École Doctorale de l'Université du Maine

Le Mans, France

Thése de Doctorat

Spécialité : Acoustique

présentée par

Mouna Naas

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

Contribution à l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux inhomogènes : en vue d'une application à l'os trabéculaire.

Soutenue devant le jury composé de :

S. Derible	Maitre de conférences(LOMC)	**P. Leclaire**	Professeur(LRMA)
J.Ph. Groby	Chargé de recherche(LAUM)	**Z.E.A. Fellah**	Chargé de recherche(LMA)
W. Lauriks	Professeur(KUL)	**C. Depollier**	Professeur(LAUM)

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire Acoustique du Université du Maine , dirigé par Monsieur Claude Depollier que je ne sais pas comment le remercie pour m' avoir accueilli dans son laboratoire, et son rôle de directeur de thése, pour avoir toujours su se rendre disponible malgré un emploi du temps fort chargé et pour m 'avoir prodigué de précieux conseils au cours de ces années. Son soutien constant et lintért quil a porté à mon travail mont énormément aidé dans mon apprentissage de la recherche.
Je tiens à remercier Monsieur Walter Lauriks pour avoir accepté de présider le jury de thèse et également pour lintérêt quil a porté à mon travail.
J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Serge Derible et à Monsieur Zine Fellah, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler .
J'adresse mes remerciements à Monsieur philippe leclaire et à Monsieur Jean Philippe Groby qui ont accepté de participer au jury de thèse. Leur avis sur ce travail permettra dapporter des idées nouvelles pour les études futures.
Un immense merci à Naima Sebaa qu' été co-dirigés cette thèse et qu'été toujours montré très disponible, et qui j'ai tiens à lui témoigner ma plus profonde reconnaissance.
J'exprime ma plus profonde gratitude à mes amis (Jano, maissa, Soumia...), pour tout ce que nous avons partagé et tout ce que nous partagerons encore.et pour leur aider et leur soutine.
Enfin, je voudrais remercier du fond du coeur mes parents et ma famille sans qui je ne serais pas là aujourdhui. Ils mont tous énormément apporté grâce à leurs expériences nombreuses et variées. Leur amour, leur écoute et leur soutien ont toujours été sans faille : merci infiniment à vous.

A la mémoire de ma soeur (Houssnia)....

Table des matières

1 Description de l'os et l'ostéoporose **8**
1.1 Description de l'os 8
1.1.1 Le tissu osseux 9
1.1.2 Les mécanismes de la perte osseuse 10
1.2 L'ostéoporose 10
1.2.1 Quelles sont les causes de l'ostéoporose ? 12
1.3 Déterminants de la résistance osseuse 13
1.3.1 Définition de la résistance osseuse 13
1.4 Propriétés mécaniques apparentes 15
1.4.1 Os cortical 15
1.4.2 Os trabéculaire 15
1.4.3 Anisotropie trabéculaire 16
1.5 Propriétés mécaniques de l'os trabéculaire 16
1.5.1 Élasticité du tissu osseux 16
1.5.2 Plasticité 17
1.5.3 Viscoélasticité 17
1.6 **Conclusion** 18

2 Description des milieux poreux **19**
2.1 Paramètres géométriques 19
2.1.1 La porosité ϕ 19
2.1.2 La Perméabilité visqueuse κ_0 20
2.1.3 Mesure de la résistivité σ spécifique au passage d'un fluide 21
2.1.4 La perméabilité thermique κ_0' 21
2.2 Paramètres dynamiques 23
2.2.1 La tortuosité α_∞ 23
2.3 Interaction fluide-structure. Modèle de Johnson-Allard-Champoux 24
2.3.1 Interaction visqueuse : modèle de Johnson *et coll* 24
2.3.2 Interactions thermique : modèle d'Allard-Champoux et Lafarge 26
2.3.3 **Conclusion** 27

3 Modèles de propagation **28**
3.1 Hypothèses sur le milieu poreux 28
3.1.1 Continuité des phases 29
3.1.2 Homogénéité 29
3.1.3 Grande longueur d'onde 30
3.1.4 Isotropie 30

3.2 Propagation dans un poreux à structure rigide saturé : Modèle du fluide équivalent . . . 31
3.2.1 Fluide libre illimité . . . 31
3.2.2 Fluide libre saturant un poreux . . . 32
3.3 Densité et incompressibilité effectives . . . 33
3.4 Propagation dans un milieu à structure souple : Modèle de Biot . 34
3.4.1 Modèle de Biot . . . 34
3.4.2 Cas d'un squelette souple . . . 35
3.4.3 modèle de Biot : poreux saturé par un liquide . . . 36
3.4.4 Solution de l'équation de propagation dans le domaine fréquentiel . . . 37
3.4.5 Autre expression du modèle de Biot . . . 39
3.5 Fonctions de Green du modèle de Biot . . . 40
3.5.1 Fonction de Green de la représentation (u, w) . . . 41
3.5.2 Fonction de Green de la représentation (u, p) . . . 42
3.5.3 Expressions des amplitudes apparaissant dans les fonctions de Green . . . 43

4 Propagation dans les milieux poreux inhomogènes 44
4.1 Détermination de la résistivité d'un matériau poreux à basse fréquence [29] . . . 44
4.1.1 Equations de base . . . 45
4.1.2 Méthode de la fonction de Green . . . 47
4.1.3 Séparation des ondes dans le domaine fréquentiel . . . 48
4.2 Propagation dans un milieu poreux avec des tailles de pores arbitraires . . . 50
4.2.1 Milieux poreux dont les pores sont de rayons variables . . 50
4.2.2 Modèle de perméabilité [68] . . . 51
4.2.3 Correction du facteur de viscosité . . . 52
4.2.4 Calculs annexes . . . 53
4.2.5 Modèle de Biot pour un poreux dont les rayons sont non uniformes . . . 54
4.3 Dispersion et atténuation des ondes de compression et de cisaillement . . . 56
4.4 Modèle de Biot inhomogène : méthode des perturbations . . . 57
4.4.1 Rappel des équations . . . 57
4.5 Equation des ondes dans un milieu aléatoire [4] . . . 61
4.6 Equations de Biot en milieu aléatoire . . . 63
4.6.1 Calcul de $\bar{G}$ . . . 64
4.7 Simulations numériques [54] . . . 68
4.8 Atténuation et dispersion . . . 69
4.8.1 Nombre d'onde effectif . . . 69
4.8.2 Vitesse de phase . . . 69
4.8.3 Facteur de qualité . . . 70
4.9 Applications : effets de l'aléa des paramètres du milieu . . . 70
4.9.1 Influence de la longueur de corrélation . . . 71
4.9.2 Influence de la porosité . . . 71
4.9.3 Influence de la compressibilité du fluide saturant . . . 73
4.9.4 Influence des modules d'élasticité . . . 73
4.9.5 Influence de la structure . . . 76

4.10 Conclusion 76

5 Résultats expérimentaux **78**
5.1 Introduction 78
5.2 **Préparation des échantillons** 79
5.2.1 Paramètres de QF-20 79
5.3 Dispositif expérimental et protocole de mesure 79
5.4 Résultats expérimentaux 81
5.4.1 Plaque I 81
5.4.2 Plaque II 84
5.4.3 Plaque III 87
5.5 Conclusion 91
5.6 Corrélations 98
5.7 Tenseur de Green 99
5.8 Caractéristiques des transducteurs 100

Introduction générale

L'ostéoporose est une maladie osseuse causée par un changement biochimique et hormonal qui affecte l'équilibre entre la résorption et la déposition des nouveaux tissus osseux. Elle touche les personnes âgées et plus particulièrement les femmes ménopausées. Elle provoque une détérioration micro-architecturale (principalement de l'os spongieux) qui conduit à une fragilisation de l'os augmentant ainsi les risques de fractures. Elle est devenue un réel problème de santé publique auquel de nombreux chercheurs s'attachent d' apporter des réponses [62], [48],[35], [23], [63], [43], [49], [67]. Dans ce travail on s'intéresse à la détection des effets de l'ostéoporose dans l'os trabéculaire à l'aide d'ultrasons. Pour cela, on utilise la théorie de Biot [12, 11] qui est le modèle le plus général pour étudier la propagation des ultrasons dans un milieu poreux. Plusieurs auteurs ont proposé cette théorie dans le cadre de la caractérisation de l'os et plus particulièrement l'os trabéculaire [40, 67].
Malgré cela, on note un certain manque d'intérêt pour ce modèle de la part de chercheurs à cause du nombre important de paramètres qu'elle fait intervenir et de la difficulté de la mesure de leurs valeurs. De plus, l'évolution de la maladie rend les tissus osseux qu'elle détériore fortement inhomogènes, compliquant encore la modélisation. Si on peut donc s'interroger sur l'intérêt de ce modèle pour étudier la propagation dans un milieu infini, il est évident que, dans les problèmes où les conditions aux limites contraignent les flux et les déplacements, les phénomènes liés aux gradients de pression prédits par la théorie de Biot jouent un rôle majeur. Cette situation se rencontre dans les problèmes de réflexion aux interfaces importants dans les milieux inhomogènes tels que l'os trabéculaire où la dégénérescence des trabécules renforce la taille des zones de contraste. Toutefois, cette théorie a été établie pour des milieux homogènes illimités ; l'os trabéculaire étant un milieu poreux limité fortement inhomogène, elle ne lui est donc pas applicable sans des modifications importantes. En pratique, dans un milieu inhomogène, les valeurs des paramètres changent d'un point à l'autre. Lorsque les variances de ces grandeurs aléatoires sont suffisamment petites, leurs valeurs moyennes sont une approximation relativement bonne des paramètres qu'elles représentent. Au contraire, lorsque les variables aléatoires prennent leurs valeurs sur un large intervalle, leurs moyennes sont faiblement significatives. Si on souhaite améliorer la modélisation de la propagation des ondes acoustiques dans tels milieux, il est donc nécessaire de modifier la théorie de Biot en prenant en compte l'aspect aléatoire des grandeurs évoquées plus haut. En particulier, on doit redéfinir les effets visqueux induits par le passage d'une onde dans un milieu poreux compte tenu des statistiques d'ordre 1 et 2 des paramètres aléatoires. Nous montrons, sur des simulations numériques, les effets introduits par la prise en compte des corrections ainsi introduites dans

la théorie de Biot.

Le travail présenté dans ce document propose quelques pistes et méthodes pour aborder certains problèmes qui se posent dans ce contexte. Le document est organisé comme suit : dans le première chapitre on présente une description de l'os et l'ostéoporose. Dans le deuxième chapitre nous définissons les paramètres qui caractérisent les milieux poreux : il s'agit de paramètres géométriques comme la porosité, la tortosité... et les paramètres physiques comme les modules d'élasticité, la tortuosité et la compressibilité dynamiques. Nous présentons aussi deux modèles : d'une part le Modèle de Johnson-al et celui de Allard-Champoux. Le troisième chapitre concerne le modèle de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux à stucture souple saturé par un liquide. On y présente plusieurs expressions du modèle de Biot dans les représentations (U,u), (u, w), et (u, p), ainsi que les fonctions de Green associées à chacune de ces représentations. Le quatrième chapitre est un esemble de développements pour modéliser la propagation d'ondes acoustiques dans les milieux poreux inhomogènes. Dans un premier temps, on développe une application du modèle du fluide équivalent à la mesure de la résistivité d'un matériau poreux à basse fréquence. Ensuite un modèle permettant de simuler les effets de dispersion des rayons des pores sur les vitesses et attémuations des ondes dans un poreux dont la porosité est inhomogène. Enfin, on y présente un modèle de Biot dans lequel sont prises en compte les variations spatiales des différents paramètres.
Le dernier chapitre concerne les résultats expérimentaux sur des céramiques de silice poreuses.

Enfin, le document se termine par une conclusion et des perspectives. Quelques annexes sont ajoutées au texte principal, afin de donner des informations inessentielles sur les méthodes et les calculs qui sont d'usage général.

Chapitre 1

Description de l'os et l'ostéoporose

1.1 Description de l'os

Les os (au nombre de 206) remplissent fonctions dans le corps humain. Ils donnent au corps sa forme extérieure, soutiennent et protégent les parties molles et renferment la moelle qui produit les cellules sanguines. D'un point de vu statique, les os assurent le soutien du corps et la protection de certaine viscères, et d'un point de vue dynamique, ils représentent les éléments bras de levier de transmission des forces musculaires au cours du mouvement. Les os contiennent en outre les réservoirs de calcium que l'organisme peut mobiliser par résorption, selon ses besoins. De plus les os détoxifient le corps en éliminant les métraux lourds, tels que le plomb et l'arsenic, ainsi que d'autres toxines, véhiculées dans la circulation générale. Le tissu osseux est constitué d'eau (environ 1/4 du poids de l'os), de matières organiques (environ 1/3 du poids de l'os, dont la majeure partie est représentée par une protéine, l'osséine) et de sels minéraux inorganiques (le calcium, le phosphore, et le magnésium prédominent bien que l'on trouve également du fer, du sodium, du chlore, et du fluor en petites quantités). La plupart des os (à l'exception de ceux du crâne) apparaissent d'abord sous la forme d'une ébauche cartilagineuse qui s'ossifie ensuite au fur et à mesure de la croissance du nouveau né [19]. Deux méthodes fondamentales de classification servent à différencier les os du corps : le premier système de classification est basé sur l'emplacement anatomique de l'os (axial ou appendiculaire), le second sur sa forme (long, court, plat, ou irrégulier). Les os axiaux sont les quatre-vingts os qui se répartissent le long de l'axe central, vertical du corps. Ils soutiennent et protègent la tête et le thorax et comprennent le crâne et la colonne vertébrale (rachis). Les os appendiculaires, au nombre de cent vingt six, sont ceux qui forment les membres, c'est-à-dire les épaules et les hanches, les bras et les jambes, les mains et les pieds, les doigts et les orteils.

Les os du squelette ont des formes variables qui dépendent de leur fonction et de leur situation dans le corps. Sur la Figure.(1.1) on distingue :

- les os longs (A), tels que le radius, l'humérus, et le fémur, qui se composent du corps, ou diaphyse, et des extrémités, ou épiphyses, où l'on trouve l'os

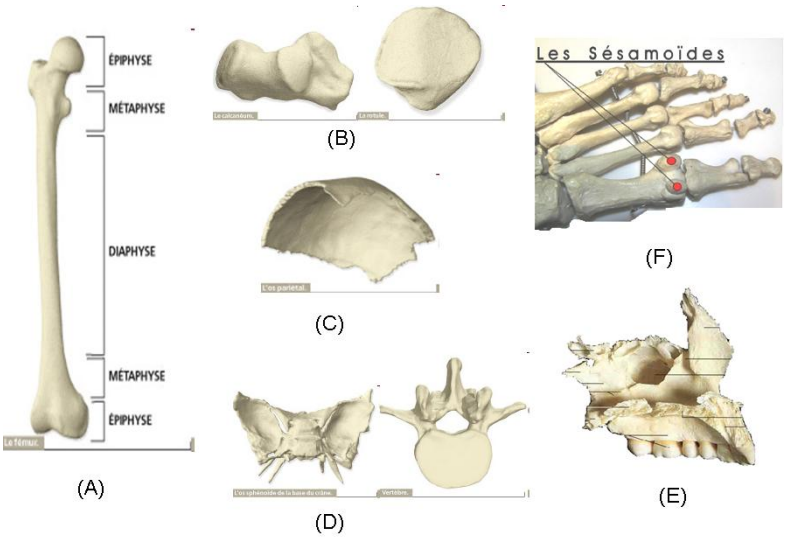


FIG. 1.1 – Organisation structurale des os

spongieux.
- les os courts (B), tels que les os du carpe, les os du tarse, les phalanges de la main et pied, et le calcanéum, plus petite et comportant de nombreuses surfaces articulaires.
- les os plats (C), tels que l'omoplate, le sternum, et les os du crâne, de faible épaisseur.
- les os irréguliers (D), tels que la vertèbre, ne pouvant pas être classés dans les groupes précédents.
- les os pneumatiques (E), tels que les os du crâne contenant de l'air.
- les os sésamoïdes (F), tels que des os de la main ou la rotule, petits os situés dans l'épaisseur de tendons [22].

Les os sont composés d'une substance rigide, le tissu osseux et d'une substance molle, la moelle, rouge ou jaune, selon l'âge du sujet.

1.1.1 Le tissu osseux

On distingue deux types de structures osseuses : l'os compact (ou cortical) et l'os spongieux (ou trabéculaire). Le premier se trouve à la périphérie, et le second creusé de petites cavités se trouve au centre. L'os cortical représente 80% de notre masse osseuse contre 20% pour l'os spongieux.
L'os cortical est constitué des lacunes ostéocytaires (espace occupé par les cellules emmurées dans le tissu osseux appelées ostéocytes), des canaux de Volkmann et de Havers. La porosité trabéculaire est comblée de moelle constituée de graisse principalement, de vaisseaux sanguins et d'autres fluides. L'os cortical est situé aux diaphyses (partie centrale de forme tubulaire) des os longs (fémur par exemple) et entoure les os plats (crâne et bassin par exemple) et courts (vertèbres et calcanéun ; os du talon).
L'os trabéculaire est situé aux extrémités (métaphyses et épiphyses) des os longs et au centre des os plats et des os courts. La structure trabéculaire osseuse est

formée d'un réseau de tiges et de plaques de tissu osseux interconnectées, appelées travées ou trabécules. L'os trabéculaire supporte de fortes déformations et est de 10 à 1000 fois moins rigide en compression que l'os cortical, par conséquent les zones trabéculaire jouent le rôle d'un amortisseur alors que l'os cortical assure la rigidité en flexion des os longs [22].

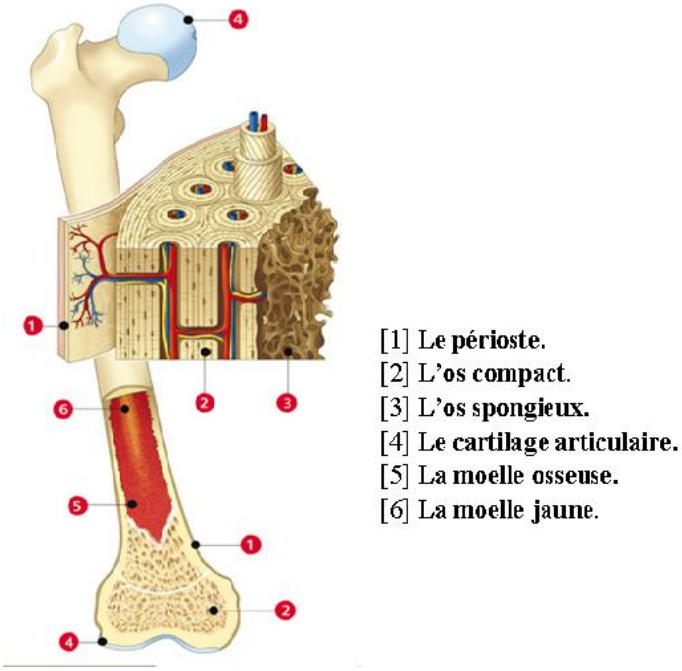


FIG. 1.2 – Description d'un os

1.1.2 Les mécanismes de la perte osseuse

L'ostéoporose, un des problèmes majeurs de la santé publique, est un domaine en pleine évolution du fait de l'allongement de l'espérance de vie dans les pays occidentaux et du développement des moyens de diagnostic qui tendent à modifier la définition même de l'ostéoporose. Il convient cependant de distinguer l'ostéopénie, simple diminution de la masse osseuse (MO) et témoin d'une fragilité osseuse qui n'est pas toujours associée à une fracture, de l'ostéoporose, maladie due à la raréfaction du volume osseux et associée à des fractures.

1.2 L'ostéoporose

L'ostéoporose est une maladie osseuse causée par un changement biochimique et hormonal qui affecte l'équilibre entre la résorption et la déposition des nouveaux tissus osseux. Il en résulte une modification de la structure et, dans une moindre mesure, de la composition du tissu osseux d'où une fragilisation

du squelette aux conséquences souvent graves.
Environ dix millions d'américains [61] (pour la plupart des femmes ménopausées, donc relativement âgées) sont actuellement affectés par l'ostéoporose (ce chiffre est de trois millions en France). Le diagnostic et le traitement de la maladie constituent un enjeu social (les souffrances et la mortalité, suite aux fractures osseuses qu'occasionne cette maladie sont incommensurables) et économique (rappelons que seul marché mondial annuel de médicaments, toutes spécialités confondues, était de 427 milliards de dollars en 2002 et de 602 milliards de dollars en 2005).

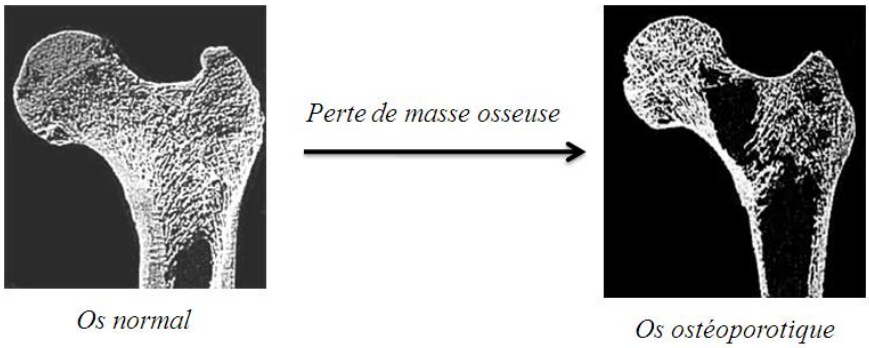


FIG. 1.3 – L'ostéoporose I

La détection clinique précoce de l'ostéoporose est nécessaire pour commencer au plus tôt un traitement médical, et celui-ci doit être suivi régulièrement pour éprouver son efficacité.
Actuellement, les rayons X, utilisés pour estimer qualitativement (radiographie) et quantitativement (absorptiométre) la densité osseuse (indicateur de la qualité d'os), ne permettent d'expliquer que 50% des accidents dus à la fragilité de l'os. Certains paramètres, liés à l'architecture interne du tissu osseux, et indicatifs de la fragilité de l'objet os, ne peuvent pas être déterminés par absorptiométre X.

Des images plus détaillées de la structure interne de l'os peuvent être obtenues par tomographie par rayons-X.
Mais ces techniques sont, soit dangereuses pour le patient (doses relativement importantes de rayonnement ionisant dans le cas de QCT) soit très couteuses (QCT-BMD[1] et IRM), il n'est donc pas envisageable de les utiliser pour des examens routiniers que nécessite le diagnostic à grande échelle dans la population et le suivi de la maladie. De plus les appareils de QCT et IRM sont lourds et chers et ne peuvent êtres implantés que dans des cliniques et hôpitaux, alors que les médecins voudraient que ce type d'examen se fasse dans leurs cabinets de consultations (comme pour l'échographie ultrasonore).
Les vibrations et ondes sonores (notamment ultrasonores) constituent des alternatives possibles et/ou des compléments aux rayons X ; elles fournissent un outil puissant pour la caractérisation de tissus biologiques, en raison de leur capacité à pénétrer ces tissus en profondeur et à en révéler la santé mécanique. De plus,

[1] Qantitative Computerized Tomography-Bone Nimeral Density

FIG. 1.4 – L'ostéoporose II

ces outils sont d'un coût peu élevé, et emploient des vecteurs non-invasifs et non-ionisants [**?**]. L'utilisation des phénomènes d'ondes acoustiques pour caractériser les tissus osseux devrait donc permettre de diagnostiquer l'ostéoporose avec une meilleure fiabilité, et d'opérer un suivi de l'évolution de la maladie, notamment au cours de son traitement.

1.2.1 Quelles sont les causes de l'ostéoporose ?

Le développement du squelette est caractérisé par un équilibre constant entre synthèse et dégradation osseuses. La masse osseuse augmente jusqu'au l'âge de 35 ans parce que la synthèse est globalement supérieure à la dégradation pendant les deux premières parties de la vie. Ensuite, elle diminue progressivement, à la fois chez les hommes et chez les femmes, parce que la dégradation s'accélère. Chez les femmes à la ménopause, l'équilibre se rompt à cause de la chute des oestrogénes (hormones sexuelles). A ce moment, la dégradation osseuse dépasse largement la synthèse. Cinq ans après la ménopause, les femmes ont parfois perdu 15 pour cent de leur masse osseuse, Figure.1.5. Cette perte suffit pour rendre les os fragiles à la limite de la fracture : c'est l'ostéoporose.
Outre la ménopause, il existe d'autres causes d'ostéoporose, notamment certains médicaments, certains modes d'alimentation, des facteurs héréditaires et le manque d'activité physique :

- l'ostéoporose familiale ;
- la ménopause précoce (avant 45 ans) ;
- ossature forte et silhouette élancée ;
- la consommation régulière de certains médicaments ;
- le tabac ;
- l'alcool ;
- l'activité physique insuffisante ;
- une alimentation pauvre en calcium.

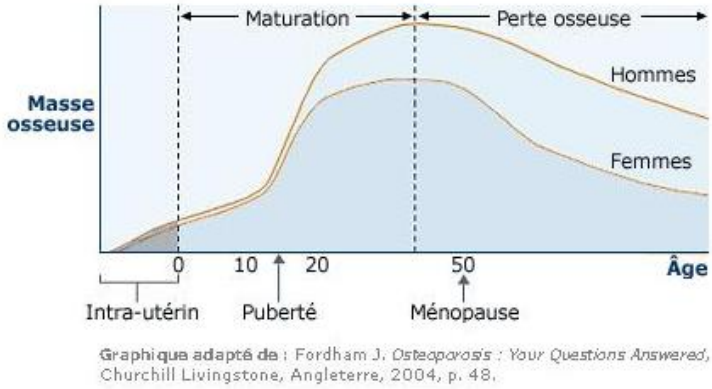


FIG. 1.5 – Évolution de la masse osseuse au cours de la vie

1.3 Déterminants de la résistance osseuse

Les scientifiques s'intéressaient déjà à la résistance osseuse au XIX^{ème} siécle [43], néanmoins la question des déterminants de la résistance osseuse est loin d'être résolue. Ces déterminants sont nombreux et interdépendants. Nombre de groupes de recherche ont étudié l'influence de la viscoélasticité. Récemment, des études tentent de synthétiser toutes ces études partielles pour évaluer quels sont les principaux déterminants de la résistance osseuse. Le rôle particulier du micro-endommagement est aujourd'hui évoqué, ce qui a particulièrement motivé le développement d'une méthode acoustique pour l'évaluation non-invasive du micro-endommagement in vitro et in vivo .

1.3.1 Définition de la résistance osseuse

La résistance osseuse est l'aptitude d'un os à supporter un effort mécanique sans rupture ou sans endommagement irréversible. Les os peuvent casser sous l'effet d'un effort mécanique ponctuel suffisamment puissant (choc lors d'une chute, par exemple) ou sous les effets cumulatifs de chargements mécaniques relativement faibles et répétitifs (par exemple rupture par fatigue du calcanéum chez les sportifs ou les personnes obèses).

La rupture, ou la non-rupture, est le résultat de la confrontation entre un effort appliqué à l'os et la loi de comportement (relation contrainte-déformation) de l'os, elle-même fonction des caractéristiques de la sollicitation. La sollicitation mécanique est définie par la contrainte ou déformation maximale appliquée, la vitesse à laquelle la force est créée et la direction de l'effort par rapport à l'os. La loi de comportement de l'os à l'échelle macroscopique dépend principalement de son architecture macroscopique (pour l'os trabéculaire : épaisseur, longueur, espacement et interconnectivité des travées, anisotropie du réseau de travées) et des propriétés mécaniques locales du tissu osseux qui dépend de la

minéralisation, de l'organisation lamellaire à l'echelle microscopique et du micro-endommagement. En outre, de part l'anisotropie et la viscoélasticité, l'équation d'état apparente de l'os dépend de la vitesse d'application et la direction de la force. La figure (1.6) schématise de facon simplifiée l'influence des différents acteurs de la résistance osseuse dans un raisonnement unidimensionnel [61].
Aujourd'hui, le risque de fracture est essentiellement diagnostiqué par une mesure de la densité minérale osseuse apparente (mesurée par absorptiométrie des rayons X), qui dépend principalement de la porosité mais aussi de la minéralisation (donc de la densité) moyenne du tissu osseux. La complexité du problème shématisée sur la figure (1.6) montre la nécessité d'une évaluation multiparamétrique de la résistance osseuse. En effet, la densité minérale osseuse seule permet d'expliquer 60 à 70% des variations des propriétés mécaniques des os (module d'Young et contrainte maximale). Mais la prise en compte de paramètres architecturaux à partir d'images tridimensionnelles haute-résolution in vitro permet d'expliquer jusqu' à 90% de ces variations. Du reste, à densité minérale osseuse égale, le risque de fracture augmente avec l'âge. De plus, l'augmentation de la DMO (densité minérale osseuse) induite par un traitement médicamenteux anti-résorption osseuse n'explique pas à elle seule la diminution du risque de fracture. Aussi, d'autres facteurs que la porosité et la densité minérale du tissu déterminent la résistance osseuse.

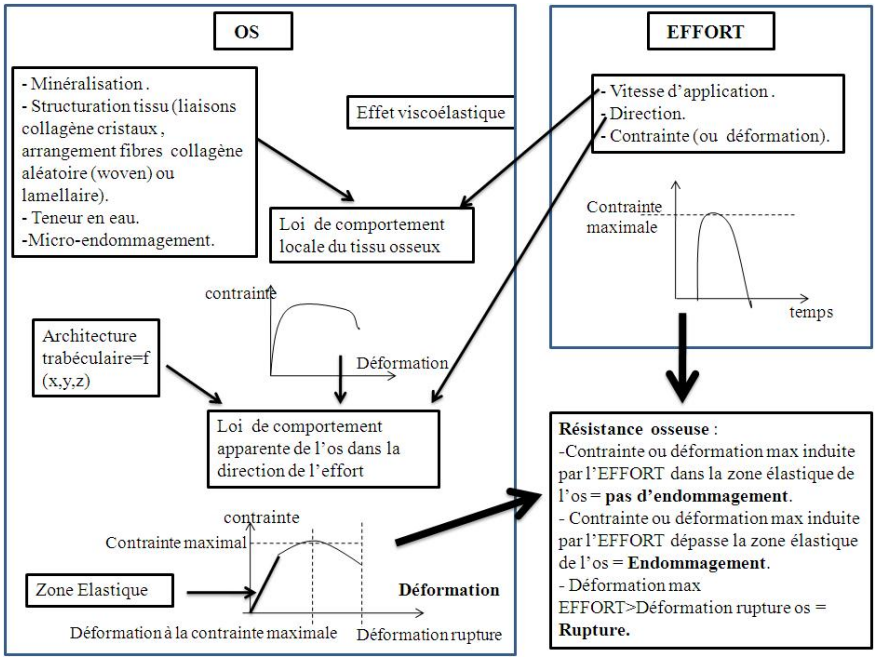


FIG. 1.6 – Déterminants de la résistance osseuse et position du micro-endommagement pour un effort mécanique uniaxial important. Le cas de la rupture par fatigue n'est pas schématisé (d'après :la thése de Guillaume Renaud)

1.4 Propriétés mécaniques apparentes

Cette partie donne les ordres de grandeur de quelques paramètres mécaniques apparents mesurés par essais mécaniques quasi-statiques pour l'os cortical et l'os trabéculaire afin de les situer par rapport à des matériaux courants (tableau 1).

1.4.1 Os cortical

Le module d'Young a été mesuré sur de grands échantillons humains en traction, compression (dans l'axe de l'os long) ou flexion. La différence entre la contrainte maximale en traction et en compression figure.(1.7) sugère que l'os cortical est adapté à un état de chargement où la compression est supérieure à la traction, comme un chargement mixte de type flexion plus compression uniaxiale que supporte la diaphyse fémorale. Une étude récente a d'ailleurs constaté que le degré de minéralisation (corrélé avec la rigidité et la contrainte maximale) de la zone en compression du col du fémur était supérieur à celui de la zone en traction.

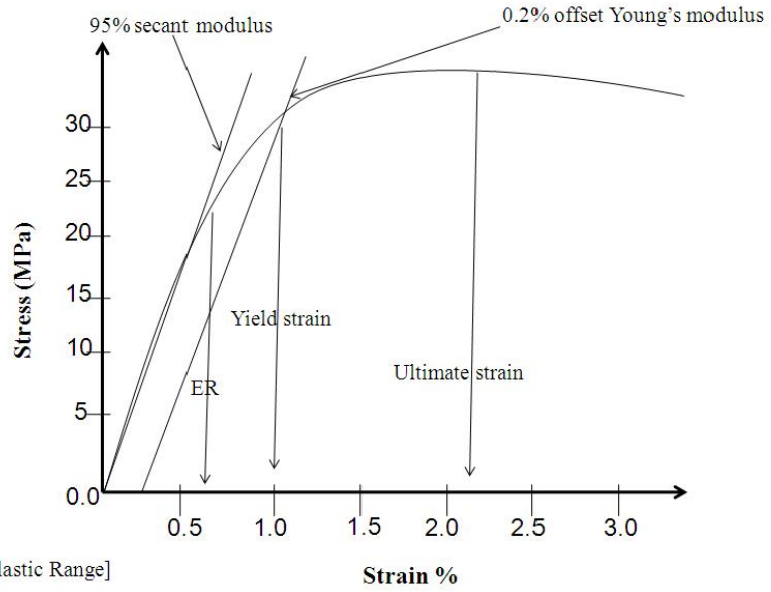


FIG. 1.7 – Définition des paramètres mécaniques de la relation contrainte déformation obtenus par essai quasi-statique. La limite entre la zone élastique et la zone plastique est définie couramment par la contrainte et la déformation à la limite élastique. La fin de la zone élastique est parfois définie par l'intersection de la courbe avec la droite ayant une pente correspondant à 95% du module d'Young. La déformation ultime est la plus faible déformation à laquelle se produit la contrainte maximale [53].

1.4.2 Os trabéculaire

Le module d'Young et la contrainte maximale de l'os trabéculaire humain, mesurés en compression dans l'axe du réseau trabéculaire principal, dépendent

beaucoup du site osseux (porosité et architecture), tableau 1.8. Le module de cisaillement a également été mesuré sur de l'os trabéculaire fémoral humain. En outre l'os trabéculaire a la particularité d'avoir une déformation à la limite élastique trés peu dépendante de la porosité et du site osseux (cofficient de variation autour de 5%).

Matériau	Module d'Young (GPa)	Module de cisaillement (GPa)	Contrainte maximale (MPa)	Déformation à la rupture (%)
Aciers au carbone	200	80	500-1500	20-30
Alliages d'aluminium	70	25	300-700	5-30
Polyméthacrylate de méthyle (PMMA)	3	1	100	2-5
Os cortical (dans l'axe des os longs)	10-20	3-5	80-150 (traction) 100-250 (compression)	1- 3
Os trabéculaire	0.2 (vertèbre ostéoporotique), 3(col de fémur sain)	0.1-0.5(col de fémur)	0.1-30	>50 (compression), <10(traction)

FIG. 1.8 – Ordres de grandeur de quelques propriétés mécaniques (d'après :la these de Guillaume Renaud).

1.4.3 Anisotropie trabéculaire

La structure trabéculaire est renforcée dans les directions des efforts principaux subis par chaque os. C'est pourquoi les propriétés mécaniques des os trabéculaires sont généralement anisotropes. Par exemple, pour l'os trabéculaire humain du calcanéum, le module d'Young mesuré dans l'axe principal du réseau trabéculaire peut atteindre 1144 MPa. Dans les deux autres directions, le module d'Young ne dépasse pas 258 MPa [61].

1.5 Propriétés mécaniques de l'os trabéculaire

1.5.1 Élasticité du tissu osseux

L'élasticité du tissu trabéculaire peut être évaluée par un protocole en deux étapes : la mesure du module d'Young macroscopique d'un échantillon d'os trabéculaire lors d'une compression quasi-statique puis la modélisation numérique en éléments finis de l'essai de compression uniaxiale à partir d'une image tridimensionnelle haute-résolution de l'échantillon trabéculaire. Ainsi le module d'Young du tissu osseux est obtenu lorsque le module d'Young macroscopique de l'échantillon, calculé par la modélisation en éléments finis, est égal à celui

mesuré pendant l'essai quasi-statique. Les résultats récents fournissent un module d'Young du tissu osseux trabéculaire autour de 18 GPa. L'estimation de l'élasticité du tissu est néanmoins très dépendante de la précision du test de compression quasi-statique [31].

1.5.2 Plasticité

La plasticité d'un matériau est son comportement au delà de la zone élastique dans la relation contrainte-déformation. La plasticité est caractérisée en menant un essai quasi-statique jusqu à la rupture afin de mesurer six paramètres : la contrainte à la limite élastique et la déformation associée, la contrainte maximale et la déformation associée, la déformation à la rupture, et la densité d'énergie absorbée jusqu' à la rupture (en J/m^3) ou travail normalisé par l'aire de la section de l'échantillon (en J/m^2 ou N/m). La densité d'énergie absorbée jusqu' à la rupture est représentée par l'aire sous la courbe contrainte-déformation. Elle caractérise l'aptitude du matériau à absorber de l'énergie de déformation avant la rupture [53].

Le dépassement de la zone élastique induit une déformation irréversible (dite permanente ou résiduelle), souvent associée à un endommagement du matériau. Pour un matériau homogène non poreux, lorsque la contrainte n'atteinte pas la contrainte maximale, la déformation permanente est infligée de manière homogène à tout le volume de l'échantillon. Cependant, au delà de la déformation à la contrainte maximale, la déformation et l'endommagement associés se développent dans une région préférentielle de l'échantillon jusqu' à la rupture. Cette région est souvent visible pendant un essai de traction sous forme de zone de striction (réduction progressive de la section). Dans le cas d'un matériau très poreux comme l'os trabéculaire, les déformations maximales à l'échelle du tissu sont toujours supérieures à la déformation apparente, à cause des concentrations de contraintes induites par la complexité et l'inhomogénéité de l'architecture trabéculaire [53].
En effet, une déformation résiduelle a été mesurée dans l'os trabéculaire humain après une déformation en compression inférieure à 0.3%, donc inférieure à la déformation à la limite élastique apparente. On distingue deux grands types de comportements plastiques : le comportement à rupture fragile et le comprtement à rupture ductile. Le comportement fragile (verre ou PMMA par exemple) est caractérisé par une zone plastique presque inexistante, le matériau casse dès qu'il dépasse sa limite élastique. Le comportement ductile (aciers au carbone traités et alliages d'aluminium par exemple) est caractéristique des matériaux pouvant supporter de grandes déformations, la relation contrainte déformation est non-linéaire et s'étend largement au delà de la déformation à la limite élastique. Le comportement plastique de l'os est plutôt ductile.

1.5.3 Viscoélasticité

Lorsque la déformation d'un solide élastique se produit avec un retard de phase sur la contrainte appliquée, on dit qu'il est viscoélastique. Ce retard, dû aux frottements internes du matériau, est compris entre 0 et $\Pi/2$ rad. Ce phénomène induit une dissipation d'une partie de l'énergie mécanique fournie sous forme de chaleur. Le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie transmise est égal à

2 $tan(\delta)$, où $tan(\delta)$ est appelé facteur d'amortissement ou de perte.
En outre, la valeur du facteur de perte, dépend de la vitesse de déformation. La viscoélasticité a pour effet de modifier l'élasticité du matériau. Augmenter la vitesse de déformation a tendance à augmenter le module d'Young, la contrainte à la limite élastique et la contrainte maximale.
Peu d'études ont été menées sur la viscoélasticité de l'os trabéculaire. Le facteur de perte mesuré pour l'os trabéculaire fémoral bovin frais vaut entre 5.10^{-2} et 10^{-1} . Les effets viscoélastiques mesurés pour l'os trabéculaire sont néanmoins plus importants que pour l'os cortical, probablement à cause de leurs structure très différente et de la quantité de moelle osseuse plus importante dans l'os trabéculaire.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté le description de les os du squelette qui ont des formes variables dépendent de leur fonction et leur situation dans le corps. Et on a parleé aussi sur l'ostéoporose ,c'est quoi ce maladi ?, et quelles sont leurs causes ?.Et on a présenté quelles que propriétés mécaniques de l'os comme :

- élasticité du tissu osseux,
- plasticité,
- viscoélasticité .

Chapitre 2

Description des milieux poreux

Les matériaux poreux sont des milieux diphasiques, c'est-à-dire qu'ils sont constitués d'un solide et d'un fluide. À l'échelle microscopique, l'arrangement des deux phases conduit à une microstructure hétérogène complexe, dont les propriétés suscitent beaucoup d'intérêts. Ces matériaux se rencontrent dans de nombreuses applications qui sont liées à l'acoustique et vibro-acoustique, telles que l'absorption du son, l'atténuation des vibrations, la prospection du pétrole, la sismologie, la géophysique et la médecine. Les matériaux poreux sont soit fabriqués à des fins particulières, en raison de leur structure spécifique, ou existent naturellement (par exemple, les roches, les sédiments de la mer). Les matériaux poreux peuvent être trouvés dans des formes diverses, par exemple, mousses polymères, des matériaux fibreux comme les laines de roche et laines de verre, qui sont principalement dédiées à la réduction du bruit et de la pollution de vibration à laquelle tout le monde est soumis. Cela peut être le bruit et les vibrations de l'environnement, comme le bruit de voisinage (aéroport, les voitures, les oeuvres, la musique forte),

Lorsqu' une onde sonore se propage dans un tel milieu, des interactions entre ces deux phases de natures différentes ont lieu, donnant diverses propriétés physiques non usuelles au milieu poreux, ne serait ce qu'en ce qui concerne les propriétés du fluide. Par ailleurs, la grande surface de contact entre le solide et le fluide, qui est la caractéristique principale des poreux induit de nouveaux phénomènes de diffusion et de transport dans le fluide, en relation avec la microgéométrie particulière de l'espace poreux.

2.1 Paramètres géométriques

2.1.1 La porosité ϕ

Le premier paramètre qui caractérise la géométrie interne d'un matériau poreux est la porosité, notée ϕ. Le volume total V occupé par un échantillon de matériau poreux correspond à la somme des volumes V_s et V_f occupés respectivement par la phase solide et la phase fluide. Nous nous intéressons ici au

cas où les pores sont interconnectés et communiquent avec l'extérieur de sorte que la phase **fluide forme un espace continu**. Le volume V_f ne prend donc en compte que le volume d'air à l'intérieur du poreux qui communique avec l'extérieur. On définit la porosité ϕ par :

$$\phi = V_f/V, \tag{2.1}$$

C'est une grandeur sans dimension pouvant varier de 0 (matériaux solides non poreux) à 1 (fluide libre). La porosité est un paramètre difficile à mesurer avec précision. Elle est mesurée en comparant le volume d'un matériau à celui de l'eau qu'elle peut absorber. Dans le cas où les densités du matériau et de la structure du poreux sont connues un simple rapport permet d'obtenir la porosité. Cette méthode peut être utilisée pour les fibreux mais alors la précision n'est pas très bonne puisqu'elle nécessite à la fois la mesure du volume et de la masse d'un échantillon avec toute les incertitudes que cela peut supposer. Les principales méthodes pour la mesure de ϕ sont données dans les références suivantes [7, 50, 41, 21]

2.1.2 La Perméabilité visqueuse κ_0

La loi de Darcy [25] qui décrit le passage d'un fluide à travers un poreux sous l'action d'une surpression, s'écrit pour le flux d'un fluide se déplaçant dans une direction x sous la forme :

$$v_e = -\frac{\kappa_0}{\eta}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{2.2}$$

où v_e est la vitesse d'écoulement ou débit par unité de surface, κ_0 est la perméabilité visqueuse du matériau, η est la viscosité dynamique du fluide, (pour l'air $\eta = 1.84 \times 10^{-5} kg.m.s^{-1}$), $\partial P/\partial x$ est le gradient de pression dans la direction de l'écoulement. Ce gradient correspond à l'opposé de la chute de pression par unité de longueur. Parfois on note aussi :

$$v_e = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{2.3}$$

sous la forme d'une relation simple entre la résistivité du materiaux σ et perméabilité κ_0 de Darcy :

$$\sigma = \frac{\eta}{\kappa_0}. \tag{2.4}$$

où κ_0 est une grandeur homogène à une surface correspondant à une section efficace pour l'écoulement du fluide. Elle s'exprime en m^2 mais on utilise plutôt le darcy qui est plus approprié pour les applications : $1 darcy = 9,87.10^{-7} m^2$. Ce paramètre ne dépend pas de la nature du fluide mais uniquement de la géométrie interne du matériau poreux. En acoustique aérienne, on utilise souvent la résistivité σ pour caractériser un matériau, celui-ci étant plongé dans l'air, mais c'est κ_0 qui est présenté, en physique des fluides, comme le paramètre intrinsèque du poreux. En faisant intervenir v la vitesse uniforme d'écoulement v de l'air dans le matériau, et en utilisant le conservation du flux $v_e = \phi.v$, la relation (2.4) s'ecrit encore :

$$v = -\frac{1}{\sigma\phi}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Dans le cas de la propagation d'une onde plane, dans la direction x, dans un fluide saturant un matériau poreux à structure rigide, l'équivalent de l'équation d'Euler en régime harmonique et notation complexe s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -i\omega\rho_0 v = -\frac{\partial P}{\partial x} \tag{2.6}$$

Dans l'approximation très basse fréquence, à tout instant, la vitesse macroscopique v est reliée au gradient de pression par l'équation (2.5).D'aprés (2.6) on obtient :

$$-i\omega\rho_0 = \sigma\phi. \tag{2.7}$$

La grandeur σ étant réelle, dans la limite basse fréquence ($\omega \to 0$) on a :

$$\sigma = \frac{\omega}{\phi} Im(\rho_0) = \frac{\rho\omega}{\phi} Im(\alpha(\omega)). \tag{2.8}$$

Dans cette expression on a noté $\rho(\omega) = \rho\alpha(\omega)$ où $\alpha(\omega)$ traduit l'interection du fluide avec la structure.
Cette dernière expression montre que la résistivité est un paramètre important pour déterminer le comportement du matériau poreux à basse fréquence.

2.1.3 Mesure de la résistivité σ spécifique au passage d'un fluide

Lorsqu'un matériau poreux placé dans un tube aux parois étanches, est traversé par un écoulement d'air continu, on constate qu'une différence de pression apparaît entre ses deux faces. Dans un domaine où l'écoulement est laminaire et pour des débits assez faibles, il existe une relation de proportionnalité entre débit (Q_v) et chute de pression (ΔP) donnée par une autre expression la loi de Darcy [8] :

$$\Delta P = R.Q_v \tag{2.9}$$

Le coefficient R correspond à la résistance au passage du fluide et peut donc se définir comme le rapport $\Delta P/Q_v$. Pour un matériau poreux homogène on peut définir une grandeur caractéristique du matériau et du fluide, la résistivité au passage de l'air, comme étant la résistance du matériau de section et de longueur unitaires :

$$R = \frac{\sigma d}{S} \tag{2.10}$$

où σ est la résistivité au passage de l'air, S est la section droit d est la longueur. Le principe de mesure de σ est donné par la figure 2.1.

2.1.4 La perméabilité thermique κ_0'

L'étude des effets visqueux et thermiques montre qu'il existe des similitudes entre ces deux effets. Pour les effets thermiques le champ scalaire τ de la température, joue le même rôle que le champ **u** des vitesses pour les effets visqueux ; les equations régissent ces grandeurs sont alors similaires. Partant de l'équation de diffusion de la chaleur, Lafarge [47] a introduit l'équivalent de la loi de Darcy pour la température excédentaire en introduisant un nouveau paramètre : la perméabilité thermique κ_0', qui est l'inverse de la constante

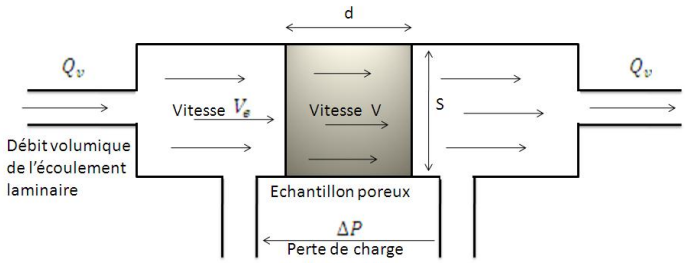


FIG. 2.1 – Dispositif pour mesurer la résistivité au passage d'un fluide

de piégeage. Pour la mesure, on soumet un échantillon de matériau poreux à une pression uniforme très lentement variable : $(\partial P/\partial t \neq 0)$. Le fluide se comprime lentement, il apparaît donc au niveau microscopique des températures excédentaires. Le processus étant très lent la chaleur produite a le temps d'être intégralement absorbée par le solide et le profil de température excédentaire dans le fluide reste stationnaire. On définit la température moyenne T en intégrant dans le volume fluide :

$$T = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \tau dV, \tag{2.11}$$

qui est indépendante du temps et vérifie une loi de type loi de Darcy :

$$T = \frac{\kappa_0'}{k_{th}} \frac{\partial P}{\partial t} \tag{2.12}$$

où k_{th} est le coeffcient de conduction thermique. κ_0' peut être défini dans une situation plus générale correspondant au cas où une solution saturant un milieu poreux contient une espèce excitée (par exemple une molécule portant un spin nucléaire orienté) produit avec une densité spatialement constante et qui diffuse dans le milieu pour se relaxer instantanément au contact de la structure solide. Le phénomène de diffusion est caractérisé par sa constante de diffusion D, dans le cas où le taux de production S de l'espèce est stationnaire, un régime permanent est atteint lorsque V limité par la surface fermée ∂V. La densité $M(\vec{r}, t)$ de l'espèce excitée, conséquence des processus de création dans le volume de fluide, n'évolue plus dans le temps et satisfait donc à l'équation :

$$D\Delta M = -S \quad \text{si} \quad \vec{r} \in V \tag{2.13}$$

avec la condition aux limites

$$M = 0 \quad \text{si} \quad \vec{r} \in \partial V. \tag{2.14}$$

Si S est supposé spatialement uniforme, la constante de piégeage Γ est donnée par :

$$\Gamma = \frac{S}{\langle M \rangle \, \phi D} \tag{2.15}$$

où $\langle M \rangle$ est la moyenne de M dans le volume V, et ϕ est la porosité du milieu.

La constante de piégeage est reliée à une mesure du temps moyen de survie τ_m d'une particule qui diffuse dans le milieu par l'expession $\tau_m = 1/\Gamma\phi D$.

En pratique, les expériences des mesures directes sans ambiguité n'ont jamais été réalisées du fait que l'espèce excitée ne relaxe pas instantanément aux parois, mais relaxe aussi dans le volume V du fluide. Dans ces conditions, l'influence de l'interface ∂V est difficile à évaluer. Seules des simulations numériques ont permis d'accéder à cette constante [65].

2.2 Paramètres dynamiques

2.2.1 La tortuosité α_∞

La tortuosité α_∞ est un autre paramètre important pour décrire les effets inertiels qui se produisent entre les parties fluide et solide d'un matériau poreux où l'inclinaison et les variations de section des pores obligent le fluide à suivre un chemin non rectiligne. Le figure(2.2) montre des situations de tortuosités différentes. Considérons un milieu poreux constitué de pores cylindriques

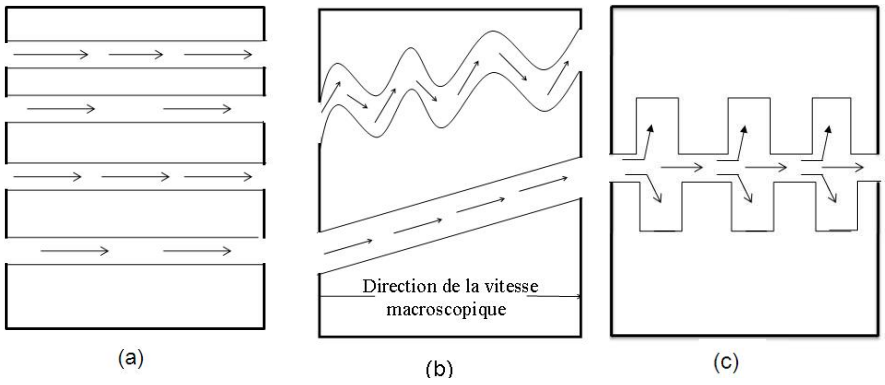


FIG. 2.2 – matériaux ayant des porosités différentes a) $\phi = 1$, b) et c) $\phi > 1$

parallèles, la tortuosité α_∞ correspond au facteur de forme k_s introduit par Zwikker et Kosten [24]. Pour des pores de formes quelconques, Johnson *et coll* [42] ont donné une expresion de la tortuosité définie par :

$$\alpha_\infty = \frac{\frac{1}{V}\int_{Vf} v_m^2 dV}{(\frac{1}{V}\int_{Vf} v_m dV)^2}, \tag{2.16}$$

où v_m représente le champ des vitesses microscopiques d'écoulement dans les pores pour un fluide sans viscosité. Le terme $(1/V\int_{V_f} v_m dV)$ représente la vitesse macroscopique.

La tortuosité est un scalaire toujours supérieur à 1 sauf dans un cas très particulier où le matériau posséde des pores droits où elle est égale à l'unité (Figure.2.2(a)).

2.3 Interaction fluide-structure. Modèle de Johnson-Allard-Champoux

Dans le cas de la propagation d'une onde acoustique, dans un milieu poreux saturé par un fluide dont la viscosité est η, les interactions visqueuses dues au mouvement relatif du solide et du fluide modifient la masse volumique de ce dernier. En effet, la profondeur de couche limite visqueuse $\delta = \sqrt{2\eta/\rho_0\omega}$ augmente lorsque la fréquence de l'onde diminue. Aux basses fréquences $\delta \geq a$ (a est le rayon des pores) le fluide est "collé" aux parois des pores : dans ce cas il n 'y a pas de mouvement du fluide et l'onde ne peut pas se propager ou est très amortie. Aux hautes fréquences $\delta << a$. Dans ce cas, le fluide peut être considéré comme un fluide parfait, c'est à dire sans viscosité. Tout le volume de fluide participe au mouvement de l'onde qui est alors propagative. Ces effets sont pris en compte dans la tortuosité dynamique $\alpha(\omega)$.

2.3.1 Interaction visqueuse : modèle de Johnson *et coll*

Johnson, Koplik et Dashen [42] ont proposé un modèle simple décrivant la fonction $\alpha(\omega)$, tortuosité dynamique lorsque la structure poreuse est saturée par un fluide visqueux newtonien en introduisant la longueur caractéristique visqueuse Λ. Elle est définie par :

$$\frac{2}{\Lambda} = \frac{\int_{S_i} u_m^2 dS_i}{\int_{V_f} u_m^2 dV_f}, \tag{2.17}$$

où u_m est la vitesse microscopique d'un fluide parfait incompressible, S_i l'air de l'interface entre les phases solide et fluide, et V_f est le volume du fluide. Ce modèle peut être appliqué au cas de structures poreuses saturées par un fluide sur une large gamme de fréquences. Deux paramètres du modèle, la tortuosité et la longueur caractéristique visqueuse interviennent dans une limite haute fréquence :

$$\alpha(\omega) = \alpha(\infty)\left[1 + \frac{2}{\Lambda}\left(\frac{\eta}{j\omega\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \omega \to \infty, \tag{2.18}$$

où j étant le nombre imaginaire ($j^2 = -1$), η est la viscosité dynamique du fluide, ω est la pulsation, et ρ_0 est la masse volumique du fluide. Dans la limite basse fréquence, un troisième paramètre intervient, la perméabilité visqueuse $\kappa_0 = \eta/\sigma$ définie précedemment. L'expression de la tortuosité dynamique dans ce domaine de fréquences est donnée par :

$$\alpha(\omega) = \frac{\eta\phi}{\rho_0\kappa_0 j\omega}, \omega \to 0 \tag{2.19}$$

qui exprime la loi de Darcy. La signification des quantités $\alpha_\infty, \Lambda, \kappa_0$ a été donnée par Johnson et coll [42] qui supposent que ces trois paramètres géométriques fournissent une information suffisante sur la micro géométrie. L'expression générale proposée pour $\alpha(\omega)$ est alors celle de la fonction analytique la plus simple vérifiant ces limites en hautes et basses fréquences :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty\left(1 + \frac{1}{jx}\sqrt{1 + \frac{M}{2}jx}\right), \tag{2.20}$$

où x est la fréquence adimensionnelle :

$$x = \frac{\omega \alpha_{\infty \rho_0}}{\sigma \phi}. \tag{2.21}$$

Le facteur de forme des pores M est un paramètre adimensionnel :

$$M = \frac{8\kappa_0 \alpha_\infty}{\phi \Lambda^2} \tag{2.22}$$

Ce coefficient est égal à 1 dans le cas de pores circulaires identiques, et il reste proche de 1 dans de nombreuse autres géométries, il mesure en quelque sorte le rapport plus ou moins étroit qu'entretient la vraie relaxation du matériau, décrite par la fonction $\alpha(\omega)$, avec celle se produisant dans une collection de tubes circulaires tous identiques. Une illustration originale des relaxations $\alpha(\omega)$ est obtenue dans le modèle de Johnson pour $M \approx 1$, Mest petit, et M grand.
Des considérations énergétiques liées à la dissipation visqueuse dans les couches limites ont amené Johnson *et coll* [42] à prédire le comportement dans le cas où l'interface solide/fluide est suffisamment régulière. Ce comportement reprécisé par d'autres auteurs [1], suppose que l'épaisseur de peau δ devient, dans une limite haute fréquence, assez petite devant tout rayon de courbure caractéristique de l'interface. Un terme correctif en $1/\sqrt{j\omega}$ est alors obtenu, permettant la définition de Λ qui a la dimension d'une longueur et ne dépend que de la géométrie du squelette. Le fait que le facteur Mest apparemment souvent proche de l'unité a donné lieu à de nombreuses études et simulations des valeurs prises par les paramètres $\alpha(\omega), \kappa_0$ et Λ dans différents modèles de géométrie. En particulier la perméabilité est un paramètre dont l'estimation est singulièrement importante dans de nombreuses applications et l'existence d'une connexion relativement robuste $\kappa_0 = \phi\Lambda^2/\alpha_\infty$ a souvent été soulignée [44, 2].
Dans de nombreuses géométries où le solide est un empilement aléatoire de grains de formes assez lisses, même éventuellement irrégulières et de dimensions différentes, il apparâit que le facteur M reste voisin de 1. Deux effets entrant en compétition ont été avancés pour expliquer intuitivement cette tendance. Une collection de pores circulaires identiques placés en parallèle doit vérifier $M = 1$. L'effet d'une distribution des rayons est de produire une augmentation du facteur M. Inversement des pores de différents rayons en série produisent (en négligeant les effets de raccordement) une diminution du facteur M. Dans une géométrie complexe du type considéré, ces deux effets s'annulent pour donner $M \approx 1$. Comme signalé au-dessus, pour $M \approx 1$ la relaxation décrite par la fonction $\alpha(\omega)$ sera proche de celle qui correspond aux pores droits cylindriques. Historiquement avant le développement du modèle de Johnson et en l'absence d'une compréhension détaillée des effets de la micro géométrie, la réponse acoustique d'un matériau poreux a souvent été assimilée à celle d'une collection de tubes droits de même porosité et résistance au passage de l'air. La fonction $\alpha(\omega)$ peut alors s'écrire directement en termes de fonctions de Bessel. Cette procédure donne des résultats acceptables chaque fois que $M \approx 1$.

2.3.2 Interactions thermique : modèle d'Allard-Champoux et Lafarge

Le module d'incompressibilité $K'(\omega)$ s'exprime en fonction de la succeptibilité $\beta(\omega)$:

$$K'(\omega) = \frac{K_f}{\beta(\omega)}, \tag{2.23}$$

où K_f est l'incompressibilité du fluide libre. Les limites basses et hautes fréquences de $\beta(\omega)$ sont respectivement γ et 1 : à trés haute fréquence le cycle de compression dilatation est trop rapide pour que des échanges de chaleur entre les régions comprimées et détendues du fluide aient le temps de se réaliser. Le processus est alors adiabatique :

$$\lim_{\omega \to \infty} K'(\omega) \approx K_f. \tag{2.24}$$

Dans ce cas, les échanges thermiques ont lieu dans l'épaisseur de couche limite thermique $\delta' << a$. En introduisant la longueur caractéristique thermique Λ' qui définie par :

$$\frac{2}{\Lambda'} = \frac{\int_{s_i} dS_i}{\int_{v_f} dV_f} \tag{2.25}$$

Allard et Champoux [20] ont déterminé, la limite haute fréquence de $\beta(\omega)$:

$$\lim_{\omega \to \infty} \beta(\omega) = 1 + (\gamma - 1)(1 - \gamma)\frac{\sqrt{2\eta}}{\Lambda'\sqrt{\rho_0 \omega P_r}} \tag{2.26}$$

où γ représente le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = c_p/c_v$. À trés basses fréquences dans le cas où la capacité calorifique de la structure est grande, les échanges thermiques se font avec tout le volume du fluide. Le fluide reste alors à température quasi-constante, et le mouvement du fluide dans le matériau poreux peut être considéré comme isotherme. On a donc :

$$\lim_{\omega \to 0} \beta(\omega) \approx \frac{\gamma}{K_f}, \tag{2.27}$$

À basses fréquences le développement de la compressibilité dynamique est donné par Lafarge par la relation suivante :

$$\lim_{\omega \to 0} \beta(\omega) \approx \gamma - \frac{(\gamma - 1)\rho_f \kappa_0' P_r}{\eta \phi j\omega}, \tag{2.28}$$

en introduisant la perméabilité thermique $\kappa_0^{'}$, semblable à la perméabilité visqueuse κ_0 pour les effets visqueux. Et P_r est le nombre de Prandt qui vaut 0.71 pour l'air. L'expression de la compressibilité fournie par Champoux et Allard et corrigée par Lafarge [46], Elle relie les basses et hautes fréquences par la relation suivante est donc

$$\beta(\omega) = \gamma - \frac{(\gamma - 1)}{1 + \frac{1}{j\omega'}\sqrt{1 + \frac{M'}{2} j\omega'}}, \tag{2.29}$$

où $\omega' = \omega\omega_c^{'}$, $\omega_c^{'} = \frac{\eta\phi}{\kappa_0' P_r \rho_0}$, $M^{'} = \frac{8\kappa_0^{'}}{\phi \Lambda'^2}$.

Comme Pride l'a fait pour les effets visqueux, Lafarge propose une extension au modèle de Champoux et Allard en ajoutant un nouveau paramètre p'. Ainsi en hautes fréquences la nouvelles expression est donnée par :

$$\lim_{\omega\to\infty}\beta(\omega) \approx 1 + (\gamma - 1)\left[\frac{2}{\Lambda'}\sqrt{\frac{\eta}{P_r\rho_0}}\sqrt{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\eta\phi}{\kappa_0' P_r\rho_0}(\frac{1-p'}{j\omega})\right] \tag{2.30}$$

où p' est un paramètre géométrique sans dimension relié à $\alpha_0^{'}$, équivalent thermique du paramètre inertiel visqueux α_0 :

$$p' = \frac{M'}{4(\alpha_0' - 1)}. \tag{2.31}$$

L'expression générale de la compressibilité dynamique est :

$$\beta(\omega) = \gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \frac{1}{j\omega'}(1 - p' + p'\sqrt{1 + \frac{M'}{2p'^2}j\omega'})} \tag{2.32}$$

En prenant $p' = 1$, on retrouve l'expression de la compressibilité dynamique donnée par Champoux et Allard.

2.3.3 Conclusion

Ce chapitre présente les paramètres caractéristiques de la propagation des ondes dans les matériaux poreux :

- La porosité ϕ,
- La perméabilité visqueuse κ_0 ou la résistivité au passage du fluid $\sigma = \eta/\kappa_0$,
- La tortuosité α_∞,
- La longueur caractéristique visqueuse Λ,
- La longueur caractérstique thermique $\Lambda^{'}$,
- La perméabilité thermique $\kappa_0^{'}$.

Ces paramètres influencent le fluide saturant le poreux et donc la propagation des ondes qui s'y développent. Certains de ces paramètres sont importants en régime visqueux et d'autres en hautes fréquences.
Il présente aussi les principaux modèles décrivant la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux. Ces modèles construits à partir d' une étude du comportement asymptotique des milieux poreux, présentente l'intérêt d'être basés sur une faible dose d'empirisme et utilisent des paramètres qui ont une signifcation physique.

Chapitre 3

Modèles de propagation

Introduction

La propagation des ondes mécaniques dans les milieux poreux saturés par un fluide est bien décrite par la théorie de Biot. Ce modèle prend en compte à la fois l'élasticité du squelette et la compressibilité du fluide. Les déplacements des deux phases sont ainsi couplés par l'intermédiaire de trois mécanismes : i) le couplage massique qui traduit la tortuosité du poreux ; ii) le couplage élastique qui est une manifestation du principe de réciprocité et iii) le couplage visqueux qui résulte des mouvement relatifs du fluide visqueux et le squelette du poreux. Cette théorie prédit l'existence de deux types ondes de compression, les ondes dites rapide et lente. La propagation des ces ondes correspond à des mouvements relatifs du solide et du fluide. La mise en évidence de l'onde lente de Biot est souvent délicate car elle nécessite des conditions particulières :

- un mouvement relatif des deux phases du poreux ;
- un fluide suffisamment visqueux pour assurer le couplage entre les phases solide et fluide, mais pas trop pour ne pas empêcher le mouvement différentiel de ces phases ;
- des conditions aux limites qui autorisent ce mouvement différentiel solide/fluide (système ouvert) [64, 60].

Lorsque la structure est lourde par rapport au fluide (cas d'un gaz saturant) le modèle de Biot se simplifie. Dans ce cas on peut décrire la propagation des ondes par le modèle du fluide équivalent. Dans ce modèle l'onde ne se propage que dans le fluide, la structure restant immobile. Le squelette du poreux n'intervient que dans les interactions fluide-structure pour les effets visqueux et les effets thermiques.

3.1 Hypothèses sur le milieu poreux

Les matériaux poreux naturels (roches), ou artificiels(céramique, mousse plastique,.....) possèdent une microgéométrie complexe (Figure 3.1) qui rend difficile toute approche microscopique. Pour appliquer les résulats de la mécanique des milieux continus aux poreux, il est nécéssaire de travailler à une échelle plus grande permettant une description macroscopique. Pour cela quelques hypothèses simplificatrices doivent être prises en compte.

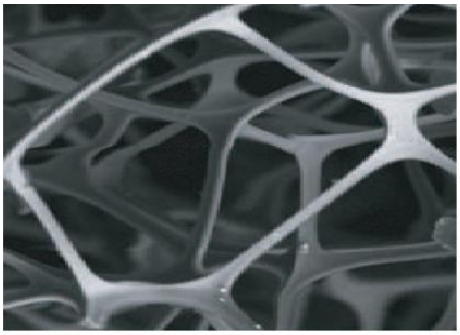


FIG. 3.1 – Photographie d'une laine de verre (microscope électronique, grossissement 500)

3.1.1 Continuité des phases

Nous considérons une perturbation de petite amplitude de l'état d'équilibre thermodynamique ambiant, perturbation liée au passage de l'onde sonore dans le fluide saturant. Nous supposons que les dimensions des pores sont suffisamment grandes, de sorte qu'à l'échelle microscopique $''l''$ le fluide peut encore être considéré comme un milieux continu. C'est par exemple, l'air dans les cas standards, ceci est rendu possible en raison du libre parcourt moyen $l_m \cong 10^{-7}$, et du nombre considérable de molécules $\approx 10^7$ contenues dans une 'particule fluide' de volume $dV = (10l_m)^3 \cong 10^{-18}m^3$. Le temps moyen entre collisions $\tau_m \cong 10^{-10}s$, est infinétisimal par rapport à un temps caractéristique de variation de l'état de la 'particule fluide' dV. Lorsqu'on moyenne sur un volume 'élémentaire' dV des propriétés attachées aux molécules individuelles, définissant par exemple la quantité de mouvement par unité de masse $\upsilon =< m\omega > / < m >$, où m est la masse et ω la vitesse d'une molécule, on obtient des grandeurs qui varient sur des échelles de temps et de distances trés supérieures aux échelles τ_m et l_m . En ce qui concerne la taille caractéristique (l) des pores, elle est pour les matériaux poreux que nous rencontrons en pratique, de l'ordre de $10^{-4}m$ soit environ 1000 fois l_m. A l'échelle microscopique des pores il suffit pour que le mouvement fluide apparaisse principalement décrit par la mécanique des fluides,que l'on puisse définir des éléments différentiels de volume d^3r avec $l_m^3 << d^3r << l^3$. Ainsi la description que nous donnerons doit s'appliquer encore pour des dimensions de pores bien plus faibles que celle rencontrées habituellement. Nous supposerons en outre que les propriétés physiques du fluide ne sont pas affectées par la proximité des parois.

3.1.2 Homogénéité

Comme les matériaux poreux possèdent une structure désordonnée résultant d'une hétérogénéité microscopique, les paramètres décrivant sa géométrie doivent être définis à une échelle macroscopique où la microgéométrie est caractérisée de façon statistique. Les variables décrivant le mouvement sont par conséquent

des grandeurs résultant d'une moyenne des quantitées définies à l'échelle microscopique sur un élément de volume macroscopique.

Pour définir les paramètres géométriques du milieu poreux, on introduit la notion de volume d'homogénéisation (fig.3.2). C'est par définition le plus petit volume de poreux dans lequel la moyenne du paramètre considéré est stationnaire. Considérons une sphère S centrée en $\vec{r}$, de rayon R, définie dans le volume du matériau poreux à étudier. La valeur moyenne dans le volume de la sphère S du paramétre p à caractériser est notée :

$$p(\vec{r}, R) =< p >_s = \bar{p}. \tag{3.1}$$

Lorsque le rayon R augmente, la valeur $p(\vec{r}, R)$ tend vers la constante $\bar{p}$ valeur moyenne de p dans le poreux. C'est à dire que pour une valeur R_0 de R,les irrégularités du matériau se compensent et $p(\vec{r}, R)$ est pratiquement constante. Le volume d'homogénéisation du paramètre p est alors le volume de la sphère de rayon R_0 . Dans un milieu homogène, la valeur ne dépend pas du point repéré par $\vec{r}$. Il est clair que les différents paramètres utilisés pour caractériser un poreux n'ont pas nécessairement tous le même volume d'homogénéisation. Dans ce cas le volume minimal qui représente correctement le milieu est le plus grand volume d'homogénéisation.

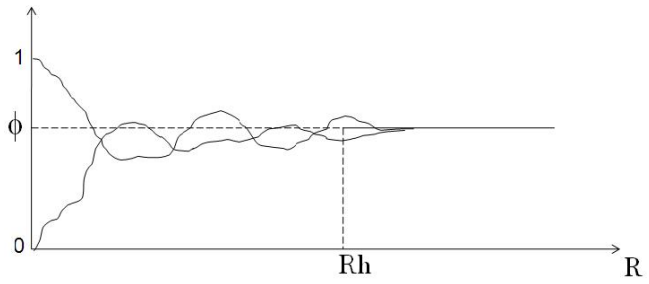


FIG. 3.2 – Détermination de la taille du volume d'homogénéisation

3.1.3 Grande longueur d'onde

Dans le cas d'une excitation par une onde acoustique, la longueur d'onde doit être grande devant la plus grande dimension du volume minimum d'homogénéisation (fig.3.3). Les expériences acoustiques n'auront de sens macroscopique que si l'échantillon est grand devant ce même volume. Aussi pour éviter le phénomène de diffusion, la longueur d'onde doit être grande devant la taille des pores du matériau.

3.1.4 Isotropie

Généralement, la structure d'un matériau change de propriétés suivant la direction d'observation, il s'agit alors d'un matériau anisotrope. Pour les laines de verre, constituées d'enchevêtrements de fibres dont la direction est approximativement comprise dans un plan parallèle à la surface, Allard *et coll* [3]et Dazel [26] ont proposé une formulation de l'impédance de surface tenant compte de

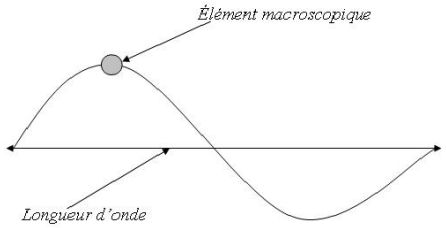


FIG. 3.3 – Hypothèse de grande longueur d'onde devant l'élément de volume macroscopique

l'anisotropie et utilisant les lois de Delany et Bazley [27].
Dans ce manuscrit, même si l'os trabéculaire est anisotrope, par des raisons de simplicité, nous nous s'intéressons qu' à des milieux poreux isotropes.

3.2 Propagation dans un poreux à structure rigide saturé : Modèle du fluide équivalent

3.2.1 Fluide libre illimité

Dans un fluide libre illimité, la propagation des ondes acoustiques est entièrement caractérisée par la connaissance de la masse volumique ρ_0 et du module d'incompressibilité adiabatique K_a du fluide(gaz). Dans l'approximation de l'acoustique linéaire, et en négligeant les pertes, le mouvement du fluide est déterminé par les deux équations suivantes [52] :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{K_a} \frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{v}, \tag{3.3}$$

où $\vec{v}$ et p correspondent aux vitesse et pression acoustiques. Dans ces conditions, on obtient l'équation d'onde :

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{3.4}$$

avec c_0 célérité de l'onde, qui définie par la relation :

$$c_0^2 = \frac{K_a}{\rho_0}, \tag{3.5}$$

La solution en ondes planes progressives harmoniques de pulstion ω, en notation complexe, avec $\vec{r}$ le vecteur position, et avec le choix de convention $(-i\omega t)$ qui sera adoptè dans tout ce mémoire, est de la forme :

$$p(\vec{r}, t) = P_m exp(i\vec{k}_0.\vec{r} - i\omega.t), \tag{3.6}$$

Cette solution est caractérisée par la norme du vecteur d'onde ou nombre d'onde k_0 :

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{K_a}}. \tag{3.7}$$

L'impédance caractéristique Z_0 du milieu dans lequel se propage l'onde plane dans une direction x, est donnée par le rapport de la pression sur la vitesse acoustique et ne dépend pas de la position. On obtient alors :

$$Z_0 = \sqrt{\rho_0 K_a}. \tag{3.8}$$

Pour un fluide libre infini supposé sans perte, ces deux grandeurs, nombre d'onde et impédance caractéristique, sont deux grandeurs réelles.

3.2.2 Fluide libre saturant un poreux

Dans le cas où le fluide sature une structure poreuse, il n'est plus possible de négliger les pertes par dissipation visqueuse et thermique. En effet, à l'échelle microscpique des pores, la distribution des vitesses près de la surface de la structure est modifiée par les forces de viscosité. De même les compressions et dilatations successives que subit le fluide entraînent des échanges de chaleur entre les phases fluide et solide. La géométrie microscopique du poreux réel étant très complexe, trouver une solution analytique au problème de la propagation est difficile voire impossible. En fait, le comportement des variables microscopiques, tenant compte d'un grand nombre de détails, nous intéresse moins qu'un comportement global obtenu par moyenne sur un volume élémentaire représentatif de ces variables microscopiques. Pour cela, il est possible de faire quelques hypothéses raisonnables permettant d'établir une théorie macroscopique pour la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux.
Les dimensions intervenant à l'échelle des pores sont en général de l'ordre de $10^{-4}m$ pour les matériaux poreux absorbants usuels. Ces longueurs restent donc petites devant la longueur d'onde acoustique et ceci jusqu'aux "basses fréquences ultrasonores". Cependant en acoustique linéaire, ces longueurs resteront grandes devant les déplacements acoustiques du fluide.
On peut ainsi définir un milieu à deux échelles, une échelle microscopique (échelle des pores) et une échelle macroscopique dans laquelle toute variable correspond à une moyenne spatiale de la variable microscopique sur un volume élémentaire Ω dit volume d'homogénéisation. Ce volume Ω est suffisamment petit pour être considéré comme un volume élémentaire autour d'un point M, mais suffisamment grand pour lisser l'hétérogénéité au niveau microscopique. Typiquement le volume Ω correspond environ à une vingtaine de cellules élémentaires constituant le squellette du poreux. On peut alors considérer un milieu équivalent continu et homogène dans lequel la condition de grande longueur d'onde permet d'éliminer tout phénomène de diffusion.
Dans le cas où la structure peut vibrer sous l'action de l'onde se propageant dans le fluide, le modèle de Biot [12, 11, 9, 10] donne les équations régissant le mouvement de la structure et du fluide. Si on rajoute la condition de structure (rigide) justifiée par le fait que nous nous intéressons principalment ici au cas oú le fluide, comme l'air, est léger, ces équations se simplifient et peuvent se mettre sous la forme :

$$\rho_e(\omega)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{K_e(\omega)}\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{v} \tag{3.10}$$

$$\tag{3.11}$$

Ici $\vec{v} =< \vec{u} >$ et $P =< P' >$ sont les moyennes, sur le volume Ω d'homogénéisation, de la vitesse $\vec{u}$ acoustique et de la pression P' acoustique microscopiques. Ces moyennes tiennent compte des fluctuations locales au niveau microscopique du pore.
Ces équations sont semblables à celles obtenues dans le cas d'un fluide illimité avec une masse volumique $\rho_0 \equiv \rho_e(\omega)$ et de module d'incompressibilité $K_a \equiv K_e(\omega)$, (l'incice e signifie ici *effectif*). Le modèle de propagation en structure rigide introduit donc la notion de fluide équivalent pour décrire la propagation des ondes acoustiques dans un fluide réel saturant un milieu poreux.
Les masse volumique effective ρ_e et le module d'incompressibilité K_e deviennent des fonctions complexes de la pulsation du fait de l'existence des interactions inertielles, visqueuses et thermiques entre le fluide et la structure du poreux, l'intensité de ces interactions évoluant avec la fréquence.
Le nombre d'onde q et l'impédance caractéristique Z_c du milieu s'écrivent maintenant :

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\frac{\rho_e}{K_e}}, \tag{3.12}$$

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\rho_e.K_e}. \tag{3.13}$$

$$\tag{3.14}$$

La détermination des deux fonctions ρ_e et K_e permet donc de décrire le comportement acoustique du milieu considéré.

3.3 Densité et incompressibilité effectives

La propagation des ondes acoustiques obéit aux équations de la mécanique des fluides que sont l'équation de conservation de la masse, l'équation de Navier-Stokes, l'équation de l'énergie et l'équation d'état. La détermination des masse volumique et incompressibilité effectives $\rho_e(\omega)$ et $K_e(\omega)$ peut donc, au moins en théorie, se faire à partir de ces équations qui décrivent les mouvements thermovisqueux à l'échelle microscopique [32] et [52, 16]. En régime harmonique, on a :

$$-i\omega\rho_0\vec{u} = -\vec{\nabla}P' + \eta\nabla^2\vec{u} + (\frac{\eta}{3} + \xi)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u}), \tag{3.15}$$

$$-\frac{i\omega}{K_0}(P' - \beta K_0\tau) = -\vec{\nabla}.\vec{u}, \tag{3.16}$$

$$-i\omega\rho_0 C_p\tau = -i\omega\beta_0 T_0 P' + k_{th}\nabla^2\tau. \tag{3.17}$$

où les grandeurs $\vec{u}$, P' et τ sont respectivement la vitesse acoustique, la surpression et la température excédentaire acoustique dues au passage de l'onde acoustique dans le fluide ; η et ξ sont la première et la seconde viscosités dynamiques, K_0 est le module d'incompressibilité isotherme, β_0 le coefficient de dilatation thermique, C_p la chaleur spécifique à préssion constante, T_0 est la température du fluide au repos et k_{th} est le coefficient de conduction thermique pour le fluide.
A ces équations on doit adjoindre les conditions aux limites à l'infini -condition de Sommerfeld- dans le cas du fluide non contraint par des parois ou à l'interface

fluide-solide. Dans un poreux, puisque la conductivité thermique de la structure solide est grande par rapport à celle du fluide, le squelette se comporte comme un thermostat. De plus la structure étant imperméable, on peut poser :

$$\vec{u} = 0 \quad , \tau = 0 \tag{3.18}$$

Enfin on s'intéresse aux phéomènes acoustiques pour lesquels l'origine physique des perturbations $\vec{u}$, P' et τ est supposée provenir d'une excitation extérieure acoustique dont la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions des pores. La technique de l'homogénéisation (Lafarge et al [28]) appliquée à ce problème permet alors de montrer que les effets visqueux et thermiques sont déconnectés. Les deux fonctions $\rho_e(\omega)$ et $K_e(\omega)$ dépendent des caractéristiques physiques du fluide et de la géométrie du squelette du poreux. Les effets visqueux et inertiels sont entièrement pris en compte dans la fonction $\rho_e(\omega)$ tandis que dans $K_e(\omega)$ n'interviennent que les effets thermiques. On retrouve ici le principe de déconnexion des effets visqueux et thermiques énoncé par Zwikker et Kosten [24] au cours de leurs travaux sur les pores cylindriques à section circulaire.
Une étude du comportement asymptotique de ces fonctions, aux basses et hautes fréquences, cas où les équations se simplifient, permet de définir des paramètres masse volumique et incompressibilité effectives qui doivent avoir exactement les mêmes comportements asymptotiques, exprimés en termes de ces paramètres.
La densité effective peut encore s'écrire :

$$\rho_e(\omega) = \alpha(\omega).\rho_0. \tag{3.19}$$

La fonction complexe $\alpha(\omega)$ apparaît sans dimension et correspond à une densité normalisée. Cette fonction introduite par Johnson [42] est appelée tortuosité dynamique. La partie réelle de la densité effective est accrue par rapport à la densité ρ_0 du fluide, et une partie imaginaire apparaît.
De même, il est plus commode de définir une fonction sans dimension caractérisant les effets thermiques. On peut alors définir une compressibilité normalisée de la façon suivante :

$$\beta(\omega) = \frac{K_a}{K_e(\omega)} \tag{3.20}$$

Dans ces conditions le nombre d'onde que (3.12) et l'impédance caractéristique Z_e (3.13) s'écriront en utilisant respectivement les relations (3.7) et (3.8) :

$$q(\omega) = q_0\sqrt{\alpha(\omega).\beta(\omega)} \tag{3.21}$$

$$Z_c(\omega) = Z_0\sqrt{\frac{\alpha(\omega)}{\beta(\omega)}}. \tag{3.22}$$

$$\tag{3.23}$$

3.4 Propagation dans un milieu à structure souple : Modèle de Biot

3.4.1 Modèle de Biot

Le modèle de Biot est un modèle physique développé pour modéliser le comportement mécanique des matériaux poreux ou poro-élastiques sous l'action

d'une onde acoustique. Il porte le nom de son "inventeur", le physicien belge Maurice Anthony Biot. Il est aussi appelé modèle de Biot-Allard dans le cas où il est appliqué aux matériaux acoustiques (saturés d'air) .

Dans ce modèle, le milieu poreux est traité comme un continum constitué d'une phase solide et d'un fluide saturant. La phase solide constitue le squelette dont l'espace des pores est rempli par le fluide. Par ailleurs, on considère que la porosité occluse fait partie du solide. De ce fait, les deux phases sont connexes, c'est à dire qu'on peut passer d'un point à un autre du matériau par un chemin contenu dans le solide ou par un chemin contenu dans le fluide. Pour appliquer les méthodes de la mécanique des milieux continus, il est nécessaire que l'on puisse considérer le milieu comme homogène, c'est à dire que la longueur d'onde soit grande devant la taille du volume d'homogénéisation. Enfin on considère que la théorie est linéaire, ce qui revient à supposer que les déplacements du solide et du fluide sont petits.

3.4.2 Cas d'un squelette souple

La théorie de Biot [12, 11, 9, 10] est la modélisation la plus générale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux saturé d'un fluide conduisant à des équations linéaires [28]. Lorsque la structure d'un matériau poreux est souple, les ondes mécaniques se propagent dans le squelette et dans le fluide saturant. Les interactions fluide structure jouent alors un rôle essentiel dans le phénoméne de propagation. La prise en compte de ces effets a été largement développée par Biot [12, 11, 9, 10] pour les application en recherche pétrolière dès les années 50. Le principal succès de ce modèle est la prédiction de trois modes de propagations, deux modes longitudinaux et un mode transversal. Par la suite Johnson et coll [42] d'une part, Champoux et Allard [20] et Lafarge [46] d'autre part, ont introduit un certain nombre de paramètres (tortuosité et longueur caractéristique) qui étendent la validité du modèle de Biot à une large classe de matériaux poreux, sur une gamme de fréquences plus importante et prenant en compte les effets thermiques qui se développent lorsque le fluide saturant est un gaz. Dans le modèle de Biot, le milieu poreux est traité comme un continuum constitué d'une phase solide et d'un fluide saturant. La phase solide constitue le squelette et l'espace des pores est rempli par le fluide.
Lorsqu'un matériau poreux est le siège d'une perturbation mécanique, il répond aux contraintes qu'il subit en se déformant. Dans le cas d'un matériau poreux, les relations contraintes-déformations permettent d'interpréter et d'exprimer les coefficients d'élasticité P,Q,R et N de Biot qui apparaissent dans les équations du mouvement. Les composantes du tenseur des contraintes τ_{ij}^s de la phase solide et τ_{ij}^f de la phase fluide s'écrivent :

$$\tau_{ij}^s = ((P-2N)\vec{\nabla}.\vec{u} + Q\vec{\nabla}.\vec{U})\delta_{ij} + N(u_{ij}+u_{ji}) \quad (3.24)$$

$$\tau_{ij}^f = (R\vec{\nabla}.\vec{U} + Q\vec{\nabla}.\vec{u}) = -\rho_f\delta_{ij} \quad (3.25)$$

Biot et Willis [13] ont montré que N est le module de cisaillement du matériau dû uniquement au squelette et que les coefficients d'élasticité P,Q,R et N du matériau s'ecrivent sous la forme :

$$P = \frac{(1-\phi)(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})K_s + \phi\frac{K_s}{K_f}K_b}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}} + \frac{4}{3}N, \quad (3.26)$$

$$Q = \frac{(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})\phi K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}}, \quad (3.27)$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}}. \quad (3.28)$$

où K_f, K_s et K_b sont respectivement les modules d'incompressibilité de la phase fluide dans le matériau poreux, de la phase solide, et de la structure poreux (squelette) dans le vide.

3.4.3 modèle de Biot : poreux saturé par un liquide

Dans la théorie de Biot, les déplacements du solide $\vec{u}$ et du fluide $\vec{U}$ obéissent aux équations suivantes :

$$\rho_{11}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} = P\nabla(\nabla.\vec{u}) + Q\nabla(\nabla.\vec{U}) - N\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{u}), \quad (3.29)$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} = Q\nabla(\nabla.\vec{u}) + R\nabla(\nabla.\vec{U}). \quad (3.30)$$

lorsque le milieu poreux est saturé d'un liquide, les effets thermiques sont négligeables. On ne prend en compte que la disspation visqueuse. Les masses volumiques ρ_{ij} sont définies par :

$$\rho_{11} = (1-\phi)\rho_s - \rho_{12} \quad (3.31)$$

$$\rho_{12} = -\phi\rho_0(\alpha(\omega)-1) \quad (3.32)$$

$$\rho_{22} = \phi\rho_0 - \rho_{12} \quad (3.33)$$

où ρ_0, ρ_s sont respectivement les densités des phases fluide et solide, et $\alpha(\omega)$ est la tortuosité dynamique et ρ_{12} est la masse ajoutée due à la tortuosité du matériau.

Le modèle de tortuosité dynamique proposé par Johnson, Koplik et Dashen [42] est de la forme :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty\Big(1 + \frac{\phi\sigma}{i\omega\alpha_\infty\rho_f}\sqrt{1 + i\frac{4\alpha_\infty^2\eta\rho_f\omega}{\sigma^2\lambda^2\phi^2}}\Big). \quad (3.34)$$

A haute fréquence l'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta = (\frac{2\eta}{\omega\rho_f})^{1/2}$ est inférieure à la taille moyenne des pores, dans ce cas, la tortuosité dynamique $\alpha(\omega)$ devient [18] :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty(1 + \frac{2}{\Lambda}\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_f}}) \quad ,\omega\to\infty \quad (3.35)$$

où α_∞ est la tortuosité du matériau et les densités massiques sont données par :

$$\rho_{11} = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f(\alpha_\infty - 1) + \frac{2\phi\rho_f\alpha_\infty}{\Lambda}\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_f}} \quad (3.36)$$

$$\rho_{22} = \phi\rho_f\alpha_\infty + \frac{2\phi\rho_f\alpha_\infty}{\Lambda}\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_f}} \quad (3.37)$$

$$\rho_{12} = -\phi\rho_f(\alpha_\infty - 1) - \frac{2\phi\rho_f\alpha_\infty}{\Lambda}\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_f}} \quad (3.38)$$

3.4.4 Solution de l'équation de propagation dans le domaine fréquentiel

Une solution du système constitué par les relations (3.29) et (3.30) est de la forme :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi_s + \vec{\nabla} \wedge \vec{V_1}, \quad (3.39)$$

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\phi_f + \vec{\nabla} \wedge \vec{V_2}, \quad (3.40)$$

où ϕ_s et ϕ_f sont respectivement les potentiels scalaires des déplacements du solide $\vec{u}$ et du fluide $\vec{U}$, $\vec{V}1$ et $\vec{V}2$ sont les potentiels vecteurs respectivement de $\vec{u}$ et $\vec{U}$. On suppose les ondes planes et harmoniques, c'est à dire qu'on cherche les fonctions scalaires et vectorielles respectivement sous la forme :

$$\phi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})e^{i\omega t}, \quad (3.41)$$

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{r})e^{i\omega t}. \quad (3.42)$$

Onde de compression
Lorsqu'on considère une onde acoustique arrivant en incidence normale sur une interface fluide-poreux, seules les ondes longitudinales sont excitées. Dans ce cas on peut poser :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi_s, \quad (3.43)$$

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\phi_f. \quad (3.44)$$

Par ailleurs si on prend en compte le fait que les déplacements du solide et du fluide sont les combinaisons linéaires des déplacements dus à des ondes lentes et rapides (ϕ_1, ϕ_2), alors on a :

$$\phi_s = \phi_1 + \phi_2, \quad (3.45)$$

$$\phi_f = \mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2. \quad (3.46)$$

où les constantes μ_1 et μ_2 sont les rapports d'amplitude des déplacements pour chacune de ces ondes. Connaissant les constantes de propagations k_1 et k_2 des deux ondes (première et seconde espèce), on peut définir les déplacements du solide et du fluide. Les vecteurs d'ondes des ondes rapide et lente k_1 et k_2 sont définis par :

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{2(PR-Q^2)}[(P\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12})-\sqrt{\Delta}], \tag{3.47}$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{2(PR-Q^2)}[(P\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12})+\sqrt{\Delta}], \tag{3.48}$$

avec $\Delta = (P\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12})^2 - 4(PR-Q^2)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)$ et

$$\mu_1 = \frac{\omega^2\rho_{11}-Pk_1^2}{\omega^2\rho_{12}-Qk_1^2}, \quad \mu_2 = \frac{\omega^2\rho_{11}-Pk_2^2}{\omega^2\rho_{12}-Qk_2^2}. \tag{3.49}$$

La vitesse de phase de l'onde du première espèce (onde rapide ϕ_1) est donnée par :

$$c_1^2(\omega) = \frac{(P\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12})+\sqrt{\Delta}}{2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}, \tag{3.50}$$

Et celle de l'onde du second espèce (onde lente ou de Biot ϕ_2) est donnée par :

$$c_2^2(\omega) = \frac{(P\rho_{22}+R\rho_{11}-2Q\rho_{12})-\sqrt{\Delta}}{2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}. \tag{3.51}$$

Onde de cisaillement
Dans le cas des ondes de cisaillements, les déplacements des phases solide et fluide s'ecrivent :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V_1} \quad , \vec{U} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V_2} \tag{3.52}$$

Les équations du mouvement sont alors :

$$\rho_{11}\frac{\partial^2\vec{V_1}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\vec{V_2}}{\partial t^2} = -N\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V_1}), \tag{3.53}$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2\vec{V_1}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\vec{V_2}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.54}$$

L'équation (3.54) est une simple relation de proportionalité entre le déplacement solide et le déplacement fluide qui conduit à :

$$\vec{V_2} = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\vec{V_1} \tag{3.55}$$

Le vecteur d'onde de l'onde de cisaillement est alors :

$$k_3^2 = \frac{\omega^2}{N}(\frac{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2}{\rho_{22}}) \tag{3.56}$$

et sa vitesse de phase est :

$$c_3^2(\omega) = \frac{N\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2}. \tag{3.57}$$

quant à μ_3 , le rapport d'amplitude, il est directement donné par la relation :

$$\mu_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}. \tag{3.58}$$

Comme on l'a dit plus haut, le déplacement du fluide est directement proportionnel à celui de la matrice solide, ceci signifie qu'à cause de la viscosité, le fluide est entraîné par le solide dans son mouvement. Il n'existe alors qu'une seule onde de cisaillement. L'onde de cisaillement se propage dans la structure solide (Nest le module de cisaillement de la structure solide seule), le fluide quant à lui ne participe que passivement à cette propagation en alourdissant la structure vibrante.

3.4.5 Autre expression du modèle de Biot

Comme il a été dit plus haut, les équations précédentes (3.29) et (3.30) sont celles qui ont été publiées par Biot dans [12, 11, 9, 10]. Toutefois, il est aisé d'imaginer que lorsque une onde mécanique évolue dans un milieux poreux, la porosité subit des variations à la fois temporelles et spatiales. En effet, les élasticités du fluide saturant et du solide étant différentes par nature, il en résulte que lorsque ces deux phases sont soumises à l'action d'une onde les variations de volumes qui s'en suivent modifient la taille des pores et donc la porosité du milieu. Le modèle précédent ne décrit pas ces variations : les fonctions variables sont les déplacements du fluide et du solide qui ne sont liés que par les couplages massique, élastique et visqueux. Ainsi, dans son modèle initial, Biot considère la porosité comme un champ indépendant en restreignant le formalisme à une classe de processus de déformation des phases où les variations de porosité sont reliées seulement à la différences de pression des deux phases. De cette manière, seuls sont pris en compte les processus au cours desquels les deux constiutuants se déforment sans altérer leur proportions volumiques.

Par la suite Biot a publié une autre version de son modèle prenant en compte implicitement les variations de la porosité. Pour ça, il introduit les variables $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$. Dans l'étude des matériaux acoustiques dans lesquels les coefficients d'élasticité du solide et du fluide sont très différents ($K_f \ll K_s$ et $K_f \ll K_b$), les variations de porosité dues au passage de l'onde sont si faibles qu'on peut les négliger sans réels problèmes. Dans le cadre qui concerne ce travail, il en va différemment et la prise en compte du comportement de la porosité sous l'influence de l'onde est essentielle.

Dans cette version du modèle de Biot, les équations de la dynamique pour un milieu poreux parcouru par une onde acoustique harmonique sont :

$$\rho\omega^2 u_i + \rho_f\omega^2 w_i + \tau_{ij,j} = 0, \tag{3.59}$$

$$\rho_f\omega^2 u_i + q\omega^2 w_i - p_{,i} = 0, \tag{3.60}$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes qui s'exercent sur le solide, p est la pression dans le fluide. Les quantités u_i et w_i sont respectivement le déplacement du solide et le déplacement relatif du fluide défini par $w_i = \phi(U_i - u_i)$ où U_i est déplacement du fluide et ϕ la porosité du solide. Les densités des phases solide et fluide sont ρ_s et ρ_f. Par la suite on utilise aussi la densité du poreux définie par $\rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$. Le paramètre q est donné par l'expression

$$q = \rho_f\left(\frac{\alpha}{\phi} + \frac{i\eta}{\omega\kappa}\right), \tag{3.61}$$

où η est la viscosité du fluide, α la tortuosité et κ est la perméabilité du milieu poreux. Pour les basses fréquences, c'est à dire pour les fréquences inférieures à

la fréquence caractéristique de Biot, le terme α/ϕ de (3.61) peut être négligé. Dans ce cas le paramètre q devient :

$$q = \rho_f \frac{i\eta}{\omega\kappa}. \tag{3.62}$$

La perméabilité est un paramètre dépendant de la fréquence ; un modèle en a été donné par Johnson, Koplik et Dashen [42] sous la forme :

$$\kappa(\omega) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{1 + i\frac{4\omega}{m\omega_t}} + i\frac{\omega}{\omega_t}}. \tag{3.63}$$

Dans cette expression

$$\omega_t = \frac{\phi}{\alpha_\infty \kappa_0}\frac{\eta}{\rho_f}, \quad m = \frac{\phi}{\alpha_\infty\kappa_0}\Lambda^2, \tag{3.64}$$

où ω_t est la fréquence de transistion entre les régime visqueux et inertiel des hautes fréquences. Le facteur adimentionel m a été introduit par Pride [59] pour décrire la géométrie des pores ($4 \leq m \leq 8$), κ_0 est la perméabilité hydraulique et Λ est la longueur caractéristique visqueuse. Les contraintes qui exercent sur le solide isotrope et le fluide sont données par

$$\tau_{ij,j} = G\big(u_{i,j} + u_{j,i} - 2\delta_{ij}u_{j,j}\big) + \delta_{ij}\big(Hu_{i,j} + Cw_{i,j}\big), \tag{3.65}$$

$$p = -Cu_{j,j} - Mw_{j,j}. \tag{3.66}$$

Ici, G et H sont respectivement les modules d'élasticité du poreux et du poreux saturé. H est donné par

$$H = P_d + \alpha_{BW}^2 M, \tag{3.67}$$

avec

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha_{BW} - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f}. \tag{3.68}$$

Cette dernière relation constitue l'équation de Gassmann. Dans ces équations, $P_d = K_d + \frac{4}{3}G$ est le module de compression du poreux sec et $\alpha_{BW} = 1 - K_d/K_s$ est le coefficient de Biot-Willis, $C = \alpha_{BW}M$. K_s, K_d et K_f sont les modules d'élasticité de la phase solide, du poreux sec et du fluide et M s'interprète comme le module d'élasticité de l'espace poreux : i) lorsque $\phi \longrightarrow 0$ alors $K \longrightarrow K_s$ et $\alpha_{BW} \longrightarrow 0$ et ainsi M n'est pas défini ; ii) lorsque $\phi \longrightarrow 1$, $K \longrightarrow 0$ et $\alpha_{BW} \longrightarrow 1$ et $M \longrightarrow K_f$.

3.5 Fonctions de Green du modèle de Biot

Récemment, Karpfinger, Muller and Gurevich [36] ont revisité la notion de fonction de Green du problème couplé des ondes de Biot. La recherche des solutions des équations de Biot en présence de sources de volume du mouvement reste un sujet d'étude. Lorsque les termes de sources sont des fonctions (distributions) delta de Dirac, ces solutions constituent les fonctions de Green du problème. Compte tenu des hypothèses et des champs de variables considérés par les divers auteurs, les expressions qu'ils ont proposées de ces fonctions de Green diffèrent notablement les unes des autres. Ainsi, en plus des représentations (U,

u) ou (u,w) présentées plus haut, on peut aussi trouver dans la littérature la représentation (u,p) qui prend en compte le déplacement du solide et la pression p du fluide. Cette dernière représentation conduit à un système de 4 équations différentielles couplées, alors que les systèmes associés aux représentations (U, u) ou (u,w) comportent 6 équations couplées. Toutefois, on peut facilement vérifier dans ces deux derniers cas, que les équations ne sont pas linéairement indépendantes et qu'on peut se ramener à 4 équations couplées indépendantes. Chacun de ces couples de variables conduit à un choix différent des termes de sources à introduire dans les équations de Biot. C'est alors autant d'expressions des fonctions de Green apparemment différentes. Les premiers à proposer une solution des équations couplées de Biot sont Burridge et Vargas [17], pour la représentation (u, w), où la seule force intervenant dans le problème agit sur le solide. Cette solution n'est que partielle puisque la phase fluide n'est soumise à aucune force. Par la suite Norris [56] a donné la fonction de Green relative à la représentation (U, u). A la force agissant sur le solide, l'auteur a adjoint une source vectorielle agissant sur le fluide. Norris a aussi montré [55] que le problème de la poroélasticité dans la représentation (u, p) était mathématiquement équivalent à celui de la thermoélasticité étudié par Kupradze [45]. Les fonctions de Green associées à une source de force $\mathbf{F}$ agissant sur la solide et une source de volume V agissant sur la fluide ont été développées en analogie avec la méthode de Kupradze par Bonnet [14] et Boutin [15]. Ces derniers ont aussi montré que la solution proposée par Norris prenant en compte une force sur le fluide n'était pas physique.

Toutes ces fonctions de Green ont été données dans le domaine fréquentiel, la difficulté pour revenir dans le domaine temporel sans hypothèses supplémentaires venant du terme de dissipation. En effet, le calcul de la transformée de Fourier inverse ne s'exprime pas nécessairement à l'aide de fonctions simples si on ne se donne pas des formes particulières de fonction de dissipation.

3.5.1 Fonction de Green de la représentation (u, w)

Dans la représentation (u, w), les équations du mouvement se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$L_{u,w} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ -\mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ -\mathbf{f_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \end{pmatrix}, \tag{3.69}$$

où la matrice $L_{u,w}$ a pour expression :

$$L_{u,w} = \begin{pmatrix} (H-G)\nabla\nabla + (G\nabla^2 + \omega^2\rho)I & C\nabla\nabla + \omega^2\rho_f I \\ C\nabla\nabla + \omega^2\rho_f I & M\nabla\nabla\omega^2 qI \end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Dans cette relation I est la matrice identité 3×3.
La fonction de Green de cette équation matricielle est la matrice :

$$G_{u,w} = \begin{pmatrix} G^{F,u} & G^{f,u} \\ G^{F,w} & G^{f,w} \end{pmatrix}, \tag{3.71}$$

telle que :

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{F,u} & G^{f,u} \\ G^{F,w} & G^{f,w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F_0} \\ \mathbf{f_0} \end{pmatrix}. \tag{3.72}$$

Les termes de la matrice $G_{u,w}$ donnés par Pride et Haartsen [1996] sont :

$$\begin{aligned} G^{\xi,\eta}(r,r') &= T^{\xi}_{\eta,s_3}\frac{e^{i\omega(r-r')s_3}}{4\pi(r-r')}(I-\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}) + \sum_{j=1}^{2} L^{\xi}_{\eta,s_j}\frac{e^{i\omega(r-r')s_j}}{4\pi(r-r')}\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}} \\ &+\Big[T^{\xi}_{\eta,s_3}\Big(\frac{i}{\omega s_3(r-r')} - \frac{1}{(\omega s_3(r-r'))^2}\Big)\frac{e^{i\omega(r-r')s_3}}{4\pi(r-r')} \\ &-\sum_{j=1}^{2} L^{\xi}_{\eta,s_j}\Big(\frac{i}{\omega s_j(r-r')} - \frac{1}{(\omega s_j(r-r'))^2}\Big)\frac{e^{i\omega(r-r')s_j}}{4\pi(r-r')}\Big](I-3\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}}) \end{aligned} \tag{3.73}$$

Les lenteurs s_i $(i = 1, 2, 3)$ sont données par :

$$s_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{4\rho_t\tilde{\rho}}{MH-c^2}}, \tag{3.74}$$

$$s_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \frac{4\rho_t\tilde{\rho}}{MH-c^2}}, \tag{3.75}$$

$$s_3 = \frac{\rho_t}{G} \tag{3.76}$$

avec

$$\gamma = \frac{\rho M + \tilde{\rho} - 2\rho_f C}{HM - C^2}, \tag{3.77}$$

Dans cette expression, les tenseurs de Green sont séparés en composantes transversales $(\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}})$, longitudinales $(\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}})$ et champ lointain $(I-3\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{r}})$. Leurs amplitudes T^{ξ}_{η,s_i} et L^{ξ}_{η,s_i} listées en fin de chapitre sont indicées par le type de source $(\xi = F, f)$, le type de champ(u, w) et le type d'onde (s_1 et s_2 pour les ondes de compression rapide et lente et s_3 pour l'onde de cisaillement).

3.5.2 Fonction de Green de la représentation (u, p)

Dans la représentation (u, p), les équations du mouvement s'écrivent :

$$L_{u,p}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ -V \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

où la matrice $L_{u,p}$ a pour expression :

$$L_{u,p} = \begin{pmatrix} (P_d - 2G)\nabla\nabla + (G\nabla^2 + \omega^2\rho_t)I & -\tilde{\alpha}\nabla I \\ -(q^{-1}\nabla^2 + M^{-1})I & -\tilde{\alpha}\nabla \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

où $\rho_t = \rho - \rho_f^2/q$ et $\tilde{\alpha} = \alpha_{BW} - \rho_f/q$. Les termes de sources sont une source de type vecteur et une source de type scalaire de la forme $\mathbf{F} = \mathbf{F_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ et $V = V_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. La fonction de Green est alors la matrice :

$$G_{u,p} = \begin{pmatrix} G^{F,u} & G^{V,u} \\ G^{F,p} & G^{V,p} \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

telle que :

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{F,u} & G^{V,u} \\ G^{F,p} & G^{V,p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{F_0} \\ V_0 \end{pmatrix}. \tag{3.81}$$

La réponse $G^{F,u}$ est la même que celle donnée par (3.73). La symétrie de la fonction de Green entraîne que les réponses $G^{V,u}$ et $G^{F,p}$ sont identiques. Cette symétrie signifie que la réponse de $\mathbf{u}$ à la source de volume et la réponse en pression à la force vectorielle $\mathbf{F}$ s'écrivent :

$$G^{\xi,\eta}(r,r') = \sum_{j=1}^{2} L^{\xi}_{\eta,s_j} \frac{e^{i\omega s_j(r-r')}}{4\pi(r-r')}\tilde{\mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{2} L^{\xi}_{\eta,s_j} \frac{i}{s_j\omega} \frac{e^{i\omega s_j(r-r')}}{4\pi(r-r')^2}\tilde{\mathbf{r}}, \tag{3.82}$$

où $\xi = \{F, V\}$ et $\eta = \{u, p\}$.
La réponse scalaire en pression $G^{V,p}$ due à la source de volume est quant à elle :

$$G^{V,p}(r,r') = \sum_{j=1}^{2} L^{V}_{p,s_j} \frac{e^{i\omega s_j(r-r')}}{4\pi(r-r')}. \tag{3.83}$$

3.5.3 Expressions des amplitudes apparaissant dans les fonctions de Green

$$T^F_{u,s_3} = \frac{1}{G}, \tag{3.84}$$

$$T^F_{w,s_3} = T^f_{u,s_3} = -\frac{\rho_f}{\tilde{\rho}G}, \tag{3.85}$$

$$T^f_{w,s_3} = -\frac{s_3^2 - \rho/G}{\tilde{\rho}\omega^2}, \tag{3.86}$$

$$L^F_{u,s_1} = \Big(\frac{M}{MH - C^2}\Big)\Big(\frac{s_2^2 - \tilde{\rho}/M}{s_1^2 - s_2^2}\Big) \tag{3.87}$$

$$L^F_{w,s_1} = L^f_{u,s_1} = -\Big(\frac{C}{MH - C^2}\Big)\Big(\frac{s_1^2 - \rho_f/C}{s_1^2 - s_2^2}\Big) \tag{3.88}$$

$$L^f_{w,s_1} = \Big(\frac{P_d}{MH - C^2}\Big)\Big(\frac{s_1^2 - \rho/H}{s_1^2 - s_2^2}\Big) \tag{3.89}$$

$$L^F_{u,s_2} = \Big(\frac{M}{MH - C^2}\Big)\Big(\frac{s_1^2 - \tilde{\rho}/M}{s_1^2 - s_2^2}\Big) \tag{3.90}$$

$$L^F_{w,s_2} = L^f_{u,s_2} = \Big(\frac{C}{MH - C^2}\Big)\Big(\frac{s_2^2 - \rho_f/C}{s_1^2 - s_2^2}\Big) \tag{3.91}$$

$$L^f_{w,s_2} = \Big(\frac{H}{MH - C^2}\Big)\Big(\frac{s_2^2 - \rho_f/H}{s_1^2 - s_2^2}\Big) \tag{3.92}$$

$$L^F_{p,s_1} = L^V_{u,s_1} = is_1\omega\frac{P_d}{\tilde{\rho}\tilde{\alpha}}(s_2^2 - s_1^2) \tag{3.93}$$

$$L^F_{p,s_2} = L^V_{u,s_2} = is_2\omega\frac{P_d}{\tilde{\rho}\tilde{\alpha}}(s_2^2 - s_1^2) \tag{3.94}$$

$$L^V_{p,s_1} = \frac{\omega^2\tilde{\rho}}{T^F_{u,s_3}} L^F_{u,s_1}\frac{s_3^2}{s_1^2} \tag{3.95}$$

$$L^V_{p,s_2} = \frac{\omega^2\tilde{\rho}}{T^F_{u,s_3}} L^F_{u,s_2}\frac{s_3^2}{s_2^2}. \tag{3.96}$$

Chapitre 4

Propagation dans les milieux poreux inhomogènes

4.1 Détermination de la résistivité d'un matériau poreux à basse fréquence [29]

Introduction

On s'intéresse ici à la propagation des ondes acoustiques dans un matériau poreux stratifié dans la direction de propagation des ondes. Le milieu semi-infini ($z > 0$) est décrit dans le cadre du modèle du fluide équivalent et est caractérisé par une tortuosité $\alpha(z)$ qui est supposée dérivable et lentement variable par rapport à la coordonnée z.
Ce problème a été largement étudié par de nombreux auteurs. Fellah et coll [33] ont ainsi proposé un modèle basé sur la séparation des ondes qui conduit à la résolution de l'équation des ondes par la méthode des caractéristiques. Si cette méthode est bien adaptée au cas des milieux stratifiés et permet la résolution des problèmes direct et inverse, les calculs qu'elle entraîne sont longs et nécessitent souvent des systèmes multiprocesseurs. Les avantages de la méthode exposée ici sont de deux types :

- les données expérimentales utilisées sont issues du signal réfléchi,
- les calculs sont simples.

Lorsqu'une onde se propage dans un milieu stratifié dans la direction des z croissants, une onde réfléchie due aux inhomogénéités apparaît dans l'autre direction. En chaque point $z > 0$ du milieu, les champs acoustiques transmis et réfléchi s'expriment en terme du champ dans le plan $z = 0 - \epsilon$. Dans ce modèle, le milieu de propagation peut être vu comme un système linéaire caractérisé par une réponse impulsionnelle, la fonction de transfert ne dépendant alors que de z. De ce fait, la connaissance de la réponse impulsionnelle du milieu est suffisante pour déterminer le profil de la résistivité $\sigma(z)$.

4.1.1 Equations de base

Dans le modèle du fluide équivalent, la propagation dans un milieu poreux saturé par un fluide léger est décrite par les équations suivantes :

$$\rho\alpha\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \tag{4.1}$$

$$\frac{\beta}{K_a}\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{4.2}$$

Dans lesquelles ρ et K_a sont respectivement la masse volumique et le module d'incompressibilité du fluide et α et β sont la tortuosité et la succeptibilité thermique du milieu poreux. Leurs valeurs dans le domaine fréquentiel sont données par Johnson et Allard :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty\Big(1+\frac{\eta\phi}{\jmath\omega\alpha_\infty\rho k_0}\sqrt{1+\frac{4\alpha_\infty k_0^2\rho\omega}{\eta\phi^2\Lambda^2}}\Big), \tag{4.3}$$

$$\beta(\omega) = \gamma-(\gamma-1)\Big(1+\frac{\eta\phi}{\jmath\omega\alpha_\infty\rho k_0' Pr}\sqrt{1+\frac{4\alpha_\infty k_0'^2\rho\omega Pr}{\eta\phi^2\Lambda'^2}}\Big)^{-1}, \tag{4.4}$$

où ($\jmath=\sqrt{-1}$). Les paramètres physiques qui figurent dans ces expressions sont la masse volumique ρ, la résistivité σ et la viscosité η telle que $\eta = k_0\sigma$, le rapport des chaleur spécifiques γ et les longueurs caractéristiques Λ et Λ' du milieu poreux, Pr est le nombre ce Prandtl, k_0' joue pour les effets thermiques le même rôle que k_0 pour les effets visqueux. Enfin $\omega = 2\pi f$ est la pulsation de l'onde de fréquance f.
Lorsque l'onde incidente arrive sur le plan $z=0$ sous incidence oblique d'angle θ, les équations (4.1) et (4.2) s'écrivent :

$$\rho\alpha_0\frac{\partial v_x}{\partial t}+\sigma\phi v_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.5}$$

$$\rho\alpha_0\frac{\partial v_z}{\partial t}+\sigma\phi v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{4.6}$$

$$\frac{\gamma}{K_a}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{4.7}$$

avec :

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.8}$$

où $c_0=\sqrt{K_a/\rho}$ est la vitesse des ondes dans le fluide libre. Généralement, la tortosité est dépendante de la profondeur au travers de la résistivité. Dans un milieu sans perte ($\sigma=0$), (4.5) conduit à :

$$v_x = \frac{\sin\vartheta}{c_0\rho\alpha_0}p, \tag{4.9}$$

et les équations (4.6)et (4.7) deviennent :

$$\rho\alpha_0\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{4.10}$$

$$-\Big(\frac{\gamma}{K_a}-\frac{sin^2\vartheta}{c_0^2\rho\alpha_0}\Big)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{4.11}$$

L'équation des ondes qui en résulte est :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \Big(\frac{\gamma}{K_a} - \frac{sin^2\vartheta}{c_0^2\rho\alpha_0}\Big)\rho\alpha_0\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2}, \tag{4.12}$$

qui, pour une onde harmonique ($e^{i\omega t}$) devient :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = -\omega^2\rho\alpha_0\Big(\frac{\gamma}{K_a} - \frac{sin^2\vartheta}{c_0^2\rho\alpha_0}\Big)v_z. \tag{4.13}$$

En posant $\alpha_0\gamma = n^2$, cette derniére équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + k^2n^2\Big(1 - \frac{sin^2\vartheta}{n^2}\Big)v_z = 0. \tag{4.14}$$

Dans un milieu avec perte, l'équation (4.5) est alors :

$$\begin{aligned} j\omega\Big(\alpha_0\rho - \jmath\frac{\sigma\phi}{\omega}\Big)v_x &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & (4.15)\\ &= \jmath\omega\frac{\sin\vartheta}{c_0}p, & (4.16)\end{aligned}$$

et conduit à la relation entre la vitesse et la pression :

$$v_x = \frac{\sin\vartheta}{c_0(\alpha_0\rho - \jmath\frac{\sigma\phi}{\omega})}p. \tag{4.17}$$

Dans ce cas, les équations (4.6) et (4.7) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\jmath\omega\frac{\sin^2\vartheta}{c_0^2(\alpha_0\rho - \jmath\frac{\sigma\phi}{\omega})}p & (4.18)\\ \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\jmath\omega\Big(\frac{\gamma}{K_A} - \frac{\sin^2\vartheta}{c_0^2(\alpha_0\rho - \jmath\frac{\sigma\phi}{\omega})}\Big)p. & (4.19)\end{aligned}$$

Si on suppose que les variations de $\partial\sigma(z)/\partial z$ sont petites, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\omega^2}{c_0^2}\Big(\alpha_0\gamma - \jmath\frac{\sigma\phi\gamma}{\omega\rho} - \sin^2\vartheta\Big)v_z = -\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \tag{4.20}$$

Pour les poreux pour lesquels $\alpha_0\gamma \sim 1$, l'équation de Helmholtz devient :

$$\frac{\omega^2}{c_0^2}\Big(\cos^2\vartheta - \jmath\frac{\sigma\phi\gamma}{\omega\rho}\Big)v_z + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0. \tag{4.21}$$

Pour $z < 0$, l'équation d'onde est similaire à (4.21) , mais avec $\sigma = 0$. Sa solution est :

$$v_z(z) = e^{-\jmath kz\cos\vartheta} + r(k)e^{\jmath kz)e^{-\jmath k\sin\vartheta x}\cos\vartheta}, \tag{4.22}$$

où on a mis le facteur $e^{-\jmath k\sin\vartheta x}$,et $r(k)$ est le coefficient de réflexion. Dans le poreux ($z > 0$), la solution de (4.21) est :

$$v_z(z) = A(z)e^{-\jmath kz\cos\vartheta} + B(z)e^{\jmath kz\cos\vartheta}. \tag{4.23}$$

L'insertion de (4.23) dans (4.21) conduit aux équations vérifiées par les fonctions $A(z)$ et $B(z)$:

$$A'' + 2A'\jmath k\cos\vartheta - \jmath k^2\frac{\sigma\phi\gamma}{\omega\rho}A = 0, \tag{4.24}$$

$$B'' - 2B'\jmath k\cos\vartheta - \jmath k^2\frac{\sigma\phi\gamma}{\omega\rho}B = 0, \tag{4.25}$$

Les considérations physiques conduisent é à chercher les fonctions $A(z)$ (et $B(z)$) sous la forme :

$$A(z) \sim e^{-\int_0^z r(z')dz'}, \tag{4.26}$$

où $r(z)$ est solution de l'équation :

$$r^2 - 2r\jmath k\cos\vartheta - \jmath k^2\frac{\sigma\phi\gamma}{\omega\rho} = 0, \tag{4.27}$$

c'est à dire :

$$r_\pm = \jmath k\cos\vartheta \pm \jmath k\cos\vartheta\sqrt{1 - \jmath\frac{\sigma(z)\phi\gamma}{\cos^2\vartheta\omega\rho}}. \tag{4.28}$$

Pour un milieu faiblement résistif, ces racines peuvent être approximées par :

$$r_+ = 2\jmath k\cos\vartheta + \frac{k\sigma\phi\gamma}{2\cos\vartheta\omega\rho}, \tag{4.29}$$

$$r_- = -\frac{k\sigma\phi\gamma}{2\cos\vartheta\omega\rho}. \tag{4.30}$$

Ainsi, la partie incidente de la solution de l'Eq. 4.23 s'écrit :

$$v_z(z) = e^{-\frac{k\phi\gamma}{2\omega\rho\cos\vartheta}\int_0^z\sigma(z')dz'}e^{-\jmath kz\cos\vartheta}. \tag{4.31}$$

4.1.2 Méthode de la fonction de Green

Dans un milieu faiblement résistif, l'équation (4.21) peut être mise sous la forme :

$$k^2\cos^2\vartheta v_z + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \jmath\frac{k^2\sigma\phi\gamma}{\omega\rho}v_z, \tag{4.32}$$

où le second membre apparaît comme une perturbation responsable de l'onde réfléchie. La solution peut alors être estimée par la méthode de Born [39] comme suit :

$$v_z(z) = e^{-\jmath kz\cos\vartheta} + \int_{-\infty}^{+\infty}\jmath\frac{k^2\sigma(z')\phi\gamma}{\omega\rho}v_z(z')G(z,z')dz', \tag{4.33}$$

où $G(z,z')$ est la fonction de Green de l'équation de Helmholtz à une dimension dont l'expression est :

$$G(z,z') = \frac{\jmath}{2k\cos\vartheta}e^{-\jmath k\cos\vartheta|z-z'|}. \tag{4.34}$$

Pour $0 < z < z'$, la solution de (4.32) est :

$$\begin{aligned} v_z(z) &= e^{-\jmath kz\cos\vartheta} - \frac{k\phi\gamma}{2\omega\rho\cos\vartheta}e^{\jmath kz\cos\vartheta} \\ &\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\jmath kz'\cos\vartheta}\sigma(z')e^{-\frac{k\phi\gamma}{2\rho\omega\cos\vartheta}\int_0^{z'}\sigma(z'')dz''}dz', \end{aligned} \tag{4.35}$$

dont on peut déduire le coefficient de réflexion $r(k)$:

$$\begin{aligned} r(k) &= -\frac{k\phi\gamma}{2\omega\rho\cos\vartheta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\jmath kz'\cos\vartheta}\sigma(z') \\ &\quad \times e^{-\frac{k\phi\gamma}{2\rho\omega\cos\vartheta}\int_0^{z'}\sigma(z'')dz''}dz'. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Une autre expression utile du coefficient de réflexion est :

$$r(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz'}\Big[e^{-\frac{k\phi\gamma}{2\rho\omega\cos\vartheta}\int_0^{z'}\sigma(z'')dz''}\Big]e^{-2\jmath kz'\cos\vartheta}dz'. \tag{4.37}$$

Cette équation relie le profil de la résistance spécifique $\sigma(z)$ du milieu poreux au coefficient de réflexion .
A partir de la définition de la transformée de Fourier :

$$x(\omega) = \mathcal{F}[X](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-\jmath\omega t}dt, \tag{4.38}$$

$$X(t) = \mathcal{F}^{-1}[x](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega)e^{\jmath\omega t}d\omega, \tag{4.39}$$

où $x(\omega)$ est la transformée de Fourier de $X(t)$ et $X(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $x(\omega)$. Ainsi, $R(t)$ déduit de (4.37) s'écrit :

$$R(t) = \frac{d}{dt}\Big[e^{-\frac{k\phi\gamma}{2\rho\omega\cos\vartheta}\int_0^{ct/2\cos\vartheta}\sigma(z)dz}\Big] \tag{4.40}$$

$$= -\frac{k\phi\gamma c\sigma(z)}{4\omega\rho\cos^2\vartheta}e^{-\frac{k\phi\gamma}{2\omega\rho\cos\vartheta}\int_0^z\sigma(z')dz'}\Big|_{z=\frac{ct}{2\cos\vartheta}}. \tag{4.41}$$

Le profil $\sigma(z)$ est alors :

$$\sigma(z) = -\frac{4\rho\cos^2\vartheta}{\phi\gamma}\frac{R(t)}{1+\int_0^t R(\tau)d\tau}\Big|_{t=2z\cos\vartheta/c} \tag{4.42}$$

Ainsi, le profil de la résistivité s'obtient à partir de la transformée inverse du coefficient de réflexion suivant (4.42).
Si $\int_0^t R_\vartheta(t')dt >> 1$, alors

$$\sigma(z) \simeq -\frac{4\rho\cos^2\vartheta}{\phi\gamma}R_\vartheta(t)\Big|_{t=\frac{2z\cos\vartheta}{c}}. \tag{4.43}$$

Il reste à tester cette méthode qui est simple à mettre en oeuvre pour en trouver les limitations.

4.1.3 Séparation des ondes dans le domaine fréquentiel

Une autre alternative pour estimer les paramètres d'un poreux stratifié est la méthode dite de séparation des ondes Classiquement, cette méthode est utilisée pour étudier la propagation des ondes impulsionnelles dans les milieux inhomogènes dans le domaine temporel. Dans ce cas, la fréquence n'apparait pas dans les équations. L'idée de la méthode est de factoriser l'équation de propagation en faisant apparaître les ondes aller et retour. Dans un milieu homogène,

ces ondes sont indépendantes tandis que dans un milieu inhomogène elles sont couplées par ces inhomogénéités.
La séparation des ondes peut aussi être développée dans le domaine fréquentiel. Dans ce cas, au lieu d'obtenir l'opérateur de reflexion ou de transmission, on a accès aux coefficients de réflexion ou de transmission comme fonction de ω.
Dans le cas où les variations of $\partial\sigma(z)/\partial z$ sont petites l'équation de Helmholtz

$$\frac{\omega^2}{c_0^2}\Big(\alpha_0\gamma - \jmath\frac{\sigma\phi\gamma}{\omega\rho} - \sin^2\vartheta\Big)v_z = -\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \tag{4.44}$$

incite à faire le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} v_z^+ \\ v_z^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\jmath}{k_0\cos\vartheta} \\ 1 & \frac{-\jmath}{k_0\cos\vartheta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_z \\ \frac{dv_z}{dz} \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

où les variables (v_z^+, v_z^-) sont les solutions de l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} v_z^+ \\ v_z^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_z^+ \\ v_z^- \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

avec :

$$a = \frac{\jmath k_0}{2}\big(\cos\vartheta + \frac{\alpha_0\gamma - \jmath\sigma\varphi\gamma/\omega\rho - \sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\big) \tag{4.47}$$

$$b = \frac{\jmath k_0}{2}\big(-\cos\vartheta + \frac{\alpha_0\gamma - \jmath\sigma\varphi\gamma/\omega\rho - \sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\big). \tag{4.48}$$

La fonction de Green de transmission $g^{\pm}$ connecte les valeurs de la vitesse en deux points différents dans le milieu.

$$v_z^{\pm}(z) = g^{\pm}(z)v_z^+(l). \tag{4.49}$$

Pour une couche de matériau poreux homogène, $g^{\pm}$ a la propriété suivante :

$$\begin{pmatrix} g+ \\ g^- \end{pmatrix}(z) = P(z_0 - z, \sigma)\begin{pmatrix} g+ \\ g^- \end{pmatrix}(z_0) \quad z \le z_0 \tag{4.50}$$

où la matrice P est donnée par :

$$P(z,\sigma) = \frac{1}{p^2 - q^2}\begin{pmatrix} p^2e^{\lambda z} - q^2e^{-\lambda z} & -pq(e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) \\ pq(e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) & p^2e^{-\lambda z} - q^2e^{\lambda z} \end{pmatrix} \quad z \ge 0 \tag{4.51}$$

Ici, $\pm\lambda$ sont les valeurs propres de la matrice définie par (4.46) :

$$\lambda = \jmath k_0\sqrt{\alpha_0\gamma - \jmath\sigma\varphi\gamma/\omega\rho - \sin^2\vartheta} \tag{4.52}$$

et p et q sont les composantes des vecteurs propres associées aux valeurs prores et sont données par :

$$p(\varepsilon,\sigma) = \tag{4.53}$$

$$q(\varepsilon,\sigma) = \tag{4.54}$$

Pour une structure comportant N couches de résistivité σ_1, σ_2,..., σ_N, et dont l'épaisseur totale est $l = d_1 + d_2 + \cdots + d_N$, les coefficients de réflexion r et de transmission t sont donnés par les expressions suivantes :

$$r = g^-(0)[g^+(0)]^{-1} \tag{4.55}$$

$$t = [g^+(0)]^{-1}, \tag{4.56}$$

où les fonctions $g^{\pm}(0)$ sont définies par :

$$\begin{pmatrix} g+(0) \\ g^{-}(0) \end{pmatrix} = P(d_1,\sigma_1)P(d_2,\sigma_2)\cdots P(d_N,\sigma_N)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Cette méthode est le pendant fréquentiel de la méthode temporelle développée par Fellah [66]. Elle est bien adaptée pour les milieux inhomogènes stratifiés avec stratifications discrètes (couches homogènes collées) ou,moyennant une adaptation, aux stratifications continues (variation continues des paramètres).

4.2 Propagation dans un milieu poreux avec des tailles de pores arbitraires

Introduction

Comme on l'a dit en introduction, le développement de méthodes d'investigation ultrasonore nouvelles n'a de sens que si elles permettent l'observation de défauts dans l'os trabéculaire. Or ceux-ci sont de plusieurs types : i) porosité variable, ii) valeurs aléatoires des paramètres physiques ou/et géométriques du tissus osseux. Nous nous intéressons ici à l'influence sur la propagation des ondes ultrasonores dans un poreux dont la taille des pores n'est pas uniforme mais plutôt obéit à une loi de répartition.
Les techniques de mesures quantitatives par ultrasons sont non-destructives et à ce titre sont intéressantes pour déterminer les caractéristiques mécaniques et/ou géométriques de l'os. La mesure est basée sur l'estimation de vitesses et d'atténuations des ondes acoustiques qui se sont propagées dans le tissu osseux. Les mesures de vitesse sont utilisées lors d'examens cliniques pour estimer la solidité osseuse. L'os trabéculaire est un matériau composite atténuant dans lequel des valeurs négatives de dispersion de vitesse ont été mesurées ; ce phénomène restant mal expliqué d'un point de vue physique. Des études théoriques et expérimentales ont montré que le comportement des ondes dans l'os spongieux dépend fortement de leur fréquence et que les vitesses et atténuations des ondes ne suivent pas exactement le modèle de Biot. Ces différences entre théorie et expériences sont l'objet d'études et de discussions puisqu'elles qualifient ou non la théorie de Biot comme un modèle acceptable pour les prédictions utiles aux praticiens.

Dans cette partie, nous nous intéressons aux écarts de prédictions sur les vitesses et les atténuations des ondes dans un poreux dont la taille des pores n'est pas uniforme.

4.2.1 Milieux poreux dont les pores sont de rayons variables

Pour déterminer la loi de répartion des rayons des pores on mesure les rayons r des pores à partir de la pression P d'un fluide qu'on injecte dans le poreux par la relation :

$$P = 2\gamma\cos\theta/r \tag{4.58}$$

où γ est la tension superficielle du fluide (par exemple du mercure) et θ est l'angle de contact entre le mercure et la paroi du pore. Ainsi, en mesurant le

volume V de mercure injecté dans le poreux et la pression P, on en déduit la distribution cumulée $E(r)$ définie par :

$$E(r) = V(r)/V_T \tag{4.59}$$

où V_T est le volume total des pores. La fonction de distribution des rayons des pores $e(r)$ est quant à elle définie par :

$$E(r) = \int_r^\infty e(r)dr \tag{4.60}$$

et on a :

$$E(0) = \int_0^\infty e(r)dr = 1 \tag{4.61}$$

Un exemple de distribution des rayons des pores pour le sable de Eagle River est

$$f(\lambda) = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \exp\left[-(\lambda - \bar{\lambda})^2/2\sigma^2\right], \tag{4.62}$$

où $\lambda = -\log_2 r$ (r est exprimé en mm), $\bar{\lambda}$ est la valeur moyenne de λ et σ est la déviation standard des rayons des pores en unités λ.

4.2.2 Modèle de perméabilité [68]

L'écoulement du fluide dans le milieu poreux est régi par la loi de Darcy :

$$\phi U_{ave} = -\frac{k_s}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.63}$$

où ϕ est la porosité, U_{ave} est la vitesse découlement moyenne dans la direction x, η est la viscosité dynamique et $\partial P/\partial x$ est le gradient de pression dans la direction x. En régime établi, le flux laminaire à travers le tube capillaire de rayon r est donné par la solution de Poiseuille :

$$U_{ave} = -\frac{r^2}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.64}$$

où U_{ave} est la vitesse d'écoulement moyenne dans la direction x du tube. Ainsi le flux de Poiseuille est un cas particulier de la loi de Darcy. Pour un groupe de capillaires de rayon r et pour une porosité β, la perméabilité est donnée par :

$$k_s = \phi r^2/8. \tag{4.65}$$

En général, la perméabilité d'un groupe de conduits ayant la porosité β est donnée par :

$$k_s = C_s \phi r^2 \tag{4.66}$$

où C_s est le facteur de forme et r la dimension caractéristique du conduit.
Dans un poreux réel, la taille des pores n'est pas uniforme mais on a plutôt une distribution de rayon $e(r)$. Plusieurs modèles ont été élaborés pour exprimer la perméabilité k_s en fonction de $e(r)$. Les modèles de Garcia-Bengochea et de Childs and Collis-George sont basés sur l'écoulement de Poiseuille à travers un ensemble de tubes capillaires dont la distribution des rayons est quelconque. Dans le modèle de Garcia-Bengochea la perméabilité est donnée par :

$$k_s = \frac{\phi}{8}\int_0^\infty r^2 e(r)dr. \tag{4.67}$$

En particulier si on suppose qu'on a une distribution normale pour ϕ, la perméabilité est :

$$k_s = \frac{\phi}{8} \exp\left[2(\sigma \ln 2)^2 + \ln 2^{-2\bar{\phi}}\right] \tag{4.68}$$

Cette relation montre qu'une infinité de distributions de tailles de pores peuvent conduire à la même valeur de la perméabilité. La valeur moyenne du rayon des pores $\bar{r}_\sigma$ pour la distribution normale de déviation standard σ est alors :

$$\bar{r}_\sigma = (8k_s/\phi)^{1/2} e^{-(\sigma \ln 2)^2}. \tag{4.69}$$

4.2.3 Correction du facteur de viscosité

Le calcul consiste à calculer les vitesses et attenuations des ondes dans le modele de Biot lorsque les pores ont des rayons quelconques. Pour ça, on doit évaluer la fonction $K(\kappa)$ qui intervient dans le calcul de la vitesse du fluide dans un pore cylindrique. Dans Biot ou plutôt Kosten et Zwikker où on choisit de travailler avec des pores de rayon r, on n'a besoin que du facteur de correction visqueux

$$F(\kappa) = \frac{1}{4} \frac{\kappa K(\kappa)}{1 - (2/i\kappa)K(\kappa)} \tag{4.70}$$

où $\kappa = a(\omega/\nu)^{1/2}$, et

$$K(x) = \frac{ber'x + ibei'x}{berx + ibeix}. \tag{4.71}$$

a est le rayon des pores et $(\nu/\omega)^{1/2}$ est l'épaisseur de l'effet de peau du à la viscosité. Dans ce cas on remplace la viscosité dynamique du fluide η par ηF.
Lorsqu'on a une répartition des valeurs des rayons des pores, on peut encore utiliser la relation ηF, à condition de généraliser la fonction F de la manière suivante.
F est définie en comparant une quantité physique du régime oscillant et celle du régime établi. Soit G cette quantité définie par :

$$G(\omega) = \hat{T}_{ave}(\omega)/\hat{U}_{ave}(\omega) \tag{4.72}$$

où $\hat{T}_{ave}(\omega)$n est la force de friction visqueuse moyenne sur le capillaire par unité de volume et $\hat{U}_{ave}(\omega)$ la vitesse d'écoulement moyenne par unité de surface (bulk). Dans ce cas :

$$F(\omega) = G(\omega)/G(0). \tag{4.73}$$

Le calcul qu'on fait consiste alors à calculer le facteur F pour un groupe de tubes capillaires dont les rayons obéissent à la fonction de distribution $e(r)$ pour une porosité β.
Soit un flux oscillant dans un tube capillaire de rayon r sous l'action d'un gradient de pression :

$$-\frac{dp}{dx} = \rho_f \omega X e^{i\omega t} \tag{4.74}$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide et X l'amplitude de la pression. La vitesse moyenne donnée par Biot est

$$U_{ave}(\omega, r) = (X/i\omega)[1 - (2/i\kappa)K(\kappa)], \tag{4.75}$$

où cette fois

$$\kappa = r(\omega/\nu)^{1/2}. \tag{4.76}$$

La contrainte moyenne sur la paroi du capillaire est donnée par :

$$\tau(\omega, r) = (X\eta/i\omega)(\omega/\nu)^{1/2}K(\kappa). \tag{4.77}$$

La force de friction moyenne qui s'exerce sur l'ensemble des tubes capillaires est alors :

$$\hat{T}_{ave}(\omega) = \phi \int_0^\infty \frac{e(r)\tau(\omega, r)}{r} dr, \tag{4.78}$$

et la vitesse d'écoulement moyenne est

$$\hat{U}_{ave}(\omega) = \int_0^\infty e(r)U_{ave}(\omega, r)dr. \tag{4.79}$$

La fonction $G(\omega)$ est alors :

$$G(\omega) = \phi \frac{\int_0^\infty r^{-1}e(r)\tau(\omega, r)dr}{\int_0^\infty e(r)U_{ave}(\omega, r)dr}. \tag{4.80}$$

Lorsque $\omega \to 0$, on trouve :

$$G(0) = \phi \frac{\int_0^\infty e(r)dr}{\int_0^\infty e(r)(1/8\mu)r^2dr} = \frac{\mu\phi^2}{k_s}. \tag{4.81}$$

Finalement, le facteur de correction de la viscosité est :

$$F(\omega) = \frac{k_s}{\mu\phi^2} \frac{\int_0^\infty r^{-1}e(r)\tau(\omega, r)dr}{\int_0^\infty e(r)U_{ave}(\omega, r)dr}. \tag{4.82}$$

4.2.4 Calculs annexes

L'évaluation de l'intégrale de (4.82) est difficile car elle fait intervenir des fonction de Bessel d'arguments complexes. Aussi est-il utile de considérer les développements hautes et basses fréquence des $K(\kappa)$

$$\frac{2\pi a\tau}{U(\omega)} = \frac{2\pi\mu\kappa K(\kappa)}{1 - \frac{2}{i\kappa}K(\kappa)} \tag{4.83}$$

où :

$$K(\kappa) = \frac{ber'(\kappa) + ibei'(\kappa)}{ber(\kappa) + ibei(\kappa)}, \tag{4.84}$$

Lorsque $\kappa \to 0$, alors

$$\lim_{\kappa\to 0} ber(\kappa) + ibei(\kappa) = 1 + \frac{i\kappa^2}{4} \tag{4.85}$$

$$\lim_{\kappa\to 0} ber'(\kappa) + ibei'(\kappa) = \frac{i\kappa}{2} - \frac{i\kappa^3}{16}. \tag{4.86}$$

Ceci entraîne que :

$$1 - \frac{2}{i\kappa}K(\kappa) = \frac{i\kappa^2}{8}. \tag{4.87}$$

Ainsi, le premier membre de (4.83), se comporte comme

$$\lim_{\kappa \to 0} \frac{2\pi a \tau}{U(\omega)} = 8\pi\mu \tag{4.88}$$

et

$$\lim_{\kappa \to 0} K(\kappa) = \frac{i\kappa}{2}. \tag{4.89}$$

Quant à la fonction :

$$F(\kappa) = \frac{1}{4} \frac{\kappa K(\kappa)}{1 - \frac{2}{i\kappa} K(\kappa)}, \tag{4.90}$$

son comportement est donné par

$$F(\kappa) \longrightarrow 1. \tag{4.91}$$

Par la suite, on pose :

$$\frac{2\pi a \tau}{U(\omega)} = 8\pi\mu K(\kappa). \tag{4.92}$$

Pour les grandes valeurs de κ, on a

$$\lim_{\kappa \to 0} T(\kappa) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \tag{4.93}$$

$$\lim_{\kappa \to 0} F(\kappa) = \frac{\kappa}{4} \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \tag{4.94}$$

par la suite on en déduit que

$$\lim_{\kappa \to 0} U_{ave}(\omega, r) = \frac{X}{i\omega} \frac{i\kappa^2}{8} = \frac{X r^2}{8\nu}, \tag{4.95}$$

$$\lim_{\kappa \to 0} \tau(\omega, r) = \frac{X\eta}{ri\omega} \frac{ir\omega}{\nu} = \frac{Xr\eta}{2\nu}. \tag{4.96}$$

En reportant ces valeurs dans l'expression (4.80), on trouve

$$\lim_{\kappa \to 0} G(\omega) = \beta \frac{\int_0^\infty e(r) dr}{\int_0^\infty e(r) r^2 (1/8\mu) dr} \tag{4.97}$$

$$= \frac{\beta\mu}{k_s}. \tag{4.98}$$

Les figures ci-dessous montrent les parties réelles et imaginaires de la fonction $F(\omega)$ utilisée pour calculer les vitesses et atténuations des ondes dans un poreux dont les rayons des pores sont non-uniformes.

Ces figures montrent que lorsque la taille r des pores obéit à une distribution dont la variance $\sigma \neq 0$, la fonction complexe $F(\omega)$ change notablement de sa valeur pour une repartition uniformes de rayons $\sigma = 0$.

4.2.5 Modèle de Biot pour un poreux dont les rayons sont non uniformes

Maintenant que l'on connaît les expressions mathématiques de la perméabilité k_s et du facteur de correction visqueuse F pour un milieu poreux ayant une distribution arbitraire de tailles des pores , les effets de cette distribution sur la

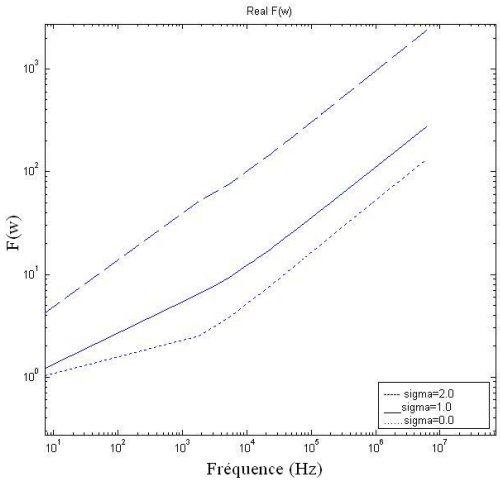


FIG. 4.1 – Partie réelle de la fonction $F(\omega)$ en fonction de la fréquence pour 3 distributions différentes ($\sigma = 0$ correspond au cas des pores uniformes)

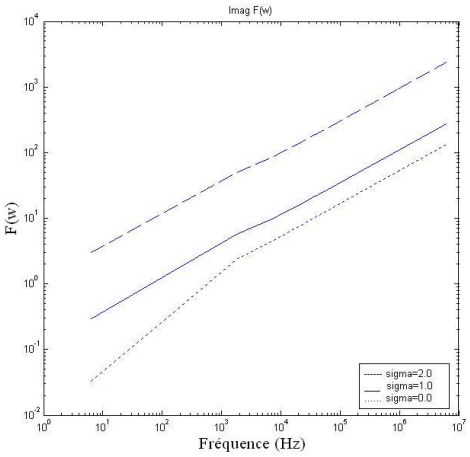


FIG. 4.2 – Partie imaginaire de la fonction $F(\omega)$ en fonction de la fréquence pour 3 distributions différentes ($\sigma = 0$ correspond au cas des pores uniformes)

propagation peuvent être examinés. La théorie de Biot prédit l'existence trois types d'ondes dans un milieu homogène poreux. Leurs vitesses complexes sont fonction de la fréquence et peuvent être déterminées à partir des équations caractéristiques déduites des équations du mouvement de Biot. On a alors :

$$\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} = \Big(\frac{2(HM - C^2)}{(\rho M + m'H - 2\rho_f C) \mp [(m'H - \rho M)^2 + 4\rho_f(\rho_f M - m'C)H + 4\rho(m'C - \rho_f m)C]^{1/2}} \Big)^{1/2} \tag{4.99}$$

La vitesse de l'onde de cisaillement V_3 est donnée par :

$$V_3 = (\mu/\rho)^{1/2}(1 - \rho_f/\rho m')^{-1/2}. \tag{4.100}$$

Dans ces deux dernières équations, H,C, M sont les modules d'élasticité de Biot et sont reliés aux propriétés de base du poreux par :

$$\begin{aligned} H &= (k_r - {K_s}^2/(D_r - K_s) + K_s + 4\mu/3, && (4.101)\\ C &= K_r(K_r - K_s)/(D_r - K_s), && (4.102)\\ M &= K_r^2/(D_r - K_s), && (4.103)\\ D_r &= K_r[1 + \beta(K_r/K_f - 1)], && (4.104) \end{aligned}$$

où K_r est le coefficient d'élasticité du solide constituant le squelette, K_f est le module d'élasticité apparent du fluide saturant, μ et K_s sont les coefficients de cisaillement et de volume du squelette. Ils sont donnés par :

$$\mu = \mu_r(1 + i\delta), \tag{4.105}$$

et

$$K_s = K_{sr}(1 + i\delta'), \tag{4.106}$$

où μ_r est le module de cisaillement dynamique, K_{sr} est le module de volume dynamique et δ et δ' sont les coefficients de perte spécifiques du squelette. La masse volumique ρ est donnée par :

$$\rho = (1 - \phi)\rho_r + \phi\rho_f, \tag{4.107}$$

Enfin m' est la masse volumique complexe virtuelle :

$$m' = (1 + \alpha)\rho_f/\phi - i[\eta F(\omega)/k_s\omega], \tag{4.108}$$

dans laquelle α est le coefficient de masse ajoutée au squelette.

4.3 Dispersion et atténuation des ondes de compression et de cisaillement

La théorie de Biot exposée dans la section précédente conduit à des expressions complexes des valeurs des vitesses des trois ondes qui se développent dans un milieu poreux. Par la suite on note :

$$V_n = V_{rn} + iV_{in} \quad n = 1, 2, 3 \tag{4.109}$$

les vitesses où V_{rn} sont les parties réelles et V_{in} sont les parties imaginaires. Les atténuations sont alors :

$$Q_n^{-1} = 2V_{in}/V_{rn} \quad n = 1, 2, 3 \tag{4.110}$$

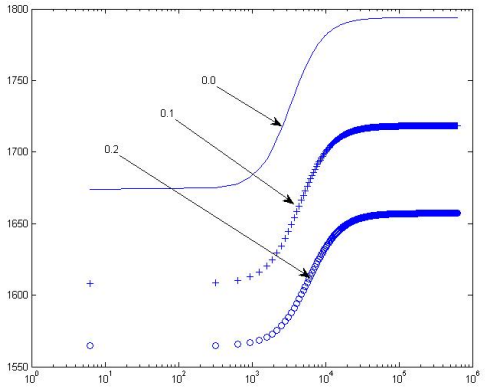


FIG. 4.3 – Vitesse de l'onde rapide (m/s) pour $\lambda = 0.4$ et différentes valeurs de σ en fonction de la fréquence (échelle log). Ces valeurs ont été calculées pour des géo-matériaux poreux.

Les figures (4.3-4.8) montrent l'influence de largeur σ de la distribution des rayons des pores sur les vitesses de propagation et leurs atténuations. On voit les variations assez grandes que cette distribution peut entraîner sur ces caractéristiques déterminantes des ondes.

Comme on peut le voir, la dispersion des rayons des pores conduit à des valeurs des vitesses et de leurs atténuations relativement différentes que celles qu'on obtient dans le cas du modèle de Biot 'classique', c'est à dire pour un milieu ayant des pores uniformes.

4.4 Modèle de Biot inhomogène : méthode des perturbations

4.4.1 Rappel des équations

Les équations de Biot pour un milieu poreux parcouru par une onde acoustique harmonique basse fréquence sont :

$$\rho\omega^2 u_i + \rho_f\omega^2 w_i + \tau_{ij,j} = 0, \tag{4.111}$$

$$\rho_f\omega^2 u_i + q\omega^2 w_i - p_{,i} = 0, \tag{4.112}$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes qui s'exercent sur le solide, p est la pression dans le fluide. Les quantités u_i et w_i sont respectivement le déplacement du solide et le déplacement relatif du fluide défini par $w_i = \phi(U_i - u_i)$ où U_i est déplacement du fluide et ϕ la porosité du solide. Les masses volumiques des phases solide et fluide sont ρ_s et ρ_f. Par la suite, on utilise aussi la densité du poreux définie par $\rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$. Pour les fréquences auxquelles on travaille, le paramètre q peut être approximé par sa valeur basse fréquence. En effet, le fluide saturant l'os trabéculaire est essentiellement constitué de moelle osseuse et de sang. La viscosité de ce fluide est de 3 ou 400 fois plus grande que celle d'un liquide comme l'eau. De ce fait, la fréquence de Biot est relevée du

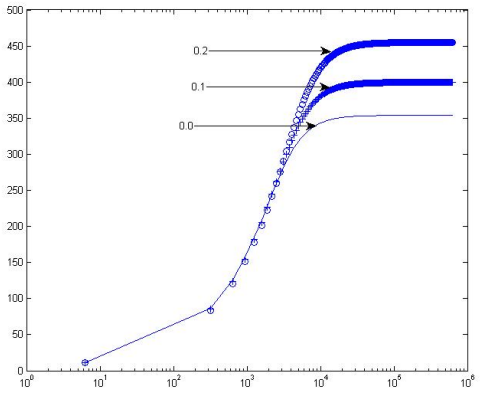


FIG. 4.4 – Vitesse de l'onde lente (m/s) pour $\lambda = 0.4$ et différentes valeurs de σ en fonction de la fréquence (échelle log.)

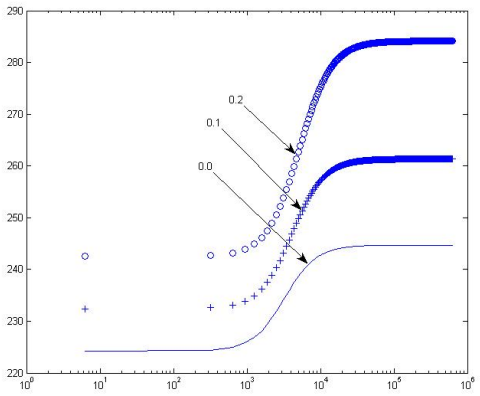


FIG. 4.5 – Vitesse de l'onde de cisaillement (m/s) pour $\lambda = 0.4$ et différentes valeurs de σ en fonction de la fréquence (échelle log.)

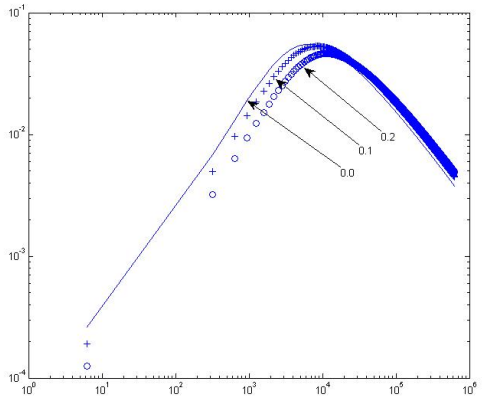


FIG. 4.6 – Inverse du facteur de qualité $1/Q_1$ de l'onde rapide pour $\lambda = 0.4$ et différentes valeurs de σ en fonction de la fréquence (échelle log.)

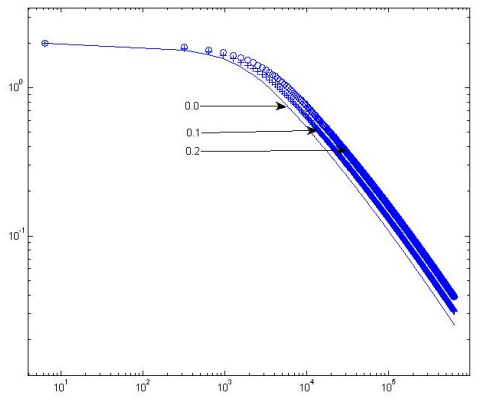


FIG. 4.7 – Inverse du facteur de qualité $1/Q_2$ de l'onde lente pour $\lambda = 0.4$ et différentes valeurs de σ en fonction de la fréquence (échelle log.)

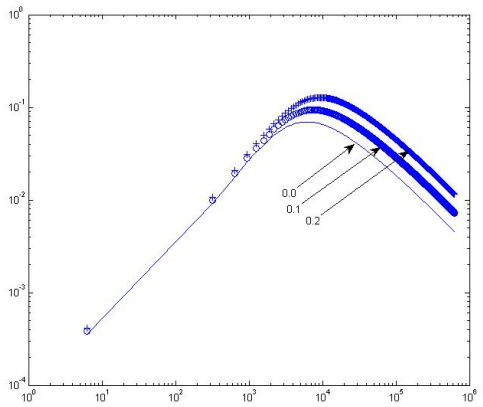


FIG. 4.8 – Inverse du facteur de qualité $1/Q_3$ de l'onde de cisaillement pour $\lambda = 0.4$ et différentes valeurs de σ en fonction de la fréquence (échelle log.)

même facteur numérique. Ainsi, si pour des pores de le rayon r saturés d'eau, la fréquence de Biot et de l'ordre de 3000 Hz, alors que pour ces mêmes pores saturés du fluide décrit plus haut, la fréquence de Biot est supérieure à 1 MHz. Il est alors légitime de prendre q de la forme :

$$q = \frac{i\eta}{\omega\kappa_0}, \tag{4.113}$$

où η est la viscosité du fluide et κ_0 est la perméabilité du milieu poreux.

Les contraintes qui s'exercent sur le solide isotrope et le fluide sont données par

$$\tau_{ij,j} = G\big(u_{i,j} + u_{j,i} - 2\delta_{ij}u_{j,j}\big) + \delta_{ij}\big(Hu_{i,j} + Cw_{i,j}\big), \tag{4.114}$$

$$p = -Cu_{j,j} - Mw_{j,j}. \tag{4.115}$$

Ici, G et H sont respectivement les modules d'élasticité du poreux et du poreux saturé. H est donné par

$$H = P_d + \alpha M, \tag{4.116}$$

avec

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f}. \tag{4.117}$$

Cette dernière relation constitue l'équation de Gassmann [38]. Dans ces équations $P_d = K_d + \frac{4}{3}G$ est le module de compression du poreux sec et $\alpha = 1 - K_d/K_s$ est le coefficient de Biot-Willis, $C = \alpha M$. K_s, K_d et K_f sont les modules d'élasticité de la phase solide, du poreux sec et du fluide et M s'interprète comme le module d'élasticité de l'espace poreux : i) lorsque $\phi \longrightarrow 0$ alors $K \longrightarrow K_s$ et $\alpha \longrightarrow 0$ et ainsi M n'est pas défini ; ii) lorsque $\phi \longrightarrow 1$, $K \longrightarrow 0$ et $\alpha \longrightarrow 1$ et $M \longrightarrow K_f$. Lorsqu'on reporte les expressions des contraintes dans les équations de Biot (Chapitre 4), on obtient l'équation opérationnelle :

$$\begin{pmatrix} L_{ij}^{(1)} & L_{ij}^{(2)} \\ L_{ij}^{(3)} & L_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = 0, \tag{4.118}$$

où les opérateurs $L^{(n)}$ sont donnés par :

$$L_{ik}^{(1)} = \rho\omega^2\delta_{ik} + \partial_j G\Big(\delta_{jk}\partial_i + \delta_{ik}\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_k\Big), \tag{4.119}$$

$$L_{ik}^{(2)} = \rho_f\omega^2\delta_{ik} + \partial_i C\partial_k, \tag{4.120}$$

$$L_{ik}^{(3)} = L_{ik}^{(2)}, \tag{4.121}$$

$$L_{ik}^{(4)} = q\omega^2\delta_{ik} + \partial_i M\partial_k. \tag{4.122}$$

La réponse du poreux à la sollicitation $-(F_i^0\delta(r_i - r_i')f_i^0\delta(r_i - r_i'))^t$ constitue la solution $(u_i w_i)^t$ de ce système d'équations lorsque le second membre est $-(F_i^0\delta(r_i - r_i')f_i^0\delta(r_i - r_i'))^t$. Elle s'obtient à l'aide de la fonction de Green du système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ik}^F & G_{ik}^f \\ G_{ik}^f & G_{ik}^w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ f_k \end{pmatrix}. \tag{4.123}$$

Plus généralement on a :

$$\begin{pmatrix} u_i(\mathbf{r}) \\ w_i(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \int d\mathbf{r}' \begin{pmatrix} G_{ik}^F(\mathbf{r}-\mathbf{r}') & G_{ik}^f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ G_{ik}^f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') & G_{ik}^w(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k(\mathbf{r}') \\ f_k(\mathbf{r}') \end{pmatrix}. \tag{4.124}$$

4.5 Equation des ondes dans un milieu aléatoire [4]

Dans un milieu aléatoire, la propagation des ondes est décrite par une équation stochastique. Une équation stochastique est une famille d'équations $E(a)$ dépendant d'un paramètre a qui varie sur un intervalle A où est donnée la probabilité $p(a)$. Ainsi, $p(a)$ détermine la probabilité d'avoir la valeur a et donc celle de l'équation correspondante $E(a)$. Si on associe à chacune de ces équations une solution unique $u(a)$, alors $u(a)$ est une variable aléatoire.
Dans le cas de la propagation des ondes dans un milieu aléatoire, les coefficients de l'équation des ondes que sont la masse volumique ρ, l'indice de réfraction n... caractérisent le milieu de propagation. Un milieu aléatoire est une famille de milieux indicés par a. On représente alors les coefficients des équations de propagation par $\rho(x,a)$, $n(x,a)$..., la valeur de $p(a)$ donnant alors probabilité de chaque membre de la famille des milieux.
Lorsque les fluctuations des paramètres sont faibles par rapport à leurs valeurs, la méthode des perturbations permet d'obtenir une solution approchée de l'équation de propagation stochastique. Ce n'est plus vrai lorsque les fluctuations deviennent importantes ; dans ce cas il faut employer une autre méthode de résolution.
Soit $M(a)$ un opérateur stochastique qui dépend de $a \in A$, avec la probabilité $p(a)$. On considère l'équation

$$M(a)u = g \tag{4.125}$$

où g est une donnée du problème et $u(a)$ est la solution cherchée. Puisque $u(a)$ dépend de a, elle est la solution aléatoire de l'équation (4.125) et $p(a)$ détermine la probabilité d'avoir $u(a)$. Le problème de la propagation des ondes dans un

milieu aléatoire consiste alors à déterminer la valeur moyenne $< f >$ de $f(a)$ définie par

$$< f >= \int_A f(a)p(a)da. \tag{4.126}$$

Par la suite on suppose que l'opérateur $M(a)$ dépend d'un petit paramètre ε tel que lorsque $\varepsilon = 0$, M se réduit à opérateur certain qu'on note L :

$$\Big(L + \varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a) + O(\varepsilon^3)\Big)u(a,\varepsilon) = g \tag{4.127}$$

Dans cette équation $L_1(a)$ et $L_2(a)$ représentent les perturbation stochastiques aux ordres 1 et 2 de L.
On note u_0 la solution de l'équation non perturbée ($\varepsilon = 0$)

$$Lu_0 = g. \tag{4.128}$$

Si L est inversible alors (4.127) conduit à l'équation :

$$u = u_0 - L^{-1}\Big(\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)\Big)u + O(\varepsilon^3). \tag{4.129}$$

La solution u est obtenue par la méthode des itérations successives qui donne :

$$u = u_0 - \varepsilon L^{-1}L_1u_0 + \varepsilon^2 L^{-1}\Big(L_1L^{-1}L_1 - L_2\Big)u_0 + O(\varepsilon^3). \tag{4.130}$$

En prenant la valeur moyenne de cette relation, on trouve :

$$< u >= u_0 - \varepsilon L^{-1} < L_1 > u_0 + \varepsilon^2 L^{-1}\Big(< L_1L^{-1}L_1 > - < L_2 > \Big)u_0 + O(\varepsilon^3). \tag{4.131}$$

Pour obtenir l'équation de $< u >$, on tire u_0 au premier ordre dans l'équation précédente

$$u_0 = \quad < u > +\varepsilon L^{-1} < L_1 > u_0 + O(\varepsilon^2) \tag{4.132}$$

$$= \quad < u > +\varepsilon L^{-1} < L_1 >< u > +O(\varepsilon^2). \tag{4.133}$$

En reportant cette valeur dans (4.131) on obtient alors :

$$\begin{aligned} < u > \quad = \quad & u_0 - \varepsilon L^{-1} < L_1 >< u > \\ & +\varepsilon^2 L^{-1}\Big(< L_1L^{-1}L_1 > - < L_1 > L^{-1} < L_1 > - < L_2 > \Big) < u > +O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{4.134}$$

En appliquant l'opérateur L à cette équation on trouve

$$\Big[L+\varepsilon < L_1 > +\varepsilon^2\Big(< L_1 > L^{-1} < L_1 > - < L_1L^{-1}L_1 > + < L_2 > \Big)\Big] < u >= g+O(\varepsilon^3). \tag{4.135}$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par $< u >$. Cette équation se simplifie lorsque $< L_1 >= 0$ pour devenir :

$$\Big[L + \varepsilon^2\Big(< L_2 > - < L_1L^{-1}L_1 > \Big)\Big] < u >= g + O(\varepsilon^3). \tag{4.136}$$

Au second ordre l'équation cherchée s'écrit donc :

$$\Big[L + \varepsilon^2\Big(< L_2 > - < L_1L^{-1}L_1 > \Big)\Big] < u >= g. \tag{4.137}$$

Lorsque u est un vecteur, les opérateurs L, L_1 et L_2 sont des matrices. L'opérateur inverse L^{-1} est encore une matrice. Le noyau de L^{-1}noté $G(x,x')$ est la fonction de Green définie par

$$LG(x,x') = I\delta(x-x'), \tag{4.138}$$

ce qui permet d'écrire l'action de L^{-1} sous la forme :

$$L^{-1}f(x) = \int G(x,x')f(x')dx'. \tag{4.139}$$

Compte tenu de ces remarques, l'Eq.4.135 s'écrit alors :

$$L(x) < u(x) > +\varepsilon < L_1(x) >< u(x) > +\varepsilon^2 \Big[< L_1(x) > \int G(x,x') < L_1(x') >< u(x') > dx' \\ - < L_1(x) \int G(x,x') L_1(x') < u(x') > dx' > + < L_2(x') < u(x') > \Big] = g(x). \tag{4.140}$$

Lorsque $< L_1(x) >= 0$, cette dernière équation devient :

$$L(x) < u(x) > +\varepsilon^2 \Big[< L_2(x') >< u(x') > - < L_1(x) \int G(x,x') L_1(x') < u(x') > dx' > \Big] = g(x). \tag{4.141}$$

4.6 Equations de Biot en milieu aléatoire

La théorie précédente s'applique aux équations de Biot (4.118). On note les opérateurs $L^{(n)}$ sous la forme

$$L^{(n)} = \bar{L}^{(n)} + \tilde{L}^{(n)} \tag{4.142}$$

où $\bar{L}^{(n)}$ est la valeur moyene de $L^{(n)}$ et $\tilde{L}^{(n)}$ la fluctuation de cette valeur. Par définition $< \tilde{L}^{(n)} >= 0$. L'équation (4.118) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \bar{L}_{ij}^{(1)} & \bar{L}_{ij}^{(2)} \\ \bar{L}_{ij}^{(3)} & \bar{L}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{L}_{ij}^{(1)} & \tilde{L}_{ij}^{(2)} \\ \tilde{L}_{ij}^{(3)} & \tilde{L}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = 0, \tag{4.143}$$

En réécrivant cette relation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \bar{L}_{ij}^{(1)} & \bar{L}_{ij}^{(2)} \\ \bar{L}_{ij}^{(3)} & \bar{L}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tilde{L}_{ij}^{(1)} & \tilde{L}_{ij}^{(2)} \\ \tilde{L}_{ij}^{(3)} & \tilde{L}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix}, \tag{4.144}$$

on constate que les fluctuations des paramètres qui interviennent dans la définition des opérateurs s'interprètent comme des sources, ce qui permet d'écrire la solution de (4.118) comme suit :

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i^0 \\ w_i^0 \end{pmatrix} + \int dV \begin{pmatrix} G_{ik}^F & G_{ik}^f \\ G_{ik}^f & G_{ik}^w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{kj}^{(1)} & \tilde{L}_{kj}^{(2)} \\ \tilde{L}_{kj}^{(3)} & \tilde{L}_{kj}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix}. \tag{4.145}$$

Si on note ${}^0G_{ik}^{F,f,w}$ les fonctions de Green du milieu homogène, on peut écrire la fonction de Green du milieu aléatoire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} G_{im}^F & G_{im}^f \\ G_{im}^f & G_{im}^w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0G_{im}^F & {}^0G_{im}^f \\ {}^0G_{im}^f & {}^0G_{im}^w \end{pmatrix} \\ + \int dV \begin{pmatrix} {}^0G_{ij}^F & {}^0G_{ij}^f \\ {}^0G_{ij}^f & {}^0G_{ij}^w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_{jk}^{(1)} & \tilde{L}_{jk}^{(2)} \\ \tilde{L}_{jk}^{(3)} & \tilde{L}_{jk}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{km}^F & G_{km}^f \\ G_{km}^f & G_{km}^w \end{pmatrix}. \tag{4.146}$$

Par la suite, cette relation est notée plus brièvement :

$$G = G^0 + \int G^0 \tilde{L} G. \tag{4.147}$$

En itérant cette relation on trouve finalement la valeur de G sous la forme :

$$G = G^0 + \int G^0 \tilde{L} G^0 + \int\int G^0 \tilde{L} G^0 \tilde{L} G^0 + \int\int\int \cdots. \tag{4.148}$$

En prenant la valeur moyenne de cette équation on trouve

$$\bar{G} = G^0 + \int\int G^0 Q \bar{G}, \tag{4.149}$$

où l'opérateur Q est donné par la relation

$$Q = \left\langle \tilde{L} G^0 \tilde{L} + \int \tilde{L} G^0 \tilde{L} G^0 \tilde{L} + \int \cdots \right\rangle. \tag{4.150}$$

L'opérateur Q correspond au noyau de l'opérateur masse [37] ,[4]. L'équation (4.149) est l'analogue de l'équation de Dyson [57]. Une solution approchée de cette équation est obtenue en tronquant l'expression de l'opérateur Q. Par exemple au premier ordre on obtient :

$$\bar{G} = G^0 + \int\int G^0 \langle \tilde{L} G^0 \tilde{L} \rangle \bar{G} = G^0 + \int\int G^0 Q^{(app)} \bar{G}. \tag{4.151}$$

Cette approximation ne fait intervenir que les statistiques du second ordre (les corrélations spatiales) des variables aléatoires. Elle est donc valable si on suppose que les fluctuations des paramètres sont faibles c'est à dire si $|\epsilon_X| \ll 1$.
La matrice $\bar{G}$ est la matrice du tenseur de Green moyen. La matrice $Q^{(app)}$ est la matrice des opérateurs définie par :

$$Q^{(app)} = \begin{pmatrix} Q_{ij}^{(1)} & Q_{ij}^{(2)} \\ G_{ij}^{(3)} & G_{ij}^{(4)} \end{pmatrix} = \left\langle \tilde{L} G^0 \tilde{L} \right\rangle. \tag{4.152}$$

Le problème essentiel est donc le calcul de la matrice $Q^{(app)}$. La fig.4.9 montre comment le trajet de l'onde incidente est modifié par les inhomogénéités et comment la conversion de modes atténue les ondes aux interfaces des inhomogénéités.

4.6.1 Calcul de $\bar{G}$

Lorsqu'on écrit l'Eq 4.151 dans le domaine de Fourier on obtient :

$$\bar{g} = g^0 + (8\pi^3)^2 g^0 q \bar{g}, \tag{4.153}$$

où le facteur $(8\pi^3)^2$ vient de la transformée de Fourier. Le calcul de $\bar{Q}^{(app)}$ se ramène à celui de $\bar{g}$.

La solution de l'Eq.4.153 est

$$\bar{g} = \left[I - (8\pi^3)^2 g^0 q \right]^{-1} g^0 \tag{4.154}$$

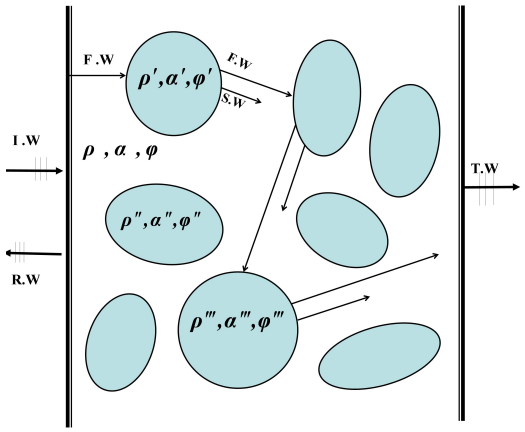


FIG. 4.9 – Schéma du trajet d'une onde dans un milieu aléatoire : aux interfaces entre inhomogénéités et milieu hôte, les ondes rapides (FW) et lentes (SW) sont converties et diffusées. Ces deux processus participent à l'atténuation de l'onde incidente

Dans cette expression le calcul de l'opérateur $\left[I-(8\pi^3)^2 g^0 q\right]^{-1}$ est compliqué. Puisqu'on ne s'interesse qu'à la correction des inhomogénéités sur l'onde rapide on peut réduire le calcul à celui des composantes de $\bar{Q}$ qui portent sur cette onde. On a alors :

$$\bar{g}^F = g^F + (8\pi^3)^2\Big(g^F q^{(1)}\bar{g}^F + g^F q^{(2)}\bar{g}^f + g^F q^{(3)}\bar{g}^F + g^F q^{(4)}\bar{g}^f\Big) \quad (4.155)$$

$$\bar{g}^f = g^f + (8\pi^3)^2\Big(g^f q^{(1)}\bar{g}^F + g^f q^{(2)}\bar{g}^f + g^w q^{(3)}\bar{g}^F + g^w q^{(4)}\bar{g}^f\Big) \quad (4.156)$$

Puisque $\bar{g}^F$ est du même ordre que $q^{(i)}$ par rapport au paramètre ($O(\varepsilon^2)$), il suffit de ne conserver que les termes à cet ordre lorsqu'on reporte $\bar{g}^f$ dans l'expression de $\bar{g}^F$, d'où l'expresion :

$$\bar{g}^F = g^F + (8\pi^3)^2\Big(g^F q^{(1)}\bar{g}^F + g^F q^{(2)} g^f + g^F q^{(3)}\bar{g}^F + g^F q^{(4)} g^f\Big). \quad (4.157)$$

Expression des composantes du tenseur de Green.

Les expressions des composantes du tenseur de Green G peuvent se déduire de celles données par Pride et Haartsen [58] dans le cas d'un milieu poroelastique avec couplage electroseismique dans des matériaux poreux saturés par un électrolite fluide. Dans ce cas on trouve :

$$G^F_{ij}(bfr-\mathbf{r_0}) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left((k^2\delta_{ij}-\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_s R}}{R}-\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_p R}}{R}\right) - \frac{C^2}{H^2}\frac{1}{4\pi q\omega^2}\partial_i\partial_j)\frac{e^{ik_{ps}R}}{R} \quad (4.158)$$

$$G^f_{ij}(bfr-\mathbf{r_0}) = \frac{C}{H}\frac{1}{4\pi q\omega^2}\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_{ps}R}}{R} \quad (4.159)$$

$$G^w_{ij}(bfr-\mathbf{r_0}) = -\frac{1}{4\pi q\omega^2}\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_{ps}R}}{R} \quad (4.160)$$

où $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; k_p, k_s et k_{ps} sont les vecteurs d'onde des ondes de compression rapide, de cisaillement et de compression lente :

$$k_p = \omega\sqrt{\frac{\rho}{H}}, \qquad k_s = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad \text{et} \quad k_{ps} = \omega\sqrt{\frac{i\omega\eta}{\kappa_0 N}} = \omega\sqrt{\frac{q}{N}}. \tag{4.161}$$

Ici $N = MP_d/H$. Les transformées de Fourier de ces opérateurs sont données par la définition :

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = \int g_{ij}(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{K}, \tag{4.162}$$

$$g_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \tag{4.163}$$

On trouve alors :

$$g^F_{ij}(\mathbf{K}) = -\frac{1}{8\pi^3\rho\omega^2}\Big(\frac{k_s^2\delta_{ij} - K_iK_j}{k_s^2 - K^2} + \frac{K_iK_j}{k_p^2 - K^2}\Big) - \frac{1}{8\pi^3}\frac{C^2}{H^2}\frac{1}{q\omega^2}\frac{K_iK_j}{k_{ps}^2 - K^2} \tag{4.164}$$

$$g^f_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{C}{H}\frac{1}{8\pi^3 q\omega^2}\frac{K_iK_j}{k_{ps}^2 - K^2} \tag{4.165}$$

$$g^w_{ij}(\mathbf{K}) = -\frac{1}{8\pi^3 q\omega^2}\frac{K_iK_j}{k_{ps}^2 - K^2} \tag{4.166}$$

Pour calculer la valeur du nombre d'onde effectif on fait les hypothèses suivantes :

- la longeur d'onde est grande devant la taille des inhomogénéités.
- les fluctuations du milieu sont petites ($\varepsilon \ll 1$).
- les composantes du tenseur de Green moyen vérifient les mêmes relations que les Eq 4.158, 4.160, c'est à dire des relations dans lesquelles on remplace les grandeurs par leurs valeurs moyennes.

Lorsque l'onde incidente se propage suivant l'axe Oz, il en est de même pour l'onde diffusée. Dans ce cas, les seules composantes du tenseur de Green à considéreront les composantes pour lesquelles $i = j = 3$.
Ainsi puisque pour la composante g^F_{33} on a :

$$g^F_{33} \approx \frac{-1}{8\pi^3\rho\omega^2}\left(1 + \frac{K^2}{k_p^2 - K^2}\right), \tag{4.167}$$

la composante du tenseur moyen $\bar{g}^F_{33}$ s'écrit :

$$\bar{g}^F_{33} \approx \frac{-1}{8\pi^3\bar{\rho}\omega^2}\left(1 + \frac{K^2}{\bar{k}_p^2 - K^2}\right), \tag{4.168}$$

où $\bar{k}_p$ est le nombre d'onde moyen cherché.
En reportant les valeurs de g^F_{33} et $\bar{g}^F_{33}$ dans l'Eq.4.157, on trouve :

$$\bar{k}_p \approx k_p\left(1 + \frac{4\pi^3}{\rho\omega^2}q^{(1)}_{33}\right). \tag{4.169}$$

Dans ce calcul on a négligé les termes contenant des combinaisons de composantes $q_{33}^{(i)}$ (ceci est justifié par le fait qu'on considère seulement des statistiques d'ordre deux).
Le calcul de $q_{33}^{(1)}$ se fait à partir de l'expression :

$$\begin{aligned} Q_{ik}^{(1)}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) &= \Big\langle \tilde{L}_{ij}^{(1)}(\mathbf{r_1})G_{jl}^{F}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})\tilde{L}_{lk}^{(1)}(\mathbf{r_2}) + 2\tilde{L}_{ij}^{(1)}(\mathbf{r_1})G_{jl}^{f}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})\tilde{L}_{lk}^{(2)}(\mathbf{r_2}) \\ &\quad + \tilde{L}_{ij}^{(2)}(\mathbf{r_1})G_{jl}^{w}(\mathbf{r_1})-\mathbf{r_2})\tilde{L}_{lk}^{(2)}(\mathbf{r_2})\Big\rangle. \end{aligned} \tag{4.170}$$

Dans cette expression les opérateurs $\tilde{L}^{(1)}$ et $\tilde{L}^{(2)}$ sont les parties aléatoires des opérateurs différentiels $L^{(1)}$ et $L^{(2)}$ où on néglige les fluctuations de la masse volumique (qui introduit un terme en ω^3 alors que les autre termes de fluctuation n'introduisent que des termes en ω^2. On a alors :

$$\tilde{L}_{ik}^{(1)} = \partial_k \bar{G}\partial_i + \partial_j \delta_{ik}\bar{G}\partial_j - 2\partial_i\bar{G}\partial_k + \partial_i\bar{H}\partial_k \tag{4.171}$$

$$\tilde{L}_{ik}^{(2)} = \partial_i\bar{C}\partial_k. \tag{4.172}$$

La composante $q_{33}^{(1)}$ est alors donnée par :

$$q_{33}^{(1)} = q_{HH} + q_{HG} + q_{HC} + q_{GG} + q_{GC} + q_{CC}, \tag{4.173}$$

où les termes q_{AB} sont reliés aux corrélations et intercorrélations par les expressions :

$$q_{HH} = \frac{1}{8\pi^3}k_p^2\left(\frac{H^2}{P_d}C_{HH}(0) + \frac{C^2}{N}k_{ps}^2\int_0^\infty rC_{HH}(r)e^{ik_{ps}r}dr,\right) \tag{4.174}$$

$$q_{HG} = -\frac{1}{3\pi^3}k_p^2\left(\frac{GH}{P_d}C_{HG}(0) + \frac{\alpha^2 MG}{P_d}k_{ps}^2\int_0^\infty rC_{HG}(r)e^{ik_{ps}r}dr\right), \tag{4.175}$$

$$q_{HC} = -\frac{1}{4\pi^3}\frac{C^2}{N}k_p^2\left(C_{HC}(0) + k_{ps}^2\int_0^\infty rC_{HC}(r)e^{ik_{ps}r}dr\right), \tag{4.176}$$

$$\begin{aligned} q_{GG} &= \frac{1}{15\pi^3}\frac{G}{NH^2}k_p^2\Big((4C^2G + 4NHG + NH^2)C_{GG}(0) \\ &\quad + 4C^2Gk_{ps}^2\int_0^\infty rC_{GG}(r)e^{ik_{ps}r}dr\Big), \end{aligned} \tag{4.177}$$

$$q_{GC} = \frac{1}{3\pi^3}\frac{\alpha^2 MG}{P_d}k_p^2\left(\frac{GH}{P_d}C_{GC}(0) + k_{ps}^2\int_0^\infty rC_{GC}(r)e^{ik_{ps}r}dr\right), \tag{4.178}$$

$$q_{CC} = \frac{1}{8\pi^3}\frac{C^2}{N}k_p^2\left(C_{CC}(0) + k_{ps}^2\int_0^\infty rC_{CC}(r)e^{ik_{ps}r}dr\right). \tag{4.179}$$

Si on suppose maintenant que les fonctions de corrélation des différents paramètres sont toutes de la même forme

$$C_{XY}(r) = \sigma_{XY}^2 B(r), \tag{4.180}$$

on obtient alors l'expression du nombre d'onde effectif sous la forme :

$$\bar{k}_p = k_p\Big(1 + \Sigma_2 + \Sigma_1 k_{ps}^2 \int_0^\infty rB(r)e^{ik_{ps}r}dr\Big), \tag{4.181}$$

où les coefficients Σ_1 et Σ_2 sont les corrections dues aux corrélations :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \frac{\alpha^2 M}{2P_d}\Bigg(\sigma_{HH}^2 - 2\sigma_{HC}^2 + \sigma_{CC}^2 + \frac{32G^2}{15H^2}\sigma_{GG}^2 \\ &\quad -\frac{8G}{3H}\sigma_{HG}^2 + \frac{8G}{3H}\sigma_{GC}^2\Bigg),\end{aligned} \tag{4.182}$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_{HH}^2 - \frac{4}{3}\frac{G}{H}\sigma_{HG}^2 + \left(\frac{4G}{H} + 1\right)\frac{4G}{15H}\sigma_{GG}^2, \tag{4.183}$$

et où k_{ps} est le nombre d'onde de l'onde de Biot lente :

$$k_{ps} = \sqrt{\frac{\imath\omega\eta}{\kappa_0 N}}. \tag{4.184}$$

4.7 Simulations numériques [54]

Introduction

Dans un milieu inhomogène, constitué d'un milieu hôte et d'inclusions dont les caractéristiques physiques diffèrent de celle de l'hôte, losqu'une onde mécanique se propage le nombre d'onde est modifié par rapport à celui de l'onde dans le milieu hôte. En particulier, les réflexion multiples de l'onde sur les inhomogénéités sont la source d'interférences qui atténuent son amplitude. Par ailleurs, le trajet de l'onde entre deux points du milieu est modifié (rallongé) par ces diffusions contribuant de la sorte, d'une part à l' augmentation de l'atténuation et d'autre part, à une vitesse de phase plus faible. Le phénomène de conversion de modes est aussi un mécanisme qui participe à l'atténuation de l'onde mécanique. Ainsi, si on caractérise l'atténuation effective de l'onde par la longueur l_{eff} [1], on peut écrire en première approximation :

$$\frac{1}{l_{eff}} = \frac{1}{l_{hom}} + \frac{1}{l_{inter}} + \frac{1}{l_{traj}} + \frac{1}{l_{conv}} \tag{4.185}$$

où l_{hom} est la longueur caractérisant l'atténuation dans le milieu hôte, l_{inter} caractérise l'atténuation due aux interférences, l_{traj} caractérise l'atténuation due à l'augmentation de la longueur du trajet de l'onde et l_{conv} caractérise l'atténuation due à la conversion de modes. Le modèle développé dans ce document ne permet pas de séparer les différentes contributions à l'atténuation des ondes. La fig.4.10, schématiser les significations de ces longueurs d'atténuation : L_{hom} est la longueur d'atténuation dans le poreux homogène ; L_{traj} est la longueur d'atténuation due à l'augmentation de longueur du tajet des ondes dans le poreux causée par les diffusions multiples ; L_{conv} est la longueur d'atténuation due à la conversion de modes responsable de l'affaiblissement l'onde rapide supérieur à celui de l'onde lente.

[1] la longueur d'atténuation est la distance sur laquelle l'onde s'affaiblit du facteur e

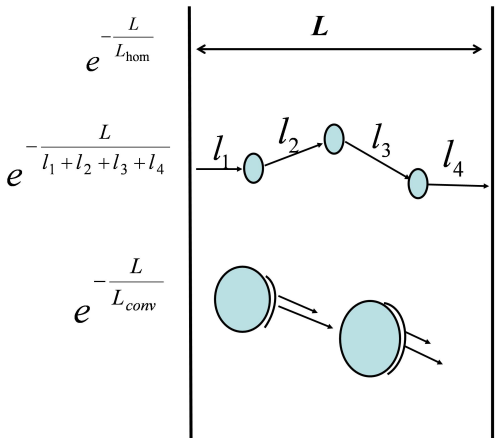


FIG. 4.10 – Schéma représentant l'origine des longueurs d'atténuations : L_{hom} est la longueur d'atténuation dans le poreux homogène ; $(L_{traj} = l_1+l_2+l_3+l_4)$ est la longueur d'atténuation due à l'augmentation de longueur du tajet des ondes dans le poreux causée par les diffusions multiples ; L_{conv} est la longueur d'atténuation due à la conversion de modes responsable de l'affaiblissement l'onde rapide supérieir à celui de l'onde lente.

4.8 Atténuation et dispersion

4.8.1 Nombre d'onde effectif

On a vu dans le chapitre précédent que le nombre d'onde effectif de l'onde rapide de Biot dans un milieu poreux inhomogène s'écrit en première approximation sous la forme :

$$\bar{k}_p = k_p\Big(1 + \Sigma_2 + \Sigma_1 k_{ps}^2 \int_0^\infty rB(r)e^{ik_{ps}r}dr\Big), \tag{4.186}$$

Son expression est la somme de trois termes. Le premier est la valeur du nombre d'onde dans le milieu hôte. Les deux autres sont les corrections dues aux inhomogénéités, d'une part Σ_2 qui provient des corrélations entre inhomogénéités et le dernier terme qui prend en compte le phénomène de conversion de mode.

4.8.2 Vitesse de phase

A partir de l'expression du nombre d'onde on définit la vitesse de phase des ondes par :

$$v = \Re\{\frac{\omega}{\bar{k}_p}\} \approx \frac{\omega}{k_p}\Big(1 - \Sigma_2 + 2\Sigma_1(k_{ps}^r)^2 \int_0^\infty rB(r)\sin(k_{ps}^r r)dr\Big) \tag{4.187}$$

où

$$k_{ps}^r = \Re\{k_{ps}\} = \sqrt{\frac{\eta\omega}{2\kappa_0 N}}. \tag{4.188}$$

Par la suite, on définit la vitesse des ondes de compression dans le milieu hôte par v_0 :

$$v_0 = \frac{\omega}{k_{ps}} = \sqrt{\frac{H}{\rho}}. \tag{4.189}$$

Dans l'expression de la vitesse de phase, on voit que le terme de dispersion est proportionnel à Σ_1, tandis que le terme Σ_2 ne fait que décaler la valeur de la vitesse de phase des ondes en la diminuant.

4.8.3 Facteur de qualité

La partie imaginaire du nombre d'onde est liée à l'atténuation de l'onde dans le milieu. In définit alors le facteur de qualité Q par

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Im\{\bar{k}_{ps}\}}{\Re\{\bar{k}_{ps}\}} = 4\Sigma_1 (k_{ps}^r)^2 \int_0^\infty rB(r)\cos(k_{ps}^r r)dr. \tag{4.190}$$

Dans cette expression on voit que seul le terme Σ_1 est responsable de l'atténuation dans le milieu inhomogène.

4.9 Applications : effets de l'aléa des paramètres du milieu

On s'intéresse ici à des lois de corrélation exponentielles et gaussiennes. Ainsi $B(r)$ prend les formes suivantes :

$$B(r) = \exp(-|r|/a) \quad \text{ou} \quad B(r) = \exp(-r^2/a^2) \tag{4.191}$$

où a est la longueur de corrélation définie comme étant la longueur pour laquelle $B(0)$ est divisée par e, c'est à dire $B(a) = 1/e$. Le cas de la fonction de corrélation exponentielle conduit à des calculs plus simples que la fonction gaussienne et puisqu'on s'intéresse essentiellement aux aspects qualitatifs des phénomènes, seuls les résultats relatifs à la fonction exponentielle sont présentés. On peut montrer que les résultats obtenus à partir de la corrélation gaussienne ne différent pas notablement de ceux de la corrélation exponentielle. Les valeurs utilisées pour les calculs sont exprimés dans les tableaux suivants :

$K_g\ (GPa)$	$K_d\ (GPa)$	$G\ (GPa)$	$\rho_s\ (Kgm^{-3})$	ϕ	$\kappa_0\ (mD)$
40	4.5	9	2650	0.17	250

TAB. 4.1 – Valeurs des paramètres du matériau poreux

Les grandeurs statistiques utilisées dans les calculs sont données dans le tableau Tab**??** : où les corrélations croisées sont calculées à partir de la relation :

$$R_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{4.192}$$

$K_f\ (GPa)$	$\eta\ (Pas)$	$\rho_f\ (Kgm^{-3})$
2.17	.001	1000

TAB. 4.2 – Valeurs des paramètres du fluide saturant

$P_d\ (GPa)$	$M\ (GPa)$	$H\ (GPa)$	$N\ (GPa)$	α	$\omega_B\ (KHz)$
16.5	10.4	24.7	6.9	.89	680

TAB. 4.3 – Valeurs des paramètres poroélastiques

en supposant que le coefficient de corrélation est égal à l'unité ($R = 1$). Les fluctuations des modules d'élasticité du solide et du fluide sont non corrélées et les grandeurs ${\sigma_{HH}}^2$, ${\sigma_{CC}}^2$, C_{HG}, C_{HC} et C_{GC} sont calculées à partir des expressions qui définissent chacun des modules H et C. Leurs valeurs sont données Tab 4.5 :

4.9.1 Influence de la longueur de corrélation

La figure (4.11) représente les courbes de l'inverse du facteur de qualité pour trois valeurs de la longueur de corrélation $a = 1, 10, 50\ cm$.

4.9.2 Influence de la porosité

La porosité intervient essentiellement dans le module M qui contribue à l'expression des modules d'élasticité H et C. Ainsi on a une estimation de l'effet des inhomogénéités de la porosité en étudiant la contribution des termes q_{HH}, q_{HG} et q_{HC}. Dans ce cas on a

$$\Sigma_1 = \frac{\alpha^2 M}{2P_d}\left(\sigma_{HH}^2 - 2\sigma_{HC}^2 - \frac{8G}{3H}\sigma_{HG}^2\right), \tag{4.193}$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_{HH}^2 - \frac{4}{3}\frac{G}{H}\sigma_{HG}^2. \tag{4.194}$$

On trouve alors pour le facteur de qualité et la vitesse de phase :

$$\frac{1}{Q} = \Sigma_1 \frac{4a^2\bar{k}^2(2\bar{k}a+1)}{(1+2\bar{k}a+2\bar{k}^2a^2)^2} \tag{4.195}$$

${\sigma_{K_dK_d}}^2$	${\sigma_{K_gK_g}}^2$	${\sigma_{GG}}^2$	${\sigma_{K_dK_g}}^2$	C_{K_dG}	C_{GK_g}
0.12	0.02	0.1	0.049	0.11	0.048

TAB. 4.4 – Ensemble I des valeurs des corrélations utilisées dans les calculs

$\sigma_{HH}{}^2$	$\sigma_{CC}{}^2$	C_{HG}	C_{HC}	C_{GC}
0.051	0.081	0.098	0.025	0.098

TAB. 4.5 – Ensemble II des valeurs des corrélations utilisées dans les calculs

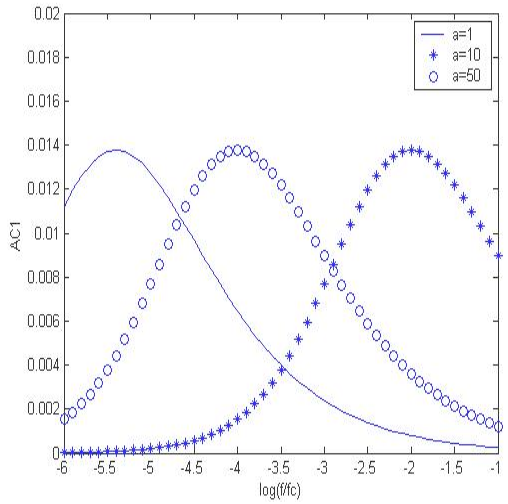


FIG. 4.11 – Facteur de qualité en fonction pour $a = 1$, $a = 10$ et $a = 50$ (cm)

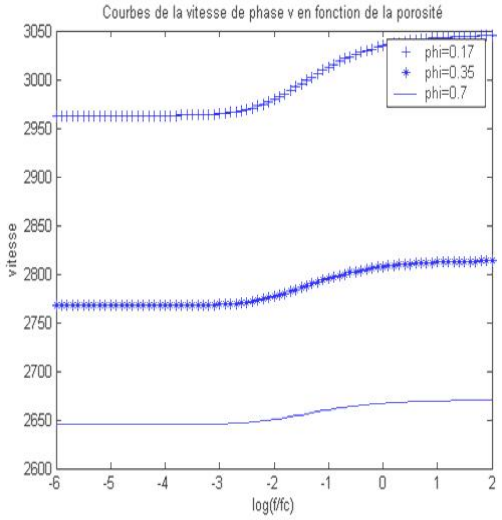


FIG. 4.12 – Vitesse de phase pour les valeurs $\phi = 0.17$,$\phi = 0.35$,$\phi = 0.7$

$$v(\omega) \quad = \quad v_0 \left[1 + \Sigma_1 \frac{4a^3 \bar{k}^3 (\bar{k}a + 1)}{(1 + 2\bar{k}a + 2\bar{k}^2 a^2)^2} - \Sigma_2 \right] \tag{4.196}$$

les figures (4.12 et 4.13) montrent les courbes de $1/Q$ et de la vitesse de phase en fonction pour les valeurs de $\phi = 0.17$, $\phi = 0.35$, $\phi = 0.7$. L'effet essentiel porte sur les variations de la vitesse de phase qui décroit lorsque ϕ augmente.

4.9.3 Influence de la compressibilité du fluide saturant

Dans l'os spongieux, le fluide saturant est un mélange de sang et de moelle dont les masses volumiques et les répartitions spatiales peuvent être très inhomogènes. La masse volumique du fluide intervient par le coefficient M dans C et H. On peut donc étudier l'influence du fluide (par K_f) et de la structure solide (par K_s) en tenant compte de la dispersion de ces valeurs indépendamment l'une de l'autre. Les figures (4.14 et 4.15) montrent l'influence du coeffcient C sur le facteur de qualité Q et la vitesse de phase V. L'influence de C est importante puisque C est un paramètre de couplage entre les deux équations de Biot.

4.9.4 Influence des modules d'élasticité

On étudie ici l'influence de la structure H sur le facteur de qualité et la vitesse de phase (fig.4.16, 4.17). Lorsqu'on compare les courbes des (fig.4.16) et (fig.4.14) , on peut voir la différence imposée par C et H. En effet ces deux modules d'élasticité entrent à part égale dans la dérivée de la contrainte τ_{ij}, mais alors que H n'intervient que sur le solide, l'action de C s'applique au fluide et au solide.

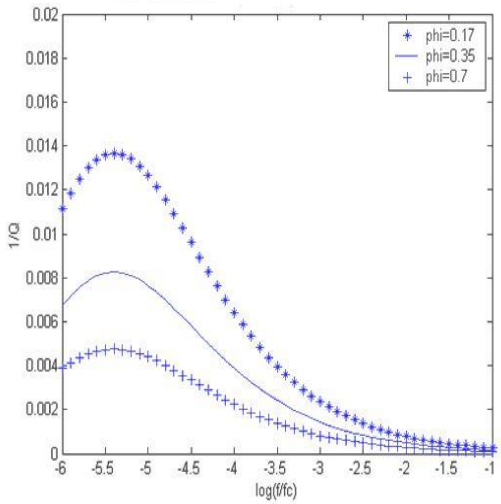


FIG. 4.13 – Facteur de qualité pour les valeurs $\phi = 0.17$,$\phi = 0.35$,$\phi = 0.7$

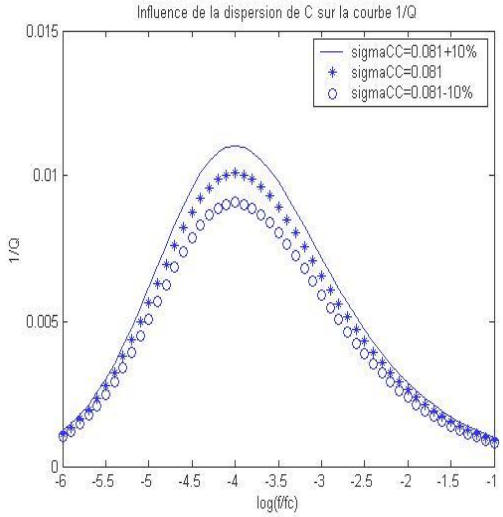


FIG. 4.14 – Facteur de qualité en fonction de σ_{cc}^2 pour les valeurs 0.061 et $0.061 \pm 100/0$

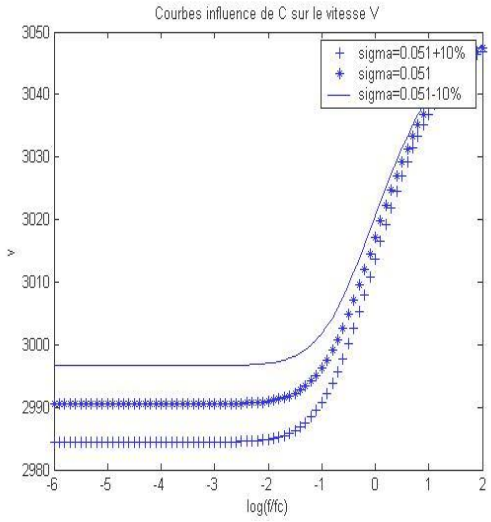


FIG. 4.15 – Vitesse de phase en fonction de σ_{cc}^2 pour les valeurs 0.061 et $0.061 \pm 100/0$

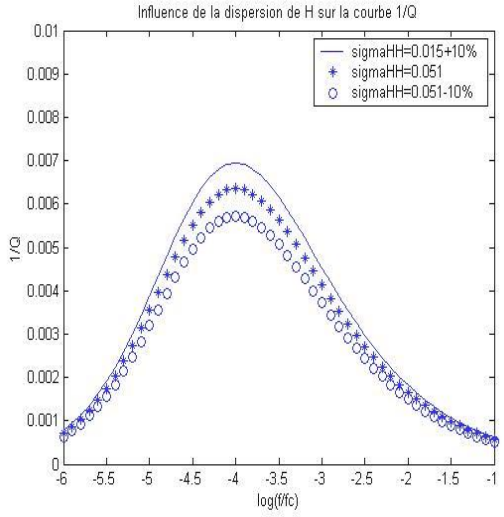


FIG. 4.16 – Facteure de qualité en fonction de σ_{HH}^2 pour les valeurs de 0.051 et 0.051 ± 10

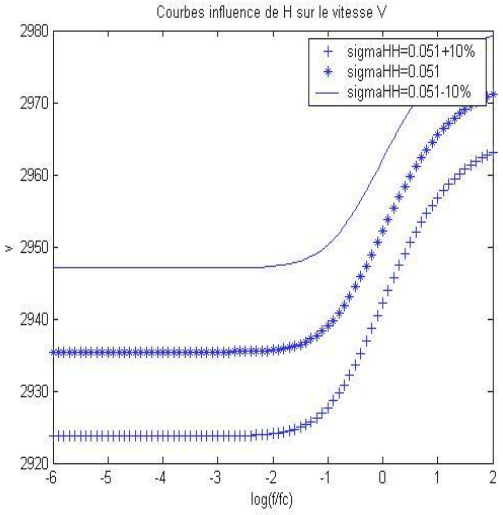


FIG. 4.17 – Vitesse de phase en fonction de σ^2_{HH} pour les valeurs de 0.051 et 0.051 ± 10

4.9.5 Influence de la structure

Pour analyser l'influence de la structure, on s'intéresse à l'influence de la dispersion des valeur du module d'élasticité G. On obtient les courbes suivantes : comme on peut le voir, la dispersion des valeurs de chacun des paramètres du milieu poreux a un effet particulier sur l'atténuation et la vitesse de l'onde rapide qui se propage dans ce milieu.
Même si les courbes représentant ces effets sont qualitativement similaires, elles sont quatitativement distinctes.Toutefois, cette étude présente une situation irréaliste où les coefficients d'élasticité varient indépendamment. Il est évident que leurs valeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres.
Il reste donc à tester ce modèle sur un ensemble de milieu poreux réels dans lesquels ces coefficients sont corrélés entre eux. On voit bien ici les contraintes d'une telle étude pour laquelle il est absolument nécessaire de connaître les influences relatives de chacun des paramètres sur les autres (figures.4.18, 4.19).

4.10 Conclusion

L'étude présentée ici constitue une première approche de l'influence des inhomogénéités dans les poreux saturés et sur l'atténuation et la dispersion des ondes acoustiques qui se propagent dans ces milieux. Ce modèle modifié de Biot montre qu'il est possible de détecter des variations dans les paramètres des milieux poreux à l'aide d'ondes acoustiques.

Il reste cependant à montrer que ces variations sont significatives de l'évolution d'une maladie comme l'ostéoporose et qu'elles sont transposables dans le domaine médical (mesures *in vivo*, pertinences des mesures....).

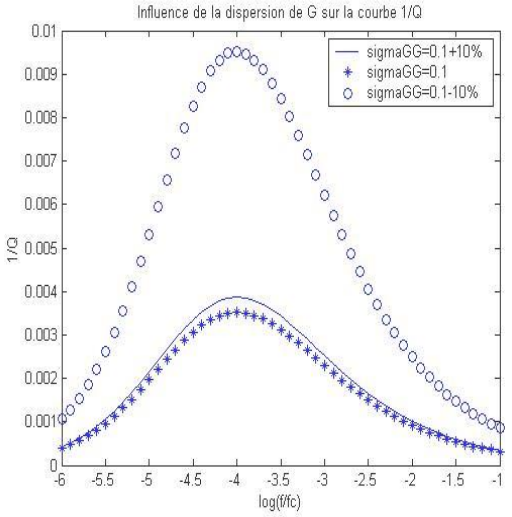


FIG. 4.18 – Facteure de structure en fonction de σ^2_{HH} pour les valeurs de 0.1et 0.1 ± 10

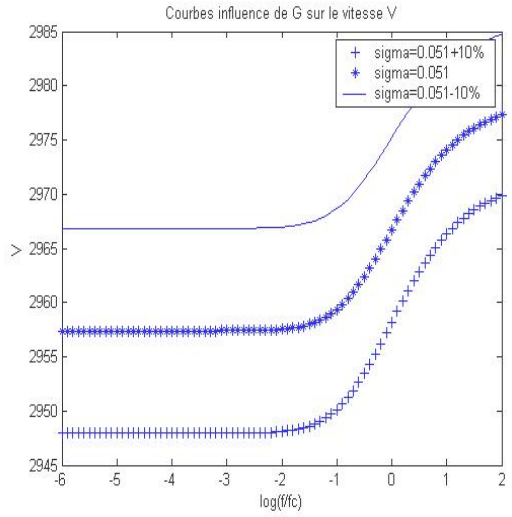


FIG. 4.19 – Vitesse de phase en fonction de σ^2_{HH} pour les valeurs de 0.1et 0.1 ± 10

Chapitre 5

Résultats expérimentaux

5.1 Introduction

Pour un acousticien caractériser un matériau acoustique signifie estimer la valeurs des paramètres qui entrent dans la modélisation de la propagation du son au sein de ce matériau. Les équations des ondes et leurs solutions établies aux chapitres précédents montrent que ces paramètres ont une très grande sensibilité dans la gamme de fréquences dans lequelle on travaille.
Le but de cette partie expérimentale est de : i) vérifier le rôle des conditions aux limites dans le cas de la propagation dans un poreux ; ii) de tester les ondes de Biot comme détecteurs de défauts dans un poreux, en d'autres termes de s'assurer que les ondes mécaniques peuvent repérer un défaut et nous renseigner sur ses caractéristiques ; iii) comparer les coefficients de transmission des plaques poreuse à surface ouverte et à surface fermée ; iv) enfin, quantifier l'effet d'une inhomogénéité dans l'os, par exemple l'absence de structure solide (figure.5.1).

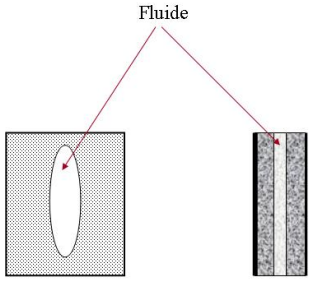


FIG. 5.1 – Modèle d'un défaut dans un milieu poreux : inclusion fluide

Bien que de nombreux travaux aient été consacrés à l'étude des conditions aux limites pour les matériaux poreux, il n'est pas totalement clair que la condition sur une interface à pores fermés classiquement posée soit compatible avec la théorie de Biot. Posé en d'autres termes le problème est le suivant : les ondes de Biot peuvent elles se développer dans un poreux dont les faces sont imperméables (ou à pores fermés) et si oui sont-elles détectables dans les signaux transmis et/ou réfléchis ? La réponse à cette question est primordiale à plus d'un titre.

Tout d'abord elle confirmerait ou infirmerait la théorie de Biot comme modèle possible de propagation des ondes mécaniques dans l'os trabéculaire. En effet, si de nombreux chercheurs travaillent sur ce modèle en vue de l'exploitation de ses prédictions dans le domaine médical, il reste encore des nombreuses réticences à persuader. Ensuite, pour l'analyse des signaux issus d'os ostéoporotiques, même si l'onde lente n'est pas détectable dans le cas d'un poreux à faces imperméables, cela ne signifie pas qu'elle n'est pas créée sous forme de mode évanescent au niveau des inhomogénéités de l'os trabéculaire par conversion de modes. Ce type d'interactions ondes-structures participe à l'atténuation de l'onde rapide et peut donc renseigner sur les inhomogénéités du tissus osseux et de leur densité.

5.2 Préparation des échantillons

Les expériences ont été réalisés au Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC) de l'Université du Havre. Les installations et les compétences de ce laboratoire dans le domaine de la diffusion des ondes sur des cibles élastiques et poroélastiques en acoustique sous-marine en font un lieu privilégié pour ce type d'étude [6, 30, 51]. Les matériaux poreux utilisés dans cette étude sur la théorie de Biot sont des plaques poreuses commercialisées sous le nom de QF-20. Ces plaques sont couramment utilisées comme filtre pour piscines et sont proposées sous diverses dimensions. L'intérêt acoustique de ces plaques QF-20 est que certains de leurs paramètres mécaniques sont donnés dans les informations commerciales du fabricant et ont été vérifiés expérimentalement par résolution du problème inverse.

5.2.1 Paramètres de QF-20

Les paramètres des plaques QF-20 utilisèes sont donnés ci-dessous :
- module de compressibilite du solide $K_r = 36,610^9 Pa$,
- module de compressibilité de l'eau $K_f = 2.2210^9 Pa$,
- coefficient de cisaillement du solide $\mu = 7,6310^9 Pa$ (valeur expérimentale $(7,9 + 0,15i)10^9 Pa$),
- masse volumique du solide élastique $\rho_s = 2760 kgm^{-3}$,
- masse volumique de l'eau $\rho_f = 1000 kgm^{-3}$,
- porosité $\varphi = 0,402$ (valeur expéerimentale $0,4$),
- perméabilité $\kappa = 1,6810^{-11} m^2$(valeur expérimentale $1,710^{-11} m^2$),
- viscosité de l'eau $\eta = 1,1410^{-3} kgm^{-1} s^{-1}$,
- rayon moyen des pores $a_b = 3,2610^{-5} m$ (valeur expérimentale $3,310^{-5} m$),
- tortuosité $\alpha = 1,89$ (valeur experimentale $1,94$) [5].

5.3 Dispositif expérimental et protocole de mesure

Les mesures acoustiques se font sous incidence normale, dans une cuve de plexiglas de grandes dimensions contenant de l'eau (environ 2000 litres). Dans ces expériences on dispose d'une paire de transducteurs, de plaques poreuses de différentes épaisseurs : $(l = 5mm, 10mm, 25mm, 37mm)$, de plaques plexiglas. Les faces des deux transducteurs et la plaque poreuse sont placées parallélement

dans la cuve de manière à ce que la plaque soit complétement immergée dans l'eau. On note E le transducteur émetteur et R le transducteur récepteur. Le schéma de principe des mesures est représenté ci-dessous (fig.5.2).

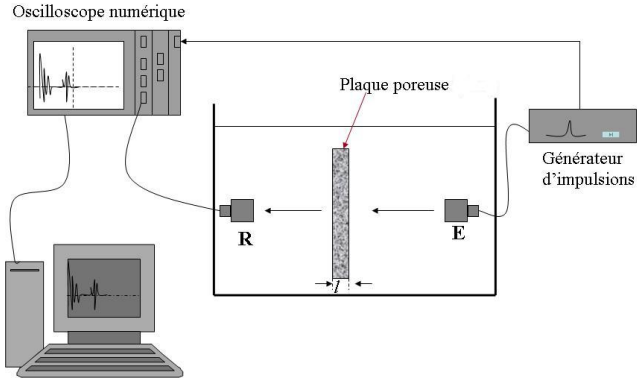


FIG. 5.2 – Dispositif expérimental pour mesurer la célérité des ondes dans la plaque poreuse

La plaque poreuse est placée verticalement entre les deux transducteurs,à distants de $98cm$. Les signaux sont tous enregistrés à la même fréquence d'échantillonnage de $100MHz$ et comportent 80000 points ; ils ont la même origine temporelle imposée par le générateur d'impulsions. Les impulsions du générateur proviennent de la décharge brutale d'un condensateur chargé périodiquement sous $300V$. Les transducteurs large bande (marque Panametrics) sont identiques et de fréquence centrale 500 KHz [34].
La liste du matériel utilisé est fournie dans le tableau suivant :

Matériel	Usage	Fabricant	Référence	Spécificité
Générateurs	impulsion	**Sofranel**		300 V max
Transducteur	E & R	Panametrics®		500 KHz
Plaque poreuse	échantillon	Filtros ®	QF-20	35x20x1 cm
Plaque poreuse	surface fermée	Filtros ®	QF-20	35x20x.5 cm
Plaque plexiglas				35x20x.3 cm
Oscilloscope		Lecroy / **ou carte d'acquisition Gage**		
Cuve	grandes dimensions environ 2000 litres			

FIG. 5.3 – Liste et références du matériel utilisé au cours des mesures

Les caractéristiques des transducteurs sont données en annexe.

Dans un premier temps, l'onde incidente est mesurée en absence de l'échantillon entre les deux transducteurs, et est prise comme signal de référence de phase. Puis on dispose l'échantillon et on mesure à nouveau le signal réfléchi ou transmis à travers la plaque. Le décalage temporel entre ces deux signaux permet de calculer la vitesse de propagation dans le poreux. La figure (5.4) présente un exemple de signaux obtenus en transmission. Le signal de référence (ligne discontinue) est plus lent que le signal transmis à (ligne continue) travers une plaque poreuse à face ouverte (il s'agit de l'onde rapide qui se propage essentiellement dans la structure du poreux). On voit que le signal transmis est un signal composite constitué d'une onde rapide, d'un écho de cette onde et d' une onde plus lente.

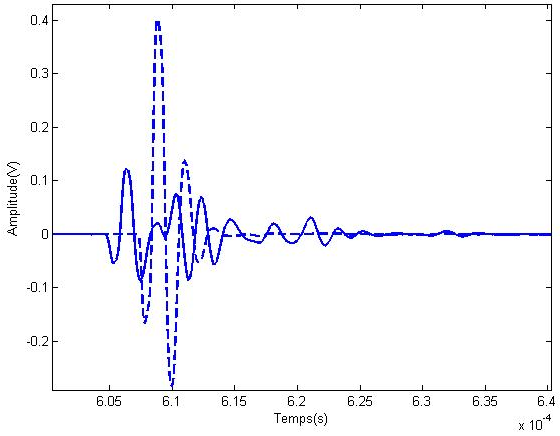


FIG. 5.4 – Signal de référence (ligne discontinue) et signal transmis (ligne continue) pour une plaque à face ouverte.

5.4 Résultats expérimentaux

5.4.1 Plaque I

Dans la première expérience on vérifie que les ondes acoustiques se propagent dans la plaque poreuse conformément à la théori de Biot. Pour ça on a utilisé la plaque (appelée par la suite plaque I) de $5mm$ d'épaisseur conformément à la (fig.5.2).

1 er cas : pores ouverts

Cette expérience valide la théorie de Biot comme modèle de propagation dans les plaques QF-20. Le signal transmis est présenté sur la (fig.5.5) ; il montre une structure composite constituée, conformément à la théorie de Biot d'une onde rapide, et deux échos de cette onde et de l'onde lente à localiser sur la figure (5.5).

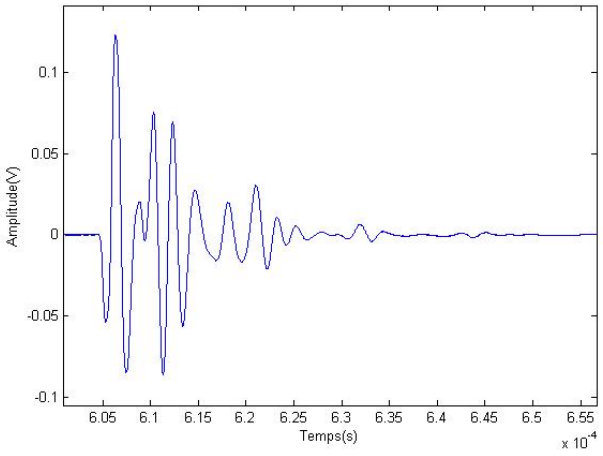


FIG. 5.5 – Signal transmis par la plaque I (pores ouverts)

2eme cas : pores fermés I

Dans un deuxième temps, on étudie l'effet des conditions aux limites sur la propagation des ondes dans la plaque poreuse. Une partie de la surface de la plaque I est fermée par une fine couche de ciment qui obstrue les pores, tandis que l'autre partie est conservée avec ses pores ouverts (fig.5.6). On capte les signaux réfléchis et transmis par chacune des demi-plaques(pour la partie ouverte et pour la partie fermée) (fig.5.7).

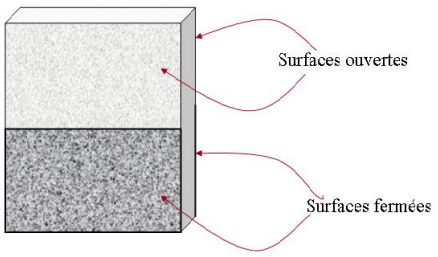


FIG. 5.6 – Plaque I : demi-faces à pores ouverts et fermés

Le signal transmis dans le cas des pores fermés est donné par la (figure.5.8). On constate que la structure de ce signal est beaucoup moins riche que celle du signal obtenu avec les pores ouverts (fig.5.5) : Il s'agit d'une onde rapide avec ces trois échos.

3eme cas : pores fermés II

Pour éviter de cimenter les surface des plaques utilisées pour la suite, on se propose de comparer les résultats précédents avec ceux obtenus dans le cas d'une

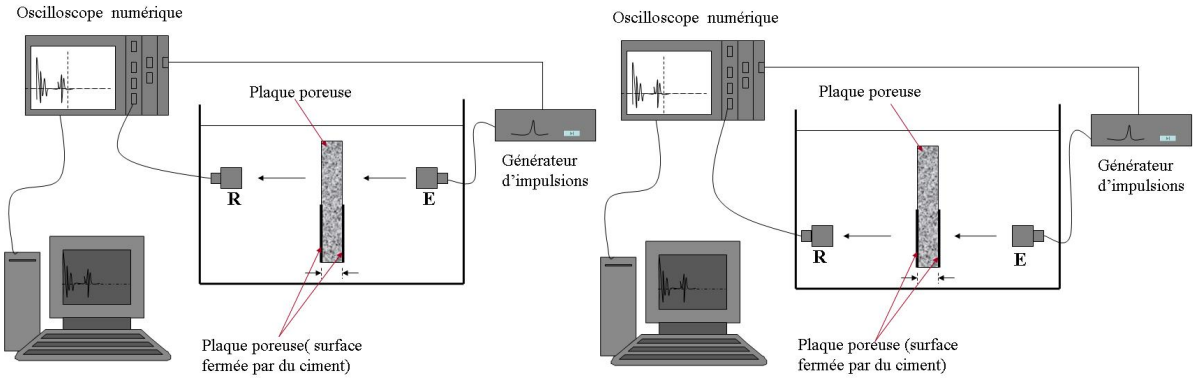


FIG. 5.7 – Plaque poreuse QF-20 (l=5mm) surface fermée avec le ciment

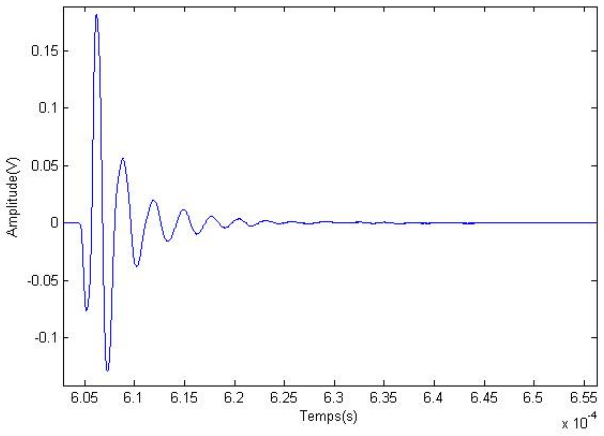


FIG. 5.8 – Signal transmis par la plaque I (pores fermés)

plaque à surface ouverte en contact avec deux plaques de plexiglas (fig.5.9). Toute fois cette méthode ne donne pas de bons résultats : il semble que le contact entre la plaque poreuse et les feuilles de plexiglass n'est pas parfait, emprisonnant une fine couche de liquide qui pollue singulièrement les signaux et rend leur interprétation difficile (fig.5.10).

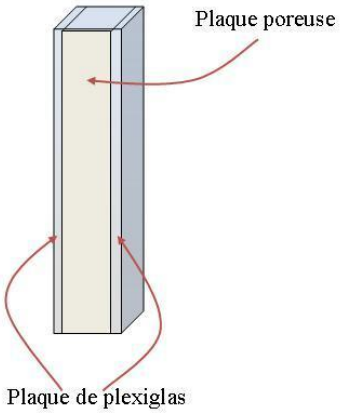


FIG. 5.9 – Plaque poreuse entre deux plaques de plexiglas

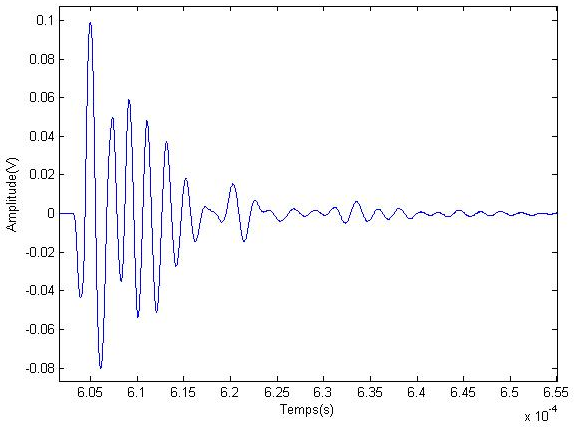


FIG. 5.10 – Signal transmis par l'ensemble plexi-plaque5mm-plexi

5.4.2 Plaque II

La seconde plaque étudiée a une épaisseur $l = 37mm$; la moitié de la surface de la plaque est fermée par du ciment et l'autre partie est ouverte. La plaque est saturée d'eau.

1 er cas

Dans un premier temps, on a enregistré les signaux transmis et réfléchi pour les deux parties de la plaque II (partie fermée et partie ouverte).
La figure(fig.5.11) représente les signaux transmis dans le cas des pores ouverts (fig. du haut) et dans le cas des pores fermés (fig. du bas). On voit nettement que le signal 'pores fermés' est moins riche que le signal 'pores ouverts'. Les faces fermées jouent un rôle de filtre. (Il s'agit d'une onde rapide et de 1er écho, puis l'onde lente qui arrive vers 6.28, un écho de l'onde rapide et un écho de l'onde lent vers 6.43 c'est pour le signal transmis par le partie ouvert , quand l'autre signal (partie fermé) montre l'onde rapide avec trois échos)

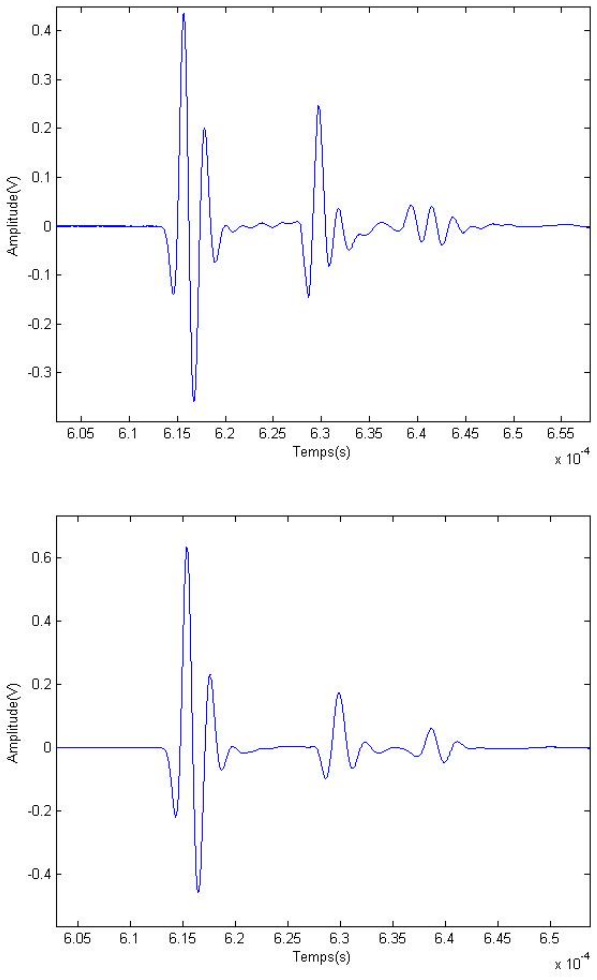


FIG. 5.11 – Signaux transmis par la plaque II : pores ouverts (haut), pores fermés (bas).

2 eme cas : étude d'un défaut

Pour étudier les défauts dans une plaque, on fait dans un premier temps un trou de 5mm sur les deux parties de la plaque (fermée et ouverte), la figure (5.12) montre la position du trou.

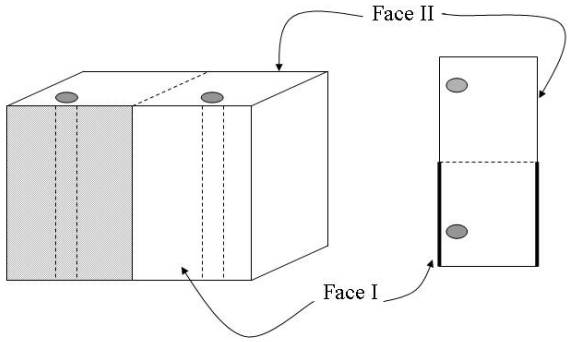


FIG. 5.12 – Plaque II percée d'un trou de 5 mm.

Puis on a enregistré les signaux transmis et réfléchi comme à l'étape précédente sur les deux faces de chaque partie de la plaque (fig.5.12). Dans un deuxième temps deux trous de taille plus importante ont été percés près du premier (fig5.13). Et les signaux transmis ont été enregistrés.

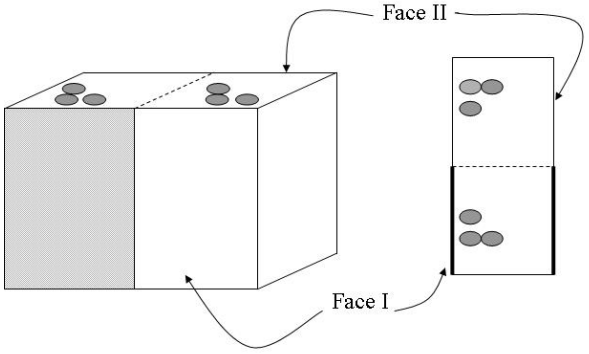


FIG. 5.13 – Plaque II percée de trois trous.

Les figures (5.14) et (5.15) montrent les signaux captés sur les deux faces pour 1 et 3 trous. On voit que la différence n'est pas très sensible pour ces deux types de signaux (pour les deux faces). On constate néanmoins une différence, quoique faible, entre les signaux issus de la plaque trouée et ceux issus de la plaque 'saine'. Pour expliquer cette observation, on peut proposer deux causes essentielles :

1. La rupture d'impédance à l'interface plaque-trou n'est pas suffisamment grande pour modifier profondément le coefficient de transmission ;
2. La taille des trous est relativement faible par rapport à celle du faisceau et donc l'énergie sonore diffusée par les trous n'est qu'une faible part de

celle du faisceau incident.

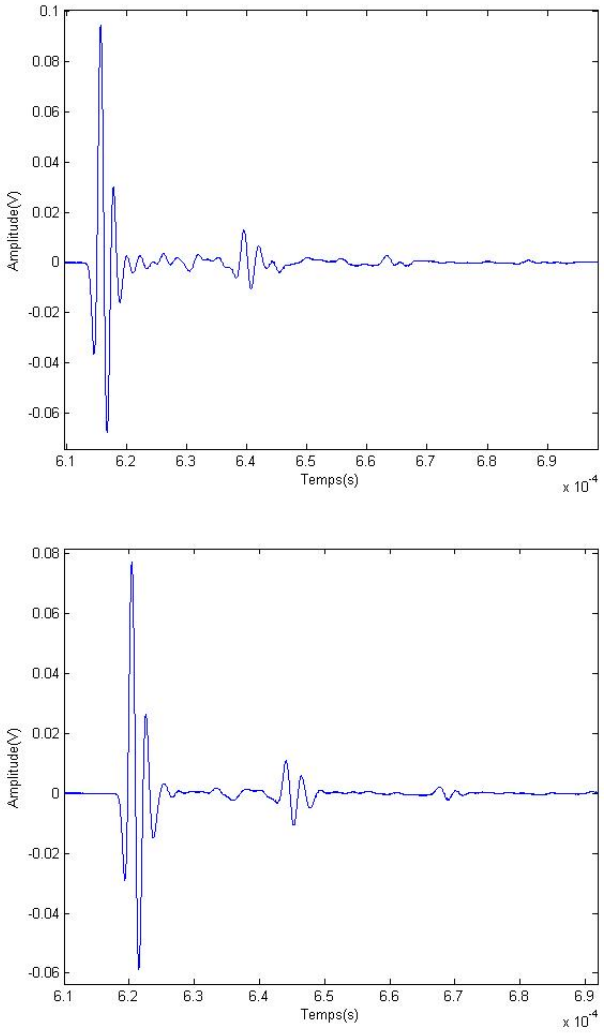


FIG. 5.14 – Signaux transmis à travers la plaque II (faces ouvertes) percée d'un trou (haut) et de 3 trous (bas).

5.4.3 Plaque III

Par la suite et pour la même motivation, nous avons utilisé une plaque de $97mm$ de longueur et $25mm$ d'épaisseur.
Cette plaque a été coupée en deux parties, et on a enregistré les signaux transmis et réfléchis lorsqu'elle été insonnée.
Dans un second temps, nous avons collé les deux parties de la plaque, pour faire une plaque de 50mm d'épaisseur. Le signal transmis par cet assemblage montre que l'onde lente est très atténu par rapport au cas précédent.

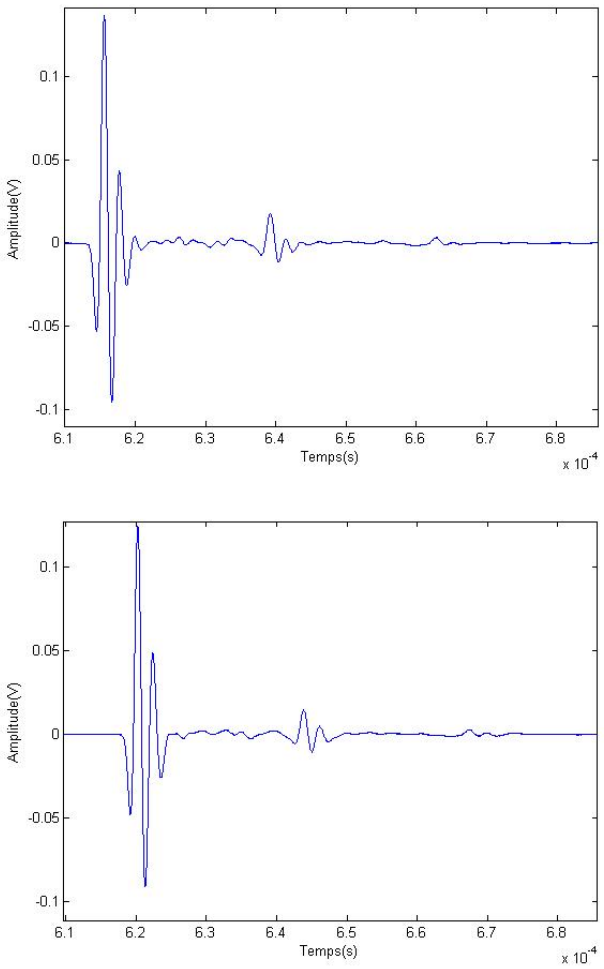


FIG. 5.15 – Signaux transmis à travers la plaque II (faces fermées) percée d'un trou (haut) et de 3 trous (bas).

La fig.(5.16) du haut représente le signal transmis à travers une plaque simple

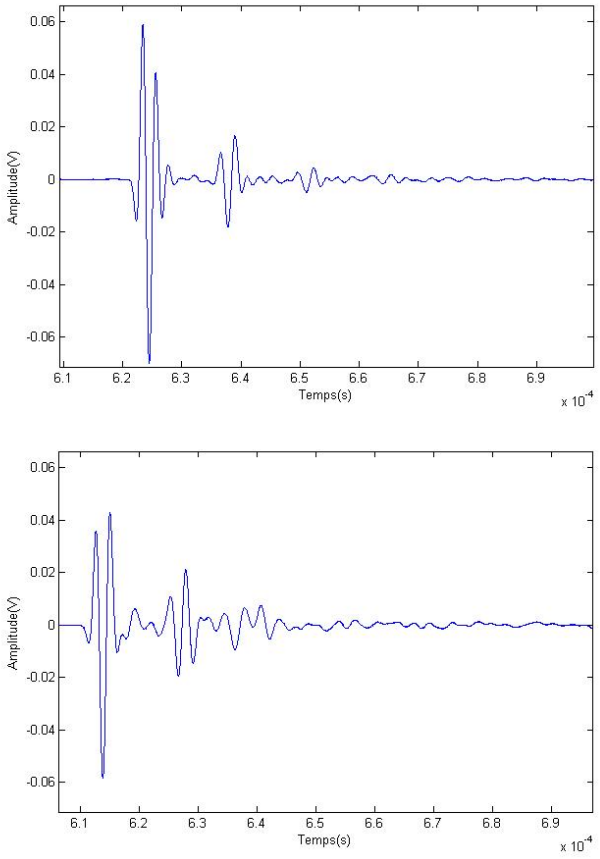


FIG. 5.16 – Signaux transmis à travers la plaque III (pores ouverts) : plaque simple (haut) et plaque double (bas).

(de 25 mm), et sur la fig.(5.16) du bas est représenté le signal transmis à travers la plaque double (2×25 mm). Sur le premier, on voit l'onde rapide, et les deux premiers échos, puis l'onde lente vers (6.5×10^{-4} s). Sur le second signal, on observe l'onde rapide, 2 échos de cette onde rapide puis l'onde lente à $6.5 \times 10^{-4} < t < 6.6 \times 10^{-4}$s. On y voit bien qu'il y a eu conversion de modes entre les deux plaques sur la fine couche de fluide limité par les deux plaques. On remarque aussi que l'onde rapide arrive plus tôt dans l'ensemble (2×25mm) que dans la plaque simple, car elle traverse environ $50mm$ de structure solide. Et l'onde lente arrive dans l'ensemble aprés (6.4×10^{-4}), quand elle arrive vers (6.5×10^{-4}) dans la plaque simple.
Troisièmement nous avons créé un défaut sur une partie de la plaque (fig.5.18). On a étudié ce défaut sur deux étapes : dans le première étape on a collé les deux parties de la plaque comme expliqué dans le figure suivante sans défaut(fig.5.19 du haut).
Et dans la deuxième étape nous avons fermé les faces extérieures de l'ensemble (fig.5.19 du bas) avec du ciment. On a capté les signaux transmis et réfléchis

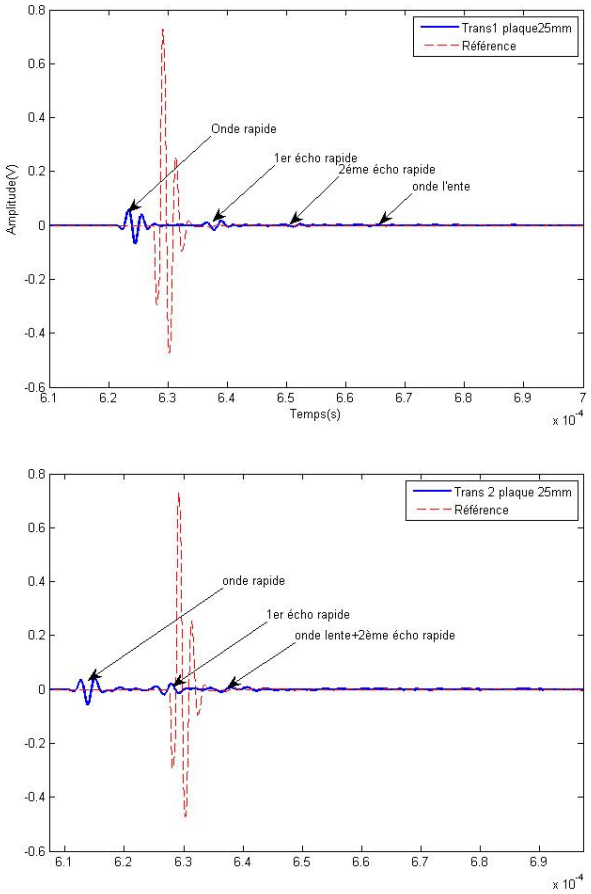


FIG. 5.17 – Signaux transmis avec leur signaux de référance à travers la plaque III (pores ouverts) : plaque simple (haut) et plaque double (bas).

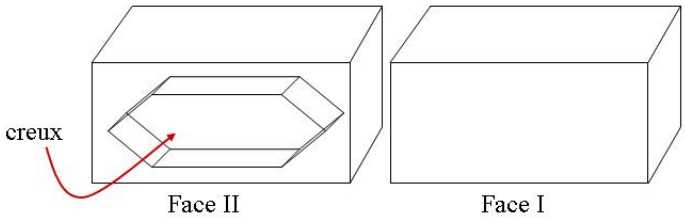


FIG. 5.18 – Plaque III avec défaut (partie hachurée).

pour les deux parties.

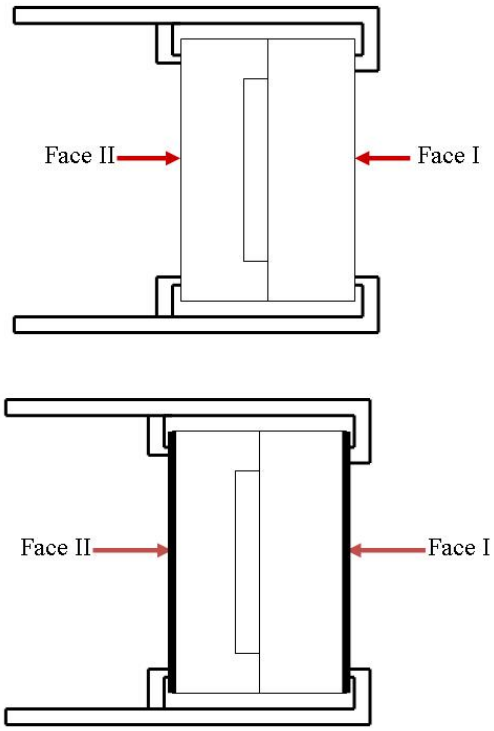


FIG. 5.19 – Plaque poreuse III : surface ouverte (haut), surface fermée (bas)

Les figures (5.20) et (5.21) représentent les signaux transmis (fig.5.20) et réfléchis par la face I et la face II (fig.5.21). On peut constater que on a bien les signaux transmis sont identiques dans le cas d'une onde incidente sur les faces I et II. Ces figures montrent une nette différence entre les signaux due à la non symétrie du problème. Le signal réfléchi par la face I, arrive plus tôt que celui réfléchi par la face II, car il traverse une plus grande épaisseur de poreux (onde rapide). Le premier écho de l'onde rapide de la face I est nettement séparé de l'onde directe, alors que pour la face II, cet écho se superpose en partie avec l'onde rapide. Le signal réfléchi par la face II ne montre pas d'onde lente, alors qu'elle est présente pour la face I (vers 5.45 μs).
Les mesures sont refaites dans le cas des faces fermées pour obtenir les signaux suivants : signal transmis (fig.5.22) et signaux réfléchis par les faces I et II (fig.5.23).

5.5 Conclusion

Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre montrent que

1. l'o,nde de Biot n'est pas observable lorsque les faces des échantillons de poreux saturés par un fluide sont fermées ;

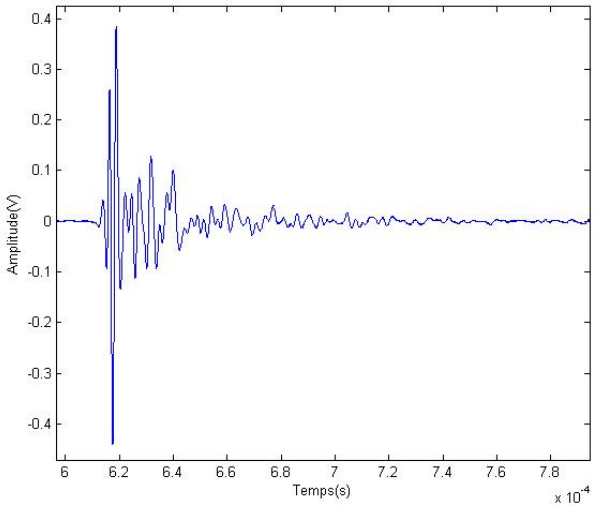


FIG. 5.20 – Signal transmis Plaque III(faces ouvertes)

2. les ondes longitudinales permettent de détecter des défauts de tailles différentes lorsque les faces sont ouvertes (cas du signal transmis). Lorsque les faces sont fermées la detection est plus difficile ;
3. pour un défaut de grande taille, la détection est plus facile, avec les signaux transmis ou réfléchis, du fait que l'énergie réfléchie et/ou convertie par le défaut est plus importante que pour des défauts de petite taille.

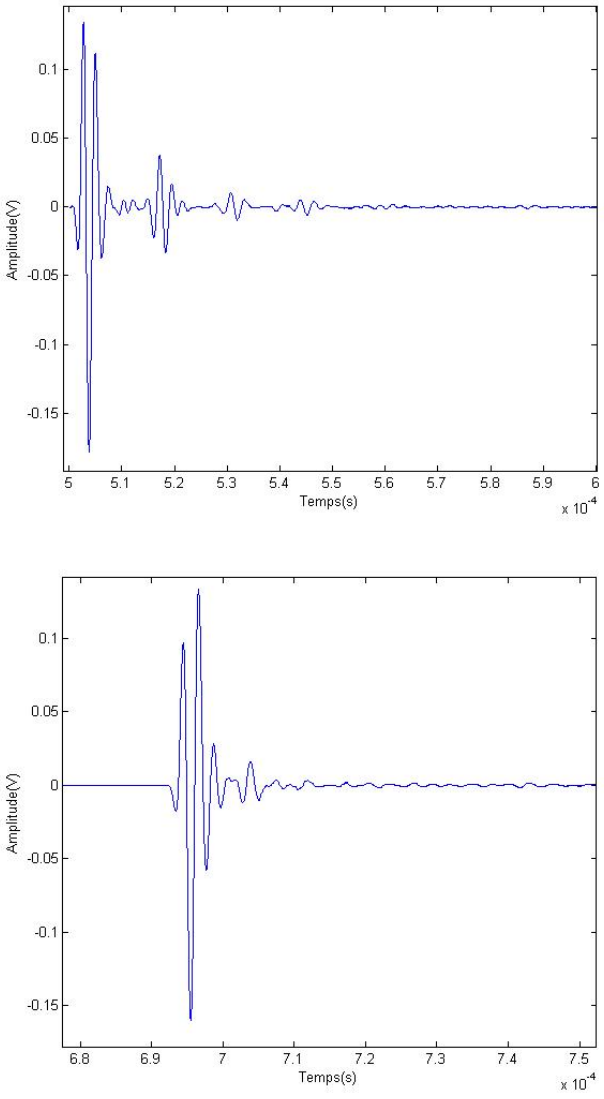


FIG. 5.21 – Signaux réfléchis (faces ouvertes) : face I (haut) et face II (bas)

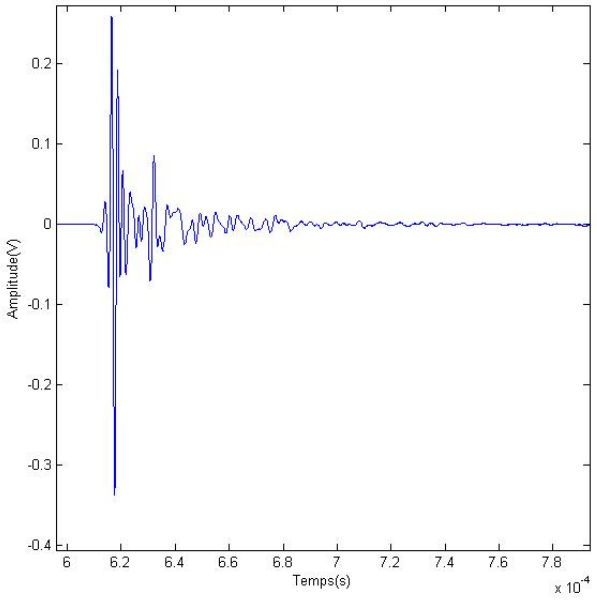


FIG. 5.22 – Signal transmis (faces fermées)

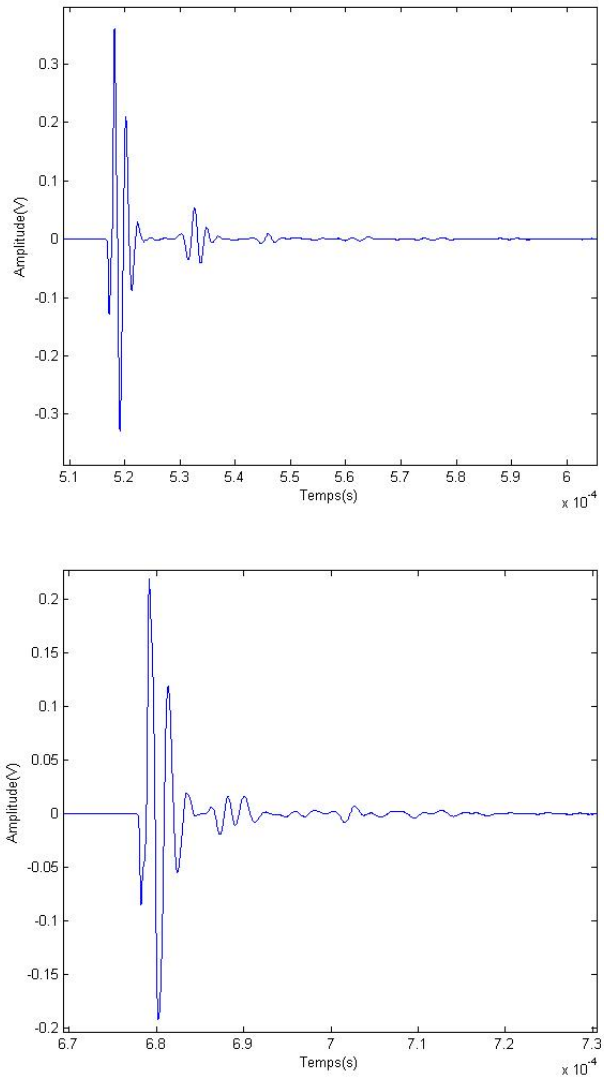


FIG. 5.23 – Signaux réfléchis (faces fermées) : face I (haut) et face II (bas)

Conclusion

Dans cette thèse nous avons tenté de donner des réponses aux questions suivantes :

- Quelle influence une interface à pores fermés a t elle sur la propagation de l'onde lente dans le modèle de Biot ?
- Comment les inhomogénéités d'un milieu poreux influencent-elles les caractéristiques de propagation des ondes, à savoir leurs vitesses et leurs atténuations ?

A la première question, les mesures faites sur des plaques de silice poreuses répondent en montrant qu'à une interface à pores fermés le champ transmis n'est constitué que de l'onde rapide. Cette conclusion est en accord avec l'interprétation que l'on fait des ondes de compression dans la théorie de Biot. Lorsqu'un poreux est soumis à une sollicitation mécanique il réagit en développant deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Les deux ondes de compression correspondent à deux modes propres de propagation : l'onde rapide est due au mouvement d'ensemble (en phase) du solide et du fluide, tandis que l'onde lente est due au mouvement en opposition de phase de ces deux constituants. Cette interprétation permet de comprendre pourquoi l'atténuation de l'onde rapide est beaucoup plus faible que celle de l'onde lente. Aussi, le mouvement en opposition de phase du fluide et du solide dans un poreux limité par des parois imperméables n'est concevable que si leurs coefficients d'élasticité sont de valeurs très différentes. C'est ce qui ressort des expériences faites sur l'os trabéculaire : la propagation dans des échantillons d'os comme par exemple des tranches issues de têtes de fémurs est conforme à la théorie de Biot et met en évidence les deux types d'ondes de compression. Ce n'est pas le cas lorsqu'on mesure le champ acoustique transmis par l'os trabéculaire limité par de l'os cortical.

La seconde raison pour laquelle la mise en évidence de l'onde lente dans l'os trabéculaire est difficile est que cette onde n'est pas propagative aux fréquences de travail traditionnelles. En effet, pour un milieu comme l'os poreux, à cause de la forte viscosité du fluide saturant, la fréquence de Biot est trés élevée (supérieure au 1MHz). De la sorte, l'onde lente participe au phénomène de conversion de modes aux interfaces des inhomogénéités du milieu, en prélevant l'énergie de l'onde rapide qu'elle dissipe mais ne se propage pas. Le processus de conversion de modes est alors essentiellement dissymétrique : l'onde rapide cède de l'énergie sans pratiquement jamais en recevoir. Ainsi, dans ce type de milieu de propagation, l'atténuation de l'onde rapide n'obéit pas au modèle de Biot puisque sa valeur est plus grande que celle prédite par le modèle. C'est la présence des inhomogénéités qui accélère l'atténuation de l'onde rapide. Ainsi, le comportement de l'onde rapide est en partie contrôlé par celui de l'onde de

Biot.
Les différences entre prédictions théoriques et mesures concernant la vitesse de l'onde rapide s'expliquent en partie aussi par la présence des inhomogénéites. La théorie de Biot est une théorie d'homogénéisation, qui donne au milieu poreux auquel elle est appliquée les caractéristiques d'un milieu effectif. La présence d'inhomogénéités dans ce milieu en pertubant la propagation modifie l'ensemble de ces caratéristiques. Le traitement du milieu poreux inhomogène par une méthode de perturbations, en ré-homogénéisant le milieu, permet l'évaluation de nouvelles vitesses de propagation et de nouvelles atténuations. La diminution de la célérité de l'onde rapide est un exemple de l'effet de cette ré-homogénéisation. Les calculs développés dans ce mémoire peuvent être généralisés pour prendre en compte les interactions entre inhomogénéités, leurs formes et leurs propriétés physiques.
Traditionnellement la théorie de Biot est développée pour des milieux homogènes, c'est à dire pour des milieux dont les paramètres physiques sont uniformes. On a montré que lorsque ces paramètres, obéissant au contraire à une loi de répartition, la dispersion et l'atténuation des ondes acoustiques acquièrent de nouvelles valeurs : l'atténuation des ondes augmente, les célérités diminuent.
Les mesures effectuées au cours de ce travail ont confirmé que les faces ouvertes ou fermées qui limitent un poreux jouent un rôle important dans la génération des ondes de Biot. En particulier, pour les poreux saturés par un liquide limités par une surface à pores fermés, un champ acoustique transmis ne contient pas d'onde de Biot.
Par ailleurs, on a montré que dans le cas d'un poreux contenant un défaut, les ondes fournissent des renseignements sur sa position, en particulier dans le signal réfléchi.
Ce travail a aussi permis d'ouvrir de nouvelles perspectives. Tout d'abord dans l'étude des champs acoustiques pertubés par des défauts du poreux. Qu'est on en droit d'attendre quant à la forme, de ces défauts, à leurs positions, de leurs paramètres (porosité, modules d'élasticité,...). Même si l'onde de Biot n'est pas transmise par les faces à pores fermés n'est-il pas possible d'obtenir des renseignements sur les interfaces rencontrées par le faisceau ultra-sonore, à partir de 'la queue' du signal qui contient en quelque sorte son 'l'histoire' dans le poreux ?
On a vu qu'il existe plusieurs représentations du modèle de Biot en fonction des variables ($\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{w}$, p) choisies pour décrire les mouvements. Toutes ces représentaions sont-elles équivalentes pour le type de problème traité au cours de ce travail ? ou bien existe-t-il une 'meilleure' représentation ?
Si on souhaite progresser dans la modélisation de l'ostéoporose et l'évaluation des dégats qu'elle cause, il semble souhaitable de développer un 'os modèle' construit un peu comme un mécano, à partir d'os réel et/ou de matériaux comme l'hydroxyapatite Enfin, l'analyse de la propagation d'ondes de Lamb dans des plaques poreuses saturées, à surfaces ouvertes ou fermées, serait certainement une source de renseignements sur l'intercation fluide-structure ou onde rapide-onde lente à l'intérieur du poreux.

Annexe A

5.6 Corrélations

Dans un milieu poreux inhomogène, tous les paramètres sont des variables aléatoires. Soit $X(\mathbf{r})$ un tel paramètre qu'on sépare en deux parties, d'une part sa valeur moyenne $\bar{X}$ et d'autre part sa partie fluctuante $\tilde{X}(\mathbf{r})$:

$$X(\mathbf{r}) = \bar{X} + \tilde{X}(\mathbf{r}), \tag{5.1}$$

qu'on pout encore écrire sous la forme

$$X(\mathbf{r}) = \bar{X}(1 + \epsilon_X(\mathbf{r})), \tag{5.2}$$

où $\epsilon_X(\mathbf{r}) = \tilde{X}(\mathbf{r})/\bar{X}$ représente la fluctuation relative. Si on note $< \cdot >$ la moyenne statistique, il est évident que, par définition, $< \tilde{X}(\mathbf{r}) >= 0$.

La corrélation spatiale de la variable aléatoire $X(\mathbf{r})$ est

$$C_{XX}(\mathbf{r}) =< X(\mathbf{r}' + \mathbf{r})X(\mathbf{r}') > . \tag{5.3}$$

L' intercorrélation spatiale des variables aléatoires $X(\mathbf{r})$ et $Y(\mathbf{r})$ est :

$$C_{XY}(\mathbf{r}) =< X(\mathbf{r}' + \mathbf{r})Y(\mathbf{r}') > . \tag{5.4}$$

La variance de la variable aléatoire $X(\mathbf{r})$ est :

$$C_{XX}(0) =< X(\mathbf{r})X(\mathbf{r}) >= \sigma_X^2. \tag{5.5}$$

Le coefficient d'intercorrélation des grandeurs X et Y est défini par :

$$R_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{5.6}$$

Annexe B

5.7 Tenseur de Green

Le tenseur de Green $G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ est l'opérateur inverse de L. Puisque l'opérateur L est un opérateur matriciel, $G^0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ vérifie l'équation :

$$LG^0 = I \tag{5.7}$$

où I est l'opérateur unité.
On trouve alors :

$$G^F_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\Big([k^2\delta_{ij}+\partial_i\partial_j]\frac{e^{ik_sR}}{R}-\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_pR}}{R}\Big)-\frac{C^2}{H^2}\frac{1}{4\pi q\omega^2}\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_{ps}R}}{R} \tag{5.8}$$

$$G^f_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{C}{H}\frac{1}{4\pi q\omega^2}\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_{ps}R}}{R} \tag{5.9}$$

$$G^w_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi q\omega^2}\partial_i\partial_j\frac{e^{ik_{ps}R}}{R} \tag{5.10}$$

où $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; k_p, k_s et k_{ps} sont les vecteurs d'onde des ondes de compression rapide, de cisaillement et de compression lente :

$$k_p=\omega\sqrt{\frac{\rho}{H}},\qquad k_s=\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\quad\text{et}\quad k_{ps}=\omega\sqrt{\frac{i\omega\eta}{\kappa_0 N}}=\omega\sqrt{\frac{q}{N}}. \tag{5.11}$$

Ici $N=MP_d/H$.

Les transformées de Fourier de ces opérateurs sont données par la définition :

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = \int g_{ij}(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{K}, \tag{5.12}$$

$$g_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int G_{ij}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{r}. \tag{5.13}$$

On trouve alors :

$$g^F_{ij}(\mathbf{K}) = -\frac{1}{8\pi^3\rho\omega^2}\Big(\frac{k_s^2\delta_{ij}-K_iK_j}{k_s^2-K^2}+\frac{K_iK_j}{k_p^2-K^2}\Big)-\frac{1}{8\pi^3}\frac{C^2}{H^2}\frac{1}{q\omega^2}\frac{K_iK_j}{k_{ps}^2-K^2} \tag{5.14}$$

$$g^f_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{C}{H}\frac{1}{8\pi^3 q\omega^2}\frac{K_iK_j}{k_{ps}^2-K^2} \tag{5.15}$$

$$g^w_{ij}(\mathbf{K}) = -\frac{1}{8\pi^3 q\omega^2}\frac{K_iK_j}{k_{ps}^2-K^2} \tag{5.16}$$

Annexe C

5.8 Caractéristiques des transducteurs

FIG. 5.24 – Caratéristiques des transducteurs utilisés pour les mesures

PANAMETRICS
221 Crescent St Waltham MA 02154
Tel: 800-225-8330, 617-899-2719
Fax: 617-899-1552

TRANSDUCER DESCRIPTION

PART NO.: V389 FREQUENCY: 0.50 MHz
SERIAL NO.: 209368 ELEMENT SIZE: 1.5 in. DIA.
DESIGNATION: NON-FOCUSED IMMERSION

TEST INSTRUMENTATION

PULSER/RECEIVER: PANAMETRICS 5052 UA #4
DIGITAL OSCILLOSCOPE: LECROY 9400 – V 2.06FT 3E0446
TEST PROGRAM: VER. 2.0 SETUP: DWG. #5978
CABLE: RG-58/U LENGTH: 4 FT.

TEST CONDITIONS

PULSER ENERGY: 1
PULSER DAMPING: 100 ohm
RECEIVER SETTING: 40 dB GAIN / 34dB ATTENUATION
TARGET: FRONT SURFACE OF 5.0 in. SILICA; WATER PATH 1.048 in

MEASUREMENTS PER ASTM E1065

WAVEFORM DURATION:
-14DB LEVEL -- 4.51US
-20DB LEVEL -- 4.93US
-40DB LEVEL -- 17.4US

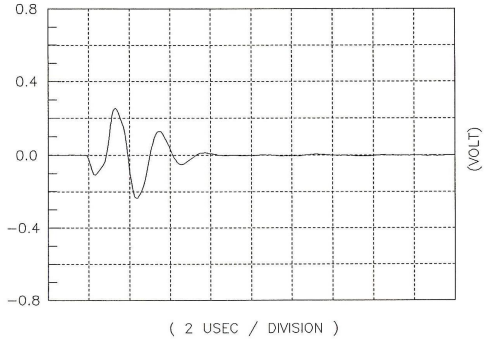
SPECTRUM MEASURANDS:
CENTER FREQ. ----- .457MHz
PEAK FREQUENCY -- .450MHz
-6DB BANDWIDTH -- 66.67 %

COMMENTS:

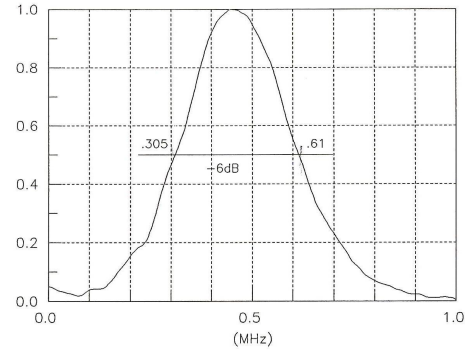
F 455
SOFRANEL
SOCIETE FRANÇAISE
D'ELECTROPHYSIQUE
59, Rue Parmentier
78500 SARTROUVILLE
** ACCEPTED

TECHNICIAN: (2) DATE: 08-16-95

SIGNAL WAVEFORM



FREQUENCY SPECTRUM



103-2 REV A 9/27/93 PREPARED BY P3-ENGINEERING

Bibliographie

[1] Y. Achdou and M. Avellaneda. Influence of pore roughness and pore-size dispersion in estimating the permeability of a porous medium from electrical measurements. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(12) :2651–2673, 1992.

[2] Y. Achdou and M. Avellaneda. Influence of pore roughness and pore-size dispersion in estimating the permeability of a porous medium from electrical measurements. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(12) :2651–2673, 1992.

[3] J.F. Allard, R. Bourdier, and A. L'Esperance. Anisotropy effect in glass wool on normal impedance in oblique incidence. *Journal of Sound and Vibration*, 114(2) :233 – 238, 1987.

[4] Keller J. B. Stochastic equations and wave propagation in random media. In *Proc.17th Symp. App.Math.XVI, American Mathematical Soc.*, pages 145–170, 1964.

[5] F. Belhocine, S. Derible, and H. Franklin. Transition term method for the analysis of the reflected and the transmitted acoustic signals from water-saturated porous plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(3) :1518–1526, 2007.

[6] Ferroudja Belhocine, Serge Derible, and Cole Franklin. Analysis of porous plate-slash water layered structures by means of the transition terms method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3141–3141, 2008.

[7] Leo L. Beranek. Acoustic impedance of porous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 13(3) :248–260, 1942.

[8] D.A. Bies and C.H. Hansen. Flow resistance information for acoustical design. *Applied Acoustics*, 13(5) :357 – 391, 1980.

[9] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :168–178, 1956.

[10] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :179–191, 1956.

[11] M. A. Biot. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(9A) :1254–1264, 1962.

[12] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33(4) :1482–1498, 1962.

[13] M. A. Biot and D.G. Willis. The elastic coefficients of the theory of consalidation. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :594, 1957.

[14] Guy Bonnet. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 82(5) :1758–1762, 1987.

[15] C. Boutins. Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media. *Geophys. J. R. astr.Soc.*, 90 :521–550, 1987.

[16] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.

[17] R. Burridge and C. Vargas. The fondamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophys. J. R. astr.Soc.*, 58 :61–90, 1979.

[18] Fellah Z.E.A. Depollier C. Transient acoustic wave propagation in rigid porous media : A time-domain approach. *Journal of Acoustical Society of America*, 107, 2000.

[19] C. Cabrol. *Anatomie I : Appareil locomoteur*. Flammarion, 1995.

[20] Yvan Champoux and Jean-F. Allard. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 70(4) :1975–1979, 1991.

[21] Yvan Champoux, Michael R. Stinson, and Gilles A. Daigle. Air-based system for the measurement of porosity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2) :910–916, 1991.

[22] S. Cowin. *Bone mechanics handbook*. CRC Press, Boca Raton, 2001.

[23] Stephen C. Cowin. Bone poroelasticity. *Journal of Biomechanics*, 32(3) :217 – 238, 1999.

[24] Zwikker C. & Kosten C.W. *Sound Absorbing Materials*. New York, 1949.

[25] H.P.G. Darcy. *Les fontaines de la ville de Paris*. Dalmont, Pparis.

[26] Olivier Dazel, Jean François Allard, Laurens Boeckx, Nathalie Geebelen, Poonam Khurana, and Walter Lauriks. Anisotropy effects on the acoustical properties of porous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3035–3035, 2008.

[27] M.E. Delany and E.N. Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3(2) :105 – 116, 1970.

[28] Claude Depollier, Jean F. Allard, and Walter Lauriks. Biot theory and stress–strain equations in porous sound-absorbing materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 84(6) :2277–2279, 1988.

[29] Claude Depollier, Naima Sebaa, Mouna Naas, Bernard R. Castagnede, Zine Fellah, and Walter Lauriks. Flow resistivity profile inversion for a porous medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3283–3283, 2008.

[30] Serge Derible. Debye-series analysis of the transmission coefficient of a water-saturated porous plate obeying biot's theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(6) :3430–3435, 2005.

[31] J. Duncan. Laboratory note : On tensile strengh of fresh adult foetus. *Brit.Ded*, 1874.

[32] L. Landau et E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*. Mir, Moscou, 1971.

[33] Z. E. A. Fellah, M. Fellah, F. G. Mitri, N. Sebaa, W. Lauriks, and C. Depollier. Transient acoustic wave propagation in air-saturated porous media at low frequencies. *Journal of Applied Physics*, 102(8) :084906, 2007.

[34] Serge Derible Ferroudja Belhocine and Hervé Franklin. Caractérisation expérimentale d'une plaque poreuse obéissant a la théorie de biot par la méthode des termes de transistion. *18 eme Congrès Français de Mécanique, Grenoble 27-31 août 2007*, 2008.

[35] K. Firoozbakhsh and S. C. Cowin. Devolution of inhomogeneities in bone structure—predictions of adaptive elasticity theory. *Journal of Biomechanical Engineering*, 102(4) :287–293, 1980.

[36] Tobias Muller Florian Karpfinger and Boris Gurevich. Green's functions and radiation patterns in poroelastic solids revisited. *Geophys.J. Int.*, 178(2) :327–337, 2009.

[37] Jr. Frank C. Karal and Joseph B. Keller. Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(6) :694–705, 1959.

[38] F. Gassmann. Elastic waves through a packing of spheres. *Geophysics*, 16 :673–685, 1951.

[39] Boris Gurevich, Ada P. Sadovnichaja, Serge L. Lopatnikov, and Serge A. Shapiro. The born approximation in the problem of elastic wave scattering by a spherical inhomogeneity in a fluid-saturated porous medium. *Applied Physics Letters*, 61(11) :1275–1277, 1992.

[40] T.J. Haire and C.M. Langton. "biot theory : a review of its application to ultra sound propagation throough cancellous bone. *Bone*, 24 :291–295, 1999.

[41] M. Henry. Mesures des paramètres caratérisant un milieu poreux. etude expérimentale du comportement acoustique des mousses aux basses fréquences. *Thèse Université du Maine*, 1997.

[42] Johnson D.L. Koplik J. and Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *J. Fluid Mech*, 176 :379–402, 1987.

[43] Tony M. Keaveny and Wilson C. Hayes. A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone. *Journal of Biomechanical Engineering*, 115(4B) :534–542, 1993.

[44] Sergio Kostek, Lawrence M. Schwartz, and David Linton Johnson. Fluid permeability in porous media : Comparison of electrical estimates with hydrodynamical calculations. *Phys. Rev. B*, 45(1) :186–195, Jan 1992.

[45] V. Kupradze. *Three dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland, Amsterdam, 1979.

[46] D. Lafarge. Propagation des sons dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique. *Thèse Université du Maine*, 1993.

[47] Denis Lafarge, Pavel Lemarinier, Jean F. Allard, and Viggo Tarnow. Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4) :1995–2006, 1997.

[48] Roderic Lakes, Hyo Sub Yoon, and J. Lawrence Katz. Ultrasonic wave propagation and attenuation in wet bone. *Journal of Biomedical Engineering*, 8(2) :143 – 148, 1986.

[49] C.M. Langton and C. Njeh. The measurement of broadband ultrasonic attenuation in cancellous bone. a review of the science and technology. *IEEE Trans. on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, 55 :1546–1554, 2008.

[50] R. W. Leonard. Simplified porosity measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 20(1) :39–41, 1948.

[51] Francine Luppé, Jean-Marc Conoir, and Hervé Franklin. Scattering by a fluid cylinder in a porous medium : Application to trabecular bone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(6) :2573–2582, 2002.

[52] Ph. M. Morse and K.U. Ingard. *Theretical acoustics*. Princeton University Press, Princeton, 1968.

[53] M. Muller. Evaluation ultrasonore de los cortical par des mthodes dacoustique linaire et non linaire. application lvaluation du microendommagement osseux. *Thèse Université Paris VIII*, 2006.

[54] Mouna Naas, Naima Sebaa, Zine Fellah, Mohamed Fellah, Walter Lauriks, and Claude Depollier. Excess ultrasonic attenuation due to inhomogeneities in porous media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5) :3639–3639, 2008.

[55] Andrew Norris. Dynamic green's function in anisotropic piezoelectric thermoelastic and poroelastic solids. *Proc R. Soc. Lond.*, 447 :175–188, 1994.

[56] Andrew N. Norris. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(6) :2012–2023, 1985.

[57] Sheng Ping. *Introduction to Wave Scattering Localization, and Mesoscopic Phenomena*. Academic Press, Inc, London, 1995.

[58] Steven R. Pride and Matthijs W. Haartsen. Electroseismic wave properties. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(3) :1301–1315, 1996.

[59] Steven R. Pride, Frank Dale Morgan, and Anthony F. Gangi. Drag forces of porous-medium acoustics. *Phys. Rev. B*, 47(9) :4964–4978, Mar 1993.

[60] Patrick N. J. Rasolofosaon. Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media. *Applied Physics Letters*, 52(10) :780–782, 1988.

[61] G. Renaud. Mesure de non-linéarités élastiques et dissipatives par interaction d'ondes acoustiques :application à la quantification du microendommagement de l'os trabéculaire. *Thèse Université du Tours*, 2008.

[62] Subrata Saha and Roderic S. Lakes. The effect of soft tissue on wavepropagation and vibration tests for determining the in vivo properties of bone. *Journal of Biomechanics*, 10(7) :393 – 401, 1977.

[63] Theo H. Smit, Jacques M. Huyghe, and Stephen C. Cowin. Estimation of the poroelastic parameters of cortical bone. *Journal of Biomechanics*, 35(6) :829 – 835, 2002.

[64] O. Coussy T. Bourbié and B. Zinszner. *Acoustics of porous media*. Technip, 1987.

[65] S. Torquato. Relationship between permeability and diffusion-controlled trapping constant of porous media. *Phys. Rev. Lett.*, 64(22) :2644–2646, May 1990.

[66] Fellah Z.E.A. Wirgin A. Fellah M. Sebaa N. Depollier C. Lauriks W. A time-domain model of transient acoustic wave propagation in double-layered porous media. *Journal of Acoustical Society of America*, 118(2), 2005.

[67] I. Van Asbroeck G. Lowet W. lauriks, J. Thoen and G. Van Der Perre. Propagation of ultrasonic pulses through trabecular bone. *J. Phys IV (France)*, pages 1255–1258, 1994.

[68] Tokuo Yamamoto and Altan Turgut. Acoustic wave propagation through porous media with a rbitrary pore size distributions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(5) :1744–1751, 1988.