant supposée exponentielle de longueur intégrale $\ell = a\lambda_{\text{mfp}}$. Ceci conduit à

$$\varphi(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} t_m e^{i\theta m} = 1 + \frac{2\epsilon}{v} \mathcal{C}_0 \tanh\left(\frac{\epsilon}{2\ell}\right) \frac{1}{1 - \cos(\theta)/\cosh(\epsilon/2\ell)} \quad (3.48)$$

et l'intégrale dans Eq. (2.39) donne (cf. *Gradshteyn & Ryzhik* [136, p. 531]),

$$\mathcal{C}_0 = \ln \left[\frac{g + \sqrt{g^2 - 1 / \cosh^2(\epsilon/2\ell)}}{(1 + \tanh(\epsilon/2\ell))} \right], \quad (3.49)$$

où

$$g = 1 + \frac{2\epsilon}{\nu} \tanh\left(\frac{\epsilon}{2\ell}\right). \quad (3.50)$$

Finalement, dans la limite continue qui correspond à $\epsilon \rightarrow 0$ (en pratique $\epsilon \ll \ell$),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \mathcal{C}_0}{\epsilon} = \frac{1}{2\ell} \left[\sqrt{1 + \frac{8\mathcal{C}_0\ell}{\nu}} - 1 \right], \quad (3.51)$$

et le préfacteur tend asymptotiquement vers une constante ω_∞ donnée par

$$\omega_\infty = \langle \nu \rangle \frac{\sqrt{1 + 4aR^2} - 1}{2aR^2}, \quad (3.52)$$

où l'on a utilisé $\mathcal{C}_0 = R^2/2\langle \nu \rangle$ et $\lambda_{\text{mfp}} = \nu/\langle \nu \rangle$. Ce résultat est en parfait accord avec les calculs numériques présentés sur la Fig. 3.7, et nous reviendrons à cette expression dans le chapitre suivant. L'équation (3.52) n'est valable que pour une corrélation exponentielle, mais la limite ω_∞ peut être calculée au moins numériquement (si un calcul analytique n'est pas possible) pour n'importe quelle fonction de corrélation.

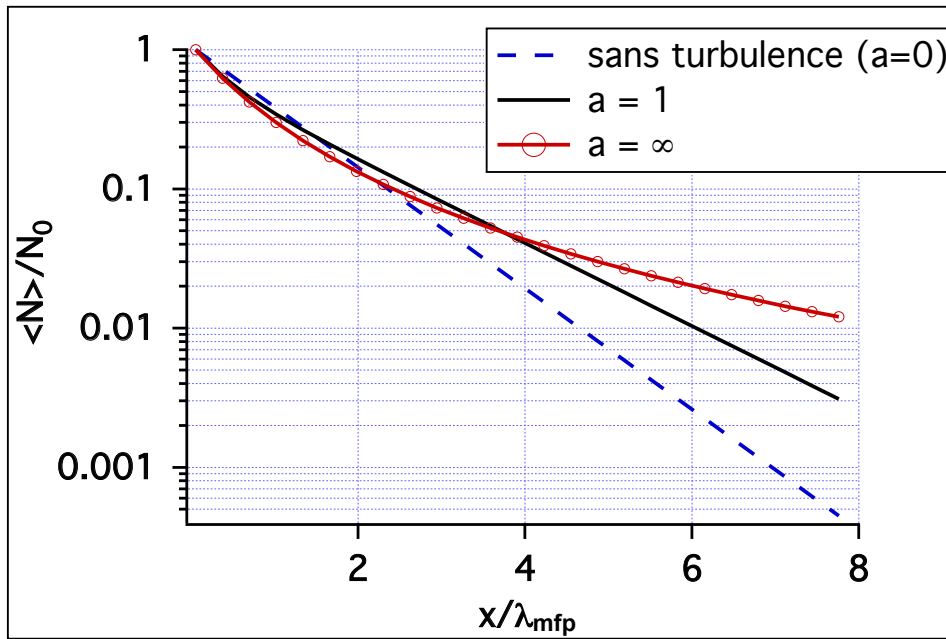


FIGURE 3.8 – Les profils de la densité de neutres moyenne avec une condition à la paroi stochastique (recyclage rapide). Ces profils sont donnés par Eq. (3.43) pour une fonction de corrélation exponentielle et $R = 80\%$. Les courbes en trait plein correspondent à la solution analytique donnée par Eq. (3.43) et les symboles aux calculs réalisés avec EIRENE, montrant une superposition parfaite.

Le profil de densité moyen $\langle N_{\text{rap}} \rangle$ est représenté sur la figure 3.8 pour différentes valeurs de a avec une fonction de corrélation exponentielle pour $R = 80\%$. Contrairement au cas du recyclage lent,

les fluctuations n'ont quasiment pas d'effet sur la densité de neutres moyenne dans une couche de plasma d'épaisseur de l'ordre de quelques ℓ . Ceci est dû à un effet de compensation entre l'intensité de la source et la pénétration des neutres. En effet, pour les réalisations où la densité plasma proche de la paroi est plus importante que la moyenne ($n_e(x=0) > \langle n_e \rangle$), le flux de neutres recyclés est important également, mais ce flux est fortement ionisé près de la paroi car le taux d'ionisation augmente linéairement avec n_e . En d'autres termes, les neutres sont donc ré-ionisés dans les structures qui leur donnent naissance. Assez loin de la paroi, i.e. pour $x \gg \ell$, la densité plasma n'est plus corrélée de façon appréciable avec le flux de neutres à la paroi, et un comportement similaire à celui obtenu dans le cadre de recyclage lent (condition aux limites déterministe) est retrouvé. En effet, le préfacteur donné par Eq. (3.44) est alors constant et $\langle \mathcal{N}_{\text{rap}} \rangle \propto \langle \mathcal{N} \rangle$.

3.2.4 Source d'ionisation moyenne $\langle S \rangle$ dans le cas du recyclage lent

Le processus d'ionisation par impact électronique crée un couplage entre les atomes neutres et les espèces chargées. En effet l'ionisation d'un neutre produit un ion et un électron. On note S cette source d'ionisation,

$$S(x) = \nu(x) \mathcal{N}(x). \quad (3.53)$$

Par analogie à la densité de neutres dans le cas du recyclage rapide (condition aux limites stochastique), on écrit

$$\langle S(x) \rangle = -i \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathcal{Z}(\mathbf{u})}{\partial u_k} \Big|_{u_i = ix/vk} \quad (3.54)$$

$$= \frac{\nu}{xR^2} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \left(A_k^{-1} \right)_{kk} \right) \langle \mathcal{N}(x) \rangle. \quad (3.55)$$

Si la densité moyenne est homogène $\mathcal{C}_{ii} = \mathcal{C}(x=0)$, il est facile de vérifier que l'on a $\left(A_k^{-1} \right)_{kk} = \left(A_k^{-1} \right)_{11}$. Dans ce cas, la source d'ionisation en recyclage lent a exactement le même comportement que la densité moyenne en recyclage rapide,

$$\langle S(x) \rangle = \langle \nu \rangle \langle \mathcal{N}_{\text{rap}}(x) \rangle. \quad (3.56)$$

Pour interpréter ce résultat, on utilise Eq. (3.43) pour écrire $\langle S \rangle$ sous la forme

$$\langle S(x) \rangle = \varpi(x) \langle \mathcal{N}(x) \rangle, \quad (3.57)$$

où ϖ est un coefficient d'ionisation effectif tel que

$$\varpi(x) = \frac{\nu}{xR^2 \langle \nu(x) \rangle} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \left(A_k^{-1} \right)_{kk} \right). \quad (3.58)$$

Le comportement de ϖ en fonction de la distance à la paroi est identique à celui du préfacteur ω_1 tracé sur la figure 3.7 (à un facteur $\langle \nu \rangle$ près). De même, les profils de $\langle S \rangle$ sont identiques à ceux de $\langle \mathcal{N}_{\text{rap}} \rangle$ représentés dans la figure 3.8. Ces courbes montrent que dans le régime de recyclage lent, la source d'ionisation moyenne diffère peu de la source calculée pour les paramètres plasma moyens dans la région proche de la paroi. La encore, ce résultat peut être attribué à un mécanisme de compensation. Les réalisations où la densité est faible conduisent à une pénétration plus facile des neutres dans le plasma, mais également à une faible valeur du taux d'ionisation. Ce dernier joue ici le même rôle que le flux à la paroi dans le cas du profil de densité en recyclage rapide. Intuitivement, on s'attend donc à ce qu'en régime de recyclage rapide la source d'ionisation soit plus piquée vers la paroi que dans le cas sans fluctuations. Nous verrons que c'est bien le cas dans le chapitre 4.

3.2.5 Calculs avec échange de charge

Le calcul de la moyenne de la solution de *Smirnov* donnée par Eq. (1.42) est similaire à celui présenté dans les sections précédentes car Eq. (1.42) est la superposition de deux fonctions exponentielles. On précise que dans le cas que nous considérons ici où $n_e = n_i$ (pas d'impuretés), $v_{i0} \propto n_e$ et $v_{cx} \propto n_i$, la quantité

$$\Lambda = \frac{\langle \sigma_{cx} v \rangle}{\langle \sigma_{cx} v \rangle + \langle \sigma_{i0} v \rangle} \quad (3.59)$$

est non-stochastique. Le seul paramètre stochastique dans Eq. (1.42) est donc $v = v_{i0} + v_{cx}$. On obtient

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = A_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}} \rho_k \right)^{-1/R^2} + A_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + \frac{xR^2}{kv_i} \langle v \rangle \sqrt{1 - \Lambda} \rho_k \right)^{-1/R^2}, \quad (3.60)$$

où les matrices de corrélation des variables Gaussiennes ρ_k sont définies dans la section 3.2.2. Nous avons montré que dans le cas sans échange de charge le paramètre $a = \ell / \lambda_{\text{mfp}}$ contrôle l'effet des fluctuations à R donné. Dans le cas où l'échange de charge est pris en compte, on s'attend donc intuitivement à ce que le paramètre $u_0 = v / v_i$, qui mesure le rapport de vitesse entre un neutre ayant subi un échange de charge (vitesse $\pm v_i$) et un neutre n'ayant pas subi d'échange de charge (v), joue un rôle important. Pour $u_0 = 1$, le paramètre a caractérisant un neutre est inchangé après un échange de charge, et on s'attend donc à des effets similaires à ceux observés dans le cas où seule l'ionisation intervient. En fait, l'équation (1.46) nous montre que tout se passe comme si le neutre avait une vitesse effective $v = \sqrt{1 - \Lambda} v_i$ et subissait uniquement le processus d'ionisation (voir discussion du paragraphe 1.4.2.2).

Un exemple est donné sur la Fig. 3.9, pour $\Lambda = 0.8$ et $R = 80\%$. Les effets des fluctuations sont d'autant plus intenses que le paramètre a augmente comme dans le cas sans échange de charge.

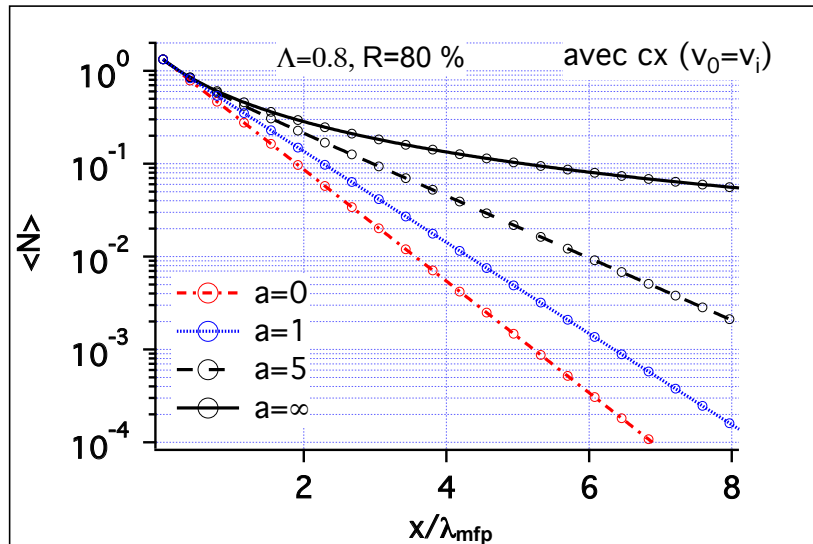


FIGURE 3.9 – Profils de la densité de neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen des neutres pour différents paramètres a et $u_0 = 1$. Les effets sont similaires aux cas sans échange de charge car il n'y a qu'une population de neutres ($u_0 = 1$).

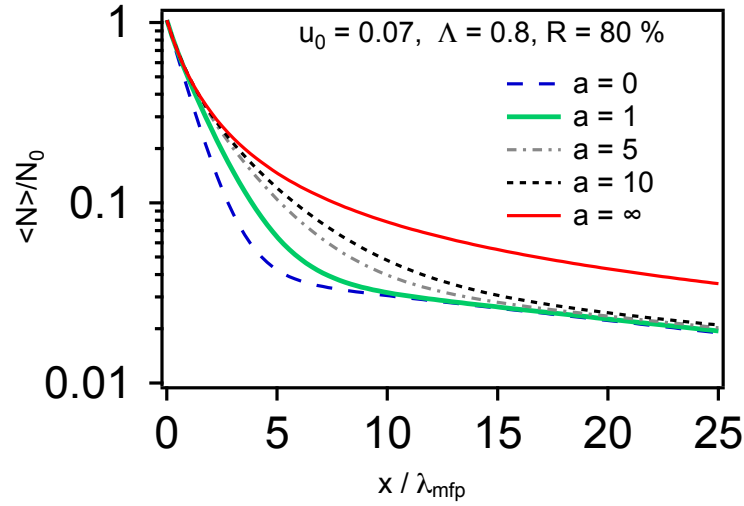


FIGURE 3.10 – Profils de la densité de neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen des neutres pour différents paramètres a et pour $u_0 = 0.07$. Ces profils sont comparés au cas sans fluctuations (courbe bleue).

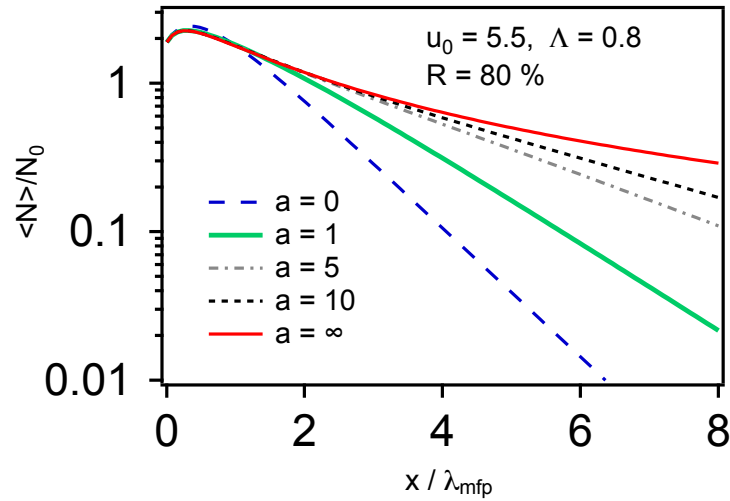


FIGURE 3.11 – Profils de la densité de neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen des neutres pour différents paramètres a et pour $u_0 = 5.5$. Ces profils sont comparés au cas sans fluctuations (courbe bleue).

Le cas $u_0 < 1$ (Fig. 3.10), est pertinent pour des atomes "froids" désorbés ($E_0 \sim 0.05$ eV) de la paroi, et qui rentrent dans un plasma à 10 eV. Les effets sont plus marqués près de la paroi et diminuent ensuite car le libre parcours moyen du neutre augmente après avoir subi une réaction d'échange de charge. Inversement, les profils de densité des neutres moyenne sont moins affectés près de la paroi pour $u_0 > 1$ (Fig. 3.11) que loin de la paroi, car le libre parcours moyen des atomes diminue après un échange de charge, i.e. a augmente. Ce dernier cas décrit bien les atomes rétro-diffusés sur la paroi après accélération des ions dans la gaine.

Le calcul de la source d'ionisation moyenne ne présente aucune difficulté,

$$\langle S(x) \rangle = (1 - \Lambda) \left[A_1 \omega_1 \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}} \rho_k \right)^{-1/R^2} + A_2 \omega_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\mathbb{1} + \frac{xR^2}{k\nu_i} \langle \nu \rangle \sqrt{1 - \Lambda} \rho_k \right)^{-1/R^2} \right], \quad (3.61)$$

où ω_1 est donné par Eq. (3.58) et ω_2 est retrouvé en remplaçant ν par $\nu_i / \sqrt{1 - \Lambda}$ dans Eq. (3.58). Notons que l'on a bien $\langle S \rangle = 0$ pour $\Lambda = 1$, ce qui correspond au cas où le taux d'ionisation est nul.

Nos calculs montrent donc clairement que les atomes d'hydrogène et leurs isotopes seront moins affectés ($a < 1$) par les fluctuations que les molécules de di-hydrogène et les atome d'impurétés ($a > 1$), à cause des réactions d'échange de charge résonant.

3.3 Extension aux cas où le taux de fluctuations est fonction de l'espace

Jusqu'à présent, nous avons considéré des cas où le taux de fluctuation est constant dans l'espace, bien que la densité moyenne ne le soit pas forcément. Or, il est bien établi que le taux de fluctuation R de la turbulence varie dans la SOL, aussi bien dans la direction poloïdale que radiale. Dans cette section, nous présentons l'application de la distribution K-P généralisée permettant de décrire de telles situations (voir section 2.3.3.4), au moins pour certains types de dépendances spatiales de R . Ensuite, nous présentons une étude similaire avec la distribution Gamma M-M introduite dans la section 2.3.3.5. Les mérites et les limitations respectives de ces distributions sont comparés.

3.3.1 Calculs avec la distribution K-P non-homogène

Dans nos applications, R est une fonction décroissante de la position radiale (en allant de la paroi vers le coeur). Dans la suite, nous allons commencer par calculer le profil de densité moyen. Pour cela, il suffit de regrouper les variables normales g_{ij} , $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, M_i$, sous-jacentes aux variables Gamma ν_i , dans l'ordre croissant $M_1 < M_2 \dots < M_k$, comme expliqué dans la section 2.3.3.4. On obtient

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{g} P(\mathbf{g}) \exp \left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{M_i} g_{ij}^2 \right) \right\rangle, \quad (3.62)$$

où P est la FDP de Gauss multivariées. Compte tenu de l'indépendance des M_k vecteurs (voir Eq. (2.44)), on a

$$P(\mathbf{g}) = P(\mathbf{g}_1) P(\mathbf{g}_2) \dots P(\mathbf{g}_{M_k}), \quad (3.63)$$

où les vecteurs \mathbf{g} sont définis par Eq. (2.64) et

$$P(\mathbf{g}_j) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{p,q=j}^k g_{pM_j} (\mathcal{C}^{-1})_{pq} g_{qM_j} \right]. \quad (3.64)$$

Il faut maintenant compter les vecteurs qui contiennent tous les éléments de g_{1l} à g_{kl} ($1 \leq l \leq M_k$), soit M_1 vecteurs, puis le nombre de vecteurs auxquels il manque le premier élément g_{1l} , soit

$M_2 - M_1$ vecteurs, et ainsi de suite. On développe alors la double somme dans Eq. (3.62) comme suit,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{M_i} g_{ij}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{M_1} g_{ij}^2 + \sum_{i=2}^k \sum_{j=M_1+1}^{M_2} g_{ij}^2 + \dots + \sum_{i=p}^k \sum_{j=M_{p-1}+1}^{M_p} g_{ij}^2 + \dots, \quad (3.65)$$

et Eq. (3.62) s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{g}_1 P(\mathbf{g}_1) \exp \left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{M_1} g_{ij}^2 \right) \right]^{M_1} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{g}_2 P(\mathbf{g}_2) \exp \left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{M_2} g_{ij}^2 \right) \right]^{(M_2-M_1)} \\ & \dots \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{g}_{M_k} P(\mathbf{g}_{M_k}) \exp \left(-\frac{x}{k\nu} \sum_{j=1}^{M_k} g_{kj}^2 \right) \right]^{(M_k-M_{k-1})}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

En utilisant Eq. (2.32) il vient,

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{k-1} \det \left(\mathbb{1} + 2 \frac{x}{k\nu} \mathcal{C}_{k_i} \right)^{-\Delta M_i}, \quad \Delta M_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{2}, \quad (3.67)$$

où $M_0 = 0$, et les matrices \mathcal{C}_{k_i} sont définies comme suit,

$$\mathcal{C}_{k_0} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \dots & \mathcal{C}_{1k} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \dots & \mathcal{C}_{2k} \\ \vdots & & & \\ \mathcal{C}_{k1} & \mathcal{C}_{k2} & \dots & \mathcal{C}_{kk} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{k_1} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{23} & \dots & \mathcal{C}_{2k} \\ \mathcal{C}_{32} & \mathcal{C}_{33} & \dots & \mathcal{C}_{3k} \\ \vdots & & & \\ \mathcal{C}_{k2} & \mathcal{C}_{k3} & \dots & \mathcal{C}_{kk} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathcal{C}_{k_{k-1}} = \mathcal{C}_{kk}. \quad (3.68)$$

L'équation (3.67) tend bien vers Eq. (3.11) lorsque $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$, c'est à dire dans le cas où l'amplitude des fluctuations est homogène. En effet, il ne subsiste dans le produit apparaissant dans Eq. (3.67) que le terme en $\Delta M_0 = M_1/2$ correspondant à \mathcal{C}_{k_0} . Les autres termes du produit sont égaux à 1, car $M_{i+1} - M_i = 0$ pour $i \geq 1$.

Les moments d'ordre p de la densité sont donnés par,

$$\langle \mathcal{N}^p(x) \rangle = \left(\frac{\Gamma_0}{\nu} \right)^p \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{k-1} \det \left(\mathbb{1} + 2p \frac{x}{k\nu} \mathcal{C}_{k_i} \right)^{-\Delta M_i}. \quad (3.69)$$

On en déduit l'écart type,

$$\sigma_{\mathcal{N}}(x) = \frac{\Gamma_0}{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=0}^{k-1} \det \left(\mathbb{1} + 4 \frac{x}{k\nu} \mathcal{C}_{k_i} \right)^{-\Delta M_i} - \prod_{i=0}^{k-1} \det \left(\mathbb{1} + 2 \frac{x}{k\nu} \mathcal{C}_{k_i} \right)^{-2\Delta M_i} \right]^{1/2}, \quad (3.70)$$

qui peut à nouveau être utilisé pour estimer le bruit statistique lors des simulations basées sur l'échantillonnage de la distribution de K-P généralisée.

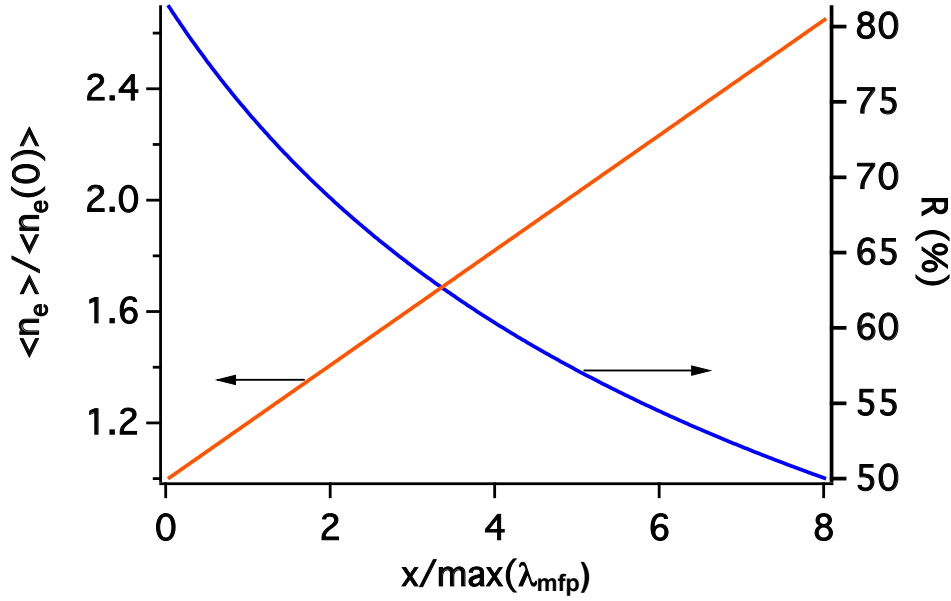


FIGURE 3.12 – Profil de n_e moyen (courbe rouge) et de l'amplitude des fluctuations R (courbe bleue), en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen des neutres à la paroi ($\max(\lambda_{\text{mfp}})$).

Nous considérons maintenant comment spécifier les paramètres de la distribution en fonction des propriétés statistiques de la turbulence. Le nombre de degrés de liberté M_i de la distribution K-P est calculé à partir de $M(x) = \text{int}\left(2/R^2(x)\right)$, où "int" désigne la partie entière. En vertu de Eq. (2.47), on exprime la fonction de variance-covariance non-homogène du processus Gaussien sous-jacent par

$$\mathcal{C}(x, x') = \sqrt{\frac{\mu(x)\mu(x')}{M(x)M(x')}} \rho(|x - x'|), \quad (3.71)$$

où $\mu(x) = \langle v \rangle(x)$ et ρ la fonction de corrélation des V.A.s Gaussiennes, supposée homogène. La fonction de variance-covariance du champ \mathbf{v} est obtenue à partir de Eq. (2.68),

$$\mathcal{G}(x, x') = 2 \min(M(x), M(x')) \mathcal{C}^2(x, x'). \quad (3.72)$$

En principe, \mathcal{G} est connue soit expérimentalement, soit numériquement. Le point délicat est de s'assurer que \mathcal{C} soit également définie-positive pour un couple $\{\mathcal{G}, M(x)\}$ donné, la difficulté principale provenant du terme $\min(M(x), M(x'))$. Pour commencer, on élimine l'inhomogénéité dans le préfacteur du terme de droite dans Eq. (3.71), en posant

$$\mu(x) = c_0 M(x). \quad (3.73)$$

Par ailleurs, on sait que $\min(s, t)$ est définie-positive (voir section 2.3.3.4), et il suffit alors de considérer que

$$M(x) = c_1 x + c_2, \quad (3.74)$$

pour que \mathcal{G} soit d.p. si \mathcal{C} l'est. A noter aussi que suivant la discussion de la section 2.3.3.3, l'équation (3.74) qui donne M comme un réel positif au lieu d'un entier positif est au moins valable pour des fluctuations exponentiellement corrélées ($\rho(s) = e^{-s/2\ell}$). Il en résulte un profil moyen linéaire

de la densité électronique $\langle n_e \rangle (x) = c_0 c_1 x + c_0 c_2$, (tracé sur la Fig. 3.12 courbe rouge), et une amplitude des fluctuations non-homogène $R(x) = \sqrt{2/(c_1 x + c_2)}$, (Fig. 3.12 courbe bleue). La fonction de variance-covariance devient

$$\mathcal{G}(x, x') = 2 [c_1 \min(x, x') + c_2] \exp\left(-\frac{|x - x'|}{\ell}\right). \quad (3.75)$$

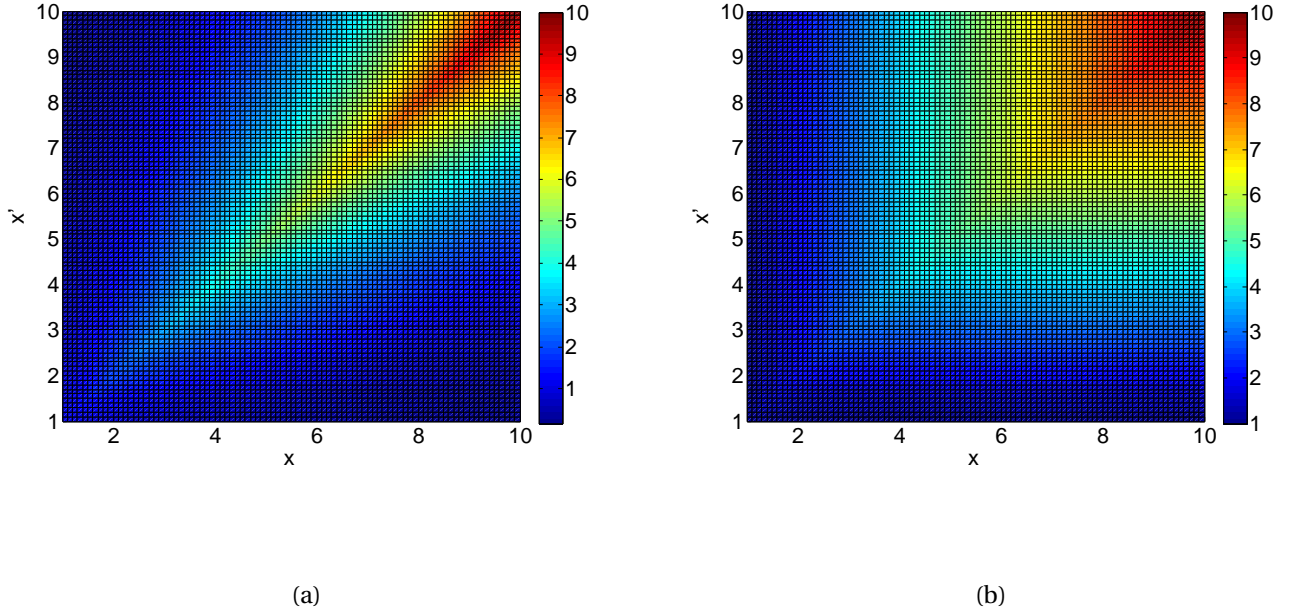


FIGURE 3.13 – Fonction de variance-covariance inhomogène donnée par Eq. (3.75) pour $c_1 = 1/2$ et $c_2 = 0$, (a) $\ell = 5$ et (b) $\ell = \infty$.

La fonction donnée par Eq. (3.75) est tracée dans Fig. 3.13 pour $c_1 = 1/2$, $c_0 = 0$ et pour les longueurs de corrélation $\ell = 5$ (Fig. 3.13(a)) et $\ell = \infty$ (Fig. 3.13(b)), correspondant au processus de Wiener, i.e., $\mathcal{G}(x, x') = \min(x, x')$. Ces figures montrent clairement que les corrélations du champ de n_e sont d'autant plus fortes que l'on s'éloigne de la paroi à cause du terme en $\min(x, x')$ et la longueur de corrélation ℓ a pour effet d'étendre les corrélations autour de l'axe $x = x'$. Cette remarque est compatible avec des résultats théoriques [138] montrant que la taille typique des structures turbulentes de n_e ('blobs') décroît en direction de la paroi, traduisant un affaiblissement des corrélations dans cette direction.

A noter que le cas homogène est retrouvé en imposant $c_1 = 0$, ce qui revient à fixer la densité plasma moyenne et son amplitude des fluctuations à des valeurs constantes.

Les profils de densité moyenne de neutres correspondant aux calculs précédents sont représentés dans la figure 3.14. Ces profils sont calculés en fonction du rapport de la longueur de corrélation (ℓ) au libre parcours moyen maximum calculé à la paroi. La non-linéarité en échelle semi-logarithmique du profil sans fluctuations ($a = 0$, courbe noire), est due au profil moyen de n_e dépendant de x (voir Eq. (3.73)). Les variations de la longueur de corrélation introduisent des différences appréciables sur le profil de densité moyenne, ainsi dans Fig. 3.14, le rapport du profil avec $a = \infty$ (courbe bleue) à celui obtenu sans fluctuations (courbe noire) est supérieur à 10^2 à

quelques libres parcours moyens de la paroi. La densité de neutres moyennes dans le cas réaliste pour les plasmas de bord de tokamak ($a = 2$) est sous estimée d'un ordre de grandeur (courbe rouge) par rapport au profil sans fluctuations.

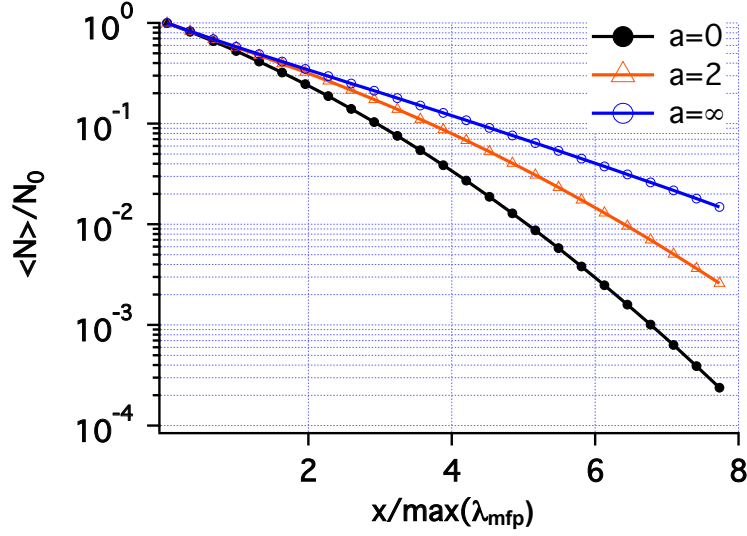


FIGURE 3.14 – Densité moyenne de neutres donnée par Eq. (3.67) en échelle semi-logarithmique, en fonction de $x / \max(\lambda_{\text{mfp}})$ pour différentes valeurs du rapport $a = \ell / \max(\lambda_{\text{mfp}})$. Comme dans le cas des fluctuations homogènes, les effets des fluctuations augmentent avec a .

3.3.2 Calculs avec la distribution de Mathai & Moschopoulos

L'utilisation de la distribution K-P généralisée est assez lourde dans le sens où elle conduit à manipuler des matrices de variance-covariance et à calculer leurs déterminants. Surtout, les conditions requises pour assurer la réalisabilité de la distribution limitent fortement les choix possibles pour les profils de densité moyenne et de son taux de fluctuation. Dans ce paragraphe, les propriétés statistiques du plasma sont modélisées par la distribution Gamma de Mathai & Moschopoulos (M-M), introduite dans la section 2.3.3.5. Les avantages de la distribution M-M sont que les calculs exigent moins d'effort numérique, et qu'elle permet d'introduire des profils de $\langle n_e \rangle(x)$ et $R(x)$ exponentiels plus proches des résultats expérimentaux, i.e. $\langle n_e \rangle = \exp(+x/l_n)$ et $R(x) = \exp(-x/l_R)$. Ces profils sont représentés dans la figure 3.15 et sont comparés aux profils utilisés pour la distribution K-P dans la section précédente (courbes en pointillés).

L'équation (2.76) de la section 2.3.3.5 permet d'écrire le moment d'ordre $p \geq 1$ de la densité des neutres,

$$\langle N^p(x) \rangle = \left(\frac{\Gamma_0}{\nu} \right)^p \left(1 + \frac{p}{\nu} \int_0^x ds \alpha(s) \right)^{-\beta_0} \exp \left(-\frac{p}{\nu} \int_0^x ds \beta(s) \alpha(s) \right). \quad (3.76)$$

En particulier, pour les profils de $\langle n_e \rangle$ et R considérés ici, la densité moyenne est donnée par

$$\langle N(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \Upsilon(x) \right)^{-\beta_0} \exp \left(-\frac{1}{\nu} \Psi(x) \right), \quad (3.77)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon(x) = L\mu_0 R_0^2 (1 - e^{-x/L}), \\ \Psi(x) = \mu_0 l_n (e^{x/l_n} - 1) - \beta_0 \Upsilon(x), \end{array} \right. \quad (3.78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon(x) = L\mu_0 R_0^2 (1 - e^{-x/L}), \\ \Psi(x) = \mu_0 l_n (e^{x/l_n} - 1) - \beta_0 \Upsilon(x), \end{array} \right. \quad (3.79)$$

avec $L = (2/l_R - 1/l_n)^{-1}$ et $l_R \leq 2l_n$ pour garantir la propriété d.p. de la covariance (voir section 2.3.3.5).

Des profils de la densité moyenne des neutres sont présentés sur la figure 3.16, en fonction du paramètre β_0 qui joue le rôle de coefficient de corrélation. Le comportement de ces profils est qualitativement très proche de celui obtenu avec la distribution K-P non-homogène, en ce sens que le profil moyen de la densité des neutres augmente avec β_0 .

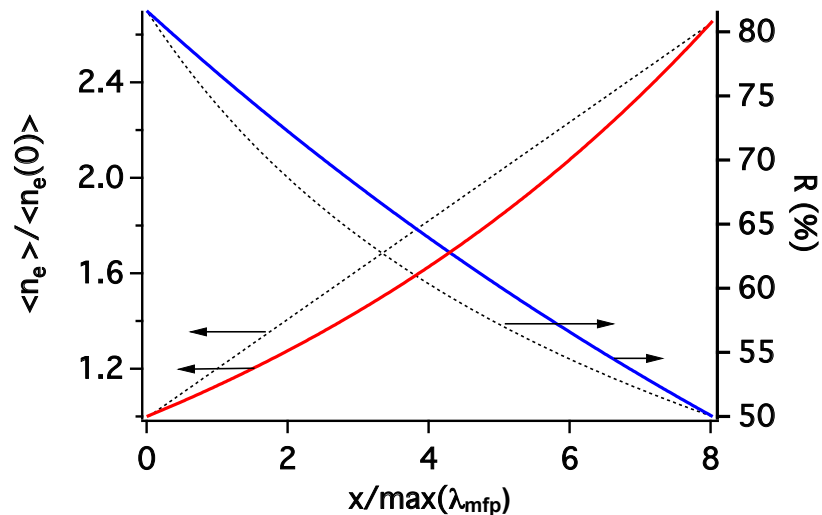


FIGURE 3.15 – Profil de $\langle n_e \rangle = \exp(+x/l_n)$ normalisé à la densité électronique à la paroi (courbe rouge) et le profils de $R(x) = \exp(-x/l_R)$ (courbe bleue), en fonction de la distance à la paroi normalisée à $\max(\lambda_{mfp})$. Ces profils sont comparés à ceux utilisés pour la distribution K-P (courbes en pointillés).

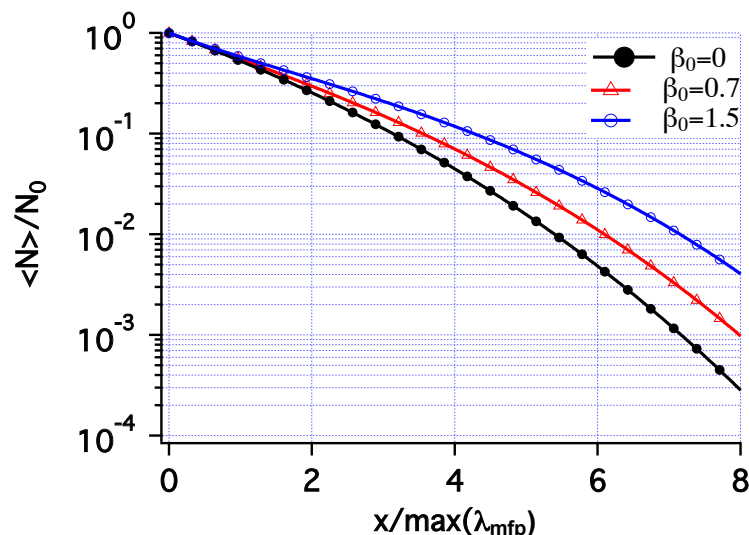


FIGURE 3.16 – Profils de la densité des neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée à $\max(\lambda_{mfp})$, pour différentes valeurs du paramètre β_0 .

En conclusion, la distribution Gamma (M-M) permet un choix plus réaliste des profils de densité moyens et de leurs taux de fluctuation que dans le cas de la distribution K-P non-homogène,

bien qu'encore une fois la nécessité d'avoir une fonction de variance-covariance d.p. impose des limitations. Par contre, on ne peut plus imposer la fonction de variance-covariance, qui est déterminée uniquement par le choix de $\langle n_e(x) \rangle$ et de $R(x)$. La distribution Gamma M-M offre donc moins de degrés de liberté pour l'ajustement aux propriétés statistiques de la turbulence, mesurées ou calculées, que la distribution Gamma K-P.

3.4 Cas des autres distributions

Utiliser une distribution Gamma multivariable (K-P) pour décrire les fluctuations dans la SOL permet de reproduire une bonne partie des caractéristiques statistiques observées aussi bien numériquement qu'expérimentalement, modulo les restrictions présentées dans la section précédente sur les choix des profils moyens ou du taux de fluctuation dans le cas inhomogène. Cependant, les fonctions de corrélation à valeurs négatives sont exclues (corrélation positive par construction). Un exemple courant de ce type de fonction de corrélation est celui donné par une exponentielle amortie¹,

$$\rho(s) = e^{-s/\lambda} \cos(\omega s), \quad \lambda, \omega > 0, \quad (3.80)$$

qui décrit les corrélations de n_e dans la direction polôïdale dans des simulations numériques [57]. A notre connaissance, le seul moyen de prendre ces effets en compte est de considérer d'autres distributions, dont la marginale à un point n'est pas forcément une FDP Gamma. La distribution Log-normale multivariables permet de décrire des corrélations oscillantes (voir section 2.3.4).

Dans un premier temps, on étudie les différences quantitatives introduites par le fait de décrire les fluctuations avec une distribution Gamma K-P ou une distribution Log-normale, les deux premiers moments étant choisis identiques. Ensuite, nous comparons les profils de densité moyenne obtenus avec une fonction de corrélation exponentielle et une fonction de corrélation oscillante amortie.

3.4.1 Les effets du choix de la FDP

On réalise des échantillonnages de v suivant une statistique Gamma K-P (respectivement Log-normale multivariables) dont les deux premiers moments sont choisis identiques (en particulier, les fonctions de corrélations à deux points sont donc identiques), puis on calcule la moyenne d'ensemble de la densité de neutres par l'équation suivante

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{v} \frac{1}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \exp\left(-\frac{x}{nv} \sum_{i=1}^n v_{ik}\right), \quad (3.81)$$

où N est le nombre des réalisations stochastiques ($N \gg 1$ pour réduire le bruit statistique). Le processus Gamma nous impose des fonctions de corrélation uniquement positives, et pour cette application nous considérons une fonction de corrélation exponentielle.

Selon la Fig. 3.17, le choix de la FDP (Gamma ou Log-normale) devrait avoir des effets notables seulement pour des taux de fluctuations important ($R > 50\%$), on fixe alors R à 80% et on varie ℓ . Pour des petites longueurs de corrélation, le choix de la distribution n'a pratiquement pas d'effets sur la densité moyenne (voir Fig. 3.18(b)). Pour des grandes longueurs de corrélation, le plasma 'Log-normal' est plus absorbant que le plasma 'Gamma' (voir Fig. 3.18(a)), ce qui est lié à leurs comportement respectif à l'origine, puisque ce sont les réalisations où la densité est faible qui contrôlent la décroissance asymptotique du profil de densité moyen. Ce point peut être justifié en

1. Cette fonction est bien définie-positive [58, 76].

remarquant que le comportement asymptotique de la fonction caractéristique, qui donne le profil moyen dans le cas du recyclage lent, est lié au comportement en zéro de la FDP des fluctuations en vertu des propriétés de la transformée de *Fourier*.

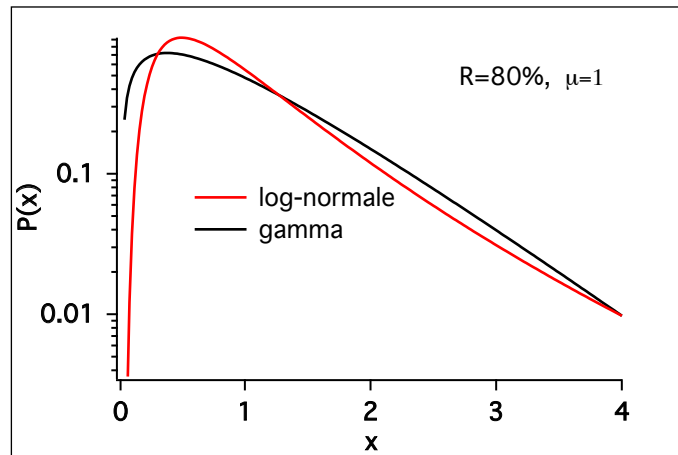


FIGURE 3.17 – Comparaison des distributions Gamma (courbe noire) et Log-normale (courbe rouge). Les deux distributions ont la même espérance $\mu = 1$ et la même amplitude des fluctuations $R = 80\%$. La probabilité d’avoir des réalisations pour lesquelles x est petit est supérieure pour la distribution Gamma.

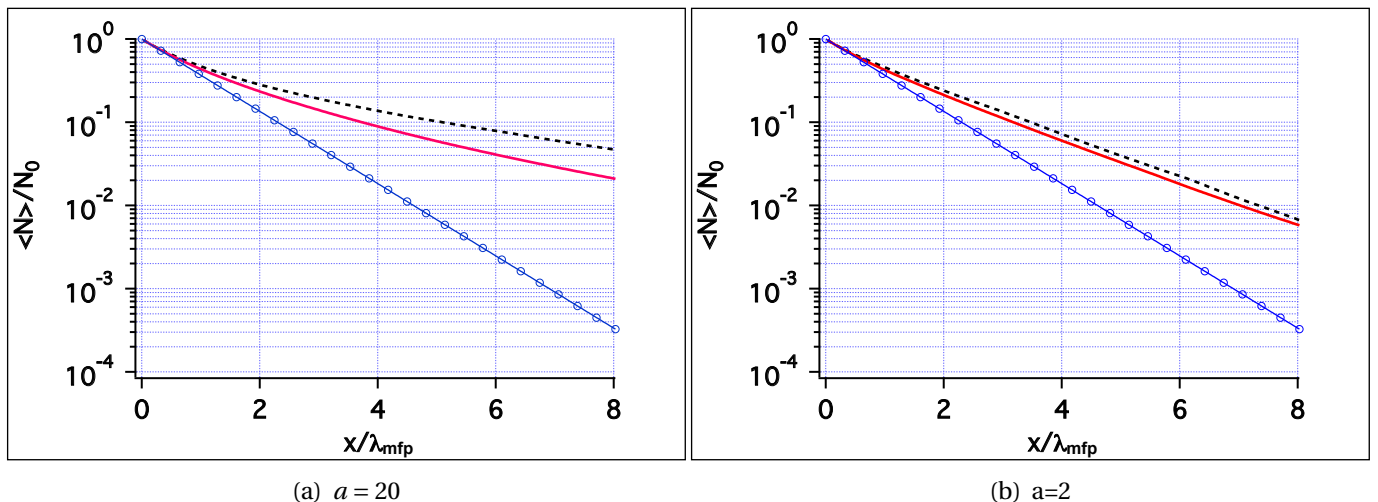


FIGURE 3.18 – Densité des neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen pour $R = 80\%$ et une fonction de corrélation exponentielle. Le profil moyen obtenu avec une statistique Gamma (courbe noire) et celui obtenu avec une statistique Log-normale (courbe rouge) sont comparés au profil sans turbulence (courbe bleue).

3.4.2 Les effets des oscillations de la fonction de corrélation

On rappelle que la longueur de corrélation au sens de *Stratonovich* est définie par $\ell = \int_0^\infty |\rho(s)| ds$. Il est clair que la longueur de corrélation de la fonction exponentielle ($\rho(s) = e^{-s/\ell}$) est égale à ℓ . Pour que la comparaison ait un sens, il faut que la longueur intégrale de la fonction de corrélation

oscillante donnée par Eq. (3.80) soit aussi égale à ℓ , c'est à dire

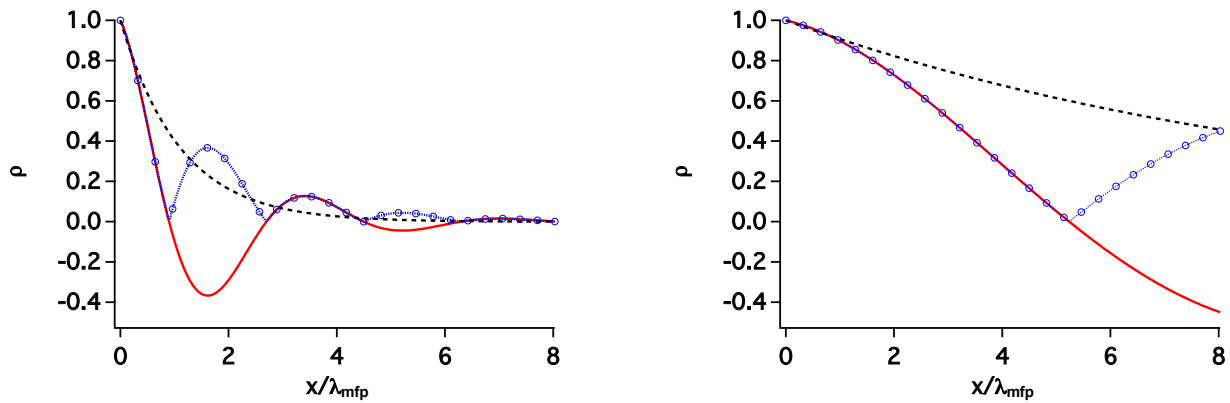
$$\ell = \int_0^{\infty} e^{-s/\lambda} |\cos(\omega s)| ds. \quad (3.82)$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\ell = \int_0^{\pi/(2\omega)} e^{-s/\lambda} \cos(\omega s) ds + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} e^{-s/\lambda} \cos(\omega s) ds, \quad \theta_i = (2i+1) \frac{\pi}{2\omega} \quad (3.83)$$

$$= \frac{\lambda}{(\omega\lambda)^2 + 1} \left[2\omega\lambda e^{-\pi/(2\omega\lambda)} \left(1 + \frac{1}{e^{\pi/(\omega\lambda)} - 1} \right) + 1 \right]. \quad (3.84)$$

Notons que pour $\omega\lambda \gg 1$ alors $\ell \simeq 2/(\pi\lambda)$, ce qui correspond au résultat de *Stratonovich* [75, p. 25].



(a) deux fonctions de corrélation, l'une oscillante avec $\lambda\omega = 2.97$ (courbe rouge) et l'autre exponentielle (courbe noire). La longueur intégrale $\ell = \lambda_{\text{mfp}}$ ($a = 1$), est identique pour les deux fonctions.

(b) deux fonctions de corrélation, l'une oscillante avec $\lambda\omega = 0.7$ (courbe rouge) et l'autre exponentielle (courbe noire). La longueur intégrale $\ell = 10\lambda_{\text{mfp}}$ ($a = 10$), est identique pour les deux fonctions.

FIGURE 3.19 – Comparaisons de fonctions de corrélation oscillantes et exponentielles, les courbes bleues correspondent à la valeur absolue des fonctions de corrélation oscillantes.

On calcule à nouveau la densité moyenne numériquement, en échantillonnant la distribution Log-normale multivariées. Le paramètre $\omega\lambda$ contrôle les effets d'une fonction de corrélation oscillante par rapport à une fonction purement exponentielle sur la densité moyenne de neutres. En fait, la fonction oscille d'autant plus que le produit $\omega\lambda$ est grand devant 1 ($\omega\lambda = 2.97$, Fig. 3.19(a) courbe rouge) et vice versa ($\omega\lambda = 0.7$, Fig. 3.19(b) courbe rouge). On rappelle que ces fonctions oscillantes ont la même longueur de corrélation que les fonctions exponentielles (courbe noire dans Fig. 3.19(a) et Fig. 3.19(b)). Lorsque la fonction a le temps d'osciller le long de la trajectoire du neutre cela affecte considérablement la densité des neutres moyenne. En effet la densité des neutres moyenne est réduite d'un facteur 4 (Fig. 3.20(a) courbe rouge) à une distance de $8\lambda_{\text{mfp}}$ de la paroi par rapport au profil moyen avec des fluctuations exponentiellement corrélées (Fig. 3.20(a) courbe noire). Inversement lorsque la fonction n'a pas le temps d'osciller le long de la trajectoire du neutre alors les profils moyens sont très proches (courbes noire et rouge dans Fig. 3.20(b)). En conclusion de cette section et conformément à notre intuition physique, un plasma dont le champ de la densité électronique est distribué suivant une statistique Log-normale écran plus la pénétration des particules neutres dans la SOL, cet écrantage est d'autant plus efficace que la longueur de corrélation augmente (voir Fig. 3.18). Les corrélations négatives ont pour effet un écrantage plus efficace aux particules neutres, cet effet se manifeste d'avantage lorsque la fonction de corrélation a le temps d'osciller suffisamment pendant la durée de vie du neutre (voir Fig. 3.19

& Fig. 3.20). En présence d'oscillations (corrélations positives et négatives) le neutre passe de zone à forte densité à une zone de faible densité, ce qui se rapproche plus de la moyenne ergodique et les effets sont plus proches que ceux obtenus sans fluctuations. Cependant lorsque la corrélation est purement exponentielle le neutre passe plus de temps dans des zones à forte ou faible valeurs de n_e .

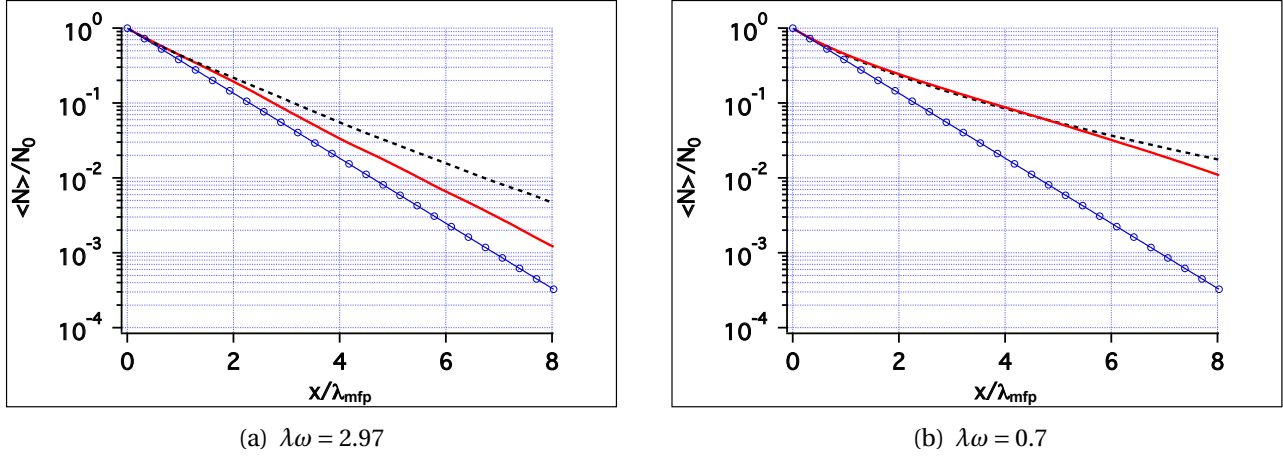


FIGURE 3.20 – Densité des neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen pour $R = 80\%$. Les profils avec une fonction de corrélation oscillante (courbes rouges) et celui obtenu pour une fonction de corrélation exponentielle (courbes noires) sont comparés au profil sans turbulence (courbe bleue). Lorsque la fonction de corrélation a le temps d'osciller suffisamment le long de la trajectoire du neutre, alors cela affecte la pénétration de ce dernier dans le plasma.

3.5 Au delà de l'approximation adiabatique : effets dépendants du temps

Notre point de départ est la solution dépendante du temps donnée par Eq. (1.20), dans laquelle on ne prend pas en compte le phénomène d'échange de charge. On se place dans le cadre du modèle de recyclage lent (les calculs pourraient être faits de façon similaire dans le cas du recyclage rapide), et donc le flux à la paroi (située en $r=0$) est non stochastique. On considère également que la condition initiale $\mathcal{N}_0(x)$ est non stochastique, et telle que $\mathcal{N}_0(x) = 0$ pour $x < 0$. On discrétise alors les épaisseurs optiques intervenant dans la solution dépendante du temps,

$$\int_0^x v(s, s/v) ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x}{k} \sum_{i=1}^k v_x(i, i/v), \quad (3.85)$$

et

$$\int_0^t v(v\tau, \tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t}{T} \sum_{i=1}^T v_t(i v, i). \quad (3.86)$$

On peut alors calculer la densité moyenne en utilisant la même technique que dans le paragraphe 3.2.2,

$$\langle \mathcal{N}(x, t) \rangle = \frac{\Gamma_0}{v} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \mathbb{1} + \frac{xR^2}{k\lambda_{\text{mfp}}} \rho_k \right|^{-1/R^2} + \mathcal{N}_0(x - vt) \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \mathbb{1} + \langle v \rangle \frac{tR^2}{T} \rho_T \right|^{-1/R^2}, \quad (3.87)$$

où les éléments des matrices de corrélation ρ_k et ρ_T , de taille respective $k \times k$ et $T \times T$ sont déterminés à partir de la variance-covariance spatiotemporelle des fluctuations. Dans le cas homogène et stationnaire (au sens large),

$$\langle v(x, t) \rangle = \langle v(0, 0) \rangle, \quad (3.88)$$

$$\text{Cov}[v(x, t), v(x', t')] = \mathcal{V} \varrho(|x - x'|, |t - t'|), \quad (3.89)$$

l'élément $(\rho_k)_{ij}$ de la matrice ρ_k est par exemple déterminé par $\varrho(|x_i - x_j|, |x_i - x_j|/v)$. Cependant, les modèles les plus simples sont ceux où les variables spatiales et temporelles sont séparées¹ (voir chapitre 2),

$$\varrho(x, x', t, t') = \mathcal{S}(|x - x'|) \mathcal{T}(|t - t'|), \quad (3.90)$$

Discutons à présent les effets des corrélations temporelle, caractérisées par le temps de corrélation τ , dans le cas d'une fonction de covariance séparable. Lorsque la fonction de corrélation est exponentielle, c'est à dire

$$\varrho(s, t) = e^{-s/\ell} e^{-t/\tau}, \quad (3.91)$$

ce qui conduit à

$$(\rho_k)_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|}{\ell_{\text{eff}}}\right), \quad (3.92)$$

avec

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{\ell v \tau}{\ell + v \tau} < \ell. \quad (3.93)$$

Tout se passe donc, en ce qui concerne le premier terme de Eq. (3.87) comme si le problème était indépendant du temps, mais avec une longueur de corrélation spatiale plus courte. Cet effet est intuitif, car cela se résume à considérer des structures ('blobs') indépendantes du temps mais de tailles plus petites. On montre de même que

$$(\rho_T)_{ij} = \exp\left(-\frac{|t_i - t_j|}{\tau_{\text{eff}}}\right), \quad (3.94)$$

avec

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{\tau \ell / v}{\tau + \ell / v} = \frac{\ell_{\text{eff}}}{v} < \tau. \quad (3.95)$$

Il apparaît clairement que les rôles du temps et de l'espace sont symétriques en ce qui concerne les déterminants dans Eq. (3.87). Il nous faut maintenant discuter la relaxation de la condition initiale. Nous avons montré dans les paragraphes précédents que la fonction définie par le déterminant du second terme du membre de droite de l'Eq. (3.87) décroît plus lentement qu'une exponentielle avec t . En particulier, pour des temps longs, on obtient une loi de puissance du type t^{-1/R^2} . Ceci suggère que la relaxation de la condition initiale pour la densité peut être bien plus lente qu'en l'absence de fluctuations, et évoque des problèmes de persistance de conditions initiales ("aging"). Ce phénomène peut se comprendre ici en remarquant que le terme que nous

1. Une autre manière de séparer les variables est d'additionner deux fonctions de corrélation dont l'une est purement spatiale et l'autre est purement temporelle, i.e. $\varrho(x, t) = a_1 \mathcal{S}(x) + a_2 \mathcal{T}(t)$, $a_1 + a_2 = 1$. On peut aussi utiliser des modèles plus réalistes de fonctions de corrélations où les variables spatiales et temporelles 'interagissent' (voir tableau 2.2).

considérons correspond à la quantité de neutres en x à l'instant t qui étaient en $x - vt$ à l'instant 0, et qui ont donc parcouru une distance vt . Or comme nous l'avons vu, les fluctuations conduisent à une absorption plus faible, et la condition initiale survit plus longtemps. Il faut cependant tout de même remarquer que comme $\mathcal{N}_0(x) = 0$ pour $x < 0$, le terme considéré devient nul pour $t > x/v$, i.e. quand tous les neutres initialement présents sont passés en x .

Une fois la condition initiale relaxée, seul le premier terme dans Eq. (3.87) survit, et la prise en compte de la dépendance temporelle se traduit par l'existence d'un paramètre de contrôle supplémentaire qui est le rapport du temps de corrélation à la durée de vie typique d'un neutre¹, $b = \tau \langle v \rangle$. La limite adiabatique correspond à $b \rightarrow \infty$, ce qui correspond bien à $\ell_{\text{eff}} \rightarrow \ell$. L'influence de b est étudiée sur la Fig. 3.21, pour $a = 10$ et $R = 80\%$. Les profils de densité moyenne tracés sur cette figure sont en accord avec l'analyse faite plus haut, en ce sens que les corrélations temporelles réduisent l'effet des corrélations spatiales. Il faudrait donc des longueurs de corrélations plus grandes pour avoir les mêmes effets qu'en absence des corrélations temporelles.

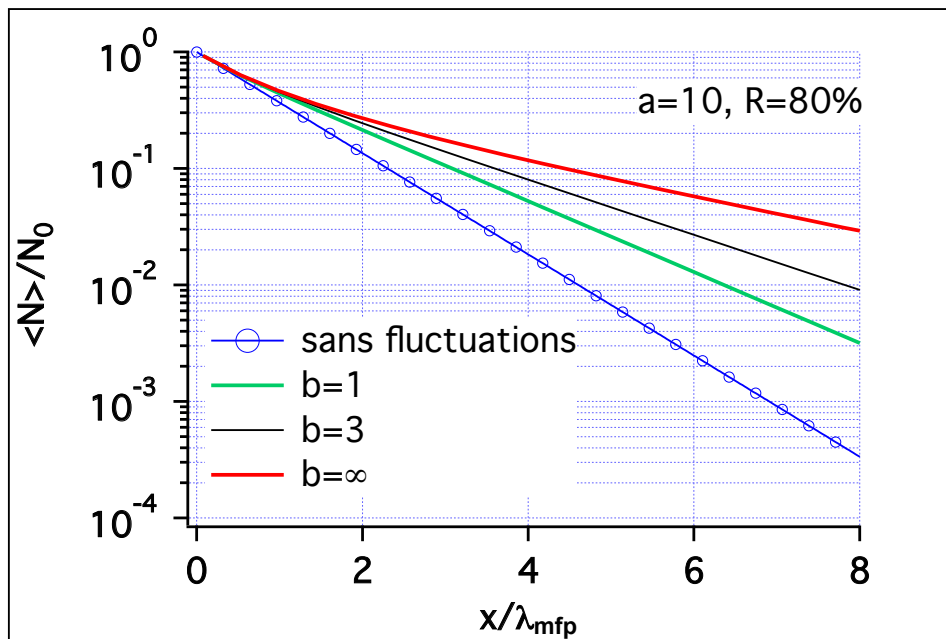


FIGURE 3.21 – Profils de la densité des neutres moyenne en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen pour différentes valeurs du paramètre $b = \tau \langle v \rangle$, $a = 10$ et comparés au profil sans fluctuations (courbe bleue).

3.6 Synthèse et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que dans le cadre du modèle de transport le plus simple possible, c'est à dire en considérant une géométrie unidimensionnelle, des neutres monocinétiques dans un plasma purement absorbant (i.e. sans diffusion dans l'espace des vitesses), la densité moyenne et la source d'ionisation pouvaient être calculée de façon simple à partir de la fonction caractéristique de la distribution multivariables décrivant les fluctuations de densité (n_e). Ce résultat est également valable pour la solution de Smirnov, qui inclut la diffusion dans l'espace des vitesses (réaction d'échange de charge). A l'aide de ce résultat, qui conduit à des formes analytiques pour la densité et la source d'ionisation moyenne, nous avons identifié les paramètres de contrôle du problème. La première conclusion est que l'effet des fluctuations n'est significatif

1. Ce rapport est lié à la condition donnée par Eq. (1.49) dans le chapitre 1, en assimilant $\partial_t v$ à v/τ .

que pour des taux de fluctuation importants. Ces effets ne se manifesteront donc que dans la SOL lointaine, i.e. les régions les plus externes du plasma, proches de la paroi, où le taux de fluctuation est très important. Ensuite, la nature des mécanismes de recyclage en jeu, et plus précisément les échelles de temps associées, joue un rôle important dans le problème. En effet, si le flux de recyclage suit instantanément le flux plasma, et que les fluctuations de ce dernier peuvent être attribuées à la densité plasma, la source de neutres n'est importante que quand la densité plasma l'est également. Dans ce cas, la réionisation locale est importante et la source d'ionisation moyenne est plus piquée vers la paroi que la source d'ionisation calculée pour la densité moyenne ($\langle n_e \rangle$). En réalité, les fluctuations du flux plasma proviennent à la fois de la vitesse fluide et de la densité, car $\Gamma_p = \tilde{n}_e \tilde{v}$, et les effets de la réionisation locale peuvent être moins importants que prédits dans le cadre de ce modèle. Seul un calcul basé sur une simulation réaliste de turbulence de bord permettra d'aller plus loin dans cette direction. Dans le cas opposé où la réponse du mur est très lente, le flux de neutres entrant dans le plasma devient égal à la moyenne du flux plasma incident, et la source de neutres à la paroi est identique quelle que soit la densité plasma au niveau du mur. Les réalisations pour lesquelles la densité est faible conduisent donc à une pénétration en profondeur des neutres dans le plasma. Cette pénétration est d'autant plus importante que la taille typique des structures turbulentes (mesurée par la longueur de corrélation) est grande devant le libre parcours moyen des neutres. Cette constatation a des conséquences importantes en pratique. Les molécules, qui quittent la paroi avec des énergies faibles, déterminées par la température de la paroi, ont des libres parcours moyens beaucoup plus petits que ceux des atomes des isotopes de l'hydrogène issus de réaction de dissociation moléculaire¹, et surtout du processus de rétro-diffusion à la paroi. Des molécules D₂ quittant la paroi avec une énergie $E_0 = 0.03$ eV dans un plasma de densité $n_e = 10^{19}$ m⁻³ et de température $T_e = 20$ eV conduisent à un rapport entre le libre parcours moyen et la longueur de corrélation ℓ de l'ordre de $a \simeq 2$, en supposant que $\ell = 1$ cm. Pour des atomes avec une énergie initiale de 100 eV, nous obtenons $a \simeq 10^{-2}$, et les fluctuations ont un effet négligeable. De plus, les atomes d'hydrogène qui désorbent de la paroi avec des énergies thermiques subissent des réactions d'échange de charge, qui réduisent l'effet des fluctuations comme nous l'avons montré à l'aide de la solution de *Smirnov*. La situation en ce qui concerne les impuretés est également intéressante. En effet, bien que leur énergie initiale, donnée par la distribution de *Thompson* [139], soit supérieure aux énergies thermiques, les taux d'ionisation correspondant peuvent être importants (voir Chapitre 1) et les libres parcours moyens du même ordre que la taille caractéristique des structures turbulentes. De plus, les réactions d'échange de charge résonnant sont négligeables en pratique pour ces impuretés présentes à de faible concentration. Pour le béryllium, on obtient $a \simeq 2$ pour $\ell = 1$ cm et une énergie initiale de 1.7 eV, qui correspond à l'énergie la plus probable selon la distribution de *Thompson*. Les résultats ainsi obtenus ne sont pas spécifiques à la distribution Gamma, ce que nous avons vérifié en comparant au cas où les fluctuations sont décrites par une distribution Log-normale. Le comportement à l'origine de la distribution détermine la décroissance asymptotique du profil de neutres, car ce sont les réalisations de faible densité plasma qui contrôlent cette décroissance, mais les effets des différents paramètres de contrôle restent les mêmes. Notons tout de même que la distribution Log-normale ne permet pas d'obtenir des résultats analytiques simples, car la fonction caractéristique associée n'a pas d'expression en termes de fonctions élémentaires connues, un point sur lequel nous reviendrons dans le chapitre 4.

La distribution Gamma K-P permet de reproduire un certain nombre de propriétés statistiques observées dans la SOL, mais a deux limitations principales. La première est que la fonction de corrélation est forcément positive. Nous avons vu cependant que dans le cas d'une distribution Log-normale, les effets d'une fonction de corrélation oscillante de même longueur intégrale qu'une fonction de corrélation exponentielle, a des effets appréciables sur le profil de neutres moyen si

1. le taux d'ionisation des atomes d'hydrogène et le taux d'ionisation effectif des molécules, introduit au chapitre 1, sont tout à fait comparables. C'est donc la vitesse qui contrôle les différences de libre parcours moyen.

la fonction oscille suffisamment le long de la trajectoire du neutre. La seconde limitation est liée au fait que le taux de fluctuation est nécessairement constant dans l'espace, ce qui n'est clairement pas le cas dans la réalité. Nous avons présenté une généralisation de la distribution Gamma K-P permettant un taux de fluctuation variable dans l'espace. Cependant, la liberté de choix sur les profils de densité moyenne et de taux de fluctuation est fortement limitée par les contraintes de réalisabilité mathématique du modèle, qui imposent que la fonction de covariance doit être définie-positive. La distribution Gamma M-M permet de relaxer dans une certaine mesure ces contraintes, mais au prix de la perte de toute liberté de choix sur la fonction de covariance.

Les résultats analytiques obtenus dans ce chapitre ont été comparés à des résultats numériques obtenus à l'aide du code EIRENE, en échantillonnant un grand nombre de réalisations du champ de densité électronique (typiquement jusqu'à 10^4). Cette implémentation numérique peut en principe être utilisée dans une géométrie bidimensionnelle, en relaxant les approximations monocinétiques et en incluant les effets de diffusion dans l'espace des vitesses. Cependant, la puissance de calcul nécessaire est très importante, puisqu'il s'agit de résoudre 10^4 fois le problème de transport, et rend cette façon de procéder inutilisable dans les codes de modélisation de plasma de bord de type B2-EIRENE qui fonctionnent de manière itérative. Il est donc nécessaire de développer des modèles de transport à gros grains (transport effectif), incluant les effets des fluctuations.

Chapitre 4

Modèles de transport à gros grains

Dans cette section on s'intéresse à la détermination de l'équation différentielle qui régit l'évolution de la densité moyenne $\langle \mathcal{N} \rangle$. De manière générale, celle-ci se présente sous la forme

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] \langle \mathcal{N}(x, t) \rangle = F[\langle \mathcal{N} \rangle], \quad (4.1)$$

où F est une fonctionnelle de $\langle \mathcal{N} \rangle$, définie par $F[\langle \mathcal{N} \rangle] = \langle v \mathcal{N} \rangle$ dans le cas où le terme intégral dans l'équation de *Boltzmann* est nul (pas de diffusion dans l'espace des vitesses). Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, ce dernier point n'est pas réellement limitant car seul le transport des molécules et des atomes d'impuretés peut être affecté de façon importante par les fluctuations, en raison de leur petits libre parcours moyen. Or, les réactions d'échange de charge sont en pratique négligeables pour ces espèces (voir chapitre 1). L'équation (4.1) est dite à "gros grains" ("coarse grained"), car les fluctuations à petites échelles y ont été lissées, et est une équation différentielle déterministe (non-stochastique). Comme nous l'avons expliqué précédemment, la résolution de Eq. (4.1) pour $\langle \mathcal{N} \rangle$ nécessite un effort numérique beaucoup moins important que celui requis par une technique basée sur l'échantillonnage d'un grand nombre de réalisations du champ stochastique v , permettant de calculer la moyenne d'ensemble de \mathcal{N} . En particulier, le développement de modèles à gros grains est essentiel pour permettre l'implémentation de l'effet des fluctuations sur le transport des neutres étudié dans le chapitre précédent dans un code de modélisation de plasma de bord comme B2-EIRENE.

Dans la suite, nous allons montrer que dans le cadre d'une statistique Gamma K-P, l'échange de charge étant négligé, l'équation de transport à gros grain se réduit à une équation du type *Boltzmann* avec un taux d'ionisation effectif, i.e. $F = -\omega(x) \langle \mathcal{N}(x) \rangle$, aussi bien pour les modèles de recyclage rapide que lent. L'expression de $\omega(x)$ fait intervenir des déterminants de matrices pouvant être de grande taille, et qui peuvent donc être pénalisants en termes de temps de calcul. Dans le cas d'une fonction de corrélation exponentielle, ces déterminants peuvent être calculés à partir des formules de *Grenander & Szegö* données au chapitre 2. Une méthode basée sur un développement en cumulants nous permet ensuite d'obtenir une expression approchée de $\omega(x)$, i.e. qui ne fait intervenir que des fonctions élémentaires. Nous montrons ensuite que les distributions Gamma K-P généralisées (aux cas des taux de fluctuation inhomogènes) et Gamma M-M conduisent toutes les deux également à des équations de type *Boltzmann* avec un taux d'ionisation à gros grains. Enfin, les propriétés statistiques de l'épaisseur optique, qui permettent également d'obtenir un modèle de transport à gros grains utilisable dans un code Monte Carlo, sont discutées.

4.1 Equation de transport effectif dans le cas du recyclage lent

On rappelle que ce cas correspond à une condition aux limites déterministe. Le terme $F[\langle \mathcal{N} \rangle]$ n'est rien d'autre que la source d'ionisation moyenne, qui a été calculée dans la section 3.2.4. L'équation de transport à gros grains stationnaire s'écrit donc

$$\left[v \frac{\partial}{\partial x} + \omega_I(x) \right] \langle \mathcal{N}(x) \rangle = 0, \quad (4.2)$$

avec le taux d'ionisation effectif ω_I donné par

$$\omega_I(x) = \frac{v}{R^2 x} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[1 - \left(A_k^{-1} \right)_{kk} \right]. \quad (4.3)$$

Ce taux est tracé dans le chapitre précédent sur la Fig. 3.7, et tend pour $x \rightarrow \infty$ (en pratique $x \gg \ell$, où ℓ est la longueur de corrélation) vers une valeur constante donnée par Eq. (3.52). La densité moyenne des particules neutres décroît donc exponentiellement à partir de quelques longueur de corrélation de la paroi

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle \propto \exp \left(- \frac{\sqrt{1 + 4aR^2} - 1}{2aR^2} \frac{x}{\lambda_{\text{mfp}}} \right), \quad (4.4)$$

avec un taux de décroissance dépendant de l'amplitude des fluctuations (R) et de la longueur de corrélation spatiale ($\ell = a\lambda_{\text{mfp}}$). En particulier, la longueur de décroissance du profil moyen est toujours supérieur à λ_{mfp} car le préfacteur $(\sqrt{1 + 4aR^2} - 1)/2aR^2$ dans l'exponentielle de Eq. (4.4) est toujours inférieur à 1. Ce résultat illustre parfaitement les subtilités liées à l'application du théorème ergodique pour le calcul de moyennes du type $\langle \exp -\frac{1}{v} \int_0^x v(s) ds \rangle$. En effet, une application naïve de ce théorème conduirait à considérer que lorsque $x \gg \ell$, $\int_0^x v(x) dx \simeq x \langle v \rangle$, et donc à une décroissance exponentielle avec une longueur caractéristique $\lambda_{\text{mfp}} = v/\langle v \rangle$ en contradiction avec le résultat de Eq. (4.4), sauf si $a = 0$ ou $R = 0$. En réalité, les réalisations pour lesquelles $x^{-1} \int_0^x v(s) ds$ dévie fortement de $\langle v \rangle$, contribuent notablement dans l'intégrale bien que leur probabilité soit faible, car elles interviennent dans l'argument d'une exponentielle.

En pratique, k est choisi de telle sorte que $x/k \ll \ell$, i.e. k doit être d'autant plus grand que x est grand. Pour $x \gg \ell$ il est donc judicieux d'utiliser l'expression analytique du taux effectif, donnée par Eq. (3.52) pour une corrélation exponentielle, ou un calcul numérique de cette limite pour un autre type de fonction de corrélation. Pour des fluctuations exponentiellement corrélées, le taux d'ionisation à gros grains peut être écrit de manière générale à l'aide de fonctions trigonométriques, en utilisant le résultat de *Grenander & Szegö* présenté dans la section 2.3.2,

$$\omega_I(x) = \frac{v}{R^2 x} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[1 - \frac{D_{k-1}}{D_k} \right], \quad (4.5)$$

où

$$D_k = \frac{r^k}{1 - r^2} \frac{1}{\sin(\theta)} \left[\sin((k+1)\theta) - 2r \sin(k\theta) + r^2 \sin((k-1)\theta) \right], \quad (4.6)$$

avec $r = e^{-1/\ell}$, et

$$\theta = \arccos \left[\frac{1+r^2}{2r} + R^2 \frac{1-r^2}{2rk\lambda_{\text{mfp}}} x \right]. \quad (4.7)$$

Pour une fonction de corrélation non-exponentielle, le calcul du taux effectif requiert de calculer un élément de l'inverse d'une matrice de taille $k \times k$, et il est donc souhaitable d'essayer d'obtenir un résultat approché analytique. Ce point sera développé dans la suite en utilisant le développement en cumulants.

Nous terminons cette section en présentant l'équation de transport effectif dépendante du temps. En fait le modèle de transport effectif dépendant du temps s'obtient exactement de la même manière que les cas stationnaires. Il suffit dans ce cas de calculer le taux d'ionisation effectif pour la distribution K-P à partir de la densité moyenne dépendante du temps (Eq. (3.87)). On obtient de nouveau une équation pour $\langle \mathcal{N}(x, t) \rangle$ du type *Boltzmann*,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} + \omega(x, t) \right) \langle \mathcal{N}(x, t) \rangle = Q_{eff}(x, t), \quad (4.8)$$

où le taux effectif et la source effective en recyclage lent sont donnés par,

$$\omega(x, t) = \underbrace{\frac{v}{xR^2} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[1 - \left(A_k^{-1} \right)_{kk} \right]}_{\omega_s} + \underbrace{\frac{1}{tR^2} \lim_{T \rightarrow \infty} T \left[1 - \left(B_T^{-1} \right)_{TT} \right]}_{\omega_t}, \quad (4.9)$$

$$Q_{eff}(x, t) = \lim_{T, k \rightarrow \infty} \left[\omega_s \psi(x) |B|^{-1/R^2} + \omega_t \Gamma(t) |A|^{-1/R^2} \right] \quad (4.10)$$

et où les matrices A et B sont données respectivement par $\mathbb{1} + xR^2 / \lambda_{mfp} k \rho(x, x/v)$ et $\mathbb{1} + R^2 t \langle v \rangle / T \rho(vt, t)$. Après relaxation de la condition initiale, le second terme disparaît dans Eq. (4.9), tout comme la source. On retrouve donc un modèle de transport à gros grains analogue à celui obtenu dans le cas adiabatique, mais dans lequel les corrélations temporelles sont prises en compte exactement de la même façon que dans le paragraphe 3.5.

4.2 Equation de transport effectif dans le cas du recyclage rapide

Dans le cas du recyclage rapide, le terme croisé est de la forme

$$\langle v(x=0)v(x)\mathcal{N}(x) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial a_0 \partial a_k} \left\langle \exp \left(- \sum_{i=1}^k a_i v_i \right) \right\rangle \Bigg|_{a_i = x/kv}, \quad (4.11)$$

où $v(x=0)$ et $v(x)$ sont respectivement les fréquences d'ionisation à la paroi et au point x . En utilisant les résultats de la section précédente et l'expression de la densité moyenne dans le cas du recyclage rapide (Eq. (3.43)), on obtient

$$\langle v(x=0)v(x)\mathcal{N}(x) \rangle = \left[\frac{1}{\omega_l(0)} \frac{\partial \omega_l(x)}{\partial a_0} + \omega_l(x) \right] \langle \mathcal{N}_{rap}(x) \rangle, \quad (4.12)$$

où l'on rappelle que le taux d'ionisation effectif $\omega_l(x)$ est donné par

$$\omega_l(x=0) = \frac{v}{xR^2} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[1 - \left(A_k^{-1} \right)_{kk} \right]. \quad (4.13)$$

Il reste à calculer la dérivée de $\omega_l(x)$ par rapport à a_0 . Pour cela, il faut calculer

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \left(A_k^{-1} \right)_{kk} = \frac{|A_k| \partial_{a_0} |A_{k-1}| - |A_{k-1}| \partial_{a_0} |A_k|}{|A_k|^2}. \quad (4.14)$$

En utilisant les règles de dérivation des déterminants, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \left(A_k^{-1} \right)_{kk} = \frac{vk}{R^2 x} \frac{|A_{k-1}|}{|A_k|} \left[\left(A_k^{-1} \right)_{11} - \left(A_{k-1}^{-1} \right)_{11} \right]. \quad (4.15)$$

A nouveau, l'équation de transport à gros grains se réduit à une équation du type *Boltzmann*,

$$\left[v \frac{\partial}{\partial x} + \omega_r(x) \right] \langle \mathcal{N}_{\text{rap}}(x) \rangle = 0, \quad (4.16)$$

avec la fréquence d'ionisation effective suivante

$$\omega_r(x) = \omega_l(x) + \frac{1}{R^2 \omega_l(x=0)} \left(\frac{v}{x} \right)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \frac{|A_{k-1}|}{|A_k|} \left[\left(A_k^{-1} \right)_{11} - \left(A_{k-1}^{-1} \right)_{11} \right]. \quad (4.17)$$

Les indices l et r désignent ici respectivement les recyclages lent et rapide. Pour une statistique homogène, A étant une matrice de *Toeplitz*, on a donc

$$\left(A_k^{-1} \right)_{11} - \left(A_{k-1}^{-1} \right)_{11} = \frac{|A_{k-1}|}{|A_k|} - \frac{|A_{k-2}|}{|A_{k-1}|}. \quad (4.18)$$

Comme de plus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_{k-1}|}{|A_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_{k-2}|}{|A_{k-1}|}, \quad (4.19)$$

le comportement asymptotique de Eq. (4.17) est du même type que celui de ω_l , c'est à dire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \omega_r(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \omega_l(x) = \omega_\infty, \quad (4.20)$$

avec ω_∞ donné par Eq. (3.52) si les fluctuations sont exponentiellement corrélées. Dans ce cas, les expressions des déterminants peuvent également être obtenues à partir de la formule analytique de *Grenander & Szegö*. Le profil asymptotique de la densité moyenne des particules neutres en présence de recyclage rapide est aussi exponentiel pour les grands x

$$\langle \mathcal{N}_{\text{rap}}(x) \rangle \propto \omega_\infty \exp \left(- \frac{\sqrt{1 + 4aR^2} - 1}{2aR^2} \frac{x}{\lambda_{\text{mfp}}} \right). \quad (4.21)$$

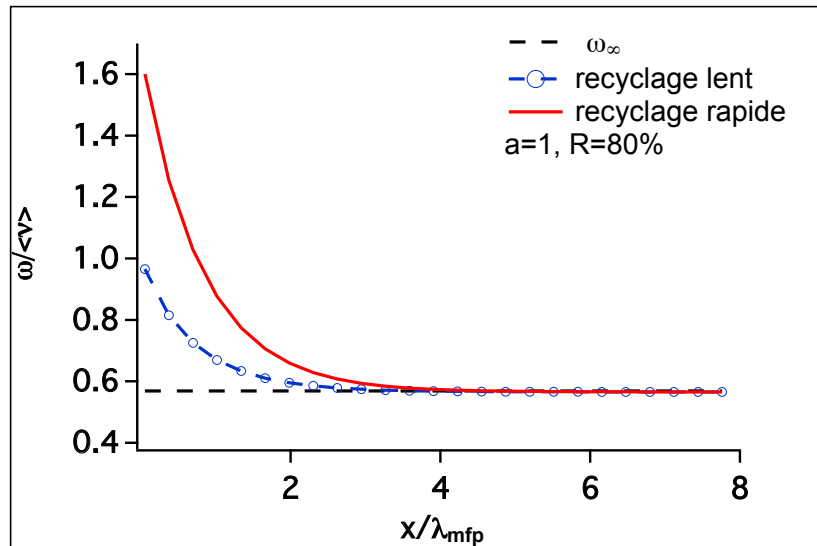


FIGURE 4.1 – Comparaison des taux effectifs dans les modèles de recyclage lent (courbe bleue) et rapide (courbe rouge). La limite de *Szegö* ω_∞ correspond à la courbe noire. Le taux d'ionisation en présence de recyclage rapide est augmenté d'un facteur $1 + R^2$ à la paroi par rapport à celui du recyclage lent.

Le taux d'ionisation effectif $\omega_l(x)$ est tracé sur la Fig. 4.1 (courbe bleue), pour une fonction de corrélation exponentielle, $a = 1$ et $R = 80\%$. Près de la paroi, le taux d'ionisation en recyclage rapide (Fig. 4.1, courbe rouge) est supérieur à celui en recyclage lent, ce qui traduit une forte ionisation locale des neutres de recyclage discutée dans le chapitre précédent (il est facile de vérifier que $\omega_r/\omega_l = 1 + R^2$ en $x = 0$, au niveau de la paroi). Les deux taux d'ionisation convergent vers la même limite ω_∞ (pointillés noirs), ce qui traduit simplement le fait que loin de la paroi, les fluctuations de densité ont perdu toute corrélation avec les fluctuations du flux de recyclage.

4.3 Développement en cumulants de $\langle \mathcal{N} \rangle$

Comme nous l'avons dit précédemment, dans le cas où la fonction de corrélation n'est pas exponentielle les résultats relatifs à la distribution K-P nécessitent le calcul de déterminants de matrices dont la taille peut être importante. Dans cette section on utilise le théorème des cumulants pour obtenir une approximation du taux d'ionisation effectif permettant un calcul rapide pour une fonction de corrélation quelconque.

On commence par introduire un champ \mathbf{v} continu, distribué suivant la FDP Gamma K-P. Ce champ est construit à partir d'un champ Gaussien \mathbf{X} lui même continu,

$$\mathbf{v}(s) = \sum_{i=1}^M x_i^2(s), \quad s \in \mathbb{R}^+. \quad (4.22)$$

Dans le cas du recyclage lent, la moyenne de la densité de neutres s'écrit [116],

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \left\langle \exp \left(-\frac{1}{\nu} \int_0^x \mathbf{v}(s) ds \right) \right\rangle. \quad (4.23)$$

La moyenne d'une fonction exponentielle peut être écrite comme suit,

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \exp \left[\left\langle \left\langle \exp \left(-\frac{1}{\nu} \int_0^x \mathbf{v}(s) ds \right) - 1 \right\rangle \right\rangle \right], \quad (4.24)$$

où les crochets $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ désignent les cumulants. Ces derniers sont donnés par Meeron [140],

$$\langle \langle \tau_1 \dots \tau_n \rangle \rangle = \sum_{l=1}^n \sum (-1)^{l-1} (l-1)! \langle \tau_1 \dots \rangle \langle \tau_2 \dots \rangle \dots \langle \tau_l \dots \rangle, \quad (4.25)$$

où la seconde somme est développée sur toutes les combinaisons possibles en l blocs multiplicatifs des n éléments. On donne les trois premiers cumulants comme exemple,

$$\langle \langle \tau_1 \rangle \rangle = \langle \tau_1 \rangle, \quad (4.26)$$

$$\langle \langle \tau_1 \tau_2 \rangle \rangle = \langle \tau_1 \tau_2 \rangle - \langle \tau_1 \rangle \langle \tau_2 \rangle, \quad (4.27)$$

$$\langle \langle \tau_1 \tau_2 \tau_3 \rangle \rangle = \langle \tau_1 \tau_2 \tau_3 \rangle - \langle \tau_1 \rangle \langle \tau_2 \tau_3 \rangle - \langle \tau_2 \rangle \langle \tau_1 \tau_3 \rangle - \langle \tau_3 \rangle \langle \tau_1 \tau_2 \rangle + 2 \langle \tau_1 \rangle \langle \tau_2 \rangle \langle \tau_3 \rangle. \quad (4.28)$$

Un développement en série de la seconde exponentielle dans Eq. (4.24) ramène le problème au calcul des termes suivants,

$$\kappa_n = \left\langle \left\langle \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{\nu} \int_0^x \mathbf{v}(s) ds \right)^n \right\rangle \right\rangle = \frac{(-1)^n}{\nu^n n!} \int_0^x ds_1 \dots \int_0^x ds_n \left\langle \left\langle \mathbf{v}(s_1) \dots \mathbf{v}(s_n) \right\rangle \right\rangle. \quad (4.29)$$

On a donc

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{v} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i\right), \quad (4.30)$$

avec pour $n = 1$,

$$\kappa_1 = - \int_0^x ds \langle \langle v \rangle \rangle / v = - \langle v \rangle x / v \quad (4.31)$$

et pour $n = 2$,

$$\kappa_2 = \frac{1}{2v^2} \int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \mathcal{C}(|s_1 - s_2|). \quad (4.32)$$

Lorsque la longueur de corrélation est infinie, le problème se ramène à une statistique univariante, i.e. on "contracte" les n points (au sens où $v(s_1) = \dots = v(s_n)$), pour obtenir

$$\langle \langle v_1 \dots v_n \rangle \rangle = \langle \langle v_1^n \rangle \rangle = \langle \langle v^n \rangle \rangle. \quad (4.33)$$

La fonction caractéristique de la distribution Gamma à une variable est donnée par,

$$\phi(t) = (1 - i\alpha t)^{-\beta}, \quad \alpha = 2\mathcal{C}_0, \beta = M/2, \quad (4.34)$$

d'où on déduit la fonction génératrice des cumulants

$$\Psi(t) = -\beta \ln(1 - i\alpha t) \quad (4.35)$$

et finalement

$$\langle \langle v^k \rangle \rangle = \left. \frac{\partial^k \Psi(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \beta \alpha^k (k-1)!. \quad (4.36)$$

Si la longueur de corrélation est finie une expression exacte ou approchée du cumulant à n points est nécessaire pour conduire les calculs. Les cumulants minimaux¹ d'ordre k de la distribution de *Wishart*, dont la distribution Gamma K-P est un cas particulier, sont donnés par *Kollo* [141] mais leur expression est complexe, et il n'est pas simple d'en déduire les cumulants de la distribution Gamma K-P. Il est possible d'obtenir au moins les cumulants du troisième et du quatrième ordre en utilisant le théorème de *Wick*, mais l'exercice de dénombrement pour un ordre n quelconque est délicat (même si il est possible de conjecturer la forme du cumulant d'ordre n , voir annexe A.2). Par contre, l'intégrale multiple du cumulant à n points, qui est la quantité dont nous avons réellement besoin est calculée dans l'annexe A.1, en se basant notamment sur le théorème de *Mercer* et des résultats présentés par *Grenander & Szegö*. Nous obtenons,

$$\int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \langle \langle v(s_1) \dots v(s_n) \rangle \rangle = \langle \langle v^n \rangle \rangle \int_0^x ds_1 \dots \int_0^x ds_n \rho_{12}^g \rho_{23}^g \dots \rho_{n-1 n}^g \rho_{n1}^g. \quad (4.37)$$

où ρ^g est la fonction de corrélation des variables Gaussiennes, liée à la fonction de corrélation (ρ) des variables physiques v par $\rho = (\rho^g)^2$. Une approximation de cette intégrale est donnée par *Whittle* [98, 142] et *Grenander & Szegö* [95] en fonction de la densité spectrale (la transformée de *Fourier* de ρ^g). Dans notre cas, les effets des fluctuations sont les plus importants pour de grandes longueurs de corrélation, et c'est ce régime que nous allons chercher à décrire de manière précise. Notre approche consiste donc à considérer que l'intégrand est dominé par le maximum local obtenu en contractant les $n - 1$ points, soit $s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1}$, ce qui revient à considérer uniquement les corrélations entre deux points (s_1 et s_n),

1. $\langle \langle v_1^{a_1} \dots v_k^{a_k} \rangle \rangle$ avec $a_i = 1$.

$$\int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \rho_{n1} = x^{n-2} \mathcal{J}(x), \quad n \geq 2, \quad (4.38)$$

où

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^x ds_1 \int_0^x ds_n \rho(|s_1 - s_n|) = 2 \int_0^x ds_1 \int_0^{s_1} ds_n \rho(s_1 - s_n). \quad (4.39)$$

On a alors l'expression approchée suivante pour la densité moyenne

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle \simeq \frac{\Gamma_0}{\nu} \exp \left[-\langle v \rangle x / \nu - \frac{\beta \mathcal{J}(x)}{x^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (\alpha x / \nu)^i \right], \quad (4.40)$$

d'où finalement

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle \simeq \frac{\Gamma_0}{\nu} \left(1 + R^2 \frac{x}{\lambda_{\text{mfp}}} \right)^{-\mathcal{J}(x)/R^2 x^2} \exp \left(-\frac{x}{\lambda_{\text{mfp}}} \left(1 - \frac{\mathcal{J}(x)}{x^2} \right) \right). \quad (4.41)$$

Il est clair que la resommation de la série dans l'exponentielle de Eq. (4.40) n'est justifiée qu'à l'intérieur de son rayon de convergence (e.g., test de convergence de *Cauchy* [143, p. 308]),

$$x / \lambda_{\text{mfp}} \leq R^{-2}. \quad (4.42)$$

Cependant, nous verrons sur plusieurs exemples que Eq. (4.41) donne des résultats en accord avec le résultat exact de $\langle \mathcal{N}(x) \rangle$ jusqu'à $x / \lambda_{\text{mfp}} \sim 10$ (même dans les conditions extrêmes où l'amplitude des fluctuations excède les 80%). Cette constatation est à rapprocher du fait que la resommation de la série dans le cas d'une longueur de corrélation infinie donne le résultat exact, même en dehors du rayon de convergence de la série. Le résultat donné par Eq. (4.41) est important, et nous permettra en outre de calculer la FDP de l'épaisseur optique.

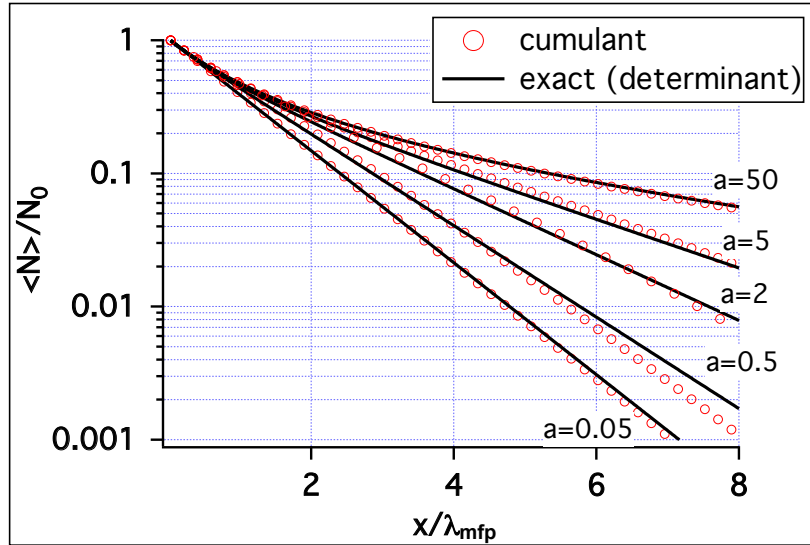


FIGURE 4.2 – Profils de la densité moyenne de neutres en échelle semi-logarithmique en fonction de la distance à la paroi normalisée au libre parcours moyen, obtenus en utilisant le développement en cumulants (courbes rouges), comparés aux profils exacts (courbes noires), pour une fonction de corrélation exponentielle ($\rho(s) = e^{-|s|/\ell}$) et différentes valeurs de a .

En utilisant les propriétés suivantes de la fonction de corrélation,

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \rho(s) = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho(s) = \rho(0) = 1, \quad (4.43)$$

les deux cas limites ($\ell \rightarrow 0$ et $\ell \rightarrow \infty$) pour la densité moyenne s'obtiennent immédiatement à partir Eq. (4.41),

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \rightarrow \infty, \quad \mathcal{J}(x) \rightarrow x^2 \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{N}(x) \rangle \rightarrow \frac{\Gamma_0}{\nu} \left(1 + R^2 \frac{x}{\lambda_{\text{mfp}}} \right)^{-1/R^2}, \\ \ell \rightarrow 0, \quad \mathcal{J}(x) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{N}(x) \rangle \rightarrow \frac{\Gamma_0}{\nu} e^{-x/\lambda_{\text{mfp}}}. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

$$\left. \right\} \quad (4.45)$$

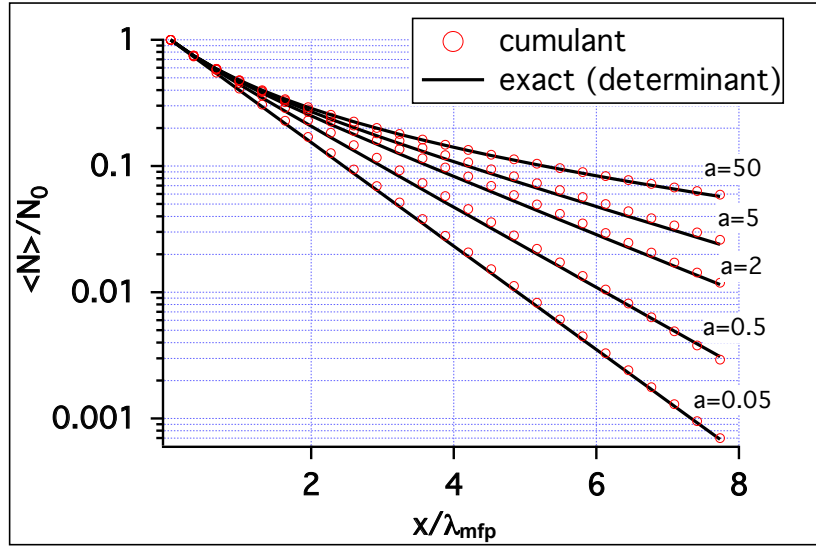


FIGURE 4.3 – Mêmes commentaires que Fig. 4.2 avec $\rho(s) = 1/\sqrt{1+|s|/\ell}$.

Pour illustrer ces résultats, on choisit deux fonctions de corrélations dont les intégrales doubles sont calculables analytiquement, à savoir une fonction de corrélation exponentielle

$$\rho_1(s) = \exp(-|s|/\ell), \quad (4.46)$$

et une fonction de corrélation en loi de puissance (cette fonction est définie-positive [76]),

$$\rho_2(s) = \frac{1}{\sqrt{1+|s|/\ell}}. \quad (4.47)$$

Les intégrales doubles dans Eq. (4.39) sont respectivement données par

$$\mathcal{J}_1(x) = 4\ell \left[x + 2\ell \left(e^{-x/2\ell} - 1 \right) \right], \quad (4.48)$$

et

$$\mathcal{J}_2(x) = 2\ell \left[(\ell + x) \ln(1 + x/\ell) - x \right]. \quad (4.49)$$

Les profils de densité moyenne correspondant sont tracés en échelle semi-logarithmique sur les figures 4.2 et 4.3, pour différentes valeurs de a . L'approximation obtenue en utilisant le développement en cumulants donne d'excellents résultats en comparaison avec les calculs exacts du chapitre 3, et est d'autant meilleure que la fonction de corrélation est à plus grande portée. La raison

mathématique à cela est que la contraction permettant le passage de Eq. (4.37) à Eq. (4.38) devient plus naturelle avec ce type de fonctions de corrélation dont la longueur intégrale est infinie.

Nous pouvons maintenant dériver l'équation à gros grains vérifiée par la densité moyenne, toujours dans le cadre du modèle de recyclage lent. Un calcul sans difficulté conduit à

$$\left[v \frac{\partial}{\partial x} + \omega_{lc}(x) \right] \langle N(x) \rangle = 0, \quad (4.50)$$

où la fréquence d'ionisation effective est obtenue après dérivation de Eq. (4.41) par rapport à x ,

$$\omega_{lc}(x) = x(1 - H(x, 1)) + \beta \left[\alpha \frac{\mathcal{J}(x)}{x^2(1 + \alpha x/v)} - v \frac{H(x, 2)}{x} \log(1 + \alpha x/v) \right], \quad (4.51)$$

où $H(x, n) = -\partial_x \mathcal{J}(x)/x + n\mathcal{J}(x)/x^2$. L'équation de transport à gros grains reste donc une équation de type *Boltzmann* dans l'approche utilisant le développement en cumulants.

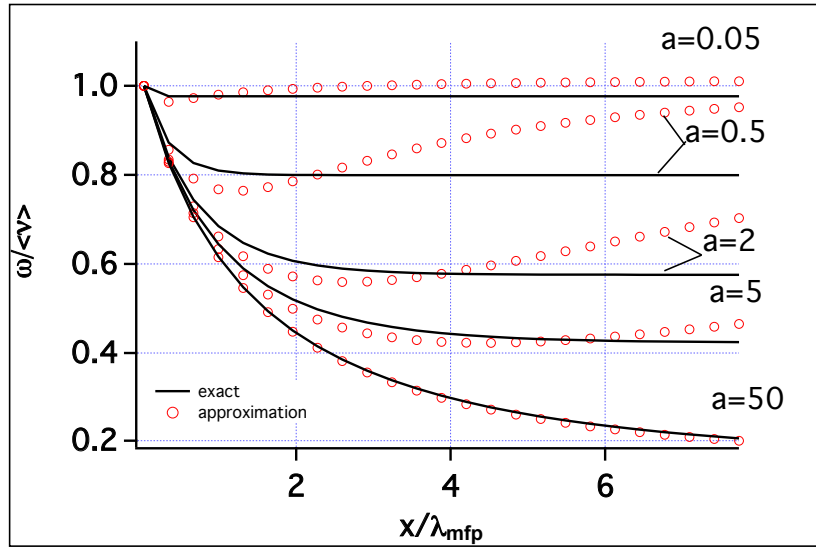


FIGURE 4.4 – Taux d'ionisations effectifs obtenus exactement (courbes noires) comparés aux taux effectifs approximatifs ω_{lc} (courbes rouges) pour $R = 80\%$.

Les profils moyens de la densité de neutres obtenus avec le développement en cumulants (Fig. 4.2 & Fig. 4.3) sont plus précis que les taux d'ionisations effectifs (Fig. 4.4). Ceci provient du fait que ce qui compte pour calculer la densité des neutres est l'intégrale du taux d'ionisation ($\int_0^x \omega(s) ds$) et non le taux lui-même. En effet nous avons $\omega_{lc} < \omega_l$ près de la paroi et $\omega_{lc} > \omega_l$ au-delà, ce qui conduit à un effet de compensation dans l'intégrale de l'épaisseur optique. La source d'ionisation moyenne $\langle S \rangle_c$ est donc calculée de manière moins précise que la densité moyenne.

Nous concluons cette partie en remarquant que l'on pourrait adopter un point de vue différent sur les résultats présentés dans cette section. En effet, si les seules quantités accessibles expérimentalement sont la FDP en un point et la fonction de corrélation, il n'est pas possible de distinguer expérimentalement entre la distribution K-P et une distribution dont les cumulants sont tels que les développements présentés ici sont exacts. Les écarts observés pour la densité de neutres ou le taux d'ionisation effectif pourraient alors être utilisés pour mesurer les effets des corrélations à n points, qui sont des paramètres non contraints par l'expérience. Cependant, pour valider une telle interprétation il est nécessaire de vérifier que la nouvelle distribution ainsi définie est bien

réalisable, autrement dit par exemple que sa fonction caractéristique (dont l'obtention n'est pas triviale) est bien définie-positive. Notons finalement que le résultat donné par Eq. (3.77) pour la distribution M-M est très similaire à celui obtenu dans le cadre du développement en cumulants (Eq. (4.41)), ce qui pourrait laisser penser à un lien de parenté entre la distribution Gamma M-M et la distribution pour laquelle le résultat donné par Eq. (4.41) est exact (à supposer qu'elle existe). En réalité il ne s'agit que d'une ressemblance superficielle, comme on peut le voir en essayant d'ajuster les paramètres α et β de la distribution Gamma M-M pour reproduire Eq. (4.41).

4.4 Equation de transport à gros grains dans le cas où le taux de fluctuations varie dans l'espace

Le résultat donné par Eq. (3.67), permet d'écrire une équation de transport effectif pour l'espèce neutre dans une SOL non-homogène,

$$v \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathcal{N}(x) \rangle + \omega_h(x) \langle \mathcal{N}(x) \rangle = 0. \quad (4.52)$$

Cette équation est du type *Boltzmann*, avec un taux d'ionisation effectif donné par,

$$\omega_h = \frac{v}{x} \lim_{k \rightarrow \infty} k \sum_{i=0}^{k-1} \Delta M_i \left(1 - \left(A_{k_i}^{-1} \right)_{kk} \right), \quad (4.53)$$

où $A_{k_i}^{-1}$ est la matrice inverse de $A_{k_i} = \mathbb{1} + 2\mathcal{C}_{k_i}$, et où les matrices \mathcal{C}_{k_i} sont définies par Eq. (3.68).

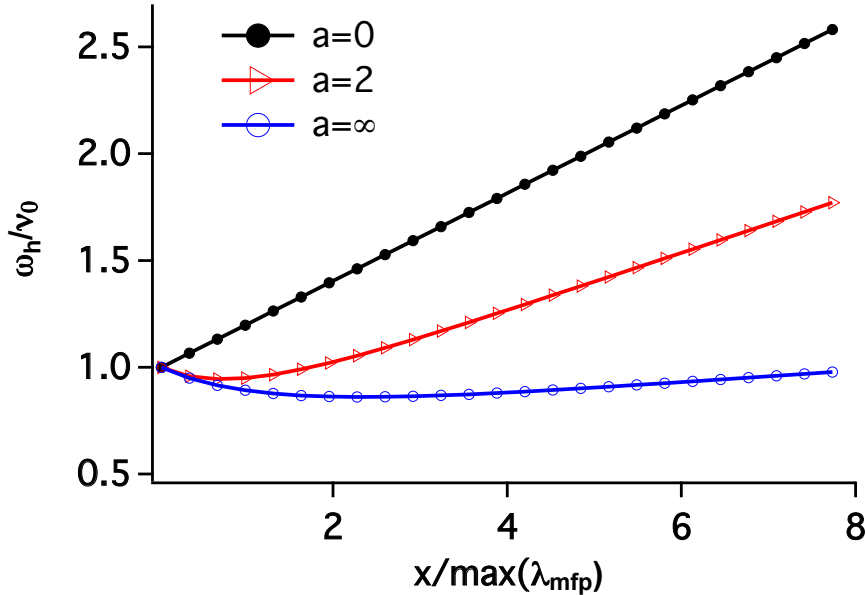


FIGURE 4.5 – Taux d'ionisation effectif ω_h normalisé au taux d'ionisation à la paroi, en fonction de la distance à celle-ci normalisée au libre parcours moyen à la paroi.

Les calculs effectués dans le cadre de la distribution de *Mathai & Moschopoulos* permettent également d'obtenir une équation de transport effectif pour l'espèce neutre dans une SOL non-homogène. En effet, la dérivée partielle de la fonction caractéristique donnée par Eq. (2.71) par

rapport à un élément a_k du vecteur \mathbf{a} est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_k} = \alpha_k \left[\beta_0 \left(1 - \mathbf{a} \mathbf{a}^\top \right)^{-1} + \beta_k \left(1 - a_k \alpha_k \right)^{-1} \right] \mathcal{A}. \quad (4.54)$$

On s'intéresse ici plutôt à la limite continue de la distribution M-M, introduite dans la section 2.3.3.5. La dérivée partielle par rapport à la variable a_k devient une dérivée fonctionnelle par rapport à $a(t)$ (e.g., Fox [144]). On obtient sans difficulté le résultat suivant

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta a(t)} = \alpha(t) \left[\beta_0 \left(1 - \int_{\Theta} ds a(s) \alpha(s) \right)^{-1} + \beta(t) \right] \mathcal{F}. \quad (4.55)$$

Ce résultat¹ conduit directement à la forme suivante pour l'équation à gros grains satisfaite par la densité de neutres moyenne,

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \mathcal{N}(x) \rangle + \omega_m \langle \mathcal{N}(x) \rangle = 0, \quad (4.56)$$

avec

$$\omega_m = \alpha(x) \left[\beta_0 \left(1 + \frac{1}{\nu} \int_0^x ds a(s) \right)^{-1} + \beta(x) \right]. \quad (4.57)$$

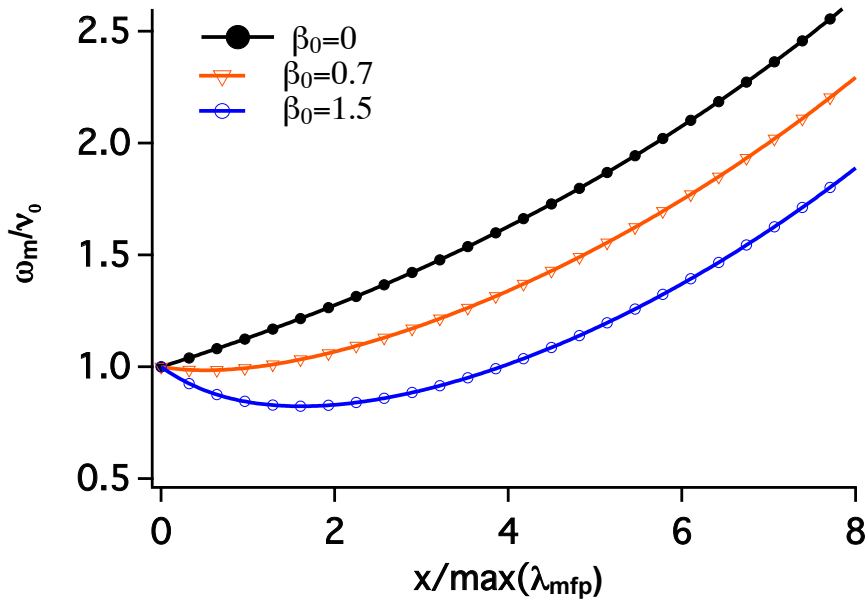


FIGURE 4.6 – Taux d'ionisation effectif ω_m normalisé au taux d'ionisation à la paroi, en fonction de la distance à celle-ci normalisée au libre parcours moyen.

Les taux d'ionisation effectifs ω_h et ω_c sont tracés en fonction de la distance à la paroi x sur les Figs. 4.5 et 4.6, pour différentes valeurs de a et β_0 . Les taux effectifs sont normalisés au taux moyen au niveau de la paroi. Le taux moyen est ici une fonction croissante de x , en accord avec les profils de densité moyenne présenté dans la Fig. 3.14. Les effets sont d'autant plus marqués que a est grand, comme dans le cas homogène.

1. A noter que Eq. (4.55) n'est rien d'autre que la limite continue de Eq. (4.54) où on a remplacé a_k par ϵa_k pour $\epsilon \rightarrow 0$.

4.5 Equation de transport à gros grains dans le cadre des autres distributions

La réduction de l'équation de transport stochastique pour \mathcal{N} à une équation du type *Boltzmann* pour $\langle \mathcal{N} \rangle$ n'est pas évidente et dépend de la statistique choisie pour ν . Comme contre exemple on peut donner le cas d'un mélange stochastique de deux milieux, pour lequel la densité moyenne est une somme de deux exponentielles, qui n'est pas solution d'une équation de type *Boltzmann* [2, p. 66] sans terme intégral. Un autre contre-exemple intéressant consiste à considérer une statistique Log-normale avec une longueur de corrélation infinie. Rappelons que cela correspond à une situation où la particule neutre évolue dans un plasma spatialement homogène dont la densité n_e change à chaque réalisation ($\ell \rightarrow \infty \Rightarrow \nu(s) = \nu$). Le problème se réduit donc à

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \left\langle e^{-\nu x / \nu} \right\rangle, \quad (4.58)$$

où la moyenne est calculée sur la distribution Log-normale à une variable donnée par Eq. (2.82). En utilisant la propriété $\phi(\mu_1 + \mu_2, \sigma^2, t) = \phi(\mu_1, \sigma^2, t e^{\mu_2})$ de la fonction caractéristique ϕ^1 , on montre que la densité moyenne vérifie l'équation différentio-fonctionnelle suivante ([145, Eq. 16]),

$$\nu \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathcal{N}(x) \rangle + \langle \nu \rangle \langle \mathcal{N}(Bx) \rangle = 0, \quad (4.59)$$

où $B = \exp(R^2 \langle \nu \rangle^2)$. Cette équation n'est pas locale en x (la densité est évaluée en Bx dans le membre de droite), et n'est donc pas du type *Boltzmann* sauf si $B = 1$, ce qui correspond à $R = 0$. Comme $B \geq 1$, Eq. (4.59) est du type "avancé" ('equation of advanced type' [146])². Le calcul de la moyenne sur la statistique des fluctuations peut donc conduire à une équation de transport à gros grains étrange du point de vue physique, en ce sens que la quantité de neutres ionisés par unité de temps en un point à une distance x de la paroi dépend de la densité de neutres en un point plus éloigné de la paroi.

En conclusion, les distributions de type Gamma considérées dans ce travail se prêtent particulièrement bien à l'obtention de modèles de transport à gros grains. Cette propriété résulte de la forme de leurs fonctions caractéristiques, et plus précisément de la façon dont celles-ci se comportent par dérivation.

4.6 Distribution de l'épaisseur optique

4.6.1 Approximation de la distribution de l'épaisseur optique pour la distribution K-P

Comme suggéré par *Pomraning* [2] et *Prinja & Pomraning* [11], dans un problème de transport stochastique résolu par une technique d'échantillonnage, le temps de calcul des codes Monte Carlo peut être considérablement réduit si l'on dispose de la distribution de l'épaisseur optique. En pratique, ceci revient en effet à remplacer l'échantillonnage du taux d'ionisation (ou absorption) en tout point de l'espace par celui de l'épaisseur optique, qui n'est rien d'autre que la somme des fréquences d'ionisation le long de la trajectoire du neutre,

$$\tau(x) = \int_0^x \nu(s) ds \equiv \epsilon \sum_{i=1}^n \nu_i, \quad \epsilon = x/n. \quad (4.60)$$

-
1. Il n'existe pas d'expression analytique simple pour cette fonction.
 2. Par opposition aux équations du type retardé et du type neutre [147, 148].

Pomraning a obtenu la distribution de l'épaisseur optique dans un mélange stochastique Markovien de deux milieux (voir [2, p. 77]). Dans notre cas, pour obtenir la FDP de τ , il suffit de noter que sa fonction caractéristique $\phi(\tau)$ a été calculé dans ce qui précède. En effet, pour la distribution K-P, on pose $a_1 = a_2 = \dots = t$ dans (2.54) et on substitue $-e/v$ par it dans Eq. (4.41), pour obtenir

$$\phi(t) = \langle \exp i\tau t \rangle = \det(\mathbb{1} - 2itG)^{-\beta}. \quad (4.61)$$

La FDP est ensuite obtenue par transformée de *Fourier* inverse,

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-it\tau} dt. \quad (4.62)$$

En diagonalisant la matrice G de taille $k \times k$, il est clair que la fonction caractéristique de τ s'écrit comme le produit de fonctions caractéristiques de distributions Gamma univariées, de facteur de forme β et de facteurs d'échelle λ_i , où les λ_i sont les valeurs propres de G . Dans le cas où toutes les valeurs propres sont égales, i.e. dans le cas homogène et lorsque les variables sont indépendantes ($G_{ij} = G_0\delta_{ij}$), le facteur d'échelle est le même pour toutes les distributions et l'épaisseur optique est distribuée selon une FDP Gamma de facteur de forme $k\beta$ et de facteur d'échelle $G_0 = 2\langle v \rangle / \beta$. Lorsque k est grand, la FDP de τ tend donc vers une Gaussienne, ce qui n'est rien d'autre que l'expression du théorème de la limite centrale. Dans le cas où les valeurs propres de G ne sont pas toutes égales, il n'existe pas de résultat simple pour la distribution de la somme. D'après les équations précédentes, celle-ci est donnée par la convolution de k distributions Gamma de facteurs d'échelles différents. Pour obtenir un résultat utilisable en pratique, on peut cependant s'appuyer sur l'expression approchée obtenue dans le cadre du développement en cumulants, i.e.

$$\phi(t) = (1 - it\alpha x)^{-\beta\mathcal{J}(x)/x^2} \exp\left(it\langle v \rangle (x - \mathcal{J}(x)/x)\right). \quad (4.63)$$

Le résultat est immédiat, car l'équation (4.63) n'est rien d'autre que la fonction caractéristique d'une distribution Gamma avec un déplacement $\mu(x)$, d'où

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{(\tau - \mu(x))^{\beta(x)-1} e^{-(\tau-\mu)/\alpha(x)}}{\alpha(x)^{\beta(x)} \Gamma(\beta(x))}, \quad \tau \geq \mu(x), \quad (4.64)$$

où

$$\mu(x) = \langle v \rangle (x - \mathcal{J}(x)/x), \quad \beta(x) = \beta\mathcal{J}(x)/x^2, \quad \alpha(x) = \alpha x. \quad (4.65)$$

En conclusion, dans le cadre de cette approximation, l'épaisseur optique est distribuée suivant une loi Gamma caractérisée par un facteur de forme $\beta(x)$, un facteur d'échelle $\alpha(x)$ et un déplacement $\mu(x)$. On vérifie aisément que Eq. (4.41) est retrouvée en calculant l'intégrale unidimensionnelle suivante

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \int_{\mu(x)}^{\infty} d\tau \mathcal{N}(\tau) \mathcal{P}(\tau), \quad (4.66)$$

ce qui illustre parfaitement l'intérêt de disposer de la distribution de l'épaisseur optique.

Pour conclure, notons que le problème de la détermination de la distribution de l'épaisseur optique se ramène au calcul de la distribution de la somme de V.A.s non indépendantes. Ce problème est d'un grand intérêt pour de nombreuses applications, que ce soit dans le cadre de la théorie de la prédiction de V.A.s, de l'étude de la distribution des signaux temporels [149] ou même en économie [150]. Il existe donc dans la littérature un certain nombre de résultats concernant la somme de variables Gamma corrélées, complémentaires à ceux présentés dans cette section, et que nous

présentons brièvement dans la suite. De manière générale on considère, la forme quadratique \mathcal{Q} donnée par

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \equiv \int_0^T ds \int_0^T dt K(s, t) x(s) x(t), \quad (4.67)$$

où les variables x sont des variables normales. Dans le cas où $a_{ij} = \delta_{ij}$, \mathcal{Q} n'est rien d'autre que l'épaisseur optique dans le cas où la densité est distribuée selon une loi K-P pour $M = 1$ ($R = 100\%$). Un article de *Grenander et al.* résume quelques approximations de la FDP de \mathcal{Q} [151]. *Gurland* calcule la distribution de cette somme lorsque toutes les variables ont une équicovariance ($0 < \rho = \text{Cte} \leq 1$, [152]), et propose un développement en polynômes de *Laguerre* de cette même distribution dans [153]. A noter aussi que la distribution cumulative de \mathcal{Q} est obtenue exactement sous la forme d'une somme infinie par *Robbins & Pitman* [154].

La particularité de notre résultat donné par Eq. (4.64) est que la distribution de la somme des V.A.s est de la même nature que les éléments de la somme, à savoir du type *Pearson-III* dont la distribution Gamma est un cas particulier. De manière inverse, *Rice* [155] et *Kotz* [102] approximent la FDP de la somme discrète de V.A.s de type *Pearson-III* par une distribution du même type dont ils fixent les deux premiers moments en fonction des propriétés statistiques des variables constituant la somme (ce type d'approximation par les deux premiers moments est discuté en annexe B).

4.6.2 Distribution de l'épaisseur optique pour la distribution Gamma M-M

Dans le cas de fluctuations non-homogènes caractérisées par la distribution multivariées de *Mathai & Moschopoulos*, il est possible d'obtenir la distribution de l'épaisseur optique sans aucune approximation. On calcule la fonction caractéristique de l'épaisseur optique τ à partir de l'Eq. (2.76), ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t) &= \mathcal{F}(\tau) \\ &= \left(1 - it \int_0^x ds \alpha(s) \right)^{-\beta_0} \exp \left(it \int_0^x ds \alpha(s) \beta(s) \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

La transformée de *Fourier* inverse de Eq. (4.68) nous donne la FDP de τ ,

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{\tau^{\beta_0-1} e^{(\tau-\gamma)/\xi}}{\xi^{\beta_0} \Gamma(\beta_0)}, \quad \tau \geq \gamma. \quad (4.69)$$

Donc, dans ce cas, $\tau \equiv G(\xi, \beta_0, \gamma)$ est distribué suivant une loi Gamma avec

$$\xi = \int_0^x ds \alpha(s), \quad \gamma = \int_0^x ds \alpha(s) \beta(s). \quad (4.70)$$

Contrairement au cas de la distribution K-P où la distribution de l'épaisseur optique est approximativement une loi Gamma, dans le cadre de la FDP de *Mathai & Moschopoulos*, la distribution de la somme est exactement une distribution Gamma. Ce résultat n'est pas trivial car la loi Gamma est reproductrice pour la somme de V.A.s indépendantes associées du même facteur d'échelle α , mais aucun résultat connu ne garantit la propriété de reproductivité pour des V.A.s non-indépendantes. Le point commun des deux FDPs de τ (dans le cadre du développement en cumulants et dans le cadre de la distribution M-M) est qu'elles sont toutes les deux des distributions Gamma accompagnées des paramètres de déplacement μ et γ , ce qui n'est pas étonnant à cause de la similarité de leurs fonctions caractéristiques, similarité dont nous avons déjà signalé qu'elle est de nature accidentelle.

4.7 Synthèse et conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que les distributions de type Gamma multivariées introduites au chapitre 2 conduisent toutes à un modèle de transport à gros grains très simple, dans lequel le taux d'ionisation est "renormalisé". En d'autres termes, tout se passe comme si les particules neutres voyaient un plasma effectif, caractérisé par un taux d'ionisation à gros grains $\omega(s)$ dépendant de la distance s parcourue par le neutre depuis la paroi. La forme exacte de $\omega(s)$ dépend du modèle de recyclage utilisé, i.e. est affectée par la nature (stochastique ou non) des conditions aux limites. En particulier, on retrouve bien le phénomène de forte réionisation locale discuté dans le chapitre 3 pour le modèle de recyclage rapide. Dans le cas où les fluctuations sont statistiquement homogènes, $\omega(x)$ décroît avec x vers une valeur limite ω_∞ atteinte en pratique à une distance de quelques longueurs de corrélation de la paroi. Cette valeur, qui dépend du taux de fluctuation et de la fonction de corrélation choisie, peut être calculée à l'aide du théorème de Szegő faible introduit dans le chapitre 2. Le fait que $\omega_\infty \neq \langle v \rangle$ résulte du fait que le comportement asymptotique pour x grand est déterminé par les réalisations rares du champ de densité pour lesquelles la densité plasma est très faible. Dans le cas d'une fonction de corrélation exponentielle, la formule de Grenander & Szegő sur les déterminants de matrices de Toeplitz présentée au chapitre 2 permet d'exprimer $\omega(x)$ à l'aide de fonctions élémentaires. Dans le cas où la fonction de corrélation n'est pas exponentielle, le calcul des déterminants intervenant dans $\omega(x)$ doit en principe être fait numériquement ce qui est pénalisant en termes de temps de calcul, car le taux d'ionisation est évalué un grand nombre de fois dans EIRENE (chaque fois que la particule suivie entre dans une nouvelle cellule spatiale). Nous avons utilisé un développement en cumulants pour obtenir une expression approchée de $\omega(x)$ qui s'écrit à l'aide de fonctions élémentaires. Dans le cas où le taux de fluctuation R dépend de l'espace, à la fois les distributions Gamma K-P généralisée et Gamma M-M conduisent à un modèle de transport à gros grains du même type que celui obtenu avec la distribution K-P. Ce type de modèle est très intéressant en pratique, car il montre que l'équation à gros grains satisfaite par la densité moyenne peut être résolue par des méthodes usuelles. Enfin, nous avons montré que la distribution de l'épaisseur optique pouvait être approchée par une distribution Gamma, à l'aide du résultat obtenu par le développement en cumulants.

Il est important d'insister sur le fait que la situation est très différente pour la distribution Log-normale, pour laquelle l'équation de transport à gros grain prend une forme très particulière, et difficile à interpréter physiquement. Les distributions Gamma que nous avons considérées se prêtent donc particulièrement bien à un traitement basé sur un modèle à gros grains.

Conclusion

La motivation de ce travail a été d'étudier les effets des fluctuations turbulentes sur le transport des particules neutres (atomes et molécules) dans les plasmas de bord des machines de fusion par confinement magnétique. Le premier chapitre de la thèse a été consacré à introduire le contexte de l'étude, et le fait qu'en raison de leur grand libre parcours moyen les neutres doivent être décrits dans le cadre d'un modèle cinétique. Le couplage entre les particules neutres et les particules chargées du plasma se fait par l'intermédiaire de processus de physique atomique, comme l'ionisation ou l'échange de charge, dont les taux de réaction dépendent des paramètres plasma (densité, température). Les fluctuations des paramètres plasma vont donc directement affecter le transport des neutres par l'intermédiaire de fluctuations de ces taux. Le processus d'échange de charge induit une diffusion dans l'espace des vitesses, et conduit à un terme intégral dans l'équation de *Boltzmann* gouvernant l'évolution de la fonction de distribution de vitesse des neutres. Nous avons donné la solution analytique de cette équation intégrale obtenue par *Smirnov* dans le cadre d'un modèle unidimensionnel très simple. A l'heure actuelle, les simulations de transport de neutres dans le contexte de la fusion par confinement magnétique sont réalisées essentiellement à l'aide de codes Monte Carlo comme EIRENE, dont le fonctionnement a été brièvement expliqué. La méthode de Monte Carlo permet en effet de prendre en compte un grand nombre d'espèces et de processus de physique atomique dans une géométrie de complexité en principe arbitraire.

Le second chapitre a été consacré à présenter des distributions multivariées permettant de reproduire les principales caractéristiques de la turbulence de bord dans les tokamaks. Les résultats obtenus en particulier sur le tokamak TCV montrent que la fonction de distribution de probabilité des fluctuations de la densité électronique en un point est bien ajustée par une loi Gamma dans toute la zone à l'ombre du limiteur (la zone la plus externe du plasma, aussi appelée la SOL). Les fluctuations dans la SOL lointaine, proche de la paroi, sont également bien décrites par une loi Log-normale. Ces distributions ont des généralisations multivariées, qui permettent de tenir compte des corrélations spatiales et temporelles observées dans les expériences. Ces corrélations peuvent en première approximation être décrites par une longueur et un temps de corrélation, et doivent être prises en compte lorsque l'on étudie le transport des particules neutres, dont la trajectoire peut explorer un domaine spatial de grande étendue. Cependant, le choix d'une fonction de corrélation peut s'avérer délicat, et nous avons insisté sur le fait que la fonction de covariance d'une distribution multivariées doit être définie-positif (sa transformée de *Fourier* est bornée et positive). Il existe dans la littérature plusieurs distributions Gamma multivariées, c'est à dire plusieurs distributions dont les marginales à un point sont des distributions Gamma. Nous nous sommes principalement intéressés à la distribution de *Krishnamoorthy & Parthasarathy* (K-P dans la suite), qui est entièrement déterminée par la donnée du taux de fluctuation et d'une matrice de variance-covariance. Cette distribution a l'avantage d'être dérivée d'une Gaussienne multivariées, et a été utilisée pour un bon nombre de développements présentés dans les sections suivantes. Elle a deux limitations principales. Tout d'abord, sa fonction de corrélation doit être à valeurs positives, ce qui exclut des fonctions de corrélations de type oscillantes amorties (mais définie-positif), observées par exemple dans des simulations numériques. Nous avons donc introduit également la distribution Log-normale multivariées, qui permet ce type de cor-

relations, pour évaluer l'importance de cette limitation. Ensuite, elle ne permet pas de décrire une situation où le taux de fluctuation varie dans l'espace, ce qui est clairement le cas dans les expériences. Nous avons présenté une généralisation de la distribution K-P permettant de décrire une telle situation, ainsi que la distribution Gamma de *Mathai & Moschopoulos* (M-M dans la suite).

Il ressort du travail présenté dans ce chapitre que le fait que la variance-covariance d'une distribution multivariées doit être définie-positif induit des contraintes qui peuvent être très fortes sur les combinaisons de profils de densité moyenne, de taux de fluctuation et de fonction de corrélation qui peuvent être utilisés. Ces contraintes peuvent être particulièrement délicates à satisfaire pour les distributions que nous considérons et qui dérivent d'une Gaussienne multivariées. Il faut en effet s'assurer que la variance-covariance de la distribution considérée et de la distribution Gaussienne sous-jacente, qui sont liées par des relations plus ou moins complexes, soient bien toutes les deux définies positives. En ce sens, les distributions Gamma K-P généralisée et Gamma M-M se montrent complémentaires.

Nous avons également présenté des techniques d'échantillonnage de ces distributions, dont la plupart reposent plus ou moins directement sur le fait qu'il existe une distribution Gaussienne sous-jacente. En particulier, il est possible d'échantillonner une telle distribution en utilisant la factorisation de *Cholesky* de sa matrice de variance-covariance. Cette technique a été implémentée dans le code EIRENE, pour fournir un point de comparaison avec les résultats obtenus dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'effet des fluctuations turbulentes sur le transport des neutres. Techniquement, le problème s'apparente au transport stochastique des particules dans des milieux fluctuants, tel que les neutrons dans les fluides en ébullition ou le transfert radiatif dans les milieux désordonnés. Dans le cas où il n'y a pas de terme intégral dans l'équation de *Boltzmann*, le profil de densité moyen s'exprime simplement à partir de la fonction caractéristique de la distribution multivariées décrivant la statistique du taux d'ionisation. L'expression des fonctions caractéristiques des distributions Gamma introduites dans le chapitre stochastic background étant connue, le profil de densité moyen peut donc être calculé analytiquement. Ceci n'est pas le cas pour une distribution Log-normale, sa fonction caractéristique n'ayant pas d'expression connue en termes de fonctions élémentaires. L'analyse du profil moyen de densité obtenu pour le cas de la distribution Gamma K-P fait clairement apparaître trois paramètres de contrôle essentiels du problème. Le premier est le taux de fluctuation, qui doit être supérieur à 50 % pour que les effets sur le transport des neutres soient importants. On s'attend donc à ce que les effets étudiés ici ne soient réellement importants que dans la SOL lointaine, à proximité de la paroi. Le second paramètre important est le rapport entre la taille typique des structures turbulentes (mesuré par la longueur de corrélation) et le libre parcours moyen des neutres. Les effets des fluctuations sont d'autant plus forts que ce rapport est grand. Ceci montre que le rôle des fluctuations va être bien plus important pour les molécules et les atomes d'impuretés, pour qui ce rapport est de l'ordre de quelques unités, que pour les atomes d'hydrogène, pour qui ce rapport est typiquement de l'ordre de 10^{-2} . De plus, même si des atomes d'hydrogène désorbent avec des énergies basses correspondant à la température de la paroi, et donc des libres parcours moyens courts, une analyse simple à partir de la solution de *Smirnov* montre que les effets des fluctuations sont rapidement atténués par les réactions d'échange de charge. Rappelons que les processus d'échange de charge en particulier, et de diffusion dans l'espace des vitesses en général, peuvent généralement être négligés pour les molécules et les atomes d'impuretés dans la SOL. Le troisième paramètre important est le rapport entre le temps caractéristique des phénomènes de recyclage à la paroi et le temps caractéristique des fluctuations turbulentes. Si le mur répond très lentement par rapport aux variations du flux plasma, la source de neutres est constante (non stochastique) et égale au flux plasma moyen.

Cette situation est représentative du cas où les ions recyclent sous forme de molécules désorbées. Dans ce cas, les fluctuations réduisent de façon importante le pouvoir d'arrêt du plasma vis à vis des neutres, un comportement qui s'explique par la contribution dominante des réalisations où la densité est basse dans le calcul de la moyenne. Par contre, dans le cas où le mur répond instantanément (une très bonne approximation dans le cas de la rétro-diffusion ou de la pulvérisation physique d'impureté), et où les fluctuations du flux plasma sont essentiellement dues à la densité (n_e), la situation est différente. La source de neutres n'est significative que si la densité est importante, auquel cas la ré-ionisation locale est également importante. Le pouvoir d'arrêt du plasma n'est donc réduit de manière significative qu'à une distance de quelques longueurs de corrélation de la paroi, et la source d'ionisation moyenne est importante près de la paroi.

Les résultats analytiques obtenus dans ce chapitre ont été comparés à des calculs numériques réalisés avec une version modifiée d'EIRENE, dans laquelle un grand nombre de réalisations du champ de densité (n_e) sont échantillonnées à partir de la distribution Gamma K-P (ou Gamma K-P généralisée), et le problème de transport est résolu pour chacune de ces réalisations. Tous ces calculs sont en accord avec les résultats analytiques.

Les résultats discutés précédemment ont été obtenus dans le régime adiabatique, i.e. en considérant que la turbulence est figée pendant la durée de vie d'un neutre. Cette hypothèse peut être relaxée dans notre approche, et les résultats montrent que le problème dépendant du temps peut se ramener à un problème adiabatique dans lequel la taille typique des structures est donnée par une longueur de corrélation effective, plus petite que la longueur de corrélation réelle (ceci étant strictement vrai pour une fonction de corrélation à variables séparables). Cet effet est conforme à l'intuition physique, puisque si les structures turbulentes disparaissent avant que les neutres n'aient eu le temps de les traverser, tout se passe comme si la taille de ces structures avait été réduite. En pratique, au vu des valeurs des taux d'ionisation, les effets non-adiabatiques seront plus importants pour les molécules que pour les atomes d'impuretés. Quoi qu'il en soit, ces effets ne remettent pas en cause les conclusions précédentes.

Notons que nos résultats sont en accord qualitatif avec ceux obtenus dans d'autres domaines (cités précédemment), lorsque les situations sont comparables. La spécificité de notre étude est que les fluctuations sont décrites par une statistique Gamma, ce qui permet un traitement analytique original du problème dans le cas où le terme intégral dans l'équation de *Boltzmann* peut être négligé. De plus, l'utilisation d'une distribution Gamma permet d'éviter les problèmes apparaissant quand les fluctuations sont modélisées par une statistique Gaussienne, comme l'avait initialement proposé *Prinja* pour traiter le problème que nous avons considéré dans cette thèse. Des résultats analytiques peuvent être obtenus de manière élégante dans le cas Gaussien, à partir du théorème de *Novikov*. Cependant, l'interprétation de ces résultats est délicate car pour une statistique Gaussienne il y a des réalisations pour lesquelles la densité est négative. Inversement, si l'on restreint la Gaussienne aux valeurs positives, il n'est plus possible d'obtenir des résultats analytiques simples.

Dans le chapitre 4, nous avons montré que les distributions Gamma que nous avons considéré conduisent à des modèles de transport à gros grains très intéressants, puisque l'équation pour la fonction de distribution des neutres moyenne (i.e. la densité moyenne dans le cas monocinétique) n'est rien d'autre qu'une équation de *Boltzmann* sans terme intégral, avec un coefficient d'ionisation effectif. Cette équation à gros grains peut donc être résolue par EIRENE sans modifications majeures. Elle correspond à l'exact analogue des équations de transport pour le plasma, dans lesquelles intervient un flux turbulent qui peut être caractérisé par un coefficient de diffusion et une vitesse de pincement effective. Ces modèles à gros grains permettent d'implémenter les effets des

fluctuations sur les neutres dans des codes comme B2-EIRENE, sans augmenter de manière importante le temps de calcul nécessaire. De manière plus précise, nous avons obtenu les expressions du taux d'ionisation effectif dans les modèles de recyclage lent et rapide pour la distribution Gamma K-P. Ces coefficients font intervenir des déterminants de matrices de *Toeplitz*, que l'on peut calculer analytiquement dans le cas d'une fonction de corrélation exponentielle. Le taux d'ionisation étant calculé un grand nombre de fois dans un code comme EIRENE, nous avons obtenu une expression approchée du taux d'ionisation effectif lorsque la fonction de corrélation n'est pas exponentielle, par une technique de développement en cumulants. Ce résultat nous a permis de montrer que la distribution de l'épaisseur optique suit approximativement une loi Gamma. Dans le cas où le taux de fluctuation dépend de l'espace, les distributions Gamma K-P généralisée et Gamma M-M conduisent toutes les deux également à des modèles de transport effectif du même type que celui décrit précédemment. Cette situation est spécifique aux distributions Gamma. Les modèles de mélanges diphasiques stochastiques ne conduisent pas à des équations de transport à gros grains exactes, où le coefficient d'ionisation est simplement renormalisé. Nous avons également montré que dans la limite des longueurs de corrélation infinies, la distribution Log-normale conduit à une équation à gros grain de type "avancé", qui n'est pas du type *Boltzmann*.

Ce travail nous conduit à la conclusion que la prise en compte des effets de la turbulence sur le transport des particules neutres peut avoir des conséquences significatives sur un certain nombre de problèmes liés aux interactions plasma-paroi. Les fluctuations augmentent la pénétration des molécules dans le plasma, et donc indirectement des atomes formés par dissociation de ces molécules, elles vont également augmenter l'énergie moyenne des atomes formant le flux d'échange de charge à la paroi (atomes qui viennent heurter la paroi après avoir subi un échange de charge). Ceci pourrait conduire à une augmentation de l'érosion, en particulier dans la chambre principale. De plus, les fluctuations peuvent modifier de manière importante la forme de la source d'ionisation des atomes d'impuretés dans la direction radiale, ce qui peut avoir des effets notables sur la contamination du plasma de coeur, en particulier en présence d'un phénomène d'écoulement inversé dans la SOL ("flow reversal"). En effet, dans une telle situation, la direction d'écoulement du plasma dans la SOL peut changer en fonction du rayon, et dans un cas les impuretés ionisées sont ramenées dans le divertor alors que dans l'autre elles sont portées vers le plan équatorial, et ont donc une probabilité bien plus importante de pénétrer dans le plasma confiné. L'importance de ces effets pourra être estimée de manière plus quantitative lorsque notre modèle de transport à gros grains sera implémenté de manière complète dans un code comme B2-EIRENE.

Les perspectives de ce travail sont multiples. En premier lieu, la prise en compte de la dépendance spatiale du taux de fluctuation en utilisant la distribution Gamma K-P généralisée ou la distribution Gamma M-M n'est pas complètement satisfaisante. En effet, les contraintes sur le choix des profils de densité moyenne et du taux de fluctuation sont fortes et ne laissent que peu de liberté pour ajuster le modèle à des données expérimentales ou numériques. Il est donc souhaitable d'explorer d'autres variantes des distributions Gamma multivariées afin de déterminer si ces contraintes peuvent être relaxées.

L'étape suivante du travail consistera à étudier le couplage entre neutres et turbulence dans la SOL, c'est à dire à inclure l'effet des neutres sur la turbulence elle-même. En effet, jusqu'à maintenant nous avons supposé que les neutres ne rétro-agissent pas sur les fluctuations. Cette question est particulièrement intéressante pour les diagnostics optiques de la turbulence par injection de gaz ("gas puff imaging"), où des neutres sont injectés pour permettre de visualiser la turbulence. Ce type d'expériences pose au moins deux questions, celle du lien entre lumière émise et fluctuations des paramètres plasma, et celle de la perturbation des fluctuations par l'injection de neutres. Une telle étude nécessitera le couplage d'un code de turbulence à un code de transport de neutres

comme EIRENE. Ce couplage, indispensable à terme dans l'optique de construire un modèle prédictif pour les plasmas de tokamaks, posera également le problème de la dynamique temporelle du processus de recyclage. Le point délicat ici sera de relier la dépendance temporelle du flux de neutres recyclés sous forme de molécules à celle du flux de neutres incident, ce qui suppose de quantifier l'importance relative des différents mécanismes impliquant des molécules à la surface.

Appendices

Annexe A

Compléments sur l'approche basée sur le développement en cumulants

Dans cette annexe nous présentons un certain nombre de développements techniques et de résultats complémentaires ayant trait à l'approximation de la densité moyenne de neutres basée sur un développement en cumulants.

A.1 Intégrale multiple du cumulant à n points

On cherche ici à calculer l'intégrale multiple du cumulant d'ordre n de la distribution K-P multivariée. On commence par écrire l'équation de *Fredholm* définissant les valeurs (λ_i) et les fonctions propres (ϕ_i) de la fonction de corrélation des variables Gaussiennes (ρ)

$$\int_0^x ds_2 \rho(s_1, s_2) \phi_i(s_2) = \lambda_i \phi_i(s_1), \quad (\text{A.1})$$

Les fonctions ϕ_i forment un ensemble orthonormé, i.e. $\int ds \phi_k(s) \phi_l(s) = \delta_{kl}$. On obtient par récurrence la relation suivante,

$$\int_0^x ds_2 \int_0^x ds_3 \dots \int_0^x ds_n \rho(s_1, s_2) \dots \rho(s_{n-1}, s_n) \phi_i(s_n) = \lambda_i^{n-1} \phi_i(s_1). \quad (\text{A.2})$$

On multiplie ensuite Eq. (A.2) par $\lambda_i \phi_i(s_1)$, puis on intègre sur s_1 . On applique finalement le théorème de *Mercer* [95],

$$\rho(s_n, s_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(s_n) \phi_i(s_1), \quad (\text{A.3})$$

pour montrer que

$$\int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \rho(s_1, s_2) \dots \rho(s_{n-1}, s_n) \rho(s_n, s_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n. \quad (\text{A.4})$$

D'autre part,

$$\underbrace{\int_0^x ds v(s)}_y = \sum_{i=1}^M \int_0^x ds x_i^2(s), \quad (\text{A.5})$$

où x est une variable aléatoire Gaussienne avec $\langle\langle x_i(s) x_j(s') \rangle\rangle = \langle\langle x^2 \rangle\rangle \rho(s, s') \delta_{ij}$. On représente ensuite la variable $x(s)$ à l'aide d'un développement de *Karhunen-Loève* ([88], et voir Sec. 2.4.3)

$$x(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \zeta_j \phi_j(s), \quad (\text{A.6})$$

où les ζ_i sont des variables Gaussiennes indépendantes. On élève Eq. (A.6) au carré, puis on intègre sur la variable s et on utilise enfin l'orthonormalité des fonctions propres pour obtenir

$$\int_0^x ds x^2(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \zeta_i^2. \quad (\text{A.7})$$

La fonction génératrice des cumulants de y est alors donnée par

$$\Psi(a) = -\frac{M}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 + 2ai\lambda_j) \quad (\text{A.8})$$

d'où on déduit le cumulants d'ordre n de la variable y par dérivations

$$\left\langle \left\langle \left(\int_0^x ds v(s) \right)^n \right\rangle \right\rangle = \int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \langle v(s_1) \dots v(s_n) \rangle \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial a^n} \Psi(a) \Big|_{a=0} = M2^{n-1} (n-1)! \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \quad (\text{A.10})$$

En combinant Eq. (A.9), Eq. (A.10) et Eq. (A.4) on a finalement

$$\int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \langle v(s_1) \dots v(s_n) \rangle = \langle v^n \rangle \int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \rho(s_1, s_2) \dots \rho(s_{n-1}, s_n) \rho(s_n, s_1), \quad (\text{A.11})$$

avec $\langle v^n \rangle = M2^{n-1} (n-1)!$.

A.2 Expression des cumulants

Intéressons nous maintenant à l'expression du cumulants lui même. Un calcul long mais sans difficulté basé sur l'utilisation du théorème de Wick permet d'obtenir les cumulants d'ordre trois et quatre,

$$\langle v_1 v_2 v_3 \rangle = 8M^3 \mathcal{C}_0^3 \rho_{12} \rho_{23} \rho_{31}, \quad (\text{A.12})$$

$$\langle v_1 v_2 v_3 v_4 \rangle = 16m^4 \mathcal{C}_0^4 (\rho_{12} \rho_{23} \rho_{34} \rho_{41} + \rho_{13} \rho_{32} \rho_{24} \rho_{41} + \rho_{12} \rho_{24} \rho_{43} \rho_{31}). \quad (\text{A.13})$$

où ρ est toujours la fonction de corrélation des variables Gaussiennes. Ces expressions suggèrent que le cumulants d'ordre n peut s'écrire

$$\langle v_1 v_2 \dots v_n \rangle = \frac{2}{(n-1)!} \langle v^n \rangle \sum_{(n-1)!/2} \rho_{i_1 i_2} \rho_{i_2 i_3} \dots \rho_{i_{n-1} i_n} \rho_{i_n i_1}. \quad (\text{A.14})$$

Pour obtenir cette expression, nous utilisons la propriété de symétrie du cumulants

$$\langle v_1 \dots v_i \dots v_k \dots \rangle = \langle v_1 \dots v_k \dots v_i \dots \rangle, \quad (\text{A.15})$$

la symétrie de la fonction de corrélation ($\rho_{ij} = \rho_{ji}$), et tenons compte des $n!$ arrangements et des n rotations circulaires possibles. Les intégrales multiples des différents termes de la somme dans Eq. (A.14) sont identiques, ce qui est en accord avec l'intégrale multiple du cumulants à n points donnée par Eq. (A.11).

A.3 Comportement asymptotique de la densité de neutres pour une statistique arbitraire

L'approximation donnée par (A.17) permet de montrer que le profil de la densité moyenne $\langle \mathcal{N}(x) \rangle$ est asymptotiquement ($x \gg \ell$) exponentiel indépendamment de la statistique du taux d'ionisation ν (voir Kubo [156]). Pour montrer ce résultat, on commence par noter que la propriété d'essaim donnée par Fox ('Cluster Property', [79, 127]) stipule que le moment d'ordre n se factorise si la position (ou le temps) séparant deux V.A.s est supérieur à la longueur (ou au temps) de corrélation. Soit pour $s_1 > s_2 > \dots > s_n$, $n \geq 2$ et $|s_i - s_{i+1}| > \ell$, alors

$$\langle \nu(s_1)\nu(s_2)\dots\nu(s_i)\nu(s_{i+1})\dots\nu(s_n) \rangle \simeq \langle \nu(s_1)\nu(s_2)\dots\nu(s_i) \rangle \langle \nu(s_{i+1})\dots\nu(s_n) \rangle. \quad (\text{A.16})$$

En outre, selon le théorème-I de la référence [116], le cumulante d'ordre n s'annule suite à la factorisation dans l'équation (A.16). L'approche de Van Kampen [157] utilise ces deux dernières propriétés ('cluster property' et le théorème de Kubo), pour calculer de manière approchée l'intégrale multiple du cumulante d'ordre n dans Eq. (A.11). En fait, si x est assez grand devant la longueur de corrélation ℓ , alors il existe un seuil s_k dans la séquence $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, tel que $s_k > \ell$. Par conséquent, la contribution de ce cumulante à l'intégrale est nulle pour $s_k > \ell$. Il suffit alors d'intégrer sur un support de longueur ℓ et de "contracter" les n points du cumulante d'ordre n ($\nu_1 = \dots = \nu_n$) pour obtenir

$$\int_0^x ds_1 \int_0^x ds_2 \dots \int_0^x ds_n \langle \nu(s_1)\dots\nu(s_n) \rangle \approx \int_0^x ds_1 \int_0^\ell ds_2 \dots \int_0^\ell ds_n \langle \nu(s_1)\dots\nu(s_n) \rangle \approx x \ell^{n-1} \langle \nu^n \rangle. \quad (\text{A.17})$$

On obtient ainsi l'expression suivante pour la densité moyenne de neutres,

$$\langle \mathcal{N}(x) \rangle = \frac{\Gamma_0}{\nu} \exp\left(-\omega_K \frac{x}{\lambda_{\text{mfp}}}\right). \quad (\text{A.18})$$

Compte tenu de l'expression de $\langle \nu^n \rangle$ donnée par Eq. (4.36) il vient pour $aR^2 \leq 1$,

$$\omega_K = \frac{1}{aR^2} \log\left(1 + aR^2\right), \quad (\text{A.19})$$

où $a = \ell / \lambda_{\text{mfp}}$. A noter que la constante ω_K est indépendante du choix de la fonction de corrélation et dépend uniquement de la longueur de corrélations ($\ell = a\lambda_{\text{mfp}}$) et de l'amplitude des fluctuations (R). La constante ω_K est à comparer avec la limite de Szegő,

$$\omega_S = \frac{\omega_\infty}{\langle \nu \rangle} = \frac{\sqrt{1 + 4aR^2} - 1}{2aR^2}, \quad (\text{A.20})$$

calculée exactement pour une fonction de corrélation exponentielle. L'erreur absolue $|\omega_S - \omega_K| / \omega_S$, est donnée dans la figure A.1 pour $R = 80\%$. Cette erreur atteint son maximum ($\approx 12\%$) pour $a \approx 2$. Lorsque x est du même ordre que ℓ , alors le résultat donné par Eq. (A.18) est insuffisant. Dans la littérature (e.g., [12]), on retient le plus souvent les deux premiers cumulants. Cela revient à considérer que la distribution de l'épaisseur optique est proche d'une loi normale. Cependant la troncature au cumulante d'ordre deux est en générale insuffisante car elle conduit à des comportements non-physiques [158] (croissance de la densité moyenne).

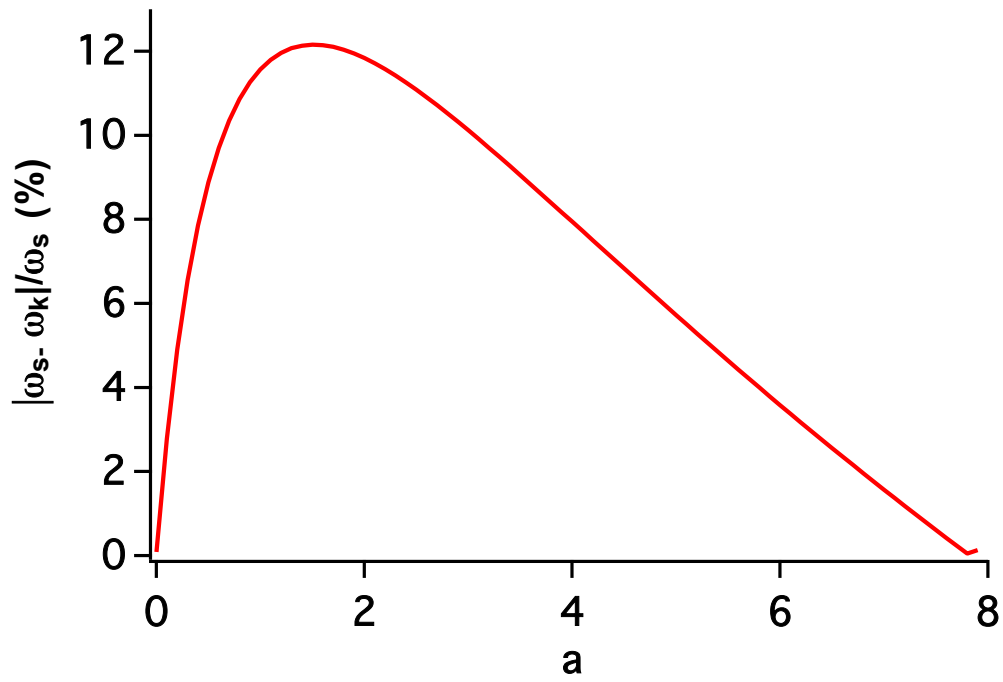


FIGURE A.1 – L'erreur absolue entre la limite de Szego (ω_S) et ω_K , en fonction du paramètre $a = \ell/\lambda_{\text{mfp}}$. Cette erreur atteint son maximum ($\approx 12\%$) pour $a \approx 2$ et $R = 80\%$.

Annexe B

Approximation par les deux premiers moments

Dans cette annexe, nous présentons une technique utilisée dans la littérature pour obtenir une approximation de la FDP d'une somme de V.A.s corrélées. Cette technique a été introduite par Rice [155] et Kotz [102]¹, et nous les généralisons ici à des champs continus et non-homogènes.

Les FDPs d'intérêt dans nos applications sont les distributions Gamma, Log-normale et Beta, car elles sont toutes les trois susceptibles de modéliser la statistique de la densité électronique dans les plasmas de bord de plusieurs machines de fusion. L'avantage de ces distributions est qu'elles sont définies uniquement par la donnée de leur espérance mathématique et de leur fonction de variance-covariance. L'approximation par les deux premiers moments consiste à supposer que la FDP de la somme des n V.A.s du vecteur $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$, où les V.A.s x_i sont corrélées et identiquement distribuées, est de la même nature que celle des x_i . Cette approximation garantit donc que la FDP approchée de la somme possède exactement les mêmes deux premiers moments que la distribution exacte. Les erreurs sont donc introduites uniquement par les moments supérieurs ou égaux à trois. Le calcul des deux premiers moments de la distribution de la somme se fait de la manière suivante :

1. soit $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ l'espérance mathématique de \mathbf{X} et $S_n = \sum x_i$. L'espérance mathématique est un opérateur linéaire, par conséquent quelles que soient les corrélations entre les V.A.s l'espérance de leur somme est la somme de leurs espérances. On a donc

$$\mathcal{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}(x_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad (\text{B.1})$$

2. en utilisant encore une fois la linéarité de l'opérateur espérance mathématique on obtient la variance de la variable aléatoire S_n ,

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(x_i, x_j), \quad \text{Cov}(x_i, x_j) = \mathcal{E}(x_i x_j) - \mathcal{E}(x_i) \mathcal{E}(x_j). \quad (\text{B.2})$$

Ce résultat est bien connu dans la littérature dans le cas de deux V.A.s

$$\text{Var}(x_1, x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2). \quad (\text{B.3})$$

La généralisation à un champ continu $\mathbf{X} = x(s)$, d'espérance $\boldsymbol{\mu}(s)$, est immédiate. On définit la somme des V.A.s continues par $S = \int ds x(s)$, dont les deux premiers moments sont donnés par

1. Dans le travail de Kotz, il était question d'approximer la FDP de la somme des niveaux de précipitation.

$$\mathcal{E}(S) = \int ds \mu(s), \quad (\text{B.4})$$

et

$$\text{Var}(S) = \int ds_1 \int ds_2 \mathcal{C}(s_1, s_2), \quad (\text{B.5})$$

où $\mathcal{C}(s_1, s_2)$ est la fonction de variance-covariance entre les variables $x(s_1)$ et $x(s_2)$. L'approximation des deux premiers moments devient exacte pour les distributions qui vérifient la propriété de "reproductivité", selon laquelle la somme des V.A.s corrélées ou non-corrélées et identiquement distribuées selon la FDP considérée, est aussi distribuée suivant cette même FDP¹. Les distributions univariées normales [114, p. 91] et Gamma [114, p. 384] sont reproductibles pour des V.A.s non-corrélées. Les FDPs reproductives pour la somme de V.A.s corrélées sont moins fréquentes, on cite par exemple la distribution Gamma de *Mathai & Moschopoulos* dont la reproductivité a été montrée dans la section 4.6.2². Pour une distribution χ^2 et une fonction de corrélation exponentielle ($\rho = \rho^{|i-j|}$, avec $0 < \rho < 1$), la pertinence de cette approximation est discutée par *Kotz* dans la référence [160].

B.1 Applications

Le modèle d'approximation par les deux premiers moments peut être utilisé dans les simulations Monte Carlo basées sur la distribution de l'épaisseur optique. On considère le cas général où les profils de densité moyenne et le taux de fluctuation s'écrivent,

$$\langle n_e(x) \rangle = n_0 e^{+x/l_n}, \quad R(x) = R_0 e^{-x/l'} \quad (\text{B.6})$$

Dans la suite on pose $1/l = 1/l' - 1/l_n$. Les simulations de micro-turbulence montrent que la fonction de corrélation de la densité électronique est bien représentée par une fonction exponentielle oscillante dans la direction poloïdale [57],

$$\rho(n_e(y_1), n_e(y_2)) \propto e^{-\Delta y/l_\theta} \cos(\omega \Delta y), \quad \Delta y = |y_1 - y_2|, \quad l_\theta, \omega \geq 0, \quad (\text{B.7})$$

et une simple fonction exponentielle de longueur de corrélation $l_r \sim 2l_\theta$, dans la direction radiale. Compte tenu des corrélations dans les directions radiale (x) et poloïdale (y), on construit la fonction de variance-covariance bi-dimensionnelle suivante,

$$C(\mathbf{r}) = C_0 \exp\left(-\sqrt{(\Delta x/l_r)^2 + (\Delta y/l_\theta)^2}\right) \cos(\omega \Delta y), \quad (\text{B.8})$$

Supposons ensuite que l'on s'intéresse au transport de particules neutres le long d'une trajectoire rectiligne repérée par un angle θ comme indiqué dans Fig. B.1. L'équation (B.8) peut alors s'écrire,

$$C_\theta(s) = (R_0 n_0)^2 e^{-s/L} e^{-2x_1/l} \cos(\omega s \cos(\theta)) \quad (\text{B.9})$$

où $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ est l'abscisse curviligne définie par $\vec{r} = s \vec{u}$, et θ l'angle que fait \vec{r} avec l'axe poloïdal,

1. La propriété de reproductivité ne concerne pas uniquement la somme des V.A.s, et peut être étendue, par exemples au produit des V.A.s de la distribution Log-normale [114, p. 216] et la distribution Beta [123]. Ou encore un résultat récent montrant que la moyenne géométrique des V.A.s Beta associées de paramètres appropriés est aussi distribuée suivant une FDP Beta [159].

2. Dans le cas de la distribution Gamma multivariable de *Parthasarathy & Krishnamoorthy*, la reproductivité n'est valable que dans le cadre de l'approximation basée sur le développement en cumulants (voir section 4.6).

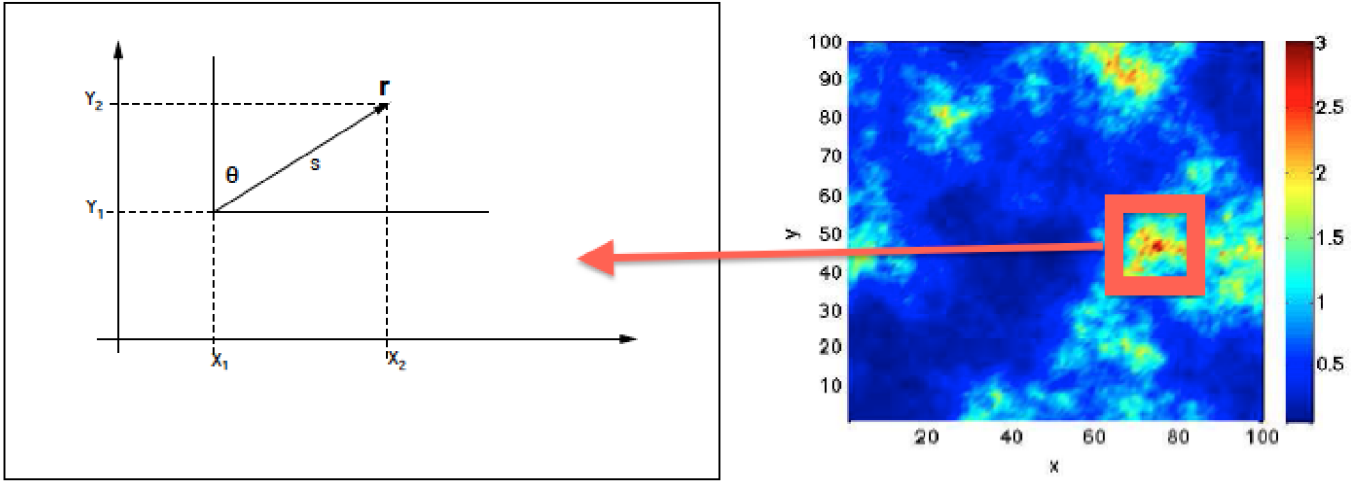


FIGURE B.1 – Schématisation d'une direction dans le plasma, selon laquelle on calcule la distribution de l'épaisseur optique.

$$l_{\theta} = \left[(\sin(\theta)/l_r)^2 + (\cos(\theta)/l_{\theta})^2 \right]^{-1/2}, \quad (\text{B.10})$$

$$L = (1/l_{\theta} + \sin(\theta)/l)^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Soit maintenant S_{θ} la somme continue de la densité électronique dans la direction θ ,

$$S_{\theta} = \int_{s_0}^s n_e(s') ds'. \quad (\text{B.12})$$

En appliquant les résultats donnés par les équations (B.4) et (B.5), on obtient

$$\mathcal{E}(S_{\theta}) = n_0 \frac{l_n}{\sin(\theta)} \left(e^{\sin(\theta)s/l_n} - e^{\sin(\theta)s_0/l_n} \right). \quad (\text{B.13})$$

$$\text{Var}(S_{\theta}) = \frac{2}{\omega^2 + 1/l_{\theta}^2} \left[\frac{y}{l_{\theta}} - \frac{1}{\omega^2 + 1/l_{\theta}^2} \left(\omega^2 \left(e^{-y/l_{\theta}} \cos(\omega y) - 1 \right) - \frac{1}{l_{\theta}^2} \left(e^{-y/l_{\theta}} - 1 \right) \right) \right]. \quad (\text{B.14})$$

En conclusion, si l'on suppose que la FDP de la densité est Log-normale en tout point s , alors on approxime la FDP de l'épaisseur optique par une distribution Log-normale dont les deux premiers cumulants sont donnés par les équations précédentes.

Bibliographie

- [1] A. K. Prinja, "The effect of turbulent density fluctuations on neutral particle transport," in *Proc. U.S. Edge Plasma Physics : Theory and Application Workshop*, (Albuquerque, New Mexico), April 26-28 1993.
- [2] G. C. Pomraning, *Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures*. World Scientific, 1991.
- [3] P. Boissé, "Radiative transfer inside clumpy media," *Astron. Astrophys.*, vol. 228, pp. 483–502, 1990.
- [4] G. C. Pomraning, "Small correlation length solutions for planar symmetry beam transport in a stochastic medium," *Ann. Nucl. Energy*, vol. 23, pp. 843–861, 1996.
- [5] D. Vanderhaegen, "Radiative transfer in statistically heterogeneous mixtures," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 36, pp. 557–561, 1986.
- [6] C. D. Levermore and G. C. Pomraning, "Linear transport theory in a random medium," *J. Math. Phys.*, vol. 27, pp. 2526–2536, 1986.
- [7] D. Vanderhaegen, C. Deutsch, and P. Boissé, "Radiative transport in one-dimensional fluctuating albedo mixture," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 48, pp. 409–417, 1992.
- [8] S. Audic and H. Frisch, "Monte-carlo simulation of radiative transfer problem in a random medium : Application to a binary mixture," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 50, pp. 127–147, 1993.
- [9] A. K. Prinja, "On the master equation approach to transport in discrete random media in the presence of scattering," *Ann. Nucl. Energy*, vol. 31, p. 2005, 2004.
- [10] A. K. Prinja, "Transport in random media with space-time noise," *Progress in Nuclear Energy*, vol. 30, pp. 287–294, 1996.
- [11] A. K. Prinja and G. C. Pomraning, "On the propagation of a charged particle in a random medium I : Gaussian statistics.," *Transp. Theory Statist. Phys.*, vol. 24, pp. 535–564, 1995.
- [12] W. Cai, M. Lax, and R. R. Alfredo, "Cumulant solution of elastic boltzmann transport equation in infinite uniform medium," *Phys. Rev. E*, vol. 61, p. 3871, 2000.
- [13] E. D. Fichtl and A. K. Prinja, "The stochastic collocation method for radiation transport in random media," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 112, p. 646, 2011.
- [14] A. Mekkaoui, Y. Marandet, *et al.*, "Transport of neutrals in scrape-off layer plasmas : Auto-regressive beta process to describe plasma density and temperature fluctuations," *version révisée et soumise à Contrib. Plasma Phys.*, 2011.
- [15] A. Mekkaoui, Y. Marandet, *et al.*, "Transport of neutrals in turbulent Scrape-off-Layer plasmas," *J. Nucl. Mater.*, vol. 415, p. 609, 2011.
- [16] Y. Marandet, A. Mekkaoui, *et al.*, "Transport of neutral particles in turbulent scrape-off layer plasmas," *Nucl. Fus.*, vol. 51, p. 083035, 2011.
- [17] Y. Marandet, A. Mekkaoui, *et al.*, "Effects of turbulent fluctuations with prescribed statistics on passive neutral particle transport in plasmas," *Plas. Phys. and Control. Fusion*, vol. 53, p. 065001, 2011.

- [18] S. Pfalzner, *An Introduction to Inertial Confinement Fusion*. Taylor & Francis, 2006.
- [19] <http://www.eirene.de>.
- [20] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
- [21] B. H. Bransden and M. R. C. McDowell, *Charge exchange and the theory of ion-atom collisions*. Oxford University Press, 1992.
- [22] P. C. Stangeby, *The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices*. Taylor & Francis, 2000.
- [23] W. M. Stacey, *Fusion Plasma Physics*. WILEY-VCH, 2005.
- [24] E. L. Vold *et al.*, “The neutral diffusion approximation in consistent tokamak edge plasma-neutral computation,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 176, pp. 570–577, 1990.
- [25] A. K. Prinja and C. Koesoemodiprodo, “A first corrected neutral diffusion model for edge plasma simulation,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 196, pp. 340–346, 1992.
- [26] M. Z. Hasan *et al.*, “A two-dimensional finite element multigroup diffusion theory for neutral atom transport in plasmas,” *J. Comp. Phys.*, vol. 71, pp. 371–390, 1987.
- [27] K. H. Burrell, “Kinetic theory of neutral hydrogen atoms in a bounded hydrogen plasma slab,” *Phys. Fluids*, vol. 12, pp. 2202–2207, 1978.
- [28] M. M. R. Williams, *Mathematical Methods in Particle Transport Theory*. Wiley-Interscience, 1971.
- [29] C. Cercignani, *Transport Phenomena and Kinetic Theory*. Birkhäuser, 2007.
- [30] H. Struchtrup, *Equations for Rarefied Gas Flows*. Springer, 2005.
- [31] K. Huang, *Statistical Mechanics*. John Wiley, 1963.
- [32] C. Cercignani, *Rarefied Gas Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [33] I. Prigogine, *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. John Wiley, 1962.
- [34] J. Hackmann, Y. C. Kim, E. K. Souw, and J. Uhlenbusch, “Investigation of neutral particle behavior between plasma and wall including wall interaction,” *Plasma phys.*, vol. 20, pp. 309–322, 1978.
- [35] G. C. Pomraning, “Neutral particle transport in plasmas,” *Progress in Nuclear Energy*, 1981.
- [36] R. D. M. Garcia, G. C. Pomraning, and C. E. Siewert, “On the transport of neutral hydrogen atoms in a hydrogen plasma,” *Plasma Phys.*, vol. 24, p. 903, 1982.
- [37] S. Rehker and H. Wobig, “A kinetic model for the neutral gas between plasma and wall,” *Plasma Phys.*, vol. 15, pp. 1083–1097, 1973.
- [38] N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. John Wiley, 1949.
- [39] K. M. Case, “On Wiener-Hopf equation,” *Ann. Physics*, vol. 2, p. 384, 1957.
- [40] B. Noble, *Methods based on the Wiener-Hopf Technique*. Chelsea Publishing Company, 1988.
- [41] M. Masujima, *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics*. Wiley-VCH, 2005.
- [42] I. Stakgold, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics II*. SIAM, 2000.
- [43] W. L. Smirnov, “Lehrgang der höheren mathematik,” 1963.
- [44] D. P. Andrei and V. M. Alexander, *Handbook of Integral Equations*. CRC Press LLC, 1998.
- [45] S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge University Press, 1999.
- [46] Y. Sarazin, P. Ghendrih, and G. Attuel, “Theoretical understanding of turbulent transport in the SOL,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 313, p. 796, 2003.

- [47] N. Bian, S. Benkadda, *et al.*, “Blobs and front propagation in the scrape-off layer of magnetic confinement devices,” *Phys. Plasmas*, vol. 10, p. 671, 2003.
- [48] J. Boedo, “Edge turbulence and sol transport in tokamaks,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 390, p. 29, 2009.
- [49] N. Fedorczak *et al.*, “Experimental investigations on the poloidal extent of the turbulent radial flux in tokamak scrape-off layer,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 415, p. S467, 2011.
- [50] J. P. Graves *et al.*, “Self-similar density turbulence in the tcv tokamak scrape-off layer,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 47, p. 1, 2005.
- [51] E. Lukacs, “A characterization of the gamma distribution,” *The annals of Mathematical Statistics*, vol. 26, pp. 319–324, 1955.
- [52] B. Labit *et al.*, “Universal statistical properties of drift-interchange turbulence in torpex plasmas,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, pp. 2–6, 2007.
- [53] B. Labit *et al.*, “Statistical properties of electrostatic turbulence in toroidal magnetized plasmas,” *Plasma Phys. Control. Fus.*, vol. 49, p. 281, 2007.
- [54] J. P. Graves *et al.*, “The role of clustering effects in interpreting nondiffusive transport measurements in tokamaks,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 9, pp. 1596–1605, 2002.
- [55] I. Sandberg, S. Benkadda, *et al.*, “Universal probability distribution function for bursty transport in plasma turbulence,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, pp. 1–4, 2009.
- [56] A. Huber *et al.*, “Results from a double Li-beam technique for measurement of both radial and poloidal components of electron density fluctuations using two thermal beams,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 47, pp. 409–440, 2005.
- [57] Y. Sarazin and P. Ghendrih, “Intermittent particle transport in two-dimensional edge turbulence,” *Phys. Plasmas*, vol. 5, pp. 4214–4228, 1998.
- [58] A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random Functions. Volume I: Basic results*. Springer-Verlag New York, 1987.
- [59] M. B. Priestley, *Spectral Analysis and Time Series I*. Academic Press, 1981.
- [60] H. Cramér, “On the theory of stationary random processes,” *The Annals of Mathematics*, vol. 41, pp. 215–230, 1940.
- [61] G. Christakos, “On the problem of permissible covariance and variogram models,” *Water Resource Research*, vol. 20, pp. 251–265, 1984.
- [62] N. Cressie *et al.*, “Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 94, pp. 1330–1340, 1999.
- [63] A. Kolovos *et al.*, “Methods for generating non-separable spatiotemporal covariance models with potential environmental applications,” *Advanced in Water Resources*, vol. 27, pp. 815–830, 2004.
- [64] C. Berg, J. P. R. Christensen, and P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroup, Theory of Positive Definite and Related Functions*. Springer-Verlag, 1984.
- [65] B. Matérn, *Spatial Variation*. Springer, 1986.
- [66] N. Cressie and H. Huang, “Correction : Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 96, p. 784, 2001.
- [67] C. Ma, “Spatio-temporal stationary covariance models,” *Journal of multivariate analysis*, vol. 86, pp. 97–107, 2003.
- [68] C. Ma, “Spatio-temporal variograms and covariance models,” *Advances in Applied Probability*, vol. 37, pp. 706–725, 2005.

- [69] M. L. Stein, "Space-time covariance functions," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 100, pp. 310–321, 2005.
- [70] S. Handcock and J. R. Walis, "An approach to statistical spatial-temporal modeling of meteorological fields," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89, p. 368, 1994.
- [71] M. Gillman, *An introduction to mathematical models in ecology and evolution, time and space*. Wiley-Blackwell, 2009.
- [72] P. Whittle, "Topographic correlation, power-law covariance functions, and diffusion," *Biometrika*, vol. 49, pp. 305–314, 1962.
- [73] D. T. Hristopoulos *et al.*, "New anisotropic covariance models and estimation of anisotropic parameters based on the covariance tensor identity," *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. 16, pp. 43–62, 2002.
- [74] S. B. Pope, *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [75] R. L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise I*. Gordon and Breach, 1963.
- [76] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, 2007.
- [77] N. D. Le and J. V. Zidek, *Statistical Analysis of Environmental Space-Time Processes*. Springer, 2006.
- [78] H. Wackernagel, *Multivariate Geostatistics*. Springer, 2003.
- [79] R. F. Fox, "Critique of the generalized cumulant expansion method," *J. Math. Phys.*, vol. 17, p. 1148, 1976.
- [80] V. K. Ramabhadran, "A multivariate gamma-type distribution," *The Indian Journal of Statistics*, vol. 11, pp. 45–46, 1951.
- [81] C. Ma, "Nonstationary covariance function that model space-time interactions," *Statistics Probability Letters*, vol. 61, pp. 411–419, 2003.
- [82] R. J. Muirhead, *Aspects of multivariate statistical theory*. 2005.
- [83] T. Kollo and D. V. Rosen, *Advanced Multivariate Statistics with Matrices*. Springer, 2005.
- [84] S. Kotz, N. Balakrishnan, and N. L. Johnson, *Continuous Multivariate Distributions*. Wiley, 2000.
- [85] M. L. Eaton, *Multivariate Statistics*. Institute of Mathematical Statistics, 2007.
- [86] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley-Interscience, 2003.
- [87] J. L. Doob, *Stochastic Processes*. Wiley-Interscience, 1990.
- [88] R. G. Ghanem and P. D. Spanos, *Stochastic Finite Elements*. Dover Publications, 1991.
- [89] D. D. Mari and S. Kotz, *Correlation and Dependence*. Imperial College Press, 2001.
- [90] P. A. Martin, *L'intégrale fonctionnelle en physique quantique et statistique*. Presse polytechniques et universitaires, 1996.
- [91] J. L. Doob, "The brownian movement and stochastic equations," *The Annals of Mathematics*, vol. 43, pp. 351–369, 1942.
- [92] W. Feller, *An Introduction to Probability, Theory and Its Applications II*. John Wiley, 1970.
- [93] A. Böttcher and S. M. Grudsky, *Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices*. SIAM, 2005.
- [94] B. N. Mukherjee and S. S. Maiti, "On some properties of positive definite Toeplitz matrices and their possible applications," *Linear algebra and its applications*, vol. 102, p. 211, 1988.
- [95] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz forms and their applications*. Univ. of Calif. Press, Berkeley, 1958.

- [96] D. Slepian and H. J. Landau, "A note on the eigenvalues of hermitian matrices," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 9, pp. 291–297, 1978.
- [97] H. J. Landau, "The inverse eigenvalue problem for real symmetric Toeplitz matrices," *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 7, p. 749, 1994.
- [98] P. Whittle, *Hypothesis testing in time series analysis*. Uppsala, 1951.
- [99] H. E. Daniels, "The approximate distribution of serial correlation coefficients," *Biometrika*, vol. 43, p. 169, 1956.
- [100] A. Böttcher and B. Silbermann, *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*. Springer-Verlag New York, Inc, 1999.
- [101] N. X. Ky, "Rate of convergence in Szegő's asymptotic formula for Toeplitz determinants," *Acta. Math. Hungar*, vol. 86, pp. 193–204, 2000.
- [102] S. Kotz and J. Neumann, "On the distribution of precipitation amounts for periods of increasing length," *J. Geophysical Research*, vol. 68, p. 3635, 1963.
- [103] A. S. Krishnamoorthy and M. Parthasarathy, "A multivariate gamma-type distribution," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, pp. 549–557, 1951.
- [104] A. S. Krishnamoorthy and M. Parthasarathy, "Correction : A multivariate gamma-type distribution," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 31, p. 229, 1960.
- [105] R. J. Adler, *The Geometry of Random Fields*. John Wiley, 1981.
- [106] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*. Asia Publishing House, 1961.
- [107] P. Krishnaiah and M. Rao, "Remarks on a multivariate gamma distribution," *The American Mathematical Monthly*, vol. 68, p. 342, 1961.
- [108] E. Lukacs, *Characteristic Functions*. Charles Griffin & Company Limited, London, 1960.
- [109] R. C. Griffiths, "Characterization of infinitely divisible multivariate gamma distribution," *Journal of multivariate analysis*, vol. 15, pp. 13–20, 1984.
- [110] A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol II : Supplementary Notes and References*. Springer-Verlag, 1987.
- [111] R. Gangolli, "Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to lévy's brownian motion of several parameters," *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 3, pp. 121–225, 1967.
- [112] I. J. Schoenberg, "Metric spaces and positive definite functions," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 44, pp. 522–536, 1938.
- [113] A. M. Mathai and P. G. Moschopoulos, "On a multivariate gamma," *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 39, pp. 135–153, 1991.
- [114] S. Kotz, N. Balakrishnan, and N. L. Johnson, *Continuous Univariate Distributions*. Wiley, 1994.
- [115] K. Baba and R. Shibata, "Multiplicative correlation," *AISM*, vol. 58, pp. 311–326, 2006.
- [116] R. Kubo, "Generalized cumulant expansion method," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 17, pp. 1100–1120, 1962.
- [117] G. A. F. Seber, *Multivariate Observations*. John Wiley & Sons, 2004.
- [118] L. N. Trefethen and D. Bau, *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997.
- [119] <http://software.intel.com/en-us/articles/intel-mkl/>.
- [120] Z. Song *et al.*, "Generating correlated nakagami fading signals with arbitrary correlation and fading parameters," *Communications, 2002. ICC 2002. IEEE International Conference on*, vol. 3, pp. 1363 – 1367, 2002.

- [121] G. Ronning, "A simple scheme for generating multivariate gamma distributions with non-negative covariance matrix," *Technometrics*, vol. 19, pp. 179 – 183, 1977.
- [122] D. P. Gaver and P. A. W. Lewis, "First-order autoregressive gamma sequence and point processes," *Advances in Applied Probability*, vol. 12, pp. 727–745, 1980.
- [123] E. McKenzie, "An autoregressive process for beta random variables," *Management Science*, vol. 31, pp. 988 – 997, 1985.
- [124] P. Whittle, "On stationary processes in the plane," *Biometrika*, vol. 41, pp. 434–449, 1954.
- [125] K. Sawada and T. Fujimoto, "Effective ionization and dissociation rate coefficients of molecular hydrogen in plasma," *J. Appl. Phys.*, vol. 78, p. 2913, 1995.
- [126] A. Brissaud and U. Frisch, "Solving linear stochastic differential equations," *J. Math. Phys.*, vol. 15, pp. 524–534, 1974.
- [127] L. A. Apresyan, "Cumulant analysis of stochastic linear operators," *Radiofizika*, vol. 21, p. 493, 1978.
- [128] A. K. Ostrowski, "Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants," *Bull. Sci. Math*, vol. 61, pp. 19–32, 1937.
- [129] H. O. Pollak and L. A. Shepp, "The estimation of some determinants of Toeplitz-Type," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 16, pp. 919–922, 1965.
- [130] D. J. Hartfiel, "An extension of Haynsworth's determinant inequality," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 41, pp. 463–465, 1973.
- [131] H. Joe, "Generating random correlation matrices based on partial correlation," *Journal of multivariate analysis*, vol. 97, pp. 2177–2189, 2006.
- [132] E. Parzen, *Stochastic Processes*. SIAM, 1999.
- [133] N. A. C. Cressie, *Statistics For Spatial Data*. John Wiley & Sons, 1993.
- [134] U. Frisch, *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996.
- [135] J. Jensen, "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes," *Acta Mathematica*, vol. 90, p. 175, 1905.
- [136] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, 2007.
- [137] J. R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [138] D. A. D'Ippolito and J. Myra, "Cross-field blob transport in tokamak scrape-off-layer plasmas," *Phys. Plasmas*, vol. 9, p. 222, 2002.
- [139] G. M. McCracken, "The behaviour of surfaces under ion bombardment," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 38, p. 241, 1975.
- [140] R. Meeron, "Series expansion of distribution functions in multicomponent fluid systems," *J. Chem. Phys*, vol. 27, p. 1238, 1957.
- [141] T. Kollo and D. V. Rosen, "Minimal moments and cumulants of symmetric matrices : An application to the Wishart distribution," *Journal of multivariate analysis*, vol. 55, p. 149, 1995.
- [142] P. Whittle, "Tests of fit in time series," *Biometrika*, vol. 39, p. 309, 1952.
- [143] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, 1995.
- [144] R. F. Fox, "Functional-calculus approach to stochastic differential equations," *Physical Review A*, vol. 33, pp. 467–476, 1986.
- [145] R. B. Leipnik, "On lognormal random variables : I-the characteristic function," *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, vol. 32, pp. 327–347, 1991.

- [146] T. Yoneda, "On the functional-differential equation of advanced type," *J. Mathematical Analysis and Applications*, vol. 332, pp. 487–496, 2007.
- [147] R. R. Akhmerov *et al.*, "Theory of equations of neutral type," *Translated from Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Matematicheskii Analiz*, vol. 19, pp. 55–126, 1982.
- [148] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [149] W. J. Dixon, "Further contributions to the problem of serial correlation," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15, p. 119, 1944.
- [150] T. Koopmans, "Serial correlation and quadratic forms in normal variables," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 13, p. 14, 1942.
- [151] U. Grenander, H. O. Pollak, and D. Slepian, "The distribution of quadratic forms in normal variates : A small sample theory with applications to spectral analysis," *J. Soc. Indust. Appl. Math*, vol. 7, p. 374, 1994.
- [152] J. Gurland, "Distribution of the maximum of the arithmetic mean of correlated random variables," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 26, p. 294, 1954.
- [153] J. Gurland, "Distribution of definite and indefinite quadratic forms," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 26, pp. 122–127, 1954.
- [154] H. Robbins and E. J. Pitman, "Application of the method of mixtures to quadratic forms in normal variates," *Ann. Math. Stat.*, vol. 20, p. 552, 1949.
- [155] S. O. Rice, "Mathematical analysis of random noise," *Bell System Tech. J*, vol. 23, p. 282, 1945.
- [156] R. Kubo, "Stochastic liouville equation," *Journal of mathematical physics*, vol. 4, pp. 174–183, 1963.
- [157] N. V. Kampen, "A cumulant expansion for stochastic linear differential equations I," *Physica*, vol. 74, pp. 215–238, 1974.
- [158] P. Hänggi and P. Talkner, "A remark on truncation schemes of cumulant hierarchies," *Journal of statistical physics*, vol. 22, p. 65, 1980.
- [159] W. Krysicki, "On some new properties of the beta distribution," *Stat. Probil. Lett.*, vol. 42, pp. 131–137, 1999.
- [160] S. Kotz and J. Adams, "Distribution of sum of identically distributed exponentially correlated gamma-variables," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, p. 277, 1964.