

T-1724db

N° 97 39

Année 1997

THÈSE
présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir le titre de
DOCTEUR
Spécialité Thermique et Energétique
par
Stéphane LEBLANC

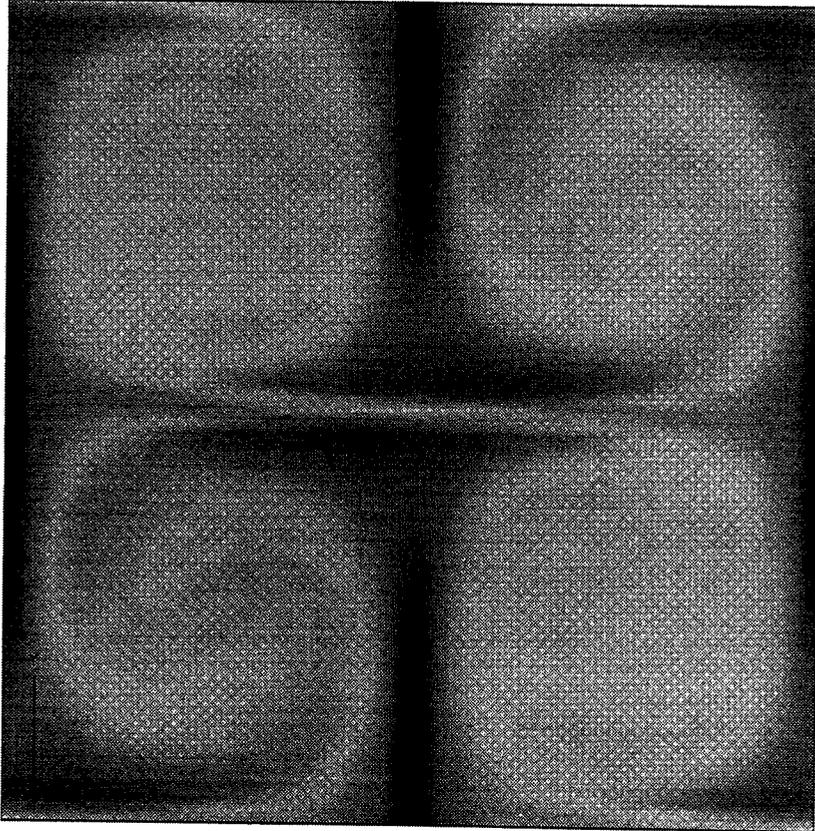
INSTABILITÉS TRIDIMENSIONNELLES
DANS UN FLUIDE EN ROTATION

Soutenue le 5 décembre 1997 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. A. BOTTARO – *Rapporteur*
C. CAMBON
L. JACQUIN – *Président*
S. LE DIZÈS
J. SCOTT
J. E. WESFREID – *Rapporteur*

*Instabilités Tridimensionnelles
dans un Fluide en Rotation*



S T É P H A N E L E B L A N C

5 décembre 1997

à ma Biquette
à ma Famille

PAGE DE GARDE – Mode instable dans les cellules de Taylor–Green en rotation.

N° 97 39

Année 1997

THÈSE
présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir le titre de
DOCTEUR
Spécialité Thermique et Energétique
par

Stéphane LEBLANC



INSTABILITÉS TRIDIMENSIONNELLES
DANS UN FLUIDE EN ROTATION

Soutenue le 5 décembre 1997 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. A. BOTTARO – *Rapporteur*
C. CAMBON
L. JACQUIN – *Président*
S. LE DIZÈS
J. SCOTT
J. E. WESFREID – *Rapporteur*

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (UMR 5509 CNRS) de l'Ecole Centrale de Lyon, dans le cadre de l'Ecole Doctorale de Thermique et Energétique, avec un financement MENESR.

Mes premiers remerciements sont adressés à Claude Cambon, le Directeur de cette thèse, tant pour son encadrement scientifique que pour ses encouragements amicaux. Je suis très reconnaissant envers Denis Jeandel de m'avoir accueilli au LMFA, et Michèle Larchevêque pour son soutien moral.

Je remercie les Rapporteurs, Alessandro Bottaro et José Eduardo Wesfreid, et les membres du Jury, Laurent Jacquin, Stéphane Le Dizès et Julian Scott, d'avoir accepté d'examiner ce travail. Leur lecture attentive du manuscrit et leurs commentaires constructifs ont permis de clarifier certains points.

Je remercie mes collègues (et amis) Fabien Godefert et Lionel Lollini, pour leur(s) précieuse(s) aide(s) concernant les problèmes numériques et informatiques, mais aussi pour de nombreuses discussions scientifiques, également partagées avec Denis Sipp et Laurent Tarbouriech.

Je suis très reconnaissant envers Alex Joia pour ses corrections de l'anglais. Bien entendu, je n'oublie pas Joëlle, Odile, Yvonne, Denise et les Secrétaires que j'embrasse au passage. Pour leur amitié et les bons moments passés ensemble, je remercie Alain, Djamel et Olivier, ainsi que tout le personnel du LMFA.

Un grand merci à Jean-Pierre Guiraud pour de précieux éclaircissements. Les simulations numériques directes ont été effectuées avec l'accord de Chantal Staquet envers qui je suis très reconnaissant ; les calculs ont été réalisés sur le CRAY C98 de l'IDRIS à Orsay. Enfin, je remercie Alexander Lifschitz pour ses conseils et encouragements.

Table des matières

1	PRÉSENTATION	9
1.1	Contexte de l'étude	10
1.1.1	Instabilités tridimensionnelles	10
1.1.2	Cohérence des tourbillons	11
1.1.3	Critères de stabilité	13
1.1.4	Plan de l'exposé	13
1.2	Quelques précisions	14
1.2.1	Théorie de la distorsion rapide (RDT)	14
1.2.2	Turbulence en rotation	16
1.2.3	Ribs et braids : l'instabilité hyperbolique	17
2	OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE	21
2.1	Introduction	21
2.2	Quelques définitions	22
2.2.1	Produit scalaire et norme	22
2.2.2	Stabilité au sens de Lyapunov	23
2.3	Perturbations de type onde-courte	24
2.3.1	Développement WKB	24
2.3.2	L'équation eikonale et l'équation de transport	24
2.3.3	Description Lagrangienne	25
2.3.4	Principe de la démonstration	26
2.4	Estimation du résidu	27
2.4.1	Expression des termes d'ordre suivant	27
2.4.2	Energie du résidu	28
2.4.3	Majoration de l'énergie	29
2.4.4	Condition suffisante d'instabilité	31
2.4.5	Perturbation initialement localisée	31
2.5	Cas des écoulements stationnaires	32
2.5.1	Ondes-courtes et modes propres	32
2.5.2	Points de stagnation et écoulements homogènes	33
2.6	Points de stagnation en repère tournant	35
2.6.1	Discriminant généralisé	35
2.6.2	Les modes sans-pression	36

2.6.3	Rôle des points de stagnation	37
2.6.4	Stabilité du dipôle de Chaplygin	39
2.7	Conclusion	41
3	TOURBILLONS DE STUART	43
3.1	Introduction	43
3.2	Mécanismes de base	44
3.2.1	Critères classiques	44
3.2.2	Modes sans-pression et points de stagnation	47
3.3	L'allée de tourbillons de Stuart	49
3.3.1	Description	49
3.3.2	Points de stagnation	50
3.4	Formulation du problème	51
3.4.1	Equations du mouvement	51
3.4.2	Problème linéaire	52
3.4.3	Equations d'Orr-Sommerfeld et de Squire	53
3.5	Problème aux valeurs propres	54
3.5.1	Analyse de Floquet	54
3.5.2	Modes fondamentaux et sous-harmoniques	55
3.5.3	Spectre et symétries	56
3.6	Résolution spectrale	57
3.6.1	Séries de Fourier-Chebyshev	57
3.6.2	Troncatures	57
3.6.3	Points de collocation	58
3.7	Tendances générales	59
3.7.1	Rotations stabilisantes et déstabilisantes	59
3.7.2	Modes propres localisés	60
3.8	Instabilités d'onde-courte	63
3.8.1	Modes propres sans-pression	63
3.8.2	Instabilités hyperboliques et elliptiques	64
3.8.3	L'effet accordeur de la force de Coriolis	66
3.8.4	Rôle de la viscosité	67
3.8.5	Un critère général pour les écoulements complexes?	68
3.9	Rotation rapide	69
3.9.1	Stabilisation	69
3.9.2	Ondes d'inertie	70
3.10	Conclusion	71
	PERSPECTIVES	73
	RÉFÉRENCES	76
	ANNEXE	82

Chapitre 1

PRÉSENTATION

La présente étude traite des instabilités linéaires non-visqueuses d'écoulements plans stationnaires dans un fluide tournant homogène incompressible. Le vecteur vitesse angulaire $\Omega = \Omega e_z$ du repère tournant est considéré perpendiculaire au plan de l'écoulement de base. En raison de la grande variété des phénomènes physiques induits par la force de Coriolis (quelques mécanismes de base sont brièvement décrits par Batchelor 1967, pp. 555-567; des analyses exhaustives peuvent être trouvées dans la monographie de Greenspan 1969; et dans la thèse de Ern 1997, pour les effets instationnaires), ce travail peut être abordé par trois questions différentes, en fait étroitement liées. Elles sont les suivantes :

- L'instabilité elliptique joue un rôle très important sur les mécanismes tridimensionnels d'instabilité secondaire d'écoulements non-parallèles en repère fixe. *En est-il de même en repère tournant; et quel est le rôle de l'instabilité hyperbolique?*
- De nombreux écoulements tournants, géophysiques ou industriels, présentent des tourbillons cohérents quasi-bidimensionnels dont l'axe est aligné à celui de la rotation. Leur longue durée de vie suggère qu'ils sont robustes à certaines perturbations. *Peut-on expliquer leur persistance par des considérations de stabilité hydrodynamique?*
- Ces dernières permettent d'exprimer des critères d'instabilité pour un certain nombre d'écoulements de base à topologie simple. Ils peuvent être unifiés, et étendus aux écoulements présentant des points de stagnation à l'aide de la méthode de l'optique géométrique. *Est-il possible d'établir des liens entre cette technique récente et la méthode classique des modes normaux?*

Dans ce premier chapitre, nous rappellerons les principales références bibliographiques relatives à ces différentes approches, puis effectuerons quelques rappels historiques sur la théorie de la distorsion rapide (RDT) et sur les études de turbulence en rotation. Ensuite, nous donnerons une description qualitative de l'instabilité hyperbolique, qui revient en leitmotiv dans l'ensemble de l'exposé.

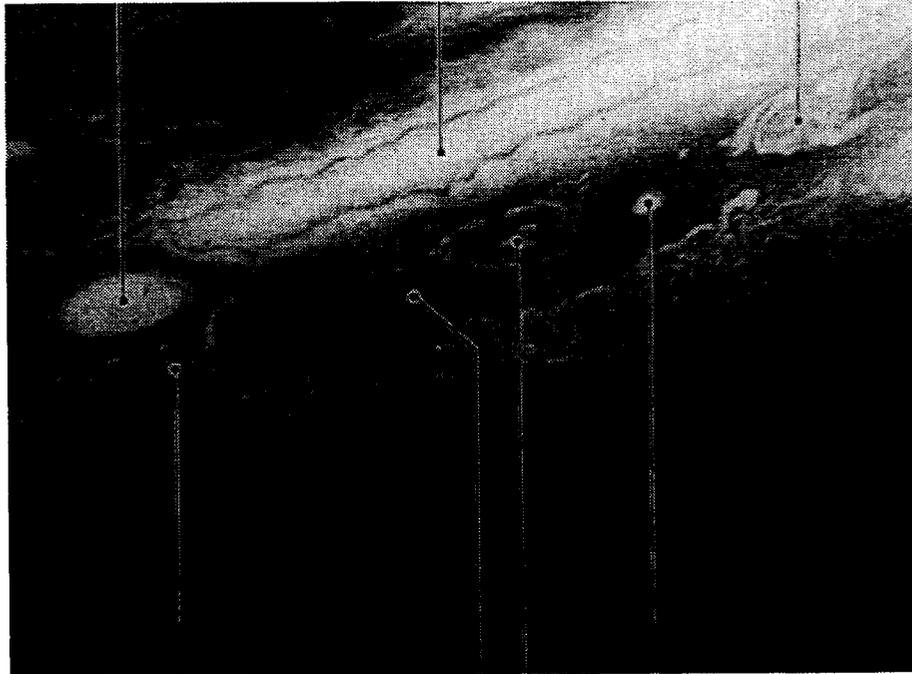


FIG. 1.1 – Atmosphère de Jupiter (d'après Marcus 1993).

1.1 Contexte de l'étude

1.1.1 Instabilités tridimensionnelles

La première approche du sujet a trait à la nature tridimensionnelle des instabilités, puisque les mouvements bidimensionnels dans le plan de l'écoulement de base ne sont pas affectés par la force de Coriolis. En repère fixe, les instabilités tridimensionnelles ont été largement étudiées au début des années 1980 avec les mécanismes de transition de type « Orszag/Herbert » dans les écoulements cisailés (voir les revues de Bayly, Orszag & Herbert 1988; Herbert 1988). Ils peuvent être résumés comme suit : « *l'écoulement parallèle initial est le mauvais état autour duquel on linéarise si l'on souhaite comprendre l'origine de la structure complexe tridimensionnelle ; l'état correct est un équilibre ou quasi-équilibre non-linéaire provenant de l'instabilité primaire* » (Bayly et al. 1988). Dans ces travaux, il fut trouvé que des états de base bidimensionnels ou des ondes d'amplitude finie peuvent être sujets à des instabilités secondaires tridimensionnelles ayant des caractéristiques communes, à savoir des modes rapides de courte longueur d'onde résultant d'un mécanisme inertiel : l'ellipticité des lignes de courant dans les zones tourbillonnaires de l'état de base non-parallèle est considérée comme responsable, et l'instabilité de large bande dite « elliptique » (Pierrehumbert 1986; Bayly 1986; Landman & Saffman 1987; Waleffe 1989, 1990; Le Dizès, Rossi & Moffatt 1996; Leweke & Williamson 1997; Sipp & Jacquin 1997; et d'autres)

est souvent considérée comme un modèle générique de ces instabilités. Il semble aujourd'hui que la transition de type Orszag/Herbert peut être précédée (« bypassed ») par d'autres mécanismes (voir les revues par Henningson 1995 ; Waleffe 1995). Cependant, la première question est : quels sont les effets de la force de Coriolis sur les instabilités secondaires d'écoulements cisailés non-parallèles, et l'instabilité elliptique joue-t-elle un rôle crucial dans un fluide en rotation (Craik 1989 ; Gledzer & Ponomarev 1992 ; Smyth & Peltier 1994 ; Cambon *et al.* 1994) ?

Et quel est le rôle des points de stagnation hyperboliques mis en évidence en utilisant *exactement* le même formalisme que celui de l'instabilité elliptique, dans le contexte de la théorie de la distorsion rapide (RDT) d'une turbulence homogène (Batchelor & Proudman 1954 ; Townsend 1956 ; Cambon 1982 ; Cambon, Teissède & Jeandel 1985 ; Cambon *et al.* 1994 ; et d'autres), et plus récemment dans le contexte de la théorie de la stabilité hydrodynamique (Lagnado, Phan-Thien & Leal 1984 ; Craik & Criminale 1986 ; Friedlander & Vishik 1991 ; Lifschitz & Hameiri 1991) ? Ont-elles un lien avec les tourbillons longitudinaux (« ribs ») dans les écoulements cisailés plans et les sillages derrière un obstacle (Ho & Huerre 1984 ; Klaassen & Peltier 1985, 1989, 1991 ; Metcalfe *et al.* 1987 ; Lasheras & Choi 1988 ; Williamson 1996) ?

1.1.2 Cohérence des tourbillons

La seconde approche possible du sujet est liée à la présence des tourbillons cohérents quasi-bidimensionnels alignés avec l'axe de rotation, et à la persistance des forts cyclones géophysiques et des grands tourbillons astrophysiques (figure 1.1). Les observations expérimentales de telles structures sont nombreuses (voir la revue de Hopfinger & van Heijst 1993). Dans une cuve tournante, une turbulence diffusive produite par une grille oscillante conduit, au delà d'une certaine distance de la grille, à la formation de tourbillons cohérents de longue durée de vie (figure 1.2), qui n'apparaissent pas dans le cas non-tournant (Hopfinger, Browand & Gagne 1982 ; Lollini 1997). D'autres expériences de laboratoire ont montré l'existence de tourbillons bidimensionnels ayant des topologies plus ou moins complexes, comme les monopôles, dipôles, tripôles et tourbillons triangulaires, parfois observés dans des simulations numériques directes de turbulence bidimensionnelle (Kloosterziel 1990 ; Kloosterziel & van Heijst 1991 ; van Heijst, Kloosterziel & Williams 1991 ; Carnevale & Kloosterziel 1994).

L'émergence de colonnes tourbillonnaires sort du cadre de la présente étude car elle met en jeu des mécanismes complexes qui ne peuvent être expliqués par le théorème de Taylor-Proudman, qui ne concerne que le régime linéaire et stationnaire. Ainsi, dans une turbulence homogène en rotation, Cambon, Mansour & Godeferd (1997) ont montré que le régime linéaire qui consiste en des ondes d'inertie ne peut expliquer la transition de la turbulence tridimensionnelle vers un état bidimensionnel, gouverné finalement par les interactions non-linéaires (voir aussi Waleffe 1993 ; Babin, Mahalov & Nicolaenko 1996).

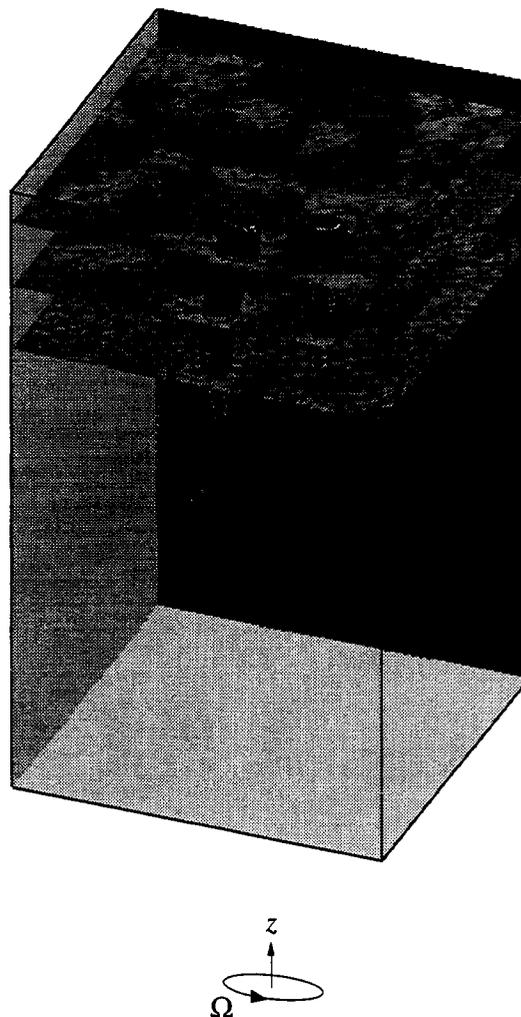


FIG. 1.2 – Simulation numérique directe d'une turbulence générée par une grille oscillante située dans le plan inférieur, et soumise à une rotation d'axe e_z . Visualisation de tourbillons alignés à cet axe (d'après Lollini 1997).

Cependant, la persistance temporelle de ces structures suggère qu'elles sont insensibles (ou stables) à des perturbations ayant un taux de croissance rapide. Les mécanismes linéaires de stabilité sont-ils alors capables d'expliquer leur cohérence et de justifier la « *présence d'intenses tourbillons cycloniques et de (beaucoup) plus faibles tourbillons anticycloniques* » comme l'ont observé Hopfinger *et al.* (1982) et d'autres dans les fluides en rotation (Kloosterziel 1990 ; Bidokhti & Tritton 1992 ; Smyth & Peltier 1994) ?

1.1.3 Critères de stabilité

La troisième et dernière approche du sujet est liée aux deux précédentes. Elle traite du caractère générique des mécanismes d'instabilité excités par la force de Coriolis. Pour les écoulements cisailés parallèles (Pedley 1969 ; Tritton & Davies 1981), les tourbillons circulaires (et écoulements cisailés courbés) (Kloosterziel 1990 ; Kloosterziel & van Heijst 1991 ; Mutabazi, Normand & Wesfreid 1992), ou les écoulements « quadratiques » (Cambon 1982 ; Cambon *et al.* 1985 ; Craik 1989 ; Cambon *et al.* 1994), il existe des critères exacts de stabilité, ou plus précisément des conditions *suffisantes* d'instabilité. Il a été montré (Leblanc & Cambon 1997, voir annexe) qu'elles peuvent être exprimées de façon unique à l'aide du second invariant du tenseur « inertiel ». Ce discriminant généralisé apparaît comme un catalyseur d'instabilités de courte longueur d'onde, décrites au premier ordre par une dynamique « sans-pression », comme l'a déjà indiqué Bayly (1988) pour l'instabilité centrifuge classique. De plus, pour les écoulements tourbillonnaires complexes, nous verrons comment clarifier le rôle des « points de stagnation » dans les écoulements tournants, en utilisant la théorie de stabilité d'optique géométrique développée et appliquée récemment à la mécanique des fluides par Lifschitz et ses collaborateurs (Lifschitz & Hameiri 1991 ; Lifschitz 1991, 1994 ; Bayly, Holm & Lifschitz 1996 ; Lebovitz & Lifschitz 1996). Existe-t-il des liens entre cette nouvelle approche et la théorie spectrale classique ? Enfin, est-il possible d'exprimer une condition suffisante d'instabilité pour n'importe quel écoulement de base à topologie complexe ?

1.1.4 Plan de l'exposé

Nous tenterons d'apporter quelques éléments de réponse à ces différentes questions et verrons en fait qu'elles sont étroitement liées. Le point de départ et fil conducteur de cette thèse a été l'étude de stabilité des tourbillons de Stuart (1967), une solution exacte bidimensionnelle des équations d'Euler présentant une topologie complexe (tourbillons elliptiques corotatifs séparés par des régions hyperboliques, le tout plongé dans un écoulement cisailé uniforme à l'infini), étudiée en repère fixe par Pierrehumbert & Widnall (1982). L'objectif initial était de caractériser l'influence de la force de Coriolis sur les modes tridimensionnels, et d'essayer d'appliquer l'un des critères classiques pour les instabilités induites par les forces centrifuges et/ou de Coriolis. Il s'est avéré que ces derniers pouvaient être unifiés, et qu'ils présentaient des caractéristiques communes, également applicables à des écoulements plans complexes, comme les tourbillons de Stuart ; en particulier, les modes sans-pression (le Lecteur intéressé pourra consulter en annexe, Leblanc & Cambon 1997, dont les principaux éléments seront toutefois rappelés au début du troisième chapitre). De plus, certains points encore obscurs, comme le rôle de l'instabilité hyperbolique en repère fixe, trouvèrent une explication à l'aide de la théorie de Lifschitz & Hameiri (1991) pour des instabilités

localisées de type onde-courte.

En raison du caractère général de cette technique, nous en rappellerons la dérivation dans le second chapitre, ainsi que quelques conséquences sur les écoulements stationnaires. Nous en déduisons une condition de stabilité pour les points de stagnation en repère fixe ou tournant. Puis, dans le troisième chapitre, nous proposerons une étude détaillée de la stabilité des tourbillons de Stuart sous l'effet de la force de Coriolis, qui permet, nous le verrons, d'appliquer, de comparer et de relier des concepts a priori aussi différents que les méthodes spectrales, les instabilités elliptique et hyperbolique, et l'optique géométrique.

Parce que nous les citerons souvent, les articles de Lifschitz & Hameiri (1991), Smyth & Peltier (1994) et Leblanc & Cambon (1997) seront référencés dans la suite respectivement par LH91, SP94 et LC97. Avant de rentrer dans le vif du sujet, il n'est pas inutile de faire un bref rappel historique des travaux relatifs à la théorie de la distorsion rapide et ses liens avec les instabilités elliptique et hyperbolique, ainsi que des études de turbulence soumise à rotation. Nous donnerons également une brève description qualitative de la topologie de l'instabilité hyperbolique, relativement méconnue.

1.2 Quelques précisions

1.2.1 Théorie de la distorsion rapide (RDT)

La RDT a pour point de départ les équations linéarisées pour un champ *turbulent*, qui est décomposé sur des modes de Fourier dont le vecteur d'onde peut dépendre du temps pour suivre la distorsion *moyenne*. A la suite des travaux de Craik & Criminale (1986) et Bayly (1986), il est d'usage d'attribuer la paternité de « l'Analyse Linéaire en termes de Modes de Fourier Lagrangiens » (ALMFL) — terminologie proposée par C. Cambon — à Lord Kelvin. Dans le cas d'un écoulement de type « Couette infini » ou « cisaillement pur », la référence (Kelvin 1887) nous semble pertinente en ce qui concerne l'introduction d'un nombre d'onde dépendant du temps. Cependant, les deux équations couplées, dites « équation eikonale » pour le vecteur d'onde et « équation de transport » pour l'amplitude de la perturbation dans la généralisation WKB (LH91) n'apparaissent pas explicitement dans les travaux de Kelvin, ceci étant dû au fait que dans le cas du cisaillement uniforme, la solution pour le vecteur d'onde est immédiate, et est incluse dans l'équation de transport. Ceci dit, il est désormais d'usage de les mentionner par « équations de Kelvin ». Ce sont également les équations (1) et (2) dans la revue de Savill (1987) en RDT. Par contre, la terminologie « ondes de Kelvin » pour $\exp\{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}\} = \exp\{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}\}$ (\mathbf{K} et \mathbf{X} sont les représentations Lagrangiennes de \mathbf{k} et \mathbf{x}) est trop spécifique. Il existe en effet beaucoup de types d'onde de Kelvin (voir par exemple Batchelor 1967 ; Saffman 1992). L'appellation « modes de Fourier Lagrangiens » ou « vecteur d'onde covariant » semble plus

appropriée.

Puis nous arrivons à la « Rapid Distortion Theory » (RDT) de Cambridge. Le terme, forgé par Batchelor & Proudman (1954) est certes contestable (nous y reviendrons) mais justifié dans le contexte *restreint* des auteurs. Batchelor & Proudman (1954) ne considèrent qu'un écoulement de base irrotationnel à gradient uniforme (cf. cas hyperbolique), de telle sorte que la solution de perturbation est donnée immédiatement dans l'espace physique sur la vortacité; l'espace spectral Lagrangien n'est finalement utilisé que pour « reconvertir » la vortacité en vitesse et donc revenir aux amplitudes des modes de vitesse. Nouveau par rapport à Kelvin (1887) est d'abord le traitement d'un écoulement de base non-parallèle (les lignes de courant sont des hyperboles) et surtout l'utilisation des solutions linéaires sur les modes de Fourier individuels (d'amplitude \mathbf{a}) pour calculer des tenseurs de corrélations doubles (basées sur $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$) à partir de réalisations des conditions initiales multimodales satisfaisant une statistique donnée (turbulence homogène isotrope en l'occurrence). Ce dernier point n'est qu'une utilisation particulière (et optionnelle) de la méthode ALMFL, mais peut-être a-t-il accredité l'idée que la RDT est une méthode statistique avec des relations floues avec l'ALMFL, telle qu'elle a été redécouverte dans le contexte de la stabilité hydrodynamique avec les travaux de Craik & Criminale (1986) et Bayly (1986). Il faut toutefois reconnaître que le formalisme utilisé dans bon nombre de papiers traitant de la RDT (ou ALMFL) — y compris parmi ceux du Directeur de cette thèse — peut paraître lointain par rapport à une analyse de stabilité linéaire classique. Cependant, Lagnado *et al.* (1984) mentionnent clairement leur emprunt à la RDT. Dans le contexte de la turbulence, le fait de sommer une infinité de modes, qui peuvent interagir entre eux (non-linéairement), contrairement à un mode individuel, nécessite une hypothèse explicite de linéarité, justifiée par la « rapidité » des interactions.

Aussi à Cambridge, les travaux de Townsend (voir sa monographie, Townsend 1956) ont eu le mérite de mettre l'accent sur la fonction de transfert déterministe (\mathbf{G} , noyau de Green, avec les notations plus générales de Cambon 1982) qui lie l'amplitude à l'instant t à l'amplitude initiale (symboliquement $\mathbf{a}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{a}_0$), dans la solution des « équations de Kelvin » explicitement retrouvées. Parallèlement en France, les travaux de Craya (1958), influençant un certain nombre de travaux effectués au LMFA depuis 1974 (voir par exemple Gence & Mathieu 1980), ont considéré d'emblée le problème statistique linéaire en cherchant les solutions de « l'équation de Craya » pour des conditions initiales isotropes, sans pouvoir revenir aux modes individuels.

Tous ces éléments relevant soit d'une analyse de stabilité linéaire, soit de considérations statistiques ont été dissociés et explicités dans les travaux de Cambon (1982) avec les particularités suivantes: retour aux équations de Kelvin (non cité alors) pour identifier le noyau de Green \mathbf{G} de la solution générale de $\mathbf{a}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{a}_0$, tirant partie de l'utilisation d'un repère local (Craya-Herring) et l'explicitation de tous les paramètres Eulériens et Lagrangiens ($\mathbf{k}, \mathbf{x}, \mathbf{K}, \mathbf{X}$ dont

certaines notations sont reprises dans cette thèse). Les solutions ont été résolues analytiquement ou numériquement pour tous les écoulements de base à gradient de vitesse constant, solutions des équations d'Euler, avec des lignes de courant elliptiques, rectilinéaires ou hyperboliques. Par exemple, la figure 7 de Cambon (1982) montre ce qui a été reconnu plus tard comme « l'instabilité elliptique » ; le fait de montrer la croissance des valeurs propres de $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ à chaque période, plutôt que celles de \mathbf{G} , qui auraient fourni l'exposant de Floquet, n'ont pas permis de retrouver l'analyse de Floquet effectuée par Bayly (1986), mais tous ces résultats, publiés tardivement et en français (Cambon *et al.* 1985) ont anticipé voire dépassé (force de Coriolis additionnelle) ceux de Lagnado *et al.* (1984) ou Craik & Criminale (1986).

A noter pour finir sur la RDT, que le lien avec la stabilité des écoulements dits « quadratiques » (regardant la fonction de courant) ou, de façon équivalente, « linéaires » (au regard du champ de vitesse), ne concerne que la RDT en turbulence homogène. Dans ce cas uniquement, l'écoulement de base à gradient de vitesse uniforme solution des équations d'Euler, peut aussi être interprété comme *écoulement moyen* au sens de Reynolds (l'homogénéité statistique de la fluctuation annule l'effet rétroactif du tenseur de Reynolds sur l'écoulement moyen et est conservée en retour par l'uniformité spatiale des gradients de vitesse moyenne). En revanche, certaines extensions « inhomogènes » (au sens statistique) de la RDT (voir Savill 1987) ne sont plus rigoureusement compatibles au départ avec les équations linéarisées de la stabilité, puisqu'on linéarise autour d'un écoulement moyen qui n'est plus solution des équations d'Euler, mais des équations de Reynolds tenant compte des interactions quadratiques. Il resterait à examiner les liens éventuels entre les analyses RDT « localement homogènes » pour des écoulements autour d'obstacles ou dans des conduits distordants (Durbin & Hunt 1980), et la théorie d'optique géométrique (LH91) qui finalement donne un cadre mathématique rigoureux au concept de « boîte d'écoulement homogène convectée par un écoulement à gradient faiblement variable ».

1.2.2 Turbulence en rotation

Il faudrait peut-être rappeler quelques résultats théoriques, numériques et expérimentales des effets de rotation. En l'absence de mécanismes structérateurs autres que la force de Coriolis (cisaillement à grande échelle, tourbillons organisés, parois), la modification de la dynamique d'une perturbation tridimensionnelle (ou de la turbulence développée) par la rotation (via la cascade d'énergie et surtout via la transition 2D-3D) est apparue très tôt comme un mécanisme purement non-linéaire. Dans un écoulement tournant, la solution ALMFL $\mathbf{a}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{a}_0$ (appelée transformation de Poincaré par Babin *et al.* 1996), qui contient la loi de dispersion des ondes d'inertie, ne modifie pas la structure spectrale énergétique, mais la fonction de transfert \mathbf{G} apparaît naturellement par les produits cubiques $\mathbf{G}\mathbf{G}\mathbf{G}$ (susceptibles de traduire une dynamique de triades résonnantes) dans les

développements faiblement non-linéaires. Ces développements, purement mathématiques dans Babin *et al.* (1996), interfèrent avec des hypothèses statistiques dans le modèle EDQNM2 (Cambon 1982; Cambon *et al.* 1997) et, plus partiellement, dans l'analyse de stabilité des triades de Waleffe (1993). Une expérience a été conduite à l'ONERA à partir de 1983 (Jacquin *et al.* 1990), dont les résultats ont pu mettre en évidence les effets de la rotation sur la cascade d'énergie, et sur la bidimensionnalisation de la turbulence. Finalement, une confrontation théorie/expérience/simulations est regroupée dans Cambon *et al.* (1997).

Le même télescopage entre « modèles de turbulence » et « stabilité hydrodynamique » se retrouve sur les critères de stabilisation/déstabilisation d'écoulements *structurés* (cisaillement à grande échelle, tourbillons quasi-bidimensionnels organisés), où une certaine confusion régnait, suite au « critère » proposé par Lesieur, Yanase & Métais (1991), qui s'avérera, on le verra dans la suite, erroné dans une large mesure, et qui s'opposait à des résultats théoriques rigoureux. Ces derniers, résultant d'analyses de stabilité linéaire (Pedley 1969), sont d'ailleurs compatibles avec les critères semi-empiriques de la communauté de la turbulence, comme par exemple la paradoxale « analyse de la particule déplacée » (Tritton & Davies 1981). Dans le cadre des écoulements quadratiques, les travaux de Lesieur *et al.* (1991) furent réfutés par Cambon *et al.* (1994), en accord avec tous les critères classiques. Ce travail de thèse aura permis d'étendre ces résultats à des écoulements bidimensionnels à topologie complexe, d'unifier les différentes conditions exactes d'instabilité et de justifier dans une large mesure les critères empiriques, via la justification théorique de l'analyse simplifiée dite « sans-pression ».

1.2.3 Ribs et braids : l'instabilité hyperbolique

La stabilité de l'écoulement elliptique n'a désormais plus aucun secret tant la littérature est abondante à son sujet. Tsai & Widnall (1976) découvrirent qu'un tourbillon dont le cœur circulaire était faiblement contraint est sujet à une instabilité tridimensionnelle d'onde-courte. Sans le savoir, ils mettaient en évidence « l'instabilité elliptique ». D'un point de vue mathématique, pour un écoulement *uniforme* à lignes de courant elliptiques, il nous semble que la première mise en évidence d'une instabilité apparaît dans la thèse de Cambon (1982) (voir aussi les figures 4–6 dans Cambon *et al.* 1985), mais Bayly (1986) fût bien le premier à effectuer une analyse de Floquet, tirant avantage de la périodicité temporelle des coefficients mis en jeu dans les équations de Kelvin. Ses résultats ont confirmé les calculs spectraux de Pierrehumbert (1986) qui a conclu que la désormais célèbre « instabilité elliptique » était un mécanisme générique pour les instabilités secondaires dans les écoulements cisailés, dès lors que l'écoulement de base possède des régions tourbillonnaires elliptiques (voir la revue de Bayly *et al.* 1988). Ceci a été largement accepté et la structure des modes propres localisés de l'instabilité elliptique (Pierrehumbert 1986; Waleffe 1989, 1990) est en bon accord avec les instabilités secondaires tridimensionnelles dans les écoulements cisailés à lignes

de courant non-parallèles (Orszag & Patera 1981, 1983; Pierrehumbert & Widdnall 1982; Klaassen & Peltier 1985, 1989, 1991; Lundgren & Mansour 1996; Sipp & Jacquin 1997). C'est le mode de cœur (« core mode ») de SP94. L'influence d'une extension dans la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement elliptique a été étudiée par Le Dizès *et al.* (1996), tandis que les récentes expériences de Leweke & Williamson (1997) montrent joliment la naissance de l'instabilité elliptique dans le cœur d'une paire de tourbillons.

Durant la décennie passée, d'un point de vue théorique, le rôle des régions hyperboliques sur les instabilités secondaires a été complètement oublié, contrairement à la RDT qui prédit que les régions hyperboliques pour un « écoulement moyen » sont connus pour être des endroits de « production » intense d'énergie cinétique turbulente (Batchelor & Proudman 1954; Townsend 1956; Cambon 1982; Cambon *et al.* 1985, 1994). Récemment cependant, Friedlander & Vishik (1991) ont montré avec la méthode de stabilité d'optique géométrique (voir aussi LH91 et chapitre suivant) que, dans un repère fixe, tout écoulement possédant un point de stagnation hyperbolique est instable, confirmant les résultats de Lagnado *et al.* (1984) pour les écoulements quadratiques infinis à lignes de courant hyperboliques.

« L'instabilité hyperbolique » correspond au « braid mode » (mode de tresse en français) identifié par SP94 (voir leur figure 14) jouant un rôle dominant dans le cas non-tournant. En accord avec Klaassen & Peltier (1985, 1989, 1991), l'instabilité hyperbolique est étroitement liée aux tourbillons longitudinaux (« ribs ») dans les instabilités secondaires de couches de mélange (voir par exemple Ho & Huerre 1984; Metcalfe *et al.* 1987; Lasheras & Choi 1988). Le mécanisme d'étiement des lignes-tourbillon dans le plan de l'écoulement de base, « *le long de l'axe principal de l'étirement* », bien décrit par Lagnado *et al.* (1984), et bien connu des travaux RDT, apparaît être un mécanisme générique dans les écoulements visqueux ou non : ainsi, dans le sillage d'un cylindre, Williamson (1996) a observé expérimentalement son « mode B ».

Nous réaliserons l'importance de cette instabilité hyperbolique tout au long de cette étude. En particulier, nous verrons dans le troisième chapitre que pour l'écoulement de Stuart en repère fixe, l'instabilité hyperbolique présente un taux de croissance plus élevé que l'instabilité elliptique ! Le rôle des régions hyperboliques avaient été présumé dans un certain nombre de travaux sur les instabilités secondaires des couches de mélange (voir par exemple Lasheras & Choi 1988). Cependant, aucun lien ni qualitatif ni quantitatif n'avait été établi avec les travaux théoriques issus des mouvances RDT ou stabilité hydrodynamique. Afin de donner ici une description qualitative de cette « instabilité hyperbolique », des simulations numériques directes ont été réalisées. Des cellules bidimensionnelles de Taylor–Green d'aspect carré (afin d'éviter l'instabilité elliptique dans le cœur des tourbillons) sont perturbées tridimensionnellement (voir les détails en annexe, Leblanc & Godefert 1997).

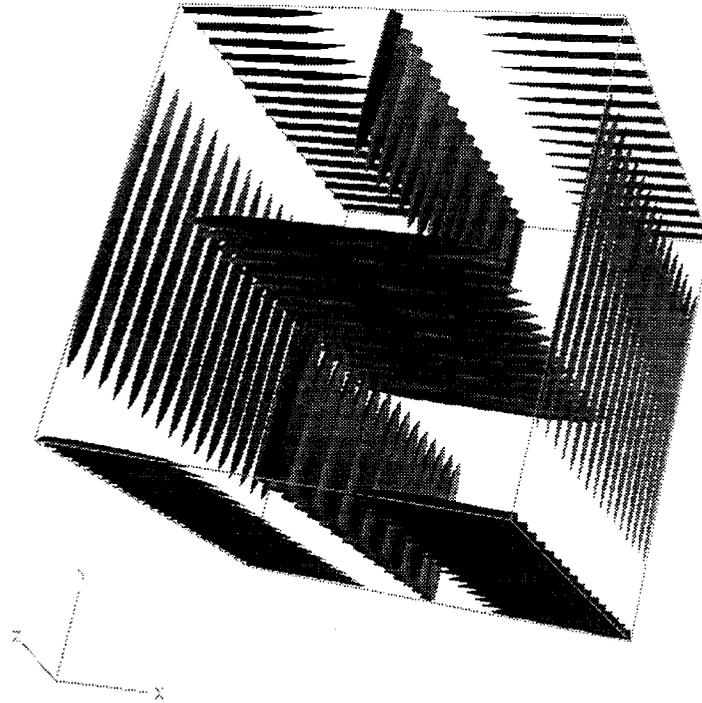


FIG. 1.3 – Instabilité hyperbolique tridimensionnelle dans les cellules de Taylor-Green d’aspect carré $\Psi(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ en repère fixe, obtenue par simulation numérique directe (128^3 , $Re = 400$). Les iso-surfaces représentent le module de vorticité de la perturbation : la perturbation forme des tourbillons contrarotatifs en cigare dans les régions hyperboliques entre les cellules.

Sous l’effet de la perturbation tridimensionnelle, des « tourbillons en doigt » (ou « cigares ») se forment dans les régions hyperboliques (figure 1.3). Leur axe est dans le plan (x, y) et sont contrarotatifs deux à deux dans la direction transverse (z) . Ces tourbillons correspondent aux tourbillons longitudinaux (« ribs ») dans les couches de mélanges tridimensionnelles. Le mécanisme d’instabilité est le suivant : dans la région hyperbolique, la perturbation de vorticité est localement étirée le long de l’axe principal du tenseur des taux de déformation (figure 1.4), en accord avec le mécanisme décrit par Lagnado *et al.* (1984). Ceci a été confirmé par les analyses de stabilité de Sipp & Jacquin (1997).

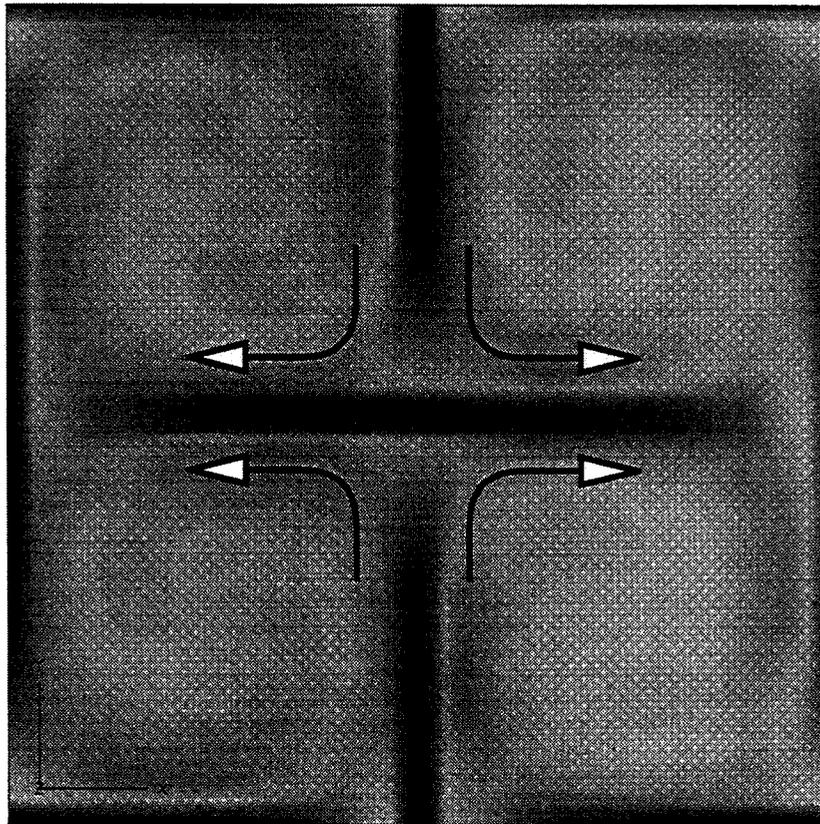


FIG. 1.4 – Instabilité hyperbolique tridimensionnelle dans les cellules de Taylor–Green d’aspect carré $\Psi(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ en repère fixe, obtenue par simulation numérique directe (128^3 , $Re = 400$). La norme de la perturbation de vorticité est représentée : minimum, blanc ; maximum, noir. Les flèches représentent le sens de l’écoulement. La vorticité du mode est étirée le long de l’axe principal du tenseur des taux de déformation.

Chapitre 2

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

En alternative aux outils classiques utilisés en stabilité hydrodynamique (méthodes spectrales ou énergétiques), la théorie de stabilité dite « optique géométrique » développée par Lifschitz & Hameiri (1991) est un outil puissant permettant de fournir des conditions suffisantes d'instabilité pour des écoulements complexes (instationnaires, tridimensionnels, compressibles, stratifiés...) basées sur les propriétés géométriques (locales) de l'écoulement de base. Cette méthode offre l'avantage de ramener tout problème de stabilité hydrodynamique à un système linéaire d'équations différentielles *ordinaires* évoluant le long des trajectoires de l'écoulement de base. Pour des trajectoires simples (telles que les points de stagnation), ce système est aisément intégrable, tout en s'affranchissant des conditions limites puisque la perturbation évolue localement le long des trajectoires. Dans ce chapitre, nous rappellerons la dérivation de cette théorie pour un fluide incompressible non-visqueux, et déduirons des conditions de stabilité pour les écoulements présentant des points de stagnation.

2.1 Introduction

Les idées essentielles de cette méthode ont été tout d'abord exprimées par Eckhoff (1981) et appliquées de façon générale aux systèmes linéaires de type hyperbolique d'équations différentielles partielles. Nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, et nous y reviendrons par la suite, pour les écoulements homogènes de type quadratique, les notions de vecteur d'onde déformé ainsi que la description Lagrangienne étaient déjà utilisées dans la théorie de la distorsion rapide (RDT) pour une turbulence homogène (Townsend 1956; Cambon 1982; Cambon *et al.* 1985, 1994). Le concept d'instabilité localisée évoluant le long des trajectoires de l'écoulement de base apparaît déjà dans les travaux de Bayly (1988, 1989). Mais c'est Lifschitz & Hameiri (LH91), qui dérivèrent la théorie générale pour un écoulement non-visqueux compressible ou solénoïdal.

Diverses extensions et conséquences particulièrement intéressantes (effets non-

linéaires et visqueux, conditions sur la perturbation de vorticité...) ont été effectuées par Lifschitz (1991, 1994). La théorie a été appliquée à différents types d'écoulements complexes par Bayly *et al.* (1996) et Lebovitz & Lifschitz (1996). Les premiers ont montré que la stabilité tridimensionnelle de tout écoulement plan peut se ramener à une équation de type Schrödinger. Les seconds ont permis de clarifier certains points de la démonstration originale, que nous reprenons en détail, pour un écoulement de base incompressible et instationnaire (donc tournant ou pas). Pour être complet, notons que la méthode permet d'étudier la stabilité d'écoulements instationnaires, comme les ondes d'inertie d'amplitude finie dans un fluide en rotation, ou encore les modes de Fourier exponentiellement croissants superposés à l'écoulement de base elliptique (Fabjonas 1997).

Puis, nous en déduirons des conséquences intéressantes pour les écoulements de base stationnaires. En particulier, la méthode permet d'approcher les valeurs propres instables de l'opérateur d'Euler linéarisé. Nous verrons aussi les conséquences si l'écoulement possède un ou des points de stagnation (de vitesse nulle). La dernière section montre comment appliquer cette théorie aux écoulements en rotation, en dérivant une condition simple d'instabilité, qui sera appliquée au dipôle non-symétrique de Chaplygin se déplaçant le long d'un chemin circulaire. Ce second chapitre reste volontairement très formel. Dans le troisième, nous verrons comment appliquer ces concepts à un cas concret : les tourbillons de Stuart.

Le Lecteur pourra s'étonner qu'aucune notion « d'optique géométrique » n'intervient dans cette méthode, en dépit du nom qu'elle porte. En fait, et puisqu'elle permet de ramener un système d'équations différentielles partielles à un système d'équations différentielles ordinaires, il s'agit bel et bien d'une *méthode des caractéristiques* (ou *méthode des rayons*), les caractéristiques (ou rayons)   tant bien entendu les trajectoires de l'écoulement de base. La méthode des caractéristiques, dont une présentation générale peut se trouver dans Courant & Hilbert (1962), est également à l'origine de la théorie des rayons-traceurs (« ray tracing ») dans les systèmes non-homogènes anisotropes d'ondes dispersives (Lighthill 1978), encore appelée « kinematic wave theory » (Whitham 1974 ; Landahl & Mollo-Christensen 1986). La terminologie « optique géométrique » provient du fait que l'exponentielle du développement WKB ne contient qu'un seul terme, l'approximation suivante étant dénommée « optique physique » (Bender & Orszag 1978).

2.2 Quelques définitions

2.2.1 Produit scalaire et norme

On définit d'abord un produit scalaire (au sens fonctionnel) de façon classique pour deux champs de vecteurs complexes $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

où l'astérisque dénote le complexe conjugué, et $d\mathbf{x}$ est l'élément de volume. Ceci permet de définir une norme dans l'espace des fonctions de carré sommable :

$$\|\mathbf{u}\| = \left\{ \int_{\mathcal{D}} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}.$$

2.2.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Pour un écoulement de base instationnaire, il est nécessaire de définir clairement sa stabilité. Soient $[\mathbf{U}, P](\mathbf{x}, t)$ les champs de vitesse et pression d'un écoulement incompressible non-visqueux défini dans un domaine $\mathcal{D}(t)$ que l'on suit dans son mouvement fondamental. L'écoulement est régi par les équations d'Euler et de continuité :

$$D_t \mathbf{U} + \nabla P = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.2)$$

où $D_t = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ est la dérivée matérielle. La stabilité *linéaire* de l'écoulement de base est recherchée en superposant une perturbation infinitésimale (en général complexe) $[\mathbf{u}', p'](\mathbf{x}, t)$. La perturbation physique (réelle) sera obtenue en additionnant le complexe conjugué. En injectant $[\mathbf{U} + \mathbf{u}', P + p']$ dans les équations d'Euler et de continuité, en tenant compte de (2.1) et (2.2), et en négligeant les termes quadratiques, la perturbation est régie par le système linéaire suivant :

$$D_t \mathbf{u}' + \mathbf{L} \mathbf{u}' + \nabla p = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.4)$$

où $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{U}$ est le gradient Eulérien de vitesse de l'écoulement de base. La perturbation est bien entendu soumise à des conditions initiales et limites.

L'énergie cinétique (totale) de perturbation est donc naturellement :

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathcal{D}} |\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle = \|\mathbf{u}'\|^2. \quad (2.5)$$

Le facteur 1/2 habituellement présent dans la définition de l'énergie cinétique est volontairement omis pour la suite. La stabilité au sens de Lyapunov est alors définie de la façon suivante (Joseph 1976; Eckhoff 1981; Lifschitz 1994) : un écoulement est dit stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathcal{E}(t) < \epsilon \text{ si } \mathcal{E}(0) < \delta, \text{ pour tout } t > 0,$$

sinon l'écoulement est instable. Cela revient bien sûr à dire que l'écoulement est stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(t)/\mathcal{E}(0) = 0,$$

et instable sinon. Cette définition reste toutefois insuffisante pour caractériser la stabilité d'un écoulement instationnaire dont l'énergie cinétique croît avec le même ordre de grandeur que la perturbation. Elle est cependant suffisante pour des écoulements stationnaires, périodiques ou quasi-périodiques, en repère fixe ou tournant, comme nous le verrons par la suite.

2.3 Perturbations de type onde-courte

2.3.1 Développement WKB

En suivant LH91, on recherche la solution des équations linéarisées (2.3) et (2.4) sous la forme WKB suivante (Wentzel–Kramers–Brillouin; voir Bender & Orszag 1978, pour une introduction à la méthode WKB) :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}', p'](\mathbf{x}, t) &= \exp\{i\phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon\}[\mathbf{a}, \pi](\mathbf{x}, t) \\ &+ \epsilon \exp\{i\phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon\}[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon](\mathbf{x}, t) \\ &+ \epsilon[\mathbf{u}_r, p_r](\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

soumise à une condition initiale spatialement localisée que nous détaillerons plus loin. La phase ϕ est réelle, alors que les amplitudes $[\mathbf{a}, \pi]$ et $[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon]$ sont des fonctions complexes, ainsi que le résidu $[\mathbf{u}_r, p_r]$. $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre qui caractérise l'échelle spatiale de la perturbation (devant celle de l'écoulement de base). Cette définition est pauvre puisqu'en fait on va faire tendre ϵ vers 0. Les amplitudes $[\mathbf{a}, \pi]$ et $[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon]$, et le résidu $[\mathbf{u}_r, p_r]$ sont supposés d'ordre 1.

En injectant la solution (2.6) dans les équations d'Euler linéarisées, puis en égalant les termes de même ordre en ϵ , on obtient de (2.3) les équations suivantes :

$$\mathbf{a}D_t\phi + \mathbf{k}\pi = 0, \quad O(1/\epsilon) \quad (2.7)$$

$$D_t\mathbf{a} + \mathbf{L}\mathbf{a} + \nabla\pi = -i(\mathbf{a}_\epsilon D_t\phi + \mathbf{k}\pi_\epsilon), \quad O(1) \quad (2.8)$$

$$D_t\mathbf{u}_r + \mathbf{L}\mathbf{u}_r + \nabla p_r = -\exp\{i\phi/\epsilon\}(D_t\mathbf{a}_\epsilon + \mathbf{L}\mathbf{a}_\epsilon + \nabla\pi_\epsilon), \quad O(\epsilon) \quad (2.9)$$

alors que l'équation de continuité (2.4) donne :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad O(1/\epsilon) \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_\epsilon, \quad O(1) \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_r = -\exp\{i\phi/\epsilon\}\nabla \cdot \mathbf{a}_\epsilon, \quad O(\epsilon) \quad (2.12)$$

Le vecteur d'onde \mathbf{k} est défini par

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, t).$$

2.3.2 L'équation eikonale et l'équation de transport

En multipliant scalairement (2.7) par \mathbf{a} et en tenant compte de (2.10), on obtient successivement :

$$D_t\phi = 0 \text{ et } \pi = 0,$$

ce qui signifie que la phase est convectée par l'écoulement de base, et que la pression est nulle au premier ordre, d'où la nécessité du terme d'ordre ϵ $[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon]$ dans le développement (2.6). En appliquant le gradient à la première des deux

équations ci-dessus, on obtient l'équation *eikonale* régissant l'évolution du vecteur d'onde :

$$D_t \mathbf{k} = -L^T \mathbf{k}, \quad (2.13)$$

où le T dénote le transposé. Maintenant l'équation (2.8) s'écrit :

$$D_t \mathbf{a} + L \mathbf{a} = -i \mathbf{k} \pi_\epsilon,$$

à laquelle on applique le projecteur sur le plan perpendiculaire à \mathbf{k} : $I - \mathbf{k} \mathbf{k}^T / |\mathbf{k}|^2$ (ou $\delta_{ij} - k_i k_j / (k_l k_l)$ sous forme indicielle), bien connu par la communauté de la turbulence. En tenant compte du fait que la différenciation de (2.10) donne

$$\mathbf{k} \cdot D_t \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot D_t \mathbf{k} = \mathbf{a}^T L^T \mathbf{k} = \mathbf{k}^T L \mathbf{a},$$

d'après (2.13), alors (2.8) se récrit :

$$D_t \mathbf{a} = (2 \mathbf{k} \mathbf{k}^T / |\mathbf{k}|^2 - I) L \mathbf{a}. \quad (2.14)$$

C'est l'équation de *transport* de l'amplitude de perturbation.

Il est facile de vérifier que d'après la condition d'incompressibilité (2.10), et en tenant compte de l'équation eikonale (2.13), alors $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}$ est un invariant du mouvement puisque :

$$D_t (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) = 0. \quad (2.15)$$

2.3.3 Description Lagrangienne

Donc, à l'ordre dominant, le problème a été ramené à un système composé des équations (2.13) et (2.14) ne faisant intervenir que la dérivée matérielle D_t , donc *évoluant le long des trajectoires de l'écoulement de base*.

Soit $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ la position d'une particule fluide qui était située à l'instant initial en $\chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$. En utilisant une représentation Lagrangienne vis à vis de l'écoulement de base, les trajectoires sont donc données par

$$d\chi(\mathbf{X}, t)/dt = \mathbf{U}(\chi(\mathbf{X}, t), t). \quad (2.16)$$

Afin de simplifier les notations, on note de façon univoque tout champ f dans sa description Eulérienne et Lagrangienne

$$f(\mathbf{X}, t) \equiv f(\chi(\mathbf{X}, t), t) = f(\mathbf{x}, t),$$

de sorte que, par exemple, les trajectoires (2.16) sont données sous forme plus condensée par : $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{U}$. Cet abus de notation peut parfois prêter à confusion quand les variables de dépendance ne sont pas exprimées. Celles-ci seront explicitées si nécessaire.

En représentation Lagrangienne, les équations eikonale (2.13) et de transport (2.14) deviennent des *équations différentielles ordinaires* évoluant le long des trajectoires de l'écoulement de base. Ce système s'écrit :

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{U}, \quad (2.17)$$

$$d\mathbf{k}/dt = -\mathbf{L}^T \mathbf{k}, \quad (2.18)$$

$$d\mathbf{a}/dt = (2\mathbf{k}\mathbf{k}^T/|\mathbf{k}|^2 - \mathbf{I})\mathbf{L}\mathbf{a}, \quad (2.19)$$

que l'on peut résoudre séquentiellement moyennant la donnée des conditions initiales: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}$ la trajectoire sur laquelle on se situe, \mathbf{k}_0 le vecteur d'onde, et \mathbf{a}_0 l'amplitude, de sorte que:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{a}_0 = 0.$$

La condition initiale ci-dessus traduisant l'incompressibilité de la perturbation permet de s'assurer que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$ à tout instant, en raison de (2.15) qui s'écrit en description Lagrangienne :

$$d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})/dt = 0.$$

La remarquable idée de cette théorie est d'avoir réduit le problème à un système n'évoluant que le long des trajectoires de l'écoulement de base. Par conséquent, sa résolution permet de s'affranchir des conditions limites, qui n'interviendront qu'à l'ordre suivant. Nous le verrons par la suite, la construction des conditions initiales permet de localiser la perturbation aussi près que l'on veut de la trajectoire \mathbf{X} sur laquelle on résout le système. Ainsi, si $\mathbf{a}(\mathbf{X}, 0) = 0$ à l'instant initial, alors $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = 0$ pour tout $t > 0$, sur la même trajectoire. Il reste donc à montrer que si l'on trouve \mathbf{k}_0 et \mathbf{a}_0 tels que $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{a}_0 = 0$ et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)| = +\infty$$

le long de la trajectoire $\mathbf{X} = \mathbf{x}_0$, alors l'écoulement est instable (au sens de Lyapunov). Il s'agit donc d'une condition *suffisante* d'instabilité. C'est le point essentiel de la théorie.

2.3.4 Principe de la démonstration

En fait, la croissance non bornée de l'amplitude du terme dominant dans le développement WKB implique presque immédiatement, on le verra, celle de la perturbation, prouvant l'instabilité. Cependant, on va montrer que les termes d'ordres suivants du développement sont uniformes (indépendants) en ϵ . Ceci va nous permettre de montrer que les solutions WKB approchent asymptotiquement certaines solutions exactes du problème linéaire correspondant. En d'autres termes, ceci signifie par exemple que pour un écoulement stationnaire, les solutions d'onde-courte exponentiellement croissantes correspondent à certains modes instables du spectre de l'opérateur linéaire.

D'après la définition de la norme dans l'espace des fonctions de carré sommable, on peut vérifier que le développement WKB (2.6) vérifie les inégalités triangulaires suivantes :

$$\|\mathbf{a}\| - \epsilon\{\|\mathbf{a}_\epsilon\| + \|\mathbf{u}_r\|\} \leq \|\mathbf{u}'\| \leq \|\mathbf{a}\| + \epsilon\{\|\mathbf{a}_\epsilon\| + \|\mathbf{u}_r\|\}. \quad (2.20)$$

Ceci provient du fait que $|\exp\{i\phi/\epsilon\}| = 1$.

On suppose à ce stade que l'amplitude \mathbf{a} est connue, solution du problème Lagrangien (2.19) supposé résolu ($|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ croît par exemple exponentiellement le long de la trajectoire \mathbf{X}). On va montrer que le terme d'ordre ϵ , $[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon](\mathbf{x}, t)$, s'exprime uniquement en fonction de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, donc peut croître aussi exponentiellement avec \mathbf{a} .

En ce qui concerne le résidu, $[\mathbf{u}_r, p_r](\mathbf{x}, t)$, on va montrer que son énergie (et donc sa norme $\|\mathbf{u}_r\|$) est bornée à tout instant par une fonction dépendante du temps, elle même aussi éventuellement exponentiellement croissante. Cependant, cette fonction n'« explose » pas à temps fini, et reste indépendante du petit paramètre ϵ .

Par conséquent, à tout instant, le terme $\epsilon\{\|\mathbf{a}_\epsilon\| + \|\mathbf{u}_r\|\}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut avec ϵ , car ϵ est arbitraire (on peut donc le choisir aussi petit que l'on veut). Donc, d'après la première des inégalités (2.20), il est clair que la norme de la perturbation $\|\mathbf{u}'\|$ est minorée à tout instant par l'amplitude $\|\mathbf{a}\|$ supposée indéfiniment croissante. Cette croissance ne pouvant être annulée par les termes d'ordre ϵ , la croissance de $|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ implique celle de la perturbation $\|\mathbf{u}'\|$ (au sens de Lyapunov).

2.4 Estimation du résidu

2.4.1 Expression des termes d'ordre suivant

En multipliant scalairement par \mathbf{k} l'équation (2.8), et en inversant (2.11), le terme d'ordre ϵ du développement WKB $[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon](\mathbf{x}, t)$ peut être exprimé en fonction de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ de la façon suivante :

$$\mathbf{a}_\epsilon = i(\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{k}/|\mathbf{k}|^2, \quad \pi_\epsilon = 2i(\mathbf{k}^T \mathbf{L}\mathbf{a})/|\mathbf{k}|^2. \quad (2.21)$$

Le terme Eulérien $\nabla \cdot \mathbf{a}$ dans l'expression de \mathbf{a}_ϵ montre que celui-ci n'évolue pas le long des trajectoires, et donc que l'ordre ϵ contient l'information des conditions limites. Cependant, on pourra rendre ce terme aussi petit que l'on veut avec ϵ .

Le résidu $[\mathbf{u}_r, p_r](\mathbf{x}, t)$ est quant à lui gouverné par les équations (2.9) et (2.12) que l'on peut récrire sous la forme du système non-homogène suivant :

$$D_t \mathbf{u}_r + \mathbf{L}\mathbf{u}_r + \nabla p_r = \mathbf{f}, \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_r = g, \quad (2.23)$$

avec $\mathbf{f} = \exp\{i\phi/\epsilon\}\mathbf{f}'$ et $g = \exp\{i\phi/\epsilon\}g'$, où :

$$\mathbf{f}' = -(\mathbf{D}_t\mathbf{a}_\epsilon + \mathbf{L}\mathbf{a}_\epsilon + \nabla\pi_\epsilon), \quad g' = -\nabla \cdot \mathbf{a}_\epsilon,$$

les termes d'ordre ϵ étant exprimé en (2.21). L'étape suivante consiste à montrer que l'énergie cinétique du résidu peut être majorée à tout instant $t > 0$ indépendamment de la valeur de ϵ . La démarche est analogue à celle utilisée pour démontrer les théorèmes d'énergie (Joseph 1976).

2.4.2 Energie du résidu

La variation temporelle de l'énergie cinétique du résidu s'écrit, d'après (2.5) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_r &= \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r \rangle \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\mathbf{D}_t + \nabla \cdot \mathbf{U}) |\mathbf{u}_r(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{D}_t \{ \mathbf{u}_r(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_r^*(\mathbf{x}, t) \} d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

car le fluide est incompressible. En tenant compte de (2.22) et de son complexe conjugué, et du fait que $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}$ car $\mathbf{L} = \nabla\mathbf{U}$ est par définition réel, on obtient (en omettant les indices r par clarté) :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}/dt &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{D}_t\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{D}_t\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{u}, \mathbf{L}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \nabla p \rangle - \langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \\ &= -2\langle \mathbf{S}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle g, p \rangle + \langle p, g \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

où $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ est la partie symétrique du gradient de vitesse de l'écoulement de base. Dans la dernière ligne, on a introduit la notation

$$\langle p, g \rangle = \int_{\mathcal{D}} p(\mathbf{x}, t)g^*(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = - \int_{\mathcal{D}} \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = -\langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle,$$

en intégrant par partie et en tenant compte du complexe conjugué de (2.23). On note que

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \{ p(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{D}} p(\mathbf{x}, t)u_n^*(\mathbf{x}, t)dS = 0$$

car la perturbation de pression est supposée nulle sur le bord du domaine $\partial\mathcal{D}(t)$.

Une relation analogue est obtenue pour $\langle g, p \rangle$. L'étape suivante consiste à majorer par valeurs supérieures le membre de droite de (2.24). La démonstration originale (LH91) est particulièrement élégante, mais ne s'applique qu'aux écoulements uniformes à l'infini ou périodiques. Nous reprendrons ici la démonstration plus générale de Lebovitz & Lifschitz (1996). Puisque l'estimation de l'énergie est analogue à celle des théorèmes énergétiques, certains points sont clarifiés dans la monographie de Joseph (1976, tome 1, pp. 13–20).

2.4.3 Majoration de l'énergie

Le premier terme du membre de droite de (2.24) est majoré de la manière suivante. \mathbf{S} étant un tenseur symétrique, ses valeurs propres λ_n , $n = 1, 2, 3$ sont réelles et telles que :

$$u_i^* S_{ij} u_j = \sum_{n=1}^3 \lambda_n (u_n)^2.$$

De plus, le fluide étant incompressible, le déterminant de \mathbf{S} est nul, donc $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, ce qui signifie qu'au moins une valeur propre est positive, et une est négative, de sorte que, d'après l'inégalité suivante :

$$\min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |\mathbf{u}|^2 \leq u_i^* S_{ij} u_j \leq \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) |\mathbf{u}|^2,$$

on a, après multiplication par -1 ,

$$- \langle \mathbf{S} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \leq C_1 \mathcal{E}(t) \quad (2.25)$$

avec

$$C_1 = -\text{vol}(\mathcal{D}) \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0.$$

Le second (et troisième) terme du membre de droite de (2.24) est beaucoup plus délicat. D'abord, en tenant compte de l'inégalité

$$gp^* + pg^* \leq |p|^2 + |g|^2$$

valable pour n'importe quels complexes g et p , on a

$$\langle g, p \rangle + \langle p, g \rangle \leq \langle p, p \rangle + \langle g, g \rangle \leq C_2 \langle \nabla p, \nabla p \rangle + \mathcal{K}_1(t), \quad (2.26)$$

où $\mathcal{K}_1(t) = \langle g, g \rangle = \langle g', g' \rangle$ ne dépend pas de ϵ . La seconde inégalité découle de l'inégalité de Poincaré (voir plus loin). Maintenant, en prenant la divergence de (2.22), la pression vérifie l'équation de Poisson suivante (on rappelle qu'on omet les indices r) :

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{f} - \nabla \cdot (\mathbf{D}_t \mathbf{u} + \mathbf{L} \mathbf{u}) = -\exp\{i\phi/\epsilon\} \mathbf{D}_t g' + \nabla \cdot (\mathbf{f} - 2\mathbf{L} \mathbf{u}). \quad (2.27)$$

La dernière égalité est obtenue en tenant compte de (2.23) et des égalités suivantes :

$$\mathbf{D}_t g = \exp\{i\phi/\epsilon\} \mathbf{D}_t g' \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{D}_t \mathbf{u} - \mathbf{D}_t \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{L} \mathbf{u}),$$

la seconde étant valable si $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$. En multipliant scalairement (2.27) par p , et en intégrant par parties, on obtient :

$$\langle \nabla p, \nabla p \rangle = -\langle \nabla^2 p, p \rangle = \langle \exp\{i\phi/\epsilon\} \mathbf{D}_t g', p \rangle - \langle \exp\{i\phi/\epsilon\} \mathbf{f}' - 2\mathbf{L} \mathbf{u}, \nabla p \rangle.$$

D'où :

$$\langle \nabla p, \nabla p \rangle \leq \langle |\mathbf{D}_t g'|, |p| \rangle + \langle |\mathbf{f}'|, |\nabla p| \rangle + C_3 \langle |\mathbf{u}|, |\nabla p| \rangle. \quad (2.28)$$

Or, pour tout réel positif a, b, μ , on a l'inégalité suivante :

$$2ab \leq \mu^{-1}a^2 + \mu b^2.$$

Alors, (2.28) se récrit :

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla p, \nabla p \rangle &\leq \mu \langle p, p \rangle + \mu(C_3 + 1)\langle \nabla p, \nabla p \rangle + \mu^{-1}C_3 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &+ \mu^{-1}\{\langle D_t g', D_t g' \rangle + \langle \mathbf{f}', \mathbf{f}' \rangle\}, \end{aligned}$$

puis, en prenant μ suffisamment petit,

$$\langle \nabla p, \nabla p \rangle \leq \frac{1}{2}\mu C_4 \langle p, p \rangle + C_5 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + C_6 \mathcal{K}_2(t),$$

avec $\mathcal{K}_2(t) = \langle D_t g', D_t g' \rangle + \langle \mathbf{f}', \mathbf{f}' \rangle$ qui, ne dépend pas de ϵ et, d'après (2.21) croît comme $|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2$. En exploitant l'inégalité de Poincaré :

$$\langle p, p \rangle \leq C_7 \langle \nabla p, \nabla p \rangle,$$

μ étant arbitraire, on a alors :

$$\langle p, p \rangle \leq C_8 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + C_9 \mathcal{K}_2(t).$$

Donc, d'après (2.26), les second et troisième termes du second membre de (2.24) sont majorés par :

$$\langle g, p \rangle + \langle p, g \rangle \leq C_8 \mathcal{E}(t) + C_9 \mathcal{K}_2(t) + \mathcal{K}_1(t). \quad (2.29)$$

Il ne reste plus que les deux derniers termes de (2.24) à majorer, ce qui est immédiat, compte tenu de l'inégalité :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^* \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2,$$

valable pour tout vecteur complexe \mathbf{u}, \mathbf{v} . Cela donne simplement :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \leq \mathcal{E}(t) + \mathcal{K}_3(t), \quad (2.30)$$

où $\mathcal{K}_3(t) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{f}', \mathbf{f}' \rangle$ ne dépend pas de ϵ .

Il est maintenant possible de majorer la dérivée de l'énergie cinétique du résidu. Tenant compte de (2.25), (2.29) et (2.30), (2.24) peut se récrire (en remettant les indices r) :

$$d\mathcal{E}_r/dt \leq C\mathcal{E}_r(t) + \mathcal{K}(t), \quad (2.31)$$

où $\mathcal{K}(t)$ dépend linéairement des fonctions $\mathcal{K}_i(t), i = 1, \dots, 3$ et donc de la solution $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ du problème Lagrangien (2.19), supposé résolu. La constante C , ainsi que les $C_i, i = 1, \dots, 9$, dépendent en fait du temps par l'intermédiaire de l'intégrale volumique sur le domaine $\mathcal{D}(t)$, lui-même dépendant du temps en toute généralité. Cependant, pour tout t dans un intervalle de temps fixé $[0, T]$, il est possible de majorer toutes ces intégrales volumiques, et donc chacune de ces constantes. C'est la raison pour laquelle la dépendance explicite en temps n'a pas été indiquée. Par conséquent, C peut être considérée comme constante pour tout t dans $[0, T]$.

2.4.4 Condition suffisante d'instabilité

Il est donc possible d'intégrer (2.31) et de donner une majoration pour $\mathcal{E}_r(t)$ pour tout t dans $[0, T]$:

$$\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r \rangle \leq \int_0^t \exp\{C(t-s)\} \mathcal{K}(s) ds,$$

qui est uniforme en ϵ , i.e. ne dépend pas de ϵ . En conséquence, et même si le résidu est majoré par une fonction exponentiellement croissante, celle-ci peut-être rendue aussi petite que l'on veut sur $[0, T]$, par multiplication par ϵ . D'après (2.20) :

$$\|\mathbf{u}'\| \geq \|\mathbf{a}\| - \epsilon\{\|\mathbf{a}_\epsilon\| + \|\mathbf{u}_r\|\},$$

la croissance de $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$ ne peut être annulée sur $[0, T]$, ni par le terme d'ordre ϵ , ni par le résidu, car ϵ est arbitrairement petit. Notons que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle &= \int_{\mathcal{D}} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} |\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|^2 J(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} |\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|^2 d\mathbf{X}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

\mathcal{D}_0 étant le domaine de référence Lagrangien (et indépendant du temps) correspondant à $\mathcal{D}(t)$. $J(\mathbf{X}, t)$, le Jacobien de la transformation, est égal à 1 car le fluide est incompressible. Ceci montre que la croissance non bornée de $|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ le long de la trajectoire \mathbf{X} (au sens Lagrangien) est équivalente à celle de $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ au sens (Eulérien) de Lyapunov.

En accord avec Lebovitz & Lifschitz (1996), le développement WKB ne nécessite pas de rester uniformément valide pour tout $t > 0$, quand ϵ est fixé. Cela signifie que le développement peut devenir désordonné à partir d'un instant donné, c'est à dire qu'à ϵ fixé, l'influence des conditions limites, au travers des termes d'ordre ϵ et du résidu, ne reste pas constamment négligeable. Cependant, pour tout $t > 0$, on peut toujours trouver ϵ tel que, si le terme dominant $\|\mathbf{a}\|$ est non-borné en temps, alors la solution complète $\|\mathbf{u}'\|$ l'est également, et l'écoulement de base est instable au sens de Lyapunov.

2.4.5 Perturbation initialement localisée

A l'instant initial, la perturbation est choisie sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) = \exp\{i\phi'(\mathbf{x})/\epsilon\} \mathbf{a}'(\mathbf{x}).$$

La perturbation de pression est initialement nulle. Puisque solénoïdale, la condition initiale doit vérifier $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{a}' = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{a}' = 0$, avec $\mathbf{k}'(\mathbf{x}) = \nabla \phi'(\mathbf{x})$. L'équation

eikonale (2.13) et l'équation de transport (2.14) évoluant le long des trajectoires, il est clair que les champs initiaux vérifient :

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{k}'(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{a}'(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, 0).$$

On suppose que la solution $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ du problème Lagrangien (supposé résolu) est non-bornée (donc que l'écoulement est instable) le long de la trajectoire $\mathbf{X} = \mathbf{x}_0$, pour les conditions initiales $(\mathbf{k}_0, \mathbf{a}_0)$ données, telles que $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{a}_0 = 0$. En suivant LH91, les données initiales permettent de localiser la perturbation autour d'un petit voisinage du point \mathbf{x}_0 (dans un sens Eulérien). On la construit de la façon suivante :

$$\mathbf{a}'(\mathbf{x}) = \nabla \times \{\alpha'(\mathbf{x}) \times \mathbf{k}'(\mathbf{x})\} = \nabla \alpha'(\mathbf{x}) \times \nabla \phi'(\mathbf{x}),$$

avec

$$\begin{aligned} \phi'(\mathbf{x}) &= \mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \beta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/2\delta), \\ \alpha'(\mathbf{x}) &= \delta^{-3/2} (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{a}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \beta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/\delta), \end{aligned}$$

où β est une fonction (suffisamment régulière) de coupure vérifiant $\beta(s) = 1$ si $|s| \leq 1$ et $\beta(s) = 0$ si $s \geq 2$, et δ est un petit paramètre. Notons au risque d'être redondant que $(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{a}_0)$ sont ici supposés donnés et constants, aux sens Lagrangien et Eulérien.

Puisque $|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ est non-borné quand $t \rightarrow +\infty$, alors pour tout $N > 0$, on peut trouver T aussi grand que l'on veut et δ aussi petit que l'on veut tel que :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle / \langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle > 2N.$$

A T et δ fixés, on peut toujours choisir ϵ aussi petit que l'on veut de sorte que le terme d'ordre ϵ et le résidu sont dominés par le terme dominant, de sorte que :

$$\mathcal{E}(T)/\mathcal{E}(0) > N,$$

impliquant encore l'instabilité au sens de Lyapunov.

2.5 Cas des écoulements stationnaires

2.5.1 Ondes-courtes et modes propres

Une condition suffisante d'instabilité est donc la croissance non-bornée de $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ solution de (2.19) pour les conditions initiales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{a}_0)$ vérifiant la condition d'incompressibilité $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{a}_0 = 0$. On en déduit des conséquences immédiates pour les écoulements stationnaires. Quantitativement, le taux de croissance d'une perturbation d'onde-courte instable peut être facilement relié au spectre de l'opérateur linéaire. De plus, si l'écoulement présente un ou plusieurs points de stagnation, alors la similitude entre les équations (2.18) et (2.19) et les équations

de « Kelvin » pour les écoulements quadratiques permet de conclure aisément que *tout écoulement stationnaire présentant un point de stagnation (sauf circulaire) est linéairement instable* (LH91).

Comme l'ont mentionné LH91 (sans preuve explicite), l'existence d'une amplitude $|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ exponentiellement croissante le long de \mathbf{X} implique l'existence d'une valeur propre instable du problème spectral. De plus, le taux maximum s_0 sur toutes les trajectoires fournit une estimation de la valeur propre. En effet, tout problème stationnaire admet une perturbation de la forme :

$$[\mathbf{u}', p'](\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t}[\mathbf{u}, p](\mathbf{x}),$$

où $\sigma = s + i\omega$ est valeur propre de l'opérateur linéaire d'Euler, et $[\mathbf{u}, p]$ est le vecteur propre correspondant, normalisé tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$. D'après (2.20), sa norme $\|\mathbf{u}'\| = \exp(st)$ est bornée par :

$$\|\mathbf{a}\| - O(\epsilon) \leq \|\mathbf{u}'\| \leq \|\mathbf{a}\| + O(\epsilon).$$

Or, par hypothèse, et d'après (2.32), $\|\mathbf{a}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2} \sim \exp(s_0 t)$ quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui implique :

$$\exp\{(s - s_0)t\} \leq O(\epsilon).$$

ϵ étant arbitrairement petit, on en déduit que $s = s_0$. Friedlander & Vishik (1991) avaient déjà montré comment fournir une borne inférieure pour les valeurs propres de l'opérateur linéaire. Par contre, une croissance non-exponentielle de $|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ (algébrique par exemple) ne permet pas de conclure. Par exemple, pour les écoulements plans cisailés, elle sera liée aux modes non-normaux (voir par exemple Henningson 1995; Waleffe 1995; et même déjà Townsend 1956, dans le contexte RDT).

2.5.2 Points de stagnation et écoulements homogènes

Supposons maintenant que l'écoulement possède un point de stagnation (ou point d'arrêt) en \mathbf{x}_0 , c'est à dire tel que $\mathbf{U}(\mathbf{x}_0) = 0$. Ce point est lui-même une trajectoire de l'écoulement, vérifiant $\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{X}_0$ pour tout $t \geq 0$, et bien sûr solution de (2.17). Par conséquent, il ne reste plus qu'à résoudre (2.18) et (2.19) le long de cette trajectoire (donc en \mathbf{x}_0 fixé). Puisque cette trajectoire est fixe, tout champ Eulérien stationnaire $f(\mathbf{x})$ pris en \mathbf{x}_0 sera également stationnaire dans sa représentation Lagrangienne :

$$f(\mathbf{x}_0) = f(\chi(\mathbf{X}_0, t)) = f(\mathbf{X}_0).$$

Ceci est vrai en particulier pour le gradient Eulérien de vitesse

$$\nabla U(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{L}_0.$$

On note au passage que la deuxième égalité ci-dessus est généralement fautive en dehors des points de stagnation, sauf si le gradient de vitesse est uniforme dans tout l'espace. C'est à dire qu'en général : $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{X}, t)$ est dépendant du temps dans sa représentation Lagrangienne, même pour un écoulement stationnaire.

Ceci étant dit, le problème aux valeurs initiales (2.18) et (2.19) se ramène simplement à :

$$d\mathbf{k}/dt = -L_0^T \mathbf{k}, \quad (2.33)$$

$$d\mathbf{a}/dt = (2\mathbf{k}\mathbf{k}^T/|\mathbf{k}|^2 - \mathbf{I})L_0\mathbf{a}, \quad (2.34)$$

qui peut-être résolu pour tout type de point de stagnation.

En effet, le problème ci-dessus est formellement identique aux équations de Kelvin (1887) bien connues dans la théorie de la distorsion rapide (RDT) d'une turbulence homogène isotrope (Townsend 1956; Cambon 1982; Cambon *et al.* 1985) — équations (1) et (2) dans la revue de Savill (1987) —, ainsi qu'en stabilité linéaire pour les écoulements à gradient constant (Lagnado *et al.* 1984; Craik & Criminale 1986; Bayly 1986; Waleffe 1990).

Le lien entre ces deux approches et la théorie d'optique géométrique est direct, en ce qui concerne les points de stagnation. Il est facile de vérifier qu'au voisinage de \mathbf{x}_0 , le gradient Eulérien de vitesse est constant au premier ordre

$$\begin{aligned} \nabla U(\mathbf{x}) &= L(\mathbf{x}_0) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \\ &= L_0 + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|), \end{aligned}$$

et que le champ de vitesse est localement linéaire :

$$U(\mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2),$$

avec $\text{tr}(L_0) = 0$ pour vérifier l'incompressibilité. Si on suppose maintenant que L_0 est *homogène* (constant) dans tout l'espace, alors on peut montrer en toute généralité qu'on peut rechercher la perturbation sous la forme (Kelvin 1887; Townsend 1956) :

$$[\mathbf{u}', p'](\mathbf{x}, t) = \exp\{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}\}[\mathbf{u}, p](t).$$

Le problème linéaire se ramène alors à un problème aux valeurs initiales composé d'équations formellement identiques à (2.33) et (2.34), à ceci près qu'elles sont valables dans tout l'espace, et plus seulement en \mathbf{x}_0 . Ce sont les équations de Kelvin. Pour conclure sur les liens entre ces différentes approches, on remarque que pour un écoulement à gradient constant, la phase peut être choisie telle que

$$\phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon = \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x},$$

car l'absence d'échelle spatiale ne nécessite plus de choisir ϵ petit. Ces observations sont cohérentes avec le concept fondamental de la méthode d'optique

géométrique, qui est que ces perturbations de type onde-courte ne dépendent que des propriétés locales de l'écoulement.

Puisque que des solutions non-bornées de (2.34) sont connues pour tous les types d'écoulement à gradient constant, alors par analogie, tout écoulement stationnaire possédant un point de stagnation est instable. Dans un fluide incompressible, les points de stagnation sont soit tridimensionnels (hyperboliques), soit plans (hyperboliques, elliptiques ou parallèles). Les premiers ne seront pas discutés ici (Batchelor & Proudman 1954; Townsend 1956; Cambon 1982; Craik & Criminale 1986), alors que les seconds sont l'objet de la section suivante (voir aussi Leblanc 1997), avec un paramètre supplémentaire qui peut amortir ces instabilités : la force de Coriolis.

2.6 Points de stagnation en repère tournant

2.6.1 Discriminant généralisé

Le problème est exprimé en coordonnées Cartésiennes par clarté, et le formalisme est proche de celui de papiers récents (Bayly *et al.* 1996; Lebovitz & Lifschitz 1996). Dans un repère tournant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$, soit $\mathbf{U}(x, y)$ le champ de vitesse (relative) d'un écoulement de base stationnaire et *bidimensionnel*, de vorticité (relative) $\mathbf{W}(x, y) = W(x, y)\mathbf{e}_z$. Comme précedemment, une perturbation localisée *tridimensionnelle*

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}', \pi'](\mathbf{x}, t) &= \exp\{i\phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon\}[\mathbf{a}, \pi](\mathbf{x}, t) \\ &+ \epsilon \exp\{i\phi(\mathbf{x}, t)/\epsilon\}[\mathbf{a}_\epsilon, \pi_\epsilon](\mathbf{x}, t) + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.35)$$

est superposée à l'écoulement de base. La phase $\phi(\mathbf{x}, t)$ est une fonction à valeur réelle, et ϵ est un petit paramètre. L'amplitude $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ est complexe. La substitution dans les équations d'Euler incompressibles linéarisées (voir LC97 en annexe)

$$D_t \mathbf{u}' + \mathbf{S} \mathbf{u}' + \frac{1}{2} \mathbf{W}_t \times \mathbf{u}' = -\nabla \pi', \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0,$$

où $D_t = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ et $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{U}$, conduit à deux équations contenant des termes d'ordres différents en ϵ . En égalant les termes de même ordre, on obtient :

$$D_t \phi = 0, \quad \pi = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ vérifie l'équation eikonale

$$D_t \mathbf{k} = -\mathbf{L}^T \mathbf{k}.$$

Introduisant $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, les projections de $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ sur le plan (x, y) , et soient $k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z$ et $w(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z$ leur composante transverse,

les équations linéarisées s'écrivent maintenant (Bayly *et al.* 1996; Lebovitz & Lifschitz 1996):

$$\begin{aligned} D_t \boldsymbol{\alpha} &= -\mathbf{N}^T \boldsymbol{\alpha}, \\ D_t k &= 0, \\ D_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T / |\mathbf{k}|^2 (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \mathbf{v}, \\ D_t w &= k \boldsymbol{\alpha}^T / |\mathbf{k}|^2 (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

où $\mathbf{N}(x, y)$ est la projection de \mathbf{L} sur (x, y) et

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{N} + \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

\mathbf{M} et \mathbf{C} sont respectivement les tenseurs « inertiels » et de « Coriolis » de l'écoulement de base (LC97). Les deux valeurs propres de \mathbf{M} sont solutions de $\lambda^2 + \Phi = 0$. $\Phi = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{M}^2 = -\frac{1}{2} M_{ij} M_{ji}$ est le second invariant du tenseur inertiel. Il peut être récrit :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= -\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4} \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t \\ &= (\Psi_{xx} - 2\Omega)(\Psi_{yy} - 2\Omega) - (\Psi_{xy})^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $\Psi(x, y)$ est la fonction de courant de base, et les indices dénotent des dérivées partielles. Les valeurs propres sont réelles et positives aux points (x, y) où $\Phi(x, y) < 0$, et imaginaires pures sinon.

2.6.2 Les modes sans-pression

Pour un vecteur d'onde purement *transverse* $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) = 0$, on peut vérifier que $\phi = \phi(z)$ et $k = d\phi/dz$, alors que $w = 0$ de façon à assurer $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0$. Le système Eulérien (2.36) se réduit alors à l'équation « sans-pression » :

$$D_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

qui évolue localement le long des trajectoires (ou lignes de courant car stationnaire) de l'écoulement de base. Soit $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ la position d'une particule fluide initialement située en $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$. En utilisant une description Lagrangienne, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)/dt &= \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \\ d\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)/dt + \mathbf{M}(\mathbf{X}, t) \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Rappelons que $\mathbf{M}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{x})$ est généralement dépendant du temps en représentation Lagrangienne. (2.39) forme un système d'équations différentielles ordinaires en temps, qui peut être résolu séquentiellement avec des conditions

initiales appropriées. En accord avec la théorie d'optique géométrique (LH91), l'instabilité au sens Lagrangien se produit si l'amplitude $|\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)|$ croît sans borne quand $t \rightarrow +\infty$. De plus, l'instabilité au sens Lagrangien implique l'instabilité en description Eulérienne.

Pour un vecteur d'onde transverse, $\alpha = 0$, l'ordre suivant du développement WKB (2.35) s'écrit :

$$\mathbf{v}_\epsilon = 0, \quad w_\epsilon = ik^{-1} \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \pi_\epsilon = 0.$$

De plus, puisque le problème est indépendant de z , k peut-être choisi constant et $\phi(z) = kz$, de sorte que ce type de perturbation onde-courte correspond aux modes sans-pression (Bayly 1988; LC97).

2.6.3 Rôle des points de stagnation

Généralement, on ne peut rien conclure de (2.39). Par exemple, si les lignes de courant sont fermées, $\mathbf{M}(\mathbf{X}, t)$ sera périodique en temps, et une analyse de Floquet est nécessaire, comme l'a fait Bayly (1988). Cependant, si l'écoulement de base possède un *point de stagnation* $\mathbf{U}(\mathbf{x}_0) = 0$ en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, alors :

$$\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{X}_0, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{M}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0),$$

et d'après (2.39), $|\mathbf{v}(\mathbf{X}_0, t)|$ va croître exponentiellement au taux $\sqrt{-\Phi(\mathbf{x}_0)}$, si le discriminant (2.38) vérifie :

$$\Phi(\mathbf{x}_0) < 0. \quad (2.40)$$

En effet, au point de stagnation,

$$\Phi(\mathbf{X}_0) = -\frac{1}{2} \mathbf{M}(\mathbf{X}_0) : \mathbf{M}(\mathbf{X}_0) = -\frac{1}{2} \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) = \Phi(\mathbf{x}_0)$$

ne dépend pas du temps dans sa représentation Lagrangienne. Ceci est bien sûr une condition *suffisante* d'instabilité pour les modes sans-pression.

Selon la nature des points de stagnation, les bandes d'instabilité sont représentées schématiquement sur la figure 4 de LC97 (voir aussi le chapitre suivant) : elles sont centrées autour du cas de *vorticité de tilt nulle* :

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) + 4\Omega = 0,$$

pour lequel $\Phi(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}$ est toujours négatif, et *l'écoulement est toujours instable, quelle que soit la nature du point de stagnation* (sauf si les lignes de courant sont circulaires au voisinage du point de stagnation). De plus, la force de Coriolis modifie la nature de l'instabilité : dans le cas elliptique, l'analyse de Floquet n'est plus nécessaire pour des taux de rotation vérifiant (2.40), parce que l'instabilité se produit pour des vecteurs d'onde purement transverses, qui ne dépendent pas du temps (le Lecteur intéressé pourra se référer à la section V

de LC97). Ceci avait déjà été observé dans le cas uniforme (écoulement elliptique infini) par Craik (1989), Cambon *et al.* (1994) puis par Bayly *et al.* (1996) et Lebovitz & Lifschitz (1996).

Le cas *non-tournant* est facilement obtenu en prenant $\Omega = 0$, $\mathbf{W}_t = \mathbf{W}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{N}$. Dans ce cas, notre condition est équivalente à dire que l'écoulement est instable s'il contient un point de stagnation de type hyperbolique ($\Phi < 0$), mais ne permet pas de conclure pour un point de stagnation de type elliptique ($\Phi > 0$), puisque Φ ne contient pas d'information sur la pression, venant du vecteur d'onde oblique (et dépendant du temps), nécessaire à l'instabilité elliptique (Pierrehumbert 1986; Bayly 1986). Notre condition est donc plus faible que la condition de LH91 sur l'instabilité des écoulements stationnaires dans un repère fixe en présence d'un point de stagnation.

En repère tournant cependant, la conclusion n'est pas directe. Ainsi, un point de stagnation elliptique (dans le cœur d'un tourbillon par exemple) est stabilisé par la rotation à *vorticité absolue nulle* (Craik 1989; Cambon *et al.* 1994; Bayly *et al.* 1996; Lebovitz & Lifschitz 1996):

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) + 2\Omega = 0.$$

En effet, en introduisant l'amplitude de vorticité de l'ordre dominant (Lifschitz 1994) $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, on peut vérifier que, dans un repère tournant, elle est régie par :

$$D_t \mathbf{b} = (\mathbf{L}^T - \mathbf{C})\mathbf{b} + \{(\mathbf{W} + 2\Omega) \times \mathbf{k}\} \times \mathbf{a},$$

pour *tout* vecteur d'onde $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$. Donc, en un point de stagnation

$$\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{X}_0$$

à vorticité absolue nulle, \mathbf{b} vérifie en représentation Lagrangienne :

$$d\mathbf{b}(\mathbf{X}_0, t)/dt = \mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\mathbf{b}(\mathbf{X}_0, t), \quad (2.41)$$

puisque, à vorticité absolue nulle,

$$\mathbf{L}^T - \mathbf{C} = \mathbf{S} - (\mathbf{A} + \mathbf{C}) = \mathbf{S} + \mathbf{A} = \mathbf{L},$$

où $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$. La solution de (2.41) est donnée par la formule de Cauchy (voir par exemple Saffman 1992). L'instabilité (ou non), en norme de vorticité (Lifschitz 1994), dépend donc de la nature du point de stagnation. Ainsi *les points de stagnation de type circulaire, elliptique ou cisaillement pur sont exponentiellement stables aux perturbations d'onde-courte à vorticité absolue nulle, alors que le cas hyperbolique est instable.*

Notons pour conclure que ces résultats sont des extensions naturelles à des écoulements non-homogènes (dont le gradient de vitesse n'est pas spatialement constant) des résultats obtenus précédemment dans le contexte de la RDT d'une turbulence homogène en rotation (Cambon 1982; Cambon *et al.* 1985, 1994).

2.6.4 Stabilité du dipôle de Chaplygin

Avant d'appliquer ces résultats à la stabilité des tourbillons de Stuart sous l'influence de la force de Coriolis, des conséquences immédiates peuvent être déduites pour le dipôle de Chaplygin. Au début du siècle, Chaplygin a découvert diverses solutions non-visqueuses de structures tourbillonnaires bidimensionnelles, qui ont échappé à l'attention des Chercheurs qui ont suivi dans ce domaine. Une revue a été établie récemment par Meleshko & van Heijst (1994). Parmi celles-ci, Chaplygin a découvert un tourbillon dipolaire asymétrique de rayon a se déplaçant le long d'un chemin circulaire. Dans un repère tournant uniformément à la vitesse angulaire $-\kappa/a^2$, le dipôle est stationnaire, et sa fonction de courant sous forme dimensionnelle est donnée par l'équation (4.3) de Meleshko & van Heijst (1994). En variables adimensionnées $r \rightarrow ar$, $\kappa \rightarrow av\kappa$, $\lambda \rightarrow av\lambda$ et $\Psi \rightarrow av\Psi$, la fonction de courant s'écrit :

$$\Psi(r, \theta) = \begin{cases} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta + \kappa \log r - \frac{\kappa}{2}(r^2 - 1), & r \geq 1, \\ 2 \frac{J_1(br)}{bJ_0(b)} \sin \theta + \lambda \left(1 - \frac{J_0(br)}{J_0(b)} \right), & r \leq 1. \end{cases}$$

J_0 et J_1 sont les fonctions standard de Bessel, et $b = 3.8317$ est tel que $J_1(b) = 0$. L'écoulement dépend de deux paramètres adimensionnels : $\lambda \geq 0$ est une mesure de l'asymétrie du dipôle dans l'écoulement intérieur, alors que $\kappa \geq 0$ est une mesure de la vitesse angulaire du dipôle : dans un repère fixe (inertiel ou encore absolu), il tourne à la vitesse angulaire adimensionnelle $-\kappa$. A la frontière $r = 1$, la vorticité est discontinue sauf si $\lambda = -2\kappa/b^2$, correspondant au « modon » de Flierl, Stern & Whitehead (1983). Les lignes de courant sont tracées sur la figure 2.1 pour différentes valeurs de λ et κ .

L'écoulement possède deux points de stagnation de type hyperbolique situés sur la frontière en $r_0 = 1$ et $\theta_0 = 0, \pi$, et deux points de stagnation elliptiques sur l'axe $\theta_0 = \pm\pi/2$, pour lesquels la position exacte r_0 nécessite une approche numérique. Cependant, les points hyperboliques suffisent à conclure. En coordonnées curvilignes, le problème nécessite un tenseur de courbure additionnel (LH91 ; LC97). Le tenseur inertiel (2.37) s'écrit maintenant :

$$\mathbf{M}(r, \theta) = \mathbf{N} + \mathbf{C} + \mathbf{C}', \quad \mathbf{C}'(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & -V/r \\ V/r & 0 \end{pmatrix},$$

et le discriminant (2.38) est :

$$\Phi(r, \theta) = \left(2\Omega + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right) \left(2\Omega + \frac{2V}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2,$$

avec $U = r^{-1} \partial \Psi / \partial \theta$ et $V = -\partial \Psi / \partial r$.

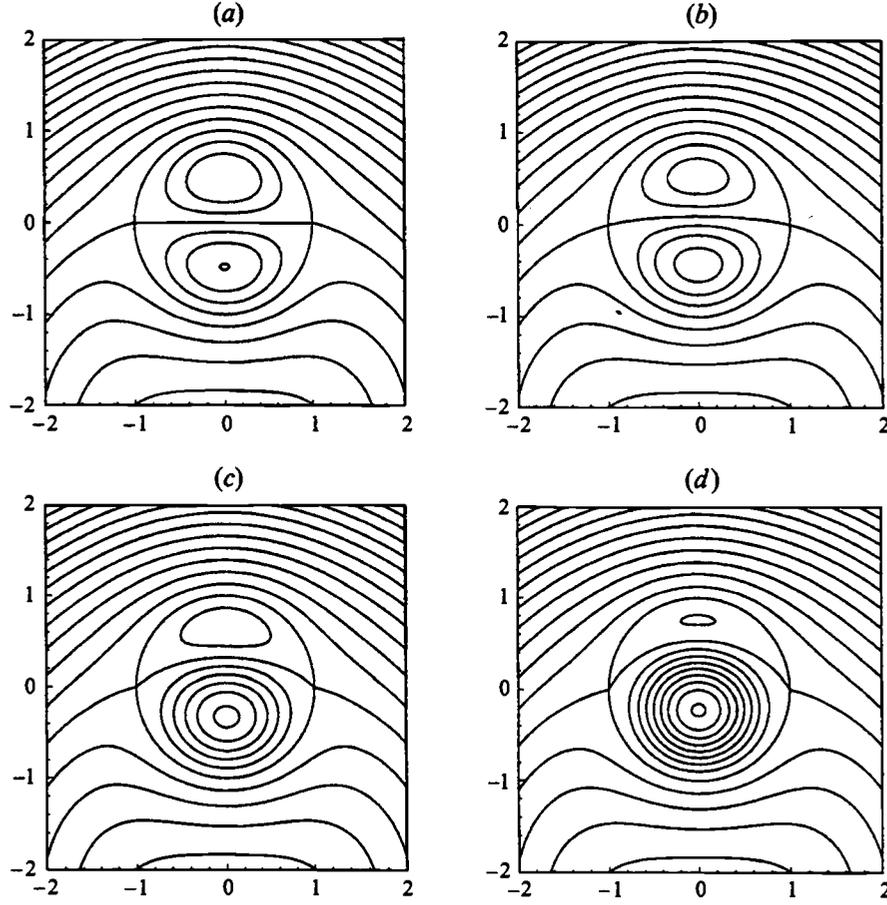


FIG. 2.1 – Lignes de courant du dipôle de Chaplygin se déplaçant le long d'un chemin circulaire pour $\kappa = -0.5$. (a) $\lambda = 0$; (b) $\lambda = 0.06811$; (c) $\lambda = 0.25$; (d) $\lambda = 0.5$. Le cas (b) correspond au modon de Flierl, Stern & Whitehead (d'après Meleshko & van Heijst 1994).

Le repère relatif (dans lequel le dipôle de Chaplygin est stationnaire) tourne à la vitesse angulaire adimensionnelle $\Omega = -\kappa$, et donc, aux points de stagnation hyperboliques $r_0 = 1$, $\theta_0 = 0, \pi$,

$$\Phi_E(r_0, \theta_0) = -4, \quad \Phi_I(r_0, \theta_0) = -4 + 2\kappa(2\kappa + \lambda b^2).$$

Les indices indiquent respectivement les solutions extérieures et intérieures. La discontinuité de Φ aux points de stagnation est due à la discontinuité de la distribution de vorticité à la frontière. Sans plus de considérations, *le dipôle de Chaplygin est instable aux perturbations tridimensionnelles*, puisque il est possible de construire une condition initiale localisée, de sorte que l'instabilité se produira dans l'écoulement extérieur. La discontinuité de Φ disparaît quand $\lambda = -2\kappa/b^2$, et *le modon de Flierl, Stern & Whitehead est instable également*.

En fait, cette conclusion aurait pu être faite sans calcul puisque dans le repère fixe, l'écoulement extérieur est irrotationnel, de sorte que dans le repère tournant avec le dipôle, l'écoulement extérieur est à vorticité absolue nulle, pour laquelle, tout point de stagnation hyperbolique est instable.

2.7 Conclusion

La théorie de Lifschitz & Hameiri (1991) a été présentée en détail. Elle consiste en l'étude de perturbations, initialement localisées et de courte longueur d'onde, qui évoluent le long des trajectoires de l'écoulement de base. Le problème de stabilité linéaire peut alors être ramené à un système d'équations différentielles ordinaires en utilisant une représentation Lagrangienne. L'équation eikonale pour le vecteur d'onde $\mathbf{k}(\mathbf{X}, t)$ et l'équation de transport pour l'amplitude $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ peuvent être intégrées moyennant la connaissance des trajectoires de l'écoulement de base, et une condition suffisante d'instabilité est la croissance non-bornée de $|\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)|$ le long d'une trajectoire \mathbf{X} .

Quand celle-ci est un point de stagnation d'un écoulement stationnaire, le système d'équations est formellement identique aux équations de Kelvin obtenues à la fois par l'étude de la stabilité et par la théorie de la distorsion rapide des écoulements spatialement homogènes (à gradient de vitesse uniforme). En repère fixe, celles-ci sont connues pour présenter des solutions exponentiellement croissantes (sauf dans le cas du cisaillement pur qui conduit à une croissance algébrique) : ce sont les instabilités hyperboliques et elliptiques. Par analogie, la méthode d'optique géométrique permet de conclure que tout écoulement stationnaire en repère fixe présentant un point de stagnation (sauf circulaire) est instable. De même, par analogie, la force de Coriolis tue l'instabilité elliptique dans le cœur d'un tourbillon à vorticité absolue nulle, et un critère de stabilité pour les points de stagnation en repère tournant peut être dérivé.

Cette théorie ne concerne cependant que les écoulements non-visqueux. Il est clair que la viscosité va jouer un rôle important sur ces instabilités de courte échelle, puisqu'il est physiquement raisonnable de supposer qu'à l'échelle de Kolmogorov, les perturbations d'onde-courte seront tuées. Lifschitz (1991) a proposé une extension de la théorie aux perturbations visqueuses (à condition que l'écoulement de base visqueux tendent asymptotiquement vers un écoulement non-visqueux). Sans entrer dans les détails, la viscosité peut être facilement prise en compte dans l'équation d'amplitude si le nombre de Reynolds est tel que :

$$\nu = \epsilon^2,$$

où ϵ est le petit paramètre du développement WKB, et ν la viscosité cinématique (adimensionnelle). Il est alors clair qu'à nombre de Reynolds fixé (même grand), on ne peut pas choisir ϵ aussi petit que l'on veut pour rendre le développement uniformément valide, et la théorie n'est plus valable. Par contre, si l'on souhaite

regarder la stabilité d'un écoulement lorsque $\nu \rightarrow 0^+$, alors la théorie peut donner des informations. Rappelons qu'il n'y a aucune raison pour que les caractéristiques non-visqueuses et visqueuses de stabilité d'un écoulement donné soient identiques quand $\nu \rightarrow 0^+$, car cette limite est singulière dans les équations de Navier–Stokes, de même qu'elle l'est dans les opérateurs linéarisés (celui d'Orr–Sommerfeld par exemple, voir Drazin & Reid 1981).

On peut alors montrer que dans un écoulement stationnaire, lorsque $\nu \rightarrow 0^+$, une instabilité d'onde-courte non-visqueuse, exponentiellement croissante au taux s_0 le long de la trajectoire \mathbf{X} , ne sera pas tuée par la viscosité si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int |\mathbf{k}(\mathbf{X}, t)|^2 dt < s_0,$$

signifiant qu'une croissance trop rapide du vecteur d'onde, solution de l'équation eikonale, tue les instabilités d'onde-courte. Par conséquent, les modes sans-pression persisteront en présence de viscosité, car leur vecteur d'onde est constant $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$. Les conditions de stabilité sur les points de stagnation restent donc valables dans la limite d'une viscosité infiniment petite, de même que le sont toutes celles revues par LC97.

Même si la théorie n'est plus valable à nombre de Reynolds fini, celle-ci peut donner des informations qualitatives sur la nature des instabilités. En présence de viscosité, le taux de croissance non-visqueux s_0 sera corrigé par $s_0 - \nu k^2$, et une coupure visqueuse se produit au-delà d'un certain nombre d'onde, de l'ordre de :

$$k_c \sim \sqrt{1/\nu}.$$

La viscosité va donc permettre de *sélectionner* un nombre d'onde transverse correspondant à un taux de croissance maximum, pour lequel l'instabilité apparaîtra. Celui-ci sera d'autant plus grand que la viscosité sera faible, en accord avec l'idée que plus le Reynolds est élevé, et plus les échelles des instabilités sont petites. Rappelons que l'absence de viscosité ne permet pas de sélectionner un nombre d'onde transverse pour les instabilités décrites dans le travail présent.

Il faut bien comprendre que ces instabilités d'onde-courte non-visqueuses donnent *seulement* une indication qualitative sur leurs contreparties visqueuses, mais permettent aucunement de déterminer des nombres de Reynolds critiques. Des simulations numériques directes ont été effectuées afin d'étudier la validité du critère de stabilité dérivé précédemment pour les points de stagnation en repère tournant. Des cellules de Taylor–Green bidimensionnelles d'aspect carré ou rectangulaire sont perturbées tridimensionnellement et soumises à rotation (voir en annexe, Leblanc & Godefert 1997). A nombre de Reynolds modéré ($Re = 1/\nu = 400$), les résultats sont en bon accord avec les prédictions de l'optique géométrique, en ce qui concerne les bandes d'instabilité. Par contre, les taux de croissance des perturbations dans les simulations diffèrent des taux de croissance non-visqueux donnés par la théorie.

Chapitre 3

TOURBILLONS DE STUART

Une étude détaillée des effets de la force de Coriolis sur les instabilités linéaires tridimensionnelles des tourbillons de Stuart est proposée. Cette solution exacte non-visqueuse décrit une allée de tourbillons corotatifs plongée dans un écoulement cisailé. Quand l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de l'écoulement de base, l'analyse de stabilité consiste en un problème aux valeurs propres pour les versions non-parallèles des équations couplées d'Orr-Sommerfeld et de Squire, résolues numériquement par une méthode spectrale. La force de Coriolis agit sur les instabilités comme un accordeur (« tuner »), en comparaison avec le cas non-tournant. Une faible rotation anticyclonique est déstabilisante : les modes de Floquet tridimensionnels sont promus, et à grand nombre d'onde transverse, leur comportement est prédit par une analyse sans-pression (« pressureless »). Cette dernière analyse, qui a été extensivement discutée pour des écoulements simples dans LC97 (voir annexe), est également applicable à la présente étude. Le mécanisme d'instabilité à onde-courte est une compétition entre les instabilités générées par les cœurs (« cores ») des tourbillons, et celles des points de stagnation hyperboliques dans les « braids » (tresses en français mais nous utiliserons le mot anglais), en accord avec les prédictions de la théorie de stabilité d'optique géométrique. Par contre, une rotation cyclonique ou plus fortement anticyclonique tue les instabilités tridimensionnelles par un effet de coupure des nombres d'onde transverses. Sous l'effet d'une rotation rapide, les tourbillons de Stuart sont stabilisés, alors que des ondes d'inertie se propagent.

3.1 Introduction

La présente étude tente d'apporter quelques éléments de réponse aux différentes questions soulevées dans le premier chapitre de la thèse, dans le cadre de la stabilité linéaire des tourbillons de Stuart, qui peut être vu comme un modèle de couche de mélange avec des yeux de chat (« cat's eyes ») de Kelvin, ou encore comme des tourbillons corotatifs plongés dans un écoulement cisailé. La solution

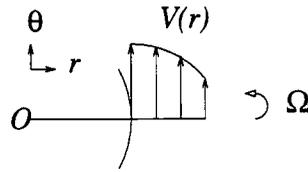


FIG. 3.1 – Écoulement plan à lignes de courant circulaires.

exacte non-visqueuse de Stuart possède des points de stagnation avec des lignes de courant localement elliptiques (dans les cœurs) ou hyperboliques (dans les braids). Dans un repère fixe, la stabilité bi- et tridimensionnelle des tourbillons de Stuart a été explorée par Pierrehumbert & Widnall (1982) et Klaassen & Peltier (1989, 1991).

Dans un repère tournant, Smyth & Peltier (SP94), ont examiné l'influence de la force de Coriolis sur les instabilités tridimensionnelles visqueuses des tourbillons bidimensionnels de Kelvin–Helmholtz, obtenus par des simulations numériques. Trois types de modes ont été mis en évidence dans leurs travaux : les modes de cœur (« core »), localisés au centre des rouleaux de Kelvin–Helmholtz ; les modes de « braid », localisés dans les régions hyperboliques séparant les rouleaux, sous forme de tourbillons longitudinaux contrarotatifs (« ribs ») ; et les modes de couronne (« edge »), localisés autour d'une ligne de courant fermée dans les rouleaux de Kelvin–Helmholtz, et existant seulement pour certains taux de rotation. Leurs liens avec la présente étude seront discutés.

Après une revue rapide des mécanismes non-visqueux d'instabilité dans les fluides en rotation, le reste de ce chapitre est organisé comme suit : une description des tourbillons de Stuart est rappelée, ainsi que les équations principales. Le problème linéaire est constitué des versions non-parallèles des équations d'Orr–Sommerfeld et de Squire, et une analyse de Floquet (par rapport à la direction longitudinale) est effectuée. Le problème aux valeurs propres résultant est résolu par une méthode spectrale de collocation. D'un point de vue physique, nous décrirons les principales tendances de la force de Coriolis, puis mettrons en évidence le rôle des points de stagnation hyperboliques et elliptiques. Les calculs spectraux seront comparés aux prédictions de l'optique géométrique. Finalement, nous discuterons les effets d'une rotation rapide et la propagation d'ondes d'inertie. Ce chapitre a été mis sous forme d'article (Leblanc & Cambon 1998).

3.2 Mécanismes de base

3.2.1 Critères classiques

Rappelons tout d'abord que tous les mécanismes d'instabilité décrits ici sont *tridimensionnels* car les perturbations bidimensionnelles ne sont pas affectées par la rotation du repère. Afin d'expliquer le rôle de la force de Coriolis sur les

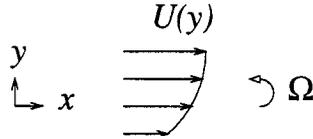


FIG. 3.2 – Écoulement cisailé à lignes de courant parallèles.

tourbillons circulaires, Kloosterziel (1990) a étendu le critère classique de Rayleigh pour les instabilités centrifuges, aux fluides en rotation (voir aussi Kloosterziel & van Heijst 1991 ; Mutabazi *et al.* 1992). Ce critère de Rayleigh « généralisé » établi que *l'écoulement est instable si*

$$2(\Omega + V/r)(W + 2\Omega) < 0 \text{ quelque part,}$$

où $\mathbf{U}(r, \theta) = V(r)\mathbf{e}_\theta$ est la vitesse de base en coordonnées cylindriques (voir figure 3.1), et $W(r) = r^{-1}d(rV)/dr$ est la vorticité relative de base. Notons que ce critère revient à dire que *l'écoulement est instable si le carré de la circulation absolue décroît quelque part* (LC97). En accord avec ce critère, les effets stabilisants ou déstabilisants de la force de Coriolis sur un tourbillon circulaire monopolaire sont clairement illustrés par Carnevale *et al.* (1997) avec le tourbillon de Lamb (Lamb 1932 ; Hopfinger & van Heijst 1993) caractérisé par une distribution de vorticité d'un seul signe $W(r) = -W_0 \exp(-r^2/2\delta^2)$ avec W_0 et δ positifs sans perdre de généralité. D'après le critère de Rayleigh généralisé, l'instabilité se produit quand $0 < 2\Omega < W_0$. Ainsi, *une faible rotation anticyclonique est déstabilisante*, alors que les autres taux de rotation (cycloniques ou plus fortement anticycloniques) sont stabilisants. Cette tendance a été également observée pour un tourbillon isolé monopolaire (de circulation totale nulle) entouré d'une couronne de vorticité de signe opposé, à ceci près que la bande d'instabilité peut inclure également le cas non-tournant et les faibles rotations cycloniques (Kloosterziel 1990 ; Hopfinger & van Heijst 1993). Des mécanismes identiques sont observés dans les écoulements cisailés soumis à une courbure additionnelle (force centrifuge), et une revue de l'influence de la rotation sur l'instabilité de G rtler peut être trouvée dans Bottaro, Klingmann & Zebib (1996). Ce critère a également été évoqué par SP94 pour expliquer l'apparence d'un mode de couronne (« edge mode ») qui déstabilise l'allee de rouleaux de Kelvin-Helmholtz, pour des faibles rotations anticycloniques.

Cette discussion préliminaire fournit un premier élément de réponse à la seconde question posée dans le premier chapitre, et que l'on peut reformuler de la manière suivante : *pourquoi n'observe-t-on jamais l'émergence d'anticyclones forts ?* La réponse pourrait être : *parce qu'ils sont instables*. En effet, par exemple, dans un fluide en rotation à une vitesse angulaire donnée (disons Ω positive), un tourbillon de Lamb tel que $W_0 > 2\Omega$ sera linéairement instable, alors que si $W_0 \leq \Omega$, il pourra être éventuellement linéairement stable. Bien entendu, la première possibilité correspond à un anticyclone fort (vorticité négative, rotation

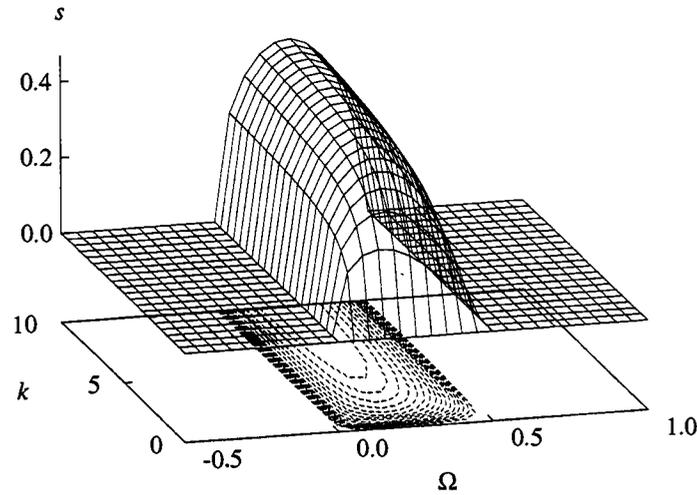


FIG. 3.3 – Taux de croissance des modes propres avec $\alpha = 0$ pour la couche de mélange $U(y) = \tanh(y)$.

positive, et $|W_0| > |2\Omega|$). Le second cas correspond aux faibles anticyclones et aux cyclones (faibles ou forts). Bien sûr, ceci n'est pas nouveau (Kloosterziel 1990; Kloosterziel & van Heijst 1991; SP94; Carnevale *et al.* 1996), mais cela illustre bien l'équivalence entre les propositions suivantes: *les anticyclones forts sont instables et une faible rotation anticyclonique est déstabilisante.*

Exactement les mêmes tendances sont observées pour les écoulements cisailés à lignes de courant parallèles (figure 3.2), c'est à dire $\mathbf{U}(x, y) = U(y)\mathbf{e}_x$, pour lesquels le critère classique de « Pedley » (ou « Bradshaw–Richardson–Tritton ») est appliqué. Dérivé rigoureusement par Pedley (1969), il établit que *l'écoulement est instable si*

$$2\Omega(W + 2\Omega) < 0 \text{ quelque part,}$$

(avec $W(y) = -dU/dy$ la vorticité de base) montrant clairement qu'une couche cisailée de vorticité de signe constant comme la couche de mélange en tangente hyperbolique, dont la vorticité est $W(y) = -W_0/\cosh^2(y/\delta)$ (W_0 et δ positifs), est instable quand $0 < 2\Omega < W_0$ (Yanase *et al.* 1993). Ceci est illustré sur la figure 3.3. Ce critère est très similaire au critère de Rayleigh généralisé, à l'exception du terme de courbure V/r .

Pour ces deux classes d'écoulement à topologie simple, et en s'inspirant des travaux de Bayly (1988), certaines valeurs propres du spectre de l'opérateur linéaire peuvent être approchées analytiquement (LC97) en ramenant le problème aux valeurs propres de type Sturm–Liouville à l'équation de « l'oscillateur quantique harmonique » (Bender & Orszag 1978), dont les modes propres sont connus analytiquement, et localisés le long des lignes de courant instables.

Un autre critère exact d'instabilité a été dérivé pour la classe des écoulements

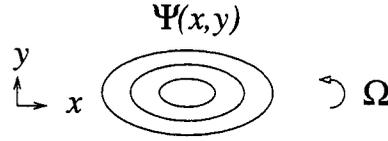


FIG. 3.4 – Écoulement quadratique à lignes de courant elliptiques.

quadratiques plans soumis à la force de Coriolis (Craik 1989; Cambon *et al.* 1994). Cette classe de solutions inclut le tourbillon elliptique non-borné (figure 3.4), l'écoulement hyperbolique et le cisaillement infini de type Couette (cisaillement pur). Ils sont caractérisés par deux paramètres : la vorticité W et le taux d'étirement D qui sont tous deux uniformes dans le domaine fluide (avec W et D ici positifs). Et *l'écoulement est instable si*

$$-\frac{1}{2}W - D < 2\Omega < -\frac{1}{2}W + D.$$

Ceci est bien sûr une condition suffisante d'instabilité, puisque la célèbre « instabilité elliptique » existe également en repère fixe (Pierrehumbert 1986; Bayly 1986; Waleffe 1989, 1990), mais est tuée à « vorticité absolue nulle » $W + 2\Omega = 0$ (Craik 1989; Cambon *et al.* 1994; Bayly *et al.* 1996; Lebovitz & Lifschitz 1996).

3.2.2 Modes sans-pression et points de stagnation

Ces trois critères de stabilité sont caractérisés par le signe du second invariant du « tenseur inertiel » et peuvent être exprimés de la façon unique suivante (LC97) : *une condition suffisante d'instabilité est que :*

$$-\frac{1}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4}\mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t < 0 \text{ quelque part,}$$

où \mathbf{W}_t et \mathbf{S} sont respectivement la « vorticité de tilt » (Cambon *et al.* 1994) et le tenseur de taux d'étirement de l'écoulement de base, exprimés en coordonnées Cartésiennes (x, y, z) (en coordonnées curvilignes, un terme de courbure intervient dans le critère). En accord avec Bayly (1988) pour l'instabilité centrifuge, LC97 ont montré que quand l'écoulement est instable selon ce critère, la classe des modes tridimensionnels « sans-pression » est excitée. Ces modes sont caractérisés par un vecteur d'onde perpendiculaire au plan de l'écoulement de base (donc aligné à l'axe de rotation $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$). Quand le problème physique possède une échelle spatiale caractéristique L , ils consistent en des modes propres de courte longueur d'onde ($k \gg L^{-1}$) fortement localisés le long des lignes de courant. Sinon, pour les écoulements quadratiques (et pas d'autre exemple n'est connu), ces modes sans-pression sont spatialement uniformes donc non-localisés dans le plan (x, y) .

La figure 3.3 est une illustration des tendances décrites ci-dessus. Elle correspond au calcul spectral de stabilité de la couche de mélange adimensionnelle $U(y) = \tanh(y)$ (la méthode numérique est décrite plus loin). La carte

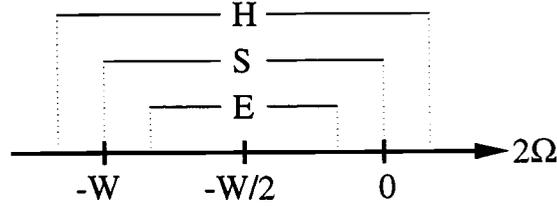


FIG. 3.5 – Bandes d'instabilité pour les écoulements quadratiques : H, hyperbolique ($D > \frac{1}{2}W$); S, cisaillement pur ($D = \frac{1}{2}W$); E, elliptique ($D < \frac{1}{2}W$).

représente le taux de croissance $s = \text{Re}(\sigma)$ du mode propre le plus instable $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} e^{i\alpha x} e^{ikz} \mathbf{v}(y)$ pour un vecteur d'onde purement transverse ($\alpha = 0$ et $k \neq 0$), en fonction du taux de rotation adimensionnel Ω . Illustrant le critère de Pedley (l'instabilité avec $\alpha = 0$ ne se produit que si $0 < 2\Omega < 1$), elle montre aussi que quand k devient grand (à Ω fixé), le taux de croissance $s = \text{Re}(\sigma)$ des modes propres tend asymptotiquement vers une valeur constante, qui est en fait prédite par la dynamique sans-pression (LC97).

On l'a vu au chapitre précédent, l'optique géométrique (LH91) pour les instabilités d'onde-courte a été utilisée pour montrer que *tout écoulement plan stationnaire non-visqueux soumis (ou non) à une force de Coriolis est instable tridimensionnellement si*

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4}\mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t < 0$$

sur un point de stagnation situé en \mathbf{x}_0 (Leblanc 1997), et qu'à vorticité absolue nulle

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) + 2\Omega = 0,$$

tout cœur de tourbillon (localement circulaire ou elliptique) et tout point de cisaillement pur (à lignes de courant localement parallèles) est exponentiellement stable (le cas du cisaillement pur conduit à une croissance algébrique, amortie par la viscosité).

A la vue de tous les résultats revus dans cette section, la stabilisation des tourbillons à vorticité absolue nulle apparaît comme une caractéristique générique des écoulements tournants. Ceci est en contradiction avec le critère heuristique proposé par Lesieur *et al.* (1991), qui prédit « *une catastrophique déstabilisation tridimensionnelle* » à vorticité absolue nulle (voir les discussions dans Cambon *et al.* 1994). Par contre, à vorticité de tilt nulle

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) + 4\Omega = 0,$$

tout point de stagnation (sauf circulaire) est instable.

3.3 L'allée de tourbillons de Stuart

3.3.1 Description

On sait que toute solution exacte bidimensionnelle des équations d'Euler décrite par la fonction de courant Ψ vérifie

$$J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = 0,$$

avec J le Jacobien, et la vorticité est constante le long des lignes de courant. Cette relation est satisfaite s'il existe une fonction arbitraire \mathcal{F} telle que $W = -\nabla^2 \Psi = \mathcal{F}(\Psi)$.

Découverte par Stuart (1967), la fonction de courant adimensionnelle

$$\Psi(x, y) = \log(\cosh y - \rho \cos x), \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (3.1)$$

est solution de l'équation de Liouville $\nabla^2 \Psi = (1 - \rho^2) \exp(-2\Psi)$. Cette solution exacte décrit une couche cisailée centrée sur l'axe x entre deux courants uniformes. En effet $U \sim \pm 1$ et $V \sim 0$ quand $y \rightarrow \pm\infty$. Si $\rho = 0$, on retrouve la couche de mélange en tangente hyperbolique avec des lignes de courant parallèles, alors que pour $\rho = 1$, (3.1) décrit une allée simple de tourbillons ponctuels, de circulation -4π , périodiquement espacés sur l'axe x (Lamb 1932). Entre les deux ($0 < \rho < 1$), la couche cisailée est caractérisée par des tourbillons bidimensionnels corotatifs dont la distribution de vorticité est régulière, et qui ressemble aux « yeux de chat » de Kelvin des couches critiques (Drazin & Reid 1981). Ils sont périodiquement espacés sur l'axe x avec la période $l_x = 2\pi$, et comme l'a montré Stuart (1967), leur circulation est aussi -4π . Pour des valeurs du paramètre de forme ρ compris entre 0.2 et 0.6, la fonction de courant de Stuart est proche des couches de mélange avec des rouleaux de Kelvin-Helmholtz, générés par l'instabilité primaire du profil parallèle en $\tanh(y)$ (Ho & Huerre 1984), même si, comme l'a mentionné Stuart (1967), le nombre d'onde longitudinal du mode propre linéaire le plus instable donné par l'analyse temporelle de Michalke (1964) est $\alpha = 0.4446$, alors que $\alpha = 1$ (le nombre d'onde des tourbillons de Stuart) donne des modes neutres. Une autre objection est que la solution de Stuart ne possède pas les braids visqueuses reliant les rouleaux de Kelvin-Helmholtz adjacents, et qui brisent la symétrie $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ de (3.1). Cependant, la solution de Stuart reste un modèle pratique pour des études analytiques.

Sa vorticité

$$W(x, y) = (\rho^2 - 1)/(\cosh y - \rho \cos x)^2$$

est partout négative. Loin de la couche cisailée, l'écoulement est irrotationnel. La vorticité des cœurs situés en $x = 2p\pi$ (p entier) est $(\rho + 1)/(\rho - 1)$; elle croît avec ρ de sorte que la circulation totale -4π est conservée. La plupart des calculs de stabilité ont été réalisés avec $\rho = 1/10$ et $\rho = 1/3$ pour lesquels la distribution de vorticité est représentée sur la figure 3.6. Les lignes de courant d'une période des

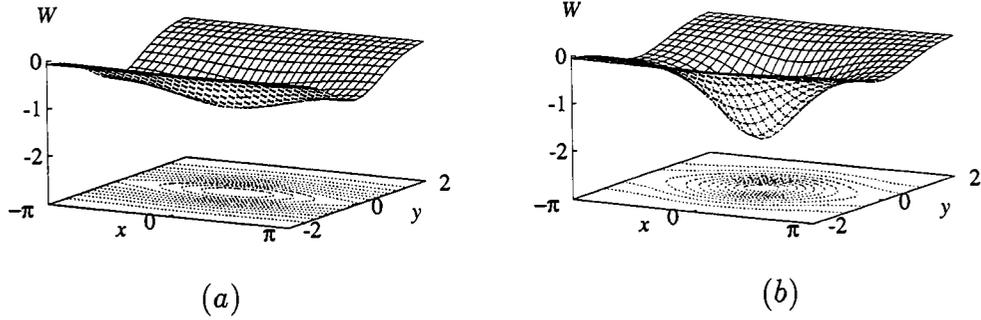


FIG. 3.6 – Distribution de vorticité et lignes de courant de la solution exacte de Stuart. (a) $\rho = 1/10$; (b) $\rho = 1/3$.

tourbillons de Stuart sur la figure 3.6 (b) est proche des trajectoires mesurées dans la « Tache Rouge » de Jupiter, qui est un tourbillon isolé dans un cisaillement (voir la figure 2 dans Marcus 1993; ou la figure 1 dans Dowling 1995). Il est clair que cette comparaison est uniquement qualitative parce que la Tache Rouge de Jupiter a une profondeur beaucoup plus petite que sa taille latérale. Cependant, puisque la force de Coriolis excite des instabilités de courte longueur d'onde, il est raisonnable de supposer qu'elles peuvent être excitées (ou tuées) dans des couches minces.

3.3.2 Points de stagnation

Au voisinage du cœur des tourbillons ($x = 2p\pi$, p entier), la fonction de courant de Stuart s'écrit

$$\Psi_E \sim \frac{1}{2}(y^2 + \rho x^2)/(1 - \rho)$$

montrant clairement que les lignes de courant sont localement *elliptiques* quand $0 < \rho < 1$, alors qu'au voisinage des points de stagnation situés dans les braids ($x = (2p + 1)\pi$, p entier), (3.1) se comporte comme

$$\Psi_H \sim \frac{1}{2}(y^2 - \rho x^2)/(1 + \rho)$$

avec des lignes de courant *hyperboliques*. En ces points de stagnation, le gradient plan de vitesse s'écrit :

$$\nabla U_{E,H} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma - \epsilon \\ \gamma - \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

avec

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \text{ et } \gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}(\rho + 1)/(\rho - 1) \text{ pour les cœurs elliptiques } (|\gamma| > |\epsilon|), \\ \frac{1}{2}(\rho - 1)/(\rho + 1) \text{ pour les régions hyperboliques } (|\gamma| < |\epsilon|). \end{cases} \quad (3.3)$$

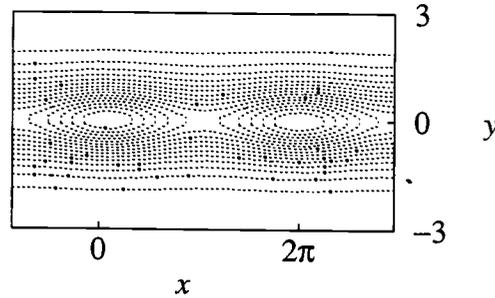


FIG. 3.7 – Lignes de courant de la solution de Stuart pour $\rho = 1/5$ montrant la zone hyperbolique entre deux cœurs elliptiques.

3.4 Formulation du problème

3.4.1 Equations du mouvement

Dans un repère tournant à la vitesse angulaire constante Ω , le mouvement relatif d'un fluide non visqueux incompressible est gouverné par les équations d'Euler et de continuité, qui s'écrivent sous forme adimensionnelle, en l'absence de toute force volumique non-conservative autre que la force de Coriolis :

$$D_t \mathbf{U} + 2\Omega \times \mathbf{U} = -\nabla \Pi, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3.4)$$

La vitesse relative $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ a été adimensionnée par une vitesse caractéristique U , le vecteur position \mathbf{x} par une échelle de longueur caractéristique L , et le temps t par L/U . Le repère tourne à la vitesse angulaire adimensionnelle Ω , qui a été aussi adimensionnée par L/U , de sorte que $|\Omega|$ peut être vu comme l'inverse d'un nombre de Rossby global. $\Pi(\mathbf{x}, t)$ est la pression modifiée adimensionnelle incluant les contributions de la force centrifuge et de toute autre force conservative appliquée au fluide.

Si le mouvement relatif de l'écoulement est purement bidimensionnel dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, disons \mathbf{e}_z , alors la force de Coriolis est conservative puisque $2\Omega \times \mathbf{U} = \nabla(2\Omega\Psi)$, où $\Psi(x, y, t)$ est la fonction de courant bidimensionnelle. Ainsi, pour un observateur se déplaçant avec le repère tournant, le mouvement du fluide n'est pas affecté par la force de Coriolis. Cette propriété est très importante car elle permet de choisir n'importe quel écoulement bidimensionnel dans le plan (x, y) comme état de base pour l'analyse de stabilité dans le repère tournant. Une autre conséquence est que la force de Coriolis agit seulement sur des perturbations tridimensionnelles, alors que des perturbations bidimensionnelles ne sont pas affectées.

3.4.2 Problème linéaire

Dans un repère Cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ tournant à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$, soit $\mathbf{U}(x, y) = (U(x, y), V(x, y), 0)$ et $\Pi(x, y)$ le mouvement relatif d'un écoulement stationnaire bidimensionnel. En superposant une perturbation tridimensionnelle $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ et $\pi'(\mathbf{x}, t)$, en substituant dans (3.4) et en négligeant les termes quadratiques, les équations linéarisées s'écrivent

$$D_t \mathbf{u}' + \mathbf{S} \mathbf{u}' + \frac{1}{2} \mathbf{W}_t \times \mathbf{u}' = -\nabla \pi', \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (3.5)$$

où $D_t = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ est la dérivée matérielle en suivant l'écoulement de base, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$ est le tenseur des taux de déformation de l'écoulement de base, et $\mathbf{W}_t = \mathbf{W} + 4\boldsymbol{\Omega}$ est la vorticité de tilt de l'écoulement de base (Cambon *et al.* 1994).

Aucun coefficient du problème linéaire ne fait intervenir de dépendance en z , il est alors possible d'effectuer une transformée de Fourier suivant z , ou de façon équivalente de chercher les perturbations sous la forme

$$[\mathbf{u}', \pi'](\mathbf{x}, t) = e^{ikz} [\mathbf{u}, \pi](x, y, t),$$

où le nombre d'onde transverse k est réel pour assurer l'homogénéité de la solution quand $z \rightarrow \pm\infty$. Sans précision supplémentaire sur l'écoulement de base et les conditions aux limites, on ne peut rien dire sur $[\mathbf{u}, \pi](x, y, t)$. (3.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} &= -\nabla \pi, \\ D_t w &= -ik\pi, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + ikw &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\mathbf{v}(x, y, t)$ est la projection de $\mathbf{u}(x, y, t)$ sur le plan (x, y) , alors que $w(x, y, t)$ est sa composante transverse. $\nabla(\cdot)$ et $\nabla \cdot (\cdot)$ sont respectivement les opérateurs gradient et divergence dans le plan (x, y) . Le « tenseur inertiel » 2×2 \mathbf{M} est défini par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{C} \text{ avec } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

où $\mathbf{N} = \nabla \mathbf{U}$, \mathbf{C} est le « tenseur de Coriolis », et en coordonnées curvilignes planes, \mathbf{M} fait intervenir un tenseur de courbure supplémentaire antisymétrique (LC97). Les deux valeurs propres de \mathbf{M} sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + \Phi = 0 \text{ où } \Phi = -\frac{1}{2} \mathbf{M} : \mathbf{M} = -\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{M}^2 = -\frac{1}{2} M_{ij} M_{ji}$$

est le second invariant du tenseur inertiel \mathbf{M} . En coordonnées Cartésiennes, ce « discriminant généralisé » s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= -\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4} \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t \\ &= (\Psi_{xx} - 2\Omega)(\Psi_{yy} - 2\Omega) - (\Psi_{xy})^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où $\Psi(x, y)$ est la fonction de courant de base et les indices correspondent aux dérivées partielles.

En considérant la structure du problème linéaire (3.6) et l'expression du tenseur inertiel (3.7), le tenseur de Coriolis agit sur les instabilités comme un *accordeur* (« tuner ») par rapport à celles d'un repère fixe. Cette idée est clairement illustrée pour les écoulements quadratiques et l'instabilité elliptique (Craik 1989; Cambon *et al.* 1994). En effet, l'influence stabilisante ou déstabilisante de la rotation est décrite par le décalage de la bande angulaire des vecteurs d'onde instables obliques (et dépendants du temps) (voir la figure 4 dans Cambon *et al.* 1994).

3.4.3 Equations d'Orr–Sommerfeld et de Squire

Sans rotation de corps solide, l'analyse de stabilité tridimensionnelle d'écoulements de base à lignes de courant non-parallèles nécessite la résolution d'un problème linéaire comprenant les versions non-parallèles des équations d'Orr–Sommerfeld et de Squire (Orszag & Patera 1981, 1983; Herbert, Bertolotti & Santos 1987). La force de Coriolis peut y être ajoutée sans difficulté majeure.

Dans la suite, les dérivées partielles spatiales de la fonction de courant et de la vorticité sont notées avec des indices. Ainsi, la vorticité de l'écoulement de base s'écrit $W = -(\Psi_{xx} + \Psi_{yy})$. Les dérivées partielles appliquées à la perturbation de vitesse sont notées par exemple $\partial_{xy} = \partial^2/\partial x\partial y$. La dérivée matérielle suivant l'écoulement de base s'écrit maintenant $D_t = \partial_t + \Psi_y\partial_x - \Psi_x\partial_y$. L'équation non-parallèle d'Orr–Sommerfeld est obtenue en appliquant l'opérateur Laplacien à la seconde composante des équations d'Euler linéarisées. La pression est facilement éliminée en utilisant l'équation de pression linéarisée. Après quelques manipulations, on obtient

$$\begin{aligned} (D_t - \Psi_{xy})(\partial_{xx} + \partial_{yy} - k^2)v \\ = (-2W_x\partial_x + 2\Psi_{xy}\partial_{xy} - W_{xx} + (\Psi_{xx} - 2\Omega)(\partial_{xx} - k^2) - \Psi_{xx}\partial_{yy})u \\ + (-W_x\partial_y - W_y\partial_x - W_{xy} - 2\Psi_{xy}\partial_{xx} + 2(\Psi_{xx} - \Omega)\partial_{xy})v, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où u et v sont les composantes de la perturbation de vitesse dans le plan de l'écoulement de base. L'équation non-parallèle de Squire est la seconde composante de l'équation d'Helmholtz linéarisée pour la perturbation de vorticité $\omega(x, y, t) = \nabla \times \mathbf{u} = (\xi, \eta, \zeta)$:

$$(D_t + \Psi_{xy})\eta + \Psi_{xx}\xi = ik(W + 2\Omega)v, \quad (3.10)$$

qui peut être exclusivement exprimée en fonction de u et v , en utilisant les relations $ik\eta = (\partial_{xx} - k^2)u + \partial_{xy}v$ et $ik\xi = -\partial_{xy}u - (\partial_{yy} - k^2)v$ obtenues en tenant compte de la contrainte d'incompressibilité.

La viscosité peut être facilement prise en compte en remplaçant D_t par $D_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{yy} - k^2)$ dans le membre de droite de (3.9) et (3.10). C'est la raison pour

laquelle la terminologie « Orr–Sommerfeld » et « Squire » a été utilisée. SP94 ont résolu le problème visqueux avec une formulation alternative, et Klaassen & Peltier (1985, 1989, 1991) ont inclus les effets de stratification. Pour des écoulements à lignes de courant parallèles, (3.9) et (3.10) se réduisent aux équations classiques d’Orr–Sommerfeld et de Squire qui ne sont pas découplées à cause de la force de Coriolis. Le théorème de Squire n’est pas valable, comme l’ont mentionné Yanase *et al.* (1993). Enfin, dans le contexte de l’instabilité de Görtler avec rotation d’ensemble, pour un écoulement de base spatialement variable, une formulation équivalente est donnée par Bottaro *et al.* (1996).

3.5 Problème aux valeurs propres

3.5.1 Analyse de Floquet

Le système linéaire composé de (3.9) et (3.10) pour $\mathbf{v} = (u, v)$ peut être écrit

$$\partial_t \mathcal{L}_1 \mathbf{v}(x, y, t) = \mathcal{L}_2 \mathbf{v}(x, y, t) \quad (3.11)$$

où $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i(\Psi; \Omega, \mathbf{k})$ pour $i = 1, 2$ sont des opérateurs linéaires impliquant les dérivées partielles de la fonction de courant, et le carré du nombre d’onde transverse de la perturbation. Il est donc suffisant de considérer

$$k \geq 0.$$

En fait ceci aurait pu être conclu directement de (3.6), invariant par la transformation $(k, w) \rightarrow (-k, -w)$.

Pour des écoulements de base spatialement périodiques, de période $l_x = 2\pi/\alpha$, (3.11) contient des coefficients l_x -périodiques, et la théorie de Floquet (Kelly 1967 ; Herbert 1983, 1988 ; Klaassen & Peltier 1985, 1989, 1991) permet de chercher la perturbation sous la forme :

$$\mathbf{v}(x, y, t) = e^{\sigma t} e^{i\mu x} \tilde{\mathbf{v}}(x, y) \quad (3.12)$$

où le complexe $\mu' = i\mu$ est l’exposant de Floquet, et $\tilde{\mathbf{v}}(x, y)$ sont l_x -périodiques comme l’écoulement de base ($l_x = 2\pi$ pour les tourbillons de Stuart). Afin d’effectuer une analyse temporelle de stabilité (σ complexe), l’exposant de Floquet μ' est imaginaire pur et μ est maintenant un paramètre (réel) du problème (une analyse spatiale de stabilité nécessiterait σ imaginaire et μ complexe). En accord avec Herbert (1988), il est facile de vérifier que les modes de Floquet (3.12) sont invariants par la transformation $\mu \rightarrow \mu \pm p\alpha$, avec p entier, parce que $\exp(\pm ip\alpha x) \tilde{\mathbf{v}}(x, y)$ est invariant par la translation $x \rightarrow x \pm l_x$. Par conséquent, il est suffisant de considérer $-\alpha/2 < \mu \leq \alpha/2$. Klaassen & Peltier (1989) ont fourni une discussion détaillée des symétries impliquées dans les modes de Floquet pour une couche cisailée libre stratifiée.

3.5.2 Modes fondamentaux et sous-harmoniques

Puisque le produit de deux fonctions périodiques est périodique si le rapport des périodes est un nombre rationnel, le mode de Floquet (3.12) est périodique si $|\mu/\alpha| = m/n$, avec m et n entiers. En rappelant que $\alpha = 2\pi/l_x$ est le nombre d'onde de l'écoulement de base et que $-1/2 < \mu/\alpha \leq 1/2$, les deux principales classes de modes sont les suivantes (Herbert 1988) :

- les modes *fondamentaux* ($\mu/\alpha = 0$) sont l_x -périodiques comme l'écoulement de base. Physiquement, sans force de Coriolis, ils tendent à déformer en phase spatialement et tridimensionnellement (au nombre d'onde transverse k) la structure de l'écoulement de base : ils correspondent aux « motifs en Λ alignés » (« aligned Λ -patterns »), observés dans les couches limites (Herbert 1983, 1988) et aux instabilités « translatives » observées dans les couches de mélange (Pierrehumbert & Widnall 1982; Metcalfe *et al.* 1987).
- les modes *sous-harmoniques* ($\mu/\alpha = 1/2$) ont deux fois la périodicité de l'écoulement de base. Pour des écoulements cisailés non-tournant, ces modes $2l_x$ -périodiques excitent les « motifs en Λ étagés » (« staggered Λ -patterns ») dans les couches limites (Herbert 1983, 1988). Pour les couches de mélange avec des rouleaux de Kelvin-Helmholtz (en fait la solution de Stuart), Pierrehumbert & Widnall (1982) ont montré que les modes sous-harmoniques excitent l'« appariement hélicoïdal » de deux tourbillons adjacents.

En accord avec Herbert (1983, 1988), les modes fondamentaux sont associés à la résonance primaire dans le système de Floquet, alors que les modes sous-harmoniques correspondent à la résonance paramétrique principale. D'autres classes de modes existent dans l'intervalle $0 < |\mu/\alpha| < 1/2$ (désaccordés ou « de-tuned ») selon la terminologie de Herbert 1988), périodiques si μ/α rationnel ou sinon apériodiques. Pour une perturbation purement bidimensionnelle ($k = 0$), Pierrehumbert & Widnall (1982) ont montré que les modes fondamentaux des tourbillons de Stuart sont neutres, alors que les sous-harmoniques sont amplifiés. Klaassen & Peltier (1989) ont montré que les modes bidimensionnels les plus instables sont les modes d'appariement ($\mu/\alpha = 1/2$), et ils mentionnèrent aussi le fait que les modes tels que $|\mu/\alpha| = 1/n$, avec $n > 2$, tendent à amalgamer plus de deux tourbillons adjacents, mais sont moins amplifiés que les modes sous-harmoniques. Ceci est bien sûr cohérent avec les observations expérimentales et les simulations numériques montrant de nombreux appariements. C'est aussi cohérent avec l'analyse de stabilité linéaire de Lamb (1932) d'une allée périodique de tourbillons ponctuels corotatifs, où les modes les plus instables sont les sous-harmoniques.

3.5.3 Spectre et symétries

Avec (3.12), le système aux valeurs propres (3.11) devient :

$$\sigma \mathcal{L}_1 \tilde{v}(x, y) = \mathcal{L}_2 \tilde{v}(x, y) \quad (3.13)$$

avec maintenant $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i(\Psi; \Omega, k, \mu)$ for $i = 1, 2$. Ainsi, considérons un écoulement de base pour les paramètres (Ω, k, μ) , le problème consiste à chercher les modes propres (σ, \tilde{v}) de (3.13) tels que $\tilde{v}(x, y)$, l_x -périodique, s'annule quand $y \rightarrow \pm\infty$. Le système est constitué des équations d'Orr-Sommerfeld et de Squire (3.9) et (3.10) qui s'écrivent maintenant respectivement :

$$\begin{aligned} \sigma (\tilde{\partial}_{xx} + \partial_{yy} - k^2) \tilde{v} &= (-2W_x \tilde{\partial}_x + 2\Psi_{xy} \tilde{\partial}_{xy} - W_{xx} + (\Psi_{xx} - 2\Omega)(\tilde{\partial}_{xx} - k^2) - \Psi_{xx} \partial_{yy}) \tilde{u} \\ &+ (-W_x \partial_y - W_y \tilde{\partial}_x - W_{xy} - 2\Psi_{xy} \tilde{\partial}_{xx} + 2(\Psi_{xx} - \Omega) \tilde{\partial}_{xy} \\ &- (\Psi_y \tilde{\partial}_x - \Psi_x \partial_y - \Psi_{xy})(\tilde{\partial}_{xx} + \partial_{yy} - k^2)) \tilde{v} \\ \sigma ((\tilde{\partial}_{xx} - k^2) \tilde{u} + \tilde{\partial}_{xy} \tilde{v}) &= (\Psi_{xx} \tilde{\partial}_{xy} - (\Psi_y \tilde{\partial}_x - \Psi_x \partial_y + \Psi_{xy})(\tilde{\partial}_{xx} - k^2)) \tilde{u} \\ &+ (\Psi_{xx} \partial_{yy} - k^2(2\Omega - \Psi_{yy}) - (\Psi_y \tilde{\partial}_x - \Psi_x \partial_y + \Psi_{xy}) \tilde{\partial}_{xy}) \tilde{v} \end{aligned}$$

où $\tilde{\partial}_x = i\mu + \partial_x$, $\tilde{\partial}_{xx} = (i\mu + \partial_x)^2$ et $\tilde{\partial}_{xy} = (i\mu + \partial_x) \partial_y$. En prenant le complexe conjugué de (3.13), il est facile de vérifier que (σ^*, \tilde{v}^*) est un mode propre pour $(\Omega, k, -\mu)$, montrant le même taux de croissance $s = \text{Re}(\sigma)$ que celui du mode (σ, \tilde{v}) . Donc il est suffisant de considérer μ positif, et ainsi, en tenant compte des considérations précédentes :

$$0 \leq \mu \leq \alpha/2.$$

Comme dans le cas non-tournant (Pierrehumbert & Widnall 1982), on peut montrer que le spectre des valeurs propres associé aux paramètres donnés (Ω, k, μ) contient $\pm\sigma$ et $\pm\sigma^*$. Soit $(\sigma, \tilde{u}, \tilde{v})$ un mode de Floquet de (3.13) pour les paramètres (Ω, k, μ) . En appliquant d'abord la transformation $y \rightarrow -y$ à (3.13), et en tenant compte des symétries de la fonction de courant de Stuart (3.1) et de ses dérivées, il est facile de vérifier que $(-\sigma, -\tilde{u}, \tilde{v})$ est un mode propre pour les mêmes paramètres. Ceci signifie que le spectre contient les valeurs propres σ et $-\sigma$; la conséquence immédiate est qu'à chaque mode instable correspond un mode stable, et que *l'écoulement est au mieux neutralement stable*. Comme l'ont déjà mentionné Pierrehumbert & Widnall (1982) pour le cas non-tournant, ceci est une conséquence de la réversibilité en temps des équations d'Euler et n'est plus valable en présence de viscosité : avec $t \rightarrow -t$ il est toujours possible de trouver une transformation complémentaire laissant invariant les équations d'Euler. En prenant maintenant le complexe conjugué de (3.13) et en appliquant $x \rightarrow -x$, il est facile de vérifier que $(\sigma^*, \tilde{u}^*, -\tilde{v}^*)$ est aussi un mode propre pour les paramètres (Ω, k, μ) . Il s'en suit immédiatement que $-\sigma^*$ appartient également au spectre des valeurs propres associé à ces paramètres. Ainsi, dans le plan complexe, le spectre contient $\pm\sigma$ et $\pm\sigma^*$.

3.6 Résolution spectrale

3.6.1 Séries de Fourier–Chebyshev

De façon à transformer l'intervalle infini $y \in] - \infty; +\infty[$ à l'intervalle fini $Y \in] - 1; +1[$, le mapping exponentiel (Metcalfé *et al.* 1987)

$$Y = \tanh(y/H)$$

est utilisé. Les fonctions propres l_x -périodiques peuvent être développées par les deux séries infinies

$$\tilde{v}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{v}_{m,n} e^{i\alpha m x} T_n(Y), \quad (3.14)$$

où les polynômes de Chebyshev $T_n(Y) = \cos(n\theta)$ avec $\theta = \arccos Y$ et $\theta \in]0; \pi[$, satisfont « naturellement » les conditions limites quand $Y \rightarrow \pm 1$ (Boyd 1987; Canuto *et al.* 1988).

3.6.2 Troncatures

La troncature des séries doit prendre en compte certaines relations entre les coefficients inconnus $\tilde{v}_{mn} = (\tilde{u}_{m,n}, \tilde{v}_{m,n})$, afin de respecter les symétries de la fonction de courant de Stuart et de ses dérivées. En effet, Klaassen & Peltier (1989) ont montré par des considérations de symétrie que

$$\tilde{v}_{m,n} = \pm (-1)^n \tilde{v}_{-(m+2\mu/\alpha),n}, \quad (3.15)$$

une relation satisfaite seulement si $m + 2\mu/\alpha$ est entier. Ainsi, pour les modes fondamentaux ($\mu/\alpha = 0$), la troncature doit retenir les coefficients tels que $m = m_0$ and $m = -m_0$ afin de respecter $\tilde{v}_{m,n} = \pm (-1)^n \tilde{v}_{-m,n}$. Donc, pour les modes fondamentaux, une troncature possible est :

$$\tilde{v}(x, y) = \sum_{m=-M'}^{M'} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{v}_{m,n} e^{i\alpha m x} \cos(n\theta), \quad M' = (M - 1)/2 \text{ avec } M \text{ impair.}$$

D'après (3.15), dans le cas des modes sous-harmoniques ($\mu/\alpha = 1/2$), les coefficients vérifient $\tilde{v}_{m,n} = \pm (-1)^n \tilde{v}_{-m-1,n}$. Afin de conserver les symétries de l'écoulement de Stuart, les coefficients tels que $m = m_0$ et $m = -m_0 - 1$ doivent apparaître dans le développement (3.14), ce qui est satisfait si :

$$\tilde{v}(x, y) = \sum_{m=-M'}^{M'-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{v}_{m,n} e^{i\alpha m x} \cos(n\theta), \quad M' = M/2 \text{ avec } M \text{ pair.}$$

Klaassen & Peltier (1989) ont montré que la violation de ces conditions conduit à des erreurs importantes. En fait, on peut vérifier que ces différentes troncatures

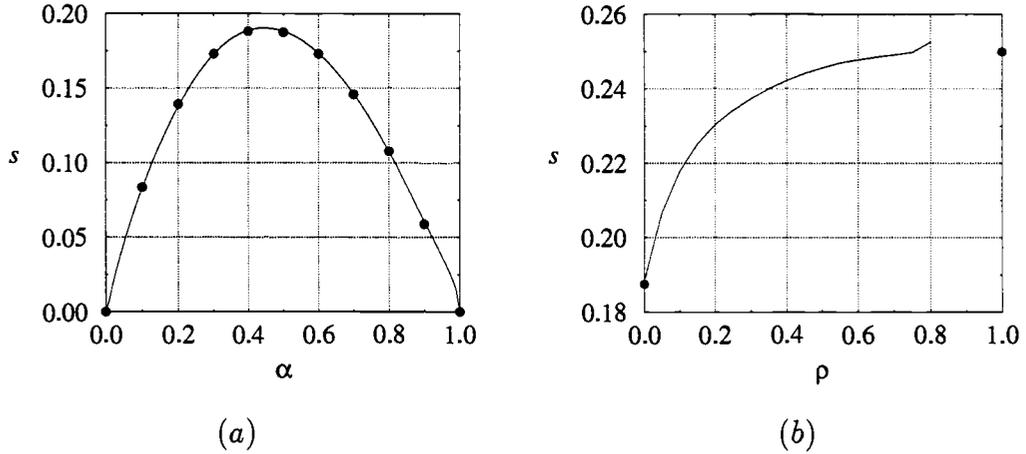


FIG. 3.8 – Calculs de stabilité bidimensionnelle ($k = 0$) et comparaison avec les résultats de Michalke (1964) (•). Taux de croissance $s = \text{Re}(\sigma)$: (a) couche de mélange pour différents nombres d'onde α ; (b) modes sous-harmoniques des tourbillons de Stuart (le • à $\rho = 1$ correspond au cas des tourbillons ponctuels, Lamb 1932).

pour les modes fondamentaux et sous-harmoniques sont équivalentes à celles utilisées par Herbert (1983, 1988). Il est alors clair que pour les modes décalés (« detuned »), tels que $\mu/\alpha = 1/n$ (n entier), aucun des deux schémas de troncature précédent ne conviendra, et des erreurs pourraient alors apparaître.

Pour des écoulements de base à lignes de courant parallèles, comme par exemple la couche de mélange $U(y) = \tanh(y)$ (fonction de courant de Stuart avec $\rho = 0$), il est possible de chercher les modes propres sous la forme suivante $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} e^{i\alpha x} e^{ikz} \mathbf{v}(y)$ (α réel), et de développer $\mathbf{v}(y)$ par des polynômes de Chebyshev en utilisant le même mapping.

3.6.3 Points de collocation

Pour achever la discrétisation du problème continu, nous choisissons une méthode de collocation plutôt qu'une méthode de Galerkin pour sa simplicité de programmation. Les points de collocation suivants sont choisis :

$$x_j = 2\pi j/M, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad \text{et} \quad \theta_k = (2k+1)\pi/(2N), \quad k = 0, \dots, N-1$$

de façon à éviter les limites singulières $y \rightarrow -\infty$ ($\theta \rightarrow \pi^-$) et $y \rightarrow +\infty$ ($\theta \rightarrow 0^+$). Ainsi le problème consiste maintenant à rechercher les valeurs propres du problème matriciel $\sigma L_1 V = L_2 V$ de dimension $(2MN)^2$, pour les vecteurs propres $V = (\tilde{u}_{m,n}, \tilde{v}_{m,n})$. Le problème aux valeurs propres matriciel est résolu par un algorithme QZ standard, qui calcule numériquement les $2MN$ valeurs propres du spectre discret, et les vecteurs propres associés.

Les paramètres numériques (H , M et N) sont choisis afin d'obtenir un bon accord avec des résultats connus, comme par exemple l'analyse de stabilité temporelle de la couche de mélange en $\tanh(y)$ (Michalke 1964) tracée sur la figure 3.8 (a). Des calculs de stabilité bidimensionnelle des tourbillons de Stuart sont tracés sur la 3.8 (b). Pour $\rho = 0$, le taux de croissance correspond aux résultats de Michalke (1964) avec $\alpha = 1/2$, et elle montre que les résultats deviennent erronés quand on atteint la limite singulière des tourbillons ponctuels ($\rho \rightarrow 1$) pour laquelle le taux de croissance temporelle de l'instabilité sous-harmonique est $s = 1/4$ (Lamb 1932). L'allure de la courbe est similaire à des résultats précédents (Pierrehumbert & Widnall 1982; Klaassen & Peltier 1989).

Une autre manière pratique de tester la méthode numérique est de résoudre $\sigma \tilde{v}(x, y) = \mathbf{M} \tilde{v}(x, y)$ et de comparer avec les valeurs propres exactes $\lambda = \pm \sqrt{-\Phi}$ du tenseur inertiel (3.7), avec Φ donné par (3.8). Un bon compromis est obtenu avec $H = 0.7$, $M = 9$ (resp. $M = 10$) coefficients de Fourier et $N = 16$ (resp. $N = 15$) polynômes de Chebyshev pour les modes de Floquet fondamentaux (resp. sous-harmoniques).

3.7 Tendances générales

3.7.1 Rotations stabilisantes et déstabilisantes

Parce que la distribution de vorticité des tourbillons de Stuart est partout négative, $\Omega < 0$ correspond à une rotation *cyclonique*, alors que $\Omega > 0$ correspond à une rotation *anticyclonique*. La figure 3.9 est représentative du rôle important de la force de Coriolis sur la stabilité linéaire des tourbillons de Stuart. Cette carte représente le taux de croissance du mode sous-harmonique le plus instable en fonction du nombre d'onde transverse k et du taux de rotation Ω , pour $\rho = 1/3$ dans (3.1). Pour $k = 0$, les modes d'appariement sont amplifiés avec un taux de croissance $s = 0.239$ cohérent avec des résultats précédents (Pierrehumbert & Widnall 1982; Klaassen & Peltier 1989), quelque soit la rotation d'ensemble puisque les perturbations bidimensionnelles ne sont pas affectées. Dès que k croît, l'influence de la force de Coriolis sur les perturbations tridimensionnelles devient visible : un pic d'instabilité est observé pour des faibles rotations anticycloniques alors que des taux de rotation positifs plus grands tendent à stabiliser l'écoulement de base par un effet de coupure. Des résultats similaires ont été obtenus par SP94 pour les rouleaux de Kelvin-Helmholtz sous l'effet de la rotation. Ainsi, pour $\Omega = 1$, seules les perturbations de grande longueur d'onde sont amplifiées, alors qu'au-delà d'un nombre d'onde transverse critique ($k \approx 1$), les perturbations d'onde-courte tridimensionnelles sont neutres. Qualitativement la même coupure d'onde-courte se produit pour les rotations cycloniques, à l'exception d'une petite bosse d'instabilité qui tend à être absorbée par la large bande instable pour des nombres d'onde plus grand.

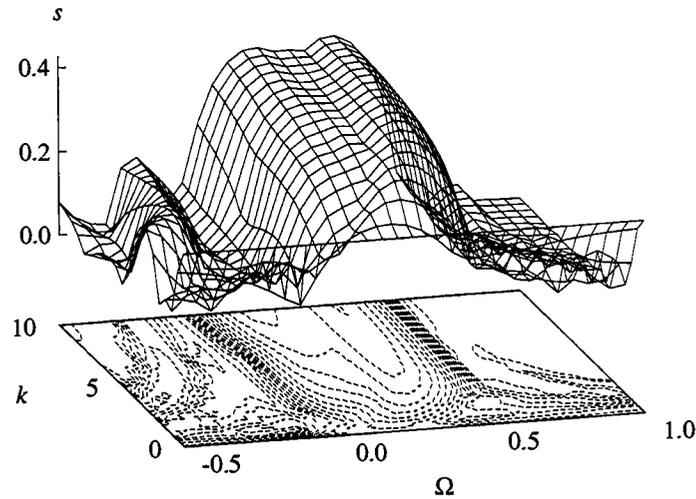


FIG. 3.9 – Taux de croissance des modes sous-harmoniques pour $\rho = 1/3$.

En regardant les lignes de niveau sur la base de la figure 3.9, le taux de croissance tend vers une valeur constante quand k croît (à Ω fixé). Les mêmes tendances qualitatives ont été obtenues pour les modes de Floquet fondamentaux (Leblanc & Cambon 1996), sauf pour les perturbations tridimensionnelles d'onde-longue ($k \approx 0$), qui sont neutres quand k s'annule (Pierrehumbert & Widnall 1982). De plus, pour k grand, on observe que les modes fondamentaux et sous-harmoniques se comportent de manière identique, même dans le cas non-tournant. Ceci est en contradiction partielle avec les calculs aux valeurs propres de Pierrehumbert & Widnall (1982) qui trouvèrent que les modes fondamentaux tridimensionnels sont instables avec un taux de croissance qui atteint une valeur constante pour des grands nombres d'onde, alors que les modes sous-harmoniques d'appariement hélicoïdal deviennent neutres au-delà de la coupure transverse, contrairement aux résultats présents. Ceci sera discuté plus loin.

Les calculs de stabilité temporelle sont en accord qualitatif avec les observations expérimentales de Bidokhti & Tritton (1992) pour une couche de mélange turbulente se développant spatialement : « *la structure en rouleaux, familière au cas non-tournant, était observée dans tous les écoulements stabilisés, mais était presque complètement détruite par une faible déstabilisation* ». Ces tendances sont aussi en bon accord avec les calculs visqueux de SP94.

3.7.2 Modes propres localisés

La force de Coriolis modifie considérablement l'allure des modes de Floquet. Même si les instabilités sont tridimensionnelles, la composante transverse (selon

z) de la perturbation de vorticité

$$\zeta(x, y, t) = e^{\sigma t} e^{i\mu x} (\tilde{\partial}_x \tilde{v} - \partial_y \tilde{u})$$

fournit des informations utiles. Sur la figure 3.10 est représenté le mode fondamental ($\mu = 0$) le plus instable pour divers taux de rotation dans la bande instable, et pour un nombre d'onde transverse modéré ($k = 2$). En rapellant qu'ils sont 2π -périodiques comme les tourbillons de Stuart, la nature de l'instabilité change avec la rotation, comme l'a déjà noté SP94.

La discussion qui suit est qualitative, et ne concerne qu'une valeur particulière du nombre d'onde transverse k . Par conséquent, ceci n'est pas une classification « zoologique » des différents modes que l'on pourrait obtenir pour toutes les valeurs des paramètres de contrôle du problème (Ω, k, μ) . Cependant, les instabilités décrites ci-dessous semblent représentatives du comportement à onde-courte des modes propres ($k \rightarrow +\infty$), sur lequel la présente étude se concentre.

Dans le cas non-tournant (figure 3.10 a), le mode fondamental a une structure complexe : il se caractérise par une structure en dipôle dans le cœur elliptique et s'étend dans la région des braids. Près du cœur, la topologie du mode propre est voisine de celle de « l'instabilité elliptique » (Pierrehumbert 1986 ; Waleffe 1989, 1990). Dans les régions hyperboliques, la structure du mode pourrait correspondre aux rouleaux longitudinaux (« streamwise ribs ») qui relient les tourbillons adjacents (Ho & Huerre 1984 ; Metcalfe *et al.* 1987 ; Lasheras & Choi 1988), et au « braid mode » dans SP94. Pour une faible rotation anticyclonique (figure 3.10 b), le mode propre montre une allure similaire. Dans ces deux cas, qui correspondent à un nombre d'onde transverse modéré ($k = 2$), la topologie des modes suggère la coexistence des deux instabilités hyperbolique et elliptique.

Dans le cas non-tournant, pour les tourbillons de Stuart, Klaassen & Peltier (1991) ont identifié un mode seulement centré « près des points de stagnation des braids » (voir leur figure 26), mais pour une valeur plus grande du nombre d'onde transverse ($k = 5$). Cependant, ils ne l'ont pas connecté à « l'instabilité hyperbolique » de l'écoulement quadratique correspondant, vers lequel tend asymptotiquement le taux de croissance des modes propres des tourbillons de Stuart quand $k \rightarrow +\infty$ (vois les discussions plus loin), clairement en accord avec leurs observations.

Pour des taux de rotation modérés (figures 3.10 c, d), le mode propre se localise dans les cœurs des tourbillons, et a une forme proche de l'instabilité elliptique dans un repère fixe (Pierrehumbert 1986 ; Waleffe 1989, 1990). SP94 ont observés des comportements similaires avec les modes linéaires visqueux des rouleaux de Kelvin-Helmholtz non-linéairement saturés (le mode de cœur ou « core mode »). Les rotations anticycloniques plus fortes (figures 3.10 e, f) modifient la topologie des modes, et semblent incliner la structure de l'instabilité elliptique.

Finalement, le mode de bord (« edge mode ») découvert par SP94, qui est localisé près d'un anneau entourant le tourbillon central, et expliqué par le critère

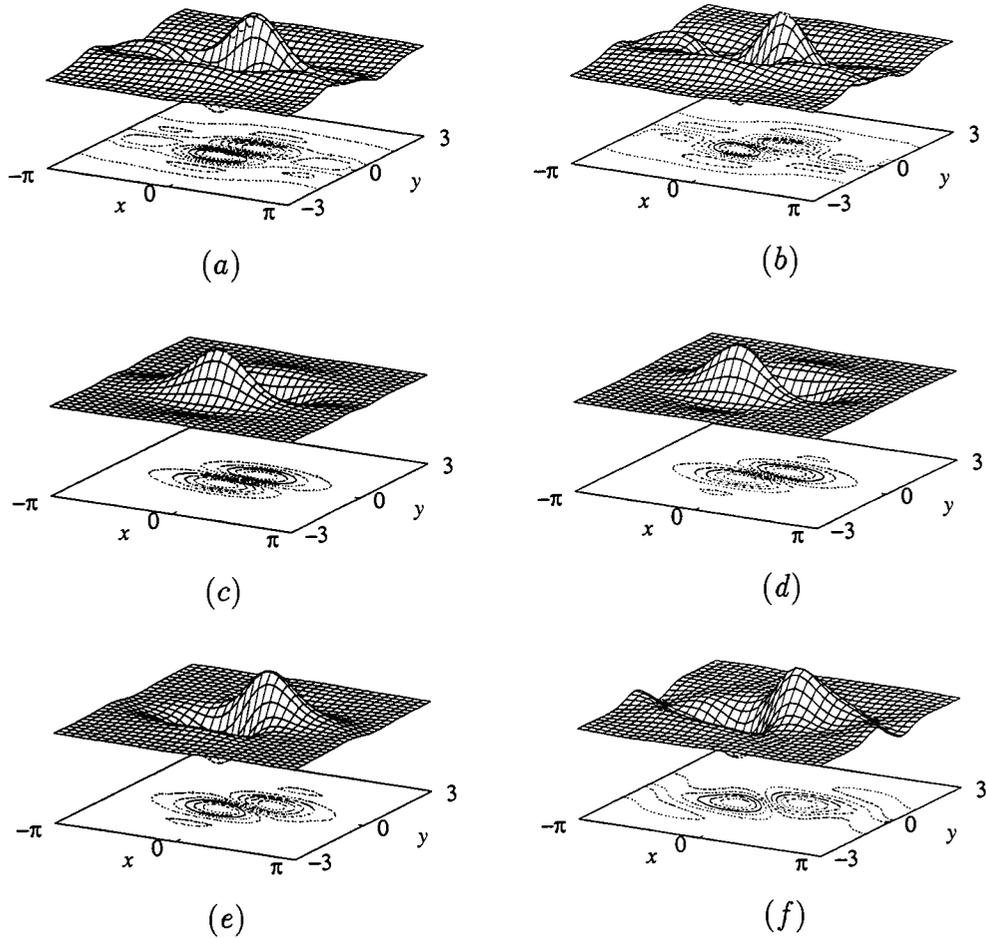


FIG. 3.10 – Vorticité transverse des modes fondamentaux pour $k = 2$ et $\rho = 1/3$. (a) $\Omega = 0.0$; (b) $\Omega = 0.1$; (c) $\Omega = 0.2$; (d) $\Omega = 0.3$; (e) $\Omega = 0.4$; (f) $\Omega = 0.5$.

de Rayleigh généralisé de Kloosterziel & van Heijst (1991), n'a pas été retrouvé dans la présente étude. Une explication possible peut être que les rouleaux de Kelvin–Helmholtz, qui forment l'état de base dans SP94, ont des cœurs elliptiques avec une ellipticité plus faible que dans nos calculs de stabilité. Ainsi, si les tourbillons sont presque circulaires, il semble raisonnable d'expliquer ces modes de bord par le critère de Rayleigh pour l'instabilité centrifuge en repère tournant (SP94). Ce critère prédit l'instabilité à un certain rayon, et qu'elle est localisée sur la ligne de courant correspondante (LC97). La raison pour laquelle nous n'avons pas étudié le régime des faibles ellipticités ($\rho \rightarrow 1$) est que la fonction de courant de Stuart devient singulière (allée de tourbillons ponctuels), et nécessite une résolution plus grande.

3.8 Instabilités d'onde-courte

3.8.1 Modes propres sans-pression

En accord avec Bayly (1988) et plusieurs travaux dans la modélisation de la turbulence (voir Cambon *et al.* 1985, 1994 et les références ci-dedans), LC97 ont montré que la force de Coriolis excite les modes sans-pression. En effet, formellement parlant, le problème linéaire (3.6) s'écrit aussi :

$$D_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} = 1/k^2 (\nabla D_t \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (3.16)$$

Si le membre de droite s'annule, la dynamique sans-pression est gouvernée par

$$D_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} = 0, \quad (3.17)$$

obtenue également en supprimant le terme de pression du problème linéaire complet (3.6). Quand le problème physique possède une échelle de longueur caractéristique (la période spatiale des tourbillons de Stuart dans le cas présent), (3.17) est obtenu de (3.16) pour les grands nombres d'onde ($k \rightarrow +\infty$), conduisant à des modes propres fortement localisés le long des lignes de courant, comme l'a mentionné Pierrehumbert (1986). En suivant Bayly (1988), LC97 ont montré que le comportement des instabilités induites par les forces centrifuges et de Coriolis est donné au premier ordre par l'analyse simplifiée sans-pression, et pour des écoulements complexes sa validité a été établie à l'aide de la théorie d'optique géométrique (voir chapitre précédent).

Afin d'éviter toute confusion, il faut noter que $\mathbf{v}(x, y, t)$ dans (3.17) *n'est pas* un champ de vitesse physique bidimensionnel. Une telle interprétation, utilisée par Tritton & Davies (1981) et d'autres avec l'approche de la « particule déplacée », conduit à la violation de la contrainte d'incompressibilité (voir les discussions dans LC97). La *vraie* perturbation de vitesse est $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = e^{ikz} \mathbf{v}(x, y, t)$, qui a *deux composantes seulement mais est fortement tridimensionnelle*, puisque la condition d'onde-courte dit simplement que la variabilité par rapport à la coordonnée transverse (z) est beaucoup plus forte que la variabilité par rapport aux coordonnées planes (x, y).

Le système (3.17) est un problème linéaire à coefficients spatialement périodiques et admet également la représentation de Floquet (3.12). Avec des conditions aux limites homogènes, le problème sans-pression aux valeurs propres

$$(\sigma + \mathbf{U} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}(x, y) + \mathbf{M} \tilde{\mathbf{v}}(x, y) = 0 \quad (3.18)$$

peut être calculé numériquement et comparé au problème linéaire « exact » (3.13) pour des grands nombres d'onde. Les modes propres fondamentaux et sous-harmoniques de (3.18) admettent le même taux de croissance $s = \text{Re}(\sigma)$ mais une fréquence différente $\omega = \text{Im}(\sigma)$, parce que le paramètre de Floquet μ apparaît seulement dans l'opérateur convectif $\mathbf{U} \cdot \nabla = \Psi_y (i\mu + \partial_x) - \Psi_x \partial_y$.

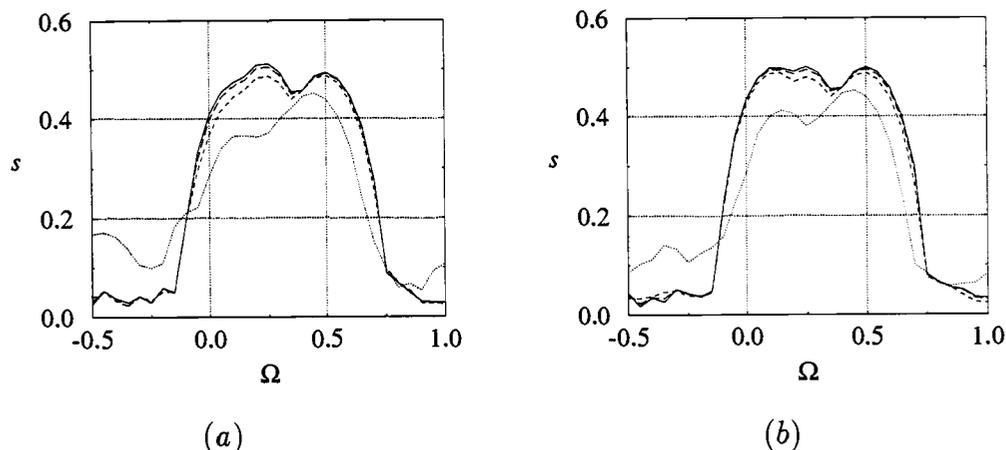


FIG. 3.11 – Comparaison entre les modes sans-pression (—) et les instabilités tridimensionnelles ($k = 10$, ; $k = 50$, -.-.- ; $k = 100$, ----) pour $\rho = 1/3$. (a) modes fondamentaux; (b) modes sous-harmoniques.

La comparaison entre les instabilités d'onde-courte tridimensionnelles et les solutions sans-pression est tracée sur la figure 3.11. Il est clair qu'à grand nombre d'onde, les modes de Floquet fondamentaux et sous-harmoniques ont un comportement temporel comparable, même dans le cas non-tournant, contrairement aux résultats de Pierrehumbert & Widnall (1982). Les légères différences entre les figures 3.11 (a) et 3.11 (b) viennent des différents schémas de troncature utilisés pour les modes fondamentaux et sous-harmoniques. Des explications possibles de la coupure sous-harmonique trouvée par Pierrehumbert & Widnall (1982) peuvent être leur faible résolution, ou la troncature du domaine. Les observations expérimentales de la coupure sous-harmonique pour l'instabilité secondaire des ondes de Tollmien-Schlichting (Herbert 1988) pourraient être une conséquence de la viscosité (Lagnado *et al.* 1984; Craik & Criminale 1986; Landman & Saffman 1987; Lifschitz 1991; SP94). La figure 3.11 montre également que le comportement temporel des instabilités d'onde-courte tridimensionnelles tend asymptotiquement vers les solutions sans-pression.

3.8.2 Instabilités hyperboliques et elliptiques

Les écoulements non-bornés avec une fonction de courant quadratique

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{2}\{(\gamma - \epsilon)x^2 + (\gamma + \epsilon)y^2\}$$

ont été extensivement étudiés dans le contexte de la théorie de la distorsion rapide (RDT) d'une turbulence homogène en repère tournant ou non (Townsend 1956; Cambon 1982; Cambon *et al.* 1985; et d'autres) et plus récemment dans le contexte de la théorie de stabilité hydrodynamique (Lagnado *et al.* 1984; Craik & Criminale 1986; Pierrehumbert 1986; Bayly 1986; Landman & Saffman 1987;

Craik 1989; Waleffe 1989, 1990; et d'autres). Les liens étroits entre ces deux approches sont revus par Cambon *et al.* (1994). En particulier, les deux permettent de rechercher une perturbation de type onde avec un vecteur d'onde dépendant du temps

$$[\mathbf{u}', \pi'](\mathbf{x}, t) = \exp\{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}\}[\mathbf{u}, \pi](t),$$

où la projection de $\mathbf{k}(t)$ sur le plan (x, y) est notée $\boldsymbol{\alpha}(t)$, qui est solution de

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{N}^T \boldsymbol{\alpha}$$

avec $\mathbf{N} = \nabla \mathbf{U}$ donné par (3.2), alors que sa composante transverse $k = \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{e}_z$ est constante. L'interprétation physique est que le vecteur d'onde suit la déformation induite par l'écoulement de base, de sorte que sa valeur initiale $\mathbf{k}(0) = \mathbf{K}$ est liée aux coordonnées Lagrangiennes (Cambon *et al.* 1985, 1994).

Le « mouvement » de $\boldsymbol{\alpha}(t)$ est facilement intégrable pour les trois classes d'écoulement (elliptique, hyperbolique ou cisaillement pur). La substitution dans les équations d'Euler (linéarisées ou pas puisque chaque mode vérifie $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' = 0$) conduit à un système linéaire à coefficients dépendants du temps et qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M}\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T/|\mathbf{k}|^2(\mathbf{M} + \mathbf{N})\mathbf{v}. \quad (3.19)$$

\mathbf{M} est le tenseur inertiel défini par (3.7), $\mathbf{v}(t)$ est la projection de $\mathbf{u}(t)$ sur le plan (x, y) , et le membre de droite de (3.19) dépendant du temps est la contribution de la perturbation de pression. (3.19) peut être intégré analytiquement pour des conditions initiales particulières sur $\boldsymbol{\alpha}(t)$ (voir Cambon 1982; Cambon *et al.* 1985, 1994; pour la RDT, et Lagnado *et al.* 1984; Craik & Criminale 1986; en stabilité hydrodynamique).

Comme l'a mentionné d'abord Cambon (1982) dans le contexte RDT, des solutions très simples de (3.19) peuvent être trouvées si le membre de droite dépendant du temps s'annule. De tels modes correspondent à un vecteur d'onde purement transverse $\mathbf{k}(t) = (0, 0, k)$, obtenu avec la condition initiale $\boldsymbol{\alpha}(0) = 0$. Le champ de pression ne joue aucun rôle sur ces instabilités, solutions de

$$\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M}\mathbf{v} = 0$$

et qui prennent la forme simple: $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} e^{i\mathbf{k}z} \mathbf{v}_0$ avec

$$\sigma = \sqrt{\epsilon^2 - \gamma_t^2} \quad (3.20)$$

où $\gamma_t = \gamma + 2\Omega$ est la moitié de la vortacité de tilt de l'écoulement quadratique. Ces perturbations sans-pression (cependant exactes) sont amplifiées si $|\epsilon| > |\gamma + 2\Omega|$ et neutres sinon. En raison du fait qu'elles ne sont pas spatialement localisées dans le plan (x, y) , ces perturbations sans-pression ne semblent pas avoir d'interprétation physique. Bien entendu, sans force de Coriolis, elles sont neutres dans

le cas elliptique $|\gamma| > |\epsilon|$: l'instabilité ne se produit que pour des vecteurs d'onde obliques (Bayly 1986). Mais, en accord avec Lagnado *et al.* (1984), elles sont amplifiées dans le cas hyperbolique $|\gamma| < |\epsilon|$. De plus, dans un repère tournant, elles sont amplifiées quand le taux de rotation est compris dans l'intervalle :

$$|\gamma| - |\epsilon| < 2\Omega < |\gamma| + |\epsilon|,$$

où, sans perte de généralité, ϵ et γ sont négatifs afin d'être cohérents avec (3.3). Et sur cette bande, l'intégration numérique du problème de Floquet (3.19) dans le cas elliptique par Cambon *et al.* (1994) montre qu'elles sont les plus amplifiées (voir leurs figures 4 c-e). Par inspection de l'équation de perturbation de vorticité, ils ont montré que le cas de vorticité absolue nulle ($\gamma + \Omega = 0$) est neutre si $|\gamma| \geq |\epsilon|$.

3.8.3 L'effet accordeur de la force de Coriolis

Le rôle de ces instabilités quadratiques sur les tourbillons de Stuart est illustré sur la figure 3.12. Le taux de croissance analytique des perturbations avec un vecteur d'onde purement transverse (3.20) est tracé pour les régions hyperboliques et les cœurs elliptiques caractérisés par (3.2) et (3.3). La comparaison est faite avec les modes propres tridimensionnels sous-harmoniques à onde-courte des tourbillons de Stuart. Les deux maxima d'instabilité dans l'intervalle instable, déjà observé sur les figures 3.9 et 3.11 à grand nombre d'onde transverse k , correspondent en fait à deux mécanismes distincts en compétition : les instabilités hyperboliques et elliptiques. Pour des faibles rotations cycloniques ou anticycloniques, les instabilités d'onde-courte sont dans la région hyperbolique, comme dans le cas non-tournant. Cette instabilité est remplacée par l'instabilité elliptique pour des rotations anticycloniques ($\Omega > 0$) plus fortes. Ceci illustre encore le rôle d'accordeur (« tuner ») de la force de Coriolis, qui sélectionne et/ou tue les différents types d'instabilité.

Dans le cas non-tournant, le taux de croissance maximal de l'instabilité elliptique avec un vecteur d'onde oblique est également tracé sur la figure 3.12. Les résultats viennent de la figure 1 de Landman & Saffman (1987) : leur paramètre d'excentricité « β » correspond à ϵ/γ donné par (3.3) pour les cœurs elliptiques, et leur taux de croissance adimensionnel « σ_I » doit être multiplié par γ . Rappelons que Waleffe (1989, 1990) a montré que, à faible ellipticité, le taux de croissance adimensionnel se comporte comme $\frac{9}{16}\epsilon/\gamma$. Pour les tourbillons de Stuart, la figure 3.12 est une illustration qu'à onde-courte, l'instabilité est gouvernée par les régions hyperboliques plutôt qu'elliptiques, comme l'a déjà montré qualitativement SP94. Ce résultat ne remet pas en cause l'« universalité » de l'instabilité elliptique, mais montre simplement le rôle crucial des points de stagnation hyperboliques complètement oubliés dans les mécanismes de base des instabilités secondaires dans les écoulements cisailés (voir par exemple Bayly *et al.* 1988).

L'optique géométrique (LH91) permet bien entendu d'obtenir les mêmes résultats en intégrant les équations eikonale et de transport sur les points de stag-

nation. En particulier, comme on l'a vu au chapitre précédent (ou Leblanc 1997) pour un vecteur d'onde purement transverse, le taux de croissance de l'amplitude des modes sans-pression peut être explicitement calculé. Concernant les tourbillons de Stuart, aux points de stagnation, le discriminant généralisé (3.8) s'écrit respectivement :

$$\begin{cases} \Phi_E = \{2\Omega - \rho/(1 - \rho)\}\{2\Omega - 1/(1 - \rho)\}, \\ \Phi_H = \{2\Omega + \rho/(1 + \rho)\}\{\Omega - 1/(1 + \rho)\}, \end{cases}$$

et le taux de croissance (en représentation Eulérienne et Lagrangienne, voir chapitre précédent) de ces instabilités d'onde-courte est $\sqrt{-\Phi_{E,H}}$, donc identique aux taux de croissance des modes quadratiques donné par (3.20), et tracé sur la figure 3.12. Ceci fournit un lien direct entre cette théorie récente et les méthodes spectrales classiques, et permet de vérifier quantitativement qu'une amplitude exponentiellement croissante implique l'existence d'une valeur propre instable du problème spectral (obtenue ici pour $k \gg 1$)

3.8.4 Rôle de la viscosité

Quand $\rho = 0$ (figure 3.12 *a*), les calculs correspondent aux modes obliques avec $\alpha = 1/2$ de la couche de mélange en tangente hyperbolique, étudiée d'abord par Johnson (1963) et reconsidérée par Yanase *et al.* (1993) en incluant les effets visqueux. L'écoulement de base parallèle n'a plus de point de stagnation, ni elliptique, ni hyperbolique, et les deux bandes distinctes d'instabilité sont confondues dans l'intervalle $0 < \Omega < 1/2$, en accord avec le critère de Pedley. Le comportement des modes obliques d'onde-courte est similaire à celui des modes purement transverses (figure 3.3), dont le comportement à onde-courte est donné par l'analyse sans-pression (LC97). Dans le cas visqueux, une coupure devrait se produire au-delà d'un nombre d'onde transverse critique comme l'ont noté Lagnado *et al.* (1984), Craik & Criminale (1986) et Landman & Saffman (1987) pour les écoulements quadratiques. Pour des écoulements non-homogènes, ce mécanisme de coupure visqueuse conduit à la sélection d'un nombre d'onde transverse auquel l'instabilité se produit (Yanase *et al.* 1993). Le même mécanisme se produit dans la classique instabilité de Rayleigh–Taylor (voir Drazin & Reid 1981) pour laquelle la viscosité sélectionne le nombre d'onde critique.

Ce même mécanisme de coupure visqueuse a été aussi observé pour les rouleaux de Kelvin–Helmholtz (SP94). Même si la viscosité sélectionne le nombre d'onde transverse correspondant à l'instabilité maximale, les modes associés restent très proches (taux de croissance et topologie identiques). En l'absence de viscosité, la coupure visqueuse disparaît, et aucune longueur d'onde n'est privilégiée, le nombre d'onde le plus instable tendant plutôt vers $+\infty$. Mais les mécanismes visqueux d'instabilité (à haut Reynolds) sont similaires aux mécanismes non-visqueux (pour ce type d'instabilité tridimensionnelle).

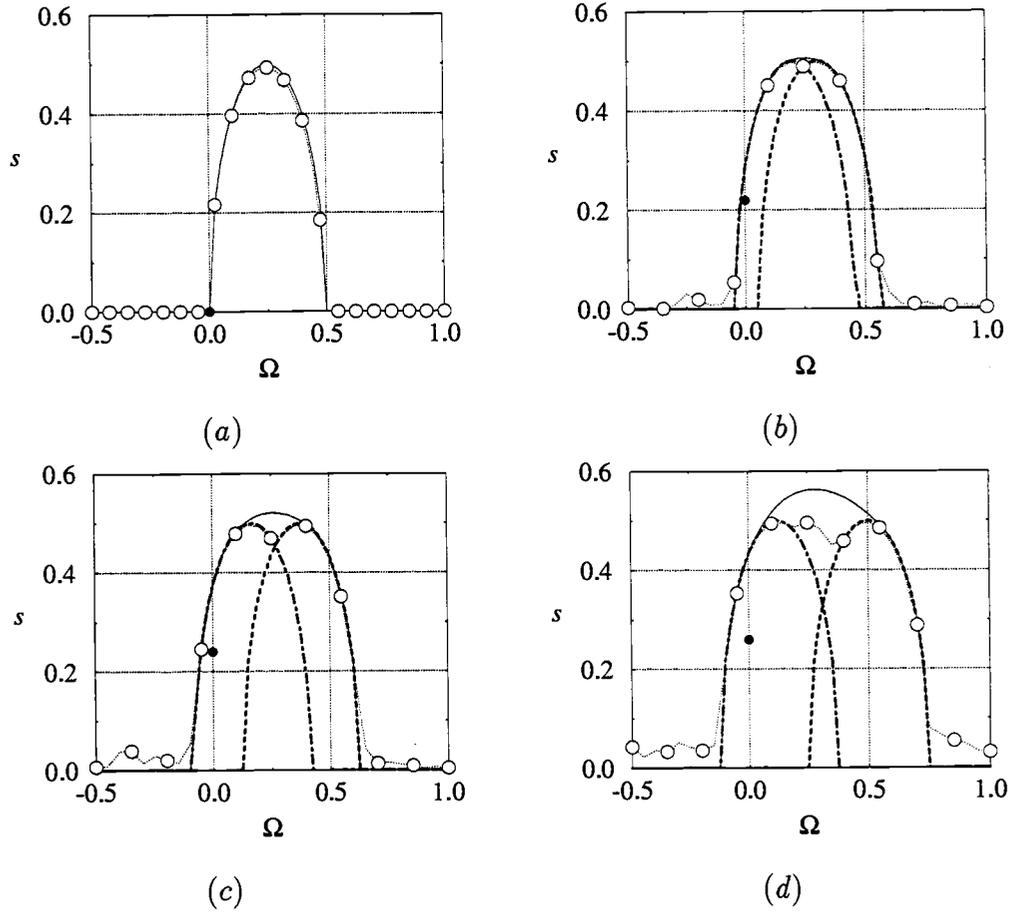


FIG. 3.12 – Comparaison entre les instabilités sous-harmoniques pour $k = 100$ (---○---), les instabilités quadratiques avec un vecteur d'onde purement transverse (hyperboliques, ---- ; elliptiques,) et le critère d'instabilité (——). (a) $\rho = 0$; (b) $\rho = 1/10$; (c) $\rho = 1/5$; (d) $\rho = 1/3$. Les • correspondent au taux de croissance maximum de l'instabilité elliptique avec un vecteur d'onde dépendant du temps (d'après Landman & Saffman 1987).

3.8.5 Un critère général pour les écoulements complexes ?

Finalement, LC97 ont suggéré que le critère étendu pourrait être valable pour n'importe quel écoulement complexe non-visqueux, c'est à dire $\Phi(x, y) < 0$ *quelque part* implique l'instabilité. Le point de départ est l'équation sans-pression (3.17), qui, en représentation Lagrangienne contient des coefficients dépendants du temps. Si les lignes de courant sont fermées, une analyse de Floquet sur les lignes de courant est nécessaire (Bayly 1988, 1989; Sipp & Jacquin 1997).

Le problème sans-pression (3.17) contient l'opérateur convectif $U \cdot \nabla(\)$. Assurément, s'il ne peut être supprimé ou diagonalisé dans la même base que le tenseur inertiel, comme l'a mentionné Bayly (1988), rien ne peut être conclu sur

le comportement temporel des perturbations, même pour les modes sans-pression. Sur la figure 3.12 (lignes fines continues) est tracé le taux maximal de croissance temporelle du simple problème linéaire $\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} = 0$, donné par :

$$\max_{(x,y)} \sqrt{-\Phi(x,y)}.$$

On peut voir que le critère est en bon accord avec les calculs de stabilité linéaire: la bande instable contient les deux types d'instabilité (hyperbolique et elliptique). La magnitude des taux de croissance des modes d'onde-courte (ou sans-pression) est aussi en bon accord avec les prédictions théoriques. Ce n'est peut-être qu'un résultat anecdotique, mais ce critère a également été testé avec succès sur des tourbillons de Taylor–Green et Mallier–Maslowe, tous deux dans des repères tournants (ou pas).

Ceci illustre le rôle de l'opérateur convectif sur la stabilité linéaire d'écoulements tourbillonnaires complexes. Rappelons que pour des écoulements simples soumis à rotation (écoulements cisailés parallèles, tourbillons circulaires et écoulements quadratiques), l'opérateur de convection peut toujours être supprimé par un choix judicieux du vecteur d'onde de la perturbation, et ainsi, le taux de croissance des modes d'onde-courte ou sans-pression est donné *exactement* par l'expression ci-dessus.

3.9 Rotation rapide

3.9.1 Stabilisation

En rotation rapide (cyclonique ou anticyclonique), la bande instable se rétrécit près de l'axe $k = 0$, comme l'illustre la figure 3.13 (a). Les instabilités tridimensionnelles sont ainsi stabilisées par des forts taux de rotation, et seuls les modes de Floquet bidimensionnels (non-affectés par la force de Coriolis) survivent (les modes sous-harmoniques). Ceci peut être interprété comme une manifestation du théorème de Taylor–Proudman, comme l'ont discuté récemment SP94, Stegner *et al.* (1995), Carnevale *et al.* (1997) et Ern (1997). Pour un cœur de tourbillon elliptique, Lebovitz & Lifschitz (1996) ont montré que l'instabilité est tuée dans la limite $\Omega \rightarrow +\infty$.

D'après Batchelor (1967, p. 558), le théorème de Taylor–Proudman établit que: *les mouvements stationnaires à faible nombre de Rossby (rotation rapide) doivent être la superposition d'un mouvement bidimensionnel dans le plan (x, y) et d'un mouvement transverse indépendant de z .* Comme nous l'avons mentionné dans la présentation, la transition vers une turbulence bidimensionnelle et l'émergence de tourbillons est hors de sa portée, parce que cela met en jeu des mécanismes non-linéaires complexes. Ainsi, pour une turbulence homogène en rotation, la bidimensionnalisation est équivalente à la concentration de la densité spectrale

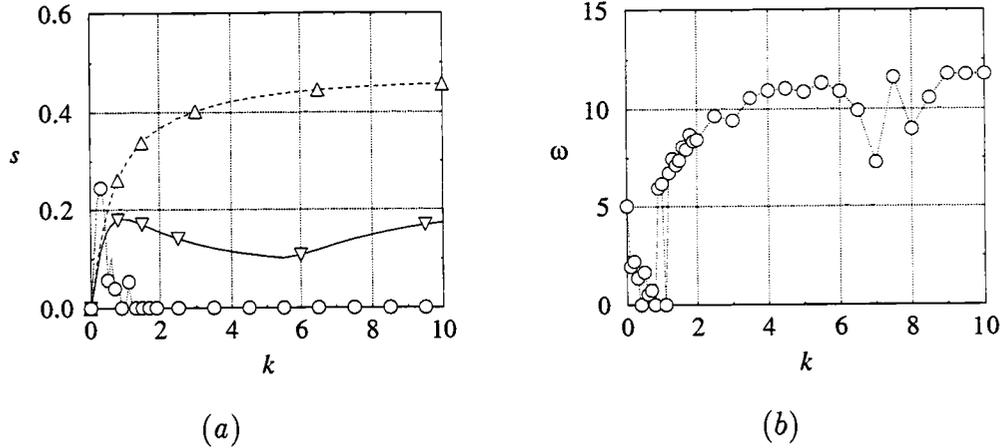


FIG. 3.13 – Modes fondamentaux pour $\rho = 1/10$ pour divers taux de rotation ($\Omega = 0$, \circ ; $\Omega = 1/4$, \triangle ; $\Omega = 5$, ∇). (a) taux de croissance ; (b) fréquence.

d'énergie vers le « sous-espace bidimensionnel », caractérisé par $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, où \mathbf{k} est le vecteur d'onde tridimensionnel dans l'espace spectral. D'un point de vue spectral, le théorème de Taylor–Proudman dit simplement que le « sous-espace lent » (le mode stationnaire du régime linéaire) est celui qui est bidimensionnel ($\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$), mais expliquer le décalage angulaire de l'énergie vers le sous-espace bidimensionnel est hors de sa portée (voir Waleffe 1993 ; Babin *et al.* 1996 ; Cambon *et al.* 1997).

La figure 3.13 (a) illustre aussi l'influence déstabilisante de la force de Coriolis pour une faible rotation anticyclonique, en comparaison avec le cas non-tournant. Ce dernier cas ($\Omega = 0$) illustre encore le rôle de l'instabilité liée aux points de stagnation hyperboliques qui devient dominante à onde-courte ($k > 5.5$, au-dessus duquel s croît avec k), alors que le cas déstabilisant ($\Omega = 1/4$) reste dominé par les modes elliptiques.

3.9.2 Ondes d'inertie

Même si les modes tridimensionnels tendent à être neutres ($s = \text{Re}(\sigma) \rightarrow 0$) sous rotation rapide, leur fréquence $\omega = \text{Im}(\sigma)$ est proche de 2Ω , comme cela est illustré par la figure 3.13 (b). Ceci n'est pas réellement surprenant puisque pour des instabilités d'onde-courte $k \gg 1$, à forte rotation $|\Omega| \gg k$, en négligeant tous les termes en gradient (avec des dérivées spatiales), le problème spectral se réduit à

$$\sigma \tilde{\mathbf{v}}(x, y) + \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}(x, y) = 0$$

avec \mathbf{C} le tenseur de Coriolis défini par (3.7). Les valeurs propres sont $\sigma = \pm 2\Omega i$. Ces modes neutres peuvent être interprétés comme des ondes d'inertie (Greenspan 1969). En effet, dans un écoulement infini au repos dans un repère tournant, des

ondes inertielles planes se propagent, avec la relation de dispersion suivante : $\omega = \pm 2\Omega \cos \theta$, où θ est l'angle entre le vecteur d'onde (constant) et l'axe de rotation.

Pour un vecteur d'onde aligné à l'axe de rotation, la fréquence est $\omega = \pm 2\Omega$; le champ de pression ne joue aucun rôle, et la vitesse de groupe s'annule, montrant que de telles ondes d'inertie ne propagent pas d'énergie. La figure 3.13 semble établir leur existence. Récemment, Carnevale *et al.* (1997) ont observé des ondes d'inertie circulaires soumis à une rotation rapide.

3.10 Conclusion

Une étude détaillée des effets de la force de Coriolis sur les instabilités linéaires tridimensionnelles des tourbillons de Stuart a été effectuée. Cette solution exacte non-visqueuse décrit une allée de tourbillons corotatifs plongée dans un écoulement cisailé. Quand l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de l'écoulement de base, l'analyse de stabilité se réduit à un problème aux valeurs propres pour les versions non-parallèles des équations couplées d'Orr-Sommerfeld et de Squire, qui a été résolu numériquement par une méthode spectrale.

Les résultats peuvent être résumés comme suit :

- *Stabilisation et déstabilisation* : comme cela a été observé dans diverses expériences et montré analytiquement pour des écoulements de base simples (tourbillons circulaires, écoulements cisailés parallèles, écoulements quadratiques infinis), la force de Coriolis joue un rôle stabilisant ou déstabilisant, par rapport au cas non-tournant. Les anticyclones forts sont instables.
- *Instabilités d'onde-courte* : dans la bande instable, des instabilités tridimensionnelles non-visqueuses sont excitées, et à grand nombre d'onde transverse, leur comportement temporel tend asymptotiquement vers une valeur constante, donnée par l'analyse sans-pression. Ce comportement d'onde-courte (dans la direction transverse) est cohérent avec les instabilités induites par les forces centrifuges et de Coriolis.
- *Instabilités hyperbolique et elliptique* : elles sont générées par les points de stagnation de la fonction de courant de Stuart, et sont en compétition sous l'effet de la force de Coriolis. En particulier, pour le cas non-tournant, les modes de Floquet fondamentaux et sous-harmoniques ont un taux de croissance donné par la stabilité de l'écoulement quadratique infini avec des lignes de courant hyperboliques. Par contre, pour des faibles rotations anticycloniques, les modes propres d'onde-courte se comportent comme l'instabilité du tourbillon elliptique infini soumis à rotation.
- *La théorie de Lifschitz & Hameiri (1991)* : la méthode de stabilité d'optique géométrique donne un cadre théorique aux résultats exposés ci-dessus, puis-

qu'elle considère les propriétés topologiques locales de l'écoulement de base. Quand on l'applique aux points de stagnation, on retrouve les propriétés de stabilité des écoulements quadratiques. Elle fournit enfin une jonction entre ces différents champs d'investigation de la mécanique des fluides, c'est à dire la théorie de stabilité hydrodynamique (via les méthodes spectrales) et la modélisation de la turbulence (via la RDT).

- *Le discriminant général* : le second invariant du tenseur inertiel (la somme du gradient de la vitesse de base et du tenseur de Coriolis) donne une bonne prédiction de la bande instable des perturbations d'onde-courte (avec ou sans force de Coriolis). Rappelons qu'il donne les bornes exactes sur les points de stagnation et pour des écoulements de base simples (tourbillons circulaires, écoulements cisailés parallèles, écoulements quadratiques).
- *Ondes d'inertie* : en rotation rapide cyclonique ou anticyclonique (faible nombre de Rossby), les instabilités tridimensionnelles deviennent neutres, et grâce à leur fréquence, peuvent être interprétées comme des ondes d'inertie. Un comportement similaire a été trouvé pour les tourbillons monopôlares soumis à une forte rotation. Les instabilités bidimensionnelles (les modes d'appariement) ne sont, bien entendu, pas affectées par la force de Coriolis.

Toutes ces caractéristiques pourraient être génériques à la stabilité linéaire des tourbillons non-visqueux bidimensionnels dans un fluide tournant. La force de Coriolis apparaît être un catalyseur de modes d'onde-courte et/ou sans-pression, qui sont excités ou « tuned » (resp. amortis ou « detuned ») pour une rotation stabilisante (resp. déstabilisante).

Perspectives

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont permis de caractériser les effets de la force de Coriolis sur les instabilités linéaires tridimensionnelles dans des écoulements stationnaires bidimensionnels dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, en utilisant différentes méthodes.

Pour des topologies simples (tourbillons circulaires et écoulements cisailés), et en s'inspirant des travaux de Bayly (1988), certaines valeurs propres du spectre de l'opérateur linéaire ont pu être approchées analytiquement en ramenant le problème aux valeurs propres de type Sturm–Liouville à l'équation de « l'oscillateur quantique harmonique », dont les modes propres sont connus, et localisés sur les lignes de courant. Pour les écoulements plans de type quadratique (elliptique, hyperbolique ou cisaillement uniforme), la représentation de la perturbation sous la forme de « mode de Fourier Lagrangien » (avec un vecteur d'onde déformé) permet de caractériser simplement les effets stabilisants ou déstabilisants de la force de Coriolis. De plus, le paradoxe de l'argument de la « particule déplacée » (Tritton & Davies 1981) a été levé, permettant d'associer définitivement cette méthode semi-empirique et la dérivation exacte du critère (Pedley 1969). L'argument de la « particule déplacée » considérait en effet une perturbation bidimensionnelle pour prouver l'instabilité des écoulements cisailés à lignes de courant parallèle en rotation, alors que l'on sait que ce type de perturbation *n'est pas affecté par la force de Coriolis*. Cependant, en justifiant rigoureusement la validité de l'analyse simplifiée « sans-pression », il a alors été possible de lever ce paradoxe (Leblanc & Cambon 1997).

Pour des écoulements à topologie complexe, la théorie de Lifschitz & Hameiri (1991) permet d'exprimer des conditions suffisantes d'instabilité pour des perturbations de type onde-courte. Appliquée aux points de stagnation (points d'arrêt) d'un écoulement stationnaire dans un repère en rotation, un critère de stabilité a pu être dérivé (Leblanc 1997), en accord avec les résultats connus de la théorie de la distorsion rapide (Cambon *et al.* 1985, 1994). La méthode « d'optique géométrique », on l'a vu, permet de ramener l'étude de stabilité d'un écoulement complexe, à une « collection » d'écoulements simples dont les caractéristiques sont connues. Ainsi, tout écoulement plan stationnaire peut être vu comme un ensemble comportant des points de stagnation de tous types (hyperboliques, elliptiques ou rectilinéaires), des zones tourbillonnaires à lignes de courant circulaires

et circulation décroissante, des zones de cisaillement ou autres, de façon à respecter les contraintes topologiques dues à l'incompressibilité du fluide considéré. Par conséquent, le problème initialement complexe, se ramène à une collection de problèmes « simples », en tout cas connus et résolus, comme les instabilités elliptique et hyperbolique, ou comme le critère de Rayleigh pour l'instabilité centrifuge. Cette idée confirme un principe essentiel en Physique qui est qu'il est nécessaire de s'attaquer à des situations simples, avant d'essayer de résoudre des problèmes compliqués. Et dans certains contextes, ces modèles simples peuvent s'avérer d'excellents prototypes des phénomènes rencontrés dans les systèmes complexes. L'instabilité elliptique en repère fixe (Bayly *et al.* 1988), et plus généralement les instabilités quadratiques en repère tournant (Cambon *et al.* 1994), en sont des illustrations flagrantes.

Le spectre d'un écoulement complexe peut aussi être approché numériquement, à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale de collocation par exemple. Ceci a été effectué pour les tourbillons de Stuart (1967). Il a été vérifié que le spectre possède les valeurs propres (connues analytiquement) des instabilités hyperbolique et elliptique pour certains taux de rotation, en accord avec l'optique géométrique. Le critère de stabilité pour les points de stagnation a pu être confirmé par les calculs spectraux (Leblanc & Cambon 1998). Dans cet exposé, l'accent a été mis sur les instabilités de courte échelle spatiale (grand nombre d'onde). Ceci provient du fait que les équations d'Euler permettent de localiser infiniment les perturbations. En présence de viscosité, l'opérateur Laplacien « coupe » les grands nombres d'onde, mais les résultats ici présentés restent qualitativement valables à grand nombre de Reynolds. Des travaux restent à effectuer pour caractériser l'évolution non-linéaire de ces perturbations localisées, ainsi que leur rôle sur le phénomène de transition vers la Turbulence. En particulier, il reste à caractériser de façon plus précise l'instabilité hyperbolique, qui, on l'a vu joue un rôle au moins aussi important que l'instabilité elliptique, que ce soit en repère fixe ou tournant ; elle est en particulier responsable des « braids » ou « ribs » (tourbillons longitudinaux) présents dans les écoulements cisailés libres (couches de mélange par exemple, Ho & Huerre 1984).

Il resterait également à étudier la validité de l'optique géométrique pour des écoulements non-intégrables ou à lignes de courant chaotiques. L'intégration des équations eikonale et de transport a-t-elle encore un sens le long de trajectoires erratiques ? Ainsi, l'écoulement ABC (Arnold–Beltrami–Childress) présente-t-il des lignes de courant non-intégrables, au voisinage des points de stagnation hyperboliques (tridimensionnels) pour certains paramètres de l'écoulement. Ces zones de contraction/extension, avec un ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs, jouent d'ailleurs un rôle majeur dans les phénomènes de « mélange chaotique » et de transport de scalaire passif (Ottino 1989), mais aussi dans la « dynamo rapide », i.e. l'amplification spontanée d'un champ magnétique dans un fluide conducteur à grand nombre de Reynolds magnétique (Childress & Gilbert 1995), mais ceci est une autre histoire.

Par manque de recul, il est pour l'instant difficile d'évaluer tout l'impact de la « théorie de stabilité d'optique géométrique ». Certains points restent obscurs, comme par exemple les liens possibles avec les concepts d'instabilité « convective », « absolue », « locale » ou « globale » (voir la revue de Huerre & Monkewitz 1990), ou la transition « bypass », les modes non-normaux et les croissances algébriques (Henningson 1995 ; Waleffe 1995). Même si cette méthode ne concerne que des perturbations de courte longueur d'onde et n'est donc pas capable de prédire des instabilités bidimensionnelles de type Kelvin-Helmholtz (voir par exemple Drazin & Reid 1981), il est cependant clair qu'elle a ouvert une nouvelle brèche dans l'étude des instabilités hydrodynamiques.

Références

- BABIN, A., MAHALOV, A. & NICOLAENKO, B. 1996 Global splitting, integrability and regularity of 3D Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating fluids. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **15** (3), 291–300.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge.
- BATCHELOR, G. K. & PROUDMAN, I. 1954 The effect of rapid distortion on a fluid in turbulent motion. *Q. J. Mech. Appl. Maths* **7**, 83–103.
- BAYLY, B. J. 1986 Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160–2163.
- BAYLY, B. J. 1988 Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows. *Phys. Fluids* **31**, 56–64.
- BAYLY, B. J. 1989 Computations of broad band instabilities in a class of quasi-two-dimensional flows. In *Mathematical Aspects of Vortex Dynamics* (ed. R. E. Caflisch), pp. 50–58. SIAM.
- BAYLY, B. J., HOLM, D. D. & LIFSCHITZ, A. 1996 Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 895–926.
- BAYLY, B. J., ORSZAG, S. A. & HERBERT, T. 1988 Instability mechanisms in shear-flow transition. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 359–391.
- BENDER, C. M. & ORSZAG, S. A. 1978 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw–Hill.
- BIDOKHTI, A. A. & TRITTON, D. J. 1992 The structure of a turbulent free shear layer in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **241**, 469–502.
- BOTTARO, A., KLINGMANN, G. B. & ZEBIB, A. 1996 Görtler vortices with system rotation. *Theo. Comp. Fluid Dyn.* **8**, 325–347.
- BOYD, J. P. 1987 Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval. *J. Comput. Phys.* **69**, 112–141.
- CAMBON, C. 1982 Etude spectrale d'un champ turbulent incompressible soumis à des effets couplés de déformation et de rotation imposés extérieurement. Thèse de Doctorat, Université Lyon I, France.
- CAMBON, C., BENOÎT, J.-P., SHAO, L. & JACQUIN, L. 1994 Stability analysis and large eddy simulation of rotating turbulence with organized eddies. *J. Fluid Mech.* **278**, 175–200.
- CAMBON, C., MANSOUR, N. N. & GODEFERD, F. S. 1997 Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* **337**, 303–332.
- CAMBON, C., TEISSÈDRE, C. & JEANDEL, D. 1985 Etude d'effets couplés de déformation et de rotation sur une turbulence homogène. *J. Méc. Théo. Appl.* **4**, 629–657.

- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer.
- CARNEVALE, G. F., BRISCOLINI, M., KLOOSTERZIEL, R. C. & VALLIS, G. K. 1997 Three-dimensionally perturbed vortex tubes in a rotating flow. *J. Fluid Mech.* **341**, 127–163.
- CARNEVALE, G. F. & KLOOSTERZIEL, R. C. 1994 Emergence and evolution of triangular vortices. *J. Fluid Mech.* **259**, 305–331.
- CHILDRESS, S. & GILBERT, A. D. 1995 *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo*. Springer.
- COURANT, R. & HILBERT, D. 1962 *Methods of Mathematical Physics*. Interscience.
- CRAIK, A. D. D. 1989 The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: some exact solutions. *J. Fluid Mech.* **198**, 275–292.
- CRAIK, A. D. D. & CRIMINALE, W. O. 1986 Evolution of wavelike disturbances in shear flows: a class of exact solutions of the Navier–Stokes equations. *Proc. R. Soc. Lond. A* **406**, 13–26.
- CRAYA, A. 1958 Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes. *P. S. T. Ministère de l'Air* **345**.
- DOWLING, T. E. 1995 Dynamics of jovian atmospheres. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **27**, 293–334.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge.
- DURBIN, P. A. & HUNT, J. C. R. 1980 On surface pressure fluctuations beneath turbulent flow round bluff bodies. *J. Fluid Mech.* **100**, 161–184.
- ERN, P. 1997 Instabilités d'écoulements périodiques en temps avec effets de courbure et de rotation. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, France.
- FABIJONAS, B. 1997 Secondary instabilities of linear flows with elliptic streamlines. Ph. D. thesis, University of Illinois at Chicago, U. S. A.
- FLIERL, G. R., STERN, M. E. & WHITEHEAD, J. A. 1983 The physical significance of modons: laboratory experiments and general integral constraints. *Dyn. Atmos. Oceans* **7**, 233–264.
- FRIEDLANDER, S. & VISHIK, M. M. 1991 Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2204–2206.
- GENCE, J.-N. & MATHIEU, J. 1980 On the application of successive plane strains to grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.* **189**, 53–86.
- GLEDZER, E. B. & PONOMAREV, V. M. 1992 Instability of bounded flows with elliptical streamlines. *J. Fluid Mech.* **93**, 501–513.
- GREENSPAN, H. P. 1969 *The theory of Rotating Fluids*. Cambridge.
- HEIJST, G. J. F. VAN, KLOOSTERZIEL, R. C. & WILLIAMS, C. W. M. 1991 Laboratory experiments on the tripolar vortex in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **225**, 301–322.
- HENNINGSON, D. 1995 Bypass transition and linear growth mechanisms. In *Advances in Turbulence V* (ed. R. Benzi), pp. 190–204. Kluwer.
- HERBERT, T. 1983 Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances. *Phys. Fluids* **26**, 871–874.
- HERBERT, T. 1988 Secondary instability of boundary layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 487–526.

- HERBERT, T., BERLOTTI, F. P. & SANTOS, G. R. 1987 Floquet analysis of secondary instability in shear flows. In *Proc. ICASE/NASA Workshop Stability Time-Dependent Spatially Varying Flows* (ed. D. L. Dwoyer & M. Y. Hussaini). pp. 43–57. Springer.
- HO, C.-M. & HUERRE, P. 1984 Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16**, 365–424.
- HOPFINGER, E. J., BROWAND, F. K. & GAGNE, Y. 1982 Turbulence and waves in a rotating tank. *J. Fluid Mech.* **125**, 505–534.
- HOPFINGER, E. J. & HEIJST, G. J. F. VAN 1993 Vortices in rotating fluids. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **25**, 241–289.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- JACQUIN, L., LEUCHTER, O., CAMBON, C. & MATHIEU, J. 1980 Homogeneous turbulence in the presence of rotation. *J. Fluid Mech.* **220**, 1–52.
- JOHNSON, J. A. 1963 The stability of shearing motion in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **17**, 337–352.
- KELLY, R. E. 1967 On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time. *J. Fluid Mech.* **27**, 657–689.
- KELVIN, LORD (W. THOMSON) 1887 Stability of fluid motion: rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates. *Phil. Mag.* **24**, 188–196.
- KLAASSEN, G. P. & PELTIER, W. R. 1985 The onset of turbulence in finite-amplitude Kelvin-Helmholtz billows. *J. Fluid Mech.* **155**, 1–35.
- KLAASSEN, G. P. & PELTIER, W. R. 1989 The role of transverse secondary instabilities in the evolution of free shear layers. *J. Fluid Mech.* **202**, 367–402.
- KLAASSEN, G. P. & PELTIER, W. R. 1991 The influence of stratification on secondary instability in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **227**, 71–106.
- KLOOSTERZIEL, R. C. 1990 Barotropic vortices in a rotating fluid. Ph. D. thesis, University of Utrecht, The Netherlands.
- KLOOSTERZIEL, R. C. & HEIJST, G. J. F. VAN 1991 An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **223**, 1–24.
- LAGNADO, R. R., PHAN-THIEN, N. & LEAL, L. G. 1984 The stability of two-dimensional linear flows. *Phys. Fluids* **27**, 1094–1101.
- LAMB, H. 1932 *Hydrodynamics*. Cambridge.
- LANDAHL, M. T. & MOLLO-CHRISTENSEN, E. 1986 *Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics*. Cambridge.
- LANDMAN, M. J. & SAFFMAN, P. G. 1987 The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid. *Phys. Fluids* **30**, 2339–2342.
- LASHERAS, J. C. & CHOI, H. 1988 Three-dimensional instability of a plane free shear layer: an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **189**, 53–86.
- LE DIZÈS, S., ROSSI, M. & MOFFATT, H. K. 1996 On the three-dimensional instability of elliptical vortex subjected to stretching. *Phys. Fluids* **8**, 2084–2090.
- LEBLANC, S. 1997 Stability of stagnation points in rotating flows. *Phys. Fluids* **9**, 3566–3569.

- LEBLANC, S. & CAMBON, C. 1996 Stability of the Stuart vortices in a rotating frame. In *Advances in Turbulence VI* (ed. S. Gavrilakis, L. Machiels & P. A. Monkewitz), pp. 351–354. Kluwer.
- LEBLANC, S. & CAMBON, C. 1997 On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force. *Phys. Fluids* **9**, 1307–1316 (LC97).
- LEBLANC, S. & CAMBON, C. 1998 Effects of the Coriolis force on the stability of Stuart vortices. *J. Fluid Mech.* (à paraître).
- LEBLANC, S. & GODEFERD, F. S. 1997 Coherence of vortices in a rotating fluid. In *11th Symposium on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France*.
- LEBOVITZ, N. R. & LIFSCHITZ, A. 1996 Short-wavelength instabilities of Riemann ellipsoids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 927–950.
- LESIEUR, M., YANASE, S. & MÉTAIS, O. 1991 Stabilizing and destabilizing effects of a solid-body rotation on quasi-two-dimensional shear layers. *Phys. Fluids A* **3**, 403–407.
- LEWEKE, T. & WILLIAMSON, C. H. K. 1997 Collaborative elliptic instability of a vortex pair. Soumis au *J. Fluid Mech.*
- LIFSCHITZ, A. 1991 Short wavelength instabilities of incompressible three-dimensional flows and generation of vorticity. *Phys. Lett. A* **157**, 481–487.
- LIFSCHITZ, A. 1994 On the stability of certain motions of an ideal incompressible fluid. *Adv. Appl. Math.* **15**, 404–436.
- LIFSCHITZ, A. & HAMEIRI, E. 1991 Local stability conditions in fluid dynamics. *Phys. Fluids A* **3** 2644–2651 (LH91).
- LIGHTHILL, J. 1978 *Waves in Fluids*. Cambridge.
- LOLLINI, L. 1997 Ondes et turbulence dans un écoulement confiné en rotation. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France.
- LUNDGREN, T. S. & MANSOUR, N. N. 1996 Transition to turbulence in an elliptic vortex. *J. Fluid Mech.* **307**, 43–62.
- MARCUS, P. S. 1993 Jupiter's Great Red Spot and other vortices. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 523–573.
- MELESHKO, V. V. & HEIJST, G. J. F. VAN 1994 On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.* **272**, 157–182.
- METCALFE, R. W., ORSZAG, S. A., BRACHET, M. E., MENON, S. & RILEY, J. J. 1987 Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **184**, 207–243.
- MICHALKE, A. 1964 On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19**, 543–556.
- MUTABAZI, I., NORMAND, C. & WESFREID, J. E. 1992 Gap size effects on centrifugally and rotationally driven instabilities. *Phys. Fluids A* **4**, 1199–1205.
- ORSZAG, S. A. & PATERA, A. T. 1981 Subcritical transition to turbulence in planar shear flows. In *Transition and Turbulence* (ed. R. E. Meyer). pp. 127–146. Academic.
- ORSZAG, S. A. & PATERA, A. T. 1983 Secondary instability of wall-bounded shear flows. *J. Fluid Mech.* **128**, 347–385.
- OTTINO, J. M. 1989 *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport*. Cambridge.

- PEDLEY, T. J. 1969 On the stability of viscous flow in a rapidly rotating pipe. *J. Fluid Mech.* **35**, 97–115.
- PIERREHUMBERT, R. T. 1986 Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157–2159.
- PIERREHUMBERT, R. T. & WIDNALL, S. E. 1982 The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer. *J. Fluid Mech.* **114**, 59–82.
- SAFFMAN, P. G. 1992 *Vortex Dynamics*. Cambridge.
- SAVILL, A. M. 1987 Recent developments in rapid distortion theory. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 531–575.
- SIPP, D. & JACQUIN, L. 1997 Elliptic instability in 2-D flattened Taylor–Green vortices. Soumis au *Phys. Fluids*.
- SMYTH, W. D. & PELTIER, W. R. 1994 Three-dimensionalization of barotropic vortices on the f -plane. *J. Fluid Mech.* **265**, 25–64 (SP94).
- STEGNER, A., OLLIVIER, M., ERN, P. & WESFREID, J. E. 1995 Influence de la rotation sur les instabilités centrifuges. In *12ème Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, France*.
- STUART, J. T. 1967 On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech.* **29**, 417–440.
- TOWNSEND, A. A. 1956 *The structure of turbulent shear flow*. 1976 *Revised version*. Cambridge.
- TRITTON, S. C. & DAVIES, P. A. 1981 Instabilities in geophysical fluid dynamics. In *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (ed. H. L. Swinney & J. P. Gollub). pp. 229–270. Springer.
- TSAI, C.-Y. & WIDNALL, S. E. 1976 The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.* **73**, 721–733.
- WALEFFE, F. 1989 The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence. Ph. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, U. S. A.
- WALEFFE, F. 1990 On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids A* **2**, 76–80.
- WALEFFE, F. 1993 Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. Fluids A* **5**, 677–685.
- WALEFFE, F. 1995 Hydrodynamic stability and turbulence: beyond transients to a self-sustaining process. *Stud. Appl. Math.* **95**, 319–343.
- WHITHAM, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience.
- WILLIAMSON, C. H. K. 1996 Three-dimensional wake transition. *J. Fluid Mech.* **328**, 345–407.
- YANASE, S., FLORES, C., MÉTAIS, O. & RILEY, J. J. 1993 Rotating free-shear flows. I. Linear stability analysis. *Phys. Fluids A* **5**, 2725–2737.

Annexe

Nous avons reproduit dans cette annexe deux travaux qui viennent compléter la présente étude. Le premier (Leblanc & Cambon 1997) est en quelques sortes un préliminaire à certaines notions utilisées dans ce manuscrit (analyse sans-pression, modes localisés, discriminant général). Les critères de Pedley et de Rayleigh généralisé sont revus en détail et la structure asymptotique des instabilités est donnée pour les grands nombres d'onde transverses. La condition d'instabilité pour les écoulements quadratiques (elliptique, hyperbolique ou cisaillement pur) est également rappelée. La seconde étude (Leblanc & Godefert 1997) propose des simulations numériques directes de tourbillons bidimensionnels de Taylor–Green perturbés tridimensionnellement et soumis à rotation. Elle a pour but d'évaluer la validité du critère proposé dans la thèse pour les points de stagnation en repère tournant. Les résultats sont en bon accord avec la théorie.

LEBLANC, S. & CAMBON, C. 1997 On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force. *Phys. Fluids* **9**, 1307–1316 (LC97).

LEBLANC, S. & GODEFERT, F. S. 1997 Coherence of vortices in a rotating fluid. In *11th Symposium on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France*.

On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force

Stéphane Leblanc and Claude Cambon

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR 5509 CNRS, Ecole Centrale de Lyon, BP 163, 69131 Ecully Cedex, France

(Received 9 October 1996; accepted 13 January 1997)

Linear stability of two-dimensional flows in a frame rotating with angular velocity vector $\Omega = \Omega e_z$ perpendicular to their plane is considered. Sufficient conditions for instability have been derived for simple inviscid flows, namely parallel shear flows (characterized by the "Pedley" or "Bradshaw-Richardson" number), circular vortices (by the "generalized Rayleigh" discriminant) and unbounded flows having a quadratic streamfunction (with elliptical, rectilinear or hyperbolic streamlines). These exact criteria are reviewed and contrasted using stability analysis for both three-dimensional disturbances and oversimplified "pressureless" versions of the linear theory. These suggest that one defines a general inviscid criterion for rotation and curvature, based on the sign of the second invariant of the "inertial tensor," and stating that, in a Cartesian coordinate frame: *a sufficient condition for instability is that $\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}S : S + \frac{1}{4}W_i \cdot W_i < 0$ somewhere in the flow domain.* It involves the "tilting vorticity" $W_i = W + 4\Omega$ [Cambon *et al.*, *J. Fluid Mech.* **278**, 175 (1994)] and the symmetric part S of the velocity gradient of the basic flow. © 1997 American Institute of Physics. [S1070-6631(97)03405-3]

I. INTRODUCTION

Rotation and curvature are important factors that modify stability and flow structure, and this has motivated studies in both stability analysis and turbulence modeling. It is commonly accepted that the Coriolis force plays a stabilizing or destabilizing influence on transitional or turbulent plane flows found in turbomachinery, geophysics or astrophysics, such as shear flows or large scale vortices. In search of a generalized criterion for the stability of quasi two-dimensional flows in planes perpendicular to the rotation vector Ω , this paper can be seen as a continuation of the works by Cambon *et al.*¹

Semi-empirical criteria were proposed independently in the domains of hydrodynamic stability and turbulence modeling. One of the most popular is based on the sign of the "Richardson" number introduced by Bradshaw.² Considering the rigorous analysis by Pedley³ for *parallel shear flows*, the criterion will be solely called "Pedley" in the following. It states that instability occurs locally when

$$2\Omega(2\Omega - d\bar{U}/dy) < 0,$$

where $\bar{U}(y)$ is the "mean" velocity measured in the rotating system, showing clearly the stabilizing or destabilizing influence of the Coriolis force. Another popular, and somewhat more physical, derivation of this criterion is Tritton's "displaced-particle" approach.^{4,5} In spite of its simplicity, this approach gave unexpectedly good predictions for transitional and turbulent plane channel flows, mixing layers and wakes in a rotating frame.⁶⁻¹³

Kloosterziel observed experimentally¹⁴ that "it was virtually impossible to create anticyclonic vortices in the rotating tank if one attempts to do so by simply stirring the fluid locally. But, cyclonic vortices are easily created in this way! In the anticyclonic case stirring does not lead to any well-defined, organized vortex flow—it leads to turbulent motion

and the generation of waves—whereas by cyclonically stirring a well-defined smooth vortex forms." (See also Kloosterziel and van Heijst.¹⁵) His observations were in agreement with previous laboratory experiments by Hopfinger, Brown, and Gagne¹⁶ and numerical simulations by Bartello, Métais, and Lesieur¹⁷ who pointed out that the difficulty in creating anticyclones at low Rossby number was partially due to the low Reynolds number. With a displaced-particle argument, Kloosterziel^{14,15} showed that the classical Rayleigh criterion for centrifugal instability may be extended in order to include the Coriolis force. This "generalized Rayleigh criterion" states that *the flow is unstable if the square of the absolute circulation decreases somewhere.* In analogy with the Pedley criterion, it compares in fact the relative vorticity of the basic flow to the rotation rate of the relative frame, but contains additional information about the curvature of the streamlines. Also derived analytically, and observed in various experiments or numerical simulations, this criterion provides a good estimate for the stabilizing and destabilizing influence of the Coriolis force on plane *circular vortices*^{18,19} and curved shear flows.²⁰⁻²⁴

Another exact instability criterion may be derived for the class of unbounded *quadratic flows*, studied first in the context of rapid distortion theory of homogeneous turbulence and then, extensively in hydrodynamic stability with the so-called "elliptical instability."²⁵⁻³⁰ Recall that the rapid distortion theory for homogeneous turbulence, initiated by Batchelor and Proudman,³¹ has the same starting point as a straightforward linear analysis of three-dimensional disturbances in term of time-dependent Fourier modes (sometime called Kelvin's waves), but subsequent applications concern prediction of second-order, two- and single-point statistics for the fluctuating velocity and pressure field. In this context, quadratic flows have been extensively explored^{32,33} as reviewed in Ref. 1. Dynamics of Reynolds stress tensor equations was also directly analyzed³⁴ including analysis of pres-

sure and related pressure-strain correlations, with similar directions, and preliminary works³⁵ aim at reconciling hydrodynamic stability, rapid distortion theory and Reynolds stress tensor modeling. Coming back to the context of linear stability analysis of quadratic flows in a rotating frame, an exact instability criterion may be derived for certain class of perturbations, having a wave vector aligned with the rotation axis. It compares the vorticity and the strain rate of the basic flow to the rotation rate of the relative frame.

The present work makes the link between these classical instability criteria and shows that they may be expressed by the sign of the second invariant of the *inertial tensor*. And it will be shown (or recalled) that, when instability occurs, it is possible to construct *three-dimensional* modes for which the pressure contribution plays no role. The first step in this direction was done by Bayly³⁶ (referred after as B88) who showed that centrifugal instability in an inertial frame (the Rayleigh criterion) leads to strongly localized three-dimensional eigenmodes described at first order by the “unphysical pressure-free” solution. He also extended the classical Rayleigh criterion to the general class of flow having closed convex streamlines. Thus curvature promotes *pressureless* (using the terminology of the turbulence modeling community) instabilities, and in the present paper, it will be shown that background rotation does so. It is important to distinguish “pressureless” from “without pressure” dynamics, the latter consisting in crudely dropping out pressure from the equations, disregarding the incompressibility constraint. It will be verified that the pressureless modes involve only *two-components* velocity field, in spite of their *three-dimensional* nature. And thus, exact derivations, pressureless analyses and displaced-particle arguments may be linked. Indeed, the paradox introduced by the displaced-particle approach to derive the Pedley and the generalized Rayleigh criteria, now disappears: The fact that the motion of the fluid particle lies in the plane of the basic flow, whereas three-dimensional motions are necessary for instability to occur, is consistent with the possible construction of two-components pressureless instabilities.

These notions will be used throughout the present paper, which is organized as follows. Section II introduces background equations for full and disturbance fields, in which are displayed absolute and tilting vorticities. Definitions of the general discriminant for a plane basic flow and of pressureless perturbations are also given, and applied to known cases: Parallel shear flows and circular vortices, in a rotating frame, are revisited in Secs. III and IV respectively; and the linear stability of rotating quadratic flows is surveyed in Sec. V.

II. MATHEMATICAL BACKGROUND

For an observer in a coordinate frame uniformly rotating at a constant angular velocity Ω , the motion of an incompressible fluid is governed by Navier-Stokes and continuity equations, written in dimensional form:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \pi = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - 2\Omega \times \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

where \mathbf{u} is the *relative velocity* field, $\pi = p/\rho - \frac{1}{2} |\Omega \times \mathbf{x}|^2 + \phi$ is the *modified pressure* including the potentials

associated with centrifugal force and other conservative body forces (per unit mass). In the rhs $-2\Omega \times \mathbf{u}$ is the Coriolis force.

A. Absolute and tilting vorticity

The *relative vorticity* $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ is governed by the Helmholtz equation:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega},$$

involving the *absolute vorticity*

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} + 2\Omega,$$

well known in geophysics. Indeed, for an inviscid fluid, Kelvin's theorem states that the absolute circulation is conserved following the relative motion of the flow and then, absolute vortex tubes move with the fluid.³⁷

The Poisson equation involving the modified pressure π reads, in the presence of Coriolis force,

$$\nabla^2 \pi = -S : S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_t \cdot \boldsymbol{\omega},$$

where $S : S = S_{ij} S_{ij}$ and $S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ the symmetric rate-of-strain tensor. In the above equation, the *tilting vorticity*

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} + 4\Omega$$

introduced by Cambon *et al.*¹ plays a major role for instabilities in rotating frame. (In Ref. 1, the tilting vorticity was defined as $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} + 2\Omega$ but the present definition is more convenient.) In the Navier-Stokes equation, the tilting vorticity appears naturally by noting that the rotation vector 2Ω is obviously the axial vector associated with the antisymmetric *Coriolis tensor* defined by

$$C_{ij} = -\epsilon_{ijk}(2\Omega_k).$$

Thus it is possible to define an antisymmetric *tilting tensor* $T = A + C$ with $A_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k$ is the antisymmetric vorticity tensor. The tilting vorticity is twice the axial vector associated with the tilting tensor since:

$$T_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\omega_k + 4\Omega_k).$$

Thus, the Navier-Stokes equation may be rewritten

$$\partial_t \mathbf{u} + S\mathbf{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{u} + \nabla \pi = \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

B. 3D perturbations of 2D basic flows

Let $U(q_1, q_2) = (U_1(q_1, q_2), U_2(q_1, q_2), 0)$ be the relative velocity field of a *two-dimensional inviscid steady* basic flow, expressed in some curvilinear coordinate frame (e_1, e_2, e_z) such that e_z is a constant unit vector perpendicular to the plane of the basic flow. Let $\Pi(q_1, q_2)$ be its modified pressure and $W(q_1, q_2) = W(q_1, q_2)e_z$ its relative vorticity. If the frame rotates around the z -axis (perpendicular to the plane of the basic flow) with angular velocity $\Omega = \Omega e_z$, the basic flow is not affected by rotation since the Coriolis force is conservative and then $2\Omega \times U = \nabla(2\Omega\Psi)$. $\Psi(q_1, q_2)$ is the two-dimensional basic streamfunction solution of $J(\Psi, \nabla^2\Psi) = 0$ exactly as in the non-rotating case. Thus, any

two-dimensional exact solution of Euler equation without the Coriolis term may be considered as a basic flow for the present study.

A *three-dimensional perturbation* $(\mathbf{u}', \pi')(q_1, q_2, z, t)$ is added to the basic flow. Neglecting quadratic terms, the linearized Euler, continuity and Helmholtz equations read respectively, in the presence of the Coriolis force:

$$D_t \mathbf{u}' + S \mathbf{u}' + \frac{1}{2} \mathbf{W}_t \times \mathbf{u}' = -\nabla \pi', \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (1)$$

$$D_t \boldsymbol{\omega}' - S \boldsymbol{\omega}' + \frac{1}{2} \mathbf{W}_t \times \boldsymbol{\omega}' = W_a \nabla w' - \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{W}, \quad (2)$$

where $D_t = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ is the material derivative following the basic flow, S the symmetric part of its velocity gradient, $w' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{e}_z$ the spanwise component of the velocity perturbation, $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$ the vorticity perturbation, and

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{W} + 4\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{W}_a = \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\Omega} \quad (3)$$

are respectively the *tilting* and *absolute* basic vorticities. Helmholtz equation (2) is instructive to apprehend the fundamental mechanisms of instabilities in rotating systems. Indeed, as pointed out in Ref. 1, in regions of uniform basic vorticity, the rhs of Eq. (2) vanishes for *zero absolute vorticity* ($\mathbf{W} + 2\boldsymbol{\Omega} = 0$), showing that the so-called ‘‘elliptical vortex’’ and the unbounded ‘‘Couette-like flow’’ are linearly stable (see Sec. V).

Because no coefficient of the linearized equations involves a z -dependence, it is possible to Fourier transform in the \mathbf{e}_z -direction, or equivalently to seek perturbations of the form:

$$(\mathbf{u}', \pi')(q_1, q_2, z, t) = e^{ikz}(\mathbf{u}, \pi)(q_1, q_2, t), \quad (4)$$

where k (real for homogeneity) is the *constant spanwise wave number* of the perturbation. Without more specifications on the symmetries of the basic flow, even steady, nothing can be said about (\mathbf{u}, π) .

For a plane flow, $\nabla \mathbf{U} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$ is a 2×2 tensor with symmetric and antisymmetric parts \mathbf{S} and \mathbf{A} . Introducing the 2×2 *Coriolis tensor* \mathbf{C} and the additional antisymmetric *curvature tensor* \mathbf{C}' (see Appendix A)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & -C' \\ C' & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

the linear problem (1) can be written

$$\begin{pmatrix} D_t u_1 \\ D_t u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\nabla \pi, \quad (6)$$

$$D_t w = -ik\pi,$$

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + ikw = 0,$$

where u_1 and u_2 are the plane components of $\mathbf{u}(q_1, q_2, t)$, and $w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z$ the spanwise component. Given in Appendix A in curvilinear coordinates, $\nabla(\cdot)$ and $\nabla \cdot (\cdot)$ are respectively the gradient and divergence operators in the $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ -plane. In the above system appears the 2×2 *inertial tensor*

$$\mathbf{M} = \nabla \mathbf{U} + \mathbf{C} + \mathbf{C}'. \quad (7)$$

C. The general discriminant of a plane flow

The inertial tensor \mathbf{M} admits 2 eigenvalues $\pm \lambda(q_1, q_2)$ solutions of the characteristic equation

$$\lambda^2 + \Phi = 0,$$

where $\Phi = -\frac{1}{2} \mathbf{M} : \mathbf{M}$ is the second invariant of \mathbf{M} . By definition, \mathbf{S} is the symmetric part of \mathbf{M} and hence

$$\Phi(q_1, q_2) = -\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4} (\mathbf{W} + 4\boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{C}')^2. \quad (8)$$

The eigenvalues are then real and opposite at points (q_1, q_2) where

$$\Phi(q_1, q_2) < 0$$

and purely complex otherwise. For reasons exposed later, Φ may be seen as an extension of the Rayleigh discriminant, or as a generalization of the Pedley number. It will be shown in the next sections that exact criteria may all be expressed as *a sufficient condition for instability is that $\Phi(q_1, q_2) < 0$ somewhere in the flow domain.*

The general expression of the discriminant Φ is given in Appendix B for an intrinsic curvilinear coordinate frame linked to the streamfunction Ψ of the basic flow. In a Cartesian coordinate frame (x, y, z) , the curvature tensor vanishes ($\mathbf{C}' = 0$) and

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4} \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t.$$

For complex vortical flows with smooth vorticity distributions such as the Stuart vortices,³⁸ this is no more an exact criterion, but three-dimensional linear stability analyses are in good agreement with the sign of $\Phi(x, y)$. This will be the subject of a subsequent paper.

D. Pressureless dynamics for perturbations

Formally speaking, (6) may always be reduced to the linear system:

$$\begin{pmatrix} D_t u_1 \\ D_t u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2} \nabla D_t \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Comparing with (6), the rhs of (9) is obviously the contribution of the pressure perturbation. If, for some reasons described later this contribution vanishes, (9) reads

$$\begin{pmatrix} D_t u_1 \\ D_t u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (10)$$

which is the linear problem governing the *pressureless* dynamics of the perturbations that may be obtained directly from the linear problem (6) for vanishing π , or equivalently for

$$D_t w = 0.$$

These pressureless solutions are independent of the magnitude of the spanwise wave number k , even if they are by definition highly three-dimensional.

If the physical problem, i.e. the basic flow, exhibits a characteristic length-scale L , the pressureless solution is the leading order approximation of (9) for short-wavelength perturbations $k \gg L^{-1}$. This first order approximation may appear unphysical since pressure has been eliminated, and the

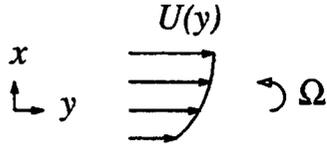


FIG. 1. Shear flow with parallel streamlines.

eigenmodes are strongly localized on streamlines.^{26,36} However, this pressureless approximation is regular and valid in some cases, and gives the first order approximation for short-wave eigenmodes, as mentioned in Secs. III and IV.

If the basic flow exhibits no characteristic length scale, the rhs of (9) cannot be eliminated, as pointed out by Pierrehumbert²⁶ for the “elliptical instability,” which is a particular case of the stability of quadratic unbounded flows. However, it will be shown in Sec. V that for certain initial conditions, and in particular under the effect of the Coriolis force, perturbations satisfying $D_t w = 0$ may be constructed, and are by definition pressureless solutions of (6) or (9).

Neglecting the pressure perturbation field may appear unphysical and (too) crude (an approximation), however in the present case, it makes sense *only* because three-dimensional perturbations solutions of (10) taking into account the incompressibility constraint may be constructed. The distinction between “pressureless” from “without pressure” dynamics may be clearly illustrated with *two-dimensional* instabilities in the plane of the basic flow. Indeed, the perturbation $(u_1, u_2, \pi)(q_1, q_2, t)$, unaffected by the Coriolis force, is governed by

$$\begin{pmatrix} D_t u_1 \\ D_t u_2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\nabla \pi, \quad \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

which *cannot* be reduced to the linear system (9), so that pressure elimination in (11) to obtain (10) would violate the incompressibility constraint.

And the paradox of the “displaced-particle” approaches^{4,14,36} may be explained as follows: Their starting point is the pressureless formulation (10) for $(u_1, u_2)(q_1, q_2, t)$, which is *not* a two-dimensional velocity field as considered by the displaced-particle arguments, *but* the mode associated with the *two-components* $e^{ikz}(u_1, u_2)(q_1, q_2, t)$ of the physical *three-dimensional* velocity perturbation [see Eq. (4)].

III. PARALLEL SHEAR FLOWS

In the case of a basic shear flow with parallel streamlines (Fig. 1), i.e. $U(y) = (U(y), 0, 0)$, it is possible to seek normal modes of the form

$$(\mathbf{u}', \pi')(x, t) = e^{\sigma t} e^{i\alpha x} e^{ikz}(\mathbf{u}, \pi)(y),$$

where α and k , real for temporal analysis, are respectively the streamwise and spanwise wave numbers of the perturbation, and the temporal growth rate s is the real part of the complex eigenvalue $\sigma = s + i\omega$, with ω the pulsation. The spanwise wave number k is positive, and by symmetry arguments, it is easy to check that it is sufficient to consider positive values of α .

The linear problem reads

$$\begin{aligned} (\sigma + i\alpha U) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i\alpha \pi \\ -\pi' \end{pmatrix}, \\ (\sigma + i\alpha U)w &= -ik\pi, \\ i\alpha u + v' + ikw &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

the primes denoting differentiation with respect to y . Introducing the relative basic vorticity $W(y) = -dU/dy$, the inertial tensor (7) and its second invariant (8) read respectively

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 0 & -(W + 2\Omega) \\ 2\Omega & 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi(y) &= 2\Omega(W + 2\Omega). \end{aligned} \quad (13)$$

$\Phi(y)$ is exactly the *Pedley number*.³

A. The Pedley criterion

The linear problem may be reduced to inviscid versions of the classical Orr-Sommerfeld and Squire equations, including Coriolis force. Contrary to the non-rotating case, they are no longer decoupled and the Squire theorem does not hold.¹⁰ However, for perturbations with pure spanwise wave vector ($\alpha = 0$ and $k \neq 0$), Pedley³ has shown that Eqs. (12) may be reduced to a Sturm-Liouville eigenvalue equation.³⁹

$$\frac{1}{k^2} \frac{d^2 v}{dy^2} + \left(\frac{\lambda^2(y)}{\sigma^2} - 1 \right) v = 0, \quad (14)$$

where $\pm \lambda(y) = \sqrt{-\Phi(y)}$ are the eigenvalues of M given by (13). Equation (14) with homogeneous boundary conditions ensures that a necessary and sufficient condition for instability to perturbations with pure spanwise wave vectors is that there exists y in the domain such that

$$\Phi(y) < 0. \quad (15)$$

For general α , this becomes a *sufficient* instability criterion.

B. Localized instabilities

For parallel shear flows exhibiting a characteristic length scale, the pressureless solution is the leading order solution of short-wavelength instabilities ($k \gg 1$). Indeed, crudely taking $k^{-1} = 0$ in the linear problem (12) or equivalently neglecting the second order derivative of Eq. (14) gives the pressureless solutions. However, using an asymptotic technique directly inspired from B88, corrections of order k^{-1} to the pressureless eigenmodes will be found, showing that the limit $k^{-1} = 0$ is regular (for $\alpha = 0$).

In order to see the analogies with short-wave centrifugal instabilities, the notation are similar to those used by B88. If the flow is unstable, i.e. $\Phi(y) < 0$ for some y , suppose that there exists y_0 such that $\lambda(y_0)$ is a real positive quadratic maximum [$\lambda'(y_0) = 0$ and $\lambda''(y_0) < 0$]. For clarity $\lambda(y_0)$ and $\lambda''(y_0)$ will be noted respectively λ_0 and λ_0'' . At first order ($k^{-1} = 0$), the highest spatial derivative in (14) disappears, and then the following scalings are tried:

$$v(y) = v_1(\eta), \quad \sigma = \sigma_0 - k^{-1} \sigma_1, \quad \eta = k^\nu (y - y_0),$$

where $\sigma_0 = \lambda_0$. η is a stretched variable and $\nu > 0$ is determined by the analysis in order to get all the main terms of the problem considered. Substituting the rescaled variables into the Sturm-Liouville eigenvalue equation (14) leads to $\nu = 1/2$ and

$$\frac{d^2 v_1}{d\eta^2} + \left(\frac{2}{\lambda_0} \sigma_1 + \frac{\lambda_0''}{\lambda_0} \eta^2 \right) v_1 = 0. \quad (16)$$

With the homogeneous boundary conditions $v_1 \rightarrow 0$ when $\eta \rightarrow \pm\infty$ (the inner solution is localized in the vicinity of y_0), Eq. (16) is the quantum harmonic oscillator equation,³⁹ the eigenvalues of which are:

$$\sigma_1^{(n)} = 2A\lambda_0(n + 1/2),$$

with n integer and $A = \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda_0''/\lambda_0}$ real since $\lambda_0'' < 0$. Thus the largest eigenvalue is obtained for $n = 0$, and the corresponding eigenfunction is

$$v_1^{(0)}(\eta) = \exp(-A\eta^2).$$

Going back to primitive variables, the short-wave eigenmodes behave asymptotically when $k \gg 1$ as

$$v'(x, t) \sim e^{(1-Ak^{-1})\lambda_0 t} e^{ikz} \exp(-kA(y-y_0)^2),$$

and then their growth rate is given at first order by the pressureless analysis, exactly as pointed out by B88 for centrifugal instability. Indeed, since λ_0 is a maximum, the most unstable pressureless eigenmode is $e^{\lambda_0 t} \delta(y_0)$. This is consistent with the analytical results obtained by Yanase *et al.*¹⁰ in the case of the inviscid Couette flow.

The conclusion of this section is that, in the presence of the Coriolis force, when $\Phi(y) < 0$ for some y , short-wavelength unstable eigenmodes exist for parallel shear flows, with a growth rate given at first order by the pressureless analysis. Thus, when $\Phi < 0$ somewhere, Coriolis force promotes instabilities with wave vector aligned along the axis of rotation axis, whereas they are killed for stabilizing rotation $\Phi > 0$. In the following sections, we will see that this mechanism is generic.

IV. CIRCULAR VORTICES

In order to explain the stabilizing role of the Coriolis force on circular monopolar vortices Kloosterziel^{14,15} extended the classical Rayleigh criterion for centrifugal instability⁴⁰ to rotating fluids. He derived this criterion with a displaced-particle argument and mentioned that Synge's exact derivation⁴⁰ for axisymmetric perturbations may include easily the Coriolis force. We recall the details of the latter derivation here, in order to show the analogies with parallel shear flows, and to investigate the short-wave limit of the unstable eigenmodes.

A. Absolute circulation

In a cylindrical coordinate frame (e_r, e_θ, e_z) , the curvature tensor C' involves only the azimuthal component of the plane basic flow (see Appendices A and B):

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & -V/r \\ V/r & 0 \end{pmatrix}.$$

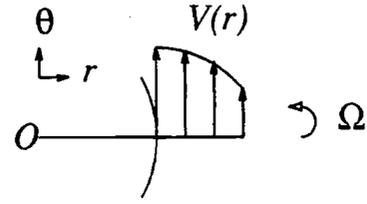


FIG. 2. Plane flow with circular streamlines.

Note in passing that the curvature tensor acts on the perturbation like a stratified Coriolis force at the angular velocity $V/(2r)$.

For an *axisymmetric* basic flow $U(r) = (0, V(r), 0)$ with relative vorticity $W(r) = W(r)e_z$ where $W(r) = r^{-1}d(rV)/dr$, in a rotating frame with axis perpendicular to the (e_r, e_θ) -plane (Fig. 2), the inertial tensor (7) and its second invariant (8) are defined by

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2(\Omega + V/r) \\ W + 2\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\Phi(r) = 2(\Omega + V/r)(W + 2\Omega).$$

Obviously, $\Phi(r)$ is the *generalized Rayleigh discriminant*^{14,15,20,22} that could be also rewritten

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2 r^3} \frac{d\Gamma_a^2}{dr}, \quad \Gamma_a(r) = 2\pi r^2(\Omega + V/r),$$

involving the *absolute circulation*³⁷ $\Gamma_a(r)$ around the circle $r = \text{const}$ at $z = \text{const}$. Without Coriolis force, the Rayleigh discriminant is recovered.⁴⁰

B. The generalized Rayleigh criterion

Adding to the basic flow a three-dimensional normal-mode

$$(u', \pi')(r, \theta, z, t) = e^{\sigma t} e^{in\theta} e^{ikz} (u, \pi)(r),$$

where n integer is the azimuthal wave number, leads to the linear problem:

$$\begin{aligned} (\sigma + inV/r) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\pi' \\ -in\pi/r \end{pmatrix}, \\ (\sigma + inV/r)w &= -ik\pi, \end{aligned} \quad (18)$$

$$u' + u/r + inu/r + ikw = 0,$$

with primes denoting differentiation with respect to r .

According to Kloosterziel,^{14,15} for pure spanwise (or axisymmetric, $n = 0$) perturbations the problem may be reduced to a Sturm-Liouville eigenvalue equation, as shown originally by Synge in 1933 for the non-rotating case⁴⁰

$$\frac{1}{k^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) + \left(\frac{\lambda^2(r)}{\sigma^2} - 1 \right) v = 0, \quad (19)$$

where $\pm\lambda(r) = \sqrt{-\Phi(r)}$ are the eigenvalues of M given by (17). With homogeneous boundary conditions, a necessary and sufficient condition for instability to axisymmetric disturbances is that

$$\Phi(r) < 0 \quad (20)$$

for some r in the flow domain. In other words, *the flow is unstable if the square of the absolute circulation decreases somewhere*. This is a *sufficient* condition for instability, because nothing can be concluded for non-axisymmetric disturbances.

As for parallel shear flows, the instability criterion compares the relative vorticity distribution of the basic flow to the rotation rate, but includes information about streamline curvature. As shown in Appendix B, whatever the basic flow, the linear problem expressed in intrinsic coordinates linked to the streamfunction Ψ of the basic flow, exhibits similar expressions for M and Φ [compare Eqs. (13) and (17) to (B4) and (B5)].

C. Short-wave breakdown

It is possible to show that short-wave localized eigenmodes (with $k \gg 1$) in the unstable range $\Phi(r) < 0$ behave at first order as the pressureless eigenmodes $e^{\lambda(r_0)t} \delta(r_0)$ obtained by taking $k^{-1} = 0$ and $n = 0$ in (18). Again, the asymptotics are those used by B88. Indeed, trying the scalings

$$v(r) = v_1(\eta), \quad \sigma = \sigma_0 - k^{-1} \sigma_1, \quad \eta = k^{1/2}(r - r_0)$$

with $\sigma_0 = \lambda(r_0)$ the Sturm-Liouville equation (19) turns to the quantum oscillator equation (16). Thus in the vicinity of r_0 , where $\lambda_0 = \lambda(r_0)$ takes a quadratic maximum, we can conclude immediately that for large wave numbers the eigenmodes behaves asymptotically as

$$v'(x, t) \sim e^{(1 - Ak^{-1})\lambda_0 t} e^{ikz} \exp(-kA(r - r_0)^2),$$

with $A = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda_0''/\lambda_0}$. This shows again that for a pure spanwise wave number, the highest growth rate is reached for $k^{-1} = 0$ given by the pressureless perturbations, for which the wave vector is aligned with the rotation axis. This concept is clearer for quadratic flows, for which the stability gives important results.

V. QUADRATIC FLOWS

A plane quadratic flow (or two-dimensional "linear flow" following the terminology used by Lagnado *et al.*²⁵) is an unbounded flow having *constant* vorticity and strain rate. Exact solution of the Navier-Stokes equation, a quadratic flow may be described without loss of generality by the streamfunction

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4}W(y^2 + x^2) - \frac{1}{2}D(y^2 - x^2),$$

where W is the uniform relative vorticity and D the strain rate, such that in the (x, y) -plane, the velocity gradient tensor $N = \nabla U$ takes the form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}W - D \\ \frac{1}{2}W - D & 0 \end{pmatrix}.$$

For convenience, W and D are supposed positive (the following notations are sometimes used: $\gamma = \frac{1}{2}W$ and $\epsilon = D$). It is easy to check that when $D < \frac{1}{2}W$, the flow is dominated by vorticity and has closed elliptical streamlines (Fig. 3). When $D = 0$, the motion of the flow is solid body rotation around

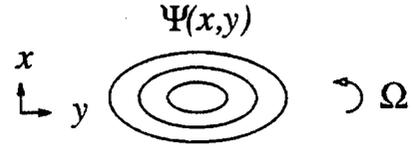


FIG. 3. Quadratic flow with elliptical streamlines.

the z -axis with rotation rate $\frac{1}{2}W$. On the other hand, when $\frac{1}{2}W < D$, the flow is dominated by strain, and exhibits an hyperbolic stagnation point. Finally, if $D = \frac{1}{2}W$, the flow has parallel streamlines with constant shear, and has the Couette-like velocity profile $U(y) = -Wy$.

A. An initial value problem

This flow has been studied extensively in the context of rapid distortion theory of homogeneous turbulence³¹⁻³³ and more recently in the context of hydrodynamic stability.²⁵⁻³⁰ The closed links between these two approaches are reviewed in Ref. 1. It has been shown that it is possible to seek a wave-like perturbation of the following form:

$$(u', \pi')(x, t) = e^{ik(t) \cdot x} (u, \pi)(t).$$

For separability in the Euler equation, the wave vector has to be solution of

$$\dot{\alpha} = -N^T \alpha, \quad \dot{k} = 0,$$

where $\alpha(t)$ is the projection of the time-dependent wave vector on the (x, y) -plane, and the dot denotes time-differentiation. In accordance with (4), the spanwise component $k = k(t) \cdot e_z$ of the wave vector is constant. The three different behaviors of $\alpha(t)$ are:

(1) *elliptical flow* $\frac{1}{2}W > D$:

$$\alpha(t) = \kappa(\cos \rho(t - t_0), E \sin \rho(t - t_0)),$$

$$E = \sqrt{(\frac{1}{2}W + D)/(\frac{1}{2}W - D)}, \quad \rho = \sqrt{\frac{1}{4}W^2 - D^2};$$

(2) *hyperbolic flow* $D > \frac{1}{2}W$:

$$\alpha(t) = \kappa(\cosh \rho(t - t_0), E \sinh \rho(t - t_0))$$

$$E = \sqrt{(D + \frac{1}{2}W)/(D - \frac{1}{2}W)}, \quad \rho = \sqrt{D^2 - \frac{1}{4}W^2};$$

(3) *pure-shear (Couette-like) flow* $\frac{1}{2}W = D$:

$$\alpha(t) = \kappa(1, W(t - t_0)).$$

In the above expressions κ and t_0 are integration constants depending on the initial conditions. Clearly, if $\kappa = 0$, the wave vector is constant and purely spanwise.

The Euler equation (linearized or not since each single mode verifies $u' \cdot \nabla u' = 0$) reads:

$$\dot{v} + Mv = -i\alpha\pi,$$

$$\dot{w} = -ik\pi, \quad (21)$$

$$\alpha \cdot v + kw = 0.$$

$v(t)$ and $w(t)$ are, respectively, the plane projection and the spanwise component of $u(t)$. The uniform inertial tensor (7) and the constant general discriminant (8) read, respectively,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}W_t - D \\ \frac{1}{2}W_t - D & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\Phi = -D^2 + \frac{1}{4}W_t^2,$$

involving the basic tilting vorticity (3). The linear system (21) may be reduced to:

$$\dot{v} + Mv = |k|^{-2}(\alpha^T(M+N)v)\alpha \quad (23)$$

with a time-dependent rhs which expresses the contribution of the pressure field.

Without Coriolis force ($M=N$), analytical exact solutions are known in the hyperbolic and parallel case for particular initial conditions on the wavevector. In the elliptical case, Bayly²⁷ pointed out that (23) is a Floquet system with time periodic coefficients and found results similar to the spectral calculations of Pierrehumbert,²⁶ who pointed out that the celebrated ‘‘elliptical instability’’ (in an inertial frame) is independent of the magnitude of the spanwise wave vector, but *needs* the pressure contribution. Waleffe³⁰ showed that without Coriolis force, Eq. (23) may be reduced to a single ordinary differential equation of Ince type, and derived the analytical localized structure of the unstable eigenmodes.

In a rotating frame, Cambon *et al.*¹ pointed out that the rhs of the vorticity perturbation (2) vanishes for *zero absolute vorticity* ($W+2\Omega=0$) showing that the unbounded elliptical vortex and the Couette-like shear flow are linearly stable, whereas exponential amplification occurs for the vorticity in the hyperbolic case.

B. An exact criterion

As pointed out by Cambon and co-workers^{1,32,33} and Craik,²⁹ very simple solutions may be found when the time-dependent rhs of (23) vanishes. This is obviously the case for modes with *pure spanwise wave vector*:

$$k(t) = (0, 0, k).$$

The perturbation reads $e^{\sigma t}e^{ikz}$ with $\sigma = \sqrt{-\Phi}$ according to (22). Exponential amplification obviously occurs when

$$\Phi < 0 \Leftrightarrow 2\Omega \in] -\frac{1}{2}W - D; -\frac{1}{2}W + D[, \quad (24)$$

and the higher growth rate is reached for zero tilting vorticity $W+4\Omega=0$. From (21), it may be seen that those pure spanwise perturbations are such that $w=0$ and $\pi=0$, and then are *exact* pressureless solutions of the problem (since $D_t w=0$, see Sec. II). According to (24), the Coriolis force plays an important role on these perturbations with the wave vector aligned on the rotation axis (Fig. 4). Indeed, in the elliptical case, pressureless instability occurs only for anticyclonic rotation (the rotation rate Ω and the basic relative vorticity W are of opposite signs). The band of instability is centered around the zero tilting vorticity, and vanishes when $D=0$ (solid-body rotation). Without Coriolis force these purely spanwise perturbations are neutral. For the unbounded

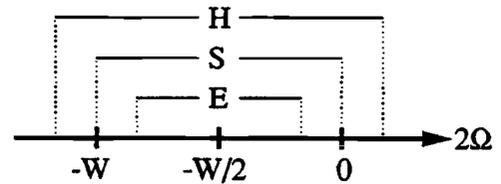


FIG. 4. Bandwidths of unstable modes with pure spanwise wave vector (or pressureless perturbations) for quadratic flows. H refers to hyperbolic streamlines ($D > \frac{1}{2}W$), S to the Couette-like shear flow ($D = \frac{1}{2}W$), and E to elliptical streamlines ($\frac{1}{2}W > D$).

Couette-like flow, the unstable range extends to $2\Omega \in]-W; 0[$ consistent with the Pedley criterion (14) for parallel shear flows, and analytical results by Yanase *et al.*¹⁰ In the hyperbolic case, it is clear from (24) that the band of unstable modes extends to cyclonic rotations, and then pressureless perturbations are unstable in the non-rotating case, in accordance with Lagnado *et al.*²⁵

Again, in analogy with the previous sections, (24) is a *sufficient* condition for instability. This criterion, however, is not necessary, and the best counter-example is the well-known elliptical instability in an inertial frame which occurs only for oblique wave vectors (and thus needs the pressure contribution).^{26,27} In a rotating frame, this criterion gives indications on the role of the Coriolis force. Indeed, the destabilizing effect of rotation tends to align the wave vector of the unstable perturbation with the axis of rotation, in agreement with the physical argument (at weak ellipticity) that instability occurs when the period of the wave vector motion coincides with the period of inertial waves:²⁹

$$(W+2\Omega)\cos\theta \sim \frac{1}{2}W,$$

where θ is the angle between the wave vector k and the spanwise unit vector e_z , showing that they are aligned when $\Phi < 0$.

In an inertial frame, it is believed that elliptical instability occurs also for complex basic flows as soon as they exhibit locally closed elliptical streamlines^{26,27} (in the core of vortices for example); see the review by Bayly, Orszag, and Herbert.⁴¹ The role of hyperbolic stagnation points has been omitted until Friedlander and Vishik⁴² showed with the ‘‘geometrical optics’’ stability methods⁴³ that, in an inertial frame any inviscid incompressible flow with a hyperbolic stagnation point is unstable, confirming the results of Lagnado *et al.*²⁵ (see also Tanveer and Speziale⁴⁴) recalled in this section. However, in the context of turbulence modeling, hyperbolic regions for the ‘‘mean field’’ are well known to be places where intense ‘‘production’’ of turbulent kinetic energy occurs.³¹⁻³³

VI. CONCLUSION

In the present paper, it has been shown that the classical inviscid instability criteria for rotating (or not) fluids (parallel shear flows, circular vortices and quadratic flows) may be described by the sign of the second invariant of the inertial tensor M , which involves the basic flow, the rotation rate, and curvature effects.

The first reason is that these sufficient conditions for instability in fact involve the pressureless dynamics of the perturbations, for which the wave vector is aligned with the axis of rotation. For basic flows exhibiting a characteristic length scale, these pressureless instabilities consist in short-wave eigenmodes localized along the streamlines. It seems to the authors and to the light of Bayly's results (B88) that higher order pressure corrections will not affect the conclusions of the present paper, since the order of the highest spatial derivative in the Sturm-Liouville eigenvalue equations (which is the pressure contribution) is conserved with the used scalings.

The second reason why the general discriminant describes successfully the existing stability criteria, is that in all of them, the convective operator $U \cdot \nabla$ may be dropped out by a convenient choice of the wave vector of the perturbation. And obviously, if the convective operator cannot be eliminated (or diagonalized in the same basis as the inertial tensor as pointed out by B88), nothing can be concluded on the temporal behavior of the perturbations, even for pressureless dynamics.

Thus for complex vortical flows, these two conditions are violated. However, and according to one of the referees, that the short-wavelength limit is no longer amenable to the standard asymptotic tricks for complex flows is almost certainly only a temporary setback. The nature of the simple eigenvalue problems recalled in the present paper probably bears a similar signature more generally, but it may be that spectral theory or other avenues motivated by functional analysis need to be brought to bear. The links between pressureless solutions, short-wave instabilities, and the general discriminant will be the subject of a subsequent paper, on the ground of the linear stability analysis of the Stuart vortices in a rotating frame.³⁸

The effect of viscosity on these instabilities could be the following. Short-wave perturbations will be described at first order in k^{-1} by the same equation, except replacing D_t by $D_t + \nu k^2$. A viscous cut-off would happen, and then maximum instability should occur at a finite spanwise wave number. However, it is reasonable to speculate that the fundamental mechanisms triggered by curvature and rotation should be identical for viscous or inviscid flows, as largely improved with the Pedley and the generalized Rayleigh criteria. However, contrary to the latter, it seems difficult to provide a simple physical interpretation (such as a displaced-particle argument) to this dynamical catalyst of a broad class of instabilities.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to Dr. Alessandro Bottaro and the referees for comments and suggestions on an early draft; the latter also improved the final structure of the present paper. S.L. was supported by the MENESR.

APPENDIX A: OPERATORS IN PLANE CURVILINEAR COORDINATES

Let (q_1, q_2) be a system of orthogonal curvilinear coordinates in a plane perpendicular to the fixed unit vector e_z .

The unit triad (e_1, e_2, e_z) is assumed right-handed. The position vector may be expressed in the form $x = x(q_1, q_2)$ and then⁴⁵

$$dx = h_1 e_1 dq_1 + h_2 e_2 dq_2,$$

where $h_1 = |\partial x / \partial q_1|$ and $h_2 = |\partial x / \partial q_2|$ are the metric elements. The gradient of an arbitrary scalar field $f(q_1, q_2)$, and the divergence and curl of an arbitrary vector field $v(q_1, q_2)$ read, respectively,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} e_2, \\ \nabla \cdot v &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 v_2) \right), \\ \nabla \times v &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 v_1) \right) e_z. \end{aligned} \quad (A1)$$

Introducing the curvilinear abscissae s_1 and s_2 defined by $dx = e_1 ds_1 + e_2 ds_2$ and such that

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2},$$

the variation of the local basis (e_1, e_2) is characterized by the formulas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial s_1} &= \frac{e_2}{R_1}, & \frac{\partial e_2}{\partial s_1} &= -\frac{e_1}{R_1}, \\ \frac{\partial e_1}{\partial s_2} &= \frac{e_2}{R_2}, & \frac{\partial e_2}{\partial s_2} &= -\frac{e_1}{R_2}, \end{aligned}$$

where R_1 (resp. R_2) is the curvature radius at point (q_1, q_2) of the coordinate line q_1 (resp. q_2), positively counted following e_1 (resp. $-e_2$). The formulas (A1) now read

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial s_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial s_2} e_2, \\ \nabla \cdot v &= \frac{\partial v_1}{\partial s_1} + \frac{\partial v_2}{\partial s_2} + \frac{v_1}{R_2} - \frac{v_2}{R_1}, \\ \nabla \times v &= \left(\frac{\partial v_2}{\partial s_1} - \frac{\partial v_1}{\partial s_2} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) e_z. \end{aligned} \quad (A2)$$

The gradient tensor of an arbitrary vector field $v(q_1, q_2)$ reads

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial s_1} - \frac{v_2}{R_1} & \frac{\partial v_1}{\partial s_2} - \frac{v_2}{R_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial s_1} + \frac{v_1}{R_1} & \frac{\partial v_2}{\partial s_2} + \frac{v_1}{R_2} \end{pmatrix}. \quad (A3)$$

Thus for two vectors $U(q_1, q_2)$ and $u(q_1, q_2)$, it may be verified that

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} U \cdot \nabla u_1 \\ U \cdot \nabla u_2 \end{pmatrix} + (\nabla U + \mathbf{C}') \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ U \cdot \nabla &= U_1 \partial / \partial s_1 + U_2 \partial / \partial s_2, \\ \mathbf{C}' &= \begin{pmatrix} 0 & -C' \\ C' & 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

The additional tensor \mathbf{C}' contains information about curvature, and vanishes in a Cartesian orthogonal coordinate frame.

APPENDIX B: FORMULATION OF THE LINEAR PROBLEM IN INTRINSIC COORDINATES

Since the basic flow is two-dimensional in a plane perpendicular to the fixed axis \mathbf{e}_z , it is convenient to use the intrinsic orthogonal curvilinear coordinates (q, Ψ, z) , the lines $q = \text{const}$ being everywhere normal to the streamlines. The basic velocity field is everywhere tangent to the streamlines:

$$U(q, \Psi) = U(q, \Psi) \mathbf{e}_q. \quad (\text{B1})$$

With $\mathbf{x}(q, \Psi, z)$ the element $d\mathbf{x}$ reads

$$d\mathbf{x} = h \mathbf{e}_q dq + \frac{1}{|U|} \mathbf{e}_\Psi d\Psi + \mathbf{e}_z dz,$$

where $h(q, \Psi)$ is unknown and $|U| = |U(q, \Psi)|$. From (A3), the *plane* gradient tensor of the basic flow (B1) takes the simple form (taking into account incompressibility)

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \partial_s U & |U| \partial_\Psi U \\ U/R & -\partial_s U \end{pmatrix}, \quad (\text{B2})$$

where $\partial_s = \partial / \partial s = h^{-1} \partial / \partial q$ and $\partial_\Psi = \partial / \partial \Psi$. $R(q, \Psi)$ is the curvature radius at point (q, Ψ) such that

$$\partial_s \mathbf{e}_q = R^{-1} \mathbf{e}_\Psi, \quad \partial_s \mathbf{e}_\Psi = -R^{-1} \mathbf{e}_q$$

(see Appendix A).

Adding a three-dimensional infinitesimal perturbation

$$(\mathbf{u}', \pi')(x, t) = e^{ikz}(\mathbf{u}, \pi)(q, \Psi, t),$$

$$\mathbf{u}(q, \Psi, t) = u \mathbf{e}_q + v \mathbf{e}_\Psi + w \mathbf{e}_z,$$

the linear problem reads

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_t u \\ D_t v \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\partial_s \pi \\ -|U| \partial_\Psi \pi \end{pmatrix}, \\ D_t w &= -ik\pi, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

$$(\partial_s - |U|^{-1} \partial_s U)u + (|U| \partial_\Psi - R^{-1})v + ikw = 0,$$

where $D_t = \partial_t + U \partial_s$. With Coriolis force, the inertial tensor $\mathbf{M} = \nabla U + \mathbf{C} + \mathbf{C}'$ [see Eqs. (5), (A4) and (B2)] and its second invariant are given by

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \partial_s U & -(W + 2\Omega) \\ 2(\Omega + U/R) & -\partial_s U \end{pmatrix}, \quad (\text{B4})$$

$$\Phi(q, \Psi) = 2(\Omega + U/R)(W + 2\Omega) - (\partial_s U)^2,$$

where $W(\Psi) = -\nabla^2 \Psi$ is the basic *relative* vorticity.

The analogy between the above expressions of \mathbf{M} and Φ and these obtained for parallel shear flows [see Eq. (13) in

Sec. III] and for circular vortices [see Eq. (17) in Sec. IV] is even more evident when the velocity of the basic flow is *constant along the streamlines*, i.e. $U = U(\Psi)$. Then $\Pi = \Pi(\Psi)$ since the Bernoulli function $H(\Psi) = U^2/2 + \Pi$ is conserved along the streamlines. It may be verified that $R = R(\Psi)$ and $h = h(\Psi)$ with $d(\log h)/d\Psi = -1/(R|U|)$. Thus the linear problem involves no more q -dependent coefficient. It is then possible to seek the solution in the following form:

$$(\mathbf{u}', \pi')(q, \Psi, z, t) = e^{\sigma t} e^{i\alpha q} e^{ikz}(\mathbf{u}, \pi)(\Psi),$$

and the linear problem (B3) reads:

$$(\sigma + i\alpha U/h) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha \pi/h \\ -|U| \pi' \end{pmatrix},$$

$$(\sigma + i\alpha U/h)w = -ik\pi,$$

$$i\alpha u/h + |U|v' - v/h + ikw = 0,$$

where the primes denote differentiation with respect to Ψ , and

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 0 & -(W + 2\Omega) \\ 2(\Omega + U/R) & 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi(\Psi) &= 2(\Omega + U/R)(W + 2\Omega). \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

The criteria derived in Secs. III and IV are easily recovered.

- ¹C. Cambon, J.-P. Benoît, L. Shao, and L. Jacquin, "Stability analysis and large-eddy simulation of rotating turbulence with organized eddies," *J. Fluid Mech.* **278**, 175 (1994).
- ²P. Bradshaw, "The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow," *J. Fluid Mech.* **36**, 177 (1969).
- ³T. J. Pedley, "On the stability of viscous flow in a rapidly rotating pipe," *J. Fluid Mech.* **35**, 97 (1969).
- ⁴D. J. Tritton and P. A. Davies, "Instabilities in geophysical fluid dynamics," in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub (Springer-Verlag, Berlin, 1981), p. 229.
- ⁵D. J. Tritton, "Stabilization and destabilization of turbulent shear flow in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.* **241**, 503 (1992).
- ⁶J. E. Hart, "Instability and secondary motion in a rotating channel flow," *J. Fluid Mech.* **45**, 341 (1971).
- ⁷D. K. Lezius and J. P. Johnston, "Roll-cell instabilities in rotating laminar and turbulent channel flows," *J. Fluid Mech.* **77**, 153 (1976).
- ⁸P. H. Alfredsson and H. Persson, "Instabilities in channel flow with system rotation," *J. Fluid Mech.* **202**, 543 (1989).
- ⁹A. A. Bidokhti and D. J. Tritton, "The structure of a turbulent free shear layer in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.* **241**, 469 (1992).
- ¹⁰S. Yanase, C. Flores, O. Métais, and J. J. Riley, "Rotating free-shear flows. I. Linear stability analysis," *Phys. Fluids A* **5**, 2725 (1993).
- ¹¹O. Métais, C. Flores, S. Yanase, J. J. Riley, and M. Lesieur, "Rotating free-shear flows. Part 2. Numerical simulations," *J. Fluid Mech.* **293**, 47 (1995).
- ¹²N. Tillmark and P. H. Alfredsson, "Experiments on rotating plane Couette flow," in *Advances in Turbulence VI*, edited by S. Gavrilakis, L. Machiels, and P. A. Monkewitz (Kluwer, The Netherlands, 1996), p. 391.
- ¹³L. Tarbouriech and D. Renouard, "Stabilisation et déstabilisation par la rotation d'un sillage plan turbulent," *C. R. Acad. Sci. Paris t 323, II b*, 391 (1996).
- ¹⁴R. C. Kloosterziel, "Barotropic vortices in a rotating fluid," Ph.D. thesis, Univ. Utrecht, The Netherlands (1990).
- ¹⁵R. C. Kloosterziel and G. J. F. van Heijst, "An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.* **223**, 1 (1991).
- ¹⁶E. J. Hopfinger, F. K. Browand, and Y. Gagne, "Turbulence and waves in a rotating tank," *J. Fluid Mech.* **125**, 505 (1982).
- ¹⁷P. Bartello, O. Métais, and M. Lesieur, "Coherent structures in rotating

- three-dimensional turbulence," *J. Fluid Mech.* **273**, 1 (1994).
- ¹⁸E. J. Hopfinger and G. J. F. van Heijst, "Vortices in rotating fluids," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 241 (1993).
- ¹⁹G. F. Carnevale, M. Briscolini, R. C. Kloosterziel, and G. K. Vallis, "Three-dimensionally perturbed vortex tubes in a rotating flow," to appear in *J. Fluid Mech.*
- ²⁰I. Mutabazi, C. Normand, and J. E. Wesfreid, "Gap size effects on centrifugally and rotationally driven instabilities," *Phys. Fluids A* **4**, 1199 (1992).
- ²¹A. Aouïdef, J. E. Wesfreid, and I. Mutabazi, "Coriolis effects on Görtler vortices in a boundary-layer flow on a concave wall," *AIAA J.* **30**, 2779 (1992).
- ²²I. Mutabazi and J. E. Wesfreid, "Coriolis force and centrifugal force induced flow instabilities," in *Instabilities and Nonequilibrium Structures IV*, edited by E. Tirapegui and W. Zeller (Kluwer, The Netherlands, 1993), p. 301.
- ²³A. Zebib and A. Bottaro, "Goertler vortices with system rotation: Linear theory," *Phys. Fluids A* **5**, 1206 (1993).
- ²⁴O. J. E. Matsson, "Time-dependent instabilities in curved rotating channel flow," *Phys. Fluids A* **5**, 1514 (1993).
- ²⁵R. R. Lagnado, N. Phan-Thien, and L. G. Leal, "The stability of two-dimensional linear flows," *Phys. Fluids* **27**, 1094 (1984).
- ²⁶R. T. Pierrehumbert, "Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid," *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157 (1986).
- ²⁷B. J. Bayly, "Three-dimensional instability of elliptical flow," *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160 (1986).
- ²⁸A. D. D. Craik and W. O. Criminale, "Evolution of wavelike disturbances in shear flows: A class of exact solutions of the Navier-Stokes equations," *Proc. R. Soc. London. Ser. A* **406**, 13 (1986).
- ²⁹A. D. D. Craik, "The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: Some exact solutions," *J. Fluid Mech.* **198**, 275 (1989).
- ³⁰F. Waleffe, "On the three-dimensional instability of strained vortices," *Phys. Fluids A* **2**, 76 (1990).
- ³¹G. K. Batchelor and I. Proudman, "The effect of rapid distortion on a fluid in turbulent motion," *Q. J. Mech. Appl. Math.* **7**, 83 (1954).
- ³²C. Cambon, "Etude spectrale d'un champ turbulent incompressible soumis à des effets couplés de déformation et de rotation imposés extérieurement," Ph.D. thesis, Univ. Lyon I, France (1982).
- ³³C. Cambon, C. Teissède, and D. Jeandel, "Etude d'effets couplés de déformation et de rotation sur une turbulence homogène," *J. Méc. Théor. Appl.* **4**, 629 (1985).
- ³⁴C. G. Speziale, T. B. Gatski, and N. Mac Giolla Mhuiris, "A critical comparison of turbulence models for homogeneous shear flows in a rotating frame," *Phys. Fluids A* **2**, 1678 (1990).
- ³⁵A. Sahli and C. Cambon, "Analysis of rotating shear flow using linear approach and DNS-LES results," *J. Fluid Mech.* (submitted).
- ³⁶B. J. Bayly, "Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows," *Phys. Fluids* **31**, 56 (1988). Referred to as B88.
- ³⁷J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1979).
- ³⁸S. Leblanc and C. Cambon, "Stability of the Stuart vortices in a rotating frame," in *Advances in Turbulence VI*, edited by S. Gavrilakis, L. Machiels, and P. A. Monkewitz (Kluwer, The Netherlands, 1996), p. 351.
- ³⁹C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978).
- ⁴⁰P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- ⁴¹B. J. Bayly, S. A. Orszag, and T. Herbert, "Instability mechanisms in shear-flow transition," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20**, 359 (1988).
- ⁴²S. Friedlander and M. M. Vishik, "Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2204 (1991).
- ⁴³A. Lifschitz and E. Hameiri, "Local stability conditions in fluid dynamics," *Phys. Fluids A* **3**, 2644 (1991).
- ⁴⁴S. Tanveer and C. G. Speziale, "Singularities of the Euler equation and hydrodynamic stability," *Phys. Fluids A* **5**, 1456 (1993).
- ⁴⁵G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1967).

COHERENCE OF VORTICES IN A ROTATING FLUID

Stéphane Leblanc and Fabien S. Godeferd

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
UMR 5509 CNRS
Ecole Centrale de Lyon
BP 163, 69131 Ecully Cedex
France

INTRODUCTION

In a rotating fluid, the Coriolis force strongly affects coherence and stability of quasi two-dimensional vortices aligned with the rotation axis. Experimental evidence of such structures is extensive (see the review by Hopfinger and van Heijst 1993). In a rotating tank, a diffusive turbulence produced by an oscillating grid leads, above a certain distance from the grid, to the formation of "long-lived" coherent vortices, which do not emerge in the non-rotating case (Hopfinger, Browand and Gagne 1982). Other laboratory experiments have shown the existence of two-dimensional vortices with various complex topologies such as monopolar, dipolar, tripolar and triangular vortices, sometimes observed in direct numerical simulations of two-dimensional turbulence (Kloosterziel 1990; Kloosterziel and van Heijst 1991).

Emergence of columnar vortices from isotropic turbulence is outside the scope of the present paper because it involves complex mechanisms that cannot be explained by the Taylor–Proudman theorem, which only concerns a linear and steady regime. Thus, in rotating homogeneous turbulence, Cambon, Mansour and Godeferd (1996) have shown that the linear regime which consists of inertial waves cannot explain the transition from three-dimensional to two-dimensional turbulence, which is ultimately triggered by non-linear interactions. However, the long persistence of these structures suggest that they are insensitive (or stable) to perturbations with rapid growth rate.

Are linear mechanisms able to explain the "presence of intense cyclonic vortices and (much) weaker anticyclonic vortices" as observed experimentally by Hopfinger *et al.* (1982) and others in rotating fluids (Kloosterziel 1990; Bidokhti and Tritton 1992), and by numerical simulations (Smyth and Peltier 1994; Bartello, Métais and Lesieur 1994; Cambon *et al.* 1994; Carnevale *et al.* 1997; Lollini and Cambon 1997)?

Of course the present study does not contain the answer to this question, but reviews and adds some elements on this complex topic, with a particular attention to the role of stagnation points, by investigation of the effects of the Coriolis force on the two-dimensional Taylor–Green flow, which exhibits both cyclones and anticyclones.

LINEAR MECHANISMS

Tilting vorticity

In a rotating frame, the relative motion of an incompressible fluid is governed by the Navier–Stokes and continuity equations, which may be written, in dimensionless form (Leblanc and Cambon 1997a):

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{S}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{u} = -\nabla\pi + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

where \mathbf{S} is the symmetric rate-of-strain tensor $S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ and

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} + 4\boldsymbol{\Omega}$$

is the "tilting vorticity" (Cambon *et al.* 1994), and π the modified pressure including the contribution of the centrifugal force.

The relative velocity field $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ has been non-dimensionalized by a characteristic velocity scale U , the position vector \mathbf{x} by a characteristic length-scale L . Time t and angular velocity $\boldsymbol{\Omega}$ have been non-dimensionalized by L/U , such that $|\boldsymbol{\Omega}|$ may be seen as the inverse of a *global* Rossby number. Finally, ν is the inverse of the Reynolds number.

Linear problem

In a Cartesian coordinate frame $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ rotating with angular velocity vector $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$, let $\mathbf{U}(\mathbf{x}, y, t)$ and $\Pi(\mathbf{x}, y, t)$ describe a *two-dimensional* basic flow, perturbed by a *three-dimensional* infinitesimal disturbance $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ and $\pi(\mathbf{x}, t)$. The linearized Navier–Stokes equations read

$$D_t \mathbf{u} + \mathbf{S}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{W}_t \times \mathbf{u} = -\nabla\pi + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

where $D_t = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ and now $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T)$. $\mathbf{W}_t = (\mathbf{W} + 4\boldsymbol{\Omega})\mathbf{e}_z$ is the tilting vorticity of the basic flow. No coefficient of the linear problem involves a z -dependence, therefore it is possible to seek perturbations of the following form:

$$(\mathbf{u}, \pi)(\mathbf{x}, t) \rightarrow e^{ikz}(\mathbf{u}, \pi)(x, y, t),$$

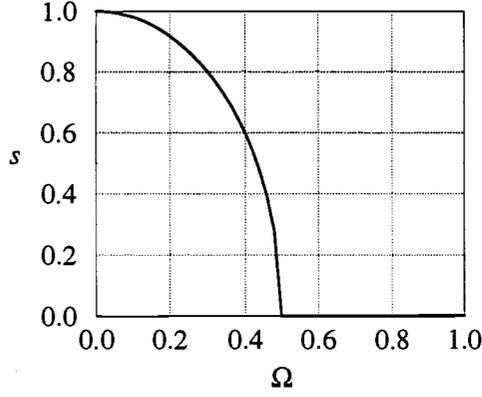


Figure 1: Growth rate s of short-wave pressureless instabilities for the hyperbolic (solid lines) and elliptical (dashed lines) stagnation points in function of the dimensionless rotation rate Ω . Square cells ($\rho = 1$): the streamlines are circular in the vortex cores.

where the spanwise wave number k is real to ensure homogeneity. The linear problem reads:

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} &= -\nabla \pi + \nu(\nabla^2 - k^2) \mathbf{v}, \\ D_t w &= -ik\pi + \nu(\nabla^2 - k^2) w, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + ikw &= 0. \end{aligned}$$

$\mathbf{v}(x, y, t)$ is the projection of $\mathbf{u}(x, y, t)$ on the (x, y) -plane, whereas $w(x, y, t)$ is its spanwise component. $\nabla(\cdot)$, $\nabla \cdot (\cdot)$ and $\nabla^2(\cdot)$ are operators in the (x, y) -plane. The 2×2 “inertial tensor” \mathbf{M} is defined by:

$$\mathbf{M} = \nabla \mathbf{U} + \mathbf{C} \quad \text{with} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega \\ 2\Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{C} is the “Coriolis tensor”, and in a curvilinear plane coordinate frame, \mathbf{M} involves an additional antisymmetric “curvature tensor” (Leblanc and Cambon 1997a, 1997b). The two eigenvalues of \mathbf{M} are solutions of the characteristic equation

$$\lambda^2 + \Phi = 0 \quad \text{with} \quad \Phi = -\frac{1}{2} \mathbf{M} : \mathbf{M} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{M}^T).$$

Φ is the second invariant of the inertial tensor \mathbf{M} , and may be expressed as:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} + \frac{1}{4} \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t. \quad (1)$$

Inviscid instabilities

For *inviscid* and *steady* basic flows, Leblanc and Cambon (1997a) pointed out that the Pedley–Bradshaw criterion (Pedley 1969), the generalized Rayleigh criterion (Kloosterziel 1990; Kloosterziel and van Heijst 1991) and the stability condition for unbounded quadratic flows (Craik 1989; Cambon *et al.* 1994) may be reduced to the following: a *sufficient* condition for instability is that

$$\Phi < 0$$

somewhere in the flow domain. In accordance with Bayly (1988), they showed that the short-wave behavior ($k \gg 1$) of the inviscid instabilities ($\nu = 0$) is given at first order by a “pressureless” analysis, governed by the simplified problem:

$$D_t \mathbf{v} + \mathbf{M} \mathbf{v} = 0.$$

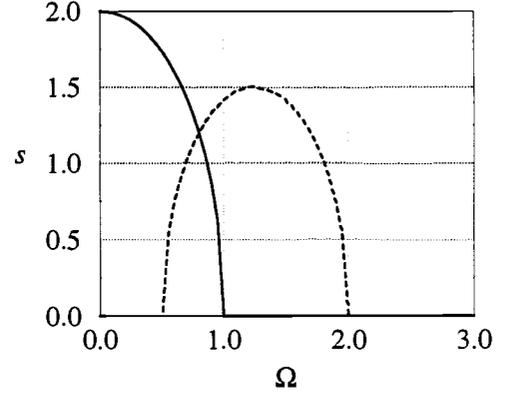


Figure 2: See previous caption. Rectangular cells ($\rho = 2$): the streamlines are elliptical in the vortex cores and the two kinds of instabilities (elliptical and hyperbolic) may compete.

Stagnation points

Using the “geometrical optics” stability theory developed recently by Lifschitz and coworkers (Lifschitz and Hameiri 1991; Lifschitz 1991, 1994; Bayly, Holm and Lifschitz 1996; Lebovitz and Lifschitz 1996), it is possible to show that the pressureless problem makes sense and that the inviscid basic flow is unstable to short-wave instabilities if

$$\Phi(\mathbf{x}_0) < 0 \quad (2)$$

on a stagnation point $\mathbf{U}(\mathbf{x}_0) = 0$ (if any), located at $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ (Leblanc 1997). $\Phi(\mathbf{x}_0)$ is given by (1). This is a *sufficient* condition for instability. For complex vortical flows such as Stuart vortices or Taylor–Green cells, instabilities from hyperbolic and/or elliptical stagnation points are deduced easily (Leblanc and Cambon 1997b).

Without any Coriolis force ($\Omega = 0$), the above condition says simply that instability occurs if the basic flow exhibits a hyperbolic stagnation point, in accordance with Lagnado, Phan-Thien and Leal (1984) and with Friedlander and Vishik (1991). This condition is then weaker than Lifschitz and Hameiri’s result (1991) stating that any steady flow with a stagnation point (elliptical, hyperbolic or pure-shear like) is unstable. However, in a rotating frame, the conclusion is not as straightforward.

For example, it is well-known that the Coriolis force may kill three-dimensional instabilities so that, at *zero absolute vorticity*

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) + 2\Omega = 0, \quad (3)$$

any vortex core with elliptical or circular streamlines located at \mathbf{x}_0 is stabilized by rotation (Craik 1989; Cambon *et al.* 1994; Bayly *et al.* 1996; Lebovitz and Lifschitz 1996; Leblanc 1997).

On the other hand, and in accordance with the rapid distortion analysis (RDT) for homogeneous turbulence (Cambon 1982; Cambon, Teissèdre and Jeandel 1984; Cambon *et al.* 1994), any stagnation point is unstable at *zero tilting vorticity*

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) + 4\Omega = 0. \quad (4)$$

NON-LINEAR AND VISCOUS EFFECTS

Taylor–Green cells

The aim of the present work is to study the effects of viscosity and non-linearity on short-wave three-dimensional perturbations, and to evaluate the validity of the stability

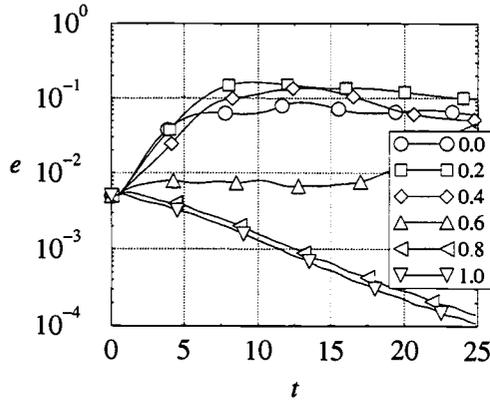


Figure 3: Energy perturbation $e(t)$ for various rotation rates Ω . Square cells ($\rho = 1$): the initial energy ratio is 2.0%.

condition (2) on “realistic” flows. Direct numerical simulations have been performed using a pseudo-spectral code. The initial conditions are three-dimensional perturbations superimposed to an initially two-dimensional basic flow: the Taylor–Green cells (in dimensionless form)

$$\Psi(x, y, t) = f(t) \sin(x) \sin(\rho y)$$

where $f(t) = \exp(-\nu(1 + \rho^2)t)$ represents the slow viscous decay of the basic flow and $\rho \geq 1$ the shape factor: if $\rho = 1$, the cells are square and the vortex cores exhibit locally circular streamlines, otherwise, the cells are rectangular and the vortex cores locally elliptical. The basic flow always exhibits hyperbolic stagnation points. In the inviscid case, the basic flow is steady.

Note that without Coriolis force, the three-dimensional instabilities of Taylor–Green rectangular cells have been computed numerically by Bayly (1989) and by Lundgren and Mansour (1996). However, their boundary conditions did not allow the hyperbolic instability to develop.

The results reported here correspond to square ($\rho = 1$) and rectangular ($\rho = 2$) cells.

Owing to the symmetries of the Taylor–Green cells, it is sufficient to consider $\Omega \geq 0$. Then a cell with positive vorticity will be called *cyclonic*, and *anticyclonic* otherwise.

Theoretical predictions

Bandwidths of inviscid instabilities ($\nu = 0$) may be deduced easily when considering the stagnation points. Thus, it may be verified that at hyperbolic stagnation points, $\Phi(\mathbf{x}_0) = 4\Omega^2 - \rho^2$, so that exponential instability to short-wave perturbations occurs when

$$0 < 2\Omega < \rho.$$

In the anticyclonic vortex cores, the circular or elliptical stagnation points are such that $\Phi(\mathbf{x}_0) = (\rho^2 + 2\Omega)(1 + 2\Omega)$, so that instability occurs when

$$1 < 2\Omega < \rho^2.$$

If $\rho = 1$ (square cells), the cores are circular and stable. If $\rho > 1$ (rectangular cells), elliptical anticyclones are destabilized by a weak rotation. Cyclones with elliptical cores are stable to such instabilities.

These unstable bandwidths are plotted on Figs. 1–2: $s = \sqrt{-\Phi}$ is the Lagrangian growth rate of the pressureless modes (Leblanc 1997). It is clear from these figures that, for some rotation rates, the instabilities may compete, as previously observed for the Stuart vortices (Leblanc and Cambon 1997b). It also clearly shows that the Coriolis

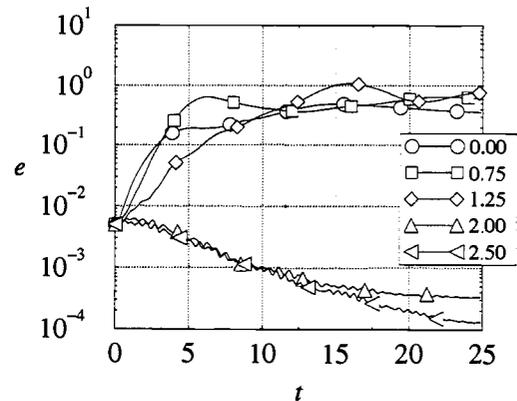


Figure 4: See previous caption. Rectangular cells ($\rho = 2$): the initial energy ratio is 0.8%.

force acts like a “tuner” for the different kinds of instabilities: owing to the magnitude of the rotation rate Ω , hyperbolic and/or elliptical instabilities are promoted.

Recall that these theoretical predictions only concern the pressureless modes (with pure spanwise and constant wave vector), and the general case of time-dependent wave vectors is much more complex and generally needs a computational approach (Pierrehumbert 1986; Bayly 1986; Craik 1989; Cambon *et al.* 1994; Bayly *et al.* 1996; Lebovitz and Lifschitz 1996).

According to the geometrical optics stability theory, these inviscid results may be extended to the viscous case (Lifschitz 1991). Indeed, on any fixed time interval, the viscous basic flow considered here converges uniformly to the inviscid flow ($\nu = 0$, $f(t) \equiv 1$) uniformly when $\nu \rightarrow 0$. So that, according to Lifschitz (1991), at sufficiently small viscosity (high Reynolds number), it is possible to construct an initial perturbation so that instability will occur according to the inviscid mechanisms. At a given Reynolds number ($1/\nu$), viscosity acts as a cut-off at high wave numbers.

The short-wave perturbation added to the basic flow at the initial time for the direct numerical simulations has a small but finite amplitude. However it may be verified that by construction, pressureless perturbations have a constant wave vector (Leblanc 1997), so that instabilities of stagnation points according to (2) will not be killed by non-linear effects (Lifschitz 1991). This will be reported in a further work.

DIRECT NUMERICAL SIMULATIONS

Pseudo-spectral code

The computations have been performed with a pseudo-spectral code written and developed initially by C. Staquet (ENS Lyon, France) for stably stratified turbulence (Staquet and Godeferd 1997). The time scheme is third order accurate and viscous terms are treated implicitly. The semi-conservative formulation allows to introduce the rotation of the frame as an additional term to the vorticity advection one.

Direct numerical simulations with Reynolds 400 ($\nu = 1/400$) and moderate resolution 64^3 are reported here. Higher resolution calculations with higher Reynolds numbers will be performed later on.

Results

Instability is evaluated by the instantaneous kinetic en-

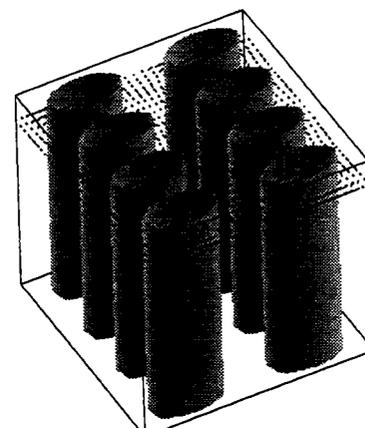
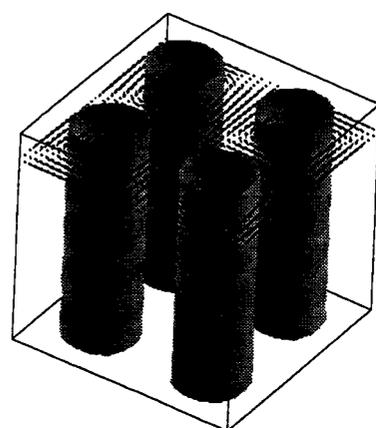
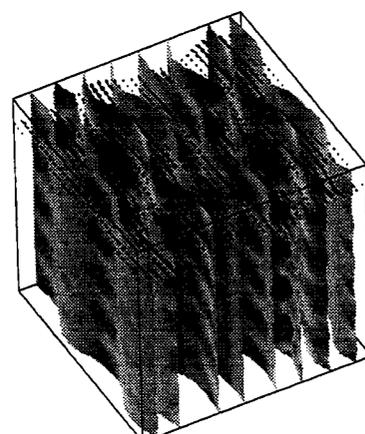
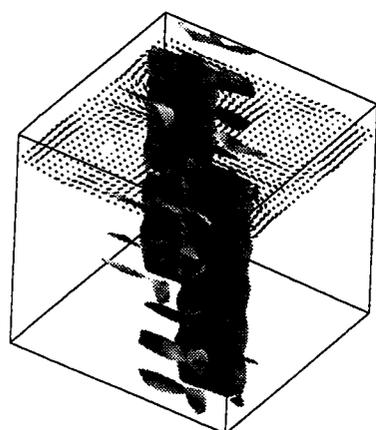
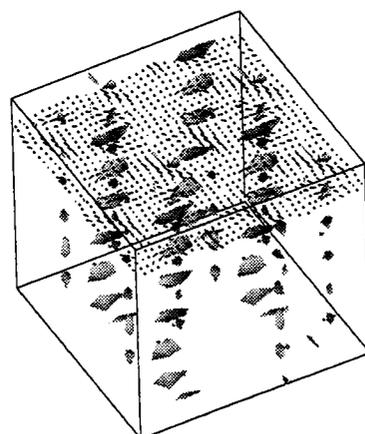
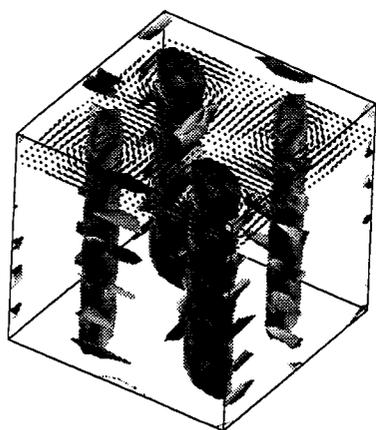


Figure 5: Square cells ($\rho = 1$). Top: $\Omega = 0.0$. Middle: $\Omega = 0.2$. Bottom: $\Omega = 1.0$.

Figure 6: Rectangular cells ($\rho = 2$). Top: $\Omega = 0.00$. Middle: $\Omega = 1.25$. Bottom: $\Omega = 2.50$.

ergy of the perturbation:

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$$

where \mathbf{u}' is the perturbed flow and \mathbf{U} is the analytical velocity field of the Taylor–Green cells. The flow is stable if $e(t)/e(0) \rightarrow 0$ when $t \rightarrow \infty$ and unstable otherwise (Joseph 1976). The initial amplitude of the perturbation is evaluated with the energy ratio $e(0)/E(0)$, $E(t)$ being the overall kinetic energy of the unperturbed basic flow.

Energy perturbation is plotted on Figs. 3–4 for various rotation rates Ω . For square cells (Fig. 3), the results are in good agreement with the theoretical predictions plotted on Fig. 1, except for $\Omega = 0.6$: the energy of the perturbation keeps a constant level and grows ultimately to destabilize the basic flow. This is maybe a consequence of the fact that the initial ratio is relatively high (2%). For destabilizing rotation rates, the initial growth is close to exponential (note the log-scale for e on Figs. 3–4), and instabilities saturate non-linearly.

A better agreement is found for rectangular cells (Fig. 4): instability occurs according to the stability conditions plotted on Fig. 1. However, when instability occurs, it is difficult to say whether it grows on elliptical or hyperbolic stagnation points (see the case $\Omega = 0.75$ for which both should happen). The case $\Omega = 2.5$ corresponds at the initial time to a zero absolute vorticity (3) in the anticyclonic elliptical vortex cores $W(\mathbf{x}_0, 0) + 2\Omega = 0$: it leads to stability, according to theoretical results.

Comments

Concerning the rectangular case ($\rho = 1$), it is known that the stability of elliptical vortex cores under the effect of rotation may be characterized by three different regimes, well described by Bayly *et al.* (1996) and by Levovitz and Lifschitz (1996). The first one corresponds to instability with respect to perturbations with pure spanwise (and constant wave vectors): they correspond to the pressureless modes which are unstable according to (2), and the unstable bandwidth is centered around the zero tilting vorticity (4). The second regime is thin stable region centered around the zero absolute vorticity (3). And the third and last regime corresponds to instability with respect to oblique (and time-dependent) wave vectors, needing a Floquet analysis, as in the non-rotating case (Pierrehumbert 1986; Bayly 1986; Craik 1989; Cambon *et al.* 1994; Bayly *et al.* 1996; Levovitz and Lifschitz 1996). Concerning the hyperbolic points, the stability with respect to general wave vectors remains an open question.

According to the present results, it seems that the choice of our initial perturbation does not excite these oblique unstable modes: for example, in the rectangular case for $\Omega = 2.5$ (Fig. 4), it is clear that anticyclones are stable because it corresponds to the zero absolute vorticity case. However, simultaneously, cyclones could be unstable to oblique wave vectors by their elliptical cores, since they do not belong to the stable regime. Then, it seems that oblique modes are not excited non-linearly, in spite of the finite (but small) amplitude of the initial perturbation.

Visualizations

Three-dimensional visualizations of the perturbed fields at the dimensionless time $t = 25$ are plotted on Figs. 5–6 for various rotation rates. Iso-surfaces of the vorticity magnitude and velocity fields in (x, y) -planes (perpendicular to Ω) are plotted.

For square cells (Fig. 5), the non-rotating case (top) shows that the hyperbolic instability after non-linear saturation does not destroy completely the initial Taylor–Green cells, which, even if perturbed, conserve their columnar

shape. The manifestation of the hyperbolic instability may be observed by the formation of “digitations” (vertical superposition of vorticity ribs aligned with the x - or the y -axis) located between the cells, according to the vortex line stretching mechanism along the principal axis of extensional rate well-known in RDT analysis, and also described by Lagnado *et al.* (1984). For moderate rotation (middle), the destabilizing Coriolis force, which acts initially on hyperbolic stagnation points, finally contaminates the whole flow to break down the anticyclones and reinforce the cyclones simultaneously, as soon observed by large eddy simulations (Cambon *et al.* 1994). A larger rotation (bottom) kills the short-wave perturbation and restores the unperturbed Taylor–Green cells.

This picture is modified for rectangular cells (Fig. 6) because of the presence of both hyperbolic and elliptical instabilities. The non-rotating case (top) shows the three-dimensional breakdown of the plane basic flow. Contrary to the square case, it seems that elliptical instability has been excited non-linearly by the hyperbolic instability, leading to a complex three-dimensional flow. For a moderate rotation (middle), elliptical anticyclones are destabilized whereas cyclones and hyperbolic stagnation points are linearly stable (see Fig. 1 for $\Omega = 1.25$). A dramatic change in the flow topology occurs: under the effect of rotation, the flow is reorganized in counter-currents with weak variability in the vertical z -direction. For a larger rotation rate (bottom) the elliptical instability is killed in anticyclones (zero absolute vorticity), and the whole flow is stable.

CONCLUSION

Direct numerical simulations of two-dimensional viscous Taylor–Green cells perturbed three-dimensionally and subjected to background rotation have been performed using a pseudo-spectral code. Comparisons with theoretical predictions from the geometrical optics stability theory for short-wave perturbations have been done, with a good agreement. The role of stagnation points (elliptical and/or hyperbolic), which may compete under the tuning effect of the Coriolis force, has been clearly shown through the computations, even at moderate Reynolds number.

The geometrical optics stability theory appears to be a very powerful tool to study the coherence of vortices in a rotating frame. Instead of “coherence” one should better say “linear stability” of vortices, because, as mentioned in Introduction, reorganization of the flow in columnar structures and transition towards two-dimensionality under the effect of rotation involve non-linear complex mechanisms, which may probably not be characterized by simple criteria based on the flow topology.

Acknowledgements: The authors are grateful to Dr. Chantal Staquet who made available her pseudo-spectral code and to Dr. Claude Cambon for fruitful discussions and friendly encouragements. Computations were carried out on Cray C98 of IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique, France). S.L. was supported by the MENESR.

REFERENCES

- Bartello, P., Métais, O. and Lesieur, M., 1994, “Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 273, pp. 1–29.
- Bayly, B.J., 1986, “Three-dimensional instability of elliptical flow,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 57, pp. 2160–2163.
- Bayly, B.J., 1988, “Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows,” *Phys. Fluids*, Vol. 31, pp. 56–64.
- Bayly, B.J., 1989, “Computations of broad band instabilities in a class of quasi-two-dimensional flows,” in *Math-*

ematical aspects of vortex dynamics (ed. R.W. Miksad et al.), American Society of Mechanical Engineers, pp. 71-77.

Bayly, B.J., Holm, D.D. and Lifschitz, A., 1996, "Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol. 354, 895-926.

Bidokhti, A.A. and Tritton, D.J., 1992, "The structure of a turbulent free shear layer in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 241, pp. 469-502.

Cambon, C., 1982, "Etude spectrale d'un champ turbulent incompressible soumis à des effets couplés de déformation et de rotation imposés extérieurement," PhD thesis, University of Lyon I, France.

Cambon, C., Benoit, J.-P., Shao, L. and Jacquin, L., 1994, "Stability analysis and large eddy simulation of rotating turbulence with organized eddies," *J. Fluid Mech.*, Vol. 278, pp. 175-200.

Cambon, C., Mansour, N.N. and Godeferd, F.S., 1997, "Energy transfer in rotating turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 337, pp. 303-332.

Cambon, C., Teissèdre, C. and Jeandel, D., 1985, "Etude d'effets couplés de déformation et de rotation sur une turbulence homogène," *J. Méc. Théo. Appl.*, Vol. 4, pp. 629-657.

Carnevale, G.F., Briscolini, M., Kloosterziel, R.C. and Vallis, G.K., 1997, "Three-dimensionally perturbed vortex tubes in a rotating flow," *J. Fluid Mech.*, in press.

Craik, A.D.D., 1989, "The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: some exact solutions," *J. Fluid Mech.*, Vol. 198, pp. 275-292.

Friedlander, S. and Vishik, M., 1991, "Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 66, pp. 2204-2206.

Hopfinger, E.J., Browand, F.K. and Gagne, Y., 1982, "Turbulence and waves in a rotating tank," *J. Fluid Mech.*, Vol. 125, pp. 505-534.

Hopfinger, E.J. and Heijst, G.J.F. van, 1993, "Vortices in rotating fluids," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 25, pp. 241-289.

Joseph, D.D., 1976, *Stability of Fluid Motions I* (2 Vols.), Springer.

Kloosterziel, R.C., 1990, "Barotropic vortices in a rotating fluid," PhD thesis, University of Utrecht, The Netherlands.

Kloosterziel, R.C. and Heijst, G.J.F. van, 1991, "An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 223, pp. 1-24.

Lagnado, R.R., Phan-Thien, N. and Leal, L.G., 1984, "The stability of two-dimensional linear flows," *Phys. Fluids*, Vol. 27 (5), pp. 1094-1101.

Leblanc, S., 1997, "Stability of stagnation points in rotating flows," *Phys. Fluids*, submitted.

Leblanc, S. and Cambon, C., 1996, "Stability of the Stuart vortices in a rotating frame," in *Advances in Turbulence VI* (ed. S. Gavrilakis, L. Machiels and P.A. Monkewitz), Kluwer, pp. 351-354.

Leblanc, S. and Cambon, C., 1997a, "On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force," *Phys. Fluids*, Vol. 9 (5), pp. 1307-1316.

Leblanc, S. and Cambon, C., 1997b, "Effects of the Coriolis force on the stability of Stuart's vortices," *J. Fluid Mech.*, submitted.

Lebovitz, N.R. and Lifschitz, A., 1996, "Short-wavelength instabilities of Riemann ellipsoids," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol. 354, 927-950.

Lifschitz, A., 1991, "Short wavelength instabilities of incompressible three-dimensional flows and generation of vorticity," *Phys. Lett. A*, Vol. 157, pp. 481-487.

Lifschitz, A., 1994, "On the stability of certain motions of an ideal incompressible fluid," *Adv. Appl. Math.*, Vol. 15, pp. 404-436.

Lifschitz, A. and Hameiri, E., 1991, "Local stability conditions in fluid dynamics," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 2644-2651.

Lollini, L. and Cambon, C., 1997, "Numerical simulations of inhomogeneous turbulence generated by an oscillating grid and subjected to solid-body rotation," in *Computation and visualization of three-dimensional vortical and turbulent flows*, in press.

Lundgren, T.S. and Mansour, N.N., 1996, "Transition to turbulence in an elliptic vortex," *J. Fluid Mech.*, Vol. 307, pp. 43-62.

Pedley, T.J., 1969, "On the stability of viscous flow in a rapidly rotating pipe," *J. Fluid Mech.*, Vol. 35, pp. 97-115.

Pierrehumbert, R.T., 1986, "Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 57, pp. 2157-2159.

Smyth, W.D. and Peltier, W.R., 1994, "Three-dimensionalization of barotropic vortices on the f -plane," *J. Fluid Mech.*, Vol. 265, pp. 25-64.

Staquet, S. and Godeferd, F.S., 1997, "Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence: Part. 1. Flow energetics," *J. Fluid Mech.*, submitted.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur C. CAMBON

et les rapports de

Monsieur A. BOTTARO

Professeur - I M F T - L M M - Université Paul Sabatier - UFR-MIG - 31062 TOULOUSE Cedex 4

et de

Monsieur J. WESFREID

Directeur de Recherche CNRS - E S P C I - 10, rue Vauquelin - 75231 PARIS Cedex 05

Monsieur LEBLANC Stéphane

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Spécialité : **Thermique et Energétique**

Fait à Ecully, le 1er décembre 1997

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur
de l'Administration de la Recherche



F. LEBOEUF

INSTABILITÉS TRIDIMENSIONNELLES DANS UN FLUIDE EN ROTATION

Une étude détaillée des effets de la force de Coriolis sur les instabilités linéaires tridimensionnelles d'un écoulement plan stationnaire est proposée. Pour des états de base à topologie simple (tourbillons circulaires ou elliptiques, écoulements cisailés ou hyperboliques), les conditions suffisantes d'instabilité existant dans la littérature peuvent être exprimées de façon unique. Ces mécanismes permettent d'appréhender les effets stabilisants ou déstabilisants de la force de Coriolis.

Pour des états de base à topologie plus complexe, comme les écoulements à lignes de courant non-parallèles présentant des zones tourbillonnaires, une certaine confusion régnait. Cependant, en utilisant la théorie de stabilité de type « optique géométrique » développée récemment par Lifschitz & Hameiri (1991), la stabilité de tout écoulement peut être aisément appréhendée. Cette méthode WKB permet de ramener le problème linéaire à un système d'équations différentielles ordinaires évoluant le long des trajectoires de l'état de base. Quand celui-ci possède des points de stagnation (ou d'arrêt), une condition suffisante d'instabilité peut être exprimée en présence de la force de Coriolis, en analogie avec certains résultats classiques de la « théorie de la distorsion rapide » (RDT).

Les tourbillons de Stuart (1967) servent de fil conducteur à l'exposé. Cette solution exacte bidimensionnelle des équations d'Euler représente un alignement de rouleaux de Kelvin-Helmholtz de cœurs elliptiques, séparés par des régions de type hyperbolique. Une analyse de stabilité basée sur les versions non-parallèles des équations d'Orr-Sommerfeld et de Squire est proposée, et la validité de la méthode d'optique géométrique est vérifiée. Les instabilités hyperbolique et elliptique entrent en compétition et les effets de la force de Coriolis peuvent être résumés par : les anticyclones forts sont instables.

MOTS-CLÉS : stabilité hydrodynamique, force de Coriolis, écoulements non-parallèles, instabilités hyperbolique et elliptique, optique géométrique, méthodes spectrales.

THREE-DIMENSIONAL INSTABILITIES IN A ROTATING FLUID

A detailed investigation of the effects of the Coriolis force on the three-dimensional linear instabilities of a steady plane flow is proposed. For basic states with simple topology (circular or elliptical vortices, shear or hyperbolic flows), the sufficient conditions for instability existing in the literature may be expressed solely. These mechanisms allow to apprehend the stabilizing or destabilizing effects of the Coriolis force.

For basic flows with more complex topology, such as flows with non-parallel streamlines and vortical regions, there was some confusion. However, by using the 'geometrical optics' stability theory developed by Lifschitz & Hameiri (1991), the stability of any flow may be easily studied. This WKB method allows to reduce the linear problem to a system of ordinary differential equations evolving along the trajectories of the basic state. When this latter exhibits stagnation points, a sufficient condition for instability may be expressed including the Coriolis force, in analogy with classical results of the 'rapid distortion theory' (RDT).

The Stuart vortices (1967) are the guideline of the present work. This exact two-dimensional solution of the Euler equations mimics a row of Kelvin-Helmholtz rolls with elliptical cores, separated by hyperbolic regions. A stability analysis based on non-parallel versions of the Orr-Sommerfeld and Squire equations is proposed, and the validity of the geometrical optics method is checked. Hyperbolic and elliptical instabilities compete and the effects of the Coriolis force may be summarized by: strong anticyclones are unstable.

KEYWORDS : hydrodynamic stability, Coriolis force, non-parallel flows, hyperbolic and elliptical instabilities, geometrical optics, spectral methods.

