

N° d'ordre : 4121

# THÈSE

PRÉSENTÉE À

## L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET  
D'INFORMATIQUE

Par **Christelle WERVAECKE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

---

### Simulation d'écoulements turbulents compressibles par une méthode d'éléments finis stabilisés

---

**Soutenue le :** 9 décembre 2010

**Après avis des rapporteurs :**

M. Bruno Koobus Professeur, Université Montpellier II  
M. Jean-Christophe Jouhaud Chercheur, CERFACS

**Devant la commission d'examen composée de :**

M.	Pierre CHARRIER	Professeur Emérite	U. Bordeaux I	Président
M.	Rémi ABGRALL	Professeur	U. Bordeaux I	Examinateur
M.	Mario RICCHIUTO	Chargé de recherche	INRIA	Examinateur
M.	Fabien DEZITTER	Ingénieur	Airbus	Examinateur
M.	Bruno KOOBUS	Professeur	U. Montpellier II	Rapporteur
M.	Jean-Christophe JOUHAUD	Chercheur	CERFACS	Rapporteur
M.	Boniface NKONGA	Professeur	U. Nice	Directeur de thèse
Mlle	Héloïse BEAUGENDRE	Maître de conférence	U. Bordeaux I	Directrice de thèse



# Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe BACCHUS de l'INRIA Bordeaux Sud-Ouest. Je garderai un excellent souvenir de mon passage dans cette équipe.

J'aimerais exprimer mes remerciements à MM. Jean-Christophe Jouhaud et Bruno Koobus, rapporteurs de cette thèse, pour leurs remarques pertinentes lors de la relecture de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement Héloïse Beaugendre. Un grand merci pour sa disponibilité, sa bonne humeur et son sérieux. Merci de m'avoir soutenue dans les moments de doute et pour avoir cru en moi (peut-être bien plus que moi par moment!).

J'adresse toute ma reconnaissance à Boniface Nkonga pour m'avoir proposée ce sujet de thèse et encadrée pendant ces trois années. Ses conseils et ses connaissances ont permis l'aboutissement de ces travaux.

Je remercie Rémi Abgrall, dont j'admire beaucoup le travail, pour avoir toujours été disponible pour répondre à mes questions. Merci pour ses conseils avisés.

Merci à Fabien Dezitter de nous avoir fait confiance et d'avoir permis une fructueuse collaboration entre l'INRIA et Airbus.

Je tiens à remercier Pierre Charrier d'avoir accepté d'être le président de mon jury de thèse. C'est en suivant ses cours d'analyse numérique que j'ai pris goût pour le calcul scientifique.

J'aimerais également adresser un grand merci à Josy Baron qui m'a facilitée bien des démarches administratives et m'a toujours accueilli avec le sourire.

Je tiens enfin à remercier les amis, thésards ou non, qui m'ont aidé au cours de ces trois années. Merci à Nico, Adam, Xavier, Algiane, Pascal, Robin, Stéphane, Damien, Cédric, Arnaud et à toutes les personnes que j'ai côtoyées.

Merci à Virginie pour avoir su me redonner le sourire dans la délicate période de l'avant soutenance.

Merci à Adeline pour son soutien. Même si pour elle mes travaux de thèse consistent à écrire des formules mathématiques compliquées et que mes illustrations se transforment en chiens ou

en paons, elle a toujours été là pour me remonter le moral dans les moments difficiles.

Merci à Mathieu, pour sa joie de vivre et son franc-parler. Merci d'être toujours disponible pour aider les incultes de l'informatique, et merci pour sa fondue savoyarde.

Merci à Guillaume pour son aide au quotidien, pour les discussions scientifiques et pour la relecture de mon mémoire. Merci pour son grain de folie, pour le calcul des jacobiniennes et pour la découverte des saboteurs.

Merci à Carole pour sa gentillesse, son sourire et sa bonne humeur. Merci d'être venue à ma soutenance, même sans rien y comprendre, et merci pour ses mini-madeleines!

Je tiens également à remercier ma famille qui m'a toujours soutenue et encouragée. Merci d'avoir fait le déplacement pour assister à ma soutenance.

Je terminerais ces remerciements par la personne qui, sans vraiment en être conscient, a énormément contribué à la réussite de ce travail : merci à Hugues. Merci pour sa présence et sa patience, pour avoir su écouter mes doutes et mes inquiétudes à propos de travaux qu'il ne comprenait sans doute pas. Merci pour avoir relu consciencieusement mon mémoire et merci pour tout le reste...

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Turbulence et modélisation des écoulements turbulents</b>	<b>13</b>
<b>1 Les équations de Navier-Stokes moyennées</b>	<b>15</b>
1.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles . . . . .	16
1.1.1 Equations de conservation . . . . .	16
1.1.2 Lois de comportement . . . . .	16
1.1.3 Lois d'état . . . . .	17
1.2 L'opérateur de moyenne . . . . .	18
1.2.1 La moyenne de Reynolds . . . . .	18
1.2.2 La moyenne de Favre . . . . .	19
1.3 Les équations moyennées . . . . .	20
1.3.1 Equation de conservation de la masse . . . . .	20
1.3.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	20
1.3.3 Equation de conservation de l'énergie . . . . .	21
1.3.4 Hypothèse de Boussinesq . . . . .	23
<b>2 Le modèle de Spalart-Allmaras</b>	<b>25</b>
2.1 Motivations . . . . .	25
2.2 Construction du modèle . . . . .	26
2.2.1 Le terme de diffusion . . . . .	26
2.2.2 Le terme de production . . . . .	27
2.2.3 Le terme de destruction . . . . .	27
2.2.4 Calibrage du modèle . . . . .	27
2.3 Couche limite turbulente . . . . .	28
2.4 Forme incompressible . . . . .	29
2.5 Forme compressible . . . . .	31

<b>II</b>	<b>Méthode numérique : le schéma SUPG</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>L'équation d'advection-diffusion</b>	<b>35</b>
3.1	Description du problème . . . . .	35
3.2	Discrétisation de Galerkin standard . . . . .	36
3.2.1	Discrétisation spatiale . . . . .	36
3.2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	37
3.3	Advection pure 1D . . . . .	37
3.3.1	La méthode de Galerkin . . . . .	38
3.3.2	La méthode SUPG . . . . .	38
3.3.3	Condensation de la matrice de masse . . . . .	39
3.3.4	Analyse de l'erreur de troncature . . . . .	40
3.4	Approche multi-D . . . . .	42
3.5	Résultats numériques . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Généralisation de la méthode SUPG aux systèmes d'équations</b>	<b>47</b>
4.1	Description du problème . . . . .	47
4.2	Les éléments finis classiques . . . . .	48
4.2.1	Formulation faible . . . . .	48
4.3	Imposition des conditions aux limites . . . . .	51
4.4	La formulation SUPG . . . . .	53
4.4.1	Formulation faible . . . . .	53
4.4.2	Le paramètre de stabilisation . . . . .	54
4.4.3	Capture de choc . . . . .	55
4.4.4	Résultats numériques . . . . .	59
4.5	Conclusion . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Parallélisation du code de calcul</b>	<b>71</b>
5.1	Principe . . . . .	71
5.2	Décomposition du domaine et recouvrement . . . . .	71
5.3	Accélération . . . . .	72
5.4	Exemple pour le NACA0012 subsonique . . . . .	73
5.5	Conclusion . . . . .	74
<b>III</b>	<b>Simulation d'écoulements turbulents</b>	<b>77</b>
<b>6</b>	<b>Méthodes numériques pour le problème turbulent</b>	<b>79</b>
6.1	Le système d'équations . . . . .	79
6.2	Forme vectorielle des équations . . . . .	80
6.3	Formulation SUPG . . . . .	81
6.3.1	Le problème variationnel . . . . .	81
6.3.2	Les conditions aux limites . . . . .	82

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	iii
6.4 Formulation mixte volumes finis/éléments finis . . . . .	83
<b>7 Résultats numériques</b>	<b>87</b>
7.1 Écoulement sur une plaque plane . . . . .	87
7.1.1 Lois théoriques . . . . .	88
7.1.2 Résultats numériques . . . . .	89
7.2 Recirculation derrière une marche descendante . . . . .	91
7.3 Écoulement turbulent autour d'un profil de NACA0012 . . . . .	96
7.4 Écoulement turbulent transsonique autour d'un profil de RAE2822 . . . . .	101
7.5 Écoulement transsonique non visqueux 3D autour d'une aile M6 . . . . .	103
7.6 Écoulement turbulent 3D sur une plaque plane . . . . .	106
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>109</b>
<b>IV Annexe</b>	<b>113</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>



# Introduction

## Modélisation de la turbulence

### Bref historique

Léonard de Vinci (1452–1519) fut le premier à étudier précisément la formation de tourbillons dans un fluide qui s'écoule autour d'un obstacle, phénomène auquel il donna son nom actuel de *turbulence*. Fidèle à son habitude, il n'en chercha pas d'explication théorique mais en donna d'excellentes descriptions et des dessins d'une grande finesse (Fig. 1).

Il faudra attendre les travaux de l'ingénieur irlandais Osborne Reynolds (1842-1912) et ses études expérimentales en 1883 [1], pour que la compréhension de la turbulence progresse. Après avoir étudié systématiquement l'écoulement de différents fluides dans des tuyaux, il établit une règle pour prédire si un écoulement sera *laminaire* (toutes les parties du fluide se déplacent dans la même direction) ou *turbulent* (avec des tourbillons dans lesquels la direction du mouvement change sans cesse). En combinant la vitesse de l'écoulement, la dimension des obstacles qui le limitent et une propriété du fluide appelée *viscosité cinématique* qui mesure sa résistance au mouvement, Reynolds définit un nombre caractéristique de l'écoulement : si le nombre de Reynolds est petit, l'écoulement sera laminaire, si le nombre est grand, il sera turbulent.

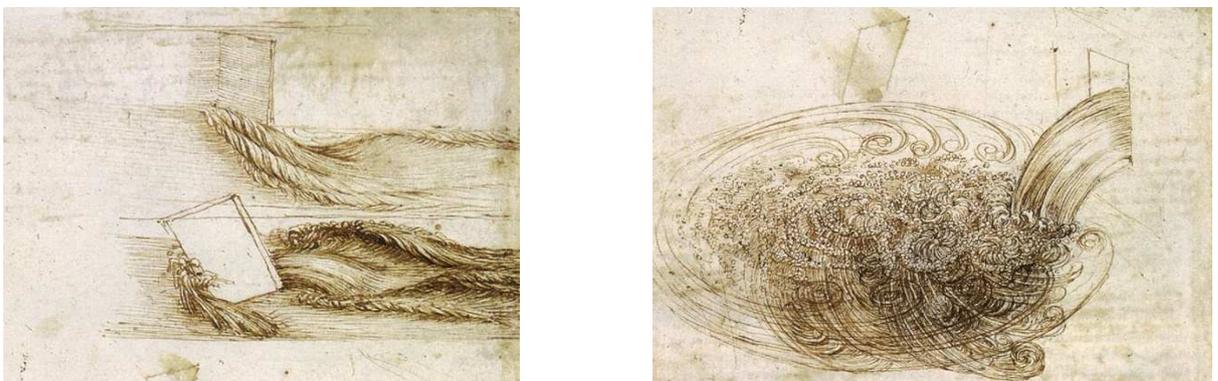


FIG. 1: Etudes de Léonard de Vinci sur les écoulements turbulents.

Une étape importante est franchie en 1941 par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903-1987). Celui-ci ne se contente plus de décrire globalement un écoulement turbulent mais s'intéresse aux caractéristiques des différents tourbillons qui le composent, comme leur taille et

leur énergie. Sa théorie explique assez bien comment les plus gros tourbillons se divisent en plus petits, qui se divisent à leur tour et ainsi de suite, et comment leur vitesse évolue au cours de cette *cascade turbulente*.

Malgré ces avancées successives, la turbulence garde encore aujourd'hui une grande partie de son mystère. Si les physiciens en comprennent les principes généraux, ils sont bien incapables de prédire dans le détail où et quand un tourbillon va se former. Même la théorie de Kolmogorov est remise en question. Les chercheurs ont ainsi montré que, contrairement à ce que prévoyait Kolmogorov, les gros tourbillons peuvent transmettre leur énergie directement aux petits sans passer par toutes les étapes de la cascade. Il reste donc maintenant à comprendre comment.

Les moyens d'étude de la turbulence sont divers. Il y a d'abord les méthodes expérimentales dans lesquelles d'importants progrès ont été faits depuis les premières expériences d'Osborne Reynolds. On dispose à présent d'outils particulièrement perfectionnés (anémomètre laser à effet Doppler, vélocimètre par image de particules, ...) qui permettent d'obtenir des informations sur les paramètres physiques de l'écoulement (vitesse, gradient de vitesse, pression, ...). On peut également évoquer l'analyse statistique qui a permis une meilleure compréhension de l'organisation des différentes structures dans ce genre d'écoulement. Et enfin, depuis environ 30 ans, la simulation numérique rend accessible des données en tout point de l'écoulement, ce qui n'est pas possible à mettre en oeuvre expérimentalement.

## Description d'un écoulement turbulent

Bien que la turbulence soit un phénomène omniprésent dans la nature, il est difficile d'en donner une définition précise. On dit d'un écoulement qu'il est turbulent lorsqu'il suit un mouvement irrégulier et chaotique. Il est caractérisé par des variations rapides irrégulières et aléatoires des différentes grandeurs physiques. Aussi, les mélanges y sont importants et bien plus rapides que pour un écoulement laminaire. Un écoulement turbulent présente des structures 3D, il est rotationnel, et son nombre de Reynolds est grand. A noter également que ce type d'écoulement dissipe l'énergie, que les échelles mises en jeu ne sont pas celles des échanges moléculaires et, par conséquent, que le cadre de la mécanique des milieux continus reste valable. Enfin les caractéristiques sont les mêmes pour tous les fluides (gaz ou liquides). La turbulence n'est donc pas une propriété du fluide mais seulement un régime particulier.

La plus célèbre théorie concernant la turbulence est sans doute celle de Kolmogorov. Il a émis l'hypothèse que l'énergie cinétique des structures turbulentes devait se transférer du plus gros tourbillon vers le plus petit, jusqu'à arriver à une échelle de taille tellement petite que la turbulence cesse et que l'énergie est évacuée sous forme de chaleur. C'est ce qu'on appelle la cascade turbulente (Fig 2) : des gros tourbillons de la taille de l'objet se fragmentent en plus petits qui se divisent à leur tour, etc. De cette façon, Kolmogorov a réussi à prévoir comment évoluait la vitesse des tourbillons en fonction de leur taille. Il faut noter que cette hypothèse avait été proposée par Richardson en 1922 : *“Les gros tourbillons ont de petits tourbillons, qui se nourrissent de leur vitesse, et les petits tourbillons en ont de plus petits, et c'est ainsi jusqu'à la viscosité.”*

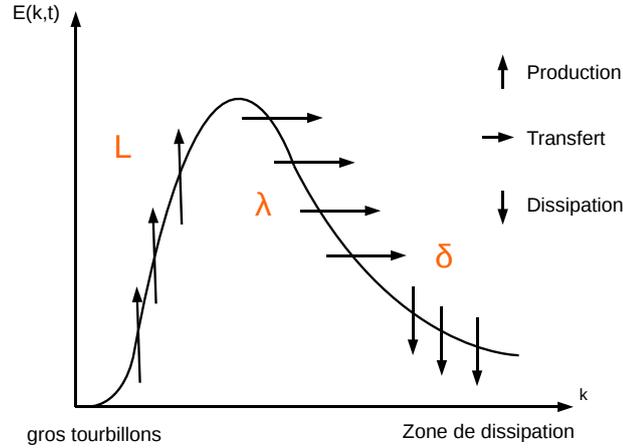


FIG. 2: Cascade de Kolmogorov

Kolmogorov introduit une longueur  $\delta$ , appelée échelle de Kolmogorov qui est l'échelle spatiale à partir de laquelle l'écoulement devient visqueux ( $Re=1$ ) et permet de dissiper l'énergie cinétique de l'écoulement. Si on note  $L$  la taille du plus grand tourbillon présent dans l'écoulement, on peut montrer que :

$$\frac{\delta}{L} \approx Re^{-3/4} \quad (1)$$

## Les différentes techniques de modélisation

Dans le domaine de la simulation d'écoulements turbulents, trois types d'approche se distinguent : la simulation numérique directe, la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées et la simulation des grandes échelles. Chacune de ces méthodes présente des avantages et des défauts. L'objectif est d'atteindre un compromis entre le coût de la simulation et la précision de la solution.

### Direct Numerical Simulation

Egalement appelée *Simulation Numérique Directe*, la méthode DNS (*Direct Numerical Simulation*) consiste à résoudre les équations de la mécanique des fluides sans apporter d'approximation supplémentaire. Autrement dit, l'évolution de tous les tourbillons présents dans l'écoulement provient de la résolution des équations de Navier-Stokes. Il s'agit donc de la méthode la plus précise, puisqu'elle ne s'appuie sur aucune simplification du modèle physique. Cependant cela implique l'utilisation d'un maillage dont la taille des mailles est proportionnelle à l'échelle de Kolmogorov  $\delta$ , et cela peut devenir rapidement très couteux. Pour un écoulement 3D, si le domaine de calcul a une taille  $L$ , le nombre de noeuds du maillage sera donc de l'ordre de  $N_x N_y N_z \sim (L/\delta)^3 \sim Re^{9/4}$ . Or, la puissance actuelle des ordinateurs ne permet pas d'effectuer des calculs, pour des nombres de Reynolds élevés, en un temps raisonnable. Si on fait l'hypothèse que l'augmentation de la puissance des ordinateurs continuera à suivre le même

rythme que durant les dernières décennies, une utilisation industrielle de la DNS d'écoulements à très haut Reynolds (de type voiture ou avion) ne sera pas accessible avant la fin du 21<sup>e</sup> siècle. Le tableau (1), tiré de Spalart (1999) [2], donne une évaluation de la disponibilité des différentes méthodes pour des applications industrielles de type aérodynamique externe.

Stratégie	Dépendance de Re	Maillage	Pas de temps	Disponible en
RANS	faible	$10^7$	$10^3$	1985
LES	faible	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	fort	$10^{16}$	$10^{7.7}$	2080

TAB. 1: Evaluation des stratégies de calcul et de leur disponibilité pour des applications industrielles coûteuses. D'après Spalart (1999) [2]

Dans ce contexte, il est indispensable de recourir à des méthodes moins coûteuses en temps de simulation et en espace de stockage. Aussi, des modèles qui permettent de résoudre une partie des échelles présentes dans un écoulement turbulents tout en modélisant les autres ont été développés. On distingue généralement deux grandes catégories : les méthodes RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation*) où toutes les échelles de la turbulence sont modélisées, et les méthodes LES (*Large Eddy Simulation*) où une partie des échelles est résolue alors que l'autre est modélisée. Ces méthodes sont évidemment moins précises que la simulation numérique directe, mais elles permettent de traiter des cas d'étude industriels de façon simple et dans des délais acceptables.

### Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation

L'approche numérique la plus communément employée dans l'industrie reste la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (RANS pour Reynolds Averaged Navier-Stokes). Cette méthode consiste à supposer que les grandeurs instantanées sont des variables aléatoires : on suppose que l'écoulement a un comportement aléatoire, alors que les équations de Navier-Stokes sont manifestement déterministes. C'est le caractère chaotique du système qui permet de faire cette hypothèse. Le caractère déterministe de la turbulence n'est pas pris en compte : notamment, la présence de structures cohérentes (tourbillons à grande échelle) qui peut jouer un rôle important dans l'écoulement.

Cette description statistique d'un écoulement turbulent a été introduit pour la première fois par Osborne Reynolds au XIX<sup>eme</sup> siècle. Il proposait de décomposer les grandeurs instantanées en grandeurs moyennes et en fluctuations autour de ces moyennes. Cette méthode a donc hérité du nom de *décomposition de Reynolds*. Si cette décomposition est introduite dans les équations de Navier-Stokes et que ces équations sont ensuite moyennées, on obtient ce qu'on appelle couramment *les équations de Reynolds moyennées*. Lorsqu'on prend la moyenne du terme d'advection, dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, de nouveaux termes apparaissent. Ils constituent le terme du *tenseur de Reynolds*. Ce tenseur joue un rôle particulièrement important dans les équations de l'écoulement moyen puisqu'il décrit l'effet des fluctuations turbulentes

sur le champ moyen. Avec l'apparition de ce terme, le système d'équations de Reynolds moyennées contient plus d'inconnues que d'équations. Il faut donc fermer le système. Pour résoudre ce problème de fermeture, un grand nombre de modèles a été proposé. Néanmoins, un modèle unique qui serait optimal quelque soit le type d'écoulement n'existe toujours pas.

## Simulation des grandes échelles

Une alternative intéressante à la simulation numérique directe réside dans la simulation des grandes échelles (plus communément appelée LES pour Large Eddy Simulation). Lorsque la méthode RANS est appliquée, toutes les échelles de la turbulence doivent être approximées de manière appropriée par un modèle de turbulence. Or, les propriétés des grandes échelles sont particulièrement difficiles à modéliser. A l'opposé, pour une simulation de type DNS, toutes les échelles sont connues grâce à la solution des équations de Navier-Stokes. Cependant, le spectre des échelles de la turbulence augmente très vite avec le nombre de Reynolds, ce qui limite l'utilisation de cette méthode. La simulation des grandes échelles peut être considérée comme un compromis entre les simulations DNS et RANS. En effet, les grandes échelles sont résolues de manière directe alors que les petites échelles sont modélisées. La part de modélisation dans une simulation LES est donc restreinte aux petites échelles de la turbulence dont les propriétés sont bien plus simples à décrire. La simulation des grandes échelles est donc une méthode prometteuse quant à la modélisation d'écoulements turbulents. Néanmoins, pour des applications industrielles, son coût est encore bien souvent trop important pour qu'elle soit envisagée. (Tableau 1).

## Les méthodes hybrides

Pour simuler numériquement un écoulement turbulent, plusieurs approches sont possibles. En terme de coût, seules les méthodes RANS et LES sont envisageables dans le contexte d'études industrielles. D'une part, les modèles de type RANS sont considérés comme étant les plus efficaces mais ils ne sont pas adaptés aux écoulements massivement séparés. D'autre part, les simulations LES offrent l'avantage de résoudre les équations physiques sans faire d'approximation sur les structures dominantes et instationnaires de l'écoulement. Elles sont en revanche trop coûteuses pour être appliquées à des configurations entières (de type avion, sous-marin ou encore voiture), à cause du très grand nombre de mailles exigé dans les couches limites.

Au cours des cinq dernières années, des méthodes dites *hybrides* sont devenues très populaires pour la simulation d'écoulements complexes. En effet, les méthodes hybrides combinent les techniques RANS et LES dans le but de tirer avantage des atouts de chacune d'elle, c'est à dire l'application du modèle RANS pour la prédiction d'une couche limite attachée et celle du modèle LES pour les grandes échelles instationnaires tridimensionnelles. Aussi ces méthodes hybrides sont bien moins coûteuses que les simulations LES puisque la méthode LES n'est pas utilisée pour résoudre les nombreuses petites structures présentes dans la couche limite. L'une des méthodes hybrides RANS-LES la plus connue aujourd'hui est sans doute la méthode appelée Detached-Eddy Simulation (DES). Cette technique a été présentée par Spalart et ses co-auteurs en 1997 dans [3], comme une approche raisonnable pour la simulation d'écoulements turbulents

massivement détachés.

## La simulation numérique

### Motivation

La simulation numérique est un outil prometteur quant à la compréhension de la physique de la turbulence. Elle permet, par exemple, l'obtention d'informations en tout point de l'espace, ce qui n'est pas concevable expérimentalement. De plus, l'augmentation constante de la puissance des machines de calcul permet d'envisager la simulation de géométries de plus en plus complexes avec des solutions de plus en plus complexes. Cependant, il ne suffit pas de disposer d'un ordinateur puissant pour obtenir des informations pertinentes au sujet d'un écoulement turbulent. Il faut également un schéma numérique disposant de bonnes propriétés. Les premières propriétés indispensables sont la *stabilité* et la *consistance*.

**Stabilité** : la *stabilité* d'un schéma traduit sa faculté à adopter un comportement régulier lors de l'introduction de toute perturbation due, par exemple, au mauvais calcul d'une condition limite ou d'une condition initiale. Un schéma est dit stable si toute perturbation d'origine numérique est amortie ou, au mieux, non amplifiée. Il sera dit instable si au contraire toute perturbation, aussi minime soit elle, est amplifiée au cours du temps ou dans l'espace.

**Consistance** : un schéma numérique est dit *consistant*, si et seulement si, la formulation discrétisée des équations aux dérivées partielles tend vers la formulation continue, lorsque tous les pas de discrétisation ( $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ) tendent vers 0.

Outre sa stabilité et sa consistance, la précision d'un schéma numérique est également une propriété primordiale. Il s'agit de la distance mathématique de la solution numérique à la solution exacte. Il est bien connu que cette quantité est souvent de l'ordre d'une puissance de la taille caractéristique du maillage utilisé. Cette puissance est appelé ordre de la méthode. C'est alors, également, une mesure de la vitesse de convergence de la méthode.

### Aperçu des principales méthodes numériques

Les méthodes numériques les plus utilisées pour l'approximation de solutions d'écoulements compressibles sont brièvement présentées dans ce qui suit.

### Volumes finis

Les méthodes volumes finis font sans doute partie des méthodes les plus connues et les mieux documentées [4]. Cela s'explique par le fait que la plupart des codes de calcul industriels de mécanique des fluides ont été construits à partir de ces méthodes. Contrairement aux méthodes Galerkin discontinu et éléments finis, certaines méthodes volumes finis sont basées sur une approximation nommée *vertex-centered*. Cela signifie qu'à chaque noeud, est associée une petite surface de son voisinage : il s'agit de la cellule de contrôle ou cellule duale. Un noeud interagit avec ses voisins au travers des frontières de cette cellule. En dimension 2 ou 3, la plupart des

schémas volumes finis sont construits de façon à travailler dans une direction particulière du maillage. Cela influe de façon très négative sur la précision de la méthode pour des maillages non réguliers. De plus, la mise en oeuvre de formulations d'ordre élevé nécessite la reconstruction locale de polynôme d'ordre approprié. Cela est effectué en considérant un nombre adéquat de voisins, et permet de définir de façon unique ce polynôme. Pour une approximation d'ordre très élevé, il est donc nécessaire de connaître les noeuds appartenant au voisinage du noeud considéré, puis le voisinage de ces noeuds et ainsi de suite. Cela rend le schéma non compact et donc moins efficace une fois parallélisé. Même si il y a eu des tentatives pour construire des méthodes volumes finis vraiment multidimensionnelles [5, 6] et pour améliorer leur précision sur des maillages non structurés [7, 8], les faiblesses de telles méthodes persistent. Ces problèmes ne sont pas résolus par l'emploi de méthodes de type ENO/WENO [9] qui sont basées sur une reconstruction polynomiale plus complexe et par conséquent rendent également difficile une parallélisation efficace du code numérique.

### **Galerkin discontinu**

Comme leur nom le laisse entendre, les méthodes de Galerkin discontinu sont basées sur la théorie des éléments finis de Galerkin à la différence près qu'elles autorisent la solution numérique à être discontinue [10]. Chaque élément du maillage possède donc ses propres degrés de liberté et ne les partage pas avec d'autres. Les interactions entre éléments sont modélisées par des flux numériques qui sont souvent construits sur la base des solveurs de Riemann et qui peuvent parfois être complexes. C'est aujourd'hui une famille de méthodes numériques très populaire et prometteuse. Leur principal intérêt est la généralisation facile et compacte des méthodes à des formulations d'ordre élevé. Cela est dû au fait que la représentation polynomiale d'ordre élevé de la solution n'est pas reconstruite mais définie sur chaque élément du maillage. D'intéressants résultats ont déjà été publiés [11, 12].

Néanmoins, le coût de l'approche discontinue est particulièrement élevé. Les degrés de liberté nécessaires pour un calcul éléments finis et pour un calcul de Galerkin discontinu sont présentés figure (3). Il est clair que la discrétisation de Galerkin discontinu demande beaucoup plus de degrés de liberté. Pour être plus précis, un maillage composé d'un nombre  $n$  de sommets est considéré. En 2D, si la solution est approchée par un polynôme de degré  $k$ , le nombre de degrés de liberté nécessaire à un calcul de Galerkin discontinu est approximativement de l'ordre de  $(k + 1)(k + 2)n$  alors qu'il en faut  $k^2n$  pour un calcul éléments finis. Par exemple, pour obtenir une solution précise à l'ordre 4, la méthode de Galerkin discontinu sera 3 à 4 fois plus coûteuse que la méthode éléments finis.

### **Elements finis stabilisés**

Initialement conçus pour traiter des problèmes symétriques et coercifs, comme cela est le cas en mécanique des milieux déformables, les éléments finis ont été rapidement employés en dehors de ce contexte pour résoudre des problèmes de la mécanique des fluides. Ils présentent l'avantage d'être moins coûteux que les méthodes de Galerkin discontinu et sont plus efficaces

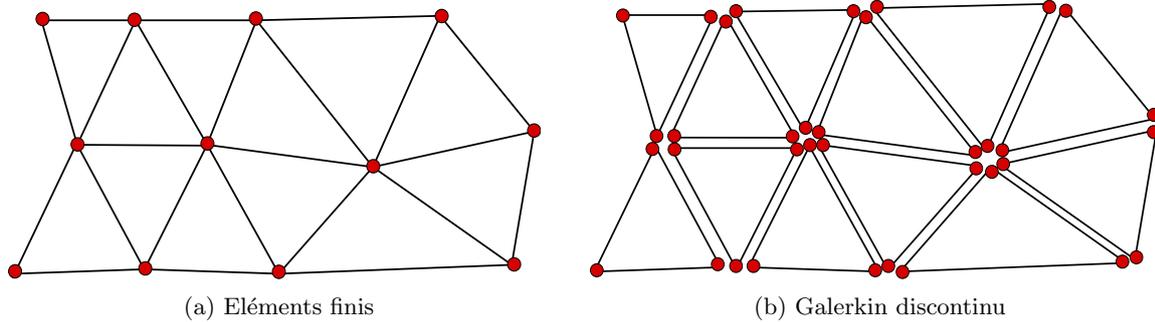


FIG. 3: Degrés de liberté nécessaires pour chacune des méthodes

que les méthodes volumes finis pour l'ordre élevé, puisque la compacité du schéma est préservée lorsque l'ordre de ce schéma augmente. Malheureusement, ils sont inadaptés, car instables, pour la simulation d'écoulements dominés par l'advection et par conséquent pour la simulation d'écoulements turbulents. C'est pour résoudre ce problème que la classe des éléments finis stabilisés est apparue à la fin des années 70 [13]. Le principe de ces méthodes consiste en l'ajout d'un terme de stabilisation à la formulation variationnelle classique. Ce terme est choisi de sorte à préserver la consistance et l'ordre du schéma. Parmi les différentes méthodes qui appartiennent à la classe des éléments finis stabilisés, la formulation la plus connue est sans aucun doute la formulation nommée Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG). D'abord construite pour résoudre les équations d'advection-diffusion et de Navier-Stokes incompressibles [13], cette technique a rapidement été généralisée aux équations d'Euler et de Navier-Stokes compressibles [14, 15] et plus récemment à la simulation d'écoulements turbulents [16, 17, 18].

## La méthode Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)

Sans entrer dans les détails techniques, le principe de la méthode Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG), ainsi que les principaux axes de recherche dont elle fait l'objet, sont présentés.

### Principe général de la méthode SUPG

Comme cela a déjà été dit, une approche éléments finis stabilisés s'appuie sur une formulation éléments finis standard à laquelle s'ajoute un terme de stabilisation. Cela revient à passer d'une méthode de Galerkin à une méthode de Petrov-Galerkin grâce à la modification des fonctions tests de la formulation faible. Plus précisément, le point de départ est une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\mathcal{L}u = f \quad (2)$$

Où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel. Une approximation de la solution  $u$ , notée  $\tilde{u}$ , est ensuite recherchée dans l'espace d'approximation de dimension finie  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ ,  $\tilde{u} = \sum_i u_i \phi_i$ . La formulation faible associée à ce problème s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^* (\mathcal{L}\tilde{u} - f) d\Omega = \mathbf{0} \quad (3)$$

Le choix  $\mathbf{w}^* = \phi$  mène à la méthode de Galerkin classique, alors que d'autres choix  $\mathbf{w}^* \neq \phi$  conduisent aux méthodes dites de Petrov-Galerkin. La méthode SUPG, comme son nom l'indique, appartient à cette deuxième classe de méthodes. Dans le cadre de méthodes d'éléments finis stabilisés, une perturbation est ajoutée aux fonctions de base de la méthode de Galerkin. Cette perturbation est de la forme :

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w} + \mathcal{L}_{stab}(\mathbf{w}) \tau \quad (4)$$

Où  $\mathcal{L}_{stab}$  désigne un opérateur de stabilisation qui diffère selon les méthodes. Pour le schéma SUPG, il correspond à la partie advective de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Il est également possible de le définir tel que  $\mathcal{L}_{stab} = \mathcal{L}$ . Il s'agit dans ce cas de la méthode Galerkin least-squares (GLS) [19, 20]. Un paramètre de stabilisation apparaît également dans la formulation (4), il est communément noté  $\tau$  et son rôle sera détaillé dans le paragraphe suivant. Enfin, la consistance de la formulation est assurée grâce au produit du résidu de l'équation avec le terme de perturbation.

A ce stade, il y a un point qu'il est important de mentionner. Dans le cadre des méthodes éléments finis, les fonctions tests adoptées sont très souvent des fonctions polynomiales par morceaux. Elles sont, par conséquent, continues dans le domaine  $\Omega$  et  $C^\infty$  à l'intérieur d'un élément. Néanmoins les dérivées premières entraînent des sauts sur la frontière des éléments et les dérivées secondes sont des fonctions de Dirac sur ces mêmes frontières. Il n'est donc pas possible d'intégrer sur le domaine  $\Omega$  le produit de deux fonctions, où l'une serait discontinue et l'autre une fonction de Dirac par exemple (cela arrive dans des termes tels que  $\int_{\Omega} \partial_x w \partial_{xx} \phi d\Omega$ ). Dans le contexte des éléments finis stabilisés, ce problème est contourné en ne définissant les contributions du terme de stabilisation qu'à l'intérieur des éléments, où les fonctions tests sont  $C^\infty$  :

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} (\mathcal{L}\tilde{u} - f) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \mathcal{L}_{stab}(\mathbf{w}) \tau (\mathcal{L}\tilde{u} - f) d\Omega = \mathbf{0} \quad (5)$$

Où  $n_{el}$  désigne le nombre d'éléments de la discrétisation du domaine  $\Omega$ .

### Le paramètre de stabilisation

Le paramètre de stabilisation  $\tau$  permet de contrôler la quantité de viscosité numérique introduite dans le schéma. Ce paramètre est construit à partir de grandeurs propres à l'écoulement telles que la vitesse, la densité, la pression et de grandeurs de la discrétisation numérique telles que le pas de temps et la taille des mailles. Pour la résolution d'une équation d'advection-diffusion en une dimension d'espace, une définition dite *optimale* de ce paramètre de stabilisation a été exposée dans [21] et sera présentée au cours du chapitre 3 (page 35). Cette définition est dite *optimale* parce qu'elle conduit, pour ce problème linéaire, à une solution numérique qui est exacte

en chaque noeud du maillage. Il est cependant difficile de définir un terme de stabilisation qui soit optimal pour la résolution d'un problème plus complexe, tel que les équations de Navier-Stokes, et cela quel que soit l'écoulement considéré. Néanmoins, cela n'empêche pas de rechercher la définition du paramètre de stabilisation la plus performante possible. Déjà, dans leur article de 1983 [15], T.J.R. Hughes et T.E. Tezduyar comparent l'efficacité de plusieurs définitions de  $\tau$  selon que ce paramètre soit construit sur la base d'un critère spatial ou d'un critère temporel. Dans le cadre des équations de Navier-Stokes compressible, il a ensuite été proposé de définir un paramètre de stabilisation différent pour chaque degré de liberté [22, 23], autrement dit pour chaque équation.  $\tau$  devient donc une matrice. Encore aujourd'hui, le choix du paramètre de stabilisation de la méthode SUPG reste un problème ouvert. De nombreuses formulations ont été proposés mais les recherches sont toujours en cours sur le sujet [24].

## Le choix des variables

La méthode SUPG a tout d'abord été construite pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressible à l'aide des variables conservatives [13]. Cela semble être un choix naturel de part le caractère conservatif de ces équations. Il y a néanmoins d'autres jeux de variables envisageables, comme, par exemple, les variables entropiques [25, 26]. Grâce à l'utilisation de ces variables, le système s'écrit sous forme pseudo-linéaire et devient symétrique. Il est alors possible de mieux comprendre les aspects fondamentaux de la méthode SUPG et de démontrer certaines propriétés. Par exemple, l'étude de l'inégalité entropique de Clausius-Duhem [25] a mis en évidence le caractère indispensable d'un terme supplémentaire de diffusion en la présence de chocs. Il a cependant été démontré [27] que dans la grande majorité des cas, la méthode SUPG, construite à partir des variables conservatives, donne des résultats similaires à celle construite à partir des variables entropiques.

A partir du milieu des années 1990, G. Hauke et T.J.R Hughes ont développé des formulations de type SUPG pour la simulation d'écoulements compressibles basée sur des jeux de variables autres que les variables conservatives ou les variables entropiques. Ils font appel à des variables primitives [28, 29]. Une fois de plus, il n'y a pas de différence significative dans les résultats obtenus. Néanmoins, à la limite de l'incompressible, les matrices du système obtenu à l'aide des variables primitives restent bornées. Ce jeu de variables semble donc être un candidat intéressant pour la formulation d'une méthode valable à la fois pour le compressible et pour l'incompressible [30, 31].

Lorsque des écoulements transsoniques ou supersoniques sont étudiés, l'enjeu important est la résolution des ondes de choc. Or, il est important, pour de tels problèmes, de traiter les équations de Navier-Stokes sous forme conservative. En effet, si la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie n'était pas respectée, la vitesse de déplacement de l'onde de choc pourrait être fautive. C'est l'une des principales faiblesses de l'utilisation des variables entropiques.

Dans la mesure où il n'a pas été démontré une supériorité, pour la simulation d'écoulement compressible, des variables primitives face aux variables conservatives, et puisque ces dernières

sont plus faciles à mettre en place dans un code de calcul, le choix des variables conservatives sera retenu par la suite.

## La capture de choc

L'utilisation de variables entropiques a permis de mettre en évidence la nécessité d'un mécanisme additionnel de dissipation, pour la méthode SUPG, lors de la présence d'ondes de choc dans un écoulement compressible. C'est pour cette raison qu'un terme dit de *capture de choc* a été développé. Depuis l'article de T.J.R. Hughes et M. Mallet [32], la recherche visant à améliorer l'opérateur de capture de choc a été particulièrement intensive [33, 29, 27]. Dans ce contexte, la méthode nommée *Discontinuity-Capturing Directional Dissipation* (DCDD) a été introduite par T.E. Tezduyar dans [34]. Il s'agit d'introduire un terme de dissipation actif, là où les gradients de la solution sont importants, et cela, dans la direction de ces gradients. Cette méthode sera adoptée et détaillée par la suite (page 55).

## Organisation du mémoire

Ce mémoire est composé de trois parties. La première partie est consacrée à la description de la modélisation de la turbulence. Puisque la résolution directe des équations de Navier-Stokes n'est pas envisageable, de part son coût prohibitif, il faut adopter une autre approche. Aussi, seules les grandeurs moyennes sont résolues. Le chapitre 1 présente d'abord les équations de Navier-Stokes compressibles, puis l'opérateur de moyenne  $y$  est explicité. Enfin chacune des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie est moyennée. Cela conduit à un système d'équations ouvert. Pour le fermer, le modèle de Spalart-Allmaras est présenté dans le chapitre 2. La construction terme à terme de cette équation est détaillée.

Une fois le modèle de turbulence décrit, la deuxième partie expose l'approche numérique adoptée. Il s'agit d'une méthode d'éléments finis stabilisés : la méthode SUPG. Afin d'en expliquer le principe, le chapitre 3 présente ce schéma pour un problème simple, celui de l'équation d'advection-diffusion. Le chapitre 4 expose ensuite la généralisation de la méthode SUPG aux systèmes d'équations. Le choix des paramètres de stabilisation et de capture de choc, ainsi que l'imposition des conditions aux limites  $y$  sont abordés. Des résultats numériques sont donnés afin de valider le modèle pour la simulation d'écoulements laminaires. Le chapitre 5 décrit, quant à lui, la parallélisation du code. Il s'agit d'un outil indispensable pour les simulations numériques où le nombre de points de calcul est élevé, ce qui est inévitablement le cas pour la simulation d'écoulements turbulents.

Tous les éléments sont alors en place pour passer à la simulation numérique d'écoulements turbulents. C'est l'objet de la troisième partie. Le chapitre 6 propose, d'abord, un récapitulatif de la méthode SUPG appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes couplées au modèle de Spalart-Allmaras. Enfin, le chapitre 7 présente les résultats numériques obtenus.

## Valorisation des travaux de thèse

Les travaux réalisés dans cette thèse ont fait l'objet de communications lors de congrès internationaux et de publications.

### Communications lors de congrès internationaux

*Schéma d'ordre élevé pour la simulation d'écoulements turbulents compressibles*

40<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique

CANUM, 31 mai - 4 juin 2010, Carcans-Maubuisson, France

*A stabilized finite element method for compressible turbulent flows*

V European Conference on Computational Fluid Dynamics

ECCOMAS, 14-17 juin 2010, Lisbonne, Portugal

*High order scheme for compressible turbulent flows*

6<sup>th</sup> International Conference on Computational Fluid Dynamics

ICCFD, 12-16 juillet 2010, St Petersburg, Russie

*SUPG Formulation for the 3D Compressible Coupled Navier-Stokes and S-A equations*

7<sup>th</sup> International Congress on Industrial and Applied Mathematics

ICIAM, 18-22 juillet 2011, Vancouver, Canada

### Liste des publications

*SUPG discretization of an fully coupled RANS-SA model for 3D compressible turbulent flows*

Christelle Wervaecke, Héloïse Beaugendre et Boniface Nkonga

Article en préparation

*A stabilized finite element method for compressible turbulent flows*

Christelle Wervaecke, Héloïse Beaugendre et Boniface Nkonga

Proceeding ECCOMAS 2010

*High order scheme for compressible turbulent flows*

Christelle Wervaecke, Héloïse Beaugendre et Boniface Nkonga

Proceeding ICCFD 2010

Première partie

**Turbulence et modélisation des  
écoulements turbulents**



# Chapitre 1

## Les équations de Navier-Stokes moyennées

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les équations de Navier-Stokes compressibles</b>	<b>16</b>
1.1.1	Equations de conservation	16
1.1.2	Lois de comportement	16
1.1.3	Lois d'état	17
<b>1.2</b>	<b>L'opérateur de moyenne</b>	<b>18</b>
1.2.1	La moyenne de Reynolds	18
1.2.2	La moyenne de Favre	19
<b>1.3</b>	<b>Les équations moyennées</b>	<b>20</b>
1.3.1	Equation de conservation de la masse	20
1.3.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement	20
1.3.3	Equation de conservation de l'énergie	21
1.3.4	Hypothèse de Boussinesq	23

---

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles, non-linéaires, qui décrivent le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus. En régime turbulent, la résolution de ces équations nécessite un très grand nombre de points de calcul, ce qui rend la simulation particulièrement coûteuse. Un des moyens de contourner ce problème consiste à ne considérer que les grandeurs moyennées. Dans ce chapitre, les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible et newtonien sont d'abord présentées. Puis l'opérateur de moyenne qui sera appliqué à ces équations est introduit. Enfin, la façon d'obtenir le système moyenné est exposée.

## 1.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles

Un écoulement, même lorsqu'il devient turbulent, continue d'obéir aux équations de Navier-Stokes. En effet, le cadre de la mécanique des milieux continus reste valable puisque les échelles mises en jeu sont plus grandes que l'échelle moléculaire. Ce sont donc les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie qui régissent cet écoulement. Ces équations sont accompagnées de lois de comportement qui permettent de fermer le système à l'aide de variables d'états, et de lois d'état qui décrivent le comportement de ces variables.

### 1.1.1 Equations de conservation

De façon générale, un fluide est caractérisé par sa densité  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  et sa vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = {}^t(u_1, u_2, u_3)$  qui sont fonction des variables spatiales  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  et temporelle  $t$ . Ces deux grandeurs sont reliées par l'équation de *conservation de la masse* également appelée équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

Les forces volumiques sont négligées. L'équation de *conservation de la quantité de mouvement* a pour expression

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \sigma \quad (1.2)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes. L'équation de *conservation de l'énergie* s'écrit

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1.3)$$

avec  $e = \epsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$  l'énergie totale, somme de l'énergie interne  $\epsilon$  et de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$ . Enfin la quantité  $\mathbf{q} = {}^t(q_1, q_2, q_3)$  est le flux de chaleur thermique.

Ces équations décrivent le comportement du fluide à l'échelle macroscopique, quel que soit le type de fluide. Cependant, on peut voir qu'il contient quatorze inconnues : la masse volumique, les trois composantes de la vitesse, les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes (tenseur symétrique), l'énergie interne et les trois composantes du flux de chaleur pour seulement cinq équations. Pour fermer ce système, il faut introduire des lois de comportement qui décrivent les propriétés du fluide.

### 1.1.2 Lois de comportement

Un fluide est dit *newtonien* s'il peut être décrit par des lois linéaires qui donnent le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  en fonction du tenseur des déformations  $s_{ij}$ , et le flux de chaleur  $q_i$  en fonction du gradient de température. Les lois de Newton (1.4) et de Fourier (1.5) donnent ces relations.

$$\sigma_{ij} = \left( -p + \lambda \frac{\partial u_l}{x_l} \right) \delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \quad (1.4)$$

où  $s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  et  $\delta_{ij}$  est le tenseur identité, aussi appelé symbole de Kronecker.

$$q_i = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

Le coefficient de conductivité thermique  $\lambda_c$  s'exprime en fonction de la viscosité dynamique à l'aide du nombre de Prandtl :

$$Pr = \mu \frac{c_p}{\lambda_c} = \gamma \mu \frac{c_v}{\lambda_c} \quad (1.6)$$

où  $c_p$  et  $c_v$  sont les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants et  $\gamma = c_p/c_v$ . Enfin, les variables  $\mu$  et  $\lambda$  sont reliées par l'hypothèse de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (1.7)$$

Ces lois de comportement fournissent bien les neuf équations manquantes. Elles introduisent également des propriétés du fluide (viscosité dynamique  $\mu$  et secondaire  $\lambda$ , conductivité  $\lambda_c$ ) et deux variables d'état (pression et température) qui permettent de décrire l'état du fluide au point et à l'instant considérés, c'est-à-dire de décrire à l'échelle macroscopique les propriétés de l'agitation moléculaire. Il est alors nécessaire de donner des relations supplémentaires, dites *lois d'état*, qui permettent d'obtenir l'évolution de ces variables d'état.

### 1.1.3 Lois d'état

Pour fermer le système, on fait l'hypothèse que celui-ci est *bivariant*. Cela signifie que la température et la pression sont des fonctions d'états d'autres grandeurs thermodynamiques comme la densité  $\rho$  et l'énergie interne  $\epsilon$  :

$$T = T(\rho, \epsilon) \quad \text{et} \quad p = p(\rho, \epsilon) \quad (1.8)$$

Dans le cas particulier d'un gaz *caloriquement parfait*, les relations thermodynamiques s'écrivent :

$$p = \rho RT \quad \text{et} \quad \epsilon = c_v T \quad (1.9)$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits définie par la relation de Mayer :

$$R = c_p - c_v \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.10)$$

Puisque  $\epsilon = c_v T$ , le flux de chaleur peut encore s'exprimer sous la forme :

$$q_j = -\gamma \frac{\mu c_v}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\gamma \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \quad (1.11)$$

La description des lois d'état achève la présentation du système d'équations de Navier-Stokes. Ces équations régissent le comportement de tout écoulement, qu'il soit laminaire ou turbulent. Néanmoins, dans ce dernier cas, résoudre jusqu'à la petite échelle de Kolmogorov (Fig 2) peut s'avérer être très coûteux. En effet, si le nombre de noeuds du maillage est noté  $N$ , il doit vérifier  $N > Re^{9/4}$ . Or, pour un écoulement de type aéronautique, où le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^6$ , le nombre de noeuds devra être de l'ordre de  $3 \times 10^{13}$ . Pour le moment, cela n'est pas envisageable. C'est pourquoi des méthodes moins coûteuses sont envisagées. Pour ce faire, seules des quantités moyennées sont considérées ici. Dans un premier temps, l'opérateur de moyenne est présenté.

## 1.2 L'opérateur de moyenne

### 1.2.1 La moyenne de Reynolds

Dans un écoulement turbulent, la vitesse, la pression et la température connaissent de telles fluctuations que, pour obtenir une simulation raisonnable en temps de calcul, il faut utiliser une approche statistique. L'écoulement est décomposé en partie moyenne et partie turbulente,  $f = \bar{f} + f'$ , avec  $\bar{f}$  la moyenne de Reynolds. Il s'agit d'une moyenne d'ensemble définie par :

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(\mathbf{x}, t) \right) \quad (1.12)$$

cette formulation signifie que  $N$  expériences indépendantes, portant sur le même écoulement, sont réalisées et que la valeur de la quantité  $f$  à la même position  $\mathbf{x}$  et au même temps  $t$  est enregistrée. Dans de nombreux cas, la moyenne d'ensemble peut s'exprimer de manière plus simple. Si la grandeur statistique est indépendante du temps  $\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x})$ , alors la moyenne d'ensemble est équivalente à une moyenne temporelle :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}, t) dt \quad (1.13)$$

Dans le cas d'une homogénéité statistique dans la direction  $x$ , la variable  $\bar{f}$  se simplifie en  $\bar{f}(x, y, z, t) = \bar{f}(y, z, t)$ . La moyenne d'ensemble est alors équivalente à une moyenne spatiale :

$$\bar{f}(y, z, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L f(x, y, z, t) dx \quad (1.14)$$

Quel que soit l'opérateur choisi pour définir les grandeurs moyennes, il satisfait aux propriétés de linéarités suivantes :

$$\overline{f'} = 0 \quad (1.15)$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} \quad (1.16)$$

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (1.17)$$

$$\overline{\alpha \times f} = \alpha \times \overline{f} \quad , \quad \alpha \text{ constante} \quad (1.18)$$

$$\overline{\overline{f} \times g} = \overline{f} \times \overline{g} \quad (1.19)$$

$$\overline{f \times g} \neq \overline{f} \times \overline{g} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \xi} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi}} \quad (1.21)$$

### 1.2.2 La moyenne de Favre

En pratique, l'écoulement est décomposé en partie moyenne  $\overline{U}$  et partie turbulente  $U'$ . La grandeur  $\overline{U}$  est appelé moyenne de Reynolds et  $U = \overline{U} + U'$ . Cette décomposition est injectée dans les équations de Navier-Stokes qui sont ensuite moyennées. La décomposition de la densité et de la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho &= \overline{\rho} + \rho' & \text{avec } \overline{\rho'} &= 0 \\ u &= \overline{u} + u' & \text{avec } \overline{u'} &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour le terme  $\rho u$ , la moyenne  $\overline{\rho u}$  s'exprime :

$$\begin{aligned} \rho u &= \overline{\rho} \overline{u} + \overline{\rho} u' + \rho' \overline{u} + \rho' u' \\ \overline{\rho u} &= \overline{\rho} \overline{u} + \overline{\rho' u'} \end{aligned}$$

L'application de la décomposition de Reynolds aux équations Navier-Stokes compressible ne conduit donc pas à un système d'équations, pour le champ moyen, formellement identique aux équations du départ. Pour éviter ce problème, on adopte la décomposition de Favre qui est basée sur des moyennes pondérées par rapport à la masse volumique :

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\overline{\rho \Phi}}{\overline{\rho}} \quad (1.22)$$

La décomposition s'écrit alors

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'' \quad (1.23)$$

### 1.3 Les équations moyennées

Ce paragraphe expose succinctement la façon d'obtenir les équations de Navier-Stokes moyennées. Pour plus d'informations sur ce sujet, il est conseillé de se référer aux ouvrages [35] et [36].

#### 1.3.1 Equation de conservation de la masse

Grâce à l'utilisation de la moyenne de Favre, la forme de l'équation de la conservation de la masse est inchangée. En effet, l'injection de la décomposition de Reynolds dans l'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot ((\bar{\rho} + \rho')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) = 0 \quad (1.24)$$

L'application de la moyenne de Reynolds et des propriétés de linéarités de l'opérateur de moyenne (1.15) à (1.21) conduisent à :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (1.25)$$

La moyenne de Favre permet d'écrire :

$$\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\rho} \frac{\overline{\rho \mathbf{u}}}{\bar{\rho}} = \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \quad (1.26)$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) = 0 \quad (1.27)$$

#### 1.3.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, le même processus que pour la conservation de la masse est appliqué. Dans un premier temps, le produit tensoriel est décomposé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} &= \overline{\rho (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'') \otimes (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'')} \\ &= \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle + \overline{\rho \mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''} \end{aligned} \quad (1.28)$$

La relation qui suit est valable pour toutes fonctions a et b :

$$\overline{\rho \langle a \rangle b''} = \overline{\rho \frac{\overline{\rho a}}{\bar{\rho}} b''} = \frac{\overline{\rho a}}{\bar{\rho}} \overline{\rho b''} = \bar{\rho} \langle a \rangle \langle b'' \rangle = 0 \quad (1.29)$$

Un terme supplémentaire, appelé tenseur de Reynolds, apparaît donc dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il sera modélisé par la suite :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle) = \nabla \cdot \bar{\sigma} - \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''}) \quad (1.30)$$

Où le tenseur moyen des contraintes  $\bar{\sigma}$  est défini par :

$$\bar{\sigma} = -\bar{p} \mathbf{I} + \mu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \mathbf{I} \quad (1.31)$$

### 1.3.3 Equation de conservation de l'énergie

Comme pour les équations précédentes, la décomposition de Reynolds est introduite dans l'équation de conservation de l'énergie qui est ensuite moyennée :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \langle e \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle e \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) = -\nabla \cdot (\overline{\rho e'' \mathbf{u}''}) + \nabla \cdot \bar{\sigma} \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (1.32)$$

D'après la loi d'état (1.9), l'énergie totale de l'écoulement peut s'écrire :

$$e = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + c_v T \quad (1.33)$$

Par conséquent, la moyenne de Favre de l'énergie totale prend la forme :

$$\begin{aligned} \langle e \rangle &= \frac{|\langle \mathbf{u} \rangle|^2}{2} + c_v \langle T \rangle + \langle \langle \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}'' \rangle + \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}''|^2 \rangle \\ &= \frac{|\langle \mathbf{u} \rangle|^2}{2} + c_v \langle T \rangle + k \end{aligned} \quad (1.34)$$

Où  $k$  est appelée énergie cinétique turbulente et définit par :

$$k = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}''|^2 \rangle \quad (1.35)$$

Le processus de moyenne entraîne, à nouveau, l'apparition de termes inconnus dans l'équation moyenne de conservation de l'énergie (1.32). Il va falloir fermer le système en modélisant les termes supplémentaires. Dans un premier temps, une alternative est donnée à l'expression de l'équation moyenne de conservation de l'énergie (1.32). Puisque :

$$\begin{aligned} e'' &= \frac{1}{2} (|\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}''|^2 - |\langle \mathbf{u} \rangle|^2) + c_v T'' \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{u}''|^2 + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{u}'' + c_v T'' \end{aligned} \quad (1.36)$$

Alors :

$$\overline{\rho \mathbf{u}'' e''} = c_v \overline{\rho \mathbf{u}'' T''} + \overline{\rho \mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''} \langle \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \overline{\rho |\mathbf{u}''|^2 \mathbf{u}''} \quad (1.37)$$

En général, les corrélations d'ordre 3,  $\overline{\rho \mathbf{u}''_i \mathbf{u}''_j \mathbf{u}''_k}$ , sont négligées et l'expression suivante est obtenue :

$$\overline{\rho \mathbf{u}'' e''} = c_v \overline{\rho \mathbf{u}'' T''} + \overline{\rho \mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''} \langle \mathbf{u} \rangle \quad (1.38)$$

La loi des gaz parfaits (1.9) conduit à écrire le terme  $\overline{\sigma \mathbf{u}}$  sous la forme :

$$\overline{\sigma \mathbf{u}} = c_v (\gamma - 1) \overline{\bar{\rho} \langle T \rangle} \langle \mathbf{u} \rangle + c_v (\gamma - 1) \overline{\rho \mathbf{u}'' T''} + \overline{[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}] \mathbf{u}} \quad (1.39)$$

Dans la mesure où la viscosité laminaire  $\mu$  est très petite, les deux derniers termes de l'expression précédente sont approchés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}] \mathbf{u}} &\approx \mu \overline{(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \mathbf{u}} - \frac{2}{3} \mu \overline{\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}} \\ &\approx \mu \langle \mathbf{u} \rangle (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T) - \frac{2}{3} \mu \langle \mathbf{u} \rangle \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (1.40)$$

Le terme qui correspond au flux de chaleur subit également la même approximation :

$$\nabla \cdot \bar{q} = -\nabla \cdot \lambda_c \bar{T} \approx -\nabla \cdot \langle \lambda_c T \rangle \quad (1.41)$$

L'équation moyenne de conservation de l'énergie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \langle e \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle e \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) + c_v \gamma \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{u}'' T''}) + \nabla \cdot (R \langle \mathbf{u} \rangle) \\ = \nabla \cdot (\langle \sigma \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) + \nabla \cdot (\langle \lambda_c T \rangle) \end{aligned} \quad (1.42)$$

où  $R = -\overline{\rho \mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''}$  est le tenseur de Reynolds, modélisé grâce à l'hypothèse de Boussinesq. Le flux de chaleur turbulent est, quant à lui, approché de façon assez similaire par :

$$c_v \gamma \overline{\rho \mathbf{u}'' T''} = \lambda_T \nabla \langle T \rangle \quad \text{avec} \quad \lambda_T = \frac{c_v \gamma}{Pr_T} \mu_T \quad (1.43)$$

où  $Pr_T$  est le nombre de Prandtl turbulent fixé à 0.9.

### 1.3.4 Hypothèse de Boussinesq

Le tenseur des contraintes de Reynolds  $-\overline{\rho \mathbf{u}'' \otimes \mathbf{u}''}$  correspond à un terme de diffusion dans la plupart des écoulements. Puisque le modèle RANS ne permet d'avoir accès qu'aux grandeurs moyennées, les fluctuations  $\mathbf{u}''$  sont inconnues et il est nécessaire de fermer le système. Dans la plupart des cas, l'hypothèse de Boussinesq est utilisée. Cette hypothèse correspond à un alignement entre tenseur de contraintes de Reynolds et tenseur de déformations moyen. Ce modèle s'écrit :

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_T^{visc} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} K \delta_{ij} \quad (1.44)$$

Où  $K = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_j''}$  est l'énergie turbulente, et  $\mu_T^{visc}$  la viscosité turbulente. Cette hypothèse semble plutôt raisonnable puisque, dans la plupart des cas, la turbulence se développe dans les zones où l'écoulement présente de forts gradients. Néanmoins, il existe un contre-exemple connu : le bord d'attaque d'une aile où l'écoulement est laminaire alors que les gradients sont importants. En ce qui concerne la viscosité turbulente  $\mu_T^{visc}$ , il existe un très grand nombre de méthodes pour la déterminer, par exemple, les modèles k-epsilon, k-omega ou encore le modèle de Spalart-Allmaras. Enfin, le terme  $-\frac{2}{3} \bar{\rho} K \delta_{ij}$  peut être assimilé à une force de pression supplémentaire. En pratique, il est négligeable par rapport à la force de pression et, par conséquent, il n'est pas pris en compte.

Finalement, sous condition de validité des hypothèses et approximations effectuées, le système des équations de Navier-Stokes moyennées peut être mis sous une forme similaire à celui des équations de Navier-Stokes instantanées où les flux de chaleur et de quantité de mouvement se décomposent en contributions laminaire et turbulente.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle) = 0 \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle) = \nabla \cdot \langle \sigma' \rangle \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \langle e \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle e \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) = \nabla \cdot (\langle \sigma' \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) - \nabla \cdot \langle \mathbf{q}' \rangle \quad (1.47)$$

Où le tenseur  $\langle \sigma' \rangle$  et le vecteur  $\langle \mathbf{q}' \rangle$  s'écrivent :

$$\langle \sigma' \rangle = -\bar{p} \mathbf{I} + (\mu + \mu_T^{visc}) \left[ \nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \mathbf{I} \right] \quad (1.48)$$

$$\langle \mathbf{q}' \rangle = -\gamma c_v \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T^{visc}}{Pr_T} \right) \nabla \langle T \rangle \quad (1.49)$$

Il ne manque donc que la connaissance de la viscosité turbulente  $\mu_T^{visc}$  pour fermer le problème. Contrairement à la viscosité dynamique  $\mu$ , la viscosité turbulente n'est pas une propriété

du fluide mais il s'agit d'une caractéristique de l'écoulement. Comme lui, elle est a priori variable en temps et en espace. De nombreux modèles permettent de modéliser la viscosité turbulente. Parmi eux, le modèle proposé par P.R. Spalart et S.R. Allmaras, en 1992, [37] est présenté dans le chapitre suivant.

# Chapitre 2

## Le modèle de Spalart-Allmaras

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Motivations</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Construction du modèle</b>	<b>26</b>
2.2.1	Le terme de diffusion	26
2.2.2	Le terme de production	27
2.2.3	Le terme de destruction	27
2.2.4	Calibrage du modèle	27
<b>2.3</b>	<b>Couche limite turbulente</b>	<b>28</b>
<b>2.4</b>	<b>Forme incompressible</b>	<b>29</b>
<b>2.5</b>	<b>Forme compressible</b>	<b>31</b>

---

Le modèle de Spalart-Allmaras est composé d'une unique équation de transport portant sur la viscosité turbulente. Cette équation a été construite, de façon empirique, par P.R. Spalart et S.R. Allmaras en 1992 [37]. Ils se sont basés sur des arguments de type analyse dimensionnelle, invariance galiléenne ou encore de dépendance à la viscosité moléculaire. Contrairement aux modèles plus anciens, à une équation, leur modèle est local. C'est à dire, qu'en un point, l'équation ne dépend pas de la solution aux autres points. Par conséquent, il est facilement applicable, aussi bien sur des maillages structurés que non structurés. C'est également un modèle robuste dont la convergence vers l'état stationnaire est rapide et qui ne demande qu'un degré de raffinement de maillage modéré près des parois. Enfin, l'imposition des conditions aux limites ne pose pas de difficulté particulière.

### 2.1 Motivations

Les modèles les plus simples, en matière de modélisation de la viscosité turbulente, sont les modèles dits *algébriques*. Ces modèles n'impliquent pas la résolution d'équations différentielles mais donnent une relation algébrique reliant la viscosité turbulente à d'autres grandeurs de

l'écoulement. Les modèles algébriques, tels que le modèle de Baldwin-Lomax [38] ou celui de Cebeci-Smith [39], sont robustes mais n'offrent qu'une précision restreinte et ne sont pas plus valables pour des écoulements détachés. De plus, il est difficile de les mettre en place sur des maillages non structurés.

La classe des modèles à deux équations de type K-epsilon ou K-omega permet de fermer le système d'équations (1.45) de façon plus sophistiquée que les modèles à une équation. Ils ont néanmoins leurs défauts. En effet, pour un coût plus important que celui d'un modèle à une équation, ils ne présentent pas d'avantage significatif dans la prédiction de phénomènes tels que l'interaction entre chocs et couches limites ou encore dans la prédiction de séparation de l'écoulement sur une surface lisse. De plus, certains d'entre eux, comme le modèle K-epsilon, nécessite un traitement spécifique pour les écoulements de paroi (modèles bas Reynolds).

Ces arguments ne prouvent pas que le modèle de Spalart-Allmaras constitue le meilleur modèle en matière de modélisation de la viscosité turbulente, mais il représente un compromis intéressant entre modèles algébriques et modèles à deux équations.

## 2.2 Construction du modèle

L'évolution de la viscosité turbulente est modélisée, dans le modèle de Spalart-Allmaras, par une équation aux dérivées partielles qui comporte des termes de convection, de diffusion, de production et de destruction. De façon général, lorsqu'une grandeur scalaire  $F$  obéit à une loi de conservation, l'équation qui décrit son comportement peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = \text{Diffusion} + \text{Production} + \text{Destruction} \quad (2.1)$$

Où  $\mathbf{u}$  est la vitesse d'advection. Pour construire le modèle de turbulence, il faut donc définir, de façon adéquate, les expressions des termes de diffusion, de production et de destruction. La définition et l'adimensionnement de ces termes conduisent à l'introduction de constantes et de fonctions adimensionnées supplémentaires. Pour définir ces dernières, P.R. Spalart et S.R. Allmaras [37] ont imposé à leur modèle d'être cohérent avec les données expérimentales et les résultats numériques dont ils disposaient.

### 2.2.1 Le terme de diffusion

Les opérateurs classiques de diffusion sont du type :  $\nabla \cdot ((\nu_t/\sigma)\nabla \nu_t)$  où  $\nu_t$  est la viscosité cinématique turbulente ( $\nu_t = \mu_T/\rho$ ) et  $\sigma$  est une constante. Avec ce type de formulation, l'intégrale de la viscosité turbulente est conservée alors qu'il n'y a pas de raison pour qu'elle le soit. Dans les modèles à deux équations, l'opérateur de diffusion comporte souvent des termes non conservatifs comme le produit de  $\nabla k$  et de  $\nabla \epsilon$ . Par analogie, le terme de diffusion du modèle de Spalart-Allmaras est défini par :

$$\text{Diffusion} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot (\nu_t \nabla \nu_t) + c_{b2} (\nabla \nu_t)^2 \right] \quad (2.2)$$

Le second terme correspond à la partie non conservative, semblable au  $\nabla k \cdot \nabla \epsilon$  du modèle k-epsilon et  $c_{b_2}$  est une constante. Enfin, la viscosité moléculaire est introduite et le terme de diffusion devient :

$$\text{Diffusion} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((\nu_t + \nu) \nabla \nu_t) + c_{b_2} (\nabla \nu_t)^2 \right] \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Le terme de production

La vorticité de l'écoulement  $S = \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}}$  avec  $\Omega_{ij} = \partial \mathbf{U}_i / \partial x_j - \partial \mathbf{U}_j / \partial x_i$ , sert de base à P.R. Spalart et S.R. Allmaras pour construire le terme de production. En effet, pour des applications de type aéronautique, la turbulence n'est présente que là où il y a de la vorticité. Le terme de production s'écrit :

$$\text{Production} = c_{b_1} S \nu_t \quad (2.4)$$

### 2.2.3 Le terme de destruction

Dans une couche limite, l'effet de blocage d  à la présence de la paroi est transmis au reste de l'écoulement par l'intermédiaire du terme de pression. C'est la principale source de destruction pour le tenseur de Reynolds. Cela suggère donc d'inclure un terme de destruction dans l'équation d'évolution de la viscosité turbulente. Une analyse dimensionnelle conduit à adopter un terme de destruction du type  $-c_{w1} (\nu_t/d)^2$ , où d est la distance au mur. Ce terme n'aura pas d'effet loin de la paroi ( $d \rightarrow \infty$ ).

Lorsque le terme de destruction est défini par  $-c_{w1} (\nu_t/d)^2$ , le coefficient de friction d'un écoulement sur une plaque plane est sous-estimé. En effet, ce terme décroît trop lentement avec la distance au mur. C'est pourquoi une fonction adimensionnée,  $f_w$ , est introduite et le terme de destruction devient :

$$\text{Destruction} = -c_{w1} f_w \left( \frac{\nu_t}{d} \right)^2 \quad (2.5)$$

### 2.2.4 Calibrage du modèle

Les expressions des différents termes de l'équation de Spalart-Allmaras font intervenir des constantes,  $c_{b_1}$ ,  $c_{b_2}$ ,  $c_{w1}$ ,  $\sigma$  et une fonction adimensionnée,  $f_w$ , qu'il faut définir. Cette étape de la construction du modèle est appelée calibrage. Les constantes et fonctions sont déterminées grâce à des données expérimentales et des simulations numériques connues pour le type d'écoulement que le modèle doit représenter. P.R. Spalart S.R. Allmaras contraignent donc à leur modèle de

simuler un niveau correct de cisaillement pour les écoulements de type couches de mélange et pour les sillages. L'amplitude maximale de cisaillement pour ces deux types d'écoulement est considérée être, respectivement, de  $0.01(\Delta U)^2$  et de  $0.06(\Delta U)^2$  où  $\Delta U$  est le maximum de la différence des vitesses. Cela donne donc deux conditions pour les trois constantes  $c_{b_1}$ ,  $c_{b_2}$  et  $\sigma$ . Ce système a donc un degré de liberté. En se basant sur l'observation de résultats numériques, P.R. Spalart et S.R. Allmaras [37] suggèrent alors d'adopter les valeurs suivantes :

$$\sigma = 2/3 \quad c_{b_1} = 0.1355 \quad c_{b_2} = 0.6220 \quad (2.6)$$

Il ne reste donc plus qu'à définir la constante  $c_{w_1}$  et la fonction  $f_w$  qui interviennent dans le terme de destruction. Pour ce faire, un écoulement turbulent de couche limite sur une plaque plane est considéré. Les différentes zones qui se distinguent pour ce genre d'écoulement sont représentées sur la figure (2.2). Dans la zone logarithmique, la vorticité et la viscosité turbulente sont données par  $S = u_\tau/(\kappa d)$  et  $\nu_t = u_\tau \kappa d$ , où  $u_\tau$  est la vitesse de friction. L'équilibre entre production, destruction et diffusion entraîne alors :

$$c_{w_1} = c_{b_1}/\kappa^2 + (1 + c_{b_2})/\sigma \quad (2.7)$$

Le choix de l'argument pour la fonction  $f_w$  est très largement inspiré des modèles algébriques pour lesquels la longueur de mélange joue un rôle important proche du mur. Cette longueur peut être définie comme  $l = \sqrt{\nu_t/S}$  et le carré de  $l/\kappa d$  est utilisé pour adimensionner :

$$r = \frac{\nu_t}{S\kappa^2 d^2} \quad (2.8)$$

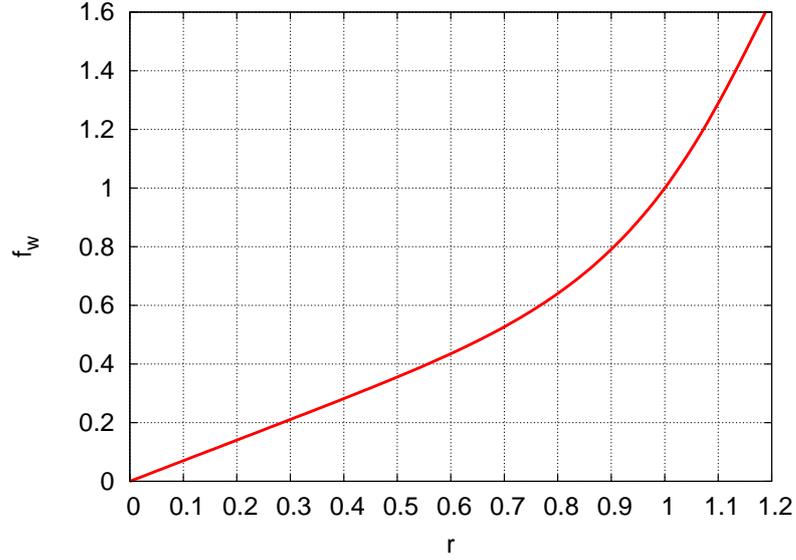
La fonction  $f_w$ , représentée sur la figure 2.1, est alors donnée par :

$$f_w(r) = g \left( \frac{1 + c_{w_3}^6}{g^6 + c_{w_3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w_2}(r^6 - r) \quad (2.9)$$

Le passage de  $g$     $f_w$  agit comme un limiteur qui empêche  $f_w$  de prendre de trop grandes valeurs, ce qui pourrait être problématique pour la convergence de la simulation numérique et donner une importance non méritée au fait que  $S$  peut s'annuler. Les constantes  $c_{w_2}$  et  $c_{w_3}$  sont fixées à 2 et 0.3 respectivement.

### 2.3 Couche limite turbulente

Avant d'exposer la formulation finale du modèle de Spalart-Allmaras, des notions liées aux couches limites turbulentes sont rapidement introduites. Le profil de vitesse dans une couche limite turbulente a été l'objet de nombreuses études [40] et est donc bien connu. Les profils sont classiquement tracés en échelles logarithmiques avec :

FIG. 2.1: Fonction  $f_w$  intervenant dans le terme de destruction

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.10)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique et  $\tau_w = (\partial U/\partial y)|_{y=0}$  le cisaillement à la paroi. Dans ces coordonnées, la couche limite peut être subdivisée en quatre régions comme illustré sur la figure (2.2). En s'éloignant du mur, la première région est la sous-couche visqueuse ( $y^+ < 5$ ). Dans cette partie, la vitesse augmente de façon linéaire en suivant la loi :

$$u^+ = y^+ \quad (2.11)$$

Puis, pour  $5 < y^+ < 50$ , la zone tampon permet une transition régulière vers la région logarithmique  $50 < y^+ < \approx 1000$  où :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (2.12)$$

où  $\kappa = 0.41$  et  $C \approx 5.1$ .

## 2.4 Forme incompressible

En ce qui concerne le modèle de Spalart-Allmaras, deux nouvelles notations sont introduites :  $\tilde{\nu}$  qui vaut  $\nu_t$ , excepté dans la sous-couche visqueuse et la variable  $\chi$  défini par  $\chi = \tilde{\nu}/\nu$ . L'équation de transport du modèle de turbulence est alors écrite pour la variable  $\tilde{\nu}$ . Par construction, cette variable a un comportement linéaire près de la paroi. Elle est défini par :

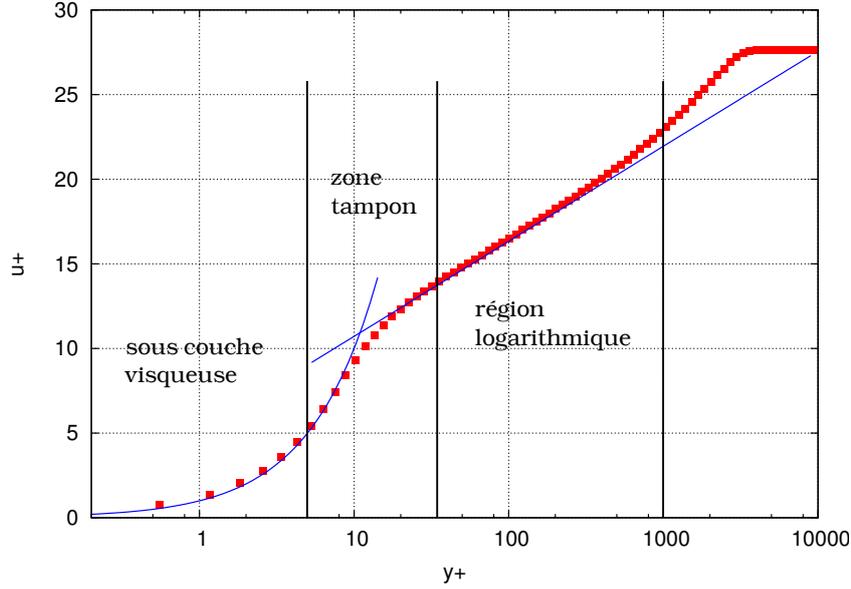


FIG. 2.2: Profil de la vitesse dans une couche limite turbulente (en bleu : le profil théorique, en rouge : une solution numérique)

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v_1} \quad \text{avec} \quad f_{v_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v_1}^3} \quad (2.13)$$

L'introduction de cette nouvelle variable entraîne une modification du terme de production. La vorticité de l'écoulement  $S$  devient  $\tilde{S}$  et s'écrit :

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v_2} \quad \text{avec} \quad f_{v_2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v_1}} \quad (2.14)$$

La fonction  $f_{v_2}$  est construite de la même façon que  $f_{v_1}$ , de telle sorte que  $\tilde{S}$  conserve son comportement logarithmique ( $\tilde{S} = u_\tau / (\kappa y)$ ) dans tout le domaine, jusqu'à la paroi. La variable  $\tilde{S}$  est singulière à la paroi mais cela ne pose pas de problème puisqu'à cette endroit,  $\tilde{\nu} = 0$ . Tous les termes présents dans le modèle sont écrits en fonction de  $\tilde{\nu}$  au lieu de  $\nu_t$ , par exemple  $r = \tilde{\nu} / (S \kappa^2 d^2)$ . Finalement, le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\nu} \mathbf{u}) = M(\tilde{\nu}) \tilde{\nu} + P(\tilde{\nu}) \tilde{\nu} - D(\tilde{\nu}) \tilde{\nu} \quad (2.15)$$

Où  $P(\tilde{\nu}) \tilde{\nu}$  est le terme de production :

$$P(\tilde{\nu}) \tilde{\nu} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} \quad (2.16)$$

$M(\tilde{\nu}) \tilde{\nu}$  est le terme de diffusion :

$$M(\tilde{\nu})\tilde{\nu} = \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ( (\nu + \tilde{\nu}) \nabla(\tilde{\nu}) ) + c_{b2} ( \nabla(\tilde{\nu}) \cdot \nabla(\tilde{\nu}) ) \right] \quad (2.17)$$

Et  $D(\tilde{\nu})\tilde{\nu}$  le terme de destruction :

$$D(\nu_t)\nu_t = c_{w1}f_w \left[ \frac{\nu_t}{d} \right]^2 \quad (2.18)$$

## 2.5 Forme compressible

Lorsque l'écoulement présente de forts gradients de masse volumique, le modèle de turbulence doit être modifié de façon à prendre en compte les effets de compressibilité. Une façon naturelle de prendre en compte les effets de la compressibilité de l'écoulement serait d'employer  $\rho\tilde{\nu}$  au lieu de  $\tilde{\nu}$ . Néanmoins S. Catris et B. Aupoix [41] ont montré que pour être compatible avec la loi logarithmique, le modèle de Spalart-Allmaras devait plutôt s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho\tilde{\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\tilde{\nu}\mathbf{u}) &= c_{b1}\rho\tilde{S}\tilde{\nu} + c_{w1}f_w\rho \left[ \frac{\nu_t}{d} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ( \mu \nabla(\tilde{\nu}) + \sqrt{\rho}\tilde{\nu} \nabla(\sqrt{\rho}\tilde{\nu}) ) + c_{b2} ( \nabla(\sqrt{\rho}\tilde{\nu}) \cdot \nabla(\sqrt{\rho}\tilde{\nu}) ) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

De cette façon, le terme de diffusion est indépendant du gradient de la densité dans la zone logarithmique.

Cela achève la description du modèle de turbulence. Le système d'équations de Navier-Stokes a été moyenné et fermé grâce à l'hypothèse de Boussinesq et à l'introduction de la viscosité turbulente. Celle-ci est donnée par le modèle de Spalart-Allmaras. Il reste, à présent, à décrire le schéma numérique adopté pour discrétiser ce problème et à valider la méthode. C'est l'objet de la partie suivante.



Deuxième partie

Méthode numérique : le schéma  
SUPG



# Chapitre 3

## L'équation d'advection-diffusion

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Description du problème</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Discrétisation de Galerkin standard</b>	<b>36</b>
3.2.1	Discrétisation spatiale	36
3.2.2	Discrétisation temporelle	37
<b>3.3</b>	<b>Advection pure 1D</b>	<b>37</b>
3.3.1	La méthode de Galerkin	38
3.3.2	La méthode SUPG	38
3.3.3	Condensation de la matrice de masse	39
3.3.4	Analyse de l'erreur de troncature	40
<b>3.4</b>	<b>Approche multi-D</b>	<b>42</b>
<b>3.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>43</b>

---

### 3.1 Description du problème

La résolution de l'équation de transport et de diffusion d'un scalaire constitue le point de départ pour la construction d'un schéma numérique [20, 42, 43]. Il s'agit d'un problème qui décrit l'évolution d'une grandeur physique (température, concentration d'un polluant, etc...) soumise à deux mécanismes physiques basiques que sont l'advection et la diffusion. Ce modèle présente l'avantage d'être à la fois très simple et susceptible de décrire des phénomènes physiques réels, rencontrés dans des problèmes plus complexes. De manière générale, l'équation associée à ce problème, dans le domaine de calcul  $\Omega \subset \mathcal{R}^d$  où  $d$  est la dimension de l'espace, s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\kappa \nabla u) + f \quad \text{dans } \Omega, \forall t > 0 \quad (3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \forall t > 0 \quad (3.2)$$

$$u = u_0 \quad \text{pour } t = 0 \quad (3.3)$$

Où le vecteur  $\mathbf{a}$  est le champ de vitesse, la constante  $\kappa$  le coefficient de diffusion, la fonction  $f$  un terme source et  $u = u(t, \mathbf{x})$  la grandeur scalaire à déterminer. Malgré l'apparente simplicité de (3.1)-(3.3), il est difficile d'approcher numériquement sa solution lorsque le phénomène de convection prédomine fortement ( c'est-à-dire quand  $\kappa \ll |\mathbf{a}|$  ). En effet, dans ce cas, la solution exacte de (3.1)-(3.3) fait apparaître une couche limite. Autrement dit il y a de petites régions où le gradient de la solution est très grand. La taille de ces régions est en général beaucoup plus petite que la résolution du maillage, d'où l'impossibilité de capter correctement la couche limite.

Avant de poursuivre, quelques notations utiles sont introduites. Pour un domaine donné  $\Omega \subset \mathcal{R}^d$ , l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre  $m \geq 0$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$  est noté classiquement  $H^m(\Omega)$ . Le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  dont les fonctions s'annulent sur la frontière est noté  $H_0^1(\Omega)$ . La norme de l'espace  $H^m(\Omega)$  est représentée par  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ , la norme  $L^2$  par  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  et le produit scalaire par  $(\cdot, \cdot)$ . L'espace dual de  $H_0^1(\Omega)$  est noté  $H^{-1}(\Omega)$  et le crochet de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La formulation variationnelle de Galerkin associée à l'équation (3.1) est obtenue en multipliant cette équation par des fonctions tests et en intégrant sur le domaine de calcul  $\Omega$ . Le problème peut alors être écrit sous forme faible de la façon suivante : soit  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $a \in L^\infty(\Omega)$ , trouver  $u \in V := H_0^1(\Omega)$  tel que

$$(\partial_t u, v) + (a \cdot \nabla u, v) + (\kappa \nabla u, \nabla v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (3.4)$$

## 3.2 Discrétisation de Galerkin standard

### 3.2.1 Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale, le partitionnement  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  est défini de sorte à contenir  $N_{el}$  éléments notés  $K$ . Ces éléments recouvrent le domaine et ils sont, soit disjoints, soit reliés par une arête ou une face commune. L'espace de fonctions  $V$ , défini ci-dessus, est alors approché par un espace de dimension fini  $V_h$ , constitué de fonctions continues, polynômiales par morceaux.

$$V_h = \{ v_h \in H_0^1(\Omega), v_h|_K \text{ est un polynôme pour } K \in \mathcal{T}_h \} \quad (3.5)$$

La formulation variationnelle discrète de Galerkin pour ce problème devient alors :  
Trouver  $u_h \in V_h$  tel que

$$(\partial_t u_h, v_h) + (a \cdot \nabla u_h, v_h) + (\kappa \nabla u_h, \nabla v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.6)$$

Finalement, le système matriciel est obtenu grâce à l'introduction des fonctions d'interpolation dans la formulation variationnelle (3.6). Ce système linéaire matriciel pour l'équation d'advection-diffusion se met sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre, après assemblage des matrices élémentaires :

$$\mathbf{M}\dot{U} + \mathbf{K}_a U + \mathbf{K}_d U = \mathbf{F} \quad (3.7)$$

où  $U$  est le vecteur des inconnues nodales,  $\mathbf{M}$  est appelée matrice de masse,  $\mathbf{K}_a$  est la matrice des raideurs associée au terme advectif,  $\mathbf{K}_d$  est la matrice des raideurs associée au terme diffusif, et  $\mathbf{F}$  est le terme source. Les coefficients de ces matrices et vecteurs sont définis comme suit :

$$\mathbf{M} = \mathcal{A}_{i=1}^{N_{el}} \int_{K_i} \phi_i \phi_j dK \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_a = \mathcal{A}_{i=1}^{N_{el}} \int_{K_i} \mathbf{a} \cdot \nabla \phi_i \phi_j dK \quad (3.9)$$

$$\mathbf{K}_d = \mathcal{A}_{i=1}^{N_{el}} \int_{K_i} \kappa \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dK \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F} = \mathcal{A}_{i=1}^{N_{el}} \int_{K_i} f \phi_i dK \quad (3.11)$$

$\phi_i$  est la fonction d'interpolation linéaire au noeud  $i$  et  $\mathcal{A}$  est l'opérateur d'assemblage de matrice.

### 3.2.2 Discrétisation temporelle

Le système d'équations différentielles ordinaires (3.7) doit être discrétisé en temps. En utilisant une approximation de type différences finies, la dérivée de  $U$  par rapport au temps peut être approchée au temps  $t = n\Delta t$  par :

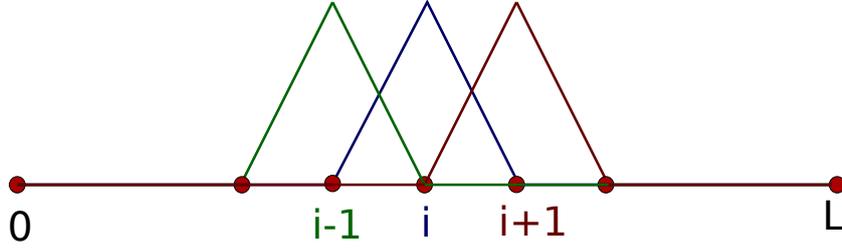
$$\mathbf{M} \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} + \mathbf{K} (\theta U^n + (1 - \theta) U^{n-1}) = \theta \mathbf{F}^n + (1 - \theta) \mathbf{F}^{n-1} \quad (3.12)$$

avec  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_d$ ,  $\Delta t$  le pas de temps et  $\theta$  le paramètre de la méthode compris dans l'intervalle  $[0,1]$ . Le choix ( $\theta = 0$ ) correspond au schéma d'Euler explicite, ( $\theta = 1$ ) au schéma d'Euler implicite et ( $\theta = 1/2$ ) au schéma de Crank-Nicolson. A noter que les deux premières méthodes sont d'ordre 1 tandis que le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2.

## 3.3 Advection pure 1D

Dans cette partie, seule l'équation d'advection pure unidimensionnelle est étudiée. Le but est de mettre en évidence l'instabilité de la méthode de Galerkin pour un tel problème et d'analyser la façon dont les méthodes stabilisées apportent une solution pour construire un schéma à la fois robuste et précis. L'équation considérée est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } [0, L] \quad (3.13)$$

FIG. 3.1: Fonctions d'interpolation associées aux noeuds  $i-1$ ,  $i$  et  $i+1$ 

Une condition initiale et des conditions aux limites adéquates sont associées à cette équation. Un maillage uniforme sur le domaine  $[0, L]$  est utilisé. La taille des mailles est notée  $h$  et les fonctions d'interpolations sont présentées sur la figure (3.1).

### 3.3.1 La méthode de Galerkin

La formulation de Galerkin associée à l'équation (3.13) conduit à la formulation suivante : Trouver  $u_h \in V_h$  tel que

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_h}{\partial t} + a \frac{\partial u_h}{\partial x} \right) v_h \, d\Omega = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.14)$$

La résolution du problème (3.14) conduit à la formulation semi-discrète en espace suivante pour le  $i^{eme}$  noeud du maillage uniforme :

$$\frac{h}{6} \left( \partial_t u_{i-1} + 4\partial_t u_i + \partial_t u_{i+1} \right) + a \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2} = 0 \quad (3.15)$$

où  $u_{i-1}$ ,  $u_i$  et  $u_{i+1}$  sont les valeurs de  $u$  aux noeuds  $i-1$ ,  $i$  et  $i+1$  respectivement. Cette approche est identique à celle des différences finies centrées pour le terme d'advection. Par conséquent, le schéma est d'ordre 2 mais il n'est pas stable. L'une des solutions pour résoudre ce problème d'instabilité numérique est de d'utiliser une discrétisation décentrée, par exemple si  $a$  est positive :

$$\frac{h}{6} \left( \partial_t u_{i-1} + 4\partial_t u_i + \partial_t u_{i+1} \right) + a \frac{u_i - u_{i-1}}{2} = 0 \quad (3.16)$$

Cependant, une telle méthode réduit la précision du schéma à l'ordre 1. Ce schéma apporte, en effet, trop de diffusion numérique.

### 3.3.2 La méthode SUPG

Pour obtenir un schéma numérique moins diffusif, et donc plus précis, plusieurs méthodes ont été envisagées. La plus populaire d'entre elles est la méthode nommée Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) introduite par T.J.R Hughes et A.N. Brooks dans [13]. L'idée de cette

méthode est de n'ajouter de la diffusion numérique que dans la direction des lignes de courant, d'où le nom "Streamline Upwind". En pratique, les fonctions tests de la formulation de Galerkin sont modifiées pour tous les termes de l'équation, comme illustré par la figure (3.2), ce qui conduit à une formulation dite de Petrov-Galerkin. Cela peut être interprété comme une façon de donner plus de poids au noeud aval qu'au noeud amont. La formulation ainsi obtenue s'écrit :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( v + \tau a \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

$\tau$  est le paramètre de stabilisation. Ce terme permet de contrôler la quantité de diffusion numérique apportée au schéma. La formulation semi-discrète en espace associée à l'équation (3.17) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_t^h(u) + a \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2} + \frac{a^2 \tau}{h} (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = 0 \quad (3.18)$$

Le dernier terme de cette formulation correspond à la discrétisation d'un opérateur de type laplacien. Il s'agit donc d'un terme de diffusion. L'opérateur  $\mathcal{L}_t^h(u)$  s'écrit, quant à lui :

$$\mathcal{L}_t^h(u) = \frac{h + 3a\tau}{6} \partial_t u_{i-1} + \frac{2h}{3} \partial_t u_i + \frac{h - 3a\tau}{6} \partial_t u_{i+1} \quad (3.19)$$

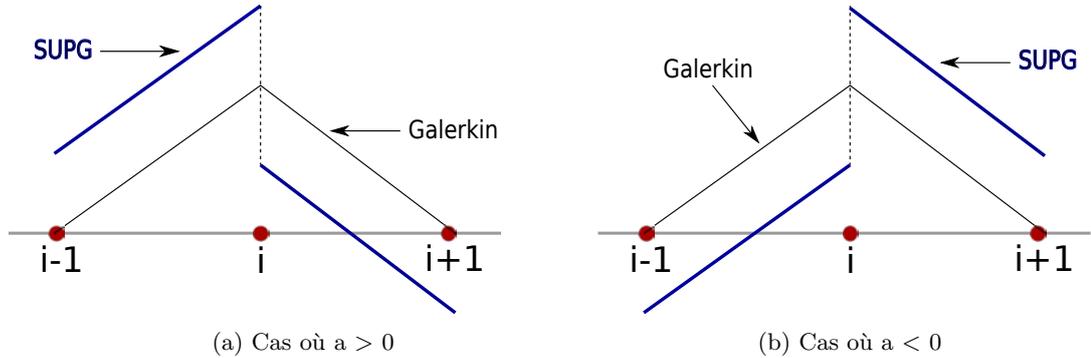


FIG. 3.2: Fonctions d'interpolation de la méthode SUPG pour le noeud  $i$

### 3.3.3 Condensation de la matrice de masse

Lors de la discrétisation en espace de la formulation variationnelle (3.4), il apparaît une matrice de masse  $\mathbf{M}$ , définie par la formule (3.8). A priori, cette matrice n'est pas diagonale. Aussi, même si le schéma en temps est explicite, la méthode par éléments finis conduit à la résolution d'un système, ce qui peut être coûteux. Il est néanmoins possible d'approcher cette matrice par une matrice diagonale. Pour chaque ligne, notée  $i$ , de la matrice de masse, la somme des coefficients est effectuée. Le résultat obtenu constitue alors le  $i^{eme}$  terme de la matrice

diagonale approchée. Cette technique numérique est appelée condensation de la matrice de masse. Elle est très employée en simulation numérique [44, 45, 46, 47]. Grâce à elle, pour un schéma en temps explicite, le système diagonale peut être très rapidement inversé. Dans le cas d'un schéma en temps implicite, il est nécessaire de résoudre un système linéaire. La diagonale de la matrice, associée à ce système, est alors renforcée lorsque la condensation de la matrice de masse est utilisée. Cela facilite son inversion. Cela revient à construire la matrice de masse condensée de la façon suivante :

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathcal{A}_{i=1}^{N_{el}} \left( \int_{K_i} \sum_{j \in V(i)} \phi_i \phi_j dK \right) \quad (3.20)$$

Où  $V(i)$  désigne l'ensemble des noeuds qui appartiennent au voisinage de  $i$ . Ce type de distribution se retrouve naturellement dans les méthodes volumes finis ou différences finies. La condensation de la matrice de masse permet d'écrire la formulation (3.18) sous la forme :

$$h \partial_t u_i + a \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2} + \frac{a^2 \tau}{h} (-u_{i-1} + u_i - u_{i+1}) = 0 \quad (3.21)$$

### 3.3.4 Analyse de l'erreur de troncature

Dans un premier temps et pour simplifier les calculs, un schéma d'Euler explicite est utilisé pour discrétiser l'équation (3.21) en temps.

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} + \frac{a^2 \tau}{h} (-u_{i-1}^n + u_i^n - u_{i+1}^n) = 0 \quad (3.22)$$

Le pas de temps est noté  $\Delta t = (T_{final} - T_0)/N_{iter}$ , avec  $T_{final}$  le temps final de la simulation,  $T_0$  le temps initial et  $N_{iter}$  le nombre d'itérations. La formulation (3.22) est une approximation discrète de l'équation (3.13). L'erreur de troncature, notée  $\mathcal{T}$ , permet de mettre en évidence l'erreur commise entre le problème continu et sa version discrétisée. Elle permet également de vérifier la consistance et l'ordre de la méthode numérique. Des développements limités de Taylor, appliqués au schéma (3.22), donnent l'erreur de troncature suivante :

$$\mathcal{T}_1 = a^2 \left( \frac{\Delta t}{2} - \tau \right) \partial_{x^2} u - \frac{a^3 \Delta t^2 - ah^2}{6} \partial_{x^3} u - \frac{a^2 \tau h^2}{12} \partial_{x^4} u + o(h^2, \Delta t^2) \quad (3.23)$$

Le schéma est donc bien consistant avec le problème d'advection. Le premier terme de l'erreur de troncature,  $a^2(\Delta t/2 - \tau)$ , indique qu'il est d'ordre 1 si  $\tau \neq \Delta t/2$  et qu'il est d'ordre 2 sinon. Cette première analyse permet donc de montrer que le choix du paramètre de stabilisation peut avoir une grande importance.

Une fois ces constatations faites, il est légitime de s'interroger sur l'impact de la condensation de la matrice de masse sur la précision du schéma. La discrétisation temporelle est toujours

effectuée par un schéma d'Euler explicite. En l'absence de condensation de la matrice de masse, l'erreur de troncature obtenue est :

$$\mathcal{T}_2 = \frac{a^2 \Delta t}{2} \partial_{x^2} u - a^3 \left( \frac{\tau \Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{6} \right) \partial_{x^3} u + a^2 \tau \left( \frac{\Delta x^2}{12} + \frac{a^2 \Delta t^2}{6} \right) \partial_{x^4} u + o(h^2, \Delta t^2) \quad (3.24)$$

Cette fois-ci, le schéma est d'ordre 1 quel que soit le choix du terme de stabilisation. Cette faible précision est prévisible. En effet, il est commis une erreur d'ordre 1 dans l'approximation du terme de dérivée en temps. Cela n'est pas compensé par un des termes de la discrétisation de la dérivée en espace, comme c'est le cas pour  $\mathcal{T}_1$ . Par conséquent, l'erreur se répercute sur l'ordre global du schéma. Pour obtenir un schéma qui soit effectivement d'ordre 2, il faut recourir à une discrétisation en temps qui soit au moins d'ordre 2. La méthode d'Adam-Bashforth vérifie cette condition. L'équation (3.21) est d'abord reformulée sous la forme :

$$\partial_t u = f(u) \quad (3.25)$$

La méthode d'Adam-Bashforth s'écrit alors :

$$u^{n+1} = u^n + \frac{3\Delta t}{2} f(u^n) - \frac{\Delta t}{2} f(u^{n-1}) \quad (3.26)$$

L'équation (3.18) est donc discrétisée en temps grâce au schéma d'Adam-Bashforth. La matrice de masse est ensuite condensée. Au final, l'erreur de troncature obtenue pour ce schéma est la suivante :

$$\mathcal{T}_3 = -a^2 \tau \partial_{x^2} u + a \left( \frac{\Delta x^2}{6} + \frac{a^2 \Delta t^2}{12} + \frac{a^3 \tau \Delta t}{2} \right) \partial_{x^3} u + a^2 \left( \frac{a^2 \tau \Delta t^2}{4} - \frac{\tau \Delta x^2}{12} \right) \partial_{x^4} u + o(h^2, \Delta t^2) \quad (3.27)$$

Contre toute attente, cette formulation s'avère être également d'ordre 1. Il faut rechercher la cause de cette dégradation de la précision dans la technique de condensation de la matrice de masse. En effet, le schéma d'Adam-Bashforth pour lequel la condensation n'est pas appliquée conduit à l'erreur de troncature :

$$\mathcal{T}_4 = -\frac{5a^3 \Delta t^2}{12} \partial_{x^3} u + a^2 \left( \frac{\tau \Delta x^2}{12} + \frac{5a^2 \tau \Delta t^2}{12} \right) \partial_{x^4} u + o(h^2, \Delta t^2) \quad (3.28)$$

Cette fois-ci, le schéma est à la fois consistant et d'ordre 2. Cela montre donc, que pour ce problème d'advection pure, la méthode SUPG, associée à une discrétisation temporelle d'ordre

suffisamment élevé, conduit bien à un schéma précis à l'ordre 2 lorsque les fonctions d'interpolation sont linéaires par éléments. Cela suggère également que la matrice de masse condensée est à utiliser avec précaution [48].

### 3.4 Approche multi-D

La méthode SUPG est présentée, à présent, pour un problème de dimension quelconque ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ). La formulation variationnelle associée au problème (3.1)-(3.3) s'écrit : trouver  $u_h \in V_h$  tel que

$$(\partial_t u_h, v_h) + (a \cdot \nabla u_h, v_h) + (\kappa \nabla u_h, \nabla v_h) + S(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.29)$$

Cette formulation correspond à la formulation de Galerkin classique (3.6) à laquelle s'ajoute un terme de stabilisation  $S(u_h, v_h)$ . Cette stabilisation s'écrit :

$$S(u_h, v_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left( \mathbf{a} \cdot \nabla v_h \tau^e, \mathcal{R}(u_h) \right)_{\Omega_e} \quad (3.30)$$

où  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e$ . L'un des principaux aspects du schéma SUPG est que la stabilisation est introduite de manière à ce que la formulation reste consistante avec le problème (3.1)-(3.3). C'est dans ce but que le terme de stabilisation est choisi proportionnel au résidu de l'équation  $\mathcal{R}(u_h)$ .

$$\mathcal{R}(u_h) = \partial_t u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - \kappa \Delta u_h - f_h \quad (3.31)$$

Un second aspect, non moins important, réside dans le fait que la stabilisation n'intervient que le long des lignes de courant. Cette propriété est assurée grâce au terme  $\mathbf{a} \cdot \nabla v_h$ . L'objectif est de minimiser la dissipation numérique. Celle-ci n'est ajoutée qu'aux endroits où elle est réellement nécessaire. Le dernier ingrédient de la méthode SUPG est le paramètre de stabilisation  $\tau^e$ . Ce paramètre permet de contrôler la quantité de diffusion introduite. Il n'existe pas de définition unique pour  $\tau^e$ . Néanmoins dans le cadre d'un problème d'advection diffusion scalaire, il est courant d'utiliser :

$$\tau^e = \frac{h_e}{2\|\mathbf{a}\|} \left( \coth Pe - \frac{1}{Pe} \right) \quad \text{avec } Pe = \frac{\|\mathbf{a}\| h_e}{2\kappa} \quad (3.32)$$

où  $h_e$  est une longueur caractéristique de l'élément  $\Omega_e$ . Une justification de ce choix de stabilisation est proposée dans [49]. A noter que, pour le problème monodimensionnel stationnaire, cette formulation conduit à l'obtention aux noeuds de la solution exacte.  $Pe$  désigne le nombre de Péclet. C'est un nombre sans dimension qui représente le rapport du transfert par convection sur le transfert par diffusion. Aussi le paramètre de stabilisation  $\tau^e$  est d'autant plus grand

que l'écoulement est dominé par l'advection, et réciproquement il est d'autant plus petit que la diffusion domine. Le comportement de la fonction  $\xi(Pe) = \coth(Pe) - 1/Pe$  est illustré par la figure (3.3). A noter que pour les cas extrêmes d'advection et de diffusion pure, autrement dit lorsque  $\kappa = 0$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  respectivement, la définition du coefficient de stabilisation (3.32) n'est pas singulière puisque  $\lim_{Pe \rightarrow \infty} \xi(Pe) = 1$  et  $\lim_{Pe \rightarrow 0} \xi(Pe) = 0$ . D'un point de vu numérique, il existe une réelle difficulté lorsque  $Pe \rightarrow \infty$  ou  $Pe \rightarrow 0$ . Pour résoudre ce problème, la fonction  $\xi$  est souvent approchée par  $\xi(Pe) \approx \min(1, Pe/3)$  ou  $\xi(Pe) \approx \max(0, 1 - 1/Pe)$  comme cela est indiqué dans [49, 13].

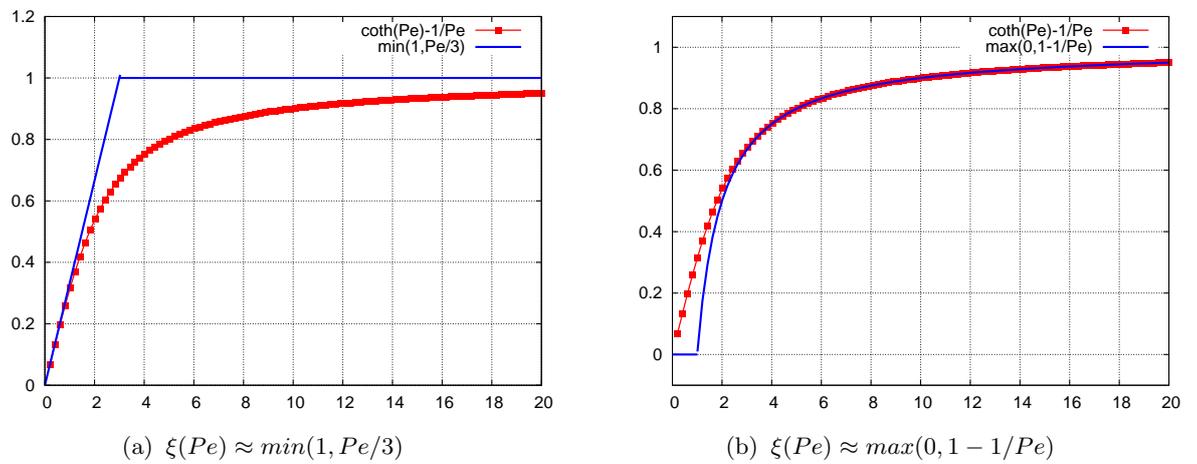


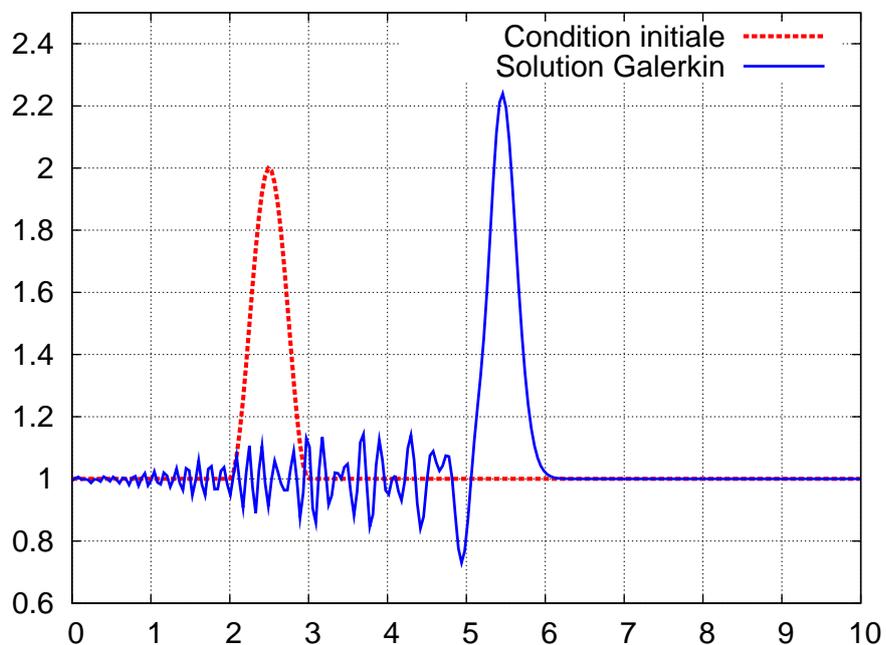
FIG. 3.3: Tracé de la fonction  $\coth(Pe) - 1/Pe$  et de ses approximations

### 3.5 Résultats numériques

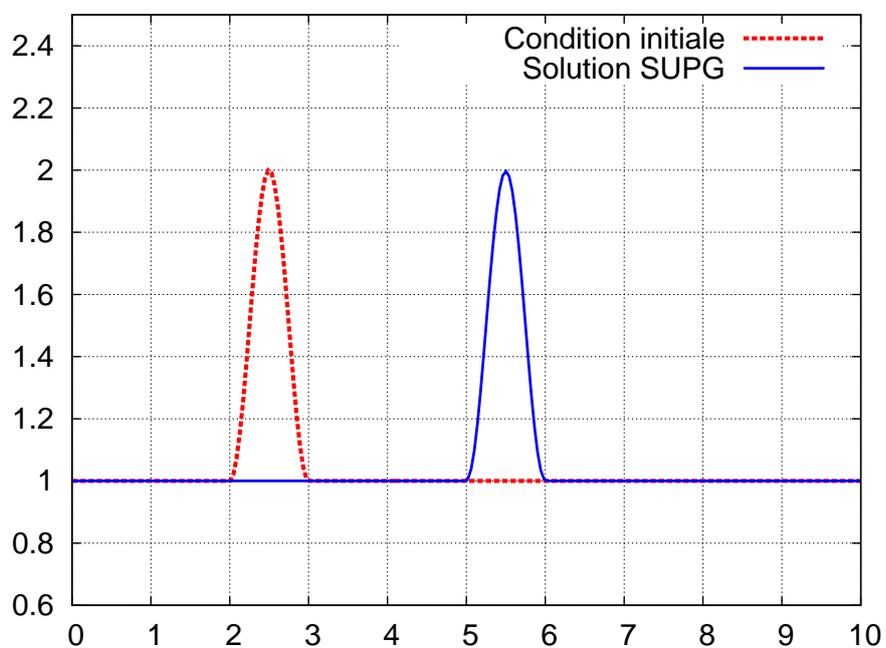
Pour donner une illustration des avantages de la méthode SUPG par rapport à celle de Galerkin, quelques résultats numériques sont exposés dans cette partie. Pour commencer, les solutions du problème d'advection pure 1D, obtenues par les deux formulations, sont présentées. Le domaine de calcul, associé à l'équation (3.13), correspond à l'intervalle  $[0, 10]$ . Des conditions de Dirichlet sont imposées aux bords. La condition initiale,  $u_0(x)$ , quant à elle, est régulière et apparaît en pointillés sur la figure (3.4). Cette même figure montre les solutions numériques obtenues par les deux méthodes. Tandis que l'inadéquation du schéma de Galerkin, pour ce problème, est confirmée par la présence d'oscillations parasites, le schéma SUPG s'avère être stable.

L'étude de la convergence en maillages pour différentes discrétisations temporelles est donnée sur la figure (3.5). L'erreur commise entre la solution exacte du problème et la solution du schéma numérique est notée  $\epsilon_h$ . Elle est supposée pouvoir être exprimée sous la forme  $\epsilon_h = Ch^p$ , où  $C$  est une constante,  $h$  une taille caractéristique du maillage et  $p$  l'ordre de la méthode. Les ordres prévus par l'analyse de l'erreur de troncature sont alors retrouvés numériquement. Aussi, le schéma d'Euler explicite conduit à une méthode précise à l'ordre 1. Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, combiné à la condensation de la matrice de masse, entraîne également la méthode à être

du premier ordre. Seul le schéma de Runge-Kutta, associé à une matrice de masse consistante, amène la méthode à être d'ordre 2.



(a) Solution obtenue par la méthode de Galerkin



(b) Solution obtenue par la méthode SUPG

FIG. 3.4: Résultats de la résolution du problème d'advection pure

Un calcul 2D, pour le problème d'advection-diffusion stationnaire, est présenté. La figure

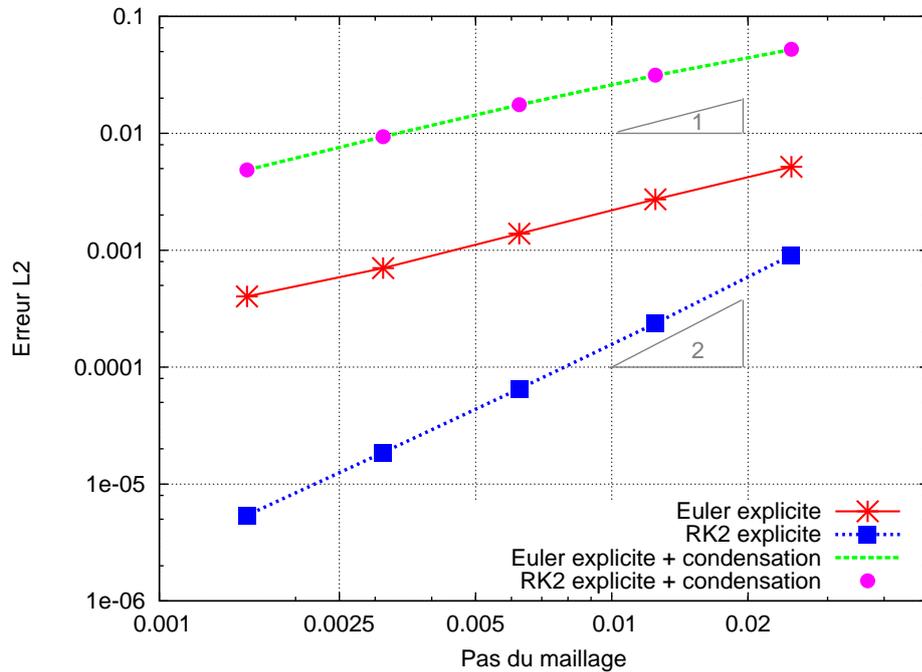


FIG. 3.5: Convergences en maillage pour différents schémas temporelles

(3.6) donne une description du domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites. Le champ de vitesse  $\mathbf{a}$  est constant et défini par  $\mathbf{a} = (\cos\theta, \sin\theta)$  avec  $\theta = 63.4^\circ$ . Le terme de viscosité est donné par  $\kappa = 10^{-6}$ . En ce qui concerne le maillage, le domaine  $[0, 1] \times [0, 1]$  est divisé en  $20 \times 20$  carrés. Chacun d'eux est ensuite subdivisé en 2 triangles rectangles, comme illustré sur la figure (3.6b). A noter que l'angle d'incidence de la vitesse,  $\theta$ , n'est pas aligné avec les éléments du maillage. Pour cette discrétisation du domaine, le nombre de Péclet local est donc de  $Pe = 2.5 \times 10^4$ . L'advection prédomine fortement et cela rend, une fois de plus, le schéma de Galerkin particulièrement instable.

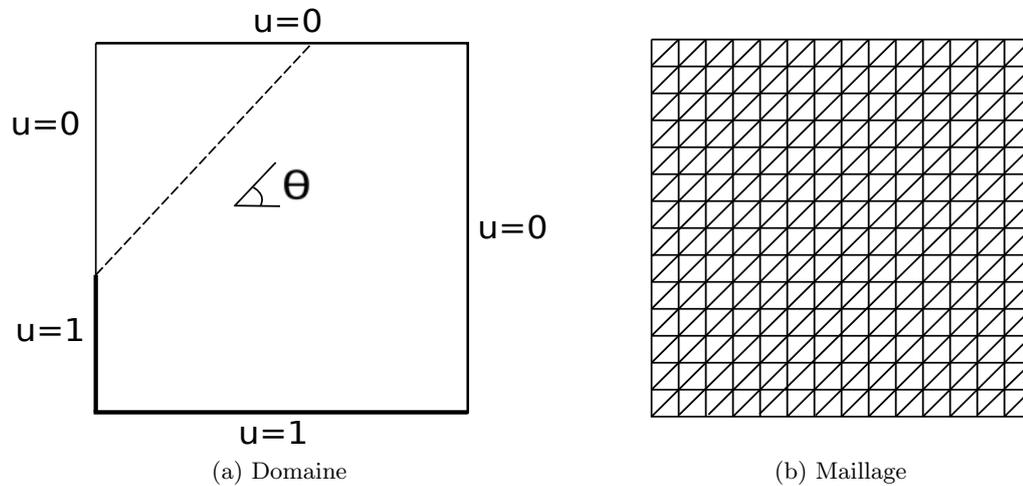


FIG. 3.6: Description du cas test d'advection-diffusion stationnaire

La définition (3.32), du paramètre de stabilisation  $\tau$ , est adoptée pour ce calcul. Les figures (3.7a) et (3.7b) présentent la solution obtenue par la méthode SUPG. La première donne une représentation 2D classique du résultat. Dans un souci de clarté, la deuxième figure expose cette même solution en 3D. La grandeur  $u$  est représentée sur l'axe  $z$ . Par opposition avec celle de Galerkin, la méthode SUPG permet de converger vers une solution pour ce problème. Néanmoins, comme le montre la figure (3.7b), des oscillations non physiques apparaissent. Elles sont dues à des discontinuités de la solution. En effet, le schéma SUPG n'est pas monotone. Par conséquent, en présence de gradients importants, la présence d'oscillation n'est pas exclue. Pour contrôler ce phénomène, un terme dit de *capture de chocs* est généralement introduit. Cette technique sera présentée dans le paragraphe (4.4.3).

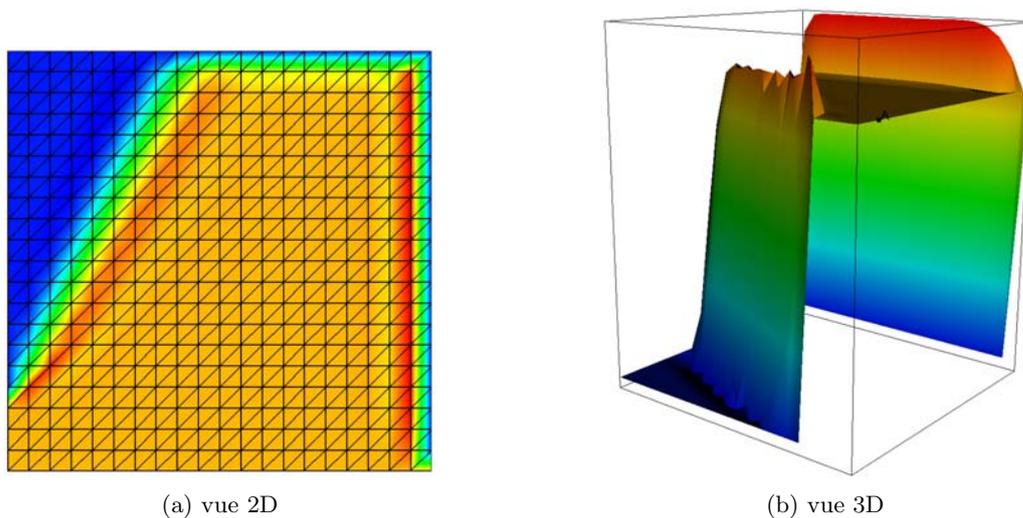


FIG. 3.7: Solution SUPG du problème d'advection-diffusion stationnaire

## Chapitre 4

# Généralisation de la méthode SUPG aux systèmes d'équations

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Description du problème</b>	<b>47</b>
<b>4.2</b>	<b>Les éléments finis classiques</b>	<b>48</b>
4.2.1	Formulation faible	48
<b>4.3</b>	<b>Imposition des conditions aux limites</b>	<b>51</b>
<b>4.4</b>	<b>La formulation SUPG</b>	<b>53</b>
4.4.1	Formulation faible	53
4.4.2	Le paramètre de stabilisation	54
4.4.3	Capture de choc	55
4.4.4	Résultats numériques	59
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>69</b>

---

Dans leur article de 1982 [13], A.N. Brooks et T.J.R. Hughes soumettent leur version de la méthode SUPG, pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Pour les écoulements compressibles, une formulation a été proposée par T.E. Tezduyar et T.J.R. Hughes dans [14, 15]. Le principe de la méthode reste le même. Il s'agit de modifier la formulation variationnelle de Galerkin pour obtenir une discrétisation décentrée selon la direction de l'écoulement.

### 4.1 Description du problème

Pour simplifier les formules, le système d'équations de Navier-Stokes (1.1)-(1.3) est exprimé sous forme vectorielle :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^c - \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^d = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur des variables conservatives.  $\mathbf{F}^c$  et  $\mathbf{F}^d$  correspondent aux termes convectifs et diffusifs, respectivement, des équations de Navier-Stokes. Ces vecteurs sont définis de la façon suivante :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_i^c = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i u_3 + \delta_{i3} p \\ (\rho e + p) u_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \sigma_{i3} \\ \lambda_c \partial_{x_i} T + \sigma_{ik} u_k \end{pmatrix}$$

avec  $\rho$  la densité de l'écoulement,  $u_i$  les composantes de la vitesse,  $e$  l'énergie totale,  $p$  la pression et  $T$  la température. Le symbole de Kronecker est noté  $\delta_{ij}$ .  $\lambda_c$  dénote la conductivité thermique et  $\sigma$  est défini par :

$$\sigma = \mu(\nabla \cdot \mathbf{U}) Id - \frac{2}{3} \mu (\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U}) \quad (4.2)$$

## 4.2 Les éléments finis classiques

La méthode SUPG s'inscrit dans le cadre des méthodes de type éléments finis. Lorsqu'il s'agit de résoudre un problème naturellement diffusif, comme par exemple l'équation de la chaleur, elle coïncide a priori avec la méthode de Galerkin. Pour des problèmes dominés par l'advection, tels que les écoulements turbulents, elle se différencie par un apport supplémentaire de diffusion numérique. Aussi, dans le cadre des équations de Navier-Stokes compressible, la méthode de Galerkin est tout d'abord présentée afin de mettre en place le cadre de travail, et de motiver l'introduction de méthodes stabilisées.

### 4.2.1 Formulation faible

Le domaine de calcul  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  a pour bord  $\partial\Omega = \Gamma$ . Il est discrétisé en  $n_{el}$  éléments  $\Omega_e$ . L'espace des fonctions continues, polynomiales par morceaux sur chaque élément, est noté  $H_h$ . En ce qui concerne les conditions aux limites, elles seront décrites, en détail, dans le paragraphe suivant. Pour le moment, l'opérateur  $\mathcal{B}$  représente les conditions de type Dirichlet. L'espace des fonctions tests  $\mathcal{W}_h$  et celui dans lequel la solution approchée  $\mathbf{U}_h$  est recherchée  $\mathcal{V}_h$  sont exprimés comme suit :

$$\mathcal{W}_h = \{ \mathbf{W} \in (H_h(\Omega))^{Nvar} \mid \mathcal{B}\mathbf{W} = \mathbf{0} \} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{V}_h = \{ \mathbf{V} \in (H_h(\Omega))^{Nvar} \mid \mathcal{B}\mathbf{W} = \mathbf{g} \} \quad (4.4)$$

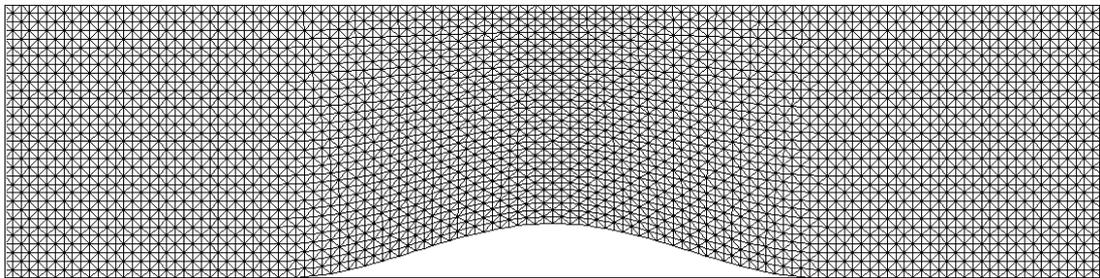
où  $Nvar$  est le nombre d'éléments du vecteur des variables conservatives  $\mathbf{U}_h$  et  $\mathbf{g}$  est la condition de Dirichlet. La formulation variationnelle s'écrit alors : Trouver  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_h$  tel que,  $\forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{W}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} \left( \mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h) - \mathbf{F}_i^d(\mathbf{U}_h) \right) \cdot \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \left( \mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h) - \mathbf{F}_i^d(\mathbf{U}_h) \right) \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{W}_h \, d\Gamma = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour motiver l'introduction des éléments finis stabilisés, un exemple de calcul simple, pour lequel la méthode de Galerkin est inefficace, est présenté. Il s'agit d'un test classique appelé Bump. La figure (4.1a) décrit le domaine de calcul ainsi que les conditions imposées aux bords. L'écoulement est supposé non visqueux et le nombre de Mach est de 0.4. Enfin, le maillage, présenté sur la figure (4.1b), comprend 4 257 noeuds et 8 192 triangles. La figure (4.2) donne une illustration de la solution obtenue, pour ce calcul, par la méthode de Galerkin. Les isolignes de pression et de vitesse sont représentées. Il est clair que des oscillations parasites polluent la solution. Ce résultat n'est donc pas satisfaisant. Il faut faire appel à une méthode numérique bénéficiant d'une meilleure stabilité pour résoudre ce problème. C'est ce qui sera fait dans la suite, grâce au schéma SUPG.

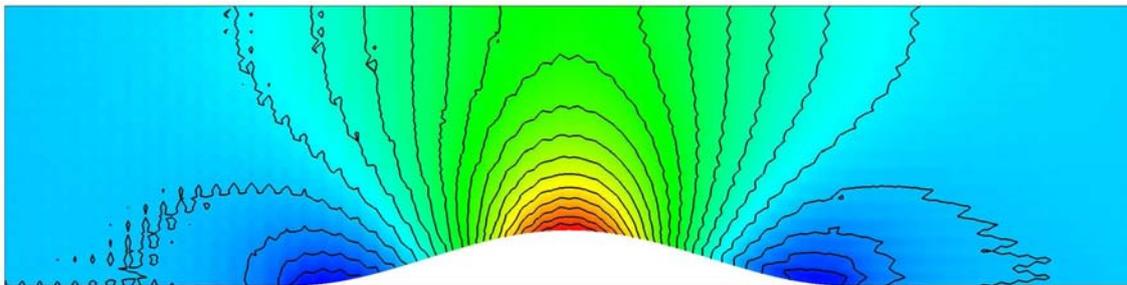


(a) Les conditions aux limites

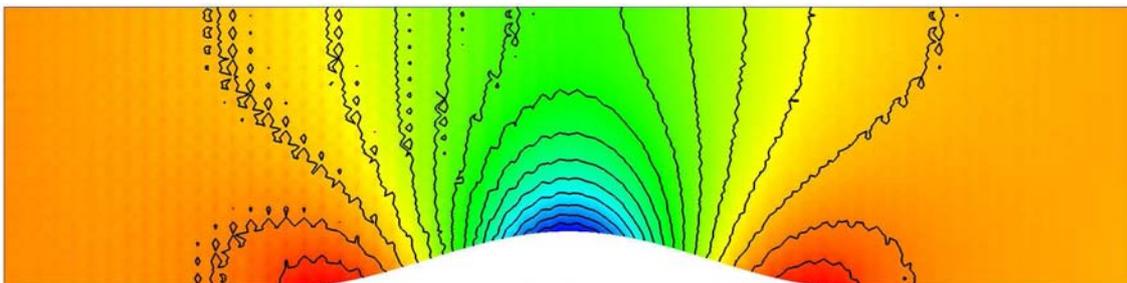


(b) Le maillage

FIG. 4.1: Bump - Description du domaine de calcul



(a) Isolignes de vitesse



(b) Isolignes de pression

FIG. 4.2: Solution du problème du Bump avec la méthode de Galerkin

### 4.3 Imposition des conditions aux limites

Il est, bien évidemment, indispensable d'associer des conditions aux limites aux équations de Navier-Stokes pour que le problème soit fermé. Ce paragraphe s'intéresse à la façon dont ces conditions sont imposées par le schéma numérique.

**Paroi adhérente :** Pour un écoulement visqueux, le fluide adhère à la paroi. Par continuité, sa vitesse  $\mathbf{u}$  doit être identique à celle du mur  $\mathbf{u}_{mur}$ .

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{mur} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{mur} \quad (4.6)$$

Dans la plupart des cas, la paroi est immobile et donc  $\mathbf{u}_{mur} = \mathbf{0}$ . Pour que le problème soit bien posé, il manque encore une condition. Il y a deux choix possibles. Soit la température est considérée comme étant continue :

$$T(\mathbf{x}) = T_{mur} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{mur} \quad (4.7)$$

Soit, dans le cas de simulation stationnaire, le transfert de chaleur peut être considéré nul. Dans ce cas :

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{mur} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à la paroi.

**Paroi glissante :** Pour un écoulement non visqueux ( $\mathbf{F}_i^d = 0$ ), le fluide n'adhère pas à la paroi mais il ne peut pas la traverser. Aussi, une condition de non pénétration est imposée.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{mur} \quad (4.9)$$

La formulation variationnelle du problème non visqueux (c'est-à-dire du système des équations d'Euler) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{W}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h) \cdot \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{W}_h \, d\Gamma = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

La fonction test associée à un noeud  $i$  interne au domaine  $\Omega$  est à support compact. Par conséquent, elle s'annule sur le bord  $\Gamma$  et le dernier terme de (4.10) s'annule. Pour un noeud qui appartient à la paroi, ce terme n'est pas nul et va permettre d'imposer la condition de paroi glissante. Il suffit de définir le flux  $\mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h)$  sur le bord, de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^c(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ pn_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

**Entrée et sortie :** En théorie, le domaine de calcul utilisé pour la simulation d'un écoulement de fluide devrait être infini. En pratique, il est évident que cela est impossible. Il faut donc se restreindre à un domaine fini dont la frontière est suffisamment éloignée de l'objet à étudier. La solution est supposée y être constante, le flux eulérien peut alors être approché de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^c(\mathbf{U}_h) \approx \frac{\partial \mathbf{F}^c(\mathbf{U}_h)}{\partial \mathbf{U}_h} \mathbf{U}_h = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{U}_h) \mathbf{U}_h \quad (4.12)$$

$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{U}_h) = \left( \frac{\partial \mathbf{F}_1^c}{\partial \mathbf{U}_h}, \frac{\partial \mathbf{F}_2^c}{\partial \mathbf{U}_h}, \frac{\partial \mathbf{F}_3^c}{\partial \mathbf{U}_h} \right)$  est un vecteur de matrices. Pour une direction  $\mathbf{n}$ , il est possible de définir la matrice  $\mathbf{K}$ ,  $N_{var} \times N_{var}$  :

$$\mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} \quad (4.13)$$

Quelques notations, utiles pour la suite, sont maintenant introduites. Si  $\boldsymbol{\Lambda}$  est une matrice diagonale, alors  $|\boldsymbol{\Lambda}|$  est la matrice construite à partir des valeurs absolues des coefficients de  $\boldsymbol{\Lambda}$ . Ensuite, si  $\mathbf{K} = \mathcal{R} \boldsymbol{\Lambda} \mathcal{L}$  est une matrice diagonalisable, alors  $|\mathbf{K}| = \mathcal{R} |\boldsymbol{\Lambda}| \mathcal{L}$ . Enfin, les matrices  $\mathbf{K}^-$  et  $\mathbf{K}^+$  sont définies comme suit :

$$\mathbf{K}^- = \frac{\mathbf{K} - |\mathbf{K}|}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^+ = \frac{\mathbf{K} + |\mathbf{K}|}{2} \quad (4.14)$$

Pour comprendre la façon d'imposer les conditions d'entrée et de sortie, il est intéressant de faire l'analogie avec le problème d'advection scalaire. En effet, pour l'advection, seule une condition est nécessaire sur le bord d'entrée. Dans le cas d'un système hyperbolique, la diagonalisation du système permet de se ramener à plusieurs problèmes scalaires. Les conditions aux limites sont alors imposées par l'intermédiaire des caractéristiques entrantes. Pour ce faire, le flux eulérien qui apparaît sur l'intégrale de bord de la formulation variationnelle est décomposé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^c(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} &\approx \mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})} \mathbf{U}_h \\ &= \mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})}^+ \mathbf{U}_h + \mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})}^- \mathbf{U}_h \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les deux derniers termes représentent, respectivement, les flux sortant et entrant. Le flux entrant doit correspondre au flux à l'infini et le flux sortant à celui associé à la solution. Le flux, dit de Steger-Warming [50], est alors défini :

$$\mathbf{F}_{SW}^c(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_\infty, \mathbf{n}) = \mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})}^+ \mathbf{U}_h + \mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})}^- \mathbf{U}_\infty \quad (4.16)$$

Dans la formulation variationnelle, les conditions d'entrée et de sortie sont donc imposées en substituant le flux de Steger-Warming au flux eulérien.

## 4.4 La formulation SUPG

### 4.4.1 Formulation faible

Pour permettre la généralisation de la formulation SUPG exposée pour le problème d'advection-diffusion aux équations de Navier-Stokes, celles-ci sont exprimées sous forme quasi linéaire :

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \partial_{x_i} \mathbf{U} - \partial_{x_i} (\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \partial_{x_j} \mathbf{U}) = 0 \quad (4.17)$$

où

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}_i^c}{\partial \mathbf{U}} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \partial_{x_j} \mathbf{U} = \mathbf{F}_i^d \quad (4.18)$$

La convention d'Einstein sur la sommation sur les indices répétés est ici employée. Les matrices  $\mathbf{A}_i(\mathbf{U})$  comportent les effets convectifs et acoustiques des équations de Navier-Stokes. Il s'agit de l'équivalent de la vitesse d'advection rencontré dans le cas scalaire. La formulation variationnelle s'écrit alors : trouver  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_h$  tel que pour tout  $\mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{W}_h \cdot \left( \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h) \partial_{x_i} \mathbf{U}_h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \right) \cdot \left( \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}_h) \partial_{x_j} \mathbf{U}_h \right) \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{H}_h d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \mathbf{A}_k \partial_{x_k} \mathbf{W}_h \tau^e \mathcal{R}(\mathbf{U}_h) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$N_{el}$  désigne le nombre d'éléments du maillage. Par souci de simplicité, les conditions aux limites sont représentées par  $\mathbf{H}_h$ . Elles sont toujours imposées de la façon présentée dans le paragraphe (4.3). Pour compléter la description de la méthode, il convient de donner la définition de  $\mathcal{R}(\mathbf{U}_h)$  qui représente le résidu de l'équation :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_h) = \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h) \partial_{x_i} \mathbf{U}_h - \partial_{x_i} (\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}_h) \partial_{x_j} \mathbf{U}_h) \quad (4.20)$$

Les trois premiers termes de (4.19) correspondent à la formulation de Galerkin classique. Le dernier terme, quant à lui, est celui qui apporte de la stabilisation. Il y a plusieurs remarques à faire sur cette stabilisation. D'abord, son introduction ne nuit pas à la consistance du schéma. En effet, elle est proportionnelle au résidu  $\mathcal{R}(\mathbf{U}_h)$  de l'équation. Aussi, quand le résidu s'annule, le terme de stabilisation est également nul. Ensuite, elle est introduite le long des lignes de courant. Cela permet de n'ajouter de la diffusion artificielle que là où elle est vraiment nécessaire. Enfin, un paramètre de stabilisation, noté  $\tau$  permet de contrôler la quantité de viscosité numérique introduite. Dans le cas d'un système d'équations, comme cela est le cas ici, ce paramètre est une matrice. La définition de ce paramètre est présentée dans le paragraphe suivant. La discrétisation temporelle de ce problème est quant à elle réalisée à l'aide d'un schéma d'Euler implicite.

#### 4.4.2 Le paramètre de stabilisation

Le choix du paramètre de stabilisation est une tâche délicate. Pour des problèmes simples, tel que l'équation d'advection-diffusion, il est possible de calculer une définition optimale de  $\tau$  à partir de la connaissance d'une solution exacte. Cette technique est détaillée dans [51]. La définition est dite optimale dans le sens où la solution approchée par la méthode SUPG, s'avère être nodalement exacte dans le cas 1D. Pour un système d'équations non linéaires, tel que les équations de Navier-Stokes, il est évidemment impossible d'effectuer un pareil calcul. En pratique, les mêmes définitions de  $\tau$  que celles présentées pour l'advection-diffusion, sont pourtant utilisées. Cela sous-entend que l'approche locale du système non linéaire par un système linéaire est raisonnable.

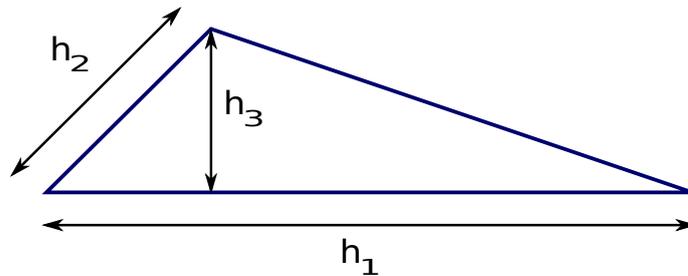


FIG. 4.3: Différents choix pour la taille caractéristique  $h$  de l'élément

La matrice de stabilisation  $\tau$  est un paramètre local à chaque élément  $\Omega_e$  du maillage. De façon générale, elle inclut la taille caractéristique, notée  $h$ , de cet élément. Comme cela est illustré sur la figure (4.3), il existe plusieurs façons de définir  $h$ . La plus grande ou la plus petite longueur des côtés de l'élément peut être, par exemple, choisie. Dans la littérature, il est plutôt recommandé d'opter pour la longueur de l'élément dans la direction de la vitesse de l'écoulement [52, 49]. Etant donné le nombre de travaux sur le sujet, il est impossible de donner une liste exhaustive des définitions existantes pour le paramètre de stabilisation  $\tau$ . Dans ce qui suit, trois définitions seront décrites et étudiées.

$$\tau_1^e = \frac{h}{|\mathbf{u}| + c} \text{Id} \quad (4.21)$$

La première proposition  $\tau_1^e$  est sans aucun doute la plus simple. Il s'agit de la généralisation directe de la définition proposée pour l'équation d'advection-diffusion où  $\tau = h/2\|\mathbf{a}\|$ . Ici,  $c$  désigne la vitesse du son. Pour un gaz parfait, elle est donnée par :  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ . Sa présence au dénominateur dans (4.21) empêche une division par zéro dans le cas où la vitesse  $\mathbf{u}$  s'annulerait. A noter que cette matrice est diagonale et que le même coefficient de stabilisation est appliqué à toutes les équations du système de Navier-Stokes. Pour ce problème non linéaire, les jacobiennes du flux eulérien  $\mathbf{A}_i$  correspondent à la généralisation de la vitesse d'advection. Aussi, sont-elles utilisées pour construire le paramètre de stabilisation  $\tau_2^e$ .

$$\tau_2^e = \left( \sum_{i=1}^{N_{smplx}} |A_1 \partial_x \phi_i + A_2 \partial_y \phi_i + A_3 \partial_z \phi_i| \right)^{-1} \quad (4.22)$$

Dans l'expression (4.22),  $N_{smplx}$  désigne le nombre de sommets de l'élément  $\Omega_e$  et  $\phi_i$  la fonction test associée au noeud  $i$ . Ce type de matrice de stabilisation n'est pas très répandu parmi les utilisateurs de la méthode SUPG. Cela est sans doute dû au coût de l'inversion de la matrice. En effet, il est nécessaire d'inverser  $N_{el}$  matrices de dimension  $N_{var} \times N_{var}$  à chaque pas de temps. Il existe néanmoins des publications, ayant pour sujet le schéma SUPG, où des termes de stabilisation analogues sont utilisés, comme par exemple [24]. De plus, dans un autre cadre que celui des méthodes d'éléments finis stabilisés, celui des schémas distribuants le résidu [53], les bonnes propriétés de cette matrice ont été démontrées. Cela constitue donc une motivation supplémentaire à l'utilisation de  $\tau_2^e$  pour la méthode SUPG. Enfin, la définition  $\tau_3^e$  a récemment été proposée par l'un des pionniers de la méthode SUPG, Tayfun E. Tezduyar, dans [54]. Il s'agit, à nouveau, d'une matrice diagonale. Ce qui lui garantit un coût de calcul raisonnable.

$$\tau_3^e = \left( \sum_{i=1}^{N_{smplx}} c|\mathbf{j} \cdot \nabla \phi_i| + |\mathbf{u} \cdot \nabla \phi_i| \right)^{-1} \text{Id} \quad (4.23)$$

Où  $\mathbf{j}$  est un vecteur unitaire défini par  $\mathbf{j} = \nabla \rho / \|\nabla \rho\|$ . Le terme de stabilisation est un ingrédient capital du schéma SUPG. Cependant, pour achever la description de la méthode, il est indispensable d'aborder également le terme de capture de choc.

### 4.4.3 Capture de choc

En présence de forts gradients, la méthode SUPG n'empêche pas l'apparition locale d'oscillations. Cela s'explique par le fait que ce schéma ne soit ni monotone, ni TVD (Total Variation Diminishing). Il est cependant indispensable de contrôler ces oscillations. Cela peut, en effet, avoir des conséquences nuisibles puisqu'elles peuvent s'amplifier et faire diverger la solution.

Elles peuvent aussi entraîner l'annulation de grandeurs, telles que la densité, dont il faut garantir la stricte positivité. Pour pallier ce problème, un terme de diffusion supplémentaire est généralement introduit. Il s'agit du terme de capture de choc. L'objectif est d'obtenir un schéma qui satisfait à un principe du maximum local, au moins dans certains cas particuliers. Pour la résolution du problème d'advection-diffusion scalaire, plusieurs schémas monotones ont ainsi été obtenus [55, 56]. Les grandes lignes de la construction de ces schémas sont données dans [49]. Dans le contexte des équations d'Euler compressibles, le premier terme de capture de choc a été introduit par T.J.R. Hughes dans [57]. Ce sujet a ensuite été l'objet de nombreuses études [32, 33, 27].

### Le terme de capture de choc

L'introduction de la capture de choc se traduit par l'ajout d'un terme dans la formulation variationnelle du schéma SUPG.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{W}_h \cdot \left( \partial_t \mathbf{U}_h + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h) \partial_{x_i} \mathbf{U}_h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \right) \cdot \left( \mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}_h) \partial_{x_j} \mathbf{U}_h \right) \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{H}_h d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \mathbf{A}_k \partial_{x_k} \mathbf{W}_h \tau^e \mathcal{R}(\mathbf{U}_h) d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{choc}^e \partial_{x_k} \mathbf{W}_h \partial_{x_k} \mathbf{U}_h d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le dernier terme du membre de gauche est le terme de capture de choc. C'est un opérateur de diffusion qui apporte de la dissipation dans toutes les directions. Or ce terme ne doit agir que lorsqu'il y a d'importants gradients dans l'écoulement, c'est pourquoi ce terme de dissipation est pondéré par un paramètre de capture de choc noté  $\nu_{choc}$ . Ce paramètre a pour rôle de donner une indication sur l'amplitude des gradients dans l'écoulement. Il doit être petit, voire nul, si l'écoulement est régulier et devenir actif lorsqu'apparaissent d'importants gradients. Comme pour le paramètre de stabilisation  $\tau$ , il n'existe pas de définition unique et optimale pour ce terme. Dans la suite, est adoptée la définition introduite par T.E. Tezduyar et M. Senga dans [54].

$$\nu_{choc} = \|\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Z}\| \left( \sum_{i=1}^{n_d} \left\| \mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\beta/2-1} \left( \frac{h_{choc}}{2} \right)^{\beta} \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{Y}$  est une matrice diagonale composée de valeurs de référence du vecteur des variables conservatives  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} (U_1)_{ref} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (U_2)_{ref} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (U_3)_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (U_4)_{ref} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (U_5)_{ref} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Une fois de plus, le choix des grandeurs de référence  $(U_i)_{ref}$  n'est pas unique. L'état à l'infini,  $\rho = \rho_\infty$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty$  et  $p = p_\infty$ , est employé pour construire ces grandeurs. Le vecteur  $\mathbf{Z}$  est, quant à lui, exprimé de la façon suivante :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_i^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i} \quad (4.27)$$

Le paramètre  $h_{choc}$  est donné par :

$$h_{choc} = 2 \left( \sum_{i=1}^{N_{smpx}} |\mathbf{j} \cdot \nabla \phi_i| \right)^{-1} \quad (4.28)$$

Et finalement, le paramètre de capture de choc  $\nu_{choc}$  est défini par l'expression

$$\nu_{choc} = \frac{1}{2} \left[ (\nu_{choc})_{\beta=1} + (\nu_{choc})_{\beta=2} \right] \quad (4.29)$$

### Résultats numériques

**Le choc oblique :** Le premier problème considéré est un écoulement uniforme à Mach 2 sur un plan incliné de  $-10^\circ$  par rapport à l'horizontal, suivi d'un plan horizontal. La solution comporte un choc d'un angle de  $29.3^\circ$  émanant du coin, comme représenté sur la figure (4.4). Pour la simulation, le domaine est un carré défini par  $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq 1$ . Le maillage est obtenu en divisant ce domaine en  $40 \times 40$  carrés, chacun étant ensuite subdivisé en deux triangles rectangles. Des conditions de type Dirichlet sont imposées en haut et à gauche du domaine avec  $\rho = 1.0$ ,  $u = \cos 10^\circ$ ,  $v = -\sin 10^\circ$  et  $p = 0.17857$ . Une condition de type paroi glissante est associée au bord bas du domaine  $v = 0$ . Enfin, à droite du domaine, une sortie de type Steger-Warming est définie (la pression  $y$  est donc imposée faiblement). La solution exacte donne en sortie :  $\rho = 1.45843$ ,  $u = 0.88731$ ,  $v = 0.0$  et  $p = 0.30475$ .

La figure (4.5) donne une coupe de la solution numérique pour la densité en  $x = 0.9$ . Il s'agit des chocs obtenus par le schéma SUPG lorsque la technique décrite dans le paragraphe précédent est utilisée ou non. Comme prévu, des overshoots dont l'amplitude n'est pas négligeable apparaissent sur la solution lorsque seul le schéma SUPG est utilisé. Ce problème est néanmoins complètement corrigé grâce à l'emploi du terme de capture de choc.

**Le choc réfléchi :** Ce problème consiste en une onde de choc oblique qui se réfléchit sur un mur pour donner une seconde onde de choc. Ces deux ondes délimitent alors trois zones distinctes dans le fluide. La figure (4.6) donne une description du problème. Le domaine de calcul est un rectangle défini par  $0 \leq x \leq 4.1$  et  $0 \leq y \leq 1$ . Comme pour la simulation précédente, le maillage est obtenu en divisant ce domaine en  $60 \times 20$  carrés, ensuite subdivisés en triangles. Les conditions en entrée, dans la première zone du domaine, sont les suivantes :  $\rho = 1.0$ ,  $u = 2.9$ ,  $v = 0.0$  et  $p = 0.7143$ . Dans la deuxième zone, pour obtenir une onde de choc qui forme un angle de  $29^\circ$  avec  $y=1$ , il faut imposer  $\rho = 1.7$ ,  $u = 2.619$ ,  $v = -0.506$  et  $p = 1.528$ . Enfin, dans la troisième zone, la solution exacte du problème donne  $\rho = 2.687$ ,  $u = 2.401$ ,  $v = 0.0$  et  $p = 2.934$ .

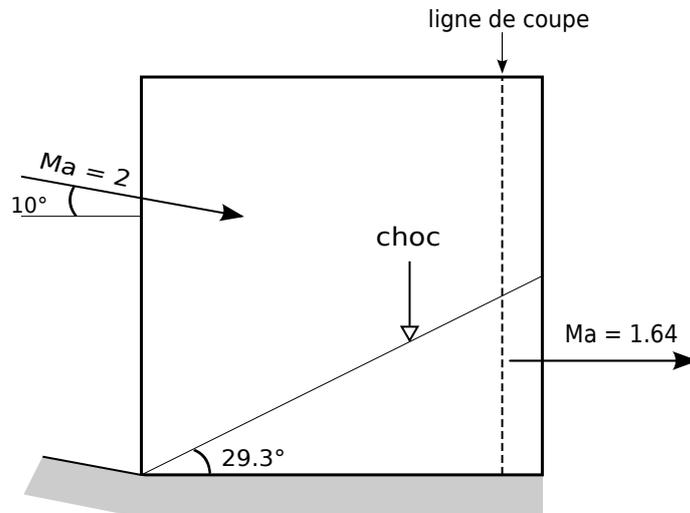
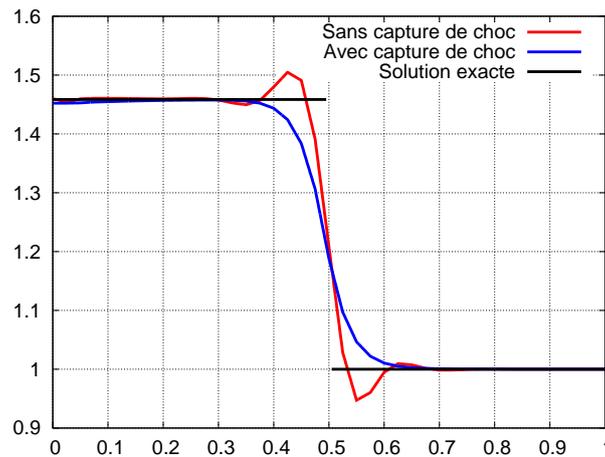


FIG. 4.4: Choc oblique - description du problème et de la solution

FIG. 4.5: Coupe de la densité en ( $x = 0.9$ ) avec et sans capture de choc

Ces valeurs sont imposées fortement aux bords du domaine en ( $x=0$ ) et ( $y=1$ ). Une condition de type paroi glissante est associée au bord bas du domaine ( $y=0$ ). Enfin, est utilisée une sortie de type Steger-Warming en ( $x=4.1$ ).

La figure (4.7) présente une coupe, en  $y = 0.25$ , des solutions avec et sans capture de choc. Il apparaît clairement qu'en l'absence de capture de choc, la méthode SUPG produit des oscillations près des discontinuités. La seconde solution, avec emploi de la capture de choc, montre que ce terme permet de résoudre ce problème. Ces résultats montrent donc que l'utilisation du terme de capture de choc est indispensable pour ce genre de calcul et que les résultats obtenus sont satisfaisants.

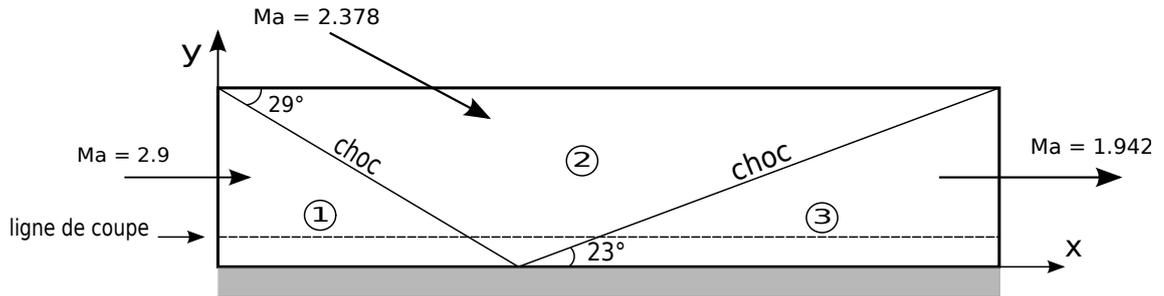
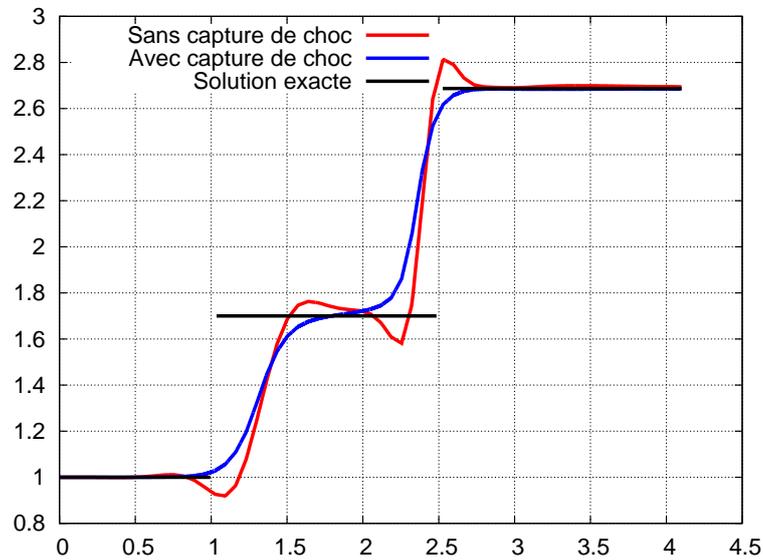


FIG. 4.6: Choc réfléchi - description du cas test et de la solution

FIG. 4.7: Coupe de la densité en ( $y = 0.25$ ) avec et sans capture de choc

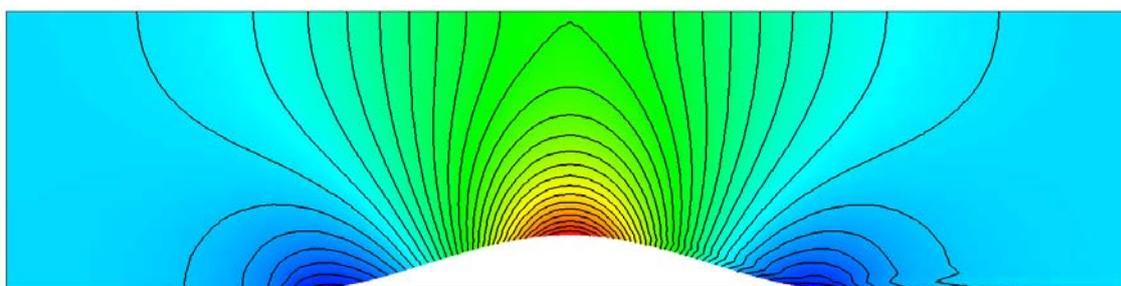
#### 4.4.4 Résultats numériques

Le schéma SUPG, appliqué aux équations de Navier-Stokes compressible, a été présenté. Il reste à présent à valider numériquement cette méthode. Pour ce faire, plusieurs cas tests sont étudiés. Il s'agit, pour le moment, d'écoulements laminaires en 2D. Il est en effet indispensable de vérifier le bon comportement du schéma numérique sur des cas tests simples avant d'entreprendre des calculs d'écoulements turbulents. Quatre cas tests sont abordés. Celui du bump est repris, dans un premier temps, pour confirmer la stabilité de la méthode SUPG par rapport à celle de Galerkin. L'écoulement visqueux sur une plaque plane est ensuite considéré. Ce calcul présente l'intérêt de rendre accessible des comparaisons avec des résultats théoriques. L'écoulement subsonique et laminaire d'un fluide autour d'un profil d'aile de type NACA0012 est présenté. Enfin, la robustesse du schéma SUPG face à la résolution d'ondes de choc est testée. Il s'agit, en effet, de simuler un écoulement transsonique, non visqueux, autour de ce même NACA0012. Dans la mesure où les trois définitions du paramètre de stabilisation (4.21), (4.22) et (4.23) conduisent aux mêmes solutions, pour ces cas tests, seules les solutions obtenues à l'aide de (4.22) seront

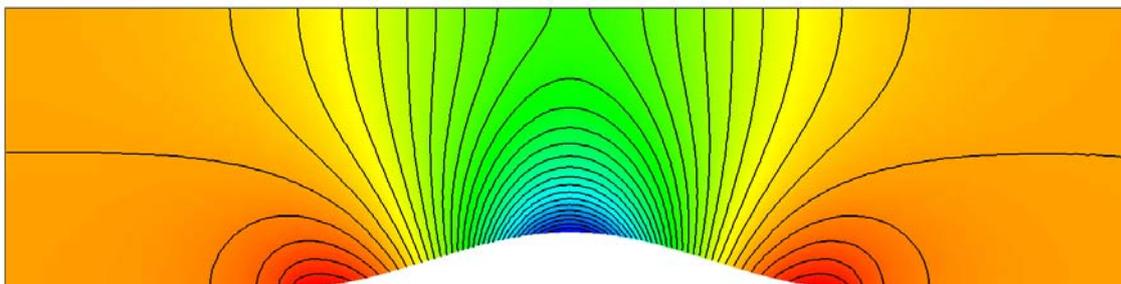
présentées.

### Écoulement non visqueux sur un bump

Les déficiences de la méthode de Galerkin ont été illustrées par le cas test du bump. Ce cas test est donc, à présent, repris et résolu grâce au schéma SUPG. Pour être en mesure de comparer les résultats, les différents paramètres ainsi que le maillage sont identiques à ceux utilisés précédemment. La figure (4.8) présente les isolignes de vitesse et de pression de la nouvelle solution. Les oscillations non physiques, présentes sur la figure 4.2, dues aux instabilités de la méthode de Galerkin ont disparu. La stabilisation joue donc bien son rôle.



(a) Isolignes de vitesse



(b) Isolignes de pression

FIG. 4.8: Bump - Solution obtenue par la méthode SUPG

Près de la paroi, après le bump, apparaissent des oscillations sur les isolignes de vitesse. C'est un phénomène connu. En effet, cela est dû à la création d'entropie numérique artificielle. Pour résoudre ce problème, il y a deux solutions : soit le maillage doit être raffiné [58], soit il est nécessaire de faire appel à un schéma d'ordre supérieur [59].

### Écoulement sur une plaque plane

La description du problème, illustrée par la figure (4.10), est la suivante : le domaine de calcul correspond au bord supérieur droit du plan et la ligne ( $y = 0$ ) représente le mur. Le fluide entre dans le domaine le long de l'axe ( $x = 0$ ) et son champ de vitesse est parallèle au mur. Le fait que l'épaisseur de la couche limite soit petite devant les autres dimensions caractéristiques de l'écoulement permet de faire des approximations dans l'équation de Navier-Stokes. Cela permet

à H. Blasius, en 1908, de déterminer une équation différentielle ordinaire du troisième ordre pour décrire le profil de vitesse [60]. Cette équation s'écrit :

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) = 0 \quad (4.30)$$

où  $f'(\eta) = u/u_e$ ,  $\eta = y/\delta(x)$  et  $\delta(x) = x/(Re_x)^{1/2}$ . La grandeur  $u_e$  désigne la vitesse, constante, externe à la couche limite. Les conditions aux limites sont, quant à elles, données par :

$$f'(0) = 0 \quad , \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 \quad (4.31)$$

La résolution numérique de cette équation permet d'obtenir une solution de référence. La solution approchée par la méthode SUPG pour ce cas test, peut donc être comparée à la théorie de Blasius. A noter, néanmoins, que l'équation différentielle (4.30) est donnée pour un écoulement incompressible.

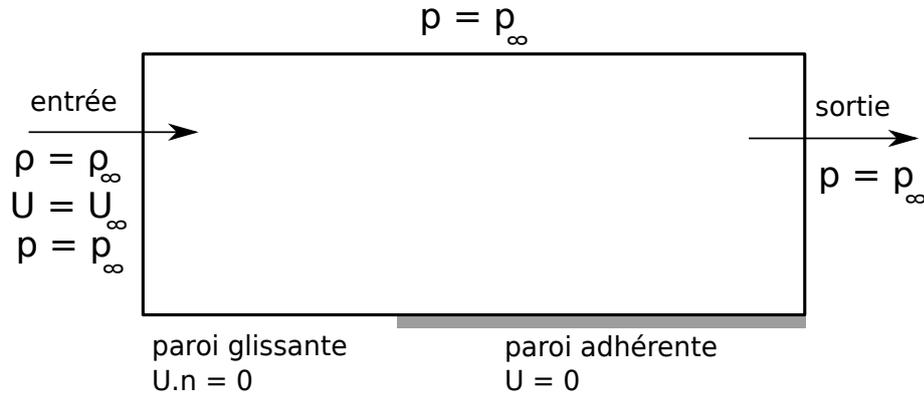


FIG. 4.9: Plaque plane - Description du cas test

Puisqu'il est impossible d'effectuer une simulation numérique sur un domaine infini, le domaine de calcul est restreint à un rectangle  $[-2 : 1] \times [0 : 1]$ . Les conditions aux limites, imposées pour ce cas test, sont présentées sur la figure (4.9). Le nombre de Mach est fixé à 0.1. Le nombre de Reynolds est pris, successivement, égal à 450 puis à 1000. Enfin, le maillage comporte 10 000 noeuds. Pour comparer la solution du schéma SUPG avec la théorie de Blasius, des coupes sont effectuées sur la vitesse en  $(x=1)$ . Elles sont données sur les figures (4.11) et (4.12). Globalement, la solution numérique obtenue est satisfaisante. Cependant, un zoom sur les profils (Fig. 4.13 et 4.14) montre que la vitesse calculée par la méthode SUPG est légèrement supérieure à celle de la théorie de Blasius en haut de la couche limite. En effet, les hypothèses de l'approximation de Blasius ne sont pas strictement vérifiées : le domaine n'est pas infini et le fluide est compressible. Aussi, il en résulte cette légère différence. Dans son ensemble, la couche limite est néanmoins correctement capturée par la méthode SUPG.

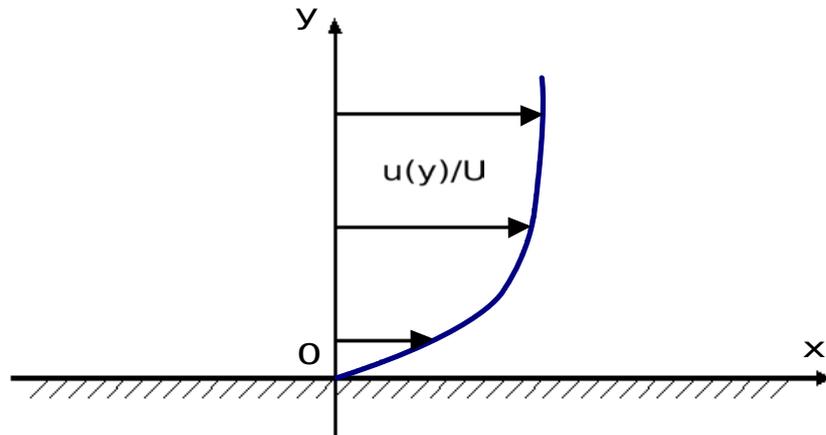
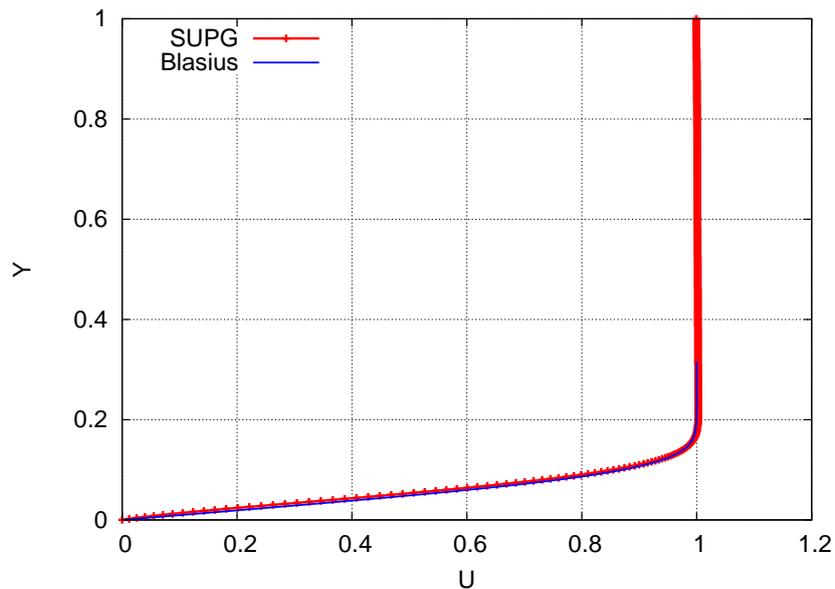
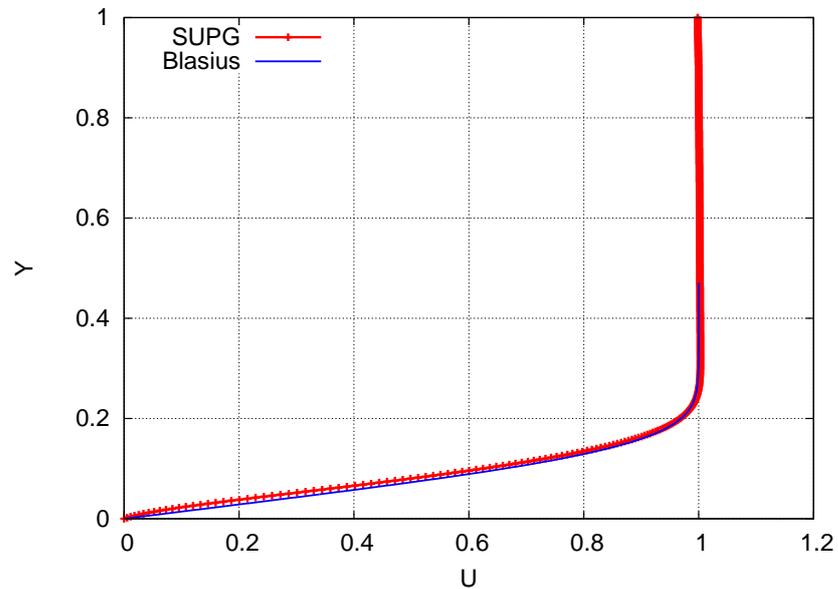
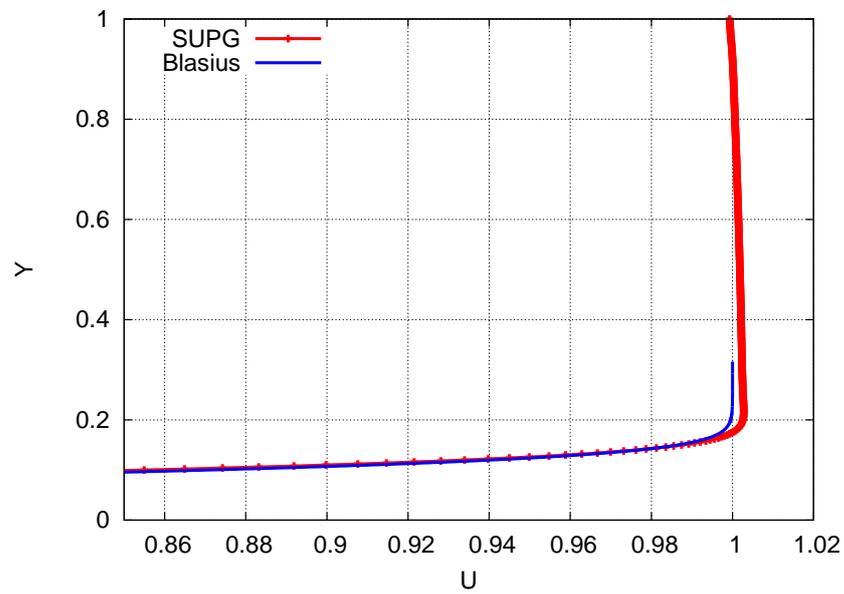


FIG. 4.10: Plaque plane - Le profil de vitesse

FIG. 4.11: Plaque plane - Profil de vitesse de la méthode SUPG et courbe de Blasius ( $Re=1000$ )

### Écoulement laminaire subsonique autour d'un NACA0012

L'écoulement laminaire autour d'une aile est maintenant considéré. Le profil de cette aile est connu sous la désignation de NACA0012. Les quatre chiffres, dans cette dénomination, décrivent la géométrie du profil en utilisant la longueur de la corde de l'aile comme unité. Le premier chiffre  $m$  donne la cambrure du profil en pourcentage de la longueur de la corde. Le deuxième  $p$  indique la position de la cambrure maximale en dixième de la corde. Enfin, les deux derniers chiffres  $t$  représentent l'épaisseur maximale du profil en pourcentage de la corde. La figure (4.15) donne l'exemple d'un profil construit selon cette nomenclature. Afin d'illustrer l'effet de la cambrure,

FIG. 4.12: Plaque plane - Profil de vitesse de la méthode SUPG et courbe de Blasius ( $Re=450$ )FIG. 4.13: Plaque plane - Zoom sur le profil de vitesse ( $Re = 1000$ )

il ne s'agit pas d'un NACA0012 mais d'un NACA2412.

Le profil de l'aile peut alors être entièrement déterminé à partir de son équation mathématique. La ligne de cambrure est obtenue grâce à la formulation suivante :

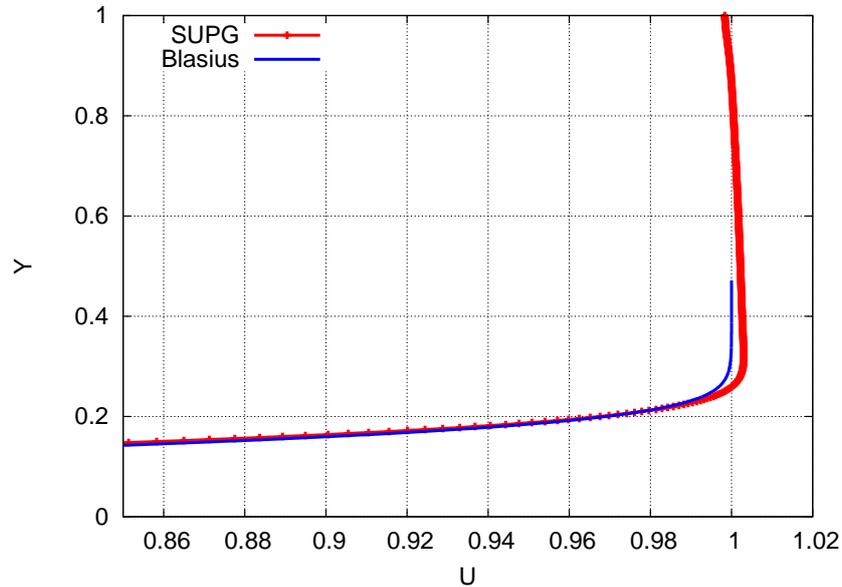
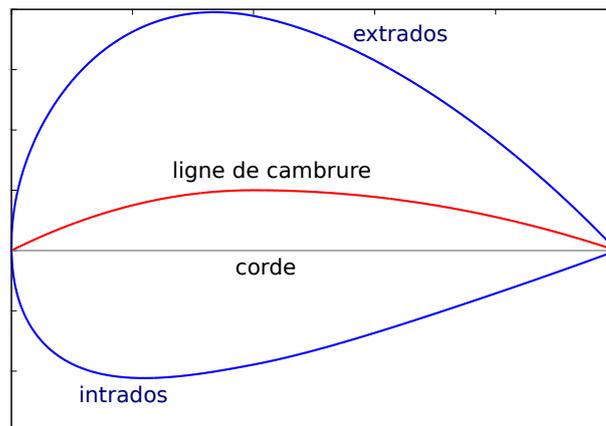
FIG. 4.14: Plaque plane - Zoom sur le profil de vitesse ( $Re=450$ )

FIG. 4.15: Exemple de profil : NACA2412

$$y_c = \frac{m}{p^2}(2px - x^2) \quad x \in [0, p[ \quad (4.32)$$

$$y_c = \frac{m}{(1-p)^2}(1 - 2p + 2px - x^2) \quad x \in [p, c] \quad (4.33)$$

L'épaisseur, au dessus et en dessous, de la ligne de cambrure est ensuite donnée par :

$$y_t = \frac{t}{0.2} (0.2969\sqrt{2} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4) \quad (4.34)$$

Enfin, les coordonnées de l'extrados  $(x_u, y_u)$  et de l'intrados  $(x_l, y_l)$  sont données par les relations :

$$x_u = x - y_t \sin(\theta) \quad (4.35)$$

$$y_u = y_c + y_t \cos(\theta) \quad (4.36)$$

$$x_l = x + y_t \sin(\theta) \quad (4.37)$$

$$y_l = y_c - y_t \cos(\theta) \quad (4.38)$$

où  $\theta$  est donné par  $\theta = \arctan\left(\frac{dy_c}{dx}\right)$ . La description de la géométrie du NACA0012 est donc complète. A noter que ce profil est symétrique puisque sa cambrure  $m$  est nulle. Pour terminer la description de ce cas test, il reste à préciser les caractéristiques de l'écoulement, la définition du domaine de calcul, celle des conditions aux bords, et la description des maillages. Pour ce cas, le nombre de Reynolds est de 500 et le nombre de Mach est de 0.5. L'angle d'attaque, quant à lui, est nul. Le domaine de calcul consiste en un cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 50, comme exposé par la figure (4.16a). L'aile a une longueur de corde unitaire. Aussi, le domaine est-il considéré comme infini devant les dimensions du NACA0012. Une condition de Steger-Warming, présentée par l'équation (4.16), est imposée sur le cercle et une condition de paroi adhérente sur le profil de l'aile. Quatre maillages ont été utilisés pour ce calcul. Le tableau (4.1) donne le nombre de noeuds de chacun d'eux et la figure (4.16b) montre le raffinement autour de l'aile pour le maillage 1.

maillage	nombre de noeuds
1	9078
2	20428
3	44505
4	101476

TAB. 4.1: NACA0012 - Nombre de noeuds en fonction des maillages

Le schéma SUPG est alors utilisé pour résoudre ce problème. La figure (4.17a) présente la solution ainsi obtenue. Sur cette figure, les lignes continues représentent les isolignes de pression de la solution obtenue et les couleurs indiquent l'amplitude de la vitesse longitudinale. Dans la mesure où le profil du NACA0012 est symétrique et qu'il n'y a pas d'angle d'attaque, l'écoulement doit également être symétrique. C'est effectivement le cas pour la solution SUPG. Une coupe en  $(x = 0.5)$  est effectuée (Fig 4.17b) sur la vitesse, afin de pouvoir comparer la solution sur les différents maillages. Les lignes de coupe sont quasiment confondues. Cela confirme que le calcul converge bien vers la même solution, pour l'ensemble de ces maillages.

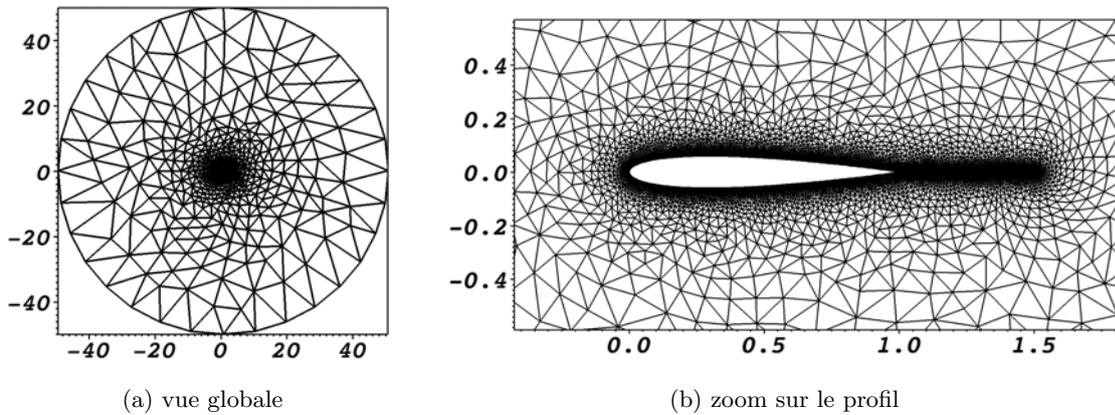


FIG. 4.16: NACA0012 - Description du maillage

Un des moyens de caractériser l'écoulement autour d'une aile est de s'intéresser au coefficient de portance qui en résulte. En effet, lorsqu'une aile, ou tout autre corps, se déplace dans l'air, une force dite aérodynamique s'exerce sur elle. Cette force est usuellement décomposée dans un référentiel terrestre. La composante horizontale, opposée au mouvement, est la trainée, tandis que l'autre composante est la portance. Cette portance est donnée par la formule suivante :

$$L = \frac{1}{2} \rho u^2 A C_l \quad (4.39)$$

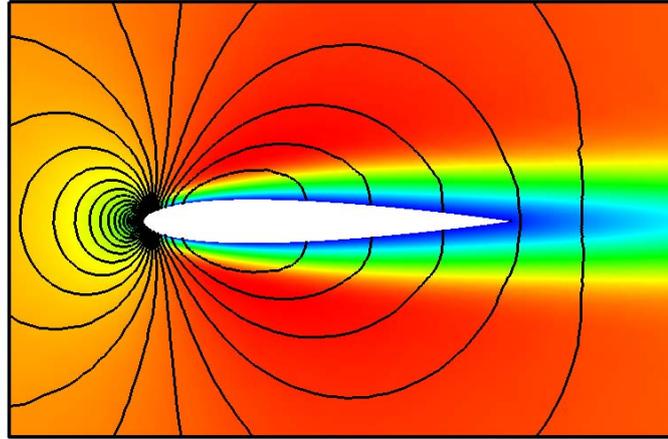
où  $A$  représente l'aire de l'aile et  $C_l$  est appelé coefficient de portance. La force de portance peut également être exprimée en terme de différences de pression entre le dessus et le dessous de l'aile. La formulation devient :

$$L = \oint p \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dA \quad (4.40)$$

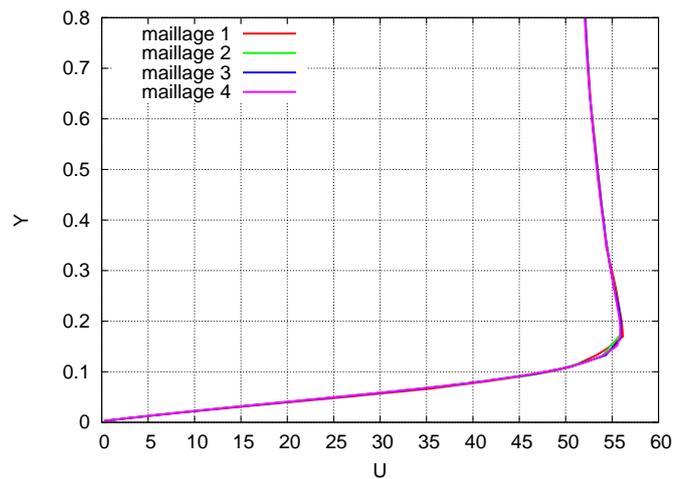
où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire qui pointe vers l'intérieur de l'aile et  $\mathbf{k}$  la normale unitaire orthogonale au champ de vitesse. Pour l'écoulement laminaire autour d'un NACA0012, sans angle d'attaque, la pression est la même au dessus et en dessous de l'aile. Aussi, le coefficient de portance est nul. Ca n'est évidemment pas le cas numériquement. Le tableau (4.2) donne ce coefficient en fonction du maillage utilisé. La convergence en maillage est vérifiée. En effet, plus le maillage est fin et plus le coefficient de portance est proche de zéro.

### Écoulement non visqueux transsonique autour d'un NACA0012

L'objectif de ce paragraphe est de vérifier l'aptitude de la méthode SUPG à traiter les ondes de choc. La géométrie considérée est à nouveau celle du NACA0012 et les quatre maillages,



(a) Traits continus : isolignes de pression. Couleurs : vitesse longitudinale (maillage 4)



(b) coupe sur la vitesse en ( $x=0.5$ ) en fonction du maillage

FIG. 4.17: NACA0012 - Solution obtenue par la méthode SUPG

maillage	$C_l$
1	-0,0589
2	-0,0407
3	-0,0012
4	0,00048

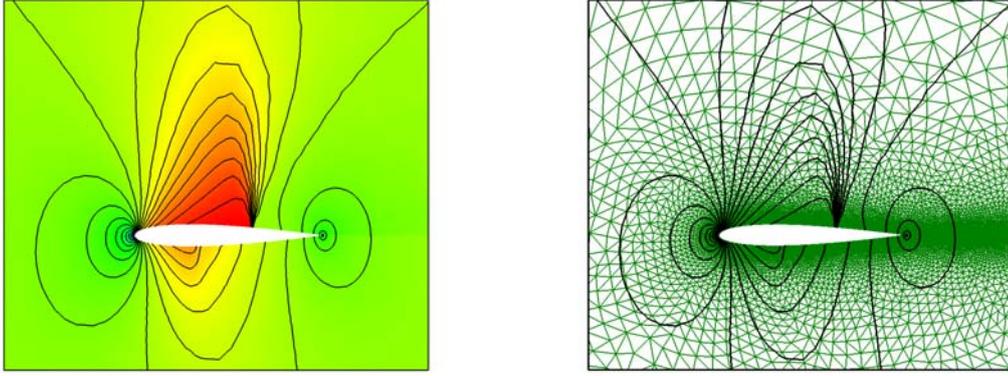
TAB. 4.2: NACA0012 - Coefficient de portance en fonction du maillage

présentés dans le paragraphe précédent, sont utilisés. Cette fois-ci, l'écoulement est non visqueux, le nombre de Mach est de 0.8 et l'angle d'attaque est de  $1,25^\circ$ . La figure (4.18) montre la solution obtenue par le schéma SUPG pour le maillage 4. La distribution de pression autour du profil,

pour chacun des maillages, est représentée sur la figure (4.19). Elle est calculée de la façon suivante :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (4.41)$$

où  $p_\infty$  et  $U_\infty$  sont, respectivement, la pression et la vitesse à l'infini. La courbe dite de référence, en gris sur les figures (4.19), a été obtenue dans [58] sur un maillage de 1 088 896 noeuds. Ces courbes permettent de montrer que plus le maillage est fin et plus la solution de la méthode SUPG converge vers la solution de référence. De plus, le schéma s'avère être stable, même en présence de chocs.



(a) Traits continus : isolignes de pression. Couleurs : vitesse longitudinale (maillage 4)

(b) maillage 4 et isolignes de pression

FIG. 4.18: NACA0012 transsonique - Solution obtenue par la méthode SUPG (maillage 4)

Le paramètre de capture de choc joue un rôle très important dans ce type de calcul. La formulation de ce terme, proposée par T.E. Tezduyar et M. Senga [54] a déjà été introduite dans le paragraphe 4.4.3. Pour rappel, elle s'écrit :

$$\nu_{choc} = \|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z}\| \left( \sum_{i=1}^{n_d} \left\| \mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\beta/2-1} \left( \frac{h_{choc}}{2} \right)^\beta \quad (4.42)$$

Dans cette expression, la variable  $\beta$  permet de lisser plus ou moins le choc. Pour illustrer cela, le calcul sur le NACA0012 transsonique a été effectué en utilisant  $(\nu_{choc})_{\beta=1}$ ,  $(\nu_{choc})_{\beta=2}$  et  $\frac{1}{2}((\nu_{choc})_{\beta=1} + (\nu_{choc})_{\beta=2})$ . Ce dernier choix est noté  $\beta = 3$ . C'est celui qui a été utilisé pour obtenir les résultats donnés en (4.19). La figure (4.20) donne les courbes de pression qui correspondent à chacun de ces choix du paramètre  $\beta$ , sur le maillage 2. L'option  $\beta = 1$  conduit à la solution la moins diffusive. Le choc principal sur l'extrados du NACA est mieux capturé que dans

les autres configurations. C'est également le cas pour le choc secondaire présent sur l'intrados. Il y a, néanmoins, des oscillations de faible amplitude sur la solution correspondant à ce choix. L'option  $\beta = 2$  conduit, quant à elle, à une solution beaucoup plus lisse. Le schéma est, en effet, plus diffusif. Seulement, le choc secondaire est totalement lissé. Enfin, l'option  $\beta = 3$  correspond à un compromis entre les deux choix précédents. Si la précision de la solution est privilégiée, le choix  $\beta = 1$  est le plus indiqué. Si c'est la robustesse de la méthode qui est recherchée, le choix  $\beta = 2$  ou  $\beta = 3$  s'impose.

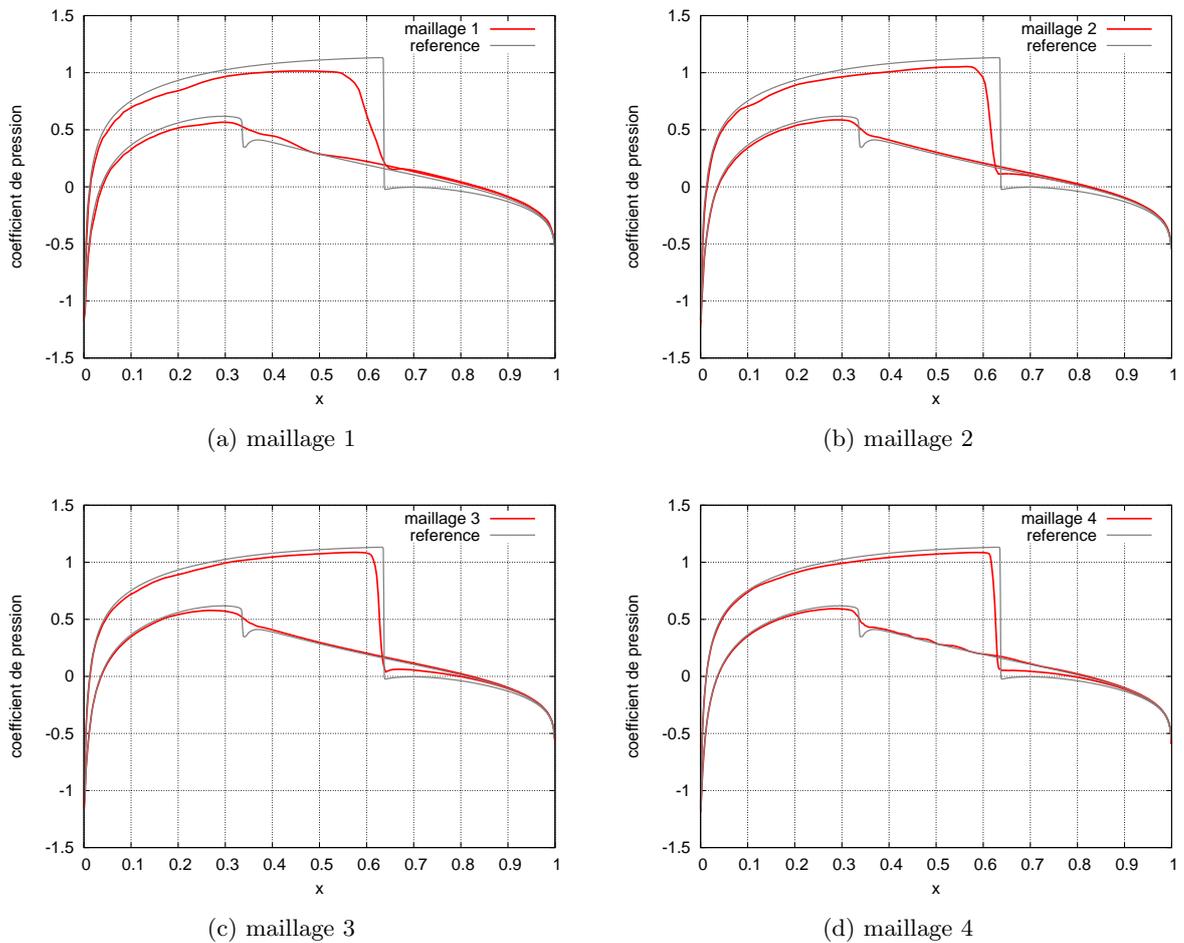


FIG. 4.19: NACA0012 transsonique - Courbe de pression de référence et solution SUPG

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les instabilités dues à la méthode de Galerkin ont été illustrées et résolues par l'introduction de la méthode SUPG. Les points importants, pour ce schéma, sont le choix du paramètre de stabilisation et celui du terme de capture de choc. Des résultats numériques ont prouvé la validité de la méthode pour la simulation d'écoulements laminares et la résolution

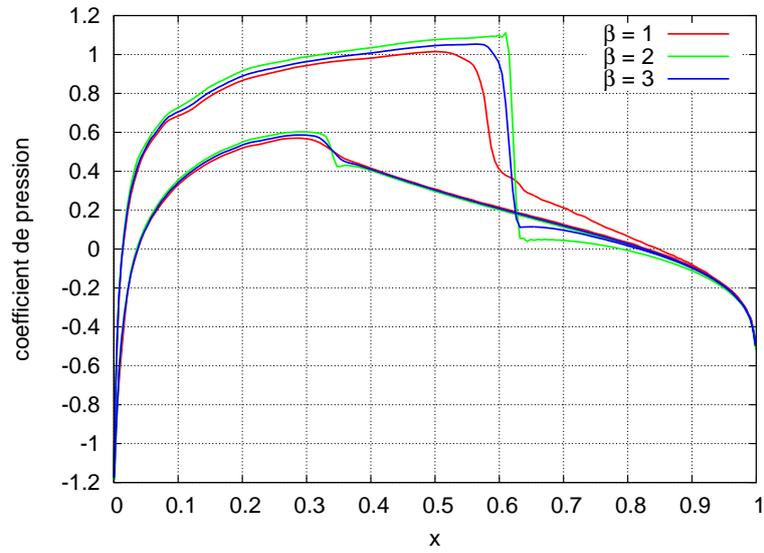


FIG. 4.20: NACA0012 transsonique - Coefficient de pression en fonction du choix du paramètre  $\beta$  (maillage 2)

d'ondes de choc. Il reste, à présent, à appliquer le schéma SUPG dans le cadre d'écoulements turbulents.

# Chapitre 5

## Parallélisation du code de calcul

### Sommaire

---

<b>5.1 Principe</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.2 Décomposition du domaine et recouvrement</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>5.3 Accélération</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>5.4 Exemple pour le NACA0012 subsonique</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>5.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>74</b>

---

### 5.1 Principe

D'un point de vue informatique, l'exécution parallèle du code de calcul permet un gain de temps non négligeable. Elle devient même indispensable lorsque le problème considéré comporte un très grand nombre de degrés de liberté. Le principe de cette technique est d'effectuer des opérations en parallèle, c'est-à-dire simultanément au sein de plusieurs unités de traitement. Pour cela, il faut être en mesure de décomposer la tâche à effectuer en plusieurs sous-tâches qui seront exécutées en même temps. La compacité de la méthode d'éléments finis devient alors un avantage important. En effet, à chaque pas de temps, la mise à jour de la valeur en un noeud du maillage ne nécessite que la connaissance des valeurs des voisins directs. Aussi, la décomposition du problème est facilitée. Pour effectuer un calcul à l'aide de  $n$  processeurs, le domaine est divisé en  $n$  sous-domaines de tailles approximativement égales. Chacun des  $n$  processeurs a alors la tâche de mettre à jour les valeurs des degrés de liberté d'un seul sous-domaine.

### 5.2 Décomposition du domaine et recouvrement

La décomposition du maillage est effectuée à l'aide de la librairie SCOTCH [61]. Sur la figure (5.1), le maillage d'un NACA0012 a été divisé en 8 sous-domaines. Chaque couleur représente un sous-domaine et les zones grises correspondent aux éléments dont les noeuds appartiennent à des sous-domaines différents. Il s'agit de zones de recouvrement, dont une illustration est donnée par

la figure (5.2). Deux sous-domaines voisins  $y$  sont représentés. Les noeuds rouges appartiennent au premier d'entre-eux tandis que les noeuds verts appartiennent au second. Pour calculer la valeur de la solution en un noeud rouge, par exemple, il est nécessaire de connaître la valeur de ses voisins directs. Aussi, si tous ses voisins directs sont également rouges, le calcul peut être effectué indépendamment du sous-domaine vert. En revanche, si l'un des voisins directs de ce noeud est vert, les processeurs associés aux deux sous-domaines doivent échanger des informations.

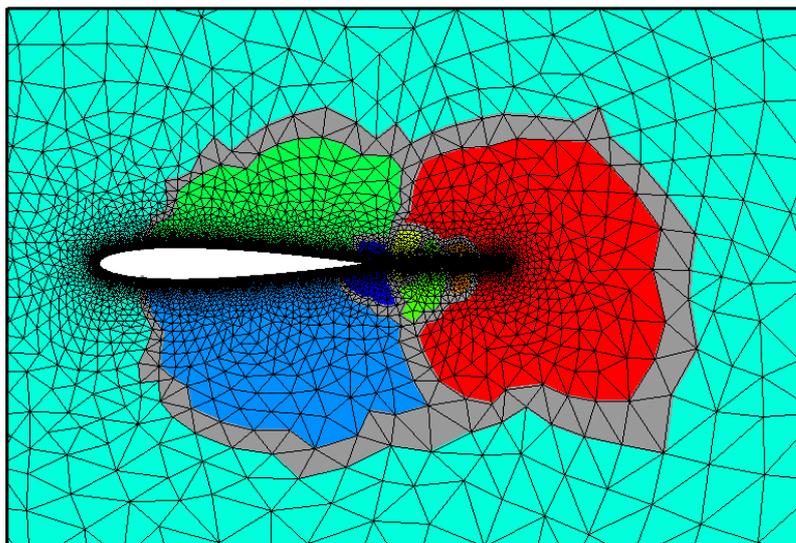


FIG. 5.1: Décomposition en 8 sous-domaine d'un maillage de NACA0012

### 5.3 Accélération

L'accélération (en anglais speedup) désigne le gain de temps d'exécution d'un programme suite à l'ajout d'unités de calcul par rapport à celui d'un programme séquentiel. Elle est calculée de la façon suivante :

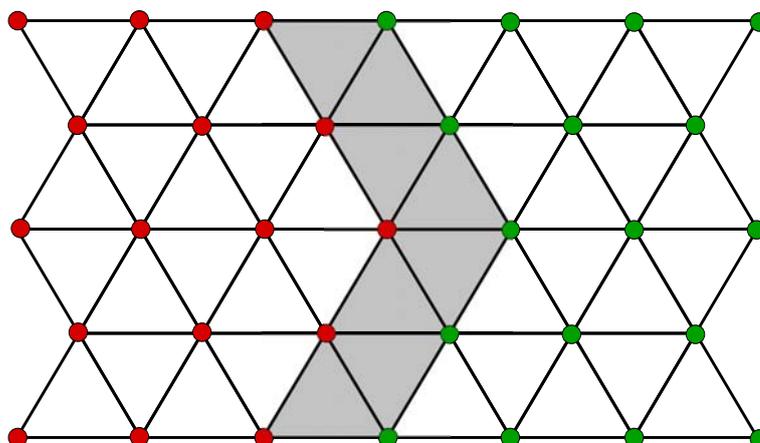


FIG. 5.2: Illustration de l'interface entre 2 sous-domaines. Les noeuds rouges appartiennent au sous-domaine 1, les noeuds verts, au sous-domaine 2 et la zone grisée représente la zone de recouvrement

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} \quad (5.1)$$

$T_1$  représente le temps d'exécution de l'algorithme séquentiel et  $T_p$  celui de l'algorithme sur une machine à  $p$  unités de calcul. De façon idéale, l'accélération due à la parallélisation devrait être linéaire. Lorsque le nombre de processeurs double, le temps d'exécution devrait être réduit de moitié, et ainsi de suite. Cela n'est malheureusement pas le cas en pratique. En effet, les opérations effectuées par les différentes unités de calcul ne sont pas totalement indépendantes les unes des autres. Il y a d'abord les communications nécessaires à l'échange de données. Plus elles sont nombreuses et plus l'accélération sera dégradée. La qualité de la décomposition du domaine joue également un rôle important. En effet, pendant le calcul, il n'est pas souhaitable que des processeurs aient une ou plusieurs itérations d'avance. Aussi, ils sont synchronisés à la fin d'une itération. Si chaque sous-domaine possède approximativement le même nombre de noeuds, le temps nécessaire pour effectuer cette opération est négligeable. Néanmoins, si ça n'est pas le cas, la vitesse de calcul sera celle imposée par le plus lent des processeurs. D'où la nécessité d'une décomposition équilibrée du domaine.

## 5.4 Exemple pour le NACA0012 subsonique

Le cas test du NACA0012 subsonique a été présenté au cours du paragraphe 4.4.4 (page 62). Il est repris ici pour illustrer l'efficacité de la parallélisation du code de calcul. La simulation est effectuée à l'aide de 2, 4, 8, 16, 32 et 64 processeurs. Pour que la décomposition du domaine en 64 sous-domaines ait un sens, le maillage comportant le plus grand nombre de noeuds est choisi (maillage 4 avec 101 476 noeuds). Pour rappel, il s'agit ici de résoudre un schéma implicite. La scalabilité de la méthode est donc plus difficile à satisfaire que dans le cas de l'option explicite.

La figure (5.3) donne l'accélération en fonction du nombre d'unités de calcul utilisé. Comme prévu, l'accélération est inférieure au cas idéal. Cela s'accroît d'ailleurs lorsque le nombre de processeurs augmente. Néanmoins, ce résultat est globalement satisfaisant. En ce qui concerne la décomposition du domaine, le tableau (5.1) indique le déséquilibre de charge mesuré par :

$$D = 100 \frac{n_{max} - n_{min}}{n_{max}} \quad (5.2)$$

où  $n_{max}$  est le nombre de degrés de liberté du sous-domaine qui en comporte le plus, et  $n_{min}$  celui du sous-domaine qui en comporte le moins. Il apparaît que plus le nombre de processeurs augmente et plus il est difficile de répartir équitablement les noeuds du maillage. Cependant, même dans le cas où 64 processeurs sont utilisés, le déséquilibre reste relativement faible.

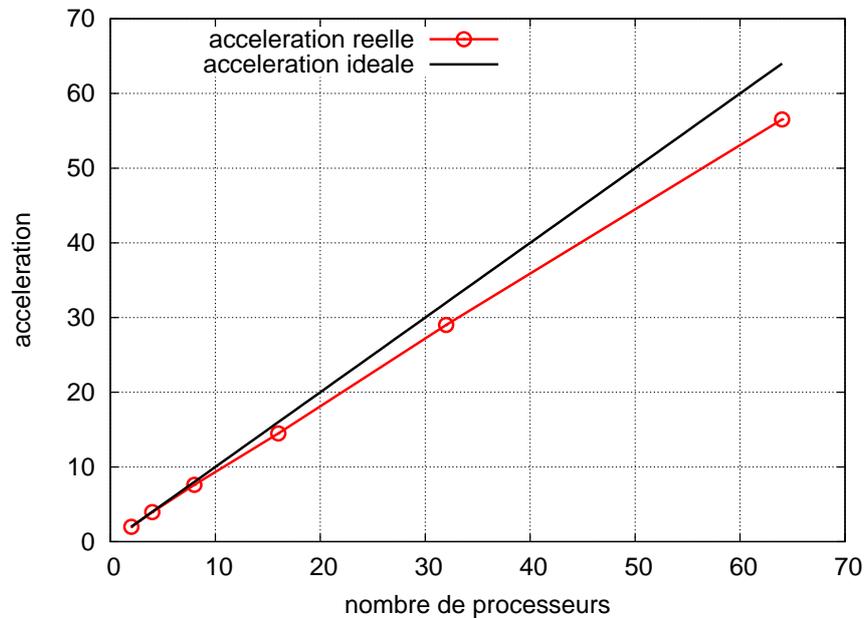


FIG. 5.3: Accélération en fonction du nombre de processeurs utilisé

Nombre de processeurs	2	4	8	16	32	64
Déséquilibre	0,97%	1,96%	3,47%	4,32%	6,17%	9,81%

TAB. 5.1: Déséquilibre de charge en fonction du nombre de processeurs utilisé

## 5.5 Conclusion

Le présent chapitre n'a pas la prétention de donner une description précise et détaillée de la parallélisation du code de calcul. L'objectif est de donner les idées de base du développement

de cet outil et un aperçu de son efficacité. Dans ce qui suit, la simulation d'écoulements turbulents est présentée. Le nombre de noeuds des domaines de calcul devient grand et il est donc indispensable d'effectuer des calculs parallèles.



**Troisième partie**

**Simulation d'écoulements turbulents**



# Chapitre 6

## Méthodes numériques pour le problème turbulent

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Le système d'équations</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>6.2</b>	<b>Forme vectorielle des équations</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>6.3</b>	<b>Formulation SUPG</b> . . . . .	<b>81</b>
6.3.1	Le problème variationnel . . . . .	81
6.3.2	Les conditions aux limites . . . . .	82
<b>6.4</b>	<b>Formulation mixte volumes finis/éléments finis</b> . . . . .	<b>83</b>

---

Dans les chapitres précédents, le modèle de turbulence et le schéma SUPG ont été présentés. Il s'agit ici de combiner ces deux aspects. Aussi, dans un premier temps, le système d'équations de Navier-Stokes moyennées, couplé au modèle de Spalart-Allmaras, est rappelé. Le schéma SUPG est ensuite écrit pour ce nouveau problème, de façon similaire à celui présenté au cours du chapitre 4. Enfin, une formulation mixte volumes finis/éléments finis est brièvement décrite afin de servir de point de comparaison à la méthode SUPG développée.

### 6.1 Le système d'équations

Pour alléger les notations, les opérateurs de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  et  $\bar{\cdot}$  sont absents des équations. Il faut, néanmoins, garder à l'esprit que seules les grandeurs moyennes seront résolues. Les équations de Navier-Stokes compressible, couplées au modèle de Spalart-Allmaras s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho e \\ \rho \tilde{\nu} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \\ \rho e \mathbf{u} \\ \rho \tilde{\nu} \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \cdot \sigma \\ \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ M(\tilde{\nu})\tilde{\nu} + P(\tilde{\nu})\tilde{\nu} - D(\tilde{\nu})\tilde{\nu} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Les différentes variables utilisées ici, ont déjà été présentées au cours des chapitres 1 et 2. Il est néanmoins utile de redonner la définition du tenseur des contraintes ainsi que du flux de chaleur. En effet, c'est grâce à ces termes que le modèle de turbulence est couplé aux équations de Navier-Stokes.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + (\mu + \mu_T) \left[ \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \right] \quad (6.2)$$

$$\mathbf{q} = -\gamma c_v \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \nabla T \quad (6.3)$$

La viscosité turbulente,  $\mu_T = \nu_T / \rho$ , est déterminée par l'intermédiaire de la dernière équation du système (6.1). En pratique, c'est la variable  $\tilde{\nu}$  qui est résolue. La grandeur  $\nu_T$  est alors facilement retrouvée puisque  $\tilde{\nu}$  et  $\nu_T$  sont reliées par l'expression (2.13). En ce qui concerne les termes sources de l'équation de turbulence,  $M(\tilde{\nu})\tilde{\nu}$ ,  $P(\tilde{\nu})\tilde{\nu}$  et  $D(\tilde{\nu})\tilde{\nu}$ , ils sont identiques à ceux présentés dans l'équation (2.19).

## 6.2 Forme vectorielle des équations

Pour faciliter l'écriture de la méthode SUPG, le problème est, dans un premier temps, écrit sous forme vectorielle :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^c - \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^d = \mathcal{S} \quad (6.4)$$

Les variables conservatives sont toujours employées. Par rapport au système (4.1), et de façon naturelle, la quantité  $\rho \tilde{\nu}$  constitue la variable conservative supplémentaire. Par conséquent, le flux convectif,  $\mathbf{F}_i^c$  est modifié de la façon suivante :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \\ \rho \tilde{\nu} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_i^c = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i u_3 + \delta_{i3} p \\ (\rho e + p) u_i \\ \rho \tilde{\nu} u_i \end{pmatrix}$$

Avant d'introduire le flux diffusif  $\mathbf{F}_i^d$  et le terme source  $\mathcal{S}$ , la partie diffusive de l'équation de turbulence,  $M(\tilde{\nu})\tilde{\nu}$ , est décomposée de la façon suivante :

$$M(\tilde{\nu})\tilde{\nu} = \nabla \cdot Q_1(\tilde{\nu}) + Q_2(\tilde{\nu}) \quad (6.5)$$

où les termes  $Q_1(\tilde{\nu})$  et  $Q_2(\tilde{\nu})$  sont définis comme suit :

$$Q_1(\tilde{\nu}) = \frac{1}{\sigma} \left( \mu \nabla(\tilde{\nu}) + \sqrt{\rho} \tilde{\nu} \nabla(\sqrt{\rho} \tilde{\nu}) \right) \quad (6.6)$$

$$Q_2(\tilde{\nu}) = c_{b2} \nabla(\sqrt{\rho} \tilde{\nu}) \cdot \nabla(\sqrt{\rho} \tilde{\nu}) \quad (6.7)$$

Le flux diffusif  $\mathbf{F}_i^d$  et le terme source  $\mathcal{S}$  sont finalement écrits de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \sigma_{i3} \\ \lambda_c \partial_{x_i} T + \sigma_{ik} u_k \\ Q_1(\tilde{\nu}) \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2(\tilde{\nu}) + P(\tilde{\nu}) - D(\tilde{\nu}) \end{pmatrix}$$

où le tenseur  $\tau$  est défini de façon similaire à celui employé pour les équations de Navier-Stokes, à cela près, qu'ici, il contient également un terme de turbulence.

$$\sigma = (\mu + \mu_T) \left[ (\nabla \cdot \mathbf{U}) Id - \frac{2}{3} (\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U}) \right] \quad (6.8)$$

## 6.3 Formulation SUPG

### 6.3.1 Le problème variationnel

Le schéma SUPG, appliqué au problème des équations de Navier-Stokes moyennées couplé au modèle de Spalart-Allmaras, est à présent exposé. Formellement, il n'y a pas de différence entre cette nouvelle formulation et celle présentée par (4.19) pour les équations qui régissent un écoulement laminaire. La nuance est, qu'ici, il y a une équation supplémentaire pour la viscosité turbulente et un terme source issu du modèle de Spalart-Allmaras. La formulation variationnelle s'écrit alors : trouver  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_h$  tel que pour tout  $\mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{W}_h \cdot \left( \partial_t \mathbf{U}_h + \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h) + \mathcal{S}(\mathbf{U}_h) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \partial_{x_i} \mathbf{W}_h \right) \cdot \left( \partial_{x_j} \mathbf{F}_i^d(\mathbf{U}_h) \right) \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{H}_h d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \mathbf{A}_k \partial_{x_k} \mathbf{W}_h \tau^e \mathcal{R}(\mathbf{U}_h) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

De même que pour l'équation (4.20),  $\mathcal{R}(\mathbf{U}_h)$  désigne le résidu du problème. Ici, il faut également prendre en compte le terme source qui s'écrit donc :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_h) = \partial_t \mathbf{U}_h + \partial_{x_i} \mathbf{F}_i^c(\mathbf{U}_h) - \partial_{x_j} \mathbf{F}_i^d(\mathbf{U}_h) + \mathcal{S}(\mathbf{U}_h) \quad (6.10)$$

Enfin,  $\mathbf{A}_i$  désigne toujours la jacobienne du flux eulérien. Cette matrice est identique à celle présentée dans le cas laminaire (4.18), à cela près qu'il y a une ligne et une colonne supplémentaire. Cela provient de l'équation de Spalart-Allmaras.

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}_i^c}{\partial \mathbf{U}} \quad (6.11)$$

### 6.3.2 Les conditions aux limites

#### Paroi adhérente

Un des avantages du modèle de Spalart-Allmaras, est que la condition aux limites est facilement imposée à la paroi. En effet, la viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$  y est nulle. Il suffit donc de vérifier :

$$\tilde{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{mur} \quad (6.12)$$

Les conditions sur la vitesse et sur la température sont imposées de la même façon que dans le cas laminaire, autrement dit, de la façon dont cela est indiquée par les équations (4.6), (4.7) et (4.8).

#### Paroi glissante

En ce qui concerne la paroi glissante, la condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  est toujours imposée, dans la formulation variationnelle, par l'intermédiaire du flux eulérien. La procédure est identique à celle proposée dans le chapitre 4 par les équations (4.10) et (4.11). Il y a juste une variable supplémentaire dans le flux eulérien qui nécessite de redéfinir le terme de bord de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^c \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} u_1 + p n_x \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} u_2 + p n_y \\ \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} u_3 + p n_z \\ (\rho e + p) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ \rho \tilde{\nu} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ p n_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

### Entrée et sortie

Pour traiter les bords d'entrée et de sortie, une condition de type Steger-Warming est utilisée. Le principe est le même que celui exposé en (4.16). Il suffit juste d'étendre la définition de la matrice  $\mathbf{K}_{(\mathbf{U}_h, \mathbf{n})}$  pour ce cas. Comme pour la jacobienne  $\mathbf{A}_i$ , elle ne diffère de l'ancienne définition (4.13) que par une ligne et une colonne supplémentaire, qui correspondent à l'ajout de l'équation de Spalart-Allmaras.

## 6.4 Formulation mixte volumes finis/éléments finis

Pour disposer d'un moyen de comparaison avec une méthode plus communément utilisée en simulation numérique, une formulation mixte, éléments finis/volumes finis, a été développée. La littérature autour de ce type de méthode est très importante, aussi pour plus de détails, il est conseillé de se référer à [62, 50, 63]. L'objectif est toujours de résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées couplées au modèle de Spalart-Allmaras, autrement dit de résoudre l'équation (6.4). La partie advective est alors résolue grâce à un solveur de Riemann, ici soit le solveur de Roe, soit le solveur HLLC [50], tandis qu'une formulation Galerkin permet de traiter la partie diffusive. La formulation faible s'écrit :

$$\int_{S_i} \left( \partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \right) \psi_i \, d\Omega = \int_{S_i} \left( \nabla \cdot \mathbf{F}^d(\mathbf{U}) + \mathcal{S}(\mathbf{U}) \right) \psi_i \, d\Omega \quad (6.14)$$

La partie advective, c'est à dire le membre de gauche de l'équation (6.14) est traitée à l'aide d'une approche volumes finis. Les fonctions tests  $\psi_i$  et le volume de contrôle  $S_i$  sont donc définies de la façon suivante :

$$\psi_i = \chi(C_i) \quad (6.15)$$

$$S_i = C_i \quad (6.16)$$

$\chi(C_i)$  est la fonction indicatrice du volume de contrôle  $C_i$ . Elle vaut 1 à l'intérieur de ce domaine et 0 ailleurs. La cellule  $C_i$  est quant à elle délimitée par les centres de gravité des éléments qui appartiennent au voisinage du noeud  $i$ , comme cela est illustré par la figure (6.1a). En ce qui concerne le membre de droite de l'équation (6.14), une méthode d'éléments finis est utilisée pour le discrétiser. Aussi, les fonctions tests  $\psi_i$  et le volume de contrôle  $S_i$  deviennent :

$$\psi_i = \phi_i \quad (6.17)$$

$$S_i = \bigcup_{T|i \in T} T \quad (6.18)$$

Le terme  $\phi_i$  désigne la fonction de base de Lagrange de degré 1 associée au noeud  $i$ . Elle a pour support le domaine  $S_i$  dont une représentation est donnée sur la figure (6.1b).

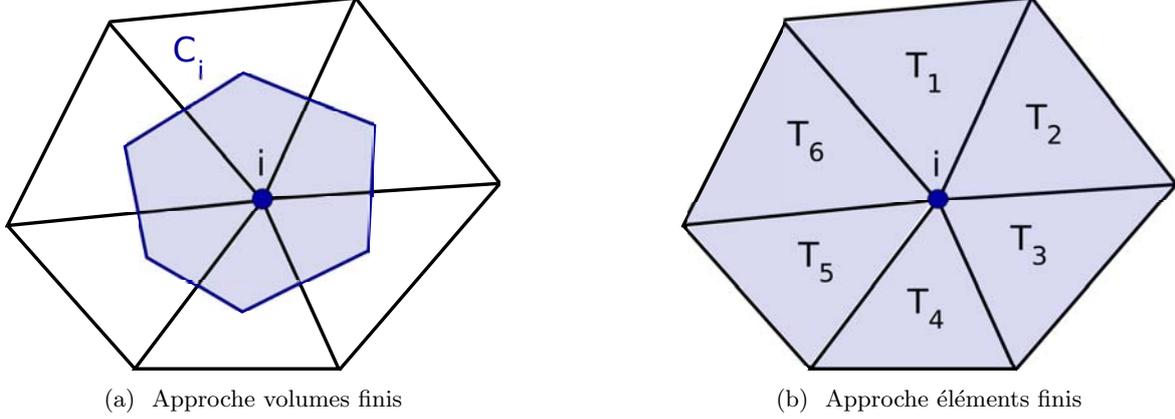


FIG. 6.1: Cellule de contrôle en fonction du type d'approche

Après une intégration par partie, la formulation faible du schéma mixte éléments finis/volumes finis associée au problème (6.4) s'écrit :

$$\text{aire}(C_i) \partial_t \mathbf{U} + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{T|i \in T} \left( \int_T \nabla \cdot \mathbf{F}^d(\mathbf{U}) \phi_i \, d\Omega + \int_T \mathcal{S}(\mathbf{U}) \phi_i \, d\Omega \right) \quad (6.19)$$

Où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au domaine  $C_i$ . L'intégrale du flux convectif sur le bord de ce domaine est alors décomposée comme suit :

$$\int_{\partial C_i} \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{j \in V(i)} \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\partial C_i \cap \Gamma} \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (6.20)$$

$\Gamma$  désigne la frontière du domaine  $\Omega$  et  $V(i)$  le voisinage du noeud  $i$ . A l'interface des cellules  $C_i$  et  $C_j$ , le flux convectif est alors évalué à l'aide d'un schéma upwind.

$$\int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \Phi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \nu_{ij}) \quad (6.21)$$

Où  $\nu_{ij} = \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \mathbf{n} \, d\sigma$  et  $\Phi$  représente le flux numérique. En général, ce flux s'exprime de la façon suivante :

$$\Phi(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \nu) = \frac{\mathbf{F}^c(\mathbf{U}) \cdot \nu + \mathbf{F}^c(\mathbf{V}) \cdot \nu}{2} - d(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \nu) \quad (6.22)$$

La partie  $d(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \nu)$  est un terme de dissipation numérique. Pour le schéma de Roe, par exemple, il s'écrit :

$$d^{\text{Roe}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \nu) = \left| \frac{\partial \mathbf{F}^c}{\partial \mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{U}}) \cdot \nu \right| \left( \frac{\mathbf{V} - \mathbf{U}}{2} \right) \quad (6.23)$$

Le terme  $\tilde{\mathbf{U}}$  correspond à la moyenne de Roe appliquée au vecteur  $\mathbf{U}$ . Une description complète du schéma de Roe, ainsi que d'autres solveurs de Riemann tel que le schéma HLLC, est donnée dans le livre de E.F. Toro [50].

Le schéma SUPG ainsi qu'une formulation mixte volumes finis/éléments finis ont été présentés, dans ce chapitre, pour la résolution du système d'équations (6.4) qui décrit le comportement d'un écoulement turbulent. La formulation mixte a été mise en place afin de servir de point de comparaison à la méthode SUPG. Il reste maintenant à valider numériquement ces schémas. C'est l'objectif du prochain chapitre.



# Chapitre 7

## Résultats numériques

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Ecoulement sur une plaque plane . . . . .</b>	<b>87</b>
7.1.1	Lois théoriques . . . . .	88
7.1.2	Résultats numériques . . . . .	89
<b>7.2</b>	<b>Recirculation derrière une marche descendante . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>7.3</b>	<b>Ecoulement turbulent autour d'un profil de NACA0012 . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>7.4</b>	<b>Ecoulement turbulent transsonique autour d'un profil de RAE2822 . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>7.5</b>	<b>Ecoulement transsonique non visqueux 3D autour d'une aile M6 . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>7.6</b>	<b>Ecoulement turbulent 3D sur une plaque plane . . . . .</b>	<b>106</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats numériques obtenus, pour des écoulements turbulents, par le schéma SUPG et la formulation mixte volumes finis/éléments finis. D'un point de vue informatique, les deux méthodes ont été développées au sein de la plate-forme de calcul nommée FLUIDBOX. Il s'agit d'un code de calcul, développé à l'INRIA et dédié à la simulation numérique d'écoulements compressibles. Il est parallélisé grâce à la librairie MPI (Message Passing Interface), et permet d'effectuer des calculs 2D et 3D sur des maillages non structurés.

### 7.1 Ecoulement sur une plaque plane

La validation du modèle numérique, présenté dans ce mémoire, commence avec un cas test simple. Il s'agit de considérer l'écoulement turbulent d'un fluide sur une plaque plane. Dans le domaine de la simulation de la turbulence, ce test est connu et très bien documenté [36]. Il constitue un point de départ incontournable dans l'étude et le développement de la modélisation de la turbulence.

### 7.1.1 Lois théoriques

Même s'il y a toujours un effet 3D, l'écoulement est considéré comme étant plan. Il semble également raisonnable de supposer que les dérivées longitudinales sont négligeables devant les dérivées transverses. Enfin, dans le cas d'une plaque plane,  $\partial p/\partial x$  est nul. Ces hypothèses permettent des simplifications dans les équations de Navier-Stokes moyennées. Cela conduit alors à des équations simples qui décrivent le comportement de la vitesse dans la couche limite. Une analyse dimensionnelle amène alors à décomposer le domaine en plusieurs zones : une sous-couche visqueuse près de la paroi, suivie d'une zone tampon et d'une région logarithmique, comme cela est indiqué sur la figure (7.1). Pour plus d'informations sur l'obtention de ces équations, il est conseillé de se référer à [36, 64, 65]. Proche de la paroi, la vitesse est donc approximée par :

$$u^+ = y^+ \quad y^+ < 5 \quad \text{pour la sous-couche visqueuse} \quad (7.1)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad 50 < y^+ < 1000 \quad \text{pour la zone logarithmique} \quad (7.2)$$

Les variables  $\kappa$  et  $C$  sont des constantes.  $\kappa$  est nommée constante de Von Karman. Expérimentalement, il a été trouvé que  $\kappa \approx 0.41$  et  $C \approx 5$ . Enfin,  $u^+$  et  $y^+$ , qui représentent respectivement une vitesse et une distance adimensionnée, sont définies de la façon suivante :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (7.3)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (7.4)$$

où  $u$  est la composante de la vitesse parallèle au mur,  $\nu$  est la viscosité cinématique laminaire,  $y$  représente la distance à la paroi et  $u_\tau$  désigne la vitesse de frottement. Cette dernière s'écrit :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (7.5)$$

Dans l'expression (7.5),  $\rho$  représente la densité locale et  $\tau_w$  la contrainte de cisaillement à la paroi, donnée par :

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (7.6)$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique. A présent, le but est de vérifier que le profil de vitesse dans la couche limite, obtenu numériquement grâce au schéma SUPG, correspond à celui prédit par les lois (7.1) et (7.2).

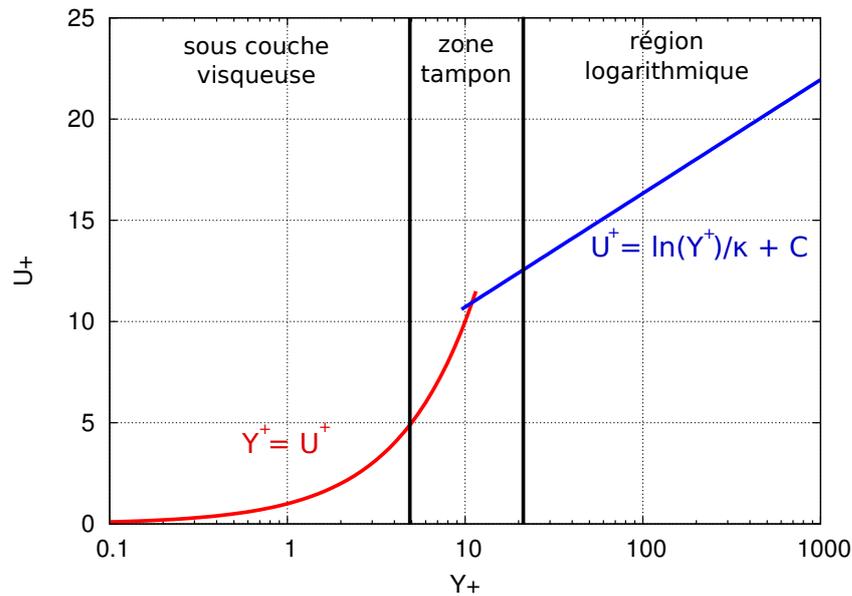


FIG. 7.1: Lois de comportement de la vitesse longitudinale dans une couche limite turbulente

### 7.1.2 Résultats numériques

Comme pour le cas de l'écoulement laminaire sur la plaque plane, le domaine de calcul est restreint à un rectangle  $[-0.25 : 1] \times [0 : 0.3]$ . Puisque le nombre de Reynolds est bien plus élevé pour un écoulement turbulent, la couche limite est plus mince et la hauteur du domaine de calcul peut être choisie plus petite. La figure (7.2) donne une illustration du domaine de calcul ainsi que des conditions aux limites utilisés. En ( $y = 0$ ), une condition de paroi glissante est d'abord imposée pour ( $x < 0$ ), puis une condition de paroi adhérente est appliquée. Les conditions de Steger-Warming sont toujours utilisées pour le reste des bords du domaine. L'écoulement étudié est caractérisé par un nombre de Reynolds de  $6.4 \cdot 10^6$  et un nombre de Mach de 0.24.

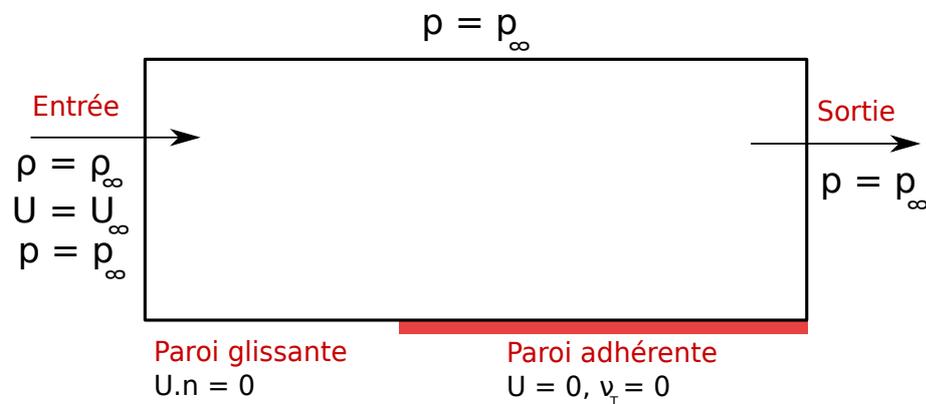


FIG. 7.2: Plaque plane turbulente - Domaine de calcul et conditions aux limites

Pour que le modèle de turbulence soit capable de reproduire correctement la couche limite,

il est important que le maillage soit suffisamment raffiné près de la paroi. En général, pour juger de la qualité de ce raffinement, la valeur de  $y^+$ , défini par l'équation (7.4), est considérée aux noeuds du maillage les plus proches de la paroi. Autrement dit, aux noeuds appartenant à la première couche de mailles. Il est alors conseillé d'utiliser un maillage qui vérifie, dans cette zone,  $y^+ < 5$ . Plusieurs maillages ont été utilisés pour ce cas test. Tous comportent 7 000 noeuds et 13 662 éléments. Ils sont construits, de telle sorte à vérifier  $y^+ = 0.5$ ,  $y^+ = 2$ ,  $y^+ = 5$  et  $y^+ = 10$ , respectivement, pour la première couche de mailles. La figure (7.3) présente une coupe de la vitesse, en ( $x = 1$ ), pour chacun des maillages ainsi que le tracé des lois linéaire et logarithmique. Globalement, les solutions obtenues par la méthode SUPG sont en bonne adéquation avec ces lois. Lorsque  $y^+ = 5$  ou  $y^+ = 10$ , le maillage n'est évidemment pas assez fin pour capter la zone linéaire. Ce cas test permet également de vérifier le bon comportement du schéma volumes finis/éléments finis qui a été développé. La figure (7.4) expose les coupes de vitesse, pour cette méthode, et pour les maillages correspondant à  $y^+ = 0.5$  et  $y^+ = 10$ . Les solutions obtenues sont également en accord avec les lois linéaire et logarithmique.

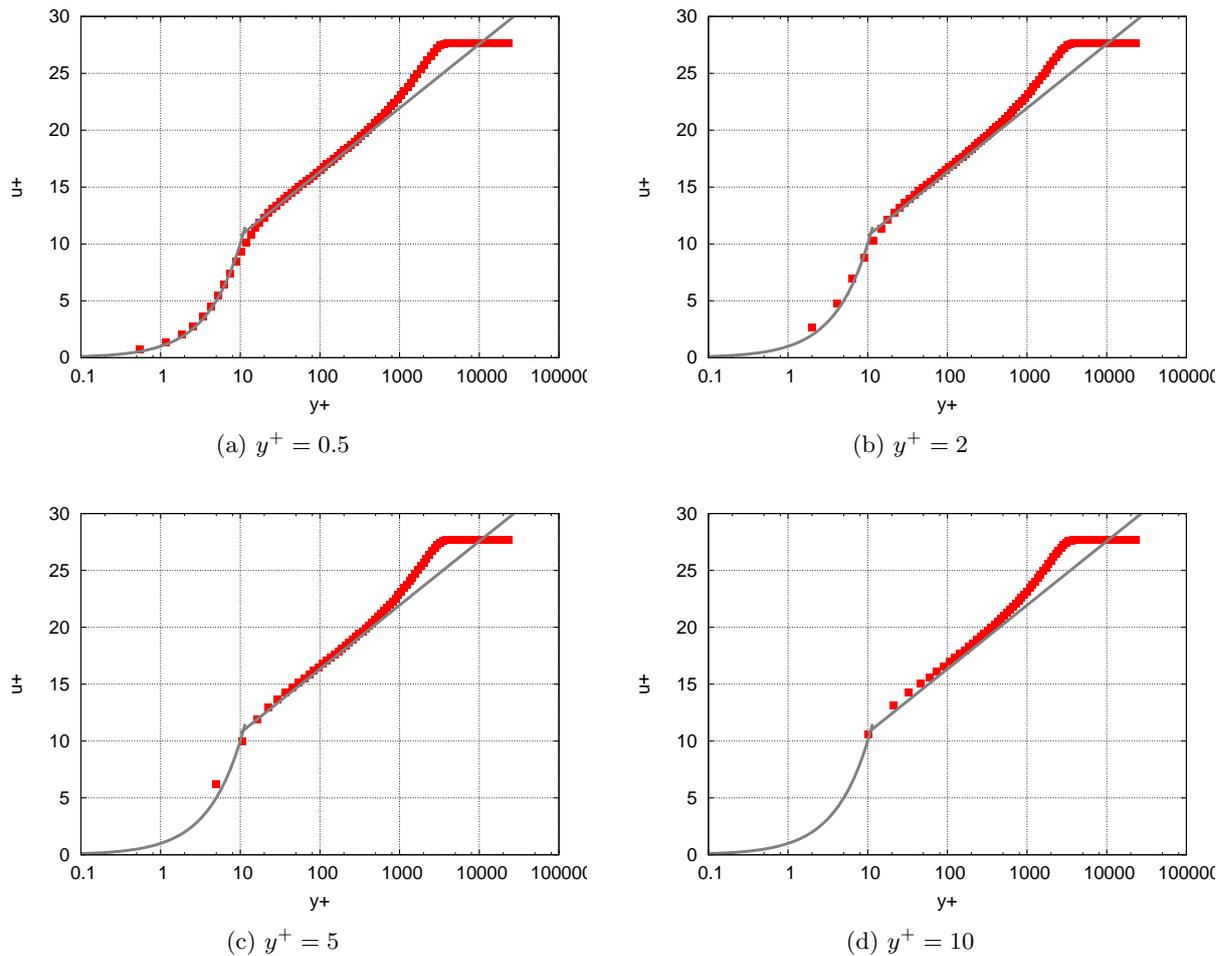


FIG. 7.3: Profil de vitesse, obtenu par la méthode SUPG, dans la couche limite turbulente pour différents maillages

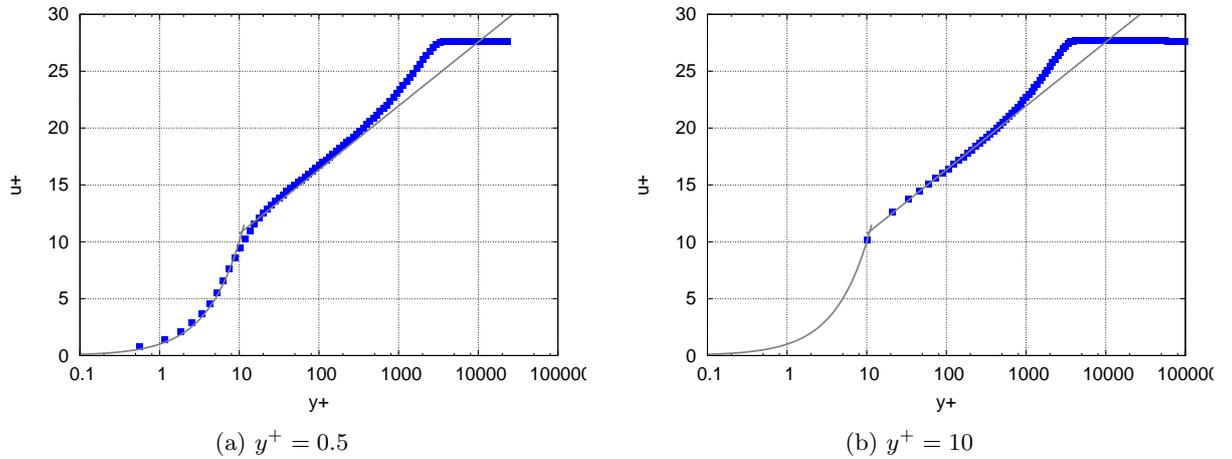


FIG. 7.4: Profil de vitesse, obtenu par la méthode volumes finis/éléments finis, dans la couche limite turbulente

## 7.2 Recirculation derrière une marche descendante

La recirculation d'un fluide derrière une marche a également fait l'objet de nombreuses études. Elle constitue, en effet, un excellent cas test pour étudier le détachement et le rattachement d'une couche limite. Les paramètres utilisés pour ce calcul sont les mêmes que ceux proposés dans les articles [66] et [67] où des résultats expérimentaux sont exposés. Aussi la hauteur de la marche est de  $H = 1.27\text{cm}$ , le nombre de Mach de  $Ma = 0.128$  et le nombre de Reynolds de  $Re_H = 37000$ . La figure (7.5) donne une illustration de la géométrie et des conditions aux bords pour ce cas test. La région qui précède la marche s'étend sur une distance de  $105H$ , comme cela est proposé dans [68]. Une couche limite s'y développe et cette distance est choisie pour qu'elle soit sensiblement identique, au niveau de la marche, à celle de l'expérience [66, 67].

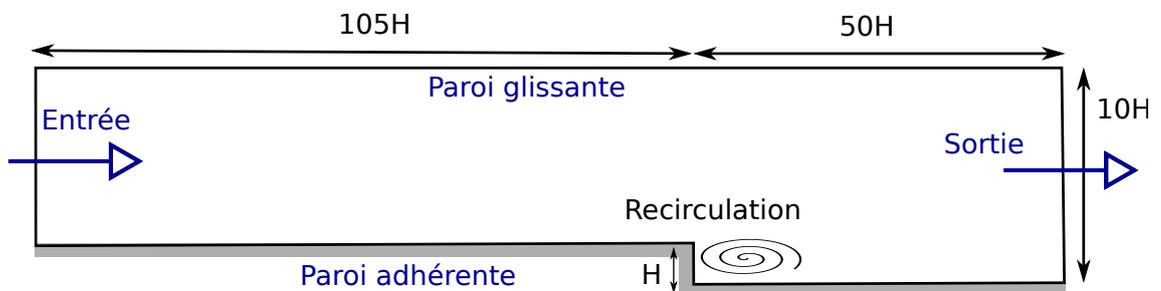


FIG. 7.5: Marche descendante - Configuration du cas test

Le maillage comporte 28 966 noeuds et 57 126 triangles. La première couche de mailles horizontales se trouve à une distance de  $9.95 \times 10^{-5}\text{m}$  de la paroi avant la marche, et à une distance

de  $9.56 \times 10^{-5}m$  après la marche. Dans la direction verticale, la première couche de maille est à une distance de  $1.96 \times 10^{-4}m$  de la paroi. La solution obtenue par la méthode SUPG, pour ce problème, est représentée sur la figure (7.6). Les lignes de courant, dans la zone située juste après la marche, sont tracées. Les deux zones de recirculation apparaissent clairement. La distance de rattachement observée semble être en accord avec l'expérience qui prédit, selon la technique de mesure utilisée, une distance de  $6.05H$  ou de  $6.2H$ .

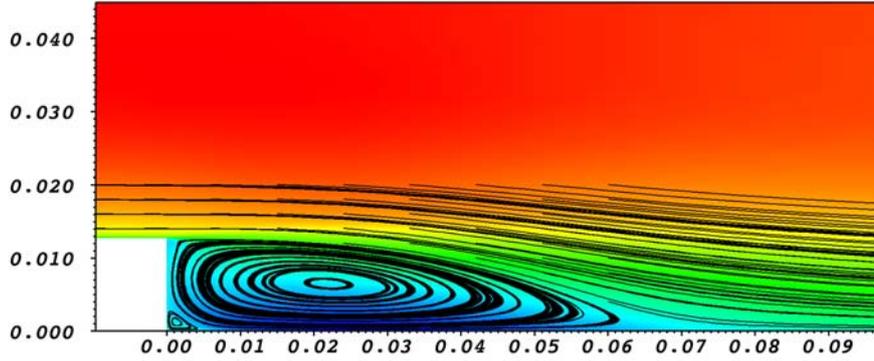


FIG. 7.6: Solution SUPG pour le test de la marche descendante - les traits continus représentent les lignes de courant dans la zone de recirculation, les couleurs donnent la vitesse longitudinale

Des coupes en  $(x = 0)$ ,  $(x = H)$ ,  $(x = 2H)$  et  $(x = 4H)$ , sur la vitesse de la solution obtenue avec la méthode SUPG, sont présentées sur la figure (7.7). Quel que soit le choix de la matrice de stabilisation  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  ou  $\tau_3$ , les profils sont identiques. Les zones où la vitesse est négative correspondent à la recirculation principale. Ces mêmes coupes sont ensuite comparées à celles obtenues par le schéma volumes finis/éléments finis sur la figure (7.8). Les solutions des deux types de méthodes sont être en accord. La distribution du coefficient de pression,  $C_p$ , et celle du coefficient de frottement,  $C_f$ , sont données sur les figures (7.9a) et (7.9b). Le coefficient de frottement est défini par :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_{ref}^2} \quad (7.7)$$

où  $\tau_w$  est la contrainte de cisaillement à la paroi donnée par l'équation (7.6) et  $U_{ref}$  désigne la vitesse à l'infini. Les figures (7.9a) et (7.9b) donnent les  $C_p$  et  $C_f$  associés aux résultats des deux méthodes SUPG et volumes finis/éléments finis. Elles donnent également des valeurs expérimentales et la solution d'une simulation DES (Detached Eddy Simulation) obtenue dans [69]. Il apparaît que les solutions des deux méthodes développées, SUPG et volumes finis/éléments finis, respectent les ordres de grandeurs et l'allure des profils attendus. Au point de rattachement, le coefficient de frottement s'annule. La figure (7.9b) permet donc de déterminer une distance de rattachement de  $5.9H$  pour la méthode SUPG et de  $6.3H$  pour la méthode volumes finis/éléments finis. Ce qui semble raisonnable vis à vis des données expérimentales. En ce qui

concerne le temps d'exécution de ce cas, il a nécessité environ 10 minutes sur 16 processeurs. La convergence du calcul est indiquée sur la figure (7.2).

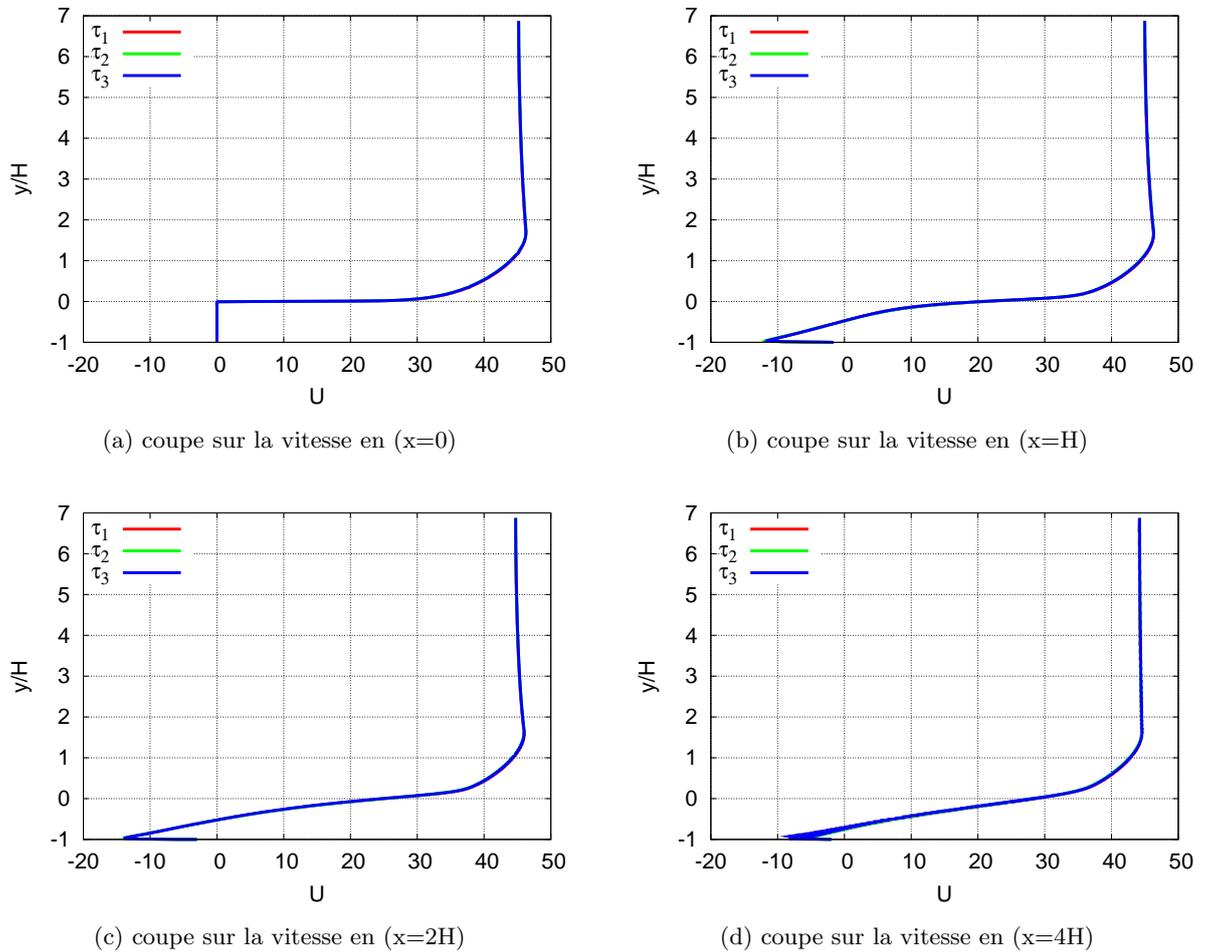


FIG. 7.7: Solution SUPG pour le test de la marche descendante - Coupes sur la vitesse pour différents choix de matrice de stabilisation  $\tau$

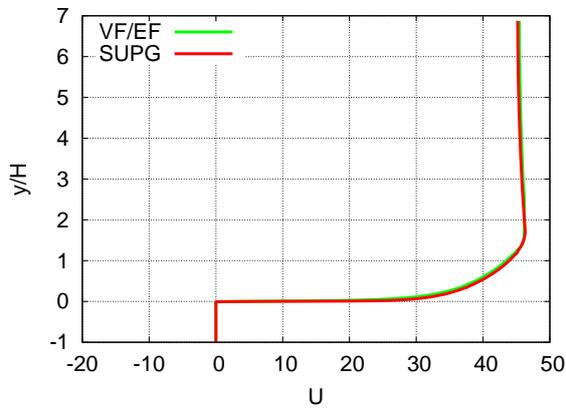
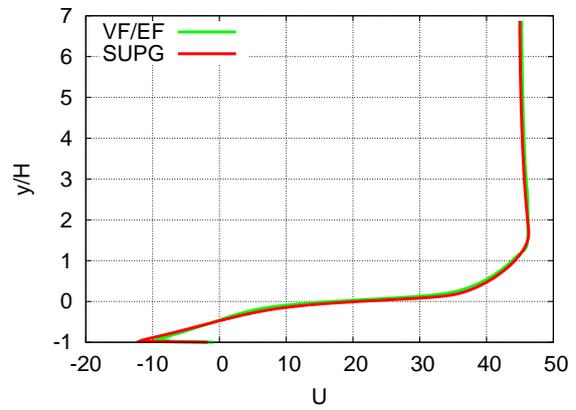
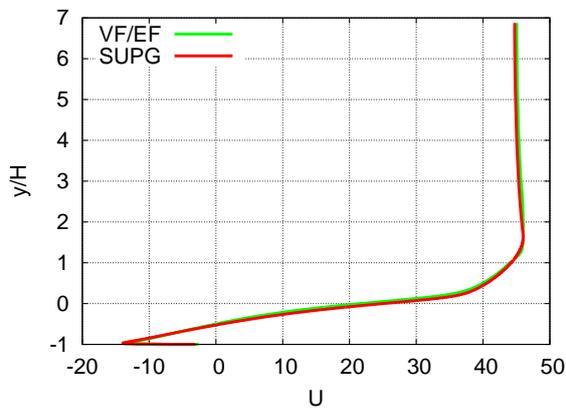
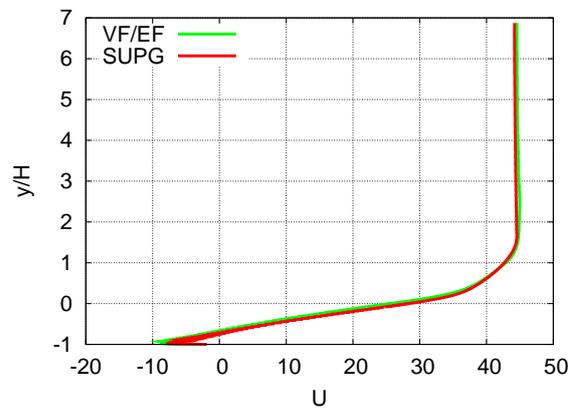
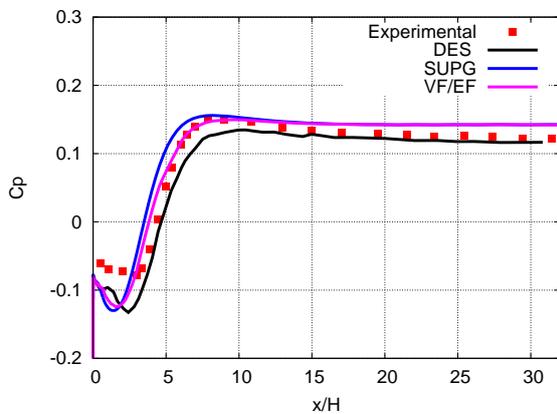
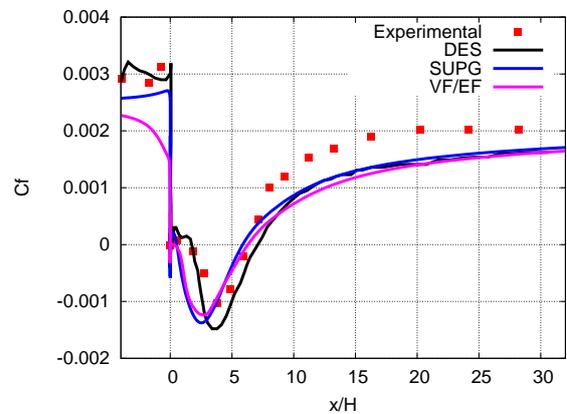
(a) coupe sur la vitesse en ( $x=0$ )(b) coupe sur la vitesse en ( $x=H$ )(c) coupe sur la vitesse en ( $x=2H$ )(d) coupe sur la vitesse en ( $x=4H$ )

FIG. 7.8: Solutions volumes finis/éléments finis et SUPG pour le test de la marche descendante - Coupes sur la vitesse

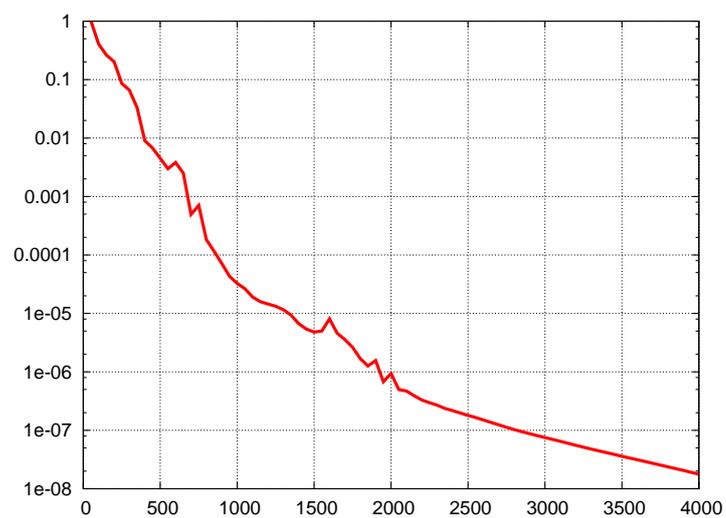


(a) Coefficient de pression



(b) Coefficient de frottement

FIG. 7.9: Marche descendante - Courbes de pression et de frottement des méthodes SUPG et volumes finis/éléments finis

FIG. 7.10: Norme  $L^2$  du résidu du problème en fonction du nombre d'itérations

### 7.3 Écoulement turbulent autour d'un profil de NACA0012

Le profil d'aile de type NACA0012 a été présenté au cours du paragraphe 4.4.4 (page 62). Cette même géométrie est reprise ici. Dans un premier temps, une étude de convergence en maillages est réalisée pour un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds de  $10^5$ , un nombre de Mach de 0.5 et un angle d'attaque de  $\alpha = 2^\circ$ . Le tableau (7.1) indique les principales caractéristiques des maillages utilisés, à savoir leur nombre de noeuds et d'éléments et l'épaisseur de la première couche de mailles autour du NACA0012. La figure (7.13) donne une illustration des 4 premiers maillages. Chacun d'eux est construit à partir d'un raffinement du précédent. Pour être en mesure de comparer les différents résultats, le calcul est également effectué sur un maillage très fin, comportant environ 1 000 000 d'éléments. La solution obtenue sur ce maillage sera la solution de référence.

maillage	nombre de noeuds	nombre d'éléments	Epaisseur 1 <sup>ere</sup> maille
1	1 533	2 968	$3.1 \times 10^{-3}$
2	6 034	11 872	$1.65 \times 10^{-3}$
3	13 503	26 712	$1.1 \times 10^{-3}$
4	23 940	47 488	$8.2 \times 10^{-4}$
5	53 718	106 848	$5.4 \times 10^{-4}$
référence	481 698	961 632	$1.83 \times 10^{-4}$

TAB. 7.1: NACA0012 turbulent - Caractéristiques des différents maillages

Les figures (7.11a) et (7.11b) permettent de donner un aperçu de la solution. Il s'agit de la solution d'un calcul effectué à l'aide de la méthode SUPG. La vitesse longitudinale ainsi que le champ de pression y apparaissent. Pour cet écoulement à nombre de Reynolds élevé, la couche limite est beaucoup plus fine que dans le cas laminaire. Il existe de forts gradients de vitesse. Cela est plus facilement visible sur les courbes de frottement de la figure (7.14c). L'ensemble des solutions obtenues, par la méthode SUPG, pour les maillages 1 à 5 ainsi que pour le maillage de référence y sont représentées. Un agrandissement de la zone supérieure gauche, où les différences sont les plus prononcées, est donné par la figure (7.14d). Il apparaît alors que plus le maillage est fin et plus le coefficient de frottement est proche de celui obtenu avec le maillage de référence. Cela confirme donc la convergence en maillages de la méthode. Pour les isolignes de pression, la visualisation est également plus lisible sur les courbes de pression de figure (7.14a). Le zoom effectué sur cette figure et présenté par la figure (7.14b) permet également de vérifier la convergence en maillages.

En ce qui concerne le choix du paramètre de stabilisation du schéma SUPG, les solutions présentées dans ce paragraphe ont été obtenues à l'aide du paramètre  $\tau_2$  (4.22). Les résultats associés à chacune des stabilisations  $\tau_1$  et  $\tau_3$  sont similaires à celles-ci. Enfin, le parallélisme du code de calcul est testé. Il s'agit de vérifier son efficacité dans le cadre d'un cas turbulent,

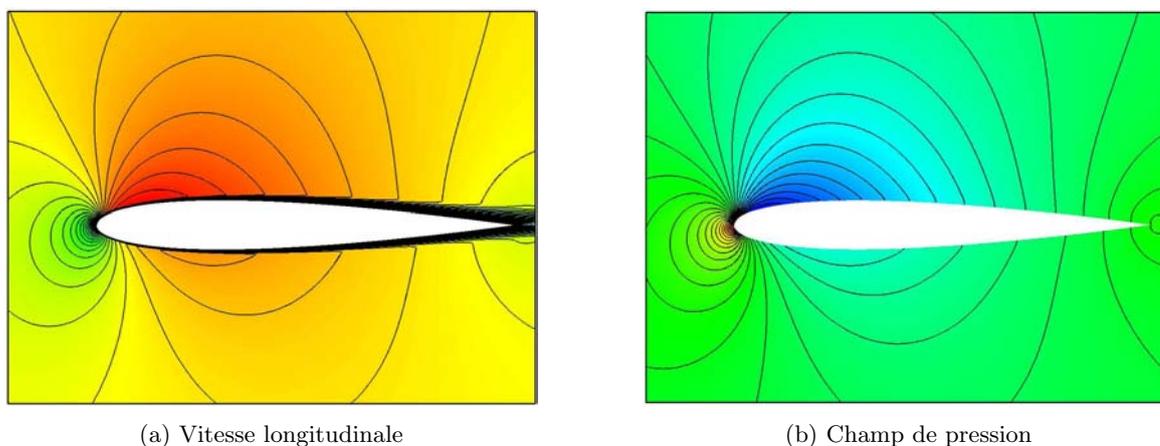


FIG. 7.11: NACA0012 - Solution SUPG (maillage 5)

afin de s'assurer qu'il n'y a pas eu de dégradation des performances suite à l'ajout du modèle de Spalart-Allmaras. La figure (7.12) donne l'accélération obtenue en fonction du nombre de processeurs. Pour cette étude, le calcul a été réalisé sur le maillage 5 à l'aide de 4, 8, 16, 32 et 64 processeurs. Dans la mesure où le maillage ne comporte que 53 718 noeuds, le temps consacré aux communications nuit rapidement à l'efficacité du parallélisme lorsque le nombre d'unités de calcul augmente. Néanmoins, la courbe obtenue reste proche du cas idéal, ce qui est un résultat satisfaisant.

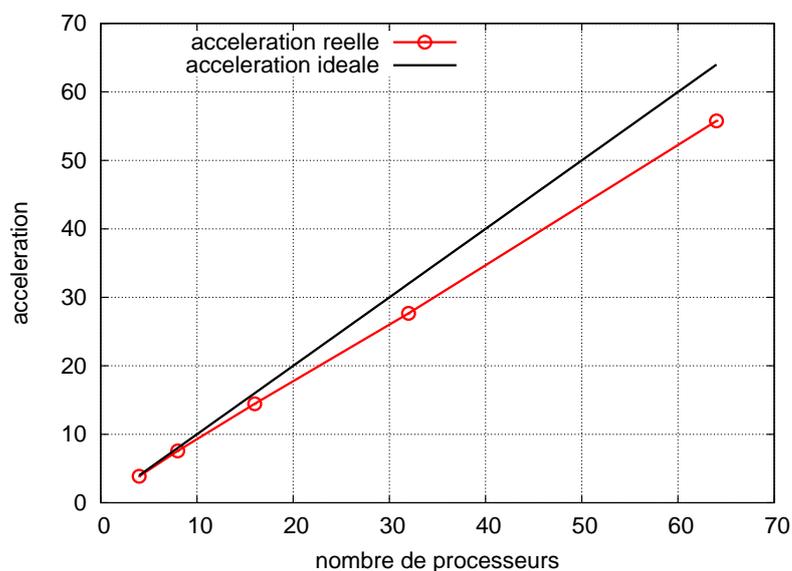


FIG. 7.12: Accélération en fonction du nombre de processeurs utilisé (maillage 5)

Un second écoulement est ensuite considéré. Il est caractérisé par un nombre de Reynolds de  $6 \cdot 10^6$  et un nombre de Mach de 0.15. L'objectif est de comparer les résultats de la méthode SUPG avec ceux obtenus par le code de calcul CFL3D [70]. Dans la mesure où le Reynolds est

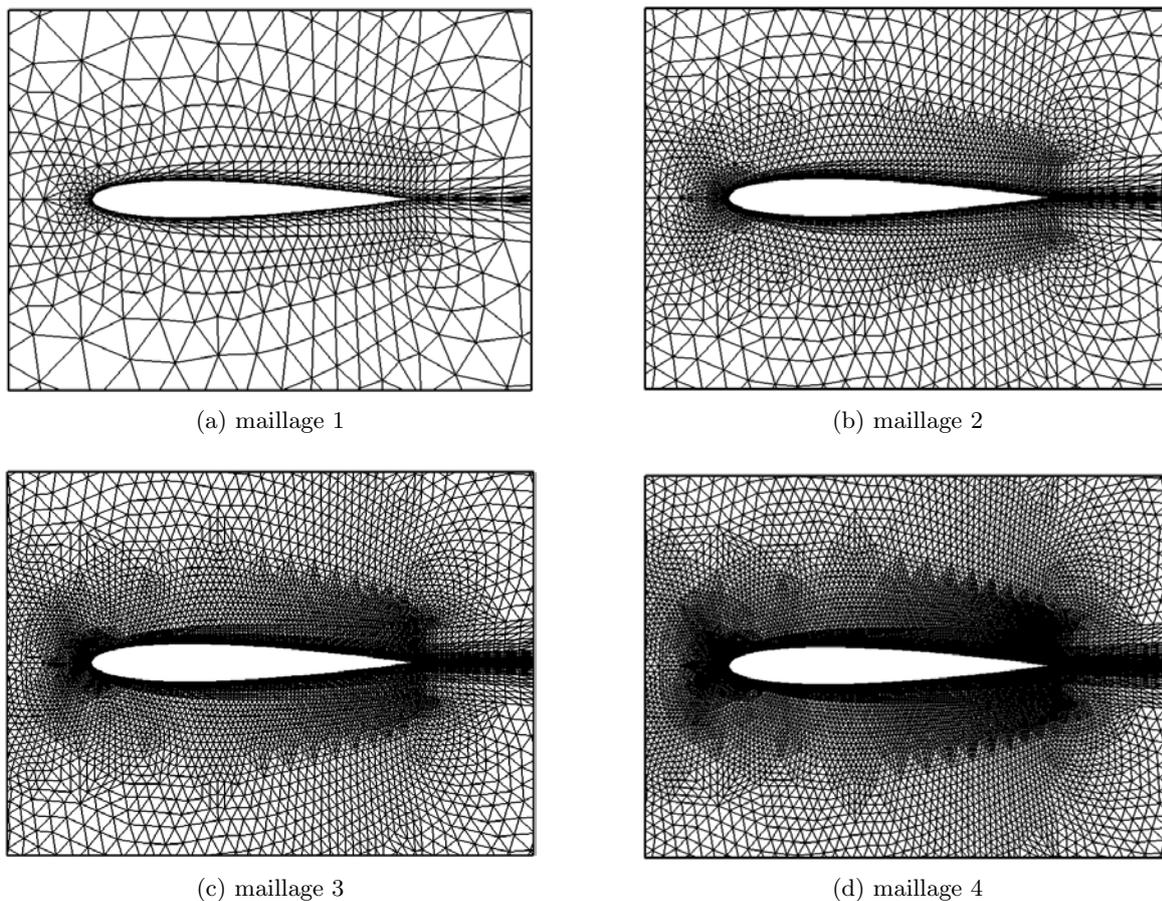
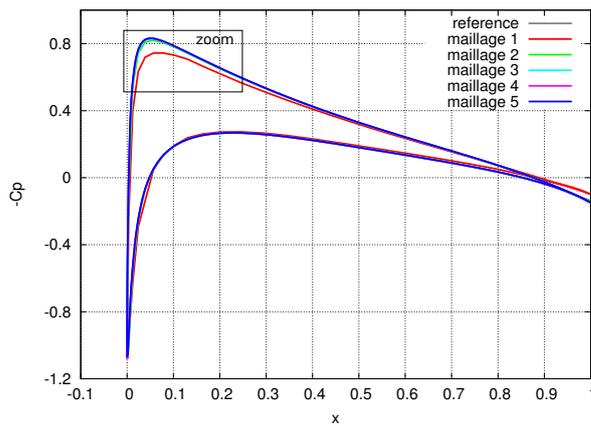
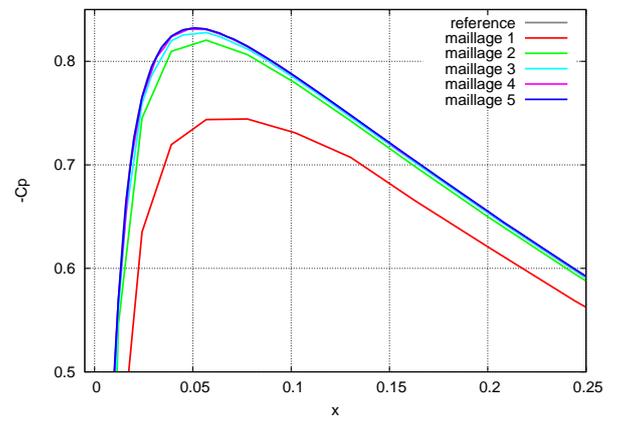


FIG. 7.13: NACA0012 - Maillages utilisés pour simuler l'écoulement de  $Re = 10^5$ ,  $Ma = 0.5$  et  $\alpha = 2^\circ$

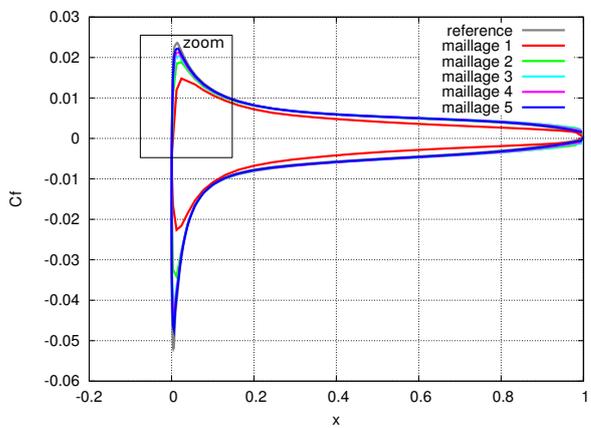
plus grand ici, le maillage doit être plus fin dans la couche limite. Aussi, un nouveau maillage comportant 103 086 noeuds, 204 113 éléments et vérifiant  $y = 10^{-5}$  dans la première couche de mailles, est utilisé. A titre indicatif, le temps de calcul est ici de 20 minutes sur 64 processeurs. La figure (7.15) présente les courbes des coefficients de pression et de frottement, calculées grâce au schéma SUPG, pour des angles d'attaque de  $0^\circ$ ,  $10^\circ$  et  $15^\circ$ . Ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus par le code CFL3D [71].



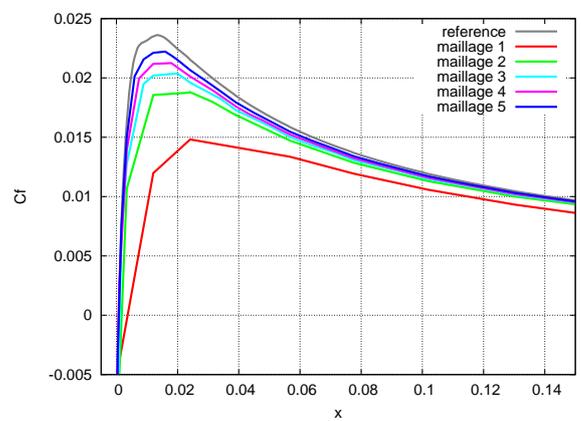
(a) Coefficient de pression



(b) Zoom sur le coefficient de pression



(c) Coefficient de frottement



(d) Zoom sur le coefficient de frottement

FIG. 7.14: NACA0012 - Coefficients de pression et de frottement obtenu par la méthode SUPG pour les différents maillages

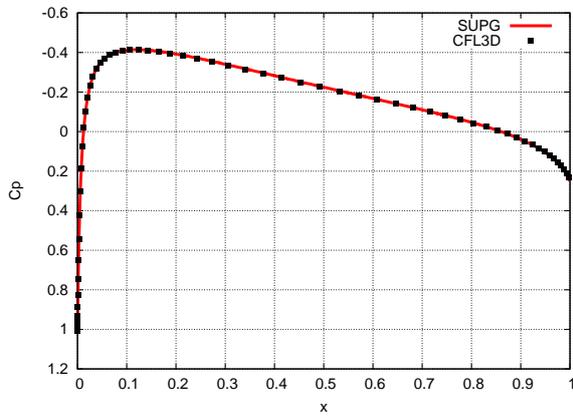
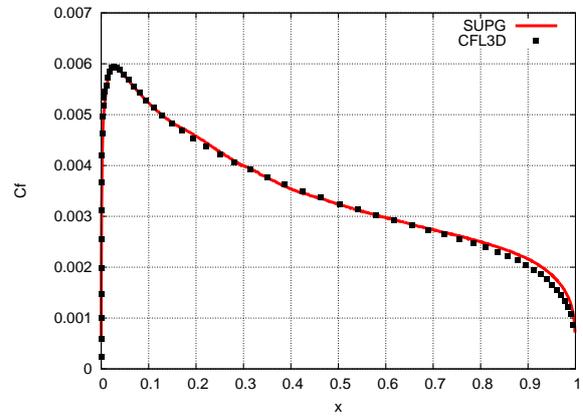
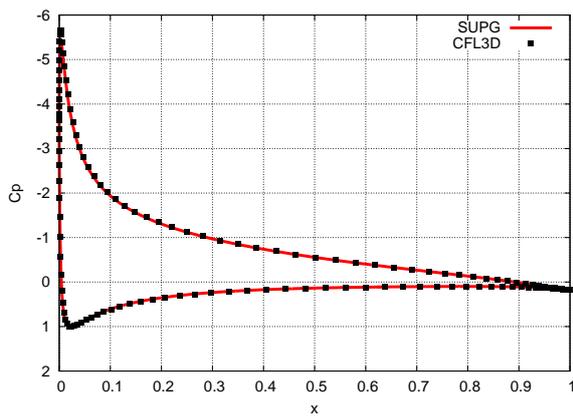
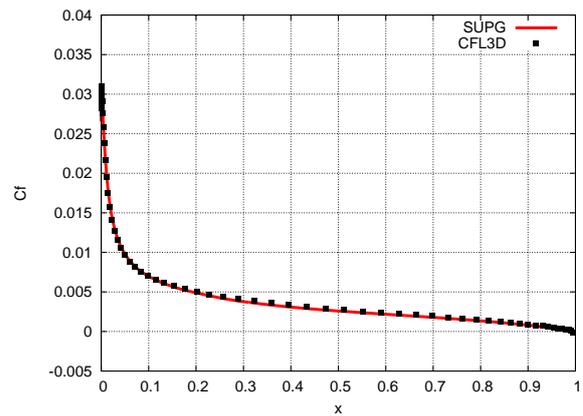
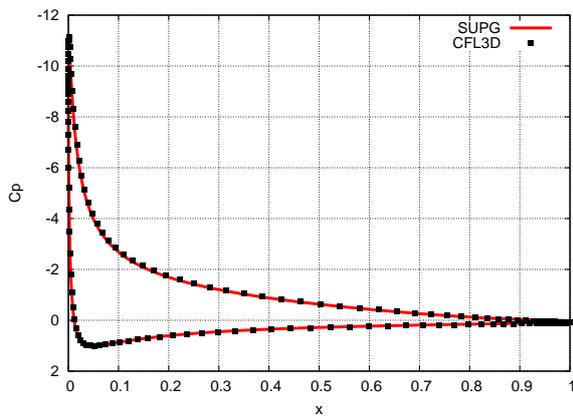
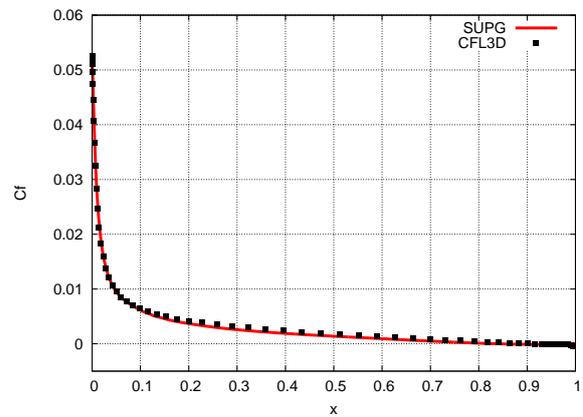
(a) Coefficient de pression pour  $\alpha = 0^\circ$ (b) Coefficient de frottement pour  $\alpha = 0^\circ$ (c) Coefficient de pression pour  $\alpha = 10^\circ$ (d) Coefficient de frottement pour  $\alpha = 10^\circ$ (e) Coefficient de pression pour  $\alpha = 15^\circ$ (f) Coefficient de frottement pour  $\alpha = 15^\circ$ 

FIG. 7.15: NACA0012 - Coefficients de pression et de frottement en fonction de l'angle d'attaque

## 7.4 Ecoulement turbulent transsonique autour d'un profil de RAE2822

L'écoulement turbulent d'un fluide autour d'un profil d'aile de type RAE2822 est considéré ici. Ce test permet de vérifier l'aptitude de la méthode SUPG à gérer les ondes de chocs, pour un problème plus complexe que celui constitué des seules équations d'Euler et étudié lors des paragraphes 4.4.3 (page 57) et 4.4.4 (page 66). Cet écoulement transsonique est caractérisé par un nombre de Reynolds de  $6.5 \cdot 10^6$ , un nombre de Mach de 0.734 et un angle d'attaque de  $2.79^\circ$ . Le maillage a été fourni par Airbus dans le cadre d'un projet nommé DESGIVRE. Initialement construit pour être utilisé par le logiciel Elsa, un code de simulation numérique pour la mécanique des fluides développé à l'ONERA, il était structuré et constitué de quadrangles. Dans la mesure où la méthode SUPG n'a été implémentée que pour des triangles, chacun des éléments de ce maillage a été redécoupé. Cela conduit au maillage de la figure (7.16) qui comporte 139 088 noeuds et 276 480 éléments. Le temps de calcul est de 40 minutes sur 128 processeurs.

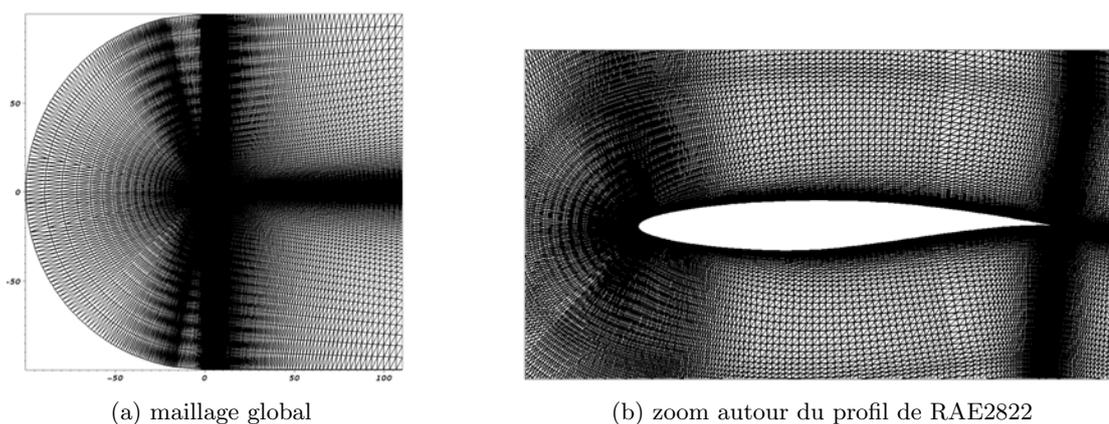


FIG. 7.16: RAE2822 - Détails de la discrétisation spatiale

Afin de résoudre correctement la couche limite turbulente, le maillage doit être très fin. Dans le cas actuel, la première couche de mailles se trouve à une distance de  $7.7 \cdot 10^{-6}$  du profil d'aile. Ce raffinement a pour conséquence un étirement important des éléments. En effet, le rapport d'aspect maximal est ici de  $2.7 \cdot 10^5$ . Autrement dit, il existe des triangles pour lesquels il y a un rapport de l'ordre de  $10^5$  entre la longueur du plus petit côté et celle du plus grand.

La figure (7.17) propose un aperçu de la solution obtenue, pour ce RAE2822, par la méthode SUPG. Les champs de vitesse et de pression y sont représentés. La caractéristique principale de cet écoulement turbulent est la présence d'une onde de choc. Celle-ci se distingue clairement sur cette figure. Pour comparer la résolution de l'onde de choc par différentes méthodes numériques, le coefficient de pression est tracé sur la figure (7.18). Les solutions obtenues par le code de calcul Elsa ainsi que par les méthodes SUPG et volumes finis/éléments finis, pour laquelle le solveur HLLC est utilisé, sont confrontées à des données expérimentales. Il apparaît que le schéma SUPG et le code Elsa donne sensiblement le même résultat alors que la méthode volumes finis/éléments finis tend à diffuser davantage le choc. Cela est vrai lorsque le paramètre de capture de choc

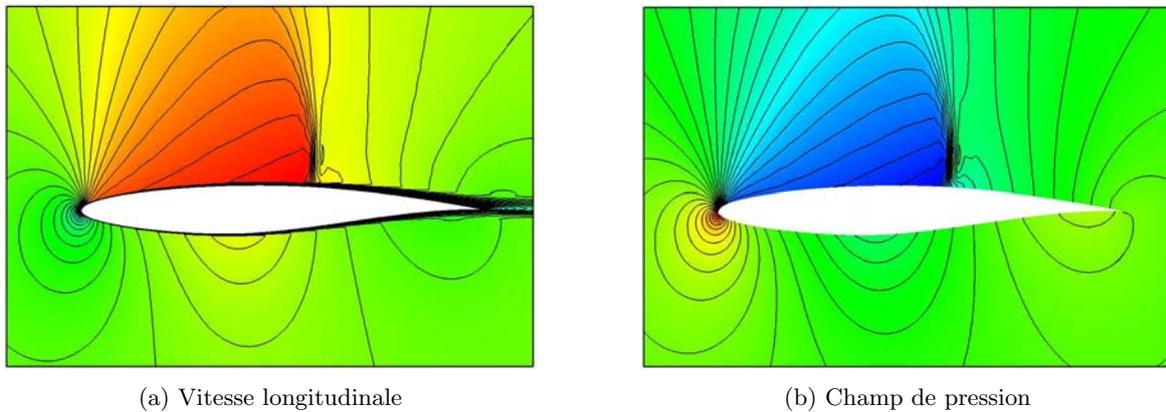


FIG. 7.17: RAE2822 - Solution SUPG

donné par l'équation (4.25) est écrit pour  $\beta = 2$ . Il a déjà été montré, dans le cas du NACA0012 transsonique (paragraphe 4.4.4 page 66), que ce choix était celui qui apportait le moins de diffusion numérique. Ce constat est à nouveau fait ici. La figure (7.19) donne le coefficient de pression obtenu lorsque le paramètre de capture de choc est défini par  $\beta = 1$ . La solution de la méthode SUPG est alors plus diffuse que celles des autres méthodes. En ce qui concerne le choix des paramètres de stabilisation, les définitions  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  conduisent, pour cet écoulement autour d'un RAE2822, à des solutions similaires.

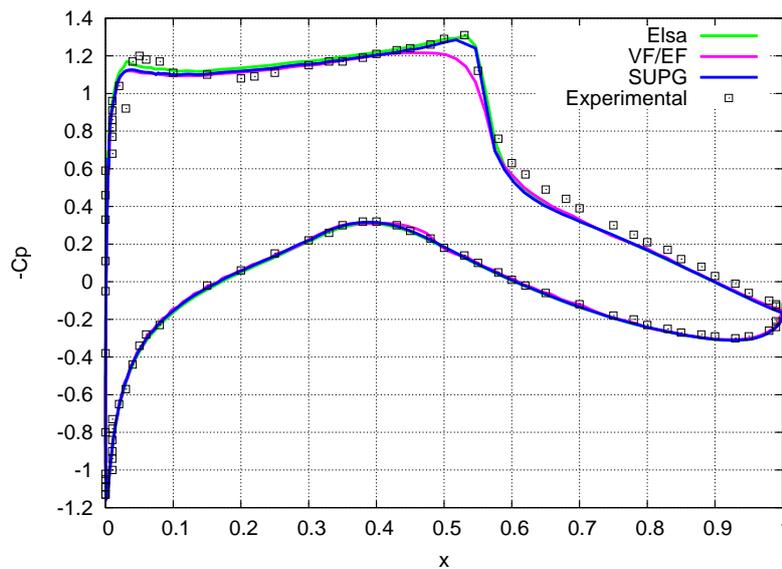


FIG. 7.18: RAE2822 - Coefficients de pression obtenus par les différentes méthodes

## 7.5. ECOULEMENT TRANSSONIQUE NON VISQUEUX 3D AUTOUR D'UNE AILE M6 103

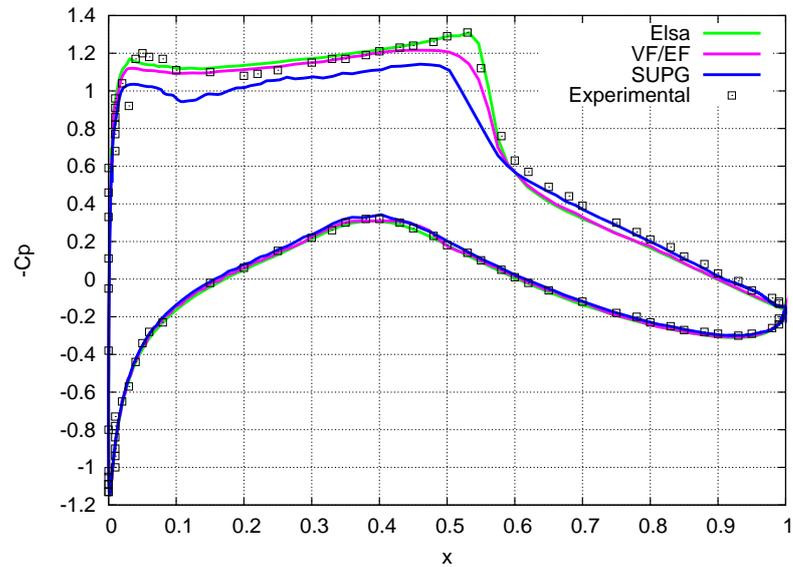


FIG. 7.19: RAE2822 - Coefficients de pression obtenus par les différentes méthodes et avec le paramètre de capture de choc le plus diffusif pour le schéma SUPG

## 7.5 Ecoulement transsonique non visqueux 3D autour d'une aile M6

L'écoulement autour de l'aile M6 de l'Onera est un cas test classique de validation en mécanique des fluides. En effet, cette étude offre l'avantage d'allier une géométrie relativement simple à un écoulement transsonique complexe. Dans le cadre de ce travail, l'étude porte sur un écoulement non visqueux, caractérisé par un nombre de Mach de 0.84 et un angle d'attaque de  $3.06^\circ$ . La figure (7.20) présente les isolignes de pression de la solution SUPG. Le maillage est quant à lui composé de 410 756 noeuds et de 2 556 656 tétraèdres. Les courbes de pression extraites de la solution SUPG sont comparées aux données expérimentales obtenues dans [72]. La figure (7.21) donne ces comparaisons pour différentes coupes 2D le long de l'aile M6. Ces résultats sont globalement satisfaisants.

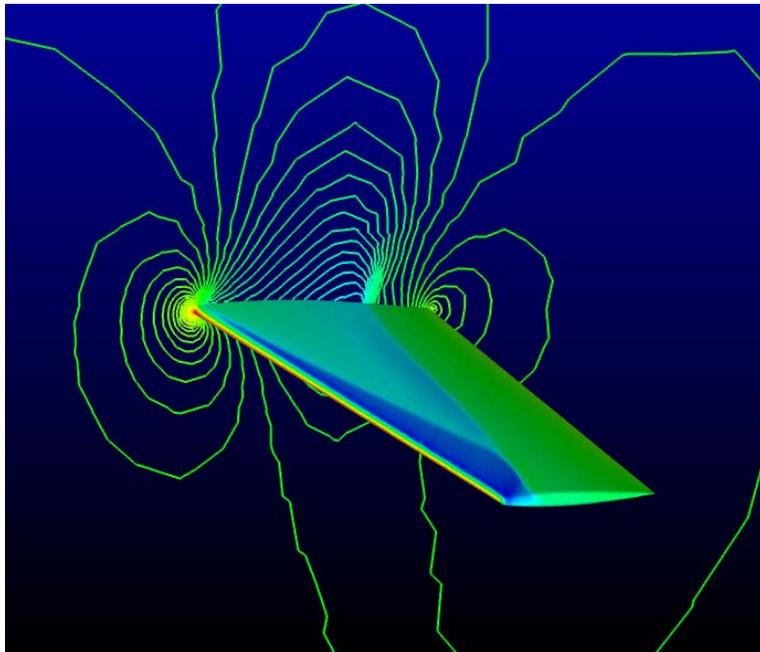


FIG. 7.20: Aile M6 - Isolignes de pression

7.5. ECOULEMENT TRANSSONIQUE NON VISQUEUX 3D AUTOUR D'UNE AILE M6 105

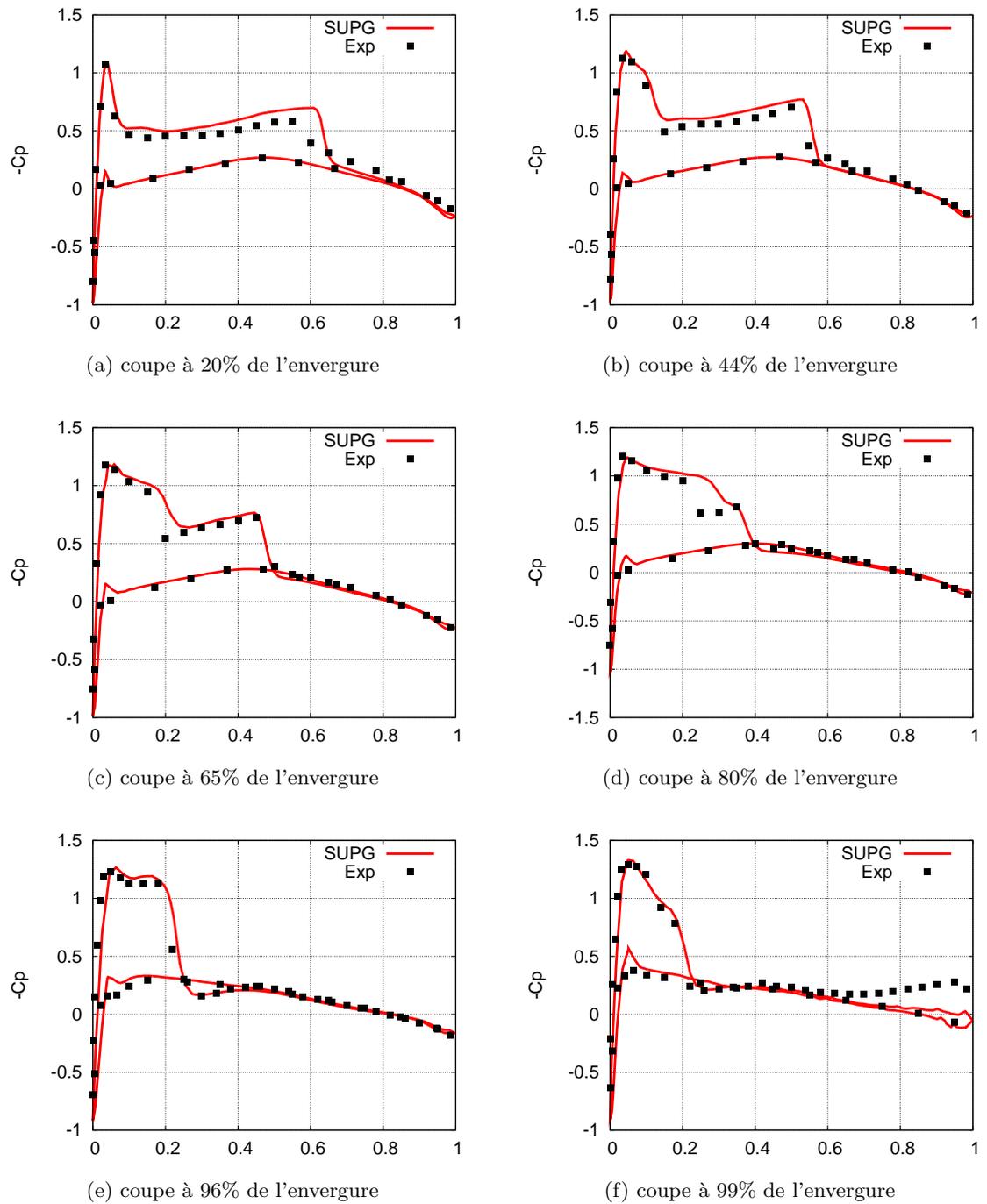


FIG. 7.21: Aile M6 - Coefficient de pression

## 7.6 Écoulement turbulent 3D sur une plaque plane

La turbulence est un phénomène physique caractérisé par la présence de tourbillons. Il y a donc des structures qui se développent dans les trois directions d'espace. Aussi, il est indispensable d'appréhender le problème 3D pour obtenir une description correcte de ce phénomène.

La validation du code pour des simulations 3D commence avec le cas test de la plaque plane. La figure (7.22) donne une illustration du domaine de calcul, de ses dimensions ainsi que du type de conditions aux limites appliquées pour chaque face. L'écoulement turbulent étudié se caractérise par un nombre de Reynolds de  $6.4 \cdot 10^6$  et un nombre de Mach de 0.24. Le maillage comporte 57 378 noeuds et 280 800 tétraèdres. La première couche de mailles se situe à une distance de  $10^{-5}m$  de la plaque ( $y = 0$ ), ce qui équivaut, pour cet écoulement, à un  $y^+$  de 2 environ. Comme pour le cas 2D, l'objectif est de reproduire les lois linéaires et logarithmiques que suit le champ de vitesse dans la couche limite. La figure (7.23) présente une coupe de la vitesse en ( $x = 1m, z = 0.025m$ ). Cette solution a été obtenue par la formulation SUPG et concorde avec les courbes théoriques attendues.

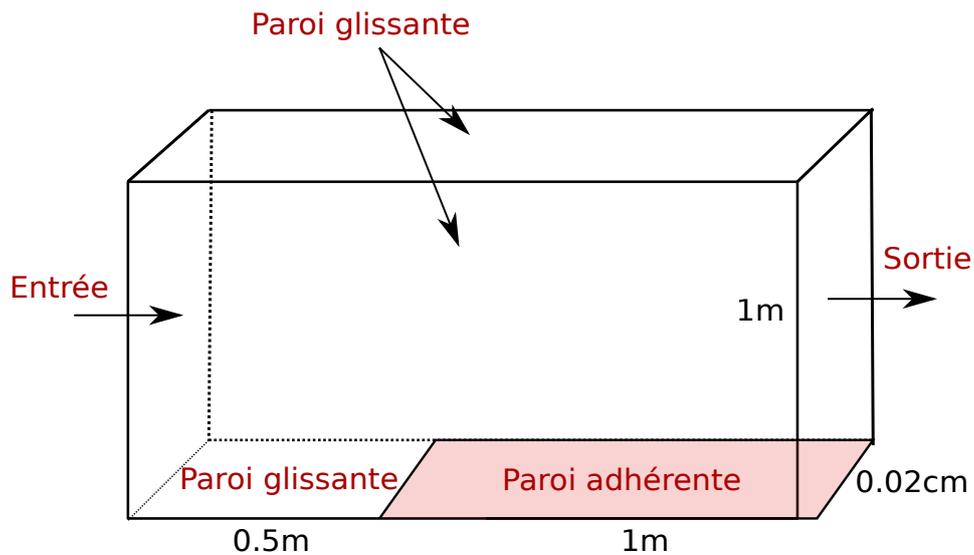


FIG. 7.22: Plaque plane 3D - Description de la géométrie et des conditions aux limites

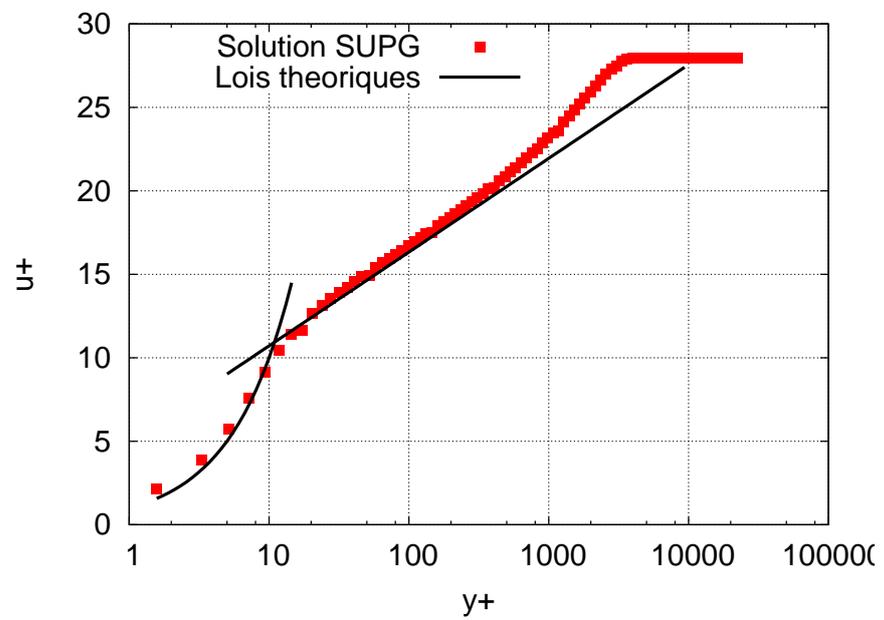


FIG. 7.23: Plaque plane 3D - Profil de la vitesse dans la couche limite



# Conclusions et Perspectives

L'étude présentée dans cette thèse est dédiée à la simulation numérique d'écoulements compressibles turbulents à l'aide d'une méthode d'éléments finis stabilisés. Ce chapitre de conclusion a pour objectif de proposer un bilan du travail effectué et d'exposer les travaux futurs envisagés.

La plateforme de calcul FluidBox, développée au centre INRIA Bordeaux Sud-Ouest par l'équipe Scalapplix devenu à présent équipe Bacchus, a servi de support aux recherches présentées dans ce document. C'est un code de calcul, non structuré, qui permet de résoudre les équations de la mécanique des fluides grâce à différents types de schémas numériques (volumes finis, éléments finis stabilisés, méthode des résidus). Ce code est parallèle et la décomposition de maillages s'effectue grâce à la librairie SCOTCH [61], également développée au sein de l'équipe Bacchus. Il propose également plusieurs types de méthodes pour résoudre les systèmes linéaires (Jacobi, Gauss-Seidel, GMRES préconditionné, ...) Au début de cette thèse, la plateforme FluidBox ne disposait ni de modèle de turbulence, ni de méthode d'éléments finis stabilisés. Ces éléments ont donc été développés et validés dans le cadre de ce travail.

L'objectif de cette étude était de mettre en place un schéma numérique, à la fois robuste et peu dissipatif, pour simuler des écoulements compressibles turbulents. La contrainte imposée à la méthode numérique d'être peu dissipative, est dictée par le régime turbulent de l'écoulement. Dans nos équations, les effets du modèle turbulent sont pris en compte par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente. Il faut donc être en mesure de contrôler la viscosité numérique apportée par le schéma afin de ne pas polluer cette viscosité turbulente. Les méthodes d'ordre élevé constituent un cadre adéquat pour remplir ce type de critère. Plus l'ordre de la méthode est élevé et plus la diffusion numérique apportée par le schéma est faible. Dans la littérature, il existe des méthodes volumes finis d'ordre élevé. Néanmoins, le domaine de dépendance (ie le stencil du schéma) augmente avec l'ordre de la méthode, ce qui rend la parallélisation difficile. L'emploi d'éléments finis permet de s'affranchir de ce problème. En effet, il s'agit de schémas compacts. Par conséquent, leur domaine de dépendance est fixe, quel que soit le type d'élément utilisé. Il est alors possible de paralléliser le code de calcul de façon efficace. Dans le cadre d'une autre thèse, qui avait pour sujet l'étude des schémas d'ordre élevé distribuant le résidu [59], des éléments de type  $P_2$ ,  $Q_2$ ,  $P_3$  et  $Q_3$  ont été développés au sein de la plateforme FluidBox.

L'analyse qui a été effectuée, sur l'équation d'advection diffusion, pour la méthode d'éléments finis stabilisés, a permis de quantifier les effets de la condensation de masse sur l'ordre de précision du schéma. Bien que ces effets soient négligeables sur la précision des simulations stationnaires,

une attention particulière devra être portée sur ce point, pour des calculs instationnaires. L'ordre 2 peut être atteint grâce à l'utilisation d'une méthode implicite ou alors à celle d'une méthode explicite, comme cela a récemment été démontré [73].

Dans le cadre d'écoulements dominés par l'advection, il est nécessaire de stabiliser la méthode d'éléments finis. Pour ce faire, la méthode SUPG est construite à partir d'une formulation de Galerkin à laquelle s'ajoute un terme de stabilisation. Il permet d'apporter une certaine quantité de diffusion numérique, qui garantit la robustesse de la méthode, tout en préservant la précision.

En plus de la méthode SUPG, une formulation mixte éléments finis-volumes finis a été mise en place dans le code de calcul. Cela a permis de comparer les résultats obtenus par chacune de ces deux méthodes. Des conditions aux limites en entrée et sortie du domaine, basées sur la formulation Steger-Warming (2D et 3D), et des conditions aux limites périodiques (2D et 3D) ont également été développées et validées. Ces dernières conditions aux limites offrent des possibilités intéressantes pour les calculs turbulents 3D. En effet, dans le cadre d'applications industrielles, où les nombres de Reynolds sont très élevés, les domaines de simulation doivent souvent être réduits afin de limiter les coûts de calcul. Les conditions périodiques permettent alors d'effectuer une simulation sur un domaine, supposé infini, mais dont la taille reste raisonnable d'un point de vue numérique.

Plusieurs problèmes types ont permis d'éprouver les différentes stratégies numériques mises en oeuvre (Plaque plane, NACA0012, marche descendante, RAE2822). Dans la simulation d'écoulement turbulent, le rôle du maillage est fondamental. En effet, le maillage doit être suffisamment raffiné pour permettre la résolution des couches limites et la capture des structures fines. Pour les géométries relativement simples, les maillages ont été réalisés à l'aide du logiciel de maillage GMSH ou d'un code maison. Dans le cadre de géométries plus complexes, les maillages sont issus soit de nos contrats industriels (Airbus, participation par le contrat DESGIVRE), soit de collaborations scientifiques (Bruno Koobus, université Montpellier II et François Monrency ETS Canada). Ces maillages ont été construits de telle sorte à être adaptés à l'écoulement présumé. Néanmoins, la solution la plus efficace serait de recourir à l'adaptation statique ou dynamique de maillages. Il s'agit d'ailleurs d'un des sujets étudiés au sein de l'équipe Bacchus [74, 75]. De plus, la résolution des couches limites serait mieux représentée par des maillages quadrangulaires. Dans ce contexte, des maillages hybrides seraient une alternative intéressante aux développements présents.

L'originalité de notre approche est de résoudre, de manière couplée, à l'aide d'éléments finis stabilisés, les équations de Navier-Stokes et l'équation de Spalart-Allmaras. Généralement, la résolution des équations de Navier-Stokes est découplée de celle de l'équation de turbulence [76]. Le paramètre de stabilisation de la méthode SUPG,  $\tau$ , doit prendre en compte ce couplage. Dans cette étude, il a été mis en évidence la sensibilité de la méthode à ce terme. Une des difficultés de cette méthode est de choisir une stabilisation robuste même lorsque le maillage est très étiré, ce qui est naturellement rencontré en régime turbulent. Nous avons proposé trois méthodes de stabilisations : les stabilisations  $\tau_1$  et  $\tau_3$  sont assez répandues dans la littérature, la stabilisation  $\tau_2$  est plus originale et plus récente [24]. Elle a été inspirée par les méthodes aux résidus [53].

Dans la mesure où la simulation numérique directe (Direct Numerical Simulation) et la

simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation) restent des méthodes relativement coûteuses pour des applications industrielles, le potentiel de méthodes DES (Detached Eddy Simulation) est particulièrement intéressant. Il s'agit de méthodes hybrides RANS/LES qui allient l'efficacité de l'approche RANS à la précision de l'approche LES [3, 77]. Le choix du modèle de Spalart-Allmaras permet, tout d'abord, de disposer d'une méthode RANS qui a fait ses preuves, mais également d'être en mesure de basculer facilement vers une méthode DES. En effet, il suffit de redéfinir le paramètre  $d$  qui représente la distance au mur dans la version RANS. Dans sa version incompressible, le modèle de Spalart-Allmaras s'écrit :

$$\frac{D\nu_t}{Dt} = c_{b1}\tilde{S}\nu_t - c_{w1}\left[\frac{\nu_t}{\tilde{d}}\right]^2 + \frac{1}{\sigma}\left[\nabla \cdot (\nu + \nu_t)\nabla\nu_t + c_{b2}\nabla\nu_t \cdot \nabla\nu_t\right] \quad (7.8)$$

où le terme de destruction dépend du paramètre  $\tilde{d}$ . Si les termes de production et de destruction du modèle sont dominants, l'égalité suivante est obtenue :

$$c_{b1}\tilde{S}\nu_t = c_{w1}\left[\frac{\nu_t}{\tilde{d}}\right]^2 \quad (7.9)$$

Et, par conséquent :

$$\nu_t = \tilde{S}\tilde{d}^2 \quad (7.10)$$

Or, dans le modèle de Smagorinsky, la viscosité turbulente est proportionnelle au tenseur des contraintes locales ainsi qu'à la taille du filtre, i.e.  $\nu_{sgs} = (C_S\Delta)^2|\tilde{S}|$  où  $C_S$  est la constante de Smagorinsky et  $\Delta$  la taille du filtre. La formulation DES est alors obtenue en définissant :

$$\tilde{d} = \min(d, C_{des}\Delta) \quad (7.11)$$

où  $C_{des}$  est une constante du modèle à définir. En ce qui concerne le calcul de la distance au mur, il a été développé, pour des géométries 2D et 3D, en parallèle. Une méthode de type *Fast sweeping method* a été choisie [78] pour sa plus grande efficacité sur des maillages non structurés, notamment dans le cadre de calculs 3D, en comparaison aux méthodes *Fast marching Method* [79]. Tous les éléments, nécessaires à la simulation d'écoulements turbulents par une méthode DES, ont été mis en place. L'objectif actuel est d'effectuer ces simulations et de comparer les solutions obtenues par la méthode SUPG, pour le problème type du cylindre 3D, à celles obtenues par la méthode VMS (variational multiscale) de Bruno Koobus [80, 81, 82]. Il est également envisagé de confronter la méthode SUPG aux solutions des codes Elsa et Tau, dans le cadre d'un problème industriel 3D : l'écoulement turbulent autour d'un profil d'aile (AG32) où des morceaux de glace provoquent d'importants décollements proche du bord d'attaque.



## Quatrième partie

### Annexe



# Matrices jacobiennes

Soit  $\mathbf{U}$  le vecteur des variables conservatives et  $\mathbf{F}^c$  le flux convectif des équations de Navier-Stokes. Leur définition est rappelée :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \\ \rho \tilde{v} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_i^c = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + \delta_{i1} p \\ \rho u_i u_2 + \delta_{i2} p \\ \rho u_i u_3 + \delta_{i3} p \\ (\rho e + p) u_i \\ \rho \tilde{v} u_i \end{pmatrix}$$

Les schémas numériques construits pour simuler des écoulements fluides, qu'ils soient laminares ou turbulents, nécessitent très fréquemment le calcul des jacobiennes de ce flux, c'est-à-dire des matrices  $\partial \mathbf{F}_i^c / \partial \mathbf{U}$ . Elles s'écrivent de la façon suivante :

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}_1^c}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)q - u^2 & (3 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & (1 - \gamma)w & \gamma - 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 & 0 \\ u[(\gamma - 1)q - H] & H + (1 - \gamma)u^2 & (1 - \gamma)uv & (1 - \gamma)uw & \gamma u & 0 \\ -u\tilde{v} & \tilde{v} & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{F}_2^c}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)q - v^2 & (1 - \gamma)u & (3 - \gamma)v & (1 - \gamma)w & \gamma - 1 & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 & 0 \\ v[(\gamma - 1)q - H] & (1 - \gamma)uv & H + (1 - \gamma)v^2 & (1 - \gamma)vw & \gamma v & 0 \\ -v\tilde{v} & 0 & \tilde{v} & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{\partial \mathbf{F}_3^c}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)q - w^2 & (1 - \gamma)u & (1 - \gamma)v & (3 - \gamma)w & \gamma - 1 & 0 \\ w[(\gamma - 1)q - H] & (1 - \gamma)uw & (1 - \gamma)vw & H + (1 - \gamma)w^2 & \gamma w & 0 \\ -w\tilde{\nu} & 0 & 0 & \tilde{\nu} & 0 & w \end{pmatrix}$$

Les matrices jacobiennes 2D se retrouvent facilement à partir de ces matrices. Il suffit de supprimer les lignes et colonnes qui correspondent à la composante  $w$  de la vitesse (4<sup>eme</sup> lignes et colonnes) et de substituer 0 à  $w$ .

En plus de ces définitions, il est indispensable de disposer des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{n}_x + \mathbf{B}\mathbf{n}_y + \mathbf{C}\mathbf{n}_z$  pour construire le flux de Steger-Warming (équation 4.16) ainsi que le paramètre de stabilisation  $\tau_2$  (équation 4.22). La recherche des racines du polynôme caractéristique associé conduit à l'obtention des valeurs propres suivantes :  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} - c$  et  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} + c$ . La première d'entre elles a un ordre de multiplicité de 4. Un jeu possible de vecteurs propres, associés à ces valeurs propres, s'écrit alors :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u - cn_x & u & u + cn_x & n_y & -n_z & 0 \\ v - cn_y & v & v + cn_y & -n_x & 0 & 0 \\ w - cn_z & w & w + cn_z & 0 & n_x & 0 \\ H - \mathbf{U}\cdot\mathbf{nc} & q & H + \mathbf{U}\cdot\mathbf{nc} & un_y - vn_x & wn_x - un_z & 0 \\ \nu_t & 0 & \nu_t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les première et troisième colonnes correspondent, respectivement, aux valeurs propres  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} - c$  et  $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} + c$ . La diagonalisation de la matrice  $\mathbf{K}$  s'écrit  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}$ , avec  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice diagonale composée par les valeurs propres. Pour le jeu de vecteurs propres  $\mathbf{R}_1$ , la matrice inverse associée s'écrit :

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma-1)q+c\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)u-cn_x}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)v-cn_y}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)w-cn_z}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} & 0 \\ \frac{c^2-(\gamma-1)q}{c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \frac{\gamma-1}{c^2} & 0 \\ \frac{(\gamma-1)q-c\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)u+cn_x}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)v+cn_y}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)w+cn_z}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} & 0 \\ \frac{v-\mathbf{U}\cdot\mathbf{nn}_y}{n_x} & n_y & \frac{n_y^2-1}{n_x} & \frac{n_y n_z}{n_x} & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{nn}_z-w}{n_x} & -n_z & -\frac{n_y n_z}{n_x} & \frac{1-n_z^2}{n_x} & 0 & 0 \\ \nu_t \frac{(1-\gamma)q}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \nu_t \frac{1-\gamma}{c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice fait apparaître des divisions par le terme  $n_x$ . Or il n'est absolument pas garanti que ce terme ne soit pas nul. Pour palier ce problème, il est proposé dans [83] deux autres jeux de vecteurs propres.

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u-cn_x & u & u+cn_x & n_y & 0 & 0 \\ v-cn_y & v & v+cn_y & -n_x & n_z & 0 \\ w-cn_z & w & w+cn_z & 0 & -n_y & 0 \\ H-\mathbf{U}\cdot\mathbf{nc} & q & H+\mathbf{U}\cdot\mathbf{nc} & un_y-vn_x & vn_z-wn_y & 0 \\ \nu_t & 0 & \nu_t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma-1)q+c\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)u-cn_x}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)v-cn_y}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)w-cn_z}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} & 0 \\ \frac{c^2-(\gamma-1)q}{c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \frac{\gamma-1}{c^2} & 0 \\ \frac{(\gamma-1)q-c\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)u+cn_x}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)v+cn_y}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)w+cn_z}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} & 0 \\ \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{nn}_x-u}{n_y} & \frac{1-n_x^2}{n_y} & -n_x & \frac{-n_x n_z}{n_y} & 0 & 0 \\ \frac{w-\mathbf{U}\cdot\mathbf{nn}_z}{n_y} & \frac{n_x n_z}{n_y} & n_z & \frac{n_z^2-1}{n_y} & 0 & 0 \\ \nu_t \frac{(1-\gamma)q}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \nu_t \frac{1-\gamma}{c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u-cn_x & u & u+cn_x & -n_z & 0 & 0 \\ v-cn_y & v & v+cn_y & 0 & n_z & 0 \\ w-cn_z & w & w+cn_z & n_x & -n_y & 0 \\ H-\mathbf{U}\cdot\mathbf{nc} & q & H+\mathbf{U}\cdot\mathbf{nc} & wn_x-un_z & vn_z-wn_y & 0 \\ \nu_t & 0 & \nu_t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma-1)q+c\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)u-cn_x}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)v-cn_y}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)w-cn_z}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} & 0 \\ \frac{c^2-(\gamma-1)q}{c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \frac{\gamma-1}{c^2} & 0 \\ \frac{(\gamma-1)q-c\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)u+cn_x}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)v+cn_y}{2c^2} & \frac{(1-\gamma)w+cn_z}{2c^2} & \frac{\gamma-1}{2c^2} & 0 \\ \frac{u-\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}n_x}{n_z} & \frac{n_x^2-1}{n_z} & \frac{n_x n_y}{n_z} & n_x & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}n_y-v}{n_z} & \frac{-n_x n_y}{n_z} & \frac{1-n_y^2}{n_z} & -n_y & 0 & 0 \\ \nu_t \frac{(1-\gamma)q}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & \nu_t \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \nu_t \frac{1-\gamma}{c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

# Bibliographie

- [1] O. Reynolds. An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water in Parallel Channels Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels. . *Royal Society Phil. Trans.*, 1883.
- [2] P. R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations . *Proc. Fourth Intl Symp. Eng. Turb. Modelling and Measurements, Ajaccio, Corsica, France*, pages 3–17, 1999.
- [3] P. R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, and S.R Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach . *First AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana*, 1997.
- [4] Randall J. LeVeque. Finite volume methods for hyperbolic problems . *Cambridge Texts in applied mathematics*, 2002.
- [5] J.O. Langseth and J. LeVeque. Wave propagation method for three-dimensional hyperbolic conservation laws . *J. Comput. Phys.*, 165 :126–166, 2000.
- [6] R. J. LeVeque. Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems . *J. Comput. Phys.*, 131 :327–353, 1997.
- [7] T. J. Barth and D. C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes . *AIAA paper 89-0355, 27th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada (USA)*, 1989.
- [8] T. J. Barth and M. Ohlberger. Finite volume methods : foundation and analysis . In *E. Stein, R. de Borst, and T.J.R Hughes, editors, Encyclopedia of computational mechanics*, 2004.
- [9] C.-W. Shu. High-order methods for computational physics . In *T.J. Barth and H. Deconinck editors, High-Order ENO and WENO schemes for computational fluid dynamics*, volume 9 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* :439–582, 1999.
- [10] C.-W. Shu and B. Cockburn. The Runge-Kutta discontinuous galerkin method for conservation laws V : Multidimensional systems . *J. Comput. Phys.*, 141 (2) :199–224, 1998.
- [11] S. Rebay and F. Bassi. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier-stokes equations . *J. Comput. Phys.*, 131 (2) :267–279, 1997.

- [12] S. Rebay and F. Bassi. High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2d euler equations . *J. Comput. Phys.*, 138 (2) :251–285, 1997.
- [13] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :199–259, 1982.
- [14] T.E. Tezduyar and T.J.R. Hughes. Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations . *NASA Technical Report NASA-CR-204772*, 1982.
- [15] T.E. Tezduyar and T.J.R. Hughes. Finite element formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the compressible Euler equations . *Proceedings of AIAA 21st Aerospace Sciences Meetingn AIAA paper 83-0125, Reno, Nevada*, 1983.
- [16] T.J.R. Hughes, M. Luca, and K.E. Jansen. Large Eddy Simulation and the variational multiscale method . *Computing and visualization in science*, 3 :47–59, 2000.
- [17] K.E. Jansen. A stabilized finite element method for computing turbulence . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17 :530–539, 1999.
- [18] A. Soulaïmani, Y Saad, and A. Rebaine. An edge based stabilized finite element method for solving compressible flows : formulation and parallel implementation . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6735–6761, 2001.
- [19] L. Franca and E.G.D. Do Carmo. The galerkin gradient least-square method . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 74 :41–54, 1988.
- [20] G. Hauke L. P. Franca and A. Masud. Revisiting stabilized finite element methods for the advective-diffusive equation . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :1560–1572, 2005.
- [21] I. Christie, D.F. Griffiths, A. R. Mitchell, and O.C. Zienkiewicz. Finite element methods for second order differential equations with signigicant first derivatives . *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 10 :1389–1396, 1976.
- [22] T.J.R. Hughes and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :305–328, 1986.
- [23] F. Shakib and T.J.R. Hughes. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 87 :141–219, 1991.
- [24] A. B. H. Ali and A. Soulaïmani. An unstructured finite elements method for solving the compressible RANS equations and the Spalart-Allmaras turbulence model . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010.

- [25] T.J.R. Hughes, L. P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54 :223–234, 1986.
- [26] T.J.R. Hughes, L. P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :97–112, 1987.
- [27] G.J. Le Beau, S.E. Ray, S.K. Aliabadi, and T.E. Tezduyar. SUPG finite element computation of compressible flows with the entropy and conservation variables formulations . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104 :397–422, 1993.
- [28] G. Hauke and T.J.R. Hughes. A unified approach to compressible and incompressible flows . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6881–6893, 1994.
- [29] G. Hauke and T.J.R. Hughes. A comparative study of different sets of variables for solving compressible and incompressible flows . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153 :1–44, 1998.
- [30] M. Billaud. *Éléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible* . PhD thesis, Université Bordeaux I, 2009.
- [31] M. Polner. *Galerkin Least-Squares Stabilization Operators for the Navier-Stokes Equations, A Unified Approach* . PhD thesis, University of Twente, 2005.
- [32] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :329–336, 1986.
- [33] F. Shakib, T.J.R. Hughes, and Z. Johan. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : X. The compressible Euler and Navier-Stokes equations . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89 :141–219, 1991.
- [34] T.E. Tezduyar. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters . *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43 :555–575, 2001.
- [35] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*. Research in applied mathematics, 1994.
- [36] Stephen B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [37] P. R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows . *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, 1992.

- [38] B. S. Baldwin and H. Lomax. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows . *AIAA Paper 78-257*, 1978.
- [39] A.M.O. Smith and T. Cebeci. Numerical solution of the turbulent boundary layer equations . *Douglas aircraft division report DAC 33735*, 1967.
- [40] H. Schlichting, K. Gersten, E. Krause, H. Jr. Oertel, and C. Mayes. Boundary-Layer Theory . *8th edition Springer*, 2004.
- [41] S. Catris and B. Aupoix. Density corrections for turbulence models . *Aerospace Science and Technology*, 4 :1–11, 2000.
- [42] Bottasso C.L., Micheletti S., and Sacco R. A multiscale formulation of the Discontinuous Petrov–Galerkin method for advective–diffusive term problems . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :2819–2829, 2005.
- [43] G. Manzini and A. Russo. A finite volume method for advection–diffusion problems in convection-dominated regimes . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :1242–1261, 2008.
- [44] S.P. Neumann. Saturated-unsaturated seepage by finite elements . *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 99 :2233–2250, 1973.
- [45] P. M. Gresho, R. L. Lee, and R. L. Sani. Advection-dominated flows, with emphasis on the consequences of mass lumping . *Finite Elements in Fluids*, 3 :335–350, 1978.
- [46] A. Elmekies and P. Joly. Finite elements and mass lumping for Maxwell’s equations : the 2D case . *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences – Series I – Mathematics*, 324 :1287–1293, 1997.
- [47] H. Maigre T. Elguedj, A. Gravouil. An explicit dynamics extended finite element method. Part 1 : Mass lumping for arbitrary enrichment functions . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :2297–2317, 2009.
- [48] M. Ricchiuto and R. Abgrall. Explicit Runge-Kutta residual distribution schemes for time dependent problems : Second order case . *Journal of Computational Physics*, 229 :5653–5691, 2010.
- [49] V. John and P. Knobloch. On spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection-diffusion equations . *Comput Meth Appl Mech Eng*, 196 :2197–2215, 2007.
- [50] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1999.
- [51] Thomas-Peter Fries and Hermann G. Matthies. A Review of Petrov-Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods . *Scientific Computing*, 2004.

- [52] L.P.Franca and F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advection-reactive- diffusive . *Comput. Methods. in Applied Mech. and Eng.*, 190 :1785 :1800, 2000.
- [53] R. Abgrall. Essentially non-oscillatory Residual Distribution schemes for hyperbolic problems . *Journal of Computational Physics*, 214 :773–808, 2006.
- [54] T.E. Tezduyar and M. Segal. Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows . *Comput Meth Appl Mech Eng*, 195 :1621–1632, 2006.
- [55] A. Mizukami and T.J.R. Hughes. A Petrov–Galerkin finite element method for convection-dominated flows : an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle . *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 50 :181–193, 1985.
- [56] J.G. Rice and R.J. Schnipke. A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows . *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 48 :313–327, 1985.
- [57] T.J.R. Hughes, M. Mallet, and A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : II. Beyond SUPG . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54 :341–355, 1986.
- [58] F. Chalot and P. E. Normand. Towards high-fidelity industrial cfd. In *ECCOMAS Lisbon, Portugal*, 2010.
- [59] A. Larat. *Conception et analyse de schémas d’ordre très élevé distribuant le résidu Application à la mécanique des fluides*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2009.
- [60] H. Blasius. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung . *Z. Math. Phys.*, 56 :1–37, 1908.
- [61] F. Pellegrini. Scotch web page, 2008. [http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/scotch\\_en.html](http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/scotch_en.html).
- [62] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University, 2003.
- [63] R. Eymard, T. R. Gallouët, and R. Herbin. *The finite volume method Handbook of Numerical Analysis*. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, 2000.
- [64] T. von Karman. Mechanical Similitude and Turbulence . *Mem. NACA, no. 611*, 1931.
- [65] G.I. Barenblatt. Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis . *Journal of Fluid Mechanics*, 248 :513–520, 1993.
- [66] D. M. Driver and H. L. Seegmiller. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow . *AIAA Journal (ISSN 0001-1452)*, 23 :163–171, 1985.

- [67] D. M. Driver, H. L. Seegmiller, and J. G. Marvin. Time-dependent behavior of a reattaching shear layer . *AIAA Journal (ISSN 0001-1452)*, 25 :914–919, 1987.
- [68] S. Kumar and E. Loth. Detached eddy simulation of an iced-airfoil . *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, 2001.
- [69] J. F. Dietiker and K. A. Hoffmann. Predicting wall pressure fluctuation over a backward-facing step using detached eddy simulation . *Journal of aircraft*, 46 :2115–2120, 2009.
- [70] CFL3D Web Page. <http://cfl3d.larc.nasa.gov/>.
- [71] Langley Research Center, Turbulence Modeling Resource. [http://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_val\\_sa.html](http://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val_sa.html).
- [72] V. Schmitt and F. Charpin. Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers . *Experimental Data Base for Computer Program Assessment, Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04, AGARD AR 138*, May 1979.
- [73] M. Ricchiuto and A. Bollermann. Stabilized residual distribution for shallow water simulations . *Journal of Computational Physics*, 228 :1071–1115, 2008.
- [74] C. Dobrzynski, P. Frey, and O. Pironneau. Couplage et adaptation de maillage anisotrope pour des simulations de flux d’air dans des géométries complexes . *Revue européenne de mécanique numérique*, 16 :749–773, 2007.
- [75] C. Dobrzynski. Web page, 2010. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~dobj/>.
- [76] E. Lorin, A.B.H. Ali, and A. Soulaimani. A positivity preserving finite element-finite volume solver for the Spalart-Allmaras turbulence model . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :2097–2116, 2007.
- [77] U. Bungea, C. Mockett, and F. Thieleb. Guidelines for implementing Detached-Eddy Simulation using different models . *Aerospace Science and Technology*, 11 :376–385, 2007.
- [78] S. Fomel, S. Luo, and H. Zhao. Fast sweeping method for the factored eikonal equation . *Journal of Computational Physics*, 228 :6440–6455, 2009.
- [79] J. A. Sethian. Evolution, Implementation, and Application of Level Set and Fast Marching Methods for Advancing Fronts . *Journal of Computational Physics*, 169 :503–555, 2001.
- [80] S. Camarri, M.V. Salvetti, B. Koobus, and A. Dervieux. A low-diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids . *Computers & Fluids*, 33 :1101–1129, 2004.
- [81] B. Koobus and C. Farhat. A variational multiscale method for the large eddy simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes - application to vortex shedding . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :1367–1383, 2004.

- [82] S. Camarri, M.V. Salvetti, B. Koobus, and A. Dervieux. Large-eddy simulation of a bluff-body flow on unstructured grids . *International journal for numerical methods in fluids*, 40 :1431–1460, 2002.
- [83] A. Rohde. Eigenvalues and eigenvectors of the Euler equations in general geometries . *AIAA 2001-2609*, 1999.

## **Résumé :**

L'objectif de ces travaux de thèse est de construire un schéma numérique, à la fois robuste et peu dissipatif, pour simuler des écoulements compressibles turbulents sur des maillages non structurés. La contrainte imposée à la méthode numérique d'être peu dissipative, est dictée par le régime turbulent de l'écoulement. Dans nos équations, les effets du modèle turbulent sont pris en compte par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente. Il faut donc être en mesure de contrôler la viscosité numérique apportée par le schéma afin de ne pas polluer cette viscosité turbulente. Les méthodes d'ordre élevé constituent un cadre adéquat pour remplir ce type de critère. La simulation d'écoulements turbulents implique également la nécessité de traiter un grand nombre de degrés de liberté. Il est donc indispensable de disposer d'un code de calcul parallèle pour effectuer de tels calculs de façon efficace. Pour répondre à l'ensemble de ces contraintes, la méthode d'éléments finis stabilisés Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) a été développée.

En règle générale, la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées est effectuée de façon découplée de celle du modèle turbulent. Une originalité de ce travail a consisté à considérer le système complètement couplé, et de l'équation de Spalart-Allmaras. Plusieurs problèmes types 2D et 3D ont permis d'éprouver la méthode proposée. Grâce à un projet de collaboration avec Airbus (projet DESGIVRE), des maillages de type industriel nous ont été fournis. Même dans le cas de maillages difficiles, très étirés, le schéma mis en place se révèle stable et robuste.

## **Mots clés :**

Écoulements compressibles turbulents, Éléments finis stabilisés, Modèle de Spalart-Allmaras

## **Abstract :**

The goal of this work is to build a numerical scheme, both robust and low dissipative, in order to simulate compressible turbulent flows on unstructured meshes. The low dissipative property is constrained by the turbulent fluid regime. In our equations, the effect of the turbulent model is included through a turbulent viscosity. That is why one has to control the numerical viscosity of the scheme in such a way that it does not pollute this turbulent viscosity. High order methods are a good framework to achieve it. Simulation of turbulent flows also means to deal with a great number of degrees of freedom. So, the use of a parallel computer code is necessary in order to complete efficient calculations. To fulfil all of these requirements, a Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) method has been developed.

Usually, the resolution of the Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations and the resolution of the turbulent model are uncoupled. An originality in this work is to consider the fully coupled system. Many 2D and 3D cases have been studied in order to test the proposed method. Thanks to a collaboration with Airbus industry (through the DESGIVRE project), we have got industrial meshes. Even in the case of very stretched meshes, our scheme turns out to be robust and stable.

## **Keywords :**

Compressible turbulent flows, Stabilized Finite Element, Spalart-Allmaras model