UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

N° attribué par la bibliothèque
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Aix-Marseille II

Spécialité : **Physique Mathématique et Physique Théorique**

préparée au laboratoire **Centre de Physique Théorique (CPT)**

dans le cadre de l'École Doctorale **Physique et Science de la Matière (ED 352)**

présentée et soutenue publiquement
par

Baptiste Savoie

le 24 Novembre 2010

Titre:

DIAMAGNETISME DES GAZ QUANTIQUES QUASI-PARFAITS

Directeur de thèse: **Philippe Briet**

Jury

M. Didier Robert,	Rapporteur
M. Gheorghe Nenciu,	Rapporteur
M. Horia Cornean,	Examinateur
M. Valentin Zagrebnov,	Examinateur
M. Philippe Briet,	Directeur de thèse

Résumé

La majeure partie de cette thèse concerne l'étude de la susceptibilité diamagnétique en champ magnétique nul d'un gaz d'électrons de Bloch à température et densité fixées dans la limite des faibles températures. Pour les électrons libres (i.e. en l'absence de potentiel périodique), la susceptibilité diamagnétique a été calculée par L. Landau en 1930 ; le résultat est connu sous le nom de formule de Landau. Quant au cas des électrons de Bloch, E.R. Peierls montra en 1933 que dans l'approximation des électrons fortement liés, la formule pour la susceptibilité diamagnétique reste la même en remplaçant la masse de l'électron par sa "masse effective" ; ce résultat est connu sous le nom de formule de Landau-Peierls. Depuis, de nombreuses tentatives pour clarifier les hypothèses de validité de la formule de Landau-Peierls ont vu le jour. Le résultat principal de cette thèse établit rigoureusement qu'à température nulle, lorsque la densité d'électrons tend vers zéro, la contribution dominante à la susceptibilité diamagnétique est donné par la formule de Landau-Peierls avec la masse effective de la plus petite bande d'énergie de Bloch.

Abstract

The main part of this thesis deals with the zero-field diamagnetic susceptibility of a Bloch electrons gas at fixed temperature and fixed density in the limit of low temperatures. For a free electrons gas (that is when the periodic potential is zero), the steady diamagnetic susceptibility has been computed by L. Landau in 1930 ; the result is known as Landau formula. As for the Bloch electrons, E.R. Peierls in 1933 showed that under the tight-binding approximation, the formula for the diamagnetic susceptibility remains the same but with the mass of the electron replaced by its "effective mass" ; this result is known as the Landau-Peierls formula. Since, there were very many attempts in order to clarify the assumptions of validity of the Landau-Peierls formula. The main result of this thesis establishes rigorously that at zero temperature, as the density of electrons tends to zero, the leading contribution of the diamagnetic susceptibility is given by the Landau-Peierls formula with the effective mass of the lowest Bloch energy band.

Table des matières

Introduction

Historique et position des problèmes

Comprendre, décrire et classifier les comportements de la matière en présence de champs magnétiques ont été incontestablement l'un des moteurs de l'évolution des concepts et des formalismes que la physique théorique a connu dans les deux siècles derniers. Les origines des deux principales formes du magnétisme que sont *le paramagnétisme* et *le diamagnétisme* ne seront comprises qu'en 1930 avec l'émergence de la mécanique quantique. Cependant les modèles théoriques décrivant les effets diamagnétiques dans les métaux restent encore aujourd'hui discutables.

Les premières expériences connues mettant en évidence une des formes du magnétisme, que le physicien anglais M. Faraday nommera en 1845 *le diamagnétisme*, remontent à la fin du XVIIIème siècle. En 1778, le physicien hollandais A. Brugmans observe la répulsion du bismuth par les deux pôles d'un aimant. En 1827, le physicien français A.C.M. Le Baillif publie un papier sur la répulsion magnétique du bismuth et de l'antimoine. En 1828, le physicien allemand T.J. Seebeck décrit le même effet pour de nombreuses substances.

Les travaux réalisés en 1845 par M. Faraday ont été déterminants puisqu'ils vont être à l'origine d'une théorie macroscopique du magnétisme. N'ayant vraisemblablement pas eu connaissance des observations antérieures, il observe qu'un morceau de verre lourd accroché entre les pôles d'un électroaimant s'aligne perpendiculairement aux ligne de champs de l'aimant. Ce comportement diffère de celui déjà bien connu qu'ont certains matériaux (par ex. un aimant) qui sont attirés vers les régions de plus fort champ magnétique en s'orientant parallèlement aux lignes de champs. La découverte surprenante de Faraday est que pour des champs magnétiques suffisamment fort, pratiquement tous les objets matériels sont repoussés vers les régions de plus faible champ magnétique en s'orientant perpendiculairement aux lignes de champs. Il donne le nom de *diamagnétisme* à ce nouveau phénomène en opposition au phénomène déjà connu qu'il nomme *paramagnétisme*. Ces travaux laissent déjà entrevoir que le magnétisme est une *propriété intrinsèque* à la matière.

Dans le cadre de la théorie classique de l'électromagnétisme, publiée par le physicien écossais J.C. Maxwell en 1864, on distingue deux formes de magnétisme que l'on caractérise de la manière suivante. Lorsqu'un milieu matériel à l'équilibre thermique et initialement non aimanté est soumis à un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}$ stationnaire, il acquiert (en réaction) une aimantation (ou moment magnétique moyen par unité de volume). Cela se traduit par un vecteur aimantation qui est fonction du champ magnétique dans le matériau $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$. Pour un matériau supposé linéaire, homogène et isotrope, la relation locale entre **M** et **B** est linéaire et pour de faibles intensité du champ magnétique :

$$\mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{B} \qquad \text{unités CGS}$$

χ_{m} est une quantité sans dimension, indépendante de **B** appelée susceptibilité magnétique par unité de volume. Suivant le signe de χ_{m}, les matériaux se classent en deux familles : les matériaux diamagnétiques pour lesquels $\chi_{\mathrm{m}} < 0$ et les matériaux paramagnétiques[1] pour lesquels $\chi_{\mathrm{m}} > 0$.

Les travaux de M. Faraday suggèrent que la diamagnétisme est un phénomène présent dans presque tous les matériaux. Si un tel matériau manifeste le phénomène de paramagnétisme pour de faibles champs magnétiques, les effet paramagnétiques qui sont prédominants se superposent aux effets diamagnétiques. La susceptibilité magnétique χ_{m} peut alors se décomposer en une contribution paramagnétique et diamagnétique :

$$\chi_{\mathrm{m}} = \chi_{\mathrm{para}} + \chi_{\mathrm{dia}}$$

Suite à la découverte de l'électron par le physicien anglais J.J. Thomson en 1897, le physicien allemand P. Drude adapte à l'aube du XXième siècle la théorie cinétique des gaz (initié par J.C. Maxwell) aux électrons des métaux. Dans cette théorie classique des solides (essentiellement des métaux en fait), seule une interprétation *heurisitique* du phénomène de diamagnétisme peut être apportée. En réaction à l'application d'un champ magnétique extérieur, les électrons se trouvant à l'intérieur d'un métal se mettent en mouvement. Il se crée alors un courant induit et par suite un champ magnétique induit conforme à la loi de Lenz, i.e. qui s'oppose au champ magnétique extérieur. Le moment magnétique associé à ce courant est un moment diamagnétique. Quant au phénomène de paramagnétisme, la nature des moments magnétiques induits par le champ magnétique est sans réponse.

C'est l'émergence de la physique statistique d'équilibre (application de la théorie des probabilités à l'étude des comportements thermodynamiques des systèmes composés d'un grand nombre de particules) initié en 1870 par le physicien autricihien L. Boltzmann puis formalisée par le physicien américain W. Gibbs en 1902, qui va donner un premier cadre qualitatif à l'étude statistique du diamagnétisme et paramagnétisme.

En 1905 le physicien français P. Langevin propose une explication théorique du paramagnétisme dans le cadre de la physique statistique dite "semi-classique". Son modèle est un gaz d'électrons (vus comme des particules "classiques") portant un moment magnétique permanent et ayant un mouvement sur une orbite implicitement *privilégiée* sous l'effet d'un champ magnétique uniforme. En dehors du domaine des basses température, P. Langevin retrouve qualitativement les résultats expérimentaux publiés en 1895 par le physicien français P. Curie : la susceptibilité paramagnétique des matériaux varie inversement proportionnel à la température, i.e. $\chi_{\mathrm{para}} = \chi_{\mathrm{para}}(T) = C/T$ où T désigne la température et C la constante de Curie (intrinèque au matériau). L'interprétation que donne P. Langevin est la suivante : les matériaux seraient formés d'une multitude de micro-aimants créés par des électrons en mouvement sur une orbite fermée. En l'absence de champ magnétique ces moments magnétiques seraient aléatoirement orientés et leur somme serait nulle à l'échelle

[1] Il existe une sous-classification (découverte au XXème siècle) pour les matériaux paramagnétiques (ferromagnétiques, ferrimagnétiques et antiferromagnétiques) dont nous ne parlerons pas ici.

macroscopique. En présence de champ magnétique, ces moments s'aligneraient dans le même sens que le champ magnétique mais l'agitation thermique tendrait à leur donner une direction aléatoire. Dans le domaine des basses températures, il montre que l'aimantation paramagnétique tend vers une constante. Il propose également un modèle semi-classique pour le phénomène de diamagnétisme dont on reviendra dessus un peu plus loin.

En 1911 la physicienne hollandaise J.H. Van Leuven montre que l'étude des phénomènes de paramagnétisme et diamagnétisme (le modèle utilisé est un système de particules chargées placées dans un champ magnétique stationnaire et à équilibre thermique) dans le cadre de la physique statistique classique mène au résultat suivant : le paramagnétisme et le diamagnétisme se compensent toujours exactement et l'aimantation résultante d'un système classique est *toujours nulle*. Ce résultat laisse entrevoir que les origines des effets diamagnétiques et paramagnétiques ne peuvent être que quantiques.

De l'émergence de la théorie des quantas au début du XXème siècle (initié par M. Planck, A. Einstein puis N. Bohr) et des découvertes successives du noyau atomique (par E. Rutherford en 1911) et du spin de l'électron (par O. Stern et W. Gerlach en 1922) résultent le développement de la mécanique quantique entre les années 1920 et 1930 par les travaux de E. Schrödinger, W.K. Heisenberg et P.A. Dirac principalement. Pour tenir compte de l'indiscernabilité au niveau quantique des particules, la distribution classique de Maxwell-Boltzmann utilisée alors en physique statistique classique (et semi-classique) est remplacée par les distributions de Bose-Einstein pour les systèmes de particules de spin entier (bosons) et de Fermi-Dirac pour les systèmes de particules de spin demi-entier (fermions). La distribution de Fermi-Dirac tient compte du principe d'exclusion de Pauli (postulat fondamental de la mécanique quantique selon lequel deux fermions ne peuvent se trouver dans le même état quantique).

Dans le cadre de la mécanique quantique, les origines des moments magnétiques permanents d'un atome (ou ion) *libre* sont identifiées. Il y a principalement deux origines[2] : le moment magnétique de spin des électrons et le moment magnétique associé à leur moment cinétique orbital (i.e. moment magnétique associé au courant créé par les électrons en mouvement). Suivant les règles de Hund, si l'atome isolé a toutes ses couches d'électrons remplies (les électrons de la dernière couche non vide sont appelés électrons de valence ; les électrons des couches plus "profondes" sont appelés électrons de coeur) alors la somme de ces moments magnétiques est nulle et l'atome n'a pas de moment magnétique permanent. Ainsi la susceptibilité magnétique d'un atome isolé ayant ses couches d'électrons remplies (par exemple un atome de gaz noble comme l'hélium) et sujet à un faible champ magnétique est purement diamagnétique[3] (le seul moment magnétique résulte du mouvement orbital des électrons en réaction au champ magnétique). La théorie des perturbations stationnaires (de Rayleigh-Schrödinger) fournit un modèle théorique (voir [40]) qui redonne le modèle semi-classique proposé par Langevin en 1905 :

$$\chi_{\mathrm{m}} \sim \chi_{\mathrm{dia}}^{\mathrm{atome}} = -\frac{e^2}{6mc^2} \sum_i \langle r_i^2 \rangle \qquad \text{(unités CGS)} \tag{0.1}$$

[2]Il y en a en fait trois si on tient compte du moment magnétique de spin des nucléons (protons et neutrons). En général, cette contribution est faible comparée à la contribution électronique.

[3]La contribution purement paramagnétique à la susceptibilité magnétique d'un atome dont les couches électroniques sont incomplètes se modélise par la formule de Curie-Brillouin (voir [62]).

où $-e$ est la charge de l'électron, m la masse de l'électron, c la célérité de la lumière et $\langle r_i^2 \rangle$ est le carré moyen de la distance du $i$ème électron au noyau.

La connaissance des origines du paramagnétisme et du diamagnétisme pour un atome (ou ion) isolé et l'apparition de modèles théoriques associés conduisent la communauté physicienne à s'intéresser au cas des solides, plus particulièrement les métaux puisqu'ils font déjà l'objet de mesures expérimentales peu avant les années 1930. Les modèles théoriques qui vont naître reposent sur la théorie quantique des solides publiée par le physicien allemand A. Sommerfeld en 1927. Dans cette théorie, les électrons de valence sont supposés être complètement "détachés" des ions (leur fonction d'onde n'est pas localisée et s'étend sur l'ensemble du solide) formant ainsi un gaz parfait d'électrons (dits de conduction) sans interaction (ils sont peu affectés par le réseau).

En toute généralité, la susceptibilité magnétique par unité de volume d'un système (à l'équilibre thermique) constitué d'un grand nombre d'atomes indépendants fixés aux noeuds d'un réseau cristallin (fini) et sujet à un faible champ magnétique uniforme :

$$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{solide}} = \chi_{\mathrm{dia}}^{e^-,\mathrm{coeur}} + \chi_{\mathrm{para}}^{e^-,\mathrm{coeur}} + \chi_{\mathrm{m}}^{e^-,\mathrm{val}} \tag{0.2}$$

où $\chi_{\mathrm{dia}}^{e^-,\mathrm{coeur}}$ (resp. $\chi_{\mathrm{para}}^{e^-,\mathrm{coeur}}$) est la contribution diamagnétique (resp. paramagnétique) des électrons de coeur. $\chi_{\mathrm{m}}^{e^-,\mathrm{val}}$ est la susceptibilité magnétique des électrons de valence ou de conduction tenant compte : de la contribution paramagnétique liée aux moments magnétiques de spin des électrons, de la contribution diamagnétique liée au mouvement des électrons en réaction au champ magnétique, des éventuelles contributions (paramagnétique et/ou diamagnétique) associées au couplage spin-orbite pour les électrons, et enfin les éventuelles contributions (paramagnétique et/ou diamagnétique) liées aux effets de bords[4].

Entre 1928 et 1933 apparaissent trois modèles dans le cadre de la mécanique statistique quantique permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de la susceptibilités magnétique $\chi_{\mathrm{m}}^{e^-,\mathrm{val}}$ pour les électrons de conduction dans un métal[5] à basse température.

En 1928, le physicien autrichien W.E. Pauli apporte un modèle permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de la susceptibilité purement paramagnétique liée aux moments magnétiques de spin des électrons de conduction. Dans [82], il montre que pour un gaz d'électrons libres (obéissant à la statistique de Fermi-Dirac) à densité fixée, fortement dégénéré (i.e. la température $T \to 0$) et sujet à un faible champ magnétique uniforme, la susceptibilité paramagnétique (par unité de volume) est indépendante de T et satifait :

$$\chi_{\mathrm{para}}^{e^-\mathrm{a.s.,cond}} = \chi_{\mathrm{Pauli}} = \frac{e^2 k_F}{4\pi^2 m c^2} \qquad \text{(unités CGS)} \quad \text{a.s.} = \text{avec spin}$$

[4]D'un point de vue semi-classique, les électrons ont une trajectoire hélicoïdale. Ils peuvent donc "heurter les surfaces du solide" modifiant le sens ou amplifiant l'amplitude des courants induits (équivalents à des moments magnétiques).

[5]Le cas d'un isolant (par ex. un diélectrique) est beaucoup plus simple. A basse température, les couches électroniques des atomes sont toutes remplies (y compris celle des électrons de valence). Pour un champ magnétique suffisamment faible, la susceptibilité magnétique par unité de volume (0.2) se réduit à :

$$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{isolant}} = \chi_{\mathrm{dia}}^{e^-,\mathrm{coeur}} + \chi_{\mathrm{dia}}^{e^-,\mathrm{val}} = N_V \chi_{\mathrm{dia}}^{\mathrm{atome}}$$

où N_V est le nombre d'atomes par unité de volume. $\chi_{\mathrm{dia}}^{\mathrm{atome}}$ peut être évaluée par (0.1).

où $-e$ est la charge et m la masse de l'électron, c la célérité de la lumière et $k_F := (3\pi^2\rho)^{\frac{1}{3}}$ avec ρ le nombre d'électrons par unité de volume.

En 1930 le physicien russe L. Landau apporte un modèle permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de la susceptibilité magnétique des électrons de conduction en l'absence des effets paramagnétiques liés à leur spin. Dans [67], L. Landau montre que sous l'hypothèse d'un gaz d'électrons libres sans spin (obéissant à la statistique de Fermi-Dirac) à densitée fixée, confiné dans un domaine, fortement dégénéré et sujet à un faible champ magnétique uniforme, la susceptibilité magnétique (par unité de volume) est purement diamagnétique et n'est liée qu'à la quantification des orbites des fermions (niveaux de Landau) :

$$\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s,cond}} = \chi_{\mathrm{Landau}} \sim -\frac{1}{3}\chi_{\mathrm{Pauli}} = -\frac{e^2 k_F}{12\pi^2 mc^2} \qquad \text{(unités CGS)} \quad \text{s.s.} = \text{sans spin} \tag{0.3}$$

A noter que L. Landau tient quand même compte dans ses calculs de la dégénerescence liée au spin des électrons de conduction. D'autre part, il suppose que les effets de bords sont négligeables puisque seule une infime fraction des électrons du gaz "voit" les bords du domaine (image semi-classique). Enfin il suggère l'existence d'une autre contribution dont l'amplitude oscille avec l'intensité du champ magnétique[6]. En champ magnétique nul, cette contribution est nulle et $\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s,cond}}$ est une quantité intrinsèque au gaz d'électrons libres.

Suite aux résultats de W.E. Pauli et L. Landau, il naît un premier modèle pour la susceptibilité magnétique (par unité de volume) d'un métal sous l'hypothèse de faible température ($T \to 0$) et de faible champ magnétique ($B \to 0$) (en négligeant les contributions éventuelles provenant du couplage spin-orbite pour les électrons de conduction) :

$$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{métal}} = \chi_{\mathrm{dia}}^{e^-,\mathrm{coeur}} + \chi_{\mathrm{m}}^{e^-,\mathrm{cond}}, \quad \chi_{\mathrm{m}}^{e^-,\mathrm{cond}} = \chi_{\mathrm{Pauli}} + \chi_{\mathrm{Landau}} \sim \frac{2}{3}\frac{e^2 k_F}{4\pi^2 mc^2} \qquad \text{(unités CGS)} \tag{0.4}$$

En d'autres termes, le gaz d'électrons de conduction est globalement paramagnétique. Aux débuts des années 1930, il semble peu envisageable de valider ou d'infirmer ce modèle en le confrontant aux résultats expérimentaux (bien que le sodium métallique ait fait l'objet de nombreuses mesures, voir [23]) vu la difficulté expérimentale de mesurer séparément chacune des contributions apparaissant dans (0.4). En 1931, la susceptibilité de Landau χ_{Landau} est remise en question par E. Teller dans [101], suivi de J.H. Van Vleck dans son ouvrage [103]. Ils suggèrent que les contributions à la susceptibilité magnétique liées aux effets de bords (négligées par L. Landau) doivent être prise en compte car les "électrons de bords" seraient fortement paramagnétiques.

Parallèlement, au début des années 1930, la théorie quantique des solides s'est enrichie des travaux du physicien suisse F. Bloch publiés en 1928 et la théorie des bandes[7] voit le jour. Reposant sur le théorème de Bloch, le modèle des électrons presque libres se substitue au modèle des électrons libres pour traiter les électrons de conduction soumis au potentiel périodique cristallin (appelés électrons de Bloch). Dans ce modèle le potentiel périodique est traité comme une perturbation aux électrons libres. Ceci est justifié par le fait que le mouvement des électrons de conduction est peu affecté par la charge des ions compte-tenu des effets d'écrantage dûs aux électrons de coeur. Un autre modèle très différent est

[6] C'est ce qu'on appelera plus tard l'effet de Haas-Van Alphen mis expérimentalement en évidence la même année en 1930 dans [35], puis dans [95] en 1939.

[7] Cette théorie permet d'expliquer les différences entre isolant, semi-conducteur et métal.

développé : le modèle des liaisons fortes. Au lieu de considérer les électrons de valence, ce sont ce sont les interactions entre les orbitales atomiques qui sont considérées.

En 1933 le physicien allemand R. Peierls apporte un modèle qui étend la théorie de Landau aux électrons de Bloch (les effets paramagnétiques liés à leur spin sont négligés). Dans [84], R. Peierls montre que dans l'approximation des liaisons fortes, la susceptibilité (par unité de volume) magnétique d'un gaz d'électrons de Bloch dans un métal infini, lorsque la température $T \to 0$ et le champ magnétique est faible ($B \to 0$) s'écrit :

$$\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s.,cond}} = \chi_{\mathrm{LP}} + \chi_{\mathrm{m,autre}}, \quad \chi_{\mathrm{LP}} \sim -\frac{e^2 k_F}{12\pi^2 m^* c^2} \quad \text{(unités CGS)} \tag{0.5}$$

χ_{LP} est la susceptibilité diamagnétique de Landau-Peierls[8], m^* est la masse effective de l'électron. $\chi_{\mathrm{m,autre}}$ est une contribution sans signification particulière dont le signe et l'ordre de grandeur ne semblent pas être déterminés.

En 1952, A. Adams est l'un des premiers à remettre en question le développement (0.5). Dans [2], il conteste l'approximation des liaisons fortes, inadaptée aux métaux. Il suggère que $\chi_{\mathrm{m,autre}}$ peut contenir des contributions du même ordre de grandeur que χ_{LP}.

La question de la validité des modèles de Landau et de Peierls ont été à l'origine de nombreux débats entre les physiciens.

Entre 1939 et 1965, la question relative à la nature (paramagnétique et/ou diamagnétique) ainsi qu'aux ordres de grandeur des contributions, liées aux effets de bords, à la susceptibilité purement diamagnétique d'un gaz d'électrons libres confiné dans un domaine a généré de nombreux travaux (parfois contradictoires). Les principaux sont [78], [79], [99], [37], [38], [77], [100], [39], [8], [45], [44], etc... Un bref historique avec une discussion de ces travaux se trouvent dans [4]. Ce problème trouvera une première issue rigoureuse par Angelescu *et al.* en 1975 dans [4]. La susceptibilité magnétique (par unité de volume) d'un gaz d'électrons libres sans spin à densité fixée, confiné dans un domaine parallélépipédique Λ de volume $V(\Lambda)$ et de surface $S(\Lambda)$, vérifie à température nulle et en champ magnétique nul le développement asymptotique :

$$\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s.,cond}}(\Lambda) = \chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s.,cond}}(\infty) + \frac{S(\Lambda)}{V(\Lambda)} \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{eff.\ bords}} + o\left(\frac{S(\Lambda)}{V(\Lambda)}\right) \quad \text{lorsque } V(\Lambda) \to \infty \tag{0.6}$$

où $\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s.,cond}}(\infty)$ est la limite thermodynamique de $\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s.,cond}}(\Lambda)$ et $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{eff.\ bords}}$ la contributions liées aux effets de bords. De plus, $\chi_{\mathrm{m}}^{e^- \mathrm{s.s.,cond}}(\infty) = \chi_{\mathrm{Landau}}$ et $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{eff.\ bords}} = \chi_{\mathrm{para}}^{\mathrm{eff.\ bords}}$.

Entre 1952 et 1975, la question relative à la prédominance de la susceptibilité de Landau-Peierls dans (0.5) a parallèlement engendrée de nombreux travaux. Les principaux sont [2], [63], [47], [48], [11], [104], [46], [86], [73], [72], etc... Un historique et une discussion des méthodes utilisées dans ces travaux sont proposées dans le paragraphe "Commentaires et connexions avec les résultats antérieurs".

Au vu des résultats présentés ci-dessus, il apparait naturellement trois principaux problèmes concernant la susceptibilité purement diamagnétique d'un gaz d'électrons de Bloch

[8]Ici écrite sous sa forme la plus simple, i.e. dans le cas d'un cristal isotrope. En général, c'est le tenseur de masse effective $m^*_{\alpha,\beta}$ qui se substitue à la masse effective.

à densitée fixée fortement dégénéré et en champ magnétique nul :

(**P1**) Un développement asymptotique du type (0.6) est-il encore valable ?
(**P2**) Sous quelles hypothèses χ_{LP} est la contribution prédominante dans (0.5) ?
(**P3**) Que peut-on dire de la susceptibilité purement diamagnétique d'un semi-conducteur ?

Cette thèse apporte des éléments de réponse pour chacune de ces questions.

Résultats principaux de la thèse

Les résultats principaux sont énoncés pour la plupart dans le cas général d'un gaz quantique quasi-parfait (obéissant soit à la statistique de Bose-Einstein, soit de Fermi-Dirac) avec les hypothèses maximales. La section suivante tâchera de faire la connexion entre ces résultats et la problématique soulevée dans la section précédente.

Considérons un gaz quantique constitué d'un grand nombre de particules sans spin et non relativiste, de masse $m > 0$ et de charge q, obéissant soit à la statistique de Fermi-Dirac (fermions) soit à la statistique de Bose-Einstein (bosons). On suppose que le gaz est confiné à l'intérieur d'une large "boîte" de taille macroscopique et qu'il est sujet à un champ magnétique extérieur uniforme. On fait l'hypothèse que, dans l'approximation à un corps, chaque particule interagit avec un potentiel d'origine électrique. Les intéractions entre particules sont négligées et le gaz est à l'équilibre thermique avec un réservoir de chaleur et de particules (de même nature).

Précisons les hypothèses. Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert simplement connexe contenant l'origine des coordonnées de $\mathbb{R}^3$. Le gaz est piégé dans la "boîte" $\Lambda_L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x}/L \in \Lambda\}$. On considère un champ magnétique $\mathbf{B} = (0,0,B)$ avec $B \geq 0$, parallèle à la troisième composante de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On lui associe le potentiel vecteur magnétique $A(\mathbf{x})$ qui s'écrit dans la jauge de Coulomb : $A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{x} = B\mathbf{a}(\mathbf{x})$, avec $\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(-x_2, x_1, 0)$ (jauge symétrique). On néglige le spin des particules puisqu'on s'intéresse seulement aux effets purement diamagnétiques liés aux moments magnétiques induits par le mouvement "orbital" des particules en réaction au champ magnétique. On suppose que le potentiel V d'origine électrique est Kato-décomposable, $V \in \mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3)$, i.e. $V = V^+ + V^-$ avec $V^+ := \sup\{V, 0\} \in \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et $V^- := \sup\{-V, 0\} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ (cf. Définition 1.1).

Quand la "boîte" est finie ($1 \leq L < \infty$), la dynamique de chaque particule est décrite par l'Hamiltonien défini sur $L^2(\Lambda_L)$ avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda_L$ par :

$$H_L(\omega, V) = \frac{1}{2}(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 + V_L(\mathbf{x}), \quad (\hbar = 1 = m)$$

où V_L est la restriction de V à la "boîte" Λ_L et $\omega := qB/c \in \mathbb{R}$ est relié à la fréquence cyclotron ω_c de la particule par la relation $\omega = -\omega_c$. L'opérateur $H_L(\omega, V)$ est l'unique opérateur borné inférieurement et auto-adjoint de domaine $D\big(H_L(\omega, V)\big) \subset \mathcal{H}_0^1(\Lambda_L)$ associé à la forme sesquilinéaire correspondante. De plus $H_L(\omega, V)$ est à résolvante compacte ; par la suite, $\{e_j(\omega)\}_{j\geq 1}$ désignera l'ensemble de ses valeurs propores comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant.

Introduisons les grandeurs caractéristiques de la réponse diamagnétique du gaz quantique quasi-parfait à volume fini. On utilise le formalisme grand canonique de la mécanique statistique quantique dans lequel le jeu de paramètres fixés est $(\beta, z, |\Lambda_L|)$. Ici $\beta := (k_B T)^{-1} > 0$ désigne "l'inverse" de la température T (k_B est la constante de Boltzmann), $z := \mathrm{e}^{\beta\mu}$ désigne la fugacité (μ est le potentiel chimique) et $|\Lambda_L|$ est le volume du confinement. Le domaine de définition pour la fugacité est $I_{+1} := (0, +\infty)$ pour le gaz de fermions et $I_{-1} = I_{-1}(\omega) := (0, \mathrm{e}^{\beta e_1(\omega)})$ pour le gaz de bosons.

Pour tout $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in I_\epsilon$, la pression et la densité grand canonique à volume fini du gaz quasi-parfait sont définies respectivement par :

$$P_L(\beta, \omega, z, \epsilon) := \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L|} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda_L)} \{ \ln \left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega, V)} \right) \} = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L|} \sum_{j=1}^{\infty} \ln \left(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)} \right) \tag{0.7}$$

$$\rho_L(\beta, \omega, z, \epsilon) := \beta z \frac{\partial P_L}{\partial z}(\beta, z, \omega, \epsilon) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}}{1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}} \tag{0.8}$$

où $\epsilon = -1$ fait référence au gaz de bosons, $\epsilon = +1$ fait référence au gaz de fermions.

Introduisons les domaines $\mathcal{D}_{-1}(e_1(\omega)) := \mathbb{C} \setminus [\mathrm{e}^{\beta e_1(\omega)}, +\infty)$ et $\mathcal{D}_{+1}(e_1(\omega)) := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\mathrm{e}^{\beta e_1(\omega)}]$. Le premier résultat est l'analycité jointe de la pression grand canonique à volume fini par rapport à la fugacité et à l'intensité du champ magnétique :

Théorème 0.1. *Soit $\beta > 0$. Alors pour chaque ensemble ouvert et borné $\mathcal{K}$ tel que $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_\epsilon(e_1(0))$, $\epsilon = \pm 1$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_L$ de l'axe des réels tel que la pression grand canonique à volume fini $P_L(\beta, \omega, z, \epsilon)$ soit jointement analytique par rapport aux variables (ω, z) sur $\mathcal{N}_L \times \mathcal{K}$.*

Justifié par ce résultat, on peut définir les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini comme les dérivées partielles par rapport à l'intensité du champ magnétique B de la pression grand canonique à volume fini :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon) := \left(\frac{q}{c} \right)^n \frac{\partial^n P_L}{\partial \omega^n}(\beta, \omega, z, \epsilon) \quad \beta > 0,\ \omega \in \mathbb{R},\ z \in \mathcal{D}_\epsilon(e_1(\omega))$$

Pour $z \in I_\epsilon$, les cas $n = 1$ et $n = 2$ correspondent respectivement à l'aimantation et à la susceptibilité magnétique grand canonique par unité de volume.

Si la densité de particules $\rho_0 > 0$ est prise comme paramètre extérieur, la pression et les susceptibilités généralisées grand canonique à densité fixée sont définis par :

$$P_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := P_L(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta \mu_L}, \epsilon) \quad \beta > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta \mu_L}, \epsilon)$$

où $\mu_L = \mu_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$, avec $\mu_L \in (-\infty, e_1(\omega))$ pour les bosons et $\mu_L \in \mathbb{R}$ pour les fermions, est l'unique solution de l'équation $\rho_L(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0$.

A partir de maintenant, on suppose que la "boîte" Λ_L qui piège le gaz est le cube ouvert de longueur d'arête $L \geq 1$, i.e. $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$, et on s'intéresse aux limites thermodynamiques des grandeurs caractéristiques de la réponse diamagnétique à volume fini dans les deux cas suivants : le cas où V modélise un solide parfait et le cas où V modélise un solide imparfait (type alliage).

Cas où le potentiel V modélise un solide parfait

On suppose que $V \in L^p(\mathbb{R}^3/\boldsymbol{\Upsilon})$ avec $p > 3$, i.e. V est une fonction à valeurs réélles et périodique par rapport à un réseau non dégénéré $\boldsymbol{\Upsilon}$ de $\mathbb{R}^3$ (assimilé à un réseau de Bravais), de cellule élémentaire Ω (cellule de Wigner-Seitz). Un tel potentiel modélise, dans l'approximation de Born-Oppenheimer, l'interaction de chaque particule avec le champ cristallin d'un solide parfait (i.e. réseau infini où chaque site est occupé par une même espèce d'ions supposés immobiles).

Quand $L = \infty$, on désignera par $H_\infty(\omega, V)$ l'unique extension auto-adjointe de l'opérateur $\frac{1}{2}(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega \mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x})$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. $H_\infty(\omega, V)$ n'a que du spectre essentiel et est borné inférieurement ; par la suite on notera $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, V))$.

Lorsque la boîte $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ remplit l'espace tout entier (c'est-à-dire à la limite $L \to \infty$), on établit le second résultat :

Théorème 0.2. *Existence des limites thermodynamiques et identifications*
(i). Pour $(\beta, \omega, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$, il existe $P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ et $\rho_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ tels que pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$:

$$\lim_{L\to\infty} \sup_{z\in K} |P_L(\beta, \omega, z, \epsilon) - P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)| = 0$$
$$\lim_{L\to\infty} \sup_{z\in K} |\rho_L(\beta, \omega, z, \epsilon) - \rho_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)| = 0$$

(ii). Pour $(\beta, \omega, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$ tel que pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$ et $[\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$:

$$\lim_{L\to\infty} \sup_{\omega\in[\omega_1,\omega_2]} \sup_{z\in K} |\mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)| = 0$$

(iii). Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $P_\infty(\beta, \omega, \cdot, \epsilon)$ est analytique sur $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$.
Pour tout $z \in \mathcal{D}_\epsilon$, $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a les identifications :

$$\rho_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon) := \beta z \frac{\partial P_\infty}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon) = \lim_{L\to\infty} \beta z \frac{\partial P_L}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon) \quad \beta > 0,\ \omega \in \mathbb{R},\ z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega)) \tag{0.9}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon) := \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\partial^n P_\infty}{\partial \omega^n}(\beta, \omega, z, \epsilon) = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\partial^n P_L}{\partial \omega^n}(\beta, \omega, z, \epsilon) \tag{0.10}$$

(iv). Lorsque la densité de particules ρ_0 est un paramètre fixé, avec $\rho_0 \in (0, +\infty)$ pour les fermions et $\rho_0 \in (0, \rho_c)$ pour les bosons ($\rho_c \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$ est la densité critique) :

$$\lim_{L\to\infty} P_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := P_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) = P_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) \quad \beta > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L\to\infty} \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) = \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon)$$

où $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$*, avec* $\mu_\infty \in (-\infty, E_0(\omega))$ *pour les bosons et* $\mu_\infty \in \mathbb{R}$ *pour les fermions, est l'unique solution de l'équation* $\rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0$.

On se limite maintenant au gaz quasi-parfait de fermions de charge électrique $q = -e$. On suppose que l'intensité du champ magnétique est nulle et que la densité de particules $\rho_0 > 0$ est un paramètre fixé. La susceptibilité magnétique (par unité de volume) grand canonique à densité fixée $\rho_0 > 0$ et en champ magnétique nul est définie comme :

$$\mathcal{X}_\infty(\beta, \rho_0) = \mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega = 0, \rho_0, +1) := \mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega = 0, e^{\beta\mu_\infty(\beta,\rho_0)}, +1) \tag{0.11}$$

où $\mu_\infty(\beta, \rho_0) \in \mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta, \omega = 0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, +1) = \rho_0$.
Dans le cas du gaz parfait, (0.11) n'est autre que la susceptibilité diamagnétique de Landau.

Supposons que $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3)$, i.e. V est lisse et périodique relativement au réseau cubique $\mathbb{Z}^3$. Dans le cas $\omega = 0$, la théorie de Bloch-Floquet pour les opérateurs périodiques permet de mettre en évidence la structure en bandes du spectre de l'opérateur $H_\infty(0, V)$. Si $\Omega^* = 2\pi\Omega$ désigne la (première) zone de Brillouin du réseau dual $(\mathbb{Z}^3)^* \equiv 2\pi\mathbb{Z}^3$, pour $j \in \mathbb{N}^*$, la j-ème fonction de bandes de Bloch est définie par $\mathcal{E}_j := [\min_{\mathbf{k}\in\Omega^*} E_j(\mathbf{k}), \max_{\mathbf{k}\in\Omega^*} E_j(\mathbf{k})]$ où $\{E_j(\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ est l'ensemble des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant) de l'Hamiltonien fibré $H(\mathbf{k}) := \frac{1}{2}(-i\nabla + \mathbf{k})^2 + V$ agissant dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ avec $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ le tore à trois dimensions. Notons qu'avec cette définition, les fonctions d'énergie de Bloch $\mathbf{k} \mapsto E_j(\mathbf{k})$ sont continues mais pas nécessairement différentiables par rapport à $\mathbf{k}$ aux points de croisement. Le spectre de l'opérateur $H_\infty(0, V)$ est absolument continu et donné par $\sigma(H_\infty(0, V)) = \cup_{j=1}^\infty \mathcal{E}_j$. Notons que les ensembles $\mathcal{E}_j$ peuvent se chevaucher et certains peuvent même coïncider. Les énergies de bandes correspondent aux unions disjointes des $\mathcal{E}_j$. On parle de gap spectral si $\max \mathcal{E}_j < \min \mathcal{E}_{j+1}$ pour des $j \geq 1$. Le nombre de gaps dans le spectre est fini (si non nul).

Il reste à introduire la densité d'états intégrée de l'opérateur $H_\infty(0, V)$. Rappelons sa définition. Pour $E \in \mathbb{R}$, soit $N_L(E)$ le nombre de valeurs propres de $H_L(0, V)$ plus petites que E. La densité d'états intégrée de $H_\infty(0, V)$ est définie par la limite :

$$n_\infty(E) := \lim_{L\to\infty} \frac{N_L(E)}{|\Lambda_L|} = \lim_{L\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\{\chi_{(-\infty,E]}(H_L(0, V))\}}{|\Lambda_L|}$$

Voici le théorème central de la thèse :

<u>Théorème</u> 0.3. (i). *Soit* $\rho_0 > 0$ *la densité de particules fixée. Soit* $\mu_\infty(\beta, \rho_0) \in \mathbb{R}$ *l'unique solution de l'équation* $\rho_\infty(\beta, 0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, +1) = \rho_0$*. Alors la limite* $\mathcal{E}_F(\rho_0) := \lim_{\beta\to+\infty} \mu_\infty(\beta, \rho_0)$ *existe et définie une fonction croissante, éventuellement discontinue, appelée l'énergie de Fermi. On distingue deux cas (semiconducteur et métallique) :*

SC *: S'il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\rho_0 = n_\infty(E)$ *pour tout* $E \in [\max \mathcal{E}_N, \min \mathcal{E}_{N+1}]$*, alors :*

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) = \frac{\max \mathcal{E}_N + \min \mathcal{E}_{N+1}}{2}$$

M *: supposons qu'il existe une unique solution* E_M *à l'équation* $n_\infty(E_M) = \rho_0$ *appartenant à l'intervalle* $(\min \mathcal{E}_N, \max \mathcal{E}_N)$ *avec* $N \in \mathbb{N}^*$ *éventuellement non unique. Alors :*

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) = E_M$$

(ii). Supposons que l'énergie de Fermi $\mathcal{E}_F(\rho_0)$ se situe au milieu d'un gap non trivial ($\max \mathcal{E}_N < \min \mathcal{E}_{N+1}$). Alors il existe $2N$ fonctions $\mathfrak{c}_j, \mathfrak{d}_j$ définies sur Ω^* en dehors d'un ensemble de mesure (de Lebesgue) zéro, telles que l'intégrande ci-dessous puisse être prolongé par continuité sur tout Ω^*, et :

$$\mathcal{X}_{\mathrm{SC}}(\rho_0) := \lim_{\beta \to +\infty} \mathcal{X}(\beta, \rho_0) = \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \mathfrak{c}_j(\mathbf{k}) + \big\{E_j(\mathbf{k}) - \mathcal{E}_F(\rho_0)\big\} \mathfrak{d}_j(\mathbf{k}) \Big\}$$

(iii). Supposons qu'il existe un unique $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{E}_F(\rho_0) \in (\min \mathcal{E}_N, \max \mathcal{E}_N)$. Supposons que $\mathcal{S}_F := \big\{\mathbf{k} \in \Omega^* \,:\, E_N(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_F(\rho_0)\big\}$ soit une surface lisse et non dégénérée. Alors il existe $2N+1$ fonctions $\mathcal{G}_N, \mathfrak{c}_j, \mathfrak{d}_j$ avec $1 \leq j \leq N$, définies sur Ω^* en dehors d'un ensemble de mesure (de Lebesgue) zéro, telles qu'elles soient continues sur $\mathcal{S}_F$ et telles que le second intégrande ci-dessous puisse être prolongé par continuité sur tout Ω^* :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) &:= \lim_{\beta \to +\infty} \mathcal{X}(\beta, \rho_0) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{12} \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \qquad (0.12) \\ &\cdot \Bigg\{ \int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{\left|\nabla E_N(\mathbf{k})\right|} \left[\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 - 3\mathcal{G}_N(\mathbf{k})\right] + \\ &- 6 \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \sum_{j=1}^{N} \left[\chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_j(\mathbf{k})) \mathfrak{c}_j(\mathbf{k}) + \big\{E_j(\mathbf{k}) - \mathcal{E}_F(\rho_0)\big\} \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_j(\mathbf{k})) \mathfrak{d}_j(\mathbf{k}) \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

où $\chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(\cdot\,)$, $E_0 := E_0(0)$, est la fonction caractéristique de l'intervalle $[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]$.
(iv). Soit $k_F := (6\pi^2 \rho_0)^{\frac{1}{3}}$. Alors lorsque $\rho_0 \to 0$, (0.12) donne la susceptibilité diamagnétique de Landau-Peierls :

$$\mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) = -\frac{e^2}{24\pi^2 c^2} \frac{(m_1^* m_2^* m_3^*)^{\frac{1}{3}}}{m_1^* m_2^*} k_F + o(k_F) \qquad (0.13)$$

avec $\left[\frac{1}{m_i^*}\right]_{1 \leq i \leq 3}$ les valeurs propres de la hessienne $\{\partial^2_{k_i k_j} E_1(\mathbf{0})\}_{1 \leq i,j \leq 3}$ définie positive.

Cas où le potentiel V modélise un solide imparfait (type alliage)

On choisit pour V un potentiel du type Anderson pour modéliser un réseau cristallin comportant des impuretés aléatoirement distribuées. Soit $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. Un potentiel type Anderson V_η est un champ scalaire aléatoire (i.e. $V_\eta : N \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est jointement mesurable par rapport au produit de la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ des ensembles d'évènements dans N et de la σ-algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ des ensembles de Borel dans $\mathbb{R}^3$) dont les réalisations sont données par :

$$V_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^3} \lambda_{\mathbf{i}}(\eta) u(\mathbf{x} - \mathbf{i}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

avec $\{\lambda_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^3}$ une famille de variables aléatoires sur $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que les variables aléatoires $\lambda_{\mathbf{i}}(\eta)$ sont $\mathbb{P}$-indépendantes et identiquement distribuées avec valeurs sur un intervalle borné tel que $\mathbb{P}(\lambda_{\mathbf{0}}(\eta) \in [a,b]) = \int_a^b \mathrm{d}q\, f(q)$, $\|f\|_\infty < +\infty$. On suppose également que la fonction de site $u(\cdot\,)$ est bornée et $|u(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-3-\epsilon})$, $\epsilon > 0$, quand $|\mathbf{x}| \to +\infty$.

De manière imagée, chaque site du réseau cristallin (infini) est occupé par une même espèce d'ions sauf certains sites aléatoirement distibués qui sont occupés par d'autres espèces d'ions (portant une charge électrique différente).

Quand $L = \infty$, on désignera par $H_\infty(\omega, V_\eta)$ l'unique extension auto-adjointe de l'opérateur $\frac{1}{2}(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 + V_\eta(\mathbf{x})$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. $\{H_\infty(\omega, V_\eta)\}_{\eta\in N}$ est une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoint. $H_\infty(\omega, V_\eta)$ est borné inférieurement et son spectre purement discret est vide $\mathbb{P}$-presque sûrement. On notera $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, V_\eta))$.

Lorsque la boîte $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ remplit l'espace tout entier (c'est-à-dire à la limite $L \to \infty$), on établit le troisième résultat :

Théorème 0.4. *Existence des limites thermodynamiques*
(i) Pour $(\beta, \omega, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$, *il existe* $P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ *tel que :*

$$\lim_{L\to\infty} |P_L(\beta, \omega, z, \epsilon) - P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)| = 0$$

(ii) Pour $(\beta, \omega, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$ *tel que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L\to\infty} |\mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)| = 0$$

Remarque

Cette thèse apporte également quelques résultats mathématiques originaux. Citons par exemple l'analycité (par rapport à la variable ω) au sens de la topologie norme trace du semi-groupe à un paramètre de générateur $H_L(\omega, V)$ ($L < \infty$) pour des potentiels singuliers du type Kato (cf. Corollaire 2.28). Ou encore l'analycité locale au sens de la topologie norme de Hilbert-Schmidt de la résolvante $(H_L(\omega, V) - \xi)^{-1}$, avec $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ et $L < \infty$ (cf. Proposition 2.10). Ces résultats ainsi que celui du théorème 0.1 ont été prolongés pour des potentiels vecteurs singuliers du type Kato dans [17].

Connexions et commentaires

Connexions avec la problématique

Une partie des résulats énoncés dans la section précédente concernent les gaz quantiques quasi-parfait en toute généralité. Recadrons ces résultats avec la problèmatique soulevée dans l'introduction.

Le cas particulier où le gaz décrit dans la section précédente est un gaz de fermions (obéissant à la statistique de Fermi-Dirac) portant une charge $q = -e$ où chaque fermion interagit avec un potentiel (d'origine électrique) périodique considéré dans la partie "Cas où le potentiel V modélise un solide parfait", constitue notre modèle pour un gaz d'électrons de Bloch dans un solide à l'équilibre thermique avec un réservoir de chaleur et de (mêmes) particules. Ce gaz d'électrons est "piégé" à l'intérieur d'un solide macroscopique de forme cubique $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ délimité par ses bords $\partial\Lambda_L$. Ce solide est modélisé par un réseau périodique d'ions identiques supposés immobiles (approximation de Born-Oppenheimer). Chaque électron interagit avec un potentiel périodique modélisant le champ cristallin du solide. On néglige les interactions entre les électrons[9]. Enfin on néglige le spin des électrons puisqu'on s'intéresse seulement aux effets liés uniquement aux moments magnétiques générés par les électrons en mouvement dans le réseau cristallin en réaction au champ magnétique extérieur uniforme.

Dans le formalisme grand canonique de la mécanique statistique quantique, le jeu de paramètres extérieurs est $(\beta, z, |\Lambda_L|)$ où : $\beta := (k_B T)^{-1} > 0$ est "l'inverse" de la température, $z := \mathrm{e}^{\beta\mu}$ la fugacité (μ est le potentiel chimique) et $|\Lambda_L|$ le volume occupé par le système. Dans ce formalisme, la susceptibilité magnétique (par unité de volume) du gaz d'électrons de Bloch, à température $T > 0$, à la fugacité $z \in (0, +\infty)$ et sujet au champ magnétique d'intensité $B \geq 0$, est donnée par :

$$\mathcal{X}_L^2(\beta, \omega, z, +1) := \frac{\partial^2 P_L}{\partial B^2}(\beta, \omega, z, +1) = \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 P_L}{\partial \omega^2}(\beta, \omega, z, +1), \quad \omega := \frac{-eB}{c} \leq 0$$

où $P_L(\beta, \omega, z, +1)$ est la pression grand canonique définie en (0.7). Le Théorème 0.1 assure que cette quantité est bien définie.
Supposons que la densité $\rho_0 > 0$ des électrons de Bloch soit prise comme paramètre extérieur. La susceptibilité magnétique (par unité de volume) à température $T > 0$ et à densité fixée $\rho_0 > 0$ s'écrit :

$$\mathcal{X}_L^2(\beta, \omega, \rho_0, +1) = \mathcal{X}_L^2(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, +1) \tag{0.14}$$

où $\mu_L = \mu_L(\beta, \omega, \rho_0, +1) \in \mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation $\rho_L(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, +1) = \rho_0$, avec $\rho_L(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, +1)$ la densité de particules grand canonique définie en (0.8).
La quantité définie en (0.14) incorpore la contribution purement diamagnétique liée au mouvement "orbital" des électrons de Bloch dans le réseau cristallin ainsi que la contribution (diamagnétique et/ou paramagnétique) liée aux effets de bords.

Dans ses travaux sur le gaz parfait d'électrons, L. Landau suppose implicitement que les effets de bords n'influencent pas le comportement thermodynamique global du système, et par conséquent, qu'il existe une grandeur thermodynamique intrinsèque au gaz d'électrons indépendante du confinement. Le théorème 0.2 permet de prouver l'existence de cette quantité thermodynamique, appelée limite thermodynamique, pour le gaz d'électrons de Bloch et d'identifier cette limite :

$$\lim_{L\to\infty} \mathcal{X}_L^2(\beta, \omega, \rho_0, +1) = \mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega, \rho_0, +1)$$

avec :

$$\mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega, \rho_0, +1) := \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 P_\infty}{\partial \omega^2}(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, +1)$$

où $P_\infty(\beta, \omega, z, +1) := \lim_{L\to\infty} P_L(\beta, \omega, z, +1)$ est la limite thermodynamqiue de la pression grand canonique et $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta, \omega, \rho_0, +1) \in \mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation

[9]Sauf si ces interactions peuvent être modélisées par un potentiel périodique de même période que le réseau cristallin et qui soit le même pour chaque électron.

$\rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, +1) = \rho_0$, avec $\rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, +1)$ définie en (0.9).
Dans la preuve du théorème 0.2, on prouvera en fait le développement asymptotique :

$$\mathcal{X}_L^2(\beta, \omega, \rho_0, +1) = \mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega, \rho_0, +1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) \quad \text{lorsque } L \to \infty$$

Ce développement signifie tout simplement que lorsque le volume du confinement *supposé à géométrie "isotrope"* est suffisamment grand, les contributions liées aux effets de bords peuvent être traiter comme des corrections à la quantité $\mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega, \rho_0, +1)$.
Le problème (**P1**) soulevé à la fin de l'introduction est en parti résolu (nous n'avons pas étudié la nature des contributions liées aux effets de bords).

Le reste de l'étude est centrée sur la limite thermodynamique de la susceptibilité magnétique grand canonique lorsque l'intensité du champ magnétique est nulle :

$$\mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega = 0, \rho_0, +1) = \mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega = 0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty(\beta,\rho_0)}, +1) \quad \beta > 0, \;\; \rho_0 > 0 \tag{0.15}$$

L'hypothèse de champ magnétique nul permet d'exclure les contributions "oscillantes" liées à l'effet de Haas-van Alphen[10]. Pour le gaz parfait d'électrons, (0.15) redonne la susceptibilité de Landau lorsque la température $T \to 0$ (gaz d'électrons fortement dégénéré) :

$$\mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega = 0, \rho_0, +1) = -\frac{e^2(6\pi^2\rho_0)^{\frac{1}{3}}}{24\pi^2 c^2} + \mathcal{O}(\beta^{-2}) \quad \text{lorsque } \beta \to +\infty$$

La différence avec (0.3) vient du fait que nous n'avons pas pris en compte la dégénérescence liée au spin des électrons qui induit un facteur 2 supplémentaire au numérateur et la définition du vecteur d'onde de Fermi est modifié. Dans notre cas, $k_F = (6\pi^2\rho_0)^{\frac{1}{3}}$.

Dans le cas du gaz d'électrons de Bloch, c'est l'énergie de Fermi (plus haute énergie occupé par les électrons du système à la température nulle) qui permet de distinguer le cas semi-conducteur du cas métallique. Un semi-conducteur a son énergie de Fermi soit au milieu d'un gap non trivial (i.e. bande interdite séparant deux bandes de Bloch) soit à l'endroit où deux bandes de Bloch consécutives "se touchent" fermant ainsi le gap. Quant au métal, son énergie de Fermi se situe à l'intérieur d'une bande de Bloch.

Le théorème 0.3 donne une réponse complète aux problèmes (**P2**) et (**P3**) soulevés dans l'introduction. L'assertion (*ii*) (resp. (*iii*)) fournit un développement exact de la susceptibilité magnétique (par unité de volume) en champ magnétique nul et à température nulle d'un gaz d'électrons de Bloch dans un semi-conducteur (resp. dans un métal). Quant à l'assertion (*iv*), elle dit simplement que la susceptibilité de Landau-Peierls est la contribution principale à la susceptibilité magnétique (par unité de volume) d'un gaz d'électrons de Bloch dans un métal lorsque la densité des électrons $\rho_0 \to 0$:

$$\mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) \sim -\frac{e^2}{24\pi^2 m^* c^2} k_F \quad \text{lorsque} \quad \text{lorsque } k_F \to 0$$

obtenue lorsque $m_1^* = m_2^* = m_3^* = m^*$.

[10]Une étude rigoureuse (semi-classique) de ce phénomène est proposée dans [26] pour un gaz parfait d'électrons.

Connexion avec les résultats antérieurs

En 1933, R. Peierls [84] introduit sa célèbre substitution (qui porte son nom) et construit un Hamiltonien effectif permettant de réduire le problème au cas des électrons libres. Cependant, l'approximation à une seule bande d'énergie constitue une simplification trop importante du problème.

En 1952, E. Adams [2] est le premier à suggérer que la formule de Landau-Peierls n'est pas la contribution la plus importante (à la susceptibilité magnétique des électrons de Bloch) et qu'il faut tenir compte des transitions interbandes virtuelles.

En 1957, T. Kjeldaas et W. Kohn [63] sont les premiers à suggérer que la formule de Landau-Peierls doit être corrigée avec des termes d'ordre supérieur dans la densité de particules et que ces termes proviennent des bandes ne contenant pas l'énergie de Fermi.

En 1960, J. Hebborn et E. Sondheimer [47], [48] traitent le problème complet d'un point de vue de la mécanique quantique ; même si les porteurs de charge sont des boltzons (obéissant à la statistique de Maxwell-Boltzmann) et non des fermions. Contrairement aux précédents auteurs, ils développent une théorie des perturbations magnétiques pour la trace par unité de volume définissant la pression. Le principal problème est qu'ils supposent que toutes les fonctions d'énergie de Bloch ne se chevauchent pas (ce qui est générallement faux), et que les fonctions de Bloch sont lisses dans les variables de quasi-moment.

En 1962, L. Roth [86] développe un calcul type pseudodifférentiel partant des idées de R. Peierls, T. Kjeldass et W. Kohn. Ce formalisme lui sert à calculer des traces locales et des développements magnétiques. Des résultats similaires sont obtenus par E.I. Blount [11]. Leur calculs formels peuvent très vraisemblablement être fait rigoureusement dans le cas de bandes de Bloch simples (i.e. non dégénérées).

En 1964, Hebborn *et al* [46] simplifient le formalisme développé dans [48] et donnent une formule pour la susceptibilité magnétique en champ magnétique nul pour un gaz de boltzons. Leur méthode peut être rendue vraisemblablement rigoureuse pour des systèmes où les fonctions d'énergie de Bloch ne se croisent pas.

La même année, G. Wannier et U. Upadhyaya [104] reprènent la méthode préconisée par Peierls et remplacent le vrai opérateur de Schrödinger magnétique par un nombre de bandes (éventuellement infini) avec le facteur de phase de Peierls. Ils affirment que leur résultat est équivalent à celui de J. Hebborn et E. Sondheimer [48], mais aucun détail n'est donné. Ces résultats utilisent de manière essentielle le non-croisement des bandes.

En 1969, P. Misra et L. Roth [73] combinent la méthode de [86] avec les idées de [104] afin d'inclure les électrons de coeur dans les calculs.

En 1972, P. Misra et L. Kleinman [72] utilisent des formules issues de la théorie des perturbations (les célèbres "sum rules") pour remplacer les dérivées par rapport aux variables de quasi-moment avec des éléments de matrice du "vrai" opérateur moment. Ils réusissent de cette manière à réécrire les formules précédemment établies par P. Misra et L. Roth (n'ayant de sens que pour des bandes sans croisement) dans une forme tenant compte des croisements de bandes.

En 1990, B. Hellfer et J. Sjöstrand [49] développent pour la première fois une théorie rigoureuse basée sur la substitution de Peierls et considèrent la connexion avec l'effet de Haas-Van Alphen. Ces résultats et bien d'autres ont été revus par G. Nenciu en 1991 [75].

Chapitre 1

Systèmes magnétiques

1 Elements de physique

On se limitera à un problème à trois dimensions.
Pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ désigne sa norme induite par le produit scalaire $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Construisons l'Hamiltonien classique d'une particule non relativiste de masse m portant une charge q plongée dans un champ électromagnétique stationnaire $(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}))$ dans l'espace tout entier. On se place sous l'hypothèse où les champs sont suffisamment réguliers. Soient $U(\mathbf{x})$ le potentiel électrique et $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ le potentiel vecteur magnétique définis respectivement (à une constante près) par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \nabla := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

Dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen, la particule est soumise à la force de Lorentz :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\big(- \nabla U(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{x}} \wedge \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x})\big) \quad \text{(unités SI)} \tag{1.1}$$

où $\dot{\mathbf{x}} := d\mathbf{x}/dt$ désigne la vitesse de la particule dans le référentiel $\mathcal{R}$. Notons qu'en unités CGS il faut remplacer $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ par $\mathbf{A}(\mathbf{x})/c$ dans (1.1), où c désigne la célérité de la lumière. Bien que la force de Lorentz ne soit pas conservative au sens usuel (en raison de la présence du $\dot{\mathbf{x}}$ dans (1.1)), introduisons le potentiel généralisé :

$$\Phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := q\big(U(\mathbf{x}) - \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})\big) \tag{1.2}$$

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient $\{x_i\}_i$ et $\{\dot{x}_i\}_i$, avec $i \in \{1, 2, 3\}$, les coordonnées généralisées indépendantes représentant chacune un degré de liberté pour la particule. Etant donné (1.2) et en vertu de (1.1), on peut vérifier que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

En désignant par $T := \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2$ l'énergie cinétique de la particule, le Lagrangien associé au système dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ sécrit (voir par ex. [68]) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := T - \Phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) - qU(\mathbf{x})$$

Les équations d'Euler-Lagrange permettant de déterminer la trajectoire effective de la particule sont données par :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad i \in \{1,2,3\}$$

Dans la cas où $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$ est uniforme et $U = 0$, le mouvement de la particule est hélicoïdal, i.e. la composition d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan normal à $\mathbf{B}$ et d'un mouvement rectiligne uniforme suivant $\mathbf{B}$. (Il est à noter que dans le cas général où les champs sont stationnaires et orthogonaux, la trajectoire de la particule est trochoïdale).

Le Lagrangien étant indépendant du temps, on déduit l'Hamiltonien classique par :

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}), \quad p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$$

avec p_i l'impulsion généralisée ou moment conjugué de x_i. Il vient alors :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x},\mathbf{p}) &= \big(m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}(\mathbf{x})\big)\cdot\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\dot{\mathbf{x}}\cdot A(\mathbf{x}) + qU(\mathbf{x}) = T + qU(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x})\big)^2 + qU(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

En supposant que la particule (non relativiste) soit sans spin, le traitement quantique fait apparaître de nouveaux effets ("purement quantiques") tels que l'existence, lorsque $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$ est uniforme et $U = 0$, de niveaux d'énergies équidistants (les niveaux de Landau) dans un plan normal à $\mathbf{B}$. L'Hamiltonien quantique décrivant la dynamique de la particule se déduit directement de (1.3) par les règles de quantification de Dirac. En vertu du principe de correspondance, à chaque fonction de l'énergie classique correspond *formellement* un opérateur hermitien sur l'espace de Hilbert des états quantiques. Ainsi en désignant par $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ les observables associées à la position $\mathbf{x}$ et à l'impulsion généralisée $\mathbf{p}$, l'opérateur quantique H correspondant à $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m}\big(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\big)^2 + V(\hat{\mathbf{x}}) \tag{1.4}$$

où $V(\hat{\mathbf{x}}) := qU(\hat{\mathbf{x}})$ et où l'opérateur $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ obéit aux règles de commutation canonique :

$$[\hat{x}_i,\hat{x}_j] = 0, \qquad [\hat{p}_i,\hat{p}_j] = 0, \qquad [\hat{x}_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ quand } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'Hamiltonien défini formellement en (1.4) constitue le point de départ de notre analyse.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, on construit rigoureusement comme opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert des états quantiques, l'Hamiltonien d'une particule quantique chargée, supposée sans spin et non relativiste, plongée dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B}$ uniforme et intéragissant avec un potentiel V d'origine électrique. On traitera le cas où la particule est piégée à l'intérieur d'une "boîte" (générallement modélisé par un puits de potentiel infini) et le cas sans confinement (comme au-dessus). Les hypothèses précises de notre modèle figurent au paragraphe 3.1.
Puis, on construit l'Hamitlonien d'un gaz constitué d'un grand nombre de telles particules sans interaction entre elles (on parle alors de gaz quasi-parfait) lorsque leur nombre est

fixe, puis variable (cas où le gaz est relié à un réservoir de mêmes particules).

En vu de préparer le chapitre 2, on introduit ensuite toute une série de résultats techniques en relation avec les semi-groupe et les puissances de la résolvante (définitions, estimations sur les normes L^p, normes de Hilbert-Schmidt et normes trace à volume fini,...).

Enfin dans une dernière partie, on introduit les principaux objets (en relation avec le gaz quantique quasi-parfait) nécessaires à l'étude statistique du phénomène de diamagnétisme. En particulier, on formule les grandeurs caractéristiques de la réponse diamagnétique à volume fini dans l'ensemble grand canonique (pression, densité et susceptibilités généralisées) ainsi que dans l'ensemble canonique (énergie libre de Helmholtz, susceptibilités généralisées) de la mécanique statistique quantique. Ces quantités seront étudiées en détails dans le chapitre 2.

2 Notations et définitions

Dans ce paragraphe, on définit les espaces de fonctions auxquels nous ferons référence par la suite puis on introduit la classe de fonctions de Kato (voir par ex. [32]). Cette classe joue un rôle important puisqu'elle regroupe l'essentiel des potentiels scalaires singuliers utilisés en physique menant à un opérateur de Schrödinger borné inférieurement (en d'autres termes, avec énergie de l'état fondamental finie).

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble non-vide, χ_Ω désigne sa fonction indicatrice :

$$\mathbf{x} \mapsto \chi_\Omega(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$ désigne les bords de Ω, où $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω et $\mathring{\Omega}$ l'intérieur de Ω.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert de mesure (de Lebesgue) non nulle. L'espace de Banach $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, des fonctions de puissance p-ième intégrable (au sens de Lebesgue) est constitué des fonctions mesurables à valeurs complexes $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\, |f(\mathbf{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad \text{lorsque } 1 \leq p < \infty$$
$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})| < +\infty \quad \text{lorsque } p = \infty$$

L'espace $L^2(\Omega)$ devient un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\, \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x})$$

La norme d'un opérateur $A : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$, est définie par :

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{\|\psi\|_p = 1} \|A\psi\|_q$$

L'espace $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, des fonctions de puissance p-ième localement intégrable est constitué des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Enfin l'espace $L^p_{\mathrm{uloc}}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, des fonctions de puissance p-ième localement uniformément intégrable est constitué des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{uloc}}} := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<1} \mathrm{d}\mathbf{y}\, |f(\mathbf{y})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad \text{lorsque } 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{L^\infty_{\mathrm{uloc}}} := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\Omega} |f(\mathbf{x})| < +\infty \quad \text{lorsque } p = \infty$$

Notons qu'on a l'inclusion : $L^p(\Omega) + L^\infty(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{uloc}}(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $p \geq 1$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert. L'espace de Sobolev local $\mathcal{H}^m(\Omega)$, avec $m \in \mathbb{N}$, est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $f \in L^2(\Omega)$ et dont les dérivées au sens faible $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \in L^2(\Omega)$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tel que $0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq m$. $\mathcal{H}^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni de la norme :

$$\|f\|_{+m} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace de Sobolev local $\mathcal{H}^m_0(\Omega)$ est défini comme la complétion de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω, dans la norme $\|\cdot\|_{+m}$.
Notons qu'on a les inclusions : $\mathcal{H}^m_0(\Omega) \subset \mathcal{H}^m(\Omega)$, avec $m \in \mathbb{N}$; $\mathcal{H}^m_0(\Omega) \subset \mathcal{H}^n_0(\Omega)$ et $\mathcal{H}^m(\Omega) \subset \mathcal{H}^n(\Omega)$ pour tout entier $m \geq n \geq 0$.

Convention d'extension :

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert non-vide. Toute fonction à valeurs complexes f définie a priori sur Ω peut être étendue à $\mathbb{R}^3$ en posant $f(\mathbf{x}) := 0$ pour $\mathbf{x} \notin \Omega$. On utilise cette convention pour plonger injectivement $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^3)$, $p \geq 1$. Ainsi, $L^p(\Omega) \subseteq L^p(\mathbb{R}^3)$.
On a également $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ avec la convention définie ci-dessus.

On introduit maintenant la classe de fonctions de Kato (voir [32]) :

Définition 1.1. *Un potentiel scalaire $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est dans la classe de Kato $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ si*

$$\lim_{r\downarrow 0} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<r} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{|V(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = 0$$

$V \in \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, la classe de Kato locale, si $V\chi_K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$.
V est dit "Kato décomposable", que l'on note $V \in \mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3)$, si :

$$V^+ := \sup\{V, 0\} \in \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \quad et \quad V^- := \sup\{-V, 0\} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3) \tag{1.5}$$

Remarque 1.2. Ci-dessous quelques remarques provenant de [19], [32] et [98] :
(i). Un moyen pratique de savoir si une fonction appartient à la classe de Kato ou à la classe de Kato locale est d'utiliser les inclusions suivantes. Pour tout $p > \frac{3}{2}$,

$$L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^3) \subset L^1_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^3)$$
$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$$

(ii). $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme :

$$\|V\|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)} := \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<1} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{|V(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

3 Systèmes magnétiques et Hamiltoniens

3.1 Modèle & hypothèses

Considérons un gaz quantique constitué d'un très grand nombre de particules identiques, sans spin et non-relativiste, de charge q et de masse $m > 0$. L'hypothèse sans spin est acceptable puisqu'on s'intéresse seulement aux effets diamagnétiques. On suppose que ce gaz est confiné (i.e. piégé) à l'intérieur d'une "boîte" Λ et qu'il est sujet à un champ magnétique extérieur uniforme $\mathbf{B}$. On suppose aussi, que dans l'approximation à un corps, chaque particule interagit avec un potentiel extérieur V d'origine électrique. Enfin, les interactions entre particules seront négligées (hypothèse d'un gaz dilué).

Par la suite (chapitre 1 et chapitre 2), on fera les hypothèses suivantes :
(**H1**) Le domaine de confinement du gaz $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ est un ouvert borné simplement connexe.
(**H2**) Le champ magnétique extérieur $\mathbf{B} := B\mathbf{e}_3$, avec $B > 0$, est orienté suivant la troisième composante de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On lui associe le potentiel vecteur magnétique :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{x} = B\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{e}_3}{2} \wedge \mathbf{x} = \frac{1}{2}(-x_2, x_1, 0) \tag{1.6}$$

qui porte usuellement le nom de "jauge symétrique". Souvent, on utilisera la quantité :

$$a_\infty := \sup_{\mathbf{x}\in\Lambda} |\mathbf{a}(\mathbf{x})| < +\infty \tag{1.7}$$

Avec ce choix de potentiel vecteur, on a $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$ (jauge de Coulomb) et $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x})$.
(**H3**) Le potentiel électrique V est "Kato décomposable", i.e. $V = V^+ - V^-$ avec $V^\pm$ définis en (1.5). On désignera par la suite la restriction de V à Λ par le même symbole.

3.2 Hamiltonien à une particule

On considère ici le cas d'une seule particule.
Partant de l'expression formelle (1.4), en utilisant les unités CGS (il suffit de remplacer $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}/c$ avec $\mathbf{A}$ défini en (1.6)) et les unités atomiques $\hbar = 1 = m$; l'objectif de ce paragraphe est de construire rigoureusement l'opérateur de Schrödinger avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda$ défini par

$$H_\Lambda(\omega, V) := \frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a})^2 + V \quad \text{avec} \quad \omega := \frac{qB}{c} \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

comme un opérateur auto-adjoint agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda)$.
Le paramètre ω est lié à la fréquence cyclotron ω_c de la particule par la relation $\omega_c = -\omega$.

Sous les hypothèses (**H1**), (**H2**) et (**H3**) du paragraphe 3.1, on établit :

Proposition 1.3. *Pour $\omega \in \mathbb{R}$, soit $h_\Lambda^{\omega,V} : \mathcal{H}_0^1(\Lambda) \times \mathcal{H}_0^1(\Lambda) \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire :*

$$h_\Lambda^{\omega,V}(\phi,\psi) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\langle(-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\phi, (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\psi\rangle + \\ + \langle(V^+)^{\frac{1}{2}}\phi, (V^+)^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle(V^-)^{\frac{1}{2}}\phi, (V^-)^{\frac{1}{2}}\psi\rangle \tag{1.9}$$

Alors $H_\Lambda(\omega, V)$ est l'unique opérateur auto-adjoint borné inférieurement dans $L^2(\Lambda)$, de domaine $D(H_\Lambda(\omega, V)) \subset \mathcal{H}_0^1(\Lambda)$, associé à la forme sesquilinéaire $h_\Lambda^{\omega,V}$ tel que :

$$\forall\, \phi \in \mathcal{H}_0^1(\Lambda),\, \forall\, \psi \in D(H_\Lambda(\omega, V)), \quad h_\Lambda^{\omega,V}(\phi, \psi) = \langle \phi, H_\Lambda(\omega, V)\psi \rangle$$

Preuve Proposition 1.3.
Par souci de clarté, lorsqu'on définira une forme sesquilinéaire, on désignera par le même symbole sa fermeture ou/et toute extension fermée de cette forme. La construction s'effectue en 3 étapes : d'abord $\omega = 0$ et $V = 0$, puis $\omega \in \mathbb{R}$ et $V = 0$, enfin $\omega \in \mathbb{R}$ et $V \neq 0$.

Etape 1 : considérons $\omega = 0$ et $V = 0$. Soit $h_\Lambda^{0,0} : \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda) \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire densément définie dans $L^2(\Lambda)$, symétrique et positive, définie par :

$$h_\Lambda^{0,0}(\phi, \psi) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \langle -i\partial_{x_j}\phi, -i\partial_{x_j}\psi \rangle$$

Le domaine de la fermeture de $h_\Lambda^{0,0}$ est l'espace de Sobolev local $\mathcal{H}_0^1(\Lambda)$ (voir par ex. [33]) défini comme la complétion de $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$ pour la norme $\| \cdot \|_{+1}$ (voir section 2). Puisque la forme $h_\Lambda^{0,0}$ étendue au domaine $\mathcal{H}_0^1(\Lambda)$ est fermée, symétrique et non-négative, d'après le théorème VIII.15 dans [87], elle définit un unique opérateur auto-adjoint non-négatif sur $L^2(\Lambda)$, noté $H_\Lambda(0,0)$, de domaine $D(H_\Lambda(0,0)) \subset \mathcal{H}_0^1(\Lambda)$, tel que :

$$\forall\, \phi \in \mathcal{H}_0^1(\Lambda),\ \forall\, \psi \in D(H_\Lambda(0,0)), \quad h_\Lambda^{0,0}(\phi, \psi) = \frac{1}{2}\langle \phi, (-i\nabla)^2 \psi \rangle$$

Formellement, $-2H_\Lambda(0,0) = \nabla^2$ correspond au Laplacien usuel sur Λ avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda$.

Etape 2 : considérons $\omega \neq 0$ et $V = 0$. En désignant par $\mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0)) = \mathcal{H}_0^1(\Lambda)$ le domaine de la forme associée à l'opérateur $H_\Lambda(0,0)$, soit $h_\Lambda^{\omega,0} : \mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0)) \times \mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0)) \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire symétrique et non-négative définie par :

$$h_\Lambda^{\omega,0}(\phi, \psi) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \langle (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\phi, (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\psi \rangle = h_\Lambda^{0,0}(\phi, \psi) + s_\Lambda^\omega(\phi, \psi)$$

où $s_\Lambda^\omega : \mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0)) \times \mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0)) \to \mathbb{C}$ est la forme sesquilinéaire symétrique définie par :

$$s_\Lambda^\omega(\phi, \psi) := -\omega \sum_{j=1}^{3} \langle -i\partial_{x_j}\phi, a_j\psi \rangle + \frac{\omega^2}{2} \sum_{j=1}^{3} \langle a_j\phi, a_j\psi \rangle \tag{1.10}$$

Soit $\varphi \in D(H_\Lambda(0,0))$. En utilisant (1.7), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad |s_\Lambda^\omega(\varphi, \varphi)| \leq \epsilon \langle \varphi, H_\Lambda(0,0)\varphi \rangle + \frac{\omega^2}{2} a_\infty^2 (1 + \epsilon^{-1}) \|\varphi\|_2$$

Il s'ensuit que s_Λ^ω est $H_\Lambda(0,0)$-borné au sens des formes avec borne relative nulle. D'après le théorème KLMN (voir théorème X.17 dans [88]), la forme $h_\Lambda^{\omega,0}$ définie sur $\mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0))$

est fermée et il existe un unique opérateur auto-adjoint non-négatif, noté $H_\Lambda(\omega,0)$, associé à la forme $h_\Lambda^{0,0}+s_\Lambda^\omega$ de domaine $\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,0))=\mathcal{Q}(H_\Lambda(0,0))$ tel que :

$$\forall\,\phi\in\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,0)),\ \forall\,\psi\in D(H_\Lambda(0,0)),\quad \langle\phi,H_\Lambda(\omega,0)\psi\rangle=\langle\phi,H_\Lambda(0,0)\psi\rangle+s_\Lambda^\omega(\phi,\psi) \tag{1.11}$$

On adoptera la représentation $H_\Lambda(\omega,0):=\frac{1}{2}(-i\nabla-\omega\mathbf{a})^2$. Cette construction de $H_\Lambda(\omega,0)$ correspond formellement à imposer les conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda$.

Etape 3 : considérons $\omega\in\mathbb{R}$ et $V\neq 0$.
En vertu de la convention d'extension (cf. section 2), soit $V\in\mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3)$. Soit $h_\Lambda^{\omega,V}$ la forme sesquilinéaire symétrique définie en (1.9) de domaine $\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,0))$. D'une part $V^-\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ est $H_\Lambda(\omega,0)$-borné au sens des formes avec borne relative nulle (voir [83]). D'autre part puisque Λ est borné, $V^+\in\mathcal{K}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ est également $H_\Lambda(\omega,0)$-borné au sens des formes avec borne relative nulle. Par conséquent, pour tout $\epsilon>0$, il existe $\epsilon'\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,0)),\quad |\langle(V^\pm)^{\frac{1}{2}}\varphi,(V^\pm)^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle|\leq\epsilon\frac{1}{2}\langle(-i\nabla-\omega\mathbf{a})\varphi,(-i\nabla-\omega\mathbf{a})\varphi\rangle+\epsilon'\|\varphi\|_2^2$$

Encore par le théorème KLMN [88], la forme $h_\Lambda^{\omega,V}$ définie sur $\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,0))$ est fermée et bornée inférieurement, et il existe un unique opérateur auto-adjoint borné inférieurment, noté $H_\Lambda(\omega,V)$, associé à la forme $h_\Lambda^{\omega,V}$ de domaine $\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,V))=\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,0))$ tel que :

$$\forall\,\phi\in\mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega,V)),\ \forall\,\psi\in D(H_\Lambda(\omega,0)),\quad \langle\phi,H_\Lambda(\omega,V)\psi\rangle=\langle\phi,H_\Lambda(\omega,0)\psi\rangle+\langle\phi,V\psi\rangle \tag{1.12}$$

■

Remarque 1.4. $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$ est un coeur de la forme sesquilinéaire $h_\Lambda^{\omega,V}$ définie en (1.9).

Remarque 1.5. D'après [90] proposition XIII.15.1, $H_\Lambda(0,0)$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(H_\Lambda(0,0)):=\{\phi\,:\,\phi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda}),\ \phi|_{\partial\Lambda}=0\}$.

Remarque 1.6. $H_\Lambda(\omega,0)$ peut également être construit de la manière suivante.
Soient $s_{1,\Lambda}:=\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot(i\nabla)$ et $s_{2,\Lambda}:=\mathbf{a}^2(\mathbf{x})/2$ les opérateurs définis sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$. Comme l'opérateur $s_{i,\Lambda}$, $i\in\{1,2\}$, est $H_\Lambda(0,0)$-borné avec borne relative nulle (cf. preuve Lemme 1.18), le théorème de Kato-Rellich (théorème X.12 dans [88]) garantit que $H_\Lambda(\omega,0)=H_\Lambda(0,0)+\omega s_{1,\Lambda}+\omega^2 s_{2,\Lambda}$ est borné inférieurement et auto-adjoint sur $D(H_\Lambda(0,0))$.

Proposition 1.7. *Pour tout $\omega\in\mathbb{R}$, $H_\Lambda(\omega,V)$ est un opérateur à résolvante compacte.*

Preuve Proposition 1.7.
Sous l'hypothèse (**H1**) concernant le domaine de confinement Λ, l'opérateur $H_\Lambda(0,0)=-\frac{1}{2}\Delta$ avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda$ est un opérateur à résolvante compacte (voir [33]). Puisque la forme symétrique s_Λ^ω définie en (1.10) est $H_\Lambda(0,0)$-bornée au sens des formes avec borne relative nulle, d'après le théorème XIII.68 dans [90], l'opérateur $H_\Lambda(\omega,0)=H_\Lambda(0,0)+s_\Lambda^\omega$ (dans le sens (1.11)) est à résolvante compacte.
Il en est de même pour l'opérateur $H_\Lambda(\omega,V)=H_\Lambda(\omega,0)+V$ (dans le sens (1.12)).

■

Ainsi, $H_\Lambda(\omega, V)$ a un spectre purement discret avec un point d'accumulation en $+\infty$. On notera par la suite $\{e_j(\omega)\}_{j\geq 1}$, avec $e_j(\omega) = e_j(\omega, V, \Lambda)$, l'ensemble de ses valeurs propres indexées dans un ordre croissant et comptées avec leur multiplicité.

En l'absence de confinement...
On donne quelques résultats permettant de construire l'opérateur défini par :

$$H_\infty(\omega, V) = H_{\mathbb{R}^3}(\omega, V) := \frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x}) \quad (\hbar = 1 = m) \tag{1.13}$$

comme un opérateur auto-adjoint agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Sous les hypothèses (**H2**) et (**H3**) du paragraphe 3.1, on établit :

Proposition 1.8. *Soit $\mathcal{Q}$ le domaine défini par :*

$$\mathcal{Q} := \left\{\phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \ : \ (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\phi \in L^2(\mathbb{R}^3),\ (V^+)^{\frac{1}{2}}\phi \in L^2(\mathbb{R}^3)\right\} \tag{1.14}$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, soit $h_\infty^{\omega,V} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire définie par :

$$\begin{aligned} h_\infty^{\omega,V}(\phi, \psi) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\langle(-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\phi, (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\psi\rangle + \\ + \langle(V^+)^{\frac{1}{2}}\phi, (V^+)^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle(V^-)^{\frac{1}{2}}\phi, (V^-)^{\frac{1}{2}}\psi\rangle \end{aligned} \tag{1.15}$$

Alors $H_\infty(\omega, V)$ est l'unique opérateur auto-adjoint borné inférieurement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, de domaine $D(H_\infty(\omega, V)) \subset \mathcal{Q}$, associé à la forme sesquilinéaire $h_\infty^{\omega,V}$ tel que :

$$\forall\, \phi \in \mathcal{Q},\, \forall\, \psi \in D(H_\infty(\omega, V)), \quad h_\infty^{\omega,V}(\phi, \psi) = \langle\phi, H_\infty(\omega, V)\psi\rangle$$

Preuve Proposition 1.8.
Définissons d'abord l'Hamiltonien magnétique libre par une extension de Friedrichs.
Pour $\omega \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a})^2$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est symétrique et positif.
Soit $h_\infty^{\omega,0} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire définie par :

$$h_\infty^{\omega,0}(\phi, \psi) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\langle\phi, (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)^2\psi\rangle$$

D'après le théorème X.23 dans [88], la forme $h_\infty^{\omega,0}$ est fermable et sa fermeture est la forme sesquilinéaire d'un unique opérateur auto-adjoint positif, noté $H_\infty(\omega, 0)$. Aussi $H_\infty(\omega, 0)$ est l'unique extension auto-adjointe de $\frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a})^2$ dont le domaine soit contenu dans le domaine de forme de la fermeture de $h_\infty^{\omega,0}$.

Soit $V^+ \in \mathcal{K}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. La forme sesquilinéaire $h_\infty^{\omega,V^+} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$h_\infty^{\omega,V^+}(\phi, \psi) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\langle(-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\phi, (-i\partial_{x_j} - \omega a_j)\psi\rangle + \langle(V^+)^{\frac{1}{2}}\phi, (V^+)^{\frac{1}{2}}\psi\rangle$$

est densément définie dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, symétrique et non-négative. D'après [96], sa fermeture a pour domaine $\mathcal{Q}$ défini en (1.14). En vertu du théorème VIII.15 dans [87], la forme h_∞^{ω,V^+}

étendue au domaine $\mathcal{Q}$ définit un unique opérateur auto-adjoint non-négatif sur $L^2(\mathbb{R}^3)$, noté $H_\infty(\omega, V^+)$, de domaine $D(H_\infty(\omega, V^+)) \subset \mathcal{Q}$, tel que :

$$\forall\, \phi \in \mathcal{Q},\ \forall\, \psi \in D(H_\infty(\omega, V^+)), \quad h_\infty^{\omega,V^+}(\phi, \psi) = \langle \phi, H_\infty(\omega, V^+)\psi \rangle$$

Soit $V^- \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$. Soit $h_\infty^{\omega,V} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire symétrique définie par :

$$h_\infty^{\omega,V}(\phi, \psi) := h_\infty^{\omega,V^+}(\phi, \psi) - \langle (V^-)^{\frac{1}{2}}\phi, (V^-)^{\frac{1}{2}}\psi \rangle$$

D'après le théorème 15.10 dans [97], $V^- \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ est $H_\infty(\omega, V^+)$-borné au sens des formes avec borne relative nulle. Par le théorème KLMN, la forme sesquilinéaire $h_\infty^{\omega,V}$ définie sur $\mathcal{Q}$ est fermée et bornée inférieurement, et il existe un unique opérateur auto-adjoint borné inférieurement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, noté $H_\infty(\omega, V)$, de domaine $D(H_\infty(\omega, V)) \subset \mathcal{Q}$.

■

Remarque 1.9. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est un coeur de la forme sesquilinéaire $h_\infty^{\omega,V}$.

On termine ce paragraphe par ce dernier résultat :

Proposition 1.10. *Pour $\omega \in \mathbb{R}$, soit $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, V))$. Alors on a l'inégalité :*

$$\inf \sigma(H_\Lambda(\omega, V)) = e_1(\omega) \geq E_0(\omega) \tag{1.16}$$

Preuve Proposition 1.10.
Puisque $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$ et $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ sont des coeurs de $h_\Lambda^{\omega,V}$ et $h_\infty^{\omega,V}$ respectivement, d'après le principe du minimax (théorème XIII.2 dans [90]) :

$$\inf \sigma(H_\Lambda(\omega, V)) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda),\, \|\psi\|_2 = 1} \langle \psi, H_\Lambda(\omega, V)\psi \rangle$$

$$E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, V)) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3),\, \|\psi\|_2 = 1} \langle \psi, H_\infty(\omega, V)\psi \rangle$$

Et par la convention d'extension du chapitre 1 :

$$\inf \sigma(H_\Lambda(\omega, V)) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda),\, \|\psi\|_2 = 1} \langle \psi, H_\infty(\omega, V)\psi \rangle \geq E_0(\omega)$$

■

3.3 Hamiltonien du gaz à nombre fixe de particules

On suppose ici que le gaz décrit dans le paragraphe 3.1 comporte un nombre entier N fixe de particules.

Avant de définir l'Hamiltonien à N particules, introduisons le produit tensoriel d'espaces de Hilbert. On se réfère pour cela à [9]. Une construction différente est proposée dans [87]. Soit $\mathfrak{h}_\Lambda := L^2(\Lambda)$ l'espace de Hilbert à une particule. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par les tenseurs formels $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N$ avec $\phi_i \in \mathfrak{h}_\Lambda$, $i \in \{1, \ldots, N\}$.
Cet espace est muni d'une unique forme sesquilinéaire positive telle que :

$$\langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N, \phi_1' \otimes \cdots \otimes \phi_N' \rangle_{\mathcal{E}} = \prod_{i=1}^{N} \langle \phi_i, \phi_i' \rangle_{\mathfrak{h}_\Lambda}$$

Le produit tensoriel des N espaces de Hilbert $\mathfrak{h}_{N,\Lambda} := \otimes_{i=1}^{N} \mathfrak{h}_\Lambda$ est par définiton le séparé complété de l'espace préhilbertien $\big(\mathcal{E}, \langle \cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{E}}\big)$. Il est à noter que les espaces de Hilbert $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$ et $L^2(\Lambda^N)$ sont isomorphes (voir par ex. [87]).

En vertu de cette construction et compte-tenu de l'absence d'intéraction entre les particules du gaz, l'Hamiltonien à N particules agissant dans $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$ est défini comme la fermeture de l'opérateur $H_{N,\Lambda}(\omega, V)$ défini par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad H_{N,\Lambda}(\omega, V) := \underbrace{H_\Lambda(\omega, V) \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{1^{\text{er}}\ \text{"terme"}} + \cdots + \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes H_\Lambda(\omega, V)}_{N^{\text{ième}}\ \text{"terme"}} \tag{1.17}$$

où $H_\Lambda(\omega, V)$ est l'Hamiltonien à une particule (1.8). En effet, en vertu du corollaire du théorème VIII.33 dans [87], $H_{N,\Lambda}(\omega, V)$ est densément défini sur $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$ et essentiellement auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(H_{N,\Lambda}(\omega, V)) := \otimes_{i=1}^{N} \mathrm{Dom}(H_\Lambda(\omega, V))$, où $\mathrm{Dom}(H_\Lambda(\omega, V))$ désigne le domaine sur lequel $H_\Lambda(\omega, V)$ est essentiellement auto-adjoint.

Cependant il y a quelques restrictions liées à l'indiscernabilité des particules identiques constituant le gaz. Montrons par un argument physique qu'il existe 2 types de particules. Soit $\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ un vecteur de $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$ décrivant un état quantique du gaz, que l'on suppose normalisé à l'unité. Etant donné que les positions possibles de chacune des particules forment un continuum, la probabilité pour que chaque particule se trouve dans un élément de volume $d\mathbf{x}_j$ situé au point $\mathbf{x}_j$ est proportionnelle à $d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_N$ et infinitésimale :

$$dP(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = |\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_N$$

où on interprète $|\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)|^2$ comme la densité de probabilité correspondante.
Puisque les particules sont indiscernables, la densité de probabilité de présence doit rester invariante sous la permutation de 2 coordonnées, ce qui implique :

$$|\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_N)| = |\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)|$$

On distingue alors deux cas :
(1) $\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_N) = \Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)$.
Φ est invariant sous la permutation des coordonnées, l'état est dit symétrique.
(2) $\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_N) = -\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)$.
Φ est impaire sous la permutation de 2 coordonnées, l'état est dit antisymétrique.

Ceci nous amène à définir 2 types de particules indiscernables :

Définition 1.11. *On définit 2 types de particules indiscernables* :
(i). Les bosons dont les états sont symétriques sous la permutation des coordonnées.
Les bosons satisfont à la statistique de Bose-Einstein.
(ii). Les fermions dont les états sont antisymétriques sous la permutation de 2 coordonnées.
Les fermions satisfont à la statistique de Fermi-Dirac.

On construit ci-dessous les espaces de Hilbert des états symétriques (pour les bosons) et antisymétriques (pour les fermions). On se réfère pour cela à [87].

Soit $\mathfrak{P}_N$ le groupe des permutations à N éléments. Pour tout vecteurs $\phi_1, \ldots, \phi_N \in \mathfrak{h}_\Lambda$, introduisons les opérateurs $P_{N,\epsilon}$, avec $\epsilon = \pm 1$, définis sur $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$ par :

$$P_{N,-1}\big(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N\big) = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_N} \phi_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\pi_N} \tag{1.18}$$

$$P_{N,+1}\big(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N\big) = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_N} \sigma(\pi) \phi_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\pi_N} \tag{1.19}$$

où pour chaque permutation $\pi : (1, \ldots, N) \mapsto (\pi_1, \ldots, \pi_N)$, $\sigma : \mathfrak{P}_N \to \{-1, 1\}$ est la signature ; $\sigma = -1$ dans les permutations impaires, et $\sigma = 1$ dans les permutations paires. D'une part, les opérateurs $P_{N,\epsilon}$ s'étendent par linéarité aux opérateurs densément définis sur $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$, d'autre part ils s'étendent par continuité aux opérateurs bornés de norme unité. En fait $P_{N,\epsilon}$, $\epsilon = \pm 1$, sont des projecteurs orthogonaux : $P_{N,\epsilon}^2 = P_{N,\epsilon} = P_{N,\epsilon}^*$.

A partir des projecteurs $P_{N,\epsilon}$, $\epsilon = \pm 1$, on définit les espaces de Hilbert des états totalement symétriques (pour les bosons) et totalement antisymétriques (pour les fermions) :

<u>Définition</u> 1.12. *On définit l'espaces des états totalement symétriques pour le gaz de N bosons et l'espace des états totalement antisymétriques pour le gaz de N fermions respectivement par :*

$$\mathfrak{h}_{N,\Lambda,-1} := P_{N,-1}\mathfrak{h}_{N,\Lambda}, \quad \mathfrak{h}_{N,\Lambda,+1} := P_{N,+1}\mathfrak{h}_{N,\Lambda} \tag{1.20}$$

Les espaces $\mathfrak{h}_{N,\Lambda,\epsilon}$, $\epsilon = \pm 1$, sont des espace de Hilbert (comme sous espace vectoriel fermé de $\mathfrak{h}_{N,\Lambda}$) pour le produit scalaire induit.

Montrons formellement que la construction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}_{N,\Lambda,+1}$ tient compte du principe d'exclusion de Pauli pour les fermions. Soient $\{e_j(\omega)\}_{j \geq 1}$ l'ensemble des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant) de l'Hamiltlonien à une particule $H_\Lambda(\omega, V)$ et $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ l'ensemble des vecteurs propres correspondant. $\phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_N}$, $j_i \in \mathbb{N}^*$ est alors un vecteur propre pour l'Hamitlonien à N particules $H_{N,\Lambda}(\omega, V)$. Supposons que parmi les indices $j_1, \ldots, j_N$ il y en ait deux égaux $j_k = j_l$. Alors compte-tenu de (1.19), on a par antisymétrie :

$$P_{N,+1}(\phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_k} \otimes \phi_{j_k} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_N}) = 0$$

En d'autres termes, deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique.

L'opérateur $H_{N,\Lambda}(\omega, V)$ commute avec les projections sur les espaces de Hilbert symétrisé et antisymétrisé et la restriction de $H_{N,\Lambda}(\omega, V)$ à $\mathfrak{h}_{N,\Lambda,\epsilon}$, notée $H_{N,\Lambda,\epsilon}(\omega, V)$, est essentiellement auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(H_{\Lambda,N}(\omega, V)) \cap \mathfrak{h}_{N,\Lambda,\epsilon}$ (voir [87]).

Ainsi, sous les hypothèses (**H1**), (**H2**) et (**H3**) du paragraphe 3.1, on définit :

<u>Définition</u> 1.13. *Soit $\omega \in \mathbb{R}$. L'Hamiltonien décrivant la dynamique du gaz de N particules identiques et indiscernables (cas $\epsilon = -1$ pour les bosons et $\epsilon = +1$ pour les fermions) sur l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}_{N,\Lambda,\epsilon}$ est l'unique extension auto-adjointe de l'opérateur $H_{N,\Lambda,\epsilon}(\omega, V) := H_{N,\Lambda}(\omega, V) \restriction \mathfrak{h}_{N,\Lambda,\epsilon}$, (i.e. la restriction de $H_{N,\Lambda}(\omega, V)$ à $\mathfrak{h}_{N,\Lambda,\epsilon}$). On désignera cet opérateur par le même symbole.*

En vertu du corollaire du théorème VIII.33 dans [87] et compte-tenu du principe d'exclusion de Pauli pour les fermions, on a :

Proposition 1.14. *Le spectre des opérateurs $H_{N,\Lambda,\epsilon}(\omega, V)$, avec $\epsilon = \pm 1$, est discret :*

$$\sigma(H_{N,\Lambda,-1}(\omega, V)) = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{N} e_{j_k}(\omega), \quad j_1, \ldots, j_N \in \mathbb{N}^* \right\}}$$

$$\sigma(H_{N,\Lambda,+1}(\omega, V)) = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{N} e_{j_k}(\omega), \quad j_1, \ldots, j_N \in \mathbb{N}^*, \quad j_l \neq j_m \text{ lorsque } l \neq m \right\}}$$

3.4 Hamiltonien seconde quantifiée : nombre de particules indéterminé

On suppose que le gaz décrit dans le paragraphe 3.1 comporte un nombre de particules indéterminé. Une telle situation se produit lorsqu'on connecte le système, constitué d'un gaz de N particules piégées dans le confinement Λ, à un réservoir de particules de même nature (identiques et indiscernables) (voir paragraphe 5.1).

Avant d'introduire l'Hamiltonien de ce système, introduisons les espaces de Fock (voir [87]). On définit l'espace de Fock associé à l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}_\Lambda := L^2(\Lambda)$ comme :

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_{n,\Lambda}$$

où $\mathfrak{h}_{0,\Lambda} := \mathbb{C}$, $\mathfrak{h}_{1,\Lambda} := \mathfrak{h}_\Lambda$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\mathfrak{h}_{n,\Lambda} = \otimes_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_\Lambda \cong L^2(\Lambda^n)$.
Ainsi un vecteur $\Psi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda)$ est une suite $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$, avec $\psi_n \in \mathfrak{h}_{n,\Lambda}$, et $\mathfrak{h}_{n,\Lambda}$ peut être identifié au sous-espace fermé de $\mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda)$ constitué par les vecteurs dont toutes les composantes, excéptée la $n$ième, sont nulles. $\mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\forall\, \Phi = (\phi_0, \ldots, \phi_N, \ldots),\ \Psi = (\psi_0, \ldots, \psi_N, \ldots) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda), \quad \langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n, \psi_n \rangle_{\mathfrak{h}_{n,\Lambda}}$$

L'Hamiltonien seconde quantifiée de $H_\Lambda(\omega, V)$, noté $d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V))$, agissant dans l'espace de Fock $\mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda)$ est formellement défini par :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V)) := \sum_{n=0}^{\infty} H_{n,\Lambda}(\omega, V) \tag{1.21}$$

où par convention $H_{0,\Lambda}(\omega, V) := 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n,\Lambda}(\omega, V)$ est défini en (1.17). D'après [87] (section VIII.10), $d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V))$ est symétrique et essentiellement auto-adjoint sur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V))) := \big\{ &\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_\Lambda) \ : \\ &\forall\, n \geq 0,\ \psi_n \in \mathrm{Dom}(H_{n,\Lambda}(\omega, V)), \text{ et } \psi_n = 0 \text{ pour } n \text{ suffisamment grand} \big\} \end{aligned} \tag{1.22}$$

avec $\mathrm{Dom}(H_{n,\Lambda}(\omega, V))$ le domaine sur lequel $H_{n,\Lambda}(\omega, V)$ est essentiellement auto-adjoint.

A partir des opérateurs de projection $P_{n,\epsilon}$, avec $n \geq 1$ et $\epsilon = \pm 1$, définis dans le paragraphe précédent, on peut introduire les espaces de Fock des états totalement symétriques et antisymétriques de la manière suivante :

Définition 1.15. *On définit l'espace de Fock des états totalement symétriques (communément appelé espace de Fock de Bose) et l'espace de Fock des états totalement antisymétriques (espace de Fock de Fermi) respectivement par :*

$$\mathfrak{F}_{-1}(\mathfrak{h}_\Lambda) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{n,-1}\mathfrak{h}_{n,\Lambda}, \quad \mathfrak{F}_{+1}(\mathfrak{h}_\Lambda) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{n,+1}\mathfrak{h}_{n,\Lambda} \tag{1.23}$$

Les espaces $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$, avec $\epsilon = \pm 1$, sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire induit.

L'opérateur $d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V))$ commute avec les projections sur les espaces de Fock symétrisé et antisymétrisé et la restriction de $d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V))$ à $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$, notée $d\Gamma_\epsilon(H_\Lambda(\omega, V))$, est essentiellement auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V))) \cap \mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$ (voir [87]).

Ainsi sous les hypothèses (**H1**), (**H2**) et (**H3**) du paragraphe 3.1, on définit :

Définition 1.16. *Soit $\omega \in \mathbb{R}$. L'Hamiltonien seconde quantifiée de $H_\Lambda(\omega, V)$ décrivant la dynamique du gaz d'un nombre indéterminé de particules identiques et indiscernables (cas $\epsilon = -1$ pour les bosons et $\epsilon = +1$ pour les fermions) sur l'espace de Fock $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$ est l'unique extension auto-adjointe de l'opérateur $d\Gamma_\epsilon(H_\Lambda(\omega, V)) := d\Gamma(H_\Lambda(\omega, V)) \restriction \mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$. On désignera cet opérateur par le même symbole.*

Remarque 1.17. On peut voir $d\Gamma_\epsilon(H_\Lambda(\omega, V))$ comme l'unique opérateur auto-adjoint dont les restrictions à $\mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}$ coïncident avec $H_{n,\Lambda,\epsilon}(\omega, V)$ (voir Définition 1.13).

3.5 Lorsque ω devient un paramètre complexe

Introduisons les opérateurs symétriques sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$ définis par :

$$s_{1,\Lambda}(\omega_0) := \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \big(i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x})\big) \quad \text{et} \quad s_{2,\Lambda} := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x}), \quad \omega_0 \in \mathbb{R} \tag{1.24}$$

Pour tout $(\omega, \omega_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et en posant $d\omega := \omega - \omega_0$, introduisons sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$ l'opérateur :

$$H_\Lambda(\omega, V) := H_\Lambda(\omega_0, V) + s_\Lambda(\omega, \omega_0), \quad \text{avec} \quad s_\Lambda(\omega, \omega_0) := d\omega s_{1,\Lambda}(\omega_0) + d\omega^2 s_{2,\Lambda} \tag{1.25}$$

On montre dans ce paragraphe que $\{H_\Lambda(\omega, V),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille d'opérateurs m-sectoriels analytique de type (A) (terminologie Kato, voir V.3.10 et VII.2 dans [57]).

Lemme 1.18. $\{H_\Lambda(\omega, V),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ *est une famille analytique de type (A).*

Preuve Lemme 1.18.
Soit $(\omega, \omega_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Les notations utilisées sont celles de la preuve de la Proposition 1.3. Soit $\varphi \in D(H_\Lambda(\omega_0, V)) \subset \mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega_0, V)) = \mathcal{Q}(H_\Lambda(0, 0))$ tel que $\|\varphi\|_2 = 1$. On a :

$$\frac{1}{2}\|(i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))\varphi\|_2^2 = h_\Lambda^{\omega_0,0}(\varphi, \varphi) \leq h_\Lambda^{\omega_0,V}(\varphi, \varphi) + |\langle (V^+)^{\frac{1}{2}}\varphi, (V^+)^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle| + \langle (V^-)^{\frac{1}{2}}\varphi, (V^-)^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle \tag{1.26}$$

Comme V^+ et V^- sont tous deux $H_\Lambda(\omega_0, 0)$-bornés au sens des formes avec borne relative nulle, alors pour tout $\nu > 0$ il existe $\nu' \in \mathbb{R}$ tel que $|\langle (V^\pm)^{\frac{1}{2}}\varphi, (V^\pm)^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle| \leq \nu h_\Lambda^{\omega_0,0}(\varphi, \varphi) + \nu'$. Compte-tenu de (1.26), pour tout $\nu \in (0, 1)$, il existe $\nu'' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{2}\|(i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))\varphi\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\nu}\langle \varphi, H_\Lambda(\omega_0, V)\varphi\rangle + \frac{\nu''}{1-\nu} \tag{1.27}$$

Puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\epsilon^{'} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{1}{2}\|(i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))\varphi\|_2 \leq \epsilon \|H_\Lambda(\omega_0, V)\varphi\|_2 + \epsilon^{'} \tag{1.28}$$

Compte-tenu de l'estimation (1.7), (1.28) implique que l'opérateur $s_{1,\Lambda}(\omega_0)$ est $H_\Lambda(\omega_0, V)$-borné avec borne relative nulle. Idem pour l'opérateur $s_{2,\Lambda}$ puisque $\|s_{2,\Lambda}\varphi\|_2 \leq a_\infty^2/2$.
Il s'ensuit que $s_\Lambda(\omega, \omega_0)$ est $H_\Lambda(\omega_0, V)$-borné avec borne relative nulle.
Le théorème IV.1.1 dans [57] assure que l'opérateur $H_\Lambda(\omega, V)$ est fermé sur le domaine

$$D(H_\Lambda(\omega, V)) = D(H_\Lambda(\omega_0, V)) = D(H_\Lambda(0, V))$$

indépendant de ω. D'autre part, l'analycité de $H_\Lambda(\omega, V)\phi$, avec $\phi \in D(H_\Lambda(0, V))$, étant évidente, on conclut que $\{H_\Lambda(\omega, V),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est analytique de type (A).

■

Remarque 1.19. Toutes les constantes ν, $\nu^{'}$, $\nu^{''}$ et ϵ, $\epsilon^{'}$ apparaissant dans la preuve ci-dessus peuvent être choisies indépendantes du domaine Λ (voir par ex. [19]).

Remarque 1.20. Comme $H_\Lambda(0, V)$ est à résolvante compacte (cf. Proposition 1.7), en vertu de la théorie des perturbations analytiques, l'opérateur $H_\Lambda(\omega, V)$, avec $\omega \in \mathbb{C}$, est également à résolvante compacte. Par conséquent, $H_\Lambda(\omega, V)$ n'a que du spectre discret.

Remarque 1.21. Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in D(H_\infty(\omega_0, V)) \subset \mathcal{Q}$ (cf. Proposition 1.8) avec $\|\varphi\|_2 = 1$. V^- étant $H_\infty(\omega_0, V^+)$-borné au sens des formes avec borne relative nulle, alors :

$$\forall \nu \in (0,1)\ \exists \nu^{'} \in \mathbb{R}\ \ :\ \ \frac{1}{2}\|(i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))\varphi\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\nu}\langle \varphi, H_\infty(\omega_0, V)\varphi\rangle + \frac{\nu^{'}}{1-\nu}$$

Puisque $\inf \sigma(H_\infty(\omega_0, 0)) = |\omega_0|/2$ (voir [4]), on déduit qu'il existe $a, b > 0$ tels que :

$$E_0(\omega_0) \geq a|\omega_0| - b \tag{1.29}$$

Lemme 1.22. $\{H_\Lambda(\omega, V),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ *est une famille d'opérateurs m-sectoriels.*

Preuve Lemme 1.22.
Soit $\omega \in \mathbb{C}$, $\Re\omega = \omega_0$ et $\Im\omega = \omega_1$. Soit $\varphi \in D(H_\Lambda(\omega_0, V)) \subset \mathcal{Q}(H_\Lambda(\omega_0, V))$ avec $\|\varphi\|_2 = 1$.
Remarquons d'abord que :

$$\langle \varphi, H_\Lambda(\omega, V)\varphi\rangle = \langle \varphi, H_\Lambda(\omega_0, V)\varphi\rangle - \frac{\omega_1^2}{2}\langle \varphi, \mathbf{a}^2\varphi\rangle + i\omega_1\langle \varphi, \mathbf{a}\cdot(i\nabla + \omega_0\mathbf{a})\varphi\rangle$$

D'une part, en utilisant l'estimation (1.7) sur le potentiel vecteur magnétique :

$$\Re\langle \varphi, H_\Lambda(\omega, V)\varphi\rangle = \langle \varphi, H_\Lambda(\omega_0, V)\varphi\rangle - \frac{\omega_1^2}{2}\langle \varphi, \mathbf{a}^2\varphi\rangle \geq \langle \varphi, H_\Lambda(\omega_0, V)\varphi\rangle - \frac{\omega_1^2}{2}a_\infty^2 \tag{1.30}$$

D'autre part, à partir de (1.27), il existe deux constantes $c > 0$ et $c^{'} > |E_0(\omega_0)|$ tel que :

$$|\Im\langle \varphi, H_\Lambda(\omega, V)\varphi\rangle| = |\omega_1\langle \varphi, \mathbf{a}\cdot(i\nabla + \omega_0\mathbf{a})\varphi\rangle| \leq c|\omega_1|a_\infty\sqrt{\langle \varphi, H_\Lambda(\omega_0, V)\varphi\rangle + c^{'}} \tag{1.31}$$

Soit $\Theta(H_\Lambda(\omega,V))$ l'image numérique de $H_\Lambda(\omega,V)$, i.e. l'ensemble des nombres complexes $\langle u, H_\Lambda(\omega,V)u\rangle$ où $u \in D(H_\Lambda(\omega,V))$, $\|u\|_2 = 1$. En utilisant (1.30) et (1.31), il vient :

$$\Theta(H_\Lambda(\omega,V)) \subset \Big\{\xi \in \mathbb{C} \,:\, |\Im\xi| \le c|\omega_1|a_\infty\sqrt{\Re\xi + c' + \frac{\omega_1^2}{2}a_\infty^2} \quad \Re\xi \in \big[E_0(\omega_0) - \frac{\omega_1^2 a_\infty^2}{2}, +\infty\big)\Big\} \tag{1.32}$$

$\Theta(H_\Lambda(\omega,V))$ étant un un sous-ensemble de $\{\xi \in \mathbb{C} \;:\; \Re\xi \ge E_0(\omega_0) - \omega_1^2 a_\infty^2/2\}$, l'opérateur $H_\Lambda(\omega,V)$ est quasi-accrétif (voir section V.3.10 dans [57]). Il est même quasi-m-accrétif. En effet, avec les arguments utilisés dans la preuve du lemme précédent, pour $\xi \in \mathbb{C}$ avec $|\Re\xi| < E_0(\omega)$ choisi suffisamment grand, $\mathrm{Ran}(H_\Lambda(\omega,V) - \xi) = L^2(\Lambda)$.
Soit $\gamma_\delta(\omega) := -\delta + E_0(\omega_0) - \frac{\omega_1^2}{2}a_\infty^2$ avec $\delta > 0$. On a :

$$\left|\frac{\Im\langle\varphi, H_\Lambda(\omega,V)\varphi\rangle}{\Re\langle\varphi, H_\Lambda(\omega,V)\varphi\rangle - \gamma_\delta(\omega)}\right| \le c|\omega_1|a_\infty g\big(\langle\varphi, H_\Lambda(\omega_0,V)\varphi\rangle\big)$$

où $t \in [E_0(\omega_0), +\infty) \mapsto g(t) := \dfrac{\sqrt{t + c' + \delta}}{t + \delta - E_0(\omega_0)}$. Comme pour tout $t \in [E_0(\omega_0), +\infty)$,

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{t + \delta - E_0(\omega_0) - 2(t + c' + \delta)}{2\sqrt{t + c' + \delta}(t + \delta - E_0(\omega_0))^2} = -\frac{t + \delta + E_0(\omega_0) + 2c'}{2\sqrt{t + c' + \delta}(t + \delta - E_0(\omega_0))^2} < 0$$

$g(\cdot)$ est une fonction strictement décroissante sur $[E_0(\omega_0), +\infty)$.
En conséquence, pour tout $\delta > 0$, $\Theta(H_\Lambda(\omega,V))$ est un sous-ensemble d'un secteur :

$$\mathcal{S}_{\theta_\delta}(\omega) := \Big\{\xi \in \mathbb{C} \;:\; |\arg(\xi - \gamma_\delta(\omega))| \le \theta_\delta(\omega) < \frac{\pi}{2}\Big\}, \quad \text{avec :} \tag{1.33}$$

$$\theta_\delta(\omega) := \arctan\Big(c|\omega_1|a_\infty \frac{\sqrt{E_0(\omega_0) + \delta + c'}}{\delta}\Big) \tag{1.34}$$

où $\theta_\delta(\omega)$ représente le demi-angle du secteur $\mathcal{S}_{\theta_\delta}(\omega)$ de vertex $\gamma_\delta(\omega)$.
Au final, l'opérateur $H_\Lambda(\omega,V)$ est quasi-m-accretif et sectoriel, il est donc m-sectoriel. Par conséquent, son spectre $\sigma(H_\Lambda(\omega,V))$ est un sous-ensemble du secteur $\mathcal{S}_{\theta_\delta}(\omega)$.

■

Remarque 1.23. Par la suite, on fixera $\delta = \delta_0 > 0$ dans la définition (1.33) du secteur.

Remarque 1.24. Soient $(\omega, \omega_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tels que $|d\omega|$ est assez petit. Alors pour tout $\varphi \in D(H_\Lambda(\omega_0,V))$ tel que $\|\varphi\|_2 = 1$, on déduit de (1.30) :

$$\Re\langle\varphi, H_\Lambda(\omega,V)\varphi\rangle \ge E_0(\omega_0) + \mathcal{O}(|d\omega|)$$

Remarque 1.25. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. D'après la preuve précédente, l'extérieur du secteur $\mathcal{S}_{\theta_{\delta_0}}(\omega)$ est un sous-ensemble de l'ensemble résolvent $\rho(H_\Lambda(\omega,V))$. Il s'ensuit alors (voir [88]) :

$$\forall\, \xi \notin \mathcal{S}_{\theta_{\delta_0}}(\omega), \quad \|(H_\Lambda(\omega,V) - \xi)^{-1}\| \le \frac{1}{\mathrm{dist}(\xi, \mathcal{S}_{\theta_{\delta_0}}(\omega))}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme opérateur.
Cela assure que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $c_\epsilon > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|\arg(\xi - \gamma_{\delta_0}(\omega))| \ge \theta_{\delta_0}(\omega) + \epsilon$:

$$\|(H_\Lambda(\omega,V) - \xi)^{-1}\| \le \frac{c_\epsilon}{|\xi - \gamma_{\delta_0}(\omega)|}, \quad c_\epsilon := \frac{1}{\sin\epsilon} \tag{1.35}$$

4 Semi-groupe à un paramètre

Cette section se décompose en deux parties. La première est consacrée à la définition et aux propriétés du semi-groupe à un paramètre de générateur $H_\Lambda(\omega, V)$ et $H_\infty(\omega, V) = H_{\mathbb{R}^3}(\omega, V)$ sur les espaces L^p, $p \geq 1$. Dans la seconde, on donne des estimations sur les normes Hilbert-Schmidt et les normes trace du semi-groupe de générateur $H_\Lambda(\omega, V)$ et des puissances de la résolvante à volume fini en tant qu'opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$.

4.1 Définition et propriétés du semi-groupe à un paramètre

Sauf mention explicite du contraire, $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ désigne un ouvert borné simplement connexe. Souvent on utilisera la notation X pour désigner indifféremment Λ ou $\mathbb{R}^3 \equiv \infty$. L'opérateur $H_X(\omega, V)$ est défini dans la Proposition 1.3 (dans le cas $X = \Lambda$) et dans la Proposition 1.8 (dans le cas $X = \mathbb{R}^3 \equiv \infty$) sous les hypothèses du paragraphe 3.1. Tous les résultats de ce paragraphe sont énoncés sans démonstration (on se référera pour cela à [19], [20] et [98]).

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, le semi-groupe à un paramètre de générateur $H_X(\omega, V)$ défini par :

$$\left\{W_X(\beta, \omega, V) := \mathrm{e}^{-\beta H_X(\omega, V)} \;:\; L^p(X) \to L^q(X)\right\}_{\beta \geq 0} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

est fortement continu, c'est-à-dire :

$$\forall\, \psi \in L^p(X),\ \forall\, \beta \geq 0, \quad \lim_{\beta' \to \beta} \|(W_X(\beta, \omega, V) - W_X(\beta', \omega, V))\psi\|_p = 0 \quad 1 \leq p < \infty$$

De plus il satisfait l'inégalité diamagnétique :

$$\forall\, \psi \in L^p(X),\ \forall\, \beta \geq 0, \quad |W_X(\beta, \omega, V)\psi| \leq W_X(\beta, 0, V)|\psi| \quad 1 \leq p \leq \infty \tag{1.36}$$

et la propriété de monotonie : pour $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\forall\, \beta \geq 0, \quad W_\Lambda(\beta, 0, V)\chi_\Lambda \psi \leq W_{\Lambda'}(\beta, 0, V)\psi \quad \psi \geq 0,\ \psi \in L^p(\Lambda'),\ 1 \leq p \leq \infty$$

Enfin pour tout $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $W_X(\beta, \omega, V) : L^p(X) \to L^q(X)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, est borné, i.e. il existe des constantes $c > 0$ et $C > -\inf \sigma(H_\infty(\omega, V)) = -E_0(\omega)$ ne dépendant que de V (i.e. indépendantes de β, p et q) telles que :

$$\|W_X(\beta, \omega, V)\|_{p,q} \leq \|W_X(\beta, 0, V)\|_{p,q} \leq \|W_\infty(\beta, 0, V)\|_{p,q} \tag{1.37}$$

avec :

$$\|W_\infty(\beta, 0, V)\|_{p,q} \leq \begin{cases} c\beta^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\mathrm{e}^{C\beta} & \text{pour } 1 \leq p < q \leq +\infty \\ c\mathrm{e}^{C\beta} & \text{pour } 1 \leq p = q \leq +\infty \end{cases} \tag{1.38}$$

Remarque 1.26. La constante C dans (1.38) peut être choisie comme n'importe quel réél $> -E_0(\omega)$ (voir [98]). Comme (1.37) permet d'obtenir $E_0(\omega) \geq E_0(0)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on choisira cette constante (sauf mention explicite du contraire) comme :

$$C_0 := \max\{1, -E_0(0) + 1\} > 0 \tag{1.39}$$

Ainsi, lorsque $p = 2 = q$ dans (1.38), on utilisera qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R},\ \forall\, \beta > 0, \quad \|W_\Lambda(\beta, \omega, V)\| \leq c\mathrm{e}^{C_0\beta} \tag{1.40}$$

Maintenant on se limite aux propriétés du semi-groupe sur l'espace de Hilbert $L^2(X)$. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, l'opérateur $W_X(\beta,\omega,V)$ est auto-adjoint et positif d'après le théorème spectral et le calcul fonctionnel pour les fonctions d'opérateurs auto-adjoint non bornés. Aussi pour tout $\beta > 0$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $W_X(\beta,\omega,V)$ étant borné de $L^2(X) \to L^\infty(X)$, le théorème de Dunford-Pettis (voir par ex. [102], [98]) assure que $W_X(\beta,\omega,V)$ est un opérateur intégral dans le sens :

$$\forall\, \varphi \in L^2(X), \quad \big(W_X(\beta,\omega,V)\varphi\big)(\mathbf{x}) = \int_X \mathrm{d}\mathbf{y}\, G_X(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,V)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in X$$

D'autre part d'après [19], le noyau intégral $G_X(\cdot\,,\cdot\,;\cdot\,,\omega,V)$ est jointement continu en $(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) \in X \times X \times (0,+\infty)$; et il existe une constante $c > 0$ dépendant de V telle que :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta,\omega) \in X \times X \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \ \ |G_X(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,V)| \leq G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,0,V) \leq \frac{c}{\beta^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{C_0\beta}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4\beta}} \tag{1.41}$$

La première inégalité dans (1.41) est une conséquence de l'inégalité diamagnétique (1.36).

4.2 Estimations en normes de Hilbert-Schmidt et normes trace

Par la suite, $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ désignera l'espace de Banach des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$. L'espace de Banach $\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$ des opérateurs de classe trace et l'espace de Hilbert $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sont respectivement définis par :

$$\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda)) := \big\{\, T \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda)) \ : \ \|T\|_{\mathfrak{I}_1} < +\infty \,\big\}, \quad \|T\|_{\mathfrak{I}_1} := \mathrm{Tr}|T| = \mathrm{Tr}\sqrt{T^*T}$$
$$\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda)) := \big\{\, T \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda)) \ : \ \|T\|_{\mathfrak{I}_2} < +\infty \,\big\}, \quad \|T\|_{\mathfrak{I}_2} := (\mathrm{Tr}|T|^2)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{Tr}(T^*T))^{\frac{1}{2}}$$

où pour un opérateur T positif, $\mathrm{Tr}(T) := \sum_{n=1}^\infty \langle \phi_n, T\phi_n\rangle$ est indépendante de la base hilbertienne $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$. Notons qu'on a les inclusions : $\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda)) \subset \mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda)) \subset \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$. Aussi $\mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$, $j \in \{1,2\}$, est un idéal bilatère de $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$: si $A \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$ et $B \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ alors $AB \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$. De plus, le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur à trace : si $A, B \in \mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$ alors $AB \in \mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$.

Le lemme ci-dessous (dont la preuve est en annexe) donne des estimations sur les normes $\|W_\Lambda(\beta,\omega,V)\|_{\mathfrak{I}_1}$ et $\|W_\Lambda(\beta,\omega,V)\|_{\mathfrak{I}_2}$ à partir de l'estimation (1.41) sur le noyau :

Lemme 1.27. *$W_\Lambda(\beta,\omega,V)$ est un opérateur de classe trace, i.e. il existe une constante $c > 0$ dépendant seulement de V telle que :*

$$\forall\,\omega \in \mathbb{R},\ \forall\,\beta > 0, \quad \|W_\Lambda(\beta,\omega,V)\|_{\mathfrak{I}_1} \leq c\beta^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{C_0\beta}|\Lambda| \tag{1.42}$$

De plus, sa norme de Hilbert-Schmidt satisfait :

$$\forall\,\omega \in \mathbb{R},\ \forall\,\beta > 0, \quad \|W_\Lambda(\beta,\omega,V)\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c\beta^{-\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{C_0\beta}|\Lambda|^{\frac{1}{2}} \tag{1.43}$$

pour une autre constante $c > 0$ dépendant seulement de V.

On souhaite maintenant obtenir des estimations sur les normes trace et les normes de Hilbert-Schmidt des puissances entières de la résolvante à volume fini.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega, V))$ tel que $\Re\xi_0 < E_0(\omega)$. Pour tout réél $\alpha > 0$, l'opérateur $(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}$ peut être défini par le calcul fonctionnel comme opérateur borné dans $L^2(X)$ (voir par ex. [90]). Il est également possible de définir l'opérateur $(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}$ par une transformation de Laplace du semi-groupe $W_X(\beta, \omega, V)$ (voir [57]) :

$$(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha} = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(\alpha)} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \, t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{\xi_0 t} W_X(t, \omega, V), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^* \tag{1.44}$$

où $\tilde{\Gamma}(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler. En vertu de l'estimation (1.38) ($p = 2 = q$) et quitte à choisir la constante C telle que $\Re\xi_0 < -C < E_0(\omega)$, l'intégrale en (1.44) est absolument convergente dans $\mathfrak{B}(L^2(X))$, i.e. il existe une constante $c > 0$ dépendant de V telle que :

$$\forall\, \alpha > 0, \ \forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad \|(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}\| \leq c(-(\Re\xi_0 + C))^{-\alpha}$$

A partir de maintenant on suppose que $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
La transformation de Laplace permet d'obtenir à partir de (1.38) que pour tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$ vérifiant $1/p - 1/q < 2\alpha/3$, $(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-1}$ est borné de $L^p(X) \to L^q(X)$:

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad \|(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}\|_{p,q} \leq \|(H_\infty(0, V) - \Re\xi_0)^{-\alpha}\|_{p,q} < +\infty \tag{1.45}$$

L'opérateur $(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, étant borné de $L^2(X) \to L^\infty(X)$, le théorème de Dunford-Pettis assure que $(H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}$ est un opérateur intégral dans le sens :

$$\forall\, \varphi \in L^2(X), \ \big((H_X(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}\varphi\big)(\mathbf{x}) = \int_X \mathrm{d}\mathbf{y}\, R_X^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi_0)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in X \tag{1.46}$$

Son noyau intégral vérifiant :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad |R_X^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi_0)| \leq R_\infty^{(\alpha)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0, V, \Re\xi_0) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$$

Remarque 1.28. L'étude de la régularité des noyaux $R_X^{(\alpha)}(\cdot\,,\cdot\,; \omega, V, \xi_0)$ ainsi que leur estimation font l'objet du chapitre 3. Les résultats seront établis pour tout $\xi \in \rho(H_X(\omega, V))$.

La transformation de Laplace (1.44) permet enfin de transférer les estimations du Lemme 1.27 sur les puissances de la résolvante à volume fini ($X = \Lambda$) :

Lemme 1.29. *Soit $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega, V))$ tel que $\Re\xi_0 < E_0(\omega)$ et $|\Re\xi_0|$ suffisamment large. Alors $(H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0)^{-1}$ est un opérateur de Hilbert Schmidt, i.e. il existe une constante $c > 0$ dépendant de V telle que :*

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad \|\big(H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0\big)^{-1}\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c|\Lambda|^{\frac{1}{2}} \tag{1.47}$$

De plus, $(H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0)^{-\alpha}$ est un opérateur de classe trace pour tout entier $\alpha \geq 2$, i.e. il existe une autre constante $c = c_\alpha > 0$ dépendant de V telle que :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}, \quad \|\big(H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0\big)^{-\alpha}\|_{\mathfrak{I}_1} \leq c|\Lambda| \tag{1.48}$$

5 Grandeurs caractéristiques du gaz quantique quasi-parfait

On définit dans cette section les principales grandeurs à volume fini décrivant les propriétés statistiques du gaz quantique quasi-parfait introduit dans le paragraphe 3.1. Le chapitre 2 sera consacré à l'étude des propriétés de ces grandeurs caractéristiques de la réponse diamagnétique.

5.1 Grandeurs caractéristiques dans l'ensemble grand canonique

Considérons le système, noté $\mathcal{S}$, formé du gaz quantique quasi-parfait décrit dans le paragraphe 3.1 comportant initialement un grand nombre fixe de particules. On met en contact $\mathcal{S}$ avec un réservoir $\mathcal{R}$ de chaleur et de particules identiques (et de même nature que celles présentes dans $\mathcal{S}$) permettant ainsi des échanges libres de chaleur et de particules. On suppose que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ forme un système macroscopique à l'équilibre et isolé (hypothèses fondamentales pour appliquer le postulat microcanonique de la mécanique statistique).
Dès que $\mathcal{S}$ a atteint son état d'équilibre, on dit qu'il se trouve dans la situation grand canonique. Son état est alors déterminé par la donnée de la température $T > 0$ et du potentiel chimique μ fixés de l'extérieur par le réservoir $\mathcal{R}$.

Dans l'ensemble grand canonique de la mécanique statistique, soit $(\beta, z, |\Lambda|)$ le jeu de paramètres extérieurs où $\beta := (k_B T)^{-1} > 0$ est "l'inverse" de la température (k_B désigne la constante de Boltzmann), $z := \mathrm{e}^{\beta\mu}$ est la fugacité (μ désigne le potentiel chimique) et $|\Lambda|$ est le volume occupé par le système $\mathcal{S}$.

Avant d'introduire la fonction de partition grand canonique comportant toutes les informations statistiques du système $\mathcal{S}$ à l'équilibre thermodynamique, rappelons quelques notations introduites dans les paragraphes 3.3 et 3.4.

Soit $\mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}$ le sous-espace (propre) de l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}_{n,\Lambda} := \otimes_{j=1}^{n} \mathfrak{h}_\Lambda \cong L^2(\Lambda^n)$ à $n \geq 1$ particules, constitué des fonctions symétriques pour $\epsilon = -1$ et antisymétriques pour $\epsilon = +1$ (voir Définition 1.12). Soit $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda) := \oplus_{n\geq 0} \mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}$, avec par convention $\mathfrak{h}_{0,\Lambda,\epsilon} := \mathbb{C}$, l'espace de Fock de Bose pour $\epsilon = -1$, de Fermi pour $\epsilon = +1$ (cf. Définition 1.15).
Pour $\omega \in \mathbb{R}$, soit $d\Gamma_\epsilon(H_\Lambda(\omega, V))$ l'Hamiltonien seconde quantifiée de $H_\Lambda(\omega, V)$ défini comme l'unique opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$ dont les restrictions à $\mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}$ coïncident avec $H_{n,\Lambda,\epsilon}(\omega, V)$, la restriction à $\mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}$ de l'Hamiltonien à n particules $H_{n,\Lambda}(\omega, V)$.

Soit N l'opérateur "nombre de particules" sur $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$ défini comme l'unique extension auto-adjointe de la multliplication par n sur chaque $\mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}$.

Soient $\beta > 0$ et $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, V))$. Soient I_ϵ et J_ϵ les intervalles définis par :

$$I_{-1} = I_{-1}(E_0(\omega)) := (0, \mathrm{e}^{\beta E_0(\omega)}), \quad I_{+1} := (0, +\infty)$$
$$J_{-1} = J_{-1}(E_0(\omega)) := (-\infty, E_0(\omega)), \quad J_{+1} := (-\infty, +\infty)$$

On définit successivement la fonction de partition grand canonique, la pression, la densité et les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini :

Définition 1.30. *Fonction de partition grand canonique (voir [92])*
Pour $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\mu \in J_\epsilon$, la fonction de partition grand canonique est définie par :

$$\Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)} \exp\left[-\beta\big(d\Gamma_\epsilon(H_\Lambda(\omega, V)) - \mu N\big)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}_{n,\Lambda,\epsilon}} \mathrm{e}^{-\beta H_{n,\Lambda,\epsilon}(\omega,V)} \tag{1.49}$$

Remarque 1.31. D'après les propositions 5.2.22 et 5.2.27 dans [12], on a equivalence entre :
(i). $W_\Lambda(\beta, \omega, V) = \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega,V)}$ est de classe trace sur $L^2(\Lambda)$.
(ii). $\exp\big(-\beta(d\Gamma_\epsilon(H_\Lambda(\omega, V))) - \mu N\big)$ est de classe trace sur $\mathfrak{F}_\epsilon(\mathfrak{h}_\Lambda)$ pour tout $\mu \in I_\epsilon$.
Ainsi la fonction de partition grand canonique (1.49) est bien définie en vertu de (1.42).

Définition 1.32. *Pression et densité grand canonique à volume fini (voir [52])*
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in I_\epsilon$. Supposons que $0 < \Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) < \infty$.
Alors la pression grand canonique à volume fini est définie par :

$$P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) := \frac{1}{\beta|\Lambda|} \ln\big(\Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)\big) \tag{1.50}$$

Supposons de plus que $z \mapsto \Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)$ soit dérivable. Alors la densité de particules grand canonique à volume fini est définie par :

$$\rho_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) := \frac{\partial P_\Lambda}{\partial \mu}(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \beta z \frac{\partial P_\Lambda}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon) \tag{1.51}$$

Définition 1.33. *Susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini (voir [14])*
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in I_\epsilon$. Supposons d'une part que $0 < \Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) < \infty$ et d'autre part que $\omega \mapsto P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)$ soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Alors les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini sont définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}^n_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) := \frac{\partial^n P_\Lambda}{\partial B^n}(\beta, \omega, z, \epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\partial^n P_\Lambda}{\partial \omega^n}(\beta, \omega, z, \epsilon) \tag{1.52}$$

Remarque 1.34. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ dans (1.52) correspondent respectivement à l'aimantation et à la susceptibilité magnétique grand canonique par unité de volume [52].

Utilisant les propriétés du spectre de l'opérateur $H_{n,\Lambda,\epsilon}(\omega, V)$ (voir Proposition 1.14) et le fait que $z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$, la somme infinie dans le membre de droite de (1.49) peut être réécrite comme un produit de sommes indépendantes. On obtient ainsi une expression faisant intervenir directement les valeurs propres de $H_\Lambda(\omega, V)$ (voir [52] pour les détails) :

Proposition 1.35. *Pour tout $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in I_\epsilon$:*

$$\Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)})^\epsilon \tag{1.53}$$

où $\{e_j(\omega)\}_{j \geq 1}$ sont les valeurs propres de $H_\Lambda(\omega, V)$ comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant.

Utilisant maintenant la Définition 1.32, on déduit de (1.53) :

Proposition 1.36. *Pour tout $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in I_\epsilon$:*

$$P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda|} \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}) \tag{1.54}$$

$$\rho_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}}{1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}} \tag{1.55}$$

Remarque 1.37. En vertu du fait que le semi-groupe $W_\Lambda(\beta, \omega, V)$ soit un opérateur positif et de classe trace, on a $\|W_\Lambda(\beta, \omega, V)\|_{\mathfrak{I}_1} = \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega, V)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)} < +\infty$. Les séries dans (1.54) et (1.55) sont absolument convergentes.

On donne maintenant une autre représentation de (1.54) à l'aide du calcul fonctionnel de Dunford-Schwartz (voir par ex. [42]). Pour cela, on a besoin du lemme suivant dont la preuve est en annexe :

Lemme 1.38. *Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$.*
(i). Pour tout $z \in I_{+1}$, la fonction $\xi \mapsto \mathfrak{f}_{+1}(\beta, z; \xi) := \ln\left(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi}\right)$ est holomorphe sur :

$$\mathfrak{C}_{+1} := \left\{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \Im\xi \in (-\pi/\beta, \pi/\beta)\right\} \tag{1.56}$$

(ii). Soit $z \in I_{-1} = I_{-1}(E_0(\omega))$ et $K \subset I_{-1}(E_0(\omega))$ un compact tel que $z \in K$.
Soit $\alpha(\omega)$ un réél vérifiant $-\infty < \alpha(\omega) \leq E_0(\omega)$ tel que $K \subset I_{-1}(\alpha(\omega)) \subseteq I_{-1}(E_0(\omega))$.
Alors la fonction $\xi \mapsto \mathfrak{f}_{-1}(\beta, z; \xi) := \ln\left(1 - z\mathrm{e}^{-\beta\xi}\right)$ est holomorphe sur :

$$\mathfrak{C}_{-1} := \left\{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \Im\xi \in (-\pi/\beta, \pi/\beta), \ \Re\xi \geq \alpha(\omega)\right\} \tag{1.57}$$

Par la suite, γ_ϵ désignera le contour orienté positivement de la forme :

$$\gamma_\epsilon := \left\{\delta_\epsilon(\omega) + iy, \ y \in [-\pi/2\beta, \pi/2\beta]\right\} \cup \left\{x \pm i\pi/2\beta, \ x \geq \delta_\epsilon(\omega)\right\} \tag{1.58}$$

où $\delta_{+1}(\omega) := E_0(\omega) - 1$ et $-\infty < \delta_{-1}(\omega) = \alpha(\omega) < E_0(\omega)$ le réél du Lemme 1.38.
Le contour γ_ϵ ainsi construit est inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{C}_\epsilon$ de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$.

Proposition 1.39. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in I_\epsilon$, avec $\epsilon = \pm 1$.*
Alors la pression grand canonique définie en (1.54) peut encore s'écrire :

$$P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda|} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \ln(\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega, V)}) \tag{1.59}$$

avec, en tant qu'opérateur de classe trace dans $L^2(\Lambda)$:

$$\ln(\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega, V)}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_\epsilon} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)(H_\Lambda(\omega, V) - \xi)^{-1} \tag{1.60}$$

Preuve Proposition 1.39.
Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in I_\epsilon$ et $K \subset I_\epsilon$ tel que $z \in K$. D'après le Lemme 1.38, le contour γ_ϵ en (1.58) est inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{C}_\epsilon$ de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ et contourne la demi-droite $[E_0(\omega), +\infty)$.
Le calcul fonctionnel de Dunfor-Schwartz (voir [42]) permet alors de définir au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$\ln(\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega, V)}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_\epsilon} \mathrm{d}\xi \, \ln(1 + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi})(H_\Lambda(\omega, V) - \xi)^{-1} \tag{1.61}$$

Soit $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega, V))$ vérifiant $\xi_0 < E_0(\omega)$ avec $|\xi_0|$ choisi suffisamment grand. Pour tout $\xi \in \rho(H_\Lambda(\omega, V))$, la première équation résolvante itérée deux fois permet d'écrire :

$$\begin{aligned}(H_\Lambda(\omega, V) - \xi)^{-1} = (H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0)^{-1} + (\xi - \xi_0)(H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0)^{-2} + \\ + (\xi - \xi_0)^2 (H_\Lambda(\omega, V) - \xi_0)^{-2}(H_\Lambda(\omega, V) - \xi)^{-1}\end{aligned} \tag{1.62}$$

En insérant (1.62) dans (1.61), puis en utilisant le théorème intégral de Cauchy :

$$\ln(\mathbb{1}+\epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega, V)}) = \frac{i}{2\pi}\left(\int_{\gamma_\epsilon} \mathrm{d}\xi \, (\xi-\xi_0)^2 \ln(1+\epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi})(H_\Lambda(\omega, V)-\xi)^{-1}\right)(H_\Lambda(\omega, V)-\xi_0)^{-2} \tag{1.63}$$

D'une part, l'intégrale entre parenthèses est absolument convergente dans $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$. En effet, vu le paramétrage du contour γ_ϵ, $\|(H_\Lambda(\omega,V)-\xi)^{-1}\|$ est uniformément borné en ξ. De plus, pour $\Re\xi > 0$ assez grand, $|(\xi-\xi_0)^2 \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})| \leq c(\beta,K,\xi_0)(\Re\xi)^2 \mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}$ (cf. Lemme 2.7, chapitre 2). D'autre part, $(H_\Lambda(\omega,V)-\xi_0)^{-2} \in \mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$ (voir Lemme 1.29). Comme $\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$ est un idéal bilatère, il s'ensuit que $\ln(\mathbb{1}+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega,V)}) \in \mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$. Cet opérateur étant en plus positif et auto-adjoint d'après le théorème spectral et le calcul fonctionnel pour les fonctions d'opérateurs auto-adjoint non bornés (voir [87]), on a :

$$\| \ln(\mathbb{1}+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega,V)})\|_{\mathfrak{I}_1} = \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \ln(\mathbb{1}+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega,V)}) = \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)})$$

Il reste à remplacer la somme infinie dans (1.54) par $\mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \ln(\mathbb{1}+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega,V)})$.

■

5.2 Grandeurs caractéristiques dans l'ensemble canonique

Considérons le système $\mathcal{S}$ constitué du gaz quantique quasi-parfait décrit dans le paragraphe 3.1 comportant un grand nombre $N \in \mathbb{N}^*$ fixe de particules. On met en contact $\mathcal{S}$ avec un thermostat $\mathcal{T}$ permettant ainsi des échanges libres de chaleur. On suppose que $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ forme un système macroscopique à l'équilibre et isolé (hypothèses fondamentales pour appliquer le postulat microcanonique). Dès que $\mathcal{S}$ a atteint son état d'équilibre, on dit qu'il se trouve dans la situation canonique.

Dans l'ensemble canonique de la mécanique statistique, soit (β, N, Λ) le jeu de paramètres extérieurs où $\beta := (k_B T)^{-1} > 0$ est "l'inverse" de la température, $N \geq 1$ le nombre de particules dans $\mathcal{S}$ et $|\Lambda|$ le volume occupé par $\mathcal{S}$. Dans la plupart des problèmes, on préfère utiliser la densité de particules $\rho > 0$ (au lieu du nombre de particules) comme paramètre. Le nombre de particules est alors relié à la densité par $N(\Lambda) := \rho|\Lambda|$.

Toutes les informations (propriétés statistiques) concernant le système $\mathcal{S}$ dans la situation canonique sont contenues dans la fonction de partition canonique :

Définition 1.40. *Fonction de partition canonique (voir [92])*
Pour $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$, la fonction de partition canonique est définie par :

$$Z_\Lambda(\beta,\omega,\rho,\epsilon) := \mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}_{N(\Lambda),\Lambda,\epsilon}} \mathrm{e}^{-\beta H_{N(\Lambda),\Lambda,\epsilon}(\omega,V)} \tag{1.64}$$

où $H_{N(\Lambda),\Lambda,\epsilon}(\omega,V)$ est la restriction à $\mathfrak{h}_{N(\Lambda),\Lambda,\epsilon}$ de l'Hamiltonien à $N(\Lambda)$ particules.

Remarque 1.41. A partir du membre de droite dans (1.49), on peut voir que la fonction de partition grand canonique est liée aux fonctions de partition canonique par la relation :

$$\Xi_\Lambda(\beta,\omega,z,\epsilon) = \sum_{N(\Lambda)=0}^{\infty} z^{N(\Lambda)} Z_\Lambda(\beta,\omega,N(\Lambda),\epsilon) \tag{1.65}$$

En particulier si $\Xi_\Lambda(\beta,\omega,z,\epsilon) < +\infty$ alors :

$$Z_\Lambda(\beta,\omega,\rho,\epsilon) \leq z^{-\rho|\Lambda|} \Xi_\Lambda(\beta,\omega,z,\epsilon) < +\infty \tag{1.66}$$

On définit successivement l'énergie libre de Helmholtz et les susceptibilités généralisées canonique à volume fini :

<u>Définition</u> 1.42. *Energie libre canonique de Helmholtz (voir [52])*
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$. Supposons que $0 < Z_\Lambda(\beta, \omega, \rho, \epsilon) < +\infty$.
Alors l'énergie libre canonique de Helmholtz à volume fini est définie par :

$$f_\Lambda(\beta, \omega, \rho, \epsilon) := -\frac{1}{\beta} \ln\big(Z_\Lambda(\beta, \omega, \rho, \epsilon)\big) \tag{1.67}$$

<u>Définition</u> 1.43. *Susceptibilités généralisées canonique à volume fini (voir [27])*
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$. Supposons d'une part que $0 < Z_\Lambda(\beta, \omega, \rho, \epsilon) < +\infty$ et d'autre part que $\omega \mapsto f_\Lambda(\beta, \omega, \rho, \epsilon)$ soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Alors les susceptibilités généralisées canonique à volume fini sont définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{M}_\Lambda^n(\beta, \omega, \rho, \epsilon) := -\frac{1}{|\Lambda|} \frac{\partial^n f_\Lambda}{\partial B^n}(\beta, \omega, \rho, \epsilon) = -\frac{1}{|\Lambda|} \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\partial^n f_\Lambda}{\partial \omega^n}(\beta, \omega, \rho, \epsilon) \tag{1.68}$$

<u>Remarque</u> 1.44. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ dans (1.68) correspondent respectivement à l'aimantation et à la susceptibilité magnétique canonique par unité de volume (voir [52]).

6 Annexe

Preuve Lemme 1.27.
Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. L'estimation (1.42) se déduit de (1.41) en utilisant que :

$$\int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{x}\, |G_\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, V)| \leq c\beta^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{C_0\beta} \int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Quant à la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{I}_2}$, elle s'exprime à partir de $G_\Lambda(\cdot\,, \cdot\,; \beta, \omega, V)$ comme (voir [57]) :

$$\|W_\Lambda(\beta, \omega, V)\|_{\mathfrak{I}_2}^2 = \int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{x} \int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{y}\, |G_\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, V)|^2$$

Puis on a l'estimation :

$$\int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{y}\, |G_\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, V)|^2 \leq c\beta^{-3} \mathrm{e}^{2C_0\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2\beta}}, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2\beta}} = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta^{\frac{3}{2}}$$

où on a utilisé les coordonnées sphériques pour le calcul de l'intégrale. Il vient alors :

$$\|W_\Lambda(\beta, \omega, V)\|_{\mathfrak{I}_2}^2 \leq c' \beta^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{2C_0\beta} \int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{x}$$

■

Preuve Lemme 1.29.
Soit $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega, V))$ tel que $\Re\xi_0 < -C_0$ (voir Remarque 1.26).
A partir des estimation (1.43) et (1.42) respectivement, l'intégrale (1.44) est absolument convergente dans $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$ dès que $\alpha > 3/4$ et dans $\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$ dès que $\alpha > 3/2$:

$$\|(H_\Lambda(\omega, V) - \xi)^{-\alpha}\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c_\alpha |\Lambda|^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, t^{\alpha - \frac{7}{4}} \mathrm{e}^{(\Re\xi_0 + C_0)t} \leq c'_\alpha(\Re\xi_0, C_0) |\Lambda|^{\frac{1}{2}}$$

$$\|(H_\Lambda(\omega, V) - \xi)^{-\alpha}\|_{\mathfrak{I}_1} \leq c_\alpha |\Lambda| \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, t^{\alpha - \frac{5}{2}} \mathrm{e}^{(\Re\xi_0 + C_0)t} \leq c'_\alpha(\Re\xi_0, C_0) |\Lambda|$$

$\blacksquare$

Preuve Lemme 1.38.
On utilise la détermination principale du logarithme définie par :

$$\forall\, u \in \mathbb{C}^*, \;\; \ln(u) = \ln|u| + i\mathrm{Arg}(u), \;\; \text{avec } \mathrm{Arg}(u) = 2\mathrm{arctan}\left(\frac{\Im u}{\Re u + |u|}\right) \in (-\pi, \pi]$$

(i). Soient $\beta > 0$ et $z \in I_{+1}$. Comme $\Im(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) = z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}\sin(\beta\Im\xi) \neq 0$ dès que $\Im\xi \in (-\pi/\beta, \pi/\beta) \setminus \{0\}$ et $\Re(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) = 1 + z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}\cos(\beta\Im\xi) = 1 + z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} > 0$ lorsque $\Im\xi = 0$, alors $\xi \mapsto \ln(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$ est holomorphe sur $\mathfrak{C}_{+1}$.
(ii). Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in K \subset I_{-1}(E_0(\omega))$. Soit $\alpha(\omega)$ vérifiant $-\infty < \alpha(\omega) \leq E_0(\omega)$ tel que $K \subset I_{-1}(\alpha(\omega)) \subseteq I_{-1}(E_0(\omega))$. Comme $\Im(1 - z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) = -z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}\sin(\beta\Im\xi) \neq 0$ dès que $\Im\xi \in (-\pi/\beta, \pi/\beta) \setminus \{0\}$ et $\Re(1 - z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) = 1 - z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}\cos(\beta\Im\xi) = 1 - z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \geq 1 - \sup_{z\in K} z\mathrm{e}^{-\beta\alpha(\omega)} > 0$ lorsque $\Im\xi = 0$, alors $\xi \mapsto \ln(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$ est holomorphe sur $\mathfrak{C}_{-1}$.

$\blacksquare$

Chapitre 2

Réponse diamagnétique à volume fini

On s'intéresse dans ce chapitre à la réponse diamagnétique *à volume fini* du gaz quasi-parfait de particules identiques et indiscernables (obéissant soit à la statistique de Bose-Einstein, soit à la statistique de Fermi-Dirac) décrit dans le paragraphe 3.1 du chapitre 1.

Les grandeurs caractéristiques de la réponse diamagnétique du gaz à l'équilibre thermique seront principalement formulées dans l'ensemble grand canonique de la mécanique statistique où la température T et la fugacité z sont les paramètres fixés de l'extérieur par un réservoir de (mêmes) particules et de chaleur (cf. paragraphe 5.1, chapitre 1). Les grandeurs formulées dans l'ensemble grand canonique ont cet avantage de s'exprimer directement en fonction des valeurs propres de l'Hamiltonien à une particule.

La quantité centrale est la pression grand canonique. Motivé par la définition des susceptibilités généralisées grand canonique comme les dérivées partielles de la pression grand canonique par rapport à l'intensité du champ magnétique B (cf. Définition 1.33), une grande partie de notre analyse est centrée sur l'étude des propriétés de régularité de la pression en tant que fonction de l'intensité du champ magnétique B.

Ainsi, dans une première partie, on montre que la pression grand canonique est jointement analytique en tant que fonction de B et de la fugacité z. Justifié par cette propriété, on établit dans une seconde partie une expression pour les susceptibilités généralisées grand canonique par une théorie des perturbations magnétiques appliquée à la résolvante.

Ce chapitre comporte trois appendices. Dans le premier, on utilise les propriétés d'analycité de la pression grand canonique comme fonction de z pour transférer ses propriétés d'analycité par rapport à la variable B sur l'énergie libre canonique de Helmholtz. Cette opération nous permet de définir les susceptibilités généralisées dans l'ensemble canonique en vertu de la Définition 1.43. Dans le deuxième appendice, on s'intéresse aux susceptibilités généralisées grand canonique lorsque la densitée de particules devient un paramètre fixé. On montre qu'il existe une relation liant l'aimantation (resp. la susceptibilité) à densité fixée à la dérivée première (resp. seconde) par rapport à la variable B de la transformée de Legendre de la pression. Le troisième appendice est purement technique.

Dans tout ce chapitre, les hypothèses concernant le domaine de confinement Λ du gaz, le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{a}$ et le potentiel électrique V sont celles du paragraphe 3.1, chapitre 1. On supprime désormais la dépendance explicite en "V" dans les notations. On introduit systématiquement le paramètre $\epsilon = \pm 1$ dans les notations ; on rappelle que $\epsilon = -1$ fait référence au gaz de bosons et $\epsilon = +1$ au gaz de fermions.

1 Résultats principaux

Dans le formalisme grand canonique de la mécanique statistique quantique, soit $(\beta, z, |\Lambda|)$ le jeu de paramètres extérieurs où $\beta := (k_B T)^{-1} > 0$ est "l'inverse" de la température (k_B désigne la constante de Boltzmann), $z := \mathrm{e}^{\beta\mu}$ est la fugacité (μ désigne le potentiel chimique) et $|\Lambda|$ est le volume du domaine de confinement du gaz.

Pour $\omega_0 \in \mathbb{R}$, introduisons les domaines du plan complexe définis par :

$$\mathcal{D}_{-1}(E_0(\omega_0)) := \mathbb{C} \setminus [\mathrm{e}^{\beta E_0(\omega_0)}, +\infty) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{+1}(E_0(\omega_0)) := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\mathrm{e}^{\beta E_0(\omega_0)}] \tag{2.1}$$

$$\mathcal{D}_\epsilon := \bigcap_{\omega_0 \in \mathbb{R}} \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0)) = \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0)), \quad E_0(\omega_0) := \inf \sigma(H_\infty(\omega_0)) \tag{2.2}$$

Le premier résultat de ce chapitre est l'analycité jointe de la pression grand canonique définie en (1.59) par rapport à la fugacité et à l'intensité du champ magnétique :

<u>Théorème</u> 2.1. *Soit $\beta > 0$. Alors pour chaque ensemble ouvert et borné $\mathcal{K}$ tel que $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_\Lambda$ de l'axe des réels tel que la pression grand canonique à volume fini $P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)$ soit jointement analytique par rapport aux variables (ω, z) sur $\mathcal{N}_\Lambda \times \mathcal{K}$.*

Le second résultat de ce chapitre donne une expression pour les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini (voir Définition 1.33, chapitre 1), leur existence étant assurée par le Théorème 2.1. Ce résultat est basé sur une théorie des perturbations magnétiques standarde (au sens des opérateurs).

Introduisons pour cela une expression pour le prolongement analytique au domaine $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ de la pression grand canonique par le calcul fonctionnel de Dunford-Schwartz. Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$. La pression grand canonique à volume fini peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} P_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) : &= \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda|} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}) \\ &= \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Γ_K est un contour orienté positivement du type (2.12), inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (2.11) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$, contournant la demi-droite $[E_0(\omega_0), +\infty)$.

Introduisons encore quelques notations. Soient $s_{1,\Lambda}(\omega_0)$ et $s_{2,\Lambda}$ les opérateurs définis en (1.24). Pour $\xi \in \rho(H_\Lambda(\omega_0))$, soient les opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$ (voir section 3) :

$$S_{1,\Lambda}(\omega_0, \xi) := s_{1,\Lambda}(\omega_0)(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \tag{2.4}$$

$$S_{2,\Lambda}(\omega_0, \xi) := s_{2,\Lambda}(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \tag{2.5}$$

Pour tout couple $(\omega, \omega_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, posons $d\omega = \omega - \omega_0$ et introduisons :

$$S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi) := (H_\Lambda(\omega) - H_\Lambda(\omega_0))(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} = d\omega S_{1,\Lambda}(\omega_0, \xi) + (d\omega)^2 S_{2,\Lambda}(\omega_0, \xi) \tag{2.6}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, introduisons la famille d'opérateurs dans $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$:

$$J_{k,\Lambda}(i_1, \ldots, i_k)(\omega_0, \xi) := (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \prod_{m=1}^{k} S_{i_m,\Lambda}(\omega_0, \xi) \tag{2.7}$$

Pour tout entier $n \geq k \geq 1$, soit $\chi_k^n(i_1, \dots, i_k)$ la fonction caractéristique définie par :

$$\chi_k^n(i_1, \dots, i_k) := \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 + \ldots + i_k = n \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \tag{2.8}$$

Voici le second résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.2. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$. Alors pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\mathcal{X}_\Lambda^n(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda|} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}\right) \tag{2.9}$$

avec, en tant qu'opérateurs de classe trace :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}\right) &= n! \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \\ &= n! \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1, \dots, i_k) \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) J_{k,\Lambda}(i_1, \dots, i_k)(\omega_0, \xi) \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $J_{k,\Lambda}(i_1, \dots, i_k)(\omega_0, \xi)$ est la famille d'opérateurs définie en (2.7).

Remarque 2.3. Les domaines de définition de z ont été choisi ici indépendants de Λ pour les besoins du chapitre 5. Les résultats énoncés restent valable lorsque le domaine de définition de z est étendu à $\mathcal{D}_\epsilon(e_1(\omega_0)) \supset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ avec $e_1(\omega_0) := \inf \sigma(H_\Lambda(\omega_0))$.

Remarque 2.4. Comme indiqué dans l'énoncé du Théorème 2.1, le voisinage complexe de l'axe des réels $\mathcal{N}$ dépend du domaine de confinement Λ. En l'occurrence si Λ_1 et Λ_2 sont deux ouverts bornés simplement connexe tels que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, alors $\mathcal{N}_{\Lambda_2} \subset \mathcal{N}_{\Lambda_1}$.

2 Propriétés de la pression grand canonique à volume fini

Cette section est consacrée à l'étude des propriétés (essentiellement d'analycité) de la pression grand canonique à volume fini. La preuve du Théorème 2.1, basée sur le théorème d'Hartog (voir par ex. [51]), se trouve dans le paragraphe 2.3.

2.1 Analycité par rapport à la variable z

On démontre ici que la pression grand canonique à volume fini, vue comme une fonction de z, peut être étendue analytiquement au domaine $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ défini en (2.1).

Proposition 2.5. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Alors la pression grand canonique à volume fini $P_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$ est analytique par rapport à la variable z sur le domaine $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$.*

Sa démonstration nécessite les 2 lemmes suivants (leur preuve est en annexe) :

Lemme 2.6. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(\omega_0)$ un réel vérifiant $-\infty < \alpha(\omega_0) \leq E_0(\omega_0)$. Alors pour chaque compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha(\omega_0)) \subseteq \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, $\epsilon = \pm 1$, il existe $\xi_K > E_0(\omega_0)$, un réel satisfaisant la condition $\sup_{z\in K} |z|\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} < 1$ pour $\Re\xi \geq \xi_K$, et $\eta_K > 0$ tels que la fonction $(z,\xi) \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) := \ln\left(1+\epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi}\right)$ soit jointement analytique sur $K \times \mathfrak{D}$, où $\mathfrak{D}$ désigne le domaine :*

$$\mathfrak{D} := \left\{\xi \in \mathbb{C} \,:\, \Im\xi \in \Big(-\frac{\eta_K}{\beta}, \frac{\eta_K}{\beta}\Big),\ \Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K)\right\} \cup \left\{\xi \in \mathbb{C} \,:\, \Re\xi \geq \xi_K\right\} \tag{2.11}$$

De plus si $K^{'}$ désigne un sous-ensemble compact tel que $K^{'} \subset K$, alors $\eta_{K^{'}} > \eta_K$.

Lemme 2.7. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(\omega_0)$ un réel vérifiant $-\infty < \alpha(\omega_0) < E_0(\omega_0)$. Soient $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha(\omega_0))$ un compact et $\eta_K > 0$, $\xi_K > E_0(\omega_0)$ les réels du Lemme 2.6. Soit $\varsigma \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big)$. Soit $\Gamma_K \subset \mathfrak{D}$ le contour orienté positivement défini par :*

$$\Gamma_K := \left\{\Re\xi = \alpha(\omega_0),\ \Im\xi \in \Big[-\frac{\eta_K}{2\beta}, \frac{\eta_K}{2\beta}\Big]\right\} \cup \left\{\Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K),\ \Im\xi = \pm\frac{\eta_K}{2\beta}\right\} \cup \\ \cup \left\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg\Big(\xi - \xi_K \mp i\frac{\eta_K}{2\beta}\Big) = \pm\varsigma\right\} \tag{2.12}$$

Alors pour tout $z \in K$, la fonction $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)$ est exponentiellement décroissante sur le contour Γ_K, i.e. il existe une constante $c(\beta,K) > 0$ telle que :

$$\forall\, z \in K,\ \forall\, \xi \in \Gamma_K, \quad |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)| \leq c(\beta,K)\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \tag{2.13}$$

Et pour tout polynôme $p(|\xi|)$, il existe une autre constante $c(\beta,K) > 0$ telle que :

$$\forall\, z \in K, \quad \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |p(|\xi|)||\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)| \leq c(\beta,K) < +\infty \tag{2.14}$$

Preuve Proposition 2.5.
Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\alpha_n(\omega_0)$ défini par $\alpha_n(\omega_0) := E_0(\omega_0) - \frac{1}{n}$.
Soit $K_0 \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha_n(\omega_0))$ un compact tel que $K_0 \cap \mathbb{R}$ contienne un intervalle ouvert non vide. On commence par construire un prolongement analytique de $P_\Lambda(\beta,\omega_0,\cdot\,\epsilon)$ sur K_0.
Soit Γ_{K_0} le contour orienté positivement (voir (2.12) avec $\varsigma = 0$) :

$$\Gamma_{K_0} = \left\{\Re\xi \in [\alpha_n(\omega_0), +\infty),\ \Im\xi = \pm\frac{\eta_K}{2\beta}\right\} \cup \left\{\Re\xi = \alpha_n(\omega_0),\ \Im\xi \in \Big[-\frac{\eta_K}{2\beta}, \frac{\eta_K}{2\beta}\Big]\right\}$$

avec $\eta_K > 0$ le réel du Lemme 2.6. Γ_{K_0} est inclus dans le domaine d'holomorphie de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)$ (cf. Lemme 2.6) et contourne la demi-droite $[E_0(\omega_0), +\infty)$. Le calcul fonctionnel de Dunford (voir [42]) permet alors d'écrire au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$\forall\, z \in K_0, \quad \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}\right) := \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_{K_0}} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\big(H_\Lambda(\omega_0) - \xi\big)^{-1}$$

Soit $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega_0))$ tel que $\xi_0 < E_0(\omega_0)$ avec $|\xi_0|$ suffisamment grand. Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve de la Proposition 1.39, pour tout $z \in K_0$:

$$\ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_{K_0}} \mathrm{d}\xi\, (\xi - \xi_0)^2 \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\big(H_\Lambda(\omega_0) - \xi\big)^{-1}\right)\big(H_\Lambda(\omega_0) - \xi_0\big)^{-2} \tag{2.15}$$

Puisque la trace d'une fonction à valeurs opérateurs $\mathfrak{I}_1$-analytique sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ est analytique sur ce même domaine $\mathcal{U}$ (voir [108]), il suffit de prouver que $K_0 \ni z \mapsto \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)})$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique. D'abord $K_0 \ni z \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est holomorphe et $\Gamma_{K_0} \ni \xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est exponentiellement décroissante (cf. Lemme 2.7). Ensuite de par le choix de Γ_{K_0}, l'opérateur $(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1}$ est borné uniformément en $\xi \in \Gamma_{K_0}$ (et ω_0). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale assure que la fonction à valeurs opérateurs :

$$K_0 \ni z \mapsto I_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_{K_0}} \mathrm{d}\xi \, (\xi - \xi_0)^2 \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1}$$

est $\mathfrak{B}$-analytique (i.e. analytique bornée).
Comme $\xi \mapsto \partial_z \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est holomorphe sur le même domaine que $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot)$, posons :

$$\frac{\partial I_\Lambda}{\partial z}(\beta, \omega_0, z, \epsilon) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_{K_0}} \mathrm{d}\xi \, (\xi - \xi_0)^2 \left(\frac{\epsilon \mathrm{e}^{-\beta\xi}}{1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}} \right) (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1}$$

En utilisant que $(H_\Lambda(\omega_0) - \xi_0)^{-2}$ est un opérateur de classe trace (cf. Lemme 1.29) :

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{I_\Lambda(\beta, \omega_0, z+h, \epsilon) - I_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)}{h} (H_\Lambda(\omega_0) - \xi_0)^{-2} - \frac{\partial I_\Lambda}{\partial z}(\beta, \omega_0, z, \epsilon)(H_\Lambda(\omega_0) - \xi_0)^{-2} \right\|_{\mathfrak{I}_1}$$
$$\leq \lim_{h \to 0} \left\| \frac{I_\Lambda(\beta, \omega_0, z+h, \epsilon) - I_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)}{h} - \frac{\partial I_\Lambda}{\partial z}(\beta, \omega_0, z, \epsilon) \right\| \left\| (H_\Lambda(\omega_0) - \xi_0)^{-2} \right\|_{\mathfrak{I}_1} = 0$$

Ainsi $K_0 \ni z \mapsto \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}) = I_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)(H_\Lambda(\omega_0) - \xi_0)^{-2}$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique, d'où l'analycité de

$$K_0 \ni z \mapsto P_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda|} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \ln \left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)} \right) \tag{2.16}$$

Etendons maintenant cette propriété d'analycité sur tout le domaine $\mathcal{D}_\epsilon(\alpha_n(\omega_0))$. Il suffit pour cela de considérer une suite croissante (au sens de l'inclusion) de compacts $\{K_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, avec K_0 choisi comme ci-dessus, tel que $\cup_{l \in \mathbb{N}} K_l = \mathcal{D}_\epsilon(\alpha_n(\omega_0))$. Compte-tenu du Lemme 2.6, les extensions analytiques de $P_\Lambda(\beta, \omega_0, \cdot, \epsilon)$ définies par (2.16) correspondant respectivement aux compacts K_l et $K_{l'}$, avec $K_l \subset K_{l'}$, coïncident sur K_l. Enfin, il reste à étendre la propriété d'analycité à $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_\epsilon(\alpha_n(\omega_0)) = \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$.

■

2.2 Analycité par rapport à la variable ω

Dans ce paragraphe, on démontre le résultat d'analycité locale suivant :

<u>**Proposition**</u> **2.8.** *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ un compact, $\epsilon = \pm 1$. Alors il existe un voisinage complexe $\mathcal{V}_{K,\Lambda}(\omega_0)$ de ω_0 tel que $\forall z \in K$, la pression grand canonique à volume fini soit analytique par rapport à la variable ω sur $\mathcal{V}_{K,\Lambda}(\omega_0)$.*

Ce théorème admet un corollaire (immédiat) concernant l'analycité globale de la pression grand canonique à volume fini sur un voisinage complexe de l'axe des réels (dépendant du compact K). Mais dans ce cas, K doit être pris dans l'intersection $\cap_{\omega_0 \in \mathbb{R}} \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, c'est-à-dire dans $\mathcal{D}_\epsilon$ (cf. (2.2)).

Corollaire 2.9. *Soient $\beta > 0$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$ un compact. Alors il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_{K,\Lambda}$ de l'axe des réels tel que pour tout $z \in K$, la pression grand canonique à volume fini soit analytique par rapport à la variable ω sur $\mathcal{N}_{K,\Lambda}$.*

Preuve Corollaire 2.9.
Il suffit simplement à partir de la Proposition 2.8 de poser $\mathcal{N}_{K,\Lambda} := \bigcup_{\omega_0 \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_{K,\Lambda}(\omega_0)$.

■

Faisons quelques remarques concernant la stratégie utilisée pour démontrer la Proposition 2.8. La représentation en série (1.54) de la pression ne peut pas être utilisée puisque les propriétés d'analycité des niveaux d'énergie $e_j(\omega)$, $j \geq 1$, sont difficiles à obtenir en général et ne semblent pas être connues dans le cas particulier considéré ici.

La preuve de la Proposition 2.8 est basée sur la Proposition 2.10 ci-dessous.
Dans l'appendice 3 de ce chapitre, on donne une autre preuve de la Proposition 2.10 beaucoup plus technique reposant sur l'utilisation du semi-groupe.

Proposition 2.10. *Soient $\hat{\omega} \in \mathbb{C}$ et $\xi \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\xi,\Lambda}(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ tel que la fonction à valeurs opérateurs $\mathcal{V}_{\xi,\Lambda}(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ soit $\mathfrak{I}_2$-analytique.*

On a besoin pour cela du lemme suivant dont la preuve figure en annexe :

Lemme 2.11. *Soient $\{A(u),\ u \in \mathcal{U}\}$ et $\{B(u),\ u \in \mathcal{U}\}$ deux familles d'opérateurs bornés définies sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. Soient $U, V \subset \mathcal{U}$ des ouverts et $j \in \{1, 2\}$.*
(i). Supposons que $U \ni u \mapsto A(u)$ est $\mathfrak{B}$-analytique et $V \ni u \mapsto B(u)$ est $\mathfrak{I}_j$-analytique. Alors $u \mapsto A(u)B(u)$ est $\mathfrak{I}_j$ -analytique sur $U \cap V$.
(ii). Supposons que $U \ni u \mapsto A(u)$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique et $V \ni u \mapsto B(u)$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique. Alors $u \mapsto A(u)B(u)$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique sur $U \cap V$.

Notons que (i) repose simplement sur le fait que $\mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$, $j \in \{1, 2\}$, est un idéal bilatère, i.e. si $A \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$ et $B \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ alors $AB \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$. (ii) repose sur le fait qu'un produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur de classe trace.

Preuve Proposition 2.10
Soient $\hat{\omega} \in \mathbb{C}$ et $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$. Ceci est toujours possible puisque l'opérateur $H_\Lambda(\hat{\omega})$ est m-sectoriel (cf. Lemme 1.22). On choisit $\xi_0 < \gamma_{\delta_0}(\hat{\omega})$ (le vertex du secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\hat{\omega})$ (1.33)) avec $|\xi_0|$ suffisamment grand. On montre d'abord l'existence d'un voisinage $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ sur lequel $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique. Puis on étend pour tout $\xi \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$ par la première équation résolvante.
En utilisant l'opérateur $s_\Lambda(\hat{\omega}, \omega_0 = 0)$ défini en (1.25), il vient :

$$H_\Lambda(\hat{\omega}) - \xi_0 = (H_\Lambda(0) - \xi_0) + s_\Lambda(\hat{\omega}, 0) = \{\mathbb{1} + s_\Lambda(\hat{\omega}, 0)(H_\Lambda(0) - \xi_0)^{-1}\}(H_\Lambda(0) - \xi_0) \quad (2.17)$$

L'opérateur $U_\Lambda(\hat{\omega}, \xi_0) := s_\Lambda(\hat{\omega}, 0)(H_\Lambda(0) - \xi_0)^{-1}$ est borné sur $L^2(\Lambda)$ puisque $s_\Lambda(\hat{\omega}, 0)$ est $H_\Lambda(0)$-borné avec borne relative nulle (cf. preuve Lemme 1.18). Comme $\{H_\Lambda(\omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille analytique de type (A), alors il existe un voisinage $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ tel que $\forall\, \omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$, $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega))$ et l'identité (2.17) est encore valable $\forall\, \omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$.
Il s'ensuit de (2.17) que $\forall\, \omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$, l'opérateur $\big(\mathbb{1} + U_\Lambda(\omega, \xi_0)\big)$ est inversible d'inverse :

$$\{\mathbb{1} + U_\Lambda(\omega, \xi_0)\}^{-1} = (H_\Lambda(0) - \xi_0)(H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-1} = \mathbb{1} - s_\Lambda(\omega, 0)(H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-1} \quad (2.18)$$

qui est borné sur $L^2(\Lambda)$ car $s_\Lambda(\omega,0)$ est également $H_\Lambda(\omega)$-borné avec borne relative nulle. Montrons maintenant que $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique. Posons :

$$\forall\, \omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega}), \quad U_\Lambda'(\omega,\xi_0) := \big(\mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot(i\nabla) + \omega \mathbf{a}^2(\mathbf{x})\big)(H_\Lambda(0)-\xi_0)^{-1}$$

Soit $\omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$. Via la définition des opérateurs $s_{1,\Lambda}(0)$ et $s_{2,\Lambda}$ en (1.24), il vient :

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{U_\Lambda(\omega+h,\xi_0)-U_\Lambda(\omega,\xi_0)}{h} - U_\Lambda'(\omega,\xi_0)\right\| \leq \lim_{h\to 0}|h|a_\infty^2\|(H_\Lambda(0)-\xi_0)^{-1}\| = 0$$

ce qui assure que $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto U_\Lambda(\omega,\xi_0)$ est $\mathfrak{B}$-analytique. Par conséquent, on a également que $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto \{1+U_\Lambda(\omega,\xi_0)\}^{-1}$ est $\mathfrak{B}$-analytique. De plus, pour $\omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$:

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\left\|\frac{(H_\Lambda(\omega+h)-\xi_0)^{-1}-(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}}{h} - \frac{d}{d\omega}(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}\right\|_{\mathfrak{I}_2} \\ &\leq \lim_{h\to 0}\left\|\frac{\{\mathbb{1}+U_\Lambda(\omega+h,\xi_0)\}^{-1}-\{\mathbb{1}+U_\Lambda(\omega,\xi_0)\}^{-1}}{h} - \frac{d}{d\omega}\{\mathbb{1}+U_\Lambda(\omega,\xi_0)\}^{-1}\right\|\|(H_\Lambda(0)-\xi_0)^{-1}\|_{\mathfrak{I}_2}\end{aligned}$$

Puisque $\|(H_\Lambda(0)-\xi_0)^{-1}\|_{\mathfrak{I}_2} < +\infty$ d'après (1.48), on obtient finalement :

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{(H_\Lambda(\omega+h)-\xi_0)^{-1}-(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}}{h} - \frac{d}{d\omega}(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}\right\|_{\mathfrak{I}_2} = 0$$

ce qui garantit que $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique.
Reste à étendre ce résultat pour $\xi \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$ quelconque. La première équation résolvante donne au sens des opérateurs bornés :

$$(H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi)^{-1} = (H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi_0)^{-1} + (\xi-\xi_0)(H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi)^{-1}(H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi_0)^{-1}$$

Comme il existe un voisinage $V_\xi(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ tel que $V_\xi(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto \big(H_\Lambda(\omega)-\xi\big)^{-1}$ soit $\mathfrak{B}$-analytique, en utilisant (i) du Lemme 2.11, on déduit que la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique sur $\mathcal{V}_\xi(\hat{\omega}) := \nu_{\xi_0}(\hat{\omega}) \cap V_\xi(\hat{\omega})$.
Finallement $\mathcal{V}_\xi(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto \big(H_\Lambda(\omega)-\xi\big)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique.

■

Corollaire 2.12. *Soient $\hat{\omega} \in \mathbb{C}$ et $\xi \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\xi,\Lambda}(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ tel que la fonction à valeurs opérateurs $\mathcal{V}_{\xi,\Lambda}(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-2}$ soit $\mathfrak{I}_1$-analytique.*

Preuve Corollaire 2.12.
Etant donné le résultat de la Proposition 2.10, il suffit d'appliquer (ii) du Lemme 2.11.

■

Preuve Proposition 2.8.
Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, avec K un sous-ensemble compact.
On commence par construire, pour tout $z \in K$, un prolongement analytique de la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto \ln\big(\mathbb{1}+\epsilon z e^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\big)$ sur un voisinage complexe $V_K(\omega_0)$ de ω_0.
On utilise pour cela (encore une fois) une intégrale du type Dunford-Schwartz (voir [42]).

Soit $\alpha(\omega_0)$ vérifiant $-\infty < \alpha(\omega_0) < E_0(\omega_0)$ et tel que $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha(\omega_0))$. Avec $\eta_K > 0$ et $\xi_K > E_0(\omega_0)$ les réels du Lemme 2.6, soit Γ_K (cf. (2.12) avec $\varsigma = \pi/3$) le contour :

$$\Gamma_K = \Big\{\Re\xi = \alpha(\omega_0),\ \Im\xi \in \Big[-\frac{\eta_K}{2\beta}, \frac{\eta_K}{2\beta}\Big]\Big\} \cup \Big\{\Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K),\ \Im\xi = \pm\frac{\eta_K}{2\beta}\Big\} \cup \\ \cup \Big\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg\Big(\xi - \xi_K \mp i\frac{\eta_K}{2\beta}\Big) = \pm\frac{\pi}{3}\Big\} \quad (2.19)$$

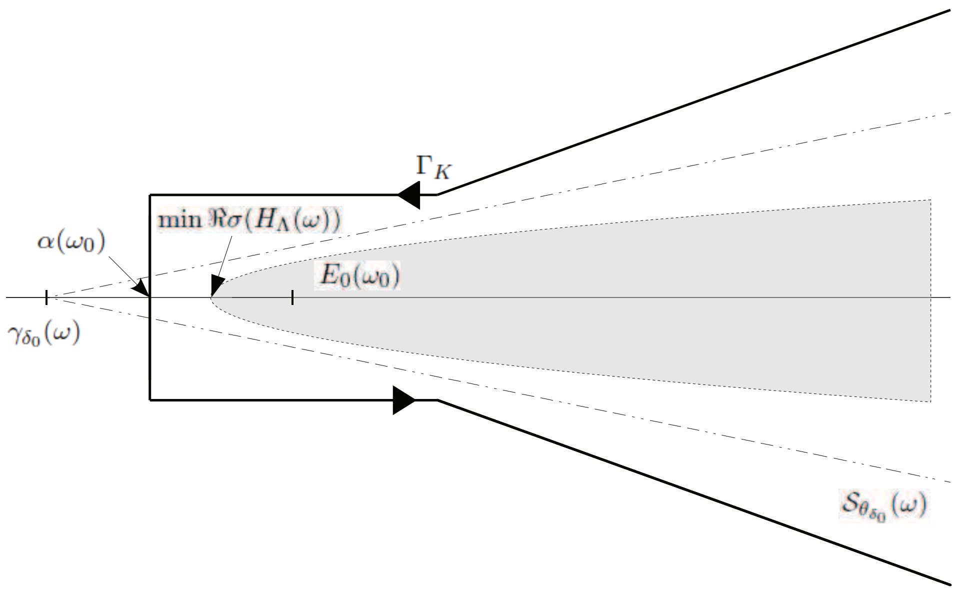
D'après le Lemme 2.6, le contour Γ_K est inclus dans le domaine d'holomorphie de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot)$ et contourne la demi-droite $[E_0(\omega_0), +\infty)$. Soit $\theta_{\delta_0}(\omega')$ le demi-angle du secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\omega')$ pour $\omega' \in \mathbb{C}$ (voir (1.33)). En utilisant successivement les inégalités (1.30), (1.32) et (1.34), soient $r_{\omega_0,j} > 0$ avec $j \in \{1, 2, 3\}$, des réels satisfaisant :

$$a_\infty^2 r_{\omega_0,1}^2 = E_0(\omega_0) - \alpha(\omega_0) > 0 \quad (2.20)$$

$$c r_{\omega_0,2} a_\infty \sqrt{(\xi_K + 1) + c' + \frac{r_{\omega_0,2}^2}{2} a_\infty^2} \leq \frac{\eta_K}{3\beta} \quad (2.21)$$

$$\frac{\pi}{4} \geq |\theta_{\delta_0}(\omega_0 \pm i r_{\omega_0,3})| \quad \Longrightarrow \quad 1 > c r_{\omega_0,3} a_\infty \frac{\sqrt{E_0(\omega_0) + \delta_0 + c'}}{\delta_0} \quad (2.22)$$

Posons $r_{\omega_0} := \min\{r_{\omega_0,1}, r_{\omega_0,2}, r_{\omega_0,3}\} > 0$ et notons $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$ le disque ouvert centré en ω_0 et de rayon r_{ω_0}. Avec ce choix de r_{ω_0}, $\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, le spectre de l'opérateur $H_\Lambda(\omega)$ (inclus dans la parabole "grisée" ci-dessous, cf. (1.32)) se trouve à l'intérieur de Γ_K. En effet pour tout $\omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, $\alpha(\omega_0) < \min \Re\sigma(H_\Lambda(\omega))$ (d'après (2.20)) et lorsque $\Re\sigma(H_\Lambda(\omega)) \leq \xi_K + 1$ alors $\max|\Im\sigma(H_\Lambda(\omega))| \leq \frac{\eta_K}{3\beta}$ (d'après (2.21)). Enfin, pour tout $\Re\xi \geq \xi_K + 1$, le secteur $\mathcal{S}_{\theta_{\delta_0}}(\omega)$ se trouve à l'intérieur du contour Γ_K (d'après (2.22)). La figure ci-dessous représente la configuration obtenue pour un $\omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$.



Le calcul fonctionnel de Dunford-Schwartz (voir [42]) permet alors de définir :

$$\forall\, z \in K,\ \forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0}), \quad L(\beta,\omega,z,\epsilon) := \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1} \tag{2.23}$$

L'intégrale dans (2.23) est absolument convergente dans $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ en vertu de la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)$ sur Γ_K et le fait que $\forall \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, $\|(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\|$ est uniformément borné en ω (et même en $\xi \in \Gamma_K$). Cela est évident pour tout $\xi \in \Gamma_K$ tel que $\Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K + 1]$ vu le paramétrage du contour. Et pour tout $\xi \in \Gamma_K$ tel que $\Re\xi \geq \xi_K + 1$, un simple argument géométrique permet d'obtenir :

$$\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0}), \quad \|(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\xi - \xi_K \mp i\frac{\eta_K}{2\beta}|}$$

Comme pour chaque $\xi \in \Gamma_K$, la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}$ est $\mathfrak{B}$-analytique sur $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale assure que pour tout $z \in K$, la famille d'opérateurs $\{L(\beta,\omega,z,\epsilon),\ \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})\}$ est $\mathfrak{B}$-analytique. Et puisque pour tout $\omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0}) \cap \mathbb{R}$, $L(\beta,\omega,z,\epsilon)$ coïncide avec $\ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right)$, alors la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto L(\beta,\omega,z,\epsilon)$ n'est autre que le prolongement analytique de $\ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\cdot\,)}\right)$ sur le disque ouvert $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$.

Montrons maintenant que $D_K(\omega_0, r_{\omega_0}) \ni \omega \mapsto \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right)$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique. Soit $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega_0))$ satisfaisant $\xi_0 < \gamma_{\delta_0}(\omega_0 \pm i r_{\omega_0})$ avec $|\xi_0|$ choisi suffisamment grand et tel que $\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega))$. Par la première équation résolvante itérée 2 fois suivi du théorème intégral de Cauchy : $\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$ et $\forall\, z \in K$,

$$\ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, (\xi-\xi_0)^2 \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\right)(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-2}$$

Par les mêmes arguments que ci-dessus, pour tout $z \in K$, la famille d'opérateurs entre parenthèses est une famille d'opérateurs $\mathfrak{B}$-analytique en ω dans $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$. Aussi d'après le Corollaire 2.12, il existe un voisinage $\nu(\omega_0)$ de ω_0 tel que la fonction à valeurs opérateurs $\nu(\omega_0) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-2}$ soit $\mathfrak{I}_1$-analytique. Il ne reste plus qu'à appliquer (ii) du Lemme 2.11 qui donne finallement que pour tout $z \in K$, la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right)$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique sur $\mathcal{V}_K(\omega_0) := \nu(\omega_0) \cap D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$.

■

Remarque 2.13. La démonstration de la Proposition 2.8 permet de mettre en évidence :
(i). Le voisinage $\mathcal{V}_K(\omega_0)$ est d'autant plus "petit" que $|\omega_0|$ est grand. Cela provient de (2.22) où apparaît $E_0(\omega_0)$ sachant (1.29). Dans la limite $|\omega_0| \to +\infty$, $\mathcal{V}_K(\omega_0)$ se réduit à un point.
(ii). Le voisinage $\mathcal{V}_K(\omega_0)$ dépend implicitement du domaine Λ. Ceci est une conséquence de (2.20), (2.21) et (2.22) : plus la quantité $a_\infty := \sup_{\mathbf{x}\in\Lambda} |\mathbf{a}(\mathbf{x})|$ est grande plus r_{ω_0} doit être choisi petit. Dans la limite $|\Lambda| \to +\infty$, on a alors $r_{\omega_0} \to 0$.

2.3 Analycité jointe par rapport aux variables ω et z

Ce paragraphe est consacré à la preuve du Théorème 2.1 basée sur le théorème d'holomorphie séparée de Hartog (voir par ex. [51] pour un énoncé détaillé) :

Théorème 2.14. *Théorème d'Hartog*
Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Supposons que f soit analytique en chaque variable z_j lorsque les autres variables z_k pour $k \neq j$ sont fixées. Alors f est analytique en ses n variables.

Il suffit maintenant d'appliquer directement le théorème ci-dessus étant donné le Corollaire 2.9 et l'extension de la Proposition 2.5 ci-dessous :

Proposition 2.15. *Soient $\beta > 0$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$ un sous-ensemble compact. Alors il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_{K,\Lambda}$ de l'axe des réels, tel que $\forall\, \omega \in \mathcal{N}_{K,\Lambda}$, la pression grand canonique à volume fini soit analytique par rapport à la variable z sur K.*

Preuve Proposition 2.15.
Soient $\beta > 0$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$ un sous-ensemble compact. Soit α satisfaisant $-\infty < \alpha < E_0(0)$ et tel que $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha)$. Avec $\eta_K > 0$ et $\xi_K > E_0(0)$ les réels du Lemme 2.6, soit Γ_K (cf. (2.12) avec $\varsigma = \pi/3$) le contour orienté positivement défini par :

$$\Gamma_K = \Big\{\Re\xi = \alpha,\ \Im\xi \in \Big[-\frac{\eta_K}{2\beta}, \frac{\eta_K}{2\beta}\Big]\Big\} \cup \Big\{\Re\xi \in [\alpha, \xi_K),\ \Im\xi = \pm\frac{\eta_K}{2\beta}\Big\} \cup \\ \cup \Big\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg\Big(\xi - \xi_K \mp i\frac{\eta_K}{2\beta}\Big) = \pm\frac{\pi}{3}\Big\}$$

Soient $\hat{r}_1 > 0$ un réél vérifiant $a_\infty^2 \hat{r}_1^2 := E_0(0) - \alpha$ et $O := \big\{\omega_0 \in \mathbb{R} : E_0(\omega_0) - a_\infty^2 \hat{r}_1^2 \leq \xi_K + 1\big\}$. Soient $\hat{r}_2 := \min_{\omega_0 \in O} r_{\omega_0,2} > 0$ avec $r_{\omega_0,2} > 0$ défini en (2.21) et pour chaque $\omega_0 \in \mathbb{R}$, soit $r_{\omega_0,3} > 0$ défini en (2.22). Posons $\hat{r}_{\omega_0} := \min\{\hat{r}_1, \hat{r}_2, r_{\omega_0,3}\} > 0$ et désignons par $D_K(\omega_0, \hat{r}_{\omega_0})$ le disque ouvert centré en ω_0 et de rayon $\hat{r}_{\omega_0}$. Considérons maintenant $\mathcal{N}_K := \cup_{\omega_0 \in \mathbb{R}} D_K(\omega_0, \hat{r}_{\omega_0})$. Alors pour tout $\omega \in \mathcal{N}_K$, le spectre de $H_\Lambda(\omega)$ est à l'intérieur de Γ_K et $\forall\, \xi \in \Gamma_K$ tel que $\Re\xi \geq \xi_K + 1$, le secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\omega)$ se trouve à l'intérieur de Γ_K. Le calcul fonctionnel de Dunford-Schwartz (voir [42]) permet de définir dans $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$:

$$\forall\, \omega \in \mathcal{N}_K,\ \forall\, z \in K, \quad \ln\big(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\big) := \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$$

Reste à prouver que $\forall\, \omega \in \mathcal{N}_K$, la famille $\{\ln\big(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\big),\ z \in K\}$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique. Soient $\omega \in \mathcal{N}_K$ et $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega))$ tel que $\xi_0 < \gamma_\delta(0 \pm i\hat{r}_1)$ avec $|\xi_0|$ choisi assez grand. Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve de la Proposition 1.39 :

$$\forall\, z \in K,\ \ln\big(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\big) = \left(\frac{i}{2\pi}\int_{\hat{\Gamma}_K} \mathrm{d}\xi\, (\xi - \xi_0)^2 \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}\right)(H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-2}$$

On finit la preuve en utilisant les mêmes arguments que ceux menant à (2.16) sachant que $\|(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}\|$ est uniformément borné en ξ et en ω (cf. preuve Proposition 2.8).

■

2.4 Convexité par rapport à la variable μ

On établit ici un résultat de convexité qui nous sera utile dans le chapitre 5.

Proposition 2.16. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient $J_{+1} = (-\infty, +\infty)$ et $J_{-1} = J_{-1}(\omega_0) = (-\infty, E_0(\omega_0))$. Alors $J_\epsilon \ni \mu \mapsto P_\Lambda(\beta, \omega_0, \mu, \epsilon)$ est une fonction convexe.*

Preuve Proposition 2.16.
La démonstration repose sur la relation (1.65) liant la fonction de partition grand canonique aux fonctions de partition canonique.
Soient $\mu_i \in J_\epsilon$, avec $i \in \{1,2\}$. Soient $\gamma \in (0,1)$ un réél et $N \geq 1$ entier. On a :

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{n\beta(\gamma\mu_1+(1-\gamma)\mu_2)} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon) = \sum_{n=0}^{N} \left[\mathrm{e}^{n\beta\mu_1} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon)\right]^\gamma \left[\mathrm{e}^{n\beta\mu_2} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon)\right]^{1-\gamma} \tag{2.24}$$

Comme $\gamma \in (0,1)$, alors $p := \frac{1}{\gamma} > 1$ et $q := \frac{1}{1-\gamma} > 1$ vérifient : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
A partir de (2.24), l'inégalité de Hölder permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} &\left[\mathrm{e}^{n\beta\mu_1} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon)\right]^\gamma \left[\mathrm{e}^{n\beta\mu_2} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon)\right]^{1-\gamma} \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{n\beta\mu_1} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon)\right)^\gamma \left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{n\beta\mu_2} Z_\Lambda(\beta,\omega_0,n,\epsilon)\right)^{1-\gamma}\end{aligned} \tag{2.25}$$

Puisque $\gamma\mu_1 + (1-\gamma)\mu_2 \in J_\epsilon$, en prenant la limite $N \to \infty$ dans (2.25) sachant (1.65) :

$$\Xi_\Lambda\big(\beta,\omega_0,\gamma\mu_1+(1-\gamma)\mu_2,\epsilon\big) \leq \Big(\Xi_\Lambda(\beta,\omega_0,\mu_1,\epsilon)\Big)^\gamma \Big(\Xi_\Lambda(\beta,\omega_0,\mu_2,\epsilon)\Big)^{1-\gamma}$$

Puis en utilisant la définition de la pression grand canonique à volume fini (1.50) :

$$P_\Lambda\big(\beta,\omega_0,\gamma\mu_1+(1-\gamma)\mu_2,\epsilon\big) \leq \gamma P_\Lambda(\beta,\omega_0,\mu_1,\epsilon) + (1-\gamma)P_\Lambda(\beta,\omega_0,\mu_2,\epsilon)$$

L'inégalité ci-dessus est valable pour tout $\gamma \in [0,1]$, ce qui achève la preuve.

■

2.5 Transfert des propriétés d'analycité

Dans de ce paragraphe, on transfére les propriétés d'analycité de la pression grand canonique sur la fonction de partition et la densité grand canonique à volume fini.

En vertu de (1.50), pour tout $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$, le prolongement analytique au domaine $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ de la fonction de partition grand canonique à volume fini peut s'écrire :

$$\Xi_\Lambda(\beta,\omega_0,z,\epsilon) = \exp\Big(\epsilon\mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \ln\big(\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}\big)\Big) = \big(\det\{\mathbb{1} + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega_0)}\}\big)^\epsilon \tag{2.26}$$

A partir du théorème 2.1 et compte-tenu du fait que la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ est entière sur $\mathbb{C}$, on a immédiatement le corollaire suivant :

<u>**Corollaire**</u> **2.17.** *Soit $\beta > 0$. Alors pour chaque ensemble ouvert et borné $\mathcal{K}$ tel que $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_\epsilon$, $\epsilon = \pm$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_\Lambda$ de l'axe des réels tel que la fonction de partition grand canonique $\Xi_\Lambda(\beta,\omega,z,\epsilon)$ soit jointement analytique par rapport aux variables (ω,z) sur $\mathcal{N}_\Lambda \times \mathcal{K}$*

En vertu de (1.51) et (2.3), pour tout $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$, le prolongement analytique au domaine $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ de la densité grand canonique à volume fini peut s'écrire :

$$\rho_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) := \beta z \partial_z P_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \frac{1}{|\Lambda|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda)} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\xi}/z + \epsilon} (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \tag{2.27}$$

où $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ est un sous-ensemble compact tel que $z \in K$ et Γ_K est un contour orienté positivement du type (2.12). Notons que $\xi \mapsto (\mathrm{e}^{\beta\xi}/z + \epsilon)^{-1}$ n'est autre que la fonction distribution de Bose-Einstein lorsque $\epsilon = -1$ et de Fermi-Dirac lorsque $\epsilon = +1$.

On a immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.18. *Soit $\beta > 0$. Alors pour chaque ensemble ouvert et borné $\mathcal{K}$ tel que $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_\epsilon$, $\epsilon = \pm$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_\Lambda$ de l'axe des réels tel que la densité grand canonique à volume fini $\rho_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)$ soit jointement analytique par rapport aux variables (ω, z) sur $\mathcal{N}_\Lambda \times \mathcal{K}$*

3 Susceptibilités grand canonique à volume fini

Cette section est consacrée à la preuve du Théorème 2.2.

Rappelons que les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini sont définies comme les dérivées partielles par rapport à l'intensité du champ magnétique B de la pression grand canonique à volume fini (voir Définition 1.33, chapitre 1). En vertu de la Proposition 2.8, ces quantités sont bien définies : pour tout $\beta > 0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}_\Lambda^n(\beta, \omega_0, z, \epsilon) := \frac{\partial^n P_\Lambda}{\partial B^n}(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\partial^n P_\Lambda}{\partial \omega^n}(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$$

A partir du Théorème 2.1, on a immédiatement le résultat d'analycité globale :

Corollaire 2.19. *Soit $\beta > 0$. Alors pour chaque ensemble ouvert et borné $\mathcal{K}$ tel que $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_\epsilon$, $\epsilon = \pm 1$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{N}_\Lambda$ de l'axe des réels tel que les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini $\mathcal{X}_\Lambda^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$ soient jointement analytiques par rapport aux variables (ω, z) sur $\mathcal{N}_\Lambda \times \mathcal{K}$.*

Rappelons quelques notations introduites dans la section "résultats principaux".
Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_\Lambda(\omega_0))$. Soient $S_{j,\Lambda}(\omega_0, \xi)$ les opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$S_{1,\Lambda}(\omega_0, \xi) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1}, \quad S_{2,\Lambda}(\omega_0, \xi) = \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1}$$

Puisque $(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} L^2(\Lambda) \to D(H_\Lambda(\omega_0)) \subset \mathcal{Q}(H_\Lambda(0))$ (cf. paragraphe 3.2, chapitre 1), $S_{1,\Lambda}(\omega_0, \xi) \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ en vertu de (1.28). Et même $S_{2,\Lambda}(\omega_0, \xi) \in \mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$ en vertu de (1.47) (suivi de la première équation résolvante).
Pour tout couple $(\omega, \omega_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, introduisons :

$$S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi) = d\omega S_{1,\Lambda}(\omega_0, \xi) + (d\omega)^2 S_{2,\Lambda}(\omega_0, \xi) \quad d\omega = \omega - \omega_0$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1,2\}^k$, soit la famille d'opérateurs dans $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$:

$$J_{k,\Lambda}(i_1, \ldots, i_k)(\omega_0, \xi) := (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \prod_{m=1}^{k} S_{i_m,\Lambda}(\omega_0, \xi)$$

Et pour tout entier $n \geq k \geq 1$, soit $\chi_k^n(i_1, \ldots, i_k)$ la fonction caractéristique définie par :

$$\chi_k^n(i_1, \ldots, i_k) := \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 + \ldots + i_k = n \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

La preuve du Théorème 2.2 repose essentiellement sur le résultat suivant :

Proposition 2.20. *Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_\Lambda(\omega_0))$. Soit $\mathcal{V}_{\xi,\Lambda}(\omega_0)$ un voisinage complexe de ω_0 sur lequel la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique. Alors pour tout $\omega \in \mathcal{V}_{\xi,\Lambda}(\omega_0)$,*

$$(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \tag{2.28}$$

avec pour tout entier $n \geq 1$, en tant qu'opérateurs dans $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$:

$$\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} := n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1, \ldots, i_k) J_{k,\Lambda}(i_1, \ldots, i_k)(\omega_0, \xi) \tag{2.29}$$

Preuve Proposition 2.20.
Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_\Lambda(\omega_0))$. Puisque $\{H_\Lambda(\omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille analytique de type (A), il existe un voisinage complexe $\nu_\xi(\omega_0)$ de ω_0 tel que $\forall\, \omega \in \nu_\xi(\omega_0)$, $\xi \in \rho(H_\Lambda(\omega))$ et $\nu_\xi(\omega_0) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ est $\mathfrak{B}$-analytique (voir par ex. [57]). La seconde équation résolvante itérée n-fois donne au sens des opérateurs bornés (et même de Hilbert-Schmidt) :

$$\forall\, \omega \in \nu_\xi(\omega_0), \quad (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1} = (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} + (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi)^k + \\ + (-1)^{n+1} (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1} S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi)^{n+1} \tag{2.30}$$

Utilisant que $S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi) = d\omega S_{1,\Lambda}(\omega_0, \xi) + (d\omega)^2 S_{2,\Lambda}(\omega_0, \xi)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} (d\omega)^{i_1 + \cdots + i_k} \prod_{m=1}^{k} S_{i_j,\Lambda}(\omega_0, \xi)$$

Et puisque pour $i_j \in \{1,2\}$, $k \leq i_1 + \cdots + i_k \leq 2k$; en utilisant la fonction indicatrice :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi)^k = \sum_{l=1}^{2n} (d\omega)^l \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^l(i_1, \ldots, i_k) \prod_{m=1}^{k} S_{i_j,\Lambda}(\omega_0, \xi)$$

En décomposant le membre de droite en deux sommes (l'une dont l'indice l varie de 1 à n, l'autre de $n+1$ à $2n$) et en explicitant l'opérateur $S_\Lambda(\omega, \omega_0, \xi)^{n+1}$ par les mêmes arguments que ceux utilisés ci-dessus, (2.30) peut alors se réécrire :

$$\forall\, \omega \in \nu_\xi(\omega_0), \quad (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1} = (H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1} + \sum_{k=1}^{n} (d\omega)^k \mathcal{S}_{k,\Lambda}(\omega_0, \xi) + \mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\omega, \omega_0, \xi) \tag{2.31}$$

avec respectivement :

$$\mathcal{S}_{k,\Lambda}(\omega_0,\xi) := \sum_{l=1}^{k}(-1)^l \sum_{i_j\in\{1,2\}^l} \chi_l^k(i_1,\dots,i_l) J_{l,\Lambda}(i_1,\dots,i_l)(\omega_0,\xi) \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\omega,\omega_0,\xi) := \\
&\quad (d\omega)^{n+1}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}(d\omega)^k \sum_{l=1}^{n}(-1)^l \sum_{i_j\in\{1,2\}^l} \chi_l^{k+n+1}(i_1,\dots,i_l) J_{l,\Lambda}(i_1,\dots,i_l)(\omega_0,\xi) + \\
&\quad + (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}(d\omega)^k \sum_{i_j\in\{1,2\}^{n+1}} \chi_{n+1}^{k+n+1}(i_1,\dots,i_{n+1})(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\prod_{m=1}^{n+1} S_{i_j,\Lambda}(\omega_0,\xi)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

où on a utilisé dans (2.32) que $\chi_l^k(i_1,\dots,i_l) = 0$ lorsque $k < l$.
Montrons maintenant que pour ω suffisamment proche de ω_0 :

$$\|\mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\omega,\omega_0,\xi)\| = \mathcal{O}(|d\omega|^{n+1}) \tag{2.34}$$

D'une part $(H_\Lambda(\omega_0)-\xi)^{-1}$ est uniformément borné. Idem pour $S_{2,\Lambda}(\omega_0,\xi)$. En vertu de (1.28), on peut voir qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|S_{1,\Lambda}(\omega_0,\xi)\| \leq c(1+|\xi|)$. Ainsi $\forall\, l \in \{1,\dots,n\}$, il existe un polynôme $p_l(|\xi|)$ tel que :

$$\forall\, i_j \in \{1,2\},\quad \|J_{l,\Lambda}(i_1,\dots,i_l)(\omega_0,\xi)\| \leq \|(H_\Lambda(\omega_0)-\xi)^{-1}\| \prod_{m=1}^{l} \|S_{i_m,\Lambda}(\omega_0,\xi)\| \leq p_l(|\xi|) \tag{2.35}$$

l'indice l dans $p_l(|\xi|)$ signifiant que son degré maximal est proportionnel à l.
D'autre part pour tout $\omega \in \nu_\xi(\omega_0)$, $(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}$ est uniformément borné en ξ (et ω) (cf. preuve Proposition 2.8). Par les mêmes arguments que ceux utilisés ci-dessus, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $p_n(|\xi|)$ tel que pour tout $\omega \in \nu_\xi(\omega_0)$:

$$\forall\, i_j \in \{1,2\},\quad \|(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\| \prod_{m=1}^{n+1} \|S_{i_m,\Lambda}(\omega_0,\xi)\| \leq p_n(|\xi|) \tag{2.36}$$

Etant donné (2.33), (2.35) et (2.36) prouvent (2.34) pour ω suffisamment proche de ω_0.
Ainsi par construction, $\mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\cdot\,,\omega_0,\xi)$ satisfait la propriété que ses n premières dérivées partielles (par rapport à la variable ω) évaluées en ω_0 sont égales à 0. Il s'ensuit alors de (2.31) l'identification dans $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$:

$$\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}(H_\Lambda(\omega_0)-\xi)^{-1} := n!\,\mathcal{S}_{n,\Lambda}(\omega_0,\xi) \tag{2.37}$$

D'autre part d'après la Proposition 2.10, il existe un voisinage complexe $\mathcal{V}_\xi(\omega_0)$ de ω_0 sur lequel la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique. Par unicité du développement en série entière sur $\mathcal{V}_\xi(\omega_0)\cap\nu_\xi(\omega_0)$, (2.37) reste valable dans $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$.

■

Preuve Théorème 2.2.
Soient $\beta > 0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ compact tel que $z \in K$. Soient Γ_K le contour défini en (2.19) et $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$ le disque de centre ω_0 et de rayon $r_{\omega_0} > 0$ introduit dans la preuve de la Proposition 2.8. On a vu que pour tout $\xi \in \Gamma_K$, la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ est $\mathfrak{B}$-analytique sur $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$.
A partir de (2.23), $\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, on a au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$\ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z, \xi)\left(\sum_{k=0}^{n} (d\omega)^k \mathcal{S}_{k,\Lambda}(\omega_0, \xi) + \mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\omega, \omega_0, \xi)\right) \tag{2.38}$$

avec $\mathcal{S}_{k,\Lambda}(\omega_0, \xi)$ et $\mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\omega, \omega_0, \xi)$ définis respectivement par (2.32) et (2.33).
Comme la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right)$ est aussi $\mathfrak{B}$-analytique sur $D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$ (conséquence du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale dans (2.23)), alors pour assurer l'identification (2.10) dans $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$, la seule chose à vérifier est que pour ω suffisamment proche de ω_0 :

$$\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \|\mathcal{S}_{n+1,\Lambda}(\omega, \omega_0, \xi)\| = \mathcal{O}(|d\omega|^{n+1}) \tag{2.39}$$

D'une part l'estimation (2.35) est valable $\forall\, \xi \in \Gamma_K$ car $(H_\Lambda(\omega_0) - \xi)^{-1}$ est uniformément borné. D'après le Lemme 2.7, il existe une constante $c = c(\beta, K, l) > 0$ telle que :

$$\forall\, z \in K, \quad \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \|J_{l,\Lambda}(i_1, \ldots, i_l)(\omega_0, \xi)\| \leq c < +\infty$$

D'autre part, comme pour tout $\omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, $(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ est uniformément borné en ξ (et ω), l'estimation (2.36) est encore valable $\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$. D'après le Lemme 2.7, il existe une autre constante $c = c(\beta, K, n) > 0$ telle que $\forall\, z \in K$ et $\forall\, \omega \in D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$:

$$\forall\, i_j \in \{1, 2\}, \quad \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \|(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}\| \prod_{m=1}^{n+1} \|S_{i_m,\Lambda}(\omega_0, \xi)\| \leq c < +\infty$$

Etant donné (2.33), ces deux dernières estimations prouvent (2.39) pour ω proche de ω_0.
Enfin, en utilisant la preuve de la Proposition 2.8, il existe un voisinage complexe $\mathcal{V}(\omega_0)$ de ω_0 sur lequel la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto \ln\left(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)}\right)$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique. Par unicité du développement en série enitère sur $\mathcal{V}(\omega_0) \cap D_K(\omega_0, r_{\omega_0})$, l'identification (2.10) reste valable dans $\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$.

■

4 Appendice 1 : Energie libre et susceptibilités canonique

Ici les paramètres extérieurs (fixés) sont ceux du formalisme canonique de la mécanique statistique quantique, à savoir "l'inverse" de la température $\beta > 0$, le nombre de particules $n_\Lambda \geq 1$ et $|\Lambda|$ le volume du confinement du gaz. La densité de particules $\rho_0 > 0$ (fixée) est liée au nombre de particules par la relation : $n_\Lambda = \rho_0|\Lambda|$.

Rappelons (cf. paragraphe 5.2, chapitre 1) que pour tout $\beta > 0$, $\rho_0 > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$, l'énergie libre (canonique) de Helmholtz à volume fini est définie par :

$$f_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) := -\frac{1}{\beta}\ln\left(Z_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon)\right) \tag{2.40}$$

où $Z_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon)$ désigne la fonction de partition canonique du gaz quantique.

Le but de cet appendice est de transporter la propriété d'analycité, dans un voisinage complexe de l'axe réél, de $\omega \mapsto P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)$ sur l'énergie libre de Helmholtz. On utilise pour cela une relation "intégrale" liant la fonction de partition canonique à la pression grand canonique (voir par ex. [27]). Les deux principaux ingrédients pour établir cette relation sont : l'analycité de $z \mapsto P_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)$ dans un voisinage complexe de $z = 0$ et la relation liant la fonction de partition grand canonique aux fonctions de partition canonique :

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0)) \cap \mathbb{R}_+^*, \quad \Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Z_\Lambda(\beta, \omega_0, n, \epsilon) \tag{2.41}$$

Voici le résultat principal de cet appendice qui est un corollaire du Théorème 2.1 :

Corollaire 2.21. *Soient $\beta > 0$ et $\rho_0 > 0$ fixés. Alors il existe un voisinage $\mathcal{P}_\Lambda$ de l'axe des réels tel que l'énergie libre canonique soit analytique par rapport à ω sur $\mathcal{P}_\Lambda$.*

Justifié par ce résultat, on peut définir les susceptibilités généralisées canonique à volume fini comme les dérivées partielles de l'énergie libre spécifique (i.e. énergie libre par unité de volume) par rapport à l'intensité du champ magnétique B (cf. Définition 1.43) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{M}_\Lambda^n(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) := -\frac{1}{|\Lambda|}\left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\partial^n f_\Lambda}{\partial \omega^n}(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon)$$

A partir du Corollaire 2.21, il vient immédiatement :

Corollaire 2.22. *Soient $\beta > 0$ et $\rho_0 > 0$ fixés. Alors il existe un voisinage $\mathcal{P}_\Lambda$ de l'axe des réels tel que $\mathcal{P}_\Lambda \ni \omega \mapsto \mathcal{M}_\Lambda^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$ soient analytiques.*

Le reste de cette section est consacré à la preuve du Corollaire 2.21.
Par la même méthode que celle utilisée dans [27], on établit d'abord :

Proposition 2.23. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient $\rho_0 > 0$ et $n_\Lambda = \rho_0|\Lambda|$ le nombre de particules. La fonction de partition canonique est liée à la pression grand canonique par :*

$$Z_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\, \frac{1}{z}\left[\frac{\exp\left(\frac{\beta}{\rho_0} P_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)\right)}{z}\right]^{n_\Lambda} \tag{2.42}$$

où $\mathcal{C}$ est un contour fermé autour de 0 et inclus dans le domaine d'analycité $\mathcal{D}_\epsilon$ de $P_\Lambda(\beta, \omega_0, \cdot\,, \epsilon)$. De plus, $Z_\Lambda(\beta, \cdot\,, \rho_0, \epsilon)$ peut être prolongé analytiquement sur un voisinage complexe $\mathcal{V}_\Lambda$ de l'axe des réels.

Preuve Proposition 2.23.
Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{g}_\epsilon : \mathcal{D}_\epsilon \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_\epsilon \setminus \{0\}, \quad \mathfrak{g}_\epsilon(z) := \frac{\Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)}{z^{n_\Lambda + 1}}$$

avec $\Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$ la fonction de partition grand canonique (2.26). Compte-tenu du Corollaire 2.17, $\Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, \cdot\,, \epsilon)$ est analytique sur $\mathcal{D}_\epsilon$ (comme composée de fonctions analytiques). Par conséquent, $\mathfrak{g}_\epsilon(\cdot\,)$ est analytique sur $\mathcal{D}_\epsilon \setminus \{0\}$.

Soit $\mathcal{C}$ un contour inclus dans le domaine d'analycité $\mathcal{D}_\epsilon \setminus \{0\}$ de $\mathfrak{g}_\epsilon(\cdot)$ et contournant la singularité (non essentielle) 0. Par exemple on peut choisir :

$$\mathcal{C} := \left\{re^{i\phi},\ r = \mathrm{e}^{\beta E_0(0)}/2,\ \phi \in [0, 2\pi]\right\}$$

Le théorème des résidus permet alors d'écrire :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\, \mathfrak{g}_\epsilon(z) = \mathrm{Res}(\mathfrak{g}_\epsilon, 0) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Res}(\mathfrak{g}_\epsilon, 0) = \frac{1}{n_\Lambda!} \left.\frac{\partial^{n_\Lambda} \Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)}{\partial z^{n_\Lambda}}\right|_{z=0} \tag{2.43}$$

La relation (2.41), qui peut être étendue pour des z complexes avec $|z|$ suffisamment petit (par unicité du développement en série entière), permet l'identification :

$$\left.\frac{\partial^{n_\Lambda} \Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)}{\partial z^{n_\Lambda}}\right|_{z=0} = n_\Lambda!\, Z_\Lambda(\beta, \omega_0, n_\Lambda, \epsilon) \tag{2.44}$$

En insérant (2.44) dans (2.43) puis en utilisant la formule (2.26), on obtient (2.42).
Construisons un prolongement analytique de $Z_\Lambda(\beta, \cdot\,, n_\Lambda, \epsilon)$ sur un voisinage de l'axe des réels. D'après le Corollaire 2.17, pour tout $z \in \mathcal{C}$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{V}_\Lambda$ de l'axe des réels sur lequel la fonction de partition grand canonique $\Xi_\Lambda(\beta, \cdot\,, z, \epsilon)$ est analytique. Ceci assure que pour tout compact $\Omega \subset \mathcal{V}_\Lambda$, il existe $c = c(\beta, \Omega, \mathcal{C}, |\Lambda|) > 0$ telle que :

$$\sup_{\omega \in \Omega} |\Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)| \leq c$$

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale garantit alors que la fonction :

$$\omega \mapsto M_\Lambda(\beta, \omega, n_\Lambda, \epsilon) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\, \frac{\Xi_\Lambda(\beta, \omega, z, \epsilon)}{z^{n_\Lambda+1}} \tag{2.45}$$

est analytique sur $\mathcal{V}_\Lambda$. Puisque pour $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $M_\Lambda(\beta, \omega_0, n_\Lambda, \epsilon)$ coïncide avec $Z_\Lambda(\beta, \omega_0, n_\Lambda, \epsilon)$, alors (2.45) n'est autre que le prolongement analytique de $Z_\Lambda(\beta, \cdot\,, n_\Lambda, \epsilon)$ sur $\mathcal{V}_\Lambda$.

■

Remarque 2.24. Notons que (2.41) et (2.42) assure que (2.40) est bien définie puisque :

$$0 < Z_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \leq z^{-\rho_0|\Lambda|}\Xi_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon) < +\infty$$

Preuve Corollaire 2.21.
Soient $\beta > 0$ et $\rho_0 > 0$. Soit $\mathcal{V}_\Lambda$ un voisinage complexe de l'axe des réels sur lequel $Z_\Lambda(\beta, \cdot\,, \rho_0, \epsilon)$ est analytique (par rapport à la variable ω). D'après la Remarque 2.24, pour tout $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $Z_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) > 0$. Il s'ensuit par continuité qu'il existe un voisinage complexe $\mathcal{W}$ de l'axe des réels, tel que pour tout $\omega \in \mathcal{W}$ on ait $\Re Z_\Lambda(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) > 0$. Puisque la fonction $z \mapsto \ln z$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, par composition de fonctions analytiques, $\mathcal{V}_\Lambda \cap \mathcal{W} \ni \omega \mapsto \ln(Z_\Lambda(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon))$ est également analytique.

■

5 Appendice 2 : Grandeurs grand canonique à densité fixée

En général, les grandeurs définies dans le formalisme canonique sont difficilement exploitables. Il suffit pour s'en convaincre de regarder le cas de l'énergie libre (2.40) compte-tenu de (2.42). La raison principale est que la fonction de partition canonique ne peut s'exprimer comme un produit de sommes indépendantes (contrairement à la fonction de partition grand canonique). Il n'est alors pas possible d'exprimer les grandeurs canonique à volume fini uniquement à partir des valeurs propres de l'Hamiltonien à une particule.

Un moyen utilisé pour pallier ce problème est de considérer les grandeurs grand canonique à densité de particules fixée. La définition de ces grandeurs peut être rigoureusement justifiée puisqu'elle repose sur la possibilité d'inverser la relation liant la fugacité à la densité grand canonique. Comme on va le voir ci-dessous, l'étude des grandeurs grand canonique à densité fixée caractéristiques du diamagnétisme peut être transférée à l'étude de la transformée de Legendre de la pression grand canonique à volume fini et de ses dérivées par rapport à l'intensité du champ magnétique.

Après avoir introduit la pression et les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini et à densitée fixée, l'objectif est de démontrer qu'il existe une relation liant la dérivée première (resp. seconde) par rapport à l'intensité du champ magnétique de la transformée de Legendre de la pression grand canonique à l'aimantation (resp. susceptibilité) grand canonique à densitée fixée.

Cependant il n'y a aucune connexion évidente à volume fini entre la transformée de Legendre de la pression grand canonique (et ses dérivées par rapport à B) et l'énergie libre canonique (et les susceptibilités généralisées canonique).

Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient I_ϵ et J_ϵ, avec $\epsilon = \pm 1$, les intervalles définis par :

$$I_{-1} = I_{-1}(\omega_0) := \mathcal{D}_{-1}(E_0(\omega_0)) \cap \mathbb{R}_+^* = (0, \mathrm{e}^{\beta E_0(\omega_0)}), \quad I_{+1} := \mathcal{D}_{+1}(E_0(\omega_0)) \cap \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty) \tag{2.46}$$

$$J_{-1} = J_{-1}(\omega_0) := (-\infty, E_0(\omega_0)), \quad J_{+1} := (-\infty, +\infty) \tag{2.47}$$

D'après (1.55), la densité de particules grand canonique à volume fini est définie par :

$$\forall\, \mu \in J_\epsilon, \quad \rho_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) := \frac{\partial P_\Lambda}{\partial \mu}(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\beta(\mu - e_j(\omega_0))}}{1 + \epsilon \mathrm{e}^{\beta(\mu - e_j(\omega_0))}} > 0$$

Supposons maintenant que la densité de particules $\rho_0 > 0$ soit fixée.
Soit $\mu_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ l'unique solution de l'équation $\rho_\Lambda(\beta, \omega_0, \mu, \epsilon) = \rho_0$.
Introduisons la pression grand canonique à volume fini et à densité fixée définie par :

$$P_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) := P_\Lambda\big(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda(\beta,\omega_0,\rho_0,\epsilon)}, \epsilon\big) \tag{2.48}$$

ainsi que les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini et à densité fixée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}_\Lambda^n(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}_\Lambda^n\big(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda(\beta,\omega_0,\rho_0,\epsilon)}, \epsilon\big) \tag{2.49}$$

La transformée de Legendre de la pression grand canonique à volume fini est définie par :

$$\mathcal{F}_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) := \sup_{\mu \in J_\epsilon} \big(\rho_0 \mu - P_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon)\big) \tag{2.50}$$

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

Proposition 2.25. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\rho_0 > 0$ la densité de particules fixée. Soit $\mu_\Lambda := \mu_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ l'unique solution de l'équation $\rho_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0$. Alors l'aimantation grand canonique à volume fini et à densité fixée vérifie :*

$$\mathcal{X}^1_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}^1_\Lambda\big(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda}, \epsilon\big) = -\left(\frac{q}{c}\right)\frac{\partial \mathcal{F}_\Lambda}{\partial \omega}(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \tag{2.51}$$

Et la susceptibilité grand canonique à volume fini et à densité fixée vérifie :

$$\mathcal{X}^2_\Lambda(\beta, \omega_0 = 0, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}^2_\Lambda\big(\beta, \omega_0 = 0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda}, \epsilon\big) = -\left(\frac{q}{c}\right)^2\frac{\partial^2 \mathcal{F}_\Lambda}{\partial \omega^2}(\beta, \omega_0 = 0, \rho_0, \epsilon) \tag{2.52}$$

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de la Proposition 2.25.
On justifie d'abord qu'il est possible d'inverser la relation liant la fugacité à la densité :

Lemme 2.26. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\rho_0 > 0$ fixé. Alors il existe un unique $\mu_\Lambda = \mu_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ solution de l'équation :*

$$\rho_\Lambda(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0 \tag{2.53}$$

Preuve Lemme 2.26.
Pour $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $\rho_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et même analytique réélle) par rapport à la variable μ. En effet, d'une part $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \mathrm{e}^{\beta\mu}$ est analytique réélle, d'autre part $I_\epsilon \ni z \mapsto \rho_\Lambda(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$ est analytique réélle d'après le Corollaire 2.15. Comme $I_\epsilon = \mathrm{e}^{\beta J_\epsilon}$, il s'ensuit que $J_\epsilon \ni \mu \mapsto P_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon)$ est analytique réélle comme composée de deux fonctions analytiques réélles (voir par ex. [64]). D'autre part :

$$\forall\, \mu \in J_\epsilon, \quad \frac{\partial \rho_\Lambda}{\partial \mu}(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \frac{\beta}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta(\mu - e_j(\omega_0))}}{\big(1 + \epsilon \mathrm{e}^{\beta(\mu - e_j(\omega_0))}\big)^2} > 0 \tag{2.54}$$

ce qui garantit que $\rho_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est strictement croissante sur son ensemble de définition. Le théorème d'inversion globale assure que $\rho_\Lambda(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de J_ϵ sur $(0, +\infty)$. Il s'ensuit alors l'existence d'un unique $\mu_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ vérifiant (2.53).

■

Ainsi la possibilité d'inverser la relation densité-fugacité permet de définir la pression et les susceptibilités généralisées grand canonique à densité fixée (voir (2.48) et (2.49)).

Preuve Proposition 2.25.
Soient $\beta > 0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 > 0$. Soit $\mu_\Lambda := \mu_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon)$ l'unique solution de (2.53).
La transformée de Legendre de la pression grand canonique à volume fini (2.50) s'écrit :

$$\mathcal{F}_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) = \rho_0\mu_\Lambda - P_\Lambda\big(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda}, \epsilon\big) = \rho_0\mu_\Lambda - P_\Lambda(\beta, \omega_0, \rho_0, \epsilon) \tag{2.55}$$

Montrons à partir de (2.55) que $\mathcal{F}_\Lambda(\beta, \cdot\,, \rho_0, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de ω_0. D'une part la fonction $(\omega, \mu) \mapsto \rho_\Lambda(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) - \rho_0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (cf. Corollaire 2.18) dans un voisinage de (ω_0, μ_Λ), solution de l'équation $\rho_\Lambda(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) - \rho_0 = 0$. D'autre part, $(\partial_\mu \rho_\Lambda)(\beta, \omega_0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda}, \epsilon) \neq 0$ (cf. (2.54)). Par conséquent, $\mu_\Lambda(\beta, \cdot\,, \rho_0, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de ω_0 d'après le théorème des fonctions implicites. Egalement $P_\Lambda(\beta, \cdot\,, \mathrm{e}^{\beta\cdot}, \epsilon)$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de (ω_0, μ_Λ). On utilise pour conclure que la composition de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ le sont encore. A partir de (2.55), en dérivant une fois :

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\big[\mathcal{F}_\Lambda(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon)\big]\Big|_{\omega=\omega_0} = \\ \rho_0\frac{\partial\mu_\Lambda}{\partial\omega}(\beta,\omega_0,\rho_0,\epsilon) - \frac{\partial P_\Lambda}{\partial\omega}\big(\beta,\omega_0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon\big) - \frac{\partial\mu_\Lambda}{\partial\omega}(\beta,\omega_0,\rho_0,\epsilon)\frac{\partial P_\Lambda}{\partial\mu}\big(\beta,\omega_0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon\big)$$

Il suffit d'utiliser que $(\partial_\mu P_\Lambda)(\beta,\omega_0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon) = \rho_\Lambda(\beta,\omega_0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon) = \rho_0$ pour obtenir (2.51). En dérivant encore une fois, il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\big[\mathcal{F}_\Lambda(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon)\big]\Big|_{\omega=0} = -\frac{\partial^2 P_\Lambda}{\partial\omega^2}\big(\beta,0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon\big) - \frac{\partial\mu_\Lambda}{\partial\omega}(\beta,0,\rho_0,\epsilon)\frac{\partial^2 P_\Lambda}{\partial\mu\partial\omega}\big(\beta,0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon\big)$$

Il reste à utiliser le théorème des fonctions implicites (sachant (2.54)) :

$$\frac{\partial\mu_\Lambda}{\partial\omega}(\beta,0,\rho_0,\epsilon) = -\frac{\partial\rho_\Lambda}{\partial\omega}(\beta,0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon)\cdot\left(\frac{\partial\rho_\Lambda}{\partial\mu}(\beta,0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon)\right)^{-1} \tag{2.56}$$

puis que $\omega \mapsto \rho_\Lambda(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon)$ est une fonction paire (cf. Lemme 4.16, chapitre 4) assurant ainsi que $(\partial_\omega\rho_\Lambda)(\beta,0,\mathrm{e}^{\beta\mu_\Lambda},\epsilon) = 0$.

■

6 Appendice 3 : Une autre preuve de la Proposition 2.10

Dans cet appendice, on donne une autre démonstration (davantage technique) de la Proposition 2.10 basée sur l'utilisation du semi-groupe de générateur $H_\Lambda(\omega)$ avec $\omega \in \mathbb{C}$. Rappelons tout d'abord quelques une de ses propriétés.

Semi-groupe de générateur $H_\Lambda(\omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$

Comme $\{H_\Lambda(\omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille d'opérateurs m-sectoriels (cf. Lemme 1.22), alors $H_\Lambda(\omega)$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu (voir par ex. [108]) :

$$W_\Lambda(\beta,\omega) := \mathrm{e}^{-\beta H_\Lambda(\omega)} \quad \beta \geq 0,\ \omega \in \mathbb{C}$$

D'autre part, $\{W_\Lambda(\beta,\omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille de semi-groupe quasi-borné (voir [57]) :

<u>Lemme</u> 2.27. *Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\forall\,\beta > 0, \quad \|W_\Lambda(\beta,\omega)\| \leq c\mathrm{e}^{-\beta\gamma_{\delta_0}(\omega)} \tag{2.57}$$

où $\gamma_{\delta_0}(\omega)$ désigne le vertex du secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\omega)$ (voir (1.33) pour sa définition).

Preuve Lemme 2.27.
Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Soient $\theta_{\delta_0}(\omega)$ et $\gamma_{\delta_0}(\omega)$ le demi-angle et le vertex respectivement du secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\omega)$. Soient $\eta > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ satisfaisant $\epsilon_0 < \frac{\pi}{2} - \theta_{\delta_0}(\omega)$.
Soit $\Gamma\cup\mathcal{C}$, avec $\Gamma = \Gamma^+\cup\Gamma^-$, un contour orienté positivement où $\Gamma^\pm$ et $\mathcal{C}$ sont définis par :

$$\Gamma^\pm := \left\{\xi \in \mathbb{C}\ :\ \arg(\xi - \gamma_{\delta_0}(\omega)) = \pm\Big(\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2}\Big) \text{ avec } |\xi - \gamma_{\delta_0}(\omega)| \geq \frac{\eta}{\beta}\right\} \tag{2.58}$$

$$\mathcal{C} := \left\{\xi \in \mathbb{C}\ :\ \xi = \frac{\eta}{\beta}\mathrm{e}^{i\phi} + \gamma_{\delta_0}(\omega),\ \phi \in \Big[\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2}, 2\pi - \Big(\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2}\Big)\Big]\right\} \tag{2.59}$$

Par construction, le secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\omega)$ se trouve à l'intérieur du contour $\Gamma\cup\mathcal{C}$. Par conséquent, le spectre (discret) de l'opérateur $H_\Lambda(\omega)$ est également à l'intérieur de $\Gamma\cup\mathcal{C}$. En vertu du calcul fonctionnel de Dunford [42], on a alors au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$W_\Lambda(\beta,\omega) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma\cup\mathcal{C}} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{e}^{-\beta\xi}(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1} \tag{2.60}$$

Etant donné le choix des contours $\Gamma^\pm$, on peut utiliser sur chacun d'eux l'estimation (1.35) sur la norme de la résolvante. Et par des considérations géométriques, on peut montrer que pour tout $\xi\in\mathcal{C}$, $\|(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\| \leq \left(\frac{\eta}{\beta}\sin\frac{\epsilon_0}{2}\right)^{-1}$ uniformément en ξ. Il vient alors :

$$\|W_\Lambda(\beta,\omega)\| \leq \frac{1}{2\pi}\left\{c_{\epsilon_0}\int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-}|\mathrm{d}\xi|\,\frac{|\mathrm{e}^{-\beta\xi}|}{|\xi-\gamma_{\delta_0}(\omega)|} + \frac{\beta}{\eta}\frac{1}{\sin\frac{\epsilon_0}{2}}\int_{\mathcal{C}}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathrm{e}^{-\beta\xi}|\right\} \tag{2.61}$$

Utilisons le paramétrage $\xi = r\mathrm{e}^{\pm i(\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2})}+\gamma_{\delta_0}(\omega)$ avec $r\in\left[\frac{\eta}{\beta},+\infty\right)$ sur le contour $\Gamma^\pm$, et $\xi=\frac{\eta}{\beta}\mathrm{e}^{i\phi}+\gamma_{\delta_0}(\omega)$ avec $\phi\in\left[\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2}, 2\pi-\left(\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2}\right)\right]$ sur le contour $\mathcal{C}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}&\|W_\Lambda(\beta,\omega)\|\\ &\leq \frac{\mathrm{e}^{-\beta\gamma_{\delta_0}(\omega)}}{2\pi}\left\{2c_{\epsilon_0}\int_{\frac{\eta}{\beta}}^{+\infty}\mathrm{d}r\,\frac{\mathrm{e}^{-\beta r\cos(\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2})}}{r} + \frac{1}{\sin\frac{\epsilon_0}{2}}\int_{\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2}}^{2\pi-(\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2})}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{e}^{-\beta\frac{\eta}{\beta}\cos\phi}\right\}\end{aligned} \tag{2.62}$$

En utilisant que $\cos(\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2})\geq\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon_0}{2})=\sin\frac{\epsilon_0}{2}>0$ et par le changement de variable $x:=\beta r$ dans la première intégrale, on prouve l'existence d'une constante $c=c(\epsilon_0)>0$ majorant uniformément en β la quantité entre accolades dans (2.62).

■

Il reste à noter que la famille $\{W_\Lambda(\beta,\omega),\ \omega\in\mathbb{C}\}$ est $\mathfrak{B}$-analytique, conséquence directe du fait que $\{H_\Lambda(\omega),\ \omega\in\mathbb{C}\}$ est une famille analytique de type (A) (cf. Lemme 1.18). Comme corollaire de la Proposition 2.10 on a même :

Corollaire 2.28. *Soit $\beta>0$. $\{W_\Lambda(\beta,\omega),\ \omega\in\mathbb{C}\}$ est une famille d'opérateurs $\mathfrak{I}_1$-entière.*

Preuve Corollaire 2.28.
Soient $\beta>0$ et $\hat\omega\in\mathbb{C}$. Soient $\eta>0$ et $\epsilon_0>0$ satisfaisant $\epsilon_0<\frac{\pi}{2}-\theta_{\delta_0}(\hat\omega)$.
Soit $\Gamma\cup\mathcal{C}$, avec $\Gamma=\Gamma^+\cup\Gamma^-$, le contour orienté positivement où $\Gamma^\pm$ et $\mathcal{C}$ sont définis par (2.58) et (2.59). Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve précédente, le spectre de l'opérateur $H_\Lambda(\hat\omega)$ se trouve à l'intérieur du contour $\Gamma\cup\mathcal{C}$. De plus, il existe un voisinage $\nu(\hat\omega)$ de $\hat\omega$ tel que pour tout $\omega\in\nu(\hat\omega)$, le spectre de $H_\Lambda(\omega)$ se trouve encore à l'intérieur du contour $\Gamma\cup\mathcal{C}$. Le calcul fonctionnel de Dunford-Schwartz donne alors au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$\forall\,\omega\in\nu(\hat\omega),\quad W_\Lambda(\beta,\omega)=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma\cup\mathcal{C}}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{-\beta\xi}(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}$$

Choisissons maintenant $\xi_0<\min\{-C_0,\gamma_{\delta_0}(\hat\omega)\}$ avec $|\xi_0|$ suffisamment large afin que pour tout $\omega\in\nu(\hat\omega)$, $\xi_0\in\rho(H_\Lambda(\omega))$. Par la première équation résolvante itérée 2 fois et en utilisant le théorème intégral de Cauchy :

$$\forall\,\omega\in\nu(\hat\omega),\quad W_\Lambda(\beta,\omega)=\frac{i}{2\pi}\left(\int_{\Gamma\cup\mathcal{C}}\mathrm{d}\xi\,(\xi-\xi_0)^2\mathrm{e}^{-\beta\xi}(H_\Lambda(\omega)-\xi)^{-1}\right)(H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-2} \tag{2.63}$$

D'une part, le choix du contour assure que pour tout $\xi \in \Gamma \cup \mathcal{C}$, la fonction à valeurs opérateurs $\nu(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ est $\mathfrak{B}$-analytique. D'autre part, $(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ est uniformément borné en $\omega \in \nu(\hat{\omega})$ et $\xi \in \Gamma \cup \mathcal{C}$ (par de simples arguments géométriques). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale garantit alors que la fonction à valeurs opérateurs entre parenthèses dans (2.63) est $\mathfrak{B}$-analytique sur $\nu(\hat{\omega})$. Aussi d'après le Corollaire 2.12, il existe un voisinage $V(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ sur lequel la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-2}$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique. En utilisant (i) du Lemme 2.11, $\omega \mapsto W_\Lambda(\beta, \omega)$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique sur $\nu(\hat{\omega}) \cap V(\hat{\omega})$. Il reste à étendre la propriété sur tout le plan complexe.

■

Autre démonstration de la Proposition 2.10

Voici la stratégie de la preuve en 4 étapes :

Etape 1 : on montre que pour tout $\beta > 0$ la famille d'opérateurs $\{W_\Lambda(\beta, \omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est $\mathfrak{I}_1$-analytique (et par conséquent $\mathfrak{I}_2$-analytique) en utilisant la théorie des perturbations des semi-groupes de Gibbs (voir par exemple [5] et [108]).
Etape 2 : on cherche une estimation sur $\|W_\Lambda(\beta, \omega)\|_{\mathfrak{I}_2}$, avec $\omega \in \mathbb{C}$, et telle que cette estimation soit intégrable par rapport à la variable β au voisinage de 0.
Etape 3 : par l'intermédiaire de cette estimation, on transfère (localement) la propriété d'analycité (au sens de la topologie $\|\cdot\|_{\mathfrak{I}_2}$) du semi-groupe sur la résolvante $(H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-1}$ avec $\xi_0 < 0$ bien choisi. On utilisera pour cela la transformation de Laplace (1.44).
Etape 4 : on "transporte" cette propriété d'analycité par la première équation résolvante sur $(H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$ pour $\xi \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$ quelconque.

Etapes 1 et 2

Pour tout $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$, introduisons les opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$R_{1,\Lambda}(\beta, \omega_0) := s_{1,\Lambda}(\omega_0) W_\Lambda(\beta, \omega_0) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x})) W_\Lambda(\beta, \omega_0) \tag{2.64}$$

$$R_{2,\Lambda}(\beta, \omega_0) := s_{2,\Lambda} W_\Lambda(\beta, \omega_0) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^2(\mathbf{x}) W_\Lambda(\beta, \omega_0) \tag{2.65}$$

En vertu de (1.40), $R_{2,\Lambda}(\beta, \omega_0) \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$. Idem, $R_{1,\Lambda}(\beta, \omega_0) \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ d'après (2.69). Pour tout couple $(\omega, \omega_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, posons $d\omega = \omega - \omega_0$. Introduisons l'opérateur borné :

$$R_\Lambda(\beta, \omega, \omega_0) := (H_\Lambda(\omega) - H_\Lambda(\omega_0)) W_\Lambda(\beta, \omega_0) = d\omega R_{1,\Lambda}(\beta, \omega_0) + (d\omega)^2 R_{2,\Lambda}(\beta, \omega_0) \tag{2.66}$$

Basé sur la théorie des perturbations des semi-groupes de Gibbs (voir [5], [108]) :

Proposition 2.29. *Soit $\{W_\Lambda(\beta, \omega)\}_{\beta \geq 0}$ le semi-groupe fortement continu de générateur $H_\Lambda(\omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$. Alors $\{W_\Lambda(\beta, \omega)\}_{\beta > 0}$ est un semi-groupe de Gibbs (i.e. sa norme trace $\|\cdot\|_{\mathfrak{I}_1} < +\infty$). De plus pour tout $\beta > 0$, $\{W_\Lambda(\beta, \omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille $\mathfrak{I}_1$-entière.*

Preuve Proposition 2.29.
Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Il suffit de vérifier les 2 hypothèses du corollaire dans [5].
(i) Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur $s_\Lambda(\omega, \omega_0) := d\omega s_{1,\Lambda}(\omega_0) + (d\omega)^2 s_{2,\Lambda}$ est $H_\Lambda(\omega_0)$-borné au sens des opérateurs avec borne relative nulle (cf. preuve Lemme 1.18).

Montrons que la famille $\{R_\Lambda(\beta,\omega,\omega_0),\ \omega\in\mathbb{C}\}$ est $\mathfrak{B}$-analytique pour tout $\beta>0$. Posons pour $\beta>0$ et $\omega\in\mathbb{C}$, $R'_\Lambda(\beta,\omega,\omega_0):=R_{1,\Lambda}(\beta,\omega_0)+2d\omega R_{2,\Lambda}(\beta,\omega_0)$. On a alors :

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{R_\Lambda(\beta,\omega+h,\omega_0)-R_\Lambda(\beta,\omega,\omega_0)}{h}-R'_\Lambda(\beta,\omega,\omega_0)\right\|=\lim_{h\to 0}|h|\|R_{2,\Lambda}(\beta,\omega_0)\|=0$$

(ii) Pour tout sous-ensemble compact $\Omega\subset\mathbb{C}$, on montre maintenant que :

$$\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\sup_{\omega\in\Omega}\|R_\Lambda(\tau,\omega,\omega_0)\|<+\infty$$

Il nous faut estimer pour $\beta>0$ les normes d'opérateur $\|R_{1,\Lambda}(\beta,\omega_0)\|$ et $\|R_{2,\Lambda}(\beta,\omega_0)\|$. D'abord à partir de l'estimation (1.40), il existe une constante $c_1>0$ telle que :

$$\|R_{2,\Lambda}(\beta,\omega_0)\|\leq\frac{c_1}{2}a_\infty^2\mathrm{e}^{\beta C_0}\tag{2.67}$$

Soit $\phi\in L^2(\Lambda)$ tel que $\|\phi\|_2=1$. Posons $\psi:=W_\Lambda(\beta,\omega_0)\phi$. Puisque $W_\Lambda(\beta,\omega_0)L^2(\Lambda)\to D(H_\Lambda(\omega_0))\subset\mathcal{Q}(H_\Lambda(0))$ (cf. paragraphe 3.2, chapitre 1), l'estimation (1.27) fournit l'existence d'une constante $c_2>0$ telle que :

$$\frac{1}{2}\|(i\nabla+\omega_0\mathbf{a}(\mathbf{x}))\psi\|_2^2\leq c_2\big(\langle\psi,H_\Lambda(\omega_0)\psi\rangle+\|\psi\|_2^2\big)\tag{2.68}$$

Puis en utilisant que $\forall\,\beta>0$, la fonction $(0,+\infty)\ni t\mapsto t\mathrm{e}^{-2\beta t}$ atteint son maximum en $t_0:=(2\beta)^{-1}$, le théorème spectral permet d'obtenir :

$$\big|\langle H_\Lambda(\omega_0)W_\Lambda(\beta,\omega_0)\phi,W_\Lambda(\beta,\omega_0)\phi\rangle\big|\leq\frac{1}{2\beta e}\|\phi\|_2^2$$

Enfin en utilisant (1.40), il existe une autre constante $c_2>0$ telle que :

$$\|R_{1,\Lambda}(\beta,\omega_0)\phi\|_2^2\leq a_\infty^2\|(i\nabla+\omega_0\mathbf{a}(\mathbf{x}))\psi\|_2^2\leq c_2a_\infty^2\left(\frac{1}{\beta}+\mathrm{e}^{2\beta C_0}\right)\tag{2.69}$$

En réunissant (2.67) et (2.69), il vient l'existence d'une constante $c>0$ telle que :

$$\forall\,\beta>0,\quad\sup_{\omega\in\Omega}\|R_\Lambda(\beta,\omega,\omega_0)\|\leq c\Big(\sup_{\omega\in\Omega}|d\omega|a_\infty\sqrt{\frac{1}{\beta}+\mathrm{e}^{2\beta C_0}}+\sup_{\omega\in\Omega}|d\omega|^2a_\infty^2\mathrm{e}^{\beta C_0}\Big)\tag{2.70}$$

et le majorant dans le membre de droite de (2.70) appartient à $L^1((0,1],\mathrm{d}\beta)$.

■

Remarque 2.30. Pour $\beta>0$ et $\omega_0\in\mathbb{R}$, $R_{i,\Lambda}(\beta,\omega_0)$, $i\in\{1,2\}$, sont même de classe trace. En effet, $R_{2,\Lambda}(\beta,\omega_0)\in\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$ en vertu de (1.42). Aussi $R_{1,\Lambda}(\beta,\omega_0)\in\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$ en utilisant la propriété d'idéal bilatère de $\mathfrak{I}_1(L^2(\Lambda))$:

$$\|R_{1,\Lambda}(\beta,\omega_0)\|_{\mathfrak{I}_1}\leq\|R_{1,\Lambda}(\beta/2,\omega_0)\|\|W_\Lambda(\beta/2,\omega_0)\|_{\mathfrak{I}_1}<+\infty$$

Proposition 2.31. *Pour tout $\omega\in\mathbb{C}$, il existe une constante $c>0$ telle que :*

$$\forall\,\beta>0,\quad\|W_\Lambda(\beta,\omega)\|_{\mathfrak{I}_2}\leq c(1+|\Im\omega|a_\infty)^2(1+\beta)|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\beta C(\omega)}}{\beta^{\frac{3}{4}}}\tag{2.71}$$

où $C(\omega):=\max\{C_0,-\gamma_{\delta_0}(\omega)\}$, C_0 défini en (1.39) et $\gamma_{\delta_0}(\omega)$ le vertex du secteur $\mathcal{S}_{\delta_0}(\omega)$.

Preuve Proposition 2.31.
Soit $\beta > 0$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et posons $\Re\omega = \omega_0$, $\Im\omega = \omega_1$. Puisque $R_\Lambda(\beta, \omega, \omega_0)$ défini en (2.66) est borné, la formule de Duhamel (voir [57]) permet d'écrire dans $\mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$:

$$W_\Lambda(\beta, \omega) = W_\Lambda(\beta, \omega_0) - \int_0^\beta \mathrm{d}\tau\, W_\Lambda(\beta - \tau, \omega_0) R_\Lambda(\tau, \omega, \omega_0) \tag{2.72}$$

Rappelons que l'on dispose déjà d'une estimation sur $\|W_\Lambda(\beta, \omega_0)\|_{\mathfrak{I}_2}$ (cf. (1.43)). Et puisque $\mathfrak{I}_2(L^2(\Lambda))$ est un idéal bilatère, il reste à estimer la norme opérateur $\|R_\Lambda(\beta, \omega, \omega_0)\|$.
Soient $\phi \in L^2(\Lambda)$ tel que $\|\phi\|_2 = 1$ et $\psi := W_\Lambda(\beta, \omega)\phi \in \mathcal{Q}(H_\Lambda(0))$.
En utilisant l'estimation (2.68) et le fait que $H_\Lambda(\omega_0) = \Re H_\Lambda(\omega) + \frac{\omega_1^2}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})$ au sens des formes, on montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|R_{1,\Lambda}(\beta, \omega_0)\phi\|_2^2 \leq a_\infty^2 \|(i\nabla_\mathbf{x} + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))\psi\|_2^2 \leq c a_\infty^2 \|\psi\|_2 \big(\|H_\Lambda(\omega)\psi\|_2 + \|\psi\|_2(\omega_1^2 a_\infty^2 + 1)\big)$$

et puisque :

$$\|R_{2,\Lambda}(\beta, \omega_0)\phi\|_2 \leq \frac{1}{2} a_\infty^2 \|\psi\|_2$$

alors il existe deux autres constantes $c' > 0$ et $c'' > 0$ telles que :

$$\|R_\Lambda(\beta, \omega, \omega_0)\phi\|_2 \leq c' |\omega_1| a_\infty \|\psi\|_2^{\frac{1}{2}} \|H_\Lambda(\omega)\psi\|_2^{\frac{1}{2}} + c''(1 + |\omega_1| a_\infty)^2 \|\psi\|_2 \tag{2.73}$$

Il ne reste plus qu'à estimer $\|H_\Lambda(\omega) W_\Lambda(\beta, \omega)\|$. Pour cela on utilise la même méthode que celle utilisée pour estimer la norme $\|W_\Lambda(\beta, \omega)\|$ dans la preuve du Lemme 2.27.
Le calcul fonctionnel de Dunford-Schwartz (voir [42]) donne au sens des opérateurs bornés :

$$H_\Lambda(\omega) W_\Lambda(\beta, \omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma \cup \mathcal{C}} \mathrm{d}\xi\, \xi \mathrm{e}^{-\beta\xi} (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}$$

où $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, $\Gamma^\pm$ et $\mathcal{C}$ sont les contours respectivement définis par (2.58) et (2.59).
En utilisant les mêmes arguments que ceux menant à (2.61), on obtient :

$$\|H_\Lambda(\omega) W_\Lambda(\beta, \omega)\| \leq \frac{1}{2\pi} \left\{ c_{\epsilon_0} \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} |\mathrm{d}\xi|\, |\xi| \frac{|\mathrm{e}^{-\beta\xi}|}{|\xi - \gamma_{\delta_0}(\omega)|} + \frac{\beta}{\eta} \frac{1}{\sin \frac{\epsilon_0}{2}} \int_{\mathcal{C}} |\mathrm{d}\xi|\, |\xi| |\mathrm{e}^{-\beta\xi}| \right\} \tag{2.74}$$

Et en utilisant les mêmes paramétrages menant à (2.62), (2.74) devient :

$$\begin{aligned} \|H_\Lambda(\omega) W_\Lambda(\beta, \omega)\| \leq \frac{\mathrm{e}^{-\beta\gamma_{\delta_0}(\omega)}}{2\pi} \Bigg\{ 2c_{\epsilon_0} \int_{\frac{\eta}{\beta}}^{+\infty} \mathrm{d}r\, (r + |\gamma_{\delta_0}(\omega)|) \frac{\mathrm{e}^{-\beta r \cos(\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2})}}{r} + \\ + \frac{1}{\sin \frac{\epsilon_0}{2}} \int_{\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2}}^{2\pi - (\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2})} \mathrm{d}\phi\, \big(\frac{\eta}{\beta} + |\gamma_{\delta_0}(\omega)|\big) \mathrm{e}^{-\beta \frac{\eta}{\beta} \cos\phi} \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Par le changement de variable $x := \beta r$ et vu que $\cos(\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2}) \geq \sin \frac{\epsilon_0}{2} > 0$, il vient :

$$\int_{\frac{\eta}{\beta}}^{+\infty} \mathrm{d}r\, (r + |\gamma_{\delta_0}(\omega)|) \frac{\mathrm{e}^{-\beta r \cos(\theta_{\delta_0}(\omega) + \frac{\epsilon_0}{2})}}{r} \leq c(\epsilon_0) \big(|\gamma_{\delta_0}(\omega)| + \beta^{-1}\big)$$

$$\text{avec} \quad +\infty > c(\epsilon_0) := \max\left\{ \int_\eta^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^{-x \sin \frac{\epsilon_0}{2}}}{x}, \int_\eta^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x \sin \frac{\epsilon_0}{2}} \right\} > 0 \tag{2.76}$$

Quant à la seconde intégrale dans (2.75) :

$$\int_{\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2}}^{2\pi-(\theta_{\delta_0}(\omega)+\frac{\epsilon_0}{2})} \mathrm{d}\phi\, \big(\frac{\eta}{\beta}+|\gamma_{\delta_0}(\omega)|\big)\mathrm{e}^{-\beta\frac{\eta}{\beta}\cos\phi} \leq c(\eta)\big(|\gamma_{\delta_0}(\omega)|+\beta^{-1}\big), \quad c(\eta) := 2\pi(1+\eta)\mathrm{e}^{\eta} > 0 \tag{2.77}$$

En insérant (2.76) et (2.77) dans (2.75), on obtient :

$$\|H_\Lambda(\omega)W_\Lambda(\beta,\omega)\| \leq c(\epsilon_0)\big(1+\beta|\gamma_{\delta_0}(\omega)|\big)\frac{\mathrm{e}^{-\beta\gamma_{\delta_0}(\omega)}}{\beta} \tag{2.78}$$

pour une autre constante $c(\epsilon_0) > 0$.
Il reste à introduire (2.78) dans (2.73) en utilisant (1.40). Ainsi :

$$\|R_\Lambda(\beta,\omega,\omega_0)\| \leq c(\epsilon_0)(1+|\omega_1|a_\infty)^2(1+\beta)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\beta C(\omega)}}{\beta^{\frac{1}{2}}}, \quad C(\omega) := \max\{C_0, -\gamma_{\delta_0}(\omega)\} > 0$$

pour une autre constante $c(\epsilon_0) > 0$. Finallement en utilisant (1.43) :

$$\begin{aligned}\|W_\Lambda(\beta,\omega)\|_{\mathfrak{I}_2} &\leq \|W_\Lambda(\beta,\omega_0)\|_{\mathfrak{I}_2} + \int_0^\beta \mathrm{d}\tau\, \|W_\Lambda(\beta-\tau,\omega_0)\|_{\mathfrak{I}_2}\|R_\Lambda(\tau,\omega,\omega_0)\| \\ &\leq c(\epsilon_0)(1+|\omega_1|a_\infty)^2(1+\beta)^{\frac{1}{2}}|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{C_0\beta}}{\beta^{\frac{3}{4}}} + \int_0^\beta \mathrm{d}\tau\, \frac{\mathrm{e}^{C_0(\beta-\tau)}}{(\beta-\tau)^{\frac{3}{4}}}\frac{\mathrm{e}^{\tau C(\omega)}}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right)\end{aligned}$$

et en majorant le membre de droite ci-dessus, on obtient (2.71).

■

Etapes 3 et 4

Soit $\hat{\omega} \in \mathbb{C}$ fixé. Soit $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$ tel que $\xi_0 < \min\{-C_0, \gamma_{\delta_0}(\hat{\omega})\}$ avec $|\xi_0|$ suffisamment grand. Puisque $\{H_\Lambda(\omega),\ \omega \in \mathbb{C}\}$ est une famille analytique de type (A), alors il existe un voisinage $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ tel que pour tout $\omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$, $\xi_0 \in \rho(H_\Lambda(\omega))$.
Par la transformation de Laplace, il vient au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda)$:

$$\forall\, \omega \in \nu_{\xi_0}(\hat{\omega}), \quad (H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{\xi_0\tau}\mathrm{e}^{-\tau H_\Lambda(\omega)}$$

D'une part, la fonction à valeurs opérateurs $\nu_\xi(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto \mathrm{e}^{-\tau H_\Lambda(\omega)}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique d'après la Proposition 2.29. D'autre part pour tout compact $\Omega \subset \nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$, l'estimation (2.71) donne l'existence de 2 constantes $c = c(\Omega) > 0$ et $C = C(\Omega) > 0$ telles que :

$$|\mathrm{e}^{\xi_0\tau}|\sup_{\omega\in\Omega}\|W_\Lambda(\beta,\omega)\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\sup_{\omega\in\Omega}(1+a_\infty|\Im\omega|)^2(1+\tau)\frac{\mathrm{e}^{(\xi_0+C)\tau}}{\tau^{\frac{3}{4}}} \tag{2.79}$$

Le membre de droite de (2.79) appartient à $L^1((0,+\infty),\mathrm{d}\tau)$ puisque ξ_0 est choisi suffisamment négatif. Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale garantit que la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega)-\xi_0)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique sur $\nu_{\xi_0}(\hat{\omega})$.

Reste à étendre ce résultat pour $\xi \in \rho(H_\Lambda(\hat{\omega}))$ quelconque. La première équation résolvante donne au sens des opérateurs bornés :

$$(H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi)^{-1} = (H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi_0)^{-1} + (\xi-\xi_0)(H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi)^{-1}(H_\Lambda(\hat{\omega})-\xi_0)^{-1}$$

Comme il existe un voisinage $V_\xi(\hat{\omega})$ de $\hat{\omega}$ tel que $V_\xi(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto \big(H_\Lambda(\omega) - \xi\big)^{-1}$ soit $\mathfrak{B}$-analytique, la fonction à valeurs opérateurs $\omega \mapsto (H_\Lambda(\omega) - \xi)^{-1}(H_\Lambda(\omega) - \xi_0)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique sur $\mathcal{V}_\xi(\hat{\omega}) := \nu_{\xi_0}(\hat{\omega}) \cap V_\xi(\hat{\omega})$ (conséquence de (i) Lemme 2.11).
Finallement $\mathcal{V}_\xi(\hat{\omega}) \ni \omega \mapsto \big(H_\Lambda(\omega) - \xi\big)^{-1}$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique.

■

7 Annexe

Preuve Lemme 2.6.
Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0)) \cap \mathbb{R}$, introduisons la fonction :

$$[E_0(\omega_0), +\infty) \ni \xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln\big(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}\big), \quad \epsilon = \pm 1$$

Soient $\alpha(\omega_0)$ tel que $-\infty < \alpha(\omega_0) \leq E_0(\omega_0)$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha(\omega_0)) \subseteq \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ un compact.
On utilisera ici la détermination principale du logarithme :

$$\forall\, u \in \mathbb{C}^*, \quad \ln(u) = \ln|u| + i\mathrm{Arg}(u), \quad \mathrm{Arg}(u) = 2\mathrm{arctan}\left(\frac{\Im u}{\Re u + |u|}\right) \in (-\pi, \pi] \tag{2.80}$$

Etant donné (2.80), une condition suffisante pour que $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, \cdot\,; \cdot\,)$ soit jointement analytique sur $K \times \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, est :

$$\forall\, (z, \xi) \in K \times \mathcal{U}, \quad \Re(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}) > 0$$

On montre dans un premier temps qu'il existe $\eta_K > 0$ tel que la fonction $(z, \xi) \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ soit jointement analytique sur le domaine :

$$K \times \Big\{\xi \in \mathbb{C} \,:\, \Im\xi \in \Big(-\frac{\eta_K}{\beta}, \frac{\eta_K}{\beta}\Big),\ \Re\xi \in [\alpha(\omega_0), +\infty)\Big\} \tag{2.81}$$

Par la suite, $D(r)$ désignera le disque ouvert dans $\mathbb{C}$ centré en l'origine et de rayon $r > 0$. La fonction $(z, \xi) \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est analytique sur $D(\mathrm{e}^{\beta\alpha(\omega_0)}) \times \{\xi \in \mathbb{C} \,:\, \Re\xi \in [\alpha(\omega_0), +\infty)\}$.
Posons $\tilde{K} := K \setminus D(\mathrm{e}^{\beta\alpha(\omega_0)})$. On distingue maintenant les cas $\epsilon = -1$ et $\epsilon = +1$.
Dans le cas $\epsilon = -1$, introduisons les réels θ_m et θ_M définis respectivement par :

$$\theta_m := \min\{\arg(z),\, z \in \tilde{K}\} \quad \text{et} \quad \theta_M := \max\{\arg(z),\, z \in \tilde{K}\}$$

Puisque $\mathrm{dist}\big(\tilde{K}, [\mathrm{e}^{\beta\alpha(\omega_0)}, +\infty)\big) > 0$, alors $0 < \theta_m \leq \theta_M < 2\pi$.
Posons $\eta_K := \frac{1}{2}\min\{\theta_m, 2\pi - \theta_M\} > 0$. Pour $z \in \tilde{K}$ et $\Im\xi \in \big[-\frac{\eta_K}{\beta}, \frac{\eta_K}{\beta}\big]$, on a :

$$0 < \frac{\theta_m}{2} \leq \arg(z) - \beta\Im\xi \leq \pi + \frac{\theta_M}{2} < 2\pi$$

Ainsi $\Im(1 - z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) = 0 \iff \arg(z) - \beta\Im\xi = \pi$, mais dans ce cas $\Re(1 - z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) > 0$.
Dans le cas où $\epsilon = +1$, introduisons les réels $\theta_m^{'}$ et $\theta_M^{'}$ définis respectivement par :

$$\theta_m^{'} := \max\{\arg(z),\, z \in \tilde{K},\, \arg(z) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \theta_M^{'} := \min\{\arg(z),\, z \in \tilde{K},\, \arg(z) < 0\}$$

Puisque $\mathrm{dist}\big(\tilde{K}, [\mathrm{e}^{\beta\alpha(\omega_0)}, +\infty)\big) > 0$, alors $-\pi < \theta_M^{'} \leq \theta_m^{'} < \pi$.
Posons $\eta_K := \frac{1}{2}\min\{\pi - \theta_m^{'}, \pi + \theta_M^{'}\} > 0$. Pour $z \in \tilde{K}$ et $\Im\xi \in \big[-\frac{\eta_K}{\beta}, \frac{\eta_K}{\beta}\big]$, on a :

$$-\pi < -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_M^{'}}{2} \leq \arg(z) - \beta\Im\xi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_m^{'}}{2} < \pi$$

Ainsi $\Im(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) = 0 \iff \arg(z) - \beta\Im\xi = 0$, mais dans ce cas $\Re(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi}) > 0$.

Dans un deuxième temps, soit $\xi_K^{'}$ le réél vérifiant $\sup_{z\in K}|z|\mathrm{e}^{-\beta\xi_K^{'}} = 1$. Il est clair que la fonction $(z,\xi) \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est jointement analytique sur le domaine :

$$K \times \left\{\xi \in \mathbb{C} \,:\, \Re\xi > \xi_K^{'}\right\} \tag{2.82}$$

Au final, $(z,\xi) \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est jointement analytique sur les domaines définis par (2.81) et (2.82). Il reste à choisir par exemple $\xi_K = \max\{\xi_K^{'}, E_0(\omega_0)\} + 1$; ce qui achève la preuve.

■

Preuve Lemme 2.7.
Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(\omega_0)$ un réél vérifiant $-\infty < \alpha(\omega_0) < E_0(\omega_0)$.
Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha(\omega_0))$ un compact et $\eta_K > 0$, $\xi_K > E_0(\omega_0)$ les réels du Lemme 2.6.
Soit $\mathfrak{D}$ le domaine sur lequel $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$ est holomorphe (cf. (2.11)).
Soit $\varsigma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Soit Γ_K le contour orienté positivement et inclus dans $\mathfrak{D}$ défini par :

$$\Gamma_K := \left\{\Re\xi = \alpha(\omega_0),\ \Im\xi \in \left[-\frac{\eta_K}{2\beta}, \frac{\eta_K}{2\beta}\right]\right\} \cup \left\{\Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K),\ \Im\xi = \pm\frac{\eta_K}{2\beta}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg\left(\xi - \xi_K \mp i\frac{\eta_K}{2\beta}\right) = \pm\varsigma\right\}$$

Par la suite, on posera $\eta = \eta(\beta) := \frac{\eta_K}{2\beta}$ et on utilisera la détermination principale du logarithme définie en (2.80) pour les estimations.
Soit $\Re\xi = \alpha(\omega_0)$. Pour tout $\Im\xi \in [-\eta, \eta]$,

$$\forall\, z \in K, \quad |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \alpha(\omega_0) + i\Im\xi)| \leq \left(\sup_{z\in K}|z| + \pi\mathrm{e}^{\beta\alpha(\omega_0)}\right)\mathrm{e}^{-\beta\alpha(\omega_0)} \tag{2.83}$$

Soit $\Im\xi = \pm\eta$. Pour tout $\Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K)$,

$$\forall\, z \in K, \quad |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \Re\xi \pm i\eta)| \leq \left(\sup_{z\in K}|z| + \pi\mathrm{e}^{\beta\xi_K}\right)\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \tag{2.84}$$

Pour $\Re\xi = \xi_K + r\cos\varsigma$ et $\Im\xi = \pm(\eta + r\sin\varsigma)$, avec $r \in (0, +\infty)$ et $\varsigma \in [0, \pi/2)$,

$$\forall\, z \in K, \quad |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \Re\xi + i\Im\xi)| \leq 2\sup_{z\in K}|z|\left(1 + \frac{1}{1 - \sup_{z\in K}|z|\mathrm{e}^{-\beta\xi_K}}\right)\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \tag{2.85}$$

où on a utilisé que $|\arctan(x)| \leq |x|$ ainsi que pour tout $\Re\xi \geq \xi_K$, $\sup_{z\in K}|z|\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} < 1$.
Les estimations (2.83), (2.84) et (2.85) donnent l'existence d'une constante $c(\beta, K) > 0$ telle que pour tout $\xi \in \Gamma_K$ et pour tout $z \in K$, $|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \leq c(\beta, K)\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}$, d'où (2.13).

Prouvons maintenant (2.14) en donnant seulement les principaux arguments.
Soit $n \geq 1$ un entier et $p_n(|\xi|) = \sum_{k=1}^n a_k|\xi|^k$ un polynôme de degré n.
Posons $\alpha_K^\pm := \xi_K \pm i\eta$ et considérons seulement la partie du contour Γ_K correspondant à $\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg(\xi - \alpha_K^\pm) = \pm\varsigma\}$. Par le changement de variable $\xi = r\mathrm{e}^{\pm i\varsigma} + \alpha_K^\pm$ et en utilisant l'estimation (2.85) ; il existe une constante numérique $c(\beta, K) > 0$ telle que :

$$\int_{\{\Re\xi\geq\xi_K,\ \arg(\xi-\alpha_K^\pm)=\pm\varsigma\}} |\mathrm{d}\xi||p(|\xi|)||\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \leq c(\beta, K)\sum_{k=0}^n |a_k| \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\ (r + |\alpha_K^\pm|)^k \mathrm{e}^{-\beta r\cos\varsigma}$$

Par le changement de variable $R = r + |\alpha_K^{\pm}|$ et en utilisant que pour tout réél $\nu > 0$:

$$\forall\, R > 0, \quad R^{\nu} \mathrm{e}^{-\beta R \cos\varsigma} \leq \left(\frac{2\nu}{\mathrm{e}\beta \cos\varsigma} \right)^{\nu} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2} R \cos\varsigma}$$

il vient finallement :

$$\int_{\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg(\xi - \alpha_K^{\pm}) = \pm\varsigma\}} |\mathrm{d}\xi||p(|\xi|)||\mathfrak{f}_{\epsilon}(\beta, z; \xi)| \leq c^{'}(\beta, K, n) \int_{|\alpha_K^{\pm}|}^{+\infty} \mathrm{d}r\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2} R \cos\varsigma} < +\infty$$

■

Preuve Lemme 2.11.
(i). La preuve repose sur le fait que $\mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$, $j \in \{1,2\}$, est un idéal bilatère, i.e. si $A \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ et $B \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$, $i \in \{1,2\}$, alors $AB \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Supposons que $U \ni u \mapsto A(u)$, $U \subset \mathcal{U}$ un ouvert, soit $\mathfrak{B}$-analytique. Alors pour chaque $u \in U$, il existe $A^{'}(u) \in \mathfrak{B}(L^2(\Lambda))$ tel que :

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{A(u+h) - A(u)}{h} - A^{'}(u) \right\| = 0$$

Supposons aussi que $V \ni u \mapsto B(u)$, avec $V \subset \mathcal{U}$ un ouvert, soit $\mathfrak{I}_j$-analytique, $i \in \{1,2\}$. Alors pour chaque $u \in V$, il existe $B^{'}(u) \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$ tel que :

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{B(u+h) - B(u)}{h} - B^{'}(u) \right\|_{\mathfrak{I}_j} = 0$$

Soient $u_0 \in U \cap V$ et h choisit assez petit (en pratique tel que $u_0 + h \in U \cap V$).
Par la propriété d'idéal bilatère de $\mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{A(u_0+h)B(u_0+h) - A(u_0)B(u_0)}{h} - \left(A^{'}(u_0)B(u_0) + B^{'}(u_0)A(u_0)\right) \right\|_{\mathfrak{I}_j} \\
&\leq \left\| \frac{A(u_0+h) - A(u_0)}{h} - A^{'}(u_0) \right\| \left\| B(u_0) \right\|_{\mathfrak{I}_j} + \left\| \frac{B(u_0+h) - B(u_0)}{h} - B^{'}(u_0) \right\|_{\mathfrak{I}_j} \left\| A(u_0) \right\| + \\
&\qquad + \left\| A(u_0+h) - A(u_0) \right\| \left\| \frac{B(u_0+h) - B(u_0)}{h} \right\|_{\mathfrak{I}_j}
\end{aligned}$$

Puisque $A(\cdot\,)$ est continue au sens de la topologie $\|\cdot\|$, en prenant la limite $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{A(u_0+h)B(u_0+h) - A(u_0)B(u_0)}{h} - \left(A^{'}(u_0)B(u_0) + B^{'}(u_0)A(u_0)\right) \right\|_{\mathfrak{I}_j} = 0$$

ce qui achève la preuve en remarquant que $\left(A^{'}(u_0)B(u_0) + B^{'}(u_0)A(u_0)\right) \in \mathfrak{I}_j(L^2(\Lambda))$.
(ii). La preuve repose sur le fait qu'un produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur de classe trace. Il suffit ensuite d'utiliser la même méthode que ci-dessus.

■

Chapitre 3

Etude de quelques noyaux intégraux à volume fini et infini

Dans le chapitre précédent, on a utilisé une théorie des perturbations magnétiques "standarde" sur la résolvante dans l'expression de la pression grand canonique (2.3) pour déduire une expression pour les susceptibilités généralisées (voir section 3, chapitre 2). Cependant la stratégie utilisée pour démontrer l'existence des limites thermodynamiques de ces quantités (sous des hypothèses supplémentaires, voir chapitre 5) nécessite d'écrire ces grandeurs en termes non plus d'opérateur (voir par ex. (2.10)) mais de leur noyau intégral correspondant. Cette opération, qui sera le sujet du chapitre 4, requiert au préalable quelques résultats techniques (régularité, estimation) sur le noyau intégral de la résolvante qui pourront être transférés sur les noyaux des opérateurs définis en (2.4) et (2.5).

Ainsi ce chapitre est consacré à l'étude du noyau intégral de la résolvante et de ses puissances entières à volume fini (et infini) introduit dans le paragraphe 4.2 du chapitre 1 (voir (1.46)) lorsque ξ_0 est choisi quelconque dans l'ensemble résolvent.

Dans une première partie, on étudie leur propriété de régularité (pour les variables d'espace) et on en donne une estimation. On verra que les hypothèses du paragraphe 3.1 du chapitre 1 peuvent être conservées dans ce cas. Dans une deuxième partie, on étudie les dérivées spatiales du noyau de la résolvante. Les méthodes qui seront utilisées imposent d'assouplir fortement les hypothèses (**H1**) et (**H3**) du paragraphe 3.1.

1 Résultats principaux

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné simplement connexe contenant l'origine des coordonnées de $\mathbb{R}^3$. Considérons la famille de domaines dilatés $\{\Lambda_L\}_{L\geq 1}$ définie par :

$$\Lambda_L := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x}/L \in \Lambda\right\}, \quad L \geq 1$$

Lorsque $L \to \infty$, Λ_L remplit l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$. Par convention, on posera $\Lambda_\infty \equiv \mathbb{R}^3$. Considérons l'hypothèse (**H2**) sur le champ magnétique $\mathbf{B}$ et le potentiel vecteur magnétique associé ainsi que l'hypothèse (**H3**) sur le potentiel V, voir paragraphe 3.1 chapitre 1. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $L \in [1, \infty)$, soit $H_L(\omega, V) := H_{\Lambda_L}(\omega, V)$ l'opérateur avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda_L$ agissant dans $L^2(\Lambda_L)$ défini dans la Proposition 1.3. Soit $H_\infty(\omega, V)$ l'opérateur agissant dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ défini dans la Proposition 1.8.

Pour $1 \leq L \leq \infty$, soit $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $R_L^m(\omega, V, \xi) := (H_L(\omega, V) - \xi)^{-m}$ est un opérateur intégral (cf. section 2) :

$$\forall\, \phi \in L^2(\Lambda_L), \quad \big(R_L^m(\omega, V, \xi)\phi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, R_L^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)\phi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \Lambda_L$$

Par la suite, $D_L := \big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{y}\big\}$ désignera la diagonale dans $\Lambda_L \times \Lambda_L$.

Les deux premiers résultats concernent les noyaux intégraux $R_L^{(m)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega, V, \xi)$:

Proposition 3.1. *Supposons les hypothèses (**H2**) et (**H3**) (cf. paragraphe 3.1, chap. 1). Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$, $1 \leq L \leq \infty$. Soit $R_L^{(1)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega, V, \xi)$ le noyau intégral de $R_L(\omega, V, \xi)$. Alors :*
(i). La fonction $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.
(ii). Il existe un réél $\delta_0 > 0$ et un polynôme $p(|\xi|)$ tels que pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$:

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq p(|\xi|) \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{3.1}$$

La Proposition 3.1 peut être étendue au résultat suivant :

Corollaire 3.2. *Supposons les hypothèses (**H2**) et (**H3**) (cf. paragraphe 3.1, chap. 1). Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$, $1 \leq L \leq \infty$. Pour tout entier $m \geq 2$, soit $R_L^{(m)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega, V, \xi)$ le noyau intégral de $R_L^m(\omega, V, \xi)$. Alors :*
(i). $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto R_L^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$ est continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ et uniformément bornée.
(ii). Il existe un réél $\delta_m > 0$ et un polynôme $p_m(|\xi|)$ tels que pour tout $\delta \in [0, \delta_m]$:

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad |R_L^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq p_m(|\xi|)\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{3.2}$$

Dérivées spatiales du noyau de la résolvante

Le troisième résultat principal de ce chapitre concerne les dérivées spatiales du noyau intégral de la résolvante à volume fini et infini. La méthode utilisée pour l'étude de ces quantités nécessite de choisir une géométrie "simple" pour Λ_L (en l'occurence un cube ouvert) et d'assouplir fortement l'hypothèse (**H3**).

Outre l'hypothèse (**H2**) sur le champ magnétique, on fera les hypothèses suivanntes :
(**h1**) $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ est le cube ouvert centré en l'origine de longueur d'arête $L \geq 1$.
(**h3**) Avec la convention d'extension du paragraphe 2 chapitre 1, le potentiel V vérifie :

$$V \in L^p(\mathbb{R}^3) \quad \text{avec } \infty \geq p > 3$$

Sous les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**), l'Hamiltonien $H_L(\omega, V)$ $(1 \leq L < \infty)$ défini avec conditions de Dirichlet sur les bords $\partial\Lambda_L$ est essentiellement auto-adjoint sur le domaine $\{\varphi \ : \ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda_L}),\ \varphi \restriction \partial\Lambda_L = 0\}$ (voir section 3). Dans le cas $L = \infty$, l'opérateur $H_\infty(\omega, V)$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (voir section 3).

On démontre le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Supposons les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**). Soit* $1 \leq L \leq \infty$. *Soient* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ *tel que* $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$. *Soit* $j \in \{1, 2, 3\}$. *Alors :*
(i). La fonction $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j) R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$ *est continue sur* $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.
(ii). Soit $\mathbf{n}$ *est un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^3$. *Il existe un réél* $\delta_0 > 0$ *et un polynôme* $p(|\xi|)$ *tels que pour tout* $\delta \in [0, \delta_0]$ *et pour tout* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ *:*

$$|\mathbf{n} \cdot (i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega \mathbf{a}(\mathbf{x})) R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq p(|\xi|)(1 + |\omega|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \tag{3.3}$$

Différence des noyaux de la résolvante

Pour $\kappa > 0$ un réél, introduisons $M_\kappa := \{\mathbf{x} \in \Lambda_L \,:\, \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L) \leq \kappa\}$, $1 \leq L < \infty$.

Voici les deux derniers résultats de ce chapitre :

Proposition 3.4. *Supposons les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**). Soit* $1 \leq L < \infty$. *Soient* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $\xi \in \rho(H_L(\omega, V)) \cap \rho(H_\infty(\omega, V))$ *tel que* $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_\infty(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$. *Alors :*
(i). La fonction $\mathbf{x} \mapsto \{R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)\}|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$ *est continue sur* $\Lambda_L \setminus M_\kappa$.
(ii). Il existe un réél $\delta_0 > 0$ *et un polynôme* $p(|\xi|)$ *tels que pour tout* $\delta \in [0, \delta_0]$ *et pour tout* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ *:*

$$\begin{aligned} &|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq \\ &p(|\xi|)(1 + |\omega|)^3 \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left(\frac{\chi_{M_\kappa}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{\chi_{M_\kappa}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}(\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L) + \mathrm{dist}(\mathbf{y}, \partial\Lambda_L))} \right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Proposition 3.5. *Supposons les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**). Soit* $1 \leq L < \infty$. *Soient* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $\xi \in \rho(H_L(\omega, V)) \cap \rho(H_\infty(\omega, V))$ *tel que* $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_\infty(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$. *Soient* $\mathbf{n}$ *un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^3$ *et* $j \in \{1, 2, 3\}$. *Alors :*
(i). La fonction $\mathbf{x} \mapsto \big\{(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))(R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi))\big\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$ *est continue sur* $\Lambda_L \setminus M_\kappa$.
(ii). Il existe un réél $\delta_0 > 0$ *et un polynôme* $p(|\xi|)$ *tels que pour tout* $\delta \in [0, \delta_0]$ *et pour tout* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ *:*

$$\begin{aligned} &|\mathbf{n} \cdot (i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega \mathbf{a}(\mathbf{x}))(R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi))| \leq \\ &p(|\xi|)(1 + |\omega|)^6 \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left(\frac{\chi_{M_\kappa}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} + \frac{\chi_{M_\kappa}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} + \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}(\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L) + \mathrm{dist}(\mathbf{y}, \partial\Lambda_L))} \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Remarque 3.6. Les coefficients des polynômes apparaissant dans toutes ces estimations dépendent du potentiel V.

Remarque 3.7. Les estimations (3.3), (3.4) et (3.5) restent valables sous l'hypothèse :

$$V \in L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^3), \quad \infty \geq p > 3 \tag{3.6}$$

2 Noyau de la résolvante à volume fini et infini

Cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 3.1 et de son Corollaire 3.2. Par souci de clarté, on énonce seulement les lemmes nécessaires à la démonstration de la Proposition 3.1 ; leur preuve se trouvent à la fin de cette section. La preuve du Corollaire 3.2 est quant à elle basée sur le Lemme 3.23 et le Lemme 3.25 (cf. annexe section 5).

2.1 Preuve de la Proposition 3.1 et du Corollaire 3.2

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Pour $L \in [1, \infty)$, soit l'opérateur $H_L(\omega, V) := H_{\Lambda_L}(\omega, V)$ avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda_L$ défini à la Proposition 1.3 ; pour $L = \infty$, soit $H_\infty(\omega, V)$ l'opérateur défini à la Proposition 1.8. Pour $1 \leq L \leq \infty$, soient $(\lambda, \xi) \in \rho(H_L(\omega, V))$ tels que $\Re\lambda < -C_0$ (cf. Remarque 1.26) et $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$.
Par la première équation résolvante, il vient au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$:

$$R_L(\omega, V, \xi) = R_L(\omega, V, \lambda) + (\xi - \lambda)R_L(\omega, V, \xi)R_L(\omega, V, \lambda)$$

En vertu de (1.45), $\|R_L(\omega, V, \lambda)\|_{2,\infty} < +\infty$. Comme $\|R_L(\omega, V, \xi)\|_{2,2} \leq \eta^{-1}$, il vient :

$$\|R_L(\omega, V, \xi)\|_{2,\infty} \leq \|R_L(\omega, V, \lambda)\|_{2,\infty} + |\xi - \lambda|\|R_L(\omega, V, \lambda)\|_{2,\infty}\|R_L(\omega, V, \xi)\|_{2,2} < +\infty$$

Et pour tout entier $m \geq 2$, $\|R_L^m(\omega, V, \xi)\|_{2,\infty} \leq \|R_L(\omega, V, \lambda)\|_{2,\infty}\|R_L(\omega, V, \xi)\|_{2,2}^{m-1} < +\infty$. Puisque $R_L^m(\omega, V, \xi)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq L \leq \infty$, est borné de $L^2(\Lambda_L) \to L^\infty(\Lambda_L)$, le théorème de Dunford-Pettis (cf. [98]) assure que $R_L^m(\omega, V, \xi)$ est un opérateur intégral dans le sens :

$$\forall\, \varphi \in L^2(\Lambda_L), \quad \big(R_L^m(\omega, V, \xi)\varphi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, R_L^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \Lambda_L$$

On s'intéresse maintenant aux propriétés de régularité de $R_L^{(1)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega, V, \xi)$. La stratégie consiste à écrire la première équation résolvante itérée deux fois (avec λ bien choisi)

$$R_L(\omega, V, \xi) = R_L(\omega, V, \lambda) + (\xi - \lambda)R_L^2(\omega, V, \lambda) + (\xi - \lambda)^2 R_L(\omega, V, \lambda)R_L(\omega, V, \xi)R_L(\omega, V, \lambda)$$

qui donne au sens des noyaux :

$$\begin{aligned} R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) &= R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda) + \\ &+ (\xi - \lambda)R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda) + (\xi - \lambda)^2\big(R_L(\omega, V, \lambda)R_L(\omega, V, \xi)R_L(\omega, V, \lambda)\big)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il suffit ensuite d'étudier séparément la régularité de chacun des noyaux à droite de l'égalité ci-dessus, ce qui est l'objet du Lemme 3.8 et du Lemme 3.10 ci-dessous.

Lemme 3.8. *Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < -C_0$, $1 \leq L \leq \infty$. Alors :*
(i). L'application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.
(ii). Il existe des constantes $c = c(\Re\lambda, V) > 0$ et $C_1 := \frac{1}{2}\sqrt{-(\Re\lambda + C_0)} > 0$ telles que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)| \leq |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0, V, \Re\lambda)| \leq c\frac{\mathrm{e}^{-C_1|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{3.8}$$

Remarque 3.9. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < -C_0$, avec $1 \leq L \leq \infty$. Soit $R_L^r(\omega, V, \lambda)$, avec $r > \frac{3}{4}$, défini par le calcul fonctionnel (cf. paragraphe 4.2, chapitre 1). Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 3.8, on prouve :
(1) Pour tout $r \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$, $R_L^{(r)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega, V, \lambda)$ est continue en dehors de la diagonale D_L.
De plus, pour tout $r \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, il existe une constante $c_r = c_r(\Re\lambda, V) > 0$ telle que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |R_L^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)| \leq c_r \frac{\mathrm{e}^{-C_1|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{3-2r}}$$

(2) Pour tout $r > \frac{3}{2}$, $R_L^{(r)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega, V, \lambda)$ est continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ et uniformément bornée.
De plus, pour tout réél $r > \frac{3}{2}$, il existe une autre constante $c_r = c_r(\Re\lambda, V) > 0$ telle que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad |R_L^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)| \leq c_r \mathrm{e}^{-C_1|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{3.9}$$

Lemme 3.10. *Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Pour $1 \leq L \leq \infty$, soient $(\lambda, \xi) \in \rho(H_L(\omega, V))$ tels que $\Re\lambda < -C_0$ et $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$. Alors $R_L(\omega, V, \lambda) R_L^m(\omega, V, \xi) R_L(\omega, V, \lambda)$, $m \in \mathbb{N}^*$, possède un noyau intégral continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ défini par :*

$$K_L^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda, \xi) := \langle R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \cdot\,; \omega, V, \overline{\lambda}), R_L^m(\omega, V, \xi) R_L^{(1)}(\cdot\,, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)\rangle \tag{3.10}$$

où $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $L^2(\Lambda_L)$.
De plus, il existe une constante $c = c_m(\eta, \Re\lambda, V) > 0$ telle que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad |K_L^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda, \xi)| \leq c \tag{3.11}$$

***Preuve** (i) **Proposition 3.1**.*
Soient $(\lambda, \xi) \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < -C_0$ et $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$.
A partir de la première équation résolvante itérée deux fois écrite au sens des noyaux :

$$\begin{aligned} R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) &= R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda) + \\ &+ (\xi - \lambda) R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda) + (\xi - \lambda)^2 K_L^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda, \xi) \end{aligned} \tag{3.12}$$

En vertu du Lemme 3.8, de la Remarque 3.9 et du Lemme 3.10, la singularité sur la diagonale de $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega, V, \lambda)$ est transférée au noyau $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega, V, \xi)$.

■

A ce stade, on peut seulement déduire une estimation du type (3.1) lorsque $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq 1$. En effet, à partir de (3.12) et en utilisant les estimations (3.8), (3.9) et (3.11), il existe une constante $c > 0$ dépendant de V telle que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq c\mathrm{e}^{-C_1|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\big(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} + |\xi - \lambda|\big) + c|\xi - \lambda|^2$$

avec $C_1 > 0$ apparaissant dans le Lemme 3.8. Soit $\delta > 0$ assez petit.
Quitte à choisir λ avec $|\Re\lambda|$ suffisamment grand pour assurer que $-C_1 + \delta < 0$:

$$|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq c(\delta, V)\big(1 + |\xi - \lambda| + |\xi - \lambda|^2\big) \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad \text{quand } |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq 1$$

Pour traiter le cas $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 1$, on utilise la stratégie (voir [98]) décrite ci-dessous. Dit de manière simplifiée, on construit à partir de $H_L(\omega, V)$ ($1 \leq L \leq \infty$) un opérateur fermé dont le noyau intégral de sa résolvante s'exprime comme le produit d'un facteur du type $\mathrm{e}^{\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ ($\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$) avec $R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$ (ξ sera pris dans l'intersection des ensembles résolvents). On montre ensuite que ce noyau est uniformément borné pour $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq 1$ ce qui nous permettra d'obtenir la décroissance exponentielle que nous voulons pour $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 1$.

Le nouvel opérateur en question est obtenu en introduisant une rotation de Combes-Thomas (voir [31]) (utilisée d'une manière bien spécifique) à l'opérateur $H_L(\omega, V)$.
Dans le Lemme 3.11 ci-dessous, on définit rigoureusement cet opérateur. Puis dans le Lemme 3.12, on donne des critères (suffisants) de stabilité spectrale.

Lemme 3.11. *Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$, avec $\vartheta := |\boldsymbol{\vartheta}|$.*
Soit $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$, $1 \leq L \leq \infty$, l'opérateur agissant sur $L^2(\Lambda_L)$ formellement défini par :

$$H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}} H_L(\omega, V) \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}} \tag{3.13}$$

Alors $\{H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V),\ \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3\}$ est une famille analytique de type (A) (terminologie Kato). De plus, $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ avec $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$, sont des opérateurs m-sectoriels de secteur :

$$\mathcal{S}(\vartheta) := \left\{ \xi \in \mathbb{C}\ :\ |\Im\xi| \leq c_1\vartheta(\Re\xi + 1/2\vartheta^2 + c_2),\ \Re\xi \in [E_0(\omega) - 1/2\vartheta^2, +\infty) \right\} \tag{3.14}$$

où $+\infty > c_2, c_1 > 0$, avec $c_2 > |E_0(\omega)|$ et $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, V))$.

Lemme 3.12. *Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $1 \leq L \leq \infty$.*
(i). Soit $\lambda \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < \inf \sigma(H_L(\omega, V))$.
Alors pour tout $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 \leq \vartheta < \sqrt{2(\inf \sigma(H_L(\omega, V)) - \Re\lambda)}$, on a $\lambda \in \rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$.
(ii). Soit $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$. Alors il existe un réél $\gamma_0 > 0$ (dépendant de η) tel que $\forall\, \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 \leq \vartheta < \frac{\gamma_0}{1+|\xi|}$, on ait $\xi \in \rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$.

Remarque 3.13. On peut également montrer le résultat suivant.
Soit $K \subset \rho(H_L(\omega, V))$, avec K un sous-ensemble compact. Alors il existe un réél $c_K > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 \leq \vartheta < c_K$, on ait $K \subset \rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$.

Voici le dernier résultat dont nous avons besoin :

Lemme 3.14. *Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$ avec $\vartheta := |\boldsymbol{\vartheta}| \geq 0$ assez petit.*
Soit $\xi \in \rho(H_L(\omega, V)) \cap \rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$ avec $1 \leq L \leq \infty$. Alors :
(i). $R_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V, \xi) := (H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V) - \xi)^{-1}$ est un opérateur intégral de noyau :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V, \xi) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) \tag{3.15}$$

(ii). Sous la condition $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq 1$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V, \xi)$ est uniformément bornée, et il existe une constante $c = c(\vartheta, \Re\lambda, |\xi|, V) > 0$ telle que :

$$|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V, \xi)| \leq c, \quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq 1 \tag{3.16}$$

Preuve (ii) ***Proposition 3.1.***
Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V)\big) \geq \eta > 0$, avec $1 \leq L \leq \infty$.
Soit $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < \vartheta := \frac{\gamma_0}{1+|\xi|}$ avec $\gamma_0 > 0$ choisi suffisamment petit pour assurer que $\xi \in \rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$. Soit $\lambda \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < -C_0 - \gamma_0^2$ avec $|\Re\lambda|$ assez grand.
Considérons d'abord le cas $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 1$.
A partir de (ii) Lemme 3.14, il existe une constante $c(\vartheta, \Re\lambda, |\xi|, V) > 0$ telle que :

$$|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq c(\vartheta, \Re\lambda, |\xi|, V)\mathrm{e}^{-\vartheta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

A partir de l'expression explicite de $c(\vartheta, \Re\lambda, |\xi|, V)$ dans (3.42) (cf. preuve Lemme 3.14), il existe un polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq p(|\xi|)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 1 \tag{3.17}$$

Considérons ensuite le cas $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1$.
A partir de la première équation résolvante itérée deux fois au sens des noyaux (3.7), en utilisant les estimations (3.8) et (3.11), il existe un autre polynôme $q(|\xi|)$ tel que :

$$|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq q(|\xi|)\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad 1 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0 \tag{3.18}$$

Il reste à trouver une estimation commune à partir de (3.17) et (3.18).
Pour cela, il est suffisant d'utiliser d'abord que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1, \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \leq \mathrm{e}^{\frac{\gamma_0}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

et ensuite que :

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, \mu > 0,\ \forall\, \nu > 0, \quad t^\mu \mathrm{e}^{-\nu t} = t^\mu \mathrm{e}^{-\frac{\nu t}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\nu t}{2}} \leq \left(\frac{2\mu}{\nu e}\right)^\mu \mathrm{e}^{-\frac{\nu t}{2}} \tag{3.19}$$

ce qui assure que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 1, \quad \mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \leq \frac{8}{\gamma_0 e}(1 + |\xi|)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0}{4(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Il suffit au final de poser $\delta_0 := \gamma_0/4 > 0$, ce qui achève la preuve.

■

Preuve Corollaire 3.1.
Considérons le cas $m = 2$. Le noyau intégral de $R_L^2(\omega, V, \xi)$ peut s'écrire :

$$\text{p.p. tout } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda_L, \quad R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, V, \xi) R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$$

Comme $R_L^{(1)}(\cdot\,, \mathbf{z}; \omega, V, \xi)$ et $R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \cdot\,; \omega, V, \xi)$ sont continus sur $\Lambda_L \setminus \{\mathbf{z}\}$ pour presque tout $\mathbf{z} \in \Lambda_L$ et que ces noyaux vérifient l'estimation (3.1), en vertu du Lemme 3.23 (cf. annexe section 5), $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$ est continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$.
Puis en utilisant l'estimation (3.72) du Lemme 3.25 (cas $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$), il s'ensuit que

$R_L^{(2)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega, V, \xi)$ est uniformément borné en $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ et obéit à une estimation du type (3.2). Dans le cas $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque, il suffit d'utiliser que :

$$R_L^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(m-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, V, \xi) R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$$

et de répéter les arguments utilisés pour le cas $m = 2$.

■

2.2 Annexe

Preuve Lemme 3.8.
Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < -C_0$, $1 \leq L \leq \infty$.
(i). Utilisant l'estimation (1.41) sur le noyau du semi-groupe, il existe $c > 0$ telle que :

$$\forall\, t \in (0, +\infty),\ \forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad |\mathrm{e}^{\lambda t} G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, \omega, V)| \leq c\mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)t} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} \tag{3.20}$$

La borne supérieure dans (3.20) est intégrable en $t \sim +\infty$ quand $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 0$ et intégrable en $t \sim 0$ quand $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0$. Ainsi pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tels que $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq d > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, |\mathrm{e}^{\lambda t} G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, \omega, V)| \leq c \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)t} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{d^2}{4t}} < +\infty \tag{3.21}$$

Utilisant maintenant la transformation de Laplace (1.44) au sens des noyaux, il s'ensuit :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\lambda t} G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, \omega, V) \tag{3.22}$$

et par l'intermédiaire de (3.21), le théorème de continuité sous le signe intégrale assure que $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega, V, \lambda)$ est continu en dehors de la diagonale D_L.
(ii). Utilisant maintenant la borne supérieure (3.20) :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)| \leq c \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)t} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}}$$

Avec le changement de variable $u := \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)t} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} = \frac{2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4u}} u^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{3u}{4}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

Puisque $(0, +\infty) \ni u \mapsto \mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4u}} \mathrm{e}^{-\frac{u}{4}}$ atteint en $u_0 := \sqrt{-(\Re\lambda + C_0)}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > 0$ son maximum, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{(\Re\lambda + C_0)t} t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} \leq 2 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{-(\Re\lambda + C_0)}}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u\, u^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{3u}{4}}$$

ce qui achève la preuve.

■

Preuve Lemme 3.10.
Pour la première partie, il suffit de vérifier les hypothèses du lemme B.7.8. dans [98]. D'une part, à partir de l'estimation (3.8), $R_L(\omega, V, \lambda)$ est un opérateur de Carleman :

$$\int_{\Lambda_L} d\mathbf{x}\, |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)|^2 \leq c^2 \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\, \frac{e^{-2C_1|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} < +\infty \quad \text{pour chaque } \mathbf{y} \in \Lambda_L \tag{3.23}$$

D'autre part, en vertu des propriétés du noyau du semi-groupe de générateur $H_L(\omega, V)$:
(1) pour tout $\phi \in L^2(\Lambda_L)$, la fonction $\mathbf{x} \mapsto \int_{\Lambda_L} d\mathbf{y}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)\phi(\mathbf{y})$ est continue.
(2) la fonction $\mathbf{x} \mapsto \int_{\Lambda_L} d\mathbf{y}\, |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda)|^2$ est continue.
Pareillement, l'opérateur $R_L(\omega, V, \overline{\lambda})$ est un opérateur de Carleman et son noyau intégral $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,; \omega, V, \overline{\lambda})$ vérifie (1) et (2) ci-dessus. D'après [98], le noyau de l'opérateur de Carleman $R_L(\omega, V, \lambda)R_L^m(\omega, V, \xi)R_L(\omega, V, \lambda)$ est continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ et est défini par (3.10). Maintenant prenons $\phi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L)$. Comme :

$$\langle \phi, R_L(\omega, V, \lambda)R_L^m(\omega, V, \xi)R_L(\omega, V, \lambda)\psi\rangle = \int_{\Lambda_L} d\mathbf{x}\, \overline{\phi(\mathbf{x})} \int_{\Lambda_L} d\mathbf{y}\, K_L^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \lambda, \xi)\psi(\mathbf{y})$$

il s'ensuit à partir des estimations de Sobolev (1.45) :

$$\begin{aligned} &|\langle \phi, R_L(\omega, V, \lambda)R_L^m(\omega, V, \xi)R_L(\omega, V, \lambda)\psi\rangle| \leq \\ &\qquad \|\phi\|_1\|\psi\|_1\|R_L(\omega, V, \lambda)\|_{2,\infty}\|R_L(\omega, V, \xi)\|_{2,2}^m\|R_L(\omega, V, \lambda)\|_{1,2} < +\infty \end{aligned} \tag{3.24}$$

Il reste à prendre pour ϕ et ψ des approximations de l'identité centrées au points $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ respectivement. Ainsi il existe une constante $c = c_m(\eta, \Re\lambda, V) > 0$ tel que :

$$|K_L^m(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \omega, V, \lambda, \xi)| \leq c$$

■

Remarque 3.15. Dans la preuve, les propriétés (1) et (2) vérifiées par $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,; \omega, V, \lambda)$ disent simplement que l'application $\mathbf{x} \mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \cdot\,; \omega, V, \lambda)$ est continue de Λ_L dans $L^2(\Lambda_L)$. En effet, (1) montre que $\mathbf{x} \mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \cdot\,; \omega, V, \lambda)$ est continue par rapport à la topologie faible de $L^2(\Lambda_L)$; (2) implique que $\mathbf{x} \mapsto \|R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \cdot\,; \omega, V, \lambda)\|_2$ est continue.

Preuve Lemme 3.11.
On commence par donner un sens rigoureux à l'opérateur formellement défini en (3.13). On limite la démonstration au cas où $1 \leq L < \infty$. Le cas $L = \infty$ se déduira par des arguments similaires. On utilise ci-dessous les notations utilisées dans le paragraphe 3.2, chapitre 1. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_L)$ tel que ϕ, $\nabla\phi$ et $\Delta\phi$ soient bornés. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, soit $u \in D(H_L(\omega, V)) \subset \mathcal{Q}(H_L(\omega, V)) = \mathcal{H}_0^1(\Lambda_L)$. Il existe alors une suite $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ qui approxime u dans la norme $\|\cdot\|_{+1}$ (voir section 2, chapitre 1). En utilisant la formule de Leibniz, on montre que la multiplication par ϕ est un opérateur borné sur $\mathcal{H}_0^1(\Lambda_L)$. Alors $\{\phi u_n\}_{n\geq 1}$ approxime ϕu dans $\mathcal{H}_0^1(\Lambda_L)$ et ainsi $\phi u \in \mathcal{Q}(H_L(\omega, V))$. Pour $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L)$, il vient alors :

$$\begin{aligned} h_L^{\omega,V}(\phi u, v) = \frac{1}{2}\langle(-i\nabla - \omega\mathbf{a})(\phi u), (-i\nabla - \omega\mathbf{a})v\rangle + \\ + \langle(V^+)^{\frac{1}{2}}(\phi u), (V^+)^{\frac{1}{2}}v\rangle - \langle(V^-)^{\frac{1}{2}}(\phi u), (V^-)^{\frac{1}{2}}v\rangle \end{aligned}$$

Puis par des intégrations par parties, on obtient :

$$h_L^{\omega,V}(\phi u, v) = \frac{1}{2}\langle(-i\nabla - \omega\mathbf{a})u, (-i\nabla - \omega\mathbf{a})(\phi v)\rangle + \langle(V^+)^{\frac{1}{2}}u, (V^+)^{\frac{1}{2}}(\phi v)\rangle +$$
$$- \langle(V^-)^{\frac{1}{2}}u, (V^-)^{\frac{1}{2}}(\phi v)\rangle - \langle(i\nabla\phi)\cdot(-i\nabla - \omega\mathbf{a})u, v\rangle - \frac{1}{2}\langle(\Delta\phi)u, v\rangle$$

C'est-à-dire :

$$h_L^{\omega,V}(\phi u, v) = h_L^{\omega,V}(u, \phi v) - \langle(i\nabla\phi)\cdot(-i\nabla - \omega\mathbf{a})u, v\rangle - \frac{1}{2}\langle(\Delta\phi)u, v\rangle \tag{3.25}$$

Puisque $h_L^{\omega,V}(u,\cdot)$ est une forme linéaire bornée et ϕ est une fonction bornée, le premier terme à droite de l'égalité dans (3.25) est une forme linéaire bornée de $v \in L^2(\Lambda_L)$. Puisque $(-i\partial_{x_j} - \omega a_j)u \in L^2(\Lambda_L)$ et puisque $\nabla\phi$ et $\Delta\phi$ sont bornées, le deuxième et le troisième terme à droite de l'égalité (3.25) donnent également des formes linéaires bornées de $v \in L^2(\Lambda_L)$. Ainsi on conclut que $\phi u \in D(H_L(\omega, V))$ et :

$$H_L(\omega, V)(\phi u) = \phi H_L(\omega, V)u - i(\nabla\phi)\cdot(-i\nabla - \omega\mathbf{a})u - \frac{1}{2}(\Delta\phi)u \tag{3.26}$$

A partir de (3.13) et en vertu de (3.26), soit l'opérateur $n_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta})$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L)$ par :

$$n_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}) := -i\boldsymbol{\vartheta}\cdot(i\nabla + \omega\mathbf{a}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}^2 \tag{3.27}$$

Soit $\varphi \in D(H_L(\omega, V)) \subset \mathcal{Q}(H_L(\omega, V))$ tel que $\|\varphi\|_2 = 1$. En vertu de (1.28), pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\epsilon' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\|n_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta})\varphi\|_2 \leq \epsilon\vartheta\|H_L(\omega, V)\varphi\|_2 + \vartheta(\epsilon' + \vartheta/2) \tag{3.28}$$

Ainsi, l'opérateur $n_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta})$ est $H_L(\omega, V)$-borné avec borne relative nulle. Le théorème IV.1.1 dans [57] assure que $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V) = H_L(\omega, V) + n_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a} + i\boldsymbol{\vartheta})^2 + V$ est fermé sur le domaine $D(H_L(\omega, V))$ indépendant de $\boldsymbol{\vartheta}$. Comme de plus $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)\phi$, avec $\phi \in D(H_L(\omega, V))$, est analytique, on conclut que $\{H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V),\ \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3\}$ est une famille analytique de type (A).
Pour terminer la preuve, il reste à prouver que $\{H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V),\ \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3\}$ est une famille d'opérateurs m-sectoriels. Soit $\phi \in D(H_L(\omega, V)) \subset \mathcal{Q}(H_L(\omega, V))$ tel que $\|\phi\|_2 = 1$. Alors :

$$\Re\langle\phi, H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)\phi\rangle = \langle\phi, H_L(\omega, V)\phi\rangle - \frac{1}{2}\langle\phi, \boldsymbol{\vartheta}^2\phi\rangle \geq \langle\phi, H_L(\omega, V)\phi\rangle - \frac{1}{2}\vartheta^2 \tag{3.29}$$

et d'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivi de l'estimation (1.27), il existe deux constantes $c > 0$ et $c' > |E_0(\omega)| > 0$ telles que :

$$|\Im\langle\phi, H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)\phi\rangle| = |\langle\phi, \boldsymbol{\vartheta}\cdot(i\nabla + \omega\mathbf{a})\phi\rangle| \leq c\vartheta(\langle\phi, H_L(\omega, V)\phi\rangle + c') \tag{3.30}$$

Soit $\Theta(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$ l'image numérique de $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$. A partir de (3.29) et (3.30), on obtient que $\Theta(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$ est inclus dans le secteur $\mathcal{S}(\vartheta)$ défini par (3.14).
L'opérateur $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ étant m-sectoriel (i.e. quasi-m-accretif et sectoriel), l'extérieur du secteur $\mathcal{S}(\vartheta)$ est un sous-ensemble de l'ensemble résolvent $\rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$.

■

Preuve Lemme 3.12.
(i). Soit $\lambda \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\Re\lambda < \inf \sigma(H_L(\omega, V))$, avec $1 \leq L \leq \infty$.
La condition $0 \leq \vartheta < \sqrt{2(\inf \sigma(H_L(\omega, V)) - \Re\lambda)}$ est une conséquence de (3.29).
(ii). Soit $\xi \in \rho(H_L(\omega, V))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, \sigma(H_L(\omega, V))\big) \geq \eta > 0$. Considérons l'inégalité (3.28) et fixons $\epsilon > 0$; en conséquence $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon)$ est un nombre réél fixé. D'après le théorème IV.3.17 dans [57], une condition suffisante assurant que $\xi \in \rho(H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V))$ est :

$$\vartheta(2|\epsilon'| + \vartheta)\|R_L(\omega, V, \xi)\| + \vartheta\epsilon\|H_L(\omega, V)R_L(\omega, V, \xi)\| < 1 \quad \text{avec } (\vartheta\epsilon) < 1$$

Sans perte de généralité, supposons que $\vartheta < 1$. Alors la condition ci-dessus est a fortiori satisfaite lorsque :

$$\vartheta(2|\epsilon'| + 1)\|R_L(\omega, V, \xi)\| + \vartheta\epsilon[1 + |\xi|\|R_L(\omega, V, \xi)\|] < 1 \quad \text{avec } (\vartheta\epsilon) < 1 \tag{3.31}$$

En maximisant le membre de gauche de (3.31) avec l'estimation $\|R_L(\omega, V, \xi)\| \leq k_0$, où $k_0 := \max\{1, \eta^{-1}\}$, on a :

$$\vartheta(2|\epsilon'| + 1)\|R_L(\omega, V, \xi)\| + \vartheta\epsilon[1 + |\xi|\|R_L(\omega, V, \xi)\|] \leq k_0\vartheta(1 + |\xi|)[1 + 2|\epsilon'| + \epsilon] < 1$$

et par conséquent (3.31) est a fortiori satisfaite lorsque :

$$\vartheta < \frac{\gamma_0}{1 + |\xi|} \quad \text{avec} \quad 1 > \gamma_0 := \frac{1}{k_0}\frac{1}{1 + 2|\epsilon'| + \epsilon} > 0 \tag{3.32}$$

■

Preuve Lemme 3.14.
L'opérateur $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ étant m-sectoriel, d'après le théorème X.52 dans [88], il est le générateur d'un semi-groupe fortement continu quasi borné (terminologie Kato) :

$$\big\{W_L(\beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V) := \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)} : L^2(\Lambda_L) \to L^2(\Lambda_L)\big\}_{\beta \geq 0} \quad 1 \leq L \leq \infty$$

Pour tout $\beta > 0$, soit $G_L(\cdot\,, \cdot\,; \beta, \omega, V)$ le noyau intégral de $W_L(\beta, \omega, V) := \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega, V)}$ (cf. paragraphe 4.1, chapitre 1). Considérons la fonction continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ définie par :

$$\forall\, (\beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_+^* \times \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V) := \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, V) \tag{3.33}$$

On peut vérifier que $G_L(\cdot\,, \cdot\,; \beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ est le noyau du semi-groupe $W_L(\beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ de générateur $H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$. Soient $\phi \in D(H_L(\omega, V))$ et $\psi := \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}}\phi \in D(H_L(\omega, V))$ (voir preuve Lemme 3.11). Il suffit d'utiliser que :

$$\begin{aligned} H_L(\omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)\phi = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}} H_L(\omega, V)\psi &= \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}}\psi - \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}} W_L(\beta, \omega, V)\psi] \\ &= \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}\left[\phi - \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} G_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, V)\phi(\mathbf{y})\right] \end{aligned}$$

A partir de l'expression de son noyau (3.33), montrons que $W_L(\beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ est borné de $L^p(\Lambda_L) \to L^q(\Lambda_L)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et que $W_L(\beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^q(\Lambda_L)$ avec $1 \leq q < \infty$ (voir par ex. [36], [50] pour d'autres propriétés).
En vertu de (1.41), le noyau (3.33) est borné par $\hat{G}_\infty(\mathbf{x}; \beta, 0, \boldsymbol{\vartheta}, V) := c\beta^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{C_0\beta}\mathrm{e}^{\vartheta|\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x}^2}{4\beta}}$; il vient alors par l'inégalité de Young :

$$\|W_L(\beta, \omega, \boldsymbol{\vartheta}, V)\|_{p,q} \leq \|\hat{G}_\infty(\cdot\,; \beta, 0, \boldsymbol{\vartheta}, V)\|_r \quad \text{avec } r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1}$$

Etant donné que $\mathrm{e}^{\vartheta|\mathbf{x}|-\frac{\mathbf{x}^2}{4\beta}} \leq \mathrm{e}^{2\vartheta^2\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\mathbf{x}^2}{8\beta}}$ puisque $(0,+\infty) \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\vartheta t-\frac{t^2}{8\beta}}$ atteint son maximum en $t_0 := 4\beta\vartheta$; il s'ensuit :

$$\|W_L(\beta,\omega,\boldsymbol{\vartheta},V)\|_{p,q} \leq c\mathrm{e}^{(2\vartheta^2+C_0)\beta}\beta^{-(1-r^{-1})\frac{3}{2}}, \quad 1-r^{-1} = p^{-1}-q^{-1} \tag{3.34}$$

pour une autre constante $c>0$ dépendant de V. En particulier :

$$\|W_L(\beta,\omega,\boldsymbol{\vartheta},V)\|_{1,\infty} = \operatorname{ess}\sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Lambda_L\times\Lambda_L} |G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,\boldsymbol{\vartheta},V)| \leq c\mathrm{e}^{(2\vartheta^2+C_0)\beta}\beta^{-\frac{3}{2}} \tag{3.35}$$

Enfin, comme pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\mathrm{e}^z-1| \leq |z|\mathrm{e}^{|z|}$, on a :

$$|G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,\boldsymbol{\vartheta},V) - G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,V)| \leq \\ c|\mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}-1|\mathrm{e}^{C_0\beta}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4\beta}} \leq c\vartheta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathrm{e}^{C_0\beta}\mathrm{e}^{\vartheta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4\beta}}$$

et par conséquent, en utilisant encore une fois l'inégalité de Young :

$$\|W_L(\beta,\omega,\boldsymbol{\vartheta},V) - W_L(\beta,\omega,V)\|_{q,q} \leq c\vartheta\mathrm{e}^{(2\vartheta^2+C_0)\beta}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{x}\,|\mathbf{x}|\mathrm{e}^{-\frac{\mathbf{x}^2}{8\beta}} \leq c(\vartheta)\mathrm{e}^{(2\vartheta^2+C_0)\beta}\beta^{\frac{1}{2}}$$

pour une constante $c(\vartheta)>0$. Puisque la borne supérieure tend vers 0 quand $\beta\to0$, $W_L(\beta,\omega,\boldsymbol{\vartheta},V)$ est un semi-groupe fortement continu.

Soit $\lambda\in\rho(H_L(\omega,V))$ tel que $\Re\lambda < -C_0-4\vartheta^2 < \inf\sigma(H_\infty(\omega,V))-\vartheta^2/2$ avec $|\Re\lambda|$ suffisamment grand. Cela assure que $\lambda\in\rho(H_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V))$ (cf. (i) Lemme 3.12). A partir de la transformation de Laplace, introduisons $R_L^m(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda) := (H_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V)-\lambda)^{-m}$, $m\in\mathbb{N}^*$:

$$R_L^m(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\,t^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda t}W_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V), \quad m\in\mathbb{N}^* \tag{3.36}$$

Utilisant (3.34) (avec $p=2$ et $q=\infty$), $R_L^m(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)$ est un opérateur intégral de noyau :

$$R_L^{(m)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}R_L^{(m)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda_L \tag{3.37}$$

En vertu de (i) Lemme 3.8, $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)$ est continu sur $(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L$ et il existe une constante $c=c(\Re\lambda,V)>0$ telle que :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L, \quad |R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)| \leq c\frac{\mathrm{e}^{-(C_1-\vartheta)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad C_1-\vartheta>0 \tag{3.38}$$

où $C_1 := \frac{1}{2}\sqrt{-(\Re\lambda+C_0)}>0$ (λ a été choisi de telle sorte que $C_1-\vartheta>0$).
D'autre part, en vertu de (2) Remarque 3.9, $R_L^{(2)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)$ est continu sur $\Lambda_L\times\Lambda_L$ et il existe une autre constante $c=c(\Re\lambda,V)>0$ telle que uniformément en $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda_L$:

$$|R_L^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)| \leq c \tag{3.39}$$

Soit $\xi\in\rho(H_L(\omega))\cap\rho(H_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta}))$ (l'intersection est non vide puisque $H_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V)$ est m-sectoriel). Utilisant les résultats ci-dessus, et en réadaptant la preuve du Lemme 3.10, l'opérateur $R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\xi)R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)$ a un noyau continu défini par :

$$\begin{aligned} K_L^1(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda,\xi) &= \langle\mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\cdot\,)}R_L^{(1)}(\mathbf{x},\cdot\,;\omega,V,\overline{\lambda}), R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\xi)\mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\cdot\,-\mathbf{y})}R_L^{(1)}(\cdot\,,\mathbf{y};\omega,V,\lambda)\rangle \\ &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}K_L^1(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda,\xi) \end{aligned} \tag{3.40}$$

où on a utilisé formellement que $R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\xi)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}}R_L(\omega,V,\xi)\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{x}}$. A partir de (3.34) et utilisant (3.36), il existe une autre constante $c=c(\Re\lambda,V)>0$ telle que :

$$\max\left(\|R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)\|_{1,2},\|R_L(\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda)\|_{2,\infty}\right)\leq c\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{(\Re\lambda+C_0+4\vartheta^2)t}t^{-\frac{3}{4}}\leq\frac{c}{(C_1^2-\vartheta^2)^{\frac{1}{4}}}$$

ce qui implique (voir méthode dans la preuve Lemme 3.10) l'estimation :

$$\sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Lambda_L\times\Lambda_L}|K_L^1(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\lambda,\xi)|\leq\frac{c}{\sqrt{C_1^2-\vartheta^2}}\tag{3.41}$$

pour une autre constante $c=c(\Re\lambda,V)>0$.

On a maintenant tous les éléments pour prouver (i) et (ii).
(i). A partir de la première équation résolvante itérée deux fois écrite au sens des noyaux, et en utilisant les expressions (3.37) et (3.40), on obtient directement :

$$R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\xi)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{\vartheta}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi)\quad\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$$

(ii). A partir des estimations (3.38) (avec la condition $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\geq 1$), (3.39) ainsi que (3.41) :

$$|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\boldsymbol{\vartheta},V,\xi)|\leq c(\vartheta,|\xi|,V),\quad c(\vartheta,|\xi|,V):=c(V)\Big(1+|\xi-\lambda|+\frac{|\xi-\lambda|^2}{\sqrt{C_1^2-\vartheta^2}}\Big)\tag{3.42}$$

■

3 Dérivées spatiales du noyau de la résolvante

Introduisons quelques résultats relatifs au noyau intégral du semi-groupe (à un paramètre) de générateur $H_{\Lambda_L}(\omega,0)=H_L(\omega,0)$ avec $1\leq L\leq\infty$.

Pour tout $\omega\in\mathbb{R}$, l'opérateur $H_\infty(\omega,0):=\frac{1}{2}(-i\nabla-\omega\mathbf{a})^2$ défini par une extension de Friedrichs (cf. preuve Proposition 1.8) est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.
On considère dans tout cette section un potentiel d'origine électrique $V\in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p>3$ (voir hypothèse (**h3**) en début de chapitre). Puisque V est $H_\infty(\omega,0)$-borné au sens des opérateurs avec borne relative nulle (voir par ex. [90]), le théorème de Kato-Rellich (théorème X.12 dans [88]) assure que $H_\infty(\omega,V):=\frac{1}{2}(-i\nabla-\omega\mathbf{a})^2+V$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Par la suite, on notera sa fermeture par le même symbole.

Soit $\{W_\infty(\beta,\omega,V)\}_{\beta\geq 0}$ le semi-groupe de générateur $H_\infty(\omega,V)$ (pour ses propriétés, voir paragraphe 4.1, chapitre 1). Pour tout $\beta>0$ et $\omega\in\mathbb{R}$, il possède un noyau intégral $G_\infty(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,V):\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ continu dans ses deux variables et vérifiant (1.41).
Ce noyau est connu explicitement dans les deux cas suivants :
(1) Lorsque $\omega=0$ et $V=0$. Le noyau de la chaleur $G_\infty(\cdot\,,\cdot\,;\beta,0,0)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en ses deux variables et est défini par (voir par ex. [34]) :

$$G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,0,0):=\frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\exp\Big(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2\beta}\Big)\quad(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)\tag{3.43}$$

(2) Lorsque $\omega \in \mathbb{R}$ et $V = 0$. $G_\infty(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,0)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en ses deux variables. Avec $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \mathbf{x}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{e}_3}{2}\cdot(\mathbf{y}\wedge\mathbf{x})$ désignant la phase magnétique (voir [76]), il est défini par (voir [6]) :

$$G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,0) := \frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\frac{\omega\beta/2}{\sinh(\omega\beta/2)}\exp\big(-i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\beta}\frac{\omega\beta/2}{\tanh(\omega\beta/2)}\big(\mathbf{e}_3\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)^2-\frac{1}{2\beta}\big(\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big)^2\right\}\quad(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)$$

Voici un dernier résultat provenant de [14]. En désignant par $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times(0,+\infty)$:

$$|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_\mathbf{x}+\omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,0)| \leq c(1+|\omega|)\frac{(1+\beta)}{\sqrt{\beta}}G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};2\beta,0,0) \tag{3.44}$$

Considérons maintenant le cas $1 \leq L < \infty$. Etant donné la géométrie choisie pour Λ_L, i.e. $\Lambda_L := (-L/2, L/2)^3$, $H_L(0,0) := -\frac{1}{2}\Delta$ avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda_L$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(H_L(0,0)) = \{\varphi\,:\,\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda_L}),\ \varphi\restriction\partial\Lambda_L = 0\}$ (voir proposition XIII.15.1 dans [90]). Idem pour l'opérateur $H_L(\omega,0) = \frac{1}{2}(-i\nabla-\omega\mathbf{a})^2$ en vertu de la Remarque 1.6, chapitre 1. En désignant par le même symbole la restriction de $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ $(p > 3)$ à Λ_L qui est $H_L(\omega,0)$-borné au sens des opérateurs avec borne relative nulle, $H_L(\omega,V) = \frac{1}{2}(-i\nabla-\omega\mathbf{a})^2+V$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathrm{Dom}(H_L(0,0))$. Par la suite, on notera sa fermeture par le même symbole.

Soit $\{W_L(\beta,\omega,V)\}_{\beta\geq 0}$ le semi-groupe de générateur $H_L(\omega,V)$ (pour ses propriétés, voir paragraphe 4.1, chapitre 1). Pour tout $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$, il possède un noyau intégral $G_L(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,V) : \Lambda_L\times\Lambda_L\to\mathbb{C}$ continu dans ses deux variables et vérifiant (1.41).
Ce noyau est connu explicitement seulement dans le cas où $\omega = 0$ et $V = 0$. $G_L(\cdot\,,\cdot\,;\beta,0,0)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en ses deux variables et est défini par (voir [4]) :

$$G_L(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta,0,0) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\prod_{j=1}^{3}\left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[\exp\left(-\frac{(x_j-y_j+2mL)^2}{2\beta}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.-\exp\left(-\frac{(x_j+y_j-(2m+1)L)^2}{2\beta}\right)\right]\right\}$$

En présence du champ magnétique, $G_L(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,0)$ est également $\mathcal{C}^\infty$ en ses deux variables. Avec $\{e_j(\omega)\}_{j\geq1}$ désignant l'ensemble des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant) de $H_L(\omega,0)$ et avec $\{\phi_j\}_{j\geq1}$ l'ensemble des vecteurs propres associés, il admet la représentation spectrale :

$$G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,0) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}\phi_j(\mathbf{x})\overline{\phi_j(\mathbf{y})}$$

Cette série est absolument convergente sur $\overline{\Lambda_L}\times\overline{\Lambda_L}$ en vertu du fait que $W_L(\beta,\omega,0)$ est de trace classe (voir (1.42)) et que les fonctions propres appartenant à $\mathrm{Dom}(H_L(0,0))$ satisfont à l'estimation uniforme :

$$|\phi_j(\mathbf{x})| \leq c(e_j(\omega)+1)$$

qui est obtenue en utilisant que $(H_L(\omega,0)+1)^{-1}$ est borné de $L^2(\Lambda_L) \to L^\infty(\Lambda_L)$.
En utilisant la régularisation avec la phase magnétique (voir [28], [75]) ainsi que les estimations dans [27] :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta) \in \Lambda_L \times \Lambda_L \times \mathbb{R}_*^+, \quad |\partial_{x_j} G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,0,0)| \leq c\frac{(1+\beta)^3}{\sqrt{\beta}} G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};2\beta,0,0)$$
$$|\partial_{x_j}\partial_{x_i} G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,0,0)| \leq c\frac{(1+\beta)^3}{\beta} G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};2\beta,0,0)$$

où $c>0$ est une constante ; il est prouvé dans [14] l'estimation uniforme en $L \geq 1$ suivante. Il existe une autre constante $c>0$ telle que $\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta,\omega) \in \Lambda_L \times \Lambda_L \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $1 \leq L < \infty$:

$$|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,0)| \leq c(1+|\omega|)^3 \frac{(1+\beta)^5}{\sqrt{\beta}} G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};8\beta,0,0) \tag{3.45}$$

En l'absence du potentiel vecteur dans le membre de gauche de (3.45), on peut prouver par une méthode similaire à celle dans [14] l'estimation suivante :

$$|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_\mathbf{x})G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,0)| \leq c(1+|\omega|)^3 L \frac{(1+\beta)^5}{\sqrt{\beta}} G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};4\beta,0,0)$$

où le facteur L provient de la majoration de $|\partial_{x_j}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})|$, avec $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{e}_3}{2}\cdot(\mathbf{y}\wedge\mathbf{x})$.
La présence du potentiel vecteur dans (3.45) permet ainsi de "réguler" la croissance en L.

Remarque 3.16. Puisque l'opérateur $H_L(\omega,V)$, $1 \leq L < \infty$, est défini avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda_L$, alors :

$$G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,V) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial\Lambda_L \text{ ou } \mathbf{y} \in \partial\Lambda_L \tag{3.46}$$

Remarque 3.17. Etant donné (3.44) et (3.45), on utilisera par la suite l'estimation commune suivante. Il existe une constante $c>0$ telle que $\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y},\beta,\omega) \in \Lambda_L \times \Lambda_L \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,0)| \leq c(1+|\omega|)^3 \frac{(1+\beta)^5}{\sqrt{\beta}} G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};8\beta,0,0) \tag{3.47}$$

avec $1 \leq L \leq \infty$ et où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 3.18. Les domaines sur lesquels $H_\infty(\omega,V)$ et $H_L(\omega,V)$ $(1 \leq L < \infty)$ sont essentiellement auto-adjoints sont inchangés si on remplace $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ par $V \in L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^3)$ $(p>3)$ (voir théorème XIII.96 dans [90], suivi du théroème de Kato-Rellich).

3.1 Preuve de la Proposition 3.3

On se place sous les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**) annoncées en début de chapitre. Voici la stratégie en trois étapes pour démontrer l'estimation (3.3) :

(1) On utilise la transformation de Laplace écrite au sens des noyaux (3.22) afin de "transporter" l'estimation (3.47) sur $|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V=0,\lambda)|$ dans le cas où $\lambda \in \rho(H_L(\omega,0))$ tel que $\lambda < 0$ avec $|\lambda|$ suffisamment grand (cf. Lemme 3.19).

(2) On étend l'estimation obtenue en (1) au cas où V vérifie l'hypothèse (**h3**) en utilisant la seconde équation résolvante (en fait son adjoint) au sens des noyaux (cf. Lemme 3.20) :

$$\begin{aligned}(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) &= (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda) + \\ &- \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\,(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,0,\lambda)V(\mathbf{z})R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}\end{aligned}$$

(3) On transfère l'estimation obtenue en (2) dans le cas où $\xi \in \rho(H_L(\omega,V))$ en utilisant la première équation résolvante au sens des noyaux :

$$\begin{aligned}(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi) &= (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) + \\ &+ (\xi-\lambda)\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\,(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V,\lambda)R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,V,\xi) \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}\end{aligned}$$

On énonce seulement les résultats intermédiaires nécessaires à la preuve de la Proposition 3.3 ; leur preuve se situe dans l'annexe de cette section.

Lemme 3.19. *Soient $1 \leq L \leq \infty$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \rho\big(H_L(\omega,0)\big)$ tel que $\Re\lambda < 0$. Soient $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $j \in \{1,2,3\}$. Alors :*
(i). $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.
(ii). Il existe une constante $c = c(\Re\lambda) > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$:

$$|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda)| \leq c(1+|\omega|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-C_2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}, \quad C_2 := \frac{\sqrt{-\Re\lambda}}{2\sqrt{2}} > 0 \quad (3.48)$$

Lemme 3.20. *Soient $1 \leq L \leq \infty$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \rho\big(H_L(\omega,V)\big)$ tel que $\lambda < -C_0$ (cf. Remarque 1.26). Soient $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $j \in \{1,2,3\}$. Alors :*
(i). $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.
(ii). Il existe une constante $c = c(\lambda,V) > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$:

$$|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda)| \leq c(1+|\omega|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{8}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \quad (3.49)$$

où $C_2 > 0$ est la constante apparaissant dans le Lemme 3.19.

Lemme 3.21. *En remplacant l'hypothèse (**h3**) par $V \in L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$, l'estimation (3.49) du Lemme 3.20 reste inchangée.*

Preuve Proposition 3.3.
Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $(\lambda,\xi) \in \rho(H_L(\omega,V))$ tel que $\lambda < -C_0$ et $\mathrm{dist}\big(\xi,\sigma(H_L(\omega,V))\big) \geq \eta > 0$.
(i). A partir de la première équation résolvante au sens des noyaux, on a sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L)\setminus D_L$:

$$\begin{aligned}(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi) &= (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) + \\ &+ (\xi-\lambda)\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\,(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V,\lambda)R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,V,\xi) \quad (3.50)\end{aligned}$$

Le premier noyau dans le membre de droite est continu sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ (cf. Lemme 3.20). Idem pour le second en vertu du Lemme 3.23 avec les estimations (3.49) et (3.2).
(ii). Soient $\delta_0 > 0$ le réél de la Proposition 3.1 et $C_2 := \sqrt{-\Re\lambda}/2\sqrt{2}$ provenant de (3.48). Quitte à choisir $\lambda < -C_0$ avec $|\lambda|$ suffisamment grand, on utilisera par la suite que :

$$\mathrm{e}^{-C_2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \leq \mathrm{e}^{-(C_2-\delta_0)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \leq \mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

Ainsi à partir de (3.50) et en utilisant les estimations (3.48) et (3.1) (compte-tenu de la remarque ci-dessus), il existe un polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad & |\mathbf{n}\cdot(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi)| \\ \leq c(1+|\omega|)^3 & \left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} + |\xi-\lambda|p(|\xi|)\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{1+|\xi|}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\right)\end{aligned}$$

En utilisant les résultats du Lemme 3.25, il existe un autre polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad & |\mathbf{n}\cdot(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi)| \\ & \leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right)\end{aligned}$$

Pour obtenir (3.3), il reste à utiliser (3.19) permettant d'obtenir :

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{4(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{4(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \leq \left(\frac{4(1+|\xi|)}{\delta_0 e}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_0}{4(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}$$

■

3.2 Annexe

Preuve Lemme 3.19.
Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \rho\big(H_L(\omega,0)\big)$ tel que $\Re\lambda < 0$. Soit $j \in \{1,2,3\}$.
(i). A partir de (3.47), il existe $c > 0$ telle que $\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\omega) \in \Lambda_L \times \Lambda_L \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$|\mathrm{e}^{\lambda t}(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};t,\omega,0)| \leq \frac{c}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}(1+|\omega|)^3\mathrm{e}^{\Re\lambda t}t^{-2}(1+t)^5\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}} \tag{3.51}$$

La borne supérieure dans (3.51) est intégrable en $t \sim 0$ quand $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 0$ et en $t \sim +\infty$ quand $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq 0$. Ainsi pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ tel que $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq d > 0$:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\,|\mathrm{e}^{\lambda t}(i\partial_{x_j}+\omega a_j(\mathbf{x}))G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};t,\omega,0)| \leq c'(1+|\omega|)^3\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\Re\lambda t}t^{-2}(1+t)^5\mathrm{e}^{-\frac{d^2}{16t}} < +\infty \tag{3.52}$$

Utilisant la transformation de Laplace au sens des noyaux (3.22), il s'ensuit :

$$(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda) = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\lambda t}(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))G_L(\mathbf{x},\mathbf{y};t,\omega,0) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \tag{3.53}$$

Puis par l'intermédiaire de (3.52), le théorème de continuité sous le signe intégrale garantit que $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.
(ii). Soit $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > 0$. A partir de (3.53) puis en utilisant (3.51) :

$$|(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda)| \leq c^{'}(1+|\omega|)^3 \sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\Re\lambda t} t^k \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}}}{t^2}$$

En remarquant que $16|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2}\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}} = t^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}}$, par une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\Re\lambda t} t^k \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}}}{t^2} = \frac{16}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \big[- \Re\lambda t - k \big] t^{k-1} \mathrm{e}^{\frac{\Re\lambda t}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\Re\lambda t}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}}$$

Puisque $(0,+\infty) \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\Re\lambda t}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}}$ atteint son maximum en $t_0 := \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{-\Re\lambda}} > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\Re\lambda t} t^k \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{16t}}}{t^2} \leq 16 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{-\Re\lambda}}{2\sqrt{2}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \big[- \Re\lambda t + k \big] t^{k-1} \mathrm{e}^{\frac{\Re\lambda t}{2}}$$

Il reste à utiliser que pour tout entier $0 \leq k \leq 6$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, t^k \mathrm{e}^{\frac{\Re\lambda t}{2}} \leq c(\Re\lambda) < +\infty$.

■

Preuve Lemme 3.20.
Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \rho\big(H_L(\omega,V)\big)$ tel que $\lambda < -C_0$ avec $|\lambda|$ suffisamment grand.
La seconde équation résolvante permet d'écrire au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$:

$$R_L(\omega,V,\lambda) = R_L(\omega,0,\lambda) - R_L(\omega,V,\lambda) V R_L(\omega,0,\lambda)$$

Puisque chacun de ces opérateurs est auto-adjoint, en prenant l'adjoint correspondant de l'équation précédente, il vient au sens des noyaux sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$:

$$R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) = R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda) - \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,0,\lambda) V(\mathbf{z}) R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) \tag{3.54}$$

Pour $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$, montrons maintenant que :
$Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\cdot\,) := (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\cdot\,;\omega,0,\lambda)V(\cdot\,)R_L^{(1)}(\cdot\,,\mathbf{y};\omega,V,\lambda) \in L^1(\Lambda_L)$.
Par les estimations (3.48) et (3.8), il existe une constante $c = c(\lambda,V) > 0$ telle que :

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{z})| \leq c(\lambda,V)(1+|\omega|)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-C_2|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} |V(\mathbf{z})| \frac{\mathrm{e}^{-C_1|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

qui devient en utilisant (3.74) :

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{z})| \leq c(\lambda,V)(1+|\omega|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_1}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} |V(\mathbf{z})| + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} |V(\mathbf{z})| \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_1}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \right) \tag{3.55}$$

où on a utilisé que $C_1/2 < C_2$ (en raison du choix de λ).
On majore maintenant les deux intégrales dans le membre de droite de (3.55). On utilise pour cela les arguments figurant dans la preuve du Lemme 3.25 dans l'annexe.
Compte-tenu de l'hypothèse (**h3**) sur V, on ne considère ici que le cas le "plus critique", à savoir $V \in L^{3+\epsilon_1}(\mathbb{R}^3)$, avec $\epsilon_1 > 0$. Soit $\epsilon_0 := \frac{\epsilon_1}{2+\epsilon_1} > 0$.
Par l'inégalité de Hölder, en posant $p := \frac{3-\epsilon_0}{1-\epsilon_0}$ et $q := \frac{3-\epsilon_0}{2}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, |V(\mathbf{z})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-q\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{2q}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\|V\|_{3+\epsilon_1}$$

Toujours par l'inégalité de Hölder (avec mêmes valeurs pour p et q) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}|V(\mathbf{z})|\frac{e^{-\frac{C_1}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \leq \|V\|_{3+\epsilon_1}\left(\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-q\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^q}\frac{e^{-q\frac{C_1}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe une autre constante $c > 0$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-q\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^q}\frac{e^{-q\frac{C_1}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^q} \leq$$
$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-qC_2|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{2q}}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{z}\, \frac{e^{-qC_1|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^{2q}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq c < +\infty$$

Regroupant ces estimations, il existe une autre constante $c = c(\lambda, V) > 0$ telle que :

$$\int_{\Lambda_L} d\mathbf{z}\, |Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{z})| \leq c(\lambda, V)(1+|\omega_0|)^3\frac{e^{-\frac{C_1}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{3.56}$$

assurant que $Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\cdot\,) \in L^1(\Lambda_L)$ pour $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$. Ainsi à partir de (3.54), pour $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$:

$$(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda) = (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda) - \int_{\Lambda_L} d\mathbf{z}\, Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{z}) \tag{3.57}$$

Montrons que $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda)$ est continue sur $(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L$.
D'une part, d'après (i) du Lemme 3.19, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda)$ est continue sur $(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L$. D'autre part avec les estimations (3.48) et (3.8) respectivement sur $|(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,0,\lambda)|$ et $|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda)|$, le Lemme 3.24 assure que sous l'hypothèse (**h3**), la fonction $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \int_{\Lambda_L} d\mathbf{z}\, Q(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{z})$ est continue sur $(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L$.
Enfin, à partir de (3.57), en utilisant (3.48) et (3.56), il existe $c = c(\lambda, V) > 0$ telle que :

$$|(i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\lambda)| \leq c(1+|\omega|)^3\left(\frac{e^{-C_2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} + \frac{e^{-\frac{C_1}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}$$

Pour achever la preuve, il reste à utiliser (3.19) pour le dernier terme :

$$\frac{e^{-\frac{C_1}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\frac{e^{-\frac{C_1}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \leq \left(\frac{8}{eC_1}\right)\frac{e^{-\frac{C_1}{8}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}$$

■

Preuve Lemme 3.21.
Comme dans la preuve précédente, considérons le cas $V \in L^{3+\epsilon_1}_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^3)$, $\epsilon_1 > 0$.
On commence par majorer la première intégrale dans le membre de droite de (3.55) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})| \le \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|<1} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})| + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>1} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})|$$

Soit $\epsilon_0 := \frac{\epsilon_1}{2+\epsilon_1} > 0$. Par l'inégalité de Hölder, en posant $p := \frac{3-\epsilon_0}{1-\epsilon_0}$ et $q := \frac{3-\epsilon_0}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|<1} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})| &\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\left(\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|<1} \mathrm{d}\mathbf{z}\,|V_1(\mathbf{z})|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|<1} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-q\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{2q}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|V\|_{L^{3+\epsilon_1}_{\mathrm{uloc}}}\left(4\pi\int_0^1 \mathrm{d}r\, \frac{1}{r^{1-\epsilon_0}}\right)^{\frac{2}{3-\epsilon_0}}\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière ligne les coordonnées sphériques usuelles.
D'autre part, en utilisant encore l'inégalité de Hölder (avec mêmes p et q que ci-dessus) :

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>1} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})| &\le \left(\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>1} \mathrm{d}\mathbf{z}\,|V(\mathbf{z})|^p \mathrm{e}^{-p\frac{C_2}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>1} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-q\frac{C_2}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{2q}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le c\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k<|\mathbf{x}-\mathbf{z}|<k+1} \mathrm{d}\mathbf{z}\,|V(\mathbf{z})|\mathrm{e}^{-p\frac{C_2}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le c\|V\|_{L^{3+\epsilon_1}_{\mathrm{uloc}}}\left(C\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-p\frac{C_2}{4}k}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\end{aligned}$$

où on a utilisé qu'il existe une constante C telle que, pour chaque k, "la coquille" $k < |\mathbf{z}| < k+1$ peut être recouverte par Ck^2 sphères de rayon unité (voir [93], [94]).
Il résulte de ces estimations l'existence d'une constante $c = c(\lambda, V) > 0$ telle que :

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}|V(\mathbf{z})|\mathrm{e}^{-\frac{C_1}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \le c \tag{3.58}$$

Par des arguments similaires, il existe une autre constante $c = c(\lambda, V) > 0$ telle que :

$$\operatorname*{ess\ sup}_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}|V(\mathbf{z})|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{C_1}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \le c \tag{3.59}$$

En réunissant (3.58) et (3.59), on obtient une estimation du type (3.56).
La preuve s'achève par le même argument que celui utilisé dans la preuve du Lemme 3.20.

■

4 Différence des noyaux des résolvantes

Ce paragraphe est consacré aux preuves de la Proposition 3.4 et de la Proposition 3.5. On rappelle qu'on se place, comme dans la section précédente, sous les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**) afin de pouvoir utiliser l'estimation (3.3).

Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $\xi \in \rho(H_L(\omega, V)) \cap \rho(H_\infty(\omega, V))$, $1 \leq L < \infty$.
Les deux preuves reposent sur l'expression de la différence des noyaux des résolvantes basée sur la deuxième identité de Green (voir [71] et [89]) :

$$R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) = \\ -\frac{1}{2}\int_{\partial\Lambda_L} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{z})\, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, V, \xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda_L \tag{3.60}$$

où $\mathbf{n}_\mathbf{z}$ désigne la normale extérieure à $\partial\Lambda_L$ en $\mathbf{z}$ et $\mathrm{d}\sigma(\mathbf{z})$ la mesure sur $\partial\Lambda_L$ définie par :

$$\forall\, \mathbf{z} \in \partial\Lambda_L, \quad \begin{cases} \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 & \text{si } \mathbf{z} = (z_1, z_2, \pm L/2) \\ \mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 & \text{si } \mathbf{z} = (\pm L/2, z_2, z_3) \\ \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_3 & \text{si } \mathbf{z} = (z_1, \pm L/2, z_3) \end{cases}$$

On rappelle que pour tout réél $\kappa > 0$, l'ensemble M_κ est défini par :

$$M_\kappa := \{\, \mathbf{x} \in \Lambda_L \ :\ \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L) \leq \kappa \,\} \quad 1 \leq L < \infty$$

Preuve Proposition 3.4.
(i). Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $\xi \in \rho(H_L(\omega, V)) \cap \rho(H_\infty(\omega, V))$, $1 \leq L < \infty$. D'après la Remarque 3.16, pour tout $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in \partial\Lambda_L \times \Lambda_L$, $\mathbf{n} \cdot (i\nabla_\mathbf{z} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{z}))R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) = \mathbf{n} \cdot i\nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)$. Pour tout $\mathbf{z} \in \partial\Lambda_L$, $(\Lambda_L \setminus M_\kappa) \ni \mathbf{x} \mapsto R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, V, \xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, V, \xi)$ est continue comme produit de fonctions continues, d'après (i) Proposition 3.1 et (i) Proposition 3.3. D'autre part, en utilisant les estimations (3.1) et (3.3), il existe un polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$\forall\, z \in \partial\Lambda_L,\ \forall\, \mathbf{x} \in \Lambda_L \setminus M_\kappa, \quad |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, V, \xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, V, \xi)| \leq p(|\xi|)(1 + |\omega|)^3$$

Par conséquent, $(\Lambda_L \setminus M_\kappa) \ni \mathbf{x} \mapsto \{R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$ est continue par application du théorème de continuité sous le signe intégrale.
(ii). Il existe $\delta > 0$ et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tel que $\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \setminus M_\kappa) \times (\Lambda_L \setminus M_\kappa)$,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Lambda_L} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{z})\, |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, V, \xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \\ &\qquad \leq p(|\xi|)(1 + |\omega|)^3 \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_{\partial\Lambda_L} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{z})\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2(1+|\xi|)}(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|+|\mathbf{z}-\mathbf{y}|)}}{\kappa^3} \\ &\qquad \leq p'(|\xi|)(1 + |\omega|)^3 \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{4(1+|\xi|)}(\mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial\Lambda_L)+\mathrm{dist}(\mathbf{y},\partial\Lambda_L))} \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière inégalité (par passage en coordonnées polaires) :

$$\int_{\partial\Lambda_L} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{z})\, \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} \leq 6 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{1+|\xi|}r} \leq c'(1 + |\xi|)^2, \quad \gamma > 0$$

Pour finir, il reste à utiliser qu'il existe un autre $\delta > 0$ et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned} &\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \\ &\qquad \leq |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| + |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V, \xi)| \leq p(|\xi|)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{aligned}$$

ce qui couvre les cas :

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \setminus M_\kappa) \times M_\kappa, \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in M_\kappa \times (\Lambda_L \setminus M_\kappa), \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in M_\kappa \times M_\kappa \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

■

Preuve Proposition 3.5.
(i). Soient $\omega \in \mathbb{R}$, $\xi \in \rho(H_L(\omega,V)) \cap \rho(H_\infty(\omega,V))$, $1 \leq L < \infty$. D'une part pour tout $\mathbf{z} \in \partial\Lambda_L$, $(\Lambda_L \setminus M_\kappa) \ni \mathbf{x} \mapsto (i\partial_{x_j} + \omega a_j(\mathbf{x}))R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V,\xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V,\xi)$ est continue. D'autre part,il existe un polynôme $p(|\xi|)$ tel que $\forall\, z \in \partial\Lambda_L$ et $\forall\, \mathbf{x} \in \Lambda_L \setminus M_\kappa$,

$$|\mathbf{n} \cdot (i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V,\xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V,\xi)| \leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^6$$

Le théorème de continuité sous le signe intégrale permet de conclure.
(ii). Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve précédente, il existe $\delta > 0$ et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tel que $\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \setminus M_\kappa) \times (\Lambda_L \setminus M_\kappa)$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Lambda_L} \mathrm{d}\sigma(\mathbf{z})\, &|\mathbf{n} \cdot (i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V,\xi)\mathbf{n}_\mathbf{z} \cdot \nabla_\mathbf{z} R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,V,\xi)| \\ &\leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^6 \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{4(1+|\xi|)}(\mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial\Lambda_L)+\mathrm{dist}(\mathbf{y},\partial\Lambda_L))}\end{aligned}$$

Pour finir, il reste à utiliser qu'il existe un autre $\delta > 0$ et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}|\mathbf{n} \cdot (i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi)| &+ |\mathbf{n} \cdot (i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V,\xi)| \\ &\leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\end{aligned}$$

ce qui couvre les cas :

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \setminus M_\kappa) \times M_\kappa, \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in M_\kappa \times (\Lambda_L \setminus M_\kappa), \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in M_\kappa \times M_\kappa \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

■

5 Annexe

Les preuves des Lemmes 3.22, 3.23 et 3.24 ci-dessous sont inspirées de [21] et [22].

Lemme 3.22. *Soient $1 \leq L \leq \infty$ et $l \in \{1,2\}$.*
Soient $A_l(\cdot\,,\cdot\,) : (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L \to \mathbb{C}$ deux noyaux intégraux vérifiant les hypothèses :
(i). $A_1(\cdot\,,\mathbf{z})$ et $A_2(\mathbf{z},\cdot\,)$ sont continus sur $\Lambda_L \setminus \{\mathbf{z}\}$ pour presque tout $\mathbf{z} \in \Lambda_L$
(ii). Il existe des réels $\gamma_l > 0$, $c_l > 0$ et $\alpha_l \in [0,3)$ tels que :

$$\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |A_l(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq c_l \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_l|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\alpha_l}} \quad l \in \{1,2\} \tag{3.61}$$

Alors $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto M(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.

Preuve Lemme 3.22.
On commence par prouver le lemme dans le cas $1 \leq L < \infty$.
Soient $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \Lambda_L$ tels que $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$. Soit ς un réél satisfaisant :

$$0 < \varsigma < \min\left\{\mathrm{dist}(\mathbf{x}_0, \partial\Lambda_L), \mathrm{dist}(\mathbf{y}_0, \partial\Lambda_L), \frac{1}{3}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|\right\}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons que ς peut être choisi de telle manière que :

$$|M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| < \varepsilon \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \text{ et } \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$$

où $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r)$ désigne la boule ouverte centrée au point $\mathbf{x}$ et de rayon $r > 0$.
Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$ et pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$, on a :

$$\begin{aligned} |M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| \leq & \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y_0})| + \\ & + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y_0})| + \\ & + \left| \int_{\Lambda_L \setminus (\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma) \cup \mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))} d\mathbf{z}\, [A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - A_1(\mathbf{x_0}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y_0})] \right| \end{aligned}$$

Etant donné l'hypothèse (ii) du lemme, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma)$, $|A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{-\alpha_1}$.
Par passage en coordonnées sphériques, il existe $c^{'} > 0$ indépendante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telle que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \leq c^{'} \varsigma^{3-\alpha_1} \tag{3.62}$$

Par les mêmes arguments, il existe une constante $c^{''} > 0$ indépendante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telle que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \leq c^{''} \varsigma^{3-\alpha_2} \tag{3.63}$$

Les deux inégalités (3.62) et (3.63) sont encore valables pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$.
On choisit maintenant ς tel que $2c^{'}\varsigma^{3-\alpha_1} + 2c^{''}\varsigma^{3-\alpha_2} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Il reste à montrer qu'avec un tel choix de ς la fonction suivante est continue :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2) \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \int_{\Lambda_L \setminus (\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma) \cup \mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))} d\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

Remarquons que pour tout $\mathbf{z} \in \Lambda_L \setminus (\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma) \cup \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma))$, on a que $|A_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \leq cte$ uniformément en $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Etant donné l'hypothèse (i) du lemme, on conclut par le théorème de continuité sous le signe intégrale.

On prouve maintenant le lemme dans le cas $L = \infty$.
Soient $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$. Soit ς un réél satisfaisant $0 < \varsigma < \frac{1}{3}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons que ς peut être choisi de telle manière que :

$$|M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| < \varepsilon \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \text{ et } \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$$

Soit $R > 0$ un réél satisfaisant $R > 2|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$.
Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$ et pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$, on a :

$$\begin{aligned}
|M(\mathbf{x},\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)| \leq & \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})| + \\
& + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})| + \\
& + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})| + \\
& + \left| \int_{\left(\mathbb{R}^3\setminus(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)\cup\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))\right)\cap\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, [A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y}) - A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})] \right|
\end{aligned}$$

D'une part, par les mêmes arguments que dans le cas $L < \infty$, il existe deux autres constantes $c^{'} > 0$ et $c^{''} > 0$ toutes deux indépendantes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telles que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c^{'}\varsigma^{3-\alpha_1}, \quad \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c^{''}\varsigma^{3-\alpha_2} \tag{3.64}$$

et les inégalités dans (3.64) sont encore valables pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$.
On choisit maintenant ς tel que $2c^{'}\varsigma^{3-\alpha_1} + 2c^{''}\varsigma^{3-\alpha_2} < \frac{\varepsilon}{3}$.
D'autre part, en vertu de l'hypothèse (ii), il existe une autre constante $c > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$ et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$, on ait :

$$|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c\mathrm{e}^{-\gamma_1|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\mathrm{e}^{-\gamma_2|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}$$

Puis en utilisant que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, R - d/3) \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$ et $\mathcal{B}(\mathbf{y}, R - 4/3d) \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$ avec $d := |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq \\
&c \operatorname*{ess\ sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \|\chi_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x},R-d/3)}\mathrm{e}^{-\gamma_1|\mathbf{x}-\cdot|}\|_2 \operatorname*{ess\ sup}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3} \|\chi_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{y},R-4/3d)}\mathrm{e}^{-\gamma_2|\cdot-\mathbf{y}|}\|_2 < +\infty
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Quitte à choisir R suffisamment grand, le membre de droite de (3.65) est strictement plus petit que $\frac{\varepsilon}{6}$. L'inégalité (3.65) est encore valable pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$.
Il reste à montrer qu'avec un tel choix de ς et R la fonction suivante est continue :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2) \ni (\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \int_{\left(\mathbb{R}^3\setminus(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)\cup\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))\right)\cap\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$$

Notons que pour $\mathbf{z} \in \left(\mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma) \cup \mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))\right) \cap \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$, $|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq cte$ uniformément en $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. On conclut par le théorème de continuité sous le signe intégrale.

■

Lemme 3.23. *Soient* $1 \leq L \leq \infty$ *et* $l \in \{1, 2\}$. *Soient* $A_l(\cdot\,,\cdot) : (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L \to \mathbb{C}$ *deux noyaux intégraux vérifiant* (i) *et* (ii) *du Lemme 3.22. Sous l'hypothèse supplémentaire* $0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < 3$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto M(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$ *est continue sur* $\Lambda_L \times \Lambda_L$.

Preuve Lemme 3.23.
On commence par prouver le lemme dans le cas $1 \leq L < \infty$.
Soient $\mathbf{x}_0 \in \Lambda_L$ et ς un réél satisfaisant $0 < \varsigma < \mathrm{dist}(\mathbf{x}_0, \partial\Lambda_L)$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons que ς peut être choisi de telle manière que :

$$|M(\mathbf{x},\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)| < \varepsilon \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$, on a :

$$\begin{aligned}|M(\mathbf{x},\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)| \leq &\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x_0})| + \\ &+ \left| \int_{\Lambda_L \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, [A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x}) - A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x_0})] \right|\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (ii) du lemme et la condition $0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < 3$, il existe $c > 0$ telle que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$ et $\forall\, \mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma)$, $|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{-(\alpha_1+\alpha_2)}$. Il s'ensuit que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| \leq c^{'} \varsigma^{3-(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{3.66}$$

avec $c^{'} > 0$ indépendant de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Notons que (3.66) est encore valable pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.
On choisit maintenant ς tel que $2c^{'}\varsigma^{3-(\alpha_1+\alpha_2)} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Il reste à montrer qu'avec un tel choix de ς la fonction suivante est continue :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\Lambda_L \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})$$

Il suffit d'appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale sachant (i).

On prouve maintenant le lemme dans le cas $L = \infty$.
Soient $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ et ς un réél satisfaisant $0 < \varsigma < r_0$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons que ς peut être choisi de telle manière que :

$$|M(\mathbf{x},\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)| < \varepsilon \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$$

Soit $R > 0$ un réél satisfaisant $R > 2r_0$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$, on a :

$$\begin{aligned}|M(\mathbf{x},\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)| \leq &\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x_0})| + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x_0})| + \\ &+ \left| \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R) \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, [A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x}) - A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x_0})] \right|\end{aligned}$$

Etant donné l'hypothèse (ii) du lemme ainsi que la condition $0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < 3$, il existe une autre constante $c^{'} > 0$ indépendante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telle que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} d\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| \leq c^{'} \varsigma^{3-(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{3.67}$$

Notons que (3.67) est encore valable pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. On choisit ς tel que $2c^{'}\varsigma^{3-(\alpha_1+\alpha_2)} < \frac{\varepsilon}{3}$. D'autre part, par l'hypothèse (ii) du lemme, il existe une autre constante $c > 0$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2)$ et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$, on ait $|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| \leq c\mathrm{e}^{-(\gamma_1+\gamma_2)|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}$. Puis en utilisant que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, R - r_0) \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})| \leq c\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \|\chi_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x},R-r_0)}\mathrm{e}^{-(\gamma_1+\gamma_2)|\mathbf{x}-\cdot|}\|_1 < +\infty \quad (3.68)$$

Quitte à choisir R suffisamment grand, le membre de droite de (3.68) est strictement plus petit que $\frac{\varepsilon}{6}$. L'inégalité (3.68) est encore valable pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.
Il reste à montrer qu'avec un tel choix de ς et R la fonction suivante est continue :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \ni \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{x})$$

Notons que pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R) \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma)$, $|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq cte$ uniformément en $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. On conclut par le théorème de continuité sous le signe intégrale sachant (i).

■

<u>Lemme</u> 3.24. *Soient* $1 \leq L \leq \infty$ *et* $l \in \{1, 2\}$.
Soient $A_l(\cdot\,,\cdot) : (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L \to \mathbb{C}$ *deux noyaux vérifiant* (i) *et* (ii) *Lemme 3.22.*
Soit $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $p \geq 1$ *vérifie* $p^{-1} = 1 - q^{-1}$ *avec* $1 \leq q < 3(\max\{\alpha_1, \alpha_2\})^{-1}$.
Alors $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \hat{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$ *est continue sur* $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.

Preuve Lemme 3.24.
On démontre seulement le cas $L = \infty$.
Soient $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$. Soit ς un réél satisfaisant $0 < \varsigma < \frac{1}{3}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons que ς peut être choisi de telle manière que :

$$|\hat{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \hat{M}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)| < \varepsilon \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \text{ et } \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$$

Soit $R > 0$ un réél satisfaisant $R > 2|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$. Pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0, \varsigma/2)$,

$$\begin{aligned} &|\hat{M}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \hat{M}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)| \leq \\ &\quad \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})| + \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})| + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})| + \\ &\quad + \left| \int_{\left(\mathbb{R}^3\setminus(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)\cup\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))\right)\cap\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, [A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y}) - A_1(\mathbf{x_0},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y_0})] \right| \end{aligned}$$

D'une part, pour tout $z \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, \varsigma)$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telle que $|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{-\alpha_1}|V(\mathbf{z})|$. Puisque par hypothèse $q\alpha_1 < 3$, par l'inégalité de Hölder, il existe une constante $c^{'} > 0$ indépendante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telle que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c\|V\|_p \left(\int_{\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{q\alpha_1}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c^{'}\varsigma^{3q^{-1}-\alpha_1} \quad (3.69)$$

Par les mêmes arguments, il existe une constante $c^{''} > 0$ indépendante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ telle que :

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c^{''}\varsigma^{3q^{-1}-\alpha_2} \tag{3.70}$$

Les deux inégalités (3.69) et (3.70) sont encore valables pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$.
On choisit maintenant ς tel que $2c^{'}\varsigma^{3q^{-1}-\alpha_1} + 2c^{''}\varsigma^{3q^{-1}-\alpha_2} < \frac{\varepsilon}{3}$.
D'autre part, en vertu de l'hypothèse (ii), il existe une autre constante $c > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma/2)$ et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)$, on ait :

$$|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c\mathrm{e}^{-\gamma_1|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}|V(\mathbf{z})|\mathrm{e}^{-\gamma_2|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}$$

Soient $q_1, q_2 \geq 1$ tels que $q_1^{-1} + q_2^{-1} = p^{-1}$. En utilisant que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, R - d/3) \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$ et $\mathcal{B}(\mathbf{y}, R - 4/3d) \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R)$ avec $d := |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|$; par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c\|\chi_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)}V\|_p \cdot \\ &\cdot \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \|\chi_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{x},R-d/3)}\mathrm{e}^{-\gamma_1|\mathbf{x}-\cdot|}\|_{q_1} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3} \|\chi_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{B}(\mathbf{y},R-4/3d)}\mathrm{e}^{-\gamma_2|\cdot-\mathbf{y}|}\|_{q_2} < +\infty\end{aligned} \tag{3.71}$$

Quitte à choisir R suffisamment grand, le membre de droite de (3.71) est strictement plus petit que $\frac{\varepsilon}{6}$. L'inégalité (3.71) est encore valable pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$.
Il reste à montrer qu'avec un tel choix de ς et R la fonction suivante est continue :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma/2) \times \mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma/2) \ni (\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \int_{\left(\mathbb{R}^3\setminus(\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma)\cup\mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))\right)\cap\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)} \mathrm{d}\mathbf{z}\, A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})$$

On a pour $\mathbf{z} \in \left(\mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{B}(\mathbf{x}_0,\varsigma) \cup \mathcal{B}(\mathbf{y}_0,\varsigma))\right) \cap \mathcal{B}(\mathbf{x}_0,R)$, $|A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})V(\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq cte|V(\mathbf{z})|$ uniformément en $\mathbf{x},\mathbf{y}$. On conclut par le théorème de continuité sous le signe intégrale.

■

<u>**Lemme**</u> **3.25.** *Soient* $1 \leq L \leq \infty$ *et* $l \in \{1,2\}$. *Soient* $A_l(\cdot\,,\cdot) : (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L \to \mathbb{C}$ *deux noyaux intégraux. Supposons qu'il existe* $\gamma_l > 0$, $c_l > 0$ *et* $\alpha_l \in \{0,1,2\}$ *tels que :*

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |A_l(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq c_l \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_l|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\alpha_l}} \quad l \in \{1,2\}$$

Alors il existe une constante $c = c(\gamma_1,\gamma_2) > 0$ *indépendante du domaine* Λ_L *telle que :*

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq \left\{ \begin{array}{ll} c\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\min(\alpha_1,\alpha_2)}} & \alpha_1,\alpha_2 \neq 1 \\ c\mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} & \alpha_1 = 1 = \alpha_2 \end{array} \right. \tag{3.72}$$

Preuve Lemme 3.25.
La preuve de ce lemme repose essentiellement sur le fait que pour $\gamma > 0$ et $\alpha \in [0,3)$:

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{\mathrm{e}^{-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\alpha}} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{\mathrm{e}^{-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\alpha}} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^{2-\alpha}\mathrm{e}^{-\gamma r} = \frac{\tilde{\Gamma}(3-\alpha)}{\gamma^{3-\alpha}} \tag{3.73}$$

où $\tilde{\Gamma}(\cdot)$ désigne la fonction gamma d'Euler (voir par ex. [1]).
Soient $\alpha_1 \in [0,3)$ et $\alpha_2 = 0$. Pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L$:

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leq c_1 c_2 \mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{\alpha_1}}$$

Soit $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
&\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \\
&\leq c_1 c_2 \mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_2}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \\
&\leq c_1 c_2 \mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_1|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_2|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Soient $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 1$. Remarquons que pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{z} \neq \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} &= \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} + \frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\right)\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|+|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \\
&\leq \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} + \frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\right)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Ainsi par l'intermédiaire de (3.74) :

$$\begin{aligned}
&\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \\
&\leq c_1 c_2 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_2}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \right)
\end{aligned}$$

La première intégrale se majore uniformément en $\mathbf{x}$ comme en (3.73) ; idem pour la seconde en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivie de estimation (3.73).
Enfin soient $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 2$. Remarquons que pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{z} \neq \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^2} &= \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} + \frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\right)^2 \frac{1}{(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|+|\mathbf{z}-\mathbf{y}|)^2} \\
&\leq \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} + \frac{1}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |A_1(\mathbf{x},\mathbf{z})A_2(\mathbf{z},\mathbf{y})| \\
&\leq c_1 c_2 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\min(\gamma_1,\gamma_2)}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_2}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^2} + 2\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_2}{2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \right)
\end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser l'estimation (3.73) pour les deux premières intégrales ; pour la dernière, on utilise encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivi de (3.73).

■

Chapitre 4

Théories des perturbations magnétiques à volume fini

L'objectif de ce chapitre est d'exprimer les grandeurs caractéristiques de la réponse diamagnétique à volume fini associées au gaz quasi-parfait (i.e. susceptibilités grand canonique, voir Théorème 2.2), en termes non plus d'opérateur mais de leur noyau intégral correspondant. On utilise pour cela une théorie des perturbations magnétiques sur le noyau intégral de la résolvante à volume fini, adaptée aux besoins du chapitre 5. Comme les ingrédients principaux sont les estimations de la Proposition 3.1 et de la Proposition 3.3, on utilisera désormais les hypothèses (**h1**) et (**h3**) (voir section 1, chapitre 3) à la place des hypothèses (**H1**) et (**H3**) du paragraphe 3.1 chapitre 1.

Dans un premier temps, on utilise la théorie des perturbations magnétiques "standarde" (méthode de la section 3 du chapitre 2 adaptée pour les noyaux) sur le noyau intégral de la résolvante à volume fini pour prouver son analycité par rapport à ω. Cela nous permet d'identifier ses dérivées n-ièmes et par suite de donner une expression des traces définissant les susceptibilités généralisées en termes de noyaux. Cependant avec cette méthode, on verra que les estimations obtenues sur les traces croîssent polynômialement en L.

Dans une deuxième partie, on utilise une autre théorie des perturbations magnétiques dite "régularisée" sur le noyau intégral de la résolvante à volume fini. L'idée est que la "singularité" de la perturbation est donné par un facteur de phase, et par une "factorisation" appropriée de cette phase, on obtient une théorie des perturbation plus "régulière". On obtient ainsi une nouvelle expression des traces définissant les susceptibilités généralisées dont les estimations croîssent au plus comme L^3. De telles estimations sont appropriées pour mettre en oeuvre la stratégie qui sera utilisée dans le chapitre 5.

On supprime comme dans le chapitre 2 la dépendance explicite en "V" dans les notations. On introduit systématiquement le paramètre $\epsilon = \pm 1$ dans les notations ; on rappelle que $\epsilon = -1$ fait référence au gaz de bosons et $\epsilon = +1$ au gaz de fermions.

1 Résultats principaux

Avant d'énoncer les principaux résultats, rappelons la définition de quelques opérateurs introduits dans la section 3, chapitre 2 ; et introduisons de nouvelles notations.

Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, [\inf \sigma(H_L(\omega_0)), +\infty)\big) \geq \eta > 0$.
Par la suite, $D_L := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L \,:\, \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ désignera la diagonale dans $\Lambda_L \times \Lambda_L$.
Soit $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0, \xi) : (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L \to \mathbb{C}$ le noyau intégral de $(H_L(\omega_0) - \xi)^{-1} := R_L(\omega_0, \xi)$.
Soient $S_{1,L}(\omega_0, \xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (i\nabla + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L(\omega_0, \xi)$ et $S_{2,L}(\omega_0, \xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})R_L(\omega_0, \xi)$ les opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$ (voir estimation (4.26)) générés par leur noyau intégral continu sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ défini respectivement par :

$$S_{1,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot (i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \tag{4.1}$$

$$S_{2,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \tag{4.2}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, soit l'opérateur dans la classe de Hilbert-Schmidt (cf. section 3, chapitre 2) $J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\omega_0, \xi) := R_L(\omega_0, \xi) \prod_{m=1}^k S_{i_m,L}(\omega_0, \xi)$ de noyau intégral :

$$J_{k,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) := \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_{k-1} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_k \, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1; \omega_0, \xi) S_{i_1,L}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega_0, \xi) \cdots$$
$$\cdots S_{i_{k-1},L}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k; \omega_0, \xi) S_{i_k,L}(\mathbf{z}_k, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$$

continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$, excepté sur la diagonale D_L lorsque $i_1 = 1$ pour $k = 1$ et lorsque $i_1 + \ldots + i_k = k$ avec $k \geq 2$ (voir Remarque 4.7).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k \geq 1$, soit $\chi_k^n(i_1, \ldots, i_k)$ la fonction caractéristique définie par :

$$\chi_k^n(i_1, \ldots, i_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 + \cdots + i_k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.3}$$

Soit $\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0)$ un voisinage complexe de ω_0 tel que la fonction à valeurs opérateurs $\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0) \ni \omega \mapsto R_L(\omega, \xi)$ soit $\mathfrak{I}_2$-analytique (cf. Proposition 2.10). On a (cf. Proposition 2.20) :

$$\forall\, \omega \in \mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0), \quad R_L(\omega, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\omega_0, \xi), \quad \text{avec :} \tag{4.4}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\omega_0, \xi) := n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1, \ldots, i_k) J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\omega_0, \xi) \tag{4.5}$$

et par convention $(\partial_\omega^0 R_L)(\omega_0, \xi) := R_L(\omega_0, \xi)$.
On prouve que pour ω suffisamment proche de ω_0, l'opérateur $R_L(\omega, \xi)$ défini en (4.4) possède un noyau intégral analytique en ω :

<u>Théorème</u> 4.1. *Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, [e_1(\omega_0), +\infty)\big) \geq \eta > 0$. Alors :*
(i). L'opérateur $(\partial_\omega^n R_L)(\omega_0, \xi)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est un opérateur intégral.
Son noyau intégral noté $(\partial_\omega^n R_L)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0, \xi)$, continu sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$, est défini par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) := n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1, \ldots, i_k) J_{k,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \tag{4.6}$$

avec la convention $(\partial_\omega^0 R_L)(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$ *pour* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$. *De plus il existe des constantes* $c_\xi \geq 1$, *et* $\delta_\xi > 0$ *suffisamment petit, telles que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\right| \leq c_\xi^{n+1}(1+|\omega_0|)^{3n} L^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2^n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{4.7}$$

(ii). Il existe un voisinage complexe $\nu_{\xi,L}(\omega_0)$ *de* ω_0 *tel que pour tout* $\omega \in \nu_{\xi,L}(\omega_0)$, *l'opérateur* $R_L(\omega,\xi)$ *possède un noyau intégral* $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$ *donné par :*

$$R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega-\omega_0)^n}{n!}\frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \tag{4.8}$$

De plus $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$ *est continu sur* $(\Lambda \times \Lambda_L) \setminus D_L$.

Etant donné que l'estimation (4.7) croît comme L^n, on utilise une autre théorie des perturbations magnétiques, dite "régularisée" (voir par ex. [28], [29], [76],...), pour obtenir une autre expression du noyau de la dérivée n-ième $(\partial_\omega^n R_L)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi) = (\partial_\omega^n R_L^{(1)})(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$.

Soient $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \Lambda_L$. Introduisons la phase magnétique ϕ et le flux magnétique fl :

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{y}\wedge\mathbf{x}) = -\phi(\mathbf{y},\mathbf{x}) \ \text{ (propriété d'antisymétrie)} \tag{4.9}$$

$$\mathrm{fl}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) := \phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \phi(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \phi(\mathbf{z},\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \cdot \left\{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\wedge(\mathbf{z}-\mathbf{y})\right\} \tag{4.10}$$

La quantité fl représente le flux magnétique à travers le triangle défini par les trois vecteurs. Pour tout entier $n \geq 1$ et $\mathbf{x} = \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ des vecteurs arbitraires dans Λ_L, on définit :

$$\mathrm{Fl}_n(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n) := \phi(\mathbf{y}_n,\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{n-1}\phi(\mathbf{y}_k,\mathbf{y}_{k+1}),$$
$$\text{avec} \quad \mathrm{Fl}_1(\mathbf{x},\mathbf{z}_1) = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{Fl}_n(\mathbf{x},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{fl}(\mathbf{x},\mathbf{y}_k,\mathbf{y}_{k+1}) \quad n \geq 2 \tag{4.11}$$

La quantité Fl_n représente le flux magnétique à travers le contour polygonal $\mathbf{y}_n \cdots \mathbf{y}_0\mathbf{y}_n$. Introduisons les opérateurs dans la classe de Hilbert-Schmidt $T_{i,L}(\omega_0,\xi)$ avec $i \in \{1,2\}$, générés par leur noyau intégral continu sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ respectivement défini par :

$$T_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega_0\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \tag{4.12}$$

$$T_{2,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \tag{4.13}$$

Soit $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, soit la fonction continue (cf. paragraphe 3.2) :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{k,L}^m(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := &\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi_j^k(i_1,\ldots,i_j)\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\cdot \\ &\cdot\frac{\big(i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_j) - \phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{y}))\big)^m}{m!}R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega_0,\xi)T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega_0,\xi) \\ &\cdots T_{i_{j-1},L}(\mathbf{z}_{j-1},\mathbf{z}_j;\omega_0,\xi)T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{y};\omega_0,\xi)\end{aligned} \tag{4.14}$$

où dans le cas $m = 0$ on adopte la convention $0^0 = 1$.

Le deuxième résultat de ce chapitre donne une nouvelle expression pour le noyau intégral de la n-ième dérivée partielle (par rapport à ω) de la résolvante à volume fini :

Théorème 4.2. *Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, [e_1(\omega_0), +\infty)\big) \geq \eta > 0$. Alors pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$, on a :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n!}\frac{\partial^n R_L^{(1)}}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) = \frac{\big(i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)^n}{n!} R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \tag{4.15}$$

De plus, on a l'estimation uniforme en $L \geq 1$:

$$|\mathcal{T}_{k,L}^{m}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega_0, \xi)| \leq c_\xi(m,k)(1 + |\omega_0|)^{3k} \tag{4.16}$$

où $c_\xi(m,k) := c_\xi^{m+k} \frac{m^{2m}}{m!} \sum_{j=1}^{k} j^{2m}$ et $c_\xi > 0$ est une autre constante.

Le Théorème 4.2 permet d'exprimer les susceptibilités généralisées grand canonique définies en (2.9) compte-tenu de (2.10) (cf. Théorème 2.2) comme :

Corollaire 4.3. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soient $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, avec $\epsilon = \pm 1$, les domaines définis en (2.1). Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ un compact tel que $z \in K$. Soit Γ_K le contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.*
Alors la pression grand canonique à volume fini peut s'écrire comme :

$$P_L(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)\right)\bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \tag{4.17}$$

et pour tout entier $n \geq 1$, les susceptibilités généralisées s'écrivent comme :

$$\mathcal{X}_L^n(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = n!\left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega_0, \xi) \tag{4.18}$$

avec $\mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$ la fonction continue définie en (4.14).
Dans le cas de l'aimantation et de la susceptibilité grand canonique à volume fini :

$$\mathcal{X}_L^1(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \\ -\left(\frac{q}{c}\right)\frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega_0, \xi) T_{1,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_0, \xi) \tag{4.19}$$

$$\mathcal{X}_L^2(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = 2\left(\frac{q}{c}\right)^2 \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \\ \cdot\left\{\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_2\, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1; \omega_0, \xi) T_{1,L}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega_0, \xi) T_{1,L}(\mathbf{z}_2, \mathbf{x}; \omega_0, \xi) + \right. \\ \left. - \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega_0, \xi) T_{2,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_0, \xi)\right\} \tag{4.20}$$

On termine cette section par ce dernier résultat :

Corollaire 4.4. *Soient $\beta > 0$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$. Alors pour $\omega \in \mathbb{R}$ assez proche de 0 :*

$$P_L(\beta, \omega, z, \epsilon) = P_L(\beta, 0, z, \epsilon) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{c}{q}\right)^2 \mathcal{X}_L^2(\beta, 0, z, \epsilon) + \mathcal{O}(\omega^4)$$

En particulier, l'aimantation en champ magnétique nul est identiquement nulle :

$$\mathcal{X}_L^1(\beta, \omega = 0, z, \epsilon) = 0 \tag{4.21}$$

Remarque 4.5. Les résultats du Théorème 4.1 peuvent être étendus sur $\overline{\Lambda_L}$ car $H_L(\omega)$ est essentiellement auto-adjoint sur $\{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda_L}),\ \varphi \restriction \partial\Lambda_L = 0\}$ (cf. chapitre 3).

Remarque 4.6. Par l'intermédiaire des opérateurs $T_{1,L}(\omega_0, \xi)$ et $T_{2,L}(\omega_0, \xi)$ générés par les noyaux intégraux (4.12) et (4.13), l'aimantation et la susceptibilité grand canonique à volume fini peuvent également s'écrire (de manière plus concise) :

$$\mathcal{X}_L^1(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = -\left(\frac{q}{c}\right)\frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda_L)}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L(\omega_0, \xi) T_{1,L}(\omega_0, \xi)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_L^2(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = 2\left(\frac{q}{c}\right)^2\frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda_L)}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L(\omega_0, \xi)\cdot \\ \cdot\left\{T_{1,L}(\omega_0, \xi)T_{1,L}(\omega_0, \xi) - T_{2,L}(\omega_0, \xi)\right\}\end{aligned}$$

2 Analycité du noyau de la résolvante à volume fini

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du Théorème 4.1.
Sa preuve repose non seulement sur l'utilisation des estimations (3.1) et (3.3) (cf. Proposition 3.1 et Proposition 3.3, mais aussi sur le Lemme 3.22 du chapitre 3).

Preuve de (i) Théorème 4.1.

Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, [e_1(\omega_0), +\infty)\big) \geq \eta > 0$.
On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\partial_\omega^n R_L)(\omega_0, \xi)$ est un opérateur intégral. Il suffit d'utiliser que $R_L(\omega_0, \xi)$ est borné de $L^2(\Lambda_L) \to L^\infty(\Lambda_L)$ (voir section 2, chapitre 3) et que les opérateurs $S_{i,L}(\omega_0, \xi)$, avec $i \in \{1, 2\}$, sont bornés sur $L^2(\Lambda_L)$. Pour estimer les normes opérateurs $\|S_{i,L}(\omega_0, \xi)\|$, on utilise les estimations sur leur noyau intégral à partir des résultats de la Proposition 3.1 et de la Proposition 3.3. Ainsi il existe une constante $c_\xi > 0$ (inutile de spécifier la dépendance explicite en $|\xi|$) uniforme en $L \geq 1$ telle que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad |S_{1,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)| \leq c_\xi L(1 + |\omega_0|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \tag{4.22}$$

$$|S_{2,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)| \leq c_\xi L^2 \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{4.23}$$

avec $\delta_\xi > 0$ suffisamment petit. Le facteur L provient de l'estimation sur $|\mathbf{a}(\mathbf{x})|$.
En utilisant que :

$$\forall\, a, b > 0,\ \forall\, t > 0, \quad t^a \mathrm{e}^{-bt} \leq \left(\frac{2a}{be}\right)^a \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}t} \tag{4.24}$$

il existe une autre constante $c_\xi > 0$ et un autre $\delta_\xi > 0$ assez petit tels que :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L)\setminus D_L, \quad |S_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq c_\xi L^i (1+|\omega_0|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \quad i \in \{1,2\} \tag{4.25}$$

Ainsi par le critère de Shur-Holmgren [57] (voir preuve du Lemme 3.25 pour le calcul) :

$$\begin{aligned} \|S_{i,L}(\omega_0,\xi)\| &\leq \max\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\Lambda_L}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\,|S_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)|, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{y}\in\Lambda_L}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\,|S_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)|\right) \\ &\leq c_\xi^{'} L^i (1+|\omega_0|)^3 \end{aligned} \tag{4.26}$$

et d'autre part :

$$\|R_L(\omega_0,\xi)\|_{2,\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\Lambda_L}\left(\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\,|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_\xi^{''} \tag{4.27}$$

A partir de l'expression (4.5), on déduit l'existence d'une autre constante $c_\xi > 0$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n!}\left\|\frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\omega_0,\xi)\right\|_{2,\infty} \leq c_\xi^n L^n (1+|\omega_0|)^{3n} \|R_L(\omega_0,\xi)\|_{2,\infty} < +\infty$$

En vertu du théorème de Dunford-Pettis (voir par ex. [98]), $(\partial_\omega^n R_L)(\omega_0,\xi)$ est un opérateur intégral dans le sens :

$$\forall\,\phi \in L^2(\Lambda_L), \quad \big((\partial_\omega^n R_L)(\omega_0,\xi)\phi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\,(\partial_\omega^n R_L)(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\phi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \Lambda_L$$

Par identification, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, son noyau intégral est défini sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$ par :

$$\frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1,\dots,i_k) J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \tag{4.28}$$

avec $J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ défini d'abord en dehors de la diagonale D_L par :

$$\begin{aligned} &J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \\ &\qquad \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_k\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega_0,\xi) S_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega_0,\xi) \cdots S_{i_k,L}(\mathbf{z}_k,\mathbf{y};\omega_0,\xi) \end{aligned} \tag{4.29}$$

On s'intéresse maintenant à la régularité de $J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$.
La continuité sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L)\setminus D_L$ de $J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0)$ est une conséquence du Lemme 3.22. En effet, pour $k=1$, à partir des estimations (4.25) et (3.1), le Lemme 3.22 assure que $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \big(R_L(\omega_0,\xi)S_{i_1,L}(\omega_0,\xi)\big)(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi) S_{i_1,L}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$ est continue en dehors de la diagonale D_L. Et d'après (3.72), il existe $c_\xi > 0$ telle que :

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\,|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi) S_{i_1,L}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq c_\xi^2 L^{i_1} (1+|\omega_0|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

pour $\delta_\xi > 0$ suffisamment petit. Pour $k = 2$, étant donné l'estimation ci-dessus, le Lemme 3.22 assure que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \left(R_L(\omega_0, \xi) S_{i_1,L}(\omega_0, \xi)\right)(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S_{i_2,L}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$. Et d'après (3.72), il existe une autre constante $c_\xi > 0$ telle que :

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \left|(R_L(\omega_0, \xi) S_{i_1,L}(\omega_0, \xi))(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S_{i_2,L}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)\right| \leq c_\xi^3 L^{i_1+i_2} (1 + |\omega_0|)^6 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{4}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Ainsi en appliquant k-fois le Lemme 3.22, on déduit que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$. Et il existe une autre constante $c_\xi > 0$ telle que :

$$|J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)| \leq c_\xi^{k+1} L^{i_1+\cdots+i_k} (1 + |\omega_0|)^{3k} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2^k}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{4.30}$$

Etant donné (4.28), on obtient (4.7) à partir de (4.30).

■

Remarque 4.7. L'utilisation de l'estimation commune (4.25) est le facteur limitant dans la preuve de la régularité de $J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$.
En effet lorsque $k = 1$, si l'indice $i_1 = 2$ alors en vertu de l'estimation (4.23), le Lemme 3.23 assure que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega_0, \xi) S_{2,L}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$ est continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$.
Ainsi, si parmi les noyaux $S_{i_j,L}(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$ $(1 \leq j \leq k)$ intervenant dans l'expression de $J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$, il y a au moins un noyau $S_{2,L}(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$, les arguments utilisés ci-dessus assurent que $J_{k,L}(i_1, \ldots, i_k)(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$ est continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$.

Remarque 4.8. Pour x réél, soit $\lceil x \rceil$ désignant la partie entière par excès de x, i.e. le plus petit entier supérieur ou égal à x. Pour tout entier $n \geq 1$, (4.28) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) = (-1)^n \sum_{i_j \in \{1,2\}^n} \chi_n^n(i_1, \ldots, i_n) J_{n,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) + \\ + \Bigg(\sum_{1 \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil} + \sum_{\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq k < n} \Bigg) (-1)^k \sum_{i_j \in \{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1, \ldots, i_k) J_{k,L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)\end{aligned}$$

Vu la définition (4.3) de la fonction caractéristique $\chi_k^n(i_1, \ldots, i_k)$, la somme sur $1 \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ne comporte que des termes identiquement nuls. Quant à la seconde somme sur $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq k < n$, elle ne comporte que des termes continus sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ d'après la Remarque 4.7. La singularité sur D_L de $(\partial_\omega^n R_L)(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$ ne provient que du premier terme.

Preuve de (ii) Théorème 4.1.

Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi, [e_1(\omega_0), +\infty)\big) \geq \eta > 0$.
Soit $\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0)$ un voisinage complexe de ω_0 sur lequel $\omega \mapsto R_L(\omega, \xi)$ est $\mathfrak{I}_2$-analytique.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L)$. En utilisant que chaque $(\partial_\omega^n R_L)(\omega_0, \xi)$ est un opérateur intégral, on a :

$$(R_L(\omega, \xi)\varphi)(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, (\partial_\omega^n R_L)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \Lambda_L$$

En utilisant (4.7), il existe une constante $c_\xi \geq 1$ et $\delta_\xi > 0$ assez petit tels que :

$$\sum_{n\geq 0} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y} \left| \frac{(\omega-\omega_0)^n}{n!} \frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\varphi(\mathbf{y}) \right|$$

$$\leq c_\xi \|\varphi\|_\infty \sum_{n\geq 0} \left(c_\xi|\omega-\omega_0|L(1+|\omega_0|)^3\right)^n \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2^n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

$$\leq c_\xi^{'} \|\varphi\|_\infty \sum_{n\geq 0} \left(4c_\xi|\omega-\omega_0|L(1+|\omega_0|)^3\right)^n$$

où on a utilisé que $\forall\, \alpha > 0$, $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2^n}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \left(\frac{2^n}{\alpha}\right)^2$ (voir par ex. [1]). Ainsi la série dans le membre de droite ci-dessus est convergente pour ω assez proche de ω_0. Le théorème de Tonelli assure alors l'intervertion de l'intégrale avec la somme, d'où :

$$\left(R_L(\omega,\xi)\varphi\right)(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega-\omega_0)^n}{n!} (\partial_\omega^n R_L)(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x}\in\Lambda_L$$

et ce résultat peut être étendu par continuité pour tout $\varphi \in L^2(\Lambda_L)$, d'où (4.8). Finalement, puisque la série ci-dessus est uniformément convergente en $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Lambda_L$ dès que $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq d > 0$, l'application $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)$ est continue sur $(\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$.

■

3 Développement régularisé à volume fini

3.1 Préliminaires

Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\operatorname{dist}\big(\xi, [e_1(\omega_0), +\infty)\big) \geq \eta > 0$.
Soient $T_{i,L}(\omega_0,\xi)$, $i \in \{1,2\}$, les opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$ de noyau intégral respectif :

$$\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L, \quad T_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega_0\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

$$T_{2,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

En vertu de la Proposition 3.1 et de la Proposition 3.3, les noyaux $T_{i,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ sont continus sur $(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L$. De plus, il existe une constante $c_\xi > 0$ telle que uniformément en $L \geq 1$:

$$|T_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq c_\xi(1+|\omega_0|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{4.31}$$

$$|T_{2,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq c_\xi \mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{4.32}$$

avec $\delta_\xi > 0$ suffisamment petit. On a utilisé l'estimation évidente $|\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$; puis dans (4.32) on a utilisé (4.24). On déduit l'estimation commune uniforme en $L \geq 1$:

$$\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L, \quad |T_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq c_\xi(1+|\omega_0|)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad i\in\{1,2\} \tag{4.33}$$

pour des autres constantes $c_\xi > 0$, et $\delta_\xi > 0$ assez petit. Par le critère de Shur-Holmgren, on déduit les estimations (uniformes en $L \geq 1$) sur les normes opérateurs :

$$\|T_{i,L}(\omega_0,\xi)\| \leq c_\xi(1+|\omega_0|)^3, \quad i \in \{1,2\}$$

pour une autre constante $c_\xi > 0$.

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et posons $d\omega := \omega - \omega_0$. Soient $\tilde{T}_{i,L}(\omega,\omega_0,\xi)$ avec $i \in \{1,2\}$ et $\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)$ les opérateurs "régularisés" sur $L^2(\Lambda_L)$ définis par leur noyau intégral respectif :

$$\tilde{T}_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) := \mathrm{e}^{id\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})}T_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi), \quad i \in \{1,2\} \tag{4.34}$$

$$\tilde{R}_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) := \mathrm{e}^{id\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})}R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

A l'exception du facteur de phase $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{x})$, le noyau intégral de $\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)$ (resp. de $\tilde{T}_{i,L}(\omega,\omega_0,\xi)$) est le même que celui de $R_L(\omega_0,\xi)$ (resp. de $T_{i,L}(\omega_0,\xi)$). Utilisant à nouveau le critère de Shur-Holmgren, $\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)$ et $\tilde{T}_{i,L}(\omega,\omega_0,\xi)$ sont des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$, i.e. il existe une constante $c_\xi > 0$ telle que :

$$\max\left(\|\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\|,\|R_L(\omega_0,\xi)\|\right) \leq c_\xi,\ \max\left(\|\tilde{T}_{i,L}(\omega,\omega_0,\xi)\|,\|T_{i,L}(\omega_0,\xi)\|\right) \leq c_\xi(1+|\omega_0|)^3$$

De plus ils appartiennent tout deux à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt :

$$\|\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\|_{\mathfrak{I}_2} = \sqrt{\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{y}|\tilde{R}_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)|^2} = \|R_L(\omega_0,\xi)\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c_\xi|\Lambda_L|^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\tilde{T}_{i,L}(\omega,\omega_0,\xi)\|_{\mathfrak{I}_2} = \|T_{i,L}(\omega_0,\xi)\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c_\xi(1+|\omega_0|)^3|\Lambda_L|^{\frac{1}{2}} \quad i \in \{1,2\}$$

pour une autre constante $c_\xi > 0$.
Soient $j \geq 1$ un entier et $(i_1,\dots,i_j) \in \{1,2\}^j$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, introduisons les familles d'opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Lambda_L)$ définies par :

$$\tilde{J}_{j,L}(i_1,\dots,i_j)(\omega,\omega_0,\xi) := \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\tilde{T}_{i_1,L}(\omega,\omega_0,\xi)\dots\tilde{T}_{i_{j-1},L}(\omega,\omega_0,\xi)\tilde{T}_{i_j,L}(\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.35}$$

et pour tout entier $k \geq j \geq 1$,

$$\tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\omega,\omega_0,\xi) := \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi_j^k(i_1,\dots,i_j)\tilde{J}_{j,L}(i_1,\dots,i_j)(\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.36}$$

Pour $\omega \in \mathbb{C}$ suffisamment proche de ω_0, le résultat suivant fournit un développement de la résolvante $R_L(\omega,\xi)$ faisant intervenir les opérateurs régularisés définis ci-dessus.

Proposition 4.9. *Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ suffisamment proche de ω_0 de telle sorte que $\xi \in \rho(H_L(\omega))$ également. Posons $d\omega = \omega - \omega_0$.*
Alors en tant qu'opérateurs dans la classe de Hilbert-Schmidt, on peut écrire :

$$R_L(\omega,\xi) = \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi) + \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k\tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\omega,\omega_0,\xi) + \tilde{\mathcal{T}}_{n+1,L}(\omega,\omega_0,\xi) \quad \textit{avec :} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{T}}_{n+1,L}(\omega,\omega_0,\xi) :=\\ &\quad (d\omega)^{n+1}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}(d\omega)^k\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi_j^{k+n+1}(i_1,\dots,i_j)\tilde{J}_{j,L}(i_1,\dots,i_j)(\omega,\omega_0,\xi)+\\ &\quad + (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}(d\omega)^k\sum_{i_l\in\{1,2\}^{n+1}}\chi_{n+1}^{k+n+1}(i_1,\dots,i_{n+1})R_L(\omega,\xi)\prod_{m=1}^{n+1}\tilde{T}_{i_m,L}(\omega,\omega_0,\xi)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.38}$$

Preuve Proposition 4.9.
Soient $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_L(\omega_0))$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ proche de ω_0 de telle sorte que $\xi \in \rho\big(H_L(\omega)\big)$. Au sens des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Lambda_L)$, on prouve d'abord l'identité :

$$R_L(\omega,\xi) = \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi) - R_L(\omega,\xi)\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.39}$$

avec $\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)$ l'opérateur défini par :

$$\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi) := d\omega\tilde{T}_{1,L}(\omega,\omega_0,\xi) + (d\omega)^2\tilde{T}_{2,L}(\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.40}$$

où $\tilde{T}_{i,L}(\omega,\omega_0,\xi)$ sont les opérateurs de Hilbert-Schmidt générés par les noyaux (4.34). D'abord, puisque $\mathbf{a}(\cdot)$ est la jauge symétrique, pour chaque $\mathbf{y} \in \Lambda_L$ fixé, on a l'identité (voir par ex. [13], [28], [76]) valable par exemple sur $\{\varphi \,:\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda_L}),\ \varphi \restriction \partial\Lambda_L = 0\}$:

$$(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))\mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})}(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{4.41}$$

En utilisant d'une part (4.41) suivi par des intégrations par parties, et d'autre part que le noyau $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ est solution de l'équation au sens des distributions :

$$(H_L(\omega_0) - \xi)R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

on obtient une identité d'abord valable pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda_L})$, $\varphi \restriction \partial\Lambda_L = 0$, et $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L)$:

$$\langle (H_L(\omega_0) - \overline{\xi})\varphi, \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi,\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi\rangle \tag{4.42}$$

Puisque l'opérateur $\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)$ est borné sur $L^2(\Lambda_L)$, l'application :

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L) \ni \psi \mapsto \langle (H_L(\omega_0) - \overline{\xi})\varphi, \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi\rangle$$

peut être étendue en une fonctionnelle linéaire et bornée sur $L^2(\Lambda_L)$. Et comme $H_L(\omega_0)$ est essentiellement auto-adjoint sur $\{\varphi \,:\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Lambda_L}),\ \varphi \restriction \partial\Lambda_L = 0\}$, l'application $\varphi \mapsto \langle (H_L(\omega_0) - \overline{\xi})\varphi, \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi\rangle$, avec $\psi \in L^2(\Lambda_L)$, peut être étendue sur $D(H_L(\omega_0))$ (le domaine d'auto-adjontion). Par conséquent $\forall\,\psi \in L^2(\Lambda_L)$, $\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi \in D(H_L(\omega_0))$ d'où :

$$\langle\varphi, (H_L(\omega_0) - \xi)\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi,\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)\psi\rangle$$

puis par un argument de densité :

$$(H_L(\omega_0) - \xi)\tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi) = \mathbb{1} + \tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)$$

ce qui achève la preuve de (4.39).
Maintenant en itérant n-fois (4.39), il vient au sens des opérateurs de Hilbert-Schmidt :

$$R_L(\omega,\xi) = \tilde{R}_L(\omega,\omega_0,\xi)\Big[\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\big(\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)\big)^k\Big] + (-1)^{n+1}R_L(\omega,\xi)\big(\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)\big)^{n+1}$$

En reprenant les arguments utilisés dans la preuve de la Proposition 2.20, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\big(d\omega\tilde{T}_{1,L}(\omega,\omega_0,\xi) + (d\omega)^2\tilde{T}_{2,L}(\omega,\omega_0,\xi)\big)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi_j^k(i_1,\dots,i_j)\prod_{m=1}^{j}\tilde{T}_{i_m,L}(\omega,\omega_0,\xi) +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2n}(d\omega)^k\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi_j^k(i_1,\dots,i_j)\prod_{m=1}^{j}\tilde{T}_{i_m,L}(\omega,\omega_0,\xi)$$

et l'identité suivante :

$$(-1)^{n+1}R_L(\omega,\xi)\big(\tilde{T}_L(\omega,\omega_0,\xi)\big)^{n+1} =$$
$$(-1)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n+2}(d\omega)^k\sum_{i_l\in\{1,2\}^{n+1}}\chi^k_{n+1}(i_1,\dots,i_{n+1})R_L(\omega,\xi)\prod_{m=1}^{n+1}\tilde{T}_{i_m,L}(\omega,\omega_0,\xi)$$

■

Remarque 4.10. Le développement en puissance de $d\omega$ de la résolvante (4.37) n'est pas complet puisqu'il comporte des opérateurs régularisés (dépendant encore de ω).
Il est donc nécessaire de poursuivre ce développement par l'intermédiaire des noyaux de ces opérateurs régularisés pour faire "sortir" tous les $d\omega$. C'est l'objet du prochain paragraphe.

3.2 Preuve du Théorème 4.2

Soient $\omega_0\in\mathbb{R}$ et $\xi\in\rho(H_L(\omega_0))$ tel que $\mathrm{dist}\big(\xi,[e_1(\omega_0),+\infty)\big)\geq\eta>0$.
Soit $\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0)$ un voisinage complexe de ω_0 tel que pour tout $\omega\in\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0)$, $\xi\in\rho(H_L(\omega))$ (c'est toujours possible car $H_L(\omega)$ est m-sectoriel, voir Lemme 1.22) et tel que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L$, $\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0)\ni\omega\mapsto R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)$ soit analytique.
Soit ω fixé dans un tel voisinage $\mathcal{V}_{\xi,L}(\omega_0)$. En réécrivant le développement (4.37) en termes des noyaux intégraux correspondant, on obtient :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in(\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L,\quad R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)=\mathrm{e}^{id\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})}R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k\tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi)+\tilde{\mathcal{T}}_{1,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi)+\tilde{\mathcal{T}}_{2,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi)\quad(4.43)$$

avec pour tout entier $k\geq 1$ et pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Lambda_L\times\Lambda_L$:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi):=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{i_l\in\{1,2\}}\chi^k_j(i_1,\dots,i_j)\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{e}^{id\omega(\phi(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)+\phi(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)+\cdots+\phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{y}))}R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega_0,\xi)T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega_0,\xi)\cdots$$
$$\cdots T_{i_{j-1},L}(\mathbf{z}_{j-1},\mathbf{z}_j;\omega_0,\xi)T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{y};\omega_0,\xi)\quad(4.44)$$

ainsi que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Lambda_L\times\Lambda_L$:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{1,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi):=(d\omega)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(d\omega)^k\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi^{k+n+1}_j(i_1,\dots,i_j)\cdot$$
$$\cdot\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\,\tilde{R}_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega,\omega_0,\xi)\tilde{T}_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega,\omega_0,\xi)\cdots\tilde{T}_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{2,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi):=(-1)^{n+1}(d\omega)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}(d\omega)^k\sum_{i_l\in\{1,2\}^{n+1}}\chi^{k+n+1}_{n+1}(i_1,\dots,i_{n+1})\cdot$$
$$\cdot\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_{n+1}\,R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega,\xi)\tilde{T}_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega,\omega_0,\xi)\dots\tilde{T}_{i_{n+1},L}(\mathbf{z}_{n+1},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi)$$

Remarquons que le noyau $\tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\omega_0,\xi)$ défini en (4.44) est continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$. Pour le voir, il suffit d'appliquer j-fois le Lemme 3.23 étant donné (3.1) et l'estimation commune (4.33). De plus, puisque l'exponentielle peut être majorer par 1, en réutilisant les arguments de la section précédente, on déduit l'existence d'une constante $c_\xi > 0$ tel que uniformément en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda_L$ et $L \geq 1$:

$$|\tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi)| \leq c_\xi (1+|\omega_0|)^{3k} \tag{4.45}$$

Notons qu'on dispose également des mêmes propriétés de continuité pour les noyaux $\tilde{\mathcal{T}}_{1,n+1,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\omega_0,\xi)$ et $\tilde{\mathcal{T}}_{2,n+1,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\omega_0,\xi)$.

Développons maintenant l'exponentielle, en facteur du noyau $R_L^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ dans (4.43), en série entière. Pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, on a :

$$\mathrm{e}^{id\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \sum_{k=0}^{n} (d\omega)^k \frac{\big(i\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)^k}{k!} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) + \mathcal{T}_{3,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.46}$$

avec :

$$\mathcal{T}_{3,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) := \sum_{k=n+1}^{\infty} (d\omega)^k \frac{\big(i\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)^k}{k!} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

Développons également l'exponentielle en série entière à l'intérieur de (4.44). En utilisant pour $n \in \mathbb{N}^*$ la quantité $\mathrm{Fl}_n(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_n) := \phi(\mathbf{z}_n,\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\mathbf{z}_k,\mathbf{z}_{k+1})$, $\mathbf{z}_0 := \mathbf{x}$, on a :

$$\forall\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad \tilde{\mathcal{T}}_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} (d\omega)^m \mathcal{T}_{k,L}^m(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \tag{4.47}$$

avec (en utilisant la convention $0^0 = 1$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{k,L}^m(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1,\dots,i_j) \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \cdot \\ &\cdot \frac{\big(i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j) - \phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{y}))\big)^m}{m!} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega_0,\xi) T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega_0,\xi) \cdots \\ &\cdots T_{i_{j-1},L}(\mathbf{z}_{j-1},\mathbf{z}_j;\omega_0,\xi) T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{y};\omega_0,\xi) \end{aligned} \tag{4.48}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini pour intervertir la somme infinie avec les intégrales compte-tenu du fait que l'estimation $|\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \sqrt{3}L^2$ entraîne que :

$$\big| i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j) - \phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{z}_j,\mathbf{y}))\big| \leq 2(j+1)L^2$$

Notons également que la fonction $\mathcal{T}_{k,L}^m(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ est continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$. En effet, à partir de la définition de Fl_j comme somme de phases, il suffit d'utiliser la formule du multinôme pour répartir chacune des phases (avec une certaine puissance) sous les intégrales. Il reste ensuite à appliquer j-fois le Lemme 3.23 pour chaque terme de la somme (sachant que $|\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \sqrt{3}L^2$).

On a besoin pour continuer du lemme suivant :

Lemme 4.11. *Pour tout* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L$*, on a l'identité :*

$$\sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n-k}(d\omega)^m \mathcal{T}_{k,L}^{m}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=1}^{k} \mathcal{T}_{m,L}^{k-m}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

Par l'intermédiaire du Lemme 4.11, on obtient :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{\infty}(d\omega)^m \mathcal{T}_{k,L}^{m}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \\ \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=1}^{k} \mathcal{T}_{m,L}^{k-m}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) + \mathcal{T}_{4,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.49}$$

avec :

$$\mathcal{T}_{4,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) := \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=n-k+1}^{\infty}(d\omega)^m \mathcal{T}_{k,L}^{m}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

Au final à partir de (4.43), en réunissant (4.46) et (4.47) sachant (4.49), on a :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L, \quad R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) = \\ R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) + \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \left\{ \frac{\big(i\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)^k}{k!} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) + \sum_{m=1}^{k} \mathcal{T}_{m,L}^{k-m}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \right\} + \\ + \sum_{l=1}^{2} \tilde{\mathcal{T}}_{l,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) + \mathcal{T}_{3,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) + \mathcal{T}_{4,n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\omega_0,\xi) \tag{4.50}$$

Par construction, les quatres termes dans la dernière ligne de (4.50) ont chacun leur n premières dérivées partielles (par rapport à ω) évaluées en ω_0 égales à 0. On peut alors identifier la n-ième dérivée partielle évaluées en ω_0 de la partie hors diagonale du noyau de la résolvante comme le coefficient multipliant la puissance n-ième de $d\omega$, d'où (4.15).

Prouvons maintenant (4.16).
Soit $\mathbf{x} \in \Lambda_L$. Soient $m \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers. A partir de (4.48), en utilisant les estimations (3.1) et (4.33), il existe une constante $c_\xi > 0$ tel que :

$$|\mathcal{T}_{k,L}^{m}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega_0,\xi)| \leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1,\dots,i_j) c_\xi^j (1+|\omega_0|)^{3j} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_2 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \,\cdot \\ \cdot \frac{|\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j)|^m}{m!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|} \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}$$

pour $\delta_\xi > 0$ suffisamment petit. Etant donné (4.11) sachant (4.10), on a l'estimation :

$$|\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j)| \leq \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{l'=1}^{l} |\mathbf{z}_{l'-1} - \mathbf{z}_{l'}||\mathbf{z}_l - \mathbf{z}_{l+1}|$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j)|^m \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}\frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}\\
&\quad\le \left(\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{l'=1}^{l}|\mathbf{z}_{l'-1}-\mathbf{z}_{l'}||\mathbf{z}_l-\mathbf{z}_{l+1}|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{m}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|^{\frac{1}{m}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{m}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|^{\frac{1}{m}}}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{m}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|^{\frac{1}{m}}}\right)^m
\end{aligned}\tag{4.51}$$

Identifions $\mathbf{x}=\mathbf{z}_0$. Pour $1\le l\le j-1$, $1\le l'\le l$ et $\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j\in\Lambda_L^{j+1}$, il existe une constante $c_\xi'>0$ telle que :

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{z}_{l'-1}-\mathbf{z}_{l'}||\mathbf{z}_l-\mathbf{z}_{l+1}|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{m}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|^{\frac{1}{m}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{m}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|^{\frac{1}{m}}}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{m}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|^{\frac{1}{m}}}\\
&\qquad\le c_\xi' m^2\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2m}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|^{\frac{1}{m}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2m}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|^{\frac{1}{m}}}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2m}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|^{\frac{1}{m}}}
\end{aligned}\tag{4.52}$$

où on a utilisé (4.24). Puis en insérant (4.52) dans (4.51) :

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_j)|^m \frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}\frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\delta_\xi|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}\\
&\qquad\le (c_\xi')^m\left(\sum_{l=1}^{j-1} lm^2\right)^m\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}\\
&\qquad\le (c_\xi')^m\big(j^2m^2\big)^m\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}
\end{aligned}$$

Par le Lemme 3.25, il existe une constante $c_\xi''>0$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_2\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta_\xi}{2}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}\le c_\xi''$$

Au final, il existe une autre constante $c_\xi>0$ telle que :

$$|\mathcal{T}_{k,L}^m(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega_0,\xi)|\le c_\xi^{m+k}\left(\frac{m^{2m}}{m!}\sum_{j=1}^k j^{2m}\right)(1+|\omega_0|)^{3k}$$

■

4 Susceptibilités généralisées à volume fini

On utilise les résultats des deux paragraphes précédents pour prouver le Corollaire 4.3.

Soient $\beta>0$ et $\omega_0\in\mathbb{R}$. Soient $z\in\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ et $K\subset\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$ un compact tel que $z\in K$. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine

d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.
En tant qu'opérateurs de classe trace sur $L^2(\Lambda_L)$ (voir Théorème 2.2), introduisons :

$$\frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\beta, \omega_0, z, \epsilon) := \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega_0)}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \frac{\partial^n R_L}{\partial \omega^n}(\omega_0, \xi) \quad (4.53)$$

où $(\partial_\omega^n R_L)(\omega_0, \xi)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est défini en (4.5) ; et par convention $(\partial_\omega^0 R_L)(\omega_0, \xi) = R_L(\omega_0, \xi)$.

Basé sur le Théorème 4.1, on prouve le résultat suivant :

Proposition 4.12. *Soient $\beta > 0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $z \in K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, avec K un compact. Alors l'opérateur $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est un opérateur intégral. Son noyau intégral $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\cdot\,, \cdot\,; \beta, \omega_0, z, \epsilon)$, continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$, est défini par :*

$$\frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega_0, z, \epsilon) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \frac{\partial^n R_L^{(1)}}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \quad \textit{quand } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega_0, z, \epsilon) := \frac{i}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \frac{\partial^n R_L^{(1)}}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \quad (4.55)$$

où $(\partial_\omega^0 R_L^{(1)})(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) = R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$ et $(\partial_\omega^n R_L^{(1)})(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$, $n \in \mathbb{N}^*$, défini en (4.6). De plus, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une constante $c_n = c(\beta, K, n) > 0$ telle que :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad \frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega_0, z, \epsilon) \right| \leq c_n L^n (1 + |\omega_0|)^{3n} \quad (4.56)$$

Preuve Proposition 4.12
En vertu des résultats de la Proposition 3.1 et de la Proposition 3.3, les constantes $c_\xi^{'}$ et $c_\xi^{''}$ dans (4.26) et (4.27) respectivement peuvent être remplacées par des polynômes $p(|\xi|)$. À partir de (4.53) sachant (4.26) et (4.27), puis en utilisant la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ sur le contour Γ_K (voir Lemme 2.7), il existe un autre polynôme $p_n(|\xi|)$ tel que :

$$\frac{1}{n!} \left\| \frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\beta, \omega_0, z, \epsilon) \right\|_{2,\infty} \leq L^n (1 + |\omega_0|)^{3n} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, p_n(|\xi|) |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| < +\infty$$

La notation $p_n(|\xi|)$ siginifie que le degré maximal du polynôme est de la forme κn, $\kappa > 0$. Le théorème de Dunford-Pettis (voir par ex. [102]) assure que $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$ est un opérateur intégral dans le sens : pour tout $\varphi \in L^2(\Lambda_L)$,

$$\big((\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon)\varphi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, (\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega_0, z, \epsilon)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \Lambda_L$$

Identifions maintenant ce noyau. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Lambda_L)$. En vertu de (4.53) :

$$\begin{aligned} \big((\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon)\varphi\big)(\mathbf{x}) &= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \big((\partial_\omega^n R_L)(\omega_0, \xi)\varphi\big)(\mathbf{x}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \Lambda_L \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{y}\, (\partial_\omega^n R_L^{(1)})(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)\varphi(\mathbf{y}) \quad (4.57) \end{aligned}$$

En substituant toutes les constantes par des polynômes $p(|\xi|)$ dans la preuve de (4.7) ; $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c_n = c(n) > 0$ et un autre polynôme $p_n(|\xi|)$ tels que :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L)\setminus D_L, \quad \frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n R_L^{(1)}}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\right| \leq p_n(|\xi|)L^n(1+|\omega_0|)^{3n}\frac{\mathrm{e}^{-c(n)\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{4.58}$$

avec $\delta > 0$ suffisamment petit. Puis en vertu de la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)$ sur le contour Γ_K, l'estimation (4.58) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,|(\partial_\omega^n R_L^{(1)})(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\varphi(\mathbf{y})| \\
&\qquad\leq n!\|\varphi\|_\infty L^n(1+|\omega_0|)^{3n}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,p_n(|\xi|)|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,\frac{\mathrm{e}^{-c(n)\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \\
&\qquad\leq n!\|\varphi\|_\infty L^n(1+|\omega_0|)^{3n}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,p_n'(|\xi|)|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)| < +\infty
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,\frac{\mathrm{e}^{-c(n)\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = (\frac{1+|\xi|}{c(n)\delta})^2$ (voir par ex. [1]). Le théorème de Tonelli assure alors l'intervertion des intégrales dans (4.57), et pour presque tout $\mathbf{x} \in \Lambda_L$ on a l'identité :

$$\big((\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)\varphi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{y}\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)(\partial_\omega^n R_L^{(1)})(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\varphi(\mathbf{y})\right) \tag{4.59}$$

qui peut être étendue par continuité ($(\partial_\omega^n\mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ est borné) pour tout $\varphi \in L^2(\Lambda_L)$.

Sans modifier la définition (4.53) de l'opérateur $(\partial_\omega^n\mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)$, en raison d'une part de l'estimation (4.58) et d'autre part de la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)$ sur le contour Γ_K, la seule chose qu'on puisse prouver est que $(\partial_\omega^n\mathcal{I}_L)(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ est continu en dehors de la diagonale D_L et obéit à une estimation du type :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L, \quad \frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n\mathcal{I}_L}{\partial\omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega_0,z,\epsilon)\right| \leq \frac{c_n L^n(1+|\omega_0|)^{3n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

pour une constante numérique $c_n = c(\beta,K,n) > 0$. Une estimation de ce type n'est pas convenable puisque l'opérateur $(\partial_\omega^n\mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ est de classe trace, i.e.

$$\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{x}\,(\partial_\omega^n\mathcal{I}_L)(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega_0,z,\epsilon) < +\infty$$

La méthode utilisée pour prouver la continuité sur $\Lambda_L\times\Lambda_L$ de $(\partial_\omega^n\mathcal{I}_L)(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ consiste à faire apparaître une résolvante supplémentaire dans l'expression (4.53) sachant (4.5). Pour cela, il suffit de faire une intégration par parties dans (4.53).

Pour la suite, on a besoin du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 4.13. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, $\epsilon = \pm 1$, un compact. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type* (2.12) *inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir* (2.11)*) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) := \ln(1+\epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$.*

Alors toute primitive de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ est également holomorphe sur le domaine $\mathfrak{D}$.
De plus, parmi ces primitives, on peut toujours en choisir une exponentiellement décroissante sur le contour Γ_K, i.e. il existe $F_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ et une constante $c(\beta, K) > 0$ tel que :

$$\forall\, z \in K,\ \forall\, \xi \in \Gamma_K, \quad |F_\epsilon(\beta, z; \xi)| \leq c(\beta, K) \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi} \tag{4.60}$$

Et pour tout polynôme $p(|\xi|)$, il existe une autre constante $c(\beta, K) > 0$ telle que :

$$\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi||p(|\xi|)||F_\epsilon(\beta, z; \xi)| \leq c(\beta, K) < +\infty \tag{4.61}$$

Soit l'opérateur $(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega_0)})$. Soit $F_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ une primitive de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ choisie comme dans le Lemme 4.13. Puisque le contour Γ_K est inclus dans le domaine d'holomorphie de $F_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ $\forall\, z \in K$, par une intégration par parties, on a :

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L(\omega_0, \xi) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L^2(\omega_0, \xi)$$

c'est-à-dire :

$$(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L(\omega_0, \xi) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L^2(\omega_0, \xi)$$

Par identification (voir méthode page précédente), le noyau intégral de $(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$ peut également s'écrire :

$$\forall\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L, \quad (\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega_0, z, \epsilon) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi)$$

où $R_L^{(2)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$ est le noyau intégral de $R_L^2(\omega_0, \xi)$. Puisque $R_L^{(2)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega_0, \xi)$ est continu et uniformément borné par un polynôme $p(|\xi|)$ (voir Corollaire 3.2), le théorème de continuité sous le signe intégrale assure que $(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\cdot\,, \cdot\,; \beta, \omega_0, z, \epsilon)$ est continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ et uniformément borné par une constante $c_0 = c(\beta, K) > 0$.

Remarque 4.14. D'après (4.59), le noyau de $(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\beta, \omega_0, z, \epsilon)$ s'écrit également :

$$(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega_0, z, \epsilon) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

Comme $(\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\cdot\,, \cdot\,; \beta, \omega_0, z, \epsilon)$ est continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ en vertu des arguments ci-dessus, cela signifie que l'intégration par rapport à la variable ξ de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,) R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \cdot\,)$ fait disparaître la sigularité sur la diagonale D_L donnée par le noyau de la résolvante :

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Lambda_L, \quad (\partial_\omega^0 \mathcal{I}_L)(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega_0, z, \epsilon) = \frac{i}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_K} \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega_0, \xi) \right) \Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \tag{4.62}$$

Prouvons maintenant que pour tout entier $n \geq 1$, le noyau $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ est continu. Par une intégration par parties (par rapport à la variable ξ) dans (4.53) compte-tenu de (4.6), pour tout $n \geq 1$, $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ peut également s'écrire comme :

$$(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon) = -n!\frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{i_j\in\{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1,\dots,i_k)\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta,z;\xi) R_L(\omega_0,\xi)\cdot$$
$$\cdot\Big(J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\omega_0,\xi) + \sum_{m=1}^{k} S_{i_1,L}(\omega_0,\xi)\cdots \hat{S}_{i_m,L}(\omega_0,\xi)\cdots S_{i_k,L}(\omega_0,\xi)\Big) \quad (4.63)$$

où $\hat{S}_{i_m,L}(\omega_0,\xi)$, avec $i_m \in \{1,2\}$, désignent les opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$ définis par :

$$\hat{S}_{1,L}(\omega_0,\xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\big(i\nabla + \omega_0\mathbf{a}(\mathbf{x})\big)R_L^2(\omega_0,\xi), \quad \hat{S}_{2,L}(\omega_0,\xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})R_L^2(\omega_0,\xi)$$

Ces deux opérateurs sont générés par leur noyau intégral défini respectivement par :

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L\times\Lambda_L)\setminus D_L, \quad \hat{S}_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\big(i\nabla_{\mathbf{x}} + \omega_0\mathbf{a}(\mathbf{x})\big)R_L^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \quad (4.64)$$

$$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L\times\Lambda_L, \quad \hat{S}_{2,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x})R_L^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \quad (4.65)$$

Clairement $\hat{S}_{2,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ est continu sur $\Lambda_L\times\Lambda_L$ alors que $\hat{S}_{1,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ est continu en dehors de la diagonale D_L. Pour le voir, il suffit d'utiliser le Lemme 3.22 étant donné que :

$$\hat{S}_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\, S_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi)R_L^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}$$

Pour tout $\xi \in \Gamma_K$, ces deux noyaux obéissent à l'estimation commune :

$$|\hat{S}_{i,L}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_0,;\xi)| \leq p(|\xi|)L^i(1+|\omega_0|)^3\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad i\in\{1,2\} \quad (4.66)$$

pour $\delta > 0$ suffisamment petit et où $p(|\xi|)$ est un polynôme.

A partir de (4.63) et en utilisant (4.64)-(4.65), le noyau intégral de $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ est défini d'abord en dehors de la diagonale D_L par :

$$(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega_0,z,\epsilon) = -n!\frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{i_j\in\{1,2\}^k} \chi_k^n(i_1,\dots,i_k)\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta,z,\xi)\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi)J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)+$$
$$+\sum_{m=1}^{k}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi)\hat{I}_{k,L}^m(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\Bigg) \quad (4.67)$$

où $J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ est défini par (4.29) ; et avec la convention $\mathbf{z}_0 := \mathbf{z}$, $\mathbf{z}_k := \mathbf{y}$:

$$\hat{I}_{k,L}^m(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi) := \int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_{k-1}\, S_{i_1,L}(\mathbf{z},\mathbf{z}_1;\omega_0,\xi)\cdots$$
$$\cdots\hat{S}_{i_m,L}(\mathbf{z}_{m-1},\mathbf{z}_m;\omega_0,\xi)\cdots S_{i_k,L}(\mathbf{z}_{k-1},\mathbf{y};\omega_0,\xi), \quad m\in\{1,\dots,k\} \quad (4.68)$$

La continuité sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ de $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ est une conséquence du Lemme 3.23. En effet, en raison de l'estimation (4.30), le Lemme 3.23 assure que la fonction $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi) J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$ est continue sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$.
Par ailleurs, il existe un polynôme $p_k(|\xi|)$ tel que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L$:

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi) J_{k,L}(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq p_k(|\xi|) L^{i_1+\dots+i_k} (1+|\omega_0|)^{3k} \tag{4.69}$$

La continuité de $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi) \hat{I}_{k,L}^m(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$ sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ est assurée par la présence d'un noyau du type $\hat{S}_{i_m,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ dans l'expression de $\hat{I}_{k,L}^m(i_1,\dots,i_k)(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ puisqu'il permet d'obtenir une estimation de la forme :

$$|\hat{I}_{k,L}^m(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq p_k(|\xi|) L^{i_1+\dots+i_k} (1+|\omega_0|)^{3k} \frac{\mathrm{e}^{-c\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{y} \tag{4.70}$$

avec $c = c(k) > 0$, $\delta > 0$ assez petit et pour un autre polynôme $p_k(|\xi|)$. Par conséquent, il existe un autre polynôme $p_k(|\xi|)$ tel que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L$:

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}\, |R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega_0,\xi) \hat{I}_{k,L}^m(i_1,\dots,i_k)(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega_0,\xi)| \leq p_k(|\xi|) L^{i_1+\dots+i_k} (1+|\omega_0|)^{3k} \tag{4.71}$$

Finallement à partir de (4.67), en utilisant les estimations (4.69) et (4.71) ainsi que la décroissance exponentielle de $F_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)$ sur le contour Γ_K, on obtient (4.56).

■

Remarquons que la borne supérieure sur $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega_0,z,\epsilon)$ donnée par (4.56) est d'ordre L^n. Il s'ensuit qu'une borne supérieure de sa trace sera de l'ordre de L^{n+3}. Cependant, pour les besoins du chapitre 5, on souhaite avoir une borne supérieure d'ordre au plus L^3. C'est là que le développement régularisé du paragraphe 3 trouve son intérêt.

Basé sur les résultats du Théorème 4.2, on établit :

Proposition 4.15. *Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $z \in K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega_0))$, avec K compact. Alors le noyau diagonal de l'opérateur $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\beta,\omega_0,z,\epsilon)$, $n \in \mathbb{N}^*$, s'écrit :*

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Lambda_L, \quad \frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega_0,z,\epsilon) = n! \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \sum_{k=1}^n \mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega_0,\xi) \tag{4.72}$$

où $\mathcal{T}_{k,L}^m(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$, avec $m \in \mathbb{N}$, est la fonction continue définie en (4.14).
De plus, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une constante $c_n = c(\beta,K,n) > 0$ telle que uniformément en $L \geq 1$:

$$\forall\, \mathbf{x} \in \Lambda_L, \quad \frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega_0,z,\epsilon)\right| \leq c_n (1+|\omega_0|)^{3n} \tag{4.73}$$

Preuve Proposition 4.15
A partir de (4.55) et compte-tenu de (4.15), il vient pour tout $\mathbf{x} \in \Lambda_L$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega_0,z,\epsilon) = \frac{i}{2\pi}\big(i\phi(\mathbf{x},\mathbf{x})\big)^n \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \\ + n! \frac{i}{2\pi}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \sum_{k=1}^n \mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Comme $\phi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$ et que $\mathcal{T}_{k,L}^{m}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$, avec $m \in \mathbb{N}$, est une fonction continue ; on obtient directement (4.72). Enfin, en faisant apparaître la dépendance explicite en $|\xi|$ dans les constantes intervenant dans la preuve de l'inégalité (4.16), on prouve l'existence de deux polynômes $p_k(|\xi|)$ et $q_n(|\xi|)$ tels que uniformément en $L \geq 1$:

$$|\mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega_0,\xi)| \leq p_k(|\xi|)q_n(|\xi|)(1+|\omega_0|)^{3n}$$

Il reste à utiliser la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)$ sur Γ_K pour obtenir (4.73).

■

Preuve Corollaire 4.3

La preuve est une conséquence directe de la Proposition 4.12 (pour la pression grand canonique) et de la Proposition 4.15 (pour les susceptibilités généralisées grand canonique). D'une part, en utilisant (4.55) :

$$\begin{aligned} P_L(\beta,\omega_0,z,\epsilon) &= \frac{\epsilon}{\beta L^3}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \frac{\partial^0 \mathcal{I}_L}{\partial \omega^0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega_0,z,\epsilon) \\ &= \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant (4.72) :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_L^n(\beta,\omega_0,z,\epsilon) &= \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\epsilon}{\beta L^3}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \frac{\partial^n \mathcal{I}_L}{\partial \omega^n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega_0,z,\epsilon) \\ &= n!\left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{T}_{k,L}^{n-k}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega_0,\xi) \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière ligne le théorème de Tonelli, justifié par l'estimation (4.73), pour intervertir la trace avec l'intégrale sur le contour Γ_K.

■

On démontre maintenant le Corollaire 4.4. Sa preuve repose essentiellement sur le lemme suivant (la preuve est en annexe) :

Lemme 4.16. *Pour tout $\beta > 0$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$, $\omega \mapsto P_L(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est une fonction paire. Même chose pour $\omega \mapsto \rho_L(\beta,\omega,z,\epsilon)$.*

Preuve Corollaire 4.4.

Soient $\beta > 0$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$. Etant donné que la fonction $P_L(\beta,\cdot\,,z,\epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un petit voisinage de $\omega = 0$, on peut écrire le développement limité :

$$P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = P_L(\beta,0,z,\epsilon)+\omega\frac{\partial P_L}{\partial \omega}(\beta,0,z,\epsilon)+\frac{\omega^2}{2}\frac{\partial^2 P_L}{\partial \omega^2}(\beta,0,z,\epsilon)+\frac{\omega^3}{3!}\frac{\partial^3 P_L}{\partial \omega^3}(\beta,0,z,\epsilon)+\mathcal{O}(\omega^4)$$

La fonction $P_L(\beta,\cdot\,,z,\epsilon)$ étant paire (cf. Lemme 4.16), par conséquent :

$$\frac{\partial P_L}{\partial \omega}(\beta,0,z,\epsilon) = 0 = \frac{\partial^3 P_L}{\partial \omega^3}(\beta,0,z,\epsilon)$$

■

5 Annexe

Preuve Lemme 4.11.
Soient $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Lambda_L \times \Lambda_L$. Soit $k \geq 1$ un entier et pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{T}^m_{k,L}(\cdot\,,\cdot\,;\omega_0,\xi)$ la fonction définie en (4.14). Soit $n \geq k \geq 1$ un entier et $h[n]$ l'hypothèse de récurrence :

$$h[n] : \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n-k}(d\omega)^m \mathcal{T}^m_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=1}^{k} \mathcal{T}^{k-m}_{m,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) \tag{4.74}$$

$h[1]$ est vraie puisque les membres de gauche et de droite donnent $(d\omega)\mathcal{T}^0_{1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$.
Supposons $h[n]$ vraie et montrons $h[n+1]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n+1-k}(d\omega)^m \mathcal{T}^m_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) &= \sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n-k}(d\omega)^m \mathcal{T}^m_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)+\\ &+\sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k (d\omega)^{n+1-k}\mathcal{T}^{n+1-k}_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) + (d\omega)^{n+1}\mathcal{T}^0_{n+1,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\end{aligned}$$

Puis en rassemblant les deux derniers termes, on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n+1-k}(d\omega)^m \mathcal{T}^m_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) =\\ &\qquad\sum_{k=1}^{n}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n-k}(d\omega)^m \mathcal{T}^m_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) + (d\omega)^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathcal{T}^{n+1-k}_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)\end{aligned} \tag{4.75}$$

Enfin, en utilisant l'hypothèse de récurrence (4.74) dans le premier membre à droite de l'égalité (4.75), il vient :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(d\omega)^k \sum_{m=0}^{n+1-k}(d\omega)^m \mathcal{T}^m_{k,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi) = \sum_{k=1}^{n+1}(d\omega)^k \sum_{m=1}^{k} \mathcal{T}^{k-m}_{m,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega_0,\xi)$$

ce qui achève la preuve.

∎

Preuve Lemme 4.13.
Soient $\beta > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha(\omega_0)$ un réél vérifiant $-\infty < \alpha(\omega_0) < E_0(\omega_0)$.
Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha(\omega_0))$ un compact et $\eta_K > 0$, $\xi_K > E_0(\omega_0)$ les rééls du Lemme 2.6.
Soit $\mathfrak{D}$ le domaine sur lequel $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) := \ln(1+\epsilon z e^{-\beta\xi})$ est holomorphe (cf. (2.11)).
Soit $\varsigma \in \big[0,\frac{\pi}{2}\big)$. Soit Γ_K le contour orienté positivement et inclus dans $\mathfrak{D}$ défini par :

$$\begin{aligned}\Gamma_K := \Big\{\Re\xi = \alpha(\omega_0),\ \Im\xi \in \Big[-\frac{\eta_K}{2\beta},\frac{\eta_K}{2\beta}\Big]\Big\} \cup \Big\{\Re\xi \in [\alpha(\omega_0),\xi_K),\ \Im\xi = \pm\frac{\eta_K}{2\beta}\Big\}\cup\\ \cup\Big\{\Re\xi \geq \xi_K,\ \arg\Big(\xi-\xi_K \mp i\frac{\eta_K}{2\beta}\Big) = \pm\varsigma\Big\}\end{aligned}$$

Par la suite, on posera $\eta = \eta(\beta) := \frac{\eta_K}{2\beta}$ et on utilisera la détermination principale du logarithme définie en (2.80) pour les estimations.

La seule chose à faire est de construire une primitive de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ qui satisfait (4.60). (4.61) sera automatiquement vérifiée (voir preuve Lemme 2.7, chapitre 2).
Considérons la primitive de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$ définie de la manière suivante :

$$\forall\, z \in K, \quad F_\epsilon(\beta, z; \xi) := \int_0^\xi \mathrm{d}u\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; u) - \frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} \ln(1 + \epsilon z u_1) \tag{4.76}$$

La fonction $\xi \mapsto F_\epsilon(\beta, z; \xi)$ est holomorphe sur le domaine $\mathfrak{D}$ pour tout $z \in K$.
A noter que la constante dans (4.76) a été choisie (a posteriori) pour avoir :

$$\forall\, z \in K,\ \forall\, \xi \in \Gamma_K, \quad |F_\epsilon(\beta, z; \xi)| \leq c(\beta, K)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi}$$

On commence par écrire (4.76) sous la forme suivante :

$$F_\epsilon(\beta, z; \xi) = \int_0^{\Re\xi} \mathrm{d}u\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; u) - \frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} \ln(1 + \epsilon z u_1) + \int_{\Re\xi}^{\Re\xi + i\Im\xi} \mathrm{d}u\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; u) \tag{4.77}$$

En utilisant le changements de variable $X := \mathrm{e}^{-\beta u}$ dans la première intégrale dans le membre de droite de (4.77) et le changement de variable $Y := i^{-1}(u - \Re\xi)$ dans la dernière intégrale dans le membre de droite ; il vient :

$$F_\epsilon(\beta, z; \xi) = -\frac{1}{\beta}\int_0^{\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}} \frac{\mathrm{d}X}{X} \ln(1 + \epsilon z X) + i\int_0^{\Im\xi} \mathrm{d}Y\, \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta(\Re\xi + iY)}) \tag{4.78}$$

Soit $a = a(\beta, K) > 0$ un réél vérifiant $a < \min\Big((\sup_{z\in K}|z|)^{-1}, \mathrm{e}^{-\beta\xi_K}\Big)$ choisi assez petit.
Soit $\Re\xi = \alpha(\omega_0)$. Pour tout $\Im\xi \in [-\eta, \eta]$,

$$\begin{aligned} &\forall\, z \in K, \quad \big|F_\epsilon(\beta, z; \alpha(\omega_0) + i\Im\xi)\big| \leq \\ &\left(\beta^{-1}\left[\sup_{z\in K}|z| + \frac{\pi}{a} + \frac{2\sup_{z\in K}|z|}{1 - a\sup_{z\in K}|z|}\right] + \eta\sup_{z\in K}|z| + \eta\pi\mathrm{e}^{\beta\alpha(\omega_0)}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\alpha(\omega_0)}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\alpha(\omega_0)} \end{aligned} \tag{4.79}$$

Soit $\Im\xi = \pm\eta$. Pour tout $\Re\xi \in [\alpha(\omega_0), \xi_K)$,

$$\begin{aligned} &\forall\, z \in K, \quad \big|F_\epsilon(\beta, z; \Re\xi \pm i\eta)\big| \leq \\ &\qquad\left(\beta^{-1}\left[\sup_{z\in K}|z| + \frac{\pi}{a} + \frac{2\sup_{z\in K}|z|}{1 - a\sup_{z\in K}|z|}\right] + \eta\sup_{z\in K}|z| + \eta\pi\mathrm{e}^{\beta\xi_K}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\alpha(\omega_0)}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi} \end{aligned} \tag{4.80}$$

Pour $\Re\xi = \xi_K + r\cos\varsigma$ et $\Im\xi = \pm(\eta + r\sin\varsigma)$, avec $r \in (0, +\infty)$ et $\varsigma \in [0, \pi/2)$,

$$\begin{aligned} &\forall\, z \in K, \quad \big|F_\epsilon(\beta, z; \Re\xi + i\Im\xi)\big| \leq \\ &\qquad\qquad (\beta^{-1} + \eta + r)\sup_{z\in K}|z|\left[1 + \frac{2}{1 - \sup_{z\in K}|z|\mathrm{e}^{-\beta\xi_K}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi} \end{aligned} \tag{4.81}$$

Il reste à utiliser dans (4.81) d'une part que $(\beta^{-1} + \eta)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi} \leq (\beta^{-1} + \eta)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\xi_K}$, et d'autre part que $r\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi} \leq r\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}r\cos\varsigma}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\xi_K} \leq \big(\frac{2}{e\beta\cos\varsigma}\big)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\xi_K}$.
Les estimations (4.79), (4.80) et (4.81) donnent l'existence d'une constante $c(\beta, K) > 0$ telle que pour tout $\xi \in \Gamma_K$ et pour tout $z \in K$, $|F_\epsilon(\beta, z; \xi)| \leq c(\beta, K)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\Re\xi}$, d'où (4.60).

■

Preuve Lemme 4.16.
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$ un compact tel que $z \in K$.
A partir de l'expression de la pression grand canonique à volume fini :

$$\overline{P_L(\beta,\omega,z,\epsilon)} = \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{-i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \overline{\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}) R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)}\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$$

Comme l'axe des réels est un axe de symétrie pour le contour Γ_K, d'après [24] :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}) R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)} &= -\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \overline{\ln(1+\epsilon \overline{z} \mathrm{e}^{-\beta\overline{\xi}}) R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})} \\ &= -\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}) \overline{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})}\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors :

$$\overline{P_L(\beta,\omega,z,\epsilon)} = \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi}) \overline{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})}\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \tag{4.82}$$

Utilisons maintenant qu'au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$:

$$(\overline{H_L(\omega)} - \xi)^{-1} = (H_L(-\omega) - \xi)^{-1}$$

On obtient alors au sens des ditributions :

$$\overline{(H_L(\omega) - \overline{\xi})^{-1} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = (H_L(-\omega)-\xi)^{-1}\overline{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})}$$

d'où l'on déduit :

$$R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};-\omega,\xi) = \overline{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

et par conséquent, compte-tenu de (4.82) :

$$P_L(\beta,-\omega,z,\epsilon) = \overline{P_L(\beta,\omega,z,\epsilon)} \tag{4.83}$$

Enfin, en utilisant qu'au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Lambda_L)$:

$$\left((H_L(\omega)-\xi)^{-1}\right)^* = (H_L(\omega)-\overline{\xi})^{-1}$$

puis que $\left((H_L(\omega)-\xi)^{-1}\right)^*$ a pour noyau intégral $\overline{R_L^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{x};\omega,\xi)}$ (voir [57]), on a :

$$R_L^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{x};\omega,\xi) = \overline{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\overline{\xi})}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

D'où l'on déduit, compte-tenu de (4.82) :

$$P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = \overline{P_L(\beta,\omega,z,\epsilon)} \tag{4.84}$$

En réunissant (4.83) et (4.84), on obtient que $P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = P_L(\beta,-\omega,z,\epsilon)$.
Enfin, en vertu de (2.27) :

$$\rho_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = \frac{1}{L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\xi}/z+\epsilon} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$$

Comme les arguments utilisés ci-dessus restent inchangés lorsqu'on remplace $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)$ par $\xi \mapsto (\mathrm{e}^{\beta\xi}/z+\epsilon)^{-1}$, alors on a également $\rho_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = \rho_L(\beta,-\omega,z,\epsilon)$.

■

Chapitre 5

Limites thermodynamiques

Considérons les grandeurs grand canonique à volume fini, caractéristiques de la réponse diamagnétique, définies dans le Corollaire 4.3 sous les hypothèses (**h1**), (**H2**) et (**h3**) (voir début chapitre 3). Une grande partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des limites thermodynamiques de ces grandeurs (caractérisant les propriétés diamagnétiques intrinsèques, i.e. indépendantes des effets de bords, du gaz quantique quasi-parfait) obtenues lorsque $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ remplit l'espace tout entier (dans un sens qui sera précisé ultérieurement) lorsque le potentiel V est $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique (dans ce cas $V \in L^p(\mathbb{R}^3/\boldsymbol{\Upsilon})$, $p > 3$) :

$$\forall\, \boldsymbol{\upsilon} \in \boldsymbol{\Upsilon}, \quad V(\mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}) = V(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

$\boldsymbol{\Upsilon}$ désigne un réseau (non dégénéré) dans $\mathbb{R}^3$ généré par une base $\{\mathbf{e}_i^{'}\}_{1 \leq i \leq 3}$ de $\mathbb{R}^3$ (en d'autres termes $\boldsymbol{\Upsilon} := \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}\mathbf{e}_i^{'}$). On désignera par Ω la cellule unité de $\boldsymbol{\Upsilon}$:

$$\Omega := \left\{ x_1 \mathbf{e}_1^{'} + x_2 \mathbf{e}_2^{'} + x_3 \mathbf{e}_3^{'} \;:\; -1/2 \leq x_1, x_2, x_3 < 1/2 \right\}$$

Un tel potentiel permet de modéliser, dans l'approximation à un corps, l'interaction de chaque particule (boson ou fermion) avec le champ cristallin d'un solide infini parfait (i.e. un réseau où tous les sites sont occupés par des ions de même nature supposés immobiles) de réseau de Bravais $\boldsymbol{\Upsilon}$ et de cellule de Wigner-Seitz Ω. L'hypothèse d'un réseau infini pour notre modèle est raisonnable compte-tenu des faibles dimensions atomiques comparées à "la taille" d'un solide.

Sous ces hypothèses, on montre l'existence des limites thermodynamiques et on étudie leurs propriétés (analycité par rapport à la variable z, régularité par rapport à la variable ω, régularité jointe par rapport à (ω, z) et intervertion des limites avec les dérivations). En particulier, l'expression obtenue pour la limite thermodynamique de la susceptibilité grand canonique sera le point de départ du prochain chapitre.

Ce chapitre comporte trois appendices. Le premier est une extension des résultats obtenus sous l'hypothèse $V \in L^p(\mathbb{R}^3/\boldsymbol{\Upsilon})$, avec $p > 3$. On y étudie les limites thermodynamiques dans le cas où la densité de particules devient un paramètre extérieur fixé. Dans le deuxième appendice, on s'intéresse au limites thermodynamiques dans le cas particulier d'un potentiel type Anderson permettant de modéliser l'interaction de chaque particule avec le champ cristallin d'un solide infini quasi-parfait (i.e. solide parfait en présence d'impuretés aléatoirement distribuées). Seule l'existence des limites pour ce modèle sera abordée.
Enfin dans le troisième, on se propose de retrouver des résultats démontrés dans [4], [6],

[14] concernant le gaz parfait (i.e. $V = 0$). On donne notamment des formules en terme des fonctions de Bose et de Fermi pour les limites thermodynamiques lorsque l'intensité du champ magnétique est nulle. En particulier sous l'hypothèse de température nulle, on retrouve la formule de Landau pour la susceptibilité diamagnétique pour le gaz de fermions.

Excepté dans les appendices 2 et 3, on omet la dépendance explicite en V dans les notations. Comme dans les chapitres précédents, le cas $\epsilon = -1$ fera référence au gaz de bosons et le cas $\epsilon = +1$ fera référence au gaz de fermions.

1 Résultats principaux

Les résultats de ce paragraphe ne concernent que le cas $V \in L^p(\mathbb{R}^3/\boldsymbol{\Upsilon})$, avec $p > 3$.

Soit $D_\infty := \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ la diagonale. Pour $\omega \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \rho(H_\infty(\omega))$, soit $R_\infty^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus D_\infty \to \mathbb{C}$ le noyau intégral de $R_\infty(\omega,\xi) := (H_\infty(\omega) - \xi)^{-1}$.

Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$, avec $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega))$ et $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ les domaines du plan complexe définis en (2.1). Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$. Γ_K désignera un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.

A partir de l'expression (4.17) pour la pression grand canonique à volume fini et comptetenu de la $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité de V, introduisons le candidat à la limite thermodynamique :

$$\begin{aligned} P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) :&= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty(\omega,\xi) \\ &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\frac{i}{2\pi}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{5.1}$$

où Ω désigne la cellule de Wigner-Seitz du réseau $\boldsymbol{\Upsilon}$ et χ_Ω la fonction indicatrice de Ω. Le candidat à la limite thermodynamique est bien défini en vertu de la Proposition 5.16.

Voici le premier résultat de convergence uniforme :

Théorème 5.1. *Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Alors pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$,*

$$\lim_{L\to\infty} \sup_{z\in K} |P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) - P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon)| = 0$$

En vertu du Théorème de Weierstrass (voir Théorème 5.19), le Théorème 5.1 a pour corollaire :

Corollaire 5.2. *Pour tout $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega)) \ni z \mapsto P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est analytique. De plus, pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$,*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L\to\infty} \sup_{z\in K} \left|\frac{\partial^m P_L}{\partial z^m}(\beta,\omega,z,\epsilon) - \frac{\partial^m P_\infty}{\partial z^m}(\beta,\omega,z,\epsilon)\right| = 0$$

Pour tout $\xi \in \rho(H_\infty(\omega))$, soient $T_{1,\infty}(\omega,\xi)$ et $T_{2,\infty}(\omega,\xi)$ les opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ générés par leur noyau intégral respectif continu sur $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus D_\infty$ défini par :

$$T_{1,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) := \mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot (i\nabla_\mathbf{x} + \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) \tag{5.2}$$

$$T_{2,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) \tag{5.3}$$

A partir de l'expression (4.18) pour les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini et compte-tenu de la $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité de V, introduisons leur candidat à la limite thermodynamique :

$$\mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon) := n!\left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{i}{2\pi}\frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1,\ldots,i_j) \cdot$$
$$\cdot \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \cdot \frac{\left(i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_j))\right)^{n-k}}{(n-k)!} R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;\omega,\xi)T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2;\omega,\xi)\cdots$$
$$\cdots T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1},\mathbf{z}_j;\omega,\xi)T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x};\omega,\xi) \tag{5.4}$$

avec la convention $0^0 = 1$; pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, Fl_j est défini en (4.11) et pour tout entier $k \geq j \geq 1$, $\chi_j^k(i_1,\ldots,i_j)$ est la fonction caractéristique définie en (4.3).
Les candidats à la limite thermodynamique sont bien définis en vertu de la Proposition 5.29.

Avec $\mathcal{D}_\epsilon := \cap_{\omega\in\mathbb{R}}\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega)) = \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$, on a un second résultat de convergence uniforme (ici énoncé dans sa version globale) :

<u>Théorème</u> 5.3. *Soit $\beta > 0$. Alors pour tout compact $[\omega_1,\omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$, et pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L\to\infty} \sup_{\omega\in[\omega_1,\omega_2]} \sup_{z\in K} |\mathcal{X}_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)| = 0$$

Le Théorème 5.3 a pour corollaires :

<u>Corollaire</u> 5.4. *Pour tout $\beta > 0$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon$, $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, pour $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ on a l'identification :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^n P_\infty}{\partial\omega^n}(\beta,\omega,z,\epsilon) := \left(\frac{c}{q}\right)^n \mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon) \tag{5.5}$$

De plus, $\forall\, z \in \mathcal{D}_\epsilon$ et uniformément sur les compacts $[\omega_1,\omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\partial^n P_L}{\partial\omega^n}(\beta,\omega,z,\epsilon) = \frac{\partial^n P_\infty}{\partial\omega^n}(\beta,\omega,z,\epsilon)$$

<u>Corollaire</u> 5.5. *Pour tout $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega)) \ni z \mapsto \mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est analytique. De plus, pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$,*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L\to\infty} \sup_{z\in K} \left| \frac{\partial^{m+n} P_L}{\partial z^m \partial\omega^n}(\beta,\omega,z,\epsilon) - \frac{\partial^{m+n} P_\infty}{\partial z^m \partial\omega^n}(\beta,\omega,z,\epsilon) \right| = 0$$

On termine ce paragraphe par l'énoncé de ces deux derniers résultats :

Théorème 5.6. *Soit $\beta > 0$. Alors $\mathbb{R} \times (\mathcal{D}_\epsilon \cap \mathbb{R}) \ni (\omega, z) \mapsto P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est $\mathcal{C}^\infty$.*

Proposition 5.7. *Soient $\beta > 0$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(0))$. Alors pour $\omega \in \mathbb{R}$ assez proche de 0 :*

$$P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon) = P_\infty(\beta, 0, z, \epsilon) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{c}{q}\right)^2 \mathcal{X}^2_\infty(\beta, 0, z, \epsilon) + \mathcal{O}(\omega^4)$$

En particulier, l'aimantation en champ magnétique nul est identiquement nulle :

$$\mathcal{X}^1_\infty(\beta, \omega = 0, z, \epsilon) = 0$$

Remarque 5.8. Le Théorème 5.1 sera aussi démontré sous l'hypothèse $V \in \mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3/\mathbf{\Upsilon})$, voir paragraphe 3.2.

Remarque 5.9. Le Corollaire 5.2 (resp. 5.4) assure l'intervertion des dérivées partielles par rapport à la variable z (resp. par rapport à la variable ω) avec la limite $L \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{L\to\infty} \frac{\partial^m P_L}{\partial z^m}(\beta, \omega, z, \epsilon) &= \frac{\partial^m}{\partial z^m}\big(\lim_{L\to\infty} P_L(\beta, \omega, z, \epsilon)\big) \quad m \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{L\to\infty} \frac{\partial^n P_L}{\partial \omega^n}(\beta, \omega, z, \epsilon) &= \frac{\partial^n}{\partial \omega^n}\big(\lim_{L\to\infty} P_L(\beta, \omega, z, \epsilon)\big) \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Remarque 5.10. A partir de (2.27) et par application du Corollaire 5.2, la limite thermodynamique de la densité grand canonique s'écrit :

$$\rho_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon) := \beta z \frac{\partial P_\infty}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{1}{|\Omega|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\xi}/z + \epsilon} R_\infty(\omega_0, \xi) \quad (5.6)$$

où $\xi \mapsto (\mathrm{e}^{\beta\xi}/z+\epsilon)^{-1}$ est la distribution de Bose-Einstein ($\epsilon = -1$), de Fermi-Dirac ($\epsilon = +1$).

Remarque 5.11. Avec $T_{1,\infty}(\omega, \xi)$ (resp. $T_{2,\infty}(\omega, \xi)$) l'opérateur généré par le noyau (5.2) (resp. (5.3)) et en vertu de (5.4), les limites thermodynamiques de l'aimantation et de la susceptibilité grand canonique peuvent encore s'écrire :

$$\mathcal{X}^1_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)\frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty(\omega, \xi) T_{1,\infty}(\omega, \xi) \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^2_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon) := 2\left(\frac{q}{c}\right)^2 \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)\cdot \\ \cdot R_\infty(\omega, \xi)\big\{T_{1,\infty}(\omega, \xi)T_{1,\infty}(\omega, \xi) - T_{2,\infty}(\omega, \xi)\big\} \quad (5.8) \end{aligned}$$

où chacune des intégrales d'opérateurs (par rapport à la variable ξ) ci-dessus possède un noyau jointement continu sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (voir Proposition 5.22 et Proposition 5.27).

Remarque 5.12. Les résultats énoncés ci-dessus ne permettent pas de conclure quant à l'existence ou non d'un voisinage complexe de l'axe des réels sur lequel $\omega \mapsto P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ (avec $z \in \mathcal{D}_\epsilon$) serait analytique.

2 Quelques mots sur la méthode utilisée

2.1 Sens pour la limite thermodynamique

Supposons que les cellules du réseau $\boldsymbol{\Upsilon}$ soient numérotées et ordonnées en une suite dénombrable $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Il est à noter qu'on ne fait aucune hypothèse restrictive sur la géométrie des cellules.
Soient $\Lambda_L = \left(\frac{-L}{2}, \frac{L}{2}\right)^3$ le cube ouvert et $\partial\Lambda_L$ les bords du cube. Introduisons l'ensemble :

$$\mathfrak{O} := \left\{ \Omega_n,\ n \in \mathbb{N}\ :\ \Omega_n \subset \Lambda_L \ \text{ et } \ \overline{\Omega_n} \cap \partial\Lambda_L = \emptyset \right\}$$

Quitte à choisir L assez grand, $\mathfrak{O}$ est non vide. Considérons alors la décomposition de Λ_L :

$$\Lambda_L = \Lambda_{n_L} \cup \Lambda_{n_L}^c \quad \text{avec} \quad \Lambda_{n_L} := \bigcup_{\Omega_n \in \mathfrak{O}} \Omega_n, \quad n_L := \operatorname{card}(\Omega_n \in \mathfrak{O}) \tag{5.9}$$

De manière équivalente, on peut voir Λ_{n_L} comme l'union de toutes les cellules entières du réseau $\boldsymbol{\Upsilon}$ contenues dans Λ_L excepté celles qui touchent les bords $\partial\Lambda_L$.

Montrons maintenant qu'étant donné la décomposition (5.9) :

$$|\Lambda_{n_L^c}| = \mathcal{O}(L^2) \quad \text{lorsque } L \to \infty \tag{5.10}$$

Soit $d := \operatorname{diam}(\Omega)$ le diamètre de la cellule unité du réseau. A une distance des bords $\partial\Lambda_L$ strictement supérieure à d, on se trouve à l'intérieur de l'ensemble Λ_{n_L} :

$$\left\{\mathbf{x} \in \Lambda_L \ :\ \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L) > d\right\} \subset \Lambda_{n_L} \subset \Lambda_L$$

Il s'ensuit alors que :

$$(L-d)^3 < |\Lambda_{n_L}| = n_L|\Omega| < L^3 \tag{5.11}$$

d'où :

$$|\Lambda_{n_L}^c| = |\Lambda_L| - |\Lambda_{n_L}| \leq L^3 - (L-d)^3 = 3dL^2 - 3d^2L + d^2$$

Remarque 5.13. En vertu de (5.11), on a $(n_L|\Omega|)^{\frac{1}{3}} + d > L > (n_L|\Omega|)^{\frac{1}{3}}$. Donc prendre la limite $L \to \infty$ dans Λ_L revient à prendre la limite $n_L \to \infty$ dans Λ_{n_L} ; et inversement.

2.2 Construction des candidats pour la limite thermodynamique

L'ingrédient principal intervenant dans la construction des candidats à la limite thermodynamique est le fait que l'Hamiltonien $H_\infty(\omega, V)$ commute avec les translations magnétiques du réseau $\boldsymbol{\Upsilon}$. Rappelons leur définition et propriétés (voir par ex. [50], [75]) :

Définition 5.14. *Pour* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, *soit* $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{x})$ *la phase magnétique.*
Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, *les translations magnétiques du réseau* $\{T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}\}_{\boldsymbol{\upsilon}\in\boldsymbol{\Upsilon}}$ *sont définies par :*

$$(T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}\psi)(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})}\psi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\upsilon}) \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

Notons que les translations magnétiques forment un quasi-groupe dans le sens :

$$T_{\boldsymbol{\upsilon}_1,\omega}T_{\boldsymbol{\upsilon}_2,\omega} = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\boldsymbol{\upsilon}_1,\boldsymbol{\upsilon}_2)}T_{\boldsymbol{\upsilon}_1+\boldsymbol{\upsilon}_2,\omega} \quad \boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2 \in \boldsymbol{\Upsilon}$$

Comme $T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}T_{-\boldsymbol{\upsilon},\omega} = \mathbb{1}$ et comme $T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}$ est unitaire, on a :

$$T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}^{-1} = T_{-\boldsymbol{\upsilon},\omega} = T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}^*$$

Remarque 5.15. Plus globalement, les translations magnétiques réélles $\{T_{\mathbf{x}_0,\omega}\}_{\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^3}$ sont définies par :

$$(T_{\mathbf{x}_0,\omega}\psi)(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)}\psi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \quad \psi\in L^2(\mathbb{R}^3)$$

Par les mêmes arguments, $\{T_{\mathbf{x}_0,\omega}\}_{\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^3}$ est une famille d'opérateurs unitaires.

Maintenant en utilisant que $\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\upsilon}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})-\mathbf{a}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\upsilon})$, il vient sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$(-i\nabla_{\mathbf{x}}-\omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))\mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})} = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})}(-i\nabla_{\mathbf{x}}-\omega\mathbf{a}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\upsilon})), \quad \boldsymbol{\upsilon}\in\boldsymbol{\Upsilon}$$

ce qui assure, par $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité de V, que $H_\infty(\omega,V)T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega} = T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}H_\infty(\omega,V)$.
Expliquons formellement comment on utilise cette propriété dans la construction des candidats pour la limite thermodynamique.

Soit $\mathcal{G}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée. D'après le calcul fonctionnel (voir par ex. [87]), l'opérateur $\mathcal{G}(H_\infty(\omega,V))$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Supposons que $\mathcal{G}(H_\infty(\omega,V))$ possède un noyau intégral $\mathcal{G}(\cdot\,,\cdot)$ continu sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ et uniformément borné :

$$\big(\mathcal{G}(H_\infty(\omega,V))\psi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})\psi(\mathbf{y}), \quad \psi\in L^2(\mathbb{R}^3),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$$

Alors le noyau intégral $\mathcal{G}_\infty(\cdot\,,\cdot)$ vérifie l'identité :

$$\forall\,\boldsymbol{\upsilon}\in\boldsymbol{\Upsilon}, \quad \mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})}\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{y}+\boldsymbol{\upsilon})\mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{y}+\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})} = \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3 \tag{5.12}$$

En effet, pour tout $\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\big(T_{-\boldsymbol{\upsilon},\omega}\mathcal{G}(H_\infty(\omega,V))T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega}\psi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})}\mathcal{G}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{y}+\boldsymbol{\upsilon})\mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{y}+\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})}\psi(\mathbf{y})$$

Puis en utilisant que $T_{-\boldsymbol{\upsilon},\omega}\mathcal{G}(H_\infty(\omega,V))T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega} = \mathcal{G}(H_\infty(\omega,V))$, on obtient l'identité (5.12).
Puisque $\phi(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})=0$, on déduit de (5.12) que le noyau diagonal est $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique :

$$\forall\,\boldsymbol{\upsilon}\in\boldsymbol{\Upsilon}, \quad \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon}) = \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \tag{5.13}$$

Considérons maintenant la décomposition de $\Lambda_L=(-L/2,L/2)^3$ en (5.9). Comme :

$$\frac{1}{|\Lambda_{n_L}|} = \frac{1}{|\Lambda_L|}\frac{|\Lambda_{n_L}|+|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|} = \frac{1}{|\Lambda_L|}\left(1+\frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|}\right) \tag{5.14}$$

alors :

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \\ + \frac{1}{|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Lambda_{n_L}^c}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}) - \frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|}\frac{1}{|\Lambda_L|}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x})$$

Comme $\mathcal{G}_\infty(\cdot\,,\cdot)$ est uniformément borné, les deux dernières intégrales ci-dessus se majorent par $cste|\Lambda_{n_L}^c|/|\Lambda_{n_L}|$. Par conséquent, en vertu de (5.13) puis (5.10), lorsque $L\to\infty$:

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{G}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathcal{O}(L^{-1})$$

3 Limite thermodynamique : pression grand canonique

3.1 Preuve du Théorème 5.1 et du Corollaire 5.2

On commence par démontrer ce premier résultat :

Proposition 5.16. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un compact tel que $z \in K$. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.*
Sous l'hypothèse $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$, introduisons :

$$\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty(\omega, \xi)$$

Alors $\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est un opérateur intégral borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.
Son noyau intégral $\mathcal{I}_{\infty,0}(\cdot\,,\cdot\,; \beta, \omega, z, \epsilon) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est continu et vérifie :

$$\begin{aligned} \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon) &= \frac{i}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, \xi) \right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, F_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega, \xi) \end{aligned} \tag{5.15}$$

où $R_\infty^{(2)}(\cdot\,,\cdot\,; \omega, \xi) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est le noyau intégral de $R_\infty^2(\omega, \xi)$ et $F_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ une primitive de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ exponentiellement décroissante sur le contour Γ_K (cf. Lemme 4.13).

Preuve Proposition 5.16.
La preuve reprend les mêmes arguments que ceux des paragraphes 2 et 4, chapitre 4.
A partir de l'estimation (3.1), le critère de Schur-Holmgren donne l'existence d'un polynôme $p(|\xi|)$ tel que $\|R_\infty(\omega, \xi)\| \leq p(|\xi|)$. En vertu de (2.14), il existe $c = c(\beta, K) > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \|R_\infty(\omega, \xi)\| \leq c < +\infty$$

Et à partir de (4.27), aussi valable pour $L = \infty$, il existe un autre $c = c(\beta, K) > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)\|_{2,\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \|R_\infty(\omega, \xi)\|_{2,\infty} \leq c < +\infty$$

Par le théorème de Dunford-Pettis, $\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est un opérateur intégral :

$$\forall\, \phi \in L^2(\mathbb{R}^3), \ \big(\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)\phi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y} \, \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, z, \epsilon)\phi(\mathbf{y}) \ \text{ p.p. tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

D'une part, en utilisant que $R_\infty(\omega, \xi)$ est un opérateur intégral, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\big(\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)\varphi\big)(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y} \, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, \xi)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.16}$$

D'autre part, en effectuant une intégration par parties (par rapport à la variable ξ) dans (5.15), puis en utilisant que $R_\infty^2(\omega, \xi)$ est un opérateur intégral, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\big(\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)\varphi\big)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, F_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y} \, R_\infty^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, \xi)\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.17}$$

Justifié par l'estimation $\mathrm{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,|R_\infty^{(j)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)| \leq p(|\xi|)$, $j \in \{1,2\}$; le théorème de Tonelli assure l'intervertion des intégrales dans (5.16) et (5.17). Ces identités se prolongeant par continuité ($\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est borné) $\forall\,\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, on peut identifier :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,z,\epsilon) &= \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) \quad \text{p.p. tout } \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,F_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\end{aligned}$$

Comme $R_\infty^{(2)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$ est continu sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ et uniformément borné par un polynôme en $|\xi|$ (voir Corollaire 3.2), le théorème de continuité sous le signe intégrale assure que $\mathcal{I}_{\infty,0}(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,z,\epsilon)$ est continu sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Ainsi l'intégration par rapport à ξ de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot\,)R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\cdot\,)$ fait disparaître la singularité sur la diagonale de $R_\infty^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$.

■

Lemme 5.17. *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 5.16 avec l'hypothèse supplémentaire V $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique, $\mathbf{x}\mapsto\mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$ est $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique :*

$$\forall\,\boldsymbol{\upsilon}\in\boldsymbol{\Upsilon},\quad \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon};\beta,\omega,z,\epsilon) = \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon) \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$$

Preuve Lemme 5.17.
Il suffit d'utiliser que $T_{-\boldsymbol{\upsilon},\omega}\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta,\omega,z,\epsilon)T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega} = \mathcal{I}_{\infty,0}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ (cf. paragraphe 2.2).

■

Remarque 5.18. En vertu de la Proposition 5.16, le candidat à la limite thermodynamique pour la pression grand canonique (5.1) est bien défini :

$$P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon),\quad \beta>0,\ \omega\in\mathbb{R},\ z\in\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$$

On peut montrer directement que $\chi_\Omega\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est de trace classe sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Pour le voir, choisissons $\xi_0 < E_0(\omega)$ avec $|\xi_0|$ assez grand. En utilisant la première équation résolvante itérée deux fois suivi du théorème intégral de Cauchy :

$$\chi_\Omega\mathcal{I}_{\infty,0}(\beta,\omega,z,\epsilon) = \chi_\Omega R_\infty^2(\omega,\xi_0)\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,(\xi-\xi_0)^2\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,\xi)\right)$$

L'opérateur entre parenthèses étant borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$, il vient à partir de (3.2) :

$$\|\chi_\Omega R_\infty^2(\omega,\xi_0)\|_{\mathfrak{I}_1} = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{x}\,\chi_\Omega(\mathbf{x})R_\infty^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega,\xi_0) \leq c_{\xi_0}|\Omega| < +\infty$$

Preuve Théorème 5.1.
La limite thermodynamique est prise dans le sens indiqué dans le paragraphe 2.1.
Considérons la décomposition de Λ_L : $\Lambda_L = \Lambda_{n_L}\cup\Lambda_{n_L}^c$, voir (5.9).
A partir de (5.1) et par $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité de $\mathbf{x}\mapsto\mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$ (cf. Lemme 5.17) :

$$\begin{aligned}P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\frac{i}{2\pi}\int_\Omega\mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}\\ &= \frac{1}{\beta|\Lambda_{n_L}|}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}\end{aligned}$$

puis en utilisant (5.14), il vient :

$$\begin{aligned}
&P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) - P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) = \\
&\quad \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L|}\frac{i}{2\pi}\Bigg\{ \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\}\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \\
&\qquad + \int_{\Lambda_{n_L}^c} \mathrm{d}\mathbf{x} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \\
&\qquad - \frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned}
&P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) - P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) = \\
&\quad \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\Bigg\{ \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \\
&\qquad - \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta,z;\xi) \int_{\Lambda_{n_L}^c} \mathrm{d}\mathbf{x}\, R_L^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega,\xi) + \\
&\qquad + \frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta,z;\xi) \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, R_\infty^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega,\xi)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

car $\Lambda_{n_L} \ni \mathbf{x} \mapsto \{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\}|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$ est continue (voir (i) Proposition 3.4, compte-tenu de la définition de Λ_{n_L}) ainsi que $\Lambda_L \ni \mathbf{x} \mapsto R_L^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega,\xi)$, $1 \leq L \leq \infty$. Il ne reste plus qu'à majorer le membre de droite de (5.18) uniformément en $z \in K$. Puisque $R_L^{(2)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$, avec $1 \leq L \leq \infty$, est uniformément borné par un polynôme $p(|\xi|)$ (voir (3.2)), on a en vertu de (4.61) et de (5.10) :

$$\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |F_\epsilon(\beta,z;\xi)| \int_{\Lambda_{n_L}^c} \mathrm{d}\mathbf{x}\, |R_L^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega,\xi)| = \mathcal{O}(L^2) \tag{5.19}$$

$$\frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|}\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |F_\epsilon(\beta,z;\xi)| \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, |R_\infty^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x};\omega,\xi)| = \mathcal{O}(L^2) \tag{5.20}$$

Puis en utilisant l'estimation (ii) Proposition 3.4 (en substituant $\chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\cdot)$ à $\chi_M(\cdot)$), il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)| \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \left|\{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}\right| \\
&\qquad \leq (1+|\omega|)^3 \sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |p(|\xi|)||\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)| \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}\mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial\Lambda_L)} \\
&\qquad \leq c(\beta,K)(1+|\omega|)^3 L^2
\end{aligned} \tag{5.21}$$

où on a utilisé que pour tout $\gamma > 0$:

$$\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial\Lambda_L)} \leq L^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_j\, \mathrm{e}^{-\gamma|x_j - L/2|} = \gamma^{-1}L^2 \tag{5.22}$$

Regroupant (5.19), (5.20) et (5.21), le théorème est prouvé.

■

On rappelle maintenant le théorème de Weierstrass (voir [43] pour sa démonstration) :

Théorème 5.19. *Théorème de Weierstrass*
Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert non vide du plan complexe. Soit* $\{f_n(\cdot)\}_{n\geq 1} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur tout compact* $K \subset \mathcal{U}$ *vers* f *:*

$$\forall\, K \subset \mathcal{U}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Alors f *est analytique sur* $\mathcal{U}$*. De plus, pour tout entier* $m \in \mathbb{N}^*$*, la suite de fonctions* $\left\{\frac{d^m f_n}{dz^m}(\cdot)\right\}_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur tout compact vers la fonction* $\frac{d^m f}{dz^m}(\cdot)$ *:*

$$\forall\, K \subset \mathcal{U}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in K} \left| \frac{d^m f_n}{dz^m}(z) - \frac{d^m f}{dz^m}(z) \right| = 0$$

Preuve Corollaire 5.2.
C'est une conséquence du Théorème de Weierstrass à partir du Théorème 5.1.

■

3.2 Extensions

Il n'est pas possible d'étendre directement la preuve ci-dessus au cas où $V \in \mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3/\Upsilon)$ car l'estimation (3.4) n'est valable seulement que dans le cas $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $p > 3$.

On va alors utiliser une autre démonstration reposant sur les propriétés de la densité d'états intégrée (IDS) de l'opérateur $H_\infty(\omega, V)$ dont on rappelle sa définition.

Définition 5.20. *Soit* $\omega \in \mathbb{R}$*. Pour* $E \in \mathbb{R}$*, soit* $N_L(E, \omega)$ *le nombre de valeurs propres de l'opérateur* $H_L(\omega, V)$*,* $1 \leq L < \infty$*, plus petites que* E *comptées avec leur multiplicité. On définit la densité d'états intégrée de l'opérateur* $H_\infty(\omega, V)$ *comme la limite, si elle existe,*

$$\rho(E) = \rho(E, \omega) := \lim_{L\to\infty} \frac{N_L(E, \omega)}{|\Lambda_L|}$$

On introduit la formule de Pastur-Shubin (voir [81]) sous nos hypothèses (voir [55]) :

Proposition 5.21. *Sous la condition* $V \in \mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3/\Upsilon)$*, la densité d'états intégrés de l'opérateur* $H_\infty(\omega, V)$ *existe, et pour presque tout* $E \in \mathbb{R}$ *:*

$$\rho(E) = \frac{1}{|\Omega|} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \chi_\Omega \mathrm{P}(E)$$

où $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}_{(-\infty,E]}$ *est le projecteur spectral associé à* $H_\infty(\omega, V)$ *sur l'intervalle* $(-\infty, E]$*.*

Preuve Théorème 5.1 sous l'hypothèse $V \in \mathcal{K}_\pm(\mathbb{R}^3/\Upsilon)$.
En utilisant que la pression grand canonique à volume fini peut aussi s'écrire (voir [18]) :

$$P_L(\beta, \omega, z, \epsilon) = -\frac{\epsilon}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E \, \frac{\partial \mathfrak{f}_\epsilon}{\partial E}(\beta, z; E) \frac{N_L(E, \omega)}{|\Lambda_L|}$$

et que sous nos conditions, la densité d'états intégrés de $H_\infty(\omega, V)$ existe, on a :

$$P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) := \lim_{L\to\infty} P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = -\frac{\epsilon}{\beta}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E\, \frac{\partial \mathfrak{f}_\epsilon}{\partial E}(\beta,z;E)\rho(E)$$

Montrons qu'on retrouve la même expression qu'en (5.1). A partir de la Proposition 5.21 et compte-tenu du fait que $\{\chi_\Omega \mathrm{P}(E),\ E\in\mathbb{R}\}$ est une famille d'opérateurs de classe trace :

$$\begin{aligned} P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) &= -\frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E\, \frac{\partial \mathfrak{f}_\epsilon}{\partial E}(\beta,z;E)\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_\Omega \mathrm{P}(E) \\ &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_\Omega \int_{\mathbb{R}} \mathrm{dP}(E)\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;E) \end{aligned}$$

Il reste à utiliser le théorème spectral (voir [87]) (on ne donne pas plus de détails) :

$$P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big\{\chi_\Omega \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;H_\infty(\omega,V))\big\}$$

suivi d'une intégrale de Dunford-Schwartz (voir [42]).

■

4 Limite thermodynamique : aimantation grand canonique

On se propose de prouver le Théorème 5.3 dans le cas de l'aimantation grand canonique pour se familiariser avec la méthode. On commence par ce premier résultat :

Proposition 5.22. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un compact tel que $z \in K$. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type* (2.12) *inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir* (2.11)*) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) := \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.*
Sous l'hypothèse $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$, introduisons :

$$\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon) := \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)$$

avec $T_{1,\infty}(\omega,\xi)$ l'opérateur généré par le noyau (5.2).
Alors $\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est un opérateur intégral borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.
Son noyau intégral $\mathcal{I}_{\infty,1}(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,z,\epsilon) : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est continu et défini par :

$$\mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,z,\epsilon) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,\xi) \tag{5.23}$$

Preuve Proposition 5.22.
La preuve reprend les mêmes arguments que ceux des paragraphes 2 et 4, chapitre 4.
A partir de l'estimation (4.31), aussi valable pour $L = \infty$, le critère de Schur-Holmgren donne l'existence d'un polynôme $p(|\xi|)$ tel que $\|T_{1,\infty}(\omega,\xi)\| \leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3$. Et en vertu de (2.14), il existe $c = c(\beta, K) > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)| \|R_\infty(\omega,\xi)\| \|T_{1,\infty}(\omega,\xi)\| \leq c(1+|\omega|)^3$$

A partir de (4.27), aussi valable pour $L = \infty$, il existe un autre $c = c(\beta, K) > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)\|_{2,\infty} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\|R_\infty(\omega,\xi)\|_{2,\infty}\|T_{1,\infty}(\omega,\xi)\|_{2,2} \leq c(1+|\omega|)^3$$

D'après le théorème de Dunford-Pettis, $\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est un opérateur intégral :

$$\forall\,\phi \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \ \big(\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)\phi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,z,\epsilon)\phi(\mathbf{y})\ \text{ p.p. tout } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$$

Notons que l'opérateur $R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)$ possède un noyau intégral défini par :

$$\big(R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)\big)(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\,R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,\xi)$$

et comme les noyaux $R_\infty^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$ et $T_{1,\infty}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$ vérifient les hypothèses du Lemme 3.23 ; $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \big(R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)\big)(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est par conséquent continue sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$. Aussi, comme $R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)$ est un opérateur intégral, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\big(\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)\phi\big)(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,\big(R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)\big)(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) \tag{5.24}$$

Justifié par l'estimation (voir Lemme 3.25) :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{y};\omega,\xi)| \leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3 \tag{5.25}$$

le théorème de Tonelli assure l'intervertion des intégrales dans (5.24) :

$$\big(\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)\phi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\left(\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\big(R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)\big)(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)\varphi(\mathbf{y})$$

qui peut être prolongée par continuité pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Par identification, on obtient (5.23). Compte-tenu de l'estimation (5.25) puis (2.14), le théorème de continuité sous le signe intégrale assure que le noyau $\mathcal{I}_{\infty,1}(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,z,\epsilon)$ est continu sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

■

Comme $T_{-\boldsymbol{\upsilon},\omega}\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)T_{\boldsymbol{\upsilon},\omega} = \mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ (cf. paragraphe 2.2), on a :

Lemme 5.23. *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 5.22 avec l'hypothèse supplémentaire V $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique, $\mathbf{x}\mapsto\mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$ est $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique :*

$$\forall\,\boldsymbol{\upsilon}\in\boldsymbol{\Upsilon},\quad \mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{x}+\boldsymbol{\upsilon};\beta,\omega,z,\epsilon) = \mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$$

Remarque 5.24. En vertu de la Proposition 5.22, le candidat à la limite thermodynamique pour l'aimantation grand canonique (5.7) est bien défini :

$$\mathcal{X}_\infty^1(\beta,\omega,z,\epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)\frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)\quad \beta>0,\ \omega\in\mathbb{R},\ z\in\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$$

On peut montrer directement que $\chi_\Omega\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est à trace sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ à partir de :

$$\chi_\Omega\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\chi_\Omega R_\infty(\omega,\xi)T_{1,\infty}(\omega,\xi)\chi_\Omega$$

En effet, on montre que chacun des opérateurs $\chi_\Omega R_\infty(\omega,\xi)$ et $T_{1,\infty}(\omega,\xi)\chi_\Omega$ est de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont chacune des normes $\mathfrak{I}_2$ est bornée par un polynôme en $|\xi|$:

$$\|\chi_\Omega R_\infty(\omega,\xi)\|_{\mathfrak{I}_2} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{x}\,\chi_\Omega(\mathbf{x})\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq p(|\xi|)|\Omega|^{\frac{1}{2}}$$
$$\|T_{1,\infty}(\omega,\xi)\chi_\Omega\|_{\mathfrak{I}_2} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{x}\,\chi_\Omega(\mathbf{x})\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{y}\,|T_{1,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq p^{'}(|\xi|)(1+|\omega|)^3|\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

Puis en utilisant (2.14), il existe une constante $c = c(\beta, K, |\omega|) > 0$ telle que :

$$\|\chi_\Omega \mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)\|_{\mathfrak{I}_1} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\|\chi_\Omega R_\infty(\omega,\xi)\|_{\mathfrak{I}_2}\|T_{1,\infty}(\omega,\xi)\chi_\Omega\|_{\mathfrak{I}_2} \leq c$$

Remarque 5.25. Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ avec $z \in K$, K compact. On a montré que l'opérateur $(\partial_\omega \mathcal{I}_L)(\beta,\omega,z,\epsilon) := \partial_\omega \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega)})$, avec $1 \leq L < \infty$, a un noyau intégral continu sur $\Lambda_L \times \Lambda_L$ (voir Proposition 4.12, chapitre 4).
On verra a la Proposition 5.31 que le noyau diagonal de l'opérateur $\mathcal{I}_{\infty,1}(\beta,\omega,z,\epsilon)$ de la Proposition 5.22 vérifie :

$$\forall\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon) = \lim_{L\to\infty}(\partial_\omega \mathcal{I}_L)(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$$

On a besoin maintenant d'un dernier résultat (sa preuve est en annexe) :

Lemme 5.26. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\gamma > 0$:*

$$\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{y}\,\frac{\mathrm{e}^{-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^k} \leq c\gamma^{-(2+k)}L^2 \quad k \in \{1,2\} \tag{5.26}$$

Preuve Théorème 5.3 (cas $n = 1$).
La limite thermodynamique est prise dans le sens indiqué dans le paragraphe 2.1.
Considérons la décomposition de Λ_L : $\Lambda_L = \Lambda_{n_L} \cup \Lambda_{n_L}^c$ (voir (5.9)).
Dans cette preuve, on va utiliser les deux estimations ci-dessous. A partir de (3.1) et (3.3) d'une part, et à partir de (3.4) et (3.5) d'autre part, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et un polynôme $p(|\xi|)$ tels que pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L)\setminus D_L$, $1 \leq L < \infty$:

$$\max\left(|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)|, |T_{j,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)|\right) \leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad j \in \{1,2\},\ 1 \leq L \leq \infty \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}&\max\left(|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)|, |T_{j,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - T_{j,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)|\right)\\ &\leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^6\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\left(\chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\mathbf{x}) + \chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\mathbf{y}) + \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}\{\mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial\Lambda_L)+\mathrm{dist}(\mathbf{y},\partial\Lambda_L)\}}\right)\end{aligned} \tag{5.28}$$

A partir de (5.7) et par $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité de $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon)$ (cf. Lemme 5.23) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{q}\right)\mathcal{X}^1_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\, R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\\
&= \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\, R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\end{aligned}$$

puis en utilisant (5.14), il vient :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{c}{q}\right)\big(\mathcal{X}^1_L(\beta,\omega,z,\epsilon)-\mathcal{X}^1_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon)\big) = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L|}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\cdot\\
&\cdot\Bigg\{\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)-\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\right)+\\
&\qquad+\int_{\Lambda^c_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)+\\
&\qquad\qquad-\frac{|\Lambda^c_{n_L}|}{|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\Bigg\}\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{c}{q}\right)\big(\mathcal{X}^1_L(\beta,\omega,z,\epsilon)-\mathcal{X}^1_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon)\big) = \frac{\epsilon}{\beta L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\cdot\\
&\quad\cdot\Bigg\{\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,\big\{\big[R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)-R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)\big]T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)+\\
&\qquad+R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)\big[T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)-T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\big]\big\}+\\
&\qquad+\int_{\Lambda^c_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)+\\
&\qquad-\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)+\\
&\qquad\qquad-\frac{|\Lambda^c_{n_L}|}{|\Lambda_{n_L}|}\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\Bigg\}\end{aligned}\tag{5.29}$$

où on a utilisé la décomposition :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)+\\
&\quad+\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)\end{aligned}$$

ainsi que l'identité :

$$\begin{aligned}&R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)-R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi) =\\
&\qquad[R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)-R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)]T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)+\\
&\qquad\qquad+R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\xi)[T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)-T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\xi)]\end{aligned}$$

Il reste à majorer le membre de droite de (5.29) uniformément en $z \in K$ et uniformément en $\omega \in O := [\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, avec $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$.
A partir de l'estimation (5.25) (valable aussi pour $1 \leq L < \infty$), (2.14) puis (5.10) :

$$\sup_{\omega \in O} \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_{n_L}^c} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) T_{1,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| = \mathcal{O}(L^2) \tag{5.30}$$

$$\sup_{\omega \in O} \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|} \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z} \, |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| = \mathcal{O}(L^2) \tag{5.31}$$

D'autre part, par l'intermédiaire du Lemme 5.26, on a également :

$$\sup_{\omega \in O} \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| = \mathcal{O}(L^2) \tag{5.32}$$

Il ne reste plus qu'à prouver l'existence d'une constante $c = c(\beta, K, O) > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} &\sup_{\omega \in O} \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \cdot \\ &\qquad \cdot \big\{ |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi)| |T_{1,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| + \\ &\qquad\quad + |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi)| |T_{1,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi) - T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| \big\} \leq c L^2 \end{aligned} \tag{5.33}$$

A partir de (5.27) et (5.28), il existe $\delta > 0$ assez petit et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tels que :

$$\begin{aligned} &\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, \big\{ |R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi)| |T_{1,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| + \\ &\qquad + |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi)| |T_{1,L}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi) - T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \xi)| \big\} \\ &\leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^9 \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, \big\{ 2\chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\mathbf{x}) + 2\chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\mathbf{z}) + 2\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|} \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L)} \big\} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} \end{aligned}$$

D'une part, comme il existe $p^{'}(|\xi|)$ tel que $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{x} \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2} \leq p^{'}(|\xi|)$:

$$\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, \chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\mathbf{z}) \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2} = \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, \chi_{\Lambda_{n_L}^c}(\mathbf{z}) \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2} \leq L^2 p^{'}(|\xi|)$$

où on a utilisé le théorème de Tonelli justifiant l'égalité ; d'autre part, en utilisant (5.22) :

$$\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|} \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L)} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z} \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2} \leq \delta^{-1}(1+|\xi|) L^2 p^{'}(|\xi|) \leq L^2 p^{''}(|\xi|)$$

A partir de (5.29) avec (5.30), (5.31), (5.32), (5.33), le Théorème 5.3 est prouvé pour $n = 1$.

■

5 Limite thermodynamique : susceptibilités grand canonique

On commence par les trois propositions suivantes (seule la Proposition 5.29 servira pour la preuve du Théorème 5.3).

Proposition 5.27. *Cas particulier de la susceptibilité grand canonique*
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un compact tel que $z \in K$. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.
Sous l'hypothèse $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$, introduisons :

$$\mathcal{I}_{\infty,2}(\beta, \omega, z, \epsilon) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty(\omega, \xi) \big\{ T_{1,\infty}(\omega, \xi) T_{1,\infty}(\omega, \xi) - T_{2,\infty}(\omega, \xi) \big\}$$

avec $T_{1,\infty}(\omega, \xi)$ et $T_{2,\infty}(\omega, \xi)$ les opérateurs générés par leur noyau respectif (5.2) et (5.3).
Alors $\mathcal{I}_{\infty,2}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est un opérateur intégral borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.
Son noyau intégral $\mathcal{I}_{\infty,2}(\cdot\,,\cdot\,; \beta, \omega, z, \epsilon) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est continu et défini par :

$$\mathcal{I}_{\infty,2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \bigg\{ - \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) T_{2,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, \xi) + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_2\, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1; \omega, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}; \omega, \xi) \bigg\} \tag{5.34}$$

Sous l'hypothèse supplémentaire V $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique, le noyau diagonal est $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique.

Preuve Proposition 5.27.
En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve de la Proposition 5.22, on montre que le noyau intégral de l'opérateur borné $\mathcal{I}_{\infty,2}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est défini par :

$$\mathcal{I}_{\infty,2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \cdot \\ \cdot \bigg\{ \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z} \big(R_\infty(\omega, \xi) T_{1,\infty}(\omega, \xi) \big)(\mathbf{x}, \mathbf{z}) T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, \xi) + \\ - \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \xi) T_{2,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \omega, \xi) \bigg\}$$

Compte-tenu des estimations (5.25) et (5.27), les noyaux $\big(R_\infty(\omega, \xi) T_{1,\infty}(\omega, \xi)\big)(\cdot\,,\cdot\,)$ et $T_{1,\infty}(\omega, \xi)(\cdot\,,\cdot\,)$ vérifient les hypothèses du Lemme 3.23. Idem pour les noyaux $R_\infty^{(1)}(\cdot\,,\cdot\,; \omega, \xi)$ et $T_{2,\infty}(\cdot\,,\cdot\,; \omega, \xi)$. Par conséquent, $\mathcal{I}_{\infty,2}(\cdot\,,\cdot\,; \beta, \omega, z, \epsilon)$ est continu sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.
Il reste à noter que la $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité du noyau diagonal est une conséquence du fait que $T_{-\boldsymbol{v},\omega} \mathcal{I}_{\infty,2}(\beta, \omega, z, \epsilon) T_{\boldsymbol{v},\omega} = \mathcal{I}_{\infty,2}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ (voir paragraphe 2.2).

■

Remarque 5.28. En vertu de la Proposition 5.27, le candidat à la limite thermodynamique pour la susceptibilité grand canonique (5.8) est bien défini :

$$\mathcal{X}_\infty^2(\beta, \omega, z, \epsilon) = 2 \left(\frac{q}{c} \right)^2 \frac{\epsilon}{\beta |\Omega|} \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathcal{I}_{\infty,2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon) \quad \beta > 0,\ \omega \in \mathbb{R},\ z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$$

Par des arguments similaires à ceux de la Remarque 5.24, on peut montrer directement que $\chi_\Omega \mathcal{I}_{\infty,2}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est un opérateur de classe trace sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Proposition 5.29. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un compact tel que $z \in K$. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.*
Sous l'hypothèse $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p > 3$, introduisons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon) := n! \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^k \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1, \dots, i_j) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots$$
$$\cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \, \frac{\big(i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j)\big)^{n-k}}{(n-k)!} R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1; \omega, \xi) T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega, \xi) \cdots T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j, \mathbf{x}; \omega, \xi) \tag{5.35}$$

Alors il existe une constante $c_n = c(\beta, K, |\omega|, n) > 0$ telle que :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \big|\mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon)\big| \leq c_n \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{5.36}$$

Preuve Proposition 5.29.
Avec la convention $0^0 = 1$, pour tout entier $j \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq L \leq \infty$; posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_L^{j,m} &= \mathcal{K}_L^{j,m}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j; \omega, \xi) \\ &:= \frac{\big(i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j)\big)^m}{m!} R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1; \omega, \xi) T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega, \xi) \cdots T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j, \mathbf{x}; \omega, \xi) \end{aligned} \tag{5.37}$$

On commence par majorer la quantité $|\mathcal{F}_\infty^{j,n-k}|$. Pour cela on utilise (5.27). Il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et un polynôme $p_{j+1}(|\xi|)$ tels que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$|\mathcal{F}_\infty^{j,n-k}| \leq p_{j+1}(|\xi|)(1 + |\omega|)^{3j+3} \frac{\big|i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j)\big|^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}|}$$

A partir de la définition (4.11), utilisons maintenant le fait que :

$$\big|i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j)\big| \leq \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{l'=1}^{l} |\mathbf{z}_{l'-1} - \mathbf{z}_{l'}||\mathbf{z}_l - \mathbf{z}_{l+1}| \quad \text{avec } \mathbf{z}_0 := \mathbf{x}$$

Ainsi, pour $1 \leq l \leq j-1$, $1 \leq l' \leq l$ et $\mathbf{z}_0 := \mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^{3(j+1)}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\big|i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j)\big|^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|} \\ &\leq \frac{1}{(n-k)!} \Bigg(\sum_{l=1}^{j-1} \sum_{l'=1}^{l} |\mathbf{z}_{l'-1} - \mathbf{z}_{l'}||\mathbf{z}_l - \mathbf{z}_{l+1}| \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{(n-k)(1+|\xi|)}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|^{\frac{1}{n-k}}} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{(n-k)(1+|\xi|)}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|^{\frac{1}{n-k}}} \Bigg)^{n-k} \\ &\leq c^{2(n-k)}(1 + |\xi|)^{2(n-k)} \frac{\big(j^2(n-k)^2\big)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2(1+|\xi|)}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|} \end{aligned} \tag{5.38}$$

avec $c > 0$, et où on a utilisé que pour tout $\mu, \nu > 0$ et $\forall\, t \in (0, +\infty)$, $t^\nu \mathrm{e}^{-\mu t} \leq \left(\frac{2\nu}{\mu \mathrm{e}}\right)^\nu \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2} t}$. Le reste de l'estimation est basé sur le fait qu'il existe un autre polynôme $q_j(|\xi|)$ tel que :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|} \leq q_j(|\xi|) \tag{5.39}$$

Ainsi en réunissant (5.38) et (5.39), il existe un autre polynôme $p_n(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} |\mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon)| \\ &\qquad \leq n! \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(j^2 (n-k)^2\right)^{n-k}}{(n-k)!} (1 + |\omega|)^{3n+3} \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, p_n(|\xi|) |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \end{aligned}$$

Il reste à utiliser la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ sur Γ_K (2.14), d'où (5.36).

■

__Lemme__ **5.30.** *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 5.29 avec l'hypothèse supplémentaire V $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x},; \beta, \omega, z, \epsilon)$ est $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodique :*

$$\forall\, \boldsymbol{\upsilon} \in \boldsymbol{\Upsilon}, \quad \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}; \beta, \omega, z, \epsilon) = \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Preuve Lemme 5.30.
D'une part en utilisant que $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{e}_3}{2} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$, on a :

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{\upsilon} \in \boldsymbol{\Upsilon}, \quad & \mathrm{Fl}_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_j) \\ &= \phi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_1) + \phi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) + \cdots + \phi(\mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_j) + \phi(\mathbf{z}_j, \mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}) \\ &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\upsilon}) + \phi(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_2 - \boldsymbol{\upsilon}) + \cdots + \phi(\mathbf{z}_{j-1} - \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_j - \boldsymbol{\upsilon}) + \phi(\mathbf{z}_j - \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{x}) \\ &= \mathrm{Fl}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\upsilon}, \ldots, \mathbf{z}_j - \boldsymbol{\upsilon}) \end{aligned}$$

Et compte-tenu de (5.12) (on omet la dépendance en ω et ξ pour les noyaux) :

$$\begin{aligned} & R_\infty(\mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_1) T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \cdots T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_j) T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j, \mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}) \\ &\quad = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})} R_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\upsilon}) \mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{z}_1,\boldsymbol{\upsilon})} \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{z}_1,\boldsymbol{\upsilon})} T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_2 - \boldsymbol{\upsilon}) \mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{z}_2,\boldsymbol{\upsilon})} \cdots \\ &\quad \cdots \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{z}_{j-1},\boldsymbol{\upsilon})} T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1} - \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_j - \boldsymbol{\upsilon}) \mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{z}_j,\boldsymbol{\upsilon})} \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{z}_j,\boldsymbol{\upsilon})} T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j - \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{x}) \mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{x},\boldsymbol{\upsilon})} \end{aligned}$$

En reprenant la notation (5.37), il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{\upsilon} \in \boldsymbol{\Upsilon}, \quad & \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_j; \omega, \xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\upsilon}, \ldots, \mathbf{z}_j - \boldsymbol{\upsilon}; \omega, \xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{Z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{Z}_j\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_j; \omega, \xi) \end{aligned}$$

■

Proposition 5.31. *Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $z \in K$, K compact. Pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq L < \infty$, soit $(\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,z,\epsilon)$ le noyau intégral de l'opérateur $\partial_\omega^n \ln(\mathbb{1} + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega)})$ (cf. paragraphe 4, chapitre 4).*
Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{I}_{\infty,n}(\cdot\,;\beta,\omega,z,\epsilon)$ la fonction définie dans la Proposition 5.29. Alors :

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon) = \lim_{L\to\infty} (\partial_\omega^n \mathcal{I}_L)(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$$

Preuve Proposition 5.31.
Soient $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus D_\infty$. Pour $L < \infty$ suffisamment grand, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\Lambda_L \times \Lambda_L) \setminus D_L$, et les estimations (5.28) permettent d'avoir :

$$\lim_{L\to\infty} R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) = R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$
$$\lim_{L\to\infty} T_{j,L}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) = T_{j,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) \quad j \in \{1,2\},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

Etant donné (5.37), pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, il vient par conséquent :

$$\lim_{L\to\infty} \mathcal{K}_L^{j,m} = \mathcal{K}_\infty^{j,m}$$

Puisque la quantité $|\mathcal{K}_\infty^{j,m}|$ est majorée par (5.38) (uniformément en L), compte-tenu de (5.39), il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure.

■

5.1 Preuve du Théorème 5.3

Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ compact tel que $z \in K$. Considérons la décomposition $\Lambda_L = \Lambda_{n_L} \cup \Lambda_{n_L}^c$, voir (5.9).
Avec (5.37), introduisons de nouvelles notations. Pour $1 \leq L < \infty$ et $n \geq 1$ entier :

$$u_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) := n!\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L^j} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathcal{K}_L^{j,n-k} \tag{5.40}$$

$$v_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) := n!\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k \int_{\Lambda_{n_L}^c} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L^j} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathcal{K}_L^{j,n-k} \tag{5.41}$$

En vertu de (4.18), les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini s'écrivent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{X}_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L|}\left\{u_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) + v_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon)\right\}$$

A partir de (5.4) et par $\boldsymbol{\Upsilon}$-périodicité de $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$ (cf. Lemme 5.30) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{c}{q}\right)^n \mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon) &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon) \\ &= \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_{n_L}|} n!\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^{3j}} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k}\end{aligned}$$

Introduisons pour tout entier $n \geq 1$ les deux quantités suivantes :

$$u_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon) := n!\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l\in\{1,2\}^j} \chi_j^k \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L^j} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} w_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon) &:= n!\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l\in\{1,2\}^j} \chi_j^k \cdot \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \cdot \\ &\cdot \Big\{ \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_2 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k} + \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_{j-1} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_j\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k} + \\ &+ \sum_{l'=2}^{j-1} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_{l'} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_{l'+1} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k} + \frac{|\Lambda_{n_L}^c|}{|\Lambda_{n_L}|} \int_{\mathbb{R}^{3j}} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k} \Big\} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Avec ces notations, il vient alors :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{c}{q}\right)^n \big(\mathcal{X}_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)\big) = \\ &\quad \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L|}\big\{[u_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - u_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)] + v_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - w_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)\big\} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Prouvons maitnenant ces deux résultats ce qui achèvera la preuve du Théorème 5.3 :

Lemme 5.32. *Soient $\beta > 0$ et $O := [\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$. Alors il existe une constante $c_{n,1} = c_1(\beta, K, O, n) > 0$ telle que :*

$$\sup_{\omega\in O}\sup_{z\in K} |u_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - u_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)| \leq c_{n,1}L^2 \tag{5.44}$$

Lemme 5.33. *Soient $\beta > 0$ et $O := [\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$. Alors il existe des constantes $c_{n,i} = c_i(\beta, K, O, n) > 0$, $i \in \{2,3\}$, telles que :*

$$\sup_{\omega\in O}\sup_{z\in K} |v_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon)| \leq c_{n,2}L^2 \tag{5.45}$$

$$\sup_{\omega\in O}\sup_{z\in K} |w_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)| \leq c_{n,3}L^2 \tag{5.46}$$

Preuve Lemme 5.32.
Utilisant les définitions (5.40) et (5.42) de $u_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon)$ et $u_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &u_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - u_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon) = \\ &\quad n!\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{i_l\in\{1,2\}^j} \chi_j^k \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L^j} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \big\{\mathcal{K}_L^{j,n-k} - \mathcal{K}_\infty^{j,n-k}\big\} \end{aligned}$$

En omettant les dépendance en ω et ξ pour les noyaux, on a pour $1 \leq j \leq k \leq n$ entiers :

$$\mathcal{K}_L^{j,n-k} - \mathcal{K}_\infty^{j,n-k} = \frac{\big(i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x},\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_j)\big)^{n-k}}{(n-k)!}\Delta_{L,\infty}^j,$$

$$\Delta_{L,\infty}^j := R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\cdots T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\cdots T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x})$$

Remarquons que la quantité $\Delta^j_{L,\infty}$, $1 \leq j \leq k \leq n$, peut s'écrire encore :

$$\Delta^{j=1}_{L,\infty} = \big(R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z}_1) - R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big)T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{x}) + R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big(T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{x}) - T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{x})\big)$$

$$\begin{aligned}\Delta^{j=2}_{L,\infty} = \big(R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z}_1) - R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big)T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)T_{i_2,L}(\mathbf{z}_2,\mathbf{x}) +& \\ + R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big(T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) - T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\big)T_{i_2,L}(\mathbf{z}_2,\mathbf{x}) +& \\ + R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big)T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\big(T_{i_2,L}(\mathbf{z}_2,\mathbf{x}) - T_{i_2,\infty}(\mathbf{z}_2,\mathbf{x})\big)&\end{aligned}$$

et pour tout $j \geq 3$, avec la convention $\mathbf{z}_{j+1} := \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}\Delta^j_{L,\infty} = \big(R^{(1)}_L(\mathbf{x},\mathbf{z}_1) - R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big)T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\cdots T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) +& \\ + R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)\big(T_{i_1,L}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) - T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\big)T_{i_2,L}(\mathbf{z}_2,\mathbf{x})\cdots T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) +& \\ + \sum_{l=2}^{j-1} R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\cdots\big(T_{i_l,L}(\mathbf{z}_l,\mathbf{z}_{l+1}) - T_{i_l,\infty}(\mathbf{z}_l,\mathbf{z}_{l+1})\big)T_{i_{l+1},L}(\mathbf{z}_{l+1},\mathbf{z}_{l+2})\cdots& \\ \cdots T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) + R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1)T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\cdots T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1},\mathbf{z}_j)\big(T_{i_j,L}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x}) - T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j,\mathbf{x})\big)&\end{aligned}$$

La première étape consiste à majorer la quantité $|\Delta^j_{L,\infty}|$, $j \geq 1$. Pour cela on va utiliser les estimations (5.27) et (5.28). En posant $\mathbf{z}_0 := \mathbf{x}$, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et un polynôme $p_{j+1}(|\xi|)$ tels que :

$$\begin{aligned}|\Delta^j_{L,\infty}| \leq p_{j+1}(|\xi|)(1+|\omega|)^{6+3j}\cdot& \\ \cdot\Big\{2\sum_{s=0}^{j}\chi_{\Lambda^c_{n_L}}(\mathbf{z}_s) + \sum_{s=0}^{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{dist}(\mathbf{z}_s,\partial\Lambda_L)}\Big\}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}&\end{aligned}$$

Puis en utilisant les arguments menant à la majoration de $|\mathcal{F}^{j,n-k}_\infty|$ dans la preuve de la Proposition 5.29, il existe un autre $\delta > 0$ suffisamment petit tel que :

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{K}^{j,n-k}_L - \mathcal{K}^{j,n-k}_\infty\big| = \frac{|i\mathrm{Fl}_j(\mathbf{z}_0,\ldots,\mathbf{z}_j)|^{n-k}}{(n-k)!}|\Delta^j_{L,\infty}| \leq c(j,n-k)p_{j+1}(|\xi|)(1+|\xi|)^{2(n-k)}\cdot& \\ \cdot(1+|\omega|)^{6+3j}\Big\{2\sum_{s=0}^{j}\chi_{\Lambda^c_{n_L}}(\mathbf{z}_s) + \sum_{s=0}^{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{dist}(\mathbf{z}_s,\partial\Lambda_L)}\Big\}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}&\end{aligned}$$

avec $c(j,n-k) := c^{n-k}\frac{\left(j^2(n-k)^2\right)^{n-k}}{(n-k)!}$, $c \geq 1$.
Le reste de la preuve repose sur (5.39) permettant aussi de justifier l'application du théorème de Tonelli. D'une part pour $j \geq s \geq 1$, il existe un polynôme $q_j(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}&\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{z}_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\,\chi_{\Lambda^c_{n_L}}(\mathbf{z}_s)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|} \\ &\quad\leq \int_{\Lambda^c_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{z}_s\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_0\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_{s-1}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_s-\mathbf{z}_{s+1}|}}{|\mathbf{z}_s-\mathbf{z}_{s+1}|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_{s-1}-\mathbf{z}_s|}}{|\mathbf{z}_{s-1}-\mathbf{z}_s|} \\ &\quad\leq q_j(|\xi|)|\Lambda^c_{n_L}|\end{aligned}$$

Aussi, avec $\mathfrak{d} := \mathrm{dist}(\mathbf{z}_s, \partial\Lambda_L)$ et par (5.22), il existe un polynôme $q_j^{'}(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{z}_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \, \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}\mathfrak{d}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_0|} \\
&\leq \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_s \, \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}\mathfrak{d}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_{s+1} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_{s-1} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_s - \mathbf{z}_{s+1}|}}{|\mathbf{z}_s - \mathbf{z}_{s+1}|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_{s-1} - \mathbf{z}_s|}}{|\mathbf{z}_{s-1} - \mathbf{z}_s|} \\
&\leq q_j^{'}(|\xi|) L^2
\end{aligned}$$

En réunissant les résultats ci-dessus, il existe un autre polynôme $p_n(|\xi|)$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\sup_{\omega \in O} \sup_{z \in K} |u_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon) - u_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)| \leq \\
&\qquad \left(n! \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c(j, n-k)(j+1) \sup_{\omega \in O} (1 + |\omega|)^{9+3n} \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi| \, p_n(|\xi|) |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \right) L^2
\end{aligned}$$

Il reste à utiliser la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot)$ sur Γ_K pour conclure.

■

Preuve Lemme 5.33.
On commence par prouver (5.45). A partir de l'expression (5.41) de $v_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$, la première étape consiste à majorer la quantité $|\mathcal{K}_L^{j,n-k}|$, $1 \leq j \leq k \leq n$ entiers. On peut réutiliser les arguments menant à la majoration de $|\mathcal{K}_\infty^{j,n-k}|$ dans la preuve de la Proposition 5.29. Ainsi, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et un polynôme $p_{j+1}(|\xi|)$ tels que :

$$|\mathcal{K}_L^{j,n-k}| \leq c(j, n-k) p_{j+1}(|\xi|)(1 + |\xi|)^{2(n-k)}(1 + |\omega|)^{3j+3} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}|}$$

Puis en utilisant (5.39), il vient alors l'existence d'un autre polynôme $p_n(|\xi|)$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k \int_{\Lambda_{n_L}^c} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^{3j}} \mathrm{d}\mathbf{z} \, |\mathcal{K}_L^{j,n-k}| \leq p_n(|\xi|)(1 + |\omega|)^{3n+3} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c(j, n-k) |\Lambda_{n_L^c}|$$

Il reste à utiliser (2.14) pour obtenir (5.45).

Prouvons maintenant (5.46). A partir de la définition (5.43) de $w_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$, prenons un terme générique. Par exemple, pour $2 \leq l^{'} \leq j-1$:

$$\begin{aligned}
w_{\infty, l'}^n(\beta, \omega, z, \epsilon) &:= n! \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k \cdot \\
&\cdot \int_{\Lambda_{n_L}} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{z}_{l'} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_{l'+1} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \, \mathcal{K}_\infty^{j,n-k}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

On commence par majorer la quantité $|\mathcal{K}_\infty^{j,n-k}|$. Pour cela, on reprend les arguments utilisés dans la preuve de la Proposition 5.29. Ainsi, il existe un polynôme $p_{j+1}(|\xi|)$ et un réél $\delta > 0$ suffisamment petit tels que :

$$|\mathcal{K}_\infty^{j,n-k}| \leq c(j, n-k) p_{j+1}(|\xi|)(1 + |\xi|)^{2(n-k)}(1 + |\omega|)^{3j+3} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1|} \cdots \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}|}$$

Le reste de l'estimation est basé sur le fait qu'il existe un polynôme $q_s(|\xi|)$ tel que :

$$\operatorname{ess}\sup_{\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_0'\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_s\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}}{|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_s-\mathbf{z}_0'|}}{|\mathbf{z}_s-\mathbf{z}_0'|}\leq q_s(|\xi|)$$

Posons $\mathbf{z}_0 := \mathbf{x}$. Par application du théorème de Tonelli justifié par l'estimation ci-dessus, puis en utilisant le Lemme 5.26, il existe un polynôme $q_j(|\xi|)$ tel que :

$$\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{z}_0\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'+1}\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}}{|\mathbf{z}_0-\mathbf{z}_1|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}$$

$$\leq\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'-1}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_{l'-1}-\mathbf{z}_{l'}|}}{|\mathbf{z}_{l'-1}-\mathbf{z}_l|}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'+1}\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_0\cdots$$
$$\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'-2}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_{l'}-\mathbf{z}_{l'+1}|}}{|\mathbf{z}_{l'}-\mathbf{z}_{l'+1}|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}}{|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_0|}\cdots\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{z}_{l'-2}-\mathbf{z}_{l'-1}|}}{|\mathbf{z}_{l'-2}-\mathbf{z}_{l'-1}|}\leq q_j(|\xi|)L^2$$

Il vient alors l'existence d'un autre polynôme $p_n(|\xi|)$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i_l\in\{1,2\}^j}\chi_j^k\int_{\Lambda_{n_L}}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\cdots\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_{l'+1}\cdots\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_j\,|\mathcal{F}_\infty^{j,n-k}|$$
$$\leq p_n(|\xi|)(1+|\omega|)^{3n+3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}c(j,n-k)L^2$$

Il reste à utiliser la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}(\beta,z;\cdot\,)$ sur le contour Γ_K pour obtenir :

$$\sup_{\omega\in O}\sup_{z\in K}|w^n_{\infty,l'}(\beta,\omega,z,\epsilon)|\leq c(\beta,K,O,n)L^2$$

■

5.2 Preuve des Corollaires 5.4 et 5.5

Preuve Corollaire 5.4.
Soient $\beta>0$ et $z\in\mathcal{D}_\epsilon$. D'après les théorèmes généraux sur les suites de fonctions, les résultats du corollaire sont une conséquence de :
(1). La suite de fonctions $\{P_L(\beta,\cdot\,,z,\epsilon)\}_{L\geq1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(2). $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, la suite de fonctions $\{\mathcal{X}_L^n(\beta,\cdot\,,z,\epsilon)\}_{L\geq1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
(3). $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, la suite de fonctions $\{\mathcal{X}_L^n(\beta,\cdot\,,z,\epsilon)\}_{L\geq1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{X}_\infty^n(\beta,\cdot\,,z,\epsilon)$.

■

Preuve Corollaire 5.5.
Soient $\beta>0$ et $\omega\in\mathbb{R}$. Le Théorème 5.3 donne en particulier que pour tout compact $K\subset\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad\lim_{L\to\infty}\sup_{z\in K}|\mathcal{X}_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon)-\mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)|=0$$

Il suffit ensuite d'utiliser le Théorème de Weierstrass (cf. théorème 5.19) compte-tenu des résultats du Corollaire 5.4.

■

5.3 Preuve du Théorème 5.6 et de la Proposition 5.7

Preuve Théorème 5.6.
Pour $\beta > 0$, introduisons les intervalles $N_\epsilon(E_0(0))$ définis par :

$$N_{+1}(E_0(0)) := \mathcal{D}_{+1} \cap \mathbb{R} = (-\mathrm{e}^{\beta E_0(0)}, +\infty), \quad N_{-1}(E_0(0)) := \mathcal{D}_{-1} \cap \mathbb{R} = (-\infty, \mathrm{e}^{\beta E_0(0)})$$

Soient $z \in N_\epsilon(E_0(0))$ et $K \subset N_\epsilon(E_0(0))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$.
Soit α un réél vérifiant $-\infty < \alpha \leq E_0(0)$ tel que $K \subset N_\epsilon(\alpha)$.
La fonction $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$ est holomorphe sur le domaine :

$$\hat{\mathfrak{C}} := \{\xi \in \mathbb{C} \, : \, \Im\xi \in (-\pi/\beta, \pi/\beta), \; \Re\xi \geq \alpha\}$$

Remarquons que pour tout entier $m \geq 1$:

$$(\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \xi) = (m-1)!(-1)^{m+1} \frac{\epsilon^m \mathrm{e}^{-m\beta\xi}}{(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})^m} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

et $\xi \mapsto (\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \xi)$ est encore holomorphe sur le domaine $\hat{\mathfrak{C}}$.
Posons $(\partial_z^0 \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \cdot\,) = \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$. Introduisons le contour orienté positivement défini par :

$$\hat{\gamma} := \{\delta + iy \, : \, y \in [-\pi/2\beta, \pi/2\beta]\} \cup \{x \pm i\pi/2\beta \, : \, x \geq \alpha\} \quad -\infty < \alpha < E_0(0)$$

Le contour $\hat{\gamma}$ est inclus dans le domaine d'holomorphie $\hat{\mathfrak{C}}$ de $(\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \cdot\,)$, avec $m \in \mathbb{N}$.
De plus, $(\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \cdot\,)$ décroît exponentiellement sur le contour $\hat{\gamma}$ pour $\Re\xi > 0$ assez large.

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $m \geq 0$ et $n \geq 1$, introduisons les quantités :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\infty^{n,m}(\beta, \omega, z, \epsilon) := n! \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{i}{2\pi} \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|} \int_{\hat{\gamma}} \mathrm{d}\xi \, (\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \xi) \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1, \ldots, i_j) \cdot \\ \cdot \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \cdot \frac{\big(i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_j))\big)^{n-k}}{(n-k)!} R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1; \omega, \xi) T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega, \xi) \cdots \\ \cdots T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_j; \omega, \xi) T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j, \mathbf{x}; \omega, \xi) \quad (5.48)\end{aligned}$$

où dans le cas $m = 0$, $\mathcal{Y}_\infty^{n,m}(\beta, \omega, z, \epsilon) = \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$ avec $n \geq 1$ (voir (5.4)).
En reprenant les arguments utilisés dans la preuve de la Proposition 5.29, ces quantités sont bien définies (l'un des ingrédients principaux est la décroissance exponentielle de $(\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \cdot\,)$ sur le contour $\hat{\gamma}$ pour $\Re\xi > 0$ assez large).

On établit maintenant le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 5.34. *Soit $\beta > 0$. Alors pour tout compact $[\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$, et pour tout compact $K \subset N_\epsilon(E_0(0))$:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L \to \infty} \sup_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \sup_{z \in K} |(\partial_\omega^n \partial_z^m P_L)(\beta, \omega, z, \epsilon) - \mathcal{Y}_\infty^{n,m}(\beta, \omega, z, \epsilon)| = 0 \quad m \in \mathbb{N} \quad (5.49)$$

La preuve de ce résultat utilise la même méthode que celle utilisée dans la preuve du Théorème 5.3 en substituant $(\partial_z^m \mathfrak{f}_\epsilon)(\beta, z; \cdot\,)$ à $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$.

Ce résultat a deux conséquences immédiates. D'une part, pour tout $z \in N_\epsilon(E_0(0))$, $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto (\partial_z^m P_\infty)(\beta, \omega, z, \epsilon)$, $m \in \mathbb{N}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec l'identification :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (\partial_\omega^n \partial_z^m P_\infty)(\beta, \omega, z, \epsilon) = \mathcal{Y}_\infty^{n,m}(\beta, \omega, z, \epsilon) \quad m \in \mathbb{N}$$

D'autre part, la fonction $(\omega, z) \mapsto (\partial_\omega^n \partial_z^m P_\infty)(\beta, \omega, z, \epsilon)$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $\mathbb{R} \times N_\epsilon(E_0(0))$.

Rappelons que d'après le Corollaire 5.4, $N_\epsilon(E_0(0)) \ni z \mapsto P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction $(\omega, z) \mapsto (\partial_z^m \partial_\omega^n P_\infty)(\beta, \omega, z, \epsilon)$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, est également continue sur $\mathbb{R} \times N_\epsilon(E_0(0))$ puisqu'on peut également démontrer que pour tout compact $[\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$, et pour tout compact $K \subset N_\epsilon(E_0(0))$:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{L \to \infty} \sup_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \sup_{z \in K} \left|(\partial_z^m \mathcal{X}_L^n)(\beta, \omega, z, \epsilon) - (\partial_z^m \mathcal{X}_\infty^n)(\beta, \omega, z, \epsilon)\right| = 0 \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.50}$$

avec $\mathcal{X}_L^0(\beta, \omega, z, \epsilon) := P_L(\beta, \omega, z, \epsilon)$, $1 \leq L \leq \infty$.
Il reste à noter que pour tout entier n, m tels que $n + m \geq 1$, on a les égalités :

$$(\partial_\omega^n \partial_z^m P_\infty)(\beta, \omega, z, \epsilon) = \mathcal{Y}_\infty^{n,m}(\beta, \omega, z, \epsilon) = (\partial_z^m \partial_\omega^n P_\infty)(\beta, \omega, z, \epsilon), \quad \omega \in \mathbb{R},\ z \in N_\epsilon(E_0(0))$$

Il s'ensuit que $(\omega, z) \mapsto P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times N_\epsilon(E_0(0))$.

■

Preuve Proposition 5.7.
La preuve est une simple conséquence du Corollaire 4.4 compte-tenu du Corollaire 5.4 et du Théorème 5.3 assurant une convergence point par point.

■

6 Appendice 1 : limites thermodynamiques à densité fixée

Dans cet appendice, on s'intéresse aux limites thermodynamiques des grandeurs grand canonique lorsque la densité de particules $\rho_0 > 0$ devient un paramètre fixé.

Dans une première partie, on démontre l'existence de ces limites à partir des définitions et propriétés des quantités grand canonique à volume fini et à densité fixée introduites dans l'appendice 2 du chapitre 2, et à partir des résultats énoncés dans la section "résultats principaux" de ce chapitre. Dans une seconde partie, on donne des formules reliant les limites thermodynamiques de la pression, aimantation et susceptibilité grand canonique à densité fixée, à la transformée de Legendre de la limite thermodynamique de la pression grand canonique et de ses dérivées partielles (par rapport à l'intensité du champ magnétique).

Comme dans les paragraphes précédents, on supposera que $V \in L^p(\mathbb{R}^3/\Upsilon)$, avec $p > 3$.

6.1 Limites thermodynamiques des grandeurs à densité fixée

Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soient I_ϵ et J_ϵ, avec $\epsilon = \pm 1$, les intervalles définis par :

$$I_{-1} = I_{-1}(\omega) := \mathcal{D}_{-1}(E_0(\omega)) \cap \mathbb{R}_+^* = (0, \mathrm{e}^{\beta E_0(\omega)}), \quad I_{+1} := \mathcal{D}_{+1}(E_0(\omega)) \cap \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$$
$$J_{-1} = J_{-1}(\omega) := (-\infty, E_0(\omega)), \quad J_{+1} := (-\infty, +\infty)$$

On suppose que la densité $\rho_0 \in (0, +\infty)$ est prise comme paramètre extérieur. Soient $P_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$ et $\mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la pression et les susceptibilités généralisées grand canonique à volume fini et à densité fixée (voir appendice 2, chapitre 2) :

$$P_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := P_L(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon), \quad \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon) \;\; n \in \mathbb{N}^*$$

où $\mu_L = \mu_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ est l'unique solution de l'équation $\rho_L(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0$.

En l'absence de confinement, la densité de particules pour le gaz de fermions peut être choisie quelconque dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Cela peut éventuellement ne pas être le cas pour le gaz de bosons lorsque celui-ci manifeste le phénomène de condensation de Bose-Einstein, correspondant à une accumulation macroscopique de particules sur un ou plusieurs niveaux d'énergie, caractérisé par l'existence d'une valeur critique pour la densité :

Définition 5.35. *Pour $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\mu \in J_{-1}$, soit $\rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, -1)$ la limite thermodynamique de la densité grand canonique (voir (5.6)) pour le gaz de bosons.*
Soit $\rho_c(\beta, \omega) \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$ la densité critique définie par :

$$\rho_c(\beta, \omega) := \lim_{\mu \to E_0(\omega)} \rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, -1) \tag{5.51}$$

On dit qu'il y a condensation de Bose-Einstein de type I (accumulation de particules sur le niveau d'énergie le plus bas) si $\rho_c(\beta, \omega) < +\infty$.

Rappelons que dans le cas du gaz parfait de bosons ($V = 0$) et en l'absence de champ magnétique ($\omega = 0$), le phénomène de condensation est présent (voir par ex. [52]).
Toujours dans le cas du gaz parfait mais en présence de champ magnétique ($\omega \neq 0$), le phénomène de condensation est absent (voir par ex. [6]). Etant donné les hypothèses que nous considérons sur le potentiel V, il n'existe pas de critère permettant de déterminer la présence ou non de condensation (pour davantage de détails, voir [18]).

Introduisons alors les intervalles M_ϵ, avec $\epsilon = \pm 1$, définis par :

$$M_{+1} := (0, +\infty), \quad M_{-1} = M_{-1}(\omega) := (0, \rho_c(\beta, \omega)) \quad \text{avec } \rho_c(\beta, \omega) \in \overline{\mathbb{R}_+^*} \text{ défini en (5.51)}$$

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 5.36. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$. Alors :*

$$\lim_{L \to \infty} P_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := P_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) = P_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) \tag{5.52}$$

$$\lim_{L \to \infty} \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) = \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon), \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{5.53}$$

où $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ est l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0$.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du Théorème 5.36.
On a vu dans l'appendice 2 du chapitre 2 que les définitions de la pression et des susceptibilités grand canonique à volume fini et à densité fixée reposent sur la possibilité d'inverser la relation liant la fugacité à la densité grand canonique. On montre ci-dessous qu'il est également possible d'inverser la relation fugacité-densité en limite thermodynamique :

Proposition 5.37. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$.*
Soit $\rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ la limite thermodynamique de la densité grand canonique, voir (5.6). *Alors il existe un unique $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ solution de l'équation :*

$$\rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0 \tag{5.54}$$

La preuve de la Proposition 5.37 repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.38. *Pour tout $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$, la fonction $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ est strictement croissante.*

Preuve Lemme 5.38.
Vue comme une fonction de la variable μ, $P_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est limite simple de la suite de fonctions convexes $\{P_L(\beta, \omega, e^{\beta\cdot}, \epsilon)\}_{L\geq 1}$ (cf. Théorème 5.1 et Proposition 2.16). Il s'ensuit que $\mu \mapsto P_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ est une fonction convexe. Par conséquent, $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ est monotone croissante et sa dérivée et de signe constant positif :

$$\forall\, \mu \in J_\epsilon, \quad \frac{\partial \rho_\infty}{\partial \mu}(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon) \geq 0 \tag{5.55}$$

En tant que limite uniforme sur les compacts en z de la suite de fonctions analytiques $\{\rho_L(\beta, \omega, \cdot, \epsilon)\}_{L\geq 1}$, $z \mapsto \rho_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon)$ est analytique sur $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ (cf. Corollaire 5.2).
Le théorème des zéros isolés (voir [24]) garantit que si la fonction $z \mapsto \frac{\partial \rho_\infty}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ possède des zéros, ceux-ci ne peuvent être que des points isolés de $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$, sans quoi $\frac{\partial \rho_\infty}{\partial z}(\beta, \omega, \cdot, \epsilon)$ serait identiquement nulle. Par conséquent, $I_\epsilon \ni z \mapsto \beta z \frac{\partial \rho_\infty}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ ne peut s'annuler qu'en des points isolés, idem pour $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \frac{\partial \rho_\infty}{\partial \mu}(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ puisque $\frac{\partial \rho_\infty}{\partial \mu}(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon) = \beta z \frac{\partial \rho_\infty}{\partial z}(\beta, \omega, z, \epsilon)$. Avec (5.55), on conclut que $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ est strictement croissante.

■

Preuve Proposition 5.37.
D'une part la fonction $\rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et même analytique réélle) par rapport à la variable μ (comme composée de fonctions analytiques réélles) (voir [57]).
D'autre part, $\mu \mapsto \rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon)$ est strictement croissante sur son ensemble de définition d'après le Lemme 5.38. Le théorème d'inversion globale assure que $\rho_\infty(\beta, \omega, e^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de J_ϵ sur M_ϵ.

■

Avant de prouver le Théorème 5.36, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.39. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$. Soient $\mu_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$, $1 \leq L < +\infty$, l'unique solution de $\rho_L(\beta, \omega, e^{\beta\mu}, \epsilon) = \rho_0$ et $\mu_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) \in J_\epsilon$ l'unique solution de* (5.54). *Alors la suite $\{\mu_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)\}_{L\geq 1}$ converge vers $\mu_\infty(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$ lorsque $L \to \infty$.*

Preuve Lemme 5.39.
On utilise la notation raccourcie $\mu_L = \mu_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$, avec $1 \leq L \leq \infty$.
Le lemme sera prouvé si on démontre l'inégalité :

$$\mu_\infty \leq \mu_1 := \liminf_{L\to\infty} \mu_L \leq \mu_2 := \limsup_{L\to\infty} \mu_L \leq \mu_\infty \tag{5.56}$$

On commence par démontrer la première inégalité (celle de gauche) par contraposé. Suppsons que $\mu_1 := \liminf_{L\to\infty} \mu_L < \mu_\infty$. Alors il existe $\eta > 0$ et une suite divergente $\{L_n\}_{n\geq 1}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{L_n} = \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu_{L_n} \leq \mu_\infty - \eta \quad \forall\, n \geq 1$$

Vue comme une fonction de μ, $\rho_{L_n}(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon)$ étant une fonction croissante, on a :

$$\rho_0 = \rho_{L_n}(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_{L_n}}, \epsilon) \leq \rho_{L_n}(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta(\mu_\infty-\eta)}, \epsilon) \quad \forall\, n \geq 1$$

Et comme $\{\rho_{L_n}(\beta, \omega, \cdot\,, \epsilon)\}_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $\rho_\infty(\beta, \omega, \cdot\,, \epsilon)$ sur les compacts en z (voir méthode dans la preuve du Théorème 5.36), on obtient :

$$\rho_0 = \rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_1}, \epsilon) \leq \rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta(\mu_\infty-\eta)}, \epsilon) < \rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) = \rho_0$$

où on a utilisé dans la seconde inégalité (la stricte) que $\rho_\infty(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\cdot}, \epsilon)$ est une fonction strictement croissante d'après le Lemme 5.38. On arrive alors à une contradiction. Par conséquent, $\mu_\infty \leq \mu_1$. La seconde inégalité dans (5.56) se démontre aussi par contraposé.

■

Preuve Théorème 5.36.
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$. On utilise la notation $\mu_L = \mu_L(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)$, avec $1 \leq L \leq \infty$, et on posera $P_L(\beta, \omega, \cdot\,, \epsilon) := \mathcal{X}_L^0(\beta, \omega, \cdot\,, \epsilon)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre que :

$$\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) := \lim_{L\to\infty} \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) = \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon)$$

Soit $\delta > 0$ fixé. Partons de l'inégalité :

$$\begin{aligned} &|\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) - \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)| \\ &\qquad \leq |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon)| + |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon) - \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)| \end{aligned}$$

La fonction $\mu \mapsto \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon)$ étant continue,

$$\exists\, \eta > 0 \ : \ \forall\, \mu \in J_\epsilon,\ |\mu - \mu_\infty| \leq \eta \implies |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \epsilon)| \leq \frac{\delta}{2}$$

D'après le Lemme 5.39, la suite $\{\mu_L\}_{L\geq 1}$ converge vers μ_∞, i.e. il existe un rang $L_1 \geq 1$ tel que pour tout $L \geq L_1$, $|\mu_L - \mu_\infty| \leq \eta$. Il s'ensuit :

$$\forall\, L \geq L_1, \quad |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon)| \leq \frac{\delta}{2} \tag{5.57}$$

Soit $K \subset I_\epsilon$ un compact tel que $\mathrm{e}^{\beta\mu_\infty} \in K$. Par convergence de la suite $\{\mu_L\}_{L\geq 1}$, il existe un rang $L_2 \geq 1$ tel que pour tout $L \geq L_2$, $\mathrm{e}^{\beta\mu_L} \in K$. Aussi :

$$|\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon) - \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_L}, \epsilon)| \leq \sup_{z\in K} |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon) - \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon)|$$

Et d'après le Théorème 5.3 :

$$\exists\, L_3 \geq 1 \ : \ \forall\, L \geq L_3, \quad \sup_{z\in K} |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon) - \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon)| \leq \frac{\delta}{2} \tag{5.58}$$

Etant donné (5.57) et (5.58), en posant $L_0 := \max\{L_1, L_2, L_3\} \geq 1$, il vient :

$$\forall\, L \geq L_0, \quad |\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) - \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)| \leq \delta$$

■

6.2 Transformée de Legendre de la limite thermodynamique de la pression grand canonique

Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$. En vertu de la Proposition 5.37, introduisons la transformée de Legendre de la limite thermodynamique de la pression grand canonique :

$$\mathcal{F}_\infty(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon) := \sup_{\mu\in J_\epsilon}\big(\rho_0\mu - P_\infty(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon)\big) = \rho_0\mu_\infty - P_\infty(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu_\infty},\epsilon) \tag{5.59}$$

où $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon) \in J_\epsilon$ est l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon) = \rho_0$.

Voici le résultat principal de ce paragraphe :

Proposition 5.40. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$.*
Soit $\mathcal{F}_L(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon)$, $1 \leq L < \infty$, la transformée de Legendre de la pression grand canonique à volume fini, voir (2.55)*. Soit $\mathcal{F}_\infty(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon)$ la transformée de Legendre de la limite thermodynamique de pression grand canonique, voir* (5.59)*.*
Alors on a les convergences simples suivantes :

$$\lim_{L\to\infty}\mathcal{F}_L(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon) = \mathcal{F}_\infty(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon), \quad \lim_{L\to\infty}\frac{\partial\mathcal{F}_L}{\partial\omega}(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon) = \frac{\partial\mathcal{F}_\infty}{\partial\omega}(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon)$$
$$\lim_{L\to\infty}\frac{\partial^2\mathcal{F}_L}{\partial\omega^2}(\beta,\omega=0,\rho_0,\epsilon) = \frac{\partial^2\mathcal{F}_\infty}{\partial\omega^2}(\beta,\omega=0,\rho_0,\epsilon)$$

Etant donné les résultats la Proposition 2.25, et compte-tenu du Théorème 5.36, il suffit de montrer ces deux identités :

$$\frac{\partial\mathcal{F}_\infty}{\partial\omega}(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon) = -\left(\frac{c}{q}\right)\mathcal{X}^1_\infty(\beta,\omega,\rho_0,\epsilon), \quad \frac{\partial^2\mathcal{F}_\infty}{\partial\omega^2}(\beta,0,\rho_0,\epsilon) = -\left(\frac{c}{q}\right)^2\mathcal{X}^2_\infty(\beta,0,\rho_0,\epsilon)$$

On a besoin pour cela des deux lemmes suivants :

Lemme 5.41. *Pour tout $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\mu \in J_\epsilon$:*

$$\frac{\partial\rho_\infty}{\partial\mu}(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon) > 0 \tag{5.60}$$

Preuve Lemme 5.41.
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. En tant que limite uniforme sur les compacts en z de la suite de fonctions analytiques $\{\partial_z\rho_L(\beta,\omega,\cdot,\epsilon)\}_{L\geq 1}$, $z \mapsto \partial_z\rho_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon)$ est analytique sur $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ (cf. Corollaire 5.2). D'après le Théorème d'Hurwitz (voir Théorème 5.75 en annexe), soit $\partial_z\rho_\infty(\beta,\omega,\cdot,\epsilon)$ est identiquement nulle, soit $\partial_z\rho_\infty(\beta,\omega,\cdot,\epsilon)$ ne possède pas de zéro dans $\mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$. Supposons que $\partial_z\rho_\infty(\beta,\omega,\cdot,\epsilon)$ soit identiquement nulle. Alors $I_\epsilon \ni z \mapsto \beta z\partial_z\rho_\infty(\beta,\omega,\cdot,\epsilon)$ est identiquement nulle. Or $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \partial_\mu\rho_\infty(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon)$ est strictement croissante d'après le Lemme 5.38. On conclut que $J_\epsilon \ni \mu \mapsto \partial_\mu\rho_\infty(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon)$ ne s'annule jamais.

■

Lemme 5.42. *Pour tout $\beta > 0$ et $\mu \in J_\epsilon$, $\omega \mapsto \rho_\infty(\beta,\omega,\mathrm{e}^{\beta\mu},\epsilon)$ est une fonction paire.*

Preuve Lemme 5.42.
Il suffit de reprendre la preuve du Lemme 4.16 à partir de l'expression (5.6).

■

Preuve Proposition 5.40.
Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\rho_0 \in M_\epsilon$.
On reprend point par point les arguments utilisés dans la preuve de la Proposition 2.25. Justifié par le Théorème 5.6, l'application du théorème des fonctions implicites assure que $\mathcal{F}_\infty(\beta, \cdot\,, \rho_0, \epsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de ω.
D'une part, en utilisant que $(\partial_\mu P_\infty)(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon) = \rho_\infty(\beta, \omega, \mu_\infty, \epsilon) = \rho_0$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\infty}{\partial \omega}(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) = \rho_0 \frac{\partial \mu_\infty}{\partial \omega}(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon) - \frac{\partial P_\infty}{\partial \omega}\left(\beta, \omega, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon\right) - \frac{\partial \mu_\infty}{\partial \omega}(\beta, \omega, \rho_0, \epsilon)\rho_0$$

D'autre part, à partir de :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_\infty}{\partial \omega^2}(\beta, \omega = 0, \rho_0, \epsilon) = -\frac{\partial^2 P_\infty}{\partial \omega^2}\left(\beta, 0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon\right) - \frac{\partial \mu_\infty}{\partial \omega}(\beta, 0, \rho_0, \epsilon)\frac{\partial^2 P_\infty}{\partial \mu \partial \omega}\left(\beta, 0, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \epsilon\right)$$

le théorème des fonctions implicites suivi du Lemme 5.42 donnent $(\partial_\omega \mu_\infty)(\beta, 0, \rho_0, \epsilon) = 0$.

■

7 Appendice 2 : Limites thermodynamiques pour le modèle d'Anderson

Le potentiel type Anderson est générallement utilisé pour modéliser un réseau cristallin comportant des impuretés aléatoirement distribuées. De manière imagée, on considère un réseau cristallin infini où chaque site du réseau est occupé par une même espèce d'ions sauf certains sites aléatoirement distibués qui sont occupés par d'autres espèces d'ions (portant une charge électrique différente). C'est pour cette raison que le potentiel type Anderson est souvent appelé potentiel type alliage.

Dans cet appendice, on se propose de prouver l'existence des limites thermodynamiques de la pression, aimantation et susceptibilité grand canonique pour le potentiel type Anderson (voir (5.61) avec l' hypothèse (**h3'**) ci-dessous). Avant d'énoncer les résultats principaux, rappelons quelques définitions et résultats propres aux opérateurs de Schrödinger aléatoires (on utilisera généralement la terminologie de Kirsch, cf. [59]).

7.1 Potentiel type Anderson et opérateurs de Schrödinger aléatoires

Soit $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet.
On notera $\mathbb{E}[\cdot\,] := \int_N (\cdot\,)\mathrm{d}\mathbb{P}(\eta)$ l'espérance induite par la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
Par la suite, on appelera champ scalaire aléatoire une fonction $g : N \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jointement mesurable par rapport au produit de la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ des ensembles d'évènements dans N et de la σ-algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ des ensembles de Borel dans $\mathbb{R}^3$. On notera $g(\eta, \mathbf{x}) = g_\eta(\mathbf{x})$.

On définit le potentiel type Anderson comme le champ scalaire aléatoire dont les réalisations sont données par :

$$V_\eta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^3} \lambda_{\mathbf{i}}(\eta) u(\mathbf{x} - \mathbf{i}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.61}$$

avec $\{\lambda_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^3}$ une famille de variables aléatoires sur $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.
Par la suite, on se placera sous l'hypothèse (**h3'**) dans laquelle on suppose :
(1) Les variables aléatoires $\lambda_{\mathbf{i}}(\eta)$ sont $\mathbb{P}$ -indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) avec valeurs sur un intervalle borné I tel que $\mathbb{P}(\lambda_{\mathbf{0}}(\eta) \in [a,b]) = \int_a^b \mathrm{d}q\, f(q)$, $\|f\|_\infty < +\infty$.
(2) La fonction de site $u(\cdot\,)$ est bornée et $|u(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-3-\epsilon})$, $\epsilon > 0$, lorsque $|\mathbf{x}| \to +\infty$.

Remarque 5.43. Sous l'hypothèse (**h3'**), la série dans (5.61) est absolument convergente et $V_\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le fait d'avoir choisi les $\lambda_{\mathbf{i}}$ i.i.d. sera justifié par la suite.

Remarque 5.44. De manière imagée, l'indépendance pour les variables aléatoires $\lambda_{\mathbf{i}}$ signifie que $\lambda_{\mathbf{j}}$ et $\lambda_{\mathbf{k}}$ ne s'influencent "pas trop" pour $|\mathbf{j}-\mathbf{k}|$ assez grand. Et identiquement distribuée signifie que la loi de probabilité est la même en tout point du réseau (voir [59]).

Rappelons maintenant la définition d'un champ aléatoire (à valeurs réélles ou complexes) stationnaire ergodique (voir par ex. [59], [53], [54]) :

Définition 5.45. *Un champ aléatoire $g_\eta(\cdot\,)$ est dit $\mathbb{G}^3$-(stationnaire) ergodique, avec $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
(i). Sur $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ il existe un groupe d'automorphismes $\{\tau_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{G}^3}$ préservant la mesure, i.e. $\mathbb{P}(\tau_{\mathbf{v}}^{-1}A) = \mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{G}^3$, tel que :

$$\forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{G}^3, \quad g_{\tau_{\mathbf{v}}\eta}(\mathbf{x}) = g_\eta(\mathbf{x}-\mathbf{v}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \eta \in N \tag{5.62}$$

(ii). $\{\tau_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{G}^3}$ est ergodique, c'est-à-dire tout ensemble $A \in \mathfrak{A}$ qui est invariant sous $\{\tau_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{G}^3}$ (i.e. $\tau_{\mathbf{v}}^{-1}A = A$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{G}^3$) a une probabilité 0 ou 1.

Remarque 5.46. Si seulement (i) est vérifiée, g_η est dit $\mathbb{G}^3$-stationnaire.

L'hypothèse i.i.d. pour les variables aléatoires $\lambda_{\mathbf{i}}$ dans (5.61) est essentielle puiqu'elle assure que $\{\lambda_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^3}$, vu comme un champ aléatoire sur $\mathbb{Z}^3$, est $\mathbb{Z}^3$-ergodique (voir [59]). Il existe alors un groupe de transformations ergodiques $\{\tau_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^3}$ préservant la mesure sur $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ tel que :

$$\lambda_{\mathbf{i}}(\tau_{\mathbf{v}}\eta) = \lambda_{\mathbf{i}-\mathbf{v}}(\eta) \quad \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3 \tag{5.63}$$

Il s'ensuit que V_η est un champ scalaire aléatoire $\mathbb{Z}^3$-ergodique (cf. Définition 5.45) :

$$V_{\tau_{\mathbf{v}}\eta}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^3} \lambda_{\mathbf{i}-\mathbf{v}}(\eta) u(\mathbf{x}-\mathbf{i}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3} \lambda_{\mathbf{i}}(\eta) u(\mathbf{x}-\mathbf{j}-\mathbf{v}) = V_\eta(\mathbf{x}-\mathbf{v})$$

Remarque 5.47. De manière imagée, la $\mathbb{Z}^3$-stationnarité pour V_η signifie que le réseau est en moyenne homogène. La $\mathbb{Z}^3$-ergodicité signifie que les réalisations de V_η aux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont "presque statistiquement indépendantes" pour $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ assez grand.

Bien que le potentiel type Anderson (5.61) ne soit que $\mathbb{Z}^3$-ergodique, on peut le rendre artificiellement $\mathbb{R}^3$-ergodique. On utilise pour cela la "technique de suspension" [58].

Considérons le nouvel espace probabilisé $(\tilde{N}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ formé du produit de l'espace probabilisé $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ du champ aléatoire $\{\lambda_{\mathbf{i}}\}$ avec l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}_0, \mathbb{P}_0)$ d'une variable aléatoire $\boldsymbol{\theta}$ indépendante du champ $\{\lambda_{\mathbf{i}}\}$ et distribuée de manière homogène sur la cellule unité $\Omega = (-1/2, 1/2)^3$ du réseau cubique $\mathbb{Z}^3$. $\mathfrak{A}_0$ est la σ-algèbre des sous-ensembles de Borel

de Ω et $\mathbb{P}_0$ la mesure de Lebesgue sur Ω. On notera $\tilde{\mathbb{E}}[\cdot] = \int_N \int_\Omega (\cdot) \mathrm{d}\mathbb{P}(\eta)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ l'espérance induite par la mesure de probabilité induite $\mathbb{P} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$.
Pour $(\eta, \boldsymbol{\theta}) \in \tilde{N}$, définissons le groupe des transformations :

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{v}}(\eta, \boldsymbol{\theta}) = \big(\tau_{\underline{\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}}}\eta, (\mathbf{v} \dot{+} \boldsymbol{\theta})\big) \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.64}$$

où $\underline{\mathbf{x}}$ et $\dot{\mathbf{x}}$ désignent la décomposition d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}^3$ et d'un vecteur $\dot{\mathbf{x}} \in \Omega$. Le groupe des transformations $\{\tilde{\tau}_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3}$ est $\mathbb{R}^3$-ergodique dans $\tilde{N}$ puisque le groupe $\{\tau_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3}$ est $\mathbb{Z}^3$-ergodique dans N (voir [81]).

Soit $\tilde{V}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})}$ le potentiel type Anderson modifié dont les réalisations sont données par :

$$\tilde{V}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})}(\mathbf{x}) := V_\eta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^3} \lambda_{\mathbf{i}}(\eta) u(\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta} - \mathbf{i}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.65}$$

$\tilde{V}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})}$ est un champ scalaire aléatoire $\mathbb{R}^3$-ergodique satisfaisant $\tilde{V}_{(\eta,\mathbf{0})}(\mathbf{x}) = V_\eta(\mathbf{x})$:

$$\tilde{V}_{\tilde{\tau}_{\mathbf{v}}(\eta,\boldsymbol{\theta})}(\mathbf{x}) = V_{\tau_{\underline{\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}}}\eta}(\mathbf{x} - (\mathbf{v} \dot{+} \boldsymbol{\theta})) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^3} \lambda_{\mathbf{j}}(\eta) u(\mathbf{x} - \mathbf{j} - \mathbf{v} - \boldsymbol{\theta}) = \tilde{V}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})}(\mathbf{x} - \mathbf{v})$$

On donne maintenant des propriétés spectrales des opérateurs aléatoires sur $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}^3, \quad H_\infty(\omega, V_\eta) := \frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a})^2 + V_\eta, \quad H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}) := \frac{1}{2}(-i\nabla - \omega\mathbf{a})^2 + \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}$$

En vertu de la Remarque 5.43, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, les opérateurs $H_\infty(\omega, V_\eta)$ et $H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})$ sont essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Par commodité, on désignera par la suite la fermeture de ces opérateurs par le même symbole.

Pour déduire des propriétés sur les spectres $\sigma(H_\infty(\omega, V_\eta))$ et $\sigma(H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}))$, on utilise le résultat suivant :

Proposition 5.48. *$\{H_\infty(\omega, V_\eta)\}_{\eta\in N}$ et $\{H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})\}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})\in\tilde{N}}$ sont toutes deux des familles ergodiques d'opérateurs auto-adjoint.*

Preuve Proposition 5.48.
D'une part, $\{H_\infty(\omega, V_\eta)\}_{\eta\in N}$ $\big($resp. $\{H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})\}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})\in\tilde{N}}\big)$ est une famille d'opérateurs mesurable puisque V_η (resp. $\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}$) est jointement mesurable (en tant que champ aléatoire) et $H_\infty(\omega, V_\eta)$ (resp. $H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})$) est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (voir [59]).
D'autre part, en désignant par $\{T_{\mathbf{v},\omega}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{G}^3}$, avec $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, la famille des translations magnétiques (du réseau $\mathbb{Z}^3$ lorsque $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ ou réélles lorsque $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, voir Définition 5.14 et Remarque 5.15) formant une famille d'opérateurs unitaires, on peut prouver sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ces identités :

$$H_\infty(\omega, V_{\tau_{\mathbf{v}}\eta}) = T_{\mathbf{v},\omega} H_\infty(\omega, V_\eta) T_{-\mathbf{v},\omega} \quad \eta \in N,\ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3 \tag{5.66}$$

$$H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\tilde{\tau}_{\mathbf{v}}(\eta,\boldsymbol{\theta})}) = T_{\mathbf{v},\omega} H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}) T_{-\mathbf{v},\omega} \quad (\eta, \boldsymbol{\theta}) \in \tilde{N},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.67}$$

avec $\{\tau_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^3}$ le groupe des transformations ergodiques défini en (5.63) préservant la mesure sur $(N, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ et $\{\tilde{\tau}_{\mathbf{v}}(\eta, \boldsymbol{\theta})\}_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3}$ le groupe des transformations ergodiques défini en (5.64) préservant la mesure sur $(\tilde{N}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$. D'après [80], ces deux conditions assurent que $\{H_\infty(\omega, V_\eta)\}_{\eta\in N}$ $\big($resp. $\{H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})\}_{(\eta,\boldsymbol{\theta})\in\tilde{N}}\big)$ est une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoint.

■

Comme conséquence de la Proposition 5.48, le spectre $\sigma(H_\infty(\omega, V_\eta))$ est non aléatoire $\mathbb{P}$ -presque sûrement, i.e. il existe un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\big(\sigma(H_\infty(\omega, V_\eta)) = \Sigma\big) = 1$ (voir [60], [80]). De plus, le spectre purement discret de $H_\infty(\omega, V_\eta)$ est vide $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Les propriétés de $\sigma(H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}))$ sont identiques à celles de de $\sigma(H_\infty(\omega, V_\eta))$. D'ailleurs ces opérateurs sont unitairement équivalents :

$$H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}) = T_{\boldsymbol{\theta},\omega} H_\infty(\omega, V_\eta) T_{-\boldsymbol{\theta},\omega} \tag{5.68}$$

7.2 Résultats principaux

Soient $\beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Soient $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ et $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un compact tel que $z \in K$. Soit Γ_K un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z e^{-\beta\xi})$.

Soient $P_L(\beta, \omega, z, \epsilon)$ et $\mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$, $n \in \mathbb{N}^*$, la pression et les susceptibilités grand canonique à volume fini définies en (4.17) et (4.18) respectivement avec V_η vérifiant l'hypothèse (**h3'**) (dans ce cas $V_\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$). Avec $\Omega = (-1/2, 1/2)^3$ la cellule unité du réseau cubique $\mathbb{Z}^3$, on démontre dans cet appendice les résultats suivants :

Théorème 5.49. *Sur un sous-ensemble de $\tilde{N}$ de $\tilde{\mathbb{P}}$-mesure 1 :*

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} P_L(\beta, \omega, z, \epsilon) &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \chi_\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \mathbb{E}\big[R_\infty(\omega, V_\eta, \xi)\big] \\ &= \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \mathbb{E}\big[R_\infty^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y} + \boldsymbol{\theta}; \omega, V_\eta, \xi)\big] \right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}\end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} \mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon) = n! \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1, \dots, i_j) \cdot \\ \cdot \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \cdot \frac{\big(i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_j))\big)^{n-k}}{(n-k)!} \mathbb{E}[R_\infty^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}_1; \omega, V_\eta, \xi) \cdot \\ \cdot T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega, V_\eta, \xi) \cdots T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_j; \omega, V_\eta, \xi) T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j, \boldsymbol{\theta}; \omega, V_\eta, \xi)]\end{aligned} \tag{5.70}$$

Remarque 5.50. Les limites thermodynamiques de l'aimantation et de la susceptibilité grand canonique peuvent encore s'écrire :

$$\lim_{L\to\infty} \mathcal{X}_L^1(\beta, \omega, z, \epsilon) = \left(\frac{e}{c}\right) \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \chi_\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \mathbb{E}\big[R_\infty(\omega, V_\eta, \xi) T_{1,\infty}(\omega, V_\eta, \xi)\big]$$

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} \mathcal{X}_L^2(\beta, \omega, z, \epsilon) = 2\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\epsilon}{\beta|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \Big\{ \chi_\Omega \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \cdot \\ \cdot \mathbb{E}\big[R_\infty(\omega, V_\eta, \xi) \big\{ T_{1,\infty}(\omega, V_\eta, \xi) T_{1,\infty}(\omega, V_\eta, \xi) - T_{2,\infty}(\omega, V_\eta, \xi) \big\}\big] \Big\}\end{aligned}$$

Remarque 5.51. Au vu des résultats du Théorème 5.49, les limites thermodynamiques pour le modèle d'Anderson ne diffèrent des limites thermodynamiques pour un potentiel $\mathbb{Z}^3$-périodique que par la moyenne sur le "désordre" symbôlisée par l'espérance $\mathbb{E}[\cdot]$.
On pouvait se douter de ces résultats mais leur démonstration n'est pas si évidente.

Les preuves de ces résultats reposent sur le théorème suivant (voir [81]) :

Théorème 5.52. *Théorème d'ergodicité de Birkhoff*
Soient $F(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, un champ aléatoire $\mathbb{R}^3$-ergodique tel que $\mathbb{E}[F(\mathbf{0})] < +\infty$.
Désignant par Λ un cube de volume V centré en l'origine, on a "avec probabilité 1" :

$$\lim_{V \to \infty} V^{-1} \int_\Lambda \mathrm{d}\mathbf{u}\, F(\mathbf{u}) = \mathbb{E}[F(\mathbf{0})]$$

Remarque 5.53. L'utilisation du Théorème de Birkhoff (énoncé comme ci-dessus) ne permet d'obtenir que des convergences simples (cf. Théorème 5.49). Par conséquent, on démontre seulement l'existence des limites thermodynamiques pour les susceptibilités généralisées grand canonique sans pouvoir identifier ces limites avec les dérivées partielles (par rapport à ω) de la limite thermodynamique de la pression grand canonique (5.69).

7.3 Preuve du Théorème 5.49

On ne démontrera que les cas de la pression et de l'aimantation grand canonique ; cela est suffisant pour comprendre la méthode.

Cas de la pression grand canonique

On a besoin des résultats intermédiaires suivants :

Lemme 5.54. *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition* 5.16 *avec $V = \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}$ défini en* (5.65) *vérifiant (1) et (2) de l'hypothèse **(h3')**, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\epsilon)$ définie en* (5.15) *est un champ aléatoire (à valeurs complexes) $\mathbb{R}^3$-ergodique.*

Preuve Lemme 5.54.
Comme sous l'hypothèse (**h3'**) $\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, les résultats de la Proposition 5.16 restent encore valable. Et comme $\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}$ est un champ aléatoire $\mathbb{R}^3$-ergodique, il reste à utiliser (5.67) qui donne (au sens des noyaux) :

$$\forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,\tilde{V}_{\tau_{\mathbf{v}}(\eta,\boldsymbol{\theta})},\epsilon) = \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{v};\beta,\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\epsilon) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

■

Lemme 5.55. *Pour V_η défini en* (5.61) *vérifiant l'hypothèse **(h3')**, toutes les constantes intervenant dans l'estimation* (3.1) *peuvent être choisies uniforme en $\eta \in N$.*
Par conséquent, l'estimation (3.1) *est encore valable pour $\mathbb{E}[|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V_\eta,\xi)|]$.*

Preuve Lemme 5.55.
Comme V_η vérifie (1) et (2) de l'hypothèse (**h3'**), la preuve repose essentiellement sur le fait qu'il existe une constante $E > 0$ uniforme en $\eta \in N$ tel que $\|V_\eta\|_\infty \leq E$.
Ainsi, par la formule de Feynman-Kac (voir par ex. [98]), le noyau $G_\infty(\cdot\,,\cdot\,;\beta,\omega,V_\eta)$ du semi-groupe $W_\infty(\beta,\omega,V_\eta)$ de générateur $H_\infty(\omega,V_\eta)$ vérifie l'estimation uniforme en η :

$$|G_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y};\beta,\omega,V_\eta)| \leq (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\beta E} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2\beta}} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y},\beta,\omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \times \mathbb{R}$$

Par suite, pour $\lambda \in \rho(H_\infty(\omega, V_\eta))$ tel que $\lambda < -E$, la formule de Laplace (1.44) donne l'existence de $c_E > 0$ uniforme en η (voir méthode dans la preuve du Lemme 3.8) telle que :

$$|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \lambda)| \leq c_E \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{-(\Re\lambda + E)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \tag{5.71}$$

Enfin par auto-adjonction, $\|R_\infty(\omega, V_\eta, \lambda)\|_{1,2} = \|R_\infty(\omega, V_\eta, \lambda)\|_{2,\infty}$ (voir [98]) avec :

$$\|R_\infty(\omega, V_\eta, \lambda)\|_{2,\infty}^2 = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \lambda)|^2 \leq c_{\lambda, E}$$

où la constante $c_{\lambda,E} > 0$ est uniforme en η. A partir de ces estimations, il suffit de reprendre la méthode utilisée pour la preuve de (ii) Proposition 3.1.

$\blacksquare$

<u>Lemme</u> 5.56. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$. Alors :*

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^3} \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\pi} \left| \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \chi_{\Lambda_L} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \{R_L(\omega, V_\eta, \xi) - R_\infty(\omega, V_\eta, \xi)\} \right| = 0 \tag{5.72}$$

Preuve Lemme 5.56.
En vertu de la Remarque 5.18, $\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \chi_{\Lambda_L} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty(\omega, V_\eta, \xi)$ est bien définie. Soit $\kappa > 0$ un réél. On utilisera la décomposition du cube $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ suivante :

$$\Lambda_L = (\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa) \cup \Lambda_\kappa \quad \text{avec } \Lambda_\kappa := \{\mathbf{x} \in \Lambda_L \,:\, \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L) < \kappa\} \tag{5.73}$$

Avec $F_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ une primitive de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \cdot\,)$ exponentiellement décroissante sur Γ_K, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{L^3} \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\pi} \left| \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \chi_{\Lambda_L} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \{R_L(\omega, V_\eta, \xi) - R_\infty(\omega, V_\eta, \xi)\} \right| \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{1}{L^3} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa} \mathrm{d}\mathbf{x} \{R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \xi)\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \right. \\
&\qquad \left. + \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, F_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\Lambda_\kappa} \mathrm{d}\mathbf{x} \{R_\infty^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega, V_\eta, \xi) - R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega, V_\eta, \xi)\} \right|
\end{aligned}$$

car $(\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa) \ni \mathbf{x} \mapsto \{R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \xi)\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$ est continue (voir (i) Proposition 3.4) ainsi que $\Lambda_L \ni \mathbf{x} \mapsto R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega, V_\eta, \xi)$, $1 \leq L \leq \infty$. Puisque $R_L^{(2)}(\cdot\,, \cdot\,; \omega, \xi)$ est uniformément borné par un polynôme en $|\xi|$ (voir (3.2)), on a en vertu de (4.61) :

$$\sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |F_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_\kappa} \mathrm{d}\mathbf{x}\, |R_L^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega, V_\eta, \xi)| = \mathcal{O}(L^2)$$

$$\sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |F_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_\kappa} \mathrm{d}\mathbf{x}\, |R_\infty^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \omega, V_\eta, \xi)| = \mathcal{O}(L^2)$$

Puis en utilisant l'estimation (ii) Proposition 3.4 (en substituant $\chi_{\Lambda_\kappa}(\cdot\,)$ à $\chi_M(\cdot\,)$), il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et un autre polynôme $p(|\xi|)$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa} \mathrm{d}\mathbf{x} \left| \{R_L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega, V_\eta, \xi)\}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \right| \\
&\leq (1 + |\omega|)^3 \sup_{z \in K} \int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |p(|\xi|)| |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)| \int_{\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{1+|\xi|} \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda_L)} \\
&\leq c(\beta, K, |\omega|) L^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé (5.22) (en substituant $\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa$ à Λ_{n_L}) dans la dernière ligne.
En regroupant ces trois derniers résultats, on obtient (5.72).

■

Remarque 5.57. En choisissant une décomposition de Λ_L comme en (5.73), on prend implicitement la limite $\Lambda_L \to \infty$ au sens de Van Hove (voir [92]). Il existe un autre moyen de prendre cette limite, appelé limite au sens de Fisher, dont on rappelle la définition : Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné simplement connexe à bords lisses $\partial\Lambda$. Pour tout réél $p > 0$, soient $\Lambda_p := \{\mathbf{x} \in \Lambda : \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial\Lambda) \leq p\}$ et $\mathrm{diam}(\Lambda)$ le diamètre de Λ. Alors $\Lambda \to \infty$ au sens de Fisher s'il existe une fonction $\pi(\alpha)$ telle que $\lim_{\alpha\to 0} \pi(\alpha) = 0$ et pour $\alpha > 0$ suffisamment petit :

$$\frac{|\Lambda_{\alpha \mathrm{diam}(\Lambda)}|}{|\Lambda|} \leq \pi(\alpha)$$

Cette définition de convergence est moins générale que celle de Van Hove (voir [81]).

Preuve Théorème 5.49 : cas de la pression.
Pour les besoins de la preuve, posons $\Lambda_L(\mathbf{0}) = \Lambda_L$. Cette notation signifie que le cube $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ est centré en l'origine des coordonnées. On a :

$$\begin{aligned} P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) = {} & \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\{R_L(\omega,V_\eta,\xi) - R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)\} + \\ & + \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,V_\eta,\xi) \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 5.56, le premier terme donne une contribution nulle à la limite $L \to \infty$. Soit $\Lambda_L(\boldsymbol{\theta})$ le cube centré en $\boldsymbol{\theta}$. En utilisant que les opérateurs $H_\infty(\omega, V_\eta)$ et $H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})$ sont unitairement équivalents (voir (5.68)) :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,V_\eta,\xi) \\ & \qquad = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{T_{-\boldsymbol{\theta},\omega}T_{\boldsymbol{\theta},\omega}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)\right\} \\ & \qquad = \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\boldsymbol{\theta})}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi) \end{aligned}$$

où on a utilisé notamment la cyclicité de la trace dans la dernière ligne. En décomposant l'intégrale $\int_{-\frac{L}{2}-\theta_j}^{\frac{L}{2}-\theta_j} \mathrm{d}\theta_j$ comme $\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \int_{-\frac{L}{2}-\theta_j}^{-\frac{L}{2}} - \int_{\frac{L}{2}-\theta_j}^{\frac{L}{2}}\right)\mathrm{d}\theta_j$, $j \in \{1,2,3\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\int_{\Lambda_L(\boldsymbol{\theta})} \mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\ & \quad = \frac{1}{|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\int_{\Lambda_L(\mathbf{0})} \mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \text{"autres termes"} \end{aligned} \tag{5.74}$$

où les "autres termes" (au nombre de 26) ont une contribution nulle à la limite $L \to \infty$. En effet prenons des termes génériques, par exemple :

$$\frac{\varepsilon}{L^3}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_i \int_{-(\theta_j+\varepsilon\frac{L}{2})}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_j \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_k \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}},$$

$$\frac{\varepsilon}{L^3}\int_{-(\theta_i+\varepsilon\frac{L}{2})}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_i \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_j \int_{-(\theta_k+\varepsilon\frac{L}{2})}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_k \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \quad \varepsilon=\pm 1$$

Il suffit d'utiliser que l'intégrande ci-dessus (entre parenthèses) est uniformément borné en $\mathbf{x}$ par une constante $c = c(\beta, K) > 0$ (voir preuve Proposition 5.16). Par conséquent, les "autres termes" sont tous des $\mathcal{O}(L^{-1})$ lorsque $L \to \infty$. Il reste à appliquer le Théorème de Birkhoff, justifié par le Lemme 5.54, au premier terme dans le membre de droite de (5.74) :

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L(\mathbf{0})} \mathrm{d}\mathbf{x} &\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\
&= \frac{\epsilon}{\beta}\frac{i}{2\pi}\tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(-\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}-\boldsymbol{\theta};\omega,V_\eta,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}\right] \\
&= \frac{\epsilon}{\beta}\frac{i}{2\pi}\int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\mathbb{E}\big[R_\infty^{(1)}(\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}+\boldsymbol{\theta};\omega,V_\eta,\xi)\big]\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans l'avant dernière ligne (5.68) au sens des noyaux, puis le résultat du Lemme 5.55 dans la dernière ligne.

∎

Cas de l'aimantation grand canonique

En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 5.54, on montre :

Lemme 5.58. *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 5.22 avec $V = \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}$ défini en* (5.65) *vérifiant (1) et (2) de l'hypothèse* ***(h3')***, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\epsilon)$ *définie en* (5.23) *est un champ aléatoire (à valeurs complexes) $\mathbb{R}^3$-ergodique.*

Lemme 5.59. *Pour V_η vérifiant l'hypothèse* ***(h3')***, *il existe un polynôme $p(|\xi|)$ tel que :*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\,\mathbb{E}\big[|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)|\big] \leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3 \quad \omega\in\mathbb{R} \tag{5.75}$$

Preuve Lemme 5.59.
On a vu dans la preuve du Lemme 5.55 que les constantes intervenant dans l'estimation (3.1) de $|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V_\eta,\xi)|$ peuvent être choisies uniforme en $\eta \in N$. Si on peut prouver la même chose pour l'estimation (3.3) sur $|\mathbf{n}\cdot(i\nabla_\mathbf{x}+\omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)|$ et compte-tenu de la définition de $T_{1,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,V_\eta,\xi)$ en (5.2), alors on aura :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\,\mathbb{E}\big[|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)|\big]& \\
\leq \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\,&\left\{\mathbb{E}\big[|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)|^2\big]\mathbb{E}\big[|T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)|^2\big]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
\leq p(|\xi|)(1+|\omega|)^3 &\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,\frac{\mathrm{e}^{-2\frac{\delta}{1+|\xi|}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2} \leq \hat{p}(|\xi|)(1+|\omega|)^3
\end{aligned}$$

A partir de l'identité (3.57) avec $\lambda < -E$, en utilisant les estimations (3.48) et (5.71) puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz (comme ci-dessus), les constantes intervenant dans l'estimation (3.49) peuvent être choisies uniforme en $\eta \in N$. Même chose pour l'estimation (3.3). Il suffit d'utiliser le Lemme 5.55 et encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz à partir de (3.50).

■

Lemme 5.60. *Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$. Alors :*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\frac{1}{2\pi}\left|\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\{R_L(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,L}(\omega,V_\eta,\xi)+ \right.$$
$$\left. - R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\omega,V_\eta,\xi)\}\right| = 0 \quad (5.76)$$

Preuve Lemme 5.60.
En vertu de la Remarque 5.24, $\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\omega,V_\eta,\xi)$ est bien définie. Soit $\kappa > 0$ un réél. On utilisera la décomposition du cube comme en (5.73).

$$\frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\frac{1}{2\pi}\left|\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\{R_L(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,L}(\omega,V_\eta,\xi)- \right.$$
$$\left. + R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\omega,V_\eta,\xi)\}\right|$$

$$= \frac{1}{\beta L^3}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\left\{\int_{\Lambda_L\setminus\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\left\{\left[R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)-R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)\right]\cdot\right.\right.\right.$$
$$\cdot\, T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi) + R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)\left[T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)-T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)\right]\big\}+$$
$$+\int_{\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)+$$
$$-\int_{\Lambda_L\setminus\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)+$$
$$\left.\left.-\int_{\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)\right\}\right|$$

A partir de l'estimation (5.25) (valable aussi pour $1 \leq L < \infty$), (2.14) puis (5.10) :

$$\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\int_{\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)| = \mathcal{O}(L^2)$$
$$\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\int_{\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)| = \mathcal{O}(L^2)$$

D'autre part, par l'intermédiaire du Lemme 5.26 en substituant $\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa$ à Λ_{n_L}, on a :

$$\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\int_{\Lambda_L\setminus\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\,|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta\xi)| = \mathcal{O}(L^2)$$

Il ne reste plus qu'à prouver l'existence d'une constante $c = c(\beta, K, |\omega|) > 0$ telle que :

$$\sup_{z\in K}\int_{\Gamma_K}|\mathrm{d}\xi|\,|\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)|\int_{\Lambda_L\setminus\Lambda_\kappa}\mathrm{d}\mathbf{x}\int_{\Lambda_L}\mathrm{d}\mathbf{z}\cdot$$
$$\cdot\big\{|R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)-R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)||T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)|+$$
$$+|R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,V_\eta,\xi)||T_{1,L}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)-T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,V_\eta,\xi)|\big\}\leq cL^2$$

Il suffit de reprendre les mêmes arguments que ceux de la preuve du Théorème 5.3 dans le cas $n = 1$ en substituant $\Lambda_L \setminus \Lambda_\kappa$ à Λ_{n_L} dans les notations.

■

Preuve Théorème 5.49 : cas de l'aimantation.
Posons $\Lambda_L(\mathbf{0}) = \Lambda_L$. On a :

$$\left(\frac{c}{q}\right)\mathcal{X}_L^1(\beta,\omega,z,\epsilon)=\frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big\{\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\cdot$$
$$\cdot\{R_L(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,L}(\omega,V_\eta,\xi)-R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\omega,V_\eta,\xi)\}\Big\}+$$
$$+\frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,L}(\omega,V_\eta,\xi)$$

En vertu du Lemme 5.60, le premier terme donne une contribution nulle à la limite $L \to \infty$. Soit $\Lambda_L(\boldsymbol{\theta})$ le cube centré en $\boldsymbol{\theta}$. En utilisant que les opérateurs $H_\infty(\omega, V_\eta)$ et $H_\infty(\omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}})$ sont unitairement équivalents (voir (5.68)) :

$$\frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,V_\eta,\xi)T_{1,\infty}(\omega,V_\eta,\xi)$$
$$=\frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\boldsymbol{\theta})}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)T_{1,\infty}(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)$$

Par la même métode que celle utilisée dans la preuve du Théorème 5.49 pour le cas de la pression, on peut écrire :

$$\frac{1}{|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\boldsymbol{\theta})}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)T_{1,\infty}(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)$$
$$=\frac{1}{|\Lambda_L(\mathbf{0})|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\chi_{\Lambda_L(\mathbf{0})}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)R_\infty(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)T_{1,\infty}(\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)+\text{"autres termes"}\tag{5.77}$$

où les "autres termes" (au nombre de 26) ont une contribution nulle à la limite $L \to \infty$. En effet prenons un termes générique, par exemple :

$$\frac{\varepsilon}{L^3}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x_i\int_{-(\theta_j+\varepsilon\frac{L}{2})}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x_j\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}x_k\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\cdot$$
$$\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)T_{1,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};\omega,\tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}},\xi)\quad\varepsilon=\pm1$$

Il suffit d'utiliser que l'intégrande ci-dessus est uniformément borné en $\mathbf{x}$ par une constante $c = c(\beta, K) > 0$ (voir preuve Proposition 5.22). Par conséquent, les "autres termes" sont tous des $\mathcal{O}(L^{-1})$ lorsque $L \to \infty$. Il reste à appliquer le Théorème de Birkhoff, justifié par le Lemme 5.58, au premier terme dans le membre de droite de (5.77) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{L\to\infty} \frac{\epsilon}{\beta|\Lambda_L(\mathbf{0})|} \frac{i}{2\pi} \int_{\Lambda_L(\mathbf{0})} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega, \tilde{V}_{\eta,\boldsymbol{\theta}}, \xi) \\
&\quad = \frac{\epsilon}{\beta} \frac{i}{2\pi} \tilde{\mathbb{E}}\left[\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R_\infty^{(1)}(-\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}; \omega, V_\eta, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}, -\boldsymbol{\theta}; \omega, V_\eta, \xi) \right] \\
&\quad = \frac{\epsilon}{\beta} \frac{i}{2\pi} \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathbb{E}\big[R_\infty^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}; \omega, V_\eta, \xi) T_{1,\infty}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}; \omega, V_\eta, \xi) \big]
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans l'avant dernière ligne (5.68) au sens des noyaux, puis le résultat du Lemme 5.59 dans la dernière ligne.

■

8 Appendice 3 : limites thermodynamiques dans le cas $V = 0$

Dans cet appendice, on s'intéresse aux limites thermodynamiques des grandeurs grand canonique dans le cas particulier où $V = 0$. On donne notamment des formules explicites en terme des fonctions de Bose et de Fermi des limites thermodynamiques de la pression, densité et susceptibilité grand canonique lorsque l'intensité du champ magnétique est nulle.

8.1 Limites thermodynamiques

Construction des candidats pour la limite thermodynamique

L'ingrédient principal intervenant dans la construction des candidats à la limite thermodynamique est le fait que l'Hamiltonien purement magnétique $H_\infty(\omega, 0)$ commute avec les translations magnétiques réélles $\{T_{\mathbf{x}_0,\omega}\}_{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3}$ (voir Remarque 5.15 pour leur définition). En effet, en utilisant que $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, il vient sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega \mathbf{a}(\mathbf{x})) \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)} = \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)} (-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$$

ce qui assure que $T_{\mathbf{x}_0,\omega} H_\infty(\omega, 0) = H_\infty(\omega, 0) T_{\mathbf{x}_0,\omega}$.

Voyons comment on peut exploiter ce résultat.
Soit $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée. D'après le calcul fonctionnel (voir par ex. [87]), l'opérateur $\mathcal{G}(H_\infty(\omega, 0))$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Supposons que $\mathcal{G}(H_\infty(\omega, 0))$ possède un noyau intégral $\mathcal{G}(\cdot\,,\cdot)$ continu sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\big(\mathcal{G}(H_\infty(\omega, 0))\psi\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Alors le noyau intégral $\mathcal{G}_\infty(\cdot\,,\cdot)$ vérifie l'identité :

$$\forall\, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{e}^{-i\omega\phi(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)} \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \mathbf{y} + \mathbf{x}_0) \mathrm{e}^{i\omega\phi(\mathbf{y},\mathbf{x}_0)} = \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.78}$$

On déduit de (5.78) que le noyau diagonal est une fonction constante :

$$\forall\, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = \mathcal{G}_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_\infty(\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

Limites thermodynamiques : pression et susceptibilités généralisées

Dans le cas $V = 0$, $E_0(\omega) := \inf \sigma(H_\infty(\omega, 0)) = |\omega|/2$.
Les domaines de définition de la fugacité (2.1) et (2.2) deviennent :

$$\mathcal{D}_{-1}(E_0(\omega)) := \mathbb{C} \setminus [\mathrm{e}^{\beta|\omega|/2}, +\infty), \quad \mathcal{D}_{+1}(E_0(\omega)) := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\mathrm{e}^{\beta|\omega|/2}]$$
$$\mathcal{D}_{-1} := \mathbb{C} \setminus [1, +\infty), \quad \mathcal{D}_{+1} := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$$

Soient $\beta > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(E_0(\omega))$ un sous-ensemble compact tel que $z \in K$. Γ_K désignera un contour orienté positivement du type (2.12) inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) := \ln(1 + \epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})$.

Soit $P_L(\beta, \omega, z, \epsilon)$ la pression grand canonique à volume fini définie en (4.17) avec $V = 0$. Dans ce cas, le candidat à la limite thermodynamique (5.1) devient :

$$P_\infty(\beta, \omega, z, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta} \frac{i}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{y}; \omega, V = 0, \xi) \right) \Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \tag{5.79}$$

Cette expression est justifiée par le résultat ci-dessous :

<u>**Lemme**</u> **5.61.** *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 5.16 avec* $V = 0$, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon)$ *définie en* (5.15) *est une fonction constante :*

$$\forall \, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0; \beta, \omega, z, \epsilon) = \mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Preuve Lemme 5.61.
Il suffit d'utiliser que $T_{-\mathbf{x}_0,\omega} \mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon) T_{\mathbf{x}_0,\omega} = \mathcal{I}_{\infty,0}(\beta, \omega, z, \epsilon)$ pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

■

Soient $\mathcal{X}_L^n(\beta, \omega, z, \epsilon)$, $n \in \mathbb{N}^*$, les susceptibilités grand canonique à volume fini définies en (4.18) avec $V = 0$. Dans ce cas, les candidats à la limite thermodynamique (5.4) pour les susceptibilités grand canonique deviennent :

$$\mathcal{X}_\infty^n(\beta, \omega, z, \epsilon) := n! \left(\frac{q}{c}\right)^n \frac{i}{2\pi} \frac{\epsilon}{\beta} \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi \, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_l \in \{1,2\}^j} \chi_j^k(i_1, \ldots, i_j) \cdot$$
$$\cdot \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}_j \cdot \frac{\left(i(\mathrm{Fl}_j(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_j))\right)^{n-k}}{(n-k)!} R_\infty^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1; \omega\xi) T_{i_1,\infty}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \omega, \xi) \cdots$$
$$\cdots T_{i_{j-1},\infty}(\mathbf{z}_{j-1}, \mathbf{z}_j; \omega, \xi) T_{i_j,\infty}(\mathbf{z}_j, \mathbf{0}; \omega, \xi) \tag{5.80}$$

Ces expressions sont justifiées par le résultat ci-dessous :

<u>**Lemme**</u> **5.62.** *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 5.29 avec* $V = 0$, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon)$ *définie en* (5.35) *est une fonction constante :*

$$\forall \, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \mathbf{x} + \mathbf{x}_0; \beta, \omega, z, \epsilon) = \mathcal{I}_{\infty,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; \beta, \omega, z, \epsilon) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Preuve Lemme 5.62.
Il suffit de reprendre les arguments utilisés pour prouver la $\mathbf{\Upsilon}$-périodicité dans le Lemme 5.30 en substituant $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ à $\boldsymbol{\upsilon} \in \mathbf{\Upsilon}$.

■

On prouve maintenant le théorème suivant (énoncé dans sa version globale) :

Théorème 5.63. *Soit $\beta > 0$. Alors au sens de Van Hove, pour tout compact $[\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$, et pour tout compact $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{L\to\infty} \sup_{\omega\in[\omega_1,\omega_2]} \sup_{z\in K} |\mathcal{X}_L^n(\beta,\omega,z,\epsilon) - \mathcal{X}_\infty^n(\beta,\omega,z,\epsilon)| = 0$$

avec la convention $\mathcal{X}_L^0(\beta,\omega,z,\epsilon) := P_L(\beta,\omega,z,\epsilon)$, $1 \leq L \leq \infty$.

Remarque 5.64. (5.63) peut aussi être prouvé au sens de Fisher (cf. Remarque 5.57).

Remarque 5.65. Ce théorème a pour corollaires immédiats les Corollaires 5.2, 5.4 et 5.5.

Pour la preuve du Théorème 5.63, on se limite au cas de la pression (i.e. $n = 0$).

Preuve Théorème 5.63 : cas $n = 0$.
Soit $\kappa > 0$ un réél. On utilisera la décomposition de $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$ comme en (5.73). En vertu du fait que $\mathcal{I}_{\infty,0}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\omega,z,\epsilon)$ est une fonction constante :

$$P_\infty(\beta,z,\omega,\epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta}\frac{1}{|\Lambda_L|}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &P_L(\beta,\omega,z,\epsilon) - P_\infty(\beta,\omega,z,\epsilon) \\ &\quad = \frac{\epsilon}{\beta}\frac{1}{L^3}\frac{i}{2\pi}\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\{R_L^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi) - R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega,\xi)\}\right)\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \end{aligned}$$

On reprend maintenant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 5.56.

■

8.2 Formules explicites lorsque $\omega = 0$

Dans ce paragraphe, on se propose de retrouver quelques résultats démontrés dans [4], [6] et [14]. Partant des expressions des limites thermodynamiques dans le cas $V = 0$, on donne des formules explicites en terme des fonctions de Bose et de Fermi des limites thermodynamiques des grandeurs grand canonique (pression, densité et susceptibilité) lorsque l'intensité du champ magnétique est nulle ($\omega = 0$).

Définissons d'abord les fonctions de Bose et de Fermi. Soit $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ tel que $\Re s > 0$. La fonction de Bose $g_s(\cdot\,) : \mathbb{C} \setminus [1,+\infty) \to \mathbb{C}$ est définie par (voir par ex. [106]) :

$$\forall\, u \in \mathbb{C} \setminus [1,+\infty), \quad g_s(u) := -\frac{\tilde{\Gamma}(1-s)}{2i\pi}\int_{\mathrm{Hl}} \mathrm{d}t\, \frac{u}{\mathrm{e}^t - u}(-t)^{s-1} \tag{5.81}$$

$\tilde{\Gamma}(\cdot\,)$ désigne la fonction Gamma d'Euler et Hl est un contour (du type Henkel) orienté positivement et contournant l'axe des rééls positifs de la forme :

$$\mathrm{Hl} := \big\{\delta + iy \;;\; -\eta \leq y \leq \eta\big\} \cup \big\{x \pm i\eta \;:\; x \geq \delta\big\} \quad \eta > 0,\ \delta < 0 \tag{5.82}$$

où les réels $\delta < 0$ et $\eta > 0$ sont choisis de telle sorte que le contour Hl soit inclus dans le domaine d'holomorphie de $t \mapsto u/(\mathrm{e}^t - u)$.

La fonction de Fermi $f_s(\cdot) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \to \mathbb{C}$ est définie quant à elle par ([106]) :

$$\forall\, u \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1], \quad f_s(u) := -g_s(-u) = -\frac{\tilde{\Gamma}(1-s)}{2i\pi} \int_{\mathrm{Hl}} \mathrm{d}t\, \frac{u}{\mathrm{e}^t + u}(-t)^{s-1} \tag{5.83}$$

où Hl est un contour de la forme (5.82), les réels $\delta < 0$ et $\eta > 0$ étant choisis de telle sorte que le contour Hl soit inclus dans le domaine d'holomorphie de $t \mapsto u/(\mathrm{e}^t + u)$.

Remarque 5.66. En fait, la fonction de Bose n'est autre que le prolongement analytique au-delà du cercle unité de la fonction polylogarithme (ou fonction de Jonquière) :

$$g_s(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n^s}, \quad |u| < 1 \tag{5.84}$$

qui se réduit à la fonction zeta de Riemann lorsque $u = 1$: $g_s(1) = \zeta(s)$ (voir par ex. [1]).

Soient $\beta > 0$ et $z \in \mathcal{D}$. Soit $K \subset \mathcal{D}_\epsilon$ un compact tel que $z \in K$. Par commodité, on utilisera par la suite le contour Γ_K orienté positivement défini en (2.12) avec $\varsigma = 0$:

$$\Gamma_K = \left\{\alpha + iy \ : \ -\frac{\eta_K}{2\beta} \leq y \leq \frac{\eta_K}{2\beta}\right\} \cup \left\{x \pm i\frac{\eta_K}{2\beta} \ : \ \alpha \leq x\right\} \tag{5.85}$$

avec α un réel satisfaisant $-\infty < \alpha < E_0(0) = 0$ et tel que $K \subset \mathcal{D}_\epsilon(\alpha)$, et $\eta_K > 0$ le réel du Lemme 2.6. Γ_K est inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{D}$ (voir (2.11)) de $\xi \mapsto \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi)$.

Pression et densité grand canonique

Proposition 5.67. *Soit $\beta > 0$. Lorsque $\omega = 0$, on a les formules explicites :*

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_{-1}, \quad P_\infty(\beta, 0, z, -1) = \beta^{-1}(2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} g_{5/2}(z)$$
$$\forall\, z \in \mathcal{D}_{+1}, \quad P_\infty(\beta, 0, z, +1) = \beta^{-1}(2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} f_{5/2}(z)$$

où $g_s(\cdot)$ et $f_s(\cdot)$ sont les fonctions de Bose et de Fermi définies en (5.81) et (5.83).

Preuve Proposition 5.67.
En vertu de (5.79) et sous l'hypothèse $\omega = 0$:

$$P_\infty(\beta, 0, z, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta}\frac{i}{2\pi}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta, z; \xi) R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0, \xi)\right)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}$$

Utilisons le fait que la fonction de Green soit connue explicitement (voir par ex. [57]) :

$$R_\infty^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0, \xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \tag{5.86}$$

En développeant l'exponentielle en série dans (5.86), puis en insérant ce développement dans la formule pour la pression grand canonique, il vient :

$$P_\infty(\beta,0,z,\epsilon) = \frac{\epsilon}{\beta}\frac{1}{2\pi}\frac{i}{2\pi}\Bigg\{\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\right) - \int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\sqrt{-2\xi} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)(-2\xi)^{\frac{n}{2}}\right)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-1}\Bigg\}\Bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \quad (5.87)$$

La série dans le membre de droite de (5.87) est absolument convergente puisqu'on peut prouver qu'il existe une constante $c(\beta,K)>0$ telle que :

$$\int_{\Gamma_K} |\mathrm{d}\xi|\, |\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)||-\xi|^{\frac{n}{2}} \leq c^n(\beta,K)\tilde{\Gamma}(1+n/2), \quad \tilde{\Gamma}(1+n/2) = \left(\frac{n}{2}\right)!$$

où $\tilde{\Gamma}(\cdot\,)$ est la fonction Gamma, et pour tout $x>0$, la série $\sum_{k\geq 1} x^k/\left(\frac{k}{2}\right)!$ est convergente. Par holomorphie de $\mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\cdot)$ à l'intérieur du contour Γ_K, la première intégrale dans le membre de droite de (5.87) est nulle en vertu du théorème de Cauchy. Et en faisant $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ dans la dernière intégrale, (5.87) devient :

$$P_\infty(\beta,0,z,\epsilon) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}\beta\pi}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \ln(1+\epsilon z \mathrm{e}^{-\beta\xi})\sqrt{-\xi}$$

Ensuite, par une intégration par parties par rapport à la variable ξ, on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \ln(1+\epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi})\sqrt{-\xi} = \frac{2}{3}(-\beta)^{-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \frac{\epsilon z}{\mathrm{e}^{\beta\xi}+\epsilon z}(-\xi)^{\frac{3}{2}}$$

d'où on déduit :

$$P_\infty(\beta,0,z,\epsilon) = \frac{-2}{3\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \frac{z}{\mathrm{e}^{\beta\xi}+\epsilon z}(-\xi)^{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \frac{z}{\mathrm{e}^{\beta\xi}+\epsilon z}(-\beta\xi)^{\frac{3}{2}}$$

Le contour Γ_K est inclus dans le domaine d'holomorphie de $\xi \mapsto z/(\mathrm{e}^{\beta\xi}+\epsilon z)$ qui n'est autre que la fonction distribution de Fermi-Dirac (resp. Bose-Einstein) lorsque $\epsilon=1$ (resp. $\epsilon=-1$). Par le changement de variable $t := \beta\xi$:

$$P_\infty(\beta,0,z,\epsilon) = -\beta^{-1}\frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\frac{1}{2i\pi}\int_{\hat{\Gamma}_K} \mathrm{d}t\, \frac{z}{\mathrm{e}^{t}+\epsilon z}(-t)^{\frac{3}{2}}$$

où $\hat{\Gamma}_K$ est le contour dilaté défini par :

$$\hat{\Gamma}_K := \left\{\beta\alpha + iy \;:\; -\frac{\eta_K}{2} \leq y \leq \frac{\eta_K}{2}\right\} \cup \left\{x \pm i\frac{\eta_K}{2} \;:\; \alpha\beta \leq x\right\} \quad (5.88)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser (5.81) et (5.83) pour obtenir finallement :

$$P_\infty(\beta,0,z,-1) = \beta^{-1}\frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\frac{1}{\tilde{\Gamma}(-3/2)}g_{5/2}(z)$$

$$P_\infty(\beta,0,z,+1) = \beta^{-1}\frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}}\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\frac{1}{\tilde{\Gamma}(-3/2)}f_{5/2}(z), \quad \tilde{\Gamma}(-3/2) = 4\sqrt{\pi}/3$$

■

En réadaptant la preuve de la Proposition 5.67, on obtient immédiatement :

Proposition 5.68. *Soit $\beta > 0$. Lorsque $\omega = 0$, on a les formules explicites :*

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_{-1}, \quad \rho_\infty(\beta, 0, z, -1) = (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} g_{3/2}(z) \tag{5.89}$$

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_{+1}, \quad \rho_\infty(\beta, 0, z, +1) = (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} f_{3/2}(z) \tag{5.90}$$

où $g_s(\cdot\,)$ et $f_s(\cdot\,)$ sont les fonctions de Bose et de Fermi définies en (5.81) *et* (5.83).

Remarque 5.69. Dans l'appendice 1 de ce chapitre, on a spécifié qu'il y a présence du phénomène de condensation de Bose-Einstein (de type I) pour le gaz de bosons lorsque le champ magnétique est nul. En effet, en vertu de (5.89) la denisté critique $\rho_c(\beta)$ est finie :

$$\rho_c(\beta) := \lim_{\mu \to E_0(0)=0} \rho_\infty(\beta, 0, \mathrm{e}^{\beta\mu}, -1) = (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} g_{3/2}(1) = (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} \zeta(3/2) < +\infty$$

où on a utilisé dans la seconde égalité la Remarque 5.66.

Aimantation et susceptibilité grand canonique

Lorque le champ magnétique est nul, l'aimantation grand canonique est nulle :

$$\forall\, \beta > 0,\ \forall\, z \in \mathcal{D}_\epsilon, \quad \mathcal{X}^1_\infty(\beta, 0, z, \epsilon) = 0$$

Ce résultat est une conséquence du fait que $P_\infty(\beta, \cdot\,, z, \epsilon)$ est une fonction paire de la variable ω. Remarquons que l'on peut retrouver directement ce résultat à partir de l'expression (5.80). En effet, en vertu de l'expression explicite de la fonction de Green (5.86) :

$$\partial_{x_j} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = -(x_j - y_j) \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} - \sqrt{-2\xi}(x_j - y_j) \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

puis en utilisant que $\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(y_2 - x_2, x_1 - y_1, 0)$, il vient :

$$T_{1,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0, \xi) = \mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \left(i\nabla \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \tag{5.91}$$

Pour finir, on souhaite retrouver l'expression de la susceptibilité de Landau (voir par ex. [67], [4]) pour le gaz d'éléctrons libres fortement dégénéré (i.e. lorsque $\beta \to +\infty$) à densité fixée. Pour cela, on a besoin d'abord du résultat suivant :

Proposition 5.70. *Soit $\beta > 0$. Alors lorsque $\omega = 0$, on a les formules explicites :*

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_{-1}, \quad \mathcal{X}^2_\infty(\beta, 0, z, -1) = -\left(\frac{q}{c}\right)^2 \frac{1}{12\sqrt{\beta}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} g_{1/2}(z) \tag{5.92}$$

$$\forall\, z \in \mathcal{D}_{+1}, \quad \mathcal{X}^2_\infty(\beta, 0, z, +1) = -\left(\frac{q}{c}\right)^2 \frac{1}{12\sqrt{\beta}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} f_{1/2}(z) \tag{5.93}$$

où $g_s(\cdot\,)$ et $f_s(\cdot\,)$ sont les fonctions de Bose et de Fermi définies en (5.81) *et* (5.83).

Preuve Proposition 5.70.
Partant de (5.80) (cas $n=2$) et compte-tenu de (5.91), il vient :

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta,\omega=0,z,\epsilon) := -2\left(\frac{q}{c}\right)^2 \frac{\epsilon}{\beta}\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_\epsilon(\beta,z;\xi)\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};0,\xi)T_{2,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};0,\xi)$$

Utilisant la définition du noyau $T_{2,\infty}(\cdot\,,\cdot\,;0,\xi)$ compte-tenu de (5.86), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{z}\, R^{(1)}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z};0,\xi)T_{2,\infty}(\mathbf{z},\mathbf{x};0,\xi) = \frac{1}{8}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}\left[(z_1-x_1)^2+(z_2-x_2)^2\right]\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-2\xi}|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}$$

Puis en adoptant le système de coordonnées sphériques usuel, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,\frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{-2\xi}|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2}\left[(z_1-x_1)^2+(z_2-x_2)^2\right] = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin^3\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{d}r\, r^2\mathrm{e}^{-2\sqrt{-2\xi}r} = 2\pi\frac{4}{3}\frac{2}{2^3(-2\xi)^{\frac{3}{2}}}$$

En réunissant ces deux derniers résultats, on obtient :

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta,0,z,\epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^2\beta\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\epsilon}{12\sqrt{\beta}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_K}\mathrm{d}\xi\,\ln(1+\epsilon z\mathrm{e}^{-\beta\xi})(-\beta\xi)^{-\frac{3}{2}}$$

En effectuant une intégration par parties par rapport à la variable ξ puis en faisant le changement de variable $t:=\beta\xi$ comme dans la preuve de la Proposition 5.67, on obtient :

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta,0,z,\epsilon) = \left(\frac{q}{c}\right)^2\sqrt{\pi}\frac{1}{12\sqrt{\beta}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2i\pi}\int_{\hat{\Gamma}_K}\mathrm{d}t\,\frac{z}{\mathrm{e}^t+\epsilon z}(-t)^{-\frac{1}{2}}$$

où $\hat{\Gamma}_K$ défini en (5.88) est inclus dans le domaine d'holomorphie de $t\mapsto z/(\mathrm{e}^t+\epsilon z)$. Il ne reste plus qu'à utiliser les définitions (5.81) et (5.83) sachant que $\tilde{\Gamma}(1/2)=\sqrt{\pi}$.

■

Remarque 5.71. En vertu de la Remarque 5.66, $\lim_{z\to 1} g_{1/2}(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$. Le gas de bosons devient donc un diamagnet parfait au point de condensation :

$$\lim_{z\to 1}\mathcal{X}^2_\infty(\beta,0,z,-1) = -\left(\frac{q}{c}\right)^2\frac{1}{12\sqrt{\beta}}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\lim_{z\to 1} g_{1/2}(z) = -\infty$$

Considérons maintenant le cas des électrons (la charge $q=-e$) et supposons que la densité de particules $\rho_0>0$ devient un paramètre fixé. On a alors :

Proposition 5.72. *Soient $\beta>0$ et $\rho_0>0$ fixés. En champ magnétique nul, la susceptibilité diamagnétique défini en* (5.93) *s'écrit :*

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta,0,\rho_0,+1) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2\frac{1}{12\sqrt{\beta}}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}f_{1/2}\left(f^{-1}_{3/2}((2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}\rho_0)\right)$$

Posons $k_F := (6\pi^2\rho_0)^{\frac{1}{3}}$. *Alors lorsque* $\beta \to +\infty$, *on a le développement asymptotique :*

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta, 0, \rho_0, +1) = -\frac{e^2 k_F}{24\pi^2 c^2} + \mathcal{O}(\beta^{-2}) \tag{5.94}$$

qui n'est autre que la formule de Landau pour le gaz d'électrons libres fortement dégénéré.

Preuve Proposition 5.72.
Soient $\beta > 0$ et $\rho_0 \in (0, +\infty)$ fixés. D'après la Proposition 5.37, il existe un unique $z_\infty = z_\infty(\beta, 0, \rho_0, +1) \in (0, +\infty)$ solution de l'équation :

$$\rho_0 = \rho_\infty(\beta, 0, z, +1) = (2\pi\beta)^{-\frac{3}{2}} f_{3/2}(z) \tag{5.95}$$

où on a utilisé (5.90) dans la seconde égalité. En inversant la relation (5.95), on obtient :

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta, 0, \rho_0, +1) = \mathcal{X}^2_\infty(\beta, 0, z_\infty, +1) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{12\sqrt{\beta}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} f_{1/2}\big(f_{3/2}^{-1}((2\pi\beta)^{\frac{3}{2}}\rho_0)\big)$$

Enfin, le développement asymptotique lorsque $\beta \to +\infty$ est démontré dans [4] :

$$\mathcal{X}^2_\infty(\beta, \rho_0, 0, +1) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{12\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\rho_0\right)^{\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(\beta^{-2})$$

■

Remarque 5.73. Dans la formule de Landau [67], il apparaît un facteur 2 supplémentaire au numérateur de (5.94) provenant de la dégénérescence liée au spin de l'électron.

Remarque 5.74. La plupart des résultats de cet appendice ont été démontré dans [6] avec la jauge de Landau : $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(-x_2, 0, 0)$. Les résultats sont invariants de jauge.

9 Annexe

Théorème 5.75. *Théorème d'Hurwitz, voir démonstration dans [43]*
Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ *un ouvert non vide. Soit* $\{f_n(\cdot)\}_{n\geq 1} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *une suite de fonctions analytiques convergeant uniformément sur tout compact de* $\mathcal{U}$ *vers la fonction (analytique)* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.
Supposons de plus que chaque fonction $f_n(\cdot)$ *ne s'annule pas sur* $\mathcal{U}$.
Alors f *est soit identiquement nulle, soit elle ne possède pas de zéro dans* $\mathcal{U}$.

Preuve Lemme 5.26.
Pour tout $x_i \in (-L/2, L/2)$ et pour tout $y_i \in (-\infty, -L/2) \cup (L/2, +\infty)$, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{\mathrm{e}^{-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^k} \leq \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}|x_1-y_1|}}{|x_1-y_1|} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}}{((x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{\frac{k-1}{2}}} \quad k \in \{1, 2\},\ \gamma > 0$$

En posant $\hat{\mathbf{x}} = (x_2, x_3)$ et $\hat{\mathbf{y}} = (y_2, y_3)$, par passage en coordonnées polaires :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\hat{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}\, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}|\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}|}}{|\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}|^{k-1}} \leq c\gamma^{-(1+k)}, \quad c > 0$$

D'autre part, pour tout $x_1 \in (-L/2, L/2)$:

$$\int_{-\infty}^{-L/2} \mathrm{d}y_1 \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}|x_1-y_1|}}{|x_1-y_1|} = -\mathrm{Ei}\Big(-\frac{\gamma}{2}(x_1+L/2)\Big), \quad \int_{L/2}^{+\infty} \mathrm{d}y_1 \, \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}|x_1-y_1|}}{|x_1-y_1|} = -\mathrm{Ei}\Big(-\frac{\gamma}{2}(L/2-x_1)\Big)$$

où $\mathrm{Ei}(x)$ est la fonction exponentielle intégrale définie par (voir par ex. [1]) :

$$\mathrm{Ei}(x) := -\int_{-x}^{+\infty} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}$$

et l'intégrale doit être comprise en termes de valeur principale de Cauchy.
Il s'ensuit alors que :

$$\int_{\Lambda_L} \mathrm{d}\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda_L} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^k} \leq c\gamma^{-(1+k)} L^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_1 \Big\{-\mathrm{Ei}\Big(-\frac{\gamma}{2}(x_1+L/2)\Big) - \mathrm{Ei}\Big(-\frac{\gamma}{2}(L/2-x_1)\Big)\Big\}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{Ei}\Big(-\frac{\gamma}{2}(x_1+L/2)\Big) \leq -\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}_1 \mathrm{Ei}\Big(-\frac{\gamma}{2}\tilde{x}_1\Big) \leq c\gamma^{-1}$$

car $\forall\, X > 0$, $-\mathrm{Ei}[-X] < \mathrm{e}^{-X} \ln(1+1/X) < \mathrm{e}^{-X} X^{-\frac{1}{2}}$ (la première inégalité vient de [1]).

■

Chapitre 6

Une preuve rigoureuse de la formule de Landau-Peierls

A partir de l'expression (5.8) de la limite thermodynamique de la susceptibilité grand canonique pour le gaz de fermions ($\epsilon = +1$) où l'hypothèse $V \in L^p(\mathbb{R}^3/\boldsymbol{\Upsilon})$ avec $p > 3$ est remplacée par $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3)$, l'objectif de ce chapitre est double :
(1). Etablir un développement de la susceptibilité lorsque l'intensité du champ magnétique est nulle, la densité de particules fixée et la température nulle. On traitera les cas d'un semiconducteur et d'un métal, le cas d'un semi-métal ne sera pas abordé.
(2). Déterminer le domaine de validité de la formule de la susceptibilité de Landau-Peierls (voir [84], [63]) (cas des métaux, gaz de fermions fortement dégénéré).

Dans ce chapitre, on omet la dépendance explicite en V dans les notations et comme les résultats énoncés ne concernent que le gaz de fermions, on supprime le paramètre ϵ.

1 Résultats principaux

Hypothèses, nouvelles notations et rappels de résultats

Considérons un gaz quantique de constitué d'un grand nombre de particules sans spin et non relativiste, de masse $m > 0$ et de charge $q = -e$, obéissant à la statistique de Fermi-Dirac. On suppose que le gaz est piégé dans une boîte et qu'il est sujet à un champ magnétique extérieur uniforme. On fait l'hypothèse que chaque particule interagit avec un potentiel périodique d'origine électrique. On néglige les intéractions entre particules et le gaz est à l'équilibre thermique.

Précisons les hypothèses utilisées. Le gaz est confiné à l'intérieur d'une large boîte cubique donné par $\Lambda_L = (-L/2, L/2)^3$, avec $L \geq 1$. On considère un champ magnétique $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ avec $B \geq 0$, parallèle à la troisième composante de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On lui associe le potentiel vecteur magnétique $A(\mathbf{x})$ qui s'écrit dans la jauge de Coulomb : $A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{x} = B\mathbf{a}(\mathbf{x})$, avec $\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(-x_2, x_1, 0)$ (jauge symétrique).

On néglige le spin des particules puisqu'on s'intéresse seulement aux effets diamagnétiques. De plus, on suppose que le potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ est une fonction à valeurs réélles et périodique par rapport au réseau cubique $\mathbb{Z}^3$ (réseau de Bravais) de cellule élémentaire $\Omega = (-1/2, 1/2)^3$ (cellule de Wigner-Seitz). Un tel potentiel modélise, dans l'approximation de Born-Oppenheimer, l'interaction de chaque particule avec le champ cristallin d'un solide parfait (i.e. réseau infini où chaque site est occupé par une même espèce d'ions).

Quand la boîte est finie ($1 \leq L < \infty$), la dynamique de chaque particule est décrite par l'Hamiltonien défini sur $L^2(\Lambda_L)$ avec conditions de bords de Dirichlet sur $\partial\Lambda_L$ par :

$$H_L(\omega) = \frac{1}{2}(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 + V_L(\mathbf{x}), \quad \omega := -eB/c \in \mathbb{R} \quad (\hbar = 1 = m)$$

où V_L est la restriction de V à Λ_L. La fréquence cyclotron ω_c est reliée à ω par $\omega_c = -\omega$. En raison de la régularité de Λ_L, l'opérateur $H_L(\omega)$ est auto-adjoint sur le domaine $D\big(H_L(\omega)\big) = \mathcal{H}_0^1(\Lambda_L) \cap \mathcal{H}^2(\Lambda_L)$. Par des arguments standards (voir [88]), $H_L(\omega)$ est borné inférieurement et est à résolvante compacte. Par la suite, $\{e_j(\omega)\}_{j\geq 1}$ désignera l'ensemble de ses valeurs propores comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant.

Quand $L = \infty$, on désignera par $H_\infty(\omega)$ l'unique extension auto-adjointe de l'opérateur

$$\frac{1}{2}(-i\nabla_{\mathbf{x}} - \omega\mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x}) \qquad (\hbar = 1 = m)$$

défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. $H_\infty(\omega)$ est borné inférieurement et n'a que du spectre essentiel.

Introduisons les grandeurs thermodynamiques à volume fini caractéristiques de la réponse diamagnétique du gaz de fermions. On utilise le formalisme grand canonique de la mécanique statistique dans lequel le jeu de paramètres fixés est $(\beta, z, |\Lambda_L|)$. Ici $\beta := (k_B T)^{-1} > 0$ désigne "l'inverse" de la température T (k_B est la constante de Boltzmann), $z := \mathrm{e}^{\beta\mu} \in (0, +\infty)$ désigne la fugacité (μ est le potentiel chimique) et $|\Lambda_L|$ est le volume du confinement. La pression et la densité grand canonique à volume fini du gaz à "l'inverse" de la température $\beta > 0$, $z \in (0, +\infty)$ et à la fréquence cyclotron $\omega \in \mathbb{R}$ sont données par :

$$P_L(\beta, z, \omega) := \frac{1}{\beta|\Lambda_L|}\mathrm{Tr}_{L^2(\Lambda_L)}\big\{\ln\big(\mathbb{1} + z\mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega)}\big)\big\} = \frac{1}{\beta|\Lambda_L|}\sum_{j=1}^{\infty}\ln\big(1 + z\mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}\big)$$

$$\rho_L(\beta, z, \omega) := \beta z\frac{\partial P_L}{\partial z}(\beta, z, \omega) = \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z\mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}}{1 + z\mathrm{e}^{-\beta e_j(\omega)}}$$

Le semi-groupe $\mathrm{e}^{-\beta H_L(\omega)}$ étant de classe trace, les séries ci-dessus sont absolument convergentes (voir Remarque 1.37). Puisque la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto P_L(\beta, z, \omega)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir Théorème 2.1), on peut définir la susceptibilité grand canonique à volume fini comme la dérivée seconde de la pression grand canonique à volume fini par rapport à l'intensité du champ magnétique B :

$$\mathcal{X}_L^2(\beta, z, \omega) := \left(\frac{e}{c}\right)^2\frac{\partial^2 P_L}{\partial\omega^2}(\beta, z, \omega) \quad \beta > 0,\ \omega \in \mathbb{R},\ z \in (0, +\infty)$$

Lorsque Λ_L remplit l'espace tout entier (i.e. à la limite $L \to \infty$), on a prouvé au chapitre 5 que les limites thermodynamiques des trois quantités introduites ci-dessus existent.
En désignant par $P_\infty(\beta, z, \omega) := \lim_{L\to\infty} P_L(\beta, z, \omega)$, on a prouvé en particulier :

$$\rho_\infty(\beta, z, \omega) := \beta z\frac{\partial P_\infty}{\partial z}(\beta, z, \omega) = \lim_{L\to\infty}\beta z\frac{\partial P_L}{\partial z}(\beta, z, \omega)$$

$$\mathcal{X}_\infty^2(\beta, z, \omega) := \left(\frac{e}{c}\right)^2\frac{\partial^2 P_\infty}{\partial\omega^2}(\beta, z, \omega) = \lim_{L\to\infty}\left(\frac{e}{c}\right)^2\frac{\partial^2 P_L}{\partial\omega^2}(\beta, z, \omega)$$

et la limite commute avec la première dérivée (resp. la seconde dérivée) de la pression grand canonique par rapport à la fugacité z (resp. par rapport à l'intensité du champ magnétique).

Supposons maintenant que l'intensité du champ magnétique soit nulle et que la densité de particules $\rho_0 > 0$ devienne un paramètre fixé. En vertu des résultats de l'appendice 1 du chapitre 5 (cf. Proposition 5.37), soit $\mu_\infty(\beta, \rho_0) \in \mathbb{R}$ l'unique solution de l'équation :

$$\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega = 0) = \rho_0$$

La susceptibilité grand canonique à densité fixée $\rho_0 > 0$ est définie comme :

$$\mathcal{X}(\beta, \rho_0) := \mathcal{X}_\infty^2(\beta, e^{\beta\mu_\infty(\beta,\rho_0)}, \omega = 0)$$

Afin de formuler notre principal résultat, on a besoin d'introduire d'autres notations. Dans le cas où $\omega = 0$, la théorie de Bloch-Floquet pour les opérateurs périodiques (voir par ex. [10], [65]) permet de mettre en évidence la structure en bandes du spectre de l'opérateur $H_\infty(0)$. Si $\Omega^* = 2\pi\Omega$ désigne la (première) zone de Brillouin du réseau dual $(\mathbb{Z}^3)^* \equiv 2\pi\mathbb{Z}^3$, pour $j \in \mathbb{N}^*$, la j-ème fonction de bandes de Bloch est définie par $\mathcal{E}_j := [\min_{\mathbf{k}\in\Omega^*} E_j(\mathbf{k}), \max_{\mathbf{k}\in\Omega^*} E_j(\mathbf{k})]$ où $\{E_j(\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ est l'ensemble des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant) de l'Hamiltonien fibré $H(\mathbf{k}) := \frac{1}{2}(-i\nabla + \mathbf{k})^2 + V$ agissant dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ avec $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ le tore à trois dimensions. Notons qu'avec cette définition, les fonctions d'énergie de Bloch $\mathbf{k} \mapsto E_j(\mathbf{k})$ sont continues mais pas nécessairement différentiables par rapport à $\mathbf{k}$ aux points de croisement. Le spectre de l'opérateur $H_\infty(0)$ est absolument continu et donné par $\sigma(H_\infty(0)) = \cup_{j=1}^\infty \mathcal{E}_j$. Notons que les ensembles $\mathcal{E}_j$ peuvent se chevaucher et certains peuvent même coïncider. Les énergies de bandes correspondent aux unions disjointes des $\mathcal{E}_j$. On parle de gap spectral si $\max \mathcal{E}_j < \min \mathcal{E}_{j+1}$ pour des $j \geq 1$. Le nombre de gaps dans le spectre est fini (si non nul).

Il reste à introduire la densité d'états intégrée de l'opérateur $H_\infty(0)$. Rappelons sa définition. Pour $E \in \mathbb{R}$, soit $N_L(E)$ le nombre de valeurs propres de $H_L(0)$ plus petites que E. La densité d'états intégrée de $H_\infty(0)$ est définie par la limite (voir [41]) :

$$n_\infty(E) := \lim_{L\to\infty} \frac{N_L(E)}{|\Lambda_L|} = \lim_{L\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\{\chi_{(-\infty,E]}(H_L(0))\}}{|\Lambda_L|} \tag{6.1}$$

Enoncés des résultats principaux

Le premier lemme n'est pas directement relié au problème magnétique. Il traite de la définition rigoureuse de l'énergie de Fermi pour des électrons de Bloch. Bien que ces résultats soient bien connus de la littérature physique (voir [7], [62], etc..), nous n'avons pas trouvé jusqu'à présent de traitement rigoureux.

<u>**Lemme**</u> **6.1.** *Soit $\rho_0 > 0$ la densité de particules fixée. Soit $\mu_\infty(\beta, \rho_0) \in \mathbb{R}$ l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega = 0) = \rho_0$. Alors la limite :*

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) := \lim_{\beta\to+\infty} \mu_\infty(\beta, \rho_0)$$

existe et définie une fonction croissante, éventuellement discontinue, appelée l'énergie de Fermi. On distingue deux cas (semiconducteur et métallique) :

***SC** : S'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\rho_0 = n_\infty(E)$ pour tout $E \in [\max \mathcal{E}_N, \min \mathcal{E}_{N+1}]$, alors :*

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) = \frac{\max \mathcal{E}_N + \min \mathcal{E}_{N+1}}{2} \tag{6.2}$$

***M** : supposons qu'il existe une unique solution E_M à l'équation $n_\infty(E_M) = \rho_0$ appartenant à l'intervalle $(\min \mathcal{E}_N, \max \mathcal{E}_N)$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ éventuellement non unique. Alors :*

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) = E_M \tag{6.3}$$

En d'autres termes, un semiconducteur a son énergie de Fermi soit au milieu d'un gap non trivial (si $\max \mathcal{E}_N < \min \mathcal{E}_{N+1}$), soit à l'endroit où les deux bandes de Bloch consécutives "se touchent" fermant ainsi le gap (si $\max \mathcal{E}_N = \min \mathcal{E}_{N+1}$). Quant au métal, son énergie de Fermi se situe à l'intérieur d'une bande de Bloch.

Voici le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 6.2. *Soit $E_0 := \inf \sigma(H_\infty(0))$.*
(i). Supposons que l'énergie de Fermi se situe au milieu d'un gap non trivial, voir (6.2). Alors il existe $2N$ fonctions $\mathfrak{c}_j, \mathfrak{d}_j$ avec $1 \leq j \leq N$, définies sur Ω^* en dehors d'un ensemble de mesure (de Lebesgue) zéro, telles que l'intégrande ci-dessous puisse être prolongé par continuité sur tout Ω^* :

$$\mathcal{X}_{\mathrm{SC}}(\rho_0) := \lim_{\beta \to +\infty} \mathcal{X}(\beta, \rho_0) = \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \mathfrak{c}_j(\mathbf{k}) + \left\{E_j(\mathbf{k}) - \mathcal{E}_F(\rho_0)\right\} \mathfrak{d}_j(\mathbf{k}) \right\} \tag{6.4}$$

(ii). Supposons qu'il existe un unique $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{E}_F(\rho_0) \in (\min \mathcal{E}_N, \max \mathcal{E}_N)$.
Supposons que $\mathcal{S}_F := \left\{\mathbf{k} \in \Omega^* \,:\, E_N(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_F(\rho_0)\right\}$ soit une surface lisse et non dégénérée. Alors il existe $2N+1$ fonctions $\mathcal{G}_N, \mathfrak{c}_j, \mathfrak{d}_j$ avec $1 \leq j \leq N$, définies sur Ω^* en dehors d'un ensemble de mesure (de Lebesgue) zéro, telles qu'elles soient continues sur $\mathcal{S}_F$ et telles que le second intégrande ci-dessous puisse être prolongé par continuité sur tout Ω^* :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) &:= \lim_{\beta \to +\infty} \mathcal{X}(\beta, \rho_0) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{12} \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \\ &\cdot \left\{ \int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{\left|\nabla_{\mathbf{k}} E_N(\mathbf{k})\right|} \left[\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 - 3\mathcal{G}_N(\mathbf{k}) \right] + \right. \\ &\left. - 6 \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \sum_{j=1}^{N} \left[\chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_j(\mathbf{k})) \mathfrak{c}_j(\mathbf{k}) + \left\{E_j(\mathbf{k}) - \mathcal{E}_F(\rho_0)\right\} \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_j(\mathbf{k})) \mathfrak{d}_j(\mathbf{k}) \right] \right\} \end{aligned} \tag{6.5}$$

où $\chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(\cdot)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]$.
(iii). Soit $k_F := (6\pi^2 \rho_0)^{\frac{1}{3}}$. Alors lorsque $\rho_0 \to 0$, (6.5) donne la formule de Landau-Peierls :

$$\mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) = -\frac{e^2}{24\pi^2 c^2} \frac{(m_1^* m_2^* m_3^*)^{\frac{1}{3}}}{m_1^* m_2^*} k_F + o(k_F) \tag{6.6}$$

avec $\left[\frac{1}{m_i^*}\right]_{1 \leq i \leq 3}$ les valeurs propres de la hessienne $\{\partial^2_{k_i k_j} E_1(\mathbf{0})\}_{1 \leq i,j \leq 3}$ définie positive.

Remarque 6.3. Les fonctions $\mathfrak{c}_j(\cdot)$ et $\mathfrak{d}_j(\cdot)$ avec $1 \leq j \leq N$ qui apparaissent dans (6.4) sont les mêmes que celles dans (6.5).

Remarque 6.4. Les fonctions $\mathfrak{c}_j(\cdot)$ et $\mathfrak{d}_j(\cdot)$ peuvent avoir des singularités locales sur un ensemble discret de points où les bandes de Bloch éventuellement se "touchent".
Cependant, leurs combinaisons entrant dans les intégrandes ci-dessus sont toujours bornées car les singularités individuelles s'annulent par l'intermédiaire de la somme.

Remarque 6.5. Dans (iii), lorsque $m_1^* = m_2^* = m_3^* = m^*$, (6.6) n'est rien d'autre que la formule usuelle (voir par ex. [63]) de la susceptibilité de Landau-Peierls :

$$\mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) \sim -\frac{e^2}{24\pi^2 m^* c^2} k_F \quad \text{lorsque} \quad k_F \to 0. \tag{6.7}$$

Remarque 6.6. L'hypothèse $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ peut être assouplie en $V \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^3)$, avec $r \geq 23$.

Remarque 6.7. Les résultats énoncés dans le Théorème 6.2 ne prennent pas en compte le cas des semi-métaux pour lesquels $\mathcal{E}_F(\rho_0) = \max \mathcal{E}_N = \min \mathcal{E}_{N+1}$, $N \geq 1$.

2 L'énergie de Fermi

Cette section traite de la localisation de l'énergie de Fermi lorsque l'intensité du champ magnétique est nulle ($\omega = 0$). En particulier, on démontre le Lemme 6.1.
Bien qu'on ait supposé dans l'introduction de ce chapitre que $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, tous les résultats de cette section peuvent être étendus par exemple à $V \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$.

2.1 Résultats préparatoires

Dans ce paragraphe, on montre qu'à température nulle (i.e. $\beta \to +\infty$), la limite thermodynamique de la densité grand canonique en champ magnétique nul est identiquement égale à la densité d'états intégrée de l'opérateur $H_\infty(0)$. On donne également quelques propriétés sur la densité d'états intégrée au voisinage des bords d'un gap.

Soient $\beta > 0$ et $z := \mathrm{e}^{\beta\mu} \in (0, +\infty)$ les paramètres extérieurs fixés.
Soit $\xi \mapsto \mathfrak{f}(\beta, z; \xi) := \ln(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$ la fonction holomorphe sur le domaine (cf. Lemme 1.38) :

$$\mathfrak{C} := \left\{\xi \in \mathbb{C} \;:\; \Im\xi \in (-\pi/\beta, \pi/\beta)\right\} \tag{6.8}$$

Soit γ le contour orienté positivement et inclus dans $\mathfrak{C}$ défini par :

$$\gamma := \left\{\delta + iy,\ y \in [-\pi/2\beta, \pi/2\beta]\right\} \cup \left\{x \pm i\pi/2\beta,\ x \geq \delta\right\} \quad \delta := E_0 - 1,\ E_0 := \inf \sigma(H_\infty(0)) \tag{6.9}$$

Notons $R_\infty(\omega, \xi) := (H_\infty(\omega) - \xi)^{-1}$, $\xi \in \rho(H_\infty(\omega))$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Par la Remarque 5.11, la limite thermodynamique de la densité grand canonique du gaz de fermions est définie par :

$$\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega) := \frac{1}{|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left\{\chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \xi) R_\infty(\omega, \xi)\right\} \tag{6.10}$$

où Ω est le cube unité centré en l'origine des coordonnées (puisqu'on a supposé que V est périodique relativement au réseau cubique $\mathbb{Z}^3$), χ_Ω est la fonction caractéristique de Ω, et $\mathfrak{f}_{FD}(\beta,\mu;\xi) = -\beta^{-1}\partial_\xi \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) = (\mathrm{e}^{\beta(\xi-\mu)}+1)^{-1}$ est la fonction distribution de Fermi-Dirac. D'après les résultats du chapitre 5, $\rho_\infty(\beta,\cdot,\omega)$ vue comme une fonction de z, peut être étendue analytiquement sur le domaine $\mathcal{D}_{+1}(E_0(\omega)) = \mathbb{C}\setminus(-\infty,\mathrm{e}^{\beta E_0(\omega)}]$.

Supposons maintenant que l'intensité du champ magnétique soit nulle ($\omega = 0$).
Afin de réécrire (6.10) en termes des fonctions d'énergie de Bloch de l'opérateur $H_\infty(0)$, rappelons quelques notations. Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide et considérons l'isométrie de Bloch :

$$\mathcal{U} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \mapsto L^2(\Omega^*, L^2(\Omega)) = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \mathrm{d}\mathbf{k}\, L^2(\Omega)$$
$$(\mathcal{U}f)(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k}) = \frac{1}{|\Omega^*|^{\frac{1}{2}}}\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^3} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v})} f(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v}), \quad \mathbf{k}\in\Omega^*,\ \underline{\mathbf{x}}\in\Omega,\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$$

qui peut être étendue par continuité en un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. On identifie l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ avec $L^2(\mathbb{T}^3)$, où $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ est le tore à 3 dimensions. Après une transformation unitaire de Bloch (voir par ex. [10], [90]), $H_\infty(0) := \frac{1}{2}(-i\nabla)+V$ est décomposable en intégrale directe $\mathcal{U}H_\infty(0)\mathcal{U}^* = \int_{\Omega^*}^{\oplus}\mathrm{d}\mathbf{k}\, H(\mathbf{k})$ où les Hamiltoniens fibrés $H(\mathbf{k})$ agissant dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ sont donnés par :

$$H(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(-i\nabla+\mathbf{k})^2 + V, \quad \mathbf{k}\in\Omega^*$$

Rappelons que $H(\mathbf{k})$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$; le domaine de sa fermeture est l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^3)$. Pour chaque $\mathbf{k}\in\Omega^*$, $H(\mathbf{k})$ n'a que du spectre purement discret. Désignons par $\{E_j(\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ l'ensemble des valeurs propres comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant. Les fonctions propres correspondantes $\{u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ forment un système orthonormal complet dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ et satisfont :

$$H(\mathbf{k})u_j(\cdot\,;\mathbf{k}) = E_j(\mathbf{k})u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$$

Avec ce choix d'indexation (ordre croissant), la théorie des perturbations standarde assure que chaque fonction d'énergie de Bloch $\mathbf{k}\mapsto E_j(\mathbf{k})$ est continue et $2\pi\mathbb{Z}^3$-périodique.

Lorsque $\omega = 0$, (6.10) peut être réécrite uniquement en termes des fonctions d'énergie de Bloch. L'expression ci-dessous (dont la preuve est donnée dans l'annexe de cette section) repose sur la première assertion du Théorème 6.31 (cf. appendice de ce chapitre) :

Proposition 6.8. *Soient $\beta > 0$ et $\mu\in\mathbb{R}$. Désignons par Ω^* la première zone de Brillouin du réseau dual $2\pi\mathbb{Z}^3$. Alors :*

$$\rho_\infty(\beta, e^{\beta\mu}, \omega=0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathfrak{f}_{FD}(\beta,\mu;E_j(\mathbf{k})) \tag{6.11}$$

Remarque 6.9. Un autre moyen de définir la limite thermodynamique de la densité grand canonique du gaz de fermions est d'utiliser la densité d'états intégrée de l'opérateur $H_\infty(\omega)$ définie en (6.1) (pour la méthode, cf. paragraphe 3.2, chapitre 5) :

$$\rho_\infty(\beta, e^{\beta\mu}, \omega=0) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial\mathfrak{f}_{FD}}{\partial\lambda}(\beta,\mu;\lambda)n_\infty(\lambda) \tag{6.12}$$

Rappelons quelques unes des propriétés de ρ_∞ (voir appendice 1, chapitre 5).
Pour tout $\beta > 0$, $\rho_\infty(\beta, \cdot\,, \omega = 0)$ vue comme une fonction de z est strictement croissante sur $(0, +\infty)$ et définie un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $(0, +\infty)$ dans $(0, +\infty)$.
Ainsi lorsque la densité de particules $\rho_0 > 0$ est prise comme paramètre extérieur, la relation liant la fugacité à la densité peut être inversée, i.e. il existe un unique $z_\infty(\beta, \rho_0) \in (0, +\infty)$ et par conséquent un unique $\mu_\infty(\beta, \rho_0) \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty(\beta,\rho_0)}, \omega = 0) = \rho_0$.

A partir de (6.11), lorsque la température $T \to 0$, on a l'identité suivante (la preuve est dans l'annexe de cette section) :

Proposition 6.10. *Soient $E_0 := \inf \sigma(H_\infty(0))$ et $\mu \geq E_0$ fixé. Alors :*

$$\lim_{\beta \to +\infty} \rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0,\mu]}(E_j(\mathbf{k})) = n_\infty(\mu) \tag{6.13}$$

où $\chi_{[E_0,\mu]}(\cdot)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[E_0, \mu]$.

Ainsi (6.13) permet d'exprimer $n_\infty(\cdot)$ uniquement en termes des fonctions d'énergie de Bloch. A partir de cette relation, on voit directement que $n_\infty(\cdot)$ est positive, non-décroissante et continue (en μ) en raison de la continuité des fonctions d'énergie de Bloch. De plus, cette fonction est constante par morceaux quand μ appartient à un gap spectral. Enfin, on rappelle qu'elle possède le comportement asymptotique (voir par ex. [59]) :

$$n_\infty(\lambda) \sim \lambda^{\frac{3}{2}} \quad \text{lorsque } \lambda \to +\infty \tag{6.14}$$

La preuve du Lemme 6.1 repose sur ce dernier résultat concernant le comportement de n_∞ au voisinage des bords d'un gap (la preuve est dans l'annexe de cette section) :

Lemme 6.11. *Soit $\rho_0 > 0$ fixé. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_\infty(E) = \rho_0$ pour tout E satisfaisant $\max \mathcal{E}_N \leq E \leq \min \mathcal{E}_{N+1}$. Posons $a_N := \max \mathcal{E}_N$ et $b_N := \min \mathcal{E}_{N+1}$. Supposons que le gap soit ouvert, i.e. $a_N < b_N$. Alors pour $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe une constante $c = c_\delta > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned} n_\infty(a_N) - n_\infty(\lambda) &\geq c(a_N - \lambda)^3 \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \in [a_N - \delta, a_N] \\ n_\infty(\lambda) - n_\infty(b_N) &\geq c(\lambda - b_N)^3 \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \in [b_N, b_N + \delta] \end{aligned} \tag{6.15}$$

2.2 Energie de Fermi : le cas semiconducteur (SC)

On se place dans la situation où il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_\infty(E) = \rho_0 > 0$ pour tout E satisfaisant $\max \mathcal{E}_N \leq E \leq \min \mathcal{E}_{N+1}$. Posons $a_N := \max \mathcal{E}_N$ et $b_N := \min \mathcal{E}_{N+1}$.
Soit $\mu(\beta) := \mu_\infty(\beta, \rho_0)$ l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega = 0) = \rho_0$.
On commence avec ce premier lemme :

Lemme 6.12.

$$a_N \leq \mu_1 := \liminf_{\beta \to +\infty} \mu(\beta) \leq \limsup_{\beta \to +\infty} \mu(\beta) =: \mu_2 \leq b_N$$

Preuve Lemme 6.12.
On prouve par contraposé l'inégalité $a_N \leq \mu_1 := \liminf_{\beta \to +\infty} \mu(\beta)$.
On suppose que $\mu_1 < a_N$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite divergente $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\beta_n) = \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu(\beta_n) \leq a_N - \epsilon \quad \forall\, n \geq 1$$

Puisque $\rho_\infty(\beta, e^{\beta\mu}, \omega = 0)$, vue comme une fonction de μ, est une fonction croissante :

$$\rho_0 = \rho_\infty(\beta_n, e^{\beta_n \mu(\beta_n)}, \omega = 0) \leq \rho_\infty(\beta_n, e^{\beta_n (a_N - \epsilon)}, \omega = 0)$$

En passant à la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, (6.13) implique :

$$\rho_0 \leq n_\infty(a_N - \epsilon) < n_\infty(a_N) = \rho_0$$

où dans la seconde inégalité, on a utilisé (6.15). On arrive ainsi à une contradiction.
L'autre inégalité ($\mu_2 := \limsup_{\beta \to +\infty} \mu(\beta) \leq b_N$) se démontre par une méthode similaire.

■

Remarquons maintenant que si $a_N = b_N$, la preuve de (6.2) est finie. On peut alors supposer que $a_N < b_N$, c'est-à-dire que le gap est ouvert.
Avec les mêmes notations que le lemme ci-dessus, prouvons ensuite les inégalités strictes :

Lemme 6.13.

$$a_N < \mu_1 \leq \mu_2 < b_N$$

Preuve Lemme 6.13.
Nous montrons seulement par contraposé l'inégalité $\mu_1 > a_N$, l'autre inégalité ($\mu_2 < b_N$) se déduira par une méthode similaire. Supposons que $\mu_1 = a_N$ et posons $\epsilon := b_N - a_N > 0$. Il existe une suite $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ avec $\beta_n \to +\infty$ et un entier $M_\epsilon \geq 1$ assez grand tels que :

$$a_N - \frac{\epsilon}{4} \leq \mu(\beta_n) \leq a_N + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{lorsque} \quad n \geq M_\epsilon$$

Séparons la suite construite ci-dessus en deux sous-suites : l'une dont tous les termes se trouvent "à gauche" de a_N, et l'autre dont tous les termes se trouvent "à droite" de a_N. Nous allons traiter séparément ces deux situations.

Situation 1
Considérons qu'il existe une sous-suite $\{\mu(\beta_{n_k})\}_{k \geq 1}$ obéissant à :

$$\lim_{k \to \infty} \mu(\beta_{n_k}) = a_N \quad \text{et} \quad a_N \leq \mu(\beta_{n_k}) \leq a_N + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{lorsque} \quad k \geq 1 \tag{6.16}$$

Utilisons l'identité (6.12) dans laquelle on introduit $\mu(\beta_{n_k})$. On obtient :

$$\begin{aligned}\rho_0 = n_\infty(a_N) = -\int_{-\infty}^{a_N} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\partial \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \lambda}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda) n_\infty(\lambda) - n_\infty(b_N)\mathfrak{f}_{FD}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); b_N) + \\ + n_\infty(a_N)\mathfrak{f}_{FD}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); a_N) - \int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\partial \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \lambda}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda) n_\infty(\lambda)\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $n_\infty(E) = \rho_0$ pour tout $E \in [a_N, b_N]$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a_N} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\partial \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \lambda}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda)\{n_\infty(\lambda) - n_\infty(a_N)\} = \\ \int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\partial \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \lambda}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda)\{n_\infty(b_N) - n_\infty(\lambda)\}\end{aligned} \tag{6.17}$$

où on a utilisé que $\lim_{\lambda\to-\infty} \mathfrak{f}_{FD}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda) = 1$ et $\mathfrak{f}_{FD}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda) \le c e^{-\lambda\beta_{n_k}}$ pour λ assez grand. Dans le membre de gauche de (6.17), on introduit l'expression :

$$\partial_\lambda \mathfrak{f}_{FD}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda) = -\beta_{n_k} \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2} = -\beta_{n_k} \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(a_N-\mu(\beta_{n_k}))}\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-a_N)}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2} \tag{6.18}$$

alors que dans le membre de droite de (6.17) on utilise l'autre expression :

$$\partial_\lambda \mathfrak{f}_{FD}(\beta_{n_k}, \mu(\beta_{n_k}); \lambda) = -\beta_{n_k} \frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2} = -\beta_{n_k} \frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(b_N-\mu(\beta_{n_k}))}\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2} \tag{6.19}$$

Par conséquent, l'identité (6.17) peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{a_N} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-a_N)}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2}\{n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)\} \\ &\qquad = \mathrm{e}^{\beta_{n_k}\{2\mu(\beta_{n_k})-(a_N+b_N)\}} \int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2}\{n_\infty(\lambda)-n_\infty(b_N)\}\end{aligned} \tag{6.20}$$

L'idée est de montrer que l'égalité (6.20) ne peut être valable si k est suffisamment grand. Nous allons montrer qu'une borne inférieure pour le membre de gauche de (6.20) devient plus grande qu'une borne supérieure pour le membre de droite de (6.20) pour k assez grand. Soit $\delta > 0$ assez petit. Utilisant (6.15) dans le membre de gauche de (6.20) :

$$\int_{-\infty}^{a_N} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-a_N)}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2}\{n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)\} \ge \frac{c}{4}\int_{a_N-\delta}^{a_N} \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(a_N-\lambda)}(a_N-\lambda)^3$$

où on a utilisé que $\mu(\beta_{n_k}) \ge a_N \ge \lambda$ dans le numérateur. Après un changement de variable :

$$\int_{a_N-\delta}^{a_N} \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(a_N-\lambda)}(a_N-\lambda)^3 = \frac{1}{\beta_{n_k}^4}\int_0^{\delta\beta_{n_k}} \mathrm{d}t\, t^3\mathrm{e}^{-t}$$

Soit $k_0 \ge 1$ suffisamment grand tel que $\forall\, k \ge k_0$, $\delta\beta_{n_k} \ge 2$. A partir de ces estimations :

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\, t^3\mathrm{e}^{-t} \ge \frac{\mathrm{e}^{-1}}{4}, \qquad \int_1^{\delta\beta_{n_k}} \mathrm{d}t\, t^3\mathrm{e}^{-t} \ge \mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-(\delta\beta_{n_k}-1)}) \ge \mathrm{e}^{-1}\frac{\delta\beta_{n_k}-1}{\delta\beta_{n_k}} \ge \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\delta}\frac{1}{\beta_{n_k}}$$

on déduit l'existence d'une autre constante $c_1 > 0$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{a_N} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-a_N)}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2}\{n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)\} \ge \frac{c_1}{\beta_{n_k}^5} \quad \forall\, k \ge k_0 \tag{6.21}$$

Montrons que le membre de droite de (6.20) décroît exponentiellement en β_{n_k}. La condition $\mu(\beta_{n_k}) \le a_N + \epsilon/4$ implique que $2\mu(\beta_{n_k}) - a_N - b_N \le -\epsilon/2$ et $\mu(\beta_{n_k}) \le b_N$. Ainsi :

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\beta_{n_k}\{2\mu(\beta_{n_k})-(a_N+b_N)\}} \int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2}\{n_\infty(\lambda)-n_\infty(b_N)\} \\ &\qquad \le \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}\epsilon/2}\int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)} n_\infty(\lambda)\end{aligned}$$

Ensuite, utilisons (6.14) : il existe une constante $c > 0$ telle que $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\frac{3}{2}} n_\infty(\lambda) = c$.
Soit $\eta > 0$. Alors il existe $\lambda_0 > 2b_N$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, $n_\infty(\lambda) \leq (1+\eta)c\lambda^{\frac{3}{2}}$.
D'une part pour tout $k \geq 1$,

$$\int_{b_N}^{\lambda_0} \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)} n_\infty(\lambda) \leq n_\infty(\lambda_0)\frac{1}{\beta_{n_k}}(1-\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda_0-b_N)}) \leq \frac{n_\infty(\lambda_0)}{\beta_{n_k}}$$

D'autre part, puisque $\lambda \mapsto \lambda^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta_{n_k}}{2}\lambda}$ atteint sont maximum en $\lambda = \frac{3}{\beta_{n_k}}$, il existe une autre constante $c > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$:

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)} n_\infty(\lambda) \leq c\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta_{n_k}}{2}(\lambda_0-2b_N)}}{\beta_{n_k}^{\frac{5}{2}}}$$

En réunissant ces estimations, on déduit qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\forall\, k \geq 1$,

$$\mathrm{e}^{\beta_{n_k}\{2\mu(\beta_{n_k})-(a_N+b_N)\}} \int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2}\{n_\infty(\lambda)-n_\infty(b_N)\} \leq c_2\frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}\frac{\epsilon}{4}}}{\beta_{n_k}^5} \tag{6.22}$$

Ainsi pour k suffisamment grand, (6.21) devient plus grand que (6.22).
En conclusion, nous ne pouvons pas trouver de sous-suite qui obéit à (6.16).

Situation 2
Maintenant nous regardons l'autre situation :

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\beta_{n_k}) = a_N \quad \text{et} \quad a_N - \epsilon/4 \leq \mu(\beta_{n_k}) \leq a_N \quad \text{lorsque} \quad k \geq 1 \tag{6.23}$$

Nous allons encore montrer que l'identité (6.17) ne peut être valable si k est assez large.
En utilisant (6.18) et (6.19), on a l'identité :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a_N} &\mathrm{d}\lambda\, \beta_{n_k} \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2}\{n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)\} \\ &= \int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \beta_{n_k}\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(b_N-\mu(\beta_{n_k}))} \frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2}\{n_\infty(\lambda)-n_\infty(b_N)\}\end{aligned} \tag{6.24}$$

D'une part, en utilisant (6.23),

$$\begin{aligned}\int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \beta_{n_k}\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(b_N-\mu(\beta_{n_k}))} &\frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)}}{(1+\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))})^2}\{n_\infty(\lambda)-n_\infty(b_N)\} \\ &\leq \beta_{n_k}\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}\epsilon}\int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)} n_\infty(\lambda)\end{aligned}$$

puis en utilisant les mêmes arguments que précédemment, il existe $c_2^{'} > 0$ telle que :

$$\beta_{n_k}\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}\epsilon}\int_{b_N}^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{e}^{-\beta_{n_k}(\lambda-b_N)} n_\infty(\lambda) \leq c_2^{'}\frac{\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}\frac{\epsilon}{2}}}{\beta_{n_k}^{\frac{3}{2}}} \quad \forall\, k \geq 1$$

D'autre part, encore en utilisant (6.23), il existe $c_1^{'} > 0$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{a_N} \mathrm{d}\lambda\, \beta_{n_k} \frac{\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}}{(\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-\mu(\beta_{n_k}))}+1)^2}\{n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)\} \geq$$
$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{a_N-\frac{\epsilon}{4}} \mathrm{d}\lambda\, \beta_{n_k}\mathrm{e}^{\beta_{n_k}(\lambda-a_N)}\{n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)\} \geq c_1^{'}\mathrm{e}^{-\beta_{n_k}\frac{\epsilon}{4}} \quad \forall\, k \geq 1$$

Ainsi un majorant du membre de droite de (6.24) devient plus petit qu'un minorant du membre de gauche de (6.24). En conclusion, nous ne pouvons pas trouver de sous-suite qui obéit à (6.23). Cela conclut la preuve de l'inégalité $a_N < \mu_1$.
L'inégalité $\mu_2 = \limsup_{\beta\to+\infty} \mu_\infty(\beta) < b_N$ se démontre avec une méthode similaire.

■

La dernière étape dans la preuve du cas semiconducteur est contenue dans le lemme suivant. Avec les mêmes notations que dans les deux lemmes ci-dessus :

Lemme 6.14.

$$\frac{a_N+b_N}{2} \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \frac{a_N+b_N}{2}$$

Preuve Lemme 6.14.
Supposons que $a_N < \mu_1 < (a_N+b_N)/2$. A partir des deux lemmes précédents, il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $a_N < \mu_1 \leq (a_N+b_N)/2-\epsilon$.
Il existe alors une suite divergente $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\beta_n) \to \mu_1 \quad \text{et} \quad a_N < \mu(\beta_n) \leq \frac{(a_N+b_N)}{2} - \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n \geq 1$$

Il en résulte que $2\mu(\beta_n)-a_N-b_N \leq -\epsilon/2$. Ainsi, on peut répéter les arguments précédents et montrer que le membre de gauche de (6.20) va converger plus lentement vers 0 que le membre de droite de (6.20). On conclut que $(a_N+b_N)/2 \leq \mu_1$.
Supposons enfin que $(a_N+b_N)/2 < \mu_2 < b_N$. Dans ce cas, on peut également prouver que le membre de gauche de (6.17) va converger plus lentement vers 0 que le membre de droite de (6.17). On conclut que $\mu_2 \leq (a_N+b_N)/2$.

■

2.3 Energie de Fermi : le cas métallique (M)

Considérons la situation où il existe une unique solution E_M à l'équation $n_\infty(E) = \rho_0$, et cette solution se trouve à l'intérieur d'une bande de Bloch. En d'autres termes, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ éventuellement non unique tel que $\min \mathcal{E}_N < E_M < \max \mathcal{E}_N$. Notons que la densité d'états intégrée $n_\infty(\cdot\,)$ est une fonction strictement croissante sur $[\min \mathcal{E}_N, \max \mathcal{E}_N]$.

Soit $\mu(\beta) := \mu_\infty(\beta,\rho_0)$ l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta, e^{\beta\mu(\beta)}, \omega=0) = \rho_0$.
Montrons que :

$$E_M \leq \mu_1 := \liminf_{\beta\to+\infty} \mu(\beta) \leq \limsup_{\beta\to+\infty} \mu(\beta) := \mu_2 \leq E_M$$

ce qui achèvera la preuve. On commence par montrer l'inégalité de gauche par contraposé. Supposons que $\mu_1 < E_M$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite divergente $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\beta_n) = \mu_1 \quad \text{et} \quad \mu(\beta_n) \leq E_M - \epsilon \quad \forall n \geq 1$$

Puisque $\rho_\infty(\beta, e^{\beta\mu}, \omega = 0)$, vue comme une fonction de μ, est une fonction croissante :

$$n_\infty(E_M) = \rho_0 = \lim_{n\to\infty} \rho_\infty(\beta_n, e^{\beta_n \mu(\beta_n)}, 0) \leq \lim_{n\to\infty} \rho_\infty(\beta_n, e^{\beta_n(E_M-\epsilon)}, 0) = n_\infty(E_M - \epsilon)$$

où dans la dernière égalité, on a utilisé l'identité (6.13).
Mais l'inégalité $n_\infty(E_M) \leq n_\infty(E_M - \epsilon)$ est en contradiction avec le fait que $n_\infty(\cdot)$ est une fonction strictement croissante au voisinage de E_M. Par conséquent $E_M \leq \mu_1$.
Supposons que $\mu_2 > E_M$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite divergente $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\beta_n) = \mu_2 \quad \text{et} \quad E_M + \epsilon \leq \mu(\beta_n) \quad \forall n \geq 1$$

En utilisant à nouveau que $\rho_\infty(\beta, e^{\beta\mu}, \omega = 0)$ est une fonction croissante de la variable μ :

$$n_\infty(E_M + \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \rho_\infty(\beta_n, e^{\beta_n(E_M+\epsilon)}, 0) \leq \lim_{n\to\infty} \rho_\infty(\beta_n, e^{\beta_n\mu(\beta_n)}, 0) = \rho_0 = n_\infty(E_M)$$

où dans la première égalité, on a utilisé à nouveau l'identité (6.13).
Mais $n_\infty(E_M + \epsilon) \leq n_\infty(E_M)$ est en contradiction avec le fait que $n_\infty(\cdot)$ est une fonction strictement croissante au voisinage de E_M. Par conséquent, $\mu_2 \leq E_M$.

■

2.4 Annexe

Preuve Proposition 6.8.
La preuve repose essentiellement sur la première assertion du Théorème 6.31 établi dans l'appendice de ce chapitre. Remarquons que puisque $\mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \cdot)$ est exponentiellement décroissante sur le contour γ pour $\Re\xi > 0$ assez large, le résultat (6.84) concernant la trace par unité de volume $\mathcal{J}_0^m(\beta, \mu)$ définie en (6.79) peut être réutilisé en remplacant $\mathfrak{f}(\beta, \mu; \cdot)$ par $\mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \cdot)$. Ainsi, pour tout $\beta > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, (6.10) peut être réécrit comme :

$$\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \left(\frac{-1}{2i\pi}\right) \int_\gamma \mathrm{d}\xi \, \frac{\mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \xi)}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des résidus :

$$\left(\frac{-1}{2i\pi}\right) \int_\gamma \mathrm{d}\xi \, \frac{\mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \xi)}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)} = \mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; E_j(\mathbf{k})), \quad \mathbf{k} \in \Omega^*$$

■

Preuve Proposition 6.10.
Soient $E_0 := \inf \sigma(H_\infty(0))$ et $\mu \geq E_0$ fixé. Utilisons (6.11) pour prouver les identités (6.13). Comme pour tout $\xi \in [E_0, +\infty) \setminus \{\mu\}$, on a le résultat de convergence simple suivant :

$$\lim_{\beta\to+\infty} \mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \xi) = \chi_{[E_0,\mu]}(\xi)$$

où $\chi_{[E_0,\mu]}(\cdot\,)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[E_0,\mu]$, alors par le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{\beta\to+\infty}\rho_\infty(\beta,\mathrm{e}^{\beta\mu},\omega=0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\chi_{[E_0,\mu]}(E_j(\mathbf{k}))$$

Il reste à prouver la seconde identité. Pour cela, on va utiliser un résultat de [41] :

$$\forall\, f\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}),\quad \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,f(E_j(\mathbf{k}))=-\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\,f^{'}(t)n_\infty(t)$$

En prenant une suite de fonctions faiblement convergente vérifiant $f_n(x)\to\chi_{[E_0,\mu]}(x)$ lorsque $n\to+\infty$, en vertu de l'identité ci-dessus, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,f_n(E_j(\mathbf{k}))=n_\infty(\mu)$$

■

Preuve Lemme 6.11.
Soient $a_N:=\max\mathcal{E}_N$ et $b_N:=\min\mathcal{E}_{N+1}$. On suppose que le gap est ouvert : $a_N<b_N$.
On prouve seulement (6.15) puisque l'autre inégalité se démontre de la même manière.
Remarquons d'abord que pour λ suffisamment proche de a_N vérifiant $\lambda\leq a_N$, la seconde identité dans (6.13) permet d'écrire :

$$n_\infty(a_N)-n_\infty(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\{\,\mathbf{k}\in\Omega^*\,:\,\lambda\leq E_N(\mathbf{k})\leq a_N\,\}}\mathrm{d}\mathbf{k}$$

Donnons maintenant la stratégie. Compte-tenu du fait que $a_N=\max_{\mathbf{k}\in\Omega^*}E_N(\mathbf{k})$, le maximum est atteint en un point (éventuellement non unique) $\mathbf{k}_0$, i.e. $a_N=E_N(\mathbf{k}_0)$.
a_N est une valeur propre discrète, de multiplicité finie $1\leq M\leq N$, de l'opérateur fibré $H(\mathbf{k}_0)=\frac{1}{2}(-i\nabla+\mathbf{k}_0)^2+V$. En particulier a_N est isolée du reste du spectre puisqu'on a supposé que $a_N<b_N\leq E_{N+1}(\mathbf{k}_0)$. Pour $\mathbf{k}$ dans un petit voisinage de $\mathbf{k}_0$, la valeur propre a_N va se séparer au plus en M valeurs propres différentes.
Choisissons $\delta>0$ suffisamment petit de telle sorte que :

$$\sigma(H(\mathbf{k}_0))\cap[a_N-\delta,a_N+\delta]=\{E_N(\mathbf{k}_0)\}$$

On utilise la théorie des perturbations analytiques afin de contrôler la localisation du spectre de $H(\mathbf{k})$ lorsque $|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|$ est petit (on suppose sans perte de généralité que $\mathbf{k}_0$ se trouve dans l'intérieur de Ω^*). Posons :

$$W(\mathbf{k}):=H(\mathbf{k})-H(\mathbf{k}_0)=(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot(-i\nabla+\mathbf{k}_0)+\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}{2}$$

Puisque $(-i\nabla+\mathbf{k}_0)$ est $H(\mathbf{k}_0)$ -borné avec borne relative nulle, on peut alors trouver une constante $c>0$ telle que (ici $\|\cdot\|$ désigne la norme opérateur sur $L^2(\Omega)$) :

$$\|W(\mathbf{k})(H(\mathbf{k}_0)-i)^{-1}\|\leq c|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,\quad |\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|\leq 1$$

Considérons maintenant un cercle $\mathcal{C}$ de centre a_N et de rayon $r := (a_N - \lambda)/2 \leq \delta/2$.
En vertu de la première équation résolvante :

$$(H(\mathbf{k}_0) - z)^{-1} = (H(\mathbf{k}_0) - i)^{-1} + (z - i)(H(\mathbf{k}_0) - i)^{-1}(H(\mathbf{k}_0) - z)^{-1}$$

et en utilisant que pour tout $z \in \mathcal{C}$, $\|(H(\mathbf{k}_0) - z)^{-1}\| = 2/(a_N - \lambda)$; on peut trouver alors une autre constante $c_\delta > 0$ telle que :

$$\sup_{z \in \mathcal{C}} \|W(\mathbf{k})(H(\mathbf{k}_0) - z)^{-1}\| \leq c_\delta \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|}{(a_N - \lambda)} \quad |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq 1$$

et par suite :

$$\sup_{z \in \mathcal{C}} \|W(\mathbf{k})(H(\mathbf{k}_0) - z)^{-1}\| \leq \epsilon c_\delta \quad \text{lorsque} \quad |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq (a_N - \lambda)\epsilon$$

La théorie des perturbations analytiques assure que si ϵ est choisi suffisamment petit, $H(\mathbf{k})$ aura exactement M valeurs propres à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$. Et pour une telle valeur de ϵ, pour tout $\mathbf{k}$ tel que $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq \epsilon(a_N - \lambda)$, $\sigma(H(\mathbf{k})) \cap [a_N - \delta, a_N] \subseteq [(a_N + \lambda)/2, a_N] \subset [\lambda, a_N]$.
Au final, par passage en coordonnées sphériques, on obtient :

$$n_\infty(a_N) - n_\infty(\lambda) \geq \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq \epsilon(a_N - \lambda)} \mathrm{d}\mathbf{k} \geq c(a_N - \lambda)^3$$

■

3 Susceptibilité diamagnétique à température positive

Le but de cette section est de transformer l'expression de la limite thermodynamique de la susceptibilité grand canonique du gaz de fermions établie dans le chapitre 5 de telle sorte qu'elle ne fasse intervenir (explicitement) que les fonctions d'énergie de Bloch et leurs fonctions propres associées sous l'hypothèse de champ magnétique nul ($\omega = 0$).

3.1 Formule générale en champ magnétique nul

Soient $\beta > 0$ et $z := \mathrm{e}^{\beta\mu} \in (0, +\infty)$ les paramètres extérieurs fixés.
Soit γ le contour orienté positivement défini en (6.9), contournant la demi-droite $[E_0, +\infty)$ et inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathfrak{C}$ de $\xi \mapsto \mathfrak{f}(\beta, z; \xi) := \ln(1 + z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$. Notons $R_\infty(\omega, \xi) := (H_\infty(\omega) - \xi)^{-1}$, $\xi \in \rho(H_\infty(\omega))$ et $\omega \in \mathbb{R}$. La limite thermodynamique de la densité grand canonique du gaz de fermions est définie par (voir (5.1)) :

$$P_\infty(\beta, z, \omega) := \frac{1}{\beta|\Omega|} \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left\{ \chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta, z; \xi) R_\infty(\omega, \xi) \right\}$$

où Ω est le cube unité centré en l'origine des coordonnées (V est supposé $\mathbb{Z}^3$-périodique).

En vertu du fait que $P_\infty(\beta, z, \cdot)$ soit une fonction lisse de la variable ω (voir Corollaire 5.4), la limite thermodynamique de la susceptibilité grand canonique s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^2_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega) :&= \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 P_\infty}{\partial \omega^2}(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, \omega) \\ &= \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{2}{\beta|\Omega|} \Big\{ \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,1}(\beta, \mu, \omega)\big\} - \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,2}(\beta, \mu, \omega)\big\} \Big\} \end{aligned}$$

où $\mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu,\omega)$ et $\mathcal{W}_{\infty,2}(\beta,\mu,\omega)$ sont les opérateurs localement de classe trace dont les noyaux sont jointement continus sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (voir Remarque 5.11), définis par :

$$\mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu,\omega) := \frac{i}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) R_\infty(\omega,\xi) T_{1,\infty}(\omega,\xi) T_{1,\infty}(\omega,\xi)$$
$$\mathcal{W}_{\infty,2}(\beta,\mu,\omega) := \frac{i}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) R_\infty(\omega,\xi) T_{2,\infty}(\omega,\xi)$$

$T_{1,\infty}(\omega,\xi)$ et $T_{2,\infty}(\omega,\xi)$ sont les opérateurs générés par les noyaux définis en (5.2) et (5.3).

Supposons maintenant que le champ magnétique soit nul ($\omega = 0$) et que la densité de particules $\rho_0 > 0$ soit prise comme paramètre fixé. Dans ce cas, la limite thermodynamique de la susceptibilité grand canonique en champ magnétique nul et à densité fixée (ou susceptibilité diamagnétique) est donnée (voir appendice 1, chapitre 5) par :

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\beta,\rho_0) &:= \mathcal{X}_\infty^2(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu_\infty}, \omega=0)\\ &= \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{2}{\beta|\Omega|}\Big\{\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu_\infty,0)\} - \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,2}(\beta,\mu_\infty,0)\}\Big\}\end{aligned} \tag{6.25}$$

où $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta,\rho_0) \in \mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation $\rho_\infty(\beta,\mathrm{e}^{\beta\mu},\omega=0) = \rho_0$.

Afin de formuler le résultat important de cette section, rappelons quelques notations. Pour chaque $\mathbf{k} \in \Omega^*$, soient $\{E_j(\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ l'ensemble des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité et indexées dans un ordre croissant) et $\{u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ l'ensemble des fonctions propres associées de l'Hamitlonien fibré $H(\mathbf{k}) := \frac{1}{2}(-i\nabla + \mathbf{k})^2 + V$ agissant dans $L^2(\mathbb{T}^3)$. Avec ce choix d'indexation (ordre croissant), chaque fonction d'énergie de Bloch $\mathbf{k} \mapsto E_j(\mathbf{k})$ est continue et $2\pi\mathbb{Z}^3$-périodique. Cependant $E_j(\cdot)$ n'est pas nécessairement différentiable par rapport à $\mathbf{k}$ aux points de croisement. Même chose pour $\mathbf{k} \mapsto u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$.

Pour tout $\alpha \in \{1,2,3\}$, pour tout entier $i,j \geq 1$ et pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, définissons :

$$\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k}) := \int_\Omega \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\, \overline{u_i(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})}[(p_\alpha + k_\alpha)u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})] = \langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (p_\alpha + k_\alpha)u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle \tag{6.26}$$

où $p_\alpha := (-i\nabla)\cdot \mathbf{e}_\alpha$ sont les composantes de l'opérateur impulsion défini dans $L^2(\mathbb{T}^3)$.

La susceptibilité diamagnétique (6.25) peut s'exprimer uniquement en termes des fonctions d'énergie de Bloch et de leurs fonctions propres associées comme :

Proposition 6.15. *Soient $\beta > 0$ et $\rho_0 > 0$ fixés. Alors pour chaque $j_1 \in \mathbb{N}^*$, il existe quatre familles de fonctions (à valeurs complexes) $\mathfrak{c}_{j_1,l}(\cdot)$, avec $l \in \{0,1,2,3\}$, définies sur Ω^* en dehors d'un ensemble de mesure (de Lebesgue) zéro, telles que l'intégrande ci-dessous soit borné et continu sur Ω^* :*

$$\mathcal{X}(\beta,\rho_0) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{2\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j_1=1}^\infty \int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\sum_{l=0}^3 \frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial\xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j_1,l}(\mathbf{k}) \tag{6.27}$$

avec la convention $(\partial_\xi^0 \mathfrak{f})(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k})) = \mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k}))$. Pour tout entier $j_1 \geq 1$ et pour *tout* $\mathbf{k} \in \Omega^*$, *les coefficients* $\mathfrak{c}_{j_1,3}(\mathbf{k})$ *et* $\mathfrak{c}_{j_1,2}(\mathbf{k})$ *sont donnés respectivement par :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_{j_1,3}(\mathbf{k}) := \frac{1}{3!}\Bigg\{&|\hat{\pi}_{j_1,j_1}(1;\mathbf{k})|^2\Bigg(1 + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})|^2}{E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k})}\Bigg)+\\ &+ |\hat{\pi}_{j_1,j_1}(2;\mathbf{k})|^2\Bigg(1 + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})|^2}{E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k})}\Bigg)+\\ &- \hat{\pi}_{j_1,j_1}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_1,j_1}(2;\mathbf{k}) \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{2\Re\big(\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_1}(1;\mathbf{k})\big)}{E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k})}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_{j_1,2}(\mathbf{k}) := -\frac{1}{2}\Bigg\{&\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})|^2 + |\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})|^2}{E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k})} - 1 + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{j_2,j_1,j_1,j_1}(\mathbf{k}) - \mathcal{C}_{j_1,j_1,j_2,j_1}(\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))^2}+\\ &+ \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1}}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{j_1,j_1,j_2,j_3}(\mathbf{k}) + \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_1,j_3}(\mathbf{k}) + \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_1}(\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))(E_{j_3}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.29}$$

avec,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\mathbf{k}) := &\big\{\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_3}(2;\mathbf{k}) - \hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_3}(1;\mathbf{k})\big\}\cdot\\ &\cdot \big\{\hat{\pi}_{j_3,j_4}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_4,j_1}(1;\mathbf{k}) - \hat{\pi}_{j_3,j_4}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_4,j_1}(2;\mathbf{k})\big\}\end{aligned} \tag{6.30}$$

Remarque 6.16. Comme on va le voir ci-dessous, pour tout $j_1 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, les coefficients $\mathfrak{c}_{j_1,l}(\mathbf{k})$, $l \in \{0,1\}$, peuvent être identifiés mais leur expression explicite n'est pas nécessaire pour la démonstration du Théorème 6.2.

Le reste de cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 6.15. Tous les résultats nécessaires à sa démonstration ont leur preuve dans l'annexe de cette section.

La première étape consiste à écrire les traces locales apparaissant dans (6.25) d'une manière appropriée pour faciliter l'application de la décomposition de Bloch.

Lemme 6.17. *Soient* $\beta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\rho_0 > 0$ *fixés. Soient* $p_\alpha := -i\partial_\alpha$ *avec* $\alpha \in \{1,2,3\}$, *les composantes cartésiennes de l'opérateur l'impulsion* $(-i\nabla)$ *défini dans* $L^2(\mathbb{T}^3)$. *Alors :*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu,0)\big\} = \frac{1}{4}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Bigg\{\chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)\cdot\\ &\cdot \big[R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi)\big\{p_2R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi) - p_1R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi)\big\}+\\ &+ R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi)\big\{p_1R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi) - p_2R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi)\big\}\big]\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,2}(\beta,\mu,0)\big\} = -\frac{1}{4}\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Bigg\{\chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)\cdot\\ &\cdot R_\infty(0,\xi)R_\infty(0,\xi)\big[p_2R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi) + p_1R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi) - R_\infty(0,\xi)\big]\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.32}$$

Maintenant on utilise l'ingrédient principal de cette démonstration qui est la formule de trace locale suivante (sa preuve fait l'objet de l'appendice de fin de chapitre) :

Théorème 6.18. *Soient $\beta > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $m, n \geq 1$, considérons la trace :*

$$\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\beta,\mu) := \mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{\chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) R^m_\infty(0,\xi) p_{\alpha_1} R_\infty(0,\xi) \cdots p_{\alpha_n} R_\infty(0,\xi)\right\}$$

Alors sous l'hypothèse que $V \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^3)$, avec $r \geq 6n-1$ on a :

$$\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\beta,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k}) \cdots \hat{\pi}_{j_n,j_1}(\alpha_n;\mathbf{k}) \cdot$$
$$\cdot \int_\gamma \mathrm{d}\xi \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+1}(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)\cdots(E_{j_n}(\mathbf{k})-\xi)}$$

où toute les séries ci-dessus sont absolument convergentes et $\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})$ est défini par (6.26).

Remarque 6.19. Dans la preuve de ce théorème (voir appendice), on montre que l'on peut intervertir les séries avec les intégrales dans l'expression ci-dessus :

$$\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\beta,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) \cdot$$
$$\cdot \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k}) \cdots \hat{\pi}_{j_n,j_1}(\alpha_n;\mathbf{k})}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+1}(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)\cdots(E_{j_n}(\mathbf{k})-\xi)}$$

et les séries sont absolument et uniformément convergentes par rapport aux variables $\mathbf{k}$, ξ.

En appliquant les résultats du Théorème 6.18 aux expressions (6.31) et (6.32), on a :

Proposition 6.20. *Soient $\beta > 0$, $\rho_0 > 0$ fixés. Soit $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta,\rho_0) \in \mathbb{R}$ l'unique solution de $\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, 0) = \rho_0$. Alors les quantités (6.31) et (6.32) peuvent être réécrite comme :*

$$\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu_\infty,0)\} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j_1,\ldots,j_4=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\mathbf{k}) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathrm{d}\xi \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^2(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_4}(\mathbf{k})-\xi)} \tag{6.33}$$

$$\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,2}(\beta,\mu_\infty,0)\} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\left\{ \sum_{j_1=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathrm{d}\xi \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3} + \right.$$
$$\left. - \sum_{j_1,j_2=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathcal{C}_{j_1,j_2}(\mathbf{k}) \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathrm{d}\xi \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)} \right\} \tag{6.34}$$

où $\mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\cdot)$ est définie en (6.30) et pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, $\mathcal{C}_{j_1,j_2}(\mathbf{k})$ est définie par :

$$\mathcal{C}_{j_1,j_2}(\mathbf{k}) := \hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_1}(1;\mathbf{k}) + \hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_1}(2;\mathbf{k}) = |\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})|^2 + |\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})|^2 \tag{6.35}$$

Remarque 6.21. L'hypothèse $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ supposée au début du chapitre peut être affaiblie. En effet, chaque terme constitutif des expressions (6.31) et (6.32) comporte au plus 4 composantes p_j de l'opérateur impulsion. En vertu du Théorème 6.18, les expressions (6.33) et (6.34) restent simultanément valable lorsque $V \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^3)$ avec $r \geq 23$.

Les deux quantités (6.33) et (6.34) apparaissant dans l'expression de la susceptibilité (6.25) sont écrites d'une manière appropriée pour appliquer le théorème des résidus. Désignons les intégrandes apparaissant dans (6.33) et (6.34) par :

$$\mathfrak{g}_{j_1,j_2}(\beta,\mu_\infty;\xi) := \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)}, \quad j_1,j_2 \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathfrak{h}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\beta,\mu_\infty;\xi) := \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^2(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_4}(\mathbf{k})-\xi)}, \quad j_1,j_2,j_3,j_4 \in \mathbb{N}^*$$

Remarquons que $\mathfrak{g}_{j_1,j_2}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ peut avoir des pôles du premier, du troisième et même du quatrième ordre (dans le cas où $j_1 = j_2$). De la même manière, $\mathfrak{h}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ peut avoir des pôles du premier ordre jusqu'au cinquième ordre au plus (dans le cas où $j_1 = j_2 = j_3 = j_4$). Par le théorème des résidus, il s'ensuit que l'intégration par rapport à la variable ξ de $\mathfrak{h}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ dans (6.33) (respectivement de $\mathfrak{g}_{j_1,j_2}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ dans (6.34)) va faire apparaître des dérivées partielles de $\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ d'ordre au plus égal à 4 (respectivement d'ordre au plus égal à 3).

En revenant à la formule de la susceptibilité (6.25) compte-tenu des résultats de la Proposition 6.20, puis en vertu de la remarque ci-dessus, on s'attend à obtenir un développement de la susceptibilité diamagnétique du type :

$$\mathcal{X}(\beta,\rho_0) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{2\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\sum_{l=0}^{4}\frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_j(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j,l}(\mathbf{k}) \tag{6.36}$$

avec la convention $(\partial_\xi^0 \mathfrak{f})(\beta,\mu_\infty;E_j(\mathbf{k})) := \mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;E_j(\mathbf{k}))$. Les deux prochains résultats identifient ces fonctions $\mathfrak{c}_{j,l}(\cdot)$ provenant de (6.33) et (6.34) :

Lemme 6.22. *La quantité définie en* (6.33) *peut être réécrite comme :*

$$\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu_\infty,0)\big\} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j_1=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\sum_{l=0}^{3}\frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{a}_{j_1,l}(\mathbf{k}) \tag{6.37}$$

où pour tout $j_1 \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$, les fonctions $\mathfrak{a}_{j_1,3}(\cdot)$ et $\mathfrak{a}_{j_1,2}(\cdot)$ sont donnés par :

$$\mathfrak{a}_{j_1,3}(\mathbf{k}) := \frac{1}{3!}\Bigg\{|\hat{\pi}_{j_1,j_1}(1;\mathbf{k})|^2\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty}\frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})|^2}{E_{j_2}(\mathbf{k})-E_{j_1}(\mathbf{k})} + |\hat{\pi}_{j_1,j_1}(2;\mathbf{k})|^2\cdot\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty}\frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})|^2}{E_{j_2}(\mathbf{k})-E_{j_1}(\mathbf{k})} + \\ - \hat{\pi}_{j_1,j_1}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_1,j_1}(2;\mathbf{k})\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty}\frac{2\Re\big(\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_1}(1;\mathbf{k})\big)}{E_{j_2}(\mathbf{k})-E_{j_1}(\mathbf{k})}\Bigg\} \tag{6.38}$$

$$\mathfrak{a}_{j_1,2}(\mathbf{k}) := -\frac{1}{2!}\left\{ \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1}}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{j_1,j_1,j_2,j_3}(\mathbf{k}) + \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_1,j_3}(\mathbf{k}) + \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_1}(\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))(E_{j_3}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{j_2,j_1,j_1,j_1}(\mathbf{k}) - \mathcal{C}_{j_1,j_1,j_2,j_1}(\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))^2} \right\} \tag{6.39}$$

Remarque 6.23. Il est possible d'identifier dans (6.37) les fonctions $\mathfrak{a}_{j_1,l}(\cdot)$, pour $j_1 \geq 1$ et $l \in \{1, 0\}$, puisque un tel résultat est basé sur des identités fournies par le théorème des résidus. Cependant, le nombre de termes est très grand et nous n'utiliserons pas ces expressions dans la preuve du Théorème 6.2.

Maintenant on traite l'autre terme :

Lemme 6.24. *La quantité définie en* (6.34) *peut être réécrite comme :*

$$\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\{\chi_\Omega \mathcal{W}_{\infty,2}(\beta, \mu_\infty, 0)\} = \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j_1=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \sum_{l=0}^{4} \frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta, \mu_\infty; E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{b}_{j_1,l}(\mathbf{k}) \tag{6.40}$$

où pour tout entier $j_1 \geq 1$ et pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, on a :

$$\mathfrak{b}_{j_1,4}(\mathbf{k}) = 0 \tag{6.41}$$
$$\mathfrak{b}_{j_1,3}(\mathbf{k}) := \frac{1}{6}\{|\hat{\pi}_{j_1,j_1}(1;\mathbf{k})|^2 + |\hat{\pi}_{j_1,j_1}(2;\mathbf{k})|^2\} \tag{6.42}$$
$$\mathfrak{b}_{j_1,2}(\mathbf{k}) := -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})|^2 + |\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})|^2}{E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k})} + \frac{1}{2} \tag{6.43}$$
$$\mathfrak{b}_{j_1,i}(\mathbf{k}) := -(2-i) \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \frac{|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})|^2 + |\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})|^2}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_{j_1}(\mathbf{k}))^{3-i}}, \quad i \in \{0, 1\}$$

Les Lemmes 6.22 et 6.24 fournissent le développement (6.27) ; les coefficients sont donnés par :

$$\mathfrak{c}_{j_1,l}(\mathbf{k}) := \mathfrak{a}_{j_1,l}(\mathbf{k}) + \mathfrak{b}_{j_1,l}(\mathbf{k}), \quad l \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{6.44}$$

Pour conclure la preuve de la Proposition 6.15, il reste à utiliser ce dernier résultat :

Lemme 6.25. *Pour tout entier $j_1 \geq 1$ et $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, les applications $\Omega^* \ni \mathbf{k} \mapsto \mathfrak{a}_{j_1,l}(\mathbf{k})$ et $\Omega^* \ni \mathbf{k} \mapsto \mathfrak{b}_{j_1,l}(\mathbf{k})$ sont bornées et continues sur tout sous-ensemble compact de Ω^* où E_{j_1} est isolé du reste du spectre.*

Ainsi, pour tout $j_1 \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$, les fonctions $\mathfrak{c}_{j_1,l}(\cdot)$ apparaissant dans (6.27) peuvent avoir des singularités sur un ensemble discret de points où $E_{j_1}(\cdot)$ peut "toucher" les bandes voisines. Cependant l'intégrande dans (6.27) est borné et continu sur Ω^* car il provient des intégrales complexes dans (6.33) et (6.34) qui n'ont pas de singularité locale en $\mathbf{k}$ (cf. Remarque 6.19 et appendice à la fin du chapitre).

3.2 Annexe

Preuve Lemme 6.17.
On commence par prouver (6.32). Compte-tenu de l'expression $T_{2,\infty}(\cdot\,,\cdot\,;\omega,\xi)$ en (5.3) :

$$\begin{aligned} T_{2,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};0,\xi) &= \frac{1}{8}\{\mathbf{e}_3\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}\cdot\{\mathbf{e}_3\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};0,\xi) \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{8}[(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2]R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};0,\xi) \end{aligned}$$

En insérant cette expression dans celle du noyau diagonal de l'opérateur $\mathcal{W}_{\infty,2}(\beta,\mu,0)$:

$$\begin{aligned} \forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\quad \mathcal{W}_{\infty,2}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\mu,0) &= \frac{1}{8}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)\cdot \\ &\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}\,R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z};0,\xi)[(z_2-x_2)^2+(z_1-x_1)^2]R_\infty^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x};0,\xi) \end{aligned} \tag{6.45}$$

Soient $l\in\{1,2\}$ et $\mathbf{X}$ l'opérateur multiplication par $\mathbf{x}$. Alors $\forall\,\mathbf{z}\neq\mathbf{x}$, on peut écrire :

$$(z_l-x_l)R_\infty^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x};0,\xi) = [\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_l,R_\infty(0,\xi)](\mathbf{z},\mathbf{x}) = \big\{R_\infty(0,\xi)[H_\infty(0),\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_l]R_\infty(0,\xi)\big\}(\mathbf{z},\mathbf{x})$$

Avec $H_\infty(0)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha^2+V$, comme $[V,\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_l]=0$ et $[p_\alpha,\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_l]=-i\delta_{\alpha,l}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker), alors $[H_\infty(0),\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_l]=-ip_l$. Par conséquent :

$$(z_l-x_l)R_\infty^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x};0,\xi) = -i\{R_\infty(0,\xi)p_lR_\infty(0,\xi)\}(\mathbf{z},\mathbf{x}) \tag{6.46}$$

Par les règles de commutation usuelles, on déduit de (6.46) que pour $l\in\{1,2\}$ et $\mathbf{z}\neq\mathbf{x}$:

$$(z_l-x_l)^2R_\infty^{(1)}(\mathbf{z},\mathbf{x};0,\xi) = -\big\{2R_\infty(0,\xi)p_lR_\infty(0,\xi)p_lR_\infty(0,\xi)-R_\infty(0,\xi)R_\infty(0,\xi)\big\}(\mathbf{z},\mathbf{x})$$

Il reste à insérer cette dernière identité dans (6.45), et on obtient (6.32).

Prouvons maintenant (6.31). Compte tenu de l'expression $T_{1,\infty}(\cdot\,,\cdot\,;\omega=0,\xi)$ en (5.2) et compte-tenu du fait que $\nabla\cdot\mathbf{a}=0$, alors pour $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ on a :

$$\begin{aligned} T_{1,\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y};0,\xi) &= \frac{i}{2}\nabla_\mathbf{x}\cdot\{\mathbf{e}_3\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};0,\xi) \\ &= i\nabla_\mathbf{x}\cdot\Big[-\frac{(x_2-y_2)}{2}\mathbf{e}_1+\frac{(x_1-y_1)}{2}\mathbf{e}_2\Big]R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y};0,\xi) \end{aligned}$$

En insérant cette expression dans celle du noyau diagonal de l'opérateur $\mathcal{W}_{\infty,1}(\beta,\mu,0)$:

$$\begin{aligned} \forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\quad \mathcal{W}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\mu,0) &= \frac{1}{4}\int_\gamma\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_2\,R_\infty^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;0,\xi)\cdot \\ \cdot\big\{(i\nabla_{\mathbf{z}_1}\cdot\mathbf{e}_1)[-(z_{1,2}-z_{2,2})R_\infty(0,\xi)(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)] &+ (i\nabla_{\mathbf{z}_1}\cdot\mathbf{e}_2)[(z_{1,1}-z_{2,1})R_\infty(0,\xi)(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)]\big\}\cdot \\ \cdot\big\{(i\nabla_{\mathbf{z}_2}\cdot\mathbf{e}_1)[-(z_{2,2}-x_2)R_\infty(0,\xi)(\mathbf{z}_2,\mathbf{x})] &+ (i\nabla_{\mathbf{z}_2}\cdot\mathbf{e}_2)[(z_{2,1}-x_1)R_\infty(0,\xi)(\mathbf{z}_2,\mathbf{x})]\big\} \end{aligned}$$

Puis en utilisant (6.46), on déduit (6.31) à partir de l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\quad \mathcal{W}_{\infty,1}(\mathbf{x},\mathbf{x};\beta,\mu,0) &= \frac{1}{4}\int_\gamma\mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_1\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\mathbf{z}_2\,R_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z}_1;0,\xi)\cdot \\ &\cdot\big\{ip_1\big(R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi)\big)(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)-ip_2\big(R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi)\big)(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\big\}\cdot \\ &\cdot\big\{ip_1\big(R_\infty(0,\xi)p_2R_\infty(0,\xi)\big)(\mathbf{z}_2,\mathbf{x})-ip_2\big(R_\infty(0,\xi)p_1R_\infty(0,\xi)\big)(\mathbf{z}_2,\mathbf{x})\big\} \end{aligned}$$

■

Preuve Lemme 6.22.
Soit $\Omega^* \ni \mathbf{k} \mapsto \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\mathbf{k})$ la fonction à valeurs complexes apparaissant dans (6.33) :

$$\mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\mathbf{k}) := \left\{\hat{\pi}_{j_1,j_2}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_3}(2;\mathbf{k}) - \hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_3}(1;\mathbf{k})\right\} \\ \left\{\hat{\pi}_{j_3,j_4}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_4,j_1}(1;\mathbf{k}) - \hat{\pi}_{j_3,j_4}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_4,j_1}(2;\mathbf{k})\right\}$$

Remarquons que cette fonction est identiquement nulle pour les combinaisons d'indices :

$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4, \quad j_1 = j_2 = j_3 \neq j_4, \quad j_1 = j_3 = j_4 \neq j_2$$

Par conséquent le développement de (6.33) comporte des dérivées partielles de $\mathfrak{f}(\beta, \mu_\infty; \cdot\,)$ d'ordre au plus égal à 3. D'autre part, puisque les fonctions $\mathcal{C}_{j_1,j_1,j_1,j_4}(\cdot\,)$ et $\mathcal{C}_{j_1,j_2,j_1,j_1}(\cdot\,)$ sont identiquement nulle, la quadruple somme dans (6.33) se réduit à :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1,\dots,j_4=1}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^2(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_4}(\mathbf{k})-\xi)} + \\
&\qquad = \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_1,j_3,j_1}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^4(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)} + \\
&\qquad + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_2,j_2}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^2(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)^3} + \\
&+ \underbrace{\sum_{j_1,\dots,j_4=1}^{\infty}}_{\substack{\text{au plus 2}\\ \text{indices égaux}}} \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_3,j_4}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^2(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)(E_{j_4}(\mathbf{k})-\xi)}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Par application du théorème des résidus dans le premier terme du membre de droite de (6.47), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_1,j_3,j_1}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^4(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)} = \sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_1,j_3,j_1}(\mathbf{k}) \cdot \\
&\cdot \left\{\frac{1}{3!}\frac{1}{E_{j_3}(\mathbf{k})-E_{j_1}(\mathbf{k})}\frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k})) + \frac{3}{3!}\frac{1}{(E_{j_3}(\mathbf{k})-E_{j_1}(\mathbf{k}))^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k})) + \right. \\
&\qquad \left. + \text{autres termes faisant intervenir } \frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta,\mu_\infty;\cdot), \text{ avec } l \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{C}_{j_1,j_1,j_3,j_1}(\cdot\,)$ en facteur de $\frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta, \mu_\infty; E_{j_1}(\mathbf{k}))$ correspond à $\mathfrak{a}_{j_1,3}(\cdot\,)$ puisque :

$$\forall\, \mathbf{k} \in \Omega^*, \quad \mathcal{C}_{j_1,j_1,j_3,j_1}(\mathbf{k}) = \left|\hat{\pi}_{j_1,j_1}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_1,j_3}(2;\mathbf{k}) - \hat{\pi}_{j_1,j_1}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_1,j_3}(1;\mathbf{k})\right|^2$$

Remarquons que $\mathcal{C}_{j_1,j_1,j_3,j_1}(\cdot)$ contribue également au terme $\mathfrak{a}_{j_1,2}(\cdot)$.
En appliquant encore une fois le théorème des résidus dans le second terme du membre de droite de (6.47), on obtient :

$$\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_2,j_2}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^2(E_{j_3}(\mathbf{k})-\xi)^3}$$
$$= \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_2,j_2,j_2}(\mathbf{k})\left\{-\frac{1}{2!}\frac{1}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-E_{j_2}(\mathbf{k}))^2}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_{j_2}(\mathbf{k}))\right.$$
$$\left. + \text{ autres termes faisant intervenir } \frac{\partial^l\mathfrak{f}}{\partial\xi^l}(\beta,\mu_\infty;\cdot), \text{ avec } l\leq 1\right\}$$

La fonction $\mathcal{C}_{j_1,j_2,j_2,j_2}(\cdot)$ apparaissant en facteur de $\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_{j_2}(\mathbf{k}))$ contribue à $\mathfrak{a}_{j_1,2}(\cdot)$.

Il reste à isoler dans la quadruple somme de (6.47) (où au plus deux indices sont égaux) toutes les combinaisons fournissant une dérivée partielle de $\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ du second ordre. Ces combinaisons d'indices sont :

$$j_1=j_2\neq j_3\neq j_4,\quad j_1=j_3\neq j_2\neq j_4,\quad j_1=j_4\neq j_2\neq j_3$$

La seule chose qui reste à faire est d'appliquer encore une fois le théorème des résidus et de regrouper tous les termes en facteur de $\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$.

■

Preuve Lemme 6.24.
En séparant les cas $j_1=j_2$ et $j_1\neq j_2$, la double somme dans le membre de droite de (6.34) s'écrit comme :

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_2}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)}$$
$$= \sum_{j_1=1}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_1}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^4}+$$
$$+\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty} \mathcal{C}_{j_1,j_2}(\mathbf{k})\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)} \tag{6.48}$$

En utilisant le théorème des résidus dans le premier terme du membre de droite de (6.48) :

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^4} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\mathfrak{f}}{\partial\xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k}))$$

C'est le seul terme fournissant une dérivée partielle de $\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\cdot)$ d'ordre 3. En appliquant encore une fois le théorème des résidus dans le second terme du membre de droite de (6.48) :

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)}$$
$$= -\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)}\right]_{\xi=E_{j_1}(\mathbf{k})} - \left[\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3}\right]_{\xi=E_{j_2}(\mathbf{k})}$$

avec, en utilisant la formule de Leibniz :

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)}\right] = \\ \frac{1}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;\xi) + \frac{2}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)^2}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\xi}(\beta,\mu_\infty;\xi) + \frac{2\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)^3}$$

La seule chose qui reste à faire est de regrouper tous les termes après avoir remarqué que l'autre somme apparaissant dans (6.34) peut être écrite comme :

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)\int_\gamma \mathrm{d}\xi\,\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^3} = -\frac{1}{2!}\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;\xi)$$

■

Preuve Lemme 6.25.
Pour $j \geq 1$ un entier, soit $u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$ une fonction propre de l'Hamitlonien fibré $H(\mathbf{k})$ avec $\mathbf{k}\in\Omega^*$. La fonction $u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$ est $\mathbb{Z}^3$-périodique et compte-tenu du fait que $V\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, $u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$ est lisse d'après le lemme de Sobolev (voir par ex. [88]).
Soient $p_\alpha := -i\partial_\alpha$, $\alpha\in\{1,2,3\}$, les composantes de l'opérateur impulsion défini dans $L^2(\Omega)$ avec conditions de bords périodiques. Par la théorie des perturbations standardes, les applications $\Omega^*\ni\mathbf{k}\mapsto u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\in L^2(\Omega)$ et $\Omega^*\ni\mathbf{k}\mapsto p_\alpha u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\in L^2(\Omega)$ sont continues. Il s'ensuit alors que l'application

$$\Omega^*\ni\mathbf{k}\mapsto\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k}) = \langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), p_\alpha u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle, \quad i,j\in\mathbb{N}^*$$

est une fonction continue.
Maintenant prenons un terme générique apparaissant dans les fonctions $\mathbf{k}\mapsto\mathfrak{a}_{j_1,l}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{k}\mapsto\mathfrak{b}_{j_1,l}(\mathbf{k})$, avec $j_1\geq 1$ et $l\in\{0,1,2,3\}$. Par exemple :

$$\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{\infty}\frac{\hat{\pi}_{j_1,j_2}(2;\mathbf{k})\hat{\pi}_{j_2,j_1}(1;\mathbf{k})}{E_{j_2}(\mathbf{k})-E_{j_1}(\mathbf{k})}$$

L'hypothèse faîte sur E_{j_1} (i.e. isolée du reste du spectre) permet d'écarter les singularités provenant du dénominateur. Les seuls problèmes de singularité peuvent donc provenir de la somme infinie. Utilisons maintenant l'estimation (6.86) de la Proposition 6.33 en appendice : pour tout entier $M\geq 1$ et pour tout $\xi_0\geq -E_0+1$, il existe une constante $c_{M,\xi_0}>0$ telle que uniformément en $\mathbf{k}\in\Omega^*$, $\alpha\in\{1,2,3\}$ et $j_1,j_2\geq 1$:

$$|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha;\mathbf{k})| = |\hat{\pi}_{j_2,j_1}(\alpha;\mathbf{k})| \leq c_{M,\xi_0}\frac{(E_{j_1}(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+\frac{1}{2}}}{(E_{j_2}(\mathbf{k})+\xi_0)^M}$$

Si $|\xi_0|$ est assez large et $M\geq 2$ (cf. Lemme 6.43), la série indexée en j_2 est absolument convergente et uniformément bornée sur les compacts où E_{j_1} est isolée du reste du spectre. Le prix à payer est l'apparition d'un polynôme en $(E_{j_1}(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+\frac{1}{2}}$. Mais la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}(\beta,\mu_\infty;E_{j_1}(\mathbf{k}))$ fera converger la série indexée en j_1.

■

4 Susceptibilité diamagnétique à température nulle

L'objectif ici est de prouver (i) et (ii) du Théorème 6.2 à partir du développement (6.27).

4.1 Cas des semiconducteurs (SC)

Soient $\beta > 0$, $\rho_0 > 0$. Soit $\mu_\infty = \mu_\infty(\beta, \rho_0) \in \mathbb{R}$ l'unique solution de $\rho_\infty(\beta, \mathrm{e}^{\beta\mu}, 0) = \rho_0$. En utilisant que $\mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \xi) = -\beta^{-1}\partial_\xi \mathfrak{f}(\beta, \mu; \xi)$, l'expression (6.27) s'écrit également :

$$\mathcal{X}(\beta, \rho_0) = \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \\ \cdot \sum_{j_1=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k} \left\{ \sum_{l=0}^{2} \frac{\partial^l \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \xi^l}(\beta, \mu_\infty; E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j_1,1+l}(\mathbf{k}) - \frac{1}{\beta}\mathfrak{f}(\beta, \mu_\infty; E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j_1,0}(\mathbf{k}) \right\} \tag{6.49}$$

A partir de (6.49), la preuve de (i) du Théorème 6.2 repose sur deux ingrédients.
Le premier est que pour tout $\mu \geq E_0$ fixé, on a les convergences point par point :

$$\begin{aligned} \forall\, \xi \in [E_0, +\infty) \setminus \{\mu\}, \quad \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\beta}\mathfrak{f}(\beta, \mu; \xi) &= (\mu - \xi)\chi_{[E_0,\mu]}(\xi) \\ \lim_{\beta \to +\infty} \mathfrak{f}_{FD}(\beta, \mu; \xi) &= \chi_{[E_0,\mu]}(\xi) \end{aligned} \tag{6.50}$$

ainsi que les convergences aux sens des distributions :

$$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{\partial \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \xi}(\beta, \mu; \xi) = -\delta(\xi - \mu), \quad \lim_{\beta \to +\infty} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \xi^2}(\beta, \mu; \xi) = -\partial_\xi \delta(\xi - \mu) \tag{6.51}$$

Le second ingrédient est les estimations sur les dérivées de la distribution de Fermi-Dirac $\mathfrak{f}_{FD}$: pour tout $d > 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $c_{j,d} > 0$ telle que :

$$\sup_{|\xi - \mu| \geq d > 0} \left| \frac{\partial^j \mathfrak{f}_{FD}}{\partial \xi^j}(\beta, \mu; \xi) \right| \leq c_{j,d}\mathrm{e}^{-\frac{\beta|\xi-\mu|}{2}} \tag{6.52}$$

On se place maintenant dans le cas des semiconducteurs avec un gap non trivial, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{\beta \to +\infty} \mu_\infty(\beta, \rho_0) = (\max \mathcal{E}_N + \min \mathcal{E}_{N+1})/2 = \mathcal{E}_F(\rho_0)$ avec $\max \mathcal{E}_N < \min \mathcal{E}_{N+1}$. Puisque l'énergie de Fermi se trouve à l'intérieur d'un gap, tous les termes dans (6.49) contenant des dérivées de la distribution de Fermi-Dirac vont converger vers 0 dans la limite $\beta \to +\infty$. Ici (6.52) joue un double rôle : d'une part, il rend convergent la série indexée en j_1 et d'autre part, il fournit une décroissance exponentielle en β. Enfin en tenant compte de (6.50), on déduit (6.4) de (6.49).

4.2 Cas métallique (M)

Dans le cas des métaux, la limite $\beta \to +\infty$ n'est pas aussi simple que dans le cas des semiconducteurs puisque l'énergie de Fermi se trouve dans le spectre.
Le point de départ est le même développement (6.27) que l'on modifie en éliminant les dérivées partielles de $\mathfrak{f}(\beta, \mu_\infty; \cdot\,)$ d'ordre trois dans le but de faire apparaître une contribution

du type Landau-Peierls. Cependant cette opération nécessite une hypothèse supplémentaire de non-dégénerescence dans un voisinage de la surface de Fermi.

Ainsi on est amené à faire l'hypothèse suivante :

Hypothèses 6.26. On suppose qu'il existe un unique $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{\beta \to +\infty} \mu_\infty(\beta, \rho_0) = \mathcal{E}_F(\rho_0) \in (\min \mathcal{E}_N, \max \mathcal{E}_N)$, c'est-à-dire l'énergie de Fermi se trouve à l'intérieur de la N -ième bande de Bloch $\mathcal{E}_N$. On suppose de plus que $\mathcal{E}_N$ est une bande simple, i.e. $E_N(\mathbf{k})$ est une valeur propre non dégénérée à l'extérieur d'un ensemble de points discrets éventuellement vide. On suppose enfin que la surface de Fermi $\mathcal{S}_F := \{\mathbf{k} \in \Omega^* \ : \ E_N(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_F(\rho_0)\}$ est lisse et non dégénérée.

Notre hypothèse a pour conséquence :

$$\operatorname{dist}\big\{\mathcal{E}_F(\rho_0), \cup_{j=1}^{N-1}\mathcal{E}_j\big\} = d_1 > 0, \quad \operatorname{dist}\big\{\mathcal{E}_F(\rho_0), \cup_{j=N+1}^{\infty}\mathcal{E}_j\big\} = d_2 > 0$$

Notons que $E_1(\mathbf{0})$, le minimum de la bande de Bloch $\mathcal{E}_1$, est toujours simple. Si la densité ρ_0 est suffisamment petite alors l'hypothèse 6.26 est satisfaite puisque la fonction d'énergie de Bloch $E_1(\cdot\,)$ est non-dégénérée dans un voisinage de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (voir [61]).

En fait, l'hypothèse de non-dégénerescence nous est indispensable pour utiliser la théorie des perturbations régulières permettant d'exprimer les fonctions définies par (6.38), (6.42) et (6.43) (seulement dans le cas où $j_1 = N$) à l'aide des dérivées partielles de $E_N(\cdot)$ par rapport aux variables k_i, pour $\mathbf{k}$ dans un voisinage de la surface de Fermi :

$$\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i} = \hat{\pi}_{N,N}(i;\mathbf{k}), \quad i \in \{1,2,3\}, \tag{6.53}$$

$$\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2} = 1 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq N}}^{\infty} \frac{|\hat{\pi}_{j,N}(i;\mathbf{k})|^2}{E_N(\mathbf{k}) - E_j(\mathbf{k})}, \quad i \in \{1,2,3\}, \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq N}}^{\infty} \frac{2\Re\big(\hat{\pi}_{j,N}(1;\mathbf{k})\hat{\pi}_{N,j}(2;\mathbf{k})\big)}{E_N(\mathbf{k}) - E_j(\mathbf{k})} = \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2 \partial k_1}. \tag{6.55}$$

Ces identités peuvent être obtenues à l'aide de la formule de Feschbach (voir [30], [75]). Il est à noter que les séries ci-dessus sont absolument convergentes si le potentiel V est suffisamment régulier (voir appendice de ce chapitre et [30]).

Maintenant en utilisant l'hypothèse 6.26, on regroupe les coefficients en facteurs des dérivées partielles $\partial_\xi^l \mathfrak{f}(\beta, \mu_\infty; E_N(\mathbf{k}))$, avec $l \in \{2,3\}$, apparaissant dans le développement (6.27). Ceci nous permet d'isoler une contribution du type Landau-Peierls (la preuve de la proposition ci-dessous se trouve dans l'annexe de cette section) :

Proposition 6.27. *Supposons que $\mathcal{E}_N$ soit une bande simple.*
Soient $\Omega^* \ni \mathbf{k} \mapsto \mathfrak{c}_{N,l}(\mathbf{k})$, $l \in \{2,3\}$, les fonctions définies par (6.28) *et* (6.29) *pour $j_1 = N$.*

Alors :

$$\int_{\Omega^*} d\mathbf{k} \sum_{l=2}^{3} \frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta, \mu_\infty; E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{N,l}(\mathbf{k})$$
$$= \int_{\Omega^*} d\mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta, \mu_\infty; E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{1}{3!}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 + \mathfrak{a}_{N,2}(\mathbf{k})\right\}$$

où $\Omega^* \ni \mathbf{k} \mapsto \mathfrak{a}_{j_1=N,2}(\mathbf{k})$ *sont les fonctions définies en* (6.39).

A partir de (6.27) et de la Proposition 6.27, on obtient un développement pour la susceptibilité à densité fixée $\rho_0 > 0$ et à l'inverse de la température $\beta > 0$ fixés :

Proposition 6.28. *Supposons que $\mathcal{E}_N$ soit une bande simple.*
Pour chaque $j_1 \in \mathbb{N}^*$, il existe quatre familles de fonctions $\mathfrak{c}_{j_1,l}(\cdot)$, avec $l \in \{0,1,2,3\}$, définies sur Ω^* en dehors d'un ensemble de mesure (de Lebesgue) zéro, telles que le second intégrande ci-dessous soit borné et continu sur Ω^* :

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\beta, \rho_0) = &-\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{12\beta}\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot \\ &\cdot\left\{\int_{\Omega^*} d\mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta, \mu_\infty; E_N(\mathbf{k}))\left[\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 - 3\mathcal{G}_N(\mathbf{k})\right] + \right. \\ &\left. + 6\int_{\Omega^*} d\mathbf{k}\left[\sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq N}}^{\infty}\sum_{l=2}^{3}\frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta, \mu_\infty; E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j_1,l}(\mathbf{k}) + \sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{1}\frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta, \mu_\infty; E_{j_1}(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j_1,l}(\mathbf{k})\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.56}$$

où par convention $(\partial_\xi^0 \mathfrak{f})(\beta, \mu_\infty; \cdot) := \mathfrak{f}(\beta, \mu_\infty; \cdot)$ *et :*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_N(\mathbf{k}) := \frac{1}{3!}\left\{\sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq N}}^{+\infty}\sum_{\substack{j_3=1 \\ j_3 \neq N}}^{+\infty}\frac{\mathcal{C}_{N,N,j_2,j_3}(\mathbf{k}) + \mathcal{C}_{N,j_2,N,j_3}(\mathbf{k}) + \mathcal{C}_{N,j_2,j_3,N}(\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_N(\mathbf{k}))(E_{j_3}(\mathbf{k}) - E_N(\mathbf{k}))} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2!}\sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq N}}^{+\infty}\frac{\mathcal{C}_{j_2,N,N,N}(\mathbf{k}) - \mathcal{C}_{N,N,j_2,N}(\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) - E_N(\mathbf{k}))^2}\right\}\end{aligned} \tag{6.57}$$

En particulier, pour tout entier $j_1 \geq 1$ et pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, les coefficients $\mathfrak{c}_{j_1,3}(\mathbf{k})$ et $\mathfrak{c}_{j_1,2}(\mathbf{k})$ sont donnés par (6.28) et (6.29) respectivement.

La dernière chose à faire est de prendre la limite lorsque $\beta \to +\infty$ dans (6.56). Puisque l'énergie de Fermi se trouve à l'intérieur de la bande $\mathcal{E}_N$ et que cette bande est isolée du reste des autres bandes, alors en utilisant (6.51) et (6.52), on a :

$$\lim_{\beta \to +\infty}\frac{1}{\beta}\int_{\Omega^*} d\mathbf{k}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^{\infty}\sum_{l=2}^{3}\frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta, \mu_\infty(\beta, \rho_0); E_j(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{j,l}(\mathbf{k}) = 0$$

et

$$\lim_{\beta\to+\infty}\frac{-1}{\beta}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}-\left(\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1\partial k_2}\right)^2-3\mathcal{G}_N(\mathbf{k})\right\}$$
$$=-\int_{\mathcal{S}_F}\frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_N(\mathbf{k})|}\left\{\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}-\left(\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1\partial k_2}\right)^2-3\mathcal{G}_N(\mathbf{k})\right\}$$

où $\mathcal{S}_F$ est la surface de Fermi.
En utilisant ces deux identités ainsi que (6.50), on déduit (6.5) de (6.56).

4.3 Annexe

Preuve Proposition 6.27.
A partir de (6.27) sachant (6.44) :

$$\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\sum_{l=2}^{3}\frac{\partial^l\mathfrak{f}}{\partial\xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{c}_{N,l}(\mathbf{k})=\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{a}_{N,2}(\mathbf{k})$$
$$+\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\left[\sum_{l=2}^{3}\frac{\partial^l\mathfrak{f}}{\partial\xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{b}_{N,l}(\mathbf{k})+\frac{\partial^3\mathfrak{f}}{\partial\xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{a}_{N,3}(\mathbf{k})\right]$$

En utilisant (6.53) et (6.54), les fonctions $\mathfrak{b}_{N,l}(\cdot)$, $l\in\{2,3\}$, peuvent être réécrites comme :

$$\mathfrak{b}_{N,3}(\mathbf{k})=\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1}\right)^2+\left(\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2}\right)^2\right\},$$
$$\mathfrak{b}_{N,2}(\mathbf{k})=\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}-1\right)+\left(\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}-1\right)+2\right\}=\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}+\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right\}$$

Puisque $E_N(\cdot)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3)$, une simple intégration par parties permet d'obtenir :

$$\forall\, i\in\{1,2\},\quad \int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{d}k_i\,\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i}\frac{\partial\mathfrak{f}^3}{\partial\xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i}$$
$$=-\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{d}k_i\,\frac{\partial\mathfrak{f}^2}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2}\tag{6.58}$$

d'où :

$$\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{\partial^3\mathfrak{f}}{\partial\xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{b}_{N,3}(\mathbf{k})=-\frac{1}{3!}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}+\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right\}$$

et :

$$\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\sum_{l=2}^{3}\frac{\partial^l\mathfrak{f}}{\partial\xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{b}_{N,l}(\mathbf{k})=\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}+\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right\}\tag{6.59}$$

D'autre part, en utilisant (6.53), (6.54) et (6.55), $\mathfrak{a}_{N,3}(\cdot)$ se réécrit comme :

$$\mathfrak{a}_{N,3}(\mathbf{k})=\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1}\right)^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right)+\left(\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2}\right)^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1}\right)\left(\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2}\right)\left(-\frac{\partial^2E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1\partial k_2}\right)\right\}\tag{6.60}$$

Notons que par une simple intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
&\forall\, i \neq j \in \{1,2\}, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}k_j\, \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2} \\
&= -\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}k_j\, \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\frac{\partial}{\partial k_j}\left[\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2}\right] \\
&= -\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}k_j\, \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2} + \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial}{\partial k_j}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2}\right\} \qquad (6.61) \\
&= -\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}k_j\, \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i^2} + \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial}{\partial k_i}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j \partial k_i}\right\}
\end{aligned}
$$

En vertu de (6.60), utilisant (6.61) et (6.58), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{a}_{N,3}(\mathbf{k}) = \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{2\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial k_2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2} + \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2}\frac{\partial}{\partial k_1}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2 \partial k_1} - \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} - \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right\} + \\
&\quad + \frac{1}{3!}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1}\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2} \qquad (6.62)
\end{aligned}
$$

Finallement par une dernière intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
&\forall\, i \neq j \in \{1,2\}, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}k_j\, \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\frac{\partial}{\partial k_i}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j \partial k_i} \\
&\qquad = -\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}k_j\, \left\{\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k})) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j}\frac{\partial E_N(\mathbf{k})}{\partial k_i}\frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\right\}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_j \partial k_i}
\end{aligned}
$$

Ainsi (6.62) se réduit à :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{a}_{N,3}(\mathbf{k}) = \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k})) \\
&\qquad \left\{2\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - 2\left(\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} - \frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2}\right\} \qquad (6.63)
\end{aligned}
$$

En additionnant (6.59) à (6.63) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\left[\sum_{l=2}^{3}\frac{\partial^l \mathfrak{f}}{\partial \xi^l}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{b}_{N,l}(\mathbf{k}) + \frac{\partial^3 \mathfrak{f}}{\partial \xi^3}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\mathfrak{a}_{N,3}(\mathbf{k})\right] \\
&\qquad = \frac{1}{3!}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}(\beta,\mu_\infty;E_N(\mathbf{k}))\left\{\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_N(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

■

Notons que la preuve ne marche pas si E_N ”touche” d'autres bandes en un ensemble discret de points. Dans ce cas, l'intégration par parties doit être faîte le long d'un voisinage tubulaire de la surface de Fermi $\mathcal{S}_F$; le prix étant l'apparition de termes supplémentaires. Ces termes disparaîtront lorsque $\beta \to +\infty$ puisqu'ils décroîssent exponentiellement en β.

5 Formule de Landau-Peierls

5.1 Preuve de (iii) Théorème 6.2

Le but de cette section est d'établir un développement asymptotique de (6.5) dans la limite des faibles densités (i.e. $\rho_0 \to 0$).

Considérons l'hypothèse de faible densité $\rho_0 \in (0,1)$. Dans ce cas, l'énergie de Fermi se trouve dans l'intervalle $(E_0, \max_{\mathbf{k}\in\Omega^*} E_1(\mathbf{k}))$. Rappelons que $E_0 = \min_{\mathbf{k}\in\Omega^*} E_1(\mathbf{k}) = E_1(\mathbf{0})$, et $E_1(\cdot\,)$ est non dégénérée au voisinage de $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ avec une matrice hessienne définie positive. Lorsque $\rho_0 \to 0$, il s'ensuit que $\mathcal{E}_F(\rho_0)$ converge vers E_0. Le sous-ensemble des $\mathbf{k}$ de Ω^* tel que $E_0 \leq E_1(\mathbf{k}) \leq \mathcal{E}_F(\rho_0)$ est localisé seulement près de l'origine.
Dans [61], il est prouvé l'existence du développement quadratique de $E_1(\mathbf{k})$ pour $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$:

$$E_1(\mathbf{k}) = E_0 + \frac{1}{2!}\mathbf{k}^T \left[\frac{\partial^2 E_1}{\partial k_i \partial k_j}(\mathbf{0})\right]_{1\leq i,j\leq 3} \mathbf{k} + \mathcal{O}\big(\mathbf{k}^4\big) \quad \text{lorsque } \mathbf{k} \to \mathbf{0}$$

Comme la matrice hessienne est symétrique, ce développement quadratique s'écrit encore :

$$E_1(\mathbf{k}) = E_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{m_i^*} + \mathcal{O}\big(\mathbf{k}^4\big) \quad \text{lorsque } \mathbf{k} \to \mathbf{0} \tag{6.64}$$

où $[1/m_i^*]_{1\leq i\leq 3}$ sont les valeurs propres du tenseur de masse effective inverse.
A partir de (6.64), on obtient le développement asymptotique de $\mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0$ lorsque $\rho_0 \to 0$ (la preuve est donnée dans l'annexe de cette section) :

Proposition 6.29. *Lorsque $\rho_0 \to 0$, on a :*

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0 = s\rho_0^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}\big(\rho_0^{\frac{4}{3}}\big), \qquad s := \frac{(6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{2}\left(\frac{1}{m_1^* m_2^* m_3^*}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.65}$$

Dans le cas particulier où $m_i^* = m^* > 0$ pour $i \in \{1,2,3\}$ et en posant $k_F := (6\pi^2\rho_0)^{\frac{1}{3}}$:

$$\mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0 = \frac{1}{2m^*}k_F^2 + \mathcal{O}\big(k_F^4\big) \tag{6.66}$$

Avant de prouver (iii) du Théorème 6.2, on a besoin du résultat technique suivant (la preuve de ce résultat se trouve dans l'annexe de cette section) :

Lemme 6.30. *Supposons que $E_1(\mathbf{k})$ reste non dégénérée dans la boule $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(\mathbf{0}) := \{\mathbf{k} \in \Omega^* : |\mathbf{k}| \leq \epsilon_0\}$, $\epsilon_0 > 0$ assez petit. Supposons que $W : \mathcal{B}_{\epsilon_0}(\mathbf{0}) \to \mathbb{C}$ soit une fonction continue. Alors on a les développements asymptotiques suivants lorsque $\rho_0 \to 0$:*

$$\int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{\big|\nabla E_1(\mathbf{k})\big|} W(\mathbf{k}) = A\rho_0^{\frac{1}{3}} + o\big(\rho_0^{\frac{1}{3}}\big) \quad \textit{avec} \quad A := \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}\,4\sqrt{2}\pi W(\mathbf{0})\sqrt{s} \tag{6.67}$$

$$\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}\big(E_1(\mathbf{k})\big) W(\mathbf{k}) = B\rho_0 + o\big(\rho_0\big) \quad \textit{avec} \quad B := \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}\,\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} W(\mathbf{0}) s^{\frac{3}{2}} \tag{6.68}$$

où s est le coefficient défini en (6.65).

Utilisons les résultats de la Proposition 6.29 et du Lemme 6.30 pour prouver la formule de Landau-Peierls (6.6). Considérons le développement (6.5). En vertu des résultats de la section précédente, dans (6.5) les coefficients $\mathfrak{c}_j := \mathfrak{c}_{j,1}$ et $\mathfrak{d}_j := \mathfrak{c}_{j,0}$. Remarquons qu'ici nous n'avons pas besoin de supposer que $\mathcal{E}_1$ est une bande simple puisque $E_1(\cdot)$ est analytique dans un voisinage de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.
Considérons le premier terme apparaissant dans le développement (6.5) :

$$-\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{12} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_1(\mathbf{k})|} \left\{ \frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} \frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 - 3\mathcal{G}_1(\mathbf{k}) \right\}$$

puisque c'est seulement ce terme qui va fournir (6.6). Ceci est une conséquence de (6.68) compte-tenu de (6.64) et du fait que les fonctions $\mathfrak{c}_{1,1}(\cdot)$ et $\mathfrak{c}_{1,0}(\cdot)$ sont continues au voisinage de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (voir Lemme 6.25). Considérons la fonction :

$$W(\mathbf{k}) := \frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} \frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 - 3\mathcal{G}_1(\mathbf{k})$$

En vertu du Lemme 6.25, $W(\cdot)$ est continue dans un voisinage de l'origine. D'après (6.67), la seule chose dont nous avons besoin est de calculer $W(\mathbf{0})$. Le déterminant de la matrice hessienne donne après quelques calculs :

$$\frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_1^2} \frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E_1(\mathbf{k})}{\partial k_1 \partial k_2}\right)^2 = \frac{1}{m_1^* m_2^*} + \mathcal{O}\big(\mathbf{k}^2\big) \quad \text{lorsque } \mathbf{k} \to \mathbf{0}$$

Ainsi on peut écrire :

$$\mathcal{X}_{\mathrm{M}}(\rho_0) = -\left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{1}{24\pi^2} \big(m_1^* m_2^* m_3^*\big)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{m_1^* m_2^*} - 3\mathcal{G}_1(\mathbf{0})\right] (6\pi)^{\frac{1}{3}} \rho_0^{\frac{1}{3}} + o\big(\rho_0^{\frac{1}{3}}\big) \quad \text{lorsque } \rho_0 \to 0$$

La seule chose qu'il reste à faire est de prouver que $\mathcal{G}_1(\mathbf{0}) = 0$. La définition de $\mathcal{G}_1$ se trouve en (6.57), alors que les coefficients entrant dans sa définition sont définis en (6.30).
On commence par montrer que pour tout entier $j_2, j_3 \geq 2$, on a :

$$\mathcal{C}_{1,1,j_2,j_3}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_{1,j_2,j_3,1}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_{j_2,1,1,1}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_{1,1,j_2,1}(\mathbf{0}) = 0$$

En effet dans l'expression de chacune de ces fonctions, il est possible d'identifier des facteurs du type $\hat{\pi}_{1,1}(\alpha; \mathbf{0})$, $\alpha \in \{1, 2\}$, qui ne sont rien d'autre que les dérivées partielles de E_1 en $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, voir (6.53). Par conséquent, ces termes sont identiquement nuls. Il s'ensuit que :

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{0}) = \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_3=2}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{1,j_2,1,j_3}(\mathbf{0})}{(E_{j_2}(\mathbf{0}) - E_1(\mathbf{0}))(E_{j_3}(\mathbf{0}) - E_1(\mathbf{0}))} \tag{6.69}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1,j_2,1,j_3}(\mathbf{0}) = {} & \hat{\pi}_{1,j_2}(1; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_2,1}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{1,j_3}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_3,1}(1; \mathbf{0}) + \hat{\pi}_{1,j_2}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_2,1}(1; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{1,j_3}(1; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_3,1}(2; \mathbf{0}) \\ & - \hat{\pi}_{1,j_2}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_2,1}(1; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{1,j_3}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_3,1}(1; \mathbf{0}) - \hat{\pi}_{1,j_2}(1; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_2,1}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{1,j_3}(1; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j_3,1}(2; \mathbf{0}) \end{aligned}$$

alors (6.69) peut s'écrire encore comme :

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{0}) = 2\left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{1,j}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j,1}(1; \mathbf{0})}{E_j(\mathbf{0}) - E_1(\mathbf{0})} \right|^2 - \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{1,j}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j,1}(1; \mathbf{0})}{E_j(\mathbf{0}) - E_1(\mathbf{0})} \right)^2 - \left(\overline{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{1,j}(2; \mathbf{0}) \hat{\pi}_{j,1}(1; \mathbf{0})}{E_j(\mathbf{0}) - E_1(\mathbf{0})}} \right)^2 \tag{6.70}$$

On utilise maintenant que pour $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, les fonctions propres $u_l(\cdot\,;\mathbf{0})$ peuvent être choisies réélles. Cela signifie que pour tout entier $j \geq 2$ et $\alpha \in \{1,2\}$, les éléments de matrice $\hat{\pi}_{1,j}(\alpha;\mathbf{0})$ sont purement imaginaires. Comme conséquence, les sommes dans (6.70) sont des nombres réels et s'annulent l'une l'autre, ainsi $\mathcal{G}_1(\mathbf{0}) = 0$.

5.2 Annexe

Preuve Proposition 6.29.
A partir de (6.64), utilisons le changement de variables $\tilde{k}_i = \frac{k_i}{\sqrt{m_i^*}}$, avec $i \in \{1,2,3\}$:

$$\tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}}) := E_1(\sqrt{m_i^*}\tilde{\mathbf{k}}) = E_0 + \frac{1}{2}\{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2\} + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{k}}^4) \quad \text{lorsque } \tilde{\mathbf{k}} \to \mathbf{0} \tag{6.71}$$

que l'on peut encore écrire en utilisant les coordonnées sphériques usuelles :

$$\tilde{E}_1(r,\theta,\phi) = E_0 + \frac{1}{2}r^2 + \mathcal{O}(r^4) \quad \text{lorsque } r \to 0 \tag{6.72}$$

On veut exprimer r comme une fonction de $\tilde{E}_1$, θ et ϕ. Pour $\mathcal{E}_F(\rho_0)$ suffisamment petit, soit $r(\theta,\phi,\rho_0)$ l'unique solution de l'équation $\tilde{E}_1(r(\theta,\phi,\rho_0),\theta,\phi) = \mathcal{E}_F(\rho_0)$.
A partir de (6.72), en posant $\Delta := \mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0$:

$$r(\theta,\phi,\rho_0) = F(r(\theta,\phi,\rho_0)) := \sqrt{2\Delta}[1 + \mathcal{O}(r^2(\theta,\phi,\rho_0))]$$

$r(\theta,\phi,\rho_0)$ étant un point fixe attractif de $F(\cdot\,)$, la suite $(F(0), F\circ F(0), F\circ F\circ F(0), \ldots)$ converge vers $r(\theta,\phi,\rho_0)$. Comme :

$$F(0) = \sqrt{2\Delta}, \quad F\circ F(0) = \sqrt{2\Delta}[1 + \mathcal{O}(\Delta)] = F\circ F\circ F(0)$$

Alors :

$$r(\theta,\phi,\rho_0) = \sqrt{2\Delta}[1 + \mathcal{O}(\Delta)] \quad \text{lorsque } \Delta \to 0 \tag{6.73}$$

On peut maintenant exprimer ρ_0 en fonction de Δ. Avec $\tilde{\Omega}^* := \frac{\Omega^*}{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}}$, (6.13) donne :

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}}{(2\pi)^3}\int_{\tilde{\Omega}^*} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{k}}\, \chi_{[E_0,\mathcal{E}_F(\rho_0)]}(\tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}})) = \frac{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}}{(2\pi)^3}\int_{\{\,\tilde{\mathbf{k}}\in\tilde{\Omega}^*\,:\, E_0 + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{k}}^2 + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{k}}^4) \leq \mathcal{E}_F(\rho_0)\,\}} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{k}}$$

puis en utilisant les coordonnées sphériques usuelles :

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta \left\{\int_0^{\sqrt{2\Delta}}\mathrm{d}r\, r^2 + \int_{\sqrt{2\Delta}}^{r(\theta,\phi,\rho_0)}\mathrm{d}r\, r^2\right\}$$

D'une part :

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta \int_0^{\sqrt{2\Delta}}\mathrm{d}r\, r^2 = \frac{4\pi}{3}(2\Delta)^{\frac{3}{2}}$$

et d'autre part, par le changement de variable $R = \frac{r^2}{2\Delta}$:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta \int_{\sqrt{2\Delta}}^{r(\theta,\phi,\rho_0)}\mathrm{d}r\, r^2 = \frac{(2\Delta)^{\frac{3}{2}}}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta \int_1^{\frac{r^2(\theta,\phi,\rho_0)}{2\Delta}}\mathrm{d}R\,\sqrt{R}}_{=\mathcal{O}(\Delta)}$$

Il vient des deux calculs ci-dessus le développement suivant :

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} (2\Delta)^{\frac{3}{2}} [1 + \mathcal{O}(\Delta)] \quad \text{lorsque} \quad \Delta \to 0 \tag{6.74}$$

La seule chose qu'il reste à faire maintenant est d'inverser (6.74) afin d'exprimer Δ en fonction de ρ_0 :

$$\Delta = G(\Delta) := \frac{1}{2} \left(\frac{|\Omega||\Omega^*|}{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}} \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} [1 + \mathcal{O}(\Delta)]$$

Δ étant un point fixe attractif de l'application $G(\cdot\,)$, la suite $(G(0), G \circ G(0), G \circ G \circ G(0), \ldots)$ converge vers Δ. Comme :

$$G(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{(2\pi)^3}{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}} \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}}, \quad G \circ G(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{(2\pi)^3}{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}} \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} [1 + \mathcal{O}(\rho_0^{\frac{2}{3}})]$$

on obtient finallement :

$$\Delta = \mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0 = \frac{1}{2} \left((2\pi)^3 \frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{m_1^* m_2^* m_3^*} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_0^{\frac{2}{3}} [1 + \mathcal{O}(\rho_0^{\frac{2}{3}})] \quad \text{lorsque } \rho_0 \to 0$$

■

Preuve Lemme 6.30.
Comme dans la preuve précédente, utilisons le changement de variables $\tilde{k}_i := \frac{k_i}{\sqrt{m_i^*}}$, avec $i \in \{1, 2, 3\}$. Notons $\tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}}) = E_1(\mathbf{k})$, $\tilde{W}(\tilde{\mathbf{k}}) = W(\mathbf{k})$ et $\tilde{\Omega}^* := \frac{\Omega^*}{\sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*}}$.
On commence par prouver (6.67). Formellement on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_1(\mathbf{k})|} W(\mathbf{k}) &= \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \delta(\mathcal{E}_F(\rho_0) - E_1(\mathbf{k})) W(\mathbf{k}) \\
&= \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} \int_{\tilde{\Omega}^*} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{k}}\, \delta(\mathcal{E}_F(\rho_0) - \tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}})) \tilde{W}(\tilde{\mathbf{k}}) \\
&= \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} \int_{\{\, \tilde{\mathbf{k}} \in \tilde{\Omega}^* \,:\, \tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}}) = \mathcal{E}_F(\rho_0) \,\}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\tilde{\mathbf{k}})}{|\nabla_{\tilde{\mathbf{k}}} \tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}})|} \tilde{W}(\tilde{\mathbf{k}})
\end{aligned} \tag{6.75}$$

En considérant le développement quadratique (6.71), il vient :

$$|\nabla_{\tilde{\mathbf{k}}} \tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}})|^2 = \tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{k}}^4) = \tilde{\mathbf{k}}^2 [1 + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{k}}^2)]$$

d'où :

$$|\nabla_{\tilde{\mathbf{k}}} \tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}})| = |\tilde{\mathbf{k}}| [1 + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{k}}^2)] \quad \text{lorsque } \tilde{\mathbf{k}} \to \mathbf{0}$$

En vertu des hypothèses faîtes sur $W(\cdot\,)$, (6.75) devient :

$$\int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_1(\mathbf{k})|} W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} W(\mathbf{0}) \int_{\{\, \tilde{\mathbf{k}} \in \tilde{\Omega}^* \,:\, \tilde{E}_1(\tilde{\mathbf{k}}) = \mathcal{E}_F(\rho_0) \,\}} \mathrm{d}\sigma(\tilde{\mathbf{k}})\, |\tilde{\mathbf{k}}|^{-1} [1 + o(1)] \tag{6.76}$$

Utilisant les coordonnées sphériques et en désignant par $r(\theta, \phi, \rho_0)$ l'unique solution de l'équation $\tilde{E}_1(r(\theta, \phi, \rho_0), \theta, \phi) = \mathcal{E}_F(\rho_0)$; (6.76) s'écrit encore :

$$\int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_1(\mathbf{k})|} W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} W(\mathbf{0}) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, r(\theta, \phi, \rho_0) [1 + o(1)]$$

Maintenant en posant $\Delta := \mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0$ et en utilisant (6.73) ; lorsque $\Delta \to 0$:

$$\int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_1(\mathbf{k})|} W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} 4\sqrt{2}\pi W(\mathbf{0})\sqrt{\Delta}[1 + o(1)]$$

Finallement en utilisant (6.65) ; lorsque $\rho_0 \to 0$:

$$\int_{\mathcal{S}_F} \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathbf{k})}{|\nabla E_1(\mathbf{k})|} W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} 4\sqrt{2}\pi W(\mathbf{0})\sqrt{s}\rho_0^{\frac{1}{3}} + o(\rho_0^{\frac{1}{3}})$$

On prouve maintenant (6.68). A partir du développement quadratique (6.71) :

$$\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_1(\mathbf{k}))W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} \int_{\{\, \tilde{\mathbf{k}} \in \tilde{\Omega}^* \,:\, E_0 + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{k}}^2 + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{k}}^4) \leq \mathcal{E}_F(\rho_0) \,\}} \mathrm{d}\tilde{\mathbf{k}}\, \tilde{W}(\tilde{\mathbf{k}}) \tag{6.77}$$

Utilisant les coordonnées sphériques et en désignant pat $r(\theta, \phi, \rho_0)$ l'unique solution de l'équation $\tilde{E}_1(r(\theta, \phi, \rho_0), \theta, \phi) = \mathcal{E}_F(\rho_0)$; (6.77) s'écrit encore :

$$\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_1(\mathbf{k}))W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} W(\mathbf{0}) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \int_0^{r(\theta,\phi,\rho_0)} \mathrm{d}r\, r^2 [1 + o(1)]$$

Maintenant en posant $\Delta := \mathcal{E}_F(\rho_0) - E_0$ et en utilisant (6.73) ; lorsque $\Delta \to 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_1(\mathbf{k}))W(\mathbf{k}) &= \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} W(\mathbf{0}) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \cdot \\ &\cdot \left\{ \int_0^{\sqrt{2\Delta}} \mathrm{d}r\, r^2 [1 + o(1)] + \int_{\sqrt{2\Delta}}^{r(\theta,\phi,\rho_0)} \mathrm{d}r\, r^2 [1 + o(1)] \right\}\end{aligned}$$

Comme :

$$\int_0^{\sqrt{2\Delta}} \mathrm{d}r\, r^2 [1 + o(1)] = \frac{(2\Delta)^{\frac{3}{2}}}{3} + o(\Delta^{\frac{3}{2}}), \qquad \int_{\sqrt{2\Delta}}^{r(\theta,\phi)} \mathrm{d}r\, r^2 [1 + o(1)] = \mathcal{O}(\Delta^{\frac{5}{2}})$$

il vient :

$$\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_1(\mathbf{k}))W(\mathbf{k}) = \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} W(\mathbf{0}) \Delta^{\frac{3}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{lorsque } \Delta \to 0$$

Finallement en utilisant (6.65) ; lorsque $\rho_0 \to 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \chi_{[E_0, \mathcal{E}_F(\rho_0)]}(E_1(\mathbf{k}))W(\mathbf{k}) &= \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} W(\mathbf{0}) \Big(s\rho_0^{\frac{2}{3}} [1 + \mathcal{O}(\rho_0^{\frac{2}{3}})] \Big)^{\frac{3}{2}} + o(\rho_0) \\ &= \sqrt{m_1^* m_2^* m_3^*} \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} W(\mathbf{0}) s^{\frac{3}{2}} \rho_0 + o(\rho_0)\end{aligned}$$

■

6 Appendice : Quelques résultats techniques

6.1 Résultat principal

Soit $H_\infty(0)$ l'opérateur de Schrödinger agissant dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$H_\infty(0) := \frac{1}{2}\big(- i\nabla_{\mathbf{x}}\big)^2 + V(\mathbf{x}) \tag{6.78}$$

où on suppose que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ est une fonction à valeurs réélles et V est périodique relativement à un réseau non dégénéré $\boldsymbol{\Upsilon}$ de $\mathbb{R}^3$ (réseau de Bravais) de cellule unité Ω (cellule de Wigner-Seitz). Sans perte de généralité, on supposera que V est $\mathbb{Z}^3$-périodique et $\Omega := (-1/2, 1/2)^3$ est la cellule unité du réseau cubique $\mathbb{Z}^3$.

Pour $\beta > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, soit $\xi \mapsto \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) := \ln\big(1 + \mathrm{e}^{\beta(\mu-\xi)}\big)$ la fonction holomorphe sur le domaine $\mathfrak{C}$ défini en (6.8). Soit γ le contour orienté positivement défini en (6.9), inclus dans $\mathfrak{C}$ et contournant la demi-droite $[E_0, +\infty)$ avec $E_0 := \inf \sigma(H_\infty(0))$.

Soient $n, l \geq 1$ des entiers tel que $1 \leq l \leq n$. Pour $\alpha_l \in \{1,2,3\}$, soient $\{p_{\alpha_l}\}_{\alpha_l}$ avec $p_{\alpha_l} := (-i\nabla) \cdot \mathbf{e}_{\alpha_l}$ les composantes de l'impulsion où $\{\mathbf{e}_{\alpha_l}\}_{\alpha_l}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soient $\mathcal{J}_0^m(\beta,\mu)$ et $\mathcal{J}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^m(\beta,\mu)$ les traces par unité de volume :

$$\mathcal{J}_0^m(\beta,\mu) := \frac{1}{|\Omega|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{\chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H_\infty(0)-\xi)^{-m}\right\} \tag{6.79}$$

$$\mathcal{J}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^m(\beta,\mu) := \frac{1}{|\Omega|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left\{\chi_\Omega \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H_\infty(0)-\xi)^{-m}\prod_{k=1}^n p_{\alpha_k}(H_\infty(0)-\xi)^{-1}\right\} \tag{6.80}$$

Ces quantités sont bien définies en vertu des arguments utilisés dans les Remarques 5.18 et 5.24 (quitte à faire en plus une intégration par parties par rapport à la variable ξ dans (6.80) pour utiliser que $\chi_\Omega p_{\alpha_k}(H_\infty(0)-\xi)^{-2}$ est de Hilbert-Schmidt).
Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve des Propositions 5.16 et 5.29, on peut montrer plus générallement que les intégrales d'opérateurs définis par :

$$\mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_n} := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H_\infty(0)-\xi)^{-m} p_{\alpha_1}(H_\infty(0)-\xi)^{-m_1}\cdots p_{\alpha_n}(H_\infty(0)-\xi)^{-m_n}$$
$$n \geq 1,\ \ 1 \leq l \leq n,\ \ \alpha_l \in \{1,2,3\},\ \ m, m_l \in \mathbb{N}^* \tag{6.81}$$

avec par convention :

$$\mathcal{W}_0^m := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H_\infty(0)-\xi)^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}^* \tag{6.82}$$

sont des opérateurs intégraux bornés sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. De plus, leur noyau intégral respectif $\mathcal{W}_0^m(\cdot\,,\cdot) : \mathbb{R}^3 \mathrm{x}\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ et $\mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_{n+1}}(\cdot\,,\cdot) : \mathbb{R}^3 \mathrm{x}\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ sont continus.

Notons $\Omega^* := 2\pi\Omega = (-\pi,\pi)^3$ la cellule élémentaire (première zone de Brillouin) du réseau dual $(\mathbb{Z}^3)^* := 2\pi\mathbb{Z}^3$. En désignant par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, soit l'opérateur unitaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathfrak{h} := L^2\big(\Omega^*, L^2(\Omega)\big) = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \mathrm{d}\mathbf{k}\, L^2(\Omega) \\ (\mathcal{U}f)(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k}) = \frac{1}{|\Omega^*|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^3} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v})} f(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v}), \quad \mathbf{k}\in\Omega^*,\ \underline{\mathbf{x}}\in\Omega,\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \tag{6.83}$$

qui peut être étendu par continuité en un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. On identifiera par la suite l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ à $L^2(\mathbb{T}^3)$, avec $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ le tore à 3 dimensions. La transformation unitaire de $H_\infty(0)$ est décomposable en intégrale directe $\mathcal{U}H_\infty(0)\mathcal{U}^* = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \mathrm{d}\mathbf{k}\, H(\mathbf{k})$ où les Hamiltoniens fibrés $H(\mathbf{k})$ agissant dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ sont définis par :

$$H(\mathbf{k}) := \frac{1}{2}\big(-i\nabla + \mathbf{k}\big)^2 + V, \quad \mathbf{k}\in\Omega^*$$

$H(\mathbf{k})$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$; le domaine de sa fermeture est l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^3)$. De plus, $H(\mathbf{k})$ est à résolvante compacte et est borné inférieurement. Soit $\{E_j(\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ l'ensemble des valeurs propres comptées avec leur multliplicité et indexées dans un ordre croissant. Les fonctions propres $\{u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\}_{j\geq 1}$ peuvent être choisies tel que $\mathbf{k}\mapsto u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$ soit mesurable sur Ω^* comme fonction à valeurs dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^3)$, et tel que pour $\mathbf{k}\in\Omega^*$ fixé, $\big\{u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\big\}_{j=1}^\infty$ forme un système orthonormal complet dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ (voir [65]). La décomposition de Floquet permet de mettre en évidence la structure en bandes du spectre $\sigma(H_\infty(0))$ (voir paragrpahe "résultats principaux" pour davantage de détails).

Le résultat suivant donne une représentation des quantités $\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\beta,\mu)$ et $\mathcal{J}^m_0(\beta,\mu)$ en termes des fonctions d'énergie de Bloch $\mathbf{k}\mapsto E_j(\mathbf{k})$, $j\geq 1$:

Théorème 6.31. *Soient $\beta > 0$ et $\mu\in\mathbb{R}$. Soient $n,l\in\mathbb{N}^*$ tels que $1\leq l\leq n$ et $p_{\alpha_l} := (-i\nabla)\cdot\mathbf{e}_{\alpha_l}$, $\alpha_l\in\{1,2,3\}$. Pour $m\in\mathbb{N}^*$, soient $\mathcal{J}^m_0(\beta,\mu)$ et $\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\beta,\mu)$ définies respectivement en* (6.79) *et* (6.80). *Alors :*

$$\mathcal{J}^m_0(\beta,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j=1}^\infty \int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k})-\xi)^m} \tag{6.84}$$

et sous l'hypothèse supplémentaire que $V\in\mathcal{C}^R(\mathbb{T}^3)$, avec $R\geq 6n-1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\beta,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j_1=1}^\infty\cdots\sum_{j_n=1}^\infty \int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\, \hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})\cdots\hat{\pi}_{j_n,j_1}(\alpha_n;\mathbf{k})\cdot \\ \cdot\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+1}(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)\cdots(E_{j_n}(\mathbf{k})-\xi)} \end{aligned} \tag{6.85}$$

où pour $\alpha\in\{1,2,3\}$, pour tout $i,j\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $\mathbf{k}\in\Omega^*$, $\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})$ désigne la quantité :

$$\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k}) := \int_\Omega \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\, \overline{u_i(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})}[(p_\alpha+k_\alpha)u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})] = \big\langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (p_\alpha+k_\alpha)u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\big\rangle$$

Remarque 6.32. Etant donné l'hypothèse nécessaire sur V pour établir l'identité (6.85) ; le lemme de Sobolev (voir [88]) garantit que $u_l(\cdot\,;\mathbf{k})\in\mathcal{C}^R(\mathbb{T}^3)$.

6.2 Un premier résultat technique

L'énoncé et la preuve de ce premier résultat se trouvent dans [30] :

Proposition 6.33. *Soit $M \geq 1$ un entier et supposons que $V \in \mathcal{C}^{2M-1}(\mathbb{T}^3)$. Alors pour tout $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0$ et pour tout entier $1 \leq N \leq M$, il existe une constante $c_{N,\xi_0} > 0$ tel que pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, $\alpha \in \{1,2,3\}$ et $i,j \in \mathbb{N}^*$:*

$$|\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})| = |\hat{\pi}_{j,i}(\alpha;\mathbf{k})| \leq c_{N,\xi_0} \frac{(E_j(\mathbf{k}) + \xi_0)^{N+\frac{1}{2}}}{(E_i(\mathbf{k}) + \xi_0)^N} \tag{6.86}$$

La preuve de ce résultat nécessite le lemme suivant :

Lemme 6.34. *Soit $M \geq 1$ un entier et supposons que $V \in \mathcal{C}^{2M-1}(\mathbb{T}^3)$. Soit $\alpha \in \{1,2,3\}$. Alors pour tout $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0$, il existe deux constantes $c_{M,\xi_0} > 0$ et $c^{'}_{M,\xi_0} > 0$ telles que pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$:*

$$\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^M [p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-M}]\| \leq c_{M,\xi_0} \tag{6.87}$$

$$\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^M \phi (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-M}\| \leq c^{'}_{M,\xi_0}, \quad \phi \in \mathcal{C}^{2M}(\mathbb{T}^3) \tag{6.88}$$

où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme opérateur sur $L^2(\mathbb{T}^3)$.

Preuve Lemme 6.39.
Avant de commencer la preuve par récurrence, il est nécessaire de remarquer qu'étant donné le choix de ξ_0, il vient immédiatement :

$$\forall\, \mathbf{k} \in \Omega^*, \quad \|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}\| \leq c_{0,\xi_0}, \quad c_{0,\xi_0} := (E_0 + \xi_0)^{-1} > 0 \tag{6.89}$$

Initialisons la récurrence : cas où $M = 1$.
Vérifions d'abord que $\mathrm{Ran}([p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}]) = D(H(\mathbf{k})) = \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^3)$. Comme :

$$[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}] = (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}[(H(\mathbf{k}) + \xi_0), p_\alpha](H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}$$

avec $[(H(\mathbf{k}) + \xi_0), p_\alpha] = i\partial_\alpha V$, alors $[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}]L^2(\mathbb{T}^3) \to D(H(\mathbf{k}))$ et :

$$(H(\mathbf{k}) + \xi_0)[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}] = i(\partial_\alpha V)(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}$$

d'où :

$$\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}]\| \leq \|\partial_\alpha V\|_\infty c_{0,\xi_0} := c_{1,\xi_0}$$

D'autre part :

$$(H(\mathbf{k}) + \xi_0)\phi(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1} = \left\{ -\frac{1}{2}(\Delta\phi) + \mathbf{k}\cdot(i\nabla\phi) + \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2} + \xi_0\right)\phi \right\}\left(H(\mathbf{k}) + \xi_0\right)^{-1}$$

étant donné les hypothèses sur ϕ et le fait que Ω^* soit borné, il vient :

$$\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)\phi(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}\| \leq c^{'}_{1,\xi_0}$$

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang M et montrons le rang $M+1$.
(i) Pour la 1ère relation. Vérifions que $\mathrm{Ran}([p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-(M+1)}]) = D(H(\mathbf{k})^{M+1})$.

$$[p_\alpha, (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}] = (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[p_\alpha, (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}] + [p_\alpha, (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M} \tag{6.90}$$

Le premier terme dans le membre de droite de (6.90) peut s'écrire encore :

$$(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}] = (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M},p_\alpha](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}$$
$$= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]$$

comme par hypothèse de récurrence $(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]$ est borné, il s'ensuit que $(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]L^2(\mathbb{T}^3)\rightarrow D(H(\mathbf{k})^{M+1})$.
Quant au second terme dans le membre de droite de (6.90) :

$$\begin{aligned}&[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}](H(\mathbf{k})+\xi_0)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M-1}\\ &\qquad= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[(H(\mathbf{k})+\xi_0),p_\alpha](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M-1}\\ &\qquad= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}(i\partial_\alpha V)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\end{aligned}$$

puisque $\partial_\alpha V\in\mathcal{C}^{2M}(\mathbb{T}^3)$, par hypothèse de récurrence, $(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}(i\partial_\alpha V)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}$ est borné. Ainsi $[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}L^2(\mathbb{T}^3)\rightarrow D(H(\mathbf{k})^{M+1})$.
On peut donc multiplier à gauche par $(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+1}$ de chaque côté de l'égalité (6.90) :

$$\begin{aligned}&(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+1}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}]\\ &= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]+i(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}(\partial_\alpha V)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence donne l'existence de $c_{M+1,\xi_0}>0$ indépendante de $\mathbf{k}$ telle que :

$$\|(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+1}[p_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}]\|\leq c_{M+1,\xi_0},\quad c_{M+1,\xi_0}:=c_{M,\xi_0}+c'_{M,\xi_0}c_{0,\xi_0}>0$$

(ii) Pour la 2nde relation. Développons $\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}$ à l'aide de commutateurs :

$$\begin{aligned}\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)} &= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}\phi+[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}]\\ &= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}\phi+(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}]+\\ &+[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\end{aligned}$$

et par l'utilisation des doubles commutateurs :

$$\begin{aligned}\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)} &= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}\phi+(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}]+\\ &+(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]-[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1},[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]]\end{aligned}\tag{6.91}$$

Pour le dernier terme de (6.91), l'identité de Jacobi donne :

$$\begin{aligned}&[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1},[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]]\\ &\qquad= [(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}]]\\ &\qquad= [(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[(H(\mathbf{k})+\xi_0),\phi](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}]\\ &\qquad= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\big[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},[H(\mathbf{k}),\phi]\big](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\end{aligned}$$

et puisque :

$$[H(\mathbf{k}),\phi]=\sum_{\gamma=1}^{3}(\partial_\gamma\phi)p_\gamma+\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{3}(\partial_\gamma^2\phi)+i\sum_{\gamma=1}^{3}k_\gamma(\partial_\gamma\phi)$$

alors $[H(\mathbf{k}),\phi]$ peut se mettre sous la forme : $\sum_{\gamma=1}^{3} f_\gamma p_\gamma + g$, où $f_\gamma := \partial_\gamma \phi$ et g contient au plus des dérivées partielles de ϕ d'ordre 2. Ainsi :

$$(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},[H(\mathbf{k}),\phi]](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1} =$$
$$(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\left\{\sum_{\gamma=1}^{3}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}, f_\gamma p_\gamma](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}+[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},g](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\right\}$$

et (6.91) devient alors :

$$\begin{aligned}\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)} &= (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}\Big\{\phi+(H(\mathbf{k})+\xi_0)[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}]+\\ &+(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[\phi,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]+(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},g](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}+\\ &+\sum_{\gamma=1}^{3}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}, f_\gamma p_\gamma](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\Big\}\end{aligned} \tag{6.92}$$

Vérifions à partir de l'identité (6.92) que $\mathrm{Ran}(\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}) = D(H(\mathbf{k})^{M+1})$. Il suffit de vérifier que chaque opérateur entre accolades est borné. Via l'hypothèse de récurrence et le fait que $g \in \mathcal{C}^{2M}(\mathbb{T}^3)$, les 4 premiers termes sont bornés (uniformément en $\mathbf{k}$). Utilisant ensuite l'identité :

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma=1}^{3}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}, f_\gamma p_\gamma](H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1} =\\ &\qquad\sum_{\gamma=1}^{3}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}, f_\gamma]p_\gamma(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}+\\ &+\sum_{\gamma=1}^{3}\{(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}f_\gamma(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}\}\{(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M}[(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M},p_\gamma]\}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\end{aligned}$$

et le fait que $f_\gamma \in \mathcal{C}^{2M}(\mathbb{T}^3)$, via l'hypothèse de récurrence, l'opérateur ci-dessus est également borné (uniformément en $\mathbf{k}$). On peut donc multiplier à gauche par $(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+1}$ de chaque côté de l'égalité (6.92). L'hypothèse de récurrence donne finalement l'existence d'une constante $c'_{M+1,\xi_0} > 0$ indépendante de $\mathbf{k}$ telle que :

$$\|(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{M+1}\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-(M+1)}\| \leq c'_{M+1,\xi_0}$$

ce qui achève la preuve.

■

Remarque 6.35. Dans la preuve ci-dessus, on a démontré en particulier que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-M}]L^2(\mathbb{T}^3) \to D(H(\mathbf{k})^M)$.

Remarque 6.36. Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, les assertions (6.87) et (6.88) peuvent être remplacées (affaiblies) par :

$$\begin{aligned}\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq N \leq M, \quad &\|(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{N}[p_\alpha+k_\alpha,(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-N}]\| \leq c_{N,\xi_0}\\ &\|(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{N}\phi(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-N}\| \leq c'_{N,\xi_0}, \quad \phi \in \mathcal{C}^{2M}(\mathbb{T}^3)\end{aligned}$$

Preuve Proposition 6.33.
Soient $N, M \geq 1$ des entiers tels que $1 \leq N \leq M$. Soit $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0$.
A partir de (6.31) :

$$\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})(E_i(\mathbf{k})+\xi_0)^N = \langle (H(\mathbf{k})+\xi_0)^N u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (p_\alpha + k_\alpha)u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle, \quad \mathbf{k} \in \Omega^*$$
$$\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})\frac{1}{(E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^N} = \langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (p_\alpha + k_\alpha)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-N} u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle, \quad \mathbf{k} \in \Omega^*$$

Il en résulte immédiatement :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})\frac{(E_i(\mathbf{k})+\xi_0)^N}{(E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^N} &= \langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (H(\mathbf{k})+\xi_0)^N(p_\alpha + k_\alpha)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-N} u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle \\ &= \hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k}) + \langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (H(\mathbf{k})+\xi_0)^N[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-N}] u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle \end{aligned} \tag{6.93}$$

où on a utilisé que $[p_\alpha + k_\alpha, (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-N}]L^2(\mathbb{T}^3) \to D(H(\mathbf{k})^N)$ (cf. Remarque 6.35).
Majorons le premier terme dans le membre de droite de (6.93).
En utilisant d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})| &= |\langle u_i(\cdot\,;\mathbf{k}), (p_\alpha + k_\alpha)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-\frac{1}{2}}(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{\frac{1}{2}} u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle| \\ &\leq (E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^{\frac{1}{2}}\|(p_\alpha + k_\alpha)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-\frac{1}{2}} u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\|\end{aligned}$$

puis la succession d'estimation :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\sum_{\alpha=1}^{3}(p_\alpha+k_\alpha)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-\frac{1}{2}}u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\right\| &= \left\langle \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}(p_\alpha+k_\alpha)^2(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}u_j(\cdot\,;\mathbf{k}), u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\right\rangle \\ &\leq \langle H(\mathbf{k})(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}u_j(\cdot\,;\mathbf{k}), u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle + |\langle V(\cdot\,)(h(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}u_j(\cdot\,;\mathbf{k}), u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle| \\ &\leq 1 + (|\xi_0| + \|V\|_\infty)\|(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}\|\end{aligned}$$

Il vient par l'intermédiaire de (6.89), l'estimation uniforme en $\mathbf{k}$:

$$|\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})| \leq C_{0,\xi_0}(E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^{\frac{1}{2}}, \quad C_{0,\xi_0} := \sqrt{2}\big(1 + (|\xi_0| + \|V\|_\infty)c_{0,\xi_0}\big)^{\frac{1}{2}} \tag{6.94}$$

Maintenant en utilisant (6.94) et (6.87), puis via la Remarque 6.36 ; de (6.93) on obtient :

$$|\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})| \leq C_{0,\xi_0}\frac{(E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^{N+\frac{1}{2}}}{(E_i(\mathbf{k})+\xi_0)^N} + c_{N,\xi_0}\frac{(E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^N}{(E_i(\mathbf{k})+\xi_0)^N}$$

Quitte à choisir ξ_0 assez grand pour que $E_0 + \xi_0 > 1$, avec $C_{N,\xi_0} := C_{0,\xi_0} + c_{N,\xi_0} > 0$:

$$|\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})| \leq C_{N,\xi_0}\frac{(E_j(\mathbf{k})+\xi_0)^{N+\frac{1}{2}}}{(E_i(\mathbf{k})+\xi_0)^N} \tag{6.95}$$

On obtient (6.86) à partir de (6.95) en remarquant que :

$$\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k}) = \overline{\hat{\pi}_{j,i}(\alpha;\mathbf{k})} \quad \Longrightarrow \quad |\hat{\pi}_{i,j}(\alpha;\mathbf{k})| = |\hat{\pi}_{j,i}(\alpha;\mathbf{k})|$$

■

Remarque 6.37. (6.94) garantit que l'estimation (6.86) est encore valable pour $N = 0$.

6.3 Preuve du Théorème 6.31

Preuve (détaillée) de l'identité (6.80)

Soit $\mathcal{U}$ l'opérateur unitaire défini par (6.83) et $\mathcal{U}^*$ son adjoint défini par :

$$(\mathcal{U}^* g)(\underline{\mathbf{x}} + \boldsymbol{v}) := \frac{1}{|\Omega^*|^{\frac{1}{2}}} \int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v})} g(\underline{\mathbf{x}}; \mathbf{k}), \quad \underline{\mathbf{x}} \in \Omega,\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^3,\ g(\cdot\,; \mathbf{k}) \in L^2(\mathbb{T}^3)$$

Donnons maintenant un résultat démontré dans [18] (les hypothèses de ce résultat ne sont pas formulées telles quelles dans [18] bien qu'elles soient implicites) :

Proposition 6.38. *Soit $H_\infty = H_\infty(0)$ l'opérateur défini en (6.78). Soient $\mathcal{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée et $\mathcal{G}(H_\infty)$ l'opérateur (défini par le calcul fonctionnel) borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Soit $\mathcal{U}\mathcal{G}(H_\infty)\mathcal{U}^* = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathcal{G}(H(\mathbf{k}))$ la décomposition en intégrale directe où pour chaque $\mathbf{k} \in \Omega^*$, l'opérateur fibré $\mathcal{G}(H(\mathbf{k}))$ est borné sur $L^2(\mathbb{T}^3)$.*
Supposons que $\mathcal{G}(H_\infty)$ soit un opérateur intégral et que son noyau $\mathcal{G}_{H_\infty}(\cdot\,,\cdot)$ vérifie :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, |\mathcal{G}_{H_\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y})| < +\infty, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{x}\, |\mathcal{G}_{H_\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y})| < +\infty$$
$$|\mathcal{G}_{H_\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y})| = \mathcal{O}\big(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-3-\epsilon}\big),\ \epsilon > 0 \quad \textit{lorsque } |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \to +\infty$$

Alors l'opérateur fibré $\mathcal{G}(H(\mathbf{k}))$ est un opérateur intégral dans le sens :

$$\forall\, \varphi(\cdot\,;\mathbf{k}) \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad \big(\mathcal{G}(H(\mathbf{k}))\varphi(\cdot\,;\mathbf{k})\big)(\underline{\mathbf{x}}) = \int_\Omega \mathrm{d}\underline{\mathbf{y}}\, \mathcal{G}_{H(\mathbf{k})}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})\varphi(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) \quad \textit{p.p. tout } \underline{\mathbf{x}} \in \Omega$$

Son noyau intégral $\mathcal{G}_{H(\mathbf{k})}(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k})$ vérifie :

$$\textit{p.p. tout } (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega, \quad \mathcal{G}_{H(\mathbf{k})}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^3} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v}-\underline{\mathbf{y}})} \mathcal{G}_{H_\infty}(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{v},\underline{\mathbf{y}})$$

et on a la relation réciproque :

$$\textit{p.p. tout } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3, \quad \mathcal{G}_{H_\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega^*} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \mathcal{G}_{H(\mathbf{k})}(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{k})$$

Si en plus $\mathcal{G}_{H_\infty}(\cdot\,,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ alors $\mathcal{G}_{H(\mathbf{k})}(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k})$ peut être prolongé en une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

Par l'intermédiaire de la Proposition 6.38, on montre que la famille d'opérateurs définis en (6.81) est décomposable en intégrale directe $\mathcal{U}\mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_n}\mathcal{U}^* = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_n}(\mathbf{k})$, où pour $\mathbf{k} \in \Omega^*$, l'opérateur fibré s'écrit :

$$\mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_n}(\mathbf{k}) := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H(\mathbf{k})-\xi)^{-m} \prod_{\nu=1}^{n} (p_{\alpha_\nu} + k_{\alpha_\nu})(H(\mathbf{k})-\xi)^{-m_\nu} \tag{6.96}$$

De plus $\big\{\mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_n}(\mathbf{k})\big\}_{\mathbf{k}\in\Omega^*}$ est une famille d'opérateurs intégraux bornés sur $L^2(\mathbb{T}^3)$. Chaque noyau intégral $\mathcal{W}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{m,m_1,\dots,m_n}(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k}) : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ est continu et peut être prolongé en une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Ce noyau s'écrit au sens des distributions :

$$\mathcal{W}^{m,m_1,\dots,m_n}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) \cdot \left\{ \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{u_{j_1}(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^m} \sum_{j_2=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)^{m_1}} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{j_{n-1},j_n}(\alpha_{n-1};\mathbf{k})}{(E_{j_n}(\mathbf{k})-\xi)^{m_{n-1}}} \sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})}{(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi)^{m_n}} \overline{u_{j_{n+1}}(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})} \right\},\ (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega,\ \mathbf{k}\in\Omega^* \tag{6.97}$$

où on a utilisé la représentation spectrale pour le noyau intégral de $(H(\mathbf{k})-\xi)^{-\nu}$:

$$(H(\mathbf{k})-\xi)^{-\nu}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(E_j(\mathbf{k})-\xi)^{\nu}} u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})} \quad (\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{y}} \text{ si } \nu = 1)$$

On va procéder maintenant en 5 étapes.

__Etape 1__ : Application de la transformation unitaire à $\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, $n \geq 1$, dans (6.80).

A partir de (6.81), (6.80) s'écrit : $\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\beta,\mu) = \frac{1}{|\Omega|}\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\{\chi_\Omega \mathcal{W}^{m,\overbrace{1,\dots,1}^{n \text{ fois}}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\}$.
En vertu de (6.97), pour $\mathbf{k} \in \Omega^*$, l'opérateur fibré $\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{k})$ s'écrit :

$$\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{k}) := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H(\mathbf{k})-\xi)^{-m} \prod_{\nu=1}^{n} (p_{\alpha_\nu}+k_{\alpha_\nu})(H(\mathbf{k})-\xi)^{-1} \tag{6.98}$$

__Etape 2__ : Intégration par parties par rapport à la variable ξ dans (6.98).

On a besoin du lemme suivant dont la preuve est donnée en annexe :

__Lemme__ **6.39.** *Soient $\beta > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Soit $\xi \mapsto \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) := \ln\left(1+\mathrm{e}^{\beta(\mu-\xi)}\right)$ la fonction holomorphe sur le domaine $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{+1}$ (cf. Lemme 1.38). Alors toute primitive $\mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\cdot)$ d'ordre $Q \in \mathbb{N}^*$ de $\mathfrak{f}(\beta,\mu;\cdot)$, i.e. $\frac{\partial^Q \mathfrak{f}_Q}{\partial\xi^Q}(\beta,\mu;\xi) = \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)$, est holomorphe sur $\mathfrak{C}$.*
De plus, parmi toutes les primitives d'ordre Q de $\mathfrak{f}(\beta,\mu;\cdot)$, on peut toujours en choisir une exponentiellement décroissante sur le contour γ (1.58) (avec $\omega = 0$), i.e. il existe $\hat{\mathfrak{f}}_Q(\beta,\mu;\cdot)$ et il existe une constante $d_Q(\beta,\mu) > 0$ telle que :

$$\forall\, \xi \in \gamma, \quad |\hat{\mathfrak{f}}_Q(\beta,\mu;\xi)| \leq d_Q(\beta,\mu)\mathrm{e}^{-\beta|\xi|} \tag{6.99}$$

Et il existe une constante $D_Q(\beta,\mu) > 0$ telle que :

$$\int_\gamma |\mathrm{d}\xi|\, |\hat{\mathfrak{f}}_Q(\beta,\mu;\xi)| \leq D_Q(\beta,\mu) < +\infty \tag{6.100}$$

Soit $Q \in \mathbb{N}^*$ choisi assez grand. En intégrant par parties Q fois par rapport à ξ dans (6.98), l'opérateur fibré $\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{k})$ s'écrit comme une combinaison linéaire finie :

$$\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{k}) = (-1)^Q \sum_{\substack{q_1+\dots+q_{n+1}=Q \\ q_k \in \mathbb{N}}} C_{q_1,\dots,q_{n+1}} \mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\dots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{k})$$

où, avec la condition $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n+1} = Q$:

$$\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\mathbf{k}) = \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\xi)(H(\mathbf{k})-\xi)^{-(m+q_1)} \prod_{\nu=1}^{n} (p_{\alpha_\nu}+k_{\alpha_\nu})(H(\mathbf{k})-\xi)^{-(1+q_{\nu+1})}$$

et où $\mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\cdot\,)$ est une primitive d'ordre Q de $\mathfrak{f}(\beta,\mu;\cdot\,)$ choisie exponentiellement décroissante sur le contour γ (cf. Lemme 6.39). Le noyau intégral de $\mathcal{W}^{m,1,\ldots,1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\mathbf{k})$ s'écrit alors :

$$\mathcal{W}^{m,1,\ldots,1}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = (-1)^Q \sum_{\substack{q_1+\cdots+q_{n+1}=Q \\ q_k\in\mathbb{N}}} C_{q_1,\ldots,q_{n+1}} \mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) \qquad (6.101)$$

où en vertu de (6.97), au sens des distributions :

$$\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)\cdot \Bigg\{ \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{u_{j_1}(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+q_1}} \cdot$$
$$\cdot \sum_{j_2=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})}{(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)^{1+q_2}} \cdots \sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} \frac{\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})}{(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi)^{1+q_{n+1}}} \overline{u_{j_{n+1}}(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})} \Bigg\},\ (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega \qquad (6.102)$$

Remarque 6.40. Soit $\mathcal{N} \in \mathbb{N}^*$. Pour assurer l'existence d'un indice $q_l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n+1$, vérifiant $q_l \geq \mathcal{N}$ dans chaque terme $\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\mathbf{k})$, Q doit vérifier :

$$Q = q_1 + \cdots + q_{n+1} \geq \mathcal{N}\cdot(n+1)$$

Etape 3 : Réécriture du noyau intégral $\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k})$ défini en (6.102).

Ici on choisit Q (la raison sera claire par la suite) de telle sorte que :

$$Q \geq (3n+3)\cdot(n+1) \qquad (6.103)$$

Compte-tenu de la Remarque 6.40, pour chaque terme $\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\mathbf{k})$, il existe un indice $q_l \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq l \leq n+1$, vérifiant $q_l \geq 3n+3$. Il s'ensuit alors que chaque noyau intégral $\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k})$ dans (6.101) vérifie l'un des 3 cas suivants :
Cas 1 : il existe un indice $q_l \in \mathbb{N}$, avec $2 \leq l \leq n$, vérifiant $q_l \geq 3n+3$
Cas 2 : $q_{n+1} \geq 3n+3$ et tous les autres indices vérifient : $q_1,\ldots,q_n < 3n+3$
Cas 3 : $q_1 \geq 3n+3$ et tous les autres indices vérifient : $q_2,\ldots,q_{n+1} < 3n+3$

Dans les 3 cas énoncés ci-dessus, on démontre :

Proposition 6.41. *Pour* $\mathbf{k} \in \Omega^*$, *soit* $\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k}) : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ *le noyau défini en* (6.102). *Alors sous l'hypothèse supplémentaire* $V \in \mathcal{C}^R(\mathbb{T}^3)$, *avec* $R \geq 6n-1$:

$$\mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} u_{j_1}(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\cdot \hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k}) \cdots$$
$$\cdots \hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})\cdot \overline{u_{j_{n+1}}(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})} \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+q_1}\cdots(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi)^{1+q_{n+1}}} \qquad (6.104)$$

De plus, la fonction $\Omega\times\Omega \ni (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \mapsto \mathcal{W}^{m+q_1,1+q_2,\ldots,1+q_{n+1}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})$ *est continue.*

La preuve de la Proposition 6.41 nécessite les 3 résultats intermédiaires suivants (les preuves de ces résultats se situent en annexe).

Lemme 6.42. *Soient $j \geq 1$ un entier et $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0 := \inf \sigma\big(H_\infty(0)\big)$. Soit $u_j(\cdot\,;\mathbf{k})$ le vecteur propre normalisé à l'unité associé à la valeur propre $E_j(\mathbf{k})$. Alors il existe une constante $e_{\xi_0} > 0$ tel que uniformément en j et en $\mathbf{k}$:*

$$\forall\, \underline{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad |u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})| \leq e_{\xi_0}\big(E_j(\mathbf{k}) + \xi_0\big) \tag{6.105}$$

Lemme 6.43. *Soient $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0$ assez grand et $w > \frac{3}{2}$ un réél. Alors la série $\sum_{j\geq 1}\big(E_j(\mathbf{k})+\xi_0\big)^{-w}$ est absolument convergente, i.e. il existe une constante $f_{\xi_0,w} > 0$ tel que pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(E_j(\mathbf{k}) + \xi_0)^w} \leq f_{\xi_0,w} < +\infty \tag{6.106}$$

Lemme 6.44. *Soient $\beta > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\cdot\,)$ une primitive d'ordre $Q' \in \mathbb{N}^*$ de $\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)$ choisie exponentiellement décroissante (cf. Lemme 6.39). Alors pour tout $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0$ choisi suffisamment grand et pour tout entier $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \geq 1$, il existe une constante $G_{\xi_0}(\beta,\mu) > 0$ tel que pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$ et pour $j_k \in \mathbb{N}^*$ $(1 \leq k \leq n+1)$:*

$$\int_\gamma |\mathrm{d}\xi|\, \frac{|\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_{j_1}(\mathbf{k}) - \xi|^{\alpha_1} \cdots |E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) - \xi|^{\alpha_{n+1}}} \leq G_{\xi_0}(\beta,\mu)(E_{j_k}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n+1 \tag{6.107}$$

Preuve Proposition 6.41.
Soit J le multi-indice $J := (j_1, \dots, j_{n+1})$. Il suffit de prouver l'existence d'une constante $C(\beta,\mu) > 0$ uniforme en $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \Omega$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$ telle que :

$$\sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} |a_J(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})| \leq C(\beta,\mu) < +\infty \tag{6.108}$$

où $\{a_J(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k})\}_{J\geq 1}$ désigne la suite de fonctions définie par :

$$\begin{aligned} a_J(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) &:= u_{j_1}(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k}) \cdot \hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k}) \cdots \hat{\pi}_{j_l,j_{l+1}}(\alpha_l;\mathbf{k}) \cdots \hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k}) \cdot \overline{u_{j_{n+1}}(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})} \cdot \\ &\cdot \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k}) - \xi)^{m+q_1} \cdots (E_{j_l}(\mathbf{k}) - \xi)^{1+q_l} \cdots (E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) - \xi)^{1+q_{n+1}}}, \ (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega \times \Omega \end{aligned}$$

En utilisant (6.105) (cf. Lemme 6.42), il existe une constante $c_{\xi_0} > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |a_J(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})| &\leq c_{\xi_0}(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})| \cdots |\hat{\pi}_{j_l,j_{l+1}}(\alpha_l;\mathbf{k})| \cdots |\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})| \cdot \\ &\cdot (E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0) \cdot \int_\gamma |\mathrm{d}\xi|\, \frac{|\mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\xi)|}{|E_{j_1}(\mathbf{k}) - \xi|^{m+q_1} \cdots |E_{j_l}(\mathbf{k}) - \xi|^{1+q_l} \cdots |E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) - \xi|^{1+q_{n+1}}} \end{aligned} \tag{6.109}$$

On distingue maintenant les 3 cas énoncés au début de l'étape 3.

<u>Cas 1</u> : il existe un indice q_l parmi $q_2, \dots, q_n$ vérifiant $q_l \geq 3n + 3$.

A partir de (6.109), par l'intermédiaire de (6.107) (cf. Lemme 6.44) appliqué à $\alpha_k := 1 + q_l$, il existe une autre constante $c_{\xi_0}(\beta, \mu) > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}\left|a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})\right| \leq c_{\xi_0}(\beta; \mu)(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1; \mathbf{k})| \cdots (E_{j_l}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-(1+q_l)}\cdot \\ \cdot |\hat{\pi}_{j_{l-1},j_l}(\alpha_{l-1}; \mathbf{k})||\hat{\pi}_{j_l,j_{l+1}}(\alpha_l; \mathbf{k})| \cdots\cdots |\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n; \mathbf{k})|(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)\end{aligned}$$

Supposons un instant que $V \in \mathcal{C}^M(\mathbb{T}^3)$, $M \geq 1$ grand, afin de pouvoir utiliser (6.86) : pour tout entier $r_1, \ldots, r_n \geq 1$, il existe une autre constante $c_{\xi_0}(\beta, \mu) > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}|a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq c_{\xi_0}(\beta, \mu)(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)\frac{(E_{j_2}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_1+\frac{1}{2}}}{(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_1}} \cdots \frac{(E_{j_l}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_{l-1}+\frac{1}{2}}}{(E_{j_{l-1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_{l-1}}}\cdot \\ \cdot (E_{j_l}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-(1+q_l)}\frac{(E_{j_l}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_l+\frac{1}{2}}}{(E_{j_{l+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_l}} \cdots \frac{(E_{j_n}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{r_n+\frac{1}{2}}}{\big(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0\big)^{r_n}}(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0) \quad (6.110)\end{aligned}$$

Choisissons les entiers $r_1, \ldots, r_{l-1}, r_l, \ldots r_n$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} r_1 - 1 > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_1 > \frac{5}{2} \\ &\vdots \\ r_{l-1} - r_{l-2} - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_{l-1} > 2 + r_{l-2} \\ r_n - 1 > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_n > \frac{5}{2} \\ &\vdots \\ r_l - r_{l+1} - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad r_l > 2 + r_{l+1} \end{aligned}$$

avec q_l ayant été choisi suffisamment grand (en conséquence Q) afin d'assurer que :

$$1 + q_l - r_{l-1} - \frac{1}{2} - r_l - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad q_l > \frac{3}{2} + r_l + r_{l-1} \qquad (6.111)$$

Ainsi les plus petites valeurs entières qu'on puisse choisir pour $r_1, \ldots, r_n$ sont :

$$r_1 = 3 = r_n,\ \ldots,\ r_{l-1} = 3 \cdot (l-1),\ r_l = 3 \cdot (n - l + 1) \qquad (6.112)$$

Vu que q_l a été choisi comme $q_l \geq 3n+3$, (6.111) est vérifiée : $q_l > 3\cdot(n-l+1)+3\cdot(l-1)+\frac{3}{2}$.

Notons qu'une condition suffisante sur V garantissant la validité de (6.110) avec le choix d'entiers (6.112) est $V \in \mathcal{C}^R(\mathbb{T}^3)$, avec $R \geq 2 \cdot \max\big\{3(l-1), 3(n-l+1)\big\} - 1$, $2 \leq l \leq n$.

<u>Cas 2</u> : $q_{n+1} \geq 3n + 3$ et tous les autres indices vérifient $q_1, \ldots, q_n < 3n + 3$.

A partir de (6.109), par l'intermédiaire de (6.107) appliqué à $\alpha_k := 1 + q_{n+1}$, il existe une autre constante $c_{\xi_0}(\beta, \mu) > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\left|a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})\right| \leq c_{\xi_0}(\beta, K)\big(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0\big)\left|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1; \mathbf{k})\right|\left|\hat{\pi}_{j_2,j_3}(\alpha_2; \mathbf{k})\right| \cdots \\ \cdots \left|\hat{\pi}_{j_{n-1},j_n}(\alpha_{n-1}; \mathbf{k})\right|\left|\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n; \mathbf{k})\right|\big(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0\big)^{1-(1+q_{n+1})}\end{aligned}$$

Supposons un instant que $V \in \mathcal{C}^M(\mathbb{T}^3)$, $M \geq 1$ grand, afin de pouvoir utiliser (6.86) : pour tout entier $s_1, \cdots, s_n \geq 1$, il existe une autre constante $c_{\xi_0}(\beta, \mu) > 0$ telle que :

$$|a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq c_{\xi_0}(\beta, \mu)(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)\frac{(E_{j_2}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_1+\frac{1}{2}}}{(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_1}}\frac{(E_{j_3}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_2+\frac{1}{2}}}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_2}}\cdots$$
$$\cdots\frac{(E_{j_n}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_{n-1}+\frac{1}{2}}}{(E_{j_{n-1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_{n-1}}}\frac{(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_n+\frac{1}{2}}}{(E_{j_n}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{s_n}}(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-q_{n+1}} \quad (6.113)$$

Choisissons les entiers $s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
s_1 - 1 > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad s_1 > \frac{5}{2} \\
s_2 - s_1 - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad s_2 > 2 + s_1 \\
&\vdots \\
s_n - s_{n-1} - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad s_n > 2 + s_{n-1}
\end{aligned}$$

avec q_{n+1} ayant été chosisi suffisamment grand (en conséquence Q) afin d'assurer que :

$$q_{n+1} - s_n - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad q_{n+1} > 2 + s_n \quad (6.114)$$

Ainsi les plus petites valeurs entières qu'on puisse choisir pour $s_1, \ldots, s_n$ sont :

$$s_1 = 3, \ s_2 = 6, \ \ldots, \ s_{n-1} = 3(n-1), \ s_n = 3n \quad (6.115)$$

Vu que q_{n+1} a été choisi comme $q_{n+1} \geq 3n + 3$, (6.114) est vérifiée : $q_{n+1} > 3n + 2$.

Notons qu'une condition suffisante sur V garantissant la validité de la majoration (6.113) avec le choix d'entiers (6.115) est : $V \in \mathcal{C}^R(\mathbb{T}^3)$, avec $R \geq 2 \cdot 3n - 1$.

<u>Cas 3</u> : $q_1 \geq 3n + 3$ et tous les autres indices vérifient $q_2, \ldots, q_{n+1} < 3n + 3$.

A partir de (6.109), par l'intermédiaire de (6.107) (cf. Lemme 6.44) appliqué à $\alpha_k := m + q_1$, il existe une autre constante $c_{\xi_0}(\beta, \mu) > 0$ telle que :

$$|a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq c_{\xi_0}(\beta, \mu)(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{1-m-q_1}|\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1; \mathbf{k})||\hat{\pi}_{j_2,j_3}(\alpha_2; \mathbf{k})|\cdots$$
$$\cdots|\hat{\pi}_{j_{n-1},j_n}(\alpha_{n-1}; \mathbf{k})||\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n; \mathbf{k})|(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)$$

Supposons un instant que $V \in \mathcal{C}^M(\mathbb{T}^3)$, $M \geq 1$ grand, afin de pouvoir utiliser (6.86) : pour tout entier $t_1, \cdots, t_n \geq 1$, il existe une autre constantes $c_{\xi_0}(\beta, \mu) > 0$ telle que :

$$|a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq c_{\xi_0}(\beta, \mu)(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{1-m-q_1}\frac{(E_{j_1}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_1+\frac{1}{2}}}{(E_{j_2}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_1}}\frac{(E_{j_2}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_2+\frac{1}{2}}}{(E_{j_3}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_2}}\cdots$$
$$\cdots\frac{(E_{j_{n-1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_{n-1}+\frac{1}{2}}}{(E_{j_n}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_{n-1}}}\frac{(E_{j_n}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_n+\frac{1}{2}}}{(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{t_n}}(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k}) + \xi_0) \quad (6.116)$$

Choisissons les entiers $t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} t_n - 1 > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad t_n > \frac{5}{2} \\ t_{n-1} - t_n - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad t_{n-1} > 2 + t_n \\ &\vdots \\ t_1 - t_2 - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad t_1 > 2 + t_2 \end{aligned}$$

avec q_1 ayant été choisi suffisamment grand (en conséquence Q) afin d'assurer que :

$$q_1 + m - 1 - t_1 - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad q_1 + m > t_1 + 3 \tag{6.117}$$

Ainsi les plus petites valeurs entières qu'on puisse choisir pour $t_n, \ldots, t_1$ sont :

$$t_n = 3,\ t_{n-1} = 6,\ \ldots,\ t_2 = 3(n-1),\ t_1 = 3n \tag{6.118}$$

Vu que q_1 a été choisi comme $q_1 \geq 3n + 3$, (6.117) est vérifiée : $q_1 > 3n + 2$.

Notons qu'une condition suffisante sur V garantissant la validité de la majoration (6.116) avec le choix d'entiers (6.118) est : $V \in \mathcal{C}^R(\mathbb{T}^3)$, avec $R \geq 2 \cdot 3n - 1$.

Conclusion de l'étape 3 :

En vertu du Lemme 6.43, dans chacun des 3 cas ci-dessus, le choix des entiers (6.112) (pour le cas 1), (6.115) (cas 2) et (6.118) (cas 3) assure la convergence de chacune des séries $\sum_{j_i \geq 1} (E_{j_i}(\mathbf{k}) + \xi_0)^{p_i}$, $1 \leq i \leq n+1$. Par (6.106), il vient finallement l'existence d'une constante $C(\beta, \mu) > 0$ uniforme en $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \Omega$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$ telle que :

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{J=1}^{N} |a_J(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq C(\beta, \mu) \tag{6.119}$$

Ainsi l'inégalité (6.108) est vérifiée. Le théorème de Fubini assure alors l'intervertion de l'intégrale avec les séries dans (6.102), d'où (6.104). Et puisque $\mathcal{W}^{m+q_1, 1+q_2, \ldots, 1+q_{n+1}}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\cdot\,, \cdot\,; \mathbf{k})$ est limite uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{J \geq 1} a_J(\cdot\,, \cdot\,; \mathbf{k})$, alors $\Omega \times, \Omega \ni (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \mapsto \mathcal{W}^{m+q_1, 1+q_2, \ldots, 1+q_{n+1}}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})$ est continue.

■

Remarque 6.45. Puisque dans les 3 cas ci-dessus l'inégalité (6.108) est vérifiée, on déduit :

$$|\mathcal{W}^{m+q_1, 1+q_2, \ldots, 1+q_{n+1}}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq C(\beta, \mu), \quad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \in \Omega \times \Omega,\ \mathbf{k} \in \Omega^* \tag{6.120}$$

Etape 4 : Réécriture du noyau intégral $\mathcal{W}^{m,1,\ldots,1}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\cdot\,, \cdot\,; \mathbf{k})$.

A partir de (6.101), l'application $(\Omega \times \Omega) \ni (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \mapsto \mathcal{W}^{m,1,\ldots,1}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})$ est continue comme combinaison linéaire finie de fonctions continues (cf. Proposition 6.41). Et via (6.82), il existe une autre constante $C(\beta, \mu) > 0$ uniforme en $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \Omega$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$ telle que :

$$|A^{m,1,\ldots,1}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}; \mathbf{k})| \leq C(\beta, \mu), \quad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \in \Omega \times \Omega,\ \mathbf{k} \in \Omega^* \tag{6.121}$$

En insérant (6.104) dans (6.101), on obtient :

$$\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} u_{j_1}(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\cdot\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})\cdots\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})\cdot\overline{u_{j_{n+1}}(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}\cdot$$
$$\cdot\left\{(-1)^Q\int_\gamma \mathrm{d}\xi\,\mathfrak{f}_Q(\beta,\mu;\xi)\cdot\sum_{\substack{q_1+\dots+q_{n+1}=Q\\ q_k\in\mathbb{N}}}\frac{C_{q_1,\dots,q_{n+1}}}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+q_1}\cdots(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi)^{1+q_{n+1}}}\right\} \tag{6.122}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des résidus deux fois, et (6.122) se réduit à :

$$\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} u_{j_1}(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\cdot\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})\cdots\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})\cdot\overline{u_{j_{n+1}}(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}\cdot$$
$$\cdot\int_\gamma \mathrm{d}\xi\,\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^m(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)\cdots(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi)},\quad (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}})\in\Omega\,\mathrm{x}\,\Omega,\ \mathbf{k}\in\Omega^*$$

Etape 5 : Fin de la preuve.

Utilisons les résultats de la Proposition 6.38 pour relier le noyau intégral de l'opérateur $\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ au noyau intégral de l'opérateur fibré $\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{k}),\quad (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^3\,\mathrm{x}\,\mathbb{R}^3 \tag{6.123}$$

En utilisant la majoration uniforme (6.121), on déduit de (6.123) que $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est continue par application du théorème de continuité sous le signe intégrale.

Partant de (6.123) et utilisant la continuité de $\mathbb{R}^3\ni\mathbf{x}\mapsto\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{x})$, (6.80) s'écrit :

$$\mathcal{J}^m_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(\beta,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\mathbf{k}) \tag{6.124}$$

Enfin, par l'intermédiaire de la majoration uniforme en $\mathbf{x}$ (6.121), le théorème de Fubini assure l'intervertion des séries avec les intégrales :

$$\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\int_\Omega\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\mathbf{k}) = \sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_{n+1}=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\left(\int_\Omega\mathrm{d}\mathbf{x}\,\overline{u_{j_{n+1}}(\mathbf{x};\mathbf{k})}u_{j_1}(\mathbf{x};\mathbf{k})\right)\cdot$$
$$\cdot\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})\cdot\dots\cdot\hat{\pi}_{j_n,j_{n+1}}(\alpha_n;\mathbf{k})\cdot\int_\gamma\mathrm{d}\xi\,\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^m(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)\cdots(E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi)}$$

Puis via l'identité $\langle u_{j_{n+1}}(\cdot\,;\mathbf{k}),u_{j_1}(\cdot\,;\mathbf{k})\rangle = \delta_{j_{n+1},j_1}$ (symbole de Kronecker), il vient :

$$\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\int_\Omega\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{W}^{m,1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathbf{x},\mathbf{x};\mathbf{k}) = \sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_n=1}^{\infty}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\,\hat{\pi}_{j_1,j_2}(\alpha_1;\mathbf{k})\cdots\hat{\pi}_{j_n,j_1}(\alpha_n;\mathbf{k})\cdot$$
$$\cdot\int_\gamma\mathrm{d}\xi\,\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi)^{m+1}(E_{j_2}(\mathbf{k})-\xi)\cdots(E_{j_n}(\mathbf{k})-\xi)} \tag{6.125}$$

En insérant (6.125) dans (6.124), on obtient (6.85).

■

Preuve succinte de (6.84)

Par l'intermédiaire de la Proposition 6.38, l'opérateur défini en (6.82) est décomposable en intégrale directe $\mathcal{U}\mathcal{W}_0^m\mathcal{U}^* = \int_{\Omega^*}^{\oplus} \mathrm{d}\mathbf{k}\, \mathcal{W}_0^m(\mathbf{k})$, où pour $\mathbf{k} \in \Omega^*$, l'opérateur fibré s'écrit :

$$\mathcal{W}_0^m(\mathbf{k}) := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)(H(\mathbf{k}) - \xi)^{-m} \tag{6.126}$$

De plus $\left\{\mathcal{W}_0^m(\mathbf{k})\right\}_{\mathbf{k}\in\Omega^*}$ est une famille d'opérateurs intégraux bornés sur $L^2(\mathbb{T}^3)$. Chaque noyau intégral $\mathcal{W}_0^m(\cdot\,,\cdot\,;\mathbf{k}) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ est continu et peut être prolongé en une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Ce noyau s'écrit au sens des distributions :

$$\mathcal{W}_0^m(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) := \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi) \cdot \sum_{j=1}^\infty \frac{u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)^m}, \quad (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega,\ \mathbf{k}\in\Omega^* \tag{6.127}$$

<u>Cas où $1 \leq m \leq 3$</u> :

On commence par faire $(4-m)$ intégration par parties par rapport à ξ dans (6.126) :

$$\mathcal{W}_0^m(\mathbf{k}) = (-1)^{4-m}\frac{3!}{(m-1)!}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_{4-m}(\beta,\mu;\xi)(H(\mathbf{k}) - \xi)^{m+4-m} \tag{6.128}$$

où $\mathfrak{f}_{4-m}(\beta,\mu;\cdot\,)$ est une primitive d'ordre $4-m$ de $\mathfrak{f}(\beta,\mu;\cdot\,)$ exponentiellement décroissante. En vertu de (6.127), le noyau intégral de (6.128) s'écrit au sens des distributions :

$$\mathcal{W}_0^m(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = (-1)^{4-m}\frac{3!}{(m-1)!}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \mathfrak{f}_{4-m}(\beta,\mu;\xi)\cdot\sum_{j=1}^\infty \frac{u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)^4}, \quad (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega$$

En utilisant successivement (6.105) et (6.106), on montre l'existence d'une constante $C(\beta,\mu) > 0$ uniforme en $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \Omega$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$ telle que :

$$\sum_{j=1}^\infty |u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})||\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}| \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{|\mathfrak{f}_{4-m}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_j(\mathbf{k}) - \xi|^4} \leq C(\beta,\mu) < +\infty$$

Il s'ensuit alors que :

$$\mathcal{W}_0^m(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = (-1)^{4-m}\frac{3!}{(m-1)!}\sum_{j=1}^\infty u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}\cdot\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}_{4-m}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)^4} \tag{6.129}$$

Il reste à réécrire (6.129). Par une première application du théorème des résidus :

$$(-1)^{4-m}\frac{3!}{(m-1)!}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}_{4-m}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)^4} = (-1)^{4-m}\frac{3!}{(m-1)!}\frac{2i\pi}{3!}\frac{\partial^3\mathfrak{f}_{4-m}}{\partial\xi^3}(\beta,\mu;E_j(\mathbf{k}))$$

Suivi d'une seconde application, avec $(\partial_\xi^3\mathfrak{f}_{4-m})(\beta,\mu;E_j(\mathbf{k})) = (\partial_\xi^{m-1}\mathfrak{f})(\beta,\mu;E_j(\mathbf{k}))$:

$$(-1)^{4-2m}\left\{\frac{2i\pi}{(m-1)!}(-1)^m\frac{\partial^{m-1}\mathfrak{f}}{\partial\xi^{m-1}}(\beta,\mu;E_j(\mathbf{k}))\right\} = \int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k}) - \xi)^m}$$

il vient :

$$\mathcal{W}_0^m(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k})-\xi)^m}, \quad (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega,\ \mathbf{k}\in\Omega^*$$

<u>Cas où $m \geq 4$</u> :

A partir de (6.127), en utilisant successivement (6.105) et (6.106), on montre l'existence d'une autre constante $C(\beta,\mu) > 0$ uniforme en $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \Omega$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})||\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}|\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{|\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_j(\mathbf{k})-\xi|^m} \leq \hat{C}(\beta,\mu) < +\infty \tag{6.130}$$

Il s'ensuit alors que :

$$\mathcal{W}_0^m(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\underline{\mathbf{x}};\mathbf{k})\overline{u_j(\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\, \frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k})-\xi)^m}, \quad (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \in \Omega\times\Omega,\ \mathbf{k}\in\Omega^* \tag{6.131}$$

On vient donc de démontrer que (6.131) est valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. De plus, par (6.3) et (6.130), l'application $\Omega\times\Omega \ni (\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}}) \mapsto \mathcal{W}_0^m(\underline{\mathbf{x}},\underline{\mathbf{y}};\mathbf{k})$ est continue.

Pour conclure, il suffit de reprendre point par point la même méthode que celle utilisée dans l'étape 5 précédente. En particulier, on utilise que :

$$\mathcal{J}_0^m(\beta,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{W}_0^m(\mathbf{x},\mathbf{x};\mathbf{k})$$

puis que :

$$\int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathcal{W}_0^m(\mathbf{x},\mathbf{x};\mathbf{k}) = \int_{\Omega^*}\mathrm{d}\mathbf{k}\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}|u_j(\mathbf{x};\mathbf{k})|^2}_{=1}\int_\gamma \mathrm{d}\xi\,\frac{\mathfrak{f}(\beta,\mu;\xi)}{(E_j(\mathbf{k})-\xi)^m}$$

ce qui achève la preuve de (6.84).

■

6.4 Annexe

Preuve Lemme 6.39.
Soient $\beta > 0$ et $z := \mathrm{e}^{\beta\mu} \in (0,+\infty)$. Soit $\xi \mapsto \mathfrak{f}(\beta,z;\xi) = \ln(1+z\mathrm{e}^{-\beta\xi})$ la fonction holomorphe sur le domaine $\mathfrak{C}$ défini en (6.8). Soit γ le contour orienté positivement défini en (6.9), inclus dans $\mathfrak{C}$ et contournant la demi-droite $[E_0,+\infty)$. Par la suite, on posera $\eta = \eta(\beta) := \frac{\pi}{2\beta}$ et on utilisera la détermination principale du logarithme définie en (2.80).

On commence par prouver (6.99) et (6.100) pour $\mathfrak{f}(\beta,z;\cdot\,)$.
Soit $\Im\xi = \pm\eta$. Pour tout $\Re\xi \in [\delta,0]$ et pour tout $\Re\xi \in [0,+\infty)$ respectivement :

$$|\mathfrak{f}(\beta,z;\Re\xi \pm i\eta)| \leq (z+\pi)\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \leq (z+\pi)\mathrm{e}^{\beta(-2\delta+\eta)}\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$$
$$|\mathfrak{f}(\beta,z;\Re\xi \pm i\eta)| \leq 3z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \leq 3z\mathrm{e}^{\beta\eta}\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$$

Soit $\Re\xi = \delta$. Pour tout $\Im\xi \in [-\eta, \eta]$,

$$|\mathfrak{f}(\beta, z; \delta + i\Im\xi)| \leq (z + \pi \mathrm{e}^{\beta\delta})\mathrm{e}^{-\beta\delta} \leq (z + \pi \mathrm{e}^{\beta\delta})\mathrm{e}^{\beta(-2\delta+\eta)}\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$$

Ces trois estimations donnent l'existence d'une constante $d_0(\beta, z) > 0$ telle que pour tout $\xi \in \gamma$, $|\mathfrak{f}(\beta, z; \xi)| \leq d_0(\beta, z)\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$. Par des changements de variables adaptés, on prouve qu'il existe une constante $D_0(\beta, z) > 0$ telle que $\int_\gamma |\mathrm{d}\xi||\mathfrak{f}(\beta, z; \xi)| \leq D_0(\beta, z) < +\infty$.

Considérons les primitives d'ordre $Q \geq 1$ de $\mathfrak{C} \ni \xi \mapsto \mathfrak{f}(\beta, z_0; \xi)$ construites comme :

$$\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \xi) := \int_0^\xi \mathrm{d}u\, \mathfrak{f}(\beta, z; u) - \frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1} \ln(1 + zu_1) \tag{6.132}$$

$$\begin{aligned}\forall\, Q \geq 2, \quad \hat{\mathfrak{f}}_Q(\beta, z; \xi) := &\int_0^\xi \mathrm{d}u\, \hat{\mathfrak{f}}_{Q-1}(\beta, z; u) + \\ &+ \frac{(-1)^Q}{\beta^Q}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\int_0^{u_1}\frac{\mathrm{d}u_2}{u_2}\cdots\int_0^{u_{Q-1}}\frac{\mathrm{d}u_Q}{u_Q}\ln(1 + zu_Q)\end{aligned} \tag{6.133}$$

Pour tout $Q \geq 1$, les fonctions $\xi \mapsto \hat{\mathfrak{f}}_q(\beta, z; \xi)$ sont holomorphes sur $\mathfrak{C}$. Montrons maintenant que les constantes dans (6.132) et (6.133) ont été choisies de telle sorte que (6.99) et (6.100) soient vérifiées.

Cas Q=1. La primitive $\xi \mapsto \hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \xi)$ de $\mathfrak{f}(\beta, z; \cdot)$ définie en (6.132) s'écrit encore :

$$\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \xi) = \int_0^{\Re\xi} \mathrm{d}u\, \mathfrak{f}(\beta, z; u) - \frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\ln(1 + zu_1) + \int_{\Re\xi}^{\Re\xi + i\Im\xi} \mathrm{d}u\, \mathfrak{f}(\beta, z; u)$$

Par les changements de variable $X := \mathrm{e}^{-\beta u}$ dans la première intégrale et $Y := \frac{1}{i}(u - \Re\xi)$ dans la troisième :

$$\begin{aligned}&\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \xi)\\ &= -\frac{1}{\beta}\int_1^{\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}} \frac{\mathrm{d}X}{X}\ln(1 + zX) - \frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u_1}{u_1}\ln(1 + zu_1) + i\int_0^{\Im\xi} \mathrm{d}Y \ln(1 + z\mathrm{e}^{-\beta(\Re\xi + iY)})\\ &= -\frac{1}{\beta}\int_0^{\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi}} \frac{\mathrm{d}X}{X}\ln(1 + z_0X) + i\int_0^{\Im\xi}\mathrm{d}Y \ln(1 + z\mathrm{e}^{-\beta(\Re\xi + iY)})\end{aligned}$$

Soit $\Im\xi = \pm\eta$. Pour tout $\Re\xi \in [\delta, 0]$ et pour tout $\Re\xi \in [0, +\infty)$ respectivement :

$$|\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \Re\xi \pm i\eta)| \leq \beta^{-1}z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} + (z + \pi)\eta\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \leq \big((\beta^{-1} + \eta)z + \pi\eta\big)\mathrm{e}^{\beta(-2\delta+\eta)}\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$$

$$|\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \Re\xi \pm i\eta)| \leq \beta^{-1}z\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} + 3z\eta\mathrm{e}^{-\beta\Re\xi} \leq z(\beta^{-1} + 3\eta)\mathrm{e}^{\beta\eta}\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$$

Soit $\Re\xi = \delta$. Pour tout $\Im\xi \in [-\eta, \eta]$,

$$|\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \delta + i\Im\xi)| \leq \beta^{-1}z\mathrm{e}^{-\beta\delta} + (z + \pi\mathrm{e}^{\beta\delta})\eta\mathrm{e}^{-\beta\delta} \leq \big((\beta^{-1} + \eta)z + \pi\eta\mathrm{e}^{\beta\delta}\big)\mathrm{e}^{\beta(-2\delta+\eta)}\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$$

Ces trois estimations donnent l'existence d'une constante $d_1(\beta, z) > 0$ telle que pour tout $\xi \in \gamma$, $|\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \xi)| \leq d_1(\beta, z)\mathrm{e}^{-\beta|\xi|}$. Par des changements de variables adaptés, on prouve qu'il existe une constante $D_1(\beta, z) > 0$ telle que $\int_\gamma |\mathrm{d}\xi||\hat{\mathfrak{f}}_1(\beta, z; \xi)| \leq D_1(\beta, z) < +\infty$.
La preuve s'achève par récurrence par des arguments similaires.

■

Preuve Lemme 6.42.
Ici $\|\cdot\|_2$ désignera la norme opérateur sur $L^2(\Omega)$. Soient $\xi_0 > 0$ vérifiant $-\xi_0 < E_0$ et $\mathbf{k} \in \Omega^*$ fixés. Soit $u_j(\cdot\,;\mathbf{k}) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^3)$, $j \geq 1$, le vecteur propre normalisé à l'unité associé à la valeur propre $E_j(\mathbf{k})$ de l'opérateur fibré $H(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(-i\nabla + \mathbf{k})^2 + V$. D'abord on a :

$$u_j(\cdot\,;\mathbf{k}) = (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}(H(\mathbf{k})+\xi_0)u_j(\cdot\,;\mathbf{k}) = (E_j(\mathbf{k})+\xi_0)(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}u_j(\cdot\,;\mathbf{k}) \quad (6.134)$$

Supposons juste un instant que $(H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}$ soit borné de $L^2(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $e_{\xi_0} > 0$ uniforme en j et en $\mathbf{k}$ telle que :

$$\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}\|_{2,\infty} \leq e_{\xi_0} \quad (6.135)$$

De (6.134) et (6.135), il vient immédiatement (6.105) :

$$\|u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\|_\infty \leq (E_j(\mathbf{k}) + \xi_0)\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}\|_{2,\infty}\|u_j(\cdot\,;\mathbf{k})\|_2$$

Montrons maintenant que $\|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}\|_{2,\infty}$ peut se majorer uniformément en $\mathbf{k}$. Utilisons pour cela les résultats de la Proposition 6.38. Puisque $(H_\infty(0) + \xi_0)^{-1}$ est un opérateur intégral, alors $(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}$ est un opérateur intégral de noyau :

$$\text{p.p. tout } (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \in \Omega \times \Omega, \quad (H(\mathbf{k})+\xi_0)^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \sum_{\boldsymbol{\upsilon}\in\mathbb{Z}^3} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\upsilon}-\underline{\mathbf{y}})}(H_\infty(0)+\xi_0)^{-1}(\underline{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\upsilon}, \underline{\mathbf{y}})$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{\underline{\mathbf{x}}\in\Omega} \|(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, \cdot\,)\|_2^2 &= \operatorname*{ess\,sup}_{\underline{\mathbf{x}}\in\Omega} \int_\Omega \mathrm{d}\underline{\mathbf{y}}\, |(H(\mathbf{k}) + \xi_0)^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})|^2 \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\underline{\mathbf{x}}\in\Omega} \sum_{\boldsymbol{\upsilon}\in\mathbb{Z}^3} \int_\Omega \mathrm{d}\underline{\mathbf{y}}\, |(H_\infty(0) + \xi_0)^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\upsilon})|^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière ligne d'une part l'inégalité de Minkowski et d'autre part le fait que $H_\infty(0)$ commute avec l'opérateur des translations du réseau $\mathbb{Z}^3$.
Il reste à utiliser l'estimation (3.2) :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, |(H_\infty(0) + \xi_0)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq c_{\xi_0} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{y}\, \frac{\mathrm{e}^{-\delta_{\xi_0}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \leq e_{\xi_0}$$

■

Preuve Lemme 6.43.
Rappelons que pour tout $\mathbf{k} \in \Omega^*$, les valeurs propres de l'Hamiltonien fibré lorsque $V = 0$, i.e. $H(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(-i\nabla + \mathbf{k})^2$, sont connues explicitement :

$$E_{\mathbf{n}}^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\big(2\pi\mathbf{n} + \mathbf{k}\big)^2, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$$

Indexons ces valeurs propres, comptées avec leur multliplicité, dans un ordre croissant. Par le principe variationnel, il vient :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^*, \quad E_j^{(0)}(\mathbf{k}) - \|V\|_\infty \leq E_j(\mathbf{k}) \leq E_j^{(0)}(\mathbf{k}) + \|V\|_\infty$$

En posant $\alpha := \xi_0 - \|V\|_\infty > 0$ avec $\xi_0 > 0$ assez grand, la convergence de la série $\sum_{j\geq 1}\big(E_j(\mathbf{k})+\xi_0\big)^{-l}$ est alors donnée par la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}n_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}n_3 \, \frac{1}{\Big(\big(n_1+\frac{k_1}{2\pi}\big)^2+\big(n_2+\frac{k_2}{2\pi}\big)^2+\big(n_3+\frac{k_3}{2\pi}\big)^2+\frac{\alpha}{2\pi^2}\Big)^l}$$

Il reste à utiliser les coordonnées sphériques en remarquant que :

$$\forall\, \hat{\alpha} > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \, \frac{r^2}{(r^2+\hat{\alpha})^l} < +\infty \quad \text{ssi} \quad l > \frac{3}{2}$$

■

Preuve Lemme 6.44.
En vertu de (6.99), il suffit de prouver qu'il existe $g_{\xi_0}(\beta,\mu) > 0$ telle que :

$$\forall\, \xi \in \gamma, \quad \frac{|\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_1}\cdots|E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_{n+1}}} \leq g_{\xi_0}(\beta,\mu)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi|}}{(E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)^{\gamma_k}} \tag{6.136}$$

D'abord, étant donné les caractéristiques du contour γ (cf. preuve Lemme 6.39) :

$$\forall\, \xi \in \gamma,\ \forall\, j_k \geq 1, \quad |E_{j_k}(\mathbf{k})-\xi| \geq \varepsilon := \min(\pi/2\beta, |E_0-\delta|) > 0$$

puis en exploitant la décroissance exponentielle de $\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\cdot)$:

$$\forall\, \xi \in \gamma, \quad |\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\xi)| \leq c_{\xi_0}(\beta,\mu)\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi+\xi_0|}$$

il vient pour tout $\xi \in \gamma$:

$$\frac{|\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_1}\cdots|E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_{n+1}}} \leq \frac{c_{\xi_0}(\beta,\mu)}{\varepsilon^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{n+1}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi+\xi_0|}}{|E_{j_k}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_k}} \tag{6.137}$$

On décompose maintenant le contour γ en 2 parties : $\gamma = \gamma_k^+ \cup \gamma_k^-$, avec :

$$\gamma_k^+ := \big\{\xi \in \gamma \ : \ |E_{j_k}(\mathbf{k})-\xi| \geq (E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)/2\big\}, \quad \gamma_k^- := \big\{\xi \in \gamma \ : \ |E_{j_k}(\mathbf{k})-\xi| \leq (E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)/2\big\}$$

Comme $\forall\, \xi \in \gamma_k^+$, $|E_{j_k}(\mathbf{k})-\xi|^{-\alpha_k} \leq 2^{\alpha_k}(E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)^{-\alpha_k}$, il s'ensuit de (6.137) :

$$\forall\, \xi \in \gamma_k^+, \quad \frac{|\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_1}\cdots|E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_{n+1}}} \leq c_{\xi_0}(\beta,\mu)\frac{2^{\alpha_k}(E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)^{-\alpha_k}}{\varepsilon^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{n+1}}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi|} \tag{6.138}$$

Comme $\forall\, \xi \in \gamma_k^-$, $|E_{j_k}(\mathbf{k})-\xi|^{-\alpha_k} \leq \varepsilon^{-\gamma_k}$ et d'autre part, via l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, \xi \in \gamma_k^-, \quad |E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0-(\xi+\xi_0)| \leq (E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)/2 \implies |\xi+\xi_0| \geq (E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)/2 > 0$$

il s'ensuit de (6.137) :

$$\forall\, \xi \in \gamma_k^-, \quad \frac{|\mathfrak{f}_{Q'}(\beta,\mu;\xi)|}{|E_{j_1}(\mathbf{k})-\xi vert^{\alpha_1}\cdots|E_{j_{n+1}}(\mathbf{k})-\xi|^{\alpha_{n+1}}} \leq \frac{c_{\xi_0}(\beta,\mu)}{\varepsilon^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n+1}}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4}(E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)} \tag{6.139}$$

Et lorsque ξ_0 est choisi suffisamment grand :

$$\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4}(E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)} \leq (4/\beta)^{\alpha_k}(E_{j_k}(\mathbf{k})+\xi_0)^{-\alpha_k}$$

En vertu de (6.138) et (6.139), pour ξ_0 assez grand, on obtient (6.136) en posant :

$$g_{\xi_0}(\beta,\mu) := c_{\xi_0}(\beta,\mu)\varepsilon^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{n+1})}\max(2^{\alpha_k}, (4\varepsilon^{-1}\beta^{-1})^{\alpha_k}) > 0$$

■

Bibliographie

[1] Abramowitz M., Stegun I.A., *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1965

[2] Adams E.N., *Magnetic susceptibility of a diamagnetic electron gas - The role of small effective electron mass*, Phys. Rev. 89 (3) (1953), 633–648

[3] Angelescu N., Nenciu G., *On the independence of the thermodynamic limit on the boundary conditions in quantum statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. 29 (1973), 15–30

[4] Angelescu N., Bundaru M., Nenciu G., *On the Landau diamagnetism*, Comm. Math. Phys. 42 (1975), 9–28

[5] Angelescu N., Bundaru M., Nenciu G., *On the perturbation of Gibbs semigroups*, Comm. Math. Phys. 42 (1975), 29–30

[6] Angelescu N., Corciovei A., *On free quantum gases in a homogeneous magnetic field*, Rev. Roum. Phys. 30 (7) (1975), 661–671

[7] Ashcroft N., Mermin N., *Solid States Physics*, Saunders College Publishing, 1976

[8] Band W., *Low-temperature diamagnetism of electrons in a cylinder*, Phys. Rev. 91 (1953), 249–255

[9] Berezanskii Y.M., *Selfadjoint Operators in Spaces of Functions of Infinitely Many Variables*, AMS, Vol 63

[10] Berezin F.A., Shubin M.A., *The Schrödinger Equation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991

[11] Blount E.I., *Bloch electrons in a magnetic field*, Phys. Rev. 126 (1962), 1636–1653

[12] Bratelli O., Robinson D.W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer-Verlag, New York, 1979

[13] Briet P., Cornean H.D., *Locating the spectrum for magnetic Schrödinger and Dirac opeartors*, Comm. Partial Differential Equations 27 (5-6) (2002), 1079–1101

[14] Briet P., Cornean H.D., Louis D., *Generalized susceptibilities for a perfect quantum gas*, Markov Process. Related Fields 11 (2) (2005), 177-188

[15] Briet P., Cornean H.D., Louis D., *Diamagnetic expansions for perfect quantum gases*, J.Math.Phys. 47 (8) (2006) 083511

[16] Briet P., Cornean H.D., Louis D., *Diamagnetic expansions for perfect quantum gases II : uniform bounds*, Asymptotic Analysis 59(1-2) (2008), 109-123

[17] Briet P., Cornean H.D., Savoie B., *Diamagnetism of quantum gases with singular potentials*, Jour. Phys. A "Duclos Memorial Issue" (2010), arXiv :1005.1584

[18] Briet P., Cornean H.D., Zagrebnov V., *Do bosons condense in a homogeneous magnetic field ?*, J. Stat. Phys. 116 (2004), 1545-1578

[19] Broderix K., Hundertmark D., Leschke H., *Continuity properties of Schrödinger semigroups with magnetic field*, Rev. Math. Phys., 12 (2) (2000), 181–225

[20] Broderix K., Hundertmark D., Müller P., *Continuous integral kernels for unbounded Schrödinger semigroups and their spectral projections*, J. Funct. Anal., 212 (2004), 287–323

[21] Brüning J., Geyler V., Pankrashkin K., *On-diagonal singularities of the Green functions for Schrödinger operators*, J. Math. Phys. 46 (2005), 113508

[22] Brüning J., Geyler V., Pankrashkin K., *Continuity properties of integral kernels associated with Schrödinger operators on manifolds*, Ann. Henri Poincaré 8 (2007), 781–816

[23] Bowers R., *Magnetic susceptibility of sodium metal*, Phys. Rev. 100 (4) (1955), 1141–1144

[24] Cartan H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961

[25] Combes J.M., Thomas L., *Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys. 34 (1973), 251–270

[26] Combescure M., Robert D., *Rigorous semiclassical results for the magnetic response of an electron gas*, Rev. Math. Phys. 13 (9) (2001), 1055–1073

[27] Cornean H.D., *On the magnetization of a charged Bose gas in the canonical ensemble*, Comm. Math. Phys., 212 (1) (2000), 1–27

[28] Cornean H.D., Nenciu G., *On eigenfunction decay for two dimensional magnetic Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. 198 (3) (1998), 671–685

[29] Cornean H.D., Nenciu G., *The Faraday effect revisited : Thermodynamic limit*, J. Funct. Anal. 257 (2009), no 7, 2024–2066

[30] Cornean H.D., Nenciu G., *The Faraday effect revisited : sum rules and convergence issues*, arXiv :1004.0108

[31] Critchley R.H., Lewis J.T., *On the free boson gas with spin*, Comm. Math. Phys. 44 (1975), 107–124

[32] Cycon H.L., Froese R.G., Kirsch W., Simon B., *Schrödinger operators, with applications to quantum mechanics and global geometry*, Springer, Berlin-New York, 1987

[33] Davis E.B., *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[34] Davies E.B., Simon B., *Ultra-contractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians*, J. Funct. Anal. 59 (1984), 335–395

[35] De Haas W.J., Van Alphen P.M., Comm. Phys. Lab. Leiden, Nos. 208d, 212a (1930)

[36] Deift P., Hunziker W., Simon B., Vock E., *Pointwise Bounds on Eigenfunctions and Wave Packets in N-body Quantum Systems. IV*, Com. Math. Phys. 64 (1978), 1–34

[37] Dingle R.B., *The diamagnetism of free electrons in finite systems*, Phys. Rev. 82 (1951), 966–966

[38] Dingle R.B., *Some magnetic properties of metals I-IV*, Proc. Roy. Soc. (London) A 211 (1952) 500–516, A 211 (1952) 517–525, A 212 (1952) 38–47, A 212 (1952) 47–65

[39] Dingle R.B., *Low-temperature diamagnetism of electrons in a cylinder*, Phys. Rev. 92 (1953), 1320–1320

[40] Diu B., Guthmann C., Lederer D., Roulet B., *Eléments de physique statistique*, Hermann Editeurs des sciences et des arts, Paris, 2001

[41] Doi, S., Iwatsuka, A., Takuya, M., *The Uniqueness of the Integrated Density of States for the Schrödinger Operators with Magnetic Fields*, Math. Zeit. 237 (2001), 335-371

[42] Dunford N., Schwartz J.T., *Linear Operators, Part II : Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, New York, 1963

[43] Freitag E., Busam R., *Complex analysis (Universitext)*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005

[44] Friedman L., *Question of size corrections to the steady diamagnetic susceptibility of small systems*, Phys. Rev. A 134 (1964), 336–344

[45] Ham F.S., *Effect of the surface on the magnetic properties of an electron gas*, Phys. Rev. 92 (5) (1953), 1113–1119

[46] Hebborn J.E., Luttinger J.M., Sondheimer E.H., Stiles P.J., *The orbital diamagnetic susceptibility of Bloch electrons*, J. Phys. Chem. Solids 25 (1964), 741–749

[47] Hebborn J.E., Sondheimer E.H., *Diamagnetism of conduction electrons in metals*, Phys. Rev. Letters 2 (1959), 150–152

[48] Hebborn J.E., Sondheimer E.H., *The diamagnetism of conduction electrons in metals*, J. Phys. Chem. Solids 13 (1960), 105–123

[49] Helffer B., Sjöstrand J., *On diamagnetism and de Haas-van Alphen effect*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 52 (4) (1990), 303–375

[50] Herbst I.W., Sloan A.D., *Perturbation of translation invariant positivity preserving semigroup on* $L^2(\mathbb{R}^N)$, Transaction of the American Mathematical Society 236, 1978

[51] Hörmander L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* (3rd edition), North-Holland Mathematical Library 7, North-Holland, 1990

[52] Huang K., *Statistical Mechanics (Second Edition)*, John Wiley & Sons, 1987

[53] Hupfer T., Leschke H., Müller P., Warzel S., *Existence and Uniqueness of the Integrated Density of States for Schrödinger Operators with Magnetic Fields and Unbounded Random Potentials*, Rev. Math. Phys. 13 (2001), 1547-1581

[54] Hupfer T., Leschke H., Müller P., Warzel S., *The Absolute Continuity of the Integrated Density of States for Magnetic Schrödinger Operators with certain Unbounded Random Potentials*, Comm. Math. Phys. 221 (2001), 229-254

[55] Iftimie V., *Uniqueness and existence of the integrated density of states for the Schrödinger operators with magnetic field and electric potentials with singular negative part*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 41 (2) (2005), 307–327

[56] Jackson J.D., *Classical Electrodynamics Third Edition*, John Wiley & Sons, 1998

[57] Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976

[58] Kirsch, W., *Random Schrödinger operators and the density of states*, Stochastic aspects of classical and quantum systems, Lect. Notes in Math. 1109 (1985), Springer Verlag, 68–102

[59] Kirsch, W., *Random Schrödinger operators*, Lect. Notes in Phys. 345 (1989), 264-370

[60] Kirsch, W., Martinelli F., *On the ergodic properties of the spectrum of general random operators*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), 141–156

[61] Kirsch W., Simon B., *Comparison Theorems for The Gap of Schrödinger Operators*, J. Funct. Anal. 75 (1987), 396-410

[62] Kittel C., *Introduction to Solid States Physics*, 7th Edition, Wiley, 1996

[63] Kjeldaas T., Kohn W., *Theory of the diamagnetism of bloch electrons*, Phys. Rev. 105 (1957), 806–813

[64] Krantz S.G., Parks H.R., *A Primer of Real Analytic Functions*, Basler Lehrbücher Vol. 4, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992

[65] Kuchment P., *Floquet Theory for Partial Differential Equations*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993

[66] Kunz H., *Surface orbital magnestism*, Jour. Stat. Phys. 76 (1/2) 1994, 183–207

[67] Landau L., *Diamagnetismus der Metalle*, Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. 64 (9-10) (1930), 629–637

[68] Landau L., Lifchitz E., *Mecanique 4ème Edition*, Editions Mir Moscou, 1981

[69] Macris N., Martin P.A., Pulé J.V., *Diamagnetic currents*, Comm. Math. Phys. 117 (1988), 215–241

[70] Macris N., Martin P.A., Pulé J.V., *Large volume asymptotics of brownian integrals and orbital magnetism*, Annales de l'I.H.P., section A, tome 66, 2 (1997), 147–183

[71] Martinelli F., Holden H., *On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for random Schrödinger operator on* $L^2(\mathbb{R}^\nu)^+$, Comm. Math. Phys. 93 (1984), 197–217

[72] Misra P.K., Kleinman L., *Theory of the diamagnetic dusceptibility of Bloch electrons*, Phys. Rev. B 5-11 (1972), 4581–4597

[73] Misra P.K., Roth L.M., *Theory of diamagnetic dusceptibility of metals*, Phys. Rev. 177-3 (1969), 1089–1102

[74] Nenciu G., *On the surface contribution to the grand-canonical pressure of free quantum gases*, Journ. Stat. Phys. 7 (2) (1973), 119–130

[75] Nenciu G., *Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields : Rigorous justification of the effective Hamiltonians*, Rev. Mod. Phy. 63 (1991), 91–128

[76] Nenciu G., *On asymptotic perturbation theory for quantum mechanics : Almost invariant subspaces and gauge invariant magnetic perturbation theory*, J. Math. Phys. 43 (3) (2002), 1273–1298

[77] Osborne M.F.M., *Number theory and the magnetic properties of an electron gas*, Phys. Rev. 88 (1952), 438–451

[78] Papapetrou A., *Über den Diamagnetismus des Elektronengases*, Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. 106 (1-2) (1937), 9–16

[79] Papapetrou A., *Diamagnetismus des Elektronengases*, Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. 107 (5-6) (1937), 387–392

[80] Pastur L., *Spectral properties of disordered systems in one-body approximation*, Commun. Math. Phys. 75 (1980), 179

[81] Pastur L., Figotin A., *Spectra of random and almost-periodic operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 297, Springer-Verlag Berlin, 1992

[82] Pauli W., *Über Gasentartung und Paramagnetismus*, Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. 41 (6) (1927), 81–102

[83] Perelmuter M.A., Semenov Y.A., *On decoupling of Finite Singularities in the Scattering Theory for the Schrödinger Operator with a Magnetic Field*, J. Math. Phys. 22 (1981), 521-533

[84] Peierls E.R., *Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen*, Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. 80 (11-12) (1933), 763–791

[85] Peierls E.R., *Surprises in Theoretical Physics*, Princeton series in Physics, Princeton University Press, 1979

[86] Roth L.M., *Theory of Bloch electrons in a magnetic field*, J. Phys. Chem. Solids 23 (1962), 433–446

[87] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics, I : Functional Analysis*, Academic Press, San Diego, 1980

[88] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics, II : Fourier Analysis and Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1975

[89] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics, III : Scattering theory*, Academic Press, San Diego, 1979

[90] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics, IV : Analysis of Operators*, Academic Press, San Diego, 1978

[91] Robinson D.W., *The Thermodynamic Pressure in Quantum Statistical Mechanics*, Lecture Notes in Physics 9, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971

[92] Ruelle D., *Statistical Mechanics - Rigorous Results*, W.A. Benjamin, New York 1969

[93] Schechter M., *Essential self-adjointness of the Schrödinger operator with magnetic vector potential*, J. Func. Anal. 20 (1975), 93–104

[94] Schechter M., *Spectra of partial differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1971

[95] Schoenberg D., *The magnetic properties of bismuth. III. Further measurments on the Haas-van Alphen effect*, Proc. Roy. Soc. 170 A (1939), 341–364

[96] Simon B., *Maximal and Minimal Schrödinger Forms*, J. Operator Theory 1 (1979), 37-47

[97] Simon B., *Functional Integration and Quantum Mechanics*, Academic Press, New York, 1979

[98] Simon B., *Schrödinger semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), 447-526

[99] Sondheimer E.H., Wilson A.H., *The diamagnetism of free electrons*, Proc. Roy. Soc (London) A 210 (1951), 173–190

[100] Steele M.C., *Application of the theory of numbers to the magnetic properties of free electron gas*, Phys. Rev. 88 (1952), 451–464

[101] Teller E., *Der Diamagnetismus von freien Elektronen*, Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei. 67 (1931), 311

[102] Trèves F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967

[103] Van Vleck J.H., *Theory of electric and magnetic susceptibilites*, Oxford Univerity Press, London, 1932

[104] Wannier G.H., Upadhyaya U.N., *Zero-field susceptibility of Bloch electrons*, Phys.Rev. 136 A (1964), 803–810

[105] Weidmann J., *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1980

[106] Whittaker, E.T., Watson, G.N., *A course of Modern Analysis, 4th edition*, Cambridge University Press, 1962

[107] Wilson A.H., *The Theory of Metals*, Cambridge University Press, Cambridge, 1936

[108] Zagrebnov, V., *Topics in the Theory of Gibbs Semigroup*, Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics, Leuven University Press, 1978

Résumé

La majeure partie de cette thèse concerne l'étude de la susceptibilité diamagnétique en champ magnétique nul d'un gaz d'électrons de Bloch à température et densité fixées dans la limite des faibles températures. Pour les électrons libres (i.e. en l'absence de potentiel périodique), la susceptibilité diamagnétique a été calculée par L. Landau en 1930 ; le résultat est connu sous le nom de formule de Landau. Quant au cas des électrons de Bloch, E.R. Peierls montra en 1933 que dans l'approximation des électrons fortement liés, la formule pour la susceptibilité diamagnétique reste la même en remplaçant la masse de l'électron par sa "masse effective" ; ce résultat est connu sous le nom de formule de Landau-Peierls. Depuis, de nombreuses tentatives pour clarifier les hypothèses de validité de la formule de Landau-Peierls ont vu le jour. Le résultat principal de cette thèse établit rigoureusement qu'à température nulle, lorsque la densité d'électrons tend vers zéro, la contribution dominante à la susceptibilité diamagnétique est donné par la formule de Landau-Peierls avec la masse effective de la plus petite bande d'énergie de Bloch.

Mot-clefs

diamagnétisme, susceptibilité diamagnétique, susceptibilité de Landau-Peierls, électrons de Bloch, métaux

Title

DIAMAGNETISME DES GAZ QUANTIQUES QUASI-PARFAITS

Abstract

The main part of this thesis deals with the zero-field diamagnetic susceptibility of a Bloch electrons gas at fixed temperature and fixed density in the limit of low temperatures. For a free electrons gas (that is when the periodic potential is zero), the steady diamagnetic susceptibility has been computed by L. Landau in 1930 ; the result is known as Landau formula. As for the Bloch electrons, E.R. Peierls in 1933 showed that under the tight-binding approximation, the formula for the diamagnetic susceptibility remains the same but with the mass of the electron replaced by its "effective mass" ; this result is known as the Landau-Peierls formula. Since, there were very many attempts in order to clarify the assumptions of validity of the Landau-Peierls formula. The main result of this thesis establishes rigorously that at zero temperature, as the density of electrons tends to zero, the leading contribution of the diamagnetic susceptibility is given by the Landau-Peierls formula with the effective mass of the lowest Bloch energy band.

Keywords

diamagnetism, orbital magnetism, zero-field susceptibility, Landau-Peierls susceptibility, Bloch electrons, metals

Adrr : Centre de Physique Théorique - Campus de Luminy, case 907 - 13288 Marseille Cedex 9

ISBN : ␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣