

Thèse

Utilisation et amélioration du modèle discret d'excitation d'un guide d'onde périodique pour la simulation pratique du tube à onde progressive en domaine temporel

Présentée à
l'Université de Provence

En vue d'obtenir
le titre de Docteur

École Doctorale : Sciences de la matière
Spécialité : Rayonnement, Plasmas, Astrophysique
Laboratoire : Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires

Par

Pierre BERNARDI

Soutenue publiquement le *15 Décembre 2011* devant la commission d'examen :

Rapporteurs :	Jean-Marcel RAX	Professeur, École Polytechnique
	Nikita RYSKIN	Professeur, Université de Saratov
Examineurs :	Frédéric ANDRÉ	Ingénieur, Thales Electron Devices
	Jean-François DAVID	Ingénieur, Thales Electron Devices
	Alfredo DE ROSSI	Ingénieur, Thales Research and Technology
	Fabrice DOVEIL	Directeur de recherche, CNRS
	Yves ELSKENS	Professeur, Université de Provence
	André NICOLET	Professeur, Université Paul Cézanne



À ma mère,
Françoise Bernardi

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Les tubes électroniques à travers l'Histoire	4
1.2	Modélisation et simulation des TOP de type 'O'	7
1.2.1	Principe de fonctionnement	7
1.2.2	Les premiers modèles analytiques d'interaction dans les TOP	9
1.2.3	Les codes d'interaction	11
1.2.4	La simulation des tubes chez Thales Electron Devices	13
1.3	Contexte de la thèse : le domaine temporel	15
2	Théorie non-stationnaire discrète d'excitation d'un guide d'onde périodique	17
2.1	Détermination des équations du modèle	18
2.1.1	Cadre du modèle	18
2.1.2	Le théorème de Floquet et la transformation de Kuznetsov	19
2.1.3	Le modèle de Kuznetsov	19
2.1.4	Interprétation physique du modèle	22
2.2	Synthèse des travaux de Ryskin <i>et al.</i>	24
2.2.1	Relation de dispersion en régime petit signal à une dimension	24
2.2.2	Application du modèle discret à un TOP à cavités couplées	28
2.3	Avantages et inconvénients du modèle discret	32
3	Modèle numérique à une dimension	35
3.1	Hypothèses de travail	36
3.2	Modèle de faisceau à une dimension	37

3.2.1	Principes de la méthode "Particle in Cell" en coordonnées cylindriques . .	37
3.2.2	Intégration des équations du mouvement des électrons	38
3.2.3	Injection du faisceau	39
3.3	Modèle de ligne à une dimension	40
3.3.1	Précision du modèle	40
3.3.2	Obtention du champ propre	43
3.3.3	Conditions aux bords	44
3.3.4	Intégration de la dynamique de l'onde de circuit	45
3.4	Le code He1L-1D	47
3.4.1	Organisation du code	47
3.4.2	Fonctionnement usuel d'un TOP	48
3.4.3	Oscillations	50
3.5	Discussion	53
4	Modèle numérique à deux dimensions	55
4.1	Hypothèses de travail	56
4.2	Modèle de faisceau à deux dimensions	57
4.2.1	Intégration des équations de Maxwell	57
4.2.2	Principes de la méthode "Particle in Cell"	60
4.2.3	Intégration des équations du mouvement des électrons	62
4.2.4	Conditions aux bords	64
4.2.5	Raffinements nécessaires	69
4.3	Modèle de ligne à deux dimensions	76
4.3.1	Équation d'ondes en coordonnées cylindriques	76
4.3.2	Solution générale	77
4.3.3	Champ propre pour une hélice	78
4.4	Le code He1L-2D	80
4.4.1	Caractéristiques du code	81
4.4.2	Fonctionnement usuel d'un TOP	82
4.5	Discussion	85

TABLE DES MATIÈRES

5	Contrôle de l'adaptation par un défaut local	87
5.1	Théorie	88
5.1.1	Principe de la méthode de défaut	88
5.1.2	Equations de connexion du défaut	89
5.1.3	Caractéristiques du défaut	91
5.2	Reconstruction du système couplé	91
5.2.1	Détermination des coefficients	91
5.2.2	Résultats numériques à froid	93
5.2.3	Résultats numériques à chaud	95
5.3	Discussion	97
6	Conclusion et idées pour de futurs travaux	99

Remerciements

Paris, le 27 Janvier 2012

Je me dois tout d'abord de remercier mon directeur de thèse, Fabrice Doveil, pour avoir accepté de diriger cette thèse et pour m'avoir aidé dans la correction de différentes publications, malgré les huit cents kilomètres séparant Marseille de Vélizy. Je remercie de plus Yves Elskens pour l'attention qu'il a portée à mes travaux, pour s'être toujours montré disponible à mon égard et pour m'avoir toujours donné des conseils avisés lorsque j'ai eu besoin de son aide. Il va sans dire que je le remercie également pour son extrême gentillesse.

Je remercie ensuite les trois membres du "*Bureau du Bonheur*" – Yoann Rozier, Marc Lefèvre et Fabrice Vasseur – ainsi que Pierre Lécuyer, qui ont d'une part rendu cette thèse beaucoup plus facile par leur humour et leur sympathie et qui ont d'autre part assuré le soutien moral dans les périodes de doute. Je les remercie également pour avoir supporté mon goût prononcé pour les productions cinématographiques martiales des bas-fonds de Hong Kong et de Manille. Bien que cette remarque soit valable pour toutes les personnes que j'ai cotoyées de près ou de loin à Vélizy, ces quatre-là étaient en première ligne. Désolé de vous avoir fait subir ça !

Au même titre, je souhaite remercier Alain Le Clair, Jacques Herrewyn, Michèle Giraud, Arnaud Brechenmacher et Mounhir Chbiki, qui ont en plus animé mes midis. Je souhaite au passage bon courage à Mounhir pour sa dernière année de thèse et le meilleur pour la suite !

Évidemment, je remercie également Frédéric André, et ce pour plusieurs raisons. D'une part, c'est grâce à lui que j'ai pu intégrer le personnel de Thales Electron Devices, me permettant d'annihiler un grand nombre d'idées reçues qu'ont bien souvent les jeunes diplômés de Master Recherche sur le monde de l'entreprise. D'autre part, je le remercie pour les échanges d'idées que nous avons eus et qui m'ont bien souvent ouvert l'esprit et permis d'avancer.

Enfin, il est deux personnes que je dois remercier tout spécialement, car sans leurs innombrables contributions, autant humaines que techniques, il y a fort à parier que jamais je n'aurais pu compléter ce travail. Un immense merci, donc, à Jean-François David et à David Bariou qui, bien que ce ne fut pas initialement prévu, m'ont toujours piloté avec clairvoyance et bienveillance

lors de ces trois années. Je les remercie de m'avoir accordé le luxe ultime d'explorer des directions qu'ils savaient incertaines à l'avance, me laissant ainsi faire mes propres expériences, non de manière anarchique comme c'est souvent le cas lors d'une thèse, mais plutôt en me canalisant et en contrôlant mon travail. Ceci a bien évidemment été rendu possible par les centaines d'heures de leur temps qu'ils m'ont consacrées. Je les remercie donc du plus profond du cœur pour m'avoir fait grandir, et pour avoir rendu cette expérience de doctorat agréable, unique, enrichissante et, par dessus tout, passionnante.

Introduction



Sommaire

1.1	Les tubes électroniques à travers l'Histoire	4
1.2	Modélisation et simulation des TOP de type 'O'	7
1.2.1	Principe de fonctionnement	7
1.2.2	Les premiers modèles analytiques d'interaction dans les TOP	9
1.2.3	Les codes d'interaction	11
1.2.4	La simulation des tubes chez Thales Electron Devices	13
1.3	Contexte de la thèse : le domaine temporel	15

1.1 Les tubes électroniques à travers l'Histoire

"Cela n'a aucune sorte d'utilité[...] il s'agit simplement d'une expérience qui prouve que Maxwell, le Maître, avait raison - nous avons juste ces mystérieuses ondes électromagnétiques, que nous ne pouvons voir à l'oeil nu. Mais elles sont bel et bien là." [1]¹ Ainsi le physicien Germanique Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) parlait-il de ses expériences qui prouvaient l'existence des ondes électromagnétiques prévue par la théorie de James Clerk Maxwell (1831-1879) [2]. L'Histoire a peu après démenti cette affirmation, mais Hertz eut malheureusement une vie trop courte pour le constater. Il se passa vingt-deux ans entre la théorie de Maxwell et sa preuve expérimentale par Hertz, et plus d'un siècle fut nécessaire pour passer de simples étincelles, déclenchées à distance aux bornes d'un éclateur, aux applications telles que la téléphonie sans fil, le four à micro ondes, la radio ou encore le RADAR (Radio Detection And Ranging). Autant d'applications dont nous ne pouvons nous passer aujourd'hui et qui ont, entre autres, dépendu et dépendent encore souvent du développement et de la recherche sur les tubes électroniques. Durant la totalité du XX^e siècle, le développement des tubes a toujours été corrélé avec le besoin de ses applications en fréquences toujours plus hautes à des puissances toujours plus grandes.

Le tout premier tube électronique est baptisé *Audion* par son créateur, l'Américain Lee De Forest (1873-1961), en 1907 [3]. Dans une diode à vide, une grille est intercalée entre la cathode et l'anode. Une faible variation de tension de grille provoque une forte variation de tension sur l'anode. Ainsi, il est possible de détecter des signaux électromagnétiques de faible puissance et, par extension, de les amplifier. L'*Audion* est dès lors naturellement utilisé, d'abord comme récepteur puis comme émetteur, dans les bâtiments de l'U.S. Navy [4]. Des systèmes dérivés de cette "valve", développés par Gustave Ferrié (1868-1932) en France, sont utilisés dans les tranchées à partir de 1916. Ce n'est qu'après la guerre que l'*Audion* et ses dérivés, la tétrode, puis plus tard la pentode, sont utilisés dans des applications civiles comme la radiophonie.

Les travaux de Hertz ayant démontré qu'une onde électromagnétique est réfléchiée par une surface métallique, les prémices du développement des systèmes de détection par ondes électromagnétiques voient le jour dès le début des années 1900. Durant l'année 1904, l'Allemand Christian Hülsmeier (1881-1957) obtient un brevet pour un système de détection des navires, le *Telemobiloskop*. Contre toute attente, son appareil ne rencontre que peu de succès auprès des autorités militaires et finit par tomber dans l'oubli. Ce n'est que durant les années 1930 que les systèmes radar tels que nous connaissons sont développés. Ces radars doivent être capables de détecter des objets de relativement petites tailles (des avions par exemple) à une distance la plus grande possible. En conséquence, la source de puissance électromagnétique de ces instruments doit être capable de générer des fortes puissances à des petites longueurs d'onde (hautes fréquences). Dans le début des années 1930, la seule source de puissance respectant ces critères est un tube électronique appelé *magnétron*, dont le prototype, conçu par Albert Hüll (1880-1966) de la General Electric, existe depuis 1921 [5].

1. Traduction de l'auteur

Les premiers systèmes radars utilisant un magnétron comme source de puissance sont développés parallèlement en Russie et en France durant l'année 1934. Le premier système français fonctionnel est développé par Henri Gutton au centre de recherche de la Compagnie Générale de la Télégraphie Sans Fil². Le premier bâtiment à en être équipé est le paquebot Oregon. Le radar utilise un magnétron fonctionnant à 16 cm de longueur d'onde pour une puissance de 10 W. Des améliorations apportées à celui-ci, notamment au niveau de sa cathode, permettent aux forces alliées de disposer d'un système de détection opérant à une puissance de 1 kW dès le mois d'Avril 1940. La production à grande échelle de ce tube est effectuée aux États Unis et équipe les radars anglais durant la seconde guerre mondiale. Durant les combats aériens l'utilisation des magnétrons donnait un net avantage à la Royal Air Force sur les forces de l'Axe qui, dans leurs systèmes de détection, utilisaient des klystrons [6], plus fiables mais moins puissants à l'époque, et donc de moins longue portée.

Le début des années 1940 s'ouvre sur le développement du tube à onde progressive (TOP), marquant ainsi une réelle évolution dans le domaine des communications sans fil. Nils Lindenblad décrit, dans son brevet de 1940 [7], un appareil capable d'amplifier des ondes électromagnétiques grâce à un faisceau d'électrons. Cet appareil utilise déjà une structure à onde lente hélicoïdale et le signal à amplifier est introduit dans le tube par une grille, placée en aval de la cathode, et dont la tension peut être modulée (modulant ainsi le faisceau). Cependant, nous devons le développement du premier TOP tel que nous le connaissons aujourd'hui à Rudolf Kompfner, en 1943 [8]. La théorie linéaire de cet instrument est publiée par John Pierce en 1947 [9]. L'invention du TOP marque le début de l'ère de la téléphonie sans fil. La décennie voit aussi émerger l'utilisation des klystrons dans les accélérateurs linéaires ainsi que l'invention du premier four à micro ondes, donnant ainsi au magnétron une nouvelle application qui touchera par la suite le monde entier.

Ce n'est que durant les années 1950 que la recherche sur les tubes explose vraiment. En 1953, A. Nordsieck développe la première théorie non-linéaire d'interaction dans les TOP [10], ce qui permet de modéliser, pour la première fois, leur comportement à saturation. La décennie voit naître le tube à cavités couplées qui, en raison de son bon compromis entre puissance et largeur de bande, est dès lors utilisé dans les radars et dans les systèmes de contremesures. De nombreux tubes dérivés des TOP à hélice apparaissent, comme les tubes *ring and bar* ou les tubes à double hélice, dont le rôle est de supprimer les oscillations. C'est pendant cette période que les oscillateurs sur onde inverse apparaissent en France et aux États Unis. Enfin, on assiste à une réduction de la taille et du poids des TOP de type 'O', ce qui les rend très intéressants pour les applications spatiales naissantes.

À partir des années 1960, les applications des tubes se diversifient grâce à différentes améliorations apportées aux tubes existants et à l'apparition de nouveaux types de tubes, tels que les gyrotrons, permettant d'augmenter la puissance des sources à des fréquences toujours plus hautes. Les premières applications pratiques des TOP dans les communications par satellites (télévision, radio, fax...) voient le jour. Ces applications, qui faisaient partie du domaine de la

2. qui deviendra plus tard Thales Electron Devices

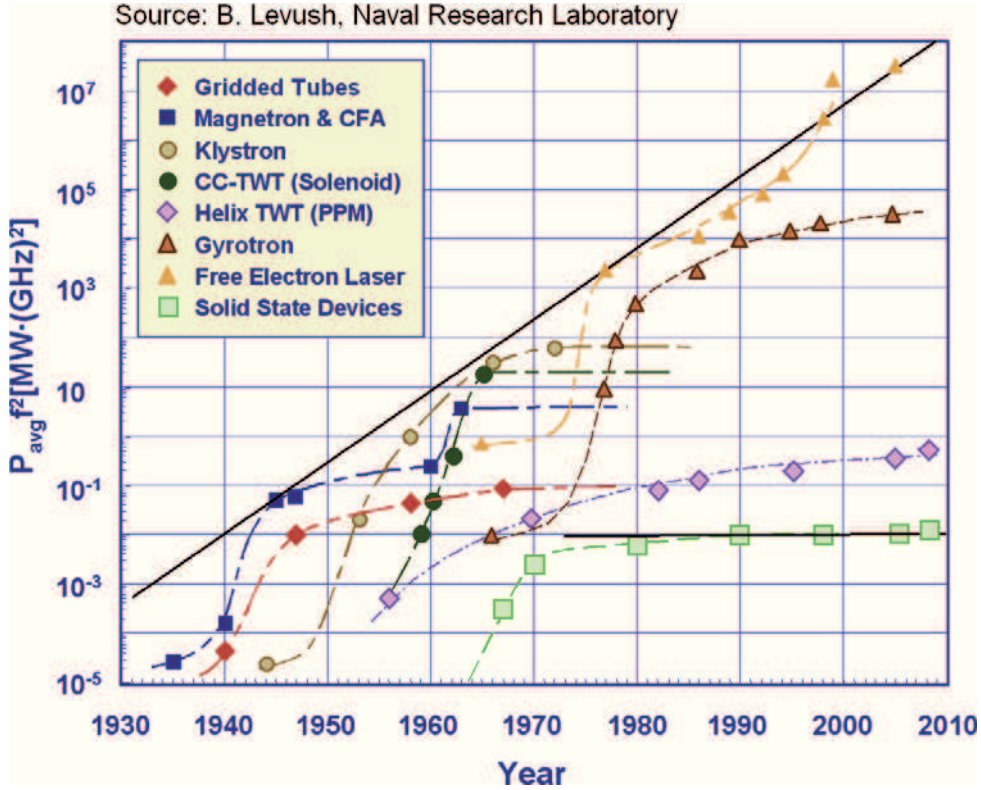


FIGURE 1.1 – Caractéristique Pf^2 des différentes familles de tubes électroniques en fonction du temps depuis les années 1930.

science fiction jusqu'alors, sont de nos jours très répandues. L'augmentation de la puissance des sources eut un impact important en astrophysique, puisqu'il était alors possible de déterminer grâce aux radars, mieux que par la simple observation, les distances nous séparant des astres, ainsi que leur période de giration. L'amélioration ainsi que la réduction de la taille et du coût des magnétrons ont permis l'essor du marché des fours à micro-ondes, dont l'intérêt n'est plus à démontrer aujourd'hui. Le développement des gyrotrons a rendu possibles les premières études expérimentales de fusion thermonucléaires, et l'utilisation de klystrons à faisceaux multiples dans les accélérateurs s'est banalisée. Dans le même temps, les technologies liées aux TOP, comme les collecteurs multi-étages, ont permis d'augmenter leur rendement énergétique, ce qui fait d'eux, de nos jours encore, des candidats de choix pour les systèmes de réception et d'émission des signaux embarqués dans les satellites de télécommunications.

Les tubes électroniques ont eu un fort impact sur le développement de nos sociétés modernes et sur notre mode de vie, et il y a fort à parier que l'impact de ces instruments perdurera par la suite en raison de leur importance dans des projets d'envergure internationale (fusion, accélérateurs ...). Bien que les amplificateurs à état solide aient, en raison de leur faible coût, supplanté le tube électronique dans les applications requérant de faibles puissances à basses et moyennes fréquences, ce dernier reste la seule option pour générer des signaux électromagnétiques de hautes fréquences à de fortes puissances (voir courbe 1.1), avec de forts rendements. Les travaux effectués durant cette thèse portent sur les tubes électroniques à onde progressive de

type 'O', dont les applications concernent en grande partie les télécommunications et les radars, et dont nous détaillons le principe de fonctionnement ainsi que les deux principaux modèles analytiques dans la section suivante.

1.2 Modélisation et simulation des TOP de type 'O'

Tous les tubes fonctionnent sur le même principe : transférer l'énergie cinétique d'un faisceau d'électrons en énergie électromagnétique. Il en existe cependant de plusieurs sortes, possédant chacune une certaine géométrie lui permettant d'opérer sur une certaine gamme de fréquences et de puissances. Nous nous intéressons dans cette thèse aux tubes électroniques de type 'O'. Cette famille de tubes regroupe les TOP à hélice, les TOP à cavités couplées, ainsi que leurs dérivés. Dans cette section, nous détaillons les principes généraux du fonctionnement des TOP à hélice, qui constituent le terrain de jeu de ce travail de thèse. Nous présentons aussi brièvement les modèles analytiques et les codes existants permettant d'étudier leur comportement.

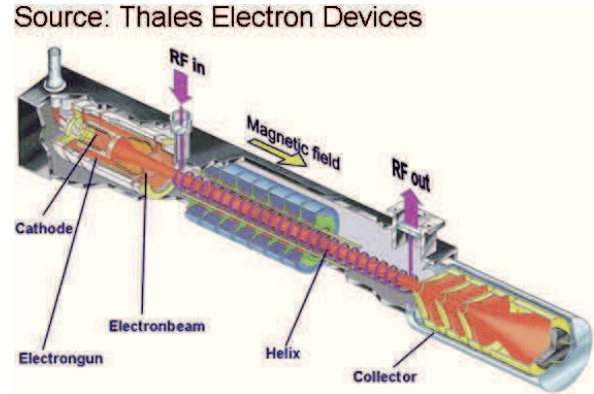


FIGURE 1.2 – Coupe d'un TOP à hélice.

1.2.1 Principe de fonctionnement

Un TOP comporte trois parties (voir figure 1.2) :

- Un canon à électrons.
- Une ligne d'interaction.
- Un collecteur.

Le rôle du canon à électrons est d'émettre et d'accélérer des électrons afin de former un faisceau laminaire. Pour ce faire, une cathode métallique est chauffée, de manière à ce que les électrons du métal se retrouvent en surface de celui-ci. Ces électrons sont arrachés à la matière et accélérés par une anode, située en aval de la cathode. Le long de leur trajet dans le canon, on fait converger les électrons vers l'axe du système grâce à un Wehnelt (voir figure 1.3).

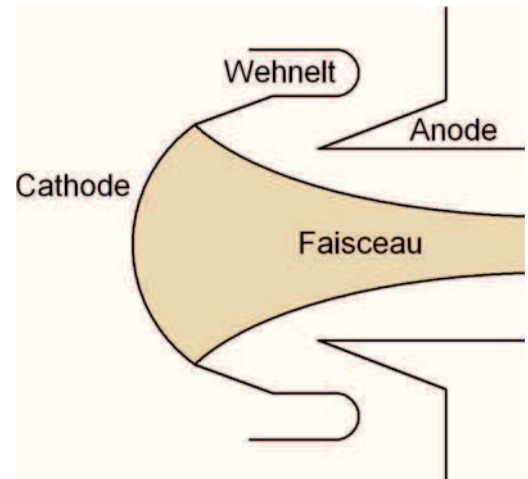


FIGURE 1.3 – Schéma d'un canon de Pierce.

Les électrons accélérés sont introduits dans la ligne d'interaction. Le signal que l'on souhaite amplifier (l'onde de circuit) est introduit dans celle-ci au moyen d'un coupleur situé directement en aval du canon. Le signal amplifié est recueilli au niveau d'un second coupleur situé en amont du collecteur. La ligne d'interaction est composée d'un tube métallique dans lequel transitent

conjointement l'onde de circuit et le faisceau d'électrons confiné soit par une série d'aimants permanents, soit par une bobine. Si le faisceau est beaucoup plus rapide ou beaucoup plus lent que la phase de l'onde, les électrons voient un champ de force moyen nul et tout se passe comme si les deux systèmes s'ignoraient. Pour réaliser l'amplification, les électrons doivent donc avoir une vitesse proche de celle de l'onde. Dans un tube métallique, une onde se propage à la vitesse de la lumière. Possédant une masse, les électrons ne peuvent approcher cette vitesse qu'au prix d'une dépense d'énergie colossale dans le canon. Plutôt que d'accélérer les électrons, on cherche donc à diminuer la vitesse de l'onde de circuit le long du trajet des électrons. Ceci peut se faire de différentes manières, engendrant les différents types que nous avons mentionnés dans le paragraphe précédent, toutes basées sur le fait de rallonger le trajet de l'onde de circuit.

Dans le cas des TOP à hélice, une hélice métallique maintenue par des bâtonnets diélectriques est introduite dans le tube métallique (voir figure 1.4). On peut comprendre intuitivement comment la présence de cette hélice ralentit l'onde de circuit. Cette dernière transite à la vitesse c le long des spires de l'hélice, et non plus le long du trajet des électrons. Sur une longueur d , correspondant à l'espace inter-spires, l'onde parcourt une distance proche de $2\pi a$, où a est le rayon de l'hélice. Ainsi, la distance parcourue par l'onde est multipliée par un facteur proche de $2\pi a/d$, et sa vitesse longitudinale est donc divisée d'autant. On choisit a et d de telle sorte que l'onde de circuit soit synchronisée avec le faisceau.

En introduisant une onde hyperfréquence (HF) à l'entrée de la ligne d'interaction, on crée une variation du champ électrique de l'onde de circuit au cours du temps. Celui-ci est, selon l'instant, positif ou négatif. En conséquence, selon l'instant d'entrée d'un électron dans la ligne, celui-ci sera soit accéléré, soit ralenti. On forme ainsi périodiquement des paquets d'électrons. Si le faisceau est légèrement plus rapide que la phase de l'onde de circuit, celui-ci aura tendance à ralentir, cédant ainsi son énergie cinétique au potentiel de l'onde de circuit. Un TOP à hélice est habituellement composé de plusieurs sections, comprenant chacune de 50 à 100 tours. Chaque section est séparée par des atténuations permettant de réduire les instabilités pouvant se développer lors de l'amplification. Dans la section de sortie, le faisceau ayant ralenti, on fait souvent varier les caractéristiques de l'hélice afin que l'onde de circuit reste en synchronisme avec le faisceau. Ce procédé de fabrication, appelé "taper", était déjà présent dans le brevet de N. Lindenblad.

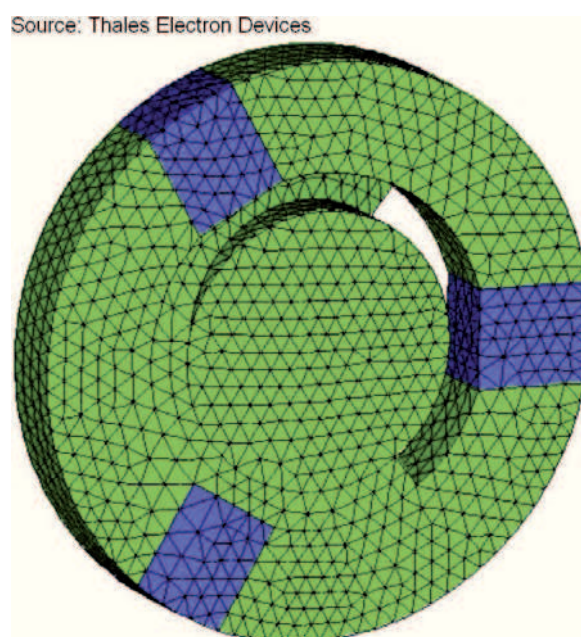


FIGURE 1.4 – Maillage d'un tiers de pas d'une ligne à hélice. Le vide est maillé en vert, les bâtonnets sont maillés en bleu.

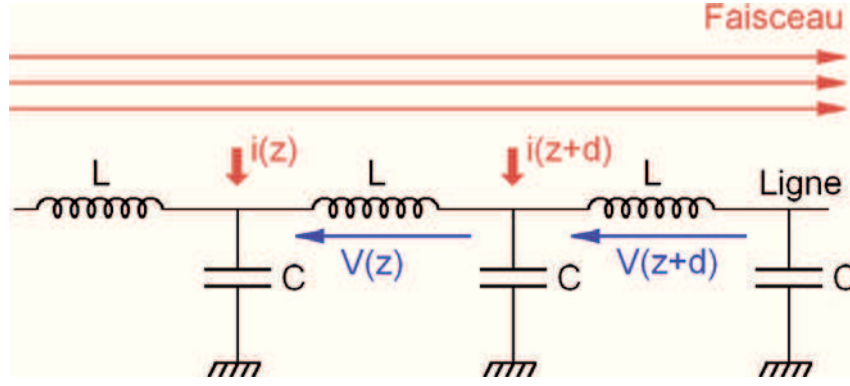


FIGURE 1.5 – Méthode utilisant le circuit des télégraphistes.

Lorsqu'ils atteignent l'extrémité de sortie de la ligne d'interaction, les électrons, ayant acquis une dispersion en énergie, terminent leur voyage dans le "collecteur". Bien souvent, celui-ci comporte plusieurs électrodes chargées à différents potentiels, dont le rôle est de diminuer progressivement la vitesse des électrons et de collecter ceux-ci selon leur énergie. En utilisant un collecteur, on évite que les électrons dissipent toute leur énergie sous forme de chaleur en frappant de plein fouet le fond du collecteur. On augmente ainsi le rendement du tube.

1.2.2 Les premiers modèles analytiques d'interaction dans les TOP

Les deux modèles standards d'interaction dans les TOP furent développés par J. R. Pierce [9] et A. Nordsieck [10] en 1947 et 1953 respectivement. Dans cette section, nous expliquons succinctement leurs fondements physiques ainsi que leurs limitations. Ces modèles, bien que relativement simples, contiennent la plus grande partie de la physique du problème. Avant l'apparition des codes de simulation, ces modèles constituaient les seuls outils permettant aux ingénieurs de dimensionner les TOP. Les deux modèles présentés ci-après sont des modèles à une dimension, c'est-à-dire que les variations des quantités physiques dans les directions transverses à la direction de propagation z ne sont pas prises en compte. Cette simplification est bonne en première approximation puisque l'interaction dans les TOP a majoritairement lieu dans la direction de propagation.

1.2.2.1 Le modèle linéaire de Pierce

Dans son modèle, Pierce suppose que le faisceau d'électrons est un fluide chargé dont la dynamique est soumise au champ électrique de l'onde de circuit. De plus, il approxime la structure à onde lente du TOP par un circuit électronique. La courbe de dispersion de celui-ci est proche de celle de la structure à onde lente au voisinage de la fréquence de fonctionnement du TOP. En réponse à la modulation du courant du faisceau engendrée par l'onde de circuit, le faisceau induit un courant dans le circuit, modifiant la tension aux bornes de celui-ci, et donc l'amplitude de l'onde de circuit. Le modèle de Pierce décrit donc deux systèmes en interaction.

Le circuit équivalent utilisé par Pierce, puis plus tard par Brillouin [11], est le circuit des Télégraphistes, représenté sur la figure 1.5. Les équations décrivant le TOP dans ce modèle sont donc, d'une part, les deux équations fluides pour le faisceau, et d'autre part, les deux équations des Télégraphistes pour la structure à onde lente. En linéarisant ces équations et en supposant que les quantités dynamiques du problème varient de manière harmonique, c'est-à-dire proportionnellement à $e^{i(\omega t - \beta z)}$, où ω est la fréquence de travail du TOP et β le nombre d'onde associé à cette fréquence, Pierce transforme les équations aux dérivées partielles de son problème en un système de quatre équations linéaires couplées. En annulant le déterminant de la matrice du système, il en déduit l'équation de dispersion du TOP.

La relation de dispersion déterminée par Pierce est une équation polynômiale du quatrième degré ayant β pour inconnue. Pour qu'une onde s'amplifie, il faut donc que le nombre d'onde qui lui est associé soit un nombre complexe. Il faut de plus que la partie imaginaire de ce nombre, donnant le taux de croissance de l'onde par unité de longueur, soit supérieure à zéro. La relation de dispersion possède quatre racines dénotant, pour une fréquence donnée, la présence de quatre ondes dans le TOP (voir figure 1.6). L'onde inverse de circuit se propage dans la direction opposée au déplacement des électrons. Elle ne joue en général aucun rôle dans le processus d'amplification, tout comme l'onde rapide de charge d'espace, bien que cette dernière se propage dans le même sens que le faisceau. Le couplage entre l'onde lente de charge d'espace et l'onde directe de circuit est donc à l'origine de l'amplification. Dans la bande de fonctionnement d'un tube, ces ondes ont des nombres d'onde de parties réelles égales et de parties imaginaires opposées, de telle sorte que la quantité d'énergie totale est conservée. Une onde est donc amplifiée (l'onde de circuit) et la seconde est atténuée.

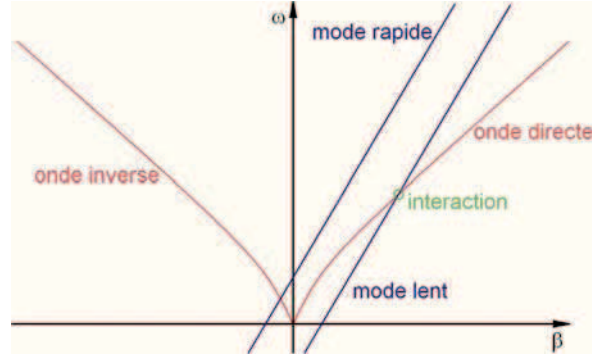


FIGURE 1.6 – Courbes de dispersion des différentes ondes en présence dans le modèle de Pierce. L'onde inverse et le mode rapide de charge d'espace ne jouent aucun rôle dans le processus d'amplification. Le mode lent interagit avec l'onde directe.

Le modèle de Pierce est un modèle perturbatif valable uniquement en petit signal, c'est-à-dire lorsque la partie alternative des grandeurs physiques est négligeable devant leur partie statique. Il s'agit un modèle linéaire, c'est-à-dire que le gain du TOP ne dépend pas de l'amplitude de l'onde que l'on introduit dans celui-ci. Puisque le faisceau d'électrons est un milieu non-linéaire, cette hypothèse peut ne pas être satisfaisante dans certains cas. Ce problème a amené A. Nordsiek à développer un modèle non-linéaire d'interaction dans les TOP.

1.2.2.2 Le modèle non-linéaire de Nordsieck

Le long de l'axe du TOP, le champ électrique de l'onde de circuit oscille entre des valeurs positives et négatives. Ainsi, un électron se trouvant dans une région où le champ est négatif sera accéléré, alors qu'il sera ralenti si il se trouve dans une région où le champ est positif. Si l'amplitude du champ de circuit est suffisamment grande, un électron peut être accéléré à une vitesse supérieure à la vitesse de phase de l'onde. Il peut alors atteindre une région où il sera décéléré. Dans cette région, l'électron peut alors ralentir jusqu'à une vitesse inférieure à la vitesse de phase de l'onde de circuit. Il sera alors "rattrapé" par celle-ci et sera de nouveau positionné dans une région où il sera accéléré. L'électron, piégé dans le potentiel de l'onde, ne contribue plus au processus d'amplification. L'amplitude de celle-ci finit par atteindre une valeur constante le long de l'axe. On dit que le tube "sature". Lors de ce phénomène, plusieurs électrons, ayant des vitesses différentes, peuvent se chevaucher en une même position.

Le modèle de Nordsieck diffère du modèle de Pierce par la représentation du faisceau d'électrons. Celui-ci n'est plus vu comme un fluide, mais comme un ensemble de particules. De plus, Nordsieck s'intéresse aux coordonnées généralisées des électrons et de l'onde de circuit à travers l'utilisation d'un formalisme Lagrangien. Cette formulation permet la description de la vitesse des électrons comme une fonction multivaluée de l'espace. Elle permet donc de décrire la saturation de l'onde de circuit dans le cas où le gain d'un TOP devient très grand, ou encore lorsque le TOP opère à une très forte puissance d'entrée. Dans le modèle de Nordsieck, les forces de charge d'espace, couplant directement une particule avec les autres, ne sont pas prises en compte. Ceci permet de repérer une particule par sa vitesse et par l'instant auquel elle est entrée dans le TOP. Les variations de l'amplitude de l'onde de circuit sont alors calculées en prenant en compte les contributions au processus d'amplification de plusieurs particules entrant dans le TOP à des instant différents.

Notons que, dans le modèle de Nordsieck comme dans le modèle de Pierce, la structure à onde lente est décrite par la ligne des télégraphistes. Le formalisme Lagrangien décrivant celle-ci est développé. On peut trouver les calculs détaillés des modèles de Pierce et de Nordsieck dans l'ouvrage de Rowe [12].

1.2.3 Les codes d'interaction

Les modèles de Pierce et de Rowe permettent de se faire une bonne idée des caractéristiques de fonctionnement d'un TOP. Cependant, le modèle de Pierce ne permet pas de traiter les phénomènes non-linéaires comme la saturation. Le modèle de Rowe, quant à lui, ne prend pas en compte les phénomènes liés à la charge d'espace, ce qui peut être problématique si l'on souhaite étudier un TOP dont le faisceau est très intense. De plus, ces deux modèles ne prennent en compte que les variations axiales des quantités physiques. Or, dans certains cas, il peut s'avérer nécessaire de prendre en compte les phénomènes liés à des effets radiaux (élargissement du

faisceau d'électrons proche de la saturation) ou azimutaux (onde inverse dans les TOP à hélice). Un modèle analytique prenant tous ces éléments en compte n'existe pas à l'heure actuelle. On a donc souvent recours à des codes de simulation numérique.

Il existe à l'heure actuelle un certain nombre de codes de simulation permettant d'étudier l'interaction dans les TOP. Ces codes peuvent être classés dans deux catégories :

- Les codes dits "généraux".
- Les codes dits "spécialisés".

Dans un code général [13], [14], [15], la structure interne d'un TOP est décrite géométriquement par un maillage. Dans ce maillage, on résout numériquement les équations de Maxwell et des équations pour la dynamique du faisceau d'électrons. Les techniques d'intégration les plus utilisées pour résoudre ces équations sont la méthode des éléments finis [16], la méthode des intégrations finies, ou encore la méthode des différences finies [17]. Un tube est un dispositif surdimensionné (beaucoup plus long que large). En conséquence, la taille des maillages utilisés dans les codes généraux devient rapidement gigantesque. Par exemple, considérons un TOP à hélice de deux cents tours. Pour mailler une spire de l'hélice, $2.E^4$ noeuds sont en moyenne nécessaires. Le maillage total du tube comporte donc $4.E^6$ noeuds. Puisque les champs électrique et magnétique sont définis par trois composantes chacun, le nombre d'inconnues, et donc la taille du problème (en omettant le faisceau d'électrons) est $N = 24.E^6$. Les codes généraux, bien que décrivant toute la physique du problème, nécessitent donc des ressources de calcul trop importantes pour pouvoir être utilisés dans l'industrie.

Contrairement à d'autres domaines faisant intervenir des plasmas ou des faisceaux de particules, la partie d'un code général nécessitant le plus de temps de calcul n'est pas tant la résolution de la dynamique du faisceau que la résolution des équations de Maxwell. Ainsi, depuis les prémices de la simulation de l'interaction dans les TOP, on utilise des modèles spécialisés dont le but est de décrire le problème avec moins d'inconnues que dans les modèles généraux. Les équations de Maxwell ne sont pas intégrées directement, et une formulation réduite permet de décrire l'onde de circuit. La plus répandue parmi celles-ci est la méthode des circuits équivalents, utilisée par Pierce. Cette méthode peut être employée pour simuler les TOP à cavités couplées [18] car des circuits équivalents décrivant la structure à onde lente avec une précision acceptable ont été développés [19], [20].

Dans le cas des TOP à hélice, un certain nombre de codes spécialisés utilisent la ligne des télégraphistes pour représenter la structure à onde lente [21], [22]. Néanmoins, cette représentation n'est valable que sur une faible portion de la bande de fonctionnement du tube. On peut trouver un schéma équivalent représentant mieux la courbe de dispersion d'une hélice dans [23]. Néanmoins, le choix des valeurs des capacitances, inductances et résistances utilisées dans le circuit est laissé à l'utilisateur et il est difficile de prendre en compte plusieurs modes de propagation de façon précise. Une autre méthode [24] utilise un modèle approché d'hélice afin de déterminer une équation dynamique pour l'onde de circuit. Dans ce modèle, il est supposé que l'onde est monochromatique. Cette formulation est différente de celle des circuits équivalents car

1.2 Modélisation et simulation des TOP de type 'O'

Nom du code	modèle de faisceau	modèle de ligne	domaine de résolution
CHRISTINE	PIC	Hélice en feuille	Domaine fréquence
CST	PIC	Général	Domaine temps
MUSE	Fluide	Télégraphistes	Domaine fréquence
GATOR	PIC	Enveloppe	Domaine temps
IBC	PIC	Télégraphistes	Domaine temps
LATTE (MUSE)	Lagrangien	Télégraphistes	Domaine fréquence
MAGIC	PIC	Général	Domaine temps
MVTRAD	PIC	Enveloppe	Domaine fréquence
KARAT	PIC	Général	Domaine temps

TABLE 1.1 – Paramètres d’entrée du code de faisceau d’électrons

elle découle directement des équations de Maxwell [25]. À ce titre, elle possède certains points communs avec le modèle discret de Kuznetsov [26] que nous étudions dans ce manuscrit, mais elle ne décrit pas la même physique.

Bien souvent, dans les modèles spécialisés, les champs induits par le faisceau ainsi que le champ de circuit sont décrits par des équations aux dérivées partielles en temps et en espace. En physique des tubes, deux approches sont utilisées pour les intégrer :

- L’approche temporelle, qui ne fait aucune hypothèse sur la fréquence de travail du TOP.
- L’approche fréquentielle, dans laquelle on suppose que les grandeurs du problème varieront au cours du temps comme $e^{i\omega t}$. Il est facile de prendre en compte plusieurs fréquences dans ces modèles, mais celles-ci doivent toutes être multiples d’une fréquence fondamentale (modèles multi-fréquentiels).

La seconde approche mène à une représentation plus réduite du TOP que la première, et les codes issus de celle-ci sont en général très légers, tant en termes de ressources de calcul que de mémoire vive. En conséquence, elle est de loin la plus utilisée. De plus, elle correspond mieux au fonctionnement d’un tube puisque celui-ci travaille en général à une fréquence donnée. Cependant, pour certains problèmes importants, faisant intervenir un large spectre en fréquence (transitoires), ou faisant intervenir des fréquences que l’on ne peut pas prévoir à l’avance, l’approche temporelle semble plus convenable à utiliser.

Les codes d’interaction spécialisés utilisant une approche temporelle sont plutôt rares. Le code **GATOR** [24] est fondé sur une approche temporelle, mais l’équation décrivant l’onde de circuit dans ce code n’est valable qu’à une fréquence donnée. Ce programme est donc à la frontière des domaines fréquentiel et temporel. Le tableau 4.1 répertorie certains des codes d’interaction existants ainsi que leurs caractéristiques (modèle de faisceau, modèle de ligne, approche utilisée).

1.2.4 La simulation des tubes chez Thales Electron Devices

Le service de calcul scientifique de Thales Electron Devices a, au fil du temps, développé et mis à la disposition des ingénieurs tout un panel de codes d’aide à la conception des tubes électroniques. Parmi ces codes, certains sont voués à simuler les phénomènes liés à l’électrodynamique

dans les TOP. Certains codes calculent les trajectoires des électrons dans le canon d'un TOP. Ces trajectoires sont relevées dans le plan de sortie du canon et peuvent être utilisées comme données d'entrée des codes d'interaction. Ces derniers permettent d'estimer le gain acquis par l'onde de circuit ainsi que les trajectoires électroniques le long de la ligne. Ces trajectoires, relevées à la sortie de la ligne, sont ensuite utilisées comme données d'entrée des codes de simulation pour les collecteurs. Les codes Thales Electron Devices permettent donc de simuler la totalité d'un TOP.

Parmi les codes d'interaction de Thales, les deux que nous ferons intervenir dans ce manuscrit sont le code **TUBH** et le code **MVTRAD-2D**. Ces codes sont utilisés de manière intensive par les ingénieurs et donnent en général des résultats en bon accord avec l'expérience. Aussi, ces codes nous ont servi de référence pour valider les différents codes temporels que nous avons écrits durant cette thèse. Les codes **TUBH** et **MVTRAD-2D** sont tous deux des codes fréquentiels et sont généralement utilisés pour simuler des TOP à hélice. Ce sont de plus des codes grand signal, dans lesquels le faisceau est décrit par un modèle particulaire. Ces codes prennent donc en compte le phénomène de saturation de l'onde de circuit.

Le code **TUBH** diffère du code **MVTRAD-2D** du fait qu'il est basé sur un modèle à une dimension. Dans **TUBH**, le faisceau d'électrons est vu comme une série de disques chargés se déplaçant sur l'axe du tube. Le code **MVTRAD-2D** est basé quant à lui sur un modèle à deux dimensions du TOP, dans lequel les électrons sont vus comme des anneaux chargés se déplaçant le long de l'axe, dont le rayon peut s'élargir, et pouvant entretenir un mouvement de giration autour de l'axe du tube. Le code **MVTRAD-2D** est donc beaucoup plus riche que le code **TUBH** puisqu'il permet de prendre en compte les variations de diamètre du faisceau, qui peuvent avoir un fort impact sur les performances d'un tube. De plus, ce code permet de décrire, plus précisément qu'on ne peut le faire avec **TUBH**, la distribution en énergie du faisceau d'électrons lorsqu'il entre dans le collecteur.

TUBH et **MVTRAD-2D** fournissent à l'utilisateur différents paramètres importants d'un TOP. On peut par exemple estimer le gain et le rendement d'un tube lorsqu'il fonctionne à une fréquence donnée. On dispose de plus de différents diagnostics permettant d'étudier les trajectoires des particules ou encore leur distribution en énergie le long de la ligne d'interaction. Il est aussi possible d'effectuer des calculs paramétrés ; d'obtenir le gain d'un tube sur toute une bande de fréquence, ou encore la puissance de sortie d'un tube en fonction de sa puissance d'entrée. Cette liste de diagnostics n'est pas exhaustive et un nombre impressionnant de combinaisons sont possibles. L'important est de comprendre que ces calculs sont rendus possibles grâce à leurs très courts temps d'exécution. En effet, sur un ordinateur de bureau, pour un tube de cinquante tours, calculer le gain d'un tube, pour des paramètres de faisceau fixés (courant, tension, rayon) et à une fréquence donnée, est instantané en utilisant **TUBH** et dure quelques secondes avec **MVTRAD-2D**.

1.3 Contexte de la thèse : le domaine temporel

Les codes fréquentiels TUBH et MVTRAD-2D remplissent parfaitement leur rôle d'aide à la conception des TOP chez Thales Electron Devices. En effet, ils permettent aux ingénieurs de connaître très rapidement l'effet que la variation d'un paramètre du tube aura sur ses performances. De plus, ils permettent d'étudier certains aspects importants de la stabilité des TOP. Dans certains cas cependant, il semble plus adéquat d'utiliser un modèle temporel. Ces cas regroupent :

- les phénomènes faisant intervenir un très grand nombre de fréquences, comme les transitoires lors de l'allumage du tube,
- les phénomènes faisant intervenir des fréquences qui ne peuvent être prévues avant l'exécution du code, comme certains types d'oscillations parasites.

Ces deux types de phénomènes ne représentent pas la majorité des cas auxquels s'intéressent les ingénieurs chez Thales Electron Devices. Néanmoins, ils peuvent jouer un rôle crucial sur les performances d'un tube. Leur étude est donc très importante.

Nous avons précédemment expliqué que l'utilisation de codes fondés sur une approche temporelle générale pouvait donner lieu à des temps de calcul extrêmement longs. Pour une entreprise telle que Thales, on pourrait même statuer que l'utilisation de tels code est interdite dans l'état actuel des performances informatiques. La question posée en début de thèse était la suivante :

"Puisque les modèles temporels généraux ne peuvent être utilisés, est-il possible d'utiliser à la place un modèle temporel spécialisé, permettant d'effectuer des calculs en un temps raisonnable ?"

Tout au long de cette thèse, nous nous sommes donc intéressés à un modèle spécialisé d'interaction dans les TOP en domaine temporel. Comme nous le verrons par la suite, ce modèle, appelé "modèle discret non-stationnaire d'excitation d'un guide d'onde périodique"³, permet, mieux qu'avec la méthode des circuits équivalents, une bonne description de la ligne d'interaction avec un nombre extrêmement réduit de paramètres. Contrairement à l'approche utilisée dans le code GATOR, l'approche utilisée dans le modèle discret ne fait aucune hypothèse sur les fréquences présentes dans le tube. Il s'agit donc d'un modèle pleinement temporel.

Ce modèle, développé par S. P. Kuznetsov dans les années 1980, n'avait été utilisé, à notre connaissance, que par N. M. Ryskin *et al.* en 2007 pour simuler un tube à cavités couplées en une dimension. Le modèle discret offrait en conséquence une approche originale à notre problème puisqu'il n'avait jamais été appliqué aux TOP à hélice.

Les principaux travaux de recherche effectués durant cette thèse ont suivi trois axes :

- L'application du modèle discret à un TOP à hélice en une dimension via le développement d'un code temporel, **HeLL-1d**. La validation de ce code a été effectuée en comparant nos

3. Nous utiliserons l'appellation plus courte de "modèle discret" dans le suite de ce document.

résultats avec ceux obtenus par le code **TUBH**. Cette étude nous a permis d’avoir un ordre de grandeur des temps de calcul d’un code utilisant le modèle discret.

- L’écriture d’un code à deux dimensions, **HelL-2D**, permettant de mieux décrire l’interaction des les TOP à hélice. Nous avons pu ainsi estimer le temps de calcul d’un tel code temporel, incluant plus de physique que son homologue à une dimension. La validation de ce second code a été effectuée en comparant nos résultats avec ceux obtenus par le code **MVTRAD-2D**.
- Le développement d’une variation du modèle discret permettant de mieux prendre en compte les phénomènes de réflexions d’ondes aux extrémités de la ligne à retard. Cette méthode a été implémentée dans le code **HelL-2D** et permet d’étudier certains aspects de la stabilité d’un tube qu’il serait difficile de traiter avec un code fréquentiel.

Chacun de ces points a donné lieu à une publication [27], [28], [29].

Nous avons logiquement choisi d’organiser la suite de ce manuscrit en quatre chapitres techniques et un chapitre de conclusion. Le chapitre 2 rappelle les travaux effectués antérieurement à cette thèse. Nous y décrivons le modèle analytique tel que développé par Kuznetsov et rappelons les avancées apportées par Ryskin *et al.* à ce modèle. Le chapitre 3 décrit le modèle numérique à une dimension que nous avons utilisé dans le code **HelL-1D**. Nous présentons des résultats obtenus avec ce code et nous les confrontons aux résultats obtenus avec **TUBH**. Nous étudions certaines possibilités offertes par le modèle discret pour étudier la stabilité d’un TOP. Le chapitre 4 présente le modèle numérique à deux dimensions sur lequel le code **HelL-2D** est fondé. Nous présentons des résultats numériques obtenus avec ce code et les comparons avec des résultats obtenus avec **MVTRAD-2D**. Le chapitre 5 présente la méthode que nous avons développée, permettant de prendre en compte, de manière précise, les réflexions d’ondes aux extrémités de la structure à onde lente. Des résultats en l’absence et en présence d’un faisceau d’électrons sont présentés. Nous concluons ce travail de thèse dans le sixième et dernier chapitre. Nous rappellerons les principaux problèmes posés par le modèle et nous donnerons des idées susceptibles de les résoudre.

Théorie non-stationnaire discrète d'excitation d'un guide d'onde périodique



Sommaire

2.1	Détermination des équations du modèle	18
2.1.1	Cadre du modèle	18
2.1.2	Le théorème de Floquet et la transformation de Kuznetsov	19
2.1.3	Le modèle de Kuznetsov	19
2.1.4	Interprétation physique du modèle	22
2.2	Synthèse des travaux de Ryskin <i>et al.</i>	24
2.2.1	Relation de dispersion en régime petit signal à une dimension	24
2.2.2	Application du modèle discret à un TOP à cavités couplées	28
2.3	Avantages et inconvénients du modèle discret	32

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au modèle discret non-stationnaire de Kuznetsov. La première partie présente les idées ainsi que les étapes mathématiques permettant d'obtenir les équations de la dynamique du champ électromagnétique interagissant avec le faisceau dans le cadre de ce modèle. Dans la seconde partie, nous faisons une synthèse des avancées théoriques et pratiques apportées par Ryskin *et al.* au modèle original. Enfin, dans la troisième partie, nous concluons sur les avantages et inconvénients liés à l'utilisation de celui-ci.

2.1 Détermination des équations du modèle

2.1.1 Cadre du modèle

Dans le modèle discret, on considère une structure à onde lente de période d , dans laquelle se propage un faisceau d'électrons. La dynamique d'un champ électromagnétique se propageant dans la structure vérifie les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ sont les vecteurs de déplacement électrique et d'induction magnétique, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont les champs électrique et magnétique, $\mathbf{j}$ et ρ sont les densités de courant et de charge, ϵ est la constante diélectrique et μ est la perméabilité magnétique. À ces équations viennent s'ajouter les conditions aux limites appropriées au problème que l'on souhaite traiter. Dans le cadre du modèle discret, nous verrons qu'il est primordial (voir paragraphe 2.1.3) que celles-ci soient du type bord conducteur. De plus, il faut que les conditions aux bords ne dépendent pas du temps. La relation suivante résume ces deux conditions

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \tag{2.2}$$

où $\partial\Omega$ est le contour interne de la structure à onde lente et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de ce contour.

Puisque la structure est périodique, alors une onde monochromatique s'y propageant à froid vérifie la condition de Floquet. Cette condition indique qu'à une fréquence donnée ω , entre deux périodes consécutives de la structure, le champ se déphase d'une quantité constante $\phi = \beta d$, où β est le nombre d'onde. À chaque valeur de ω correspond une valeur de β qui dépend de la géométrie de la structure. La relation entre β et ω est bien souvent non-linéaire. On dit alors que la structure est "dispersive". Le modèle discret de Kuznetsov consiste à utiliser une forme spéciale de transformation de Fourier spatiale prenant en compte le théorème de Floquet afin d'exprimer (2.1) sur une base de fonctions appropriées à notre problème.

2.1 Détermination des équations du modèle

2.1.2 Le théorème de Floquet et la transformation de Kuznetsov

En tout point de l'espace et à tout instant t , on peut décomposer le champ électromagnétique se propageant dans la direction z sur la base de Fourier

$$\mathbf{E}(z, \mathbf{y}, t) = \frac{d}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}_{\beta}(\mathbf{y}, t) e^{-i\beta z} d\beta, \quad (2.3)$$

où z est la position le long de l'axe, $\mathbf{y}$ sont les coordonnées transverses et β est le nombre d'onde correspondant à la composante de Fourier $\hat{\mathbf{E}}_{\beta}$ au temps t . Dans le cas d'une ligne périodique, on peut introduire la notation du champ en harmoniques d'espace

$$\mathbf{E}(z, \mathbf{y}, t) = \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}_{\beta_q}(\mathbf{y}, t) e^{-i\beta_q z} d\beta = \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \mathbf{E}_{\beta}(z, \mathbf{y}, t) d\beta, \quad (2.4)$$

où $\beta_q = \beta + 2\pi q/d$ est la q -ième harmonique d'espace de β . D'après la formule précédente, il est évident que tous les termes $\mathbf{E}_{\beta}$ vérifient la condition de Floquet qui se formule mathématiquement ainsi au temps t et pour tous $\mathbf{y}, z$ et n

$$\mathbf{E}_{\beta}(z + nd, \mathbf{y}, t) = \mathbf{E}_{\beta}(z, \mathbf{y}, t) e^{-in\beta d}. \quad (2.5)$$

D'après (2.5), on constate que la composante β du champ électrique est déphasée n fois de la quantité $\phi = \beta d$ sur n périodes. En combinant les deux équations précédentes, on peut déterminer la transformation suivante proposée par S. P. Kuznetsov

$$\mathbf{E}(z + nd, \mathbf{y}, t) = \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \mathbf{E}_{\beta}(z, \mathbf{y}, t) e^{-in\beta d} d\beta, \quad (2.6)$$

de telle sorte que pour une valeur donnée de z , les termes $\mathbf{E}(z + nd, \mathbf{y}, t)$ sont les coefficients de la série de Fourier discrète classique

$$\mathbf{E}_{\beta}(z, \mathbf{y}, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(z + nd, \mathbf{y}, t) e^{in\beta d}. \quad (2.7)$$

La transformée (2.7) sera d'abord utilisée pour décomposer les équations de Maxwell (2.1) sur la base des modes propres de la structure à froid (β, t) . On simplifiera ces équations dans cette base. Puis, la transformation inverse (2.6) sera utilisée pour écrire les équation simplifiées dans l'espace de départ $(\mathbf{r}, t)$.

2.1.3 Le modèle de Kuznetsov

Dans cette partie, nous détaillons certaines étapes mathématiques nécessaires à l'obtention des équations du champ électromagnétique dans le modèle discret. Un développement très complet de la théorie est présenté par N. M. Ryskin *et al.* dans la référence [30]. En premier lieu, on

peut montrer qu'en appliquant la transformation (2.7) aux équations de Maxwell, la composante de nombre d'onde β du champ électromagnétique vérifie les équations suivantes

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}_\beta(\mathbf{r}, t) &= \rho_\beta(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_\beta(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) &= -\partial_t \mathbf{B}_\beta(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}_\beta(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{D}_\beta(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\tag{2.8}$$

où $\mathbf{E}_\beta$ et $\mathbf{B}_\beta$ sont les champs dans la structure en présence des densités de charge et de courant ρ_β et $\mathbf{j}_\beta$. Les équations ci-dessus sont ensuite décomposées sur les modes propres de la structure en introduisant pour chaque mode s les fonctions propres $\mathbf{E}_{s,\beta}$ et $\mathbf{B}_{s,\beta}$. Ces fonctions correspondent aux solutions de propagations d'une onde électromagnétique dans la structure à froid. En conséquence, elles possèdent les propriétés suivantes :

- Ces fonctions vérifient les équations de Maxwell-Poisson sans terme source et Maxwell-Thomson à froid (elles sont solénoïdales)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}_{s,\beta}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{s,\beta}(\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

- Pour un mode de propagation, à une valeur de β correspond une unique fréquence $\omega_s(\beta)$. Ainsi, par définition, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère à froid fournissent deux propriétés supplémentaires des fonctions propres

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_{s,\beta}(\mathbf{r}) &= -i\omega_s(\beta) \mathbf{B}_{s,\beta}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}_{s,\beta}(\mathbf{r}) &= i\omega_s(\beta) \mathbf{D}_{s,\beta}(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Considérons le problème en présence de faisceau d'électrons, c'est à dire les équations (2.8). Puisque la divergence d'un champ magnétique est toujours nulle, il en découle que les fonctions $\mathbf{B}_{s,\beta}$ constituent une bonne base de fonctions pour exprimer $\mathbf{B}_\beta$. Ce terme est dépendant du temps et de l'espace et, puisque les conditions aux bords ne dépendent pas du temps, on peut écrire ce terme sous la forme du produit d'une amplitude dépendant du temps et d'une fonction dépendant de l'espace. En décomposant $\mathbf{B}_\beta$ sur les modes propres de la structure à onde lente, on peut donc écrire

$$\mathbf{B}_\beta(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=1}^{+\infty} C_{s,\beta}(t) \mathbf{B}_{s,\beta}(\mathbf{r}).\tag{2.11}$$

Une expression analogue à (2.11) pour le terme $\mathbf{E}_\beta$ ne peut pas être obtenue de manière aussi directe, par simple superposition. En effet, en présence d'un faisceau d'électrons, le champ $\mathbf{E}_\beta$ n'est pas une fonction solénoïdale (sa divergence n'est pas nulle). Cependant, on peut supposer que ce champ est la somme d'un terme de divergence nulle, correspondant à l'onde de circuit, et d'un terme de divergence non-nulle correspondant au champ de charge d'espace. Le terme de divergence nulle doit alors s'écrire sous une forme analogue à (2.11) et il faut lui ajouter un

2.1 Détermination des équations du modèle

champ dérivé du potentiel de charge d'espace du faisceau pour obtenir le champ total. On peut donc écrire

$$\mathbf{E}_\beta(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\sum_{s=1}^{+\infty} C_{s,\beta}(t) \mathbf{E}_{s,\beta}(\mathbf{r})}_{\mathbf{E}_{\beta,\text{cir}}} \overbrace{-\nabla \phi_\beta(\mathbf{r}, t)}^{\mathbf{E}_{\beta,\text{sc}}}, \quad (2.12)$$

où ϕ_β est le potentiel de charge d'espace du faisceau. Notons que dans la pratique, le premier terme du membre de droite de la relation (2.12) correspond au champ de circuit $\mathbf{E}_{\beta,\text{cir}}$, alors que le second terme représente le champ de charge d'espace $\mathbf{E}_{\beta,\text{sc}}$.

En introduisant les équations (2.12) et (2.11) dans les équations (2.8) et après quelques manipulations, on obtient une relation sur laquelle il vaut la peine de s'attarder un peu

$$d_t C_{s,\beta}(t) - i\omega_s(\beta) C_{s,\beta}(t) = -\frac{1}{2N_s} \int_{V_0} [\mathbf{j}_\beta(\mathbf{r}, t) - \epsilon \partial_t (\nabla \phi_\beta(\mathbf{r}, t))] \cdot \mathbf{E}_{s,\beta}^*(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.13)$$

Dans cette équation, le facteur de normalisation N_s , correspondant à l'énergie électromagnétique stockée dans une période de la structure, est défini par

$$\int_{V_0} (\mathbf{E}_{s,\beta} \cdot \mathbf{D}_{l,\beta}^* + \mathbf{B}_{s,\beta} \cdot \mathbf{H}_{l,\beta}^*) dV = \begin{cases} 0 & , \text{ si } s \neq l \\ 2N_s & , \text{ si } s = l \end{cases} \quad (2.14)$$

où V_0 est le volume d'une période de la structure. La relation (2.13) décrit l'évolution de l'amplitude du champ électromagnétique de vecteur d'onde β sur le mode s . En introduisant (2.10) dans la partie de l'intégrale de (2.13) contenant le potentiel de charge d'espace, on obtient

$$\int_{V_0} \epsilon \partial_t \nabla \phi_\beta \cdot \mathbf{E}_{s,\beta}^* dV = \frac{i}{\omega_s} \partial_t \int_{V_0} \nabla \phi_\beta \cdot \nabla \times \mathbf{H}_{s,\beta}^* dV. \quad (2.15)$$

Puis, en utilisant successivement l'identité remarquable $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ et le théorème de la divergence, on peut montrer que

$$\int_{V_0} \epsilon \partial_t \nabla \phi_\beta \cdot \mathbf{E}_{s,\beta}^* dV = \frac{i}{\omega_s} \partial_t \int_{\partial\Omega} \nabla \phi_\beta \times \mathbf{H}_{s,\beta}^* \mathbf{n} dS, \quad (2.16)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire orthogonal à l'élément dS de la surface $\partial\Omega$ contenant le volume V_0 . Le membre de droite de l'équation (2.16) est nul. En effet, puisque le bord interne est métallique, le terme $\nabla \phi_\beta \times \mathbf{H}_{s,\beta}^*$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{n}$, impliquant une contribution nulle à l'intégrale sur cette partie du domaine d'intégration. De plus, les fonctions vectorielles $\nabla \phi_\beta$ et $\mathbf{H}_{s,\beta}$ vérifient la condition de Floquet. On prouve alors aisément que la contribution à l'intégrale sur le port d'entrée compense celle sur le port de sortie.

En conséquence, le terme contenant le potentiel de charge d'espace dans l'équation (2.13) est nul, et seul le terme de courant du faisceau d'électrons joue un rôle dans l'intégrale. Après

quelques manipulations, l'équation (2.13) devient

$$d_t C_{s,\beta}(t) - i\omega_s(\beta) C_{s,\beta}(t) = -\frac{1}{2N_s} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{s,\beta}^*(\mathbf{r}) dV, \quad (2.17)$$

où l'intégrale porte alors sur le volume entier de la structure V . Les équations réduites dans l'espace $(\mathbf{r}, t)$ s'obtiennent finalement en appliquant la transformée (2.6) aux équations (2.17), (2.12) et (2.11). Tous calculs faits, on obtient

$$d_t C_{s,n}(t) - i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Omega_{s,m} C_{s,n-m}(t) = -\frac{1}{2N_s} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{s,n}^*(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.18)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{s,n}(t) \mathbf{E}_{s,n}(\mathbf{r}) - \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{s,n}(t) \mathbf{B}_{s,n}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Notons que les termes $C_{s,n}$, $\Omega_{s,n}$, $\mathbf{E}_{s,n}$ et $\mathbf{B}_{s,n}$ sont définis en utilisant la transformée (2.6) comme

$$\begin{aligned} C_{s,n}(t) &= \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} C_{s,\beta}(t) e^{-in\beta d} d\beta \\ \Omega_{s,n} &= \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \omega_s(\beta) e^{-in\beta d} d\beta \\ \mathbf{E}_{s,n}(\mathbf{r}) &= \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \mathbf{E}_{s,\beta}(\mathbf{r}) e^{-in\beta d} d\beta \\ \mathbf{B}_{s,n}(\mathbf{r}) &= \frac{d}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{d}} \mathbf{B}_{s,\beta}(\mathbf{r}) e^{-in\beta d} d\beta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.1.4 Interprétation physique du modèle

Les équations (2.18) et (2.19) constituent le coeur du modèle discret. Nous dédions donc cette partie à leur interprétation physique. Ces équations décrivent l'excitation d'un champ électromagnétique dans une structure infiniment longue dans la direction z et périodique de période d . Nous verrons qu'elles correspondent en pratique à une expression réduite des équations de Maxwell. Les considérations présentées dans cette partie seront qualitatives et nous reportons le lecteur au chapitre 3 pour une analyse plus quantitative sur la précision du modèle.

En tout premier lieu, on remarque que le modèle est composé de deux parties :

- Une équation dynamique ayant les termes $C_{s,n}$ pour inconnue (équation (2.18)).
- Deux équations permettant de recomposer les champs totaux à partir des inconnues $C_{s,n}$ (équations (2.19)).

2.1 Détermination des équations du modèle

Dans l'équation (2.18), la notation $C_{s,n}$ équivaut à $C_s(z = nd, t)$. On voit dans cette équation que, pour le mode propre s , ce terme est couplé à ses voisins $C_{s,n-m} = C_s((n-m)d, t)$. Puisque $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, ces voisins sont distants d'un multiple entier de la période. Ainsi, l'équation (2.18) réduit la dynamique du champ électromagnétique dans toute la structure à la dynamique d'une seule amplitude $C_{s,n}$ par mode et par période de la structure. La force du couplage entre les différentes amplitudes est donnée par les coefficients $\Omega_{s,m}$ qui, d'après (2.20), sont les coefficients de Fourier de la courbe de dispersion du mode s que l'on considère.

L'équation (2.18) met en lumière le couplage de l'onde avec le faisceau d'électrons. Dans l'intégrale, le terme $\mathbf{E}_{s,n}$ correspond à la forme du champ électrique associée à la période n de la structure. En prenant le produit scalaire de cette forme de champ par la densité de courant du faisceau et en intégrant sur le volume total de la structure, on obtient un terme ayant la dimension d'une puissance. Le membre de droite de l'équation (2.18) correspond donc à la puissance déposée par le faisceau d'électrons sur le s -ième mode de la n -ième période de la structure à onde lente. En résumé, dans le modèle discret, un mode de propagation à chaud est vu comme une série d'amplitudes (cellules) couplées entre elles par les coefficients de Fourier de la courbe de dispersion du mode à froid. Ces cellules interagissent avec le faisceau d'électrons.

À chaque instant, le champ électromagnétique total dans toute la structure de propagation est recomposé grâce aux équations (2.19). On voit dans ces dernières que, pour obtenir une solution exacte, il est nécessaire de sommer les amplitudes sur un nombre infini de modes de propagation. Néanmoins, on comprend intuitivement que la prise en compte de certains modes seulement sera nécessaire afin de traiter avec une précision suffisante le couplage de l'onde de circuit avec le faisceau.

Pour un mode s donné, les deux relations (2.18) et (2.19) font intervenir des sommes sur les cellules ; elles mettent en lumière le couplage des cellules les unes avec les autres. Étant donné que ces sommes possèdent un nombre infini de termes, le couplage d'une période avec ses voisines s'étend théoriquement sur une longueur infinie. Dans la pratique, ceci est évidemment impossible. La somme dans l'équation (2.18) sera tronquée. On peut se faire une idée de la vitesse de convergence de la méthode en terme de caractéristiques dispersives par rapport à un mode de propagation donné. Supposons qu'une onde directe de fréquence ω_s et de déphasage par période $\phi = \beta d$ se propage sur un mode s de la structure. En l'absence de faisceau d'électrons, les amplitudes $C_{s,n}$ solutions de (2.18) pourront s'écrire sous la forme

$$C_{s,n}(t) = C_{\text{in}} e^{i\omega_s t} e^{-in\phi}, \quad (2.21)$$

où C_{in} est l'amplitude normalisée du champ électromagnétique de l'onde se propageant dans la structure à onde lente. En introduisant cette expression dans (2.18) et en y annulant le terme source, on obtient

$$\omega_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Omega_{s,m} e^{im\phi}, \quad (2.22)$$

soit la série de Fourier ayant pour coefficients les termes de couplage $\Omega_{s,m}$. Ainsi, limiter l'étendue du couplage entre cellules dans le modèle aura pour effet d'engendrer une erreur qui diminuera à la même vitesse que convergera la transformée de Fourier de la courbe de dispersion du mode s . Dans le chapitre 3, nous verrons que, pour le problème auquel nous nous intéressons, cette convergence est rapide. En conséquence, un petit nombre de coefficients $\Omega_{s,m}$ seront nécessaires pour obtenir une précision suffisante.

2.2 Synthèse des travaux de Ryskin *et al.*

À notre connaissance, bien que cette théorie fût développée par S. P. Kuznetsov au début des années 80 [26], elle ne fut exploitée dans un cas proche de la réalité par N. M. Ryskin *et al.* que plus de vingt ans plus tard (voir [30], [31] et [32]). Dans cette partie, nous présenterons les améliorations théoriques et pratiques apportées par Ryskin *et al.* au modèle de S. P. Kuznetsov. L'orientation de ces travaux porte sur :

- Le développement d'un modèle d'interaction en régime petit signal.
- La détermination de conditions aux extrémités permettant de traiter le cas d'une ligne de longueur finie.
- L'application du modèle discret à un cas approché de tube à cavités couplées en une dimension et l'étude des possibilités offertes par celui-ci pour étudier des phénomènes non-stationnaires.

2.2.1 Relation de dispersion en régime petit signal à une dimension

Dans la théorie de Pierce on détermine la relation de dispersion en régime petit signal du TOP à chaud en couplant une ligne modélisée par un schéma équivalent avec un faisceau d'électrons fluide linéarisé. On peut similairement obtenir la relation de dispersion du TOP en régime petit signal dans le modèle discret. Il faut pour cela coupler l'équation (2.18) avec les équations fluides linéarisées. Cette partie rappelle les hypothèses et résultats principaux de ce modèle.

Dans le cas d'un modèle à une dimension, l'équation (2.18) décrivant la dynamique de l'onde de circuit devient

$$d_t C_{s,n}(t) - i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Omega_{s,m} C_{s,n}(t) = -\frac{1}{2N_s} \int_L I_{\text{hf}}(z, t) \cdot E_{s,n}^*(z) dz, \quad (2.23)$$

où L est la longueur de la structure à onde lente, I_{hf} la partie non-stationnaire du courant du faisceau et $E_{s,n}$ est la composante longitudinale du champ propre. La dynamique du faisceau est décrite par les équations fluides qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_z I &= 0 \\ \partial_t v + v \partial_z v &= \eta (E_{\text{sc}} + E_{\text{cir}}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2 Synthèse des travaux de Ryskin *et al.*

où η est le rapport charge sur masse d'un électron, ρ est la densité linéique de charge du faisceau d'électrons, v sa vitesse fluide longitudinale et $I = \rho v$ son courant à l'instant t et à la position z . Par souci de généralité, on suppose que la dynamique du faisceau est soumise à la fois au champ électrique de l'onde de circuit E_{cir} et au champ électrique de charge d'espace E_{sc} . Ce dernier vérifie l'équation de Maxwell-Poisson

$$\partial_z E_{\text{sc}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.25)$$

En linéarisant les équations fluides et l'équation de Poisson, puis en supposant que les grandeurs physiques du problème varient en temps et en espace de façon harmonique, c'est-à-dire comme $e^{i\omega t - \beta z}$, on détermine les équations petit signal du faisceau

$$\begin{aligned} \omega \rho_1 - \beta I_{\text{hf}} &= 0 \\ \omega v_1 - \beta v_0 v_1 &= -i\eta (E_{\text{sc}} + E_{\text{cir}}) \\ E_{\text{sc}} &= i \frac{\rho_1}{\beta \epsilon_0} \\ I_{\text{hf}} &= \rho_0 v_1 + \rho_1 v_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

En combinant ces équations, on obtient facilement une relation entre la partie alternative du courant du faisceau d'électrons et le champ électrique de l'onde de circuit

$$\left[(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2 \right] I_{\text{hf}} = -i \frac{\omega v_0 I_0}{2V_0} E_{\text{cir}}, \quad (2.27)$$

où v_0 est la vitesse moyenne du faisceau d'électrons en entrée de ligne, $\omega_p = \sqrt{\eta \rho_0 / \epsilon_0}$ la fréquence plasma du faisceau, I_0 le courant statique du faisceau et V_0 sa tension d'accélération. En effectuant une série de manipulations sur l'équation (2.23) et en ne prenant en compte que la première harmonique d'espace du champ de circuit, on peut déterminer une deuxième relation couplant I_{hf} et E_{cir} pour le mode s

$$(\omega - \omega_s) E_{\text{cir}} = i Z_c \beta^2 v_g I_{\text{hf}}, \quad (2.28)$$

où, pour une valeur donnée du nombre d'onde β , ω_s est la fréquence de l'onde dans la structure à froid, Z_c est l'impédance de couplage définie ci-dessous, et $v_g = \partial_\beta \omega$ la vitesse de groupe à froid. Dans l'équation (2.28), l'impédance de couplage Z_c est définie par la formule

$$Z_c(\beta) = \frac{|\hat{E}_{s,\beta}|^2}{2\beta^2 N_s} \frac{d}{v_g}. \quad (2.29)$$

En combinant les équations (2.27) et (2.28), on simplifie E_{cir} et I_{hf} et on obtient la relation de dispersion du modèle discret en régime petit signal

$$\left[(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2 \right] (\omega - \omega_s) = 2\beta^2 \omega C^3 v_0 v_g, \quad (2.30)$$

où $C = Z_c I_0 / 4V_0$ est le paramètre de Pierce.

En premier lieu, on peut remarquer que l'équation (2.30) ressemble fortement à la relation de dispersion de Pierce

$$\left[(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2 \right] (\omega^2 - v_\phi^2 \beta^2) = 2\beta^2 \omega^2 C^3 v_0 v_\phi,$$

où v_ϕ est la vitesse de phase de l'onde se propageant dans la structure à froid. Cependant, l'équation de Pierce est un polynôme du quatrième ordre en ω et en β , alors que l'équation du modèle discret est un polynôme d'ordre 3 en ω et n'est pas un polynôme en β . En effet, en introduisant (2.22) dans (2.30), on obtient

$$\left[(\omega - \beta v_0)^2 - \omega_p^2 \right] \left(\omega - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Omega_{s,m} e^{im\beta d} \right) = 2\beta^2 \omega C^3 v_0 v_g. \quad (2.31)$$

Ainsi, en utilisant la relation de Pierce, il est commode de travailler à fréquence réelle fixée pour calculer quatre racines complexes $\beta_{i=1,2,3,4}$, dont la partie imaginaire nous donne le taux de croissance de l'onde de circuit par unité de longueur, nous permettant ainsi de déterminer le gain d'un tube sur l'axe en régime petit signal. Ces racines peuvent être déterminées analytiquement.

Une telle opération dans l'équation (2.31) est rendue bien plus difficile par la présence de la somme dans le terme entre parenthèses. Il semble alors plus naturel de travailler à une valeur fixe de β réel dans l'équation (2.30). Cette méthode a pour avantage de nécessiter la résolution d'un polynôme d'ordre 3, ce qui peut se faire analytiquement. À l'issue du calcul, on trouvera alors trois racines complexes $\omega_{i=1,2,3}$ dont la partie imaginaire nous donnera le taux de croissance de l'onde par unité de temps et non plus par unité de longueur. Cependant, en supposant que le taux de croissance spatial de l'onde est faible devant la longueur d'onde, *i.e.* $\Im m \{\beta\} / \Re e \{\beta\} \ll 1$, on peut utiliser la relation bien connue [33]

$$\Im m \{\omega\} \approx -\Im m \{\beta\} v_g \quad (2.32)$$

pour déterminer le gain de chacune des trois ondes sur l'axe.

L'interaction est donc vue de manière différente par le modèle de Pierce que par le modèle que nous décrivons dans cette partie. Sur les figures 2.1 et 2.2, nous avons représenté (qualitativement) la courbe de dispersion du premier mode d'une structure à onde lente hélicoïdale en rouge et les deux ondes de faisceau en bleu marine. Comme nous l'avons expliqué dans la partie d'introduction, dans le modèle de Pierce (figure 2.1), on travaille à une fréquence donnée pour déterminer quatre nombres d'onde complexes. On trouve alors que quatre ondes sont présentes dans le tube lors de l'interaction; trois ondes directes $\omega/\beta > 0$ et une onde inverse $\omega/\beta < 0$. Dans le modèle de Ryskin (figure 2.2), on travaille à une valeur de β et on détermine trois valeurs complexes de ω . On trouve ainsi que trois ondes sont présentes dans le tube et on remarque que toutes vont dans la même direction. L'onde inverse est absente de ce modèle en domaine β .

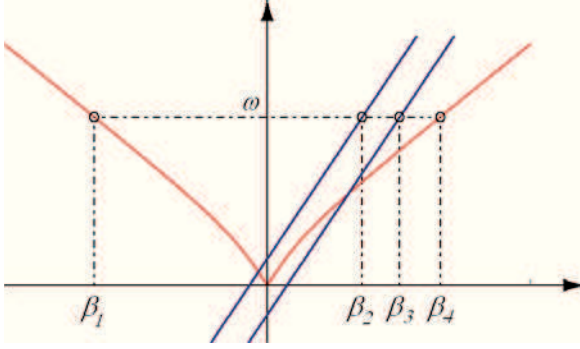


FIGURE 2.1 – Modèle de Pierce, on détermine quatre solutions $\beta_{i=1,2,3,4} \in \mathbb{C}$ en travaillant à une valeur de fréquence $\omega \in \mathbb{R}$.

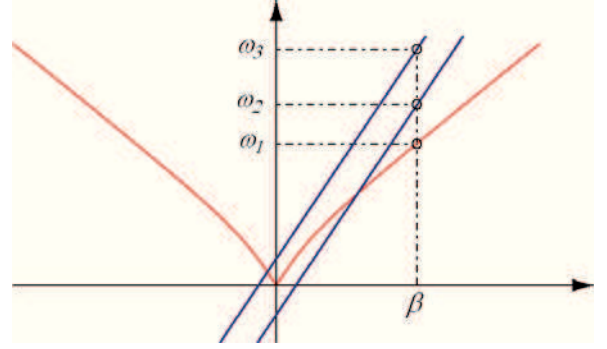


FIGURE 2.2 – Modèle de Ryskin, on détermine trois solutions $\omega_{i=1,2,3} \in \mathbb{C}$ en travaillant à une valeur de nombre d'onde $\beta \in \mathbb{R}$.

Nous nous proposons à présent d'étudier le comportement du modèle de Ryskin par rapport au comportement petit signal d'un tube réel. Nous avons développé un code test en langage C, dont le but est de résoudre l'équation (2.30) pour une valeur donnée de β en prenant les paramètres de faisceau (I_0, V_0) ainsi que de ligne (Z_c, v_g) comme données d'entrée. Plusieurs scripts écrits en Python permettent d'automatiser l'exécution de ce code afin de paramétrer son exécution sur les grandeurs physiques d'entrée.

Sur la figure 2.3, les courbes rouge, verte et bleue représentent la relation de dispersion du TOP. On a représenté en noir les courbes de dispersion de chaque système, faisceau et onde de circuit, lorsqu'ils ne sont pas couplés. Comme attendu, on voit que seule l'onde lente de charge d'espace se couple avec l'onde de circuit sur une certaine bande de fréquence. Sur cette bande de fréquence, deux des trois fréquences solutions de (2.30) sont complexes. Ces deux fréquences ont la même partie réelle mais ont des parties imaginaires opposées. La fréquence purement réelle correspond à l'onde rapide de charge d'espace lorsque l'on considère les systèmes découplés. Sur cette figure, l'amplification peut avoir lieu sur une large bande de fréquences (de 10 à 20 GHz) ce qui est une des caractéristiques du tube à hélice.

Après avoir obtenu la valeur complexe des fréquences correspondant au nombre d'onde de travail, on peut estimer la valeur de la partie imaginaire de β en utilisant la relation (2.32). On peut donc estimer le gain du tube sur une certaine bande de fréquence pour des paramètres de faisceaux fixés, et étudier l'effet d'une variation d'un de ces paramètres. Sur la figure 2.4, nous avons représenté le gain d'un tube pour plusieurs valeurs de la tension du faisceau obtenu par le modèle en domaine β . On constate qu'en diminuant la tension du faisceau (sa vitesse moyenne), le gain du tube se déplace vers les plus hautes fréquences. Ceci est cohérent avec la figure 2.3. En effet, en diminuant la vitesse du faisceau, on diminue la pente de la droite du mode lent de charge d'espace. Ainsi, si l'on considère les systèmes découplés, cette droite intercepte la courbe de dispersion du mode d'hélice à une fréquence d'autant plus grande que la pente de cette droite est faible. De plus, on peut voir que le gain est d'autant plus fort qu'il se déplace vers les basses fréquences (les petits nombres d'ondes dans le cas présent), ce qui est cohérent avec le fait que

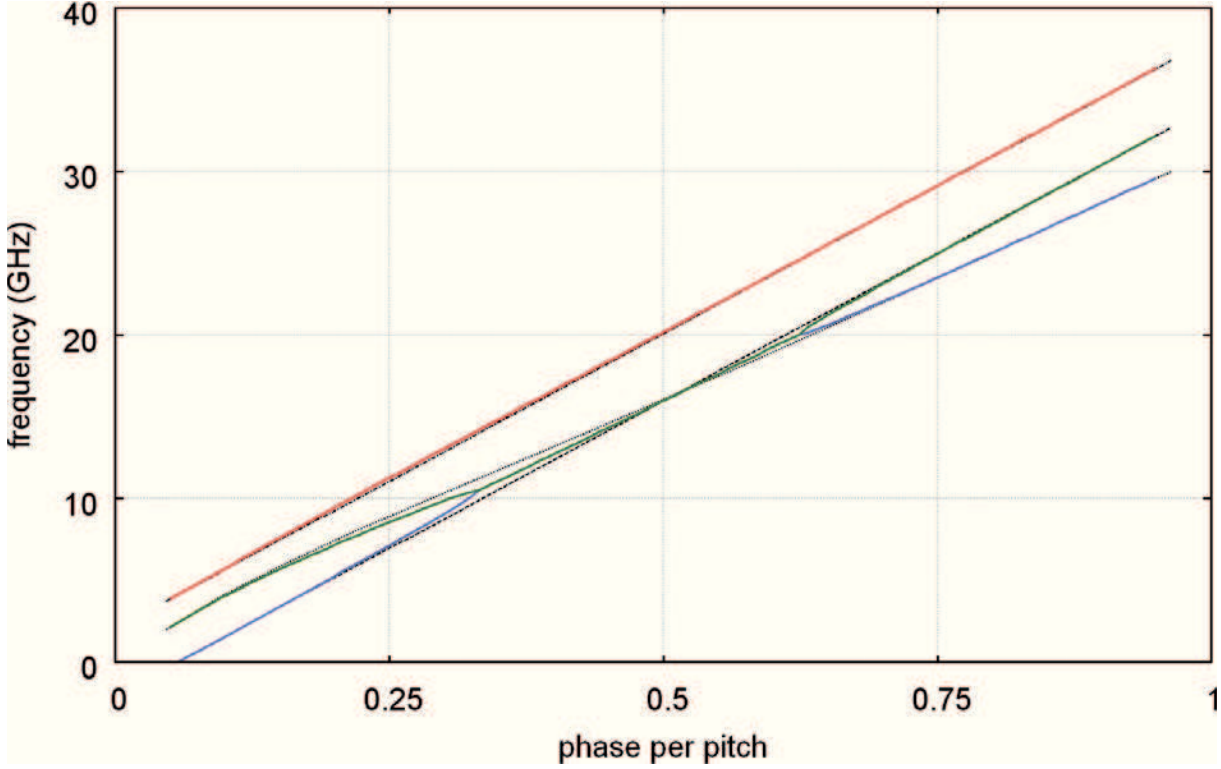


FIGURE 2.3 – Courbe de dispersion d’un tube à hélice obtenue avec le modèle de Ryskin. On a représenté en couleur les modes rapide et lent de charge d’espace (rouge et bleu) ainsi que le premier mode de propagation d’une hélice (vert). Les courbes en noir sont les courbes de dispersion des systèmes découplés $\omega = \beta v_0 + \omega_p$ (traits et pointillés, onde rapide), $\omega = \beta v_0 - \omega_p$ (traits, onde lente) et $\omega = \omega_s$ (pointillés, onde de circuit).

l’impédance de couplage de la ligne augmente habituellement lorsque β diminue. C’est le cas pour le mode que nous considérons ici.

La figure 2.5 représente le gain en fonction de la fréquence de fonctionnement sur une partie de la bande du premier mode du même tube pour différentes valeurs du courant du faisceau. Lorsque le courant augmente, le gain se déplace vers les plus hautes fréquences. Ceci s’explique par l’augmentation de la fréquence plasma qui déplace la droite du mode lent de charge d’espace vers de plus basses fréquences. De plus, on remarque que plus le courant augmente, plus le gain du tube est grand. En effet, en augmentant le courant à vitesse de faisceau constante, le nombre d’électrons cédant leur énergie à l’onde augmente. Finalement, plus le courant augmente, plus la bande d’amplification est large, ce qui correspond bien au comportement naturel d’un tube [34].

2.2.2 Application du modèle discret à un TOP à cavités couplées

Un obstacle à l’application du modèle discret dans sa version décrite par les équations (2.18) et (2.19) est dû au fait que la somme dans (2.18) comporte un nombre infini de termes. Dans un cas pratique numérique, cette somme doit être tronquée car le nombre de périodes N dans un TOP est fini, et aussi en raison des capacités de stockage mémoire limitées des ordinateurs.

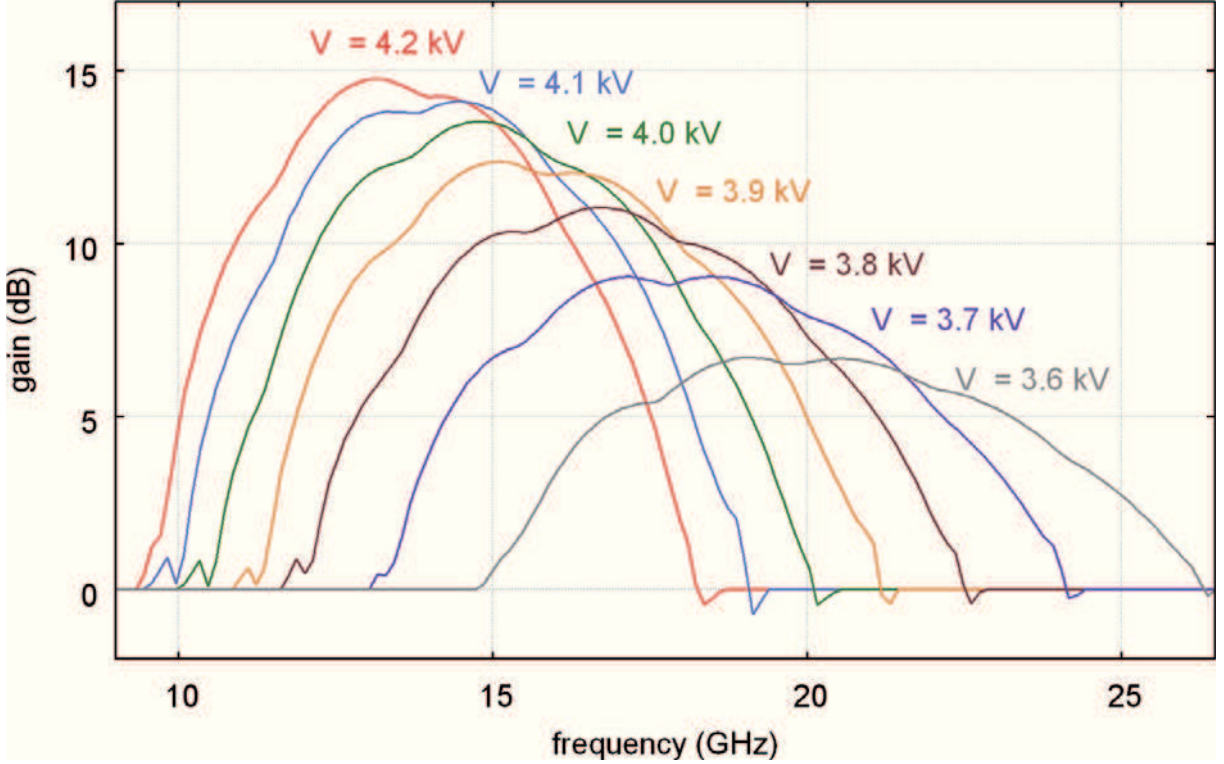


FIGURE 2.4 – Courbes de gain d'un TOP à hélice sur la bande passante du premier mode pour différentes valeurs de tension d'accélération du faisceau.

Il en résulte en général que l'approximation d'un système de référence sera d'autant plus précise que le nombre de termes pris en compte dans la somme est grand. En première approximation, Ryskin *et al.* ont limité ce nombre à deux coefficients $\Omega_{s,m}$ non nuls, ce qui revient à traiter le cas d'un tube fictif dont la courbe de dispersion vérifie l'équation

$$\omega(\phi) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\phi), \text{ avec } \Omega_0 = \omega_0 \text{ et } \Omega_1 = \frac{\Delta\omega}{2}. \quad (2.33)$$

Dans ce cas, l'équation (2.18) s'écrit alors

$$d_t C_n - i\omega_0 C_n - i\frac{\Delta\omega}{2} (C_{n-1} + C_{n+1}) = -\frac{1}{2N_s} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{s,n}^*(\mathbf{r}) d^3r, \quad (2.34)$$

où l'indice $s = 1$ a été rendu muet par souci de clarté.

En supposant que la ligne contient N périodes, il faut calculer la dynamique des amplitudes $C_1, \dots, C_N$ grâce aux équations (2.34) qui leur sont associées. Or, l'équation (2.34) régissant la dynamique de l'amplitude C_1 fait intervenir l'amplitude C_0 qui n'est pas censée exister dans la réalité. Néanmoins, puisqu'on ne peut pas introduire de puissance HF dans le modèle discret par les conditions aux bords, ce couplage constitue le seul moyen d'exciter la cellule C_1 par l'extérieur si l'on pose des conditions aux extrémités appropriées. Un couplage de nature similaire entre les cellules C_N et C_{N+1} peut être mis en lumière en écrivant l'équation (2.34) régissant la dynamique de la cellule C_N . Ce couplage constitue le seul moyen d'évacuer la puissance HF contenue dans

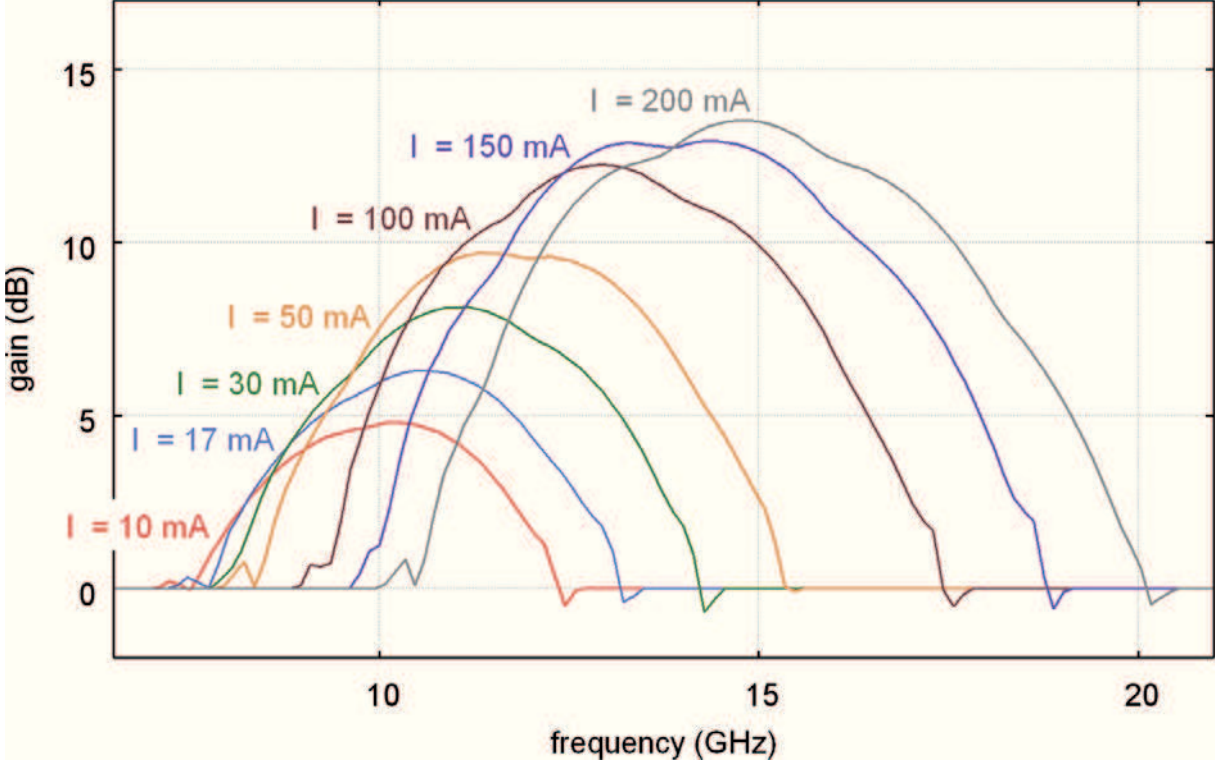


FIGURE 2.5 – Courbes de gain d'un TOP à hélice sur la bande passante du premier mode pour différentes valeurs de courant du faisceau.

la structure à onde lente. Ainsi, on peut voir le système total comme une ligne de longueur finie (cellules C_1 à C_N) connectée à ses extrémités à deux guides d'entrée et sortie de longueur semi-infinie. Seules les cellules C_1 à C_N interagissent avec le faisceau (voir figure 2.6). Afin de prendre en compte certains phénomènes de réflexions en entrée et sortie de ligne, N. M. Ryskin *et al.* imposent, dans leur modèle, que les guides d'entrée et de sortie aient des caractéristiques dispersives différentes de celles de la structure à onde lente. Ils écrivent la relation de dispersion de ces guides

$$\omega(\psi) = \omega_0 + \Delta\Omega \cos(\psi) , \text{ avec } \Delta\Omega > \Delta\omega . \quad (2.35)$$

Ainsi, la dynamique des amplitudes des cellules $C_{n<1}$ et $C_{n>N}$ suit la relation.

$$d_t C_n - i\omega_0 C_n - i\frac{\Delta\Omega}{2} (C_{n-1} + C_{n+1}) = 0 , \quad (2.36)$$

On peut ainsi déterminer des conditions aux bords bien posées pour le cas où le tube fonctionne à une fréquence donnée ω . En effet, dans les guides d'entrée/sortie, en l'absence de faisceau d'électrons, la solution de l'équation (2.36) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} C_n &= \left(C_{\text{in}} e^{-in\psi} + C_{\text{ref}} e^{in\psi} \right) e^{i\omega t} , \text{ pour } n < 1 \\ C_n &= C_{\text{out}} e^{-in\psi} e^{i\omega t} , \text{ pour } n > N , \end{aligned} \quad (2.37)$$

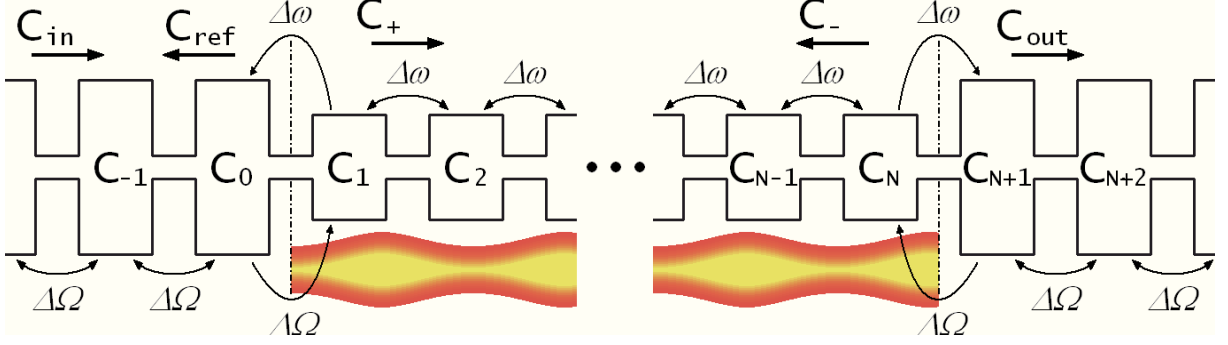


FIGURE 2.6 – Schéma du système étudié par N. M. Ryskin *et al.* Un mode de propagation de la structure à onde lente (cellules $C_{n \in [1, N]}$) est couplé avec un faisceau d'électrons. Cette structure à onde lente est connectée en entrée et sortie à des guides d'onde ayant des caractéristiques dispersives différentes. Chacune des cellules est couplée à sa première plus proche voisine à gauche et à droite.

où C_{in} et C_{ref} sont les amplitudes des ondes directe et inverse dans le guide d'onde d'entrée et C_{out} l'amplitude de l'onde directe dans le guide de sortie (voir figure 2.6). En pratique, C_{in} est une donnée du problème que l'on peut déduire de la puissance de l'onde que l'on souhaite introduire dans le guide d'entrée

$$P_{\text{in}} = N_s \frac{v_g}{d} \frac{|C_{\text{in}}|^2}{2}. \quad (2.38)$$

En introduisant les expressions (2.37) dans (2.34) et (2.36) pour $n = 0, 1, N$ et $N+1$, on détermine quatre équations servant de fermeture au système

$$\begin{aligned} d_t C_{\text{ref}} + i \frac{\Delta \Omega}{2} (e^{i\psi} C_{\text{ref}} - e^{-i\omega t} C_1) &= -i \frac{\Delta \Omega}{2} e^{-i\psi} C_{\text{in}} \\ (d_t - i\omega_0) C_1 - i \frac{\Delta \omega}{2} (e^{i\omega t} C_{\text{ref}} + C_2) &= i \frac{\Delta \omega}{2} e^{-i\omega t} C_{\text{in}} + P_1 \\ (d_t - i\omega_0) C_N - i \frac{\Delta \omega}{2} (C_{N-1} + e^{-i(N+1)\psi} e^{i\omega t} C_{\text{out}}) &= P_N \\ d_t C_{\text{out}} + i \frac{\Delta \Omega}{2} (e^{i\psi} C_{\text{out}} - e^{i(N+1)\psi} e^{-i\omega t} C_N) &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

où

$$P_n = -\frac{1}{2N_s} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_n^* d^3 r.$$

La dynamique des cellules $C_{n \in [2, N-1]}$ est donnée par la relation (2.34) puisque celles-ci ne sont pas couplées au guide d'entrée ou de sortie. Finalement, le système décrivant la dynamique des amplitude dans toutes les périodes de la structure à onde lente s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$d_t \mathbf{C}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{C}(t) = \mathbf{P}(t), \quad (2.40)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice tri-diagonale de dimension $N+2$, $\mathbf{C}$ est le vecteur contenant les amplitudes ($C_{\text{ref}}, C_1 \dots C_N, C_{\text{out}}$) et $\mathbf{P}$ contient la puissance de l'onde introduite dans la ligne ainsi que celle introduite par le faisceau.

Dans la référence [32], Ryskin *et al.* présentent des résultats obtenus grâce à un code de simulation basé sur le modèle que nous venons de détailler. Dans le code, le faisceau est modélisé par une méthode "particle in cell" ce qui permet de prendre en compte le comportement non-linéaire du tube. Il y est démontré que, dans sa version non-stationnaire, le modèle discret respecte les comportements linéaire et non-linéaire (compression de gain) d'un système proche d'un TOP à cavités couplées. De plus, il est démontré que le modèle discret permet d'étudier certains phénomènes non-stationnaires ainsi que de déterminer les caractéristiques courant-tension d'une oscillation auto induite. En conséquence, ces études précédant la thèse donnaient bon espoir que le modèle discret pourrait s'appliquer dans le cas d'un TOP à hélice.

2.3 Avantages et inconvénients du modèle discret

Le premier intérêt du modèle discret par rapport aux modèles généraux utilisés dans certains codes commerciaux est qu'il s'agit d'un modèle réduit. Il utilise une décomposition modale sur la structure à froid pour exprimer le problème sous une forme simplifiée. Le nombre de degrés de liberté du système couplé est alors réduit mais les cas d'application de ce modèle deviennent limités (périodicité) par rapport aux possibilités données par un modèle général.

Mieux que les modèles fondés sur une représentation de l'onde de circuit par des circuits équivalents, le modèle discret permet une description exacte des caractéristiques dispersives des modes de propagation à froid sur toute la bande. En effet, il suffit pour ce faire d'augmenter le nombre de coefficients $\Omega_{s,m}$ pris en compte dans la somme de l'équation (2.18), c'est-à-dire d'augmenter la portée du couplage entre une cellule et ses voisines. De plus, d'après l'équation (2.19), il est facile de prendre en compte plusieurs modes de propagation, puisqu'il suffit d'ajouter autant de termes que nécessaire dans la somme sur l'indice s .

Le modèle discret donne la possibilité de décrire les aspects tridimensionnels du tube. En effet, le champ électromagnétique total dans la structure est déterminé par l'équation (2.19) qui nécessite la connaissance des formes de champ $\mathbf{E}_{s,n}$ et $\mathbf{B}_{s,n}$. Ces formes de champ sont définies par les transformées données par l'équation (2.20) et nécessitent, pour un mode donné, de connaître les solutions de propagation à froid pour différentes valeurs de β , $\mathbf{E}_{s,\beta}$ et $\mathbf{B}_{s,\beta}$. Celles-ci peuvent être obtenues soit par des modèles analytiques, soit par des mesures expérimentales, soit par des résultats de codes de simulation 3D. Dans le dernier cas, le champ calculé prend en compte les propriétés des matériaux. En conséquence, la forme de champ nécessaire dans le modèle discret peut inclure toutes ces propriétés.

Finalement, on voit, d'après le membre de droite de l'équation (2.18), que seul le volume du tube contenant des électrons jouera un rôle dans les échanges d'énergie et d'impulsion entre le

2.3 Avantages et inconvénients du modèle discret

faisceau et l'onde de circuit (si $\mathbf{j} = 0$, la contribution est nulle). La connaissance du champ propre dans ce volume est, elle aussi, nécessaire. Bien que dépendant des conditions sur le bord interne du tube (fourreau), seule sa valeur dans le volume contenant le faisceau nous intéresse. Puisque ce champ propre ne variera pas au cours du temps, il suffit de la calculer une fois pour toutes et de ne conserver que la partie qui nous intéresse. En d'autres termes, lorsque l'on utilise le modèle discret, il est inutile de simuler tout le tube. Seul le volume interne à l'hélice nous intéresse.

Un modèle réduit n'est par définition utilisable que pour une certaine gamme de problèmes, dépendant des hypothèses posées à l'origine. Concernant le modèle discret, une de ces hypothèses est celle de la périodicité de la structure à onde lente dans la direction z . En conséquence, dans sa forme initiale, le modèle discret ne sera valable que pour les TOPs possédant un tel type de structure. Ceci pose un problème si l'on souhaite simuler un TOP possédant un "taper" de sortie (changement de période dans la section de sortie), ce qui est très souvent le cas. De plus, cette hypothèse rendra difficile la prise en compte précise des réflexions d'onde dues à un changement de géométrie, comme c'est le cas en entrée ou en sortie de ligne.

Modèle numérique à une dimension



Sommaire

3.1	Hypothèses de travail	36
3.2	Modèle de faisceau à une dimension	37
3.2.1	Principes de la méthode "Particle in Cell" en coordonnées cylindriques .	37
3.2.2	Intégration des équations du mouvement des électrons	38
3.2.3	Injection du faisceau	39
3.3	Modèle de ligne à une dimension	40
3.3.1	Précision du modèle	40
3.3.2	Obtention du champ propre	43
3.3.3	Conditions aux bords	44
3.3.4	Intégration de la dynamique de l'onde de circuit	45
3.4	Le code HeLL-1D	47
3.4.1	Organisation du code	47
3.4.2	Fonctionnement usuel d'un TOP	48
3.4.3	Oscillations	50
3.5	Discussion	53

Ce chapitre est consacré à l'application du modèle discret au cas du TOP à hélice. Nous présentons un modèle à une dimension ainsi que le code de simulation que nous avons développé. Dans ce modèle, la courbe de dispersion de la structure à onde lente de référence est issue d'un calcul tridimensionnel. Elle correspond donc mieux à un TOP réel que dans [32]. Ceci constitue une avancée importante vers la simulation pratique des TOP avec le modèle discret. Dans une première section de ce chapitre, nous détaillons nos hypothèses. Dans la seconde section, nous décrivons le modèle de faisceau d'électrons utilisé. Dans la troisième section, nous expliquons comment l'équation d'évolution de l'onde de circuit peut être intégrée au cours du temps, et nous expliquons comment nous obtenons la forme du champ électrique. Le code `HelL-1D` ainsi que des résultats numériques obtenus avec celui-ci sont présentés dans la quatrième partie. Nous concluons sur cette étude dans la cinquième section.

3.1 Hypothèses de travail

Dans l'absolu, les aspects tridimensionnels de la géométrie ont une influence sur les performances d'un TOP. En première approximation, il est cependant raisonnable de négliger les variations des grandeurs physiques (champ électrique, densité de courant du faisceau etc.) dans les directions transverses à la direction de propagation. C'est cette même approximation que nous avons faite dans le modèle petit signal à une dimension présenté au chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous détaillons un modèle grand signal de TOP en domaine temporel.

Dans ce modèle, le faisceau d'électrons est vu comme une assemblée de disques uniformément chargés, ayant un rayon égal au rayon moyen du faisceau, b . Ces disques sont repérés par leur position et leur vitesse le long de l'axe du TOP. Les forces de répulsion entre électrons sont prises en compte par une méthode analytique qui nécessite de connaître la densité de charge du faisceau. Celle-ci est estimée grâce à une interpolation analogue à celle effectuée dans un code "particle in cell". La ligne à retard est quant à elle représentée par le modèle discret. Par souci de simplicité, on suppose que seul le mode fondamental de l'hélice joue un rôle dans l'interaction. Nous négligeons par ailleurs le champ magnétique de l'onde de charge d'espace.

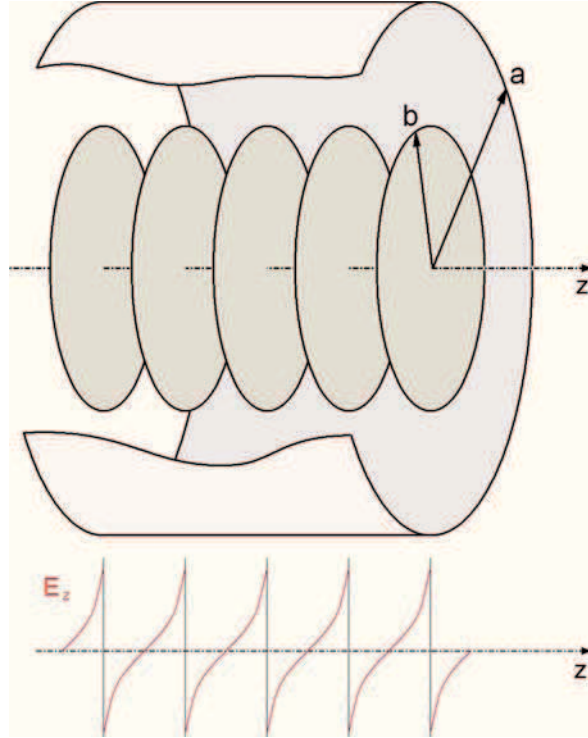


FIGURE 3.1 – Schéma du modèle de faisceau à une dimension. Les particules sont vues comme des disques chargés. Le faisceau transite dans un cylindre métallique engendrant ainsi un champ de charge d'espace sur l'axe du système.

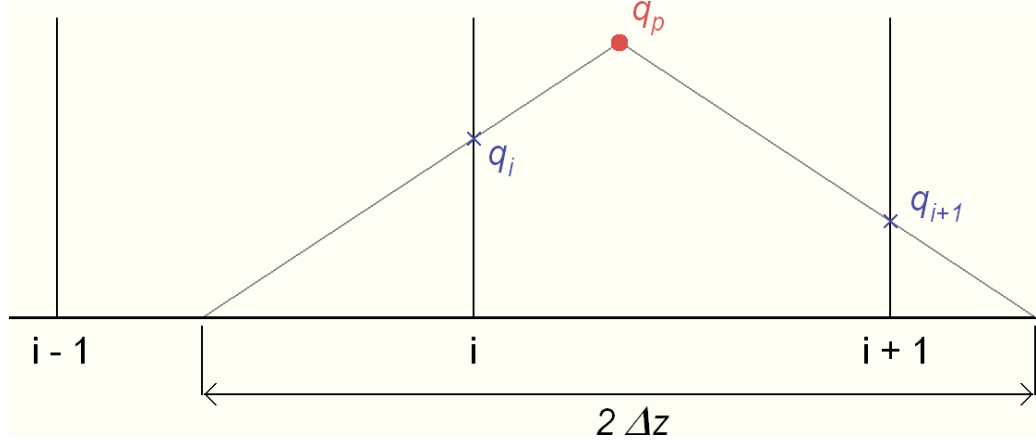


FIGURE 3.2 – Interpolation d’une charge sur les noeuds du maillage dans la méthode Particle in Cell.

Finalement, le champ électrique propre le long du rayon du faisceau est approximé par sa valeur sur l’axe du TOP.

3.2 Modèle de faisceau à une dimension

Dans notre modèle à une dimension, le faisceau est vu comme un flux cylindrique d’électrons se propageant sur l’axe d’une hélice assimilée à un cylindre métallique de rayon $a > b$. Nous souhaitons que notre modèle décrive les aspects non-linéaires du TOP. Il faut donc que le modèle décrivant le faisceau soit non-linéaire. Les deux approches non-linéaires de faisceau les plus connues, pouvant être employées en un temps raisonnable en une dimension, sont l’approche Vlasov dont nous ne parlerons pas ici, et l’approche particulaire, communément utilisée dans la communauté des tubistes. Parmi les modèles utilisant cette seconde approche, la méthode "Particle in Cell" (PIC) [35], [36] est de loin la plus employée (voir table 4.1). Dans ce chapitre nous détaillons comment cette méthode peut être utilisée pour simuler le faisceau d’électrons d’un TOP en une dimension.

3.2.1 Principes de la méthode "Particle in Cell" en coordonnées cylindriques

Dans une coupe transverse du faisceau, on suppose que les densités de charge et de courant de celui-ci sont constantes le long du rayon du faisceau. Il n’est donc pas important de simuler tous les électrons du faisceau puisqu’on considère que leurs trajectoires sont rectilignes. On peut donc se représenter une tranche de faisceau comme une macro-particule ayant une forme de disque (voir figure 3.1). Chaque macro-particule possède une charge dépendant des paramètres macroscopiques statiques du faisceau.

Dans la méthode "particle in cell" à une dimension, le domaine de calcul est un segment de droite que l’on découpe en *mailles*, aux extrémités (noeuds) desquelles on calcule les quantités

qui nous intéressent. On cherche tout d'abord à estimer la densité de charge sur les noeuds du maillage à partir d'une distribution de macro-particules. Afin d'estimer la densité de charge du faisceau $\rho(z, t)$, on suppose que la charge de chaque macro-particule s'étale avec une forme particulière le long de l'axe. Alors qu'en mécanique classique on considère que la charge associée à une particule est une fonction de Dirac de l'espace, dans la méthode PIC, la fonction de Dirac est ainsi remplacée par une fonction de forme. À un instant donné, on peut écrire que

$$\rho(z, t) = \frac{1}{V_m} \sum_p q_p S(z - z_p) \quad (3.1)$$

où q_p est la charge totale de la macro-particule, z_p est sa position à l'instant t , S est une fonction de forme et $V_m = \pi b^2 \Delta z$ est le volume d'une tranche de faisceau de largeur Δz et de rayon b . Dans notre modèle à une dimension, on choisit une fonction de forme triangulaire, de base égale à $2\Delta z$, et de hauteur égale à 1. Ainsi, la charge de la macro-particule est entièrement distribuée sur ses plus proches noeuds voisins (voir figure 3.2).

La résolution de l'équation de Poisson dans un modèle à une dimension à géométrie cylindrique peut mener, si on cherche à la résoudre numériquement, à certaines inconsistances. Il existe des astuces numériques palliant partiellement ces problèmes [11]. Cependant, nous préférons estimer la valeur du champ de charge d'espace par une méthode analytique, approximant mieux ce dernier. Dans cette méthode, on utilise les fonctions de Green du Laplacien afin de déterminer une relation entre la densité de charge du faisceau et son champ électrique de charge d'espace. Cette méthode est décrite dans [12] et est utilisée par le code présenté dans [32]. On peut démontrer que

$$E_{sc}(z, t) = \frac{a}{2\pi\epsilon_0 b} \int \rho(z', t) \exp\left(-\frac{2|z - z'|}{b}\right) \text{sgn}(z - z') . dz' , \quad (3.2)$$

où E_{sc} est le champ électrique de charge d'espace induit par un faisceau de densité de charge ρ , et $\text{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe.

3.2.2 Intégration des équations du mouvement des électrons

La dynamique des macro-particules est soumise au champ électrique de charge d'espace et au champ électrique de l'onde de circuit. Ainsi, le mouvement d'une macro-particule p est décrit par les équations de la dynamique comme

$$\begin{aligned} d_t v_p &= \eta [E_{sc}(z_p, t) + E_{cir}(z_p, t)] \\ d_t z_p &= v_p , \end{aligned} \quad (3.3)$$

où E_{sc} et E_{cir} sont les valeurs des champs électriques de charge d'espace et de l'onde de circuit à la position z_p et à l'instant t . Puisque ces champs sont calculés sur les noeuds d'un maillage, dont les noeuds ne coïncident pas avec les positions des particules, il faut encore une fois interpoler afin

3.2 Modèle de faisceau à une dimension

d'estimer la valeur du champ total s'appliquant sur la particule. Dans notre modèle, cette seconde interpolation est du même type que celle que nous avons présenté dans la partie précédente. La seule différence est que l'interpolation s'effectue alors à partir du maillage vers les particules.

Les équations de la dynamique des électrons du faisceau sont résolues pour chaque particule en utilisant la méthode des différences finies. Cette méthode, ainsi que son utilisation, sont détaillées dans le chapitre suivant. Retenons pour l'instant que le temps est discrétisé selon un pas constant Δt , et que les opérateurs de dérivation sont approximés par des opérateurs aux différences divisées (schémas). Dans notre modèle, le schéma utilisé pour intégrer les équations (3.3) au cours du temps est appelé *schéma centré* en temps. On obtient les relations approximées

$$\begin{aligned} \frac{v_p^{n+\frac{1}{2}} - v_p^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \eta [E_{\text{sc}}(z_p^n, n\Delta t) + E_{\text{cir}}(z_p^n, n\Delta t)] \\ \frac{z_p^{n+1} - z_p^n}{\Delta t} &= v_p^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $v_p^{n\pm\frac{1}{2}}$ est la vitesse de la particule au temps $t = (n \pm \frac{1}{2})\Delta t$ et z_p^n est sa position au temps $t = n\Delta t$. D'après la première équation de (3.4), les valeurs au temps $t = n\Delta t$ du champ électrique de charge d'espace et du champ électrique de l'onde de circuit sont requises pour obtenir la valeur de la vitesse d'une particule au temps $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$. Puisque la position des particules est connue au temps $t = n\Delta t$, alors, d'après l'équation (3.1), il est possible d'estimer la densité de charge du faisceau au même instant. En utilisant la relation (3.2), on obtient alors naturellement une estimation du champ de charge d'espace à l'instant $t = n\Delta t$. Le champ électrique de l'onde de circuit doit être estimé au même instant. Nous verrons que, pour ce faire, il faudra disposer d'une estimation de la densité de courant du faisceau à l'instant $t = (n - \frac{1}{2})\Delta t$. Puisque la vitesse des particules est estimée à cet instant, l'estimation du champ de circuit au temps $t = n\Delta t$ viendra elle aussi naturellement.

3.2.3 Injection du faisceau

L'injection du faisceau consiste à déterminer, à partir de paramètres macroscopiques (courant, tension, rayon du faisceau ...), les paramètres de chaque macro-particule (charge, vitesse) lorsqu'elle entre dans le domaine de simulation. Supposons que la tension d'accélération du faisceau à la cathode soit égale à V_0 . En vertu de la loi de conservation de l'énergie, on peut écrire que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qV_0 \quad \text{soit, } v_0 = \sqrt{2\eta V_0}, \quad (3.5)$$

où v_0 est la vitesse moyenne du faisceau en entrée de ligne. Le courant du faisceau I_0 est défini par le nombre de charge passant à travers une surface unité par unité de temps. En faisant l'hypothèse qu'une macro-particule est introduite dans la zone de simulation tous les k pas de

temps, $k \in \mathbb{N}$, alors la charge portée par une macro-particule est donnée par la relation

$$q_p = I_0 k \Delta t. \quad (3.6)$$

En l'absence d'onde de circuit, le faisceau d'électrons est donc décrit comme une assemblée de disques de charge q_p transitant dans le tube avec une vitesse $v_p = v_0$. On peut facilement déterminer la densité de charge stationnaire du faisceau par la relation

$$I_0 = \rho_0 v_0 \pi b^2, \text{ soit } \rho_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2\eta V_0} \pi b^2}. \quad (3.7)$$

3.3 Modèle de ligne à une dimension

Dans cette partie, nous décrivons le modèle temporel de ligne à retard. Nous détaillons les problèmes rencontrés et les solutions que nous avons choisies pour les résoudre. Nous démontrons tout d'abord qu'il est possible d'utiliser le modèle discret avec une précision suffisante dans le cas des TOP à hélice. Nous expliquons ensuite la manière dont nous procédons pour obtenir la forme de champ d'un TOP à hélice en une dimension. Une bonne description de l'interaction dépend en grande partie de ce champ, et il est donc primordial d'en avoir une bonne estimation. Nous décrivons ensuite les conditions aux extrémités de la ligne. Nous proposons une extension de la méthode proposée par Ryskin *et al.*, pouvant s'appliquer à n'importe quel type de TOP. Nous détaillons finalement une marche à suivre afin d'intégrer l'équation (2.18) au cours du temps.

n_c	ϵ_1	ϵ_2
1	13 %	6.4%
5	5.5%	1.4%
10	3.2%	0.6%
20	1.9%	0.2%
40	1.8%	0.1%

TABLE 3.1 – Erreurs commises par le modèle dans le cas d'un TOP à hélice.

3.3.1 Précision du modèle

La courbe de dispersion d'une structure à onde lente est, dans le modèle discret, décomposée sur la base de Fourier. Dans le cas des TOP à cavités couplées, cette décomposition rend la représentation de la ligne extrêmement réduite car sa courbe de dispersion ressemble fortement à une des fonctions de base utilisée par le modèle (une fonction cosinus). En conséquence, les coefficients de Fourier successifs d'une telle courbe de dispersion deviennent très vite d'amplitude négligeable. Très peu de coefficients sont alors nécessaires pour bien décrire les caractéristiques de dispersion d'un mode, et le couplage entre les différentes cellules de celui-ci ne porte que sur de petites distances.

Si on considère la courbe de dispersion du premier mode d'une structure à onde lente hélicoïdale (en trait plein noir sur la figure 3.3), on comprend intuitivement que la décomposition de celle-ci sur la base de Fourier nécessitera plus de termes. Toutefois, même dans ce cas, le modèle

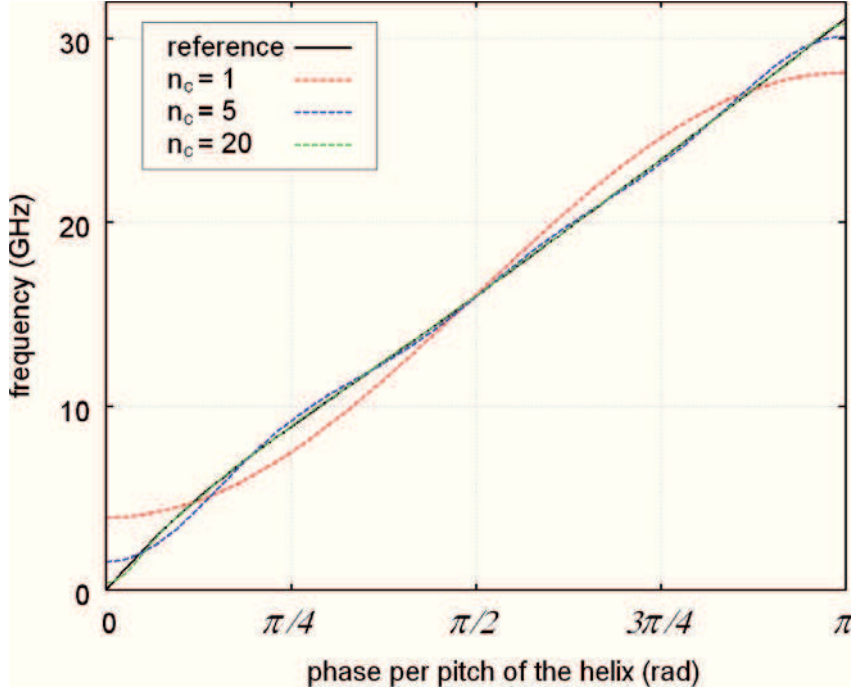


FIGURE 3.3 – Précision du modèle discret pour le premier mode d’une ligne à retard de type hélice.

discret reste applicable car cette courbe de dispersion est périodique en β . Le modèle discret équivaut aux équation de Maxwell si un nombre infini de coefficients de couplage Ω_m est pris en compte dans l’équation (2.18). Ceci est impossible à réaliser dans le cas d’une application numérique. Il est donc important d’étudier l’effet de considérer seulement un nombre fini, et si possible petit, de coefficients de couplage. Dans ces conditions, l’approximation de la courbe de dispersion s’écrit (2.22), qui devient

$$\omega(\phi) = \sum_{m=-n_c}^{n_c} \Omega_m e^{im\phi}, \quad (3.8)$$

si on tronque la série de Fourier au rang fini n_c . La bonne ou mauvaise représentation d’un TOP dans tout modèle spécialisé dépend en grande partie de l’approximation que fait ce modèle de sa courbe de dispersion. Puisque la précision du modèle discret converge vers un mode de référence comme la transformée de Fourier de celui-ci, on peut au premier regard prévoir que celle-ci sera plus lente dans le cas d’une hélice que dans le cas des cavités couplées ; d’une part en raison de la forme globale de la courbe de dispersion, d’autre part en raison des singularités présentes au niveau des bords de bande de celle-ci dans le cas d’une hélice.

Nous avons représenté en courbes de couleur sur la figure 3.3, pour plusieurs valeurs de n_c , les courbes de dispersion du premier mode d’une hélice à froid approximée par le modèle discret. Sur cette même figure, nous avons représenté en trait plein noir la courbe de dispersion de référence. On remarque sur cette figure que l’approximation faite par le modèle discret est d’autant meilleure que n_c augmente. Pour $n_c = 20$, la courbe approximée se superpose pratiquement avec la courbe

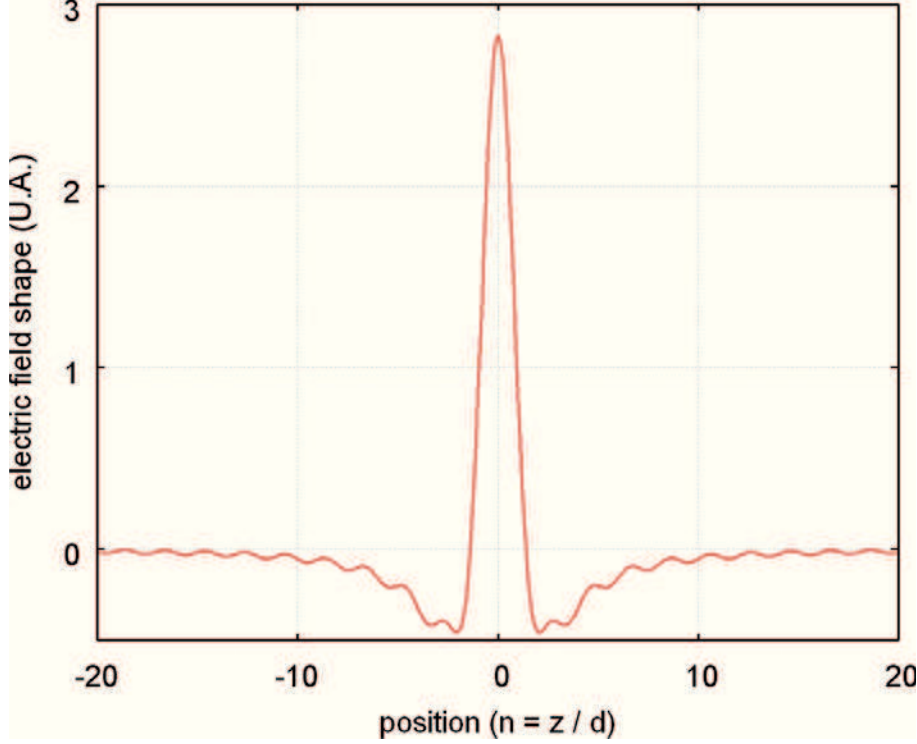


FIGURE 3.4 – Courbe du champ électrique propre d’une période de la structure le long de l’axe. La position est exprimée en nombre de périodes.

de référence. La table 3.1 représente l’erreur commise en moyenne par le modèle discret pour différentes valeurs de n_c . Dans la seconde colonne du tableau, l’erreur est obtenue en rapportant l’erreur absolue à la fréquence courante, c’est-à-dire

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \right| . d\phi, \quad (3.9)$$

où, pour un déphasage par pas ϕ donné, ω est la fréquence de référence et $\tilde{\omega}$ est la fréquence approximée. Dans la troisième colonne du tableau, l’erreur est obtenue en rapportant l’erreur absolue à la fréquence centrale de la bande passante, c’est à dire

$$\epsilon_2 = \frac{1}{\pi \omega_0} \int_0^\pi |\tilde{\omega} - \omega| . d\phi, \quad (3.10)$$

où ω_0 est la fréquence centrale de la bande passante. Ainsi, la moyenne présentée dans la deuxième colonne donne une très grande importance à l’erreur commise au niveau des bords de bande, alors que la troisième colonne est une moyenne plus globale. On remarque, grâce à cette table, que l’erreur commise par le modèle discret sur l’ensemble de la bande du mode est de l’ordre du pourcent si un nombre de coefficients fini et petit ($n_c \approx 20$) est pris en compte. L’erreur commise par le modèle discret est donc acceptable, et en conséquence, il est clair que celui-ci pourra correctement s’appliquer aux TOP à hélice.

3.3.2 Obtention du champ propre

Les équations (2.18) et (2.19) font intervenir la forme des champs électrique et magnétique associée à la période n , $\mathbf{E}_n$ et $\mathbf{B}_n$. Celles-ci peuvent être déterminées à partir des formules (2.20). Leur détermination nécessite donc de connaître les solutions de propagation d'une onde électromagnétique dans la structure à froid sur toute la bande du mode que l'on considère. Dans notre modèle, on néglige l'effet du champ magnétique. De plus, on ne cherche à déterminer la valeur du champ électrique propre que sur l'axe du système. Puisque cette valeur dépend de la géométrie à trois dimensions de l'hélice ainsi que des propriétés des matériaux du TOP, même un modèle à une dimension prendra partiellement en compte ces éléments.

On peut estimer la valeur du champ électrique propre de trois manières différentes. Il existe d'une part des procédés expérimentaux permettant de mesurer la valeur de ce champ sur l'axe du TOP. Il existe aussi des approximations analytiques. Nous avons pour notre part choisi d'utiliser le code fréquentiel de paramètres à froid Thales HELMOTH-3D. Ce programme est un code utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation d'Helmholtz. En maillant une période de l'hélice, il permet de calculer d'une part le déphasage d'une onde de fréquence ω entre les deux ports du maillage et d'autre part, le champ électrique en tout point du maillage. Un exemple de résultat obtenu avec HELMOTH-3D est présenté sur la figure 3.5. On obtient les solutions de propagation E_β qui nous intéressent en relevant la valeur du champ électrique sur l'axe du maillage. En pratique, le code HELMOTH-3D donne la valeur de l'impédance de couplage sur l'axe de la structure. On peut déterminer le champ électrique pour une valeur de β en combinant la définition de l'impédance de couplage

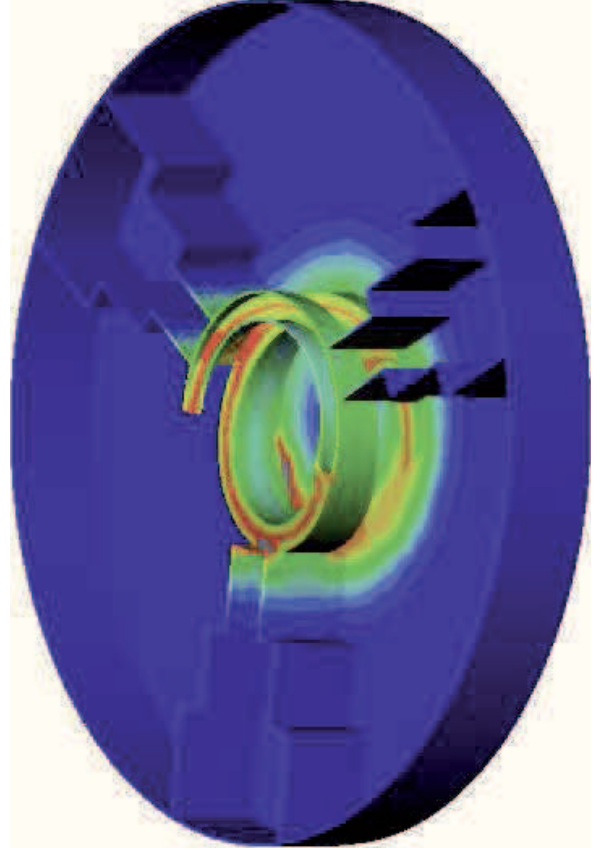


FIGURE 3.5 – Exemple de calcul HELMOTH-3D. Un maillage d'un pas de l'hélice est effectué. La valeur du champ électrique en tout noeud du maillage est déterminée en intégrant l'équation d'Helmholtz par la méthode des éléments finis.

$$E_\beta(z) = \sqrt{2\beta^2 N_s \frac{v_g}{d} Z_c(\beta)} e^{-i\beta z} \quad (3.11)$$

avec la formule (2.4)

$$E_n(z) = \frac{d}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{2\beta_k^2 N_s \frac{v_g}{d} Z_c(\beta_k)} e^{-i\beta_k z} e^{-in\beta_k d} \right] . d\beta, \quad (3.12)$$

où $\beta_k = \beta + \frac{2k\pi}{d}$. Le processus d'amplification dans une hélice fait intervenir l'harmonique d'espace $k = 0$ seulement, aussi on négligera l'effet des harmoniques d'espace d'ordres supérieurs. La figure 3.4 représente le champ propre E_n d'une spire d'hélice ainsi calculé.

Le modèle de champ propre que nous avons présenté dans cette section ne dépend d'aucun paramètre fréquentiel. Si on fait travailler le tube à froid à une ou plusieurs fréquences, alors les coefficients de couplage, combinés à la forme du champ propre, feront que le champ total résultant du modèle discret aura

- la/les "bonnes" longueurs d'onde.
- la/les "bonnes" amplitudes.

3.3.3 Conditions aux bords

Nous avons vu dans le chapitre 2 que l'application pratique du modèle discret en domaine temporel n'a été rendue possible que grâce au développement de conditions aux extrémités bien posées pour l'équation (2.18). Néanmoins, dans [32], les conditions développées n'étaient valables que pour des structures à onde lentes dont la courbe de dispersion est un cosinus. Nous avons donc dû adapter cette méthode aux TOP à hélice. Nous détaillons cette adaptation dans ce paragraphe. Notons que la méthode présentée plus bas est valable pour n'importe quel type de TOP.

Nous supposons que la ligne à retard, décrite dans le modèle discret par ses coefficients de couplage $\Omega_{m=-n_c \dots n_c}$, est connectée à ses deux extrémités à des guides d'entrée et sortie, définis par des coefficients de couplage $\Gamma_{m=-1,0,1}$. On suppose de plus que le guide d'entrée est similaire au guide de sortie, et on impose que ces guides aient une période d , égale à celle de la ligne à retard. Puisque les guides d'entrée et de sortie sont décrits par trois coefficients seulement, leur relation de dispersion s'écrit

$$\omega(\psi) = \Gamma_0 + 2\Gamma_1 \cos(\psi). \quad (3.13)$$

On utilise le même principe que dans le chapitre 2, c'est-à-dire que l'on suppose que la solution de propagation d'une onde dans les guides d'entrée et de sortie peut s'écrire

$$\begin{aligned} C_n &= \left(C_{\text{in}} e^{-in\psi} + C_{\text{ref}} e^{in\psi} \right) e^{i\omega t} & , \text{ si } n \leq 0, \\ C_n &= C_{\text{out}} e^{-in\psi} e^{i\omega t} & , \text{ si } n > N. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3 Modèle de ligne à une dimension

En introduisant ces expressions dans l'équation de la dynamique des cellules constituant les conditions aux extrémités, on détermine $2(n_c + 1)$ équations. Celles-ci s'écrivent

– Pour $n = 0$:

$$\left[d_t + i\Gamma_1 e^{i\psi} \right] C_{\text{ref}} - i\Gamma_1 e^{-i\omega t} C_1 = -i\Gamma_1 e^{-i\phi} C_{\text{in}} \quad (3.15)$$

– Pour $n \in [1, n_c]$:

$$\begin{aligned} d_t C_n - iC_{\text{ref}} e^{in\psi} \sum_{m=n}^{n_c} \Omega_m e^{-im\psi} e^{i\omega t} - i \sum_{m=-n_c}^{n-1} \Omega_m C_{n-m} \\ = iC_{\text{in}} e^{-in\psi} \sum_{m=n}^{n_c} \Omega_m e^{im\psi} + P_n \end{aligned} \quad (3.16)$$

– Pour $n \in [N - n_c, N]$:

$$d_t C_n - i \sum_{m=n-N}^{n_c} \Omega_m C_{n-m} - iC_{\text{out}} e^{-in\psi} \sum_{m=-n_c}^{n-N-1} \Omega_m e^{im\psi} e^{i\omega t} = P_n \quad (3.17)$$

– Pour $n = N + 1$:

$$\left[d_t + i\Gamma_1 e^{-i\psi} \right] C_{\text{out}} - i\Gamma_1 C_N e^{i(N+1)\psi} e^{-i\omega t} = 0, \quad (3.18)$$

où C_{ref} est l'amplitude de l'onde réfléchie dans le guide d'onde d'entrée, C_{out} est l'amplitude de l'onde transmise dans le guide d'onde de sortie, ψ est la valeur du déphasage par pas de l'onde de fréquence ω dans les guides d'entrée et de sortie, et N est le nombre de périodes de la ligne à retard. P_n est la puissance introduite par le faisceau dans la cellule n .

Les équations décrivant les cellules de la ligne à retard $n \in [n_c + 1, N - n_c - 1]$ restent inchangées (par rapport à l'équation (2.18)), car ces cellules ne sont pas couplées avec celles composant les guides d'onde. Finalement, le système décrivant l'onde de circuit peut encore une fois s'écrire sous la forme matricielle

$$d_t \mathbf{C}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{C}(t) = \mathbf{P}(t). \quad (3.19)$$

Dans la section suivante, nous présentons la méthode que nous employons pour l'intégrer dans le code `HeLL-1D`.

3.3.4 Intégration de la dynamique de l'onde de circuit

Considérons un mode de la structure à onde lente à froid sur lequel se propage une onde directe monochromatique. À chaque instant t , le champ dans la structure vérifie la condition de Floquet, et on peut écrire que

$$C_{n-m}(t) = C_n(t) e^{im\phi}.$$

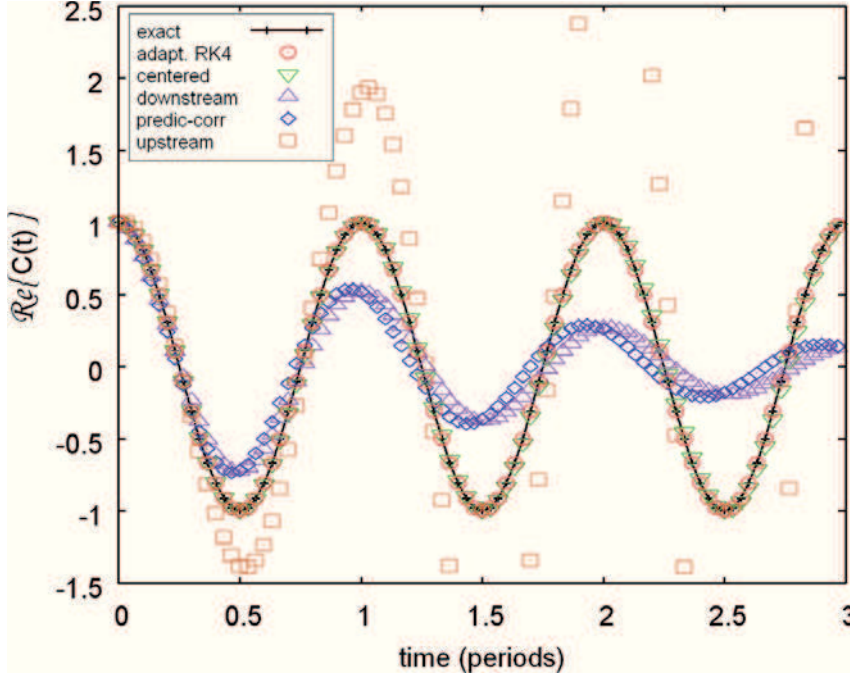


FIGURE 3.6 – Comparaison de différentes méthodes pour la résolution de l'équation (2.18).

En introduisant cette expression dans l'équation (2.18), on prouve alors facilement que $C_n(t)$ vérifie l'équation

$$d_t C_n(t) - i\omega(\phi) C_n(t) = 0, \quad (3.20)$$

dont la solution analytique est $C_n(t) = C_n(0)e^{i\omega t}$. Nous avons tenté d'intégrer l'équation (3.20) par plusieurs méthodes différentes afin de déterminer, sur un critère principal de robustesse, laquelle nous allons utiliser dans le code `HelL-1D`. Sur la figure 3.6, nous avons représenté la partie réelle de la solution analytique de cette équation en traits noirs. Le temps en abscisse est exprimé en nombre de périodes de l'onde. Nous avons divisé chaque période en trente intervalles où la solution à différents instants est représentée par des croix noires. En plus de la solution analytique, nous avons tracé les solutions obtenues en résolvant l'équation (3.20) par les différentes méthodes numériques testées. La méthode upstream mène à une solution divergente. Les méthodes downstream, prédicteur-correcteur mènent quant à elles à des solutions convergeant vers zéro. Seules les méthodes centrée et de Runge-Kutta du 4ème ordre à pas adaptatif semblent donner un résultat pertinent. Néanmoins, on peut remarquer que la méthode centrée se déphase petit à petit par rapport à la solution exacte. La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre, ne présentant pas ce défaut, semble donc être la plus robuste.

Nous avons tracé sur la figure 3.7 la solution analytique (en trait plein en croix) et la solution numérique obtenue par la méthode de Runge-Kutta (en cercles rouges) entre les temps équivalents aux périodes 997 et 1000. Le temps de transit de l'onde le long d'une section de tube de cinquante tours étant de 15-20 périodes, on considère mille périodes de l'onde comme un temps long. On

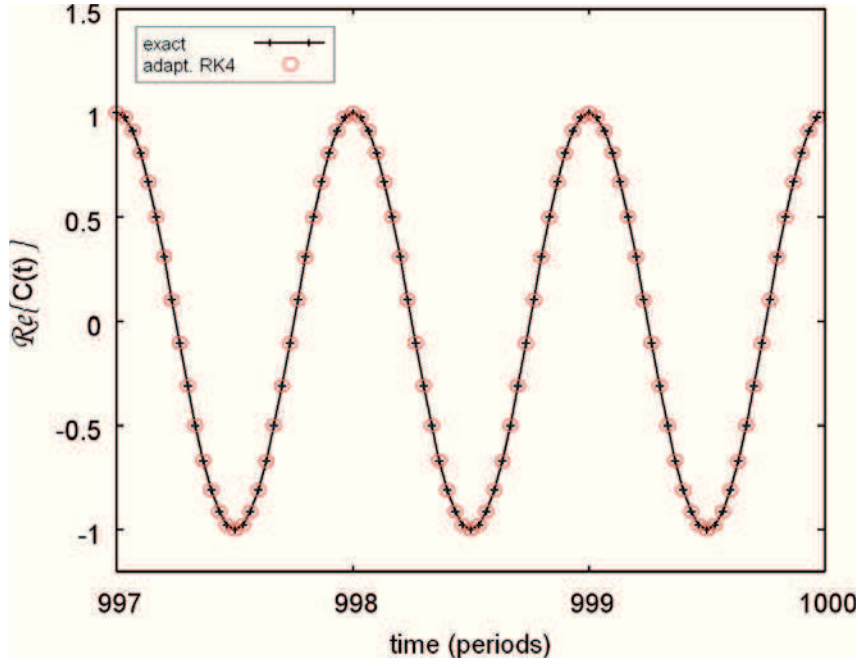


FIGURE 3.7 – La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre reste satisfaisante sur de longs laps de temps au regard de la solution analytique.

remarque donc que la solution numérique reste fidèle à la solution analytique même après des temps longs pour un pas de temps relativement grand. La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre constitue donc une "bonne" méthode pour intégrer l'équation d'évolution de l'onde de circuit dans le code `HelL-1d`. Ce code est présenté dans la section suivante.

3.4 Le code HelL-1D

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques du code `HelL-1d` (pour `Helix Line 1d`) dérivé des modèles de faisceau d'électrons et de ligne détaillés dans les deux précédentes sections. Nous présentons les résultats obtenus avec ce code d'interaction lorsque le tube simulé opère sous des conditions normales. Ceci nous permet de valider le programme. Nous verrons de plus qu'il est possible, avec ce code, d'étudier un type important d'oscillation dans les TOP : l'oscillation sans HF.

3.4.1 Organisation du code

Le code d'interaction `HelL-1d` est écrit en langage C. Il est composé de deux modules. Le premier résout les équations de la dynamique des électrons et calcule le champ de charge d'espace associé à la distribution de particules. Le second résout l'équation de la dynamique de l'onde de circuit. À ce titre, dans ce second module, on trouve une routine calculant le second membre de l'équation (2.18), une routine actualisant les amplitudes C_n en utilisant la méthode de Runge-

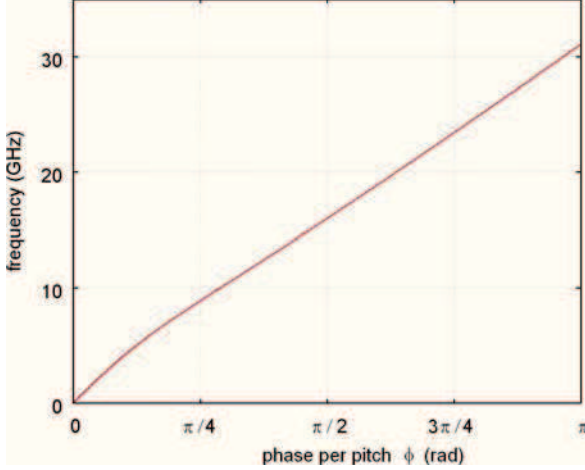


FIGURE 3.8 – Courbe de dispersion de l'hélice simulée.

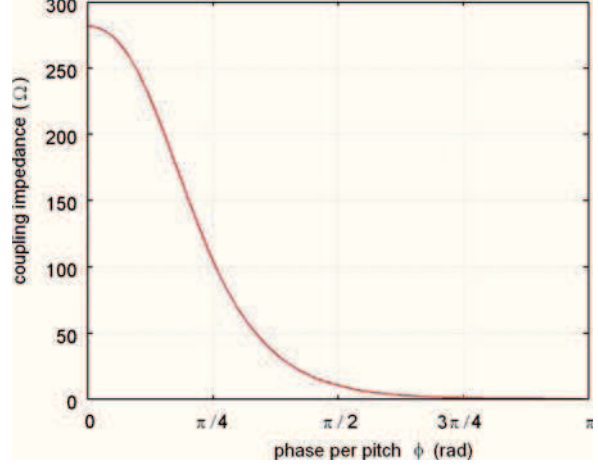


FIGURE 3.9 – Impédance de couplage utilisée pour le calcul du champ propre.

Kutta d'ordre 4 à chaque pas de temps, et enfin une routine recomposant le champ au regard des équations (2.19).

3.4.2 Fonctionnement usuel d'un TOP

Un modèle acceptable d'interaction doit être capable de décrire correctement les comportements linéaire et non-linéaire d'un TOP dans des conditions "normales" d'utilisation. Par "normales", nous entendons des conditions dans lesquelles le TOP n'oscille pas. Nous ne sommes pas encore capables, à l'heure actuelle, de simuler un tube comportant des changements de pas ou des "severs" (atténuations). La comparaison de notre code avec des tubes de série fabriqués chez Thales Electron Devices est donc impossible. Cependant, il est possible de valider le code **HeLL-1d** en comparant ses résultats avec des résultats obtenus avec d'autres codes, ou encore avec des résultats issus de modèles analytiques.

V_k	3.5 kV
I_k	50 mA
b	0.78 mm
l_z	26 mm

TABLE 3.2 – Paramètres d'entrée du code pour le faisceau d'électrons.

Parmi les codes fréquentiels utilisés chez Thales Electron Devices, le code **TUBH** prend comme hypothèse les invariances radiale et azimutale des quantités physiques. Ainsi, ce code se rapproche du code **HeLL-1d** et peut être pris comme référence pour valider notre code. De plus, le modèle de Pierce s'est affirmé, au cours des années, comme une référence pour estimer le gain d'un TOP en régime petit signal. Il peut donc, lui aussi, être pris comme référence.

La figure 3.10 représente le gain sur l'axe d'une section de tube de 50 tours pour une fréquence de travail de 13 GHz en régime petit signal. Les paramètres à froid de la structure sont donnés par les figures 3.8 et 3.9, et les paramètres du faisceau d'électrons sont répertoriés en table 3.2. Trois courbes ont été tracées sur la figure. La courbe en noir représente l'onde amplifiée du modèle de Pierce. La courbe en rouge représente le gain obtenu avec le code fréquentiel **TUBH**. La courbe

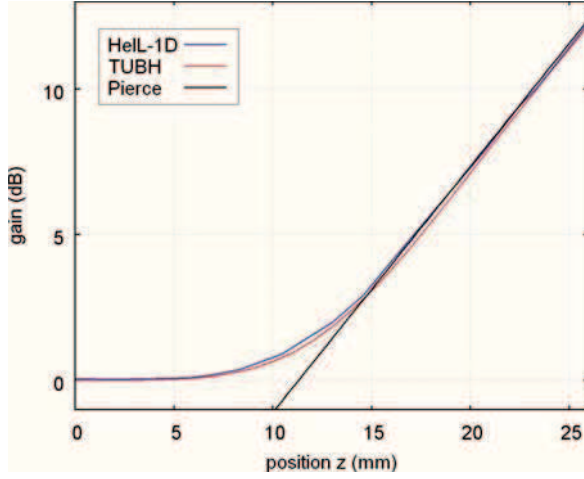


FIGURE 3.10 – Gain du tube sur l'axe à une fréquence $f = 13$ GHz en régime petit signal.

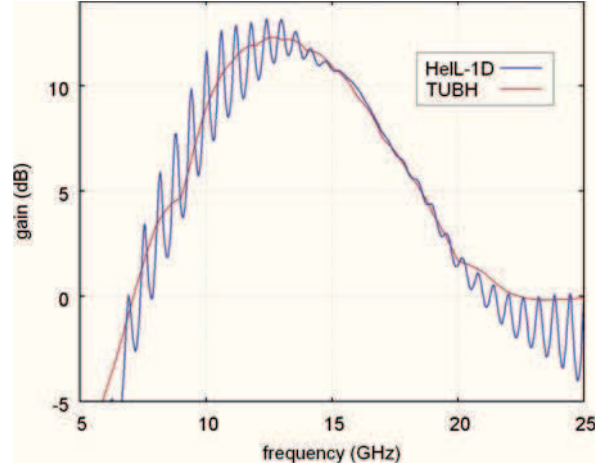


FIGURE 3.11 – Gain du tube sur une bande fréquence en régime petit signal.

en bleu représente le gain obtenu avec le code temporel `HelL-1d`. On remarque que les courbes obtenues avec les deux codes sont presque similaires. De plus, à partir de la position $z = 15$ mm, ces deux courbes viennent se superposer avec la droite obtenue par le modèle de Pierce. Cette dernière n'est pas en bon accord avec les deux codes pour $z < 15$ mm, en raison du fait qu'elle ne représente qu'une des quatre ondes présentes dans le tube. Néanmoins, on peut conclure, d'après cette figure, que le modèle discret donne de bons résultats comparés à la théorie petit signal et à un autre code de simulation en domaine fréquentiel. Notons qu'afin d'éviter les effets parasites dus aux réflexions, nous avons effectué le calcul avec `HelL-1D` sur une hélice de 150 tours, et nous avons stoppé celui-ci avant que l'onde, réfléchi à la sortie, ne revienne dans les 50 premiers tours.

La figure 3.11 représente le gain de la section sur une large portion de la bande passante du mode que l'on considère. La courbe en rouge a été obtenue avec `TUBH` et la courbe en bleu avec `HelL-1d` (pour une section de 50 tours cette fois). D'après cette courbe, on pourrait à première vue penser que le modèle discret se comporte mal sur de petites échelles de fréquences. En effet, la courbe en bleu montre des extrema locaux oscillant à une valeur moyenne correspondant environ au gain représenté par la courbe en rouge. Ce phénomène, appelé communément *ripple de gain*, est bien connu des expérimentateurs, et est dû aux réflexions d'onde en entrée et sortie de tube. Puisque celles-ci ont été qualitativement introduites dans notre modèle, il n'est pas étonnant d'observer ce phénomène. Une description théorique du *ripple de gain* est donnée dans la référence [37]. Ainsi, si l'on lisse le gain obtenu par `HelL-1d` autour de sa valeur moyenne, on peut dire que les deux codes sont en très bon accord. Cette affirmation est particulièrement vraie pour les fréquences situées entre 15 et 20 GHz. En effet, sur cet exemple, l'amplitude du coefficient de réflexion à l'entrée et à la sortie de la ligne est minimale au milieu de la bande de fréquences du mode.

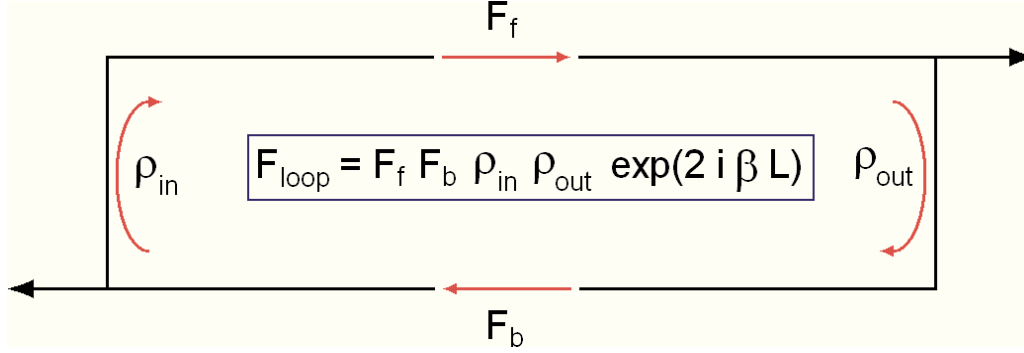


FIGURE 3.12 – Schéma d'une auto excitation.

3.4.3 Oscillations

L'un des intérêts des codes temporels est qu'il est possible, à travers leur utilisation, d'examiner certains phénomènes non-stationnaires qu'il serait difficile d'étudier avec des codes fréquentiels. Ces phénomènes peuvent être classés en deux catégories

- On trouve dans la première catégorie les phénomènes faisant intervenir deux fréquences proches. Bien que ceux-ci puissent être étudiés avec des codes multi-fréquentiels, l'utilisation de tels codes amène à des temps de calculs très longs. En effet, dans un code multi-fréquentiel, chaque fréquence existant dans le tube doit être un multiple entier d'une fréquence fondamentale. Par exemple, si on veut étudier un phénomène faisant intervenir des ondes à $f_{20} = 20$ et $f_{21} = 21$ GHz, il faudra introduire dans le tube les fréquences $f_1 = 1$ à $f_{19} = 19$ GHz, et donc résoudre une équation différentielle pour chacune des 21 ondes de circuit, même si dix-neuf de celles-ci n'auront aucun effet sur le comportement du tube.
- La seconde catégorie contient les phénomènes émergeant à des fréquences inattendues, c'est-à-dire pour lesquelles on ne sait prédire à l'avance les fréquences d'apparition. Les codes temporels peuvent trouver leur application dans ces phénomènes puisqu'ils apparaissent naturellement lors de l'exécution du code. En utilisant un code fréquentiel, il faudrait effectuer un balayage fin en fréquence sans être assuré d'observer le phénomène.

Afin d'illustrer les possibilités offertes par le modèle discret en termes d'oscillations, nous avons choisi de présenter une simulation d'auto-excitation effectuée avec le code **He1L-1d**. Cette oscillation démarre sans qu'il y ait besoin d'exciter l'onde de circuit dans le tube par un signal extérieur. En conséquence, détecter cette oscillation avec un code fréquentiel peut être fastidieux puisqu'on ne connaît pas à l'avance sa fréquence de déclenchement. Elle démarre sur un bruit s'amplifiant grâce à un gain de boucle, et donc grâce aux réflexions en entrée et sortie de ligne. Lors du développement d'un TOP, la première étude effectuée sur la stabilité du tube consiste à vérifier que celui-ci n'oscille pas sans HF. Simuler cette oscillation est donc d'un grand intérêt.

En raison des fluctuations de courant du faisceau [38], il existe toujours, à l'intérieur du tube, un bruit d'amplitude généralement faible sur un large spectre de fréquence. Si ce spectre

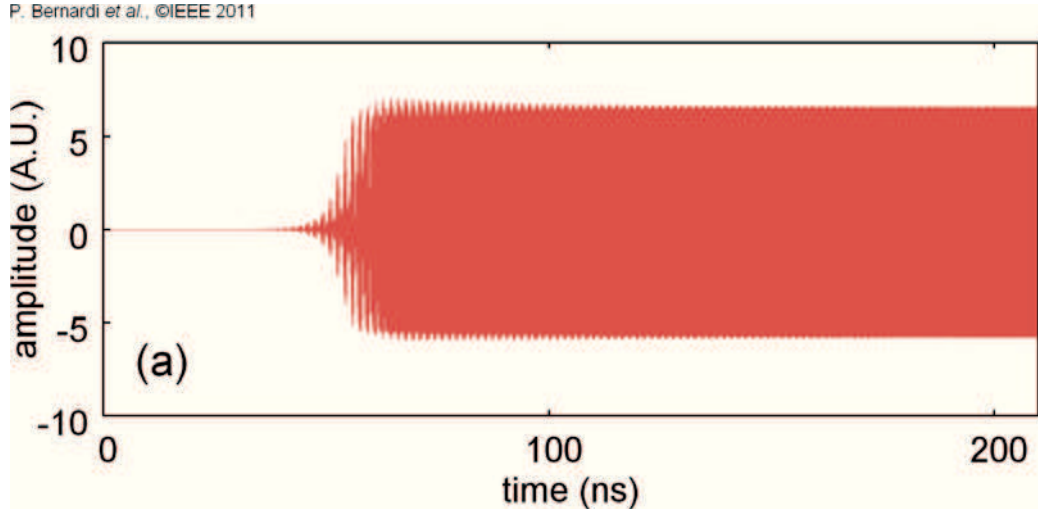


FIGURE 3.13 – Evolution de l'amplitude du signal de sortie du tube lors d'une auto-excitation.

couvre la bande d'amplification du TOP, un gain de boucle peut se développer lorsque, pour ces fréquences, la quantité de réflexions est suffisamment grande à l'entrée et à la sortie de la ligne à retard. Le facteur d'amplification de boucle peut être défini par la formule suivante

$$F_{\text{loop}} = F_f F_b \rho_{\text{in}} \rho_{\text{out}} e^{2i\beta L}, \quad (3.21)$$

où F_f et F_b sont les facteurs d'amplification lors des trajets direct et inverse de l'onde, ρ_{in} et ρ_{out} sont les facteurs de réflexion en entrée et sortie de ligne, β est le nombre d'onde correspondant à la fréquence de la composante du bruit et L est la distance entre l'entrée et la sortie (voir figure 3.12). Si l'amplitude du bruit après une boucle est supérieure à l'amplitude du bruit avant la boucle, alors au fur et à mesure des boucles, on verra l'amplitude du bruit croître. Ainsi, la condition de démarrage de l'amplification du bruit à une certaine fréquence peut s'écrire

$$F_{\text{loop}} > 1. \quad (3.22)$$

Au bout d'un certain temps, l'amplitude du bruit finira par saturer de telle sorte que la condition sur le facteur d'amplification de boucle deviendra

$$F_{\text{loop}} = 1. \quad (3.23)$$

En conséquence, l'auto-excitation n'émerge pas à n'importe quelles fréquences. Lorsque le système ne sature pas, il faut que

$$|F_{\text{loop}}| > 1 \quad (3.24)$$

c'est-à-dire que les fréquences d'intérêt doivent bénéficier d'un gain et d'une quantité de réflexions suffisante pour émerger. L'oscillation sélectionne en premier lieu une bande de fréquences. De

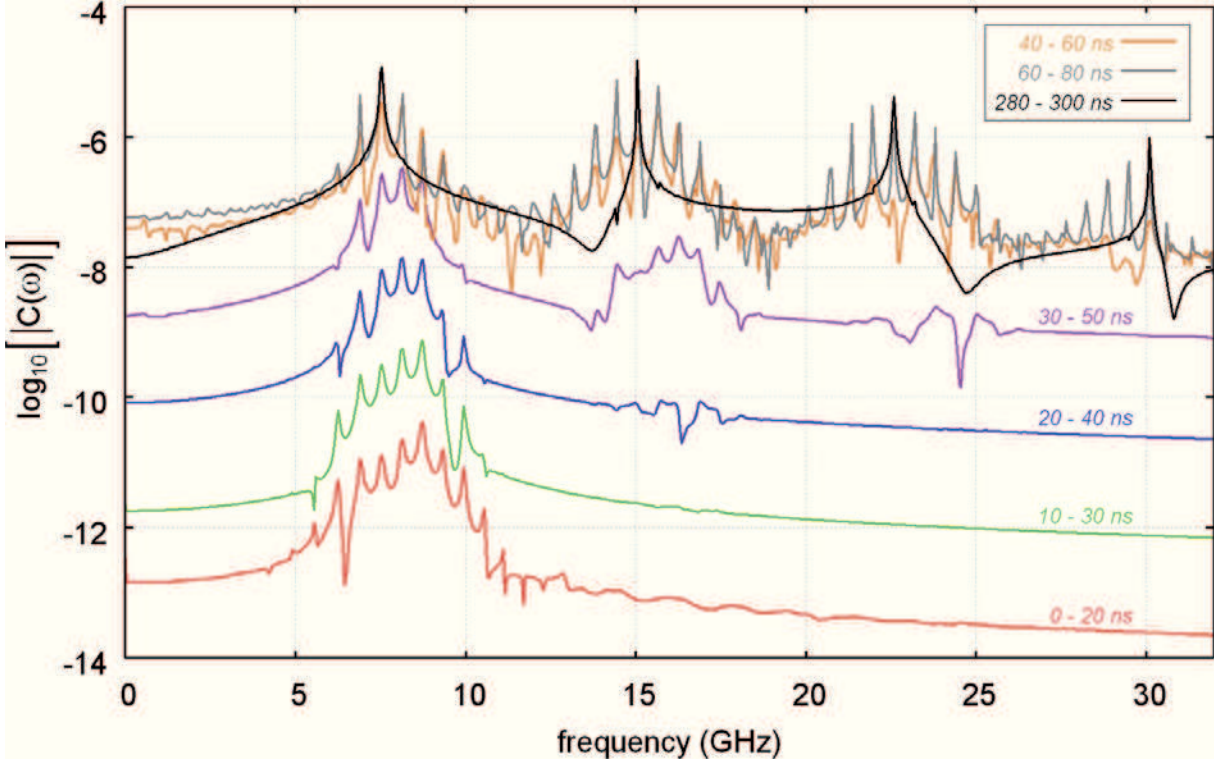


FIGURE 3.14 – Spectre de puissance en fréquence du signal de sortie pour différentes périodes de temps.

plus, d'après l'équation (3.23), une sélection des raies d'oscillation est effectuée en fonction de la phase de l'onde et de la longueur du système. Considérons le cas où $\rho_{\text{in}} = \rho_{\text{out}} = -i|\rho|$. En transformant l'équation (3.23), on peut montrer que seules les fréquences dont le déphasage par pas associé vérifie la condition

$$\phi = \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

peuvent émerger lorsque le système sature.

La figure 5.8 représente l'amplitude du signal de sortie du tube lors d'une auto-excitation simulée avec **HelL-1d** avec les paramètres de faisceau présentés dans la table 3.3. À partir du début de la simulation ($t = 0$) jusqu'à $t = 30$ ns, il semble qu'il n'y ait aucun signal sortant du tube. En réalité, un tel signal croissant est présent, mais l'échelle utilisée en ordonnées sur la courbe est trop grande pour que nous puissions le voir. À partir de 30 ns et jusqu'à 65 ns, on observe l'apparition d'un signal en sortie de tube alors que, rappelons-le, aucun signal n'est introduit en entrée. Ce signal croît et finit par saturer en amplitude après 65 ns, en raison des effets non-linéaires liés au faisceau d'électrons.

V_k	3.5 kV
I_k	200 mA
b	0.78 mm
l_z	26 mm

TABLE 3.3 – Paramètres d'entrée du code de faisceau d'électrons.

Le figure 3.14 représente le logarithme décimal du spectre de l'amplitude du champ électromagnétique dans le guide d'onde de sortie durant différentes périodes de temps lors de l'oscillation. Les courbes en rouge, vert, bleu et violet correspondent à des fenêtres de temps prises durant la croissance de l'oscillation. Les courbes en orange, gris et noir correspondent à des fenêtres de temps pour lesquelles l'amplitude du champ sature (voir figure 5.8). Entre 0 et 20 ns, le spectre montre qu'une puissance commence à apparaître en sortie sur une bande de fréquences contenue entre 5 et 11 GHz. Cette bande ne correspond pas au maximum de gain du tube, mais aux fréquences auxquelles le gain, pondéré par la quantité de réflexions aux extrémités, sont suffisants pour faire osciller le tube et faire croître l'amplitude de cette oscillation. Cette croissance est illustrée par les courbes en vert, bleu, violet et orange. En effet, on remarque grâce à ces courbes que le niveau de puissance de sortie est d'autant plus fort que la fenêtre du spectre est prise loin dans le temps. De plus, sur chacune de ces courbes, on observe un certain nombre de maxima locaux, qui correspondent à des fréquences ayant une phase vérifiant une condition analogue à celle décrite par l'équation (3.25). Sur les courbes en bleu et en violet, on peut remarquer l'apparition et la croissance de la première harmonique des fréquences d'oscillation d'origine, dénotant le comportement non linéaire du TOP. Lorsque le régime de saturation est atteint, l'amplitude du signal de sortie ne croît plus, comme le démontrent les courbes en orange, gris et noir. Puisque la bande d'oscillation d'origine est située relativement bas en fréquence et que la bande du mode est relativement large (0 à 32 GHz), on voit apparaître la troisième puis la quatrième harmonique des fréquences d'oscillation. Le spectre du signal de sortie sur une fenêtre située entre 280 et 300 ns nous montre que, parmi les multiples fréquences d'oscillation au départ, une seule fréquence à 7.48 GHz (et ses harmoniques) finit par persister.

3.5 Discussion

Bien qu'étant simple, le modèle numérique que nous avons décrit dans ce chapitre nous a permis de prouver que le modèle discret peut s'appliquer aussi aux TOP à hélice. Les problèmes posés par une telle application, ainsi que les méthodes employées pour résoudre ces problèmes, ont été présentés. Il a été démontré que le code **He1L-1D**, issu de ce modèle, respecte quantitativement le comportement attendu d'un TOP. Ce code donne en effet des résultats en bon accord avec la théorie de Pierce et avec le code de simulation fréquentiel **TUBH**, utilisé chez Thales Electron Devices. De plus, nous avons montré qu'il était possible, avec notre code temporel, d'étudier l'oscillation sans HF grâce à la prise en compte des réflexions à l'entrée et à la sortie de la structure à onde lente.

L'écriture du code **He1L-1D** nous a permis d'estimer le temps de calcul d'un code à une dimension issu du modèle discret. Pour un calcul servant à estimer le gain d'un TOP de cinquante tours à une fréquence donnée, une centaine de secondes sont nécessaires sur un Intell Xéon cadencé à 3.2 GHz. Cette durée, bien que plus de cent fois supérieure à la durée d'un calcul effectué avec **TUBH**, reste raisonnable.

Dans le cas d'une oscillation, il est cependant impossible de généraliser le temps de calcul, puisque celui-ci dépend en grande partie du courant du faisceau. Si ce courant est proche du courant d'accrochage de l'oscillation, alors l'oscillation peut prendre de nombreuses heures pour se déclencher, même avec un modèle à une dimension. Néanmoins, nous avons démontré dans [27] qu'il est possible d'estimer le courant d'accrochage d'une oscillation à partir d'un petit nombre (deux ou trois) de calculs rapides, effectués à différents courants de faisceau supérieurs au courant d'accrochage. Nous pouvons ainsi statuer que, dans le cadre d'un modèle à une dimension, le modèle discret s'avère suffisamment efficace pour être utilisé à des fins de design.

Dans la plupart des cas cependant, une description du TOP à une dimension n'est pas suffisante pour représenter correctement l'interaction. On fait alors appel à des modèles à deux ou trois dimensions, généralement plus lourds en ressources de calcul. Un tel modèle fait l'objet du chapitre suivant.

Modèle numérique à deux dimensions



Sommaire

4.1	Hypothèses de travail	56
4.2	Modèle de faisceau à deux dimensions	57
4.2.1	Intégration des équations de Maxwell	57
4.2.2	Principes de la méthode "Particle in Cell"	60
4.2.3	Intégration des équations du mouvement des électrons	62
4.2.4	Conditions aux bords	64
4.2.5	Raffinements nécessaires	69
4.3	Modèle de ligne à deux dimensions	76
4.3.1	Équation d'ondes en coordonnées cylindriques	76
4.3.2	Solution générale	77
4.3.3	Champ propre pour une hélice	78
4.4	Le code HelL-2D	80
4.4.1	Caractéristiques du code	81
4.4.2	Fonctionnement usuel d'un TOP	82
4.5	Discussion	85

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le modèle discret peut s'appliquer aux TOP à hélice en une dimension. L'invariance radiale des grandeurs physiques, qui constitue une bonne approximation dans certains cas, peut ne plus être valable dans d'autres cas. Par exemple, lorsqu'un tube fonctionne proche de la saturation, le faisceau d'électrons ralentissant a tendance à s'élargir. En conséquence, le gain en sortie peut être largement sous-estimé par un modèle à une dimension. De plus, un modèle à deux dimensions permet de prévoir avec plus de précision la distribution en énergie des particules en fin de ligne. Or, cette distribution est une donnée d'entrée fondamentale des codes de simulation de collecteurs.

Dans ce chapitre, nous détaillons les étapes nécessaires à l'élaboration d'un modèle numérique non-stationnaire non-linéaire d'interaction à deux dimensions dérivé du modèle discret. Le code bidimensionnel issu de ce modèle est décrit. Dans ce code, l'onde de circuit est représentée dans le cadre du modèle discret et le faisceau d'électrons est modélisé par une méthode "particle in cell", ce qui permet de prendre en compte les effets non-linéaires.

La première section de ce chapitre détaille les hypothèses du modèle à deux dimensions afin d'en déterminer les limites d'application. Dans la seconde section, nous présentons la partie du modèle décrivant le faisceau d'électrons. La troisième section du chapitre porte sur le modèle d'onde de circuit à deux dimensions. Nous y expliquons comment obtenir un champ propre pour une structure hélicoïdale à deux dimensions. Dans la quatrième partie, nous présentons le code `HelL-2d` et nous étudions son comportement lorsque l'on simule un TOP à hélice. Des résultats numériques sont présentés dans cette partie. Enfin, nous concluons sur le travail effectué dans la cinquième section.

4.1 Hypothèses de travail

Dans l'approche à une dimension décrite au chapitre précédent, nous avons négligé toutes les variations radiales des quantités physiques du problème. Celles-ci sont néanmoins approximativement prises en compte par l'intermédiaire du calcul du champ de charge d'espace et du champ de l'onde de circuit. Dans la plupart des cas cependant, un modèle à deux dimensions (r, z) est nécessaire. Dans ce chapitre, on suppose que la ligne à retard est de rayon constant. Cette hypothèse permet de satisfaire la condition de périodicité de la structure à onde lente dans le modèle discret. Comme nous l'avons fait pour le modèle à une dimension, nous nous intéressons seulement aux phénomènes se déroulant dans la région d'interaction. À ce titre, nous ne simulons ni le canon à électrons, ni le collecteur. Il faut donc introduire des conditions d'injection et d'évacuation du faisceau à l'entrée et à la sortie du domaine de simulation.

Nous avons écrit dans le chapitre 2 que seul le volume contenant le faisceau était nécessaire pour calculer les échanges d'énergie entre l'onde de circuit et le faisceau, et donc la dynamique du système couplé. En conséquence, seul le volume contenu dans le diamètre interne de l'hélice sera simulé. Bien que le champ propre de l'onde de circuit puisse être facilement connu dans cette zone,

il n'en est pas de même pour le champ de charge d'espace qui ne pourrait être rigoureusement déterminé que par un maillage total de toute la structure. Nous souhaitons à tout prix éviter ceci. Ainsi, nous approximations le bord de l'hélice par un cylindre métallique parfaitement conducteur.

Parmi les phénomènes non-linéaires ayant lieu dans un TOP, la compression de gain doit être prise en compte par le modèle. Pour cette raison, de la même manière qu'au précédent chapitre, nous modélisons le faisceau d'électrons par une méthode "particle in cell", à deux dimensions en espace et trois dimensions en vitesse. Dans un souci de généralité, et puisque, pour certains tubes, des effets relativistes peuvent entrer en jeu, la dynamique du champ de charge d'espace et du champ d'induction magnétique seront décrites par les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, et la dynamique relativiste des particules sera prise en compte.

Ce modèle à deux dimensions nécessite en plus la prise en compte de l'expansion radiale du champ propre. Là où l'on moyennait le champ propre sur le rayon du faisceau, il faut à présent calculer la valeur de ce champ en tout rayon du domaine. Ceci peut se faire de plusieurs manières. On peut soit utiliser des codes de simulation à trois dimensions, soit, comme nous l'avons fait, employer une méthode analytique.

4.2 Modèle de faisceau à deux dimensions

Le problème auquel nous nous intéressons est celui de la dynamique d'un faisceau d'électrons se propageant dans un tube métallique et au calcul des champs qu'il induit. À tout instant et en tout point de l'espace, la dynamique des champs dépend elle-même de l'état du faisceau d'électrons à travers les termes sources des équations de Maxwell ρ et $\mathbf{j}$. En conséquence, afin de décrire la dynamique globale du système, il faut d'une part estimer les termes sources en présence d'un champ électromagnétique et d'autre part utiliser ces termes sources afin d'actualiser la valeur du champ électromagnétique. La résolution des équations de Maxwell (section 4.2.1) et l'estimation des termes source (section 4.2.2) sont deux processus séparés.

4.2.1 Intégration des équations de Maxwell

La géométrie à laquelle nous nous intéressons est cylindrique. On suppose de plus que les inconnues du problème sont invariantes selon la direction θ car, dans un tube à hélice, l'harmonique d'espace $n = 0$ de l'onde de circuit est dominante. Or, celle-ci est à symétrie de révolution. Sous ces hypothèses, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent

$$\partial_t \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\partial_z E_\theta \\ \partial_z E_r - \partial_r E_z \\ \frac{1}{r} \partial_r r E_\theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

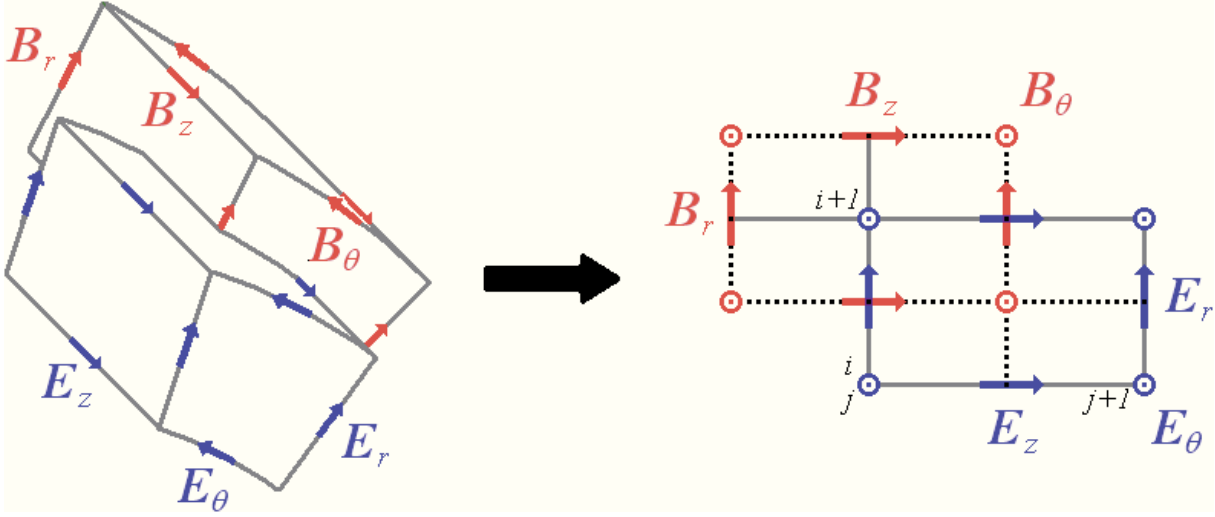


FIGURE 4.1 – Utilisation d'un maillage imbriqué pour résoudre les équations de Maxwell.

$$\partial_t \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} = c^2 \begin{pmatrix} -\partial_z B_\theta \\ \partial_z B_r - \partial_r B_z \\ \frac{1}{r} \partial_r r B_\theta \end{pmatrix} - \frac{1}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

dans la base cylindrique. On approxime les bords du domaine de simulation¹ par un cylindre métallique limité par le rayon interne de l'hélice de telle sorte que les composantes du champ électrique parallèle (E_z et E_θ) à ce cylindre sont nulles. Puisque le problème considéré est à symétrie de révolution, seule la moitié d'une coupe longitudinale de cylindre constitue le domaine de simulation, et on considère des conditions de bord symétriques sur l'axe de celui-ci.

En raison du fait que nous travaillons en domaine temporel, nous avons choisi la méthode des différences finies (FDTD) [39], [40] pour discrétiser les équations (4.1) et (4.2). Cette méthode consiste à approximer les opérateurs aux dérivées partielles ∂_t , ∂_r et ∂_z par des opérateurs aux différences divisées (appelés *schémas*). On peut déterminer ces schémas grâce aux développements de Taylor. En général, il existe plusieurs schémas différents pour approximer un opérateur aux dérivées partielles. Seules des dérivées premières apparaissent dans les équations auxquelles nous nous intéressons. Afin d'intégrer les équations de Maxwell, nous utiliserons par la suite un schéma centré en temps et en espace. Celui-ci consiste à approximer la dérivée d'une fonction $\partial_x f(x, \cdot)$ par ses valeurs en $x - \Delta x/2$ et $x + \Delta x/2$

$$\partial_x f(x, \cdot) \approx \frac{f(x + \Delta x/2, \cdot) - f(x - \Delta x/2, \cdot)}{\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (4.3)$$

où Δx est le pas de discrétisation. L'erreur commise par le schéma est proportionnelle au carré de celui-ci. En divisant par deux le pas de discrétisation, on divise par quatre l'erreur commise par le schéma.

1. le diamètre interne de l'hélice

4.2 Modèle de faisceau à deux dimensions

Le schéma centré est approprié à la discrétisation des équations (4.1) et (4.2). Découpons le domaine de simulation (un rectangle) en mailles rectangulaires de dimensions égales telles que $r_i = i\Delta r$, $z_j = j\Delta z$ et intégrons ces équations à pas de temps Δt constant tel que $t_n = n\Delta t$. En positionnant les inconnues des champs électrique et magnétique sur des maillages imbriqués tel que représenté sur la figure 4.1, on détermine le schéma centré en temps et en espace suivant pour l'équation de Maxwell-Faraday

$$\begin{cases} B_{r_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} &= B_{r_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \frac{E_{\theta_{i,j+1}}^n - E_{\theta_{i,j}}^n}{\Delta z} \\ B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} &= B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[\frac{E_{r_{i+\frac{1}{2},j+1}}^n - E_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^n}{\Delta z} - \frac{E_{z_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^n - E_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta r} \right] \\ B_{z_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} &= B_{z_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{i \Delta r} \left[(i+1)E_{\theta_{i+1,j}}^n - iE_{\theta_{i,j}}^n \right], \end{cases} \quad (4.4)$$

et pour l'équation de Maxwell-Ampère

$$\begin{cases} E_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} &= E_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^n - \Delta t c^2 \frac{B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} j_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} \\ E_{\theta_{i,j}}^{n+1} &= E_{\theta_{i,j}}^n + \Delta t c^2 \left[\frac{B_{r_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{r_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{B_{z_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z_{i-\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} j_{\theta_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \\ E_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} &= E_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^n + \frac{\Delta t c^2}{i \Delta r} \left[(i+\frac{1}{2})B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - (i-\frac{1}{2})B_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} j_{z_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

En premier lieu, on peut remarquer que les instants de calcul du champ électrique et du vecteur d'induction magnétique sont décalés d'un demi pas de temps. Le champ électrique est calculé à chaque multiple entier du pas de temps (exposants n et $n+1$) alors que le vecteur d'induction magnétique est calculé à chaque multiple demi-entier (exposants $n-\frac{1}{2}$ et $n+\frac{1}{2}$). En conséquence, le schéma présenté ci-dessus est bien centré (d'ordre 2) en temps. De plus, en considérant l'équation de Maxwell-Faraday, on remarque que le calcul de chaque composante du champ d'induction magnétique à une position utilise les valeurs du champ électrique situées radialement ou longitudinalement à un demi pas d'espace de chaque côté de celui-ci. Par exemple, le calcul de la composante B_θ au nœud situé en $r_{i+\frac{1}{2}}$ et $z_{j+\frac{1}{2}}$ fait intervenir les champs électriques radiaux situés à la même position radialement mais décalés d'une distance $\Delta z/2$ à gauche et à droite de celui-ci ainsi que les champs électriques axiaux situés à la même position longitudinalement mais décalés d'une distance $\Delta r/2$ au dessus et en dessous de celui-ci. En d'autres termes, le calcul de B_θ fait intervenir la boucle de champ électrique située autour de celui-ci. Un raisonnement similaire peut être fait pour toutes les composantes du champ électromagnétique. Le schéma utilisé est donc aussi centré en espace. Notons que, dans les équations (4.35), chaque composante de la densité de courant devra être estimée à la même position que sa composante de champ électrique correspondante si l'on souhaite conserver la précision d'ordre 2 du schéma en espace.

4.2.2 Principes de la méthode "Particle in Cell"

La résolution de l'équation de Maxwell-Ampère fait intervenir la densité de courant du faisceau. Ainsi, pour calculer l'état du champ électrique au pas de temps $n + 1$, il faut à la fois avoir estimé :

- l'état du champ électrique au pas de temps n ,
- l'état du vecteur d'induction magnétique au pas de temps $n + \frac{1}{2}$,
- la densité de courant du faisceau au pas de temps $n + \frac{1}{2}$.

Il existe un certain nombre de méthodes permettant d'évaluer cette quantité, dont les trois principales en physique des plasmas sont le modèle fluide, le modèle de Vlasov et enfin le modèle "particle in cell" (PIC). Le modèle fluide ne peut pas être utilisé pour étudier les phénomènes proches de la saturation d'un TOP, régime dans lequel la plupart des TOP fonctionnent, car la vitesse fluide ne peut être multivaluée en un point de l'espace. L'équation de Vlasov, quant à elle, nécessiterait à chaque pas de temps l'estimation d'une fonction de distribution en cinq dimensions pour chaque point du maillage. Elle donnerait donc lieu à des problèmes de stockage mémoire et de temps de calcul. Dans le cadre de ce modèle à deux dimensions, nous avons donc choisi d'utiliser la méthode PIC qui, comme nous le préciserons ultérieurement, possède elle aussi ses faiblesses. Néanmoins, celle-ci est assez générale et légère pour traiter les phénomènes non-linéaires en un temps raisonnable et avec une précision suffisante.

Dans la méthode PIC, le faisceau d'électrons est représenté par une assemblée de particules chargées. Celles-ci peuvent se déplacer en tout point du domaine que l'on considère, et pas seulement sur les nœuds du maillage. Aussi, pour estimer la densité de charge et la densité de courant sur les nœuds du maillage, il est nécessaire d'interpoler. Évidemment, tous les électrons ne sont pas simulés et on introduit un objet appelé *macro-particule* qui peut être vu comme un groupement de particules ayant une certaine forme dont va dépendre l'interpolation. Autrement dit, dans la méthode PIC, on calcule les densités de charge et de courant du faisceau grâce aux relations

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_p q_p S_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p, t) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_p q_p \mathbf{v}_p S_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p, t) \quad (4.7)$$

où q_p est la charge totale portée par la macro-particule p , $\mathbf{v}_p$ est sa vitesse et S_p est la fonction de forme associée. À titre d'exemple, la fonction de forme associée à un seul électron pourrait être une distribution de Dirac. Dans le cas d'une macro-particule, on cherche à interpoler la charge et le courant sur les nœuds d'un maillage de telle sorte que la distribution choisie est différente d'un pic de Dirac. Il existe une multitude de fonctions de forme couramment utilisées. L'une d'entre elles par exemple consiste à assigner la charge totale d'une macro-particule au nœud le plus proche (Nearest Grid Point method). Cette méthode a néanmoins l'inconvénient de créer

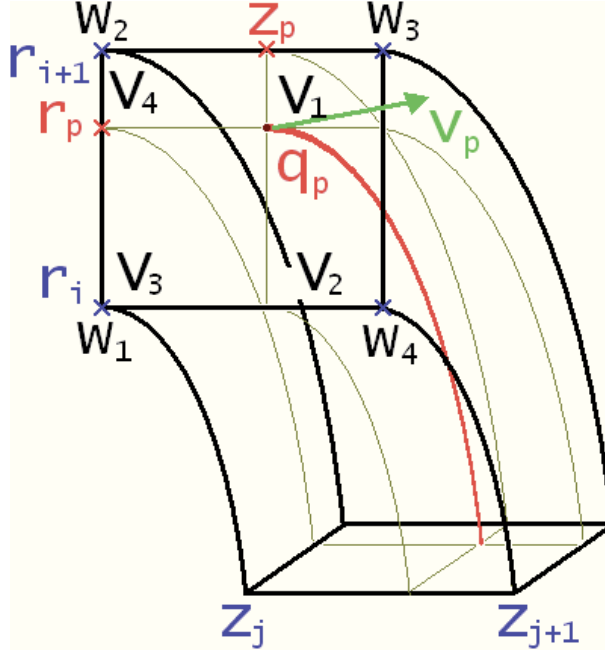


FIGURE 4.2 – Interpolation linéaire de la charge d’une particule sur les nœuds du maillage.

de brusques sauts de densité, tout particulièrement quand le nombre de particules par maille est faible.

Afin de régler ce problème, nous avons utilisé une méthode d’interpolation linéaire qui consiste à assigner la charge d’une particule aux quatre nœuds les plus proches de la macro-particule. Le poids assigné à chaque nœud est calculé en fonction de la distance qui le sépare de la macro-particule. Dans le cas cylindrique à deux dimensions, une macro-particule est assimilée à un cercle ayant pour centre l’axe du tube. Cette macro-particule découpe une maille en quatre couronnes de volumes généralement différents (voir figure 4.2). L’interpolation linéaire que nous utilisons revient à pondérer la charge associée à chaque nœud du maillage par une quantité proportionnelle au volume de la couronne diagonalement opposée à celui-ci (voir figure 4.2). Ce volume est rapporté au volume total de la maille afin de conserver la charge totale de la macro-particule. Ainsi, les poids associés aux différents nœuds de la figure 4.2 sont

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{V_1}{V_{\text{tot}}} \\
 w_2 &= \frac{V_2}{V_{\text{tot}}} \\
 w_3 &= \frac{V_3}{V_{\text{tot}}} \\
 w_4 &= \frac{V_4}{V_{\text{tot}}}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

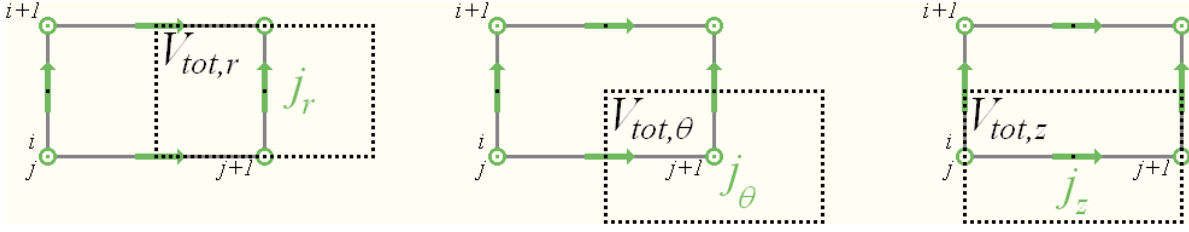


FIGURE 4.3 – En utilisant des maillages imbriqués, V_{tot} varie selon la composante que l'on cherche à calculer.

et on calcule la contribution de la macro-particule à la densité de charge à chaque nœud du maillage par les relations

$$\begin{aligned}
 \rho_{i,j} &= \frac{w_1}{V_{\text{tot}}} q_p \\
 \rho_{i+1,j} &= \frac{w_2}{V_{\text{tot}}} q_p \\
 \rho_{i+1,j+1} &= \frac{w_3}{V_{\text{tot}}} q_p \\
 \rho_{i,j+1} &= \frac{w_4}{V_{\text{tot}}} q_p
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\rho_{i,j}$ est la contribution de la macro-particule à la densité de charge au nœud (i, j) , V_{tot} est le volume total de la maille (i, j) (dépendant du rayon), q_p est la charge de la macro-particule et $\mathbf{v}_p$ sa vitesse. D'après l'équation (4.35) seule la densité de courant nous intéresse pour calculer la dynamique du champ électrique. Puisque nous avons choisi d'utiliser des maillages imbriqués, le volume total V_{tot} peut varier d'une composante de la densité de courant à l'autre comme illustré sur la figure 4.3. Sur cette figure, nous avons représenté le maillage associé au calcul de la densité de courant. On remarque que les volumes totaux $V_{\text{tot},z}$ et $V_{\text{tot},\theta}$ utilisés pour estimer la pondération nécessaire au calcul des composantes j_z et j_θ de la densité de courant sont égaux

$$V_{\text{tot},z} = V_{\text{tot},\theta} = \pi \Delta r \Delta z 2i. \tag{4.10}$$

En revanche, le volume $V_{\text{tot},r}$, nécessaire au calcul de la pondération pour la composante j_θ , vaut

$$V_{\text{tot},r} = \pi \Delta r \Delta z (2i + 1). \tag{4.11}$$

Par extension, les volumes $V_{i=1,2,3,4}$ sont eux aussi différents selon la composante à laquelle on s'intéresse. Cette particularité est prise en compte dans le code à deux dimensions résultant de ce modèle.

4.2.3 Intégration des équations du mouvement des électrons

Lors de l'interaction, une macro-particule est soumise à la fois aux champs électriques de charge d'espace et de circuit ainsi qu'aux champs d'induction magnétique induit et de circuit.

4.2 Modèle de faisceau à deux dimensions

Ces champs sont définis aux nœuds de l'un ou l'autre des maillages imbriqués que nous avons détaillés dans la section 4.2.1. Puisque les macro-particules peuvent voyager dans tout le domaine de simulation et pas seulement sur les nœuds du maillage, il faut interpoler le champ de force total à l'endroit où chacune de celles-ci se trouve à partir des champs définis sur les nœuds du maillage. L'interpolation choisie est similaire à celle que nous avons utilisée dans la partie précédente, à la différence près que cette interpolation se fait à présent dans le sens inverse (on interpole une quantité à partir des nœuds du maillage vers les macro-particules).

Afin d'intégrer les équations relativistes du mouvement des particules, on utilise encore une fois un schéma centré

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{q}{m_0} \left[\mathbf{E}^n + \frac{\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}}}{2\gamma^n} \times \mathbf{B}^n \right] \\ \frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma^{n+\frac{1}{2}}}, \end{cases} \quad (4.12)$$

où γ^n est le paramètre relativiste de la macro-particule au temps $t = n \Delta t$, $\mathbf{u}^n = \gamma^n \mathbf{v}^n$, m_0 est la masse de la macro-particule au repos et q est sa charge. Notons que les champs électrique $\mathbf{E}^n$ et d'induction magnétique $\mathbf{B}^n$ résultent de l'interpolation décrite au paragraphe précédent. L'intégration de ces équations est effectuée par la méthode de Boris [35] en coordonnées cylindriques. Dans cette méthode, le mouvement d'une macro-particule durant un pas de temps est scindé en un demi-mouvement d'accélération dû au champ électrique, suivi de deux demi-mouvements de rotation dû au champ magnétique, suivi d'un dernier demi-mouvement d'accélération dû au champ électrique. Pour ce faire, on pose

$$\begin{cases} \mathbf{u}_- &= \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{q\Delta t}{2m_0} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{u}_+ + \frac{q\Delta t}{2m_0} \mathbf{E}^n \end{cases} \quad (4.13)$$

où $\mathbf{u}_-$ est la vitesse de la macro-particule après la première demi accélération, $\mathbf{u}_+$ est sa vitesse à l'issue de la rotation suivant la première demi-accélération et $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ est sa vitesse à la fin du pas de temps. En introduisant les relations (4.13) dans la première équation de (4.12), on détermine l'équation suivante

$$\frac{\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-}{\Delta t} = \frac{q}{m_0} \frac{\mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_-}{2\gamma^n} \times \mathbf{B}^n \quad (4.14)$$

qui correspond bien à un mouvement de rotation seul. Les trois composantes de la vitesse sont calculées mais on ne résout la seconde équation de (4.12) que pour les composantes radiale et axiale. Remarquons ici que les vitesses des macro-particules sont estimées chaque multiple demi-entier du pas de temps $n + \frac{1}{2}$ ce qui permet d'en déduire les composantes de la densité de courant aux mêmes instant, comme requis par l'équation (4.35).

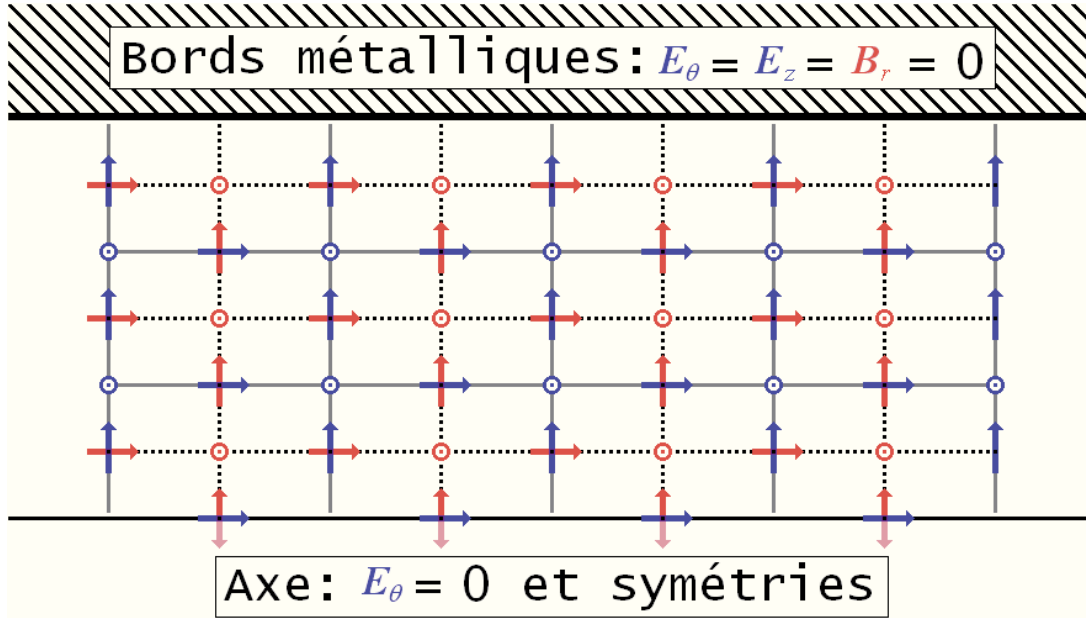


FIGURE 4.4 – Conditions aux bords sur l'axe et sur le bord métallique du domaine.

4.2.4 Conditions aux bords

Dans les trois sections précédentes, nous avons expliqué le calcul numérique

- des champs induits par le faisceau.
- de la dynamique du faisceau sous l'action de ces champs.

Il reste néanmoins à détailler les conditions aux bords du domaine fermant les équations de Maxwell.

4.2.4.1 Sur le bord métallique et sur l'axe du domaine

Le domaine de simulation est un cylindre métallique à base circulaire. Seule la moitié d'une section de cylindre est simulée. Nous cherchons donc à poser des conditions aux bords du domaine pour que le problème de Maxwell soit bien posé sur le bord métallique de ce cylindre ainsi que sur son axe de révolution. On sait poser mathématiquement la condition sur le bord métallique concernant le champ électrique

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

On doit donc poser que $E_z = E_\theta = 0$ sur la surface. Grâce au maillage imbriqué que nous avons choisi, aucune condition n'a besoin d'être posée sur la composante radiale E_r puisque sa valeur sur la surface n'a pas besoin d'être connue. On s'intéressera seulement à cette composante à une demie maille radiale en deçà de la surface. La condition sur cette surface pour la composante radiale du champ magnétique B_r est évidente puisque le champ électrique est purement radial

$$B_r = 0. \quad (4.16)$$

4.2 Modèle de faisceau à deux dimensions

Les composantes azimutale et axiale du champ magnétique sur la surface n'ont, elles non plus, pas besoin d'être connues. On voit donc que le maillage imbriqué simplifie grandement les conditions aux bords.

Sur l'axe, il est tout d'abord évident que le champ électrique azimutal E_θ est nul. En conséquence, la composante radiale du champ d'induction magnétique B_r l'est aussi. Ainsi, le calcul de la composante axiale du champ électrique ne dépendra que de la densité de courant du faisceau sur l'axe.

4.2.4.2 Injection du faisceau

Par la suite, nous nous intéresserons aux phénomènes ayant lieu dans la section d'interaction uniquement. Peu nous importe l'état du faisceau dans l'espace situé entre la ligne et la cathode. La figure 4.5 représente l'état du système dans le plan d'entrée. Le faisceau, de rayon b , transite dans le tube métallique de rayon a . La densité de charge du faisceau, supposée uniforme, est définie par

$$\rho_0 = \frac{I_0}{\pi b^2 \sqrt{2\eta V_k}} \quad (4.17)$$

où I_0 est le courant du faisceau et V_k est la tension à la cathode. On peut utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique de charge d'espace dû à la présence du faisceau en fonction du rayon. D'après la géométrie du problème, ce champ est purement radial. On démontre facilement que

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r, & \text{si } r \in [0, b] \\ E_r(r) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{b^2}{r}, & \text{si } r \in [b, a], \end{aligned} \quad (4.18)$$

ce qui nous donne la condition à poser pour le champ électrique sur le bord d'injection du faisceau d'électrons. Il faut ensuite déterminer les vitesses des particules correspondant à ce champ d'entrée. En utilisant les relations (4.18), on déduit facilement le potentiel de charge d'espace en fonction du rayon

$$\begin{aligned} V(r) &= V(0) + \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0}, & \text{si } r \in [0, b] \\ V(r) &= V(0) + \frac{\rho_0 b^2}{4\epsilon_0} \left[1 + 2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right], & \text{si } r \in [b, a]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le potentiel sur l'axe $V(0)$ est inconnu. Cependant, puisque le potentiel en $r = a$ est égal au potentiel de la cathode qui peut être mesuré, on peut exprimer V_0 en fonction de V_k grâce à la

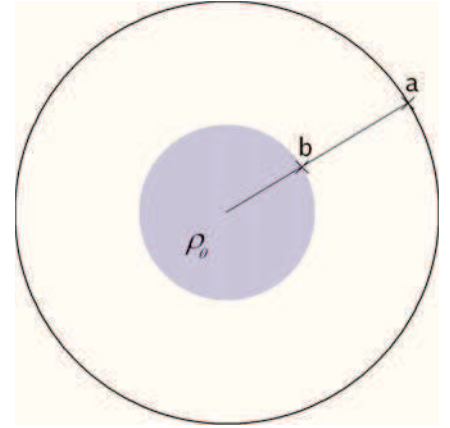


FIGURE 4.5 – Schéma du faisceau dans le plan d'entrée.

seconde expression de l'équation (4.19)

$$V(0) = V_k - \frac{\rho_0 b^2}{4\epsilon_0} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right]. \quad (4.20)$$

En introduisant cette relation dans la première équation de (4.19), on obtient le potentiel de charge d'espace en fonction du rayon à l'intérieur du faisceau en fonction de paramètres connus

$$V(r) = V_k - \frac{\rho_0 b^2}{4\epsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{b^2} + 2 \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right]. \quad (4.21)$$

Pour chaque particule, la loi de conservation de l'énergie doit être respectée à l'injection. En supposant que le faisceau traverse le plan d'entrée sans vitesse radiale, celle-ci s'écrit

$$\frac{1}{2} (v_{p,\theta}^2 + v_{p,z}^2) = \eta V(r_p), \quad (4.22)$$

où $v_{p,\theta}$ et $v_{p,z}$ sont les vitesses azimutale et axiale de la particule traversant le plan d'entrée au rayon $r = r_p$. La composante $v_{p,\theta}$ peut être facilement déterminée en connaissant les champs d'induction magnétique dans le plan d'entrée B_0 ainsi que sur la cathode B_k grâce à la relation de Busch [41]. En supposant que la cathode est plane et circulaire de rayon r_k , celle-ci s'écrit

$$v_{p,\theta} = \frac{\eta r_p}{2} \left[B_0 - \left(\frac{r_k}{r_p} \right)^2 B_k \right], \quad (4.23)$$

et on détermine ainsi la vitesse axiale de la particule en utilisant cette relation et les relations (4.21) et (4.22)

$$v_{p,z} = \sqrt{2\eta V(r_p) - v_{p,\theta}^2}. \quad (4.24)$$

L'établissement de conditions aux limites pour le champ d'induction magnétique sur le plan d'entrée est aussi nécessaire. Celles-ci peuvent être déterminées grâce à la vitesse azimutale des particules que nous venons de déterminer. Sur le plan d'entrée, seul $B_z(r)$ doit être déterminé. En combinant l'équation de Maxwell-Ampère stationnaire et le théorème du rotationnel, on peut établir la relation suivante

$$\int_S \mathbf{B} \times \mathbf{n} dS = \mu_0 \int \mathbf{j} dV. \quad (4.25)$$

En considérant un volume de longueur dz , les contributions du membre de droite sur les surfaces circulaires du volume se compensent et l'équation précédente s'écrit

$$\oint (B_z \mathbf{u}_\theta - B_\theta \mathbf{u}_z) dl = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r (j_z \mathbf{u}_z + j_\theta \mathbf{u}_\theta) r' dr' d\theta. \quad (4.26)$$

4.2 Modèle de faisceau à deux dimensions

où $\mathbf{u}_z$ et $\mathbf{u}_\theta$ sont des vecteurs unitaires dans les directions longitudinale et azimutale respectivement. Pour déterminer B_z , il faut donc résoudre l'équation

$$rB_z = \mu_0 \int_0^r j_\theta r' dr', \quad (4.27)$$

où

$$j_\theta(r) = \begin{cases} v_\theta(r) \rho_0 & \text{si } r \in [0, b] \\ 0 & \text{si } r \in [b, a] . \end{cases} \quad (4.28)$$

En utilisant la relation (4.23) qui est valable pour une trajectoire entrant à n'importe quel rayon r , on prouve alors facilement que

$$\begin{aligned} B_z(r) &= \frac{\mu_0 \rho_0 \eta}{2} \left[\frac{B_0 r^2}{3} - B_k r_k^2 \right] & \text{si } r \in [0, b] \\ B_z(r) &= \frac{\mu_0 \rho_0 \eta}{2r} \left[\frac{B_0 b^3}{3} - B_k r_k^2 b \right] & \text{si } r \in [b, a] . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le problème est alors bien posé en entrée de domaine.

4.2.4.3 Condition PML

Puisque l'approche utilisée pour simuler le faisceau d'électrons est une approche électromagnétique, une onde se propageant dans le tube serait totalement réfléchi en bout de section si rien n'était fait pour l'évacuer. Nous souhaitons éviter cet effet indésirable. Ceci peut être effectué en introduisant des conditions aux limites absorbantes. Il en existe de plusieurs types [42], [43], [44]. Parmi celles-ci, nous avons choisi d'utiliser la condition "Perfectly Matched Layer" (PML) de Béranger. Celle-ci a pour avantages d'être valable sur une très large bande de fréquence et de requérir peu de ressources machine comparé à d'autres méthodes. On peut trouver le formalisme cylindrique de cette condition d'absorption dans [45]. Celle-ci a de plus déjà été implémentée dans un code "particle in cell" [46]. Nous avons donc pu nous inspirer de ces travaux pour traiter notre problème.

Supposons qu'une onde se propage d'un milieu A vers un milieu B . À l'interface située entre ces deux milieux, une portion de l'onde sera réfléchi vers le milieu A et la portion restante sera transmise vers le milieu B . La quantité de réflexions à une fréquence particulière est donnée par la relation

$$\rho = \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + Z_A}, \quad (4.30)$$

où $Z_{m=A,B}$ sont les impédances des deux milieux définies par leurs constantes diélectrique ϵ_m et magnétique μ_m comme

$$Z_m = \sqrt{\frac{\mu_m}{\epsilon_m}}. \quad (4.31)$$

Si $Z_A = Z_B$, alors la quantité de réflexions à l'interface des deux milieux est nulle. Pour notre problème particulier, la condition PML consiste à relier l'extrémité de la section d'impédance Z_A , représentant le tube, à un milieu fictif d'impédance $Z_B = Z_A$, afin d'annuler les réflexions à l'extrémité du tube. Néanmoins, une onde se propageant dans le milieu B , que nous appellerons "couche PML", finirait par se réfléchir à l'extrémité de celui-ci. En conséquence, il faut que les constantes diélectrique et magnétique dans la couche PML soient complexes afin que l'onde se soit atténuée suffisamment avant d'avoir atteint le bord de celle-ci.

Dans le cas où le milieu A n'est pas un diélectrique, il est possible, grâce à l'approche utilisée par D. M. Sullivan dans [47], de réécrire les équations de Maxwell dans tout le domaine sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t B_r(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} B_r(\mathbf{r}, t) & = & -(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_r \\ \partial_t B_\theta(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} B_\theta(\mathbf{r}, t) & = & -(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_\theta \\ \partial_t B_z(\mathbf{r}, t) & = & -(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_z \\ & & - \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} \int_0^t (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_z \cdot dt' \end{array} \right. \quad (4.32)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_t E_r(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} E_r(\mathbf{r}, t) & = & c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_r - \frac{1}{\epsilon_0} j_r \\ \partial_t E_\theta(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} E_\theta(\mathbf{r}, t) & = & c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_\theta - \frac{1}{\epsilon_0} j_\theta \\ \partial_t E_z(\mathbf{r}, t) & = & c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_z - \frac{1}{\epsilon_0} j_z \\ & & + \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} \int_0^t c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_z - \frac{1}{\epsilon_0} j_z \cdot dt', \end{array} \right. \quad (4.33)$$

où $\sigma(z)$ est une conductivité fictive valant zéro dans le milieu A et étant croissante dans la couche PML. Ces équations sont ensuite discrétisées dans le formalisme des différences finies. Il est de plus possible de les intégrer dans un schéma centré en temps et en espace comme nous

4.2 Modèle de faisceau à deux dimensions

l'avons fait dans les équations (4.34) et (4.35). Dans la couche PML, celles-ci deviennent

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B_{r_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{\gamma_{j+\frac{1}{2}}}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}} B_{r_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}} \frac{E_{\theta_{i,j+1}}^n - E_{\theta_{i,j}}^n}{\Delta z} \\ B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{\gamma_{j+\frac{1}{2}}}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}} B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{E_{r_{i+\frac{1}{2},j+1}}^n - E_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^n}{\Delta z} - \frac{E_{z_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^n - E_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta r} \right] \\ B_{z_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} & = & B_{z_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{i \Delta r} \left[(i+1) E_{\theta_{i+1,j}}^n - i E_{\theta_{i,j}}^n \right] \\ & & + \frac{\sigma_j}{\epsilon_0} \sum_{k=0}^n \frac{\Delta t^2}{i \Delta r} \left[(i+1) E_{\theta_{i+1,j}}^k - i E_{\theta_{i,j}}^k \right] \end{array} \right. \quad (4.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} & = & \frac{\gamma_j}{\alpha_j} E_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^n - \frac{\Delta t c^2}{\alpha_j} \frac{B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \alpha_j} j_{r_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} \\ E_{\theta_{i,j}}^{n+1} & = & \frac{\gamma_j}{\alpha_j} E_{\theta_{i,j}}^n + \frac{\Delta t c^2}{\alpha_j} \left[\frac{B_{r_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{r_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{B_{z_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z_{i-\frac{1}{2},j}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \alpha_j} j_{\theta_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \\ E_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} & = & E_{z_{i,j+\frac{1}{2}}}^n + \frac{\Delta t c^2}{i \Delta r} \left[\left(i + \frac{1}{2}\right) B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - \left(i - \frac{1}{2}\right) B_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} j_{z_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \\ & & + \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\epsilon_0} \sum_{k=0}^n \frac{\Delta t^2 c^2}{i \Delta r} \left[\left(i + \frac{1}{2}\right) B_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{k+\frac{1}{2}} - \left(i - \frac{1}{2}\right) B_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{k+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t^2}{\epsilon_0} j_{z_{i,j}}^{k+\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (4.35)$$

où

$$\alpha_j = 1 + \frac{\sigma_j \Delta t}{2\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \gamma_j = 1 - \frac{\sigma_j \Delta t}{2\epsilon_0}. \quad (4.36)$$

Il a été démontré empiriquement [17] qu'une utilisation optimale de la méthode PML était obtenue lorsque

$$\sigma_j = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0}{\Delta t} \left(\frac{j}{N_{\text{pml}}} \right)^3, \quad j \geq 0, \quad (4.37)$$

où $j = 0$ correspond au nœud situé à l'interface entre la section simulée et la couche PML et N_{pml} est la largeur, en nombre de nœuds, de la couche PML.

4.2.5 Raffinements nécessaires

Nous nous sommes pour l'instant appliqués à bien poser le problème de la dynamique du faisceau d'électrons en termes de conditions aux bords et de schéma d'intégration des équations de la physique. Un schéma descriptif de l'algorithme utilisé dans le code de faisceau d'électrons que nous avons écrit est présenté en figure 4.6. Nous avons commencé cette étude par la simulation d'un faisceau confiné dans un cylindre métallique décrit par les caractéristiques reportées en table 4.1.

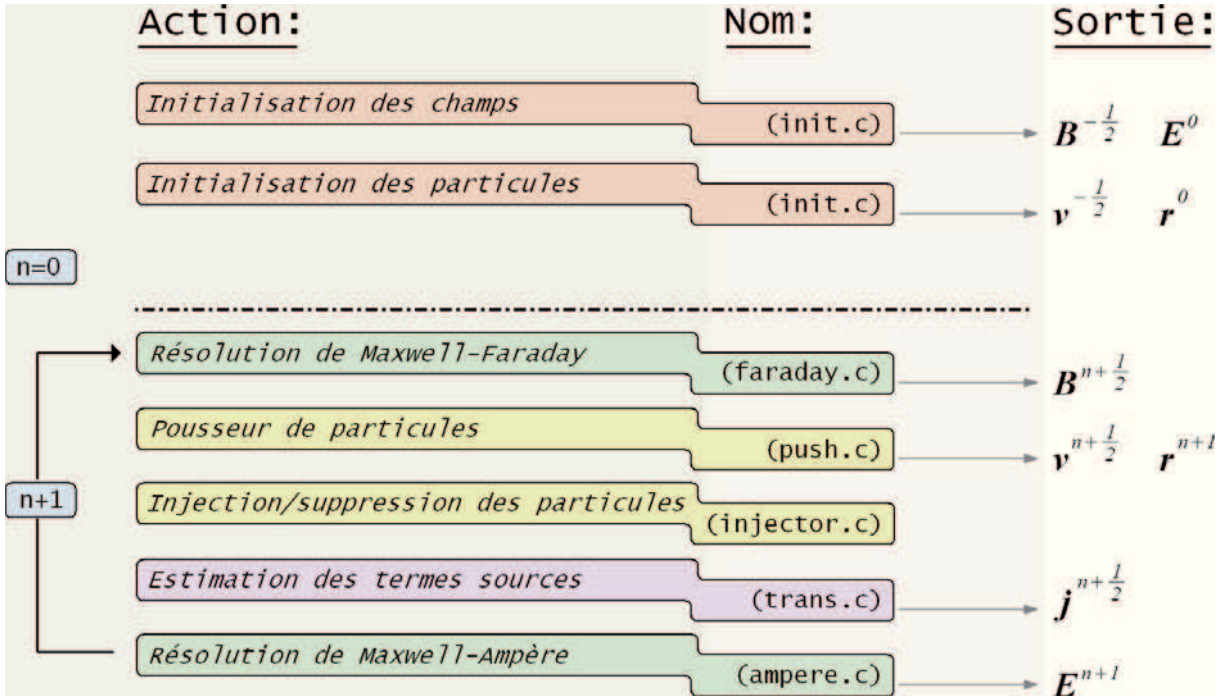


FIGURE 4.6 – Schéma descriptif de l'algorithme de la partie du code d'interaction résolvant la dynamique des électrons par la méthode PIC.

Chez Thales Electron Devices, un certain nombre de codes permettent de simuler la dynamique d'un flux d'électrons dans une géométrie donnée. Parmi ceux-ci, le code MVTRAD-2D, un code fréquentiel utilisé pour étudier l'interaction dans les TOP, permet de visualiser l'état des particules. Ce code est lui aussi un code PIC. Cependant :

- Le faisceau du code MVTRAD est un faisceau dit "électrostatique". On résout explicitement $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$ et une correction relativiste est apportée pour obtenir le champ magnétique.
- Le code MVTRAD-2D est un code dit fréquentiel pour la propagation de l'onde de circuit et temporel pour la propagation du faisceau d'électrons.

Dans le code MVTRAD, il est possible de faire travailler le tube avec ou sans HF. Ainsi, en l'absence de signal HF, si on utilise les mêmes paramètres d'entrée (voir table 4.1) dans le code MVTRAD et dans le code temporel de faisceau décrit dans les sections précédentes, on devrait trouver des résultats proches.

La figure 4.7 représente les positions (r, z) des particules du faisceau simulé lorsque le régime stationnaire est établi avec MVTRAD (figure 4.7-(a)) et avec le code de faisceau temporel (figure 4.7-(b)) après 15000 Δt , une durée qui, d'après la valeur de Δt , est largement

Tension faisceau	$V_k = 29 \text{ kV}$
Courant faisceau	$I_k = 5.8 \text{ A}$
Rayon faisceau	$b = 1 \text{ mm}$
Rayon hélice	$a = 2.5 \text{ mm}$
Champ magnétique ligne	$B_0 = 1500 \text{ G}$
Champ magnétique cathode	$B_k = 300 \text{ G}$
Rayon cathode	$r_k = 2.55 \text{ mm}$
Longueur section	$l_z = 81 \text{ mm}$
Pas de temps	$\Delta t = 0.15 \text{ ps}$

TABLE 4.1 – Paramètres d'entrée du code de faisceau d'électrons.

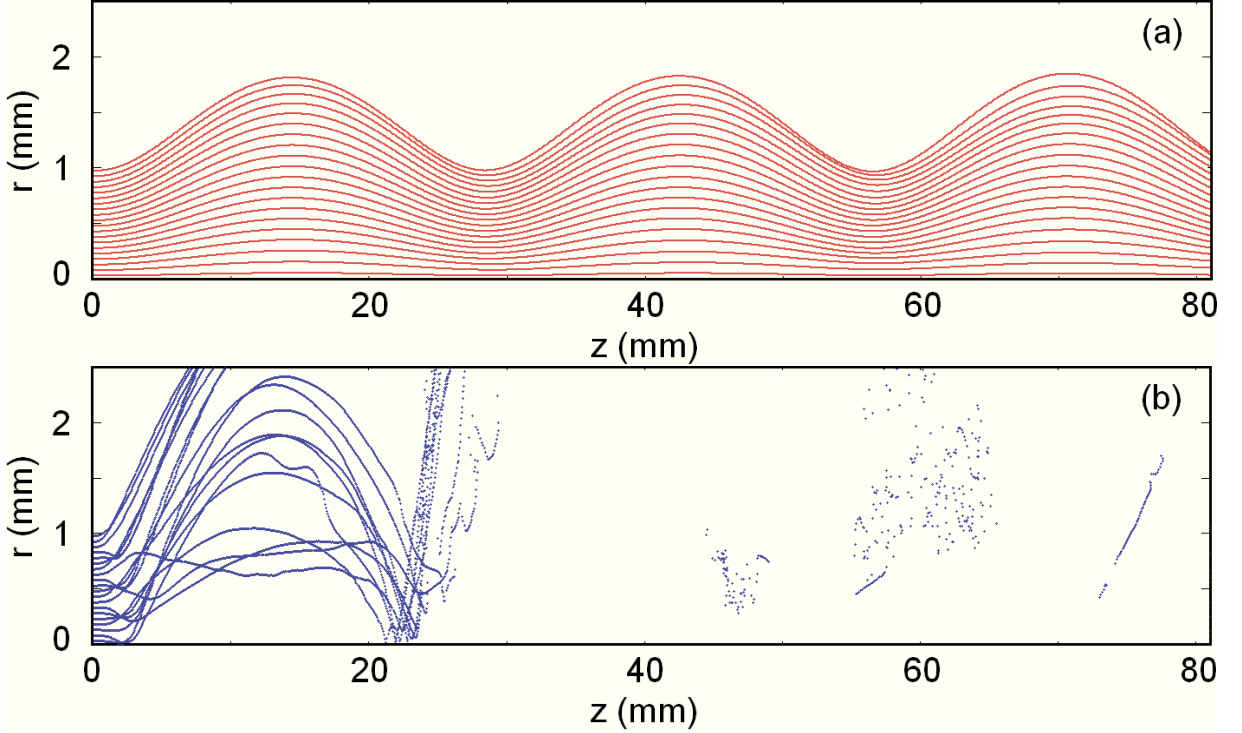


FIGURE 4.7 – Comparaison entre les faisceaux obtenus avec MVTRAD sans puissance d'entrée (en rouge) et le code issu du modèle PIC temporel (en bleu).

supérieure au temps de remplissage du domaine par le faisceau ($5500 \Delta t$). On peut remarquer que les trajectoires des particules obtenues par les deux codes de simulation sont très différentes. Puisqu'il a déjà été validé, le code **MVTRAD** peut être pris comme référence, on en déduit que notre code doit être amélioré.

4.2.5.1 Correction de Poisson

Les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday sont consistantes avec les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Poisson en posant l'équation de conservation de la charge

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.38)$$

Dans un code PIC, du fait de l'interpolation utilisée pour estimer ρ et $\mathbf{j}$, l'équation (4.38) peut ne pas être vérifiée ce qui implique alors que les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday ne sont plus consistantes avec l'équation de Maxwell-Poisson. Nous avons choisi d'utiliser la méthode de Marder [48] pour résoudre ce problème.

La correction de Poisson de Marder consiste à ajouter à l'équation de Maxwell-Ampère un pseudo courant proportionnel au gradient de l'erreur commise sur l'équation de Maxwell Poisson

$$\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.39)$$

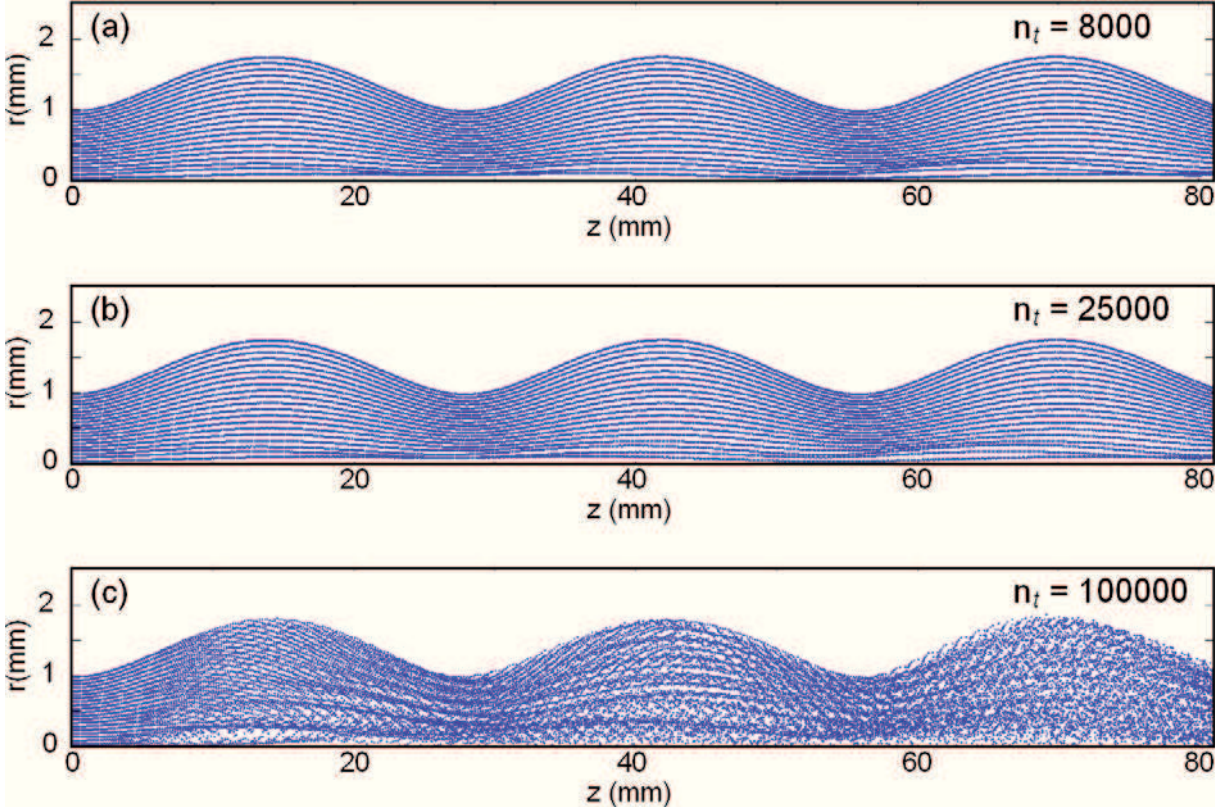


FIGURE 4.8 – Position des particules du faisceau à différents instants de la simulation, $n_t = 8\,000$ (haut), $n_t = 25\,000$ (centre), $n_t = 100\,000$ (bas).

$$\partial_t \mathbf{E} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} + D \nabla F, \quad (4.40)$$

où D est un coefficient de diffusion arbitrairement choisi. En utilisant les trois équations précédentes, on démontre facilement que F vérifie alors l'équation de diffusion suivante

$$\partial_t F - D \Delta F = -\frac{1}{\epsilon_0} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho). \quad (4.41)$$

Ainsi, l'algorithme revient à faire diffuser l'erreur $F(\mathbf{r}, t)$ vers les bords du domaine. Une routine effectuant la correction de Marder a été implémentée dans notre code de faisceau temporel. Cette routine vient, en toute logique, s'appliquer après celle calculant le champ électrique. Il s'agit d'une routine itérative. L'erreur à l'équation de Poisson, F^0 , est tout d'abord calculée dans tout le domaine. Puis le terme correctif $D \nabla F^0$ est ensuite ajouté dans l'équation (4.40). Une nouvelle erreur F^1 est ensuite calculée avec le champ corrigé, et le terme $D \nabla F^1$ est de nouveau ajouté dans l'équation (4.40). Puis, on itère le processus.

La figure 4.8-(a) représente la position (r, z) des électrons du faisceau après $8000 \Delta t$. On voit sur cette figure que l'utilisation de la correction de Marder n'a pas été vaine. En effet, les trajectoires des particules obtenues avec MVTRAD et avec le code temporel sont maintenant similaires. Ces $8000 \Delta t$ correspondent à un temps légèrement supérieur au temps de transit des électrons le long de la section. Ainsi, pour le premier mode de propagation d'un tube à hélice,

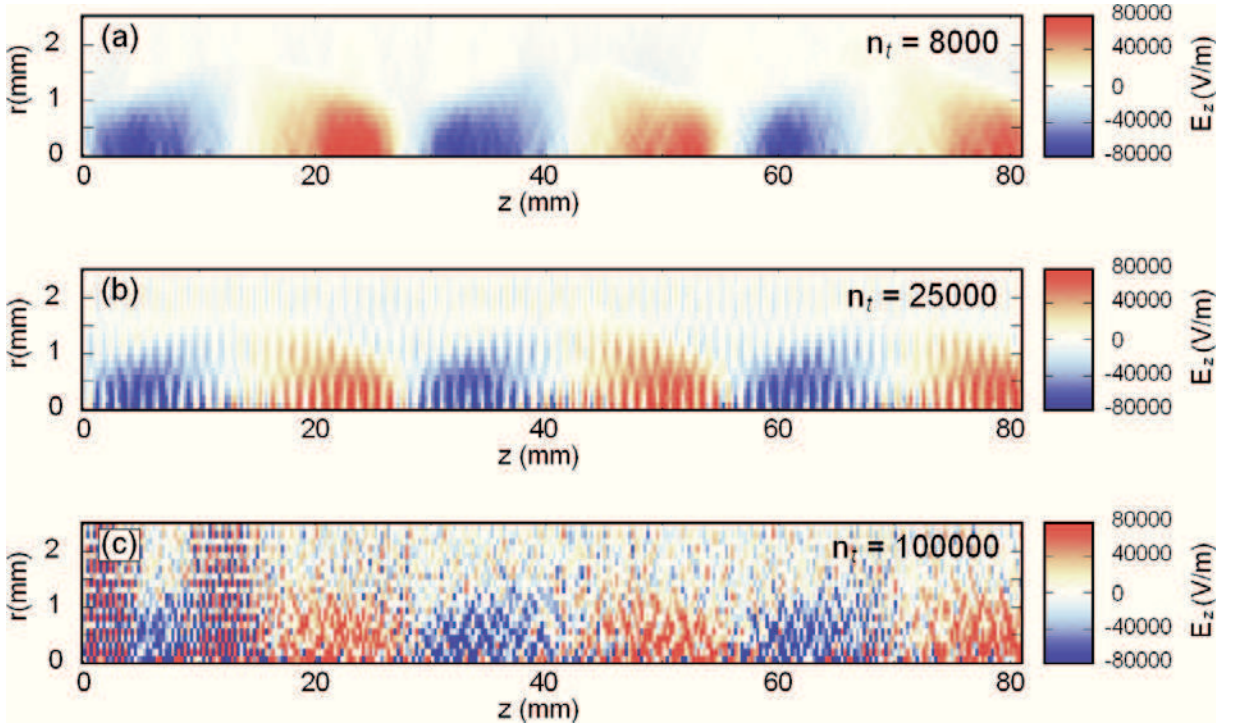


FIGURE 4.9 – Carte de la composante longitudinale E_z du champ électrique à différents instants de la simulation, $n_t = 8000$ (haut), $n_t = 25000$ (centre), $n_t = 100000$ (bas).

puisque la vitesse de groupe de l'onde de circuit est proche de sa vitesse de phase, ce temps serait suffisant pour estimer le gain d'un tube à une fréquence donnée.

Néanmoins, si on souhaite étudier des phénomènes ayant lieu sur des temps longs, il faut s'assurer que le faisceau reste stable. Les figures 4.8 et 4.9 représentent les positions des électrons du faisceau et la composante longitudinale du champ de charge d'espace après $8000\Delta t$, $25000\Delta t$ et $100000\Delta t$. On voit qu'au bout de 100000 pas de temps, le faisceau s'est écarté de l'état stationnaire de référence.

La figure 4.11-(a) représente le spectre de puissance en fonction du nombre d'onde de la composante longitudinale du champ de charge d'espace aux instants $8000\Delta t$ (en trait plein rouge), $25000\Delta t$ (en tirets et pointillés bleus) et $100000\Delta t$ (en tirets vert). Au cours du temps, les composantes de petite longueur d'onde (grandes valeurs de β) qui, au départ, sont négligeables devant les composantes de grande longueur d'onde (correspondant aux variations de diamètre du faisceau), deviennent de plus en plus fortes. Il convient de pallier à cet effet indésirable du modèle.

4.2.5.2 Lissage spatial

Les instabilités numériques que nous avons présentées au paragraphe précédent sont bien connues [35], tout comme les moyens de s'en affranchir. Dans les codes où les conditions aux bords sont périodiques, une manière de procéder est de venir directement filtrer les composantes

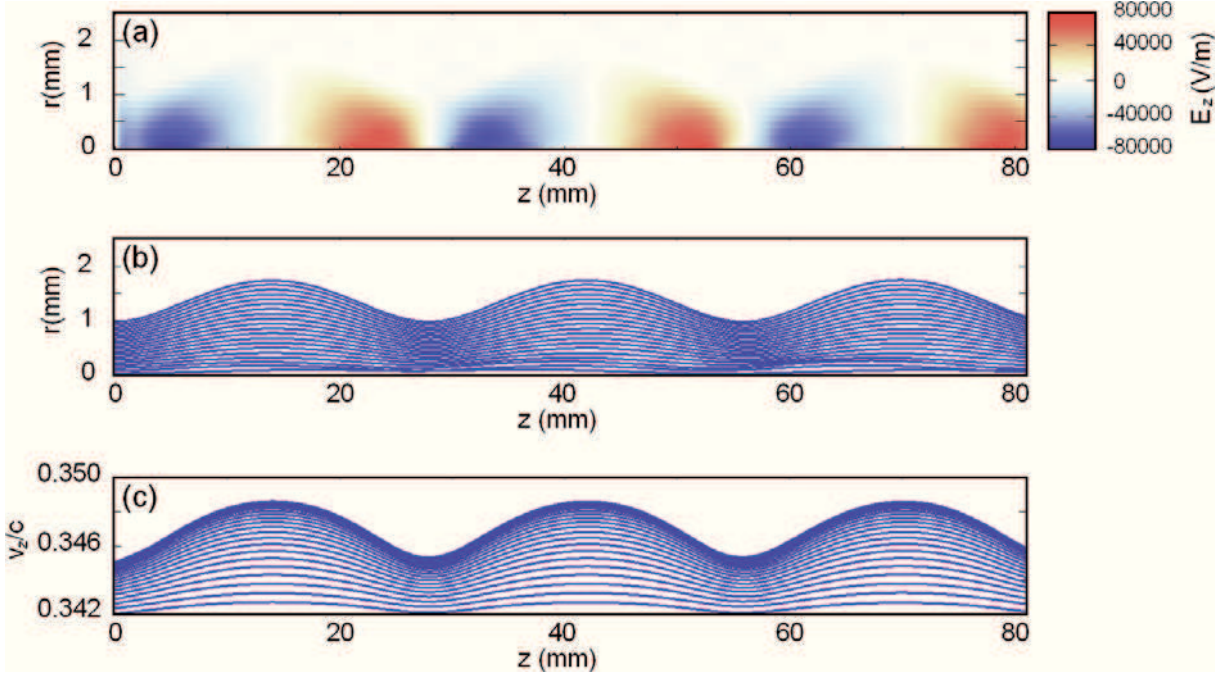


FIGURE 4.10 – Après 5 000 000 de pas de temps avec le lissage spatial : (a) - champ électrique longitudinal de charge d'espace. (b) - position (z, r) des particules. (c) - espace des phases $(z, v_z/c)$.

de longueur d'onde parasites dans l'espace de Fourier. Cette méthode a l'avantage d'être en général très rapide en utilisant l'algorithme "Fast Fourier Transform" (FFT). Néanmoins, une telle approche ne peut être appliquée dans notre cas, puisque le système étudié ne possède pas de conditions aux bords périodiques.

Une alternative au filtrage direct dans l'espace de Fourier est la méthode de lissage spatial. Une telle méthode est utilisée dans le code d'interaction pour klystrons FCI [49]. Dans cette méthode, on estime tout d'abord les densités de charge et de courant sur les nœuds du maillage. Puis, ces quantités en chaque nœud j sont ré-estimées par pondération de leurs valeurs aux nœuds voisins. La plus simple des méthodes de lissage consiste à faire intervenir seulement les plus proches voisins. On calcule la quantité $\tilde{a}_j$ lissée de a_j au nœud j en appliquant la formule

$$\tilde{a}_j = \frac{W a_{j+1} + a_j + W a_{j-1}}{1 + 2W}, \quad (4.42)$$

où W est le poids assigné aux nœuds voisins.

Le spectre en nombre d'onde de la quantité lissée peut être déterminé en calculant la série de Fourier de $\tilde{a}_j$

$$\tilde{a}_\beta = \sum_j \frac{W a_{j+1} + a_j + W a_{j-1}}{1 + 2W} e^{i\beta j \Delta z} = a_\beta \frac{1 + W \cos(\beta \Delta z)}{1 + 2W}. \quad (4.43)$$

où a_β est le spectre en longueur d'onde de la quantité non-lissée. À l'inverse du filtrage direct dans l'espace de Fourier, il n'est pas possible de filtrer seulement une partie du spectre avec le

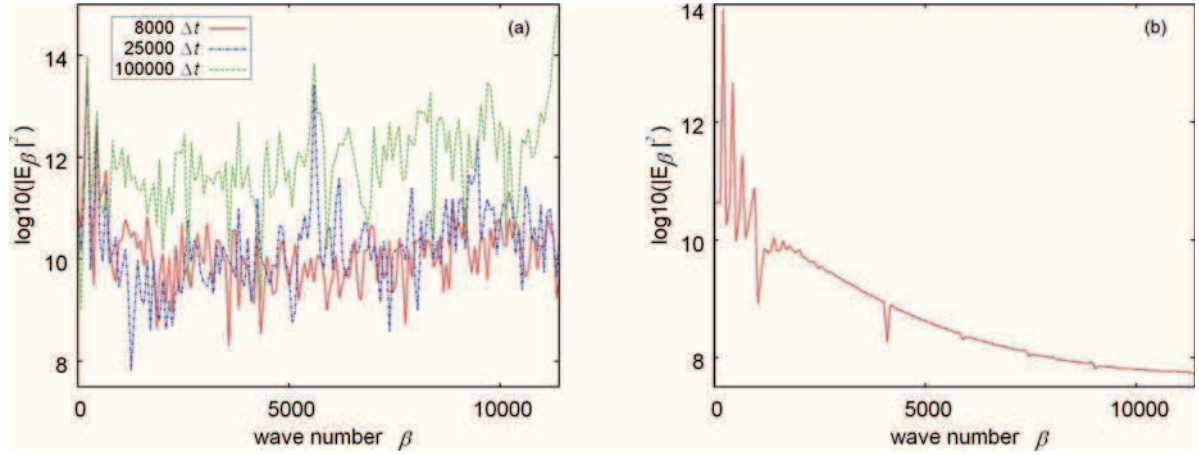


FIGURE 4.11 – Spectre en nombre d'onde du champ électrique longitudinal de charge d'espace : (a) Non-lissé. (b) Avec quinze lissages F_1 .

lissage spatial. Toutes les composantes sont modifiées. En conséquence, le facteur de pondération doit être choisi de telle sorte que le lissage spatial minimise l'effet du filtrage pour les longueurs d'ondes auxquelles on s'intéresse et maximise l'atténuation des longueurs d'onde parasites. Il est de plus possible de cumuler des lissages avec des facteurs de pondération similaires ou différents. Sur la figure 4.12, nous avons représenté l'atténuation produite par les deux types de filtres les plus utilisés sur un spectre a_β unité. La courbe en tirets et pointillés bleus représente le filtrage F_1 où l'on a choisi comme facteur de pondération $W = \frac{1}{2}$. L'autre courbe en trait plein rouge représente un second filtrage F_2 composé de deux filtres successifs $W = \frac{1}{2}$ puis $W = -\frac{1}{6}$.

On voit que l'application d'un second filtrage permet de diminuer l'atténuation dans la région centrale du spectre. On pourrait penser que le filtrage F_2 est meilleur que le filtrage F_1 , car il conserve une plus large partie du spectre et supprime donc moins d'informations.

Cependant, le choix de la méthode dépend des longueurs d'onde de l'instabilité parasite. En général, plusieurs filtres successifs avec des pondérations identiques doivent être effectués. Cela est d'autant plus nécessaire que les macro-particules du faisceau portent une forte charge (faisceau intense). Si l'on souhaite moins atténuer le spectre, il faut utiliser le filtrage F_2 . Néanmoins, pour une longueur d'onde particulière, l'atténuation avec le filtrage F_2 nécessite un nombre plus important de filtres successifs qu'avec le filtrage F_1 et prend donc plus de temps.

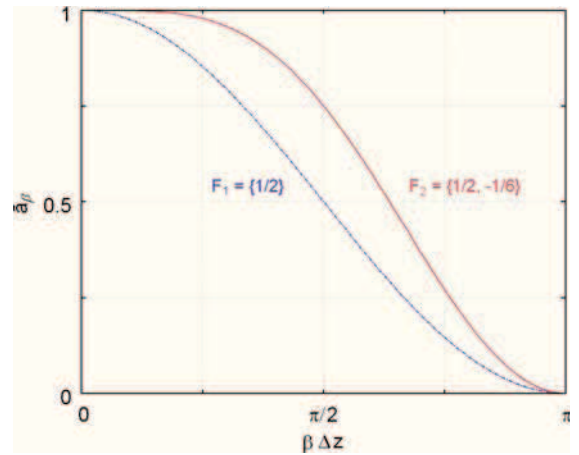


FIGURE 4.12 – Effet du filtrage spatial sur le contenu du spectre en longueur d'onde pour un filtrage F_1 , $W = \frac{1}{2}$ (en tirets et pointillés bleu) et pour un filtrage F_2 composé de deux filtres successifs $W = \frac{1}{2}$ puis $W = -\frac{1}{6}$ (en trait plein rouge).

La figure 4.10 représente l'état du système après 5 000 000 pas de temps en faisant quinze lissages F_1 successifs par pas de temps. On voit que les trajectoires des particules (b) sont très proches de celles déterminées avec MVTRAD. De plus le profil des trajectoires dans l'espace des phases (c) montre que les instabilités de petites longueurs d'onde sont absentes, ce qui est confirmé par la carte du champ électrique axial (a). La figure 4.11-(b) représente le spectre en longueur d'onde de la composante E_z du champ électrique pour le faisceau lissé. On voit que toutes les composantes de petite longueur d'onde ont été atténuées et qu'il ne reste plus que les composantes liées aux variations de diamètre du faisceau.

4.3 Modèle de ligne à deux dimensions

Dans le modèle à une dimension, nous avons considéré que le champ électrique propre de chaque période de la structure était constant le long du rayon du faisceau. La valeur de ce champ était déterminée à partir de la définition de l'impédance de couplage. Il faut, dans un modèle à deux dimension, fournir une description plus fine du champ électromagnétique propre de chaque période. Nous devons d'une part estimer toutes les composantes des champ électrique et magnétique. De plus, utiliser une moyenne radiale de ces champs serait sans intérêt. Nous avons donc besoin d'estimer la valeur de chaque composante le long du rayon de l'hélice. Un nouveau modèle de champ propre, valable dans un modèle à deux dimensions, doit donc être développé.

4.3.1 Équation d'ondes en coordonnées cylindriques

On peut imaginer plusieurs manières d'estimer la valeur du champ propre électromagnétique associé à chaque période de la structure. Une première méthode, un peu brutale, serait de déterminer, à l'aide de logiciels de calculs à trois dimensions (comme HELMOTH-3D), l'amplitude de chaque composante du champ électromagnétique se propageant dans la structure à froid à une fréquence donnée, c'est-à-dire $\mathbf{E}_{s,\beta}$ et $\mathbf{B}_{s,\beta}$. En utilisant la transformation (2.20), on obtiendrait alors les termes $\mathbf{E}_{s,n}$ et $\mathbf{B}_{s,n}$ en tout point de la ligne à retard. Puisque nous considérons un modèle à deux dimensions, il faudrait alors effectuer une transformée de Fourier de ces champs en trois dimensions selon la variable θ , afin de ne retenir que la composante fondamentale (la moyenne) de ceux-ci. Ce processus serait long. Notons que des approximations analytiques peuvent être utilisées afin de d'estimer les valeurs de $\mathbf{E}_{s,\beta}$ et $\mathbf{B}_{s,\beta}$. Néanmoins, celles-ci manquent souvent de précision.

En conséquence, nous avons choisi de développer un modèle semi-analytique afin de calculer les termes $\mathbf{E}_{s,n}$ et $\mathbf{B}_{s,n}$. Ce modèle fait tout d'abord appel au code de simulation de Thales Electron Devices HELMOTH-3D afin d'estimer la valeur de l'impédance de couplage sur l'axe de la ligne à retard. Une approche analytique est ensuite utilisée afin de déterminer, à partir de cette valeur, l'expansion radiale de chaque composante du champ électromagnétique.

4.3 Modèle de ligne à deux dimensions

Dans une ligne de propagation périodique cylindrique, on peut décomposer le champ électrique en harmoniques d'espace selon z et selon θ . À une fréquence donnée, on peut donc écrire

$$E_m(r, z, \theta) = \sum_n \sum_\nu E_m^{n,\nu}(r) e^{i\nu\theta} e^{-i\beta_n z}, \quad (4.44)$$

où m est un indice représentant la composante du champ (r , z ou θ), $E_m^{n,\nu}$ est l'amplitude de l'harmonique d'espace de degré n selon z et ν selon θ , et $\beta_n = \beta_0 + 2n\pi/d$. Le champ électrique est solution de l'équation d'Helmholtz. En introduisant, dans cette équation, l'expression (4.52) correspondant à la composante longitudinale du champ, on démontre aisément que les coefficients $E_z^{n,\nu}$ vérifient l'équation

$$d_{r^2}^2 E_z^{n,\nu} + \frac{1}{r} d_r E_z^{n,\nu} - \frac{E_z^{n,\nu}}{r^2} (\nu^2 + \gamma_n^2 r^2) = 0, \text{ avec } \gamma_n^2 = \beta_n^2 - (\omega/c)^2, \quad (4.45)$$

dont les solutions sont les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce d'ordre ν , $I_\nu(\gamma r)$ et $K_\nu(\gamma r)$. Connaissant ainsi la dépendance radiale du coefficient $E_z^{n,\nu}$, on peut écrire que

$$E_z^{n,\nu}(r) = e_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r), \quad (4.46)$$

On peut démontrer que l'homologue de $E_z^{n,\nu}(r)$ pour le champ magnétique, $B_z^{n,\nu}(r)$, suit la même loi selon r . On peut alors écrire

$$B_z^{n,\nu}(r) = b_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r). \quad (4.47)$$

Dans les équations (4.46) et (4.47), les termes $e_z^{n,\nu}$ et $b_z^{n,\nu}$ sont des scalaires à déterminer.

4.3.2 Solution générale

En introduisant la relation (4.46) dans l'expression (4.52), on obtient facilement, pour la composante longitudinale du champ électrique

$$E_z(r, z, \theta) = \sum_n \sum_\nu e_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r) e^{i\nu\theta} e^{-i\beta_n z}, \quad (4.48)$$

et une relation similaire peut être développée pour le champ magnétique

$$B_z(r, z, \theta) = \sum_n \sum_\nu b_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r) e^{i\nu\theta} e^{-i\beta_n z}. \quad (4.49)$$

En introduisant les expressions (4.48) et (4.49) dans les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère sans terme source, on détermine facilement les relations reliant les termes $E_{m=r,\theta}^{n,\nu}(r)$ et

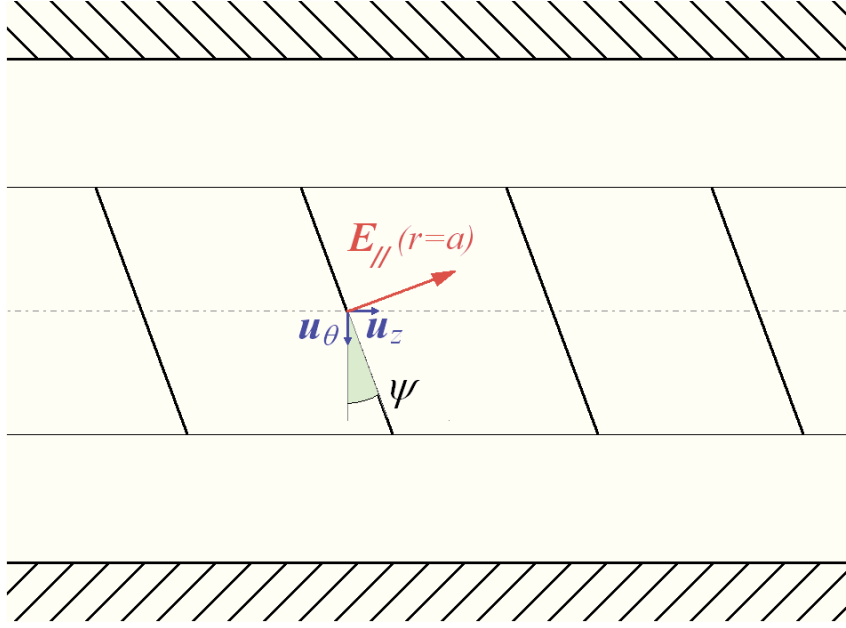


FIGURE 4.13 – Schéma de l'hélice en feuille

$B_{m=r,\theta}^{n,\nu}(r)$ aux termes $e_z^{n,\nu}$ et $b_z^{n,\nu}$. Après quelques manipulations on obtient

$$\begin{aligned}
 \gamma_n^2 E_r^{n,\nu}(r) &= -\omega \frac{\nu}{r} b_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r) + j\beta_n e_z^{n,\nu} \left(\gamma_n I_{\nu+1}(\gamma_n r) + \frac{\nu}{r} I_\nu(\gamma_n r) \right) \\
 \gamma_n^2 B_r^{n,\nu}(r) &= \frac{\omega}{c^2} \frac{\nu}{r} e_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r) + j\beta_n b_z^{n,\nu} \left(\gamma_n I_{\nu+1}(\gamma_n r) + \frac{\nu}{r} I_\nu(\gamma_n r) \right) \\
 \gamma_n^2 E_\theta^{n,\nu}(r) &= -\beta_n \frac{\nu}{r} e_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r) - j\omega b_z^{n,\nu} \left(\gamma_n I_{\nu+1}(\gamma_n r) + \frac{\nu}{r} I_\nu(\gamma_n r) \right) \\
 \gamma_n^2 B_\theta^{n,\nu}(r) &= -\beta_n \frac{\nu}{r} b_z^{n,\nu} I_\nu(\gamma_n r) + j\frac{\omega}{c^2} e_z^{n,\nu} \left(\gamma_n I_{\nu+1}(\gamma_n r) + \frac{\nu}{r} I_\nu(\gamma_n r) \right).
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Les expressions (4.50) permettent ainsi, en utilisant l'expression (4.48), de déterminer les solutions exactes du problème de Maxwell sans termes sources en géométrie cylindrique.

4.3.3 Champ propre pour une hélice

La géométrie d'une hélice est invariante selon une translation de longueur Δz effectuée conjointement à une rotation d'angle $\Delta\theta = 2\pi\Delta z/d$. En conséquence, pour le mode auquel on s'intéressera dans la suite, on doit retrouver, au multiplicateur de Floquet près, une solution identique des champs après cette transformation. En posant

$$\begin{aligned}
 z &= z' + \Delta z \\
 \theta &= \theta' + \Delta\theta
 \end{aligned}$$

l'équation (4.48) devient

$$E_m(r, z, \theta) = e^{-i\beta_0 z'} e^{-i\beta_0 \Delta z} \sum_n \sum_\nu E_m^{n,\nu}(r) e^{i\nu\theta'} e^{-i\frac{2\pi n}{d} z'} e^{-i\frac{2\pi(n-\nu)}{d} \Delta z}. \tag{4.51}$$

4.3 Modèle de ligne à deux dimensions

La condition citée au début de ce paragraphe est donc respectée uniquement si $n = \nu$. En conséquence, l'amplitude des termes $E_m^{n,\nu}$ et $B_m^{n,\nu}$ sera nulle si $n \neq \nu$. Pour une hélice, l'équation (4.48) devient alors

$$E_m(r, z, \theta) = \sum_n E_m^n(r) e^{in\theta} e^{-i\beta_n z}. \quad (4.52)$$

De plus, le rôle joué par l'harmonique d'espace $n = 0$ du champ de circuit est prééminent dans le processus d'amplification dans un TOP à hélice. Par la suite, on négligera donc l'effet des harmoniques d'espace d'ordres supérieurs dans notre modèle de champ. Puisque $n = 0$, la géométrie du champ est invariante selon θ , ce qui rejoint l'hypothèse que nous avons faite au paragraphe 4.2.1 de ce chapitre. Celle-ci permet par ailleurs de simplifier les équations (4.50), qui deviennent alors

$$\begin{aligned} E_r^0(r) &= j \frac{\beta_0}{\gamma_0} e_z^0 I_1(\gamma_0 r) \\ B_r^0(r) &= j \frac{\beta_0}{\gamma_0} b_z^0 I_1(\gamma_0 r) \\ E_\theta^0(r) &= -j \frac{\omega}{\gamma_0} b_z^0 I_1(\gamma_0 r) \\ B_\theta^0(r) &= j \frac{\omega}{\gamma_0 c^2} e_z^0 I_1(\gamma_0 r), \end{aligned} \quad (4.53)$$

où l'indice $\nu = 0$ a été rendu muet pour une meilleure lisibilité. D'après l'équation (4.46), pour le mode que l'on considère, on peut identifier e_z^0 à la valeur du champ électrique sur l'axe de la ligne à retard. Ce champ peut être déterminé grâce à un calcul à froid effectué avec le code **HELMOTH-3D**. En pratique, celui-ci fournit la valeur de l'impédance de couplage Z_c^0 sur l'axe de la ligne. On utilise donc la relation

$$Z_c^0 = \frac{|E_z^0(0)|^2}{2\beta_0^2 P} = \frac{|e_z^0|^2}{2\beta_0^2 P} \quad (4.54)$$

pour revenir au champ électrique. Récemment, une amélioration du code **HELMOTH-3D**, fournissant l'admittance magnétique de la ligne à retard en un certain rayon, a été développée. On pourrait donc facilement déterminer le champ magnétique de l'onde de circuit en utilisant cette grandeur. Néanmoins, lorsque le code **HelL-2D** a été développé, cette fonctionnalité de **HELMOTH-3D** n'était pas encore disponible. Nous avons donc utilisé le modèle de l'hélice en feuille [50] afin d'estimer le champ magnétique de l'onde de circuit.

Dans ce modèle, on approxime l'hélice par un cylindre parfaitement conducteur dans la direction du bobinage (voir figure 4.13). Il est possible d'approximer le champ électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur de l'hélice. À l'extérieur, ce champ n'est néanmoins pas bien approximé car on suppose dans le modèle que les bâtonnets maintenant l'hélice dans le tube sont absents. Cependant, cette approximation n'a aucune incidence sur le problème que l'on traite, puisque seul le volume intérieur à l'hélice nous intéresse.

Dans une hélice réelle, on peut se représenter l'espace inter-spires comme une capacitance. Dans le modèle d'hélice en feuille, on suppose que le champ électrique en $r = a$ est, à la fois perpendiculaire à la direction de conduction, et dans le plan tangent au cylindre, comme représenté sur la figure 4.13. D'après cette figure, on peut écrire que

$$E_\theta^0(a) = -\frac{1}{\cotg(\psi)} E_z^0(a) . \quad (4.55)$$

En introduisant cette expression dans la troisième équation de (4.53), on obtient

$$b_z^0 = -j \frac{\gamma^0}{\omega} \frac{I_0(\gamma_0 a)}{I_1(\gamma_0 a)} \frac{1}{\cotg(\psi)} e_z^0, \quad (4.56)$$

ce qui permet de déterminer toutes les composantes des champs électrique et magnétique se propageant à froid en fonction de e_z^0 uniquement

$$\begin{cases} E_r(r, z, t) &= j e_z^0 \frac{\beta_0}{\gamma_0} I_1(\gamma_0 r) e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \\ E_\theta(r, z, t) &= -e_z^0 \frac{I_0(\gamma_0 a)}{I_1(\gamma_0 a)} e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \\ E_z(r, z, t) &= e_z^0 I_0(\gamma_0 r) e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \end{cases} \quad (4.57)$$

$$\begin{cases} B_r(r, z, t) &= e_z^0 \frac{\beta_0}{\omega} \frac{I_0(\gamma_0 a)}{I_1(\gamma_0 a)} \frac{1}{\cotg(\psi)} I_1(\gamma_0 r) e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \\ B_\theta(r, z, t) &= j e_z^0 \frac{\omega}{\gamma_0 c^2} I_1(\gamma_0 r) e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \\ B_z(r, z, t) &= -i e_z^0 \frac{\gamma_0}{\omega} \frac{I_0(\gamma_0 a)}{I_1(\gamma_0 a)} \frac{1}{\cotg(\psi)} I_0(\gamma_0 r) e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \end{cases} \quad (4.58)$$

où e_z^0 est estimé grâce à la relation (4.54). Les équations (4.57) et (4.58) permettent de calculer le champ propre d'une période de la structure en utilisant les troisième et quatrième relations des transformées (2.20). Notons que les relations (4.57) et (4.58) ne sont valables que pour l'harmonique d'espace $n = 0$.

4.4 Le code He1L-2D

Le code `He1L-2D` est issu des modèles pour le faisceau d'électrons PIC et pour la ligne à deux dimensions que nous avons décrits dans les parties précédentes. Il permet de traiter les phénomènes d'interaction dans un TOP en prenant les aspects bidimensionnels en compte. Dans cette partie, nous décrivons l'organisation du code et nous présentons quelques résultats numériques. Ces résultats démontrent que le modèle discret est applicable en deux dimensions pour traiter le fonctionnement usuel d'un TOP ainsi que les phénomènes d'oscillations. Comme le modèle de faisceau est non-linéaire, le phénomène de saturation est pleinement pris en compte.

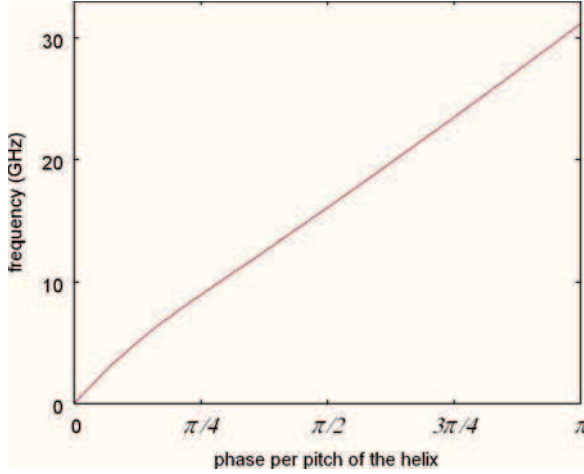


FIGURE 4.14 – Courbe de dispersion du premier mode de l’hélice simulée

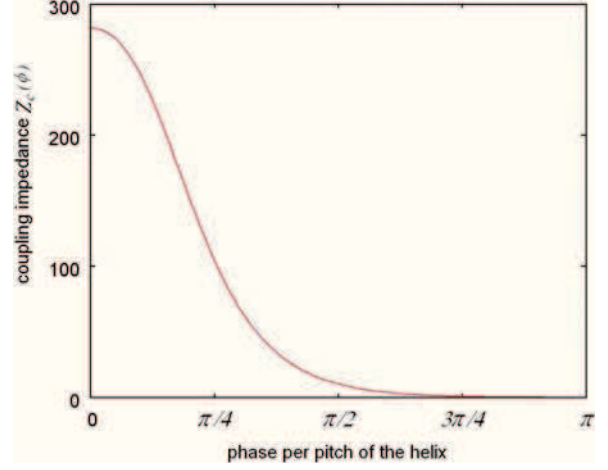


FIGURE 4.15 – Valeur de l’impédance de couplage du premier mode de l’hélice

4.4.1 Caractéristiques du code

Le code `HelL-2D` est organisé globalement de la même manière que son homologue à une dimension décrit dans le chapitre précédent. Il comporte lui aussi deux modules

- Un module résolvant les équations de la dynamique du faisceau.
- Un module résolvant les équations de la dynamique de l’onde de circuit.

Néanmoins, l’amélioration apportée dans `HelL-2D` est que les effets radiaux sont pris en compte. Ainsi, là où `HelL-1D` calculait le champ propre sur l’axe, `HelL-2D` calcule l’expansion radiale de celui-ci en utilisant les équations (4.57), (4.58) et les transformées (2.20). Le calcul de la puissance dans l’équation (2.18) fait, lui aussi, intervenir des grandeurs variant radialement.

La phase d’initialisation est plus complexe dans `HelL-2d` que dans `HelL-1d`. En effet, le terme de densité de courant $\mathbf{j}$ dans l’équation (2.18) est la partie non-stationnaire de la densité de courant du faisceau. Or, la méthode PIC nous donne une estimation de la densité de courant totale. Dans le code à une dimension, on suppose que l’état stationnaire est un faisceau de densités de charge et de courant constantes le long de l’axe. Dans le cas d’un faisceau à deux dimension, il n’est pas possible d’agir de manière similaire, notamment à cause des variations du rayon du faisceau le long de l’axe de la section. Il faut donc, avant la phase de calcul d’interaction, déterminer un état stationnaire du système sans HF. Une phase de remplissage du domaine de simulation par le faisceau d’électrons est donc nécessaire pour calculer cet état stationnaire. Ce dernier n’a pas à être recalculé si l’on effectue des calculs à différentes fréquences pour des paramètres de faisceau fixés.

Durant la phase de calcul de l’interaction, après la phase d’initialisation, l’allongement des temps de calcul par rapport à un cas monodimensionnel est autant dû à la résolution de la dynamique du faisceau qu’à la résolution de la dynamique de l’onde de circuit. En effet, dans `HelL-2D` on injecte plusieurs trajectoires dont chaque particule sera décrite par cinq coordonnées (3 en vitesse et 2 en espace). Toutes les interpolations (particules vers la grille ou grille vers les

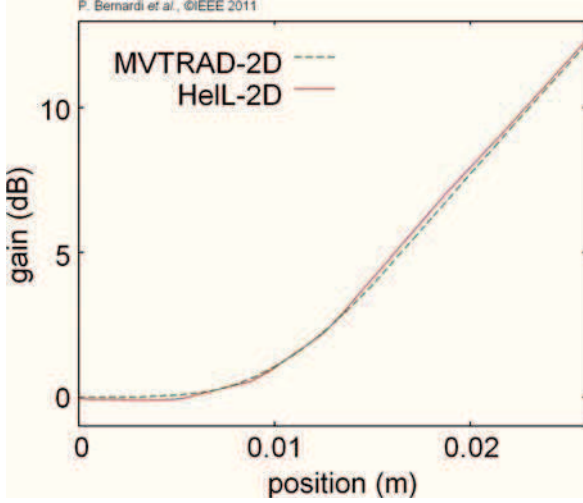


FIGURE 4.16 – Gain du tube sur l'axe à une fréquence $f = 13$ GHz en régime petit signal

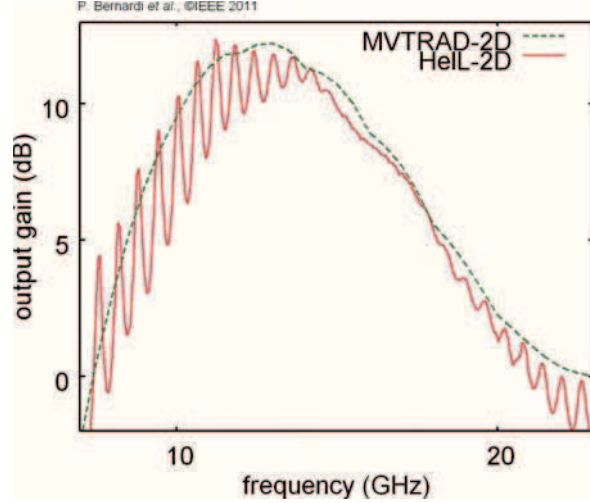


FIGURE 4.17 – Gain du tube sur une partie de la bande fréquence en régime petit signal

particules) demandent elles aussi naturellement plus d'opérations. La résolution des équations de Maxwell doit être effectuée en plusieurs valeurs de r . De plus, les raffinements nécessaires à la stabilité du code PIC (correction de Marder, lissage spatial) constituent elles aussi une part non-négligeable du temps d'exécution. Enfin, l'estimation de la puissance introduite dans chaque période, c'est-à-dire le terme source de l'équation (2.18), est beaucoup plus longue puisqu'elle fait intervenir beaucoup plus de noeuds et de composants. Il en va de même pour la recombinaison du champ électromagnétique de l'onde de circuit (équation (2.19)). En résumé, un pas de temps de HeLL-2D nécessite beaucoup plus d'opération qu'un pas de temps de HeLL-1D.

Finalement, la dynamique de l'onde de circuit (équation (2.18)) est décrite et résolue de la même manière qu'on le faisait en une dimension. Ceci inclut les conditions de bord ainsi que la méthode de résolution numérique de l'équation. Nous reportons le lecteur au Chapitre 3 pour de plus amples précisions sur le sujet.

4.4.2 Fonctionnement usuel d'un TOP

Afin de valider le code HeLL-2D, nous avons tout d'abord vérifié que celui-ci se comportait bien lorsqu'on l'utilise pour simuler un TOP à hélice en régime de petit signal. Les résultats obtenus avec HeLL-2D sont comparés aux résultats obtenus avec le code Thales MVTRAD-2D. Ce

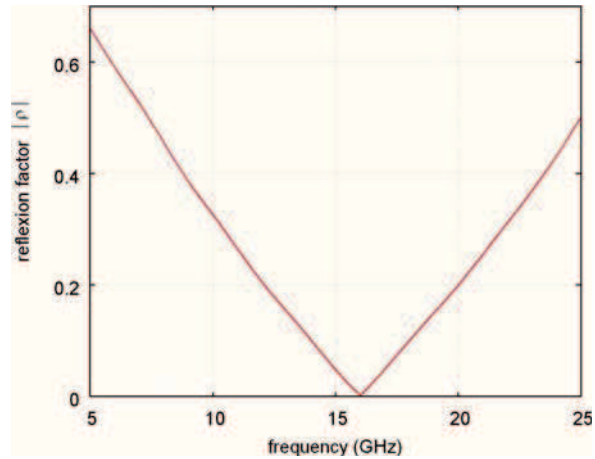


FIGURE 4.18 – Module du coefficient de réflexion à l'entrée et à la sortie de la ligne à retard du TOP simulé

dernier, basé sur un modèle en domaine fréquentiel, est utilisé quotidiennement par les ingénieurs chez Thales, et donne en général des résultats en bon accord avec les mesures expérimentales. Les paramètres d'entrée décrivant la ligne et le faisceau sont les mêmes dans les deux codes. Ces paramètres sont représentés sur les figures 4.14, 4.15 et en table 4.2.

4.4.2.1 Petit signal

Le premier test effectué a été de calculer le gain du tube à une fréquence donnée avec MVTRAD-2D et HelL-2D. Nous avons représenté sur la figure 4.16 le gain du tube le long de l'axe lorsqu'une onde de faible puissance ($P_{\text{in}} = -20\text{dBm}$) est introduite dans le système. La courbe en tirets vert représente le résultat obtenu avec MVTRAD-2D et la courbe en trait plein rouge est le résultat obtenu avec HelL-2D. Afin d'éviter tout phénomène parasite dû aux réflexions, nous avons effectué le calcul avec HelL-2D en prenant une hélice de 150 tours. Nous avons stoppé le programme avant que l'onde réfléchie à l'extrémité de sortie de cette ligne ne soit revenue dans les cinquante premiers tours. Ainsi, on constate que les résultats obtenus avec les deux codes concordent.

La courbe 4.17 représente le gain du même tube pour les mêmes paramètres de faisceau sur une portion de la bande du mode d'hélice considéré. Là encore, la courbe en tirets verts représente le résultat obtenu avec MVTRAD-2D et la courbe en trait plein rouge est le résultat obtenu avec HelL-2D (avec une hélice de cinquante tours). On peut tout d'abord remarquer que les deux courbes suivent la même tendance. Si on devait représenter le gain moyen obtenu avec HelL-2D, on trouverait que le maximum de celui-ci serait trouvé, comme avec MVTRAD-2D, à une fréquence proche de 13 GHz. Néanmoins, similairement à ce que l'on voyait en une dimension, la courbe obtenue avec HelL-2D possède des extrema locaux. Ceux-ci sont encore une fois dus à l'adaptation imparfaite de la ligne à retard à ses extrémités.

V_k	3650 V
I_k	50 mA
b	0.45 mm
a	0.78 mm
d	0.52 mm
B_0	700 G
B_k	0 G
r_k	0.78 mm
l_z	26 mm

TABLE 4.2 – Paramètre du faisceau d'électrons et de la ligne

On observe que le gain obtenu avec HelL-2D est inférieur d'environ 1 dB à celui obtenu avec MVTRAD-2D. Cet écart de notre code par rapport à MVTRAD peut s'expliquer par les phénomènes de réflexions. Pour une fréquence donnée, notons F le facteur d'amplification de l'onde de circuit le long du TOP. Notons ρ et τ les coefficients de réflexion et de transmission en entrée et en sortie de ligne. En régime linéaire, on peut écrire la matrice de transfert du système "entrée-ligne-sortie"

$$\mathbf{T} = \frac{1}{1 - |\rho|^2} \begin{pmatrix} -\rho(1 + F) & 1 - \rho^2 F \\ F - \rho^2 & \rho(1 + F) \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

où l'on a imposé les relations $\rho = i|\rho|$ et $\tau = \sqrt{1 - |\rho|^2}$. Cette matrice permet de relier l'amplitude des ondes à la sortie du système à l'amplitude des ondes à l'entrée du système par la relation

$$\begin{pmatrix} C_{\text{in}} \\ C_{\text{ref}} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} C_{\text{out}} \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

a_2 représente l'amplitude d'une onde excitant le système par sa sortie. En supposant que celle-ci est nulle, on détermine aisément la relation entre C_{out} et C_{in} . Si l'amplitude du coefficient de réflexion est faible, on peut écrire

$$C_{\text{out}} \approx \frac{F}{1 - \rho^2 F} C_{\text{in}}. \quad (4.61)$$

D'après cette formule, si le gain du système sans réflexion (MVTRAD-2D) est de 12 dB, il suffit d'un coefficient de réflexion tel que $|\rho| = 0.17$ pour que le gain estimé par le système avec réflexion (He1L-2D) soit de 11 dB. La figure 4.18 représente le module du coefficient de réflexion du TOP simulé à l'entrée et à la sortie de la ligne à retard. En confrontant cette figure avec la figure 4.17, on peut voir que les ordres de grandeurs sont bien respectés.

4.4.2.2 Grand signal

Le comportement du modèle en régime grand signal est illustré sur la figure 4.19. Les deux courbes représentent le gain du tube pour une fréquence de 17.2 GHz, qui correspond à une fréquence pour laquelle les réflexions sont faibles, en fonction de la puissance d'entrée. Sur les deux courbes le gain reste en premier lieu constant jusqu'à une puissance d'entrée de 25 dBm. Puis celui-ci augmente jusqu'à 35 dBm et finit par décroître pour des puissances d'entrée plus élevées. La stagnation du gain pour les petites puissances d'entrée est le comportement attendu du TOP puisqu'elle correspond au régime petit signal (le gain du tube ne dépend pas de la puissance d'entrée). La décroissance du gain pour les fortes puissances d'entrée est elle aussi attendue puisqu'elle correspond au phénomène non-linéaire de sursaturation. La croissance du gain entre 25 et 35 dBm est quant à elle un phénomène inattendu. Nous l'expliquons de la façon suivante : la puissance d'entrée est suffisamment grande et le tube suffisamment long (ici $N = 50$). En bout de section, le faisceau d'électrons a ralenti jusqu'à des vitesses auxquelles le transfert de puissance du faisceau à l'onde de circuit se fait plus efficacement. Cette explication est en accord avec la figure 2.4 du chapitre 2, sur laquelle on peut voir qu'à une

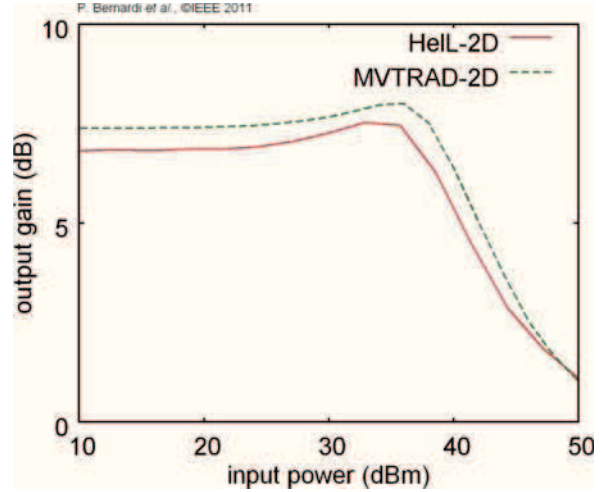


FIGURE 4.19 – Gain du tube en fonction de la puissance d'entrée

fréquence donnée, supérieure à la fréquence pour laquelle le gain est maximum, le gain du tube augmente alors que la tension du faisceau diminue.

4.5 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons démontré que le modèle discret peut s'appliquer dans le cas bidimensionnel. En effet, le code `He1L-2D`, issu du couplage entre un modèle de faisceau PIC électromagnétique et une ligne à retard basée sur le modèle discret, se comporte bien au regard du comportement attendu d'un TOP. De plus, les résultats obtenus avec ce code sont comparables à ceux obtenus avec le code fréquentiel `MVTRAD-2D`. Cependant, les temps de calcul des deux codes sont bien différents. Considérons un tube à hélice de 50 tours. Le temps nécessaire à `MVTRAD-2D` pour calculer le gain à une fréquence donnée est de quelques secondes sur un PC récent, alors qu'il est d'environ dix minutes en utilisant `He1L-2D`. Ainsi, pour les calculs standards (la plupart des calculs), les codes fréquentsiels doivent être utilisés. En dimension supérieure à un, un code temporel spécialisé (tel que `He1L-2D`) ne doit être utilisé que si le problème étudié ne peut être traité avec un code fréquentiel.

Pour preuve, considérons la courbe en traits pleins rouges sur la figure 4.17. Pour tracer cette courbe, 350 points, et autant de calculs à différentes fréquences, ont été nécessaires². En comptant dix minutes par calcul, plus de deux jours sont nécessaires à `He1L-2D` pour obtenir les résultats alors qu'en utilisant `MVTRAD-2D`, quelques dizaines de minutes suffisent.

Si le code `He1L-2D` ne peut en aucune sorte être utilisé à des fins de conception, il peut en revanche être employé pour étudier un petit nombre de phénomènes non-stationnaires propres aux TOP. Parmi ces phénomènes, l'oscillation sans pilotage, que nous avons présentée dans le chapitre 3, peut s'avérer d'une grande importance. Néanmoins, pour que celle-ci soit convenablement décrite, il est important de développer, dans le modèle discret, des conditions aux extrémités représentant mieux les réflexions d'onde. De telles conditions sont présentées dans le chapitre suivant.

2. Ce grand nombre de calculs était nécessaire pour décrire les ondulations de gain.

Contrôle de l'adaptation par un défaut local



Sommaire

5.1	Théorie	88
5.1.1	Principe de la méthode de défaut	88
5.1.2	Equations de connexion du défaut	89
5.1.3	Caractéristiques du défaut	91
5.2	Reconstruction du système couplé	91
5.2.1	Détermination des coefficients	91
5.2.2	Résultats numériques à froid	93
5.2.3	Résultats numériques à chaud	95
5.3	Discussion	97

Les deux principaux obstacles à une application réellement pratique du modèle discret pour la simulation du TOP sont d'une part l'hypothèse de périodicité de la ligne à retard et d'autre part la difficulté de poser des conditions aux limites réalistes pour l'équation (2.18). Ces deux obstacles ont la même origine : la brisure de l'hypothèse de périodicité. Concernant la seconde problématique, les conditions aux bords développées par Ryskin *et al.* dont nous avons parlé au Chapitre 3 permettent de traiter des lignes de longueur finie et d'introduire des réflexions. Néanmoins, le facteur de réflexion engendré par ces conditions est soumis au choix des guides d'entrée et de sortie, et il est difficile de faire correspondre ce facteur de réflexion à celui engendré dans la réalité par le couplage de l'hélice à un guide coaxial dans toute la largeur de bande. Ces conditions aux bords peuvent être tout spécialement problématiques puisque, si le coefficient de réflexion est surestimé dans le modèle, il peut arriver que le tube simulé oscille alors que le tube réel n'oscille pas, ou inversement.

En conséquence, il est très important d'améliorer ces conditions de bords. Dans ce chapitre, nous présentons une méthode, variation du modèle discret, permettant de résoudre ce problème. Une première section détaille les fondements théoriques de la méthode ainsi que les éléments principaux. La seconde partie présente les résultats numériques à froid obtenus par un code test issu de notre méthode ainsi que quelques résultats à chaud obtenus après l'implémentation de la méthode dans notre code `HeLL-2D`.

5.1 Théorie

5.1.1 Principe de la méthode de défaut

Dans la méthode présentée par Ryskin *et al.*, la totalité du système est composée d'un segment de longueur finie représentant la ligne à retard et de deux segments de longueur semi-infinie bordant celle-ci et que nous pouvons voir comme des guides d'entrée et de sortie. Si on choisit ces guides comme ayant des caractéristiques dispersives différentes de celle de la ligne à retard, alors une onde se propageant dans le système est partiellement réfléchi lorsqu'elle arrive au niveau des transitions. La quantité de puissance réfléchi dépend des caractéristiques de la ligne à retard et des guides choisis à ces extrémités. On voudrait contrôler ces réflexions. Malheureusement, contrôler les réflexions dans le modèle discret revient à introduire des effets dus à une géométrie complexe à

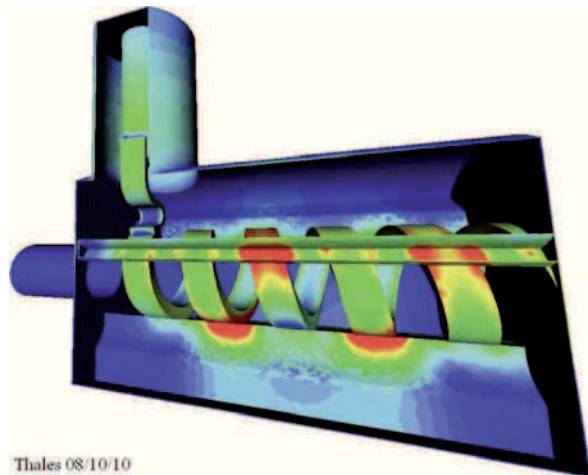


FIGURE 5.1 – Isocontour du champ électrique se propageant dans un coupleur d'hélice. Résultat obtenu avec le code Thales `MAX-3D`.

trois dimensions (voir figure 5.1) dans un modèle où nous avons supposé que le champ électromagnétique se propage dans une seule direction. La tâche semble d'emblée difficile à réaliser.

Dans la réalité, une géométrie complexe à trois dimensions n'est pas le seul moyen d'engendrer des réflexions. On peut par exemple introduire un défaut dans une ligne périodique. Dans la méthode des guides d'onde, c'est exactement ce qu'il se passe. Le défaut, introduit à l'endroit où les caractéristiques dispersives changent, engendre des réflexions. Du point de vue mathématique, ces réflexions sont induites par la variation des coefficients de couplage $\Omega_{s,m}$ d'une cellule à l'autre. La quantité de réflexion dépendra de la façon dont les coefficients de couplage varient. Si l'on souhaite contrôler la quantité de réflexions, il faut être capable de déterminer les coefficients de couplage adéquats : la quantité de réflexions engendrée par le modèle doit correspondre à une courbe de facteur de réflexion en fonction de la fréquence sur toute la bande du mode que l'on considère. En conséquence, dans la suite, ces coefficients $\Omega_{s,m}$ constitueront nos inconnues. La possibilité d'introduire des réflexions résulte du fait de changer la valeur de ces coefficients d'une cellule à l'autre. Les coefficients d'un mode s , $\Omega_{s,m}$, deviennent $\Omega_{s,m}^{(n)}$, c'est-à-dire les coefficients de couplage d'une cellule n associée à un mode s . De cette manière, il est possible d'introduire un défaut adéquat dans la ligne.

D'abord, nous considérerons le problème à froid. Ainsi, l'équation (2.18) devient

$$d_t C_{s,n}(t) - i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Omega_{s,m}^{(n)} C_{s,n}(t) = 0. \quad (5.1)$$

Le but de la méthode est de déterminer les coefficients $\Omega_{s,m}^{(n)}$ correspondant à un défaut local ayant les mêmes propriétés de réflexions qu'un coupleur d'hélice par exemple. L'idée de notre modèle est d'utiliser des solutions de propagation à froid à différentes fréquences pour déterminer ces coefficients. La connaissance de ces solutions permettra de construire un système linéaire d'équations ayant les coefficients $\Omega_{s,m}^{(n)}$ pour inconnues. Par la suite, on ne considérera qu'un seul mode de propagation et on supposera que le défaut local est placé entre les cellules C_0 et C_1 . Bien que le test n'ait pas été effectué, nous pensons que la méthode présentée ici pourrait constituer une piste pour traiter les structures non périodiques dans le cadre du modèle discret.

5.1.2 Equations de connexion du défaut

On considère un mode d'une structure à onde lente périodique dans le cadre du modèle discret. Celui-ci peut être vu, à froid, comme une série de cellules couplées. On suppose de plus qu'un défaut local est introduit dans la ligne entre les cellules C_0 et C_1 (voir figure 5.2). D'une manière générale, les solutions de propagation d'une onde monochromatique de fréquence ω et

P. Bernardi et al., ©IEEE 2011

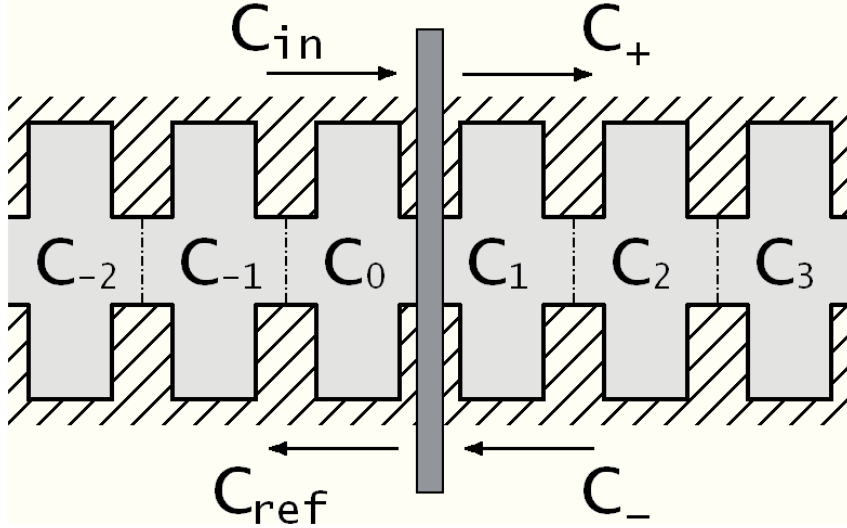


FIGURE 5.2 – Introduction d'un défaut local dans une ligne périodique.

de déphasage par pas ϕ dans la structure s'écrivent

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \left(C_{in} e^{-in\phi} + C_{ref} e^{in\phi} \right) e^{i\omega t}, \quad \text{si } n \leq 0 \\ C_n(t) &= \left(C_{+} e^{-in\phi} + C_{-} e^{in\phi} \right) e^{i\omega t}, \quad \text{si } n > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où l'on a supposé que le défaut, représenté sur la figure 5.2, pouvait être excité à la fois par une onde directe d'amplitude C_{in} et par une onde inverse d'amplitude C_{-} .

En introduisant les expressions (5.2) dans l'équation (5.1) correspondant à une cellule $n = -k$, $k \geq 0$ placée à gauche du défaut, on peut déterminer l'équation suivante reliant les amplitudes des différentes ondes et faisant intervenir les coefficients inconnus $\Omega_m^{(n)}$

$$\begin{aligned} C_{in} e^{ik\phi} \left(\omega - \sum_{m=-k}^{+\infty} \Omega_m^{(-k)} e^{im\phi} \right) + C_{ref} e^{-ik\phi} \left(\omega - \sum_{m=-k}^{+\infty} \Omega_m^{(-k)} e^{-im\phi} \right) \\ = \sum_{m=k+1}^{+\infty} \Omega_{-m}^{(-k)} \left(e^{ik\phi} C_{+} e^{-im\phi} + e^{-ik\phi} C_{-} e^{im\phi} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Une relation du même type peut être obtenue en utilisant une cellule $n = k$, $k > 0$ placée à droite du défaut

$$\begin{aligned} C_{+} e^{-ik\phi} \left(\omega - \sum_{m=-k+1}^{\infty} \Omega_{-m}^{(k)} e^{-im\phi} \right) + C_{-} e^{ik\phi} \left(\omega - \sum_{m=-k+1}^{\infty} \Omega_{-m}^{(k)} e^{im\phi} \right) \\ = \sum_{m=k}^{\infty} \Omega_m^{(k)} \left(e^{-ik\phi} C_{in} e^{im\phi} + e^{ik\phi} C_{ref} e^{-im\phi} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ces équations seront par la suite appelées *équations de connexion* car elles permettent de connecter les amplitudes des différentes ondes à travers les coefficients de couplage. Ce sont

5.2 Reconstruction du système couplé

ces équations qui seront utilisées pour déterminer les coefficients $\Omega_m^{(n)}$ à partir des solutions de propagation à froid. Ces solutions seront connues ce qui nous permettra de donner la relation entre les amplitudes des différentes ondes pour une fréquence donnée.

5.1.3 Caractéristiques du défaut

En général, dans un système réel tel un coupleur d'hélice, les facteurs de réflexion ρ et de transmission τ pour une fréquence donnée sont des nombres complexes dont la phase et le module dépendent de la géométrie. Cette géométrie ne peut pas directement être prise en compte dans le modèle discret. Cela est tout particulièrement vrai lorsque la géométrie du système que l'on souhaite traiter est complexe, comme c'est le cas pour un coupleur d'hélice. En conséquence, il est possible de fixer le module du coefficient dans le modèle simplifié comme étant égal à celui du système réel. Mais égaliser les phases n'aurait pas de sens puisqu'on suppose que le système est périodique dans le modèle simplifié. Le choix que nous ferons pour caractériser le défaut dans le modèle simplifié sera de supposer que le défaut est sans pertes et sans longueur. Ce défaut peut être vu comme un quadripôle électrique. Ainsi, sa matrice de diffusion $\mathbf{S}$ définie par

$$\begin{pmatrix} C_{\text{ref}} \\ C_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \tau & \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{\text{in}} \\ C_- \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} C_{\text{in}} \\ C_- \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

est unitaire, c'est à dire

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}^*)^t = \mathbf{1} . \quad (5.6)$$

$(\mathbf{S}^*)^t$ est la matrice transposée de la conjuguée de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{1}$ est la matrice identité. Comme le défaut est choisi sans longueur dans le modèle simplifié, son coefficient de transmission est réel

$$\tau = |\tau| , \quad (5.7)$$

et on peut déterminer le coefficient de réflexion à partir de la relation (5.6)

$$\rho = |\rho| e^{i\alpha} = \pm i \sqrt{1 - |\tau|^2} . \quad (5.8)$$

5.2 Reconstruction du système couplé

5.2.1 Détermination des coefficients

Les relations (5.3) et (5.4) montrent que les caractéristiques dispersives et de réflexion du défaut local peuvent correspondre exactement à celle d'un système réel si un nombre infini de coefficients de couplages est pris en compte pour chaque cellule. En effet, les sommes dans ces équations possèdent un nombre infini de termes. Dans la pratique, cela est impossible et

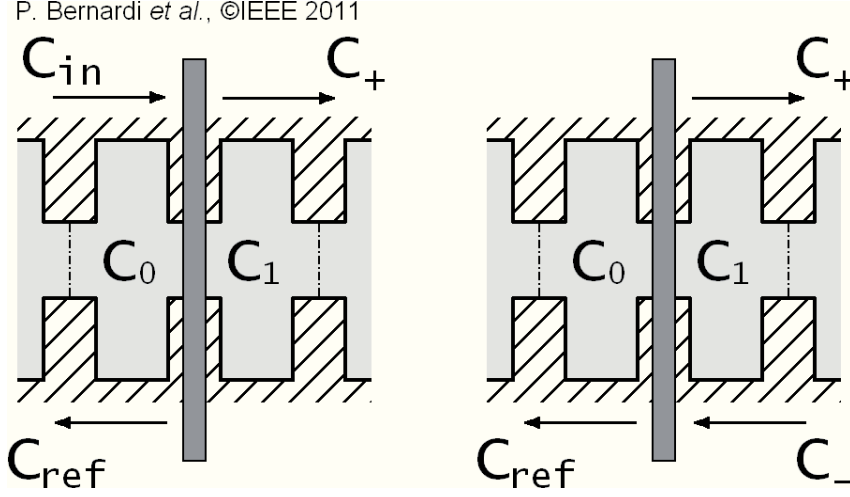


FIGURE 5.3 – Le défaut doit réagir de la même manière à une excitation par une directe ou inverse.

on supposera donc que le modèle spécialisé approxime le système réel suffisamment bien si un nombre fini n_c de coefficients de couplage est pris en compte à gauche et à droite de chaque cellule. En conséquence, le nombre de termes dans les sommes des équations (5.3) et (5.4) est de $2n_c$. La précision de la méthode dans ces conditions sera étudiée rétrospectivement.

La méthode que nous développons ici permet de construire un défaut qui répondra de la même manière qu'il soit excité par une onde venant de sa gauche ou de sa droite (voir figure 5.3). Il découle ainsi naturellement que

- Une onde directe d'amplitude C_{in} est réfléchiée avec une amplitude $C_{ref} = \rho C_{in}$ et est transmise avec une amplitude $C_+ = \tau C_{in}$.
- Une onde inverse d'amplitude C_- est réfléchiée avec une amplitude $C_+ = \rho C_-$ et est transmise avec une amplitude $C_{ref} = \tau C_-$.

En considérant ces deux cas, on peut déterminer deux équations pour l'équation (5.3)

$$\sum_{m=-k}^{n_c} \frac{e^{i(m+k)\phi} + \rho e^{-i(m+k)\phi}}{e^{ik\phi} + \rho e^{-ik\phi}} \Omega_m^{(-k)} + \sum_{m=k+1}^{n_c-1} \frac{\tau e^{-i(m-k)\phi}}{e^{ik\phi} + \rho e^{-ik\phi}} \Omega_{-m}^{(-k)} = \omega \quad (5.9)$$

$$\sum_{m=-k}^{n_c} e^{-im\phi} \Omega_m^{(-k)} + \sum_{m=k+1}^{n_c-1} \frac{e^{i(m-k)\phi} + \rho e^{-i(m-k)\phi}}{\tau e^{-ik\phi}} \Omega_{-m}^{(-k)} = \omega \quad (5.10)$$

et deux équations pour (5.4)

$$\sum_{m=k}^{n_c} \frac{e^{i(m-k)\phi} + \rho e^{-i(m-k)\phi}}{\tau e^{-ik\phi}} \Omega_m^{(k)} + \sum_{m=-k+1}^{n_c-1} e^{-im\phi} \Omega_{-m}^{(k)} = \omega \quad (5.11)$$

$$\sum_{m=k}^{n_c} \frac{\tau e^{-i(m-k)\phi}}{e^{ik\phi} + \rho e^{-ik\phi}} \Omega_m^{(k)} + \sum_{m=-k+1}^{n_c-1} \frac{e^{i(m+k)\phi} + \rho e^{-i(m+k)\phi}}{e^{ik\phi} + \rho e^{-ik\phi}} \Omega_{-m}^{(k)} = \omega, \quad (5.12)$$

5.2 Reconstruction du système couplé

où les valeurs de ρ et τ utilisées dans ces équations sont obtenues en utilisant la méthode présentée en section 5.1.3. Ainsi, dans les équations (5.9) à (5.12), les termes ϕ , ρ et τ sont connus pour une fréquence particulière ω . En conséquence, les termes $\Omega_m^{(k)}$ et $\Omega_m^{(-k)}$ sont bien les seules inconnues. On obtient donc un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients de couplage.

Les équations (5.9) et (5.10) décrivent les cellules situées à gauche du défaut. Chaque équation fait intervenir $2n_c$ inconnues. Supposons que pour n_c fréquences différentes $\omega_{i=1,\dots,n_c}$, on connaisse les valeurs ϕ_i , ρ_i et τ_i du système réel. Il est alors possible d'écrire $2n_c$ équations différentes par cellule en utilisant les équations (5.9) et (5.10). Ainsi, on peut déterminer les $2n_c$ coefficients de couplage associés à chaque cellule située à gauche du défaut. Il suffit de procéder de la même manière en utilisant les équations (5.11) et (5.12) pour déterminer les coefficients de couplage associés aux cellules situées à droite du défaut.

Il convient en dernier lieu de faire deux remarques. La première concerne le cas où l'on suppose que le défaut possède un coefficient de transmission $\tau = 1$. Sous cette hypothèse, $\rho = 0$ et chaque équation (5.9) à (5.12) revient à l'équation (2.22) du chapitre 2 qui décrit une ligne périodique sans défaut. La seconde remarque concerne les cellules situées loin du défaut, c'est-à-dire situées au moins à n_c périodes en amont ou en aval du défaut. Lorsque l'on résout les systèmes permettant de déterminer les coefficients de couplage associés à ces cellules, on trouve que ces coefficients sont égaux à ceux de la ligne sans défaut, ce qui n'est pas évident au premier abord. Ceci peut être interprété comme le fait que, loin du défaut, celui-ci ne perturbe pas la propagation de l'onde de circuit.

5.2.2 Résultats numériques à froid

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques obtenus avec un code de simulation test écrit en `Python` basé sur la méthode proposée. Les données d'entrée du code sont la courbe de dispersion du premier mode d'une structure à onde lente de type hélicoïdal ainsi que le coefficient de réflexion sur toute la bande du mode dû au couplage de cette hélice avec un guide coaxial. La courbe de dispersion de l'hélice a été calculée avec le code Thales de paramètres à froid `HELMOTH-3D` et le coefficient de réflexion a été calculé avec le code Thales `MAX-3D` en utilisant la géométrie présentée sur la figure 5.1. À partir de ces données, le code test détermine les coefficients de couplage associés à chaque cellule dans le modèle simplifié. On choisit n_c points sur les courbes données en entrée du code. Une fois le système simplifié construit, une puissance est introduite dans ce système, aux extrémités duquel on a posé des conditions de guides semi-infinis. Le programme résout le problème de propagation d'une onde pour différentes valeurs de la fréquence de travail.

La figure 5.4 illustre la vitesse de convergence du modèle simplifié vers un système de référence lorsque le nombre de coefficients de couplage pris en compte n_c augmente. Les trois sous-figures (a) représentent le facteur de réflexion du défaut en fonction de la phase de l'onde qui se propage

dans la structure à onde lente. Les données d'entrée calculées avec un code à trois dimensions sont représentées par les courbes en traits pleins, les n_c solutions de références choisies sur ces courbes sont représentées par des cercles et les réflexions générées par le modèle simplifié sont représentées par des tirets. Nous avons de plus représenté en pointillés la quantité $\sqrt{|\rho|^2 + |\tau|^2}$ qui devrait idéalement être égale à 1 sur toute la bande. Les trois sous-figures (b) représentent la fréquence de l'onde de circuit en fonction de son déphasage entre les cellules C_0 et C_1 . Elles illustrent donc la vitesse de convergence avec n_c du modèle simplifié au regard des caractéristiques dispersives. On remarque sur ces figures que, plus n_c est grand, mieux le modèle simplifié approxime le système de référence. Comme on pouvait s'y attendre, les caractéristiques dispersives et de réflexions du modèle simplifié sont exactement les mêmes que celles du système de référence pour les fréquences choisies comme solutions d'identification des coefficients de couplage.

La figure 5.5 représente l'erreur commise par le modèle simplifié sur le coefficient de réflexion (a) et sur la courbe de dispersion (b) pour $n_c = 20$. L'erreur ϵ commise sur chaque quantité est calculée pour chaque valeur de déphasage selon la formule

$$\epsilon(\phi) = \left| \frac{\tilde{a}(\phi) - a(\phi)}{a(\phi)} \right|, \quad (5.13)$$

où a est la valeur pour le système de référence et $\tilde{a}$ est la valeur obtenue avec le modèle simplifié. D'après la figure 5.5, nous pouvons affirmer qu'une erreur inférieure à 1% peut être atteinte sur le coefficient de réflexion et sur les caractéristiques dispersives sur 80% de la bande. Cette bonne précision a été obtenue sur un cas loin d'être idéal en prenant en compte un nombre fini et petit de coefficients de couplage. Finalement,

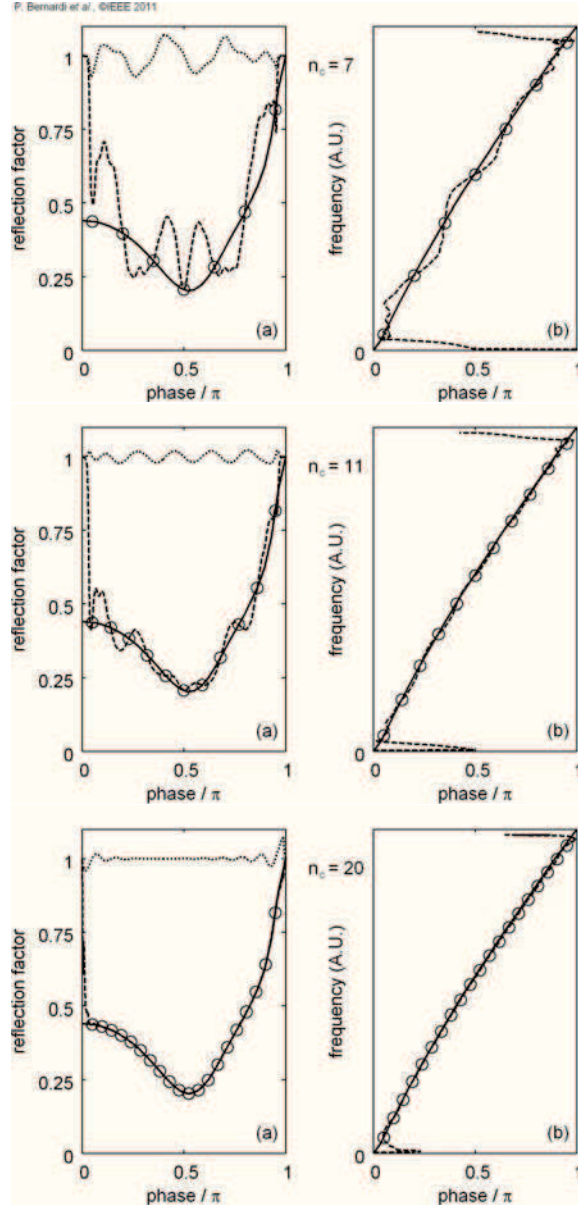


FIGURE 5.4 – Comparaison des facteurs de réflexion et phase théorique et générés par le modèle simplifié.

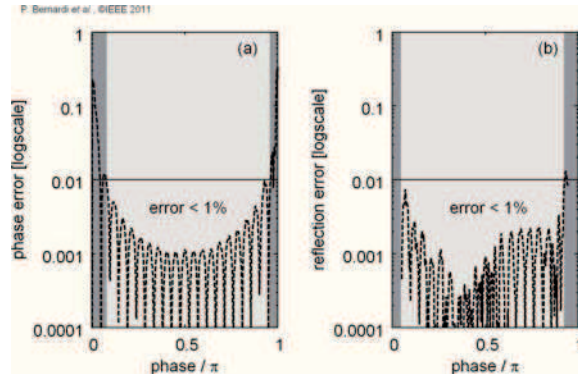


FIGURE 5.5 – Erreur commise par le modèle pour $n_c = 20$.

5.2 Reconstruction du système couplé

ment, on peut remarquer sur la figure 5.5 que le maximum d'erreur est obtenu pour des valeurs de fréquence proche des bords de bande. Les phénomènes tenant place à ces fréquences ne pourront donc pas être étudiés en utilisant cette méthode.

5.2.3 Résultats numériques à chaud

La méthode de contrôle des réflexions par un défaut local, présentée dans le paragraphe précédent, a été implémentée dans notre code de simulation **HelL-2D**. Nous présentons dans ce paragraphe les premiers résultats numériques à chaud issus de ce code. Nous prenons ici en exemple le cas de l'auto-excitation car le rôle des réflexions dans celle-ci est primordial. Par la suite, nous avons fixé un coefficient de réflexion constant sur la bande passante du mode en entrée et en sortie de ligne. Les paramètres du faisceau d'électrons sont répertoriés dans la table 5.1. La figure 5.6 représente le gain petit signal d'une section de cinquante tours en fonction de la fréquence de fonctionnement calculé avec **MVTRAD**. Un résultat proche de celui-ci aurait pu être obtenu avec le code **HelL-2D**. Néanmoins, la durée de calcul de celui-ci (10 minutes par fréquence) n'est pas compétitive avec **MVTRAD** (10 secondes par fréquence). Puisque le coefficient de réflexion est constant sur toute la bande, cette figure nous permet de prévoir qu'en cas d'oscillation, des raies devraient apparaître près de la fréquence pour laquelle le gain de la section est maximum ($\approx 10 - 11$ GHz).

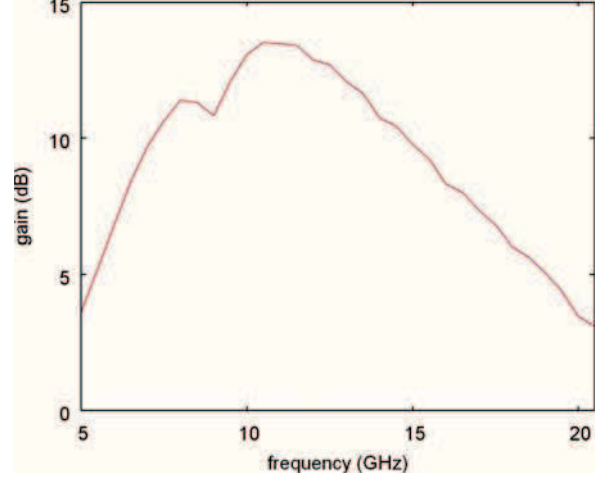


FIGURE 5.6 – Gain obtenu avec **MVTRAD-2D**.

La figure 5.7 est en accord avec cette dernière affirmation. Nous avons représenté sur cette figure le logarithme décimal du spectre en fréquence de l'amplitude du champ en sortie de tube pour différentes fenêtres de temps lors d'une simulation. Pour celle-ci, le facteur de réflexion est fixé en entrée et en sortie à une valeur $|\rho| = 0.7$ sur toute la bande du mode considéré. Au cours du temps, on voit l'amplitude du signal de sortie augmenter, puis saturer. Lors de la croissance de l'oscillation, nous avons superposé le profil du gain petit signal obtenu avec **MVTRAD** avec le spectre d'oscillation (courbes verte, bleue et violette) afin de pouvoir observer que les fréquences concernées par l'oscillation correspondent au maximum de gain. Comme attendu, lorsque le système sature,

V_k	3650 V
I_k	200 mA
b	0.45 mm
a	0.78 mm
d	0.52 mm
B_0	1200 G
B_k	0 G
r_k	0.78 mm
l_z	26 mm

TABLE 5.1 – Paramètre du faisceau d'électrons et de la ligne

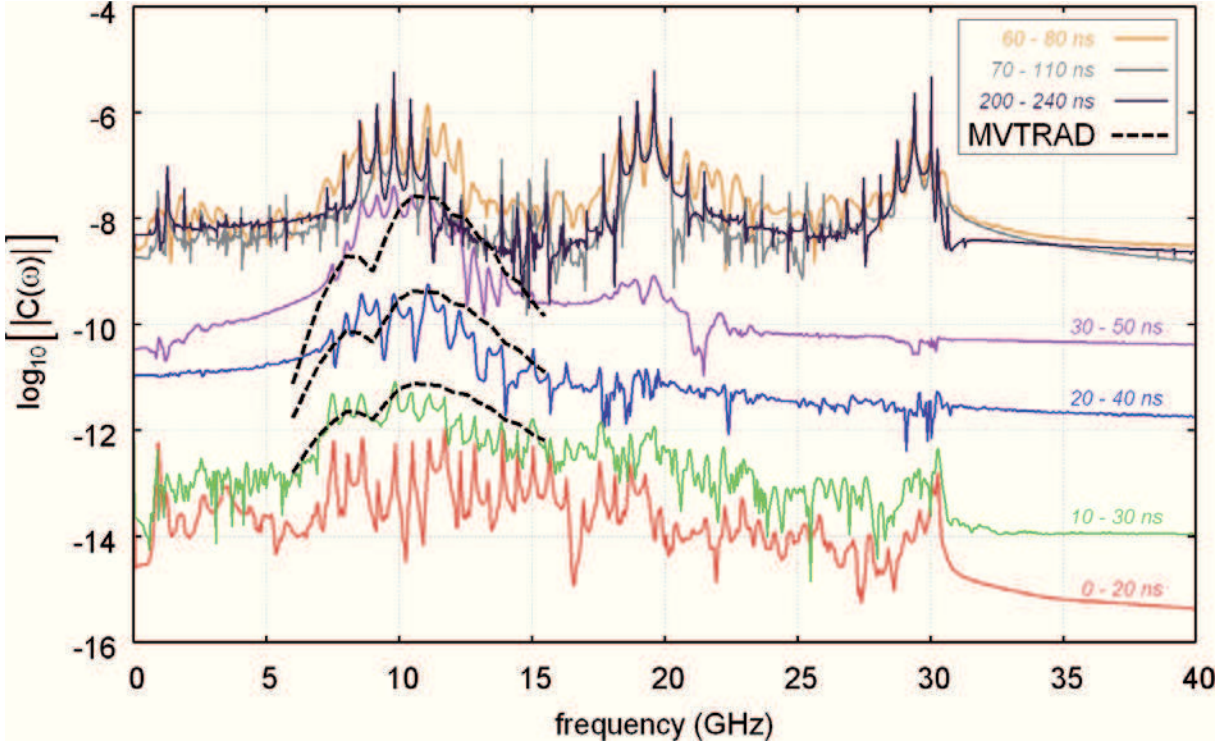


FIGURE 5.7 – Spectres de l'amplitude du signal de sortie lors d'une simulation où l'on a fixé $|\rho| = 0.7$. Les différentes courbes correspondent à différentes fenêtres de temps lors de la simulation.

seules certaines fréquences, filtrées par la condition de phase (équation (3.25)), émergent et on peut observer la présence de raies aux harmoniques des fréquences fondamentales d'oscillation.

La figure 5.8 représente le logarithme décimal de la valeur absolue du signal de sortie en fonction du temps pour différentes valeurs du coefficient de réflexion. On remarque que le temps de déclenchement de l'oscillation est d'autant plus grand que le coefficient de réflexion est faible. De plus, le taux de croissance de l'oscillation par unité de temps est d'autant plus grand que le coefficient de réflexion est grand, *i.e.* $\tau_{0.8} > \tau_{0.75} > \tau_{0.70} > \tau_{0.68}$. Le comportement du modèle est donc en bon accord avec la réalité. D'après la courbe en orange, on pourrait être tenté d'affirmer que pour $|\rho| = 0.65$, le tube n'oscille pas. Afin de vérifier si tel est bien le cas, nous avons représenté sur la figure 5.9 le taux de croissance de l'oscillation simulée en fonction du module du coefficient de réflexion en cercles rouges. Puisque le critère d'oscillation (équation (3.21)) est proportionnel¹ au carré de $|\rho|$, nous avons tracé le polynôme du second degré passant par les points définis en $|\rho| = 0.8, 0.75$ et 0.70 . On remarque que le point défini en $|\rho| = 0.68$ suit cette même tendance. La courbe en pointillé coupe l'axe des abscisses en $\rho = 0.52$. Cette valeur est la valeur maximum estimée pour laquelle le tube n'oscillera pas.

Puisque le coefficient de réflexion est supposé constant sur toute la bande, les raies d'oscillation apparaissent à des fréquences pour lesquelles le gain est grand. D'après la figure 5.6, la fréquence d'oscillation principale est $f = 9.8$ GHz. Le gain petit signal calculé par MVTRAD pour

1. Dans le cas où les réflexions sont égales en entrée et en sortie.

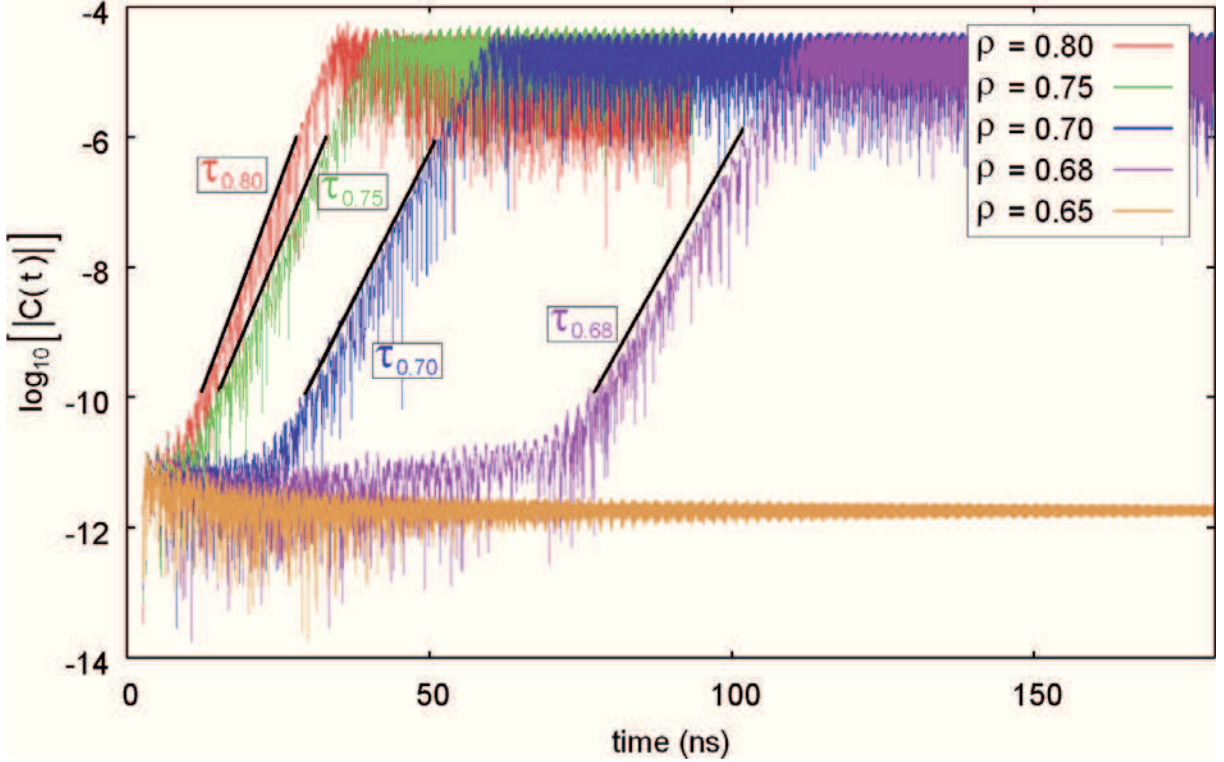


FIGURE 5.8 – Signal de sortie du TOP au cours du temps pour différentes valeurs du coefficient de réflexion.

cette fréquence est 9.8 dB. Ainsi, en considérant le critère d'oscillation, on peut estimer la valeur limite du coefficient de réflexion pour laquelle le tube oscillera. Cette valeur vaut environ 0.56 dans les conditions citées précédemment. En conséquence, l'estimation obtenue par la simulation est en accord avec le critère théorique d'oscillation. Ainsi, la méthode de contrôle des réflexions par un défaut local dans le modèle discret semble aussi applicable en présence d'un faisceau d'électrons.

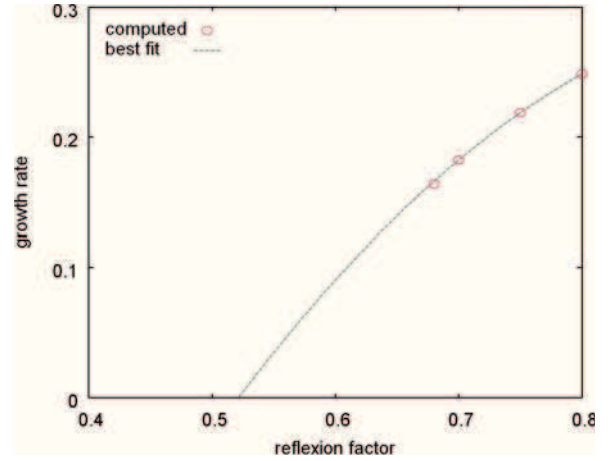


FIGURE 5.9 – Critère d'oscillation.

5.3 Discussion

La méthode présentée dans ce chapitre constitue une amélioration du modèle discret, puisqu'elle permet de prendre en compte, de manière plus précise qu'avec la méthode présentée dans [32], les réflexions aux extrémités d'une ligne à retard. Dans sa forme actuelle, cette méthode ne permet pas d'exciter un mode de la structure à onde lente à l'extérieur de sa bande de fréquence. Ceci pourrait s'avérer problématique pour l'étude des TOP à cavités couplées, mais ne

pose pas de problème pour les TOP à hélice. Nous avons présenté des résultats d'oscillation sans pilotage obtenus avec cette méthode, et avons montré que celle-ci se comporte bien au regard du comportement théorique attendu.

Cependant, un point important de notre modèle reste à améliorer. D'après la figure 5.4, la quantité $\sqrt{|\rho|^2 + |\tau|^2}$ n'est égale à un que pour les solutions choisies comme référence pour identifier les coefficients $\omega_{s,m}^{(n)}$. Bien que cette quantité se rapproche de un à mesure que le nombre de solutions augmente, cette loi n'est pas exactement conservée. Ceci est dû au fait que la matrice décrivant la ligne résultant de la méthode n'est pas exactement symétrique. En conséquence, une amélioration de cette méthode pourrait venir de conditions d'identification dans lesquelles la symétrie des coefficients de cette matrice soit imposée explicitement.

Conclusion et idées pour de futurs travaux



Durant cette thèse, nous avons étudié le modèle discret de Kuznetsov, qui n'avait été appliqué, antérieurement à nos travaux, qu'à un TOP à cavités couplées. Nous avons d'une part montré comment adapter ce modèle pour le rendre applicable aux TOP à hélices et, d'autre part, nous avons écrit des codes de simulation afin de justifier cette application. À l'issue de cette thèse, deux codes de simulation, à une et deux dimensions, ont vu le jour. Nous avons pu ainsi explorer les possibilités offertes par le modèle discret pour simuler l'interaction dans les TOP à hélice en domaine temporel. De plus, un effort a été apporté quant à la prise en compte précise des phénomènes de réflexions aux extrémités de la ligne à retard dans le modèle discret. Ces phénomènes n'étaient jusqu'alors décrits que qualitativement. En résumé, dans cette thèse, nous avons utilisé le modèle discret dans le cadre des TOP à hélice, ce qui n'avait jamais été effectué jusqu'alors, et nous avons apporté une amélioration intéressante à ce modèle.

Grâce à ces travaux, nous avons pu estimer le temps de calcul nécessaire à un code fondé sur le modèle discret dans des cas où le TOP fonctionne dans des conditions normales (calculs de gain) et dans des cas où le TOP oscille. Si le code à une dimension **HelL-1D** permet d'obtenir le gain d'un TOP en un temps raisonnable (de l'ordre de la minute), il n'en va pas de même pour le code à deux dimension **HelL-2D**, qui requiert des ressources de calcul plus conséquentes. Quoi qu'il en soit, pour les calculs standards, il existe environ deux ordres de grandeur entre les temps de calculs des codes fréquentiels et temporels. En conséquence, l'intérêt des codes temporels à des fins de conception est inexistant. Cette affirmation est autant valable pour les codes généraux que pour les codes spécialisés. Thales Electron Devices devrait donc continuer à utiliser ses codes fréquentiels **TUBH**, **MVTRAD-2D** et **MVTRAD-3D** lorsqu'il s'agit de conception.

Malgré cette conclusion un peu pessimiste, il convient de tempérer un peu. Si les codes temporels ne sont d'aucune utilité pour la conception, il sont cependant les seuls outils permettant de traiter des phénomènes purement non-stationnaires tels que les transitoires lors de l'allumage d'un TOP, ou encore certains types d'oscillations comme les oscillations sans pilotage (voir chapitre 3 et 5), ou les oscillations en régime piloté [51]. Thales Electron Devices devrait donc déterminer si l'étude de ces phénomènes est important pour l'entreprise, afin de pouvoir statuer sur la continuation, ou l'abandon, des travaux amorcés durant cette thèse.

Dans le cas où ces travaux devraient être poursuivis, il faudrait encore améliorer le modèle discret. En effet, il est à l'heure actuelle impossible de simuler la plupart des TOP de série fabriqués chez Thales Electron Devices en utilisant un code fondé sur le modèle discret, et ce, malgré les arrangements que nous lui avons apportés. La raison de cette impossibilité est, d'une part, qu'un TOP comporte généralement plusieurs sections séparées par des severs et, d'autre part, que le pas de l'hélice peut être amené à changer le long de l'axe.

Dans leur application du modèle discret à un TOP à cavités couplées, Ryskin *et al.* introduisent des pertes dans les cavités en introduisant une partie imaginaire au coefficient Ω_0 d'un mode [30], [31]. On peut facilement imaginer qu'il est possible de modéliser un sever dans le modèle discret en partant du même principe. La description d'une ligne non-périodique dans le modèle discret poserait en revanche plus de problèmes, puisqu'une telle description contredirait l'hypothèse de base du modèle. Néanmoins, plusieurs pistes pourraient être explorées. Comme dans MVTRAD-2D, on pourrait supposer que la ligne est localement périodique. Cette approche serait certainement valable pour les structures à onde lente dont le pas varie peu. Pour les structures à onde lente dont le pas varie plus amplement, nous pensons que l'approche présentée au chapitre 5 de ce manuscrit pourrait contenir les éléments de base d'une solutions possible. En effet, on pourrait essayer de construire un système réduit, dont les coefficients $\Omega_{s,m}^{(n)}$ seraient identifiés à partir de plusieurs solutions de propagation d'une onde dans la structure à pas variable en l'absence de faisceau. Néanmoins, puisque ces méthodes n'ont pas été essayées, nous préférons pour l'instant émettre des réserves quant à leur utilisation.

Bibliographie

- [1] H. R. Hertz. Ueber die ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen wirkungen. *Annalen der Physik*, 270 :pages 551–569, May 1888.
- [2] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155 :pages 459–512, 1865.
- [3] L. De Forest. Us patent no. 879,532, filled january 29, 1907 ; issued february 18, 1908, space telegraphy.
- [4] L. De Forest. The audion - detector and amplifier. *Proceedings of the Institute of Radio Engineer*, 2 :pages 15–29, 1914.
- [5] A. W. Hull. The magnetron. *Journal of the AIEE*, 40 :pages 715–723, 1921.
- [6] A. H. Varian and S. F. Varian. A high frequency oscillator and amplifier. *Journal of Applied Physics*, 10 :pages 321–327, 1939.
- [7] N. E. Lindenblad. Us patent no. 2,300,052, filled may 4, 1940 ; issued october 27, 1942, electron discharge system.
- [8] R. Kompfner. The invention of traveling wave tubes. *IEEE Tran. Electron Devices*, ED-23 :pages 730–738, 1976.
- [9] J. R. Pierce. Theory of the beam-type traveling-wave tube. *Proceedings of the IRE*, 35 :pages 111–123, 1947.
- [10] A. Nordsieck. Theory of the large signal behavior of traveling-wave amplifiers. *Proceedings of the IRE*, 41 :pages 630–637, 1953.
- [11] L. Brillouin. The traveling-wave tube (discussion of waves for large amplitudes). *Journal of Applied Physics*, 20 :pages 1196–1206, May 1949.
- [12] J. E. Rowe. *Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena*. Academic Press, Inc., 1965.
- [13] L. Ludecking, D. Smithe, M. Bettenhausen, and S. Hayes. *MAGIC User's Manual*. Newington, VA : Mission Res. Corp., 2003.

-
- [14] V. P. Tarakanov. *User's Manual for Code KARAT*. Springfield, VA : Berkeley Res., 1992.
 - [15] *User's Guide to the MAFFIA Code Package*. CST, Darmstadt, Germany, 1994.
 - [16] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2006.
 - [17] D. M. Sullivan. *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*. IEEE Press Series on RF and Microwave Technology, 2000.
 - [18] H. P. Freund, T. M. Antonsen Jr., E. G. Zaidman, B. Levush, and J. Legarra. Nonlinear time-domain analysis of coupled-cavity traveling-wave tubes. *IEEE Trans. Plasma Science*, 30 :pages 1024–1040, June 2002.
 - [19] H. J. Curnow. A general equivalent circuit for coupled-cavity slow-wave structures. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 13 :pages 671–675, September 1965.
 - [20] A. V. Malykhin, A. V. Konnov, and A. V. Komarov. Synthesis of a six-pole network simulating of coupled cavity chain characteristics in two passbands. In *proc. International Vacuum Electronics Conference*, 2004.
 - [21] I. J. Morey and C. K. Birdsall. Traveling-wave-tube simulation : The ibc code. *IEEE Trans. Plasma Science*, 18 :pages 482–489, June 1990.
 - [22] J. G. Wohlbier, J. H. Booske, and I. Dobson. The multifrequency spectral eulerian (muse) model of a traveling wave tube. *IEEE Trans. Plasma Science*, 30 :pages 1063–1075, June 2002.
 - [23] A. Aïssi. *La modélisation des tubes à onde progressive à hélice en domaine temporel*. PhD thesis, Université de Provence, 2008.
 - [24] H. P. Freund and E. G. Zaidman. Time-dependent simulation of helix traveling wave tubes. *Physics of Plasmas*, 12 :pages 5182–5194, December 2000.
 - [25] H. P. Freund. Three-dimensional nonlinear theory of helix traveling-wave tubes. *IEEE Trans. Plasma Science*, 28 :pages 748–759, June 2000.
 - [26] S. P. Kuznetsov. On one form of excitation equations of a periodic waveguide. *Sov. J. Commun. Technol. Electron.*, 25 :pages 419–421, 1980.
 - [27] P. Bernardi, F. André, J.-F. David, A. Le Clair, and F. Doveil. Efficient time domain simulations of a helix traveling-wave tube. *IEEE Trans. Electron Devices*, 58 :pages 1–7, June 2011.
 - [28] P. Bernardi, F. André, J.-F. David, A. Le Clair, and F. Doveil. Control of the matching at the terminations of a slow-wave structure in the discrete theory of excitation of a periodic waveguide. *IEEE Trans. Electron Devices*, number :pages x–x, month year.
-

- [29] P. Bernardi, F. André, D. Bariou, J.-F. David, A. Le Clair, and F. Doveil. Efficient 2.5-d non-stationary simulations of a helix traveling-wave tube. In *proc. IVEC 2011 (India)*, 2011.
- [30] N. M. Ryskin, V. N. Titov, and A. V. Yakovlev. Non-stationary non-linear modeling of an electron beam interaction with a coupled cavity structure. i. theory. In *Modeling in Applied Electrodynamics and Electronics*, number 8, pages 46–56. Saratov Univ. Press, 2007.
- [31] N. M. Ryskin, V. N. Titov, and A. V. Yakovlev. Non-stationary non-linear modeling of an electron beam interaction with a coupled cavity structure. ii. numerical results. In *Modeling in Applied Electrodynamics and Electronics*, number 8, pages 57–61. Saratov Univ. Press, 2007.
- [32] N. M. Ryskin, V. N. Titov, and A. V. Yakovlev. Nonstationary nonlinear discrete model of a coupled-cavity traveling-wave-tube amplifier. *IEEE Trans. Electron Devices*, 56 :pages 928–934, May 2009.
- [33] T. D. Rognlien and S. A. Self. Interpretation of dispersion relations for bounded systems. *Journal of Plasmas Physics*, 7 :pages 13–48, 1972.
- [34] J.-F. David. Oscillation meeting. In *Thales Meeting on Oscillations*, 2010.
- [35] C. K. Birdsall and A. B. Langdon. *Plasma Physics Via Computer Simulation*. McGraw-Hill, Inc., 1985.
- [36] R. W. Hockney and J. W. Eastwood. *Computer Simulation Using Particles*. IOP Publishing, 1988.
- [37] S. O. Wallander. Reflexions and gain ripple in twt’s. *IEEE Trans. Electron Devices*, ED-19 :pages 655–660, May 1972.
- [38] Kompfner F. R. H. Robinson. Noise in traveling-wave tubes. *Proceedings of the IRE*, 39 :pages 918–926, August 1951.
- [39] A. Taflové and S. C. Hagness. *Computational Electrodynamics*. Artech House, Inc., 2005.
- [40] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [41] R. Bourion. *Étude Physique et Construction des Tubes Électroniques*. Société Française des Électriciens, 1965.
- [42] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, 23 :pages 377–382, 1981.
- [43] J. P. Beranger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 127 :pages 363–379, 1996.

-
- [44] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31, July.
- [45] F. L. Teixeira and W. C. Chew. Pml-fdtd in cylindrical and spherical grids. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 7 :pages 285–287, September 1997.
- [46] M. F. Pasik, D. B. Seidel, and R. W. Lemke. A modified perfectly matched layer implementation for use in electromagnetic pic codes. *Journal of Computational Physics*, 148 :pages 125–132, 1999.
- [47] D. M. Sullivan. A simplified pml for use with the fdtd method. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6 :pages 97–99, February 1996.
- [48] B. Marder. A method for incorporating gauss’ law into electromagnetic pic codes. *Journal of Computational Physics*, 68 :pages 48–55, 1987.
- [49] T. Shintake. Klystron simulation and design using the field charge interaction (fci) code. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 363 :pages 83–89, 1995.
- [50] S. Sensiper. *Electromagnetic Wave Propagation on Helical Conductors*. Massachusetts Institute of Technology, Technical Report No. 194, May 1951.
- [51] W. R. Ayers and Y. Zambre. Numerical simulation of drive induced oscillations in coupled cavity traveling wave tubes. In *proc. Electron Devices Meeting (USA)*, 1992.

Résumé

Ce mémoire porte sur la modélisation et la simulation non-stationnaires de l'interaction entre le faisceau d'électrons et l'onde électromagnétique dans les tubes à onde progressives (TOP) à hélice. Le TOP étant un instrument sur-dimensionné, les modèles non-stationnaires généraux sur lesquels se basent la plupart des logiciels commerciaux nécessitent de trop grosses ressources de calcul pour pouvoir être utilisés en un temps raisonnable pour des activités de conception industrielle. Il est donc nécessaire de faire appel à des modèles dits *spécialisés*.

Cette thèse porte sur le *modèle discret non-stationnaire d'excitation d'un guide d'onde périodique* de S. Kuznetsov. Avant nos travaux, il avait été démontré (N. Ryskin *et al.*, 2007) que ce modèle pouvait s'appliquer aux TOP à cavités couplées dans le cadre d'un modèle à une dimension. Néanmoins, il n'existait alors aucune étude venant confirmer ou infirmer son application aux TOP à hélice.

Lors de cette thèse, nous avons démontré, via le développement d'un code à une dimension (**He1L-1D**), que le modèle discret s'applique convenablement aux TOP à hélice. L'utilisation de ce modèle dans un code à deux dimensions (**He1L-2D**) a, elle aussi, été effectuée. Enfin, nous avons développé une méthode permettant de contrôler quantitativement les réflexions d'onde aux extrémités de la ligne à retard dans le modèle discret. Cette dernière étude constitue une avancée importante vers la simulation pratique des TOP en utilisant le modèle discret.

Abstract

The current report deals with the non-stationary modeling and simulation of the interaction between an electron beam and an electromagnetic wave in helix traveling-wave tubes (TWTs). The TWT is an oversized device, and so the non-stationary commercial software which is based on general models requires a huge amount of computational resources. Consequently, such software is useless for industrial design activities. *Specialized models* are thus needed.

This thesis is about S. Kuznetsov's *non-stationary discrete model of excitation of a periodic waveguide*. Before our works started, it had been proven that this model could be applied in order to simulate coupled cavities TWTs in one dimension (N. Ryskin *et al.*, 2007). However, nobody had studied the application of the discrete model to helix TWTs.

During this Ph. D., by building a one dimensional code (**He1L-1D**) we demonstrated that the discrete model can be applied to helix TWTs. We also implemented this model in a two-dimensional code (**He1L-2D**). Finally, a method that permits to take into account the reflexions phenomena at the extremities of a delay line in the discrete model has been developed. This last study is an important improvement towards the practical simulation of TWTs by using the discrete model.