



Université de Paris - Est

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Paris - Est

Spécialité : Information Scientifique et Technique

présentée et soutenue publiquement par

Alexis Hérault

le 23 juin 2008

Création d'un système d'information pour la gestion des
risques volcaniques

Volcanic risk assesment information system design

Directeur de thèse

Clément Paoli

Jury

Clément Paoli, professeur à l'université de Paris Est ,
Henri Dou, professeur à l'université d'Aix Marseille III,
Luc Quoniam, professeur à l'université de Toulon,
Ciro del Negro, directeur de recherches à l'INGV (Italie),
John Hubbard, professeur à l'université de Cornell (Etats Unis),
Christian Longevialle, docteur es-sciences, université Paris-Est.

© UPE

A mes parents, Letizia et Daniel, et à ma grand mère, Marie-Jeanne.

Remerciements

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse, Clément Paoli, dont l'aide m'a été très précieuse, tant sur le plan technique que moral, surtout au moment délicat de la finalisation de ce travail.

Je remercie particulièrement Ciro Del Negro, responsable du TECNOLAB de l'INGV qui m'a accueilli au sein de son laboratoire et qui a mis à ma disposition tous les moyens dont ils disposait.

Mes plus vifs remerciements et ma gratitude vont aussi à tous mes collègues du TECNOLAB et en particulier à Anna Vicari.

Je remercie aussi ma famille et mes amis, en particulier Arièle et David, pour leur complicité et leur soutien inconditionnel.

Résumé

La prévention du risque volcanique est un enjeu majeur, notamment pour l'Etna, dont les éruptions fréquentes menacent la province de Catane.

Sont exposés les éléments physiques nécessaires à la compréhension des mécanismes intervenant dans un écoulement de lave basaltique.

Un système d'information intégrant les principaux aspects du risque volcanique et permettant la création de cartes de risques est alors proposé. Ce système comprend un modèle, basé sur les automates cellulaires et intégrant le traitement d'images satellitaires. Il permet de simuler l'évolution d'une coulée ainsi que son débit. Ce système est alors intégré dans un Système d'Information Géographique. Il est validé sur les éruptions 2001, 2006 et 2007.

Enfin, nous développons, pour l'enrichir, un modèle numérique pour le refroidissement d'une coulée de lave à l'aide des *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Ce modèle, validé sur différents cas test, est appliqué au refroidissement d'un lac et d'une coulée de lave.

Keywords : risque volcanique, automates cellulaires, système de veille, information élaborée, système d'information géographique, *Smoothed Particle Hydrodynamics*.

Abstract

Preventing volcanic risk is a major challenge, in particular when dealing with Mt Etna whose frequent eruptions regularly threaten Catane province.

First, the physical elements necessary to understand the mechanism intervening in basaltic lava flow are exposed.

Then, we develop an information system which deals with the main aspects of volcanic risk : lava flow evolution foresight and risk map design.

This system is integrated in a geographical information system and is composed of both a model based on cellular automata permitting to simulate the evolution of a lava flow, and an infrared satellite image treatment module permitting to evaluate the lava flux rate.

All the models and procedures developed were validated with the 2001, 2006 and 2007 eruptions.

Lastly, to enhance the information system, we develop a digital model for lava flow cooling by means of Smoothed Particles Hydrodynamics. This model is validated by different case tests before being applied to the cooling of a lava lake.

Keywords : volcanic risk, cellular automata, watch system, elaborated information, geographical information system, *Smoothed Particle Hydrodynamics*.

Table des matières

Introduction.....	15
Cadre général de la thèse	19
Présentation du système réalisé.....	21
Contenu	22
Première partie Aspects scientifiques et techniques	24
1.1 Physique d'un écoulement de lave basaltique	25
1.1.1 Dynamique de l'écoulement.....	25
1.1.2 Paramètres physiques.....	28
1.1.3 Rhéologie de la lave.....	29
1.1.4 Débit et volume.....	33
1.1.5 Physique du problème.....	34
Réduction à des équations bidimensionnelles.....	35
Solutions analytiques	37
1.2 Approches numériques.....	40
1.2.1 Résolution numérique des équations du mouvement.....	40
Eléments finis et différences finies	40
Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH)	41
1.2.2 Simulation holistique	42
1.3 Typologie des sources d'information utilisées	43
1.4 Etat de l'art	45
Deuxième partie Modèle pour la prévention du risque volcanique	48
2.1 Spécificités techniques.....	49
2.1.1 Analyse des besoins	49
2.1.2 Choix techniques.....	49
2.2 Simulation holistique de l'évolution d'une coulée.....	51
2.2.1 Les automates cellulaires	51
2.2.2 Modèle holistique basé sur les automates cellulaires.....	51
Idée générale	51
Variables d'état et fonction d'évolution.....	52

Anisotropie intrinsèque	57
Limites du modèle.....	61
Développement informatique.....	61
2.2.3 Intégration à un SIG.....	63
2.3 Evaluation du débit pendant l'éruption et système d'alerte	65
2.3.1 Théorie	65
Caractéristiques du capteur AVHRR du satellite NOAA-18.....	66
Caractéristiques du capteur MODIS du satellite TERRA.....	67
Calcul du flux thermique total	68
2.3.2 Procédure d'évaluation du débit	71
Détection des pixels chauds	72
2.3.4 Système d'alerte	73
2.4 Résultats obtenus.....	75
2.4.1 Données topographiques numériques disponibles	75
2.4.2 Utilisation du modèle.....	76
Utilisation pendant une éruption	76
Utilisation pour la production de cartes de risque.....	77
2.4.3 Eruption 2001.....	78
Analyse des résultats.....	83
2.4.4 Eruption 2006.....	84
Analyse des résultats.....	88
2.4.5 Eruption 2007.....	88
2.4.6 Cartes de risque.....	90
Troisième partie Simulation numérique du refroidissement d'une coulée.....	93
3.1 Introduction.....	94
3.2 La méthode " <i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i> "	95
3.2.1 Principe général.....	95
3.2.2 Noyau.....	98
3.2.3 Conditions aux limites	102
Frontière solide	102
Condition de Dirichlet.....	102
Condition de Neumann	103
Contour périodique	105
3.2.4 Structure générale d'un code SPH.....	105

3.3 Modèle pour le refroidissement d'une coulée de lave	107
3.3.1 Equations du problème et formulation SPH	107
Formulation SPH.....	108
Intégration numérique	109
Traitement du changement de phase	110
Conditions aux limites	110
3.3.2 Aspect informatique.....	112
Description du code	112
3.3.3 Cas test	118
Problème de Stefan	118
Solidification radiale	121
Plaque semi infinie avec flux imposé	125
3.4 Résultats obtenus.....	128
3.4.1 Refroidissement d'un lac de lave.....	128
3.4.2 Refroidissement d'une coulée	133
Epaisseur de la croûte, température de contact et temps de solidification.....	135
Conclusion	137
Bibliographie.....	140
Annexe 1 Les éruptions de l'Etna.....	147
Annexe 2 Exemple de code.....	151

Liste des tableaux

Tab. 1.1 - Paramètres physiques typiques de la lave de l'Etna	29
Tab. 1.2 - Paramètres pour la viscosité et la contrainte seuil.....	31
Tab. 2.1 - Caractéristiques de l'AVHRR.....	66
Tab. 2.2 - Caractéristiques du MODIS	68
Tab. 3.1 - Valeurs des paramètres du couple eau/glace	123
Tab. 3.2 - Valeurs des paramètres utilisés	129

Liste des figures

Fig. 1.1 - Bouche éruptive - Eruption 2001	25
Fig. 1.2 - Front de coulée - Eruption 2001	25
Fig. 1.3 - Echanges thermiques au sein d'une coulée de lave	26
Fig. 1.4 - Les différentes étapes de la formation d'un tube de lave.....	27
Fig. 1.5 - Bouche secondaire - Eruption 2004	27
Fig. 1.6 - Relation contrainte déformation pour un fluide binghamien	30
Fig. 1.7 - Relations viscosité température.....	32
Fig. 1.8 - Forme typique de la courbe de débit	33
Fig. 1.9 - Approximation de Barré de Saint-Venant.....	36
Fig. 1.10 - Ecoulement sur un plan incliné	37
Fig. 1.11 - Profil de vitesse	38
Fig. 1.12 - Exemples de décompositions spatiales.....	40
Fig. 1.13 - Particules dans une simulation SPH.....	41
Fig. 2.1 - Disposition des cellules par rapport au terrain	52
Fig. 2.2 - Les différents types de cellules et de voisinages.....	52
Fig. 2.3 - Calcul de h_{cr}	54
Fig. 2.4 - Configurations et valeurs de Δz_{eff} et Δh_{eff} associées	55
Fig. 2.5 - Premières itérations pour la croissance d'un dôme de lave	58
Fig. 2.6 - Croissance d'un dôme de lave	58
Fig. 2.7 - Croissance d'un dôme de lave avec mélange aléatoire des deux voisinages.....	59
Fig. 2.8 - Longueur en fonction de l'orientation	59
Fig. 2.9 - Construction du voisinage aléatoire	60
Fig. 2.10 - Utilisation du voisinage aléatoire.....	60
Fig. 2.11 - Organigramme du code	62
Fig. 2.12 - Intégration au SIG GRASS	63
Fig. 2.13 - Pixels chauds dus à la présence d'une coulée.....	69
Fig. 2.14 - Fractions occupées par les trois composantes thermiques	70
Fig. 2.15 - Procédure de calcul de débit.....	72
Fig. 2.16 - Les différents terrains numériques disponibles	75

Fig. 2.17 - Interaction entre les modules et programmes.....	77
Fig. 2.18 - Evolution du débit de la coulée 2001	78
Fig. 2.19 - Evolution entre le 18 juillet (a) et le 19 juillet (b).....	80
Fig. 2.20 - Evolution entre le 22 juillet (a) et le 26 juillet (b).....	81
Fig. 2.21 - Coulée réelle (a) et coulée simulée (b) en fin d'éruption.....	82
Fig. 2.22 - Comparaison entre la surface de la coulée réelle et simulée.....	83
Fig. 2.23 - Comparaison entre la longueur réelle et simulée	84
Fig. 2.24 - Evolution du débit pour l'éruption 2006.....	85
Fig. 2.25 - Evolution au 17 juillet calculée le 16 juillet avec le DEM 04.....	86
Fig. 2.26 - Evolution au 17 juillet calculée le 17 juillet avec le DEM 04 modifié	87
Fig. 2.27 - Evolution au 24 juillet calculée le 20 juillet avec le DEM 04 modifié	87
Fig. 2.28 - Coulée simulée et coulée réelle	88
Fig. 2.29 - Fontaine de lave de l'éruption du 4 septembre 2007	89
Fig. 2.30 - Evolution de l'indice thermique normalisé entre le 20/08/07 et le 20/09/07.....	90
Fig. 2.31 - Bouches éruptives fictives.....	91
Fig. 2.32 - Scénarios éruptifs utilisés.....	91
Fig. 2.33 - Carte de risque obtenue à partir de 1050 simulations	92
Fig. 3.1 - Particule proche du bord du domaine.....	97
Fig. 3.2 - <i>Cubic spline kernel</i>	101
Fig. 3.3 - <i>Quintic spline kernel</i>	101
Fig. 3.4 - Condition de Dirichlet.....	103
Fig. 3.5 - Condition de Neumann.....	104
Fig. 3.6 - Contour périodique.....	105
Fig. 3.7 - Organigramme d'un code SPH	106
Fig. 3.8 - Coupe de la coulée de lave	107
Fig. 3.9 - Répartition des particules à $t = 0.0568$	119
Fig. 3.10 - Profil de température à $t = 0.0568$	120
Fig. 3.11 - Fraction de chaleur latente libérée.....	120
Fig. 3.12 - Evolution de la position du front de solidification	121
Fig. 3.13 - Profil de température à $t = 132h$	123
Fig. 3.14 - Isothermes à $t = 132h$	124
Fig. 3.15 - Evolution du front de solidification.....	124
Fig. 3.16 - Profils de température pour $\phi = 1$	126

Fig. 3.17 - Profils de température pour $\varphi = h(T(0,t) - T_{ext})$ avec $h = 1$	126
Fig. 3.18 - Profils de température pour $t = 0.004, 0.007$ et 0.1 Ma.	129
Fig. 3.19 - Evolution des fronts de solidification.....	130
Fig. 3.20 - Comparaison FEM SPH	132
Fig. 3.21 - Comparaison FEM SPH sans changement de phase	134
Fig. 3.22 - Profils de température à différents instants (t en jours).....	134
Fig. 3.23 - Evolution de la température	135
Fig. 3.24 - Evolution de l'épaisseur de la croûte	135
Fig. 3.25 - Evolution de la température de surface	136

Liste des annexes

Annexe 1 Les éruptions de l'Etna.....	147
Annexe 2 Exemple de code.....	151

Liste des notations mathématiques

x_i	$i^{\text{ème}}$ coordonnée spatiale
t	temps
u_i	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur vitesse
e_{ij}	tenseur taux de déformation
σ_{ij}	tenseur des contraintes
σ_{ij}^v	partie visqueuse du tenseur des contraintes
δ_{ij}	symbole de Kronecker
τ	contrainte tangentielle
τ_c	contrainte seuil
μ	viscosité
p	pression
ρ	densité
T	température
c_p	chaleur massique
L	chaleur latente
κ	conductivité thermique
ε	émissivité
k_b	constante de Boltzman
h_p	constante de Planck

Nous avons par ailleurs adopté les conventions suivantes :

- les vecteurs sont notés en **gras** ;
- nous utilisons la convention de l'indice muet.

Introduction

Ce travail s'inscrit dans les thématiques de recherche du laboratoire de Sciences et Ingénierie de l'Information et de l'Intelligence Stratégique (S3IS) de l'université Paris Est, dont un des axes de recherche est la mise en oeuvre de méthodes et d'outils de veille, et du laboratoire TECNOLAB de l'Istituto Nazionale di Vulcanologia (INGV), section de Catane, dont l'activité est essentiellement orientée vers le monitoring de l'activité de l'Etna et la production de modèles mathématiques et informatiques pour l'aide à la décision.

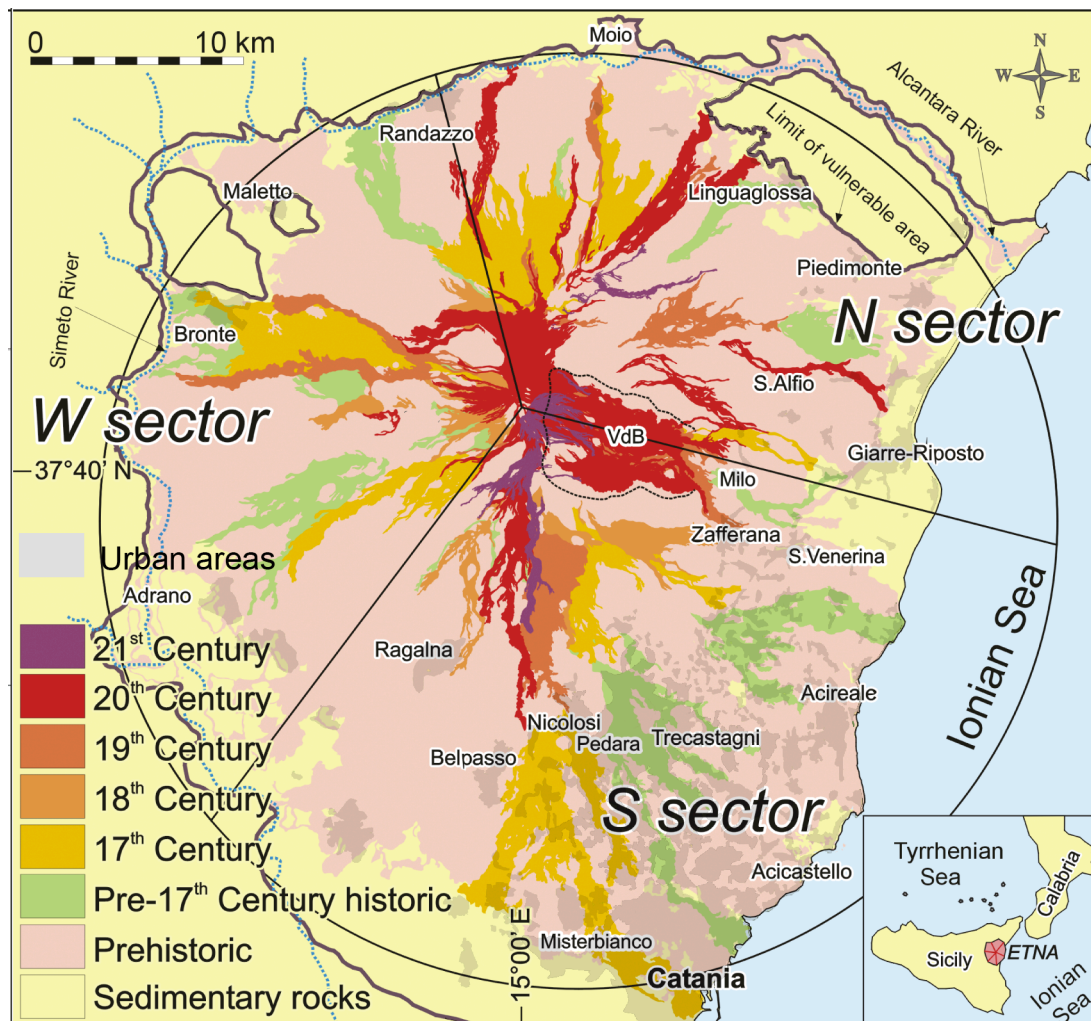
Il s'agit donc d'un travail nécessairement pluridisciplinaire faisant appel aux sciences de l'information, aux mathématiques, à la physique et à l'informatique.

Ce travail a été réalisé en cotutelle sous la direction de Clément Paoli, professeur à l'Université de Paris Est et Ciro del Negro, directeur du TECNOLAB au sein de l'INGV section de Catane. Il est en effet apparu préférable, compte tenu des objectifs opérationnels du présent travail, d'être en mesure de bénéficier au quotidien des importantes connaissances acquises en Sicile par l'INGV, tant sur les données géographiques que sur les mesures de l'activité de l'Etna.

L'objectif de nos travaux est la mise en place d'un système de veille opérationnel en temps réel pour la gestion du risque volcanique en situation de crise ainsi que pour l'aide à la décision en matière d'aménagement du territoire. Pour ce faire, nous nous appuyerons sur les approches et les méthodes traditionnelles de la veille scientifique et technique en y intégrant des outils mathématiques et informatiques spécifiques permettant de créer l'information élaborée nécessaire aux objectifs fixés ci-dessus.

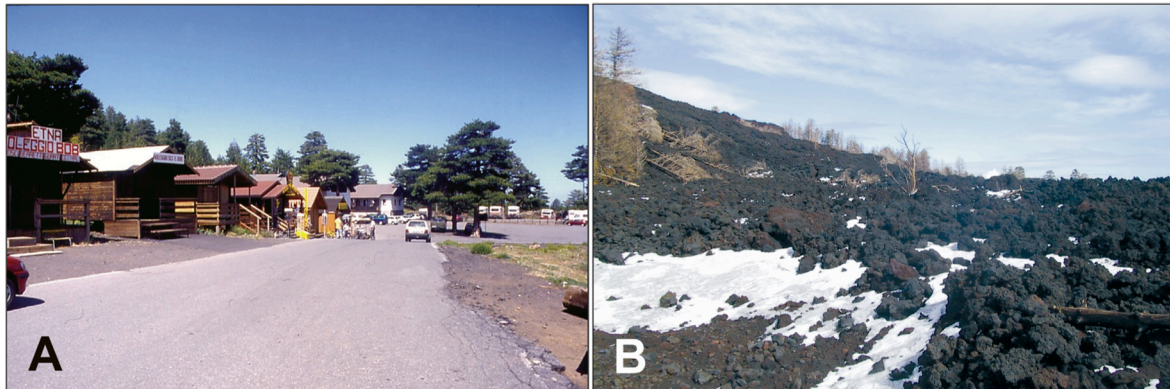
Les méthodes et outils de veille développés traditionnellement s'appuient essentiellement sur des sources d'informations issues de la littérature publiée à travers l'interrogation des grandes banques de données accessibles en ligne. La mise en œuvre de systèmes d'information à partir de données numériques ou factuelles est plutôt réservée aux secteurs disciplinaires qui ont besoin d'exploiter les résultats de leurs travaux ou de leurs mesures pour élaborer des applications scientifiques et industrielles sans avoir pour objectif la création d'un système de veille. L'idée d'élargir les concepts et méthodes de la veille scientifique et technique pour l'acquisition, la production et le traitement de données purement factuelles a pour objectif la création d'un ensemble d'outils mathématiques et informatiques permettant la production d'information élaborée concernant l'activité de l'Etna et directement utilisable dans le cadre de l'aide à la décision.

L'Etna est l'un des volcans les plus actifs au monde. Ses fréquentes éruptions, de l'ordre d'une éruption tous les deux ans en moyenne, menacent régulièrement les villes et infrastructures de la province de Catane, située sur la côte orientale de la Sicile, entre Syracuse et Messine. La province regroupe cinquante-huit communes, s'étend sur 3.552 kilomètres carrés et accueille plus d'un million d'habitants. La carte ci-dessous fait apparaître les zones fortement urbanisées et les coulées de lave au cours des derniers siècles. En revanche, cette carte ne fait pas apparaître l'urbanisation importante mais non densifiée, des zones périurbaines allant jusqu'à 700 mètres d'altitude, c'est-à-dire à environ cinq kilomètres du sommet.



Les éruptions sont d'une grande diversité, tant dans leur durée (de quelques heures à plus d'un an) que dans leur intensité (de quelques millions de mètres cubes de lave émise à plusieurs centaines de millions de mètres cubes). Elles remodelent donc constamment la topographie de l'Etna.

En 2001 et en 2002/2003, plusieurs coulées sur les versants sud et nord-est ont détruit une grande partie des infrastructures sportives et touristiques de l'Etna.



Lors d'une éruption, la Protection Civile, en collaboration avec la section de Catane de l'INGV, est chargée des mesures de protection de la population et de la coordination des éventuels travaux de déviation de la coulée. La déviation d'une coulée a ainsi été réalisée à plusieurs reprises avec un certain succès sur l'Etna, à l'aide d'explosifs ou de digues.

En présence d'un volcan actif, générant des coulées fréquentes et importantes, à proximité de zones urbanisées et fréquentées, avec une topographie permettant le cas échéant d'intervenir sur le déroulement de la coulée, il est important de pouvoir disposer de modèles théoriques et informatiques permettant de simuler l'évolution d'une coulée ainsi que l'impact d'une éventuelle opération de déviation. Pour que la démarche soit efficace, la mise en œuvre de ces modèles doit permettre une utilisation sur le terrain par les vulcanologues de l'INGV et la Protection Civile.

Par ailleurs, du fait de l'urbanisation en croissance soutenue des flancs de l'Etna depuis plusieurs décennies, il faut être en mesure d'établir des cartes de risque permettant de guider les collectivités territoriales dans l'élaboration de leurs plans d'urbanisme définissant les zones inconstructibles.

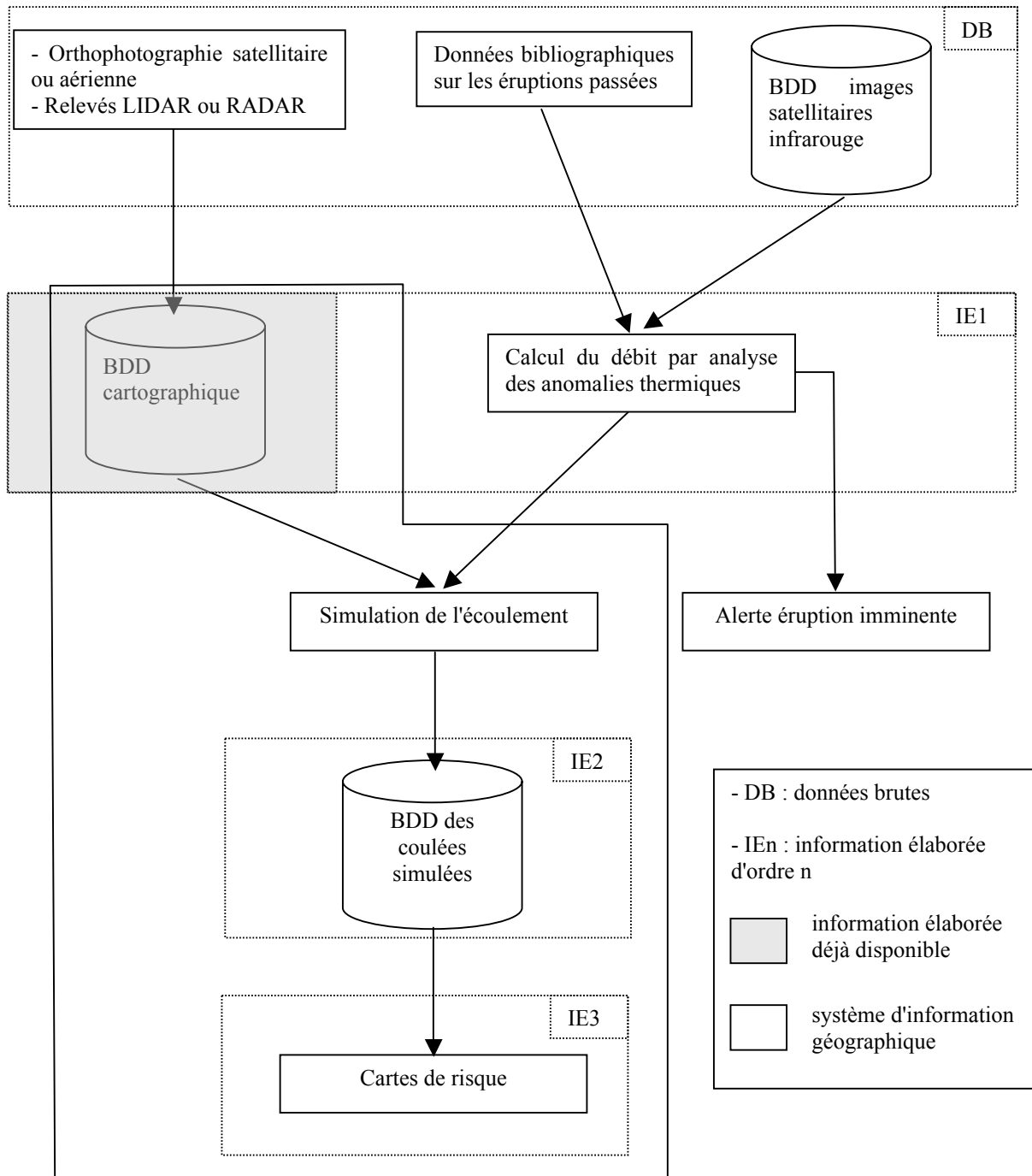
L'anticipation et la simulation du risque volcanique, et donc sa prévention, concourent ainsi aux objectifs suivants :

- disposer d'un système d'alerte permettant d'anticiper une éruption ;
- à court terme, prévoir lors d'une éruption, l'évolution d'une coulée ;

- à long terme, établir des cartes de risques.

Cadre général de la thèse

Les différentes étapes nécessaires à la création du système d'information sont schématisées ci-dessous.



La réalisation de ces différentes étapes nécessite une étude détaillée des phénomènes physiques intervenant dans un écoulement de lave.

Une coulée de lave est un écoulement :

- multiphasique,
- tridimensionnel,
- d'un fluide complexe,
- avec couplage non linéaire entre les équations de Navier - Stokes et l'équation de l'énergie, et
- présentant une interaction fluide - solide.

Le comportement d'une coulée de lave est conditionné par la topographie sous-jacente et par l'évolution de la température qui influe directement sur le rapport phase liquide / phase solide ainsi que sur la viscosité de la lave, ces deux paramètres étant bien entendu variables tout au long de la coulée.

Ces caractéristiques font de la simulation de l'évolution des coulées de lave par des méthodes numériques l'un des problèmes les plus complexes de la physique.

A l'heure actuelle, la résolution numérique directe ne saurait pourtant apporter de réponse adaptée à ce problème dans le respect de l'objectif à court terme rappelé ci-dessus. En effet, la capacité de calcul disponible à ce jour apparaît d'autant plus insuffisante que le résultat doit pouvoir être utile à l'appréciation en temps réel du risque volcanique.

On est donc naturellement conduits à envisager des méthodes holistiques, dans le but de tenter de reproduire l'évolution morphologique de la coulée de lave. Pour permettre ce résultat, ces méthodes doivent s'appuyer sur une description physique simplifiée du phénomène. Cette approche allie rapidité d'exécution, puisqu'on ne résout pas d'équation aux dérivées partielles, et évolutivité, puisque ces modèles peuvent être améliorés sans modification de leur structure, en affinant la description physique utilisée.

Cependant, affiner la description physique d'un phénomène aussi complexe implique nécessairement l'utilisation de méthodes numériques. Il sera donc nécessaire de pouvoir

rapidement disposer d'un modèle numérique, capable de résoudre, pour des temps et des zones limités, les équations complètes du problème.

Par ailleurs, la topographie, la position des bouches éruptives et le débit de lave, font partie, ainsi que de nombreux autres paramètres comme la température de la lave, des paramètres d'entrée de tous les modèles. Il faut donc disposer d'une méthode d'évaluation du débit et d'une connexion à une base de données cartographique. De surcroît, l'évaluation du débit par traitement direct d'images satellitaires infrarouge nécessite le calcul d'anomalies thermiques pour l'ensemble de l'édifice volcanique et constitue donc un système d'alerte permettant d'anticiper une éruption.

Il existe à ce jour quelques modèles holistiques permettant de prévoir l'évolution d'une coulée. Mais ces modèles se limitent à la partie simulation et n'ont donc pas les fonctionnalités permettant leur utilisation de manière autonome par les équipes chargées de la prévention du risque volcanique. Ces modèles doivent donc être améliorés et surtout intégrés dans un véritable système d'information pour l'aide à la décision.

La réalisation d'un modèle permettant de répondre à ce besoin suppose l'emploi de techniques de production et de traitement de données cartographiques, de traitement de données satellitaires, informatiques et d'analyse numérique. Il s'agit ainsi d'un travail qui relève d'une approche très largement pluridisciplinaire, avec les difficultés et limites que cela implique.

C'est sur cette approche que la présente thèse repose : développer un ensemble de modèles évolutifs, destinés aux vulcanologues de l'INGV et à la Protection Civile, prenant en compte l'ensemble des sources d'information utiles, opérationnels en temps de crise, permettant de prendre en charge, dans leur globalité, les problématiques liées au risque volcanique.

La présente thèse, en tant qu'elle porte sur l'Etna, et donc sur des coulées de lave basaltique, pourra être utilisée, sous réserve d'introduire les bonnes données topographiques et rhéologiques, pour l'ensemble des volcans analogues.

Présentation du système réalisé

Ce travail de recherche aboutit à la réalisation et à la mise en œuvre d'un système informatisé s'appuyant sur :

- un module permettant, la simulation de l'évolution d'une coulée de lave,

- un module de production de cartes de risque,
- un module d'évaluation du débit et d'alerte à partir de données satellitaires.

Il s'agit ainsi, en premier lieu, de proposer des modèles simples à utiliser, compatibles avec la puissance de calcul disponible et utilisables directement par les vulcanologues et la Protection Civile, dans un environnement informatique qui leur est familier, c'est-à-dire intégrés dans un Système d'Information Géographique (SIG) opérationnel à l'INGV.

Il s'agit, d'autre part, de développer un modèle numérique bidimensionnel évolutif intégrant les données liées au refroidissement d'une coulée, servant d'ossature à un modèle plus complexe incluant la partie dynamique de l'écoulement. Ce modèle devra, par la suite, présenter un caractère tridimensionnel et intégrer l'interaction fluide solide. Les résultats obtenus serviront à améliorer le modèle holistique utilisé pour les simulations.

Contenu

Ce travail s'articule en trois parties. Dans la première partie, nous donnons un aperçu de la physique d'un écoulement de lave basaltique, des approches numériques possibles et passons en revue l'état de l'art en matière de simulation de coulées de lave. Dans cette partie, nous rappelons un certain nombre de notions et de concepts issus des sciences de l'information et de la communication (SIC), des mathématiques, de la physique et de l'informatique.

Dans la deuxième partie, nous dressons la liste des spécificités techniques des modèles à développer, dont l'analyse nous conduit à considérer un modèle holistique, basé sur les automates cellulaires, pour la simulation de l'évolution des coulées, ainsi qu'une procédure d'évaluation du débit et de déclenchement d'alerte, basée sur l'analyse de données télémétriques infrarouge, l'ensemble étant intégré dans un Système d'Information Géographique. Cette partie se conclut par la présentation des résultats obtenus pour les éruptions 2001 et 2006. Les résultats obtenus pour l'éruption 2006 l'ont été pendant l'éruption, en situation de crise. Le système d'alerte a été validé lors de l'éruption de septembre 2007 qui, par ailleurs, n'a pas donné lieu à une simulation en raison de sa très courte durée (12 heures).

Enfin, la troisième partie est consacrée à la résolution numérique du problème du refroidissement d'une coulée et constitue la première étape de la réalisation d'un modèle numérique nécessaire à l'amélioration du modèle holistique. Nous employons une méthode particulière, les SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), très peu utilisée pour les

problèmes thermiques et géophysiques, que nous utilisons pour étudier le refroidissement d'un lac de lave ainsi que celui d'une coulée. Dans ce but, nous avons dû résoudre le problème du traitement d'une condition de Neumann non linéaire dans le cadre des SPH. Le modèle développé est validé sur plusieurs cas test portant sur des problèmes de changement de phase ainsi que sur des problèmes comportant une condition de Neumann, linéaire ou non. Nous montrons que, pour appréhender ces difficultés, les SPH apparaissent plus efficaces que les éléments finis. L'étude des résultats obtenus pour le refroidissement d'une coulée nous conduit à proposer une loi d'évolution pour l'épaisseur de la croûte de lave ainsi que pour la température de surface.

Première partie
Aspects scientifiques et techniques

1.1 Physique d'un écoulement de lave basaltique

Les coulées de lave sont le résultat de la remontée de magma de la chambre magmatique à la surface terrestre par l'intermédiaire du conduit magmatique. La morphologie d'une coulée et sa structure interne dépendent des propriétés physico-chimiques du magma, de son environnement topographique, et du débit de lave. La vitesse de progression d'une coulée de lave basaltique varie entre environ 1 m.s^{-1} , au voisinage du cratère, à 10-50 m par jour sur le front de la coulée. Les magmas basaltiques étant fortement visqueux, même à haute température, l'écoulement de la lave reste laminaire. Dans ces conditions la rhéologie gouverne la morphologie de la coulée. La rhéologie dépend elle-même de la composition chimique du magma ainsi que de sa température. Outre la topographie, supposée connue avant l'éruption, les paramètres fondamentaux nécessaires à toute simulation sont donc le débit de lave et sa rhéologie.

1.1.1 Dynamique de l'écoulement

Une grande partie de la dynamique d'un écoulement de lave est suggérée par l'observation directe : de la source jusqu'au front de la coulée, la lave, tout d'abord assez fluide (Fig. 1.1), devient de plus en plus visqueuse, se solidifie graduellement à partir du centre de la surface libre et, au niveau du front, avance comme un éboulis (Fig. 1.2). On passe du comportement d'un fluide visqueux à celui d'un solide très déformable au fur et à mesure que la lave se refroidit.



Fig. 1.1 - Bouche éruptive - Eruption 2001



Fig. 1.2 - Front de coulée - Eruption 2001

Le comportement de la coulée est dominé par sa viscosité, et de manière plus générale par sa rhéologie, elle-même très fortement dépendante de la température. Il est donc primordial de dresser un bilan précis des échanges thermiques au sein de la coulée :

- (1) pertes conductives au sol, à travers les berges et la croûte
- (2) pertes radiatives en surface
- (3) pertes convectives en surface
- (4) gains dus aux frottements visqueux dans les zones de cisaillement
- (5) gains dus à la libération de la chaleur latente lors du changement de phase

L'écoulement étant fortement laminaire, la convection dans la phase liquide est totalement négligeable.

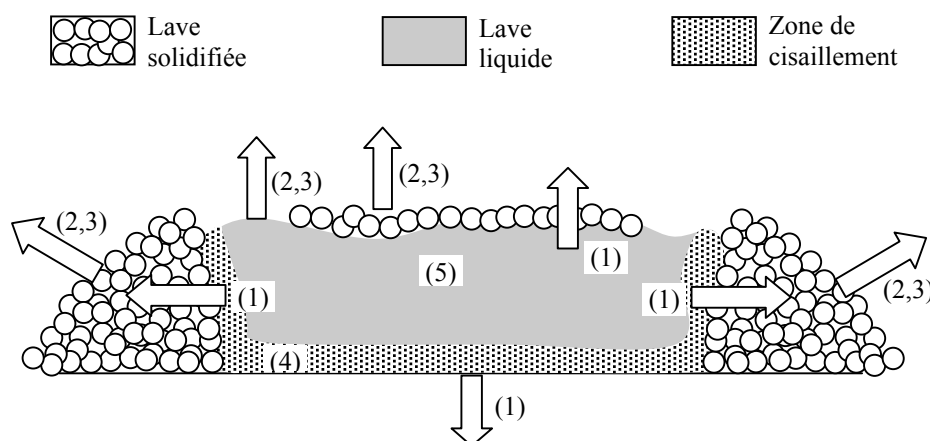


Fig. 1.3 - Echanges thermiques au sein d'une coulée de lave

Par ailleurs, la croûte de lave se soude fréquemment avec les berges, formant une canalisation appelée tube de lave. Les différentes étapes de la formation d'un tube de lave sont résumées sur la figure 1.4. Dans ces conditions, l'écoulement est un écoulement à surface libre, thermiquement isolé par la croûte, jusqu'à proximité du front où il se transforme en écoulement en charge et perce le front en son point de plus faible résistance, créant ainsi une bouche éruptive secondaire d'où s'écoule une lave fluide. De telles éruptions sont particulièrement dangereuses car la lave, s'écoulant de ces bouches secondaires à basse altitude (Fig. 1.5), pourra parcourir encore plusieurs kilomètres dans des zones à urbanisation assez dense.

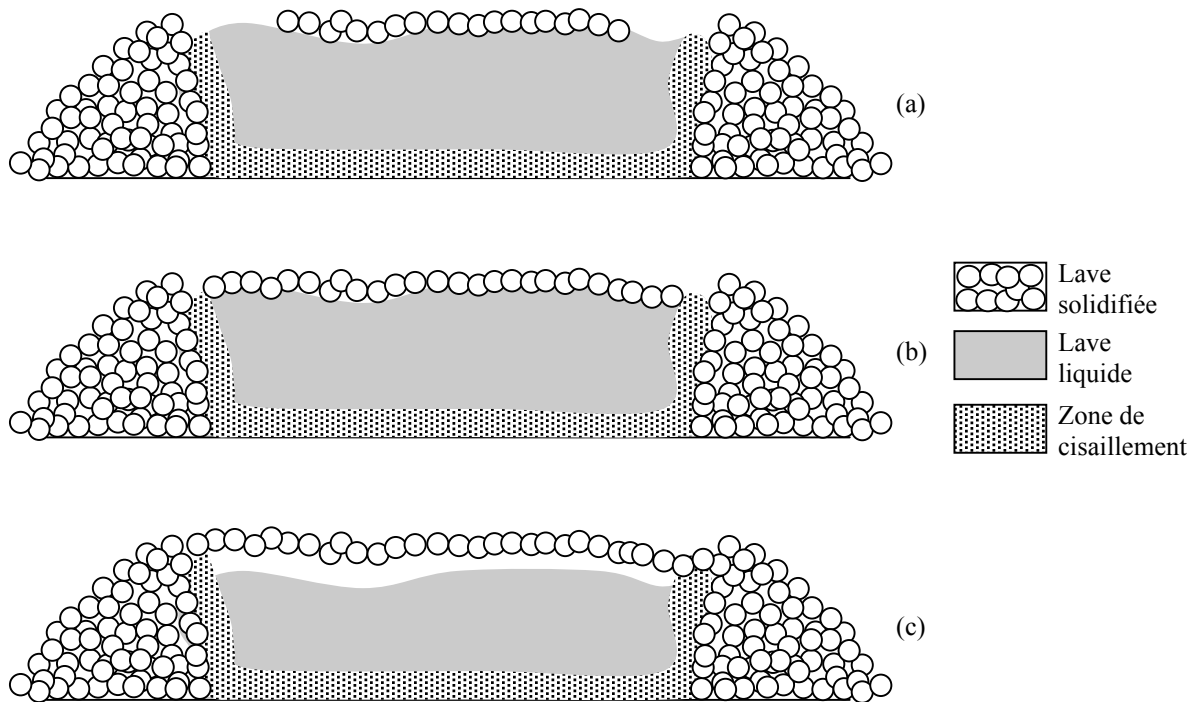


Fig. 1.4 - Les différentes étapes de la formation d'un tube de lave

(a) formation de la croûte, à partir du centre de la coulée. (b) la progression de la croûte vers les berges est ralentie par les frottements visqueux. (c) la croûte se solidarise avec les berges.



Fig. 1.5 - Bouche secondaire - Eruption 2004

Un écoulement de lave est donc un écoulement complexe, tridimensionnel, avec échanges thermiques et interactions fluide solide. La modélisation de la formation des tubes de lave

ainsi que les conditions d'ouverture des bouches secondaires sont hors du cadre de cette thèse, mais s'inscrivent dans sa continuité et font l'objet de travaux en cours au TECNOLAB.

1.1.2 Paramètres physiques

Outre le modèle rhéologique, traité dans le paragraphe suivant (1.1.3), les différents paramètres intervenant dans les équations modélisant un écoulement de lave sont :

- la densité
- la chaleur massique
- la chaleur latente de solidification
- la conductivité thermique
- l'émissivité
- la température de solidification
- la température d'extrusion

La densité moyenne de la lave est de 2700 kg.m^{-3} , avec quelques pourcents de différence entre la phase solide et la phase liquide, et elle dépend de la température et du contenu en gaz. Sa compressibilité varie entre $1.3 \cdot 10^{-12}$ et $7 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2.\text{dyne}^{-1}$, on peut donc considérer la lave incompressible.

Nous appellerons "température de solidification", la température de transition entre le comportement fluide visqueux et le comportement solide déformable. Les mesures effectuées in situ par les volcanologues de l'Institut ainsi que les échanges qui s'en sont suivit nous conduisent à situer cette transition à environ $1150 \text{ }^\circ\text{K}$.

Tous ces paramètres dépendent de nombreux facteurs, comme la composition chimique ou la température, et les relations qui en découlent ne peuvent être déterminées qu'expérimentalement. Les montages expérimentaux pour l'étude de la dépendance en température sont particulièrement délicats à réaliser car il faut faire des mesures sur des échantillons dont la température doit être portée à $1100 \text{ }^\circ\text{C}$. De plus, comme la composition chimique de lave varie, d'une éruption à l'autre, il faut répéter tout un ensemble d'expériences pour des laves provenant de différentes éruptions. Comme il n'existe aucune étude de ce type, nous considérerons ces paramètres comme constants durant l'éruption. Les valeurs typiques de

ces paramètres, utilisées dans la littérature (Kilburn et Guest, 1933; Harris et al., 1997), ou évaluées en collaboration avec les vulcanologues de l'Institut, sont reportées dans le tableau 1.1.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Densité	ρ	2400	kg m^{-3}
Chaleur massique	c_p	1150	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Chaleur latente	L	$3.5 \cdot 10^5$	J kg^{-1}
Conductivité thermique	κ	2.2	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
Emissivité	ε	0.9 ~1	-
Température de solidification	T_s	1173	$^{\circ}\text{K}$
Température d'émission	T_e	1350	$^{\circ}\text{K}$

Tab. 1.1 - Paramètres physiques typiques de la lave de l'Etna

1.1.3 Rhéologie de la lave

En première approximation, la plupart des fluides, comme l'eau ou l'air, sont considérés comme newtoniens. Dans ce cas, la partie visqueuse du tenseur des contraintes est proportionnelle à la partie symétrique du tenseur taux de déformation :

$$\sigma_{ij}^v = \mu e_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Pour un fluide incompressible ($\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$) cette relation devient :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (1.1)$$

La lave est un fluide complexe, qui a priori n'a aucune raison d'être newtonien, et dont la rhéologie dépend de multiples paramètres (James et al., 2004). Il faut donc trouver un compromis entre un modèle rhéologique le plus complet possible et l'hypothèse newtonienne. Comme toute une classe de fluides pâteux, tels le miel ou les gels, la lave se comporte comme un fluide si la contrainte tangentielle est supérieure à un seuil critique et comme un solide

sinon. Le modèle rhéologique utilisé pour ces fluides est le modèle de Bingham. Pour un écoulement simple d'un fluide binghamien, où $u = u(y)$, la relation contrainte déformation est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ si } \tau < |\tau_c| \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau - \tau_c}{\mu}, \text{ si } \tau \geq |\tau_c| \end{cases} \quad (1.2)$$

où τ_c représente la contrainte seuil .

En pratique un fluide binghamien est un fluide newtonien à seuil (Fig. 1.6). Dans la partie de l'écoulement où la contrainte tangentielle est inférieure à la contrainte seuil, la vitesse est constante et le fluide s'écoule comme un solide emporté par le flux. Au contraire, dans l'autre partie de l'écoulement, il existe un gradient de vitesse non nul et l'écoulement est équivalent à celui d'un fluide newtonien.

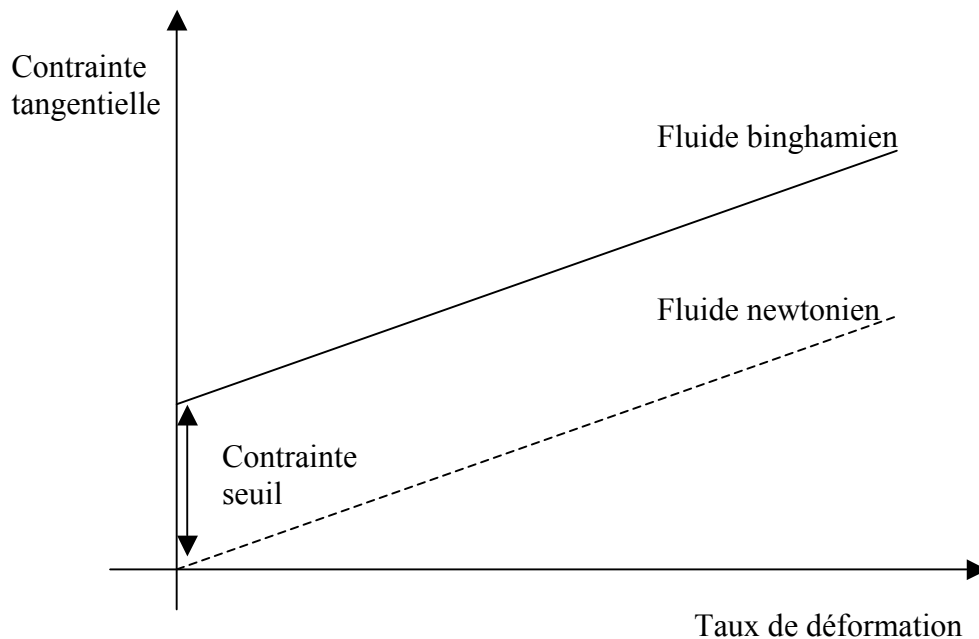


Fig. 1.6 - Relation contrainte déformation pour un fluide binghamien

On peut généraliser le modèle de Bingham au cas d'un écoulement tridimensionnel (Hohemenser and Prager, 1932) en introduisant les seconds invariants du tenseur des contraintes visqueuses, II_{Σ} , et du tenseur taux de déformation, II_E :

$$\begin{cases} e_{ij} = 0, \text{ si } \sqrt{\Pi_{\Sigma}} < |\tau_c| \\ \sigma_{ij}^v = 2\mu e_{ij} + \frac{\tau_c}{\sqrt{\Pi_E}} e_{ij}, \text{ si } \sqrt{\Pi_{\Sigma}} \geq |\tau_c| \end{cases} \quad (1.3)$$

Le modèle binghamien tient compte du caractère non-newtonien de la lave tout en restant relativement simple et est largement utilisé dans la littérature (Pinkerton et Norton, 1995; Harris et Rowland, 2001; Miyamoto et Sasaki, 1998; Ishiara et al, 1990). Il reste à déterminer les relations entre la viscosité, contrainte seuil, et les propriétés physico-chimiques de la lave. Celles-ci dépendent de la température et de nombreux autres paramètres comme la composition chimique, le taux de gaz, le contenu en eau (Giordano et Dingwell, 2003; Harris et Rowland, 2001; Pinkerton et Norton, 1995). Toutes ces relations sont semi empiriques et issues d'observations expérimentales, il ne faut donc pas oublier que derrière chaque nouveau paramètre, il y a une mesure physique, ou d'autres relations, dépendant elles-mêmes de nouveaux paramètres qu'il faudra mesurer. Avoir une relation très complexe qui dépend de paramètres dont l'évaluation durant l'éruption est impossible n'a aucun intérêt. Il nous semble donc raisonnable de ne considérer que les relations donnant la viscosité et la contrainte seuil, en fonction de la température.

Une dépendance exponentielle en température, de la forme :

$$\begin{cases} \log \mu = a_1 T + b_1 \\ \log \tau_c = a_2 T + b_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

est très largement utilisée dans la littérature (Ishiara et al., 1990; Harris et al, 2001; Costa et Macedonio, 2005). Les valeurs des coefficients, déduites des travaux de différents auteurs sont reportées dans le tableau 1.2 et les graphes correspondants, pour la viscosité, dans la figure 1.7.

<i>Coefficients</i>	<i>a₁</i>	<i>b₁</i>	<i>a₂</i>	<i>b₂</i>
Costa et Macedonio, 2005	20.7192	-0.01304		
Harris et al, 2001	26.6526	-0.01737	14.23	-0.0089
Giordano et Dingwell, 2003 (2% d'eau)	21.7119	-0.01381		
Giordano et Dingwell, 2003 (0.7% d'eau)	23.9166	-0.01521		

Tab. 1.2 - Paramètres pour la viscosité et la contrainte seuil

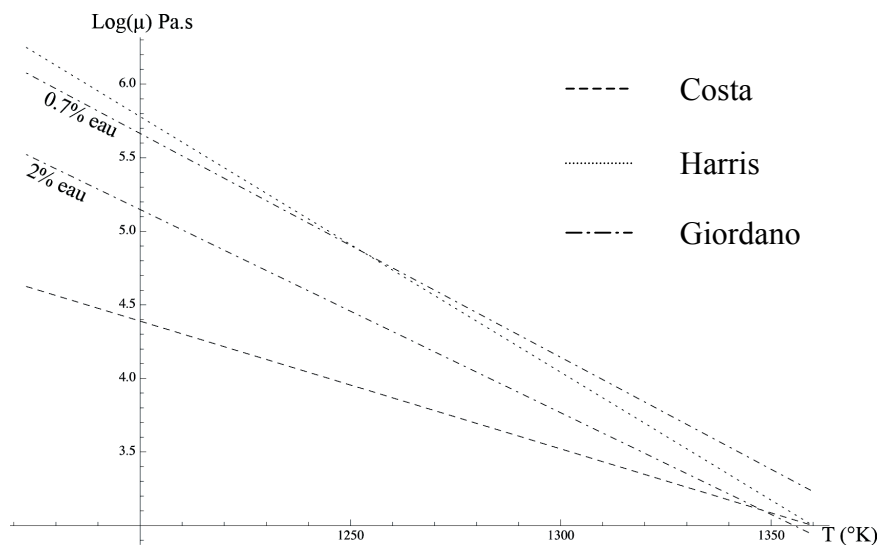


Fig. 1.7 - Relations viscosité température

La relation de Giordano et Dingwell fait intervenir le contenu en eau et n'est pas linéaire. Vu la gamme de température peu étendue dans laquelle elle sera utilisée (1163 ~ 1360°K) nous la linéariserons, une fois le contenu en eau déterminé, pour nous ramener à la forme 1.4.

Les coefficients des relations 1.4 varient d'une éruption à l'autre et doivent être déterminés expérimentalement à partir de l'étude d'un échantillon de lave. Outre la difficulté matérielle de prélèvement d'un échantillon en début d'éruption, on est confronté aux mêmes problèmes expérimentaux que ceux évoqués en 1.1.2 : il faudrait disposer d'un viscosimètre permettant de fournir des mesures pour des températures variant de 1150°K à 1350°K. La mise en place systématique d'une telle procédure expérimentale n'aurait de sens que si l'on disposait d'un modèle numérique fin, ce qui n'est pas le cas à ce jour et il est donc normal que l'INGV ne possède pas un tel équipement.

Les valeurs du tableau 1.4 serviront par la suite dans nos travaux pour fournir un intervalle de variation pour les coefficients des lois 1.4, en l'absence de données spécifiques à la coulée étudiée. Il faudra donc tenir compte d'une certaine variabilité pour ces coefficients, qui ne peuvent être déterminés exactement.

1.1.4 Débit et volume

Le débit de lave est l'autre facteur clef de l'évolution d'une coulée et constitue donc un paramètre d'entrée principal de tout modèle. Il faudra disposer d'une méthode d'évaluation du débit pendant l'éruption. Le débit peut être évalué :

- en ordre de grandeur à partir d'observations directes
- par différence de topographie
- par analyse de données télémétriques infrarouge

La seule méthode permettant de suivre avec une précision suffisante l'évolution temporelle du débit au cours de l'éruption est l'analyse des données télémétriques infrarouge provenant de mesures satellitaires. Ces mesures sont tributaires de la fréquence de passage des satellites et des conditions météorologiques.

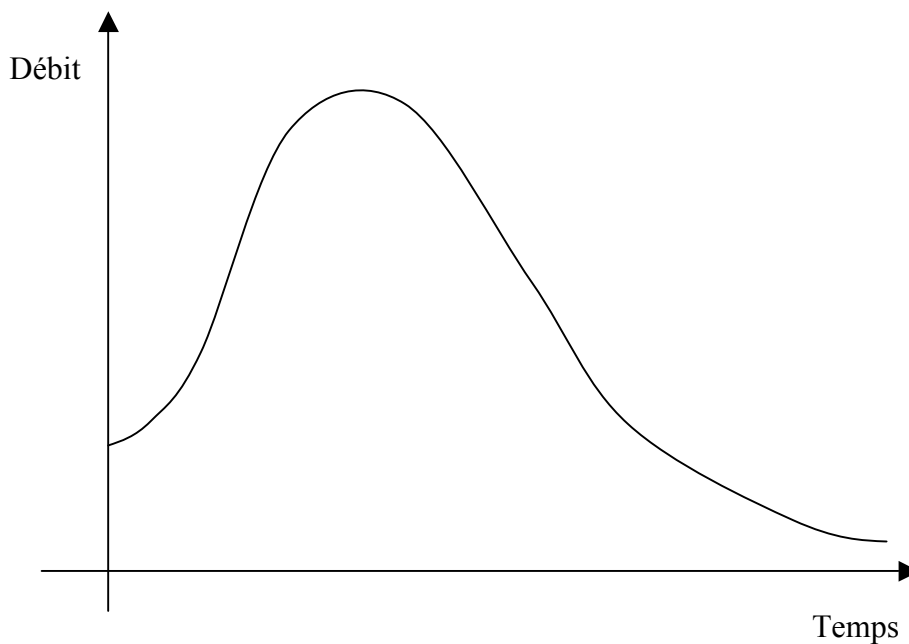


Fig. 1.8 - Forme typique de la courbe de débit

L'étude des éruptions passées de l'Etna (Annexe 1) donne une idée de l'ordre de grandeur du débit ($1 \sim 100 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$), du volume de la coulée ($10^6 \sim 10^9 \text{ m}^3$) et de la durée de l'éruption (de quelques jours à plusieurs mois). Ceci permet d'apprécier la variabilité et l'ampleur du phénomène.

Malgré la grande variabilité du phénomène, plusieurs études dont certaines portant sur l'Etna (Coltelli, 2001; Harris, 2000) ont mis en évidence l'existence d'une allure générale pour la courbe de débit (Fig. 1.8). Bien que cette courbe constitue une approximation moyenne du débit qui pourra donc, pour une éruption donnée, s'éloigner significativement de la réalité, elle constitue une hypothèse de travail, en l'absence de données sur l'évolution du débit dans le temps. Naturellement, dès que les premières données sur le débit deviennent disponibles, il est procédé à un ajustement de la courbe de débit introduite dans le modèle.

1.1.5 Physique du problème

La partie fluide de l'écoulement est régie par les équations de Navier-Stokes (1.5), couplées à l'équation de l'énergie (1.6) à travers les relations (1.3) et (1.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \rho = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i \right) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$\rho C \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) E \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) \quad (1.6)$$

Le régime de l'écoulement, laminaire ou turbulent, est caractérisé par le nombre de Reynolds

$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$, où U et L sont respectivement une vitesse caractéristique et le diamètre

hydraulique (quotient de la section et du périmètre mouillé) de l'écoulement. Il représente le rapport entre les forces visqueuses et les forces inertielles. L'écoulement est laminaire pour Re inférieur à un seuil donné et turbulent sinon. Nous n'avons pas trouvé d'études dans la littérature sur l'évaluation expérimentale de ce seuil pour l'écoulement d'un fluide visqueux dans un canal. Pour l'Etna les observations montrent que l'écoulement est toujours laminaire.

Pour $Re \ll 1$, les forces inertielles sont négligeables par rapport aux forces visqueuses, ce qui

entraîne $\frac{\partial}{\partial t} + \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \approx \frac{\partial}{\partial t}$, et on parle d'écoulement de Stokes. Dans notre cas, étant donné

les importantes différences de vitesse et de viscosité, on ne peut définir qu'un nombre de Reynolds local, caractérisant une partie de l'écoulement. A cause du refroidissement, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la bouche éruptive, la viscosité augmente et la vitesse diminue. Nous définirons donc un nombre de Reynolds local, dépendant de la distance à la bouche l :

$$Re_l = \frac{\rho U_l L}{\mu_l}, \text{ ou } U_l \text{ et } \mu_l \text{ sont la vitesse moyenne et la viscosité de l'écoulement au point}$$

considéré. Les dimensions des différentes parties canalisées de la coulée 1998 (Harris et Rowland, 2001) permettent de fixer la valeur maximale de L à environ 3m. U_l et μ_l seront évalués à partir des études disponibles dans la littérature (Calvari et al., 1994, Harris et Rowland, 2001). Les valeurs Re_l sont reportées dans le tableau 1.4.

L (m)	U_l (m.s ⁻¹)	μ_l (Pa.s)	Re_l
0	1	10^3	7.2
500	0.1	10^4	0.072
1000	0.02	$5 \cdot 10^5$	$2.88 \cdot 10^{-4}$

Tab. 1.4 - Valeurs du nombre de Reynolds local

L'écoulement, dans ses parties canalisées, est un écoulement de Stokes au delà de quelques centaines de mètres. Dans ces conditions, sa morphologie est gouvernée par la rhéologie (Miyamoto et Sasaki, 1998).

Réduction à des équations bidimensionnelles

Même sous la forme de Stokes, et sans tenir compte du couplage thermique, la résolution des équations du mouvement ne peut être envisagée que numériquement. Se ramener, à l'aide de diverses approximations, à un problème bidimensionnel permet de trouver des solutions analytiques dans quelques cas très simples et de réduire le temps de calcul pour la résolution numérique.

Cette démarche, appliquée à l'écoulement d'un fluide parfait, à surface libre, sur un terrain représenté par la surface $H(x,y)$ (Fig. 1.9), conduit à intégrer les équations de Navier-Stokes suivant la direction verticale.

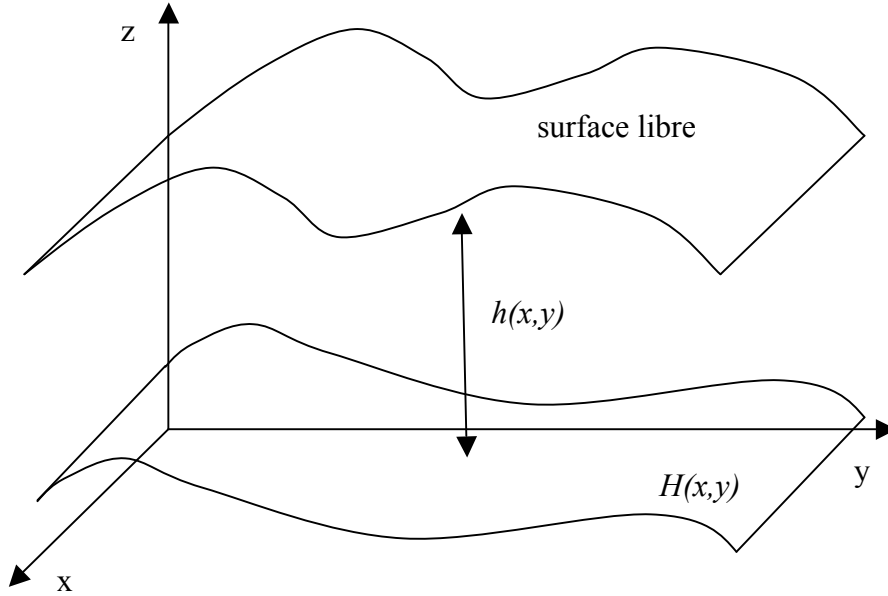


Fig. 1.9 - Approximation de Barré de Saint-Venant

On aboutit alors aux équations de Barré de Saint-Venant, équations bidimensionnelles faisant intervenir des quantités moyennées suivant la verticale ainsi que la hauteur $h(x,y)$ entre le terrain et la surface libre. Ces équations peuvent prendre des formes légèrement différentes selon les variables utilisées et les approximations effectuées. La formulation "débit unitaire - dénivellation", point de départ du modèle de Costa et Macedonio (Costa et Macedonio, 2005) est rappelée ci-dessous (1.7).

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(Vh)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial(U^2h + gh^2 / 2)}{\partial x} + \frac{\partial(UVh)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial(Vh)}{\partial t} + \frac{\partial(UVh)}{\partial x} + \frac{\partial(V^2h + gh^2 / 2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $U(x,y) = \frac{1}{h} \int_H^{H+h} u_x(x,y,z) dz$ et $V(x,y) = \frac{1}{h} \int_H^{H+h} u_y(x,y,z) dz$

Ces équations, relatives à un fluide parfait, ne font pas intervenir la viscosité. Dans notre cas, il faudra donc y intégrer la contribution de la viscosité (Gerbeau et Perthame, 2000) et trouver

une équation d'évolution pour la température moyenne $T_m(x,y) = \frac{1}{h} \int_H^{H+h} T(x,y,z) dz$, ce qui

entraîne l'apparition de nouveaux paramètres semi empiriques (Costa et Macedonio, 2005) dont l'évaluation reste problématique. De plus, les équations 1.7 ne font intervenir que des valeurs moyennes, il est impossible d'en tirer quelque information que ce soit sur les gradients verticaux des diverses quantités et elle ne permettent pas de prendre en compte l'évolution et la formation de la croûte. Malheureusement, dans notre cas, les équations 1.7 n'ont pas de solution analytique et devront être résolues numériquement.

Solutions analytiques

La réduction du problème initial à un problème bidimensionnel ne permet ni de trouver des solutions analytiques ni de s'affranchir d'un traitement numérique complexe. Ceci nous conduit à examiner les écoulements sans couplage thermique, sur un plan incliné ou dans un canal, qui donnent lieu à de telles solutions.

Nous considérerons ici l'écoulement semi infini d'un fluide binghamien sur un plan incliné, en régime quasi-permanent, et sous l'hypothèse de Stokes (Fig. 1.10). L'écoulement dans un canal circulaire donne lieu à une solution analogue.

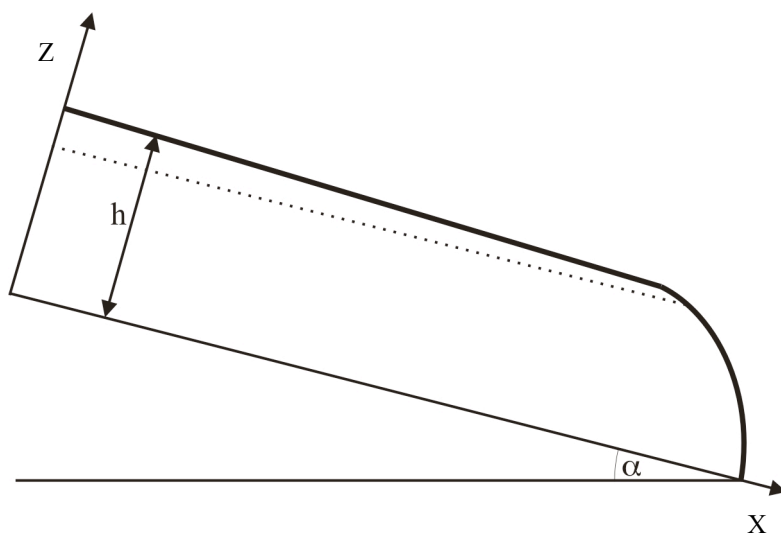


Fig. 1.10 - Ecoulement sur un plan incliné

Dans ces conditions $\mathbf{u} = u_x(Z)$ et les équations du mouvement admettent une solution analytique (Dragoni et al., 1986) :

$$\begin{cases} u_x(Z) = \frac{\tau_c h^2}{2\mu h_{cr}} \left(1 - \frac{h_{cr}}{h}\right)^2, & h - h_{cr} < Z \leq h \\ u_x(Z) = \frac{\tau_c}{2\mu h_{cr}} (2h - Z)Z - \frac{\tau_c}{\mu} Z, & 0 \leq Z \leq h - h_{cr} \end{cases} \quad (1.8)$$

avec h_{cr} solution de :

$$\rho g h \left(\sin \alpha - \frac{dh}{dX} \cos \alpha \right) = \tau_c \quad (1.9)$$

Le profil de vitesse est représenté sur la figure 1.11.

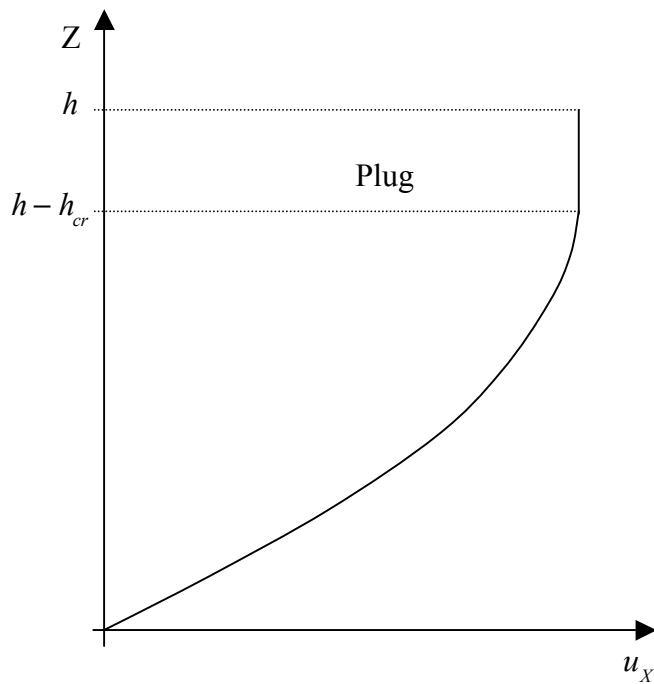


Fig. 1.11 - Profil de vitesse

On obtient le débit par unité de longueur par simple intégration et on trouve :

$$q = \frac{\tau_c h_{cr}^2}{3\mu} \left(a^3 - \frac{3}{2} a^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (1.10)$$

avec $a = h / h_{cr}$.

Comme le montre le profil de vitesse (Fig. 1.11), la partie supérieure de l'écoulement, le *plug*, se meut à vitesse constante, ce qui est effectivement observé sur le terrain.

Même si cet écoulement semble éloigné de notre problème tridimensionnel initial, il tient compte du caractère non newtonien de la lave et met en évidence le *plug*. De plus, il présente l'avantage de donner lieu à une solution analytique. C'est la raison pour laquelle il constitue le point de départ de nombreux modèles, dont le nôtre.

1.2 Approches numériques

1.2.1 Résolution numérique des équations du mouvement

Une coulée de lave est un écoulement tridimensionnel, à surface libre, d'un fluide complexe modélisé par les équations de Stokes couplées non linéairement à l'équation de l'énergie par l'intermédiaire de la relation contraintes - déformations. La résolution de ces équations est un problème numérique très délicat pour lequel il n'existe pas de méthode universelle. Les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées pour résoudre ce type de problème sont les éléments finis, les différences finies et des méthodes particulières comme, par exemple, les SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*).

Eléments finis et différences finies

Le principe de base des éléments finis et des différences finies est la transformation des équations aux dérivées partielles en un grand système creux d'équations algébriques à travers une décomposition spatiale du domaine de calcul (Fig. 1.9).

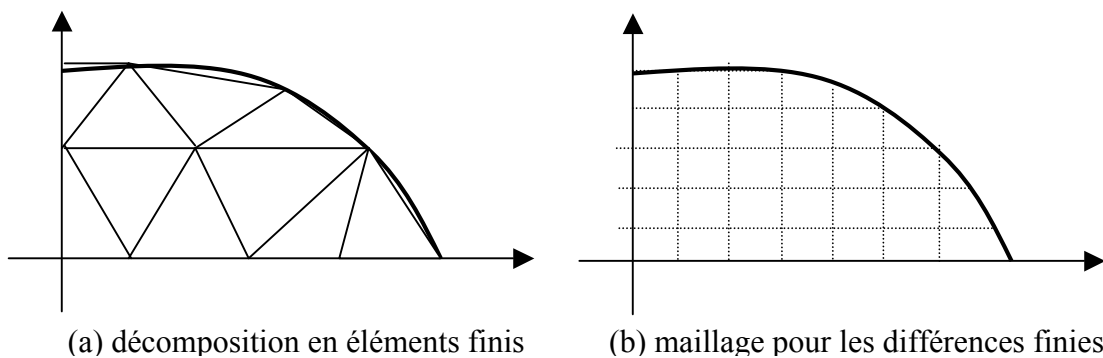


Fig. 1.12 - Exemples de décompositions spatiales

Comme la résolution de systèmes non linéaires est un problème numérique très difficile, il faut s'attacher à faire en sorte que le système obtenu soit linéaire, ce qui permet alors l'emploi de méthodes numériques très performantes. Le terme de transport des équations de Navier-

Stokes $\left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i$ est non linéaire et doit alors faire l'objet d'un traitement approprié. Par

contre, les équations de Stokes, avec viscosité constante, donnent naturellement lieu à un

système linéaire. Malheureusement, dans notre cas, la relation viscosité température est fortement non linéaire, et cela entraîne des difficultés numériques supplémentaires avec un temps de calcul en conséquence.

De plus, comme le volume de la coulée augmente, il faudra périodiquement effectuer une étape de décomposition du domaine. Avec les éléments finis, cela implique un remaillage périodique d'une grande partie du domaine. Pour les différences finies, la difficulté provient de la surface libre : pour assurer de bons résultats numériques, les points du maillage doivent coïncider avec la surface libre du domaine. Pour respecter cette condition lors de l'évolution de la coulée, la aussi, il faudra remailler périodiquement.

Vu l'ampleur et la durée d'une éruption, on comprend aisément pourquoi l'utilisation de l'équation de Barré de Saint-Venant (1.7) semble très attrayante : on réduit la dimension du problème de 3 à 2 ce qui diminue considérablement le coût en calcul. Mais cela se fait au détriment de la description physique du phénomène et pose le problème de l'évaluation des nouveaux paramètres nécessaires à cette formulation et, même sous cette forme, la résolution numérique des équations est loin d'être simple.

Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH)

Une alternative est de considérer le fluide comme un ensemble de particules qui interagissent entre elles de manière locale et dont on suivra la trajectoire : c'est le principe de base des SPH.

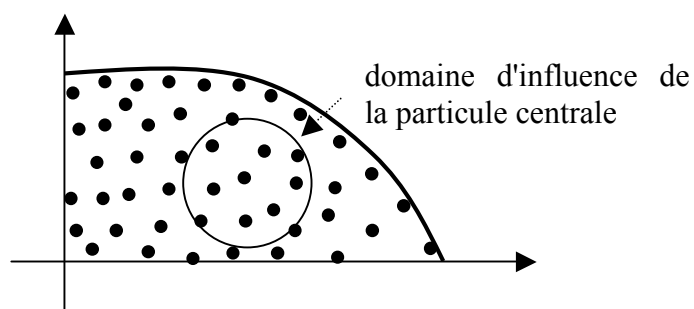


Fig. 1.13 - Particules dans une simulation SPH

Les équations du problème sont alors reformulées et l'on aboutit, pour chaque particule, à des équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution temporelle des différentes variables. Si l'on utilise un schéma d'intégration explicite le problème se réduit alors à la résolution d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires indépendantes, ceci ne nécessitant pas la résolution d'un système algébrique.

1.2.2 Simulation holistique

Pour la prévention des risques volcaniques, l'information utile est l'évolution temporelle de la coulée. La résolution des équations est un moyen d'y arriver mais passe par le calcul des champs de vitesse et de température, qui, dans notre cas, ne sont que des données intermédiaires dont le coût de calcul est très important.

Il est donc tout à fait naturel d'envisager une approche purement holistique, radicalement différente de la résolution numérique, où la seule chose que l'on cherche à reproduire est l'évolution de la morphologie de la coulée.

On peut alors envisager des modèles probabilistes où l'on calcule un ensemble de trajectoires selon la ligne de plus grande pente en perturbant légèrement la topographie ou des modèles basés sur les automates cellulaires reproduisant la propagation de la lave sur le terrain.

Cependant les modèles probabilistes évoqués ci-dessus produisent un ensemble de trajectoires et ne peuvent donc rendre compte ni de l'évolution temporelle du champ de lave, ni de son épaisseur.

En revanche, l'approche utilisant des automates cellulaires permet d'obtenir ces informations tout en nécessitant des capacités de calcul relativement modestes.

1.3 Typologie des sources d'information utilisées

Conformément à la nomenclature définie par CODATA (Bonnet et al., 1980), on distinguera les catégories de sources suivantes :

- les données factuelles quantitatives
- les données factuelles qualitatives
- les données bibliographiques
- les données factuelles élaborées

Les données factuelles nécessaires à la construction de notre système d'information sont fournies par les images satellitaires infrarouge accessibles par Internet et remises à jour à chaque passage des satellites. Pour chacune des longueurs d'onde captées, nous disposons d'une matrice de données numériques qui représente la brillance (mesurée dans la bande considérée) associée à une zone géographique déterminée par la résolution spatiale du capteur, le tout étant fourni dans un format informatique de type image. Nous avons utilisé les données provenant des senseurs MODIS et AVHRR qui sont disponibles gratuitement. L'exploitation de ces données fournit une évaluation du débit de la coulée ou un indice thermique normalisé qui permet de déceler la présence d'une anomalie thermique précédant l'éruption. L'obtention de ces informations est tributaire des conditions atmosphériques ainsi que des conditions de prise de vue du satellite lors de son passage.

Dans le cas où les données précédentes ne pourraient aboutir à une évaluation du débit, nous aurons recours à la littérature scientifique publiée (données bibliographiques) ou aux données fournies par des experts (données factuelles qualitatives) dont la validité et la qualité sont associées à la notoriété de l'expert ou de son équipe. Les données bibliographiques correspondent à l'étude d'éruptions passées et ne peuvent rendre compte précisément de la situation présente. Quant aux données factuelles qualitatives, elles doivent être, de par leur nature, utilisées avec précaution.

La création de cartes de risque repose sur le traitement statistique d'un grand nombre d'éruptions fictives simulées pour lesquelles la courbe de débit ainsi que la position des bouches éruptives sont par définition des données factuelles qualitatives.

Les données factuelles élaborées utilisées dans notre cas se résument à la topographie, qui provient du traitement mathématique informatisé de données factuelles issues de mesures satellitaires, aériennes, LIDAR ou RADAR.

L'exploitation de ces différentes sources nous permet de créer les informations élaborées suivantes :

- débit (information élaborée d'ordre 1)
- indice thermique normalisé (information élaborée d'ordre 1)
- simulation de l'évolution de la coulée (information élaborée d'ordre 2)
- création de cartes de risques (information élaborée d'ordre 3)

La création et la mise à disposition de ces informations élaborées constitue un système de veille (Dou et al., 1990) destiné aux vulcanologues et à la protection civile.

1.4 Etat de l'art

Un des buts principaux de la vulcanologie est la production de modèles permettant de simuler l'évolution des phénomènes destructifs liés à l'activité volcanique. En particulier, la connaissance du trajet le plus probable d'une coulée de lave est nécessaire pour la gestion territoriale à long et moyen terme (Wadge et al., 1994).

Malheureusement, il est très difficile d'établir une relation directe entre les propriétés physiques de la lave et les caractéristiques morphologies de la coulée comme sa longueur et sa surface (Pinkerton et Wilson, 1994; Gregg et Fink, 1996). Ceci a conduit à élaborer un certain nombre de modèles numériques que nous passerons en revue ci-dessous en les classant selon les équations de départ et l'approche numérique employée, résolution numérique ou méthode purement holistique.

A notre connaissance il n'existe pas dans la littérature de modèle numérique pour la résolution des équations complètes du mouvement (1.5) et (1.6). Les travaux qui s'en rapprochent le plus sont ceux de Stora et al. (1999) qui utilisent les SPH pour obtenir des images de synthèse réalistes d'une éruption volcanique dans le cadre de la réalité virtuelle. Ces travaux ne portent pas sur la vulcanologie mais sur la réalité virtuelle et ne sont pas directement utilisables dans le cadre de notre système d'information, mais sont en partie à l'origine du choix que nous avons fait d'utiliser les SPH dans le cadre de la résolution numérique exposée dans la troisième partie.

Les travaux de Costa et Macedonio (2005) traitent du problème de la simulation de l'évolution d'une coulée à partir des équations de Barré de Saint-Venant et comportent donc les difficultés évoquées au paragraphe 1.1.5 : perte d'information sur les variations des différentes variables par rapport à la direction verticale, introduction de paramètres semi empiriques difficilement évaluables, complexité du problème numérique résultant.

Harris et Rowland (2001) proposent quant à eux la résolution du problème simplifié unidimensionnel dans le cadre d'un écoulement de lave canalisé, qui, bien entendu, suppose connue la largeur du canal dans lequel la lave s'écoule.

En raison de la complexité du problème, et des difficultés inhérentes aux différentes approches numériques rappelées ci-dessus, un certain nombre de modèles holistiques ont été proposés.

Favalli et al (2005) ont proposé un modèle probabiliste fondé sur des petites perturbations de la topographie (cf 1.2.2) qui ne peut répondre aux objectifs que nous nous sommes fixés.

Seule l'utilisation d'automates cellulaires est en mesure de fournir un modèle holistique permettant de décrire l'évolution temporelle de la coulée. Cette approche a donc donné lieu à un ensemble de travaux rappelés chronologiquement ci-dessous :

- Crisci et al. (1986) ont été les premiers à utiliser les automates cellulaires dans ce cadre, mais en faisant le choix de regrouper tous les phénomènes physiques sous-jacents (refroidissement, évolution de la viscosité, ...) en un seul paramètre semi empirique qui ne peut être déterminé de manière fiable qu'à posteriori.

- Ishiara et al. (1990) poursuivent la même idée en basant la fonction d'évolution de leur automate cellulaire sur la solution analytique de l'écoulement d'un fluide binghamien sur un plan incliné (cf 1.1.5). Néanmoins leur modèle ne permet pas de décrire l'évolution d'une coulée sur un terrain plat.

- Miyamoto et al. (1997) poursuivent les travaux d'Ishiara en modifiant la fonction d'évolution de l'automate cellulaire pour prendre l'évolution sur terrain plat, et sont les premiers à envisager une méthode censée palier à l'anisotropie intrinsèque induite par l'utilisation des automates cellulaires (cf 2.2.2).

Pour la partie simulation, nous avons généralisé le modèle de Miyamoto pour arriver à rendre compte de l'évolution de la coulée quelle que soit la résolution du terrain digital à disposition, et ce dans tous les cas de figure et notamment le cas de l'Etna.

En ce qui concerne l'évaluation du débit nous avons utilisé la méthode développée par Harris et al. (1998) basée sur le traitement d'images satellitaires infrarouge.

Il n'existe pas à l'heure actuelle de système d'information complet répondant aux besoins évoqués dans l'introduction. A partir de ce constat et de l'état de l'art résumé ci-dessus notre travail a consisté à définir les spécifications du système à réaliser, à créer ou à faire évoluer les modèles mathématiques nécessaires et à en assurer l'informatisation et l'intégration dans

l'environnement informatique utilisé à l'INGV. En outre, pour améliorer la qualité de l'information produite il est apparu nécessaire de développer ex nihilo un ensemble d'outils informatiques d'analyse numérique, conçus pour permettre, à terme, de pouvoir affronter la problématique de l'évolution d'une coulée de lave à l'aide d'une simulation numérique directe sur des calculateurs parallèles.

Deuxième partie
Modèle pour la prévention du risque
volcanique

2.1 Spécificités techniques

2.1.1 Analyse des besoins

Lors d'une éruption, l'activité principale l'INGV de Catane est la production de rapports concernant l'état des coulées ainsi que leur probable évolution. Ces rapports constituaient jusqu'à présent la source de données principale utilisée par la Protection Civile pour planifier et organiser l'évacuation des zones à risque et pour évaluer l'impact d'un éventuel ouvrage de détournement. Lors des phases de forte activité éruptive, l'INGV peut produire plusieurs rapports par jour.

Pour permettre la réactivité nécessaire lors d'une éruption, l'INGV de Catane doit disposer d'un modèle permettant de prévoir l'évolution d'une coulée. Comme les paramètres d'entrée principaux de tout modèle sont la topographie et le débit de lave, il faudra aussi disposer d'une source de données topographique ainsi que d'une méthode d'évaluation du débit.

Les résultats à fournir sont des cartes d'évolution de la coulée, donc des données topographiques, et doivent être traités dans l'environnement prévu à cet effet et utilisé à l'INGV: un Système d'Information Géographique (SIG).

Le système à développer doit donc :

- permettre la simulation d'une éruption de moyenne importance (60 jours et 20 millions de mètres cubes) en quelques heures avec les machines disponibles à l'INGV;
- posséder un module d'évaluation du débit;
- être intégré à Système d'Information Géographique (SIG).

2.1.2 Choix techniques

Le choix de la méthode employée pour les simulations est conditionné par la contrainte sur le temps nécessaire pour une simulation. Que ce soit avec les éléments finis ou avec les SPH, le nombre important d'éléments ou de particules (~ 100000 pour une coulée de $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$) nécessaires à la résolution des équations complètes du problème (1.5 et 1.6) n'est, pour le moment, pas compatible avec cette contrainte. A l'heure actuelle, seules les méthodes holistiques nous semblent permettre d'atteindre cet objectif.

Par ailleurs, le modèle est destiné à être utilisé pendant les éruptions, il ne doit donc pas contenir de paramètres semi empiriques évalués à posteriori : nous nous astreindrons à ne faire intervenir que des paramètres physiques mesurables et à limiter au maximum leur nombre.

Ceci nous a conduit à construire un modèle basé sur les automates cellulaires et la solution analytique des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide binghamien sur un plan incliné (1.10).

En ce qui concerne l'évaluation du débit la seule méthode utilisable pendant une éruption repose sur le traitement d'images infrarouge et c'est celle que nous avons implémentée.

L'ensemble des logiciels que nous développerons sera réalisé en C++ et conçu pour pouvoir être utilisé sur les différents systèmes d'exploitation (Unix/Linux, Mac OSX, Windows) présents à l'INGV.

Aussi bien pour le SIG que pour les logiciels utilisés pour le traitement d'images infrarouge nous n'utiliserons que des logiciels libres (*open source*) sous licence GPL (*Gnu Public License*).

2.2 Simulation holistique de l'évolution d'une coulée

2.2.1 Les automates cellulaires

Les automates cellulaires ont été inventés par Stanislaw Ulam et John von Neumann dans les années 1950. Ce dernier essaya de les utiliser comme modèles pour expliquer la vie cellulaire et pour prouver qu'un système artificiel était capable de s'auto reproduire. Dans sa définition la plus générale, un automate cellulaire est un système composé de cellules qui se trouvent dans un état donné, le nombre total d'états possibles étant fini. Ces états changent au cours du temps de manière :

- simultanée : le temps est discrétisé et les états à l'instant $t + \Delta t$ ne dépendent que de ceux à l'instant t ;
- locale : l'état d'une cellule est déterminé par celui des cellules voisines, la règle définissant le voisinage étant fixe.

Il existe de très nombreuses formes d'automates cellulaires dépendant de la dimension, du type de règles adoptées pour les changements d'états, du nombre de cellules et de la plus au moins grande localité des règles.

Leur propriété principale est d'exhiber un comportement global complexe pourtant régit par des règles simples et locales. Ainsi ils ont servi de modèle et d'outils d'analyse pour certains systèmes réels comme les écoulements turbulents ou la croissance cristalline.

Un écoulement de lave est un phénomène complexe, il est tout à fait naturel d'essayer de le modéliser avec des automates cellulaires comme l'ont fait Ishiara et Miyamoto dont nous poursuivrons les travaux.

2.2.2 Modèle holistique basé sur les automates cellulaires

Idée générale

On peut considérer une coulée de lave comme un phénomène invasif se propageant sur une topographie donnée. Dans la mesure où la topographie est fournie sous forme de terrain numérique avec une résolution donnée le modèle le plus intuitif consiste à utiliser un automate cellulaire bidimensionnel dont la taille des cellules est liée à la résolution du terrain

numérique et l'élévation z du terrain est associée à chaque cellule (Fig. 2.1), la lave se propageant d'une cellule à l'autre, de proche en proche.

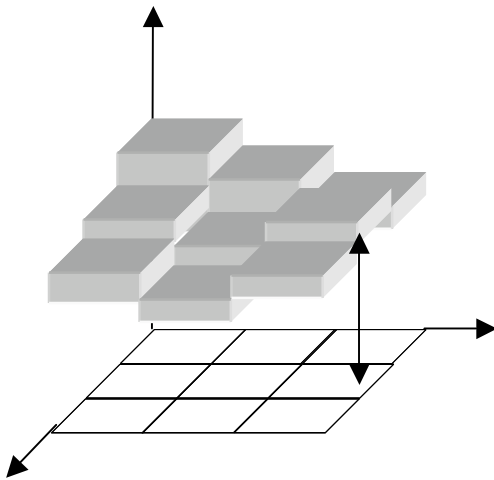


Fig. 2.1 - Disposition des cellules par rapport au terrain

Nous utiliserons des cellules carrées ou hexagonales, qui fournissent avec les triangles équilatéraux les seuls pavages réguliers du plan, et nous limiterons le voisinage de chaque cellule aux cellules adjacentes. Pour les cellules carrées, on obtient deux types de voisinages, de 4 ou 8 voisins et pour les cellules hexagonales un voisinage de 6 voisins (Fig. 2.2).

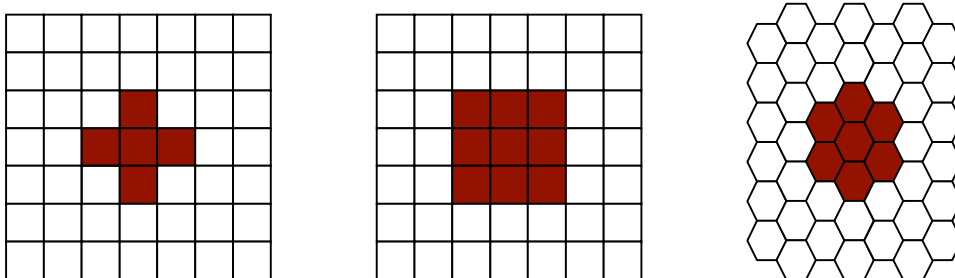


Fig. 2.2 - Les différents types de cellules et de voisinages

Il reste à définir les différentes variables d'état ainsi que les fonctions assurant leur évolution.

Variables d'état et fonction d'évolution

Pour chaque cellule, nous définirons deux variables d'état :

- la hauteur de lave h ;
- la quantité de chaleur Q .

En s'en tenant strictement à la définition, comme ces variables sont continues, l'ensemble des valeurs qu'elles peuvent prendre n'est pas fini, donc il ne s'agit pas d'un automate cellulaire. Pour justifier de l'emploi du terme "automate cellulaire" on peut se retrancher derrière l'argument suivant : le modèle aboutira à un programme informatique où toutes les variables sont codées sur un nombre fini de bits et donc ne prennent qu'un ensemble fini de valeurs. Il ne s'agit que d'un problème de terminologie sans aucune influence sur le développement du modèle et nous emploierons donc par la suite le terme d'automate cellulaire comme le font par ailleurs tous les auteurs.

Pour construire la fonction d'évolution nous considérerons que :

- la lave s'écoule d'une cellule à l'autre comme un fluide binghamien sur un plan incliné,
- la température à l'intérieur d'une cellule est uniforme;
- la viscosité et la contrainte seuil dépendent uniquement de la température selon les relations (1.4);
- les seuls échanges thermiques avec l'extérieur sont les pertes radiatives en surface.

En première approximation, ne considérer que les pertes radiatives est parfaitement licite car elles sont, en valeur absolue, supérieures d'un facteur 10 aux autres échanges thermiques (Harris et al., 2001).

Nous noterons avec l'indice i les variables et paramètres relatifs au i -ème des N voisins, sans indice ceux relatifs à la cellule considérée et Δx la distance entre les centres des cellules.

Dans ces conditions, il y a écoulement entre la cellule et son i -ème voisin si $h > h_{cr}$ et le débit q_i est donné par la relation (1.10) :

$$q_i = w \frac{\tau_c h_{cr}^2}{3\mu} \left(a^3 - \frac{3}{2} a^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1)$$

ou $a = \frac{h}{h_{cr}}$ et w est le périmètre de contact entre deux cellules (si P est le périmètre d'une cellule $w = \frac{P}{N}$).

Il nous faut évaluer la hauteur critique h_{cr} solution de $\rho g h \left(\sin \alpha - \frac{dh}{dX} \cos \alpha \right) = \tau_c$ (équ. 1.9).

α est la pente du terrain et $\frac{dh}{dX}$ celle de la surface libre et on a $\sin \alpha = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}}$,

$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}}$ et, pour α petit, $\frac{dh}{dX} \approx \frac{\Delta h}{\Delta x}$ avec $\Delta z = z - z_i$ et $\Delta h = h - h_i$ (Fig. 2.3). On

obtient alors :

$$h_{cr} \approx \frac{\tau_c \sqrt{\Delta z^2 + \Delta x^2}}{\rho g (\Delta z - \Delta h)} \quad (2.2)$$

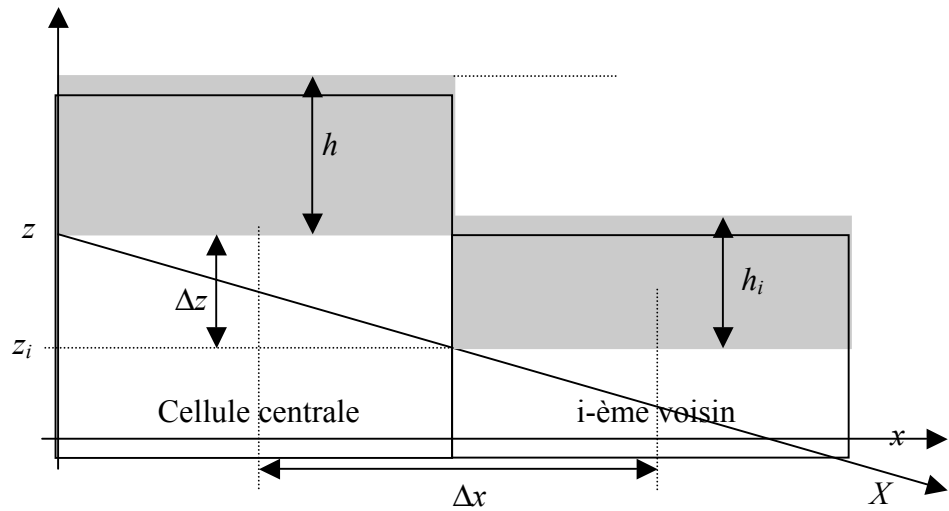
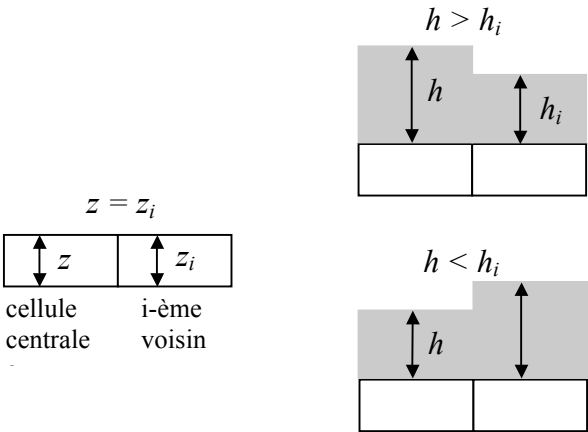
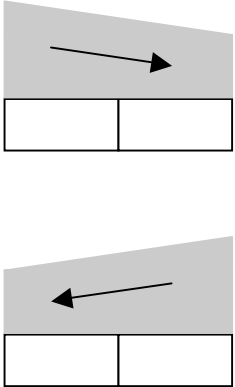
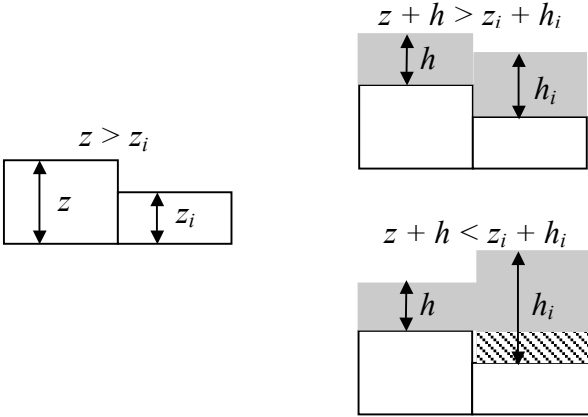
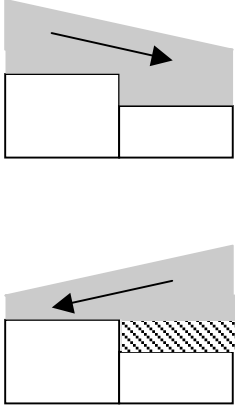
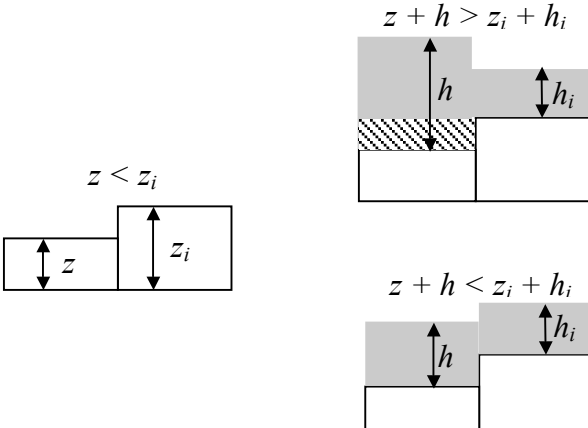
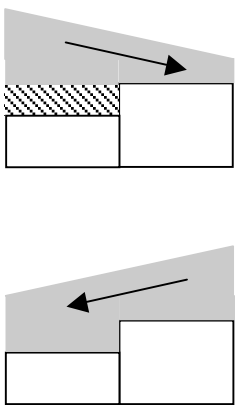


Fig. 2.3 - Calcul de h_{cr}

La relation (2.2) n'est valable que si la configuration des deux cellules adjacentes est équivalente à celle représentée dans la figure 2.3 : $\Delta z = z - z_i \geq 0$, $\Delta h = h - h_i \geq 0$ et $\Delta h < \Delta z$. Bien entendu c'e n'est pas systématiquement le cas, mais on peut toujours s'y ramener en remplaçant Δz et Δh par des valeurs "effectives", Δz_{eff} et Δh_{eff} , dépendant de la configuration des deux cellules (Fig. 2.4).

Fig. 2.4 - Configurations et valeurs de Δz_{eff} et Δh_{eff} associées

Configurations possibles	Δz_{eff} et Δh_{eff}	Sens de l'écoulement
<p style="text-align: center;">$z = z_i$</p>  <p style="text-align: center;">cellule centrale i-ème voisin</p>	<p>$\Delta z_{eff} = 0$</p> <p>$\Delta h_{eff} = h_i - h$</p> <p>$\Delta z_{eff} = 0$</p> <p>$\Delta h_{eff} = h - h_i$</p>	
<p style="text-align: center;">$z > z_i$</p> 	<p>$\Delta z_{eff} = z - z_i$</p> <p>$\Delta h_{eff} = h_i - h$</p> <p>$\Delta z_{eff} = 0$</p> <p>$\Delta h_{eff} = z + h - z_i - h_i$</p>	
<p style="text-align: center;">$z < z_i$</p> 	<p>$\Delta z_{eff} = 0$</p> <p>$\Delta h_{eff} = z_i + h_i - z - h$</p> <p>$\Delta z_{eff} = z_i - z$</p> <p>$\Delta h_{eff} = h - h_i$</p>	

Lave participant à l'écoulement

Lave ne participant pas à l'écoulement

En procédant ainsi on a toujours $h_{cr} > 0$ et $h_{cr} = \infty$ uniquement si $\Delta z_{eff} = \Delta h_{eff} = 0$. Dans ce dernier cas il n'y a pas d'écoulement.

Le débit total entrant ou sortant de la cellule est :

$$q = \sum_{i=1}^N q_i + q_c \quad (2.3)$$

où q_c est le terme source correspondant au débit de la bouche associée à la cellule. Pour une cellule qui n'est située sur aucune bouche on a évidemment $q_c = 0$.

La hauteur de lave à l'instant successif est alors donnée par :

$$h(t + \Delta t) = h(t) + \frac{q\Delta t}{A} \quad (2.4)$$

avec A surface de la cellule.

Pour éviter les instabilités numériques on impose qu'une cellule ne puisse se vider en un pas de temps ce qui implique :

$$\Delta t \ll \frac{A}{|q|} h \quad (2.5)$$

A chaque pas de temps on ajustera Δt pour qu'il vérifie (2.5) pour toutes les cellules.

La cellule échange avec ses voisines une quantité de chaleur ΔQ_m par transfert de masse, perd une quantité de chaleur ΔQ_r par pertes radiatives. On a donc :

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) + \Delta Q_m - \Delta Q_r \quad (2.6)$$

avec

$$\Delta Q_m = \left(\sum_{q_i > 0} q_i T_i + \sum_{q_i < 0} q_i T + q_c T_e \right) \rho c_v \Delta t \quad (2.7)$$

et

$$\Delta Q_r = \varepsilon k_b S (T_{surf}^4 - T_{ext}^4) \Delta t \quad (2.8)$$

où T_e est la température d'éruption et S la surface d'une cellule.

La température est calculée à partir de la quantité de chaleur Q :

$$T = \frac{Q}{\rho c_v h A} \quad (2.9)$$

Comme la température de surface T_{surf} est rapidement nettement inférieure à la température de la cellule on applique la pénalité suivante :

$$T_{surf} = \begin{cases} T, & \text{si } T > T_c \\ T - T_p, & \text{si } T \leq T_c \end{cases} \quad (2.10)$$

Les mesures et observations sur le terrain nous conduisent à prendre $T_c = 1250$ °K, ce qui correspond à la température de formation des clinkers (petits bloc de lave solidifiée en surface de l'écoulement) et $T_p = 300$ °K .

La solidification est prise en compte de la manière suivante : pour une cellule donnée, dès que $T < T_s$, on considère qu'une hauteur de lave égale à $h_s = \frac{hc_p(T_s - T)}{L}$ s'est solidifiée. On fixe alors la température de la cellule à T_s , on incrémente son élévation de h_s et on décrémente la hauteur de lave qu'elle contient de h_s .

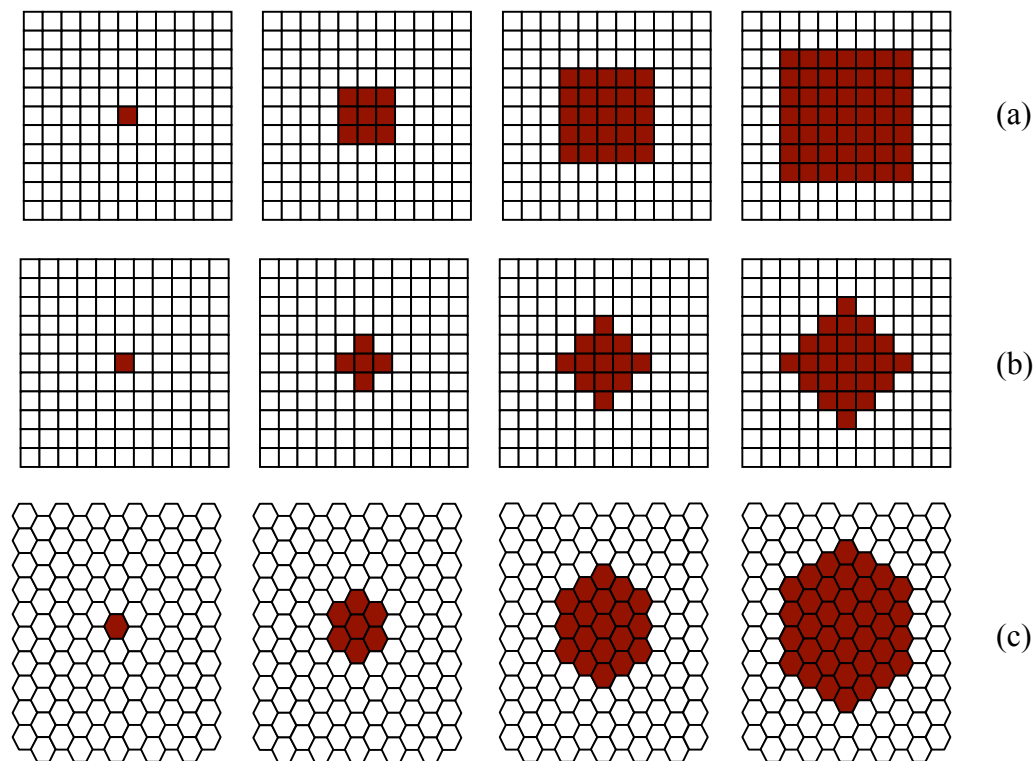
Ainsi définie la fonction d'évolution assure la conservation de la masse et de l'énergie de la coulée.

Anisotropie intrinsèque

Malheureusement avec un tel modèle, le résultat obtenu dépend de la forme des cellules ainsi que de leur orientation par rapport au terrain.

En ce qui concerne la forme, on le comprend facilement en appliquant le modèle à la croissance d'un dôme de lave sur un terrain plat. Comme on peut le voir sur la figure 2.5, qui

représente les toutes premières itérations, la base du dôme acquiert la forme de la cellule utilisée aussi bien avec des cellules carrées à 4 (b) ou 8 (a) voisins qu'avec des cellules hexagonales (c). Ceci ne dépend pas de la forme de la fonction d'évolution et ne se limite pas



aux premières itérations (Fig. 2.6). Pour les cellules carrées, on peut imaginer utiliser de manière aléatoire les configurations à 4 et 8 voisins lors de l'évolution de l'automate, mais cela ne fait que retarder l'apparition de ce phénomène (Fig. 2.7).

Fig. 2.5 - Premières itérations pour la croissance d'un dôme de lave

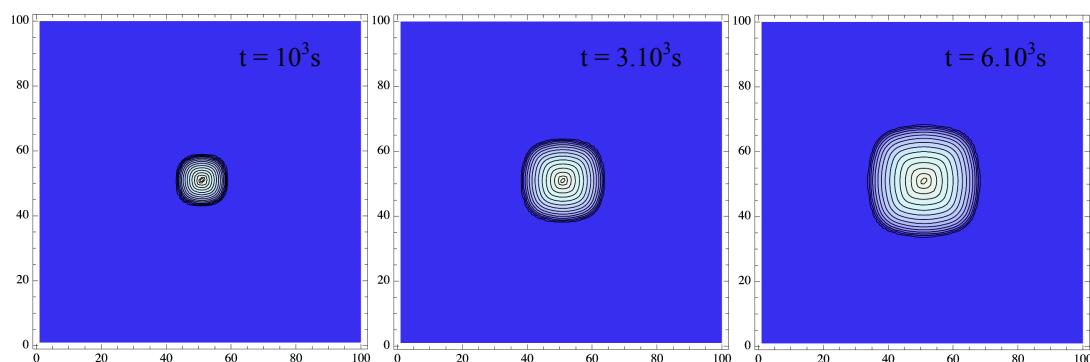


Fig. 2.6 - Croissance d'un dôme de lave

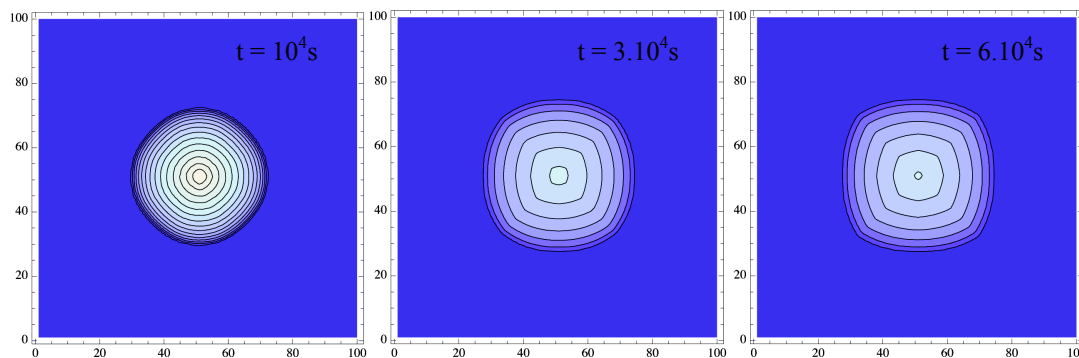
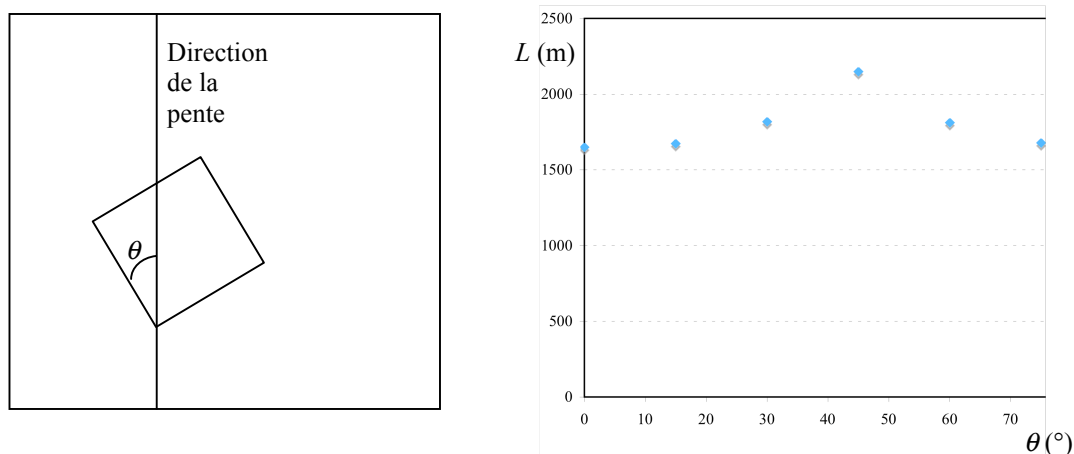


Fig. 2.7 - Croissance d'un dôme de lave avec mélange aléatoire des deux voisinages

Pour étudier l'effet de l'orientation des cellules par rapport au terrain nous avons utilisé le modèle pour simuler la progression d'une coulée sur un terrain de pente constante. La longueur de la coulée L dépend fortement de celle-ci (Fig. 2.8).



Les simulations sont effectuées pour une pente de 9° et un débit de $3 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ sans refroidissement. La longueur de la coulée est calculée à $t = 2.10^4 \text{ s}$.

Fig. 2.8 - Longueur en fonction de l'orientation

Nous avons résolu ces problèmes par une approche de type Monte-Carlo : on répète N_{mc} fois la même simulation, le voisinage de chaque cellule étant construit de manière aléatoire, et l'on calcule la moyenne des résultats obtenus.

Pour construire ce voisinage on affecte un centre fictif, de coordonnées aléatoires, à chaque cellule et on considère comme voisines les cellules dont la distance entre les centres fictifs est inférieure à une valeur donnée R (Fig. 2.9).

Cette opération est effectuée avant le début de chaque simulation.

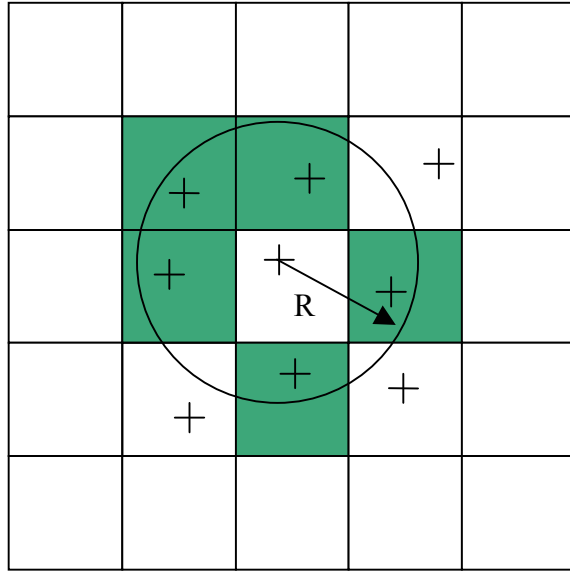
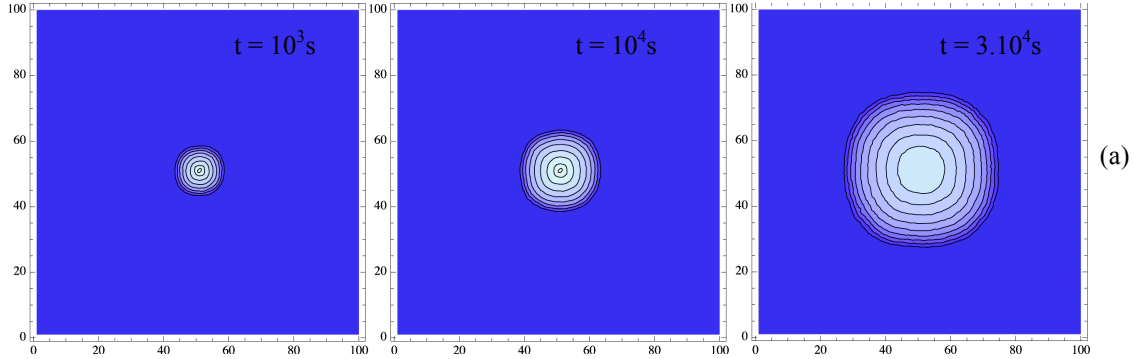


Fig. 2.9 - Construction du voisinage aléatoire

Nous avons appliqué cette méthode aux deux exemples précédents avec $N_{mc} = 15$ et $R = 1.2\Delta x$ (Fig. 2.10). Dans les deux cas, cette dépendance a été presque intégralement éliminée.



(a) croissance d'un dôme de lave sur terrain plat.

(b) variation de la longueur en fonction de l'orientation des cellules par rapport au terrain.

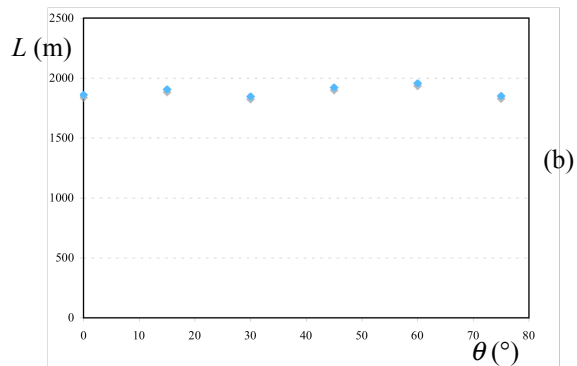


Fig. 2.10 - Utilisation du voisinage aléatoire

Limites du modèle

La fonction d'évolution de notre modèle est construite à partir de la solution analytique de l'écoulement, dans les conditions de Stokes, d'un fluide binghamien sur un plan incliné. Cette situation correspond bien à celle de l'écoulement réel sauf à proximité du cratère, où la lave est plus fluide et les conditions de Stokes ne sont pas toujours vérifiées, et en fin d'éruption à proximité du front, où l'écoulement ne correspond plus réellement à celui d'un fluide. De plus, le débit ne peut être déterminé avec précision au tout début de l'éruption. On doit donc s'attendre à une moindre précision au début de l'éruption et en fin d'éruption au niveau du front.

Pour pouvoir simuler correctement la formation des berges de lave solidifiée qui apparaissent au bord de la coulée lors de son refroidissement, il faut au moins trois cellules : une pour chaque berge et une pour la partie liquide de la coulée. Par conséquent notre modèle ne pourra pas simuler correctement la formation d'un canal de lave d'une largeur inférieure à $3\Delta x$.

Développement informatique

Le code correspondant à notre modèle a été développé en C++ et peut être exécuté sur les différentes plates-formes présentes à l'INGV: Linux/Unix, Mac OS X et Windows.

Les différents paramètres nécessaires à une simulation sont regroupés dans trois fichiers :

- un fichier contenant les données topographiques;
- un fichier contenant les positions des différentes bouches éruptives, la température d'éruption et les données relatives à la courbe de débit;
- un fichier contenant les autres paramètres (densité, conductivité thermique, coefficients des lois de viscosité et contrainte seuil, ...).

L'organigramme complet du code est représenté dans la figure 2.11.

Le débit sera évalué à partir d'images satellites selon la méthode présentée en 2.2 ou, en l'absence de celles-ci, à partir de mesures faites sur le terrain.

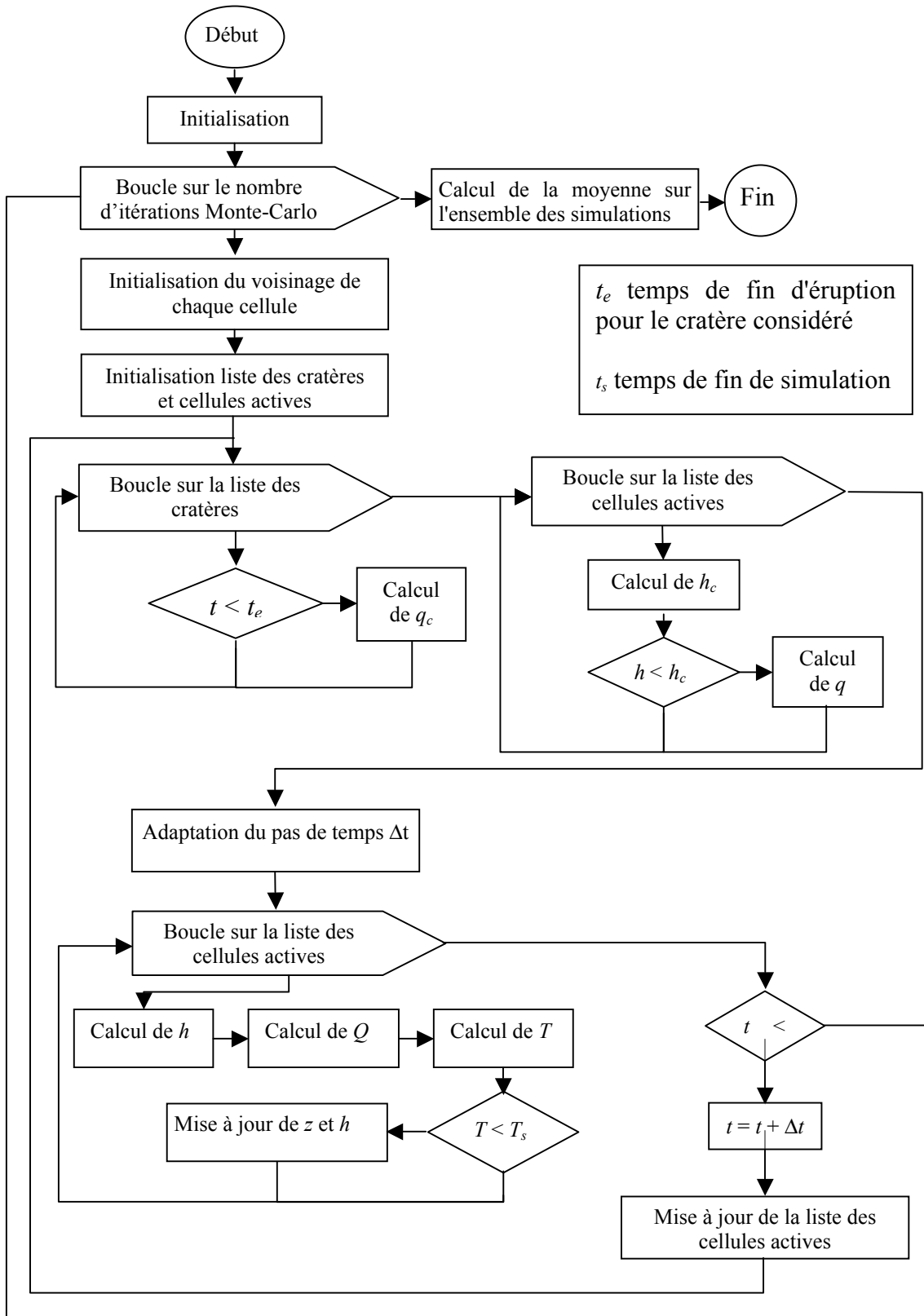


Fig. 2.11 - Organigramme du code

2.2.3 Intégration à un SIG

GRASS (*Geographic Resources Analysis Support System*) a originalement été programmé par une branche du corps d'ingénieurs de l'armée américaine. Depuis, ce logiciel est maintenu et amélioré par un ensemble de programmeurs, et officiellement maintenu par l'Université de Baylor aux États-Unis et l'Université d'Hannover en Allemagne. Comme tout logiciel libre son code source est gratuitement disponible et il est alors aisé de lui ajouter de nouvelles fonctionnalités. GRASS est un SIG à part entière et offre les mêmes fonctionnalités que les produits commerciaux. Toutes les informations relatives à GRASS se trouvent sur le site grass.itc.it.

Nous avons donc choisi d'intégrer, sous forme de module, notre modèle au SIG GRASS (Fig 2.12).

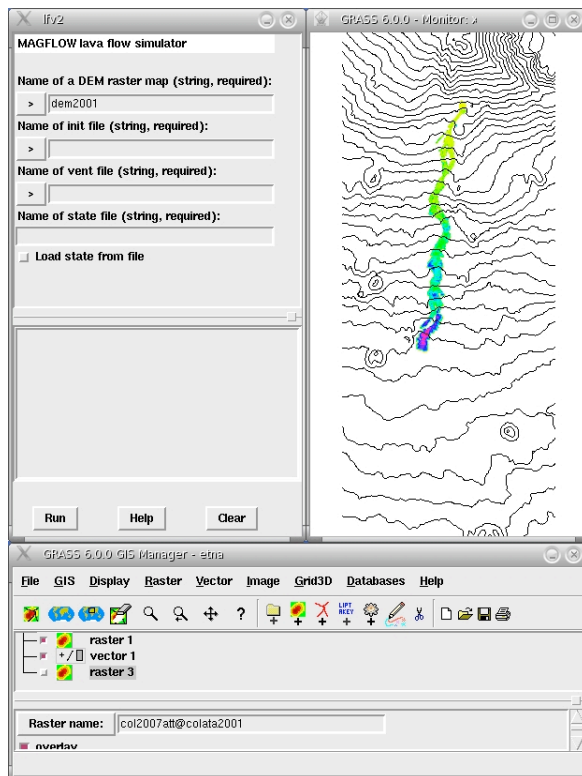


Fig. 2.12 - Intégration au SIG GRASS

GRASS nous sert de :

- base de données cartographiques à laquelle notre modèle accède directement;
- d'interface utilisateur;

- de système de post traitement des résultats produits.

Ainsi l'ensemble des opérations permettant d'exploiter les simulations, de la simulation elle-même à la production et mise en forme des données cartographiques en résultant, se déroule à l'intérieur d'un même cadre logiciel. Ceci rend le modèle facilement utilisable par les vulcanologues de l'INGV, ce qui était un des objectifs majeurs de nos travaux.

2.3 Evaluation du débit pendant l'éruption et système d'alerte

2.3.1 Théorie

Harris (Harris et al, 1997) propose d'évaluer le débit de lave q à partir du flux thermique total Φ généré par la coulée avec la relation suivante :

$$q = \frac{\Phi}{\rho(c_p(T_c - T_s) + Lf_s)} \quad (2.11)$$

où f_s (0.4 ~ 0.5) représente la fraction moyenne de lave solidifiée.

La mesure du débit se ramène donc à la mesure du flux thermique total émanant de la coulée.

Comme tous les corps, la lave émet un rayonnement dont on peut mesurer l'énergie en fonction de la longueur d'onde à l'aide de spectromètres et notamment ceux qui sont embarqués sur les satellites. Pour caractériser l'énergie rayonnée, à une longueur d'onde donnée, par une source étendue présentant des zones plus ou moins émissives, comme celle formée par une coulée, on utilise la brillance qui est le quotient de la densité du flux d'énergie reçu divisé par l'angle solide sous lequel on voit la source. La température de brillance est définie comme la température du corps noir qui aurait la même brillance à la longueur d'onde considérée.

Pendant la phase active de l'éruption, la température de surface d'une coulée varie entre la température au cratère, environ 1350 °K, et la température du front, environ 400 °K et à cause du refroidissement rapide dû aux pertes radiatives, la majeure partie de sa surface est à une température inférieure à 1000°K. Selon la loi de déplacement de Wien, la plus grande partie de l'énergie est rayonnée dans l'infrarouge moyen dans la bande des 3-4 μm . En mesurant la brillance dans cette bande ainsi que la surface S de la coulée, le flux total Φ est estimé par :

$$\Phi = \varepsilon\sigma T^4 S \quad (2.12)$$

où T est la température de brillance pour la longueur d'onde égale à la valeur centrale de la bande des 3-4 μm , c'est-à-dire 3.5 μm .

Pour évaluer l'évolution temporelle du débit il faut disposer de ces mesures avec une fréquence compatible avec l'évolution du phénomène et en tenant compte du fait que toutes les données satellitaires ne sont pas exploitables notamment si la zone à observer est couverte par des nuages ou si l'angle zénithal du satellite au moment de l'observation est trop élevé. Dans ces conditions, pour obtenir en moyenne une mesure exploitable par jour, il faut utiliser des satellites offrant plusieurs passages par jour.

Avec plusieurs passages par jour, on ne peut s'attendre à une résolution spatiale suffisante pour évaluer directement la brillance due à la seule coulée ainsi que sa surface et donc utiliser (2.12). Néanmoins, comme nous le verrons dans le paragraphe consacré au calcul du flux thermique, on peut contourner cette difficulté en utilisant conjointement les données des bandes 3-4 μm et 10-11 μm .

Par conséquent, les seuls satellites utilisables pour notre application sont ceux embarquant un spectromètre multi bande sensible dans les bandes des 3-4 μm et des 10-11 μm et offrant au moins plusieurs passages par jour.

Il y a deux satellites répondant à ces critères : le NOAA-18 et l'EOS Terra.

Caractéristiques du capteur AVHRR du satellite NOAA-18

Le NOAA-18 lancé le 20 mai 2005 est le dernier successeur du NOAA-6 lancé en 1978 dans le cadre d'un programme d'observation de la terre. Il embarque le spectromètre *Advanced Very High Resulition Radiometer* (AVHRR) dont la résolution spatiale est de 1.1 km et dont les caractéristiques spectrales sont résumées dans le tableau ci-dessous (Tab. 2.1).

Canal	Bande spectrale	Largeur de bande
1	Visible	0.58 – 0.68 μm
2	Infrarouge proche	0.73 – 1.10 μm
3	Infrarouge moyen	3.55 – 3.93 μm
4	Infrarouge thermique	10.3 – 11.3 μm
5	Infrarouge thermique	11.5 – 12.5 μm

Tab. 2.1 - Caractéristiques de l'AVHRR

Il se situe sur une orbite polaire à une altitude de 810-860 km et offre un passage toute les 6 heures.

Pour le calcul du débit, nous exploiterons les canaux 3 et 4.

Caractéristiques du capteur MODIS du satellite TERRA

Le satellite TERRA lancé en décembre 1999 dans le cadre du programme *Earth Observation System* (EOS) embarque le spectromètre *Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer* (MODIS) dont les caractéristiques sont résumées ci-dessous (Tab. 2.2).

Canal	Largeur de bande	Résolution spatiale
1	0.620 – 0.670 μm	0.25 km
2	0.841 – 0.876 μm	0.25 km
3	0.459 – 0.479 μm	0.50 km
4	0.545 – 0.585 μm	0.50 km
5	1.230 – 1.250 μm	0.50 km
6	1.628 – 1.652 μm	0.50 km
7	2.105 – 2.155 μm	0.50 km
8	0.405 – 0.420 μm	1 km
9	0.438 – 0.448 μm	1 km
10	0.483 – 0.493 μm	1 km
11	0.526 – 0.536 μm	1 km
12	0.546 – 0.556 μm	1 km
13	0.662 – 0.672 μm	1 km
14	0.673 – 0.683 μm	1 km
15	0.743 – 0.753 μm	1 km
16	0.862 – 0.877 μm	1 km
17	0.890 – 0.920 μm	1 km
18	0.931 – 0.941 μm	1 km
19	0.915 – 0.965 μm	1 km
20	3.660 – 3.840 μm	1 km
21	3.928 – 3.989 μm	1 km
22	3.928 – 3.989 μm	1 km
23	4.020 – 4.080 μm	1 km
24	4.443 – 4.498 μm	1 km
25	4.482 – 4.549 μm	1 km

26	1.360 – 1.390	μm	1 km
27	6.535 – 6.895	μm	1 km
28	7.175 – 7.475	μm	1 km
29	8.400 – 8.700	μm	1 km
30	9.580 – 9.880	μm	1 km
31	10.780 – 11.280	μm	1 km
32	11.770 – 12.270	μm	1 km
33	13.185 – 13.485	μm	1 km
34	13.785 – 14.085	μm	1 km
35	13.485 – 13.785	μm	1 km
36	14.045 – 14.385	μm	1 km

Tab. 2.2 - Caractéristiques du MODIS

Il se situe sur une orbite héliosynchrone quasi polaire à une altitude moyenne de 705 km et offre deux passages par jour sur l'Italie, l'un diurne vers 10h30 (GMT) et l'autre nocturne vers 22h30 (GMT).

Les canaux 21 et 22 présentent la même largeur de bande, mais ont une température de saturation de 500°K pour le canal 21 et de 331°K pour le canal 22.

Pour le calcul du flux thermique, nous exploiterons les canaux 21 ou 22 et 31.

Calcul du flux thermique total

Après calibration et correction, les données fournies par les spectromètres AVHRR et Modis sont des images dont chaque pixel reflète la brillance, dans la bande de fréquence correspondant au canal considéré, de la portion de terrain à laquelle il correspond.

La température de brillance que peut atteindre un pixel est limitée par la température de saturation du canal utilisé. Par conséquent nous n'utiliserons que les pixels non saturés.

La surface du terrain A représentée par un pixel varie en fonction de l'angle zénithal du satellite au moment de l'acquisition des données et est au minimum égale au carré de la résolution spatiale de l'instrument, ce minimum étant atteint en position zénithale par rapport au lieu considéré.

Pour un canal i donné, centré sur la fréquence λ_i , la brillance L_{λ_i} de chaque pixel non saturé et la température T du corps noir équivalent sont liées par la relation de Planck :

$$L_{\lambda_i}(T) = \frac{2h_p c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p c}{k_b \lambda T}\right) - 1} \quad (2.13)$$

avec $c = 2.9979 \text{ m.s}^{-1}$, vitesse de la lumière dans le vide, $h_p = 6,62617 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$, constante de Planck et $k_b = 1,380 \ 66 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, constante de Boltzmann.

Etant donnée la faible résolution spatiale de ces instruments (1.1 km et 1 km) une coulée ne correspond, dans les meilleures conditions, qu'à quelques pixels, les pixels chauds, la surface correspondant à chacun d'entre eux n'étant occupée que partiellement par de la lave (Fig. 2.13). Par conséquent il n'est pas possible d'évaluer directement le flux Φ en utilisant (2.12), à partir des brillances et des surfaces des pixels chauds.

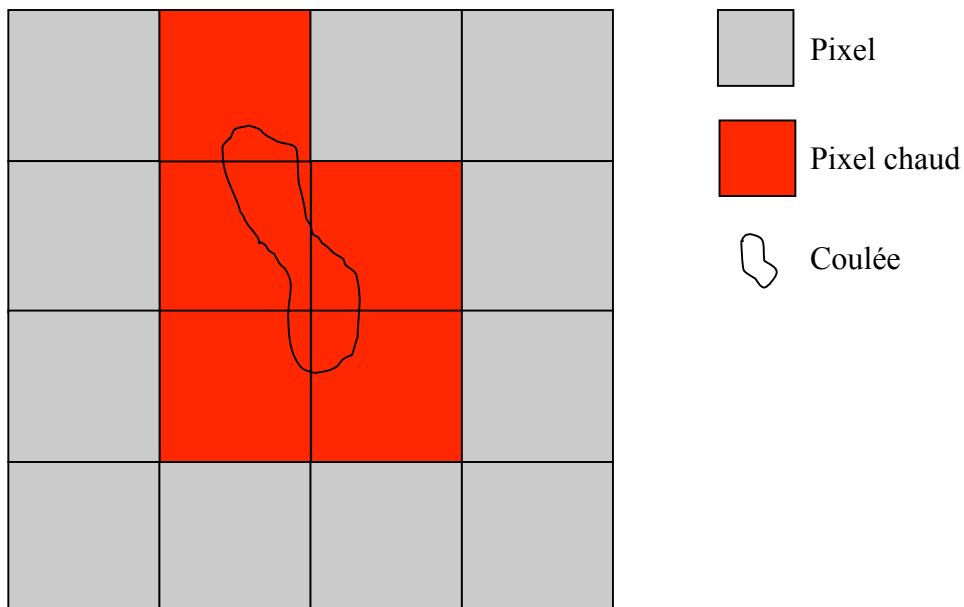


Fig. 2.13 - Pixels chauds dus à la présence d'une coulée

Pour contourner ce problème nous utiliserons la méthode "*dual band three components*" mise au point par Oppenheimer (Oppenheimer, 1993) dont le principe est résumé ci-dessous.

On considère qu'une portion de terrain contenant une partie de la coulée, représentée par un pixel chaud, se décompose en trois parties :

- une partie exempte de lave à basse température T_b , occupant la fraction p_b ;
- une partie contenant de la lave liquide à haute température T_h , occupant la fraction p_h ;
- une partie contenant la croûte à température intermédiaire T_m , occupant la fraction p_m .

Ce pixel possède une structure thermique à trois composantes (Fig. 2.14), de températures respectives T_b , T_h et T_m , chaque composante se comportant comme un corps noir.

Comme p_b , p_h et p_m représentent les trois fractions des trois composantes contenues dans le pixel, on a évidemment :

$$\begin{cases} p_b + p_m + p_h = 1 \\ p_b \geq 0, p_m \geq 0 \text{ et } p_h \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

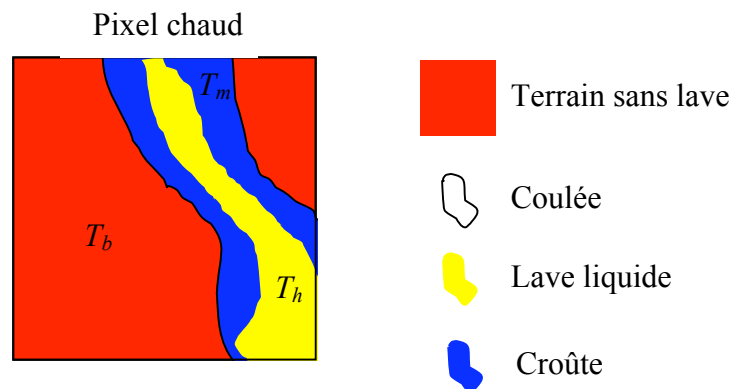


Fig. 2.14 - Fractions occupées par les trois composantes thermiques

Nous noterons L_i^* la brillance fournie par le i -ème canal du spectromètre. Si l'on dispose de deux canaux distincts i et j pour lesquels la brillance dépend significativement de la présence de lave, on a :

$$\begin{cases} L_i^* = p_b L_{\lambda_i}(T_b) + p_m L_{\lambda_i}(T_m) + p_h L_{\lambda_i}(T_h) \\ L_j^* = p_b L_{\lambda_j}(T_b) + p_m L_{\lambda_j}(T_m) + p_h L_{\lambda_j}(T_h) \end{cases} \quad (2.15)$$

Nous utiliserons pour l'AVHRR les canaux $i = 3$ et $j = 4$ et pour le Modis les canaux $i = 21$ ou 22 et $j = 31$ qui correspondent aux bandes des $3-4\mu\text{m}$ et $10-11\mu\text{m}$.

Par exemple un pixel occupé à 95% par le sol à $T_b = 293^\circ\text{K}$, à 0.1% par de la lave liquide à $T_h = 1273^\circ\text{K}$, et à 4.9% par la croûte à $T_m = 700^\circ\text{K}$ aura une température de brillance de 477°K dans la bande des $3-4 \mu\text{m}$ et de 337°K dans la bande des $10-11 \mu\text{m}$. Bien que nettement plus faible que dans la bande des $3-4 \mu\text{m}$ la contribution de lave dans la bande des $10-11 \mu\text{m}$ est significative et effectivement mesurable.

Pour évaluer la température T_b on calcule la température moyenne des pixels adjacents qui ne sont pas chauds et nous prendrons $T_h = T_e$ (température au niveau de la bouche éruptive).

Les équations (2.14) et (2.15) constituent alors un système non linéaire de trois équations à quatre inconnues p_b , p_h , p_m et T_m . Contrairement à T_h et T_b , T_m varie fortement au cours de l'éruption et il n'est pas souhaitable de fixer sa valeur. Nous résoudrons le système formé par (2.14) et (2.15) avec la méthode de Newton itérative pour différentes valeurs de T_m , comprises entre 400°K et T_s . Pour chaque valeur de T_m nous obtenons p_h et p_m et le flux thermique total s'en déduit par :

$$\Phi = \sum_{\text{pixels chauds}} \varepsilon k_b (T_h^4 p_h A + T_m^4 p_m A) \quad (2.16)$$

Nous retiendrons les valeurs maximales et minimales des flux ainsi obtenus ce qui nous permettra de calculer avec (2.11) les valeurs maximales et minimales du débit, q_{max} et q_{min} .

2.3.2 Procédure d'évaluation du débit

Les images brutes fournies par l'AVHRR et le MODIS contiennent la valeur des brillances mesurées par l'instrument. Avant de pouvoir les exploiter il faut les calibrer, associer à chaque pixel une partie donnée du terrain, c'est-à-dire les géoréférencer puis appliquer les corrections dues à la traversée de l'atmosphère. Comme on peut obtenir pour le Modis des données déjà calibrées, la calibration ne concernera que l'AVHRR. L'ensemble de ces opérations est

effectué à l'aide du programme Coastwatch Utilities sous licence GPL (http://coastwatch.noaa.gov/cw_cwfv3.html).

Avant de pouvoir détecter les pixels chauds et calculer le débit, il faut localiser les nuages et s'assurer que ceux-ci ne couvrent pas la zone à étudier. Pour la détection des nuages, nous avons implémenté les algorithmes décrits par Ackerman et al. (1998).

Les différentes étapes de cette procédure sont résumées dans le digramme présenté ci-dessous (Fig. 2.15).

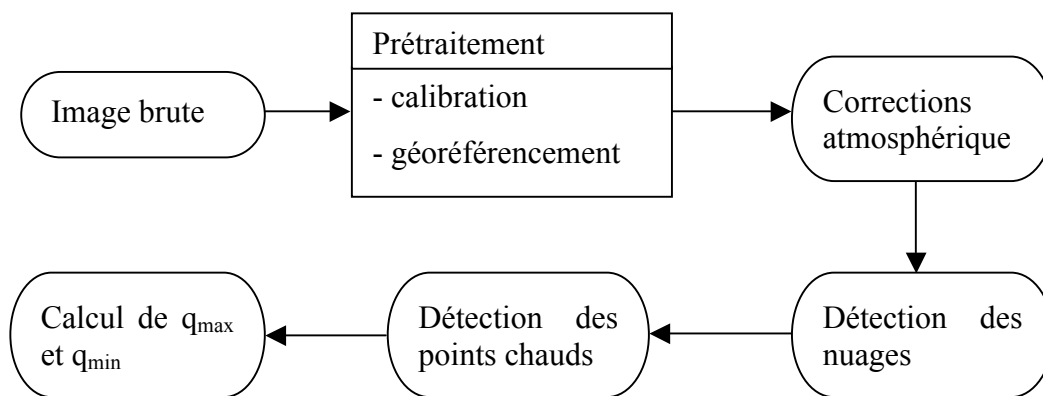


Fig. 2.15 - Procédure de calcul de débit

Le module que nous avons développé prend en charge le calcul du débit à partir d'images corrigées et fournit les paramètres d'entrée relatifs au débit, nécessaires aux simulations.

Détection des pixels chauds

L'algorithme que nous avons utilisé pour la détection des pixels chaud repose sur la comparaison de la différence ΔT de température de brillance entre les bandes des 3-4 μ m et 10-11 μ m (canaux 2 et 4 pour l'AVHRR et 21/22 et 31 pour le Modis) avec un seuil donné (Giglio et al., 2003; Flasse et Ceccato, 1996). Cet algorithme devra permettre de détecter aussi bien les pixels chauds isolés, ne contenant que très peu de lave, que ceux qui sont entourés d'autres pixels chauds.

Si un pixel ne contient pas de lave, ΔT est nul ce qui n'est pas le cas lorsque ce pixel contient de lave, même sur une petite surface. Par exemple, pour un pixel contenant 0.0003% de lave à 1000°C le reste étant occupé par le terrain à 30°C ΔT est égal à 38°C. Ceci conduit à considérer qu'un pixel est chaud si :

$$\Delta T - \Delta T_{vois} > \Delta T_{seuil} \quad (2.17)$$

où ΔT_{vois} est la moyenne des valeurs de ΔT calculées pour les voisins du pixel considéré.

Pour déterminer ΔT_{seuil} nous procédons de la manière suivante :

- les pixels n'appartenant pas à l'édifice volcanique sont localisés,
- nous calculons $\Delta T - \Delta T_{vois}$ pour chacun de ces pixels,
- nous prenons ΔT_{seuil} égal au maximum des valeurs précédemment calculées.

Bien entendu, cette méthode de détection, à seuil variable, des pixels chauds ne permet pas de détecter un pixel chaud entouré entièrement d'autres pixels chauds. Le pixel est alors caractérisé par un $\Delta T - \Delta T_{vois}$ faible et un ΔT élevé. Dans ce cas nous avons utilisé un test à seuil fixe qui conduit à considérer qu'un pixel entouré de pixels chauds est lui même chaud si $\Delta T > 20^\circ\text{K}$.

2.3.4 Système d'alerte

Avant le début d'une éruption, la remontée du magma de la chambre magmatique vers la surface génère une anomalie thermique qu'il est aisé de mettre en évidence à partir du traitement d'images satellitaires infrarouges, comme celles fournies par MODIS. L'apparition de telles anomalies constitue un des précurseurs pour les éruptions et sert donc naturellement d'indicateur d'alerte.

A partir de ce constat, Wright et al. (2002) ont mis au point le système MODVOLC, basé sur le calcul de l'indice thermique normalisé (ITN) calculé à partir de la différence de brillance entre les bandes 21 et 22 (ou 21 et 23 si la bande 22 est saturée) du MODIS. Actuellement, toutes les images MODIS sont systématiquement traitées par le centre de calcul de l'université d'Hawai avec MODVOLC constituant ainsi un système d'alerte mondial.

Bien entendu nous pourrions accepter cette dépendance à MODVOLC, si elle ne présentait pas deux inconvénients non négligeables : une dépendance aux services de l'université d'Hawai et une limitation par MODVOLC aux seul traitement données issues de MODIS.

Par ailleurs, le calcul de l'ITN est tout à fait semblable à celui décrit précédemment pour localiser les points chauds et l'intégrer à notre système d'information ne représente qu'un travail très modeste.

Nous avons donc mis en oeuvre l'algorithme MODVOLC, ce qui nous permet de compléter notre système par un module d'alerte et surtout de pouvoir utiliser les données provenant d'autres satellites.

Dans ce cadre, l'INGV est en train de se doter du matériel nécessaire à la réception des données de SEVIRI (*Spinning Enhanced Visible and Infrared Imager*), senseur du satellite Meteosat 8. Par rapport à MODIS, même si la résolution spatiale de SEVIRI est plus modeste, il présente l'énorme avantage d'être sur une orbite géostationnaire et d'offrir une image toutes les quinze minutes.

2.4 Résultats obtenus

2.4.1 Données topographiques numériques disponibles

Pour réaliser les simulations, nous disposons des trois terrains numériques suivant (Fig 2.16) :

- DEM98 mis à jour en 1998 et couvrant tout l'Etna avec une résolution de 25m;
- DEM01 mis à jour en 2001 (avant l'éruption de 2001), et couvrant une partie du flanc sud de l'Etna avec une résolution de 10m;
- DEM04 mis à jour en 2004 (avant l'éruption de 2004) et couvrant le sommet de l'Etna et une partie du flanc est avec une résolution de 5m.

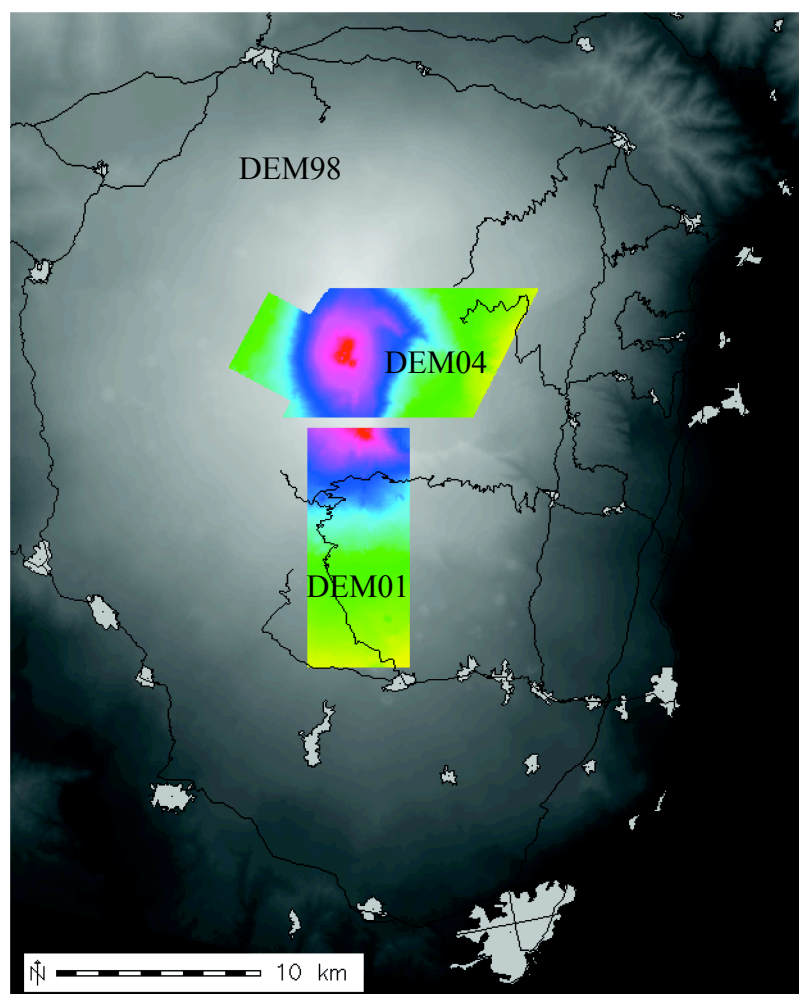


Fig. 2.16 - Les différents terrains numériques disponibles

Ces terrains numériques ont été intégrés à la base de donnée cartographique de GRASS.

2.4.2 Utilisation du modèle

Utilisation pendant une éruption

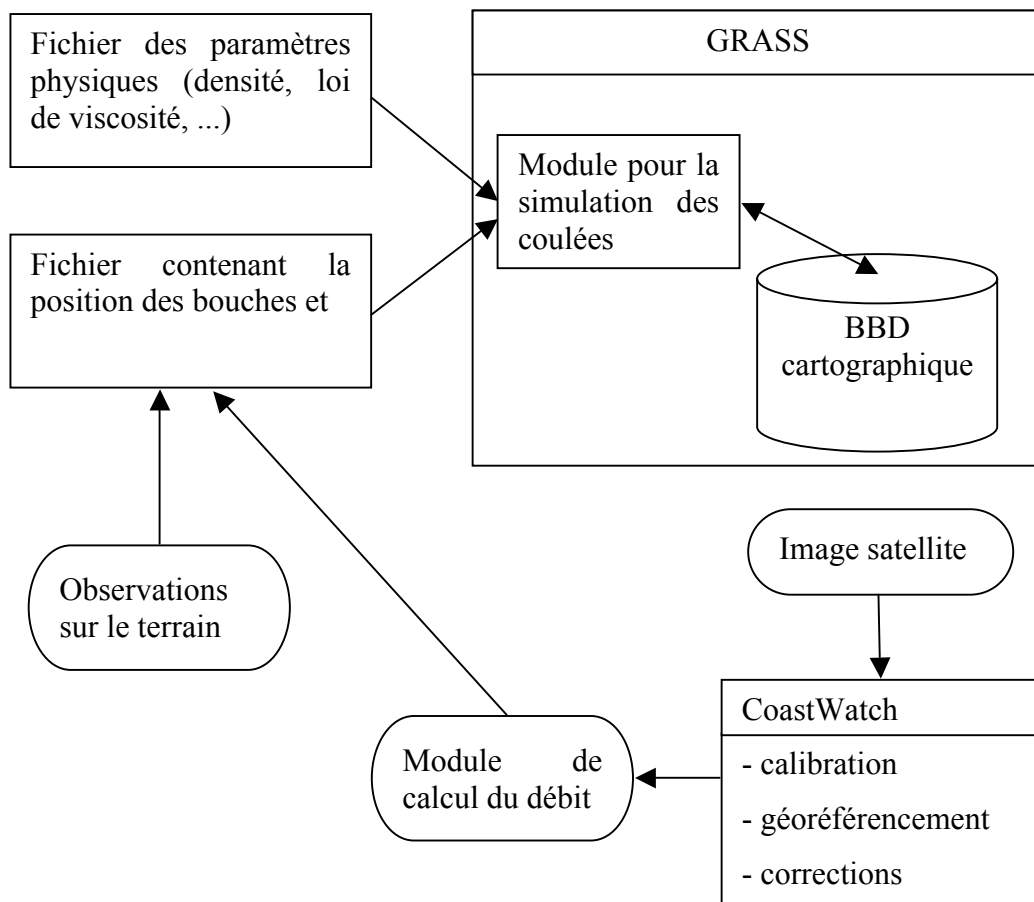
Les seuls paramètres d'entrée physiques du modèle connus avec une marge importante d'incertitude sont la viscosité et la contrainte seuil. Conformément à notre choix de ne pas utiliser de paramètres semi empiriques, nous utiliserons les mesures et les observations faites sur le terrain, ou à défaut les études portant sur l'Etna, pour déterminer les valeurs des coefficients des lois (1.4) portant sur la viscosité et la contrainte seuil. Pour la contrainte seuil, les seules données exploitables sont celles qui figurent dans le tableau 1.2 et nous les utiliserons pour toutes les simulations. La contrainte seuil est alors de 133 Pa à 1360°K (température d'éruption) et de 1040 Pa à 1260°K.

Le module du calcul de débit ne fournit qu'un débit global : si la coulée comporte plusieurs bouches éruptives actives, les vulcanologues devront évaluer, en fonction des observations qu'ils effectuent sur le terrain, la fraction de ce débit global à attribuer à chaque bouche.

Bien que le modèle ne puisse simuler la formation des tubes de lave et l'ouverture de bouches éruptives secondaire on peut parfaitement en tenir compte lors des simulations. En effet, l'apparition d'une bouche secondaire est un phénomène facilement observable. Dès que les coordonnées d'une bouche secondaire sont disponibles, on lui attribue un débit et l'on reprend la simulation à partir des derniers résultats antérieurs à son apparition.

Les interactions entre les différents modules et programmes sont détaillées dans le diagramme ci-dessous (Fig 2.17).

Fig. 2.17 - Interaction entre les modules et programmes



Utilisation pour la production de cartes de risque

La production d'une carte de risque passe par la simulation d'un grand nombre d'éruptions fictives, mais vraisemblables. Or toutes les éruptions ne sont ni équiprobables; il y a plus d'éruptions sommitales que d'éruptions avec des bouches latérales à basse altitude, ni semblables; la durée et le débit sont fortement variables (Annexe 1).

Ceci nous a conduit à utiliser le schéma suivant:

1. subdivision de l'édifice volcanique en plusieurs zones;
2. attribution à chacune de ces zones d'une probabilité d'ouverture de bouche;
3. génération de N bouches avec une densité conforme à la probabilité précédente;
4. simulation pour chacune de ces bouches d'un ensemble de coulées correspondant à différentes évolutions du débit;
5. production d'une carte de risque à partir de l'ensemble des simulations.

L'ensemble de cette procédure est entièrement automatisé. Les simulations sont automatiquement réparties sur les 20 nœuds de calcul de la machine parallèle dont nous disposons, ce qui permet d'établir une carte de risque basée sur 1000 simulations en une semaine.

L'identification des différentes zones, l'évaluation des probabilités d'ouverture de bouche et la définition de différents scénarios pour l'évolution du débit relève de la compétence des vulcanologues.

2.4.3 Eruption 2001

La coulée sud de l'éruption 2001 constitue la coulée idéale pour valider la partie simulation de notre modèle; nous disposons d'un terrain numérique précis avec une résolution de 10m (DEM 01) et surtout elle a fait l'objet d'une étude cartographique détaillée pendant son évolution ce qui a permis d'établir une courbe de débit précise (Fig 2.18) (Coltelli et al., 2007).

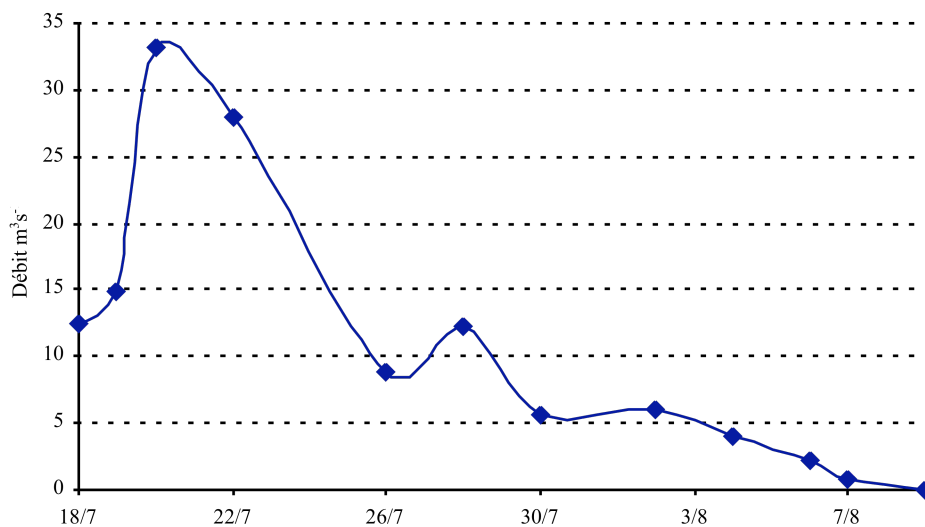


Fig. 2.18 - Evolution du débit de la coulée 2001

Cette coulée, d'une durée de 21 jours, du 18 juillet 2001 au 9 août 2001, pour un volume de lave émis de $40 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ à partir d'une seule bouche éruptive, se caractérise par un débit qui atteint son maximum ($34 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) dès le deuxième jour d'éruption et qui décline ensuite assez rapidement avec une légère reprise d'activité au dixième jour. La coulée a atteint sa longueur maximale le 28 juillet après 10 jours d'éruption.

Une bouche secondaire s'est ouverte, le 2 août en fin d'éruption, et a généré une petite coulée latérale. Comme nous ne disposons d'aucune information précise sur les coordonnées de cette bouche et sur volume de lave émis, nous n'en tiendrons pas compte dans les simulations. Cette coulée secondaire n'interfère quasiment pas avec la coulée principale et ne correspond pas à une reprise d'activité; ne pas la prendre en compte n'a pas de répercussion appréciable sur les résultats obtenus pour la coulée principale.

Les observations faites par les vulcanologues suggèrent une viscosité de 1000 Pa.s, au niveau de la bouche à 1360°K, et qui est multipliée par 20 pour une baisse de température de 100°. Nous prendrons donc :

$$\text{Log}\mu = 20.6783 - 0.012977T \quad (2.18)$$

Les simulations ont été effectuées sur le terrain numérique DEM 01 avec $\Delta x = 10\text{m}$. La simulation des 21 jours d'éruption nécessite 30 minutes de calcul sur un PowerMac G5 biprocesseur.

Les figures 2.19, 2.20 et 2.21 montrent l'évolution de la coulée simulée entre la 19 juillet et le 26 juillet ainsi que la situation en fin d'éruption. La zone mise en évidence sur la figure 2.21 correspond à la partie issue de la bouche secondaire.

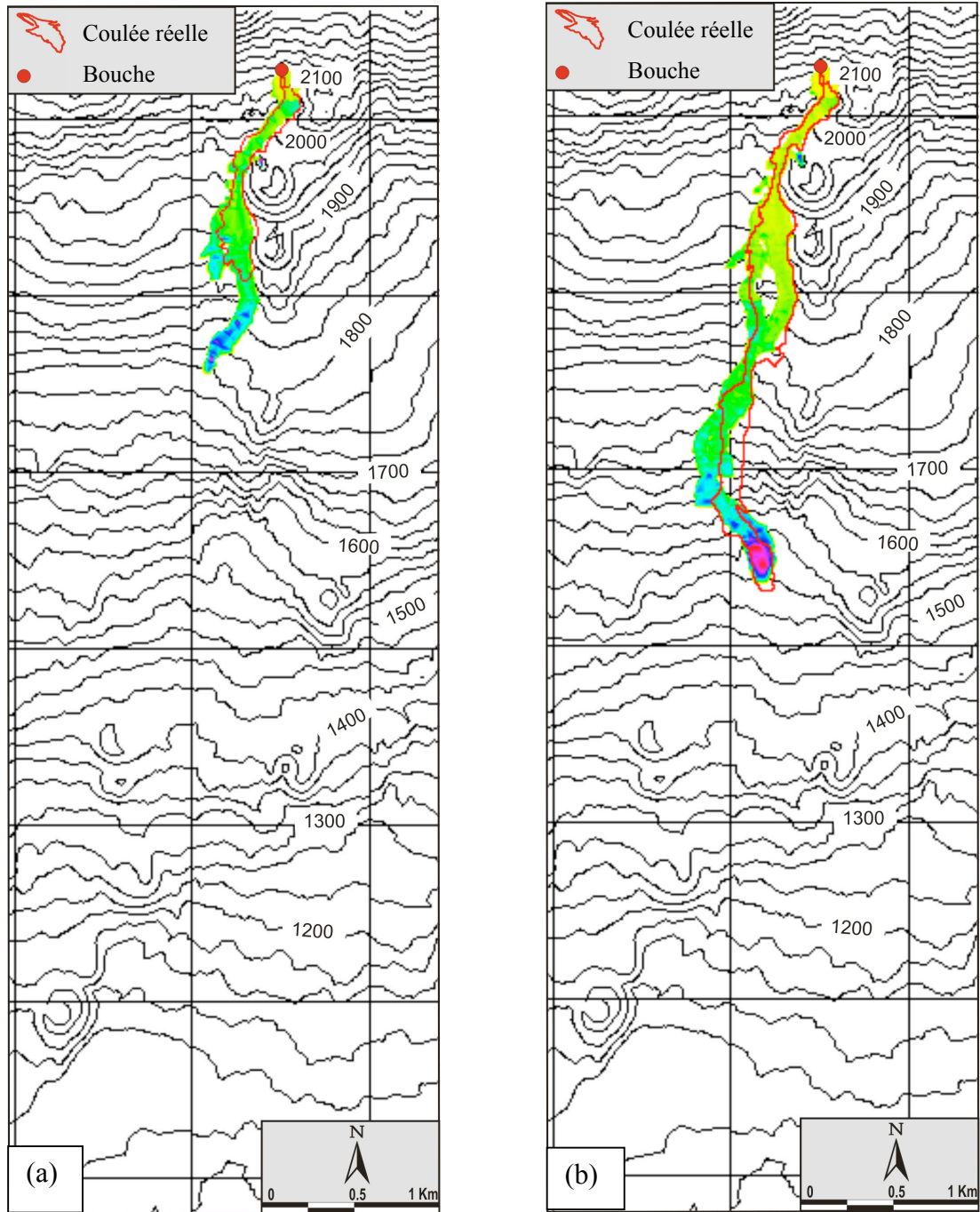


Fig. 2.19 - Evolution entre le 18 juillet (a) et le 19 juillet (b).

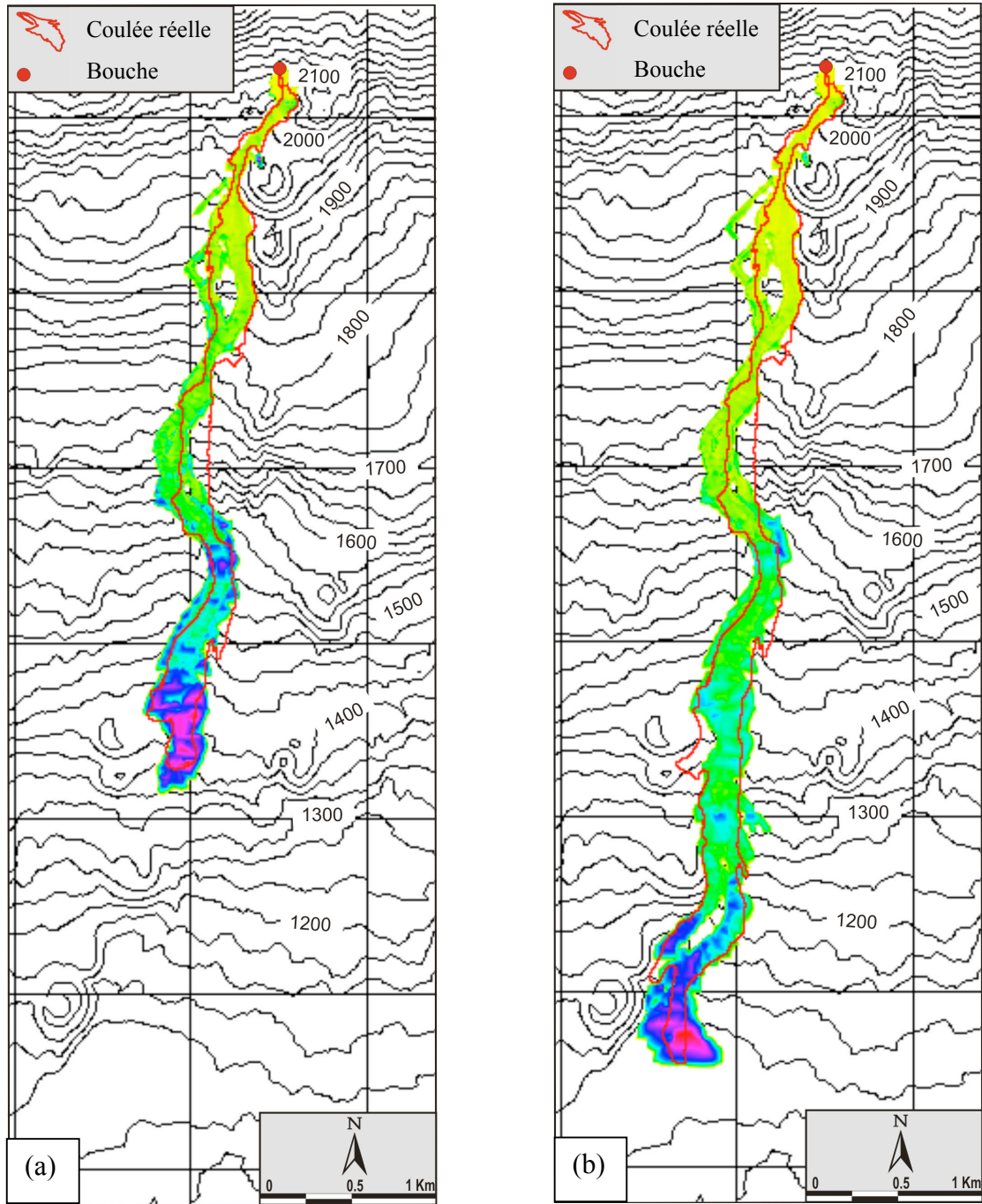
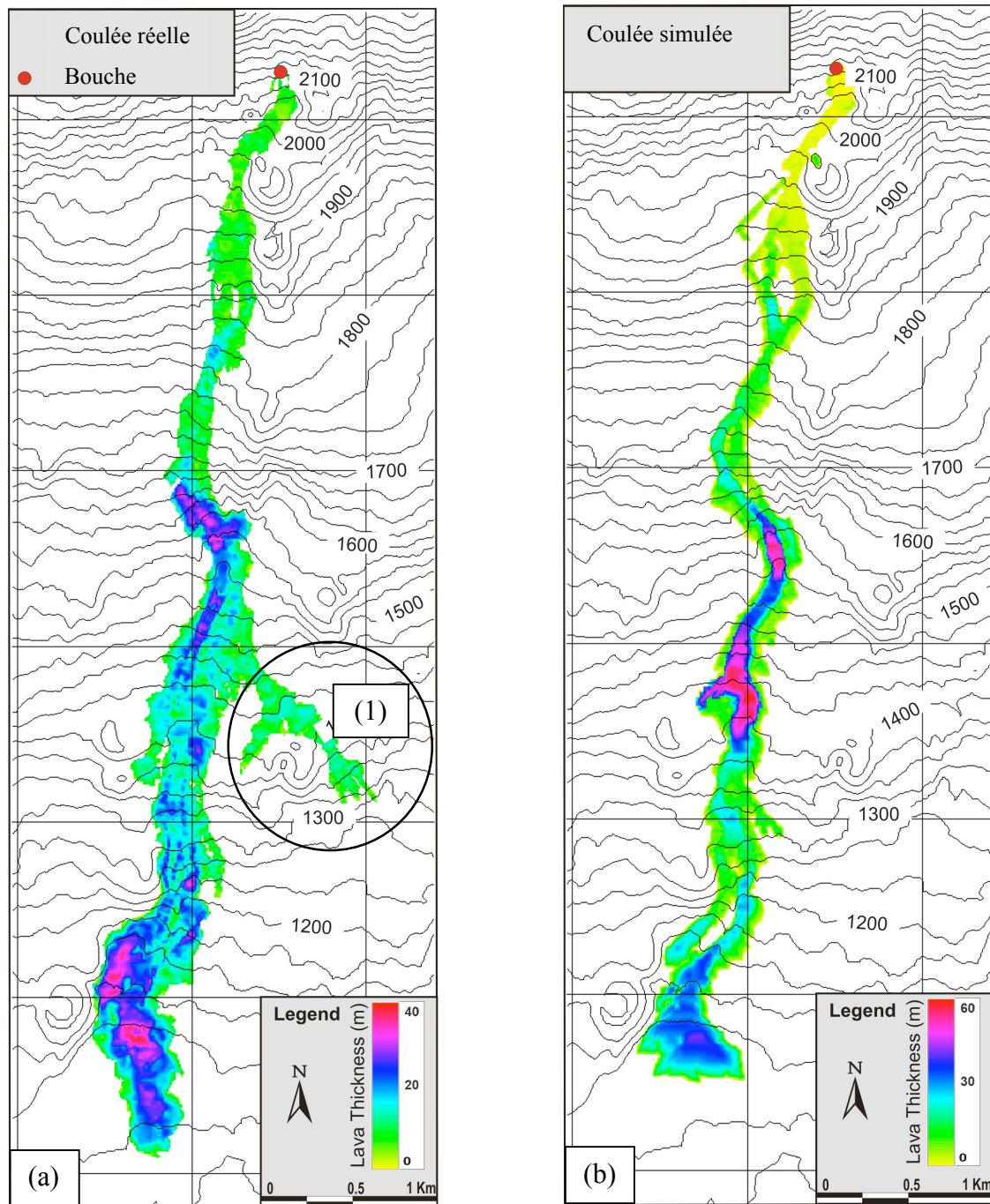


Fig. 2.20 - Evolution entre le 22 juillet (a) et le 26 juillet (b).



(1) coulée non simulée due à la bouche secondaire

Fig. 2.21 - Coulée réelle (a) et coulée simulée (b) en fin d'éruption.

Analyse des résultats

Nous avons comparé les simulations à la coulée réelle pour toutes les dates où nous disposons de données cartographiques. Ceci nous a permis de comparer l'évolution des surfaces de la coulée réelle et simulée (Fig. 2.22) ainsi que les longueurs atteintes (Fig. 2.23).

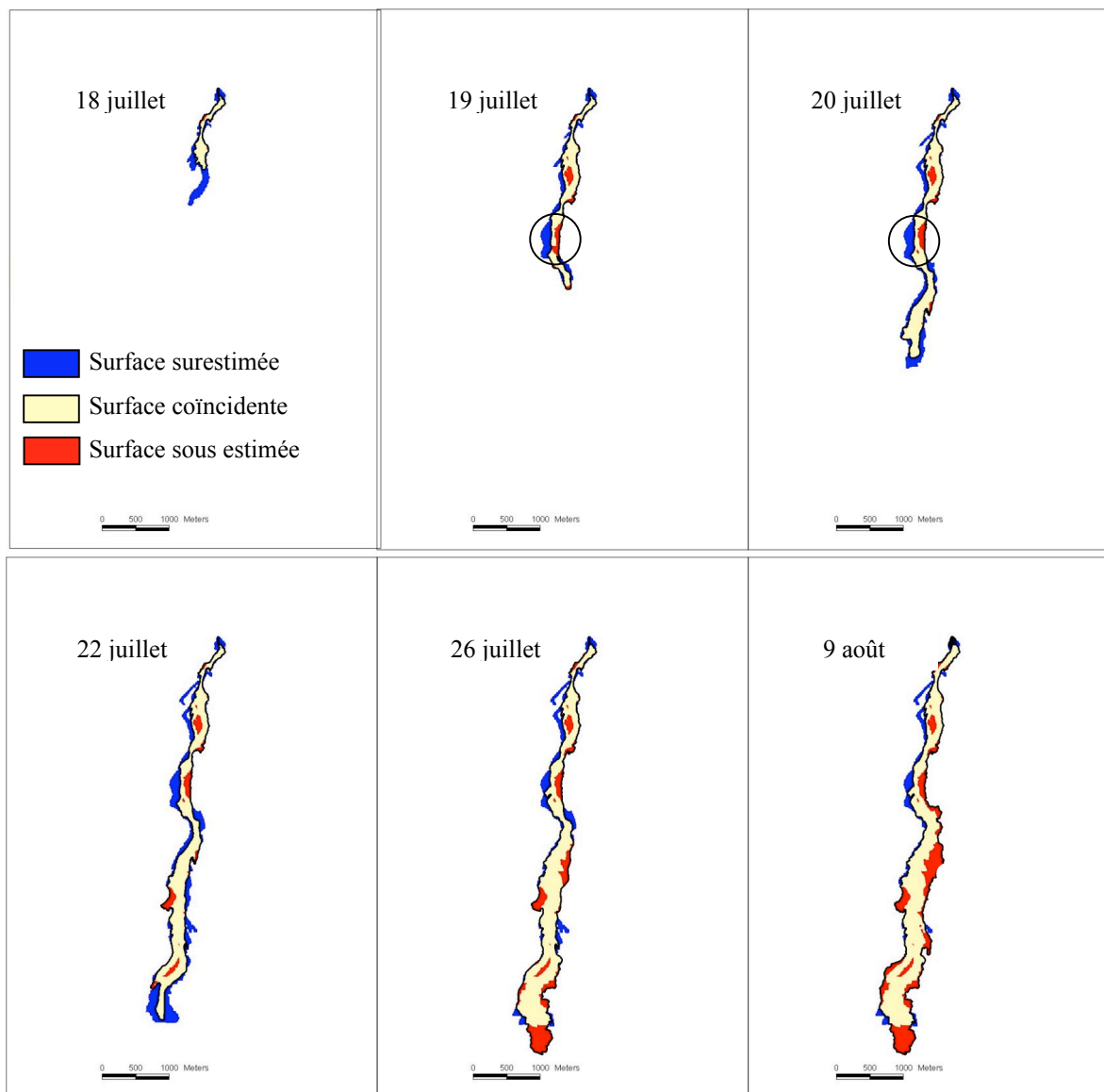


Fig. 2.22 - Comparaison entre la surface de la coulée réelle et simulée

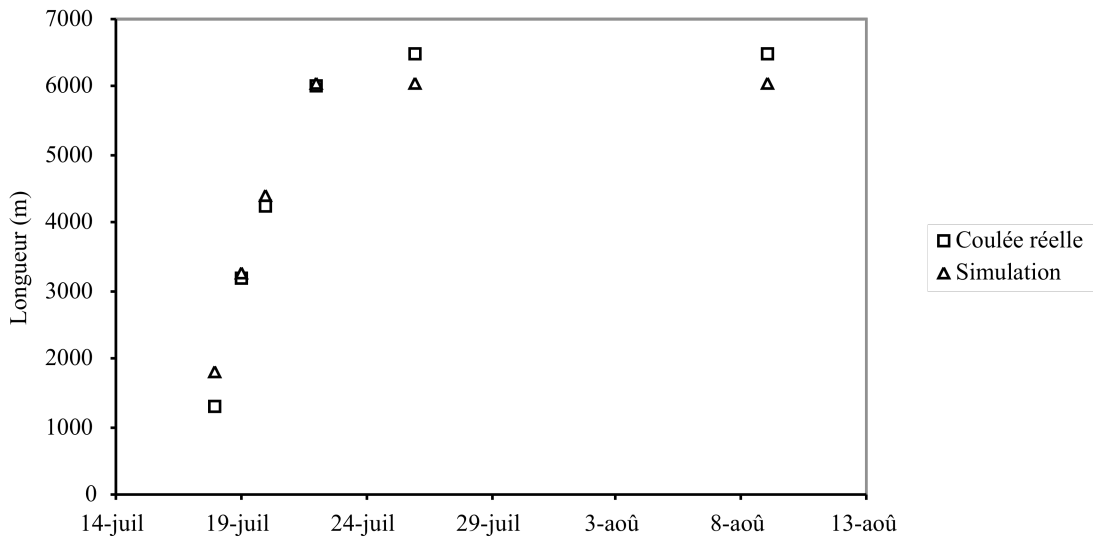


Fig. 2.23 - Comparaison entre la longueur réelle et simulée

En ce qui concerne les surfaces, l'accord est bon et les erreurs les plus importantes concernent le premier jour et le front de la coulée. Par ailleurs, notre attention a été attirée par la zone, mise en évidence par un cercle sur la figure 2.23, où la coulée simulée est bien canalisée et suit la ligne de plus grande pente mais semble décalée par rapport à la coulée réelle. Nous avons vérifié sur le terrain et il apparaît que la cartographie présente un léger défaut à cet endroit ce qui explique cet écart.

En ce qui concerne les longueurs, l'accord est très bon sauf en fin d'éruption où il y a une sous-estimation de la longueur de 10%.

L'objectif principal de la partie simulation, qui était de pouvoir prévoir l'endroit atteint par une coulée en un instant donné, en n'utilisant que des paramètres mesurés ou évalués sur le terrain, nous semble atteint.

2.4.4 Eruption 2006

L'éruption 2006 a été la première occasion de tester l'ensemble du système, calcul du débit et simulation, lors d'une éruption pour prévoir l'évolution d'une coulée.

Le 14 juillet 2006 deux bouches éruptives se sont ouvertes sur le flanc du cratère sud-est à une altitude d'environ 3000 m. L'éruption s'est poursuivie jusqu'au 24 juillet générant une coulée de 3km.

L'analyse d'échantillons de lave, prélevés en début d'éruption, par le laboratoire d'analyses pétrographiques de l'INGV a permis de déterminer la teneur en eau de la lave : 0.7%. Pour la viscosité, nous avons donc utilisé les résultats de Giordano avec un pourcentage d'eau de 0.7% (tableau 1.2 et figure 1.7). On obtient une viscosité de 1700 Pa.s à la température d'éruption et de 57000 Pa.s après une baisse de 100°.

L'analyse des images du MODIS nous a permis de calculer le débit onze fois sur une période de neuf jours (Fig. 2.24).

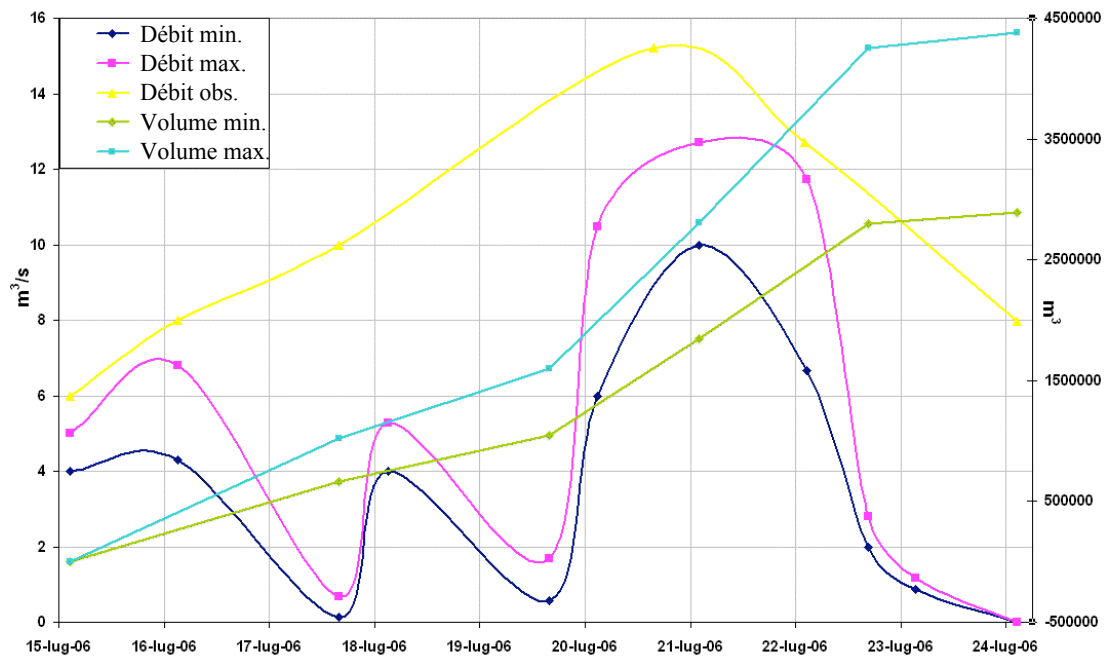


Fig. 2.24 - Evolution du débit pour l'éruption 2006

Avec une durée de neuf jours et un volume total de quelques millions de mètres cubes, cette coulée est très modeste.

Pour toutes les simulations, nous avons utilisé le terrain numérique DEM 04, pris $\Delta x = 5m$ et affecté à chaque bouche un débit égal à la moitié du débit total.

Le 16 juillet, nous avons simulé l'évolution au 17 juillet avec un débit extrapolé à partir des deux évaluations faites sur le terrain (Fig. 2.25). A cette date les mesures effectuées sur le terrain ainsi que celles issues du traitement des images satellites suggéraient un tel scénario.

Le débit évalué par observation sur le terrain (en jaune sur la figure 2.24) semble systématiquement surestimé. Ceci sera confirmé par les données satellitaires des 18 et 19 juillet. De plus, il ne rend pas compte des rapides variations observées pendant cette période. Par la suite nous avons utilisé la moyenne des débits maximum et minimum calculée à partir des données satellitaires.

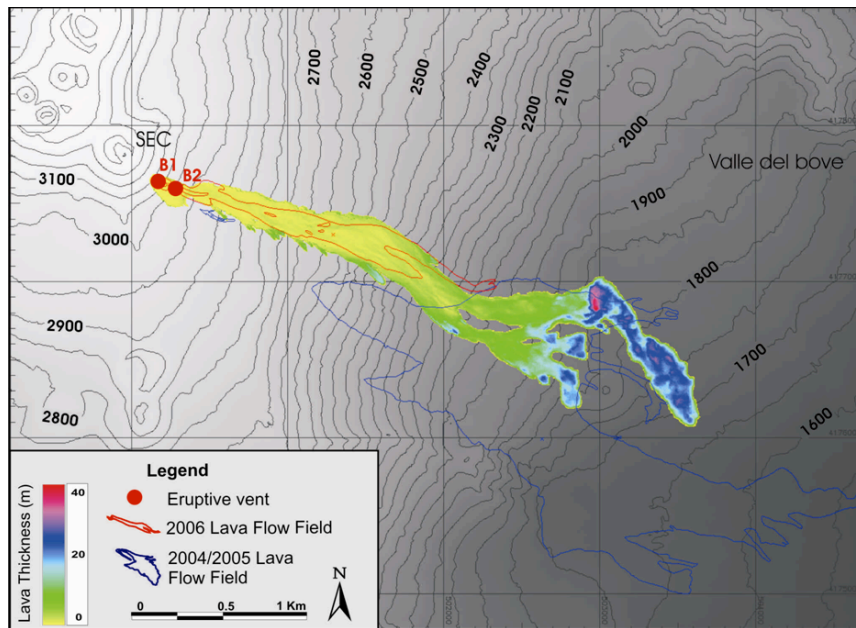


Fig. 2.25 - Evolution au 17 juillet calculée le 16 juillet avec le DEM 04

Par ailleurs on constate que la coulée 2006 vient recouvrir en partie la coulée 2004, or le terrain numérique DEM 04 a été réalisé avant l'éruption 2004. Nous avons modifié le terrain numérique DEM 04 en lui ajoutant une valeur forfaitaire sur toute la surface occupée par la coulée 2004. Pour déterminer cette valeur, nous avons réalisé le 17 juillet un ensemble de simulations que nous avons comparées avec la coulée réelle à cette date : un ajout de 10m donne les meilleurs résultats (Fig. 2.26).

Le 20 juillet, des nouvelles mesures satellitaires du débit suggèrent une reprise de l'éruption et nous avons simulé l'évolution de la coulée au 24 juillet avec deux scénarios proposés par les vulcanologues :

1. reprise de l'éruption avec débit croissant;
2. activité semblable à celle du 18 - 20 juillet mais s'étendant sur une durée de 4 jours avec un débit maximum deux fois supérieur (Fig. 2.27).

Comme l'ont confirmé les mesures satellitaires ultérieures, le scénario 2 correspond à l'évolution réelle de la coulée. L'activité éruptive a pris fin le 24 juillet, la figure 2.27 correspond donc aussi à l'état final de la coulée.

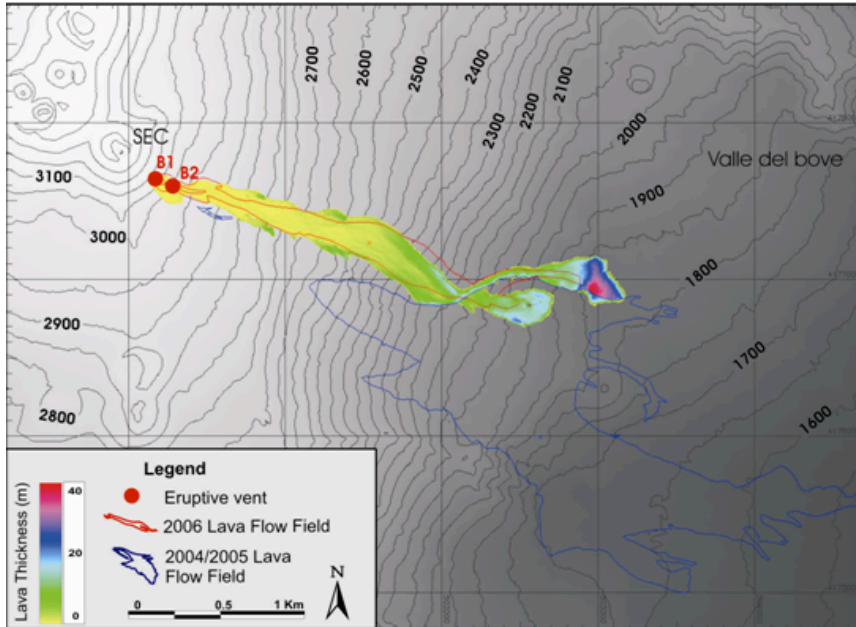


Fig. 2.26 - Evolution au 17 juillet calculée le 17 juillet avec le DEM 04 modifié

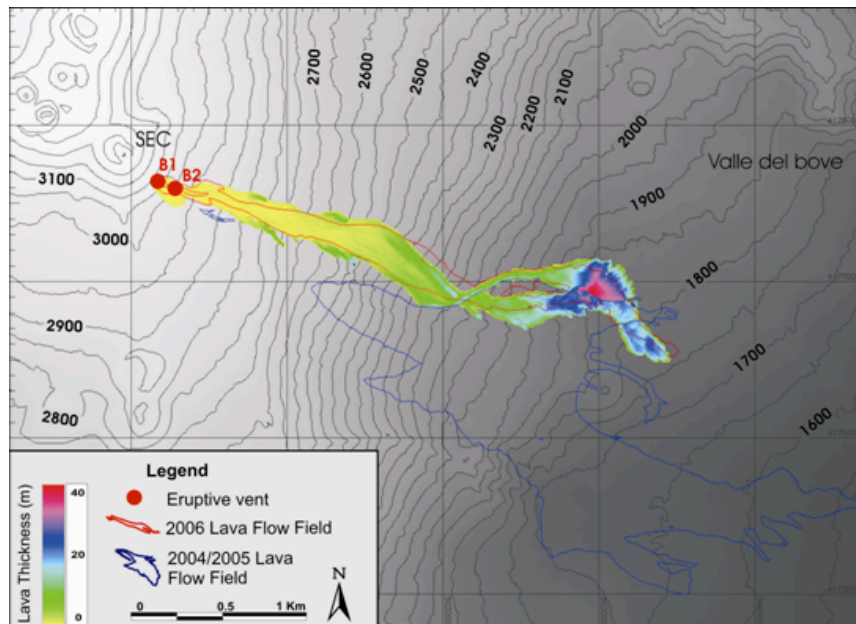


Fig. 2.27 - Evolution au 24 juillet calculée le 20 juillet avec le DEM 04 modifié

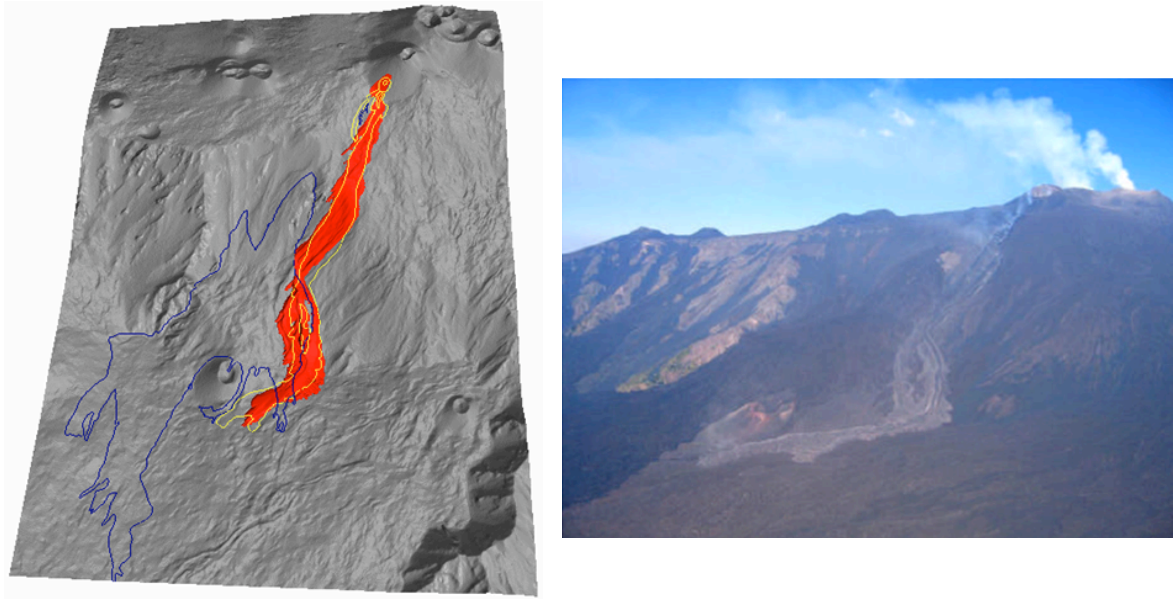


Fig. 2.28 - Coulée simulée et coulée réelle

Analyse des résultats

Il apparaît clairement que les observations sur le terrain entraînent une surestimation du débit et ne peuvent pas rendre compte de ses brusques variations. Or, une évaluation correcte du débit ainsi que de ses variations, en tant que paramètre d'entrée du modèle, est incontournable. Le calcul du débit, à partir de données satellitaires, joue un rôle fondamental et permet d'obtenir un bon accord entre l'évolution observée et celle simulée.

Cette éruption nous a permis de valider les capacités prédictives de l'ensemble du système, simulation et calcul du débit, pendant une éruption.

2.4.5 Eruption 2007

Le 4 septembre 2007 vers 18 h une bouche éruptive s'est ouverte sur le flanc oriental du cratère sud-est avec apparition d'une fontaine de lave produisant un jet continu de lave de plusieurs centaines de mètres de hauteur. L'éruption s'est poursuivie jusqu'au lendemain à 5 h et a engendré une modeste coulée de quelques kilomètres dans la zone désertique de la Valle del Bove. Malgré son caractère spectaculaire (Fig 2.29), cette éruption n'a présenté aucun danger.

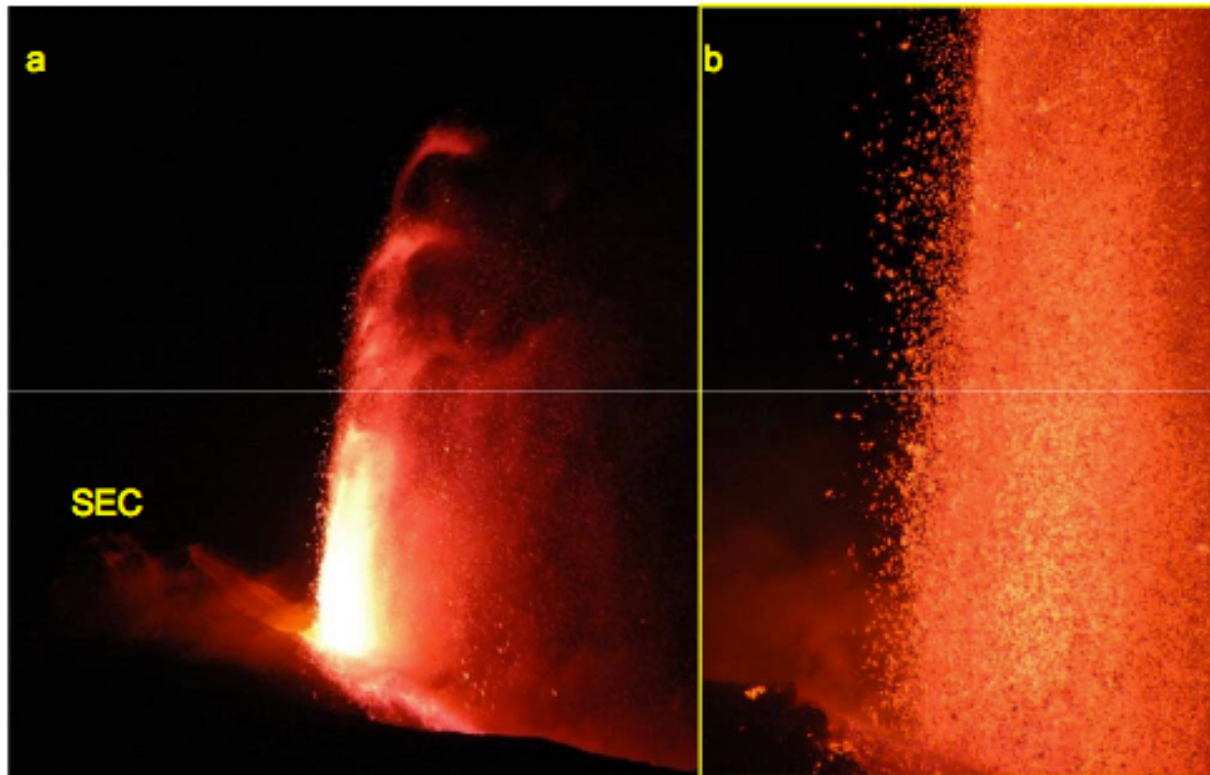


Fig. 2.29 - Fontaine de lave de l'éruption du 4 septembre 2007

Etant donné sa très faible durée et l'absence de données topographiques à jour dans la zone recouverte par la coulée, cette éruption n'a pas donné lieu à des simulations. Par contre, elle nous a permis de tester le système d'alerte basé sur l'évolution de l'indice thermique normalisé.

La figure 2.30 représente l'évolution de l'indice thermique normalisé (ITN) entre le 20 août et le 20 septembre 2007. Sur ce graphique figurent les ITN obtenus à partir d'images exemptes de nuages, ainsi que ceux obtenus à partir d'images pour lesquelles l'Etna est en partie couvert par des nuages. On constate une augmentation significative de cet indice dès le 30 août, soit 5 jours avant le début de l'éruption.

L'exploitation systématique des données satellitaires nous permet donc, à travers le calcul de l'ITN, de fournir un indicateur corrélé à la remontée de magma dans le canal magmatique qui n'est autre qu'un précurseur de l'éruption.

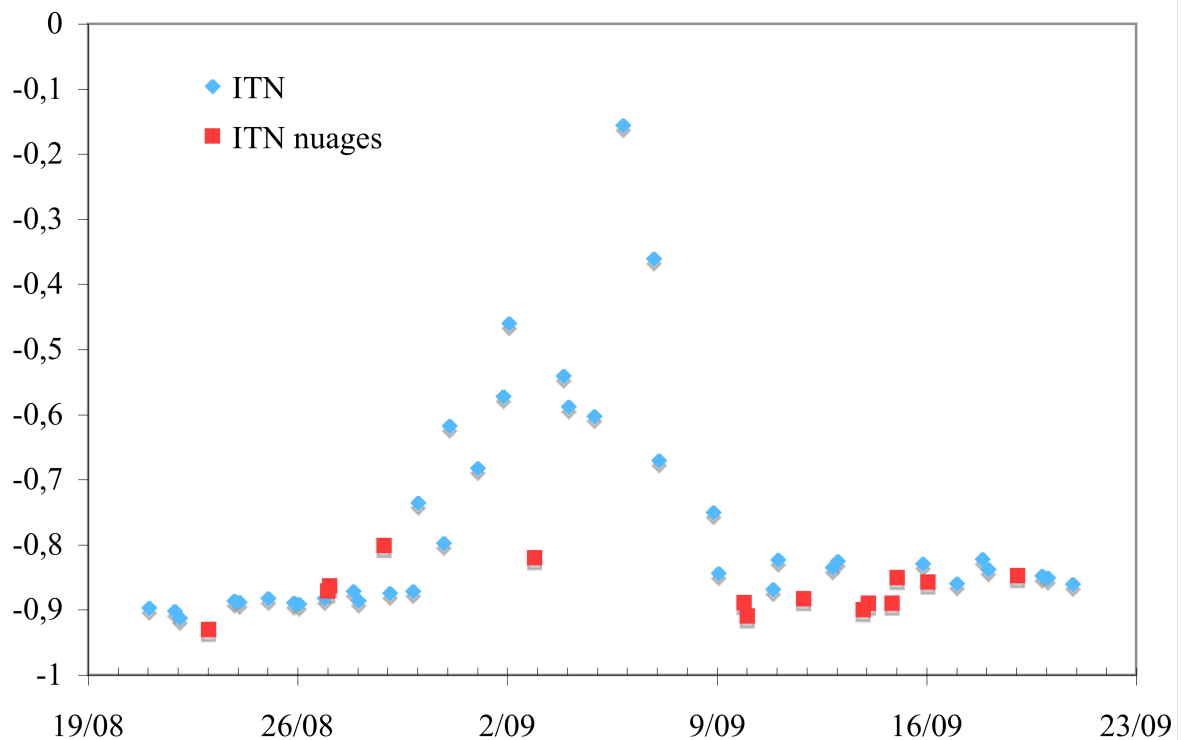


Fig. 2.30 - Evolution de l'indice thermique normalisé entre le 20/08/07 et le 20/09/07

2.4.6 Cartes de risque

Nous avons appliqué la procédure décrite en 2.4.2 pour produire une carte de risque. Nous avons généré un ensemble de bouches fictives (Fig. 2.31) et différents scénarios pour le débit (Fig. 2.32) et effectué 1050 simulations. La carte obtenue (Fig. 2.33) représente le nombre de fois qu'une coulée a envahi une zone donnée.

Dans la mesure où la localisation des zones de plus forte probabilité d'ouverture de bouche éruptive ainsi que la détermination des différents scénarios incombe aux vulcanologues les résultats proposés ici ne sont donnés qu'à titre indicatif pour prouver la validité du procédé.

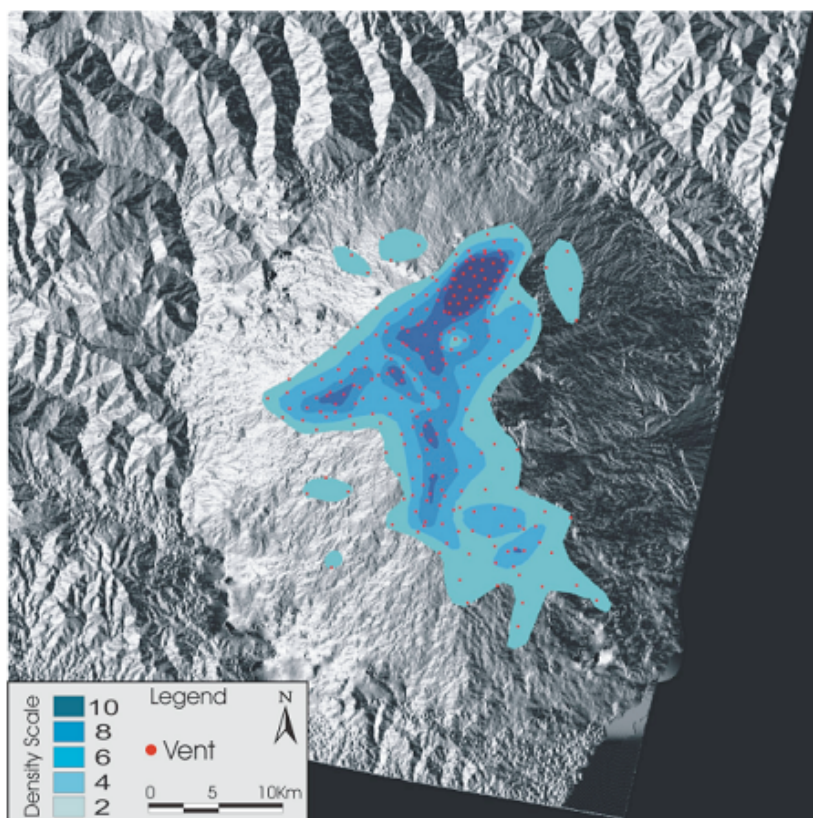


Fig. 2.31 - Bouches éruptives fictives

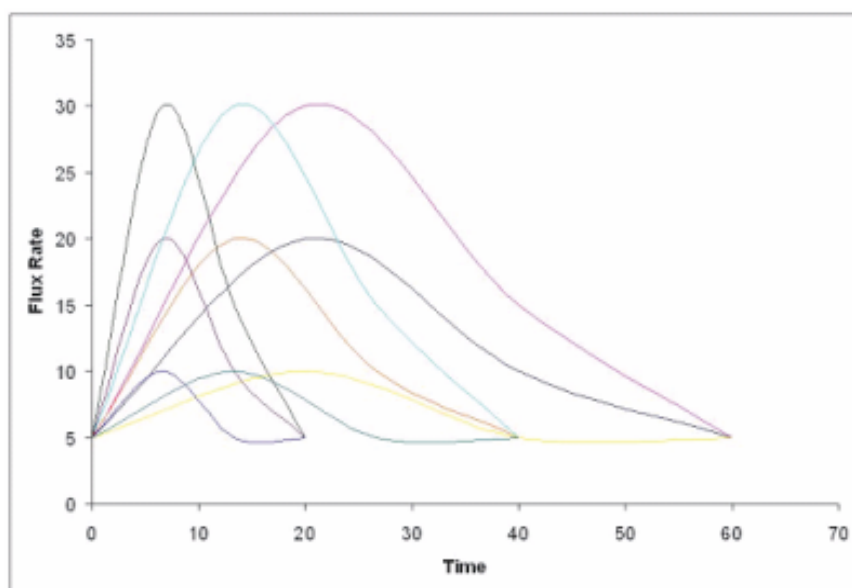


Fig. 2.32 - Scénarios éruptifs utilisés

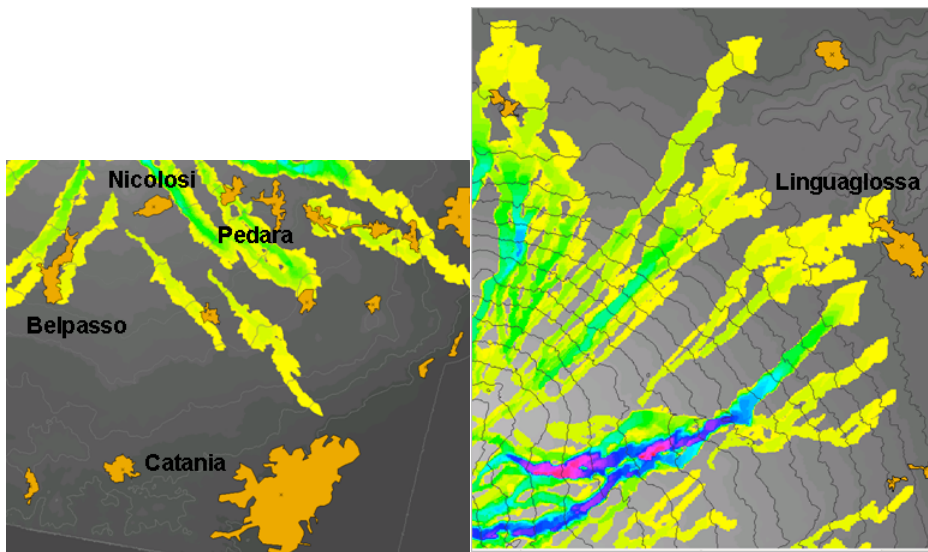
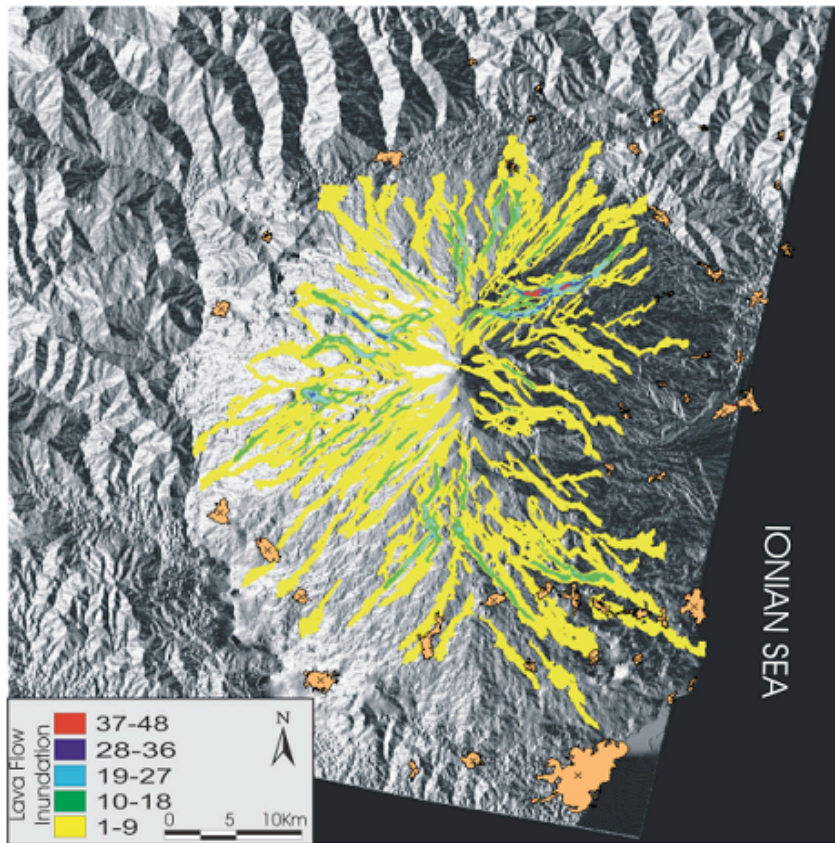


Fig. 2.33 - Carte de risque obtenue à partir de 1050 simulations

Troisième partie
Simulation numérique du refroidissement
d'une coulée

3.1 Introduction

Le modèle holistique développé au chapitre précédent donne des résultats tout à fait corrects, mais reste limité dans la description fine de l'évolution de la coulée en raison de l'attribution d'une température moyenne pour chaque cellule ce qui ne permet pas d'obtenir la température de surface ainsi que l'épaisseur de la croûte de lave.

Une première amélioration consiste donc à introduire dans le modèle holistique deux nouvelles variables, l'épaisseur de la croûte de lave et sa température de surface, ainsi que leurs fonctions d'évolution. Comme la croûte se déplace à la même vitesse que la partie supérieure de l'écoulement fluide on peut, en première approximation, ne traiter que le problème thermique sans couplage avec les équations de Navier - Stokes.

L'objectif que nous nous sommes fixé dans cette troisième partie est :

1. réaliser et valider sur des cas test un modèle numérique permettant de traiter le problème du refroidissement d'une coulée de lave et obtenir une loi d'évolution pour la température de surface ainsi que pour l'épaisseur de la croûte de lave ;
2. concevoir un cadre logiciel général modulaire et évolutif dans la perspective de simuler l'écoulement complet, dont fait partie le modèle précédent pour arriver, à terme, à un modèle spécifique pour rendre compte de l'évolution du front de la coulée ainsi que des conditions nécessaires à la formation des tubes de lave ;
3. faire des choix méthodologiques numériques et informatiques qui tiennent compte des perspectives d'évolution des moyens de calcul évoluant vers des machines massivement parallèles.

Pour développer notre modèle, nous avons décidé d'utiliser une méthode particulière, les SPH, intrinsèquement propice à des traitements parallèles ainsi que le langage C++ adapté à la modularité. Nous montrerons, dans cette partie, que les SPH fournissent des résultats équivalents, voire meilleurs, que ceux obtenus avec les éléments finis, tout en étant nettement plus simples à implémenter au niveau algorithmique.

3.2 La méthode "*Smoothed Particle Hydrodynamics*"

Les SPH ont été initialement développés par Lucy (1977) et Gingold et Monaghan (1977) en astrophysique. Depuis, cette méthode a été appliquée dans différents domaines comme les impacts et la pénétration dans un solide (Johnson et al., 1996), la dynamique des fluides visqueux (Takeda et al., 1994), les écoulements à surface libre, (Monaghan, 1994), les écoulements multiphasiques (Colagrossi et Landrini, 2003) et les problèmes de changement de phase (Monaghan et al., 2005).

3.2.1 Principe général

La description mathématique correcte de la méthode SPH fait intervenir la théorie des distributions et son formalisme. En physique, bien que les distributions soient largement utilisées, le formalisme associé ne l'est que rarement ce qui donne lieu à des expressions mathématiquement fausses mais fonctionnellement vraies. Pour ne pas alourdir ce paragraphe les résultats seront présentés tels qu'ils le sont communément en physique, en laissant de côté la rigueur mathématique et notamment en confondant les notions de fonction et de distribution. Tous ces résultats ont évidemment une formulation mathématique correcte et sont démontrés dans le cadre de la théorie des distributions.

Considérons un champ f représentant une caractéristique du fluide contenu dans un domaine Ω . On peut toujours écrire (Schwartz, 1965) :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.1)$$

où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac.

De plus si D est un opérateur différentiel à coefficients constants on a :

$$Df(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') D\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.2)$$

La première idée de la méthode SPH est de remplacer la fonction $\delta(x)$ dans (3.1) et (3.2) par un noyau régularisant W ayant les propriétés suivantes :

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.3)$$

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0, \text{ pour } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > kh$$

W est une fonction normalisée, tendant vers δ quand h tend vers 0, à support compact.

f et Df sont alors approchées par :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (3.4)$$

$$\langle Df(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') DW(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \quad (3.5)$$

La deuxième idée est de considérer que le domaine Ω est rempli par un ensemble fini de N particules, emportant avec elles les valeurs des différentes grandeurs physiques aux points qu'elles occupent. L'intégrale figurant dans (3.4) est alors approchée par une somme discrète :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \\ &\simeq \sum_{\alpha=1}^N f(\mathbf{x}_{\alpha}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}, h) V_{\alpha} \\ &\simeq \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} f(\mathbf{x}_{\alpha}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}, h) \end{aligned}$$

où α représente l'indice de la particule, m_{α} sa masse, ρ_{α} sa densité et $V_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{\rho_{\alpha}}$ son volume .

Comme le support de W est compact, la somme s'étend juste sur les particules qu'il contient, et on obtient :

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle \simeq \sum_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}| \leq kh} \frac{m_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} f(\mathbf{x}_{\alpha}) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}, h) \quad (3.6)$$

La valeur d'un champ en un point donné \mathbf{x} dépend de ses valeurs sur les particules voisines de \mathbf{x} dont la distance à \mathbf{x} est inférieure à kh . La zone d'influence d'une particule est un disque ou une sphère de rayon kh .

En partant de (3.5), on obtient de manière analogue :

$$\langle Df(\mathbf{x}) \rangle \approx \sum_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha| \leq kh} \frac{m_\alpha}{\rho_\alpha} f(\mathbf{x}_\alpha) DW(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha, h) \quad (3.7)$$

Ces deux dernières expressions supposent que les particules vérifiant $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha| \leq kh$ soient toutes contenues dans Ω . Ce n'est évidemment pas le cas pour les points dont la distance au bord du domaine $\partial\Omega$ est inférieure à kh (Fig. 3.1).

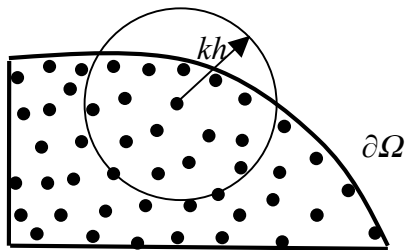


Fig. 3.1 - Particule proche du bord du domaine

Il faudra donc envisager un traitement particulier pour ces points, comme :

- utiliser des particules virtuelles disposées à l'extérieur de Ω (Randles et Libersky, 1996) pour combler la partie vide du support de \mathcal{W} ,
- utiliser une version modifiée des relations (3.6) et (3.7) (Liu et Liu, 2003).

Il reste ensuite à reformuler les équations du problème en utilisant (3.4) et (3.5) et en approchant les intégrales comme en (3.6) et (3.7).

Pour simplifier l'écriture des expressions obtenues nous adopterons les conventions suivantes $f(\mathbf{x}_\alpha) = f_\alpha$ et $\sum_{|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha| \leq kh} = \sum_\alpha$.

Par exemple, une des formulations SPH de l'équation de continuité, $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, pour la particule β est donnée par :

$$\frac{d\rho_\beta}{dt} = -\rho_\beta \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{\rho_\alpha} (u_i^\beta - u_i^\alpha) \frac{\partial W(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha, h)}{\partial x_i^\alpha} \quad (3.8)$$

Pour un problème donné, il existe plusieurs formulations SPH, mais, dans la pratique, on privilégie les formes pour lesquelles les particules jouent un rôle symétrique, comme dans (3.8).

L'application de ce procédé aux autres grandeurs physiques conduit à des équations de la même forme que (3.8). Dans le cadre des SPH, l'évolution d'une grandeur physique donne lieu à une équation différentielle ordinaire du premier ordre, qui ne dépend que des interactions entre particules. De plus, comme les particules suivent le fluide dans son mouvement, cette équation fait intervenir directement la dérivée totale par rapport au temps, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, et

donc le terme de transport, $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, ne nécessite d'aucun traitement particulier.

3.2.2 Noyau

Les propriétés (3.3) de W sont d'ordre purement mathématique et ne suffisent pas pour construire des noyaux utilisables en physique. Les considérations physiques élémentaires suivantes :

- (a) l'isotropie de l'espace impose que l'influence d'une particule sur une autre ne dépende que de leur distance relative,
- (b) en utilisant (3.6) pour évaluer une quantité positive comme l'énergie ou la densité on doit obtenir un résultat positif,
- (c) l'influence d'une particule sur une autre décroît en fonction de leur distance relative.

entraînent de nouvelles contraintes sur W :

$$(a) W(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha, h) = W(r_{\alpha\beta}, h), \text{ avec } r_{\alpha\beta} = |\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha| \quad (3.9)$$

$$(b) W(r, h) \geq 0 \quad (3.10)$$

$$(c) \frac{\partial W(r, h)}{\partial r} \leq 0 \quad (3.11)$$

Dans ces conditions le gradient du noyau peut toujours s'écrire :

$$\nabla W(r, h) = F(r, h)\mathbf{r} \quad (3.12)$$

où F est une fonction scalaire.

Liu et Liu (2003) contient une étude détaillée de la construction des fonctions noyau dont les résultats et implications principales sont résumés ci-dessous.

Pour qu'une fonction f , ainsi que ses deux première dérivées, soit approchée à l'ordre n par (3.6) et (3.7), les moments du noyau doivent vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1 \\ M_1 &= \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \\ M_2 &= \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \\ &\dots \\ M_n &= \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^n W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

et la dérivée de W par rapport à \mathbf{x} doit avoir le même support compact que W :

$$W'(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0, \text{ pour } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > kh$$

$M_0 = 1$ est la condition de normalisation , déjà présente dans (3.3) et $M_1 = 0$ est une conséquence directe de (3.9). A cause des conditions $M_{2k} = 0$ ($k > 0$), un noyau qui satisfait (3.13) ne peut être positif sur tout son support et donc satisfaire (3.10). Lors de la construction du noyau, il faudra donc choisir entre ordre d'approximation élevé et positivité. Mais renoncer à la positivité du noyau (3.10) peut conduire à des situations non physiquement

vraisemblables, comme une densité ou une énergie négative. Pour cette raison, les noyaux employés couramment dans la littérature sont positifs sur tout leur support.

L'utilisation de fonctions spline permet de construire tout un ensemble de noyaux, deux exemples sont présentés ci-dessous.

Un des noyaux standard, le *cubic spline kernel* (Monaghan et Lattanzio, 1985) est défini par :

$$W(r, h) = \frac{a}{h^k} \begin{cases} 4 - 6s^2 + 3s^3, & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ (2 - s)^3, & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ 0, & \text{si } s > 2 \end{cases} \quad (3.14)$$

avec $s = \frac{r}{h}$, k nombre de dimension du problème (2 ou 3) et a le facteur de normalisation égal respectivement à $\frac{5}{14\pi}$ en dimension 2, et à $\frac{1}{4\pi}$ en dimension 3. Le rayon du support de ce noyau est $2h$.

Un noyau d'ordre polynomial plus élevé, le *quintic spline kernel*, introduit par Morris (1996) est défini par :

$$W(r, h) = \frac{a}{h^k} \begin{cases} (3 - s)^5 - 6(2 - s)^5 + 15(1 - s)^5, & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ (3 - s)^5 - 6(2 - s)^5, & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ (3 - s)^5, & \text{si } 2 \leq s \leq 3 \\ 0, & \text{si } s > 3 \end{cases} \quad (3.15)$$

où a est respectivement égal à $\frac{7}{478\pi}$ en dimension 2, et à $\frac{3}{359\pi}$ en dimension 3. Le rayon du support de ce noyau est $3h$.

Les figures 3.2 et 3.3 représentent ces deux noyaux ainsi que leur dérivée première.

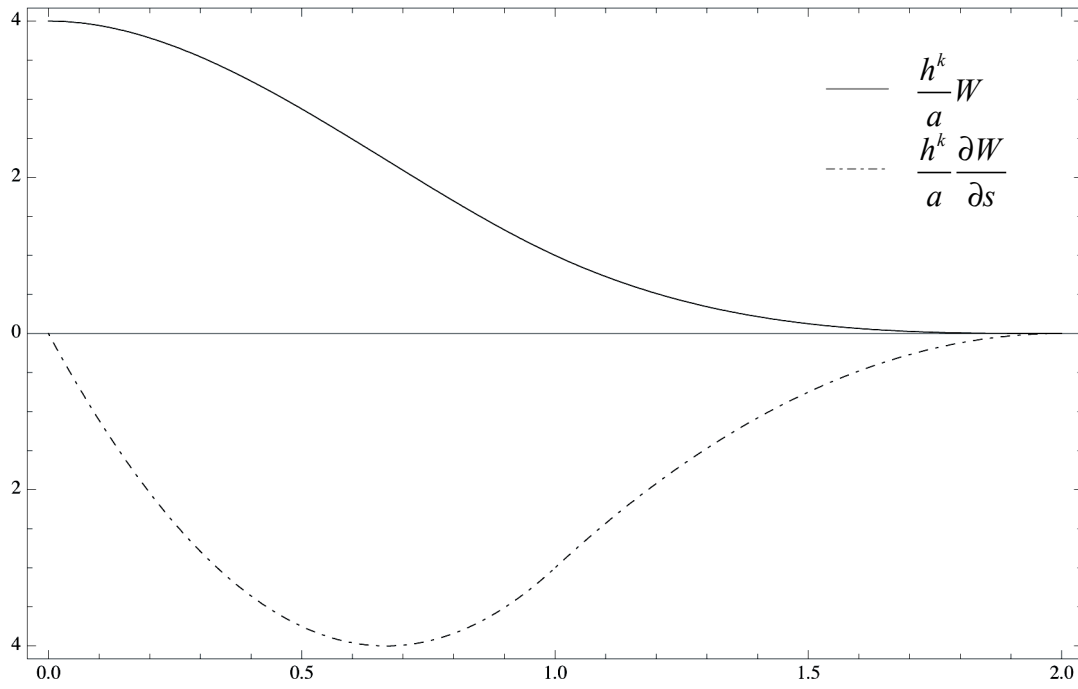


Fig. 3.2 - Cubic spline kernel.

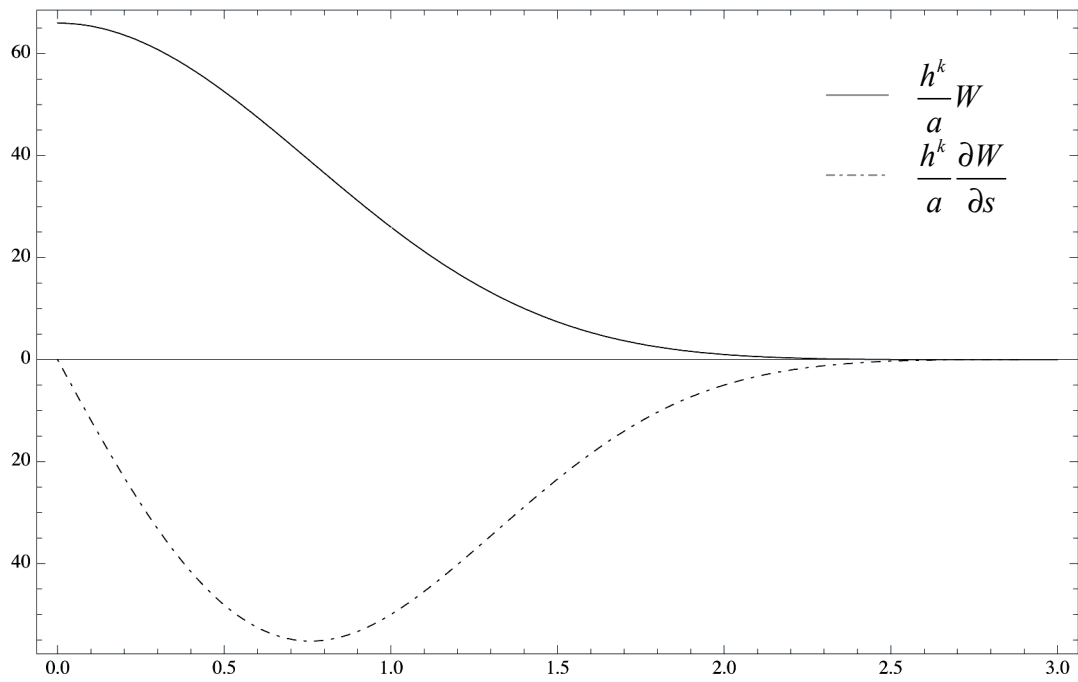


Fig. 3.3 - Quintic spline kernel.

La zone d'influence d'une particule dépend du noyau utilisé : plus le support du noyau est grand, plus le nombre de particules appartenant au voisinage d'une particule donnée sera important et meilleure sera la précision.

3.2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont imposées par des conditions extérieures (force, pression, température, ...) en utilisant des particules ad hoc. L'évolution des variables liées à ces particules et les interactions avec les autres particules ne dépendent que de la condition à imposer. Dans la littérature, il existe de nombreuses techniques pour définir ces particules et leurs interactions pour les frontières solides et les conditions de Dirichlet mais nos recherches bibliographiques non exhaustives ne nous ont pas permis de trouver l'équivalent pour les conditions de Neumann.

Frontière solide

Lors de la simulation d'un écoulement, il faut pouvoir matérialiser les frontières solides et assurer que les particules du fluide ne pénètrent pas ces frontières. Monaghan (1994) utilise des particules qui induisent une force répulsive à très faible rayon d'action, similaire à la force de "Lennard-Jones" utilisée en dynamique moléculaire, définie par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{cases} D \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right] \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{si } r \leq r_0 \\ 0, & \text{si } r > r_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

r_0 est le rayon d'action de cette force, Monaghan (1994) suggère de prendre $p_1 = 12$ et $p_2 = 6$ et D est une constante dépendant du problème. Ces particules sont placées de manière à recouvrir toute la frontière solide.

Condition de Dirichlet

Les conditions de Dirichlet, du type

$$f(x) = g(x), \text{ si } x \in \partial\Omega \quad (3.17)$$

sont de loin les plus simples à traiter : pour toute particule appartenant au contour $\partial\Omega$ (Fig. 3.4), la valeur du champ f est imposée par la condition (3.17).

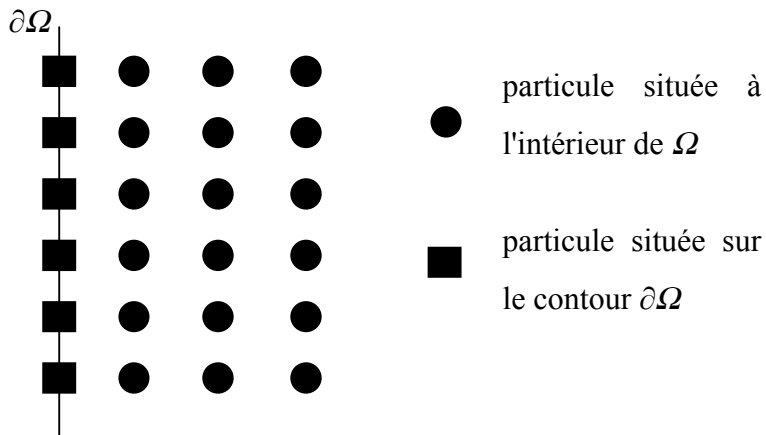


Fig. 3.4 - Condition de Dirichlet

Condition de Neumann

Les conditions de Neumann, du type

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n} = g(x), \text{ si } x \in \partial\Omega \quad (3.18)$$

avec \mathbf{n} vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$, orienté vers l'extérieur, impliquent l'évaluation du gradient pour les particules de $\partial\Omega$ et l'inversion des relations obtenues pour obtenir la valeur de f satisfaisant à (3.18).

En utilisant (3.5) pour évaluer le gradient sur la particule β on obtient :

$$\nabla f_{\beta} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla_{\alpha} W(\mathbf{x}_{\beta} - \mathbf{x}_{\alpha}, h) \quad (3.19)$$

où ∇_{α} désigne le gradient par rapport aux coordonnées de la particule α .

Pour obtenir une relation où les particules jouent un rôle symétrique, on écrit ∇f sous la forme :

$$\nabla f = \frac{1}{\rho} (\nabla(\rho f) - f \nabla \rho) \quad (3.20)$$

$\nabla(\rho f)$ et $\nabla \rho$ sont ensuite évalués avec (3.19) et on a :

$$\nabla f_\beta = \frac{1}{\rho_\beta} \sum_\alpha m_\alpha (f_\beta - f_\alpha) \nabla_\alpha W(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha, h) \quad (3.21)$$

ou ∇_α est le gradient pris par rapport à la variable \mathbf{x}_α .

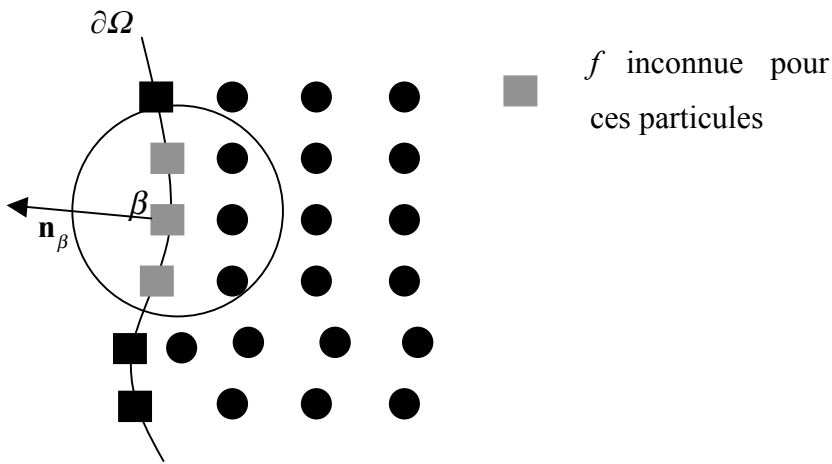


Fig. 3.5 - Condition de Neumann

(3.21) n'est valable que si le support du noyau en x_β est entièrement contenu dans Ω , or si $x_\beta \in \partial\Omega$ environ la moitié du support est à l'extérieur de Ω et ne contient aucune particule (Fig. 3.5), ce qui conduit à poser (Monaghan et al., 2005) pour $x_\beta \in \Omega$:

$$\nabla f_\beta = \frac{2}{\rho_\beta} \sum_\alpha m_\alpha (f_\beta - f_\alpha) \nabla_\alpha W(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha, h) \quad (3.22)$$

Pour les particules β du contour $\partial\Omega$, la condition de Neumann (3.18) s'écrit :

$$\frac{2}{\rho_\beta} \sum_\alpha m_\alpha (f_\beta - f_\alpha) \nabla_\alpha W(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha, h) \cdot \mathbf{n}_\beta = g_\beta \quad (3.23)$$

Les inconnues de (3.23) sont $f(x_\beta)$ et les $f(x_\alpha)$ pour $x_\alpha \in \partial\Omega$. La relation (3.23), appliquée à toutes les particules du contour $\partial\Omega$ conduit à un système algébrique qui sera résolu à chaque pas de temps. Le système algébrique obtenu est linéaire si la condition de Neumann est elle-même linéaire et non linéaire dans le cas contraire. Pour un problème thermique, les pertes radiatives donnent lieu à une condition de Neumann non linéaire dont le traitement sera détaillé au paragraphe 3.3.1.

Contour périodique

Pour simuler des milieux semi infinis on définit un contour périodique en identifiant S_1 et S_2 (Fig. 3.6) lors de la recherche des voisins d'une particule.

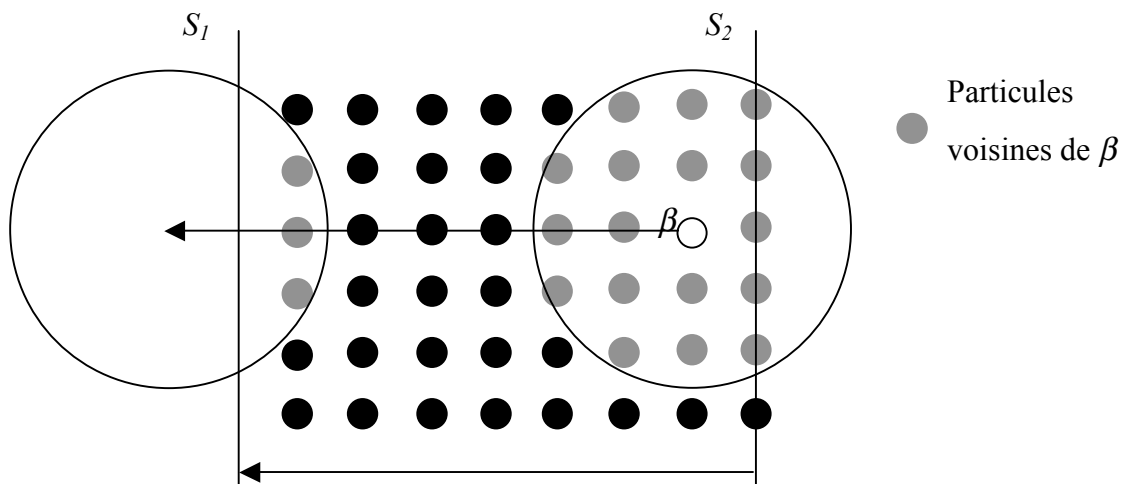


Fig. 3.6 - Contour périodique

3.2.4 Structure générale d'un code SPH

Les trois étapes principales d'un code SPH sont :

- recherche des voisins
- calcul des interactions
- intégration des EDO

La recherche des voisins de chaque particule dans un ensemble de N particules est une opération assez coûteuse qui, pour les meilleurs algorithmes, comme les KDTree (Warren et Salmon, 1994), a une complexité de $N\log(N)$. Dans la pratique, au lieu de chercher les

voisins de chaque particule, on construit une liste de paires de particules, chacune voisine l'une de l'autre, d'où l'intérêt d'avoir des relations où le rôle des particules est symétrique. Cette liste est parcourue une fois pour calculer les interactions entre particules, c'est-à-dire le second membre des EDO du type (3.8). Enfin ces EDO sont intégrées pour chaque particule.

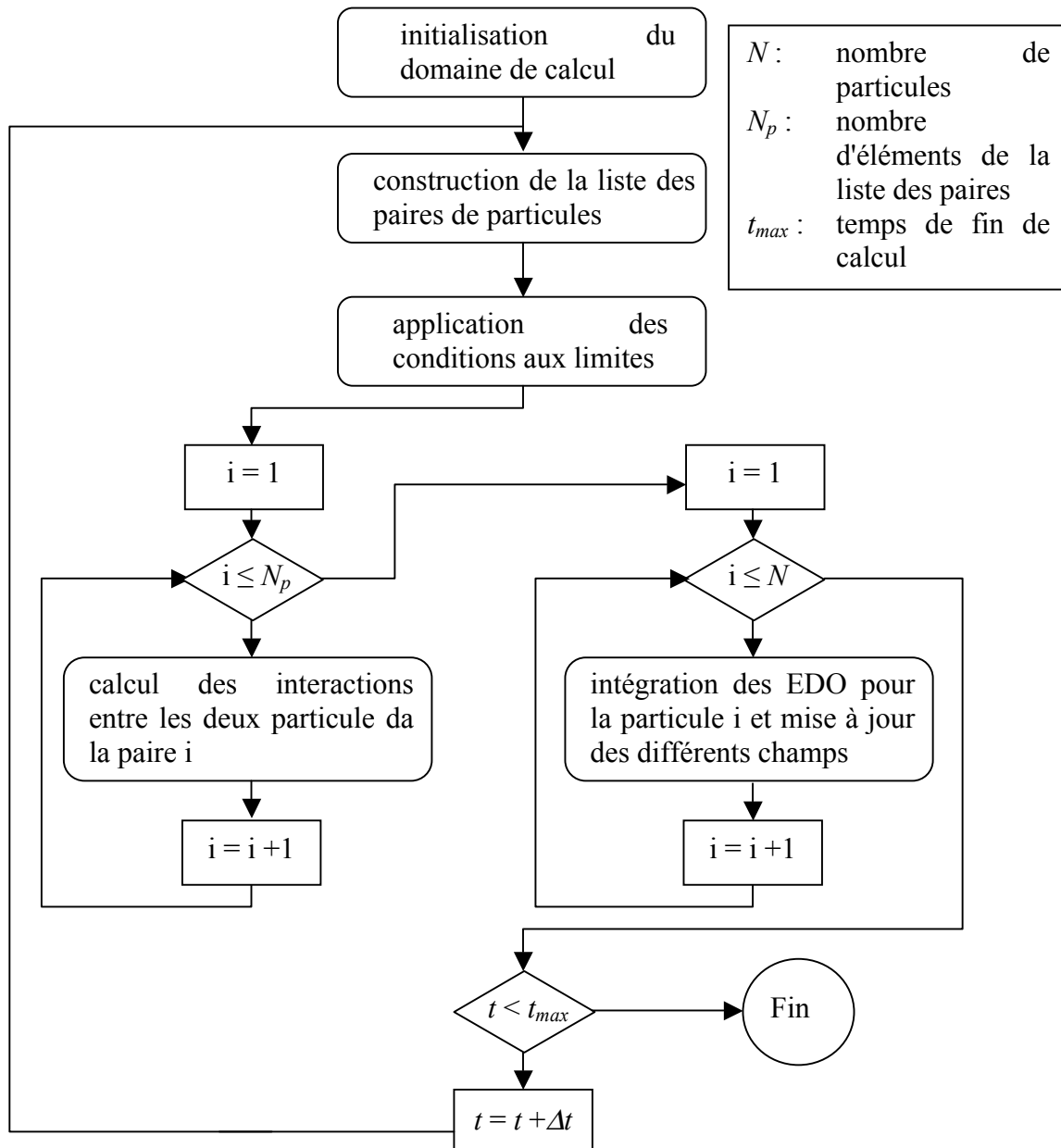


Fig. 3.7 - Organigramme d'un code SPH

3.3 Modèle pour le refroidissement d'une coulée de lave

Nous résoudrons ici la seule partie thermique des équations (1.x), sans tenir compte du couplage avec les équations de Navier-Stokes. La lave sera assimilée à un milieu semi infini dans la direction transversale à la coulée.

3.3.1 Equations du problème et formulation SPH

Considérons une coulée d'épaisseur H , mise en contact avec le sol et soumise à des pertes radiatives en surface. Lors du refroidissement, il se forme deux fronts de solidification, l'un partant du sol et l'autre de la surface (Fig. 3.8). Même pour une épaisseur de lave assez faible la solidification complète d'une coulée est suffisamment longue pour qu'on ne puisse plus considérer la température de contact avec le sol comme constante lors du calcul du temps de solidification. Nous calculerons donc la température du sol, sur une épaisseur de H_s , avec H_s inférieur à la distance de propagation de la chaleur dans le sol au moment de la solidification complète. Les propriétés physiques du sol sont celles de la lave solidifiée. Les propriétés physiques de la phase liquide seront notées avec l'indice l et celles de la phase solide avec l'indice s .

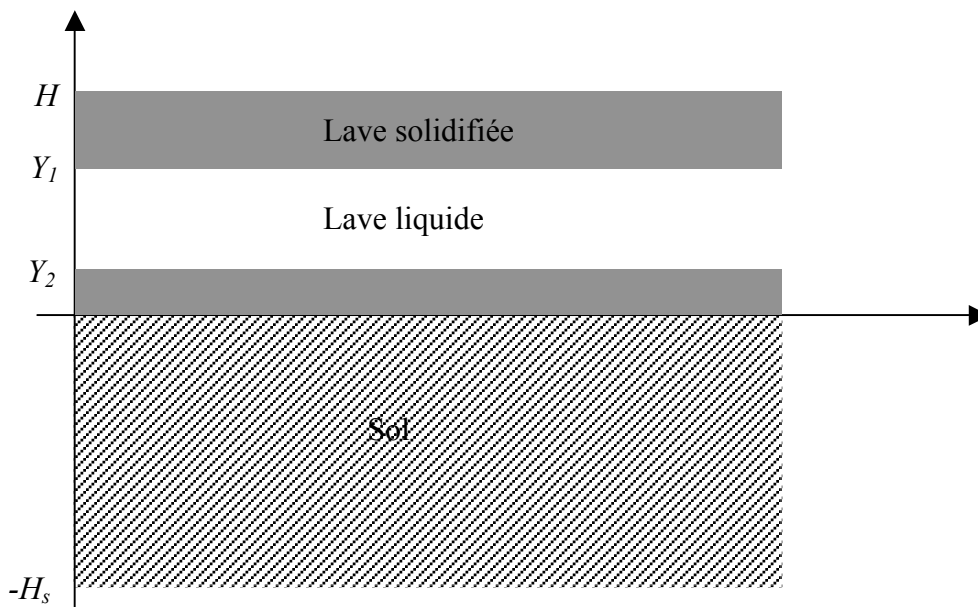


Fig. 3.8 - Coupe de la coulée de lave

Dans ces conditions, $T = T(y,t)$ et l'évolution de la température, dans la phase liquide et dans la phase solide (lave + sol), est donnée par l'équation de la chaleur. On a donc :

$$\text{- dans la phase solide} \quad \rho_s c_{ps} \frac{dT}{dt} = \nabla(\kappa_s \nabla T) \quad (3.24)$$

$$\text{- dans la phase liquide} \quad \rho_l c_{pl} \frac{dT}{dt} = \nabla(\kappa_l \nabla T) \quad (3.24b)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{- pertes radiatives en surface} \quad -\kappa_n \nabla T = k_b \varepsilon (T^4 - T_{ext}^4) \quad (3.25)$$

$$\text{- contact à } t = 0 \quad T(0,0) = T_{sol} \quad (3.26)$$

$$\text{- T constante en } -H_s \quad T(-H_s, t) = T_{sol} \quad (3.27)$$

L'évolution des fronts de solidification est donnée par :

$$\text{- front supérieur} \quad -\kappa_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_1^+} + \kappa_l \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_1^-} = L \rho_l \frac{dY_1}{dt} \quad (3.28)$$

$$\text{- front inférieur} \quad \kappa_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_2^-} - \kappa_l \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_2^+} = L \rho_l \frac{dY_2}{dt} \quad (3.29)$$

Formulation SPH

Le choix d'une formulation SPH conditionne la qualité des résultats et doit être fait avec soin. Au minimum elle doit respecter la conservation de l'énergie pour un système fermé et assurer que l'échange de quantité de chaleur entre deux particules soit symétrique.

Nous utiliserons l'expression introduite par Cleary et Monaghan (1998) basée sur une approximation intégrale de la variation de quantité de chaleur :

$$c_{p,\beta} \frac{dT_\beta}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha}{\rho_\alpha \rho_\beta} \frac{4\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa_\alpha + \kappa_\beta} (T_\beta - T_\alpha) F(r_{\alpha\beta}, h) \quad (3.30)$$

ou F est la fonction définie en (3.12).

Comme $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ la symétrie de l'échange de chaleur entre particules est assurée.

Si l'on ne fixe aucune condition aux limites, les particules n'échangent de l'énergie qu'entre elles, le système qu'elles composent est isolé et on a :

$$\sum_{\beta=1}^N m_{\beta} c_{p,\beta} \frac{dT_{\beta}}{dt} = \sum_{\beta=1}^N \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}} \frac{4\kappa_{\alpha} \kappa_{\beta}}{\kappa_{\alpha} + \kappa_{\beta}} (T_{\beta} - T_{\alpha}) F(r_{\alpha\beta}, h) = 0 \quad (3.31)$$

Il y a donc bien conservation de l'énergie pour un système isolé.

De plus (3.30) à l'avantage d'assurer la conservation du flux lorsque la conductivité thermique est discontinue et est très peu sensible au désordre des particules (Cleary et Monaghan, 1998).

Comme chaque particule possède sa propre chaleur spécifique, conductivité thermique et densité, il n'y a pas lieu de faire de différence entre la phase solide et la phase liquide dans (3.30).

Le problème se ramène alors à la résolution numérique, pour chaque particule, de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre (3.30).

Intégration numérique

Pour intégrer les équations (3.30) nous utiliserons des schémas explicites classiques. Nous implémenterons en particulier les méthodes d'Euler, d'Euler-Cauchy et de Runge-Kutta. Ces méthodes sont détaillées dans Hubbard et Hubert (2006).

Ces schémas explicites ne sont stables que si le pas d'intégration Δt vérifie la condition de Courant. Cleary et Monaghan (1998) ont montré que pour des problèmes bidimensionnels cette condition se traduit par :

$$\Delta t \leq 0.15 \frac{c_p \rho h^2}{\kappa} \quad (3.32)$$

Traitement du changement de phase

Le traitement du changement de phase proposé par Monaghan et al. (2005) est simple et efficace : une particule ne passe de l'état solide à l'état liquide que quand elle a libéré entièrement sa chaleur latente et entre temps sa température reste fixée à T_s . Dans la pratique on procédera comme suit :

- on associe à chaque particule la quantité q représentant la fraction relative de chaleur latente par unité de masse libérée. Au début de la simulation $q = 1$ pour les particules solides et $q = 0$ pour les particules liquides.

- si $T < T_s$ et $q < 1$, on incrémente q de $\frac{c_p (T_s - T)}{L}$ et ensuite on impose $T = T_s$

- dès que $q \geq 1$, la particule passe à l'état solide, sa température est fixée à $T = T_s - \frac{(q-1)L}{c_p}$, q à 1, et ses propriétés sont mise à jour pour refléter celle de la phase solide.

De cette manière, les fronts de solidification se forment et évoluent automatiquement sans aucun traitement particulier, et ce, quelle que soit la géométrie du problème. Les fronts de solidification sont constitués des particules pour lesquelles $0 < q < 1$. Ceci constitue un énorme avantage par rapport aux éléments finis et différences finies.

Conditions aux limites

La condition de Dirichlet ne pose aucun problème :

$$T_\beta = T_{sol}, \text{ pour } x_\beta \in S_1 \quad (3.33)$$

Les pertes radiatives en surface donnent lieu à la condition de Neumann non linéaire (3.25). Les particules de S_2 doivent alors vérifier :

$$-\kappa_\beta \mathbf{n}_\beta \cdot \nabla T_\beta = k_b \varepsilon (T_\beta^4 - T_{ext}^4), \text{ pour } x_\beta \in S_2 \quad (3.34)$$

En exprimant ∇T_β avec (3.22) on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_\beta \cdot \nabla T_\beta &= \frac{2}{\rho_\beta} \sum_\alpha m_\alpha (T_\beta - T_\alpha) \mathbf{n}_\beta \cdot \nabla_\alpha W(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha, h) \\
&= \frac{2}{\rho_\beta} \sum_\alpha m_\alpha (T_\beta - T_\alpha) \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} F(r_{\alpha\beta}, h)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Donc (3.34) conduit à :

$$-\frac{2\kappa_\beta}{\rho_\beta} \sum_\alpha m_\alpha (T_\beta - T_\alpha) \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} F(r_{\alpha\beta}, h) = k_b \varepsilon (T_\beta^4 - T_{ext}^4) \tag{3.36}$$

Une partie des particules voisines de β se trouve sur S_2 et les températures de ces particules sont des inconnues de (3.36). En isolant les inconnues dans le membre de gauche on obtient :

$$\begin{aligned}
k_b \varepsilon T_\beta^4 - \frac{2\kappa_\beta}{\rho_\beta} \sum_{\alpha, x_\alpha \in S_2} m_\alpha (T_\beta - T_\alpha) \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} F(r_{\alpha\beta}, h) &= \\
k_b \varepsilon T_{ext}^4 - \frac{2\kappa_\beta}{\rho_\beta} \sum_{\alpha, x_\alpha \in S_2} m_\alpha T_\alpha \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} F(r_{\alpha\beta}, h) &
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Les relations (3.37) peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$k_b \varepsilon \mathbf{I} \begin{bmatrix} T_{\beta_1}^4 \\ \vdots \\ T_{\beta_m}^4 \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} T_{\beta_1} \\ \vdots \\ T_{\beta_m} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \tag{3.38}$$

ou β_1, \dots, β_m sont les m particules du contour S_2 , \mathbf{I} la matrice identité, \mathbf{A} une matrice $m \times m$ et \mathbf{C} le second membre de (3.37).

Si S_2 est un segment de droite, on a $\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta} = 0$ pour tout couple de particules α et β appartenant à S_2 et la matrice \mathbf{A} est diagonale.

Pour imposer la condition (3.34) le système non linéaire (3.38) sera résolu à chaque pas de temps par la méthode de Newton itérative.

3.3.2 Aspect informatique

Le modèle numérique développé dans nos travaux doit servir à résoudre le problème présenté ici et plus généralement tout problème thermique bidimensionnel avec changement de phase. De plus il doit pouvoir évoluer facilement pour prendre en compte le couplage avec les équations de Navier-Stokes et les problèmes tridimensionnels.

Il s'agit donc de développer un modèle numérique évolutif qui sera utilisé par les chercheurs de l'INGV et en particulier ceux du TECNOLAB.

Dans ce contexte ce modèle doit répondre aux critères suivants :

- mise en œuvre facile : la définition et la résolution d'un problème ne doit nécessiter que des connaissances informatiques de base et ne doit pas dépasser la centaine de lignes,
- flexibilité : le changement de noyau ou de méthode d'intégration doit être extrêmement simple,
- modularité : l'ajout de nouvelles fonctionnalités, comme de nouveaux schémas d'intégration, d'autres noyaux, le couplage avec les équation de Navier-Stokes, ..., doivent se faire sans modifier la structure du code.

Description du code

A l'heure actuelle la majeure partie des codes de calcul numériques sont développés en Fortran. L'argument principal de ce choix est la prétendue performance pour les applications numériques. En fait celle-ci dépend de deux facteurs principaux : les capacités d'optimisation du compilateur utilisé et la structure même du code. En termes d'optimisation les compilateurs ont beaucoup évolué ces vingt dernières années et leurs performances sont quasiment équivalentes. Quand à la structure du code elle résulte des choix techniques effectués et n'est que très marginalement liée au langage utilisé. Les performances d'un code numérique dépendent essentiellement de la manière dont il est réalisé et il n'y a donc aucune raison de préférer à priori un langage à un autre.

De plus l'efficacité globale d'un modèle numérique ne se réduit pas à ses seules performances, mais dépend aussi de sa simplicité au niveau utilisateur et de sa flexibilité. Nous avons donc

cherché le meilleur compromis entre performances numériques et facilité de mise en oeuvre et d'extension.

L'utilisation du C++ et notamment des notions d'héritage et de classe abstraite permet de satisfaire à ces critères et d'obtenir un code très lisible. Nous avons donc choisi de développer le code en C++ en privilégiant la lisibilité, la facilité d'utilisation et la modularité.

Utilisation de classes abstraites

Pour illustrer la notion de classe abstraite et l'utilisation que nous en ferons, prenons l'exemple du noyau. Les *cubic* et *quintic spline* sont respectivement définis dans les classes CubicSpline et QuinticSpline. Dans une simulation, pour utiliser le *cubic spline* on doit créer une instance de cette classe :

```
CubicSpline noyau;
```

La variable noyau est du type CubicSpline et donc toutes les fonctions utilisant noyau doivent accepter un paramètre de type CubicSpline. Pour refaire la même simulation en utilisant le *quintic spline*, changer simplement la déclaration du noyau en :

```
QuinticSpline noyau;
```

conduira à des erreurs de compilation à chaque fois que noyau, maintenant de type QuinticSpline, est passé en paramètre à une fonction à la place d'une variable de type CubicSpline. Pour éviter ces problèmes, il faut pouvoir avoir plusieurs implémentations différentes d'un même type d'objet : c'est le but des classes abstraites. Une classe abstraite contient des fonctions virtuelles pures qui ne sont définies que dans ses classes filles et a la propriété suivante : les pointeurs vers les classes filles sont du même type que ceux vers la classe abstraite mère.

Dans notre cas, nous utiliserons une classe abstraite Kernel où sont déclarées les fonctions virtuelles qui seront implémentées dans les classes filles.

```
class Kernel {
public:
    Kernel(void) {};
    virtual ~Kernel(void) {};

    /// Radius of support domain divided by slength
    virtual double K() = 0;
```

```

    /// Value of smoothing kernel
    virtual double Wr(double, double) = 0;
    /// Value of kernel radial derivative
    virtual double F(double, double) = 0;
};

```

CubicSpline et QuinticSpline sont alors déclarées comme classes filles de Kernel et implémentent les fonctions virtuelles de Kernel (K, Wr et F). Par exemple, la déclaration de la classe CubicSpline et l'implémentation de la fonction F est donnée ci-dessous :

```

class CubicSpline: public Kernel {
private:
    double    a; ///< normalization factor

public:
    CubicSpline(void);
    ~CubicSpline(void) {};
    /// Return support domain radius
    double K(void) { return 2.0; };
    /// Return kernel value
    double Wr(double, double);
    /// Return kernel radial derivative value
    double F(double, double);
};

double CubicSpline::F(double r, double h)
{
    double val = 0.0;
    double R = r/h;

    if (R >= 2)
        val = 0;
    else {
        if (R < 1)
            val = -2.0*R + 1.5*pow(R, 2);
        else
            val = -0.5*pow(2 - R, 2);
    }

    val /= pow(h, ndim);
    val /= r*h;
    val *= a;

    return val;
}

```

La classe QuinticSpline ne diffère de la classe CubicSpline que par l'implémentation des fonctions K, Wr et F.

Pour profiter de la propriété des classes abstraites, dans toutes les fonctions utilisant le noyau, celui-ci devra apparaître sous forme d'un pointeur vers un objet du type `Kernel`. Ainsi si `G` est une fonction dont le prototype est :

```
double G(Kernel *);
```

l'appel :

```
val = G(&noyau);
```

est parfaitement licite que `noyau` soit une variable du type `CubicSpline` ou `QuinticSpline`.

La classe abstraite `Kernel` constitue une interface vers les différents types de noyaux et les avantages liés à son utilisation sont :

- lors d'une simulation, le choix du noyau se fait lors de sa déclaration,
- la modularité du code obtenu : l'ajout d'un nouveau noyau est simple et ne modifie pas la structure du code, il suffit de construire une classe fille de `Kernel` contenant une nouvelle implémentation des fonctions `K`, `Wr` et `F`.

Nous utiliserons de la même manière les classes abstraites pour définir des interfaces vers les différents type d'intégrateurs, de particules, d'objets géométriques, et de contours.

Structure du code

Le code de calcul est subdivisé en un ensemble de classes, chacune d'entre elles prenant en charge une partie des opérations nécessaires à la simulation. Nous appellerons "utilisateur" la personne qui effectue une simulation avec l'ensemble de classes que nous avons développé. Notre souci principal, outre l'obtention de performances correctes, a été de minimiser le travail informatique incombant à l'utilisateur.

Le code est organisé autour de l'objet `SPH` dont la méthode `TimeStep` permet d'avancer d'un pas de temps dans l'algorithme. La méthode `TimeStep` gère donc :

- la recherche des voisins,
- l'application des conditions aux limites,
- le calcul des interactions entre particules,

- l'intégration temporelle.

La recherche des voisins repose sur l'algorithme KDTree indépendant de la dimension du problème et ne peut être modifiée par l'utilisateur.

Les conditions aux limites sont imposées par le type de contour utilisé pour les définir. Plusieurs objets sont disponibles pour répondre aux diverses exigences : conditions de Dirichlet, de Neumann linéaires et non linéaires, contour périodique.

Le calcul des interactions entre particules se fait au niveau même des classes définissant les particules et est donc implicitement donné par le choix des particules utilisées pour une simulation.

L'intégration temporelle est faite par l'objet SPH et dépend de la méthode d'intégration choisie par l'utilisateur, ceci de manière transparente.

Pour effectuer une simulation l'utilisateur se borne donc à configurer l'objet SPH en lui fournissant un vecteur contenant les particules, les différents contours, le noyau et la méthode d'intégration. Pour la création du vecteur contenant les particules, il a à sa disposition un ensemble d'objets utilitaires permettant de définir la géométrie du problème et de remplir le domaine de particules. De cette manière une simulation nécessite une centaine de lignes de code.

Pour un utilisateur, la structure typique d'une simulation est donc :

1. choix au niveau des déclarations du noyau, de l'intégrateur et du type de particule,
2. définition de la géométrie du problème et création des particules dans le domaine de calcul en utilisant les fonctionnalités de la classe Object,
3. définitions des conditions aux limites
4. initialisation de l'objet SPH,
5. boucle temporelle : appel de la fonction TimeStep de l'objet SPH.

Du côté utilisateur, les objectifs fixés en termes de facilité de mise en œuvre et de flexibilité semblent donc atteints.

Dans la mesure où la quasi-totalité du code est indépendante de la dimension du problème et où le calcul des interactions se fait au niveau des classes définissant les différentes particules, le travail à fournir pour aboutir à un modèle tridimensionnel incluant le couplage avec les équations de Navier-Stokes se limitera à :

- la création de deux nouveaux types de particules modélisant la partie fluide et les frontières solides;
- la création d'une version 3D des objets nécessaires à la définition de la géométrie du problème.

La aussi, il semble que notre objectif concernant les capacités et la facilité d'extension soit atteint.

3.3.3 Cas test

Nous avons testé notre modèle sur trois problèmes ayant une solution analytique : le problème de Stefan, la solidification radiale en présence d'un puits de chaleur et le refroidissement d'une plaque soumise à une condition de flux.

Pour toutes les simulations de ce paragraphe, le domaine de calcul sera rempli de particules régulièrement espacées d'une distance Δp dans les directions x et y , nous utiliserons le *cubic spline kernel* et le schéma d'intégration d'Euler-Cauchy avec Δt vérifiant (3.32).

Pour les deux problèmes de solidification nous prendrons les mêmes valeurs numériques que Monaghan et al. (2005).

Problème de Stefan

Considérons un liquide à la température initiale $T_0 > T_s$, occupant le domaine $y \geq 0$, soumis en $x = 0$ à la température $T_b < T_s$ et ayant les mêmes propriétés pour la phase solide et la phase liquide ($\rho_s = \rho_l = \rho$, $\kappa_s = \kappa_l = \kappa$ et $c_{p,s} = c_{p,l} = c_p$). Nous noterons Y la position du front de solidification. La température dans la partie solide $y < Y$ est donné par (Carslaw et Jaeger, 1990) :

$$T(y) = T_b + \frac{T_s - T_b}{\text{erf}(\lambda)} \text{erf}(\eta) \quad (3.39)$$

La température dans la partie liquide $y > Y$ est donné par :

$$T(y) = T_0 + \frac{T_s - T_0}{\text{erfc}(\lambda)} \text{erfc}(\eta) \quad (3.40)$$

La position du front de solidification est donnée par :

$$Y = 2\lambda \sqrt{\frac{\kappa t}{\rho c_p}} \quad (3.41)$$

Avec erf fonction d'erreur, $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$, $\eta = y \sqrt{\frac{\rho c_p}{4\kappa t}}$ et λ solution de :

$$T_s - T_b = \text{erf}(\lambda) e^{\lambda^2} \left(\frac{\lambda L \sqrt{\pi}}{c_p} + \frac{(T_s - T_b) e^{-\lambda^2}}{\text{erfc}(\lambda)} \right) \quad (3.42)$$

La simulation est faite dans le domaine $[0,1] \times [0,1]$ contenant 40×40 particules avec $T(0,t) = T_b$, aucune contrainte pour $y = 1$ et une condition périodique entre $x = 0$ et $x = 1$. Nous prendrons $\rho = 1$, $\kappa = 1$, $c_p = 1$, $L = 1$, $T_s = 1$, $T_0 = 1.2$ et $\lambda = 0.5$ ce qui entraîne $T_b = 0.190602$. A l'instant initial les particules en $y = 0$ sont à l'état solide et les autres à l'état liquide et à la température T_0 . L'évolution de la température est calculée jusqu'à $t = 0.0568$.

La répartition des particules, le profil de température et la fraction de chaleur latente libérée, à $t = 0.0568$, sont représentés dans les figures 3.9, 3.10 et 3.11.

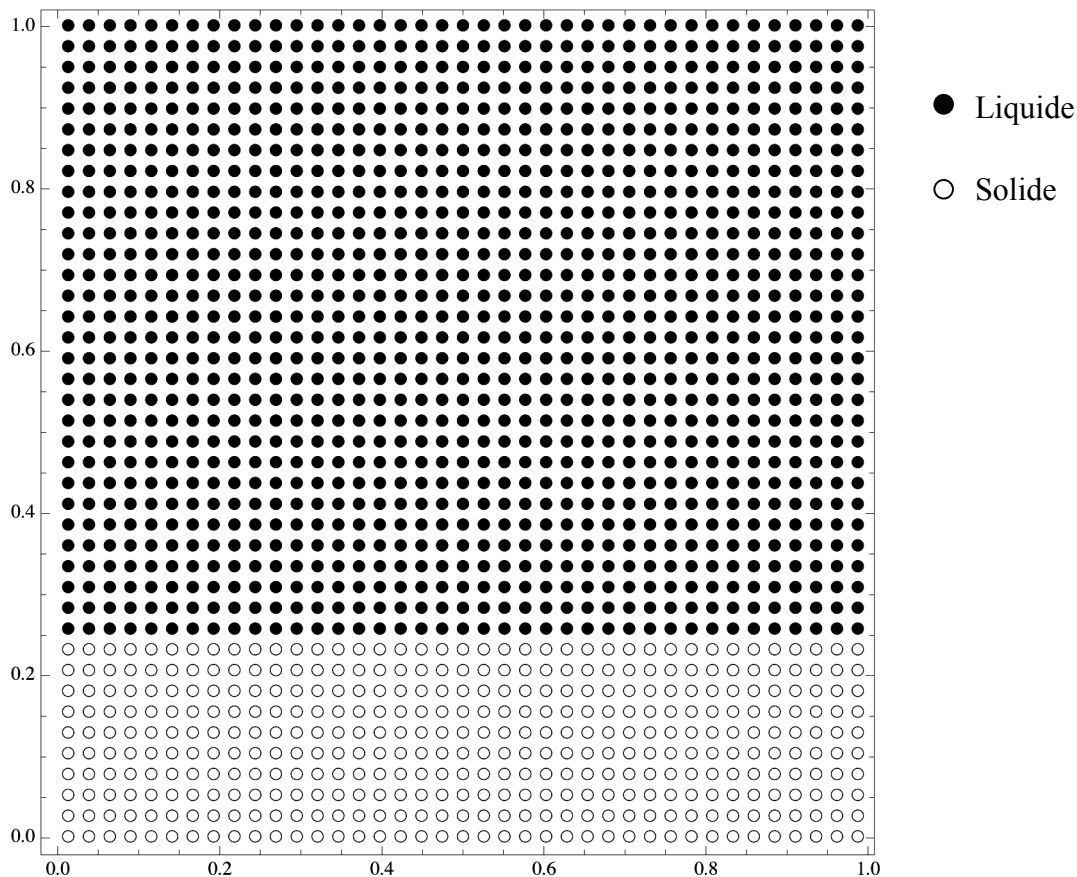


Fig. 3.9 - Répartition des particules à $t = 0.0568$

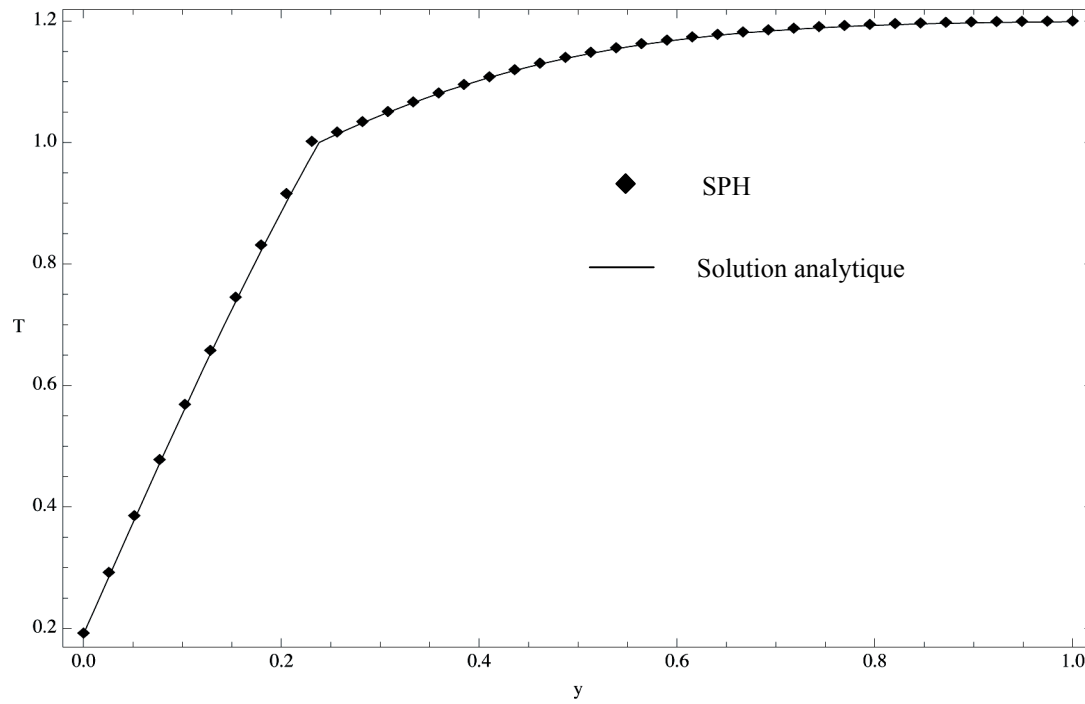


Fig. 3.10 - Profil de température à $t = 0.0568$

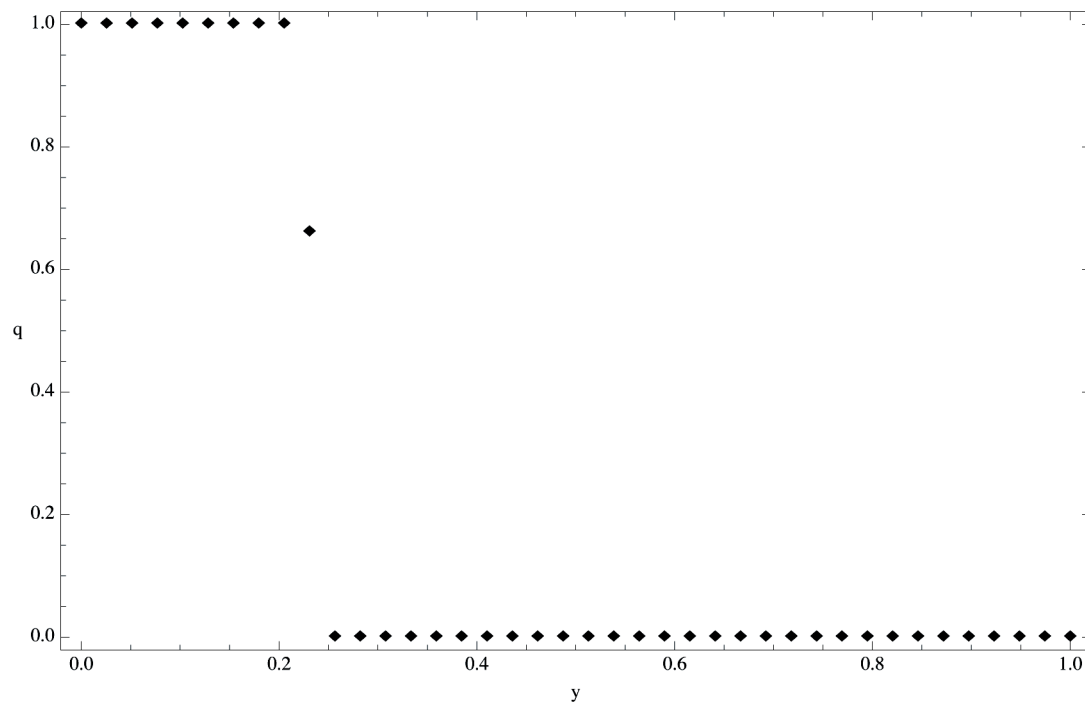


Fig. 3.11 - Fraction de chaleur latente libérée

L'évolution temporelle de la position du front de solidification est représentée sur la figure 3.12.

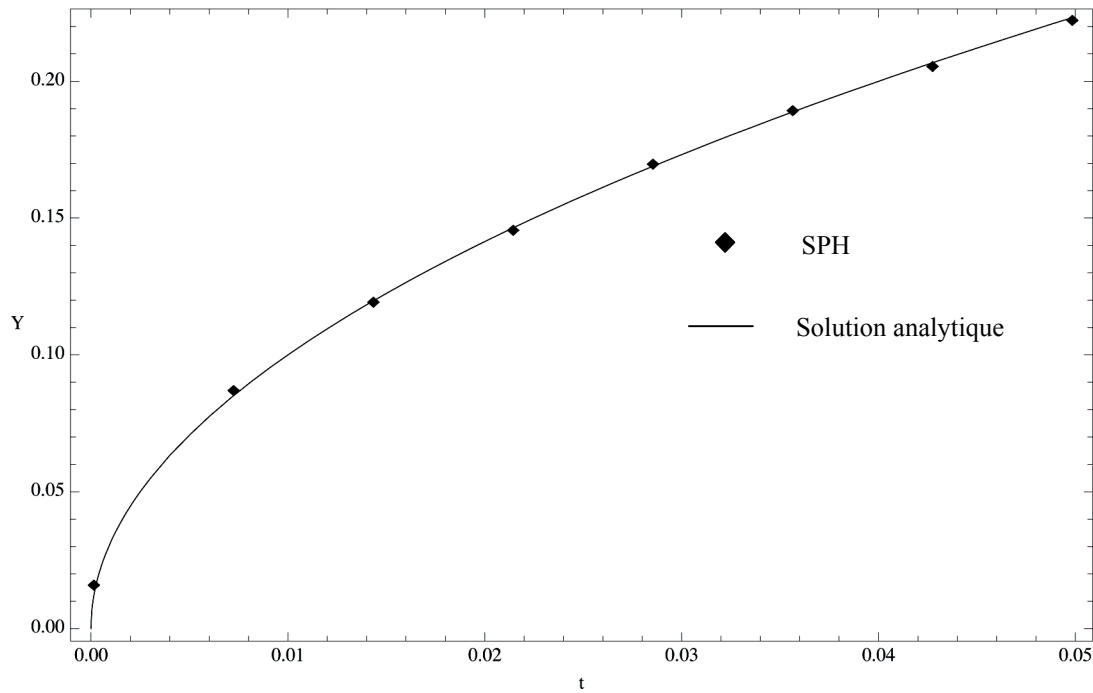


Fig. 3.12 - Evolution de la position du front de solidification

Même avec un nombre modeste de particules les résultats obtenus sont en parfait accord avec la solution analytique.

Solidification radiale

Considérons un corps bidimensionnel infini, à la température initiale $T_0 > T_s$, en présence d'un puits de chaleur ponctuel d'intensité \tilde{Q} à l'origine. C'est un problème à symétrie radiale pour lequel $T = T(r, t)$. Notons R le rayon du front de solidification et $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ la diffusivité thermique. En présence d'une source de chaleur ponctuelle d'intensité Q en \mathbf{x}_0 l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\rho_s c_{ps} \frac{dT}{dt} = \nabla(\kappa_s \nabla T) + Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.43)$$

Il faut donc modifier la formulation SPH correspondante qui devient (Monaghan et al., 2005) :

$$c_{p,\beta} \frac{dT_\beta}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}} \frac{4\kappa_{\alpha} \kappa_{\beta}}{\kappa_{\alpha} + \kappa_{\beta}} (T_{\beta} - T_{\alpha}) F(r_{\alpha\beta}, h) + \frac{1}{\rho_{\alpha}} Q \xi W(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_Q) \quad (3.44)$$

ou ξ est un facteur de normalisation vérifiant :

$$\frac{1}{\xi} = \sum_{|\mathbf{x}_{\gamma} - \mathbf{x}_Q| \leq kh} \frac{m_{\gamma}}{\rho_{\gamma}} W(\mathbf{x}_{\gamma} - \mathbf{x}_Q) \quad (3.45)$$

Dans notre cas, comme \tilde{Q} représente l'intensité d'un puits on a $Q = -\tilde{Q}$.

La température dans la partie solide $r < R$ est donnée par (Carslaw et Jaeger, 1990) :

$$T = T_s + \frac{\tilde{Q}}{4\pi\kappa_s} \left(E_1(\lambda^2) - E_1\left(\frac{r^2}{4\alpha_s t}\right) \right) \quad (3.46)$$

La température dans la partie liquide $r > R$ est donnée par :

$$T = T_0 + \frac{T_s - T_0}{E_1\left(\frac{\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_l}\right)} E_1\left(\frac{r^2}{4\alpha_l t}\right) \quad (3.47)$$

Avec $E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} du$ et λ solution de :

$$\frac{\tilde{Q}}{4\pi e^{\lambda^2}} = \lambda^2 L \rho_s \alpha_s - \frac{\kappa_l (T_s - T_0)}{E_1\left(\frac{\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_l}\right)} e^{-\frac{\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_l}} \quad (3.48)$$

La position du front de solidification est donnée par :

$$R = 2\lambda \sqrt{\alpha_s t} \quad (3.49)$$

La simulation est faite pour le couple eau/glace dans le domaine $[-1,1] \times [-1,1]$ contenant 50×50 particules avec le puits de chaleur situé à l'origine et sans aucune contrainte sur la frontière du domaine. Les valeurs des différents paramètres utilisés sont reportées dans le tableau 3.1.

Compte tenu de ces valeurs, en prenant $\lambda = 0.15$ on obtient à partir de (3.45) $\tilde{Q} = -148.246$ et

donc $Q = 148.246$. A l'instant initial toutes les particules sont à l'état liquide et à la température T_0 . L'évolution de la température est calculée jusqu'à $t = 132h$.

Paramètre	Valeur	Unite
ρ_s	1000	$kg.m^{-3}$
ρ_l	1000	
c_{ps}	2093	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
c_{pl}	4190	
κ_s	2.2	
κ_l	0.591	
L	$3.335 \cdot 10^5$	$J.kg^{-1}$
T_s	0	$^{\circ}C$
T_0	10	

Tab. 3.1 - Valeurs des paramètres du couple eau/glace

Le profil de température et les isothermes, à $t = 132h$, sont représentés dans les figures 3.13 et 3.14 et l'avancement du front de solidification dans la figure 3.15.

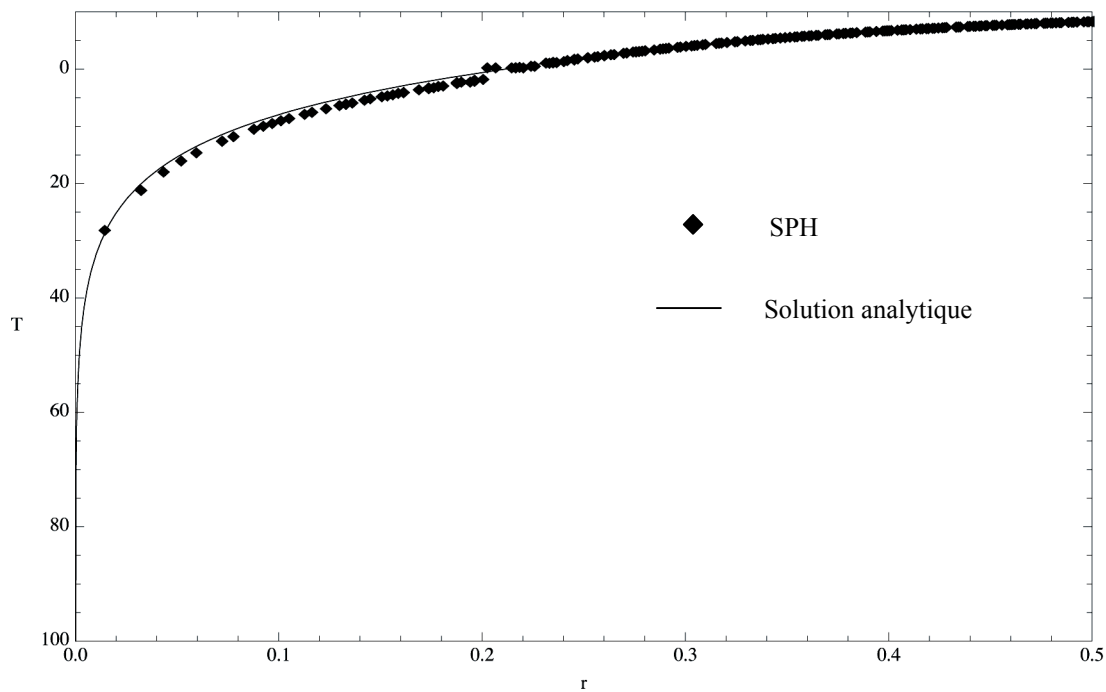


Fig. 3.13 - Profil de température à $t = 132h$.

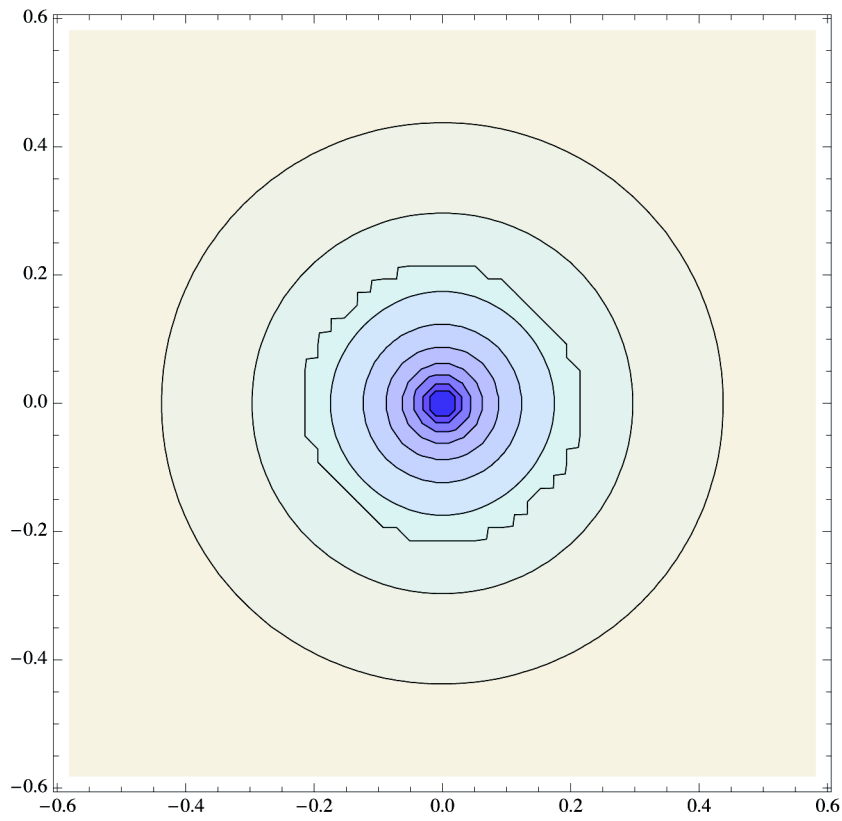


Fig. 3.14 - Isothermes à $t = 132h$.

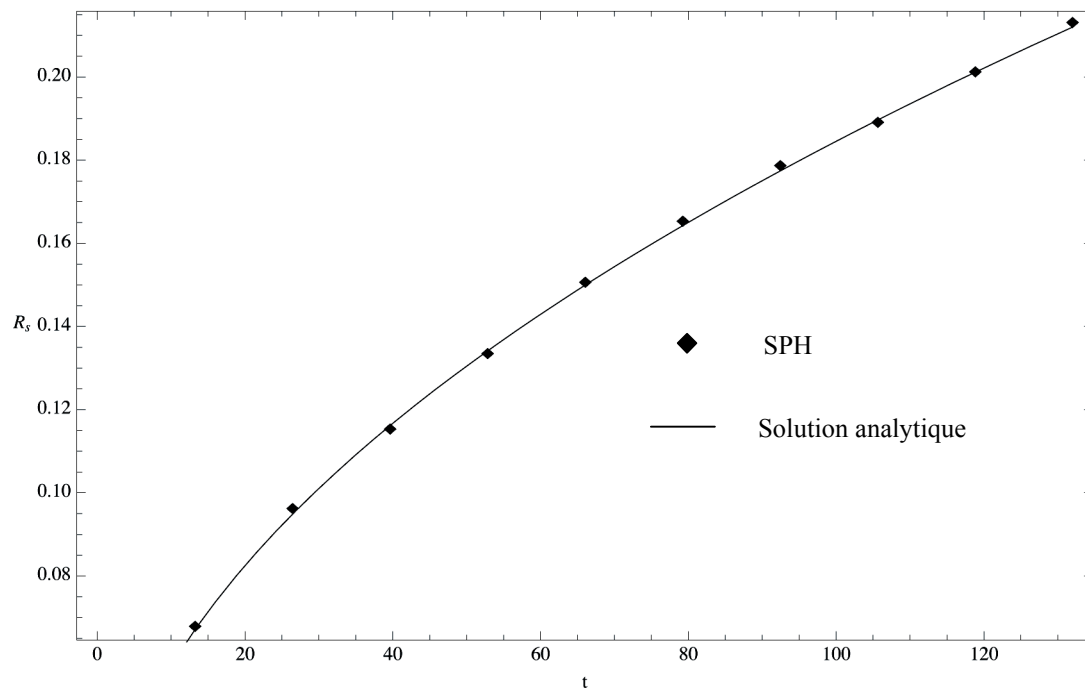


Fig. 3.15 - Evolution du front de solidification

L'isotherme correspondant à $T = T_s$ est irrégulière et cela est tout à fait normal vu la manière dont est traité le changement de phase avec les SPH. La température et la position du front de solidification sont en très bon accord avec la solution analytique bien que la disposition des particules, sur une grille cartésienne, ne reflète pas la symétrie axiale du problème.

Plaque semi infinie avec flux imposé

Considérons une plaque semi infinie, de conductivité κ et de diffusivité α , à la température initiale T_0 , occupant le domaine $x \geq 0$, soumise en $x = 0$ à un flux de chaleur ϕ .

Pour ϕ constant la température dans la plaque est donnée par (Carslaw et Jaeger, 1990) :

$$T(x,t) = T_0 - \frac{2\phi}{\kappa} \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (3.50)$$

avec $\operatorname{ierfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-x^2} - x \operatorname{erfc}(x) \right)$.

Pour un flux convectif, avec $\phi = h(T(0,t) - T_{ext})$ la température dans la plaque est donnée par :

$$T(x,t) = T_{ext} + (T_i - T_{ext}) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{\kappa}\right) e^{\frac{hx}{\kappa} + \frac{\alpha h^2 t}{\kappa^2}} \right) \quad (3.51)$$

où T_{ext} est la température du milieu ambiant.

La condition de Neumann linéaire en $x = 0$ ($-\kappa \mathbf{n} \cdot \nabla T = \phi$ ou $-\kappa \mathbf{n} \cdot \nabla T = h(T(0,t) - T_{ext})$) est traitée de manière similaire à celle non linéaire issue des pertes radiative décrite en 3.3.1, à la différence près que l'on aboutit à un système linéaire dont les températures des particules situées en $x = 0$ sont solutions.

La simulation est faite dans le domaine $[0,1] \times [0,1]$ contenant 40×40 particules avec un flux constant ou convectif en $x = 0$, aucune contrainte pour $x = 1$ et une condition périodique entre $y = 0$ et $y = 1$. Nous prendrons $\rho = 1$, $\kappa = 1$, $\alpha = 0.001$, et $T_i = 1$. A l'instant initial toutes les

particules sont à la température T_i . Les profils de température pour $\phi = 1$ et $\phi = h(T(0,t) - T_{ext})$ avec $h = 1$ sont représentés dans les figures 3.16 et 3.17.

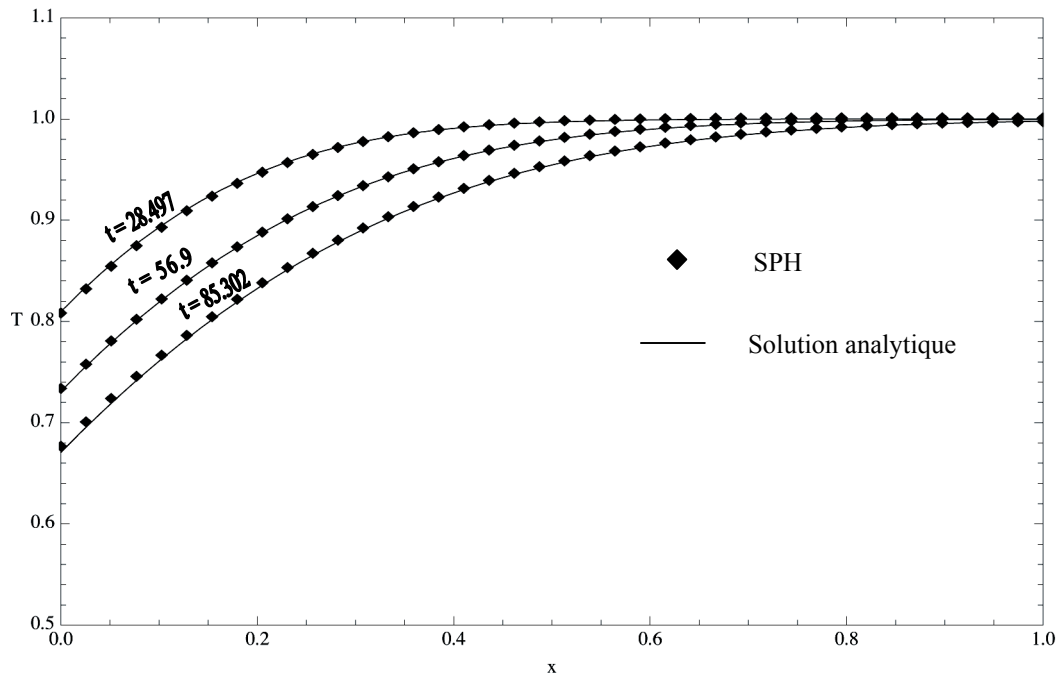


Fig. 3.16 - Profils de température pour $\phi = 1$.

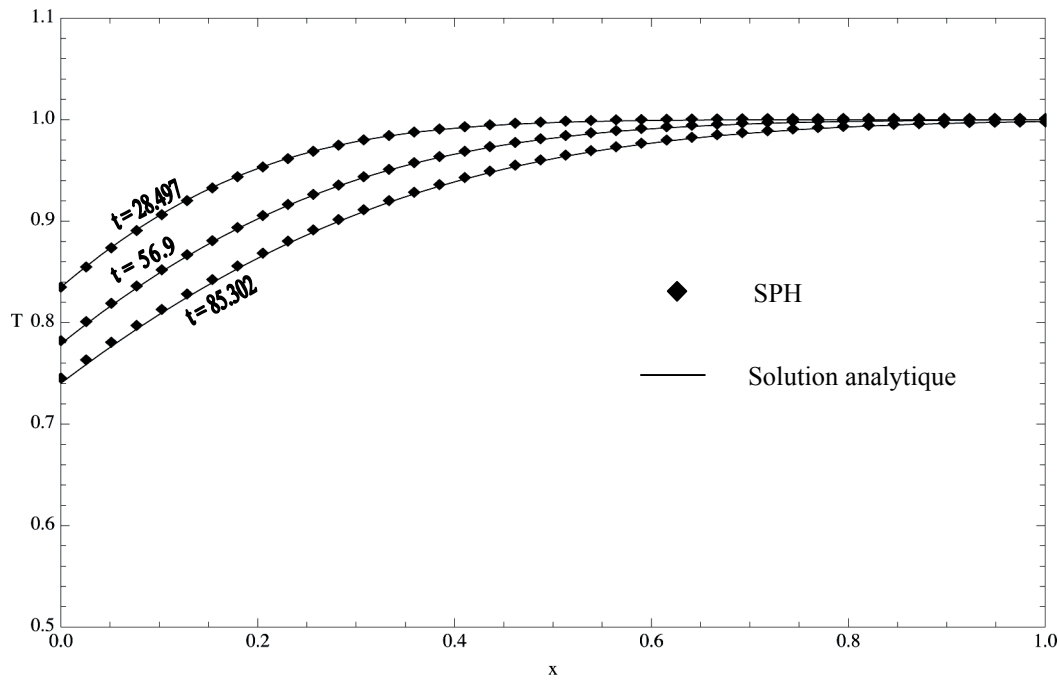


Fig. 3.17 - Profils de température pour $\phi = h(T(0,t) - T_{ext})$ avec $h = 1$.

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les solutions analytiques ce qui nous permet de valider la méthode que nous avons employé pour traiter les conditions de Neumann linéaires.

3.4 Résultats obtenus

Nous avons utilisé notre modèle pour deux problèmes de vulcanologie : le refroidissement d'un lac de lave soumis à deux conditions de température différentes en sa partie inférieure et supérieure et le refroidissement d'une coulée de lave sous l'effet des pertes radiatives.

L'étude du refroidissement d'un lac de lave nous permettra de valider notre modèle en présence de plusieurs fronts de solidification en le comparant avec une solution semi analytique et avec une modélisation par éléments finis.

Nous déduirons de l'étude du refroidissement d'une coulée le temps de solidification total et les relations entre le temps et l'épaisseur de la croûte et sa température de surface. L'intégration de ces dernières relations dans notre modèle holistique fait l'objet de travaux en cours.

3.4.1 Refroidissement d'un lac de lave

Nous étudierons ici le refroidissement d'un lac de lave de 2 km d'épaisseur, à la température initiale T_s , soumis en sa partie supérieure à une température T_l et en sa partie inférieure à une température T_2 . A. Manglick (2004) donne une solution semi analytique à ce problème, à laquelle nous comparerons nos résultats.

Les équations de ce problème sont tout à fait similaires à celles exposées en 3.3.1 sauf pour les conditions aux limites qui sont ici deux conditions de Dirichlet.

La simulation est effectuée dans le domaine $[-10 \Delta p, 10 \Delta p] \times [-1000, 1000]$ contenant 3318 particules espacées régulièrement $\Delta p = 12.66$ suivant les axes x et y . avec $T(-1000, t) = T_2$, $T(1000, t) = T_l$, et une condition périodique entre $x = -10 \Delta p$ et $x = 10 \Delta p$. Nous utiliserons le *cubic spline kernel* avec $h = 1.3 \Delta p$ et le schéma d'intégration d'Euler-Cauchy avec $\Delta t = 3.15 \cdot 10^7$ vérifiant (3.32).

Les valeurs des différents paramètres utilisés sont reportées dans le tableau 3.2. A l'instant initial toutes les particules sont à l'état liquide et à la température T_s . L'évolution de la température est calculée jusqu'à la solidification complète de la lave.

Paramètre	Valeur	Unite
ρ_s, ρ_l	2400	kg.m ⁻³
c_{ps}, c_{pl}	1000	J.kg ⁻¹ .K ⁻¹
κ_s, κ_l	2.2	W.m ⁻¹ .K ⁻¹
L	3.3 10 ⁵	J.kg ⁻¹
T_s	1100	°C
T_1	0	°C
T_2	647	°C

Tab. 3.2 - Valeurs des paramètres utilisés

Le profil de température pour $t = 0.004, 0.007$ et 0.1 Ma ainsi que l'évolution des fronts de solidification sont représentés dans les figure 3.18 et 3.19.

Les deux fronts de solidification se rejoignent pour $t = 0.011$ Ma, valeur très proche de celle du modèle semi analytique $t = 0.0111$ Ma.

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec la solution semi analytique donnée par Manglick.

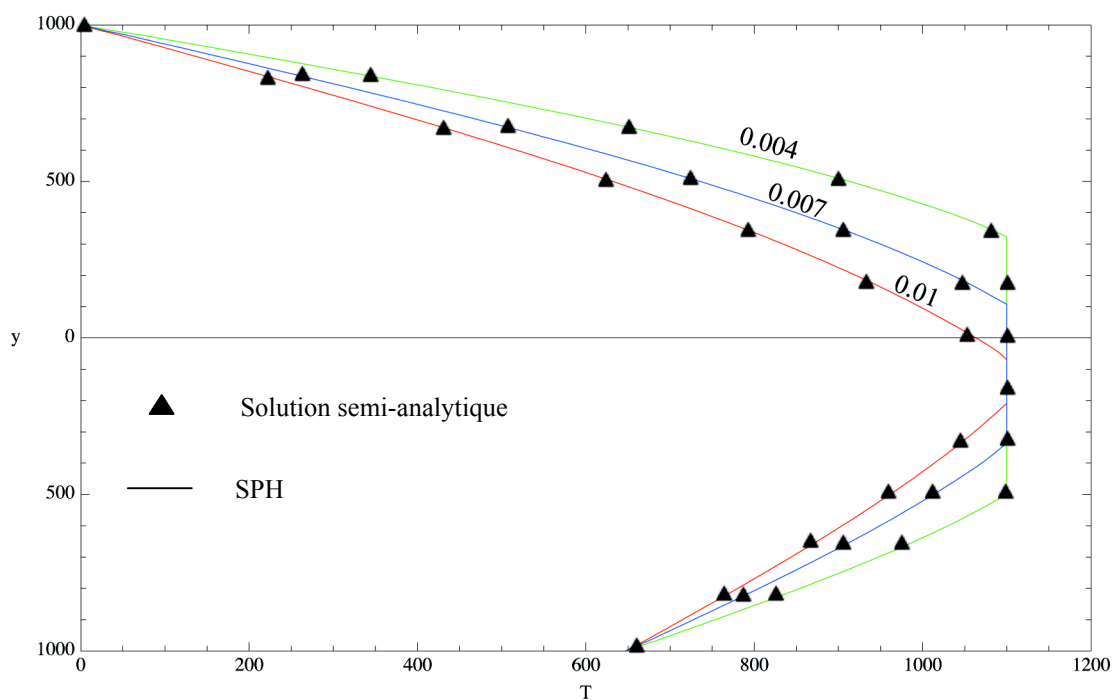


Fig. 3.18 - Profils de température pour $t = 0.004, 0.007$ et 0.1 Ma.

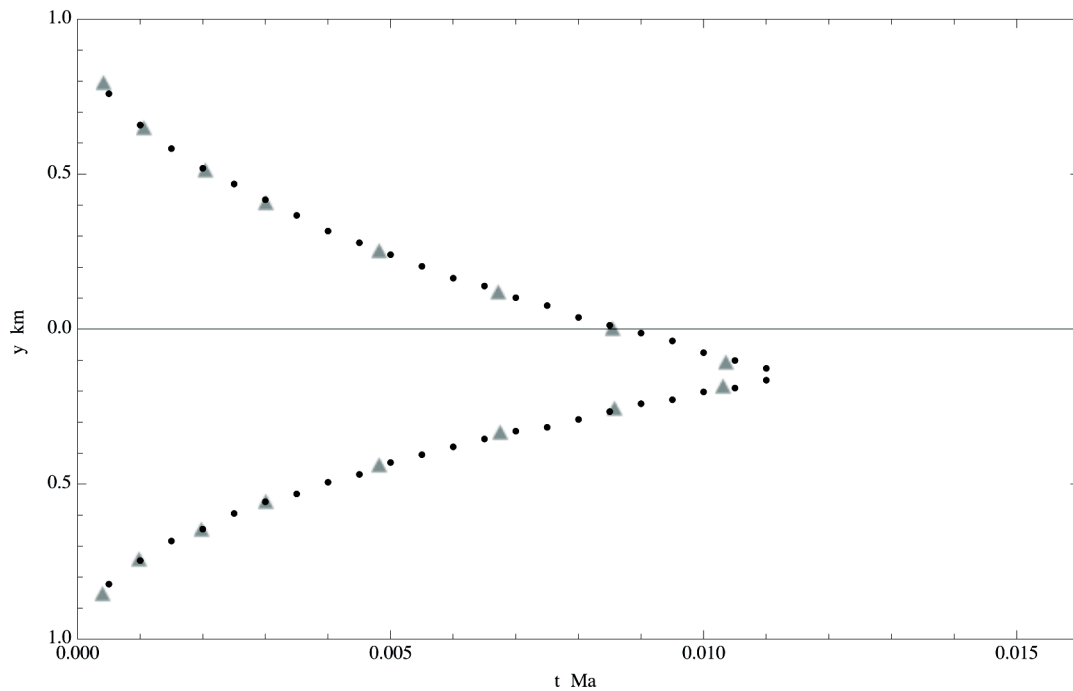


Fig. 3.19 - Evolution des fronts de solidification

Nous avons effectué la même simulation en utilisant le logiciel commercial COMSOL de calcul par éléments finis. Avec les éléments finis, il y a deux possibilités pour traiter les problèmes de changement de phase :

1. subdiviser le domaine en plusieurs sous domaines représentant les parties solides et liquides et les faire évoluer leurs contours conformément aux équations 3.28 et 3.29;
2. ne pas subdiviser le domaine et remplacer c_p par un c_p effectif dépendant de la température et présentant un pic de largeur ΔT autour de la température de solidification.

La méthode du c_p effectif est de loin la plus simple et donc la plus fréquemment utilisée et est par ailleurs la seule figurant dans les exemples donnés dans la documentation de COMSOL.

Nous utiliserons donc cette méthode en définissant un c_p effectif conformément à la littérature (Lamberg et al., 2004) :

$$c_{peff} = \begin{cases} c_{p,s}, & T \geq T_s + \frac{\Delta T}{2} \\ \frac{L}{\Delta T} + c_p, & T_s - \frac{\Delta T}{2} < T < T_s + \frac{\Delta T}{2} \\ c_{p,l}, & T \leq T_s - \frac{\Delta T}{2} \end{cases}$$

où ΔT est de l'ordre de quelques degrés.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus pour plusieurs valeurs de ΔT avec $c_p = c_{p,s} = c_{p,l}$ (Fig. 3.20). Dans tous les cas, les résultats obtenus diffèrent substantiellement des nôtres et de la solution semi analytique.

Bien entendu, on peut résoudre correctement ce problème avec COMSOL en utilisant des maillages déformables. Dans le cas du problème de Stefan, avec un seul front de solidification, cela peut se faire directement à partir de l'interface utilisateur de COMSOL. Par contre, dans notre cas, il faut gérer l'apparition de lave solide et la rencontre des deux fronts de solidification, et cela implique la réalisation d'un véritable programme dans l'environnement COMSOL.

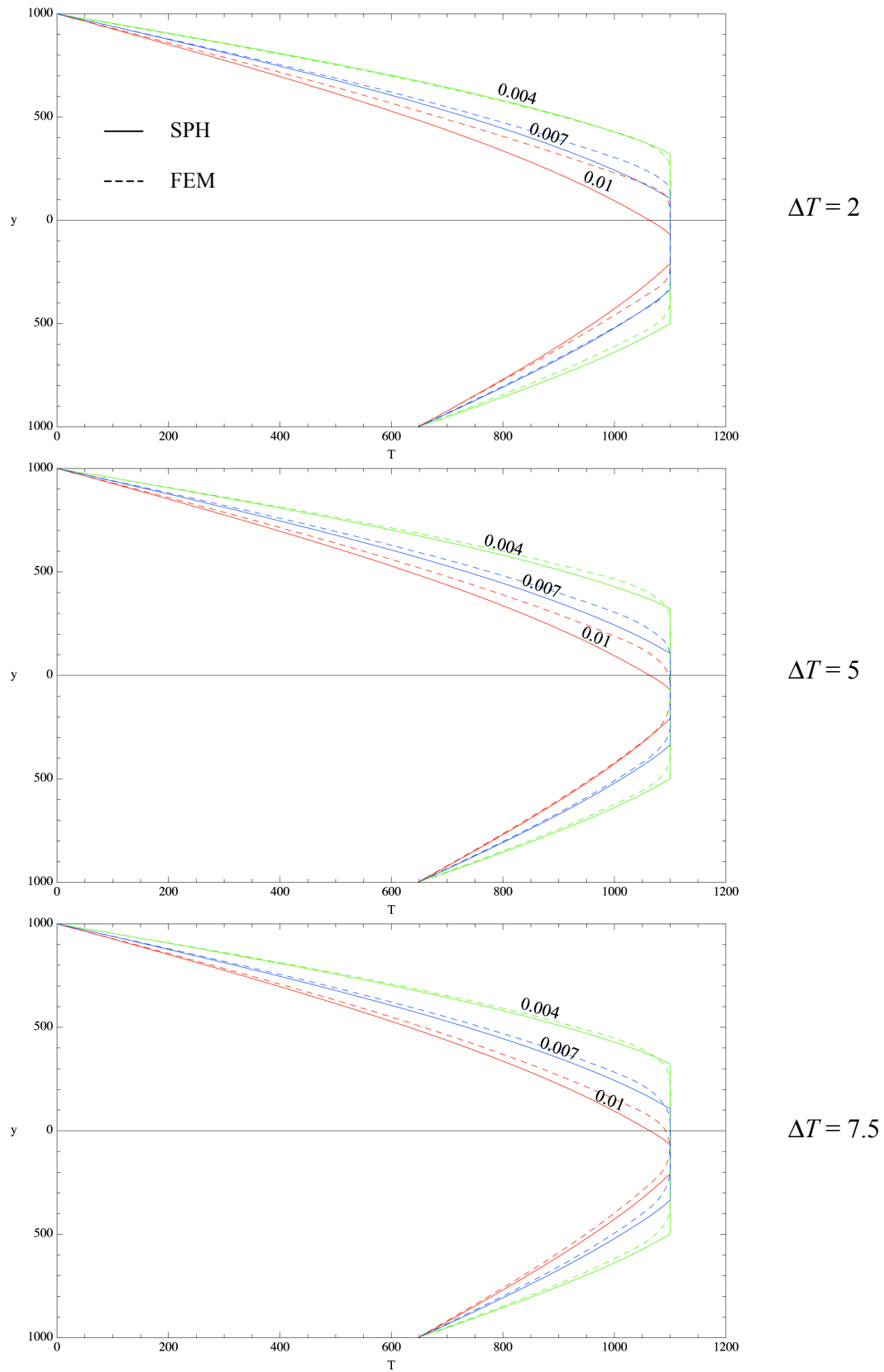


Fig. 3.20 - Comparaison FEM SPH

3.4.2 Refroidissement d'une coulée

La présence du terme en T^4 provenant des pertes radiatives nous empêche d'adimensionner les équations présentées en 3.3.1. Nous effectuerons donc un ensemble de simulations pour plusieurs valeurs de H .

Les simulations seront effectuées dans le domaine $[-10 \Delta p, 10 \Delta p] \times [-2H, H]$ contenant des particules espacées régulièrement de Δp suivant les axes x et y avec $T(-2H, t) = T_{sol}$, des pertes radiatives en $y = H$ et une condition périodique entre $x = -10 \Delta p$ et $x = 10 \Delta p$. Nous utiliserons le *cubic spline kernel* avec $h = 1.3 \Delta p$ et le schéma d'intégration d'Euler-Cauchy avec Δt vérifiant (3.32).

Les valeurs des différents paramètres utilisés sont reportées dans le tableau 1.1 et nous prendrons $T_{sol} = T_{ext} = 293$ °K. A l'instant initial toutes les particules de lave sont à l'état liquide et à la température $T_i = 1360$ °K.

Dans un premier temps, nous validerons la méthode employée pour traiter de la condition de Neumann non linéaire issue des pertes radiatives en comparant nos résultats avec une simulation par éléments finis. Dans la mesure où cela est indépendant du changement de phase, et vu les difficultés rencontrées précédemment, nous nous bornerons, uniquement pour ce cas, à simuler le refroidissement sans changement de phase. Les profils de température obtenus à différents instants (2.32, 11.57, 23.14 et 34.62 jours) et pour $H = 3$ m sont présentés dans la figure 3.21. Nos résultats diffèrent de ceux obtenus avec les éléments finis d'au plus 2.2%.

Dans les mêmes conditions, en tenant compte du changement de phase, les résultats fournis par les SPH sont présentés dans les figures 3.22 et 3.23.

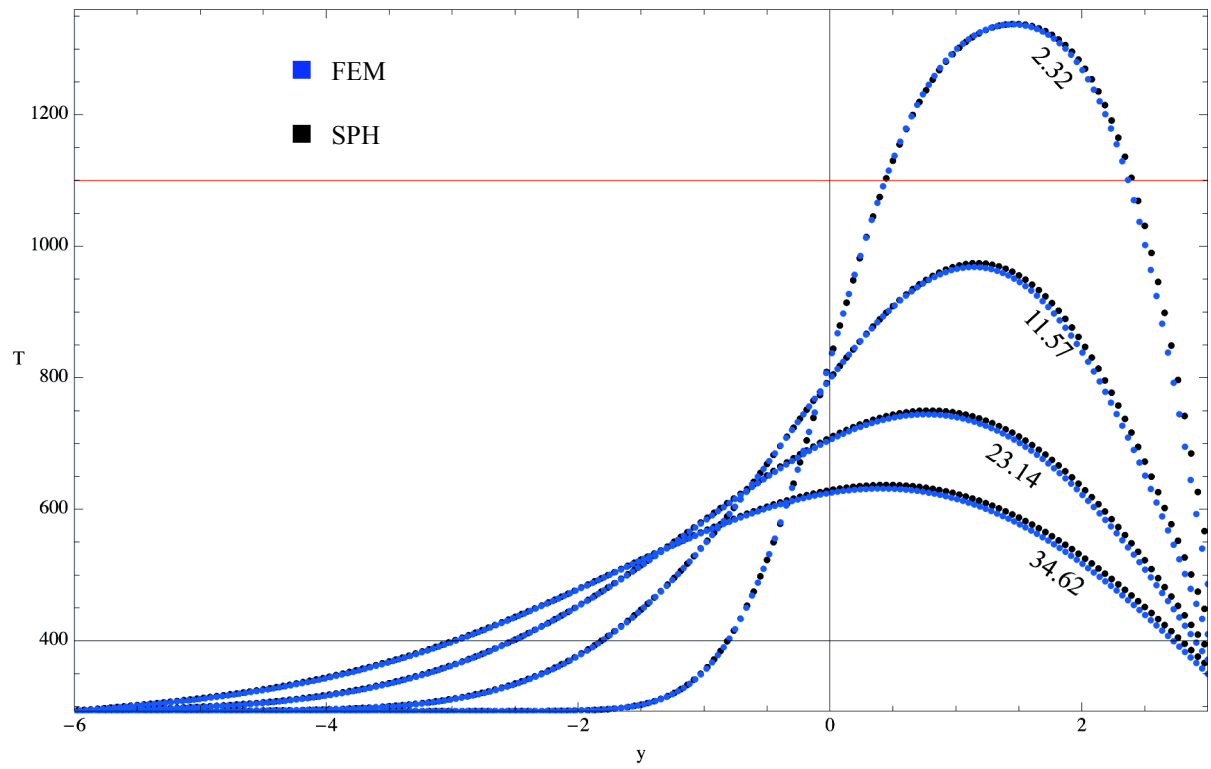


Fig. 3.21 - Comparaison FEM SPH sans changement de phase

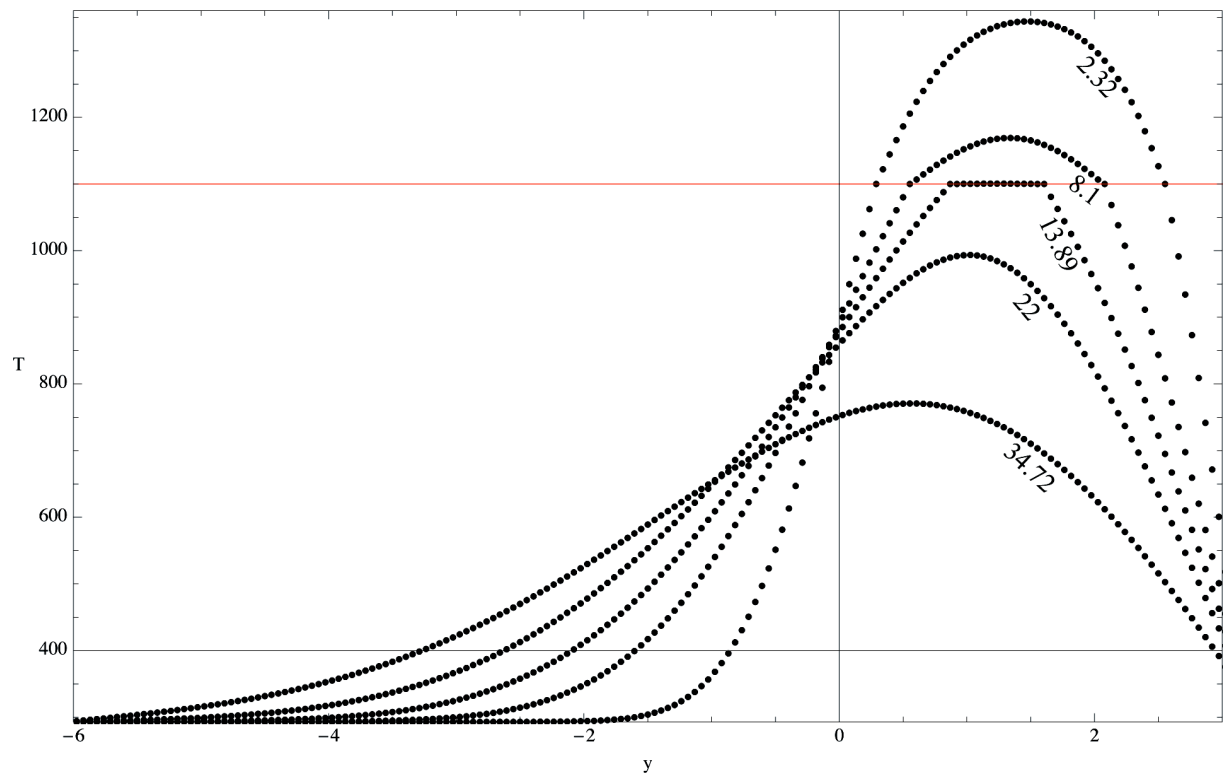


Fig. 3.22 - Profils de température à différents instants (t en jours)

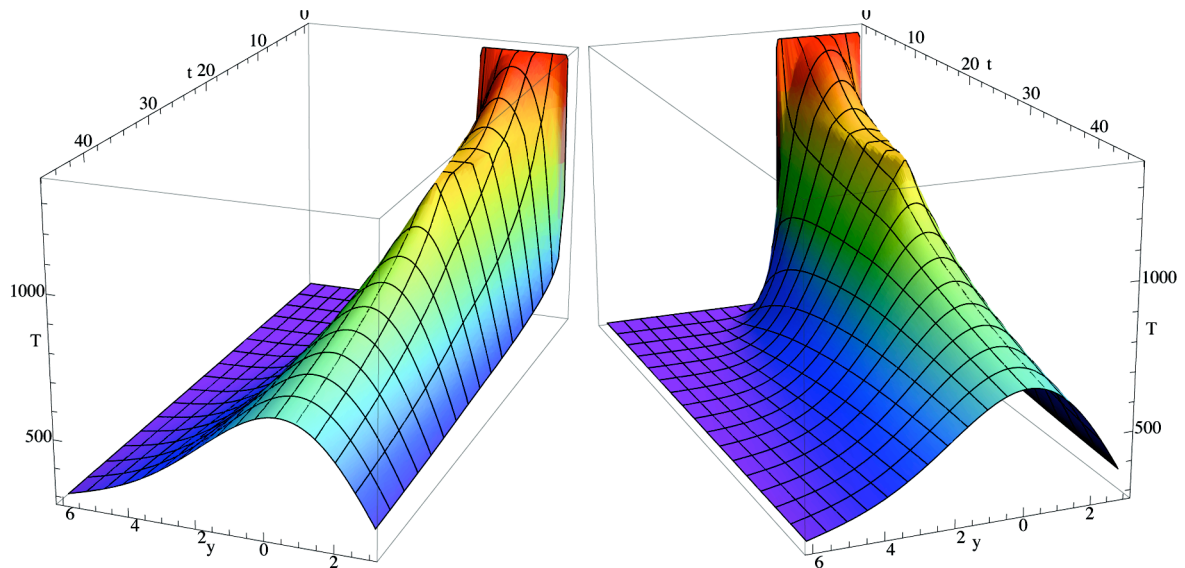


Fig. 3.23 - Evolution de la température

Épaisseur de la croûte, température de contact et temps de solidification

Nous avons effectué quatre simulations pour $H = 3, 6, 9$ et 12 m. L'évolution de l'épaisseur e de la croûte en fonction du temps est représentée en coordonnées log-log sur la figure 3.24 et celle de la température de surface sur la figure 3.25.

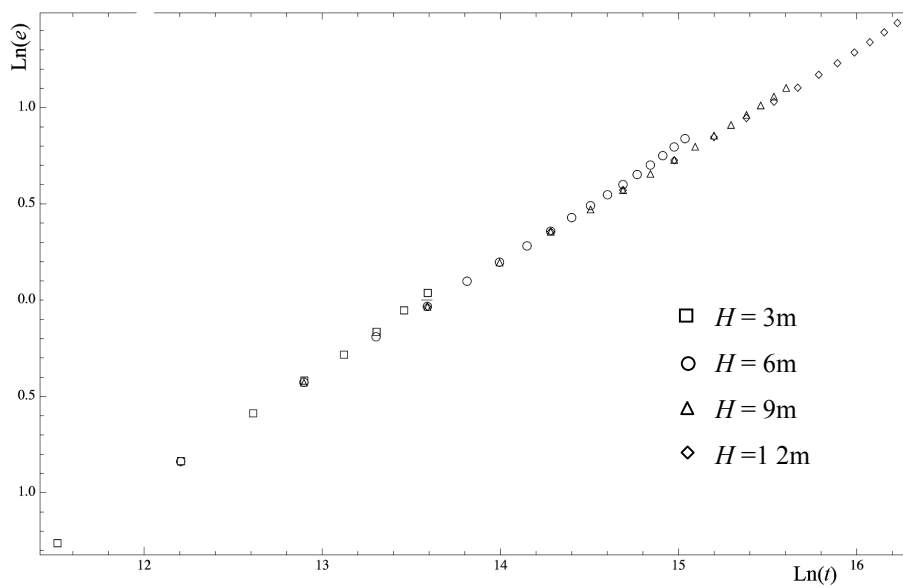


Fig. 3.24 - Evolution de l'épaisseur de la croûte

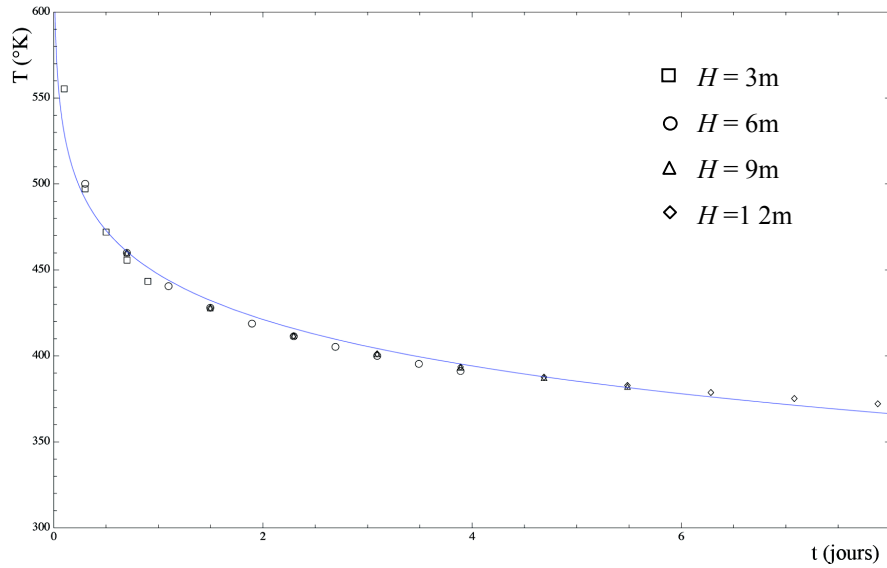


Fig. 3.25 - Evolution de la température de surface

Ceci nous conduit à proposer les deux lois suivantes pour l'évolution de l'épaisseur de la croûte e et de la température de surface T_{surf} en fonction du temps t (exprimé en secondes) :

$$\text{Log}(e) = -7.63518 + 0.5585267 \text{Log}(t)$$

$$T_{surf} = 1360 - 912.53t^{0.0409318}$$

Dans le cas d'une coulée en mouvement ces deux relations nous permettent de lier l'épaisseur de la croûte ainsi que la température de surface à "l'âge de la lave" au point considéré.

Avant de pouvoir les intégrer à notre modèle holistique, il faudra pouvoir déterminer, pour chaque cellule, "l'âge de la lave", c'est-à-dire le temps de parcours de la lave entre le cratère et la cellule considérée. Ce temps n'est pas une des variables du modèle holistique et dépend des variations du débit. Il faudra donc le réactualiser tout au long de la simulation et tenir compte des situations dans lesquelles la lave contenue dans une cellule provient de plusieurs bouches éruptives.

Ce travail est actuellement en cour au sein du TECNOLAB.

Conclusion

Au terme de ce travail de recherche nous avons abouti à :

- la mise en place d'un système d'information pour l'aide à la décision dans le cadre de la gestion du risque volcanique;
- un ensemble cohérent d'outils numériques informatiques qui ont permis d'enrichir les outils et méthodes numériques utilisées au TECNOLAB.

Le système d'information ainsi créé, destiné aux vulcanologues et à la protection civile, est actuellement opérationnel au sein de l'INGV. Il est utilisé en tant que système de veille et d'alerte pour la surveillance permanente de l'Etna et pour la production de cartes de risque. Par ailleurs, il a été utilisé avec succès en situation de crise pour prévoir l'évolution de la coulée 2006 et pour mettre en évidence les prémisses de l'activité éruptive 5 jours avant le début l'éruption de septembre 2007.

Comme notre système est indépendant des sources de données télémétriques infrarouges ces résultats ont conduit l'INGV à s'équiper d'un système de réception spécifique pour les données émises par le senseur SEVIRI du satellite Météosat 8, qui contrairement au deux satellites utilisés jusqu'à présent est placé en orbite géostationnaire adaptée à la zone géographique de l'Etna et fourni des mesures toutes les 15 minutes.

Notre système répond donc aux objectifs initiaux que nous nous étions fixés et est directement adaptable à tout volcan effusif comme, par exemple, le Piton de la Fournaise sur l'île de la Réunion.

Des points de vue numérique et informatique, les outils que nous avons réalisés ont permis de proposer une loi d'évolution temporelle pour la température de surface ainsi que l'épaisseur de la croûte d'une coulée. Ces nouvelles lois sont destinées à enrichir le modèle holistique afin d'améliorer la précision et la fiabilité des simulations produites par notre système d'information.

Même si au début de nos travaux, et encore aujourd'hui, les moyens de calcul disponibles ne permettent pas d'effectuer la simulation de l'évolution d'une coulée en temps réel (par rapport à l'échelle de temps du phénomène considéré), ils évoluent à une vitesse telle que l'on peut envisager ce type de simulation à moyen terme. C'est dans cet esprit que ces outils et modèles

ont été conçus, pour constituer la base d'un outil informatique permettant la simulation numérique directe de l'évolution d'une coulée.

A la suite de nos travaux et en raison de l'évolution des moyens informatique dont l'INGV peut disposer, deux axes d'évolution de nos recherches se sont dégagés :

1. l'implémentation complète du modèle SPH sur le calculateur parallèle (80 nœuds de calcul) de l'INGV nouvellement acquis;
2. l'implémentation de ce même modèle sur des processeurs graphiques (GPU) massivement parallèles.

Nos recherches ayant été sous tendues par la perspective d'un programme parallèle fonctionnant sur la machine de l'INGV, le premier point relève de la continuité directe de cette thèse.

En revanche, la perspective d'utiliser les processeurs graphiques parallèles dans le cadre de la simulation numérique est relativement récente et très prometteuse. Cependant même si les SPH sont intrinsèquement adaptées à un tel traitement, les différences entre les processeurs classiques et les GPU sont telles qu'elles nécessitent la création de nouveaux algorithmes, ce qui constitue un axe de recherche à part entière dans lequel le TECNOLAB est actuellement engagé. Nous avons obtenus les premiers résultats au moment de la rédaction de cette conclusion et ils semblent très prometteurs : nous avons implémenté l'ensemble des calculs nécessaires à la résolution des équations de Navier-Stokes avec les SPH sur GPU et, sur une seule carte graphique NVidia 280GTX, nous sommes en mesure d'effectuer une simulation tridimensionnelle comportant un millions de particules et de calculer plus de deux milliard d'interactions par seconde.

Bien que la nature du problème traité ait nécessité une part importante de développements numériques et informatique, la finalité de ce travail a toujours été la production d'information élaborée destinée aux scientifiques et professionnels du domaine de la vulcanologie en utilisant les concepts et méthodes de la veille scientifique et technique.

Bibliographie

Ouvrages imprimés

CARSLAW, H.S., JAEGER, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford : Oxford Press, 1990.

HUBBARD, J., HUBERT, F. *Calcul scientifique de la théorie à la pratique (second volume)*. Paris : Vuibert, 2006, 281 p.

LIU, G.R., LIU, M.B. *Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method*. Singapore : World Scientific, 2003, 449 p.

Chapitre dans un ouvrage imprimé

BARCA, D., CRISCI, G. M., DI FREGORIO, S., NICOLETTA, F.P. Cellular Automata methods for modeling lava flow: simulation of the 1986-1987 Etnean eruption. In : Kilburn, C.R.J, Luongo, G., *Active Lavas : Monitoring and Modelling*. London : UCL Press, 1993, 374 p.

BARANGER, J. Résolution numérique des équations fonctionnelles. In : *Analyse numérique*. Paris : Hermann, 1991, 556 p.

ISHIARA, K., IGUSHI, M., KAMO, K. Numerical simulation of lava flows on some volcanoes in Japan. In : Fink, J.K., *Lava Flows and Domes: Emplacement Mechanisms and Hazard Implications*. Berlin : Springer, 1990, 249 p.

KILBURN, C.R.J., GUEST, J.E.. Aa lavas of Mount Etna, Sicily. In : Kilburn, C.R.J., Luongo, G., *Active Lavas : Monitoring and Modelling*. London : UCL Press, 1993, 374 p.

SCHWARTZ, L. Théorie élémentaire des distributions. In : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Paris : Hermann, 1965, 391 p.

STORA, D., AGLIATI, P.O., CANI, M.P., NEYRET, F., GASCUEL, J.D. Animating Lava Flows. In : *Proceedings of the 1999 conference on Graphics interface '99*. San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1999.

WARREN, M.S., SALMON, J.K. *A fast tree code for many body problems*. In : Cooper N.G, *Los Alamos Science*. Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, 1994.

Rapports imprimés

GERBEAU, J.F., PERTHAME, B. *Derivation of Viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation*. INRIA Rocquencourt, 2000.

BONNET, J.C., FOURNEAU, J.P., LEMAGNY, A., PAOLI, C. *Structural analysis of factual data banks within the framework of Euronet*. CODATA, 1980.

Travaux universitaires

MORRIS, J. *Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications*. Ph. D. thesis, Monash University, 1996.

Articles de périodiques imprimés

ACKERMAN, S.A., STRABALA, K.I., MENZEL, W.P., FREY, R.A., MOELLER, C.C., Gumley, L. E. *Discriminating clear sky from clouds with MODIS*. *Journal of Geophysical Research*, 1998, vol. 103, p. 32141– 32157.

CALVARI, S., COLTELLI, M., NERI, M., ALIOD, R. *The 1991-93 Etna eruption: Chronology and flow-field evolution*, *Acta Vulcanol.*, 1994, vol. 4, p. 1-15.

- CLEARY, P.W., MONAGHAN, J.J. *Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 148, p. 227-264.
- COLAGROSSI, A., LANDRINI, M. *Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 191 n°2, p. 448–475.
- COLTELLI, M., PROIETTI, C., BRANCA, S., MARSELLA, M., ANDRONICO, D., LODATO, L. *Analysis of the 2001 lava flow eruption of Mt. Etna from three-dimensional mapping. Journal of Geophysical Research*, 2007, vol. 112.
- COSTA, A., MACEDONIO, G. *Numerical simulations of lava flows based on depth-averaged equations. Geophysical Research Letters*, 2005, vol. 32.
- CRISCI, G.M., DI GREGORIO, S., PINDARO, O., RANIERI, G. *Lava flow simulation by a discrete cellular model: first implementation, Int. J. Modelling and Simulation*, 1986, vol. 6, p. 137-140.
- DOU, H., QUONIAM, L., HASSANALY, P. *La veille technologique et l'information documentaire, Le documentaliste*, 1990, vol. 27 n°3, p. 132-141.
- DRAGONI, M., BONAFEDE, E., M., BOSCHI. *Downslope flow models of a Bingham liquid: implications for lava flows, J. Volc. Geotherm. Res.*, 1986, vol. 30, p. 305-325.
- FAVALLI, M., PARESCHI, M.T., NERI, A., ISOLA, I. *Forecasting lava flow paths by a stochastic approach, Geophys. Res. Lett.*, 2005, vol. 32.
- FLASSE, S.P., CECCATO, P. *A contextual algorithm for AVHRR fire detection. International Journal of Remote Sensing*, 1996, vol. 17, p. 419– 424.
- GIGLIO L., DESCLOIOTRES , J., JUSTICE, C., KAUFMAN, Y.J. *An Enhanced Contextual Fire Detection Algorithm for MODIS, Remote Sensing of Environment*, 2003, vol. 87, p. 273– 282.
- GINGOLD, R., MONAGHAN, J. *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 1977, vol. 181, p. 375-389.

GIORDANO, D., DINGWELL, D.B. *Viscosity of hydrous Etna basalt: implications for Plinian-style basaltic eruptions. Bulletin of Volcanology*, 2003, vol. 65, p. 8-14.

GREGG, T.K.P. FINK, J.H. *Quantification of extraterrestrial lava flow effusion rates through laboratory simulation, J. Geophys. Res.*, 1996, vol. 101, p. 16891-16900.

HARRIS, A.J.L., BLAKE, S., ROTHERY, D.A., STEVENS, N.F. *A chronology of the 1991 to 1993 Mount Etna eruption using advanced very high resolution radiometer data: implications for real-time thermal volcano monitoring. Journal of Geophysics Research*, 1997, vol.102 n°B4, p. 7985-8004.

HARRIS, A.J.L., FLYNN, L.P., KESZTHELYI, L.P., MOUGINIS-MARK, P.J., ROWLAND, S.K., RESING, J.A. *Calculation of lava effusion rates from Landsat TM data. Bulletin of Volcanology*, 1998, vol. 60 no. 1, p. 52–71.

HARRIS, A.J.L., MURRAY, J.B., ARIES, S.E., DAVIES, M.A., FLYNN, L.P., M. J. WOOSTER, M.J., WRIGHT, R., ROTHERY, D.A. *Effusion trends at Etna and Krafla and their implications. Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 2000, vol. 102 n°3, p. 237-269.

HARRIS, A.J.L., H, ROWLAND, S.K. *FLOWGO : a kinematic thermo-rheological model for lava flowing in a channel. Bulletin of Volcanology and Geothermal Research*, 2001, vol. 63, p. 20-44.

HOHENEMSER, K., PRAGER, W. *Über die Ansätze der Mechanik der isotroper Kontinua. Z. Angew. Math. Mech.*, 1932, vol. 12, p. 216–226.

JAMES, M.R., BAGDASSAROV, N., MÜLLER, K., PINKERTON, H. *Viscoelastic behaviour of basaltic lavas. Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 2004, vol. 132, p. 99-113.

JOHNSON, G., STRYK, R., BEISSEL, S. (1996). *Sph for high velocity impact computations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , 1996, vol. 139, p. 347–373.

LAMBERG, P., LEHTINIEMI, R., HENELL, A.M. *Numerical and experimental investigation of melting and freezing processes in phase change material storage. International Journal of Thermal Science*, 2004, vol. 43 n° 3, p. 277-287.

LUCY, L.B. *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astronomical Journal*, 1997, vol. 82 n° 12, p. 1013-1024.

MANGLIK, A. *A moving boundary solution for solidification of lava lake and magma intrusion in the presence of time-varying contact temperature. Journal of earth system science*. 2005, vol. 114 n° 2, p. 169-176.

MIYAMOTO, H., SASAKI, S. *Numerical simulations of flood basalt lava flows: roles of some parameters on lava flow morphologies. Journal of Geophysics Research*, 1998, vol. 103, p. 27489-27502.

MIYAMOTO, H., SASAKI, S. *Simulating lava flows by an improved cellular automata method. Computers & Geosciences*, 1997, vol. 23, p. 283-292.

MONAGHAN, J. *Simulating free surface flows with sph. J. Comp. Phys.*, 1994, vol. 110, p. 399–406.

MONAGHAN, J.J., LATTANZIO J.C. *A refined particle method for astrophysical problems. Astron. Astrophys.* 1985, vol. 149 , p. 135-143.

MONAGHAN, J., HUPPERT, H.E., GRAE WORSTER, M. *Solidification using smoothed particle hydrodynamics. Journal of Computational Physics*, 2005, vol. 206, p. 684-705.

OPPENHEIMER, F., FRANCIS, P.W., ROTHERY, D.A., CARLTON, R.W.T., GLAZE, L. *Infrared image analysis of volcanic thermal features: Lascar Volcano, Chile, 1984-1992. Journal of Geophysical Research*, 1993, vol. 98 n° B3, p. 4269-4286.

PINKERTON, H, NORTON, G. *Rheological properties of basaltic lava at sub-liquidus temperatures : laboratory and field measurment on lavas from Mount Etna. Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 1995, vol. 68, p. 307-323.

PINKERTON, H., STEVENSON R.J. *Methods of determining the rheological properties of magmas at sub liquidus temperatures. Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 1992, vol. 53, p. 47-66.

PINKERTON, H., WILSON, L. *Factors controlling the lengths of channel-fed lava flows, Bull. Volcanol.*, 1994, vol. 56, p. 108-120.

RANDLES, P.W., LIBERSKY, L.D. *Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1996, vol 139, n° 1, p. 375–408.

TAKEDA, H., MIYAMA, S.M., SEKIYA, M. Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics. *Progress of Theoretical Physics*, 1994, vol. 92 n° 5, p. 939-960.

WADGE, G., YOUNG, P., MCKENDRICK, I.J. Mapping lava flow hazards using computer simulation, *J. Geophys. Res.*, 1994, vol. 99 n° B1, p. 489-504.

WRIGHT, R., FLYNN, L., GARBEIL, H., HARRIS, A., PILGER, E. Automated volcanic eruption detection using MODIS, *Remote sensing of Environment*, 2002, vol. 82, p. 135-155.

Annexes

Annexe 1 Les éruptions de l'Etna

Année	Durée (jours)	Longueur maximale (km)	Epaisseur moyenne (m)	Surface (km ²)	Volume (10 ⁶ m ³)	Débit moyen (m ³ s ⁻¹)
1607	2	3,5	2	0,56	1,12	6,47
1607	340	8,18	10	15,8	158	5
1610	30	6,94	5,5	5,46	30	4,04
1610	90	10,9		6,7	90	10,21
1643	8	1,83	7	0,57	0,13	5,94
1646	58	8,99	15	10,23	153,45	32,42
1651	900	14,2	20	23,74	474,8	6,15
1669	122	17,3	25	39,9	250	118,35
1702	61	5,92	5	3,39	16,94	3,21
1727	170	3,89	2,5	1,71	4,28	0,29
1755	6	4,13	3	1,58	4,73	10,47
1763	32	3,5	8	2,31	18,48	7,62
1763	84	4,43	42	2,38	100	20,7
1764	540	7,54	20	5,85	117	2,51
1766	194	6,89	15	9,03	135,45	8,19
1780	10	10,83	6	4,89	29,34	33,96
1787	27	4,73	2,5	2,72	6,8	2,91
1792	375	6,73	10	9,58	90	2,75
1802	2	6,06	3	5,3	10,43	40,24
1809	13	8,12	6	6,01	36,07	34
1811	180	6,61	10	5,09	50,9	3,49
1819	70	7,6	8	5,88	47,07	7,92
1832	22	11,04	10	5,82	58,2	31,96
1838	210	4,29	6	2,47	14,82	0,82
1842	29	3,38	2	1,04	2,08	0,65
1843	11	13,95	8	6,6	52,8	58,6

1852	280	8,87	12	10,62	127,44	5,54
1865	150	7,65	12	7,24	86,88	7,33
1869	0,3	3,3	1,5	1,22	2,45	56,67
1874	3	1,14	4	0,37	1,47	1,5
1879	12	9,51	8,5	2,97	21,93	40,44
1892	173	6,89	12	10,09	121,08	8,74
1908	0,75	4,45	2	1	2	33
1910	27	11	13,2	4,92	65	28
1910	13	8,5	10	5,54	55,4	50,8
1918	2	1,4	4,5	0,27	1,22	7
1923	31	11,5	12	6,48	78	29
1928	18	9,14	8	5	40	27,3
1942	1	4,1	2	0,83	1,66	37,6
1947	15	6,5	6	1,98	11,88	9,2
1949	3	4,6	3,3	2,87	10	39,3
1950	372	9,7	15	10,88	151,36	4,73
1955	136	2,4	2,5	1,45	3,63	3,6
1956	4	2,16	3	0,95	2,85	10,6
1956	6	4,5	3	1,08	3,24	7,3
1964	155	3,8	2,5	1,84	18,9	1,78
1968	119	2,4	2,5	0,4	1	0,09
1971	69	7,2	5,9	7,6	45,2	7,92
1974	17	1,5	8	0,3	2,4	3
1974	1818	1,3	10,5	0,2	2,1	1
1975	187	1,75	5,6	1,07	6	0,37
1978	37	4	12	2,3	27,5	8,6
1978	5	2,7	4	1	4	7,7
1978	8	4,7	3,2	3,4	11	10,6
1979	6	6	3	2,5	7,5	14,5
1981	6	7,5	2,4	7,4	18	34,72
1983	131	7,5	13,2	6	79	6,98
1984	172	3	7,8	1,3	10	0,7

1985	125	3,8	11,1	2,7	30	2,8
1985	5	3,5	1	0,9	0,8	2,1
1986	11	1,3	6,2	0,16	0,4	7,79
1986	122	5	9,8	6,1	60	5,7
1989	16	3,3	3,3	3,75	12,2	127,27
1990	29	3	2,9	0,73	2,15	
1991	473	8,75	30,7	7,65	235	5,75
1995	395	1,3	3		1,4	0,19
1996	627	0,74	6	0,25	1,5	0,02
1998	142	1	5	0,39	1,55	19,24
1999	282	2,8	16,8	1,45	24,37	1
1999	31	4,1	3	3	16,5	6,16
2000	215	3,2	12,8	2,9	37,1	83
2001	178	2,4	10	1,12	9,2	13,4
2001	23	3,8	3	2,18	6,16	3,1
2001	23	6,9	6	3,2	19,15	13,41
2002	9	6,4	5	2	10	3,22
2002	94	4,5	11,2	2,64	29,5	9,17
2004	182	4,7	17,1	2,3	40	2,5

Annexe 2 Exemple de code

Dans cette annexe, nous présentons le code utilisé pour simuler le refroidissement d'une coulée de lave soumise à des pertes radiatives. Ce code s'appuie sur toutes les classes que nous avons développées, et nous ne présentons ici que la partie spécifique au problème à simuler. Cette partie constitue le travail inhérent à tout utilisateur de nos classes.

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <time.h>
#include "Point2D.h"
#include "Segment2D.h"
#include "BasePart.h"
#include "ThermPart.h"
#include "BoundThermPart.h"
#include "Polygon.h"
#include "PhysProps.h"
#include "CubicSpline.h"
#include "PeriodicBoundary.h"
#include "ThermBound.h"
#include "Euler.h"
#include "EulerCauchy.h"
#include "SPH.h"
#include "save.h"

using namespace std;

double Text = 293;
double Tground = 293;
double Tlava = 1360;

// Simulation parameters
void cplxradiation(ThermPart *part, BoundData &bounddata)
{
    bounddata.Tinf = Text;
    bounddata.h = 0;
    bounddata.emissivity = 1;
}

void isoground(ThermPart *part, BoundData &bounddata)
{
    bounddata.T = Tground;
}

void radiation(double tmax, double tsave, double height, double part_density ) {
    Polygon          lava(4, true), ground(4, true);
    PhysProps        liquid_props, solid_props;
    CubicSpline<2>   kernel;
    Integrator       *integrator = new EulerCauchy;
```

```

// Setting particle spacing and smoothing length
double deltap = 1.0/part_density;
double slength = 1.3*deltap;
double width = 20*deltap;

// Preparing the simulation domain
lava.AddPoint(Point2D(0, deltap/2));
lava.AddPoint(Point2D(0, height));
lava.AddPoint(Point2D(width, height));
lava.AddPoint(Point2D(width, deltap/2));
// cold part :
// (dp,1) (0.5-dp/2,1)
// (dp,0) (0.5-dp/2,0)
ground.AddPoint(Point2D(0, -deltap/2));
ground.AddPoint(Point2D(0, -2*height));
ground.AddPoint(Point2D(width, -2*height));
ground.AddPoint(Point2D(width, -deltap/2));

// Preparing the physical properties of the
// phases (liquid and solid)
solid_props(ThermPart::ID) = ThermPart::SOLID;
solid_props(ThermPart::RHO) = 2400;
solid_props(ThermPart::K) = 2.4;
solid_props(ThermPart::CP) = 1000;
solid_props(ThermPart::L) = 3.3e5;
solid_props(ThermPart::TC) = 1100;

liquid_props(ThermPart::ID) = ThermPart::LIQUID;
liquid_props(ThermPart::RHO) = 2400;
liquid_props(ThermPart::K) = 2.4;
liquid_props(ThermPart::CP) = 1000;
liquid_props(ThermPart::L) = 3.3e5;
liquid_props(ThermPart::TC) = 1100;

// Setting the particle vector
PartVect partvect;
partvect.reserve((int) (1.05/(3*height*deltap*width*deltap)));

// Preparing the different particles
// normal particle
ThermPart thermpart = ThermPart(Point2D(0, 0), slength, &liquid_props,
&solid_props, integrator);
thermpart.T = Tlava;
thermpart.mass = deltap*deltap*solid_props(ThermPart::RHO);
thermpart.rho = solid_props(ThermPart::RHO);
// boundary particle
BoundThermPart boundpart = BoundThermPart(Point2D(0, 0), slength,
&liquid_props, &solid_props, NULL);
boundpart.T = Tlava;
boundpart.mass = deltap*deltap*solid_props(ThermPart::RHO);
boundpart.rho = solid_props(ThermPart::RHO);

// Filling the simulation domain with particles
// hot part
thermpart.dheat = 0;
thermpart.props = &liquid_props;

```



```

    lava.Fill(&thermpart, &partvect, Point2D(0, deltap/2), Vector2D(1, 0), deltap,
deltap, 0);
    // cold part
    thermpart.T = Tground;
    thermpart.dheat = 1;
    thermpart.props = &solid_props;
    ground.Fill(&thermpart, &partvect, Point2D(0, -deltap/2), Vector2D(1, 0),
deltap, deltap, 0);

    // Setting hot and cold isothermal boundarys
    Segment2D surface_seg = Segment2D(Point2D(0, height + deltap/2), Point2D(width,
height + deltap/2));
    void (*pf) (ThermPart *, BoundData &) = &cplxradiation;
    ThermBound surface_bound = ThermBound(&surface_seg, deltap, pf,
ThermBound::RADIATION, ThermBound::GRADIENT, 0);
    Segment2D ground_seg = Segment2D(Point2D(width, - 2*height -
deltap/2),Point2D(0, - 2*height - deltap/2));
    void (*pfiso) (ThermPart *, BoundData &) = &isoground;
    ThermBound ground_bound = ThermBound(&ground_seg, deltap, pfiso,
ThermBound::ISOTHERM, ThermBound::GRADIENT, 0);

    // Filling isothermal boundarys with particles
    boundpart.T = Tlava;
    surface_bound.FillBorder(&boundpart, &partvect, deltap);
    boundpart.T = Tground;
    ground_bound.FillBorder(&boundpart, &partvect, deltap);

    // Setting the periodic boundary in x direction
    Segment2D periodic_seg = Segment2D(Point2D(0, - 2*height - deltap/2),
Point2D(0, height + deltap/2));
    PeriodicBoundary periodic_bound = PeriodicBoundary(&periodic_seg,
Vector2D(width + deltap, 0), slength);

    SPH sph(2);
    sph.fixed = true;
    sph.sum_rho = false;
    sph.partvect = &partvect;
    sph.kernel = &kernel;
    sph.integrator = integrator;
    sph.periodic_bound = &periodic_bound;
    sph.AddBoundary(&surface_bound);
    sph.AddBoundary(&ground_bound);

    // Setting time step
    double dt =
0.1*solid_props(ThermPart::RH0)*solid_props(ThermPart::CP)*slength*slength/solid_pr
ops(ThermPart::K);
    int nsteps = tmax/dt;

    // Time loop
    int num_file =0;
    int nsave = tsave/dt;
    for (int i = 0; i < nsteps; i++) {
        sph.TimeStep(dt);
        if ((i % nsave == 0) || (i == nsteps-1)) {
            (i == nsteps-1) ? num_file = -1 : num_file++;
            cout << "Saving temp at t = " << sph.t << "\n";
            save_parts(VART, partvect, sph.t, "temp", num_file, dt, deltap);

```

```
        save_parts(VARDHEAT, partvect, sph.t, "dheat", num_file, dt, deltap);
    }
}

// Cleaning memory
for (int i = 0; i < partvect.size(); i++) {
    delete partvect[i];
}
}
```